

Stratégie de production

Optim

Paul ADENOT, Etienne BRODU, Maxime GAUDIN, Monica GOLUMBEANU,
Nor EL MALKI, Martin RICHARD, Yoann RODIÈRE

19 octobre 2010

Table des matières

I	Etude monocritère	5
1	Données	6
1.1	Contraintes	6
1.1.1	Modélisation sous forme matricielle	7
2	Stratégie du point de vue <i>comptable</i>	7
2.1	Modélisation	7
2.2	Stratégie adoptée	8
2.2.1	Interprétation	8
3	Stratégie du point de vue du <i>Responsable d'atelier</i>	9
3.1	Modélisation	9
3.2	Stratégie adoptée	9
3.2.1	Interprétation	9
4	Stratégie du point de vue <i>commercial</i>	10
4.1	Modélisation	10
4.2	Stratégie adoptée	10
5	Stratégie du point de vue du <i>Responsable des stocks</i>	13
5.1	Modélisation	13
5.2	Stratégie adoptée	13
5.2.1	Interprétation	13
6	Représentation graphique	14
II	Mise en place d'une stratégie multicritère	16
7	Objectifs	17
8	Recherche du point de départ	17
9	Affinement de la solution	17
10	Métriques utilisées	17
11	Utilisation	18
12	Optimisation	18
12.1	Méthodologie d'optimisation	19
12.2	Résultats	19
III	Analyse multicritère	21
13	Méthode choisie	22
14	Algorithme de la méthode	22
14.1	Changement d'échelle	22
14.2	Matrices de concordances et de discordances	22
14.3	Graphe de surclassement	22

15 Mise en œuvre de la méthode	23
16 Solution proposée	23
16.1 Sans pondération	23
16.2 Avec pondération	24
17 Conclusion	25
 IV Annexe	 26
18 Code source	27
18.1 Mise en place des contraintes	27
18.2 Stratégie comptable	28
18.3 Stratégie atelier	28
18.4 Stratégie commerciale	29
18.5 Stratégie stock	29
18.6 Optimisation multicritère	30
18.7 Électre III	32

Résumé

L'objet de ce rapport est de présenter une solution capable de trouver une stratégie de production, menant à un contentement optimal des différents acteurs :

- Le comptable
- Le responsable des ateliers
- Le responsable des stocks
- Le responsable commercial

La démarche sera quant à elle incrémentale puisque nous fournirons dans un premier temps des optimums très locaux, respectant un nombre limité de contraintes et de critères, puis nous combinerons ces différents résultats afin de converger vers une solution prenant en compte l'intérêt de chacun.

Première partie

Etude monocritère

1 Données

Soient :

- **T** la matrice des temps unitaires d'usinage d'un produit sur une machine (minutes) (*C.f. Table 1*).
- **Q** la matrice de quantité de matières premières par produit (*C.f. Table 2*).
- **S** la matrice des quantité maximum de matières premières (*C.f. Table 3*).
- **V** la matrice des prix de vente des produits finis (*C.f. Table 4*)
- **A** la matrice des prix d'achat des matières premières.
- **C** la matrice des coûts horaires des machines (*C.f. Table 5*).

1.1 Contraintes

Considérons :

- 6 produits identifiés chacun par une lettre $i \in A, B, C, D, E, F$
- 7 machines identifiée chacune par un nombre $j \in 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7$
- 3 matières premières identifiée chacune par un nombre $k \in 1, 2, 3$
- n , vecteur colonne du nombre d'unités fabriquées pour chaque produit

L'ensemble de la chaine de production est régie par les contraintes suivantes :

- **Le nombre de produits usinés de type i** : Il doit être non nul

$$n_i \geq 0, \forall i \in A, B, C, D, E, F \quad (1)$$

- **Le temps d'occupation de chaque machine i** : Il doit être inférieur au temps de travail

$$\sum_{j=A}^F T_{j,i} \times n_j \leq 2 \times 8 \times 60 \times 5 = 4800, \forall i \in 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 \quad (2)$$

soit un temps de travail en deux huit, 5 jours par semaine.

- **L'utilisation de chaque matière première i** : Elle doit être inférieure au stock

$$\sum_{j=A}^F Q_{i,j} \times n_j \leq S_i, \forall i \in 1, 2, 3 \quad (3)$$

coût variable de production.

Il est défini par la formule suivante :

$$CV(i) = n_i \times \left(\sum_{j=1}^7 T_{i,j} \times \frac{C_{i,j}}{60} + \sum_{k=1}^3 A_k \times Q_{k,i} \right)$$

Le chiffre d'affaire par produit est :

$$CA(i) = n_i \times V_i$$

Par conséquent le bénéfice par produit se calcule de la manière suivante :

$$\begin{aligned} B(i) &= CA(i) - CV(i) \\ &= n_i \times \left(V_i - \sum_{j=1}^7 T_{i,j} \times \frac{C_{i,j}}{60} + \sum_{k=1}^3 A_k \times Q_{k,i} \right) \end{aligned}$$

La matrice permettant de calculer, à partir du vecteur colonne n du nombre de produits sortis de l'usine, le bénéfice d'*Optim* est donc la suivante :

$$\begin{aligned} M_B &= \left(V - \left(\left(T \times C^t \times \frac{1}{60} \right)^t + (A \times Q) \right) \right) \\ &\simeq \begin{pmatrix} 6.0667 & 11.9833 & 12.4333 & 9.5333 & 31.6500 & 27.9000 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Remarquons qu'elle donne explicitement le bénéfice unitaire pour chaque produit. instinctivement, le produit E est le plus intéressant.

Nous chercherons à maximiser la fonction linéaire correspondant à cette matrice, donc (pour prendre une forme plus standard) à minimiser son opposé.

2.2 Stratégie adoptée

En utilisant les outils Matlab, nous obtenons le résultat suivant :

```
1 N = linprog(Units, InfEqConstraints, InfEqValues);
```

$$n_{optimal} = \begin{pmatrix} 0.0000 \\ 20.4082 \\ 0.0000 \\ 0.0000 \\ 242.5000 \\ 94.1837 \end{pmatrix}$$

Du point de vue strictement comptable, le bénéfice réalisable est 357.0919 ₯.

2.2.1 Interprétation

- Les produits (A), (C), (D) doivent être abandonnés.
- Le produit (E) doit être « surproduit » (en 242,5 exemplaires), tout comme le produit (F), mais dans une moindre mesure.

Ce résultat était (en partie) prévisible à partir de la matrice M_B , puisque le produit E est le plus rentable. Il faudra donc que l'entreprise **Optim**, pour optimiser le bénéfice, en produise le plus possible tout en utilisant intelligemment les matières premières et ressources humaines restantes.

3 Stratégie du point de vue du *Responsable d'atelier*

Le responsable d'atelier cherche à maximiser le nombre d'unités (toutes catégories confondues) produites sous les contraintes définies précédemment.

Autrement dit, seul la quantité de matières premières disponibles et le temps maximum de travail limitera la production.

Il n'intervient donc pour le moment aucune notion de bénéfice.

3.1 Modélisation

Soit N le nombre total de produits fabriqués. Trivialement, c'est la somme du nombre d'unités (A), (B), (C), (D), (E), et (F) produites :

$$N = \sum_{i=A}^F n_i \quad (5)$$

Par conséquent la matrice suivante représente la somme des différents produits :

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

La matrice des contraintes quant à elle, n'est pas modifiée. En effet, le responsable d'atelier d'**Optim** n'ajoute aucune contrainte à la production.

3.2 Stratégie adoptée

Instinctivement, il est évident qu'il faudra fabriquer au maximum l'unité consommant le moins de « temps machine » et de matières premières. On peut donc penser que (E) et (F) seront les produits les plus fabriqués.

En pratique, on obtient les résultats suivants :

```
1 N = linprog(Units, InfEqConstraints, InfEqValues);
```

$$M = \begin{pmatrix} 0 \\ 56.732 \\ 38.6928 \\ 0 \\ 182.4608 \\ 98.9216 \end{pmatrix}$$

On peut donc, au maximum, fabriquer 376.8072 unités, tous produits confondus.

3.2.1 Interprétation

Encore une fois :

- Les produits (A) et (D) doivent être abandonnés.
- Le produit (E) doit être « surproduit » (en 242,5 exemplaires), tout comme le produit (F), mais dans une moindre mesure.

Ceci confirme bien les résultats attendus, c'est à dire qu'il faut donner la priorité aux produits consommant le moins de ressources.

On remarque cependant qu'il est préférable de ne pas abandonner (C) cette fois-ci.

4 Stratégie du point de vue *commercial*

Le responsable commercial cherche à équilibrer le nombre d'unités de A, B, C (famille 1) et D, E, F (famille 2) afin que ces deux familles contiennent le même nombre d'unités (à ϵ unité(s) près).

En prenant en compte les contraintes définies plus haut et y en ajoutant une nouvelle **contrainte d'équilibre** entre les deux familles de produits, il apparaît que la meilleure solution serait de ne rien produire.

Encore une fois, cette solution n'est pas avantageuse.

Introduisons par conséquent une autre contrainte : nous allons essayer d'équilibrer les familles de produits tout en conservant un bénéfice maximal.

4.1 Modélisation

Soient :

- n_A le nombre de produits A usinés.
- n_B le nombre de produits B usinés.
- n_C le nombre de produits C usinés.
- n_D le nombre de produits D usinés.
- n_E le nombre de produits E usinés.
- n_F le nombre de produits F usinés.

Pour étudier l'équilibre entre les deux familles des produits on définira une fonction qui sera égale à la différence entre les quantités des produits provenant des deux familles, soit :

$$F = (n_A + n_B + n_C) - (n_D + n_E + n_F)$$

La contrainte sur l'équilibre va se traduire par l'essai de minimiser la fonction F , c'est à dire :

$$\begin{aligned} |F| &\leq \epsilon \\ \Leftrightarrow -\epsilon \leq F &\leq \epsilon \\ \Leftrightarrow -\epsilon \leq (n_A + n_B + n_C) - (n_D + n_E + n_F) &\leq \epsilon \\ &\text{Avec } \epsilon \rightarrow 0. \end{aligned}$$

4.2 Stratégie adoptée

Comme indiqué plus haut nous allons essayer de trouver le nombre d'unités à produire de telle manière que :

1. Les famille 1 et 2 soient équilibrée
2. Le bénéfice soit maximum

Pour cela :

- Nous fixons un certain bénéfice à atteindre
- Pour le bénéfice choisi, nous essayons de minimiser F .

Pour rester toujours dans une programmation monocritère nous répèterons cette démarche un certain nombre de fois (pour des pourcentages différentes du bénéfice).

Nous pourrons donc tracer une courbe représentant la valeur de F en fonction du bénéfice atteint.

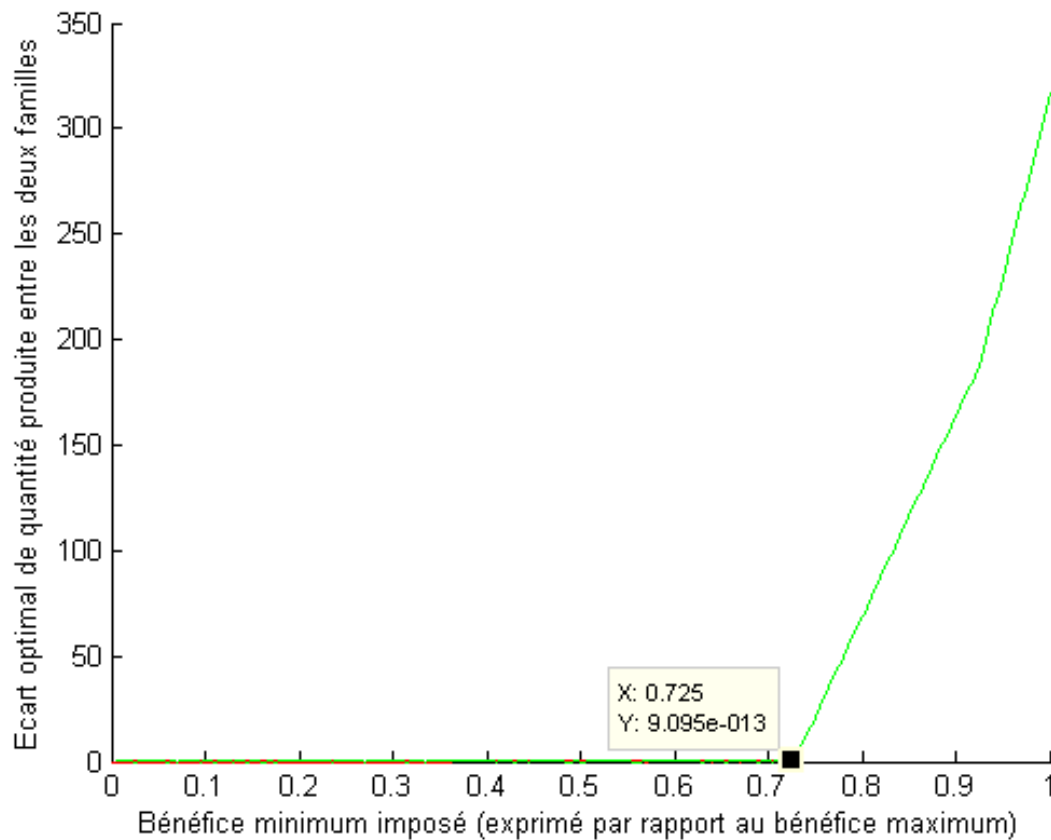
L'interprétation de cette courbe nous permettra de trouver le meilleur compromis.

Pour s'approcher de l'équilibre nous utilisons la fonction linprog de Matlab de la manière suivante :

```
1 linprog(F, [infEqConstraints;-Earnings], [infEqValues;-b]);
```

F correspond à la fonction qu'on essaie de minimiser. `[infEqConstraints;-Earnings]` et `[infEqValues;-b]` sont les matrices qui modelisent la prise en compte de toutes les contraintes générales auxquelles on a ajouté la contrainte de s'approcher d'un certain benefice. Pour obtenir une valeur de F qui s'approche de 0 nous effectuerons deux appels de `linprog` : un en utilisant la fonction F et un en utilisant la fonction -F. Les contraintes restent les mêmes pour les deux appels.

Le graphe suivant est obtenu :



La courbe verte correspond aux valeurs minimales de F, la courbe rouge les valeurs minimales de -F.

On observe dès le début qu'on peut approcher les deux courbes de 0 différentes valeurs du benefice. Autrement dit, il est possible d'avoir un équilibre des benefices respectifs. Au bout d'un moment, les deux courbes commencent à s'écarter et l'équilibre est rompu.

C'est au point de rupture qu'est le meilleur rapport entre les deux contraintes (l'équilibre et le benefice obtenu).

Le meilleur compromis est donc obtenu autour de 72.5% du benefice maximum.

L'écart entre les deux familles de produits est : 9.095×10^{-13} ce qui est tres proche de 0 et donc en conformité avec notre objectif.

Les quantités de production pour chaque produit sont les suivantes :

- $n_A = 0,8888$
- $n_B = 114,9102$

- $n_C = 60,2321$
- $n_D = 0,2537$
- $n_E = 148,7430$
- $n_F = 27,0343$

Le benefice obtenu est de 7646,575 unités monétaires.

5 Stratégie du point de vue du *Responsable des stocks*

Le responsable des stocks cherche à minimiser la contenance du stock, i.e. le nombre de produits entreposés ajouté à la quantité de matières premières. Aucune contrainte particulière n'est ajoutée mais la recherche de l'optimum se fait sous les contraintes définies précédemment.

5.1 Modélisation

Soit $Stock(n_i)$ le nombre d'unités de stock nécessaires pour stocker les produits fabriqués et les matières premières nécessaires.

Cette fonction est évidemment la somme des produits fabriqués et de la quantité de matières premières nécessaire à leur fabrication.

Supposons qu'un produit fabriqué correspond à une unité de stock.

Ainsi, soient :

- n_i la quantité de produits usinés (pour chaque produit i)
- $Q_{j,i}$ la quantité de matière première par produit pour chaque produit i et chaque matière première j .

Alors :

$$Stock(n) = \sum_i (n_i + n_i \times \sum_j Q_{j,i}) \quad (6)$$

La représentation matricielle de cette fonction sera alors :

$$M_S = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} + \left(\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \times Q \right) \quad (7)$$

5.2 Stratégie adoptée

Un résultat trivial est de ne fabriquer aucun produit :

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (8)$$

En effet, en l'absence de production, aucun stock n'est nécessaire. Ce résultat n'est pas satisfaisant.

Nous allons donc nous intéresser à un second critère : **les bénéfices de l'entreprise**.

Pour ce faire, nous allons nous utiliser les résultats obtenus en imposant un minimum de bénéfices.

En réalisant les calculs sur plusieurs échelons, nous obtenons un résultat linéaire par morceaux. Le raisonnement adopté est similaire à celui développé dans la section 4.

5.2.1 Interprétation

De nombreuses valeurs sont équivalentes mathématiquement parlant et ne peuvent pas vraiment être départagées. Les choix possibles se situent dans la deuxième partie de la courbe :

- En dessous, les bénéfices sont trop bas.
- Au dessus, les besoins de stockage augmentent beaucoup plus que les bénéfices. Nous perdons alors de vue notre objectif initial, i.e. avoir le moins de stock possible.

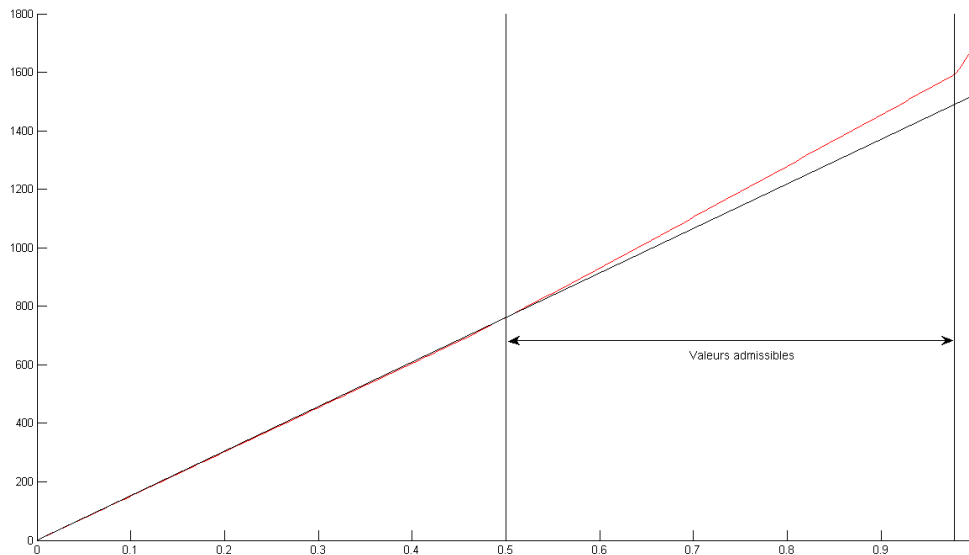


FIGURE 1 – Graphe de l'évolution des stocks en fonction du bénéfice

Nous obtenons donc une valeur comprise entre 50% et 98% de bénéfices. Pour 75% du bénéfice maximum, nous obtenons le nombre de produits suivants :

$$\begin{pmatrix} 1,91903382074088 \times 10^{-10} \\ 2,63753463514149 \times 10^{-10} \\ 1,89174897968769 \times 10^{-10} \\ 1,23691279441118 \times 10^{-10} \\ 124,634235411818 \\ 142,146305832495 \end{pmatrix} \quad (9)$$

Soit une quantité d'unités en stock de 1191,75640039347.

Cette étude de cas nous rappelle les limites d'une stratégie basée sur l'analyse d'un seul critère. En effet, en l'absence de contraintes assez fortes, le problème devient « indécidable » mathématiquement.

C'est pourquoi nous allons combiner les 4 études réalisées pour affiner nos stratégies et obtenir une solution :

- Mathématiquement claire
- Respectant un ensemble de contraintes plus grand, et par conséquent qui se concentre plus sur les contraintes propres à l'entreprise **Optim**.

6 Représentation graphique

Les graphiques ci-dessous représentent les résultats obtenus dans cette partie.

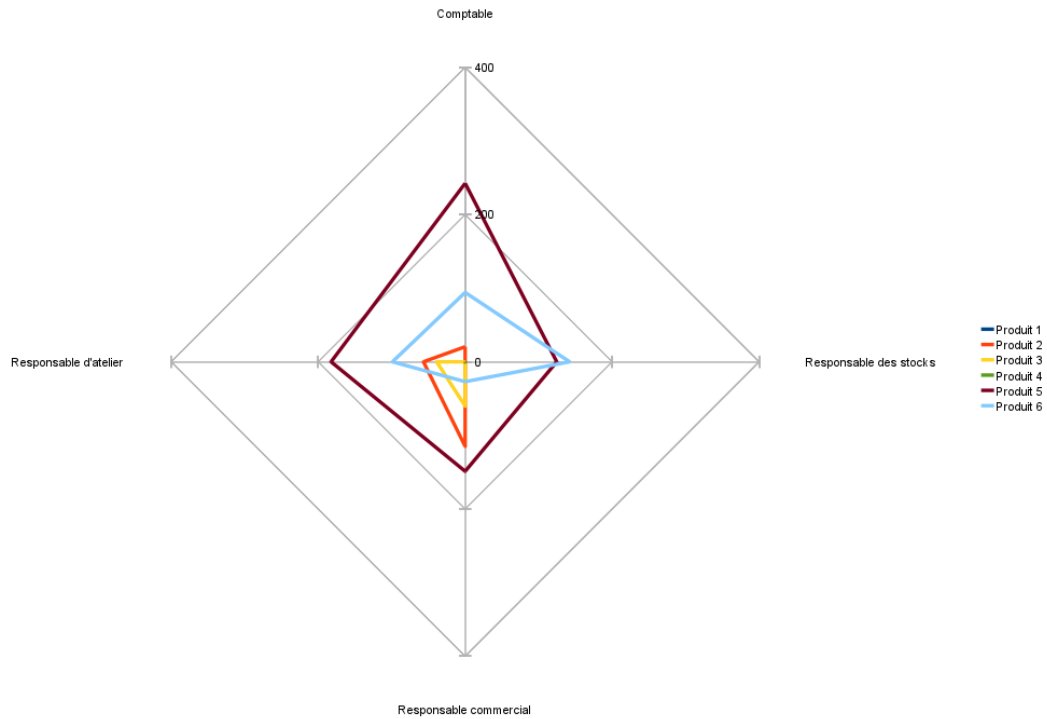


FIGURE 2 – Graphe radar représentant la quantité à produire par produit et par critère

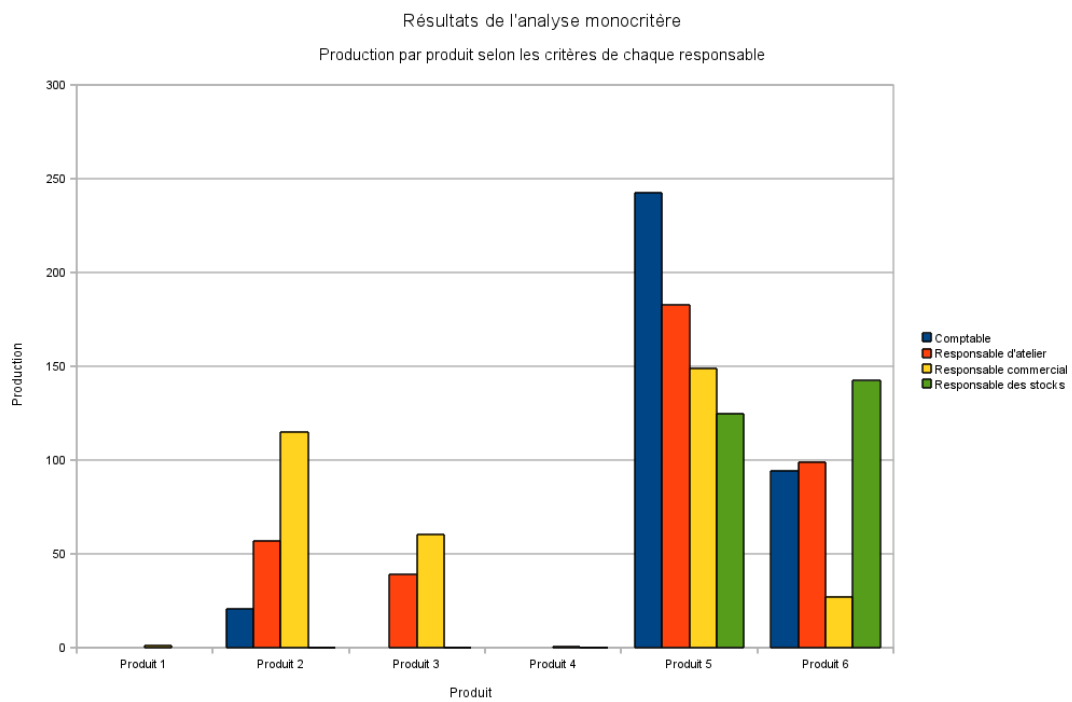


FIGURE 3 – Diagramme représentant la quantité à produire par produit et par critère

Deuxième partie

Mise en place d'une stratégie multicritère

7 Objectifs

L'objectif est de trouver une solution de compromis entre les différents responsables. Pour trouver une telle solution nous serons amenés à utiliser la programmation multicritère (PLM).

Dans la première partie du rapport, nous avons trouvé un optimum pour chaque responsable indépendamment, ce qui nous conduit à un point de mire. Dans un monde parfait, ce point de mire respecterait les contraintes de chaque responsable. Nous devons donc voir si tel est le cas.

8 Recherche du point de départ

Si le point de mire est assez proche de l'ensemble des solutions acceptables, nous choisirons une solution proche de celle d'un responsable.

Sinon, nous allons calculer la satisfaction de chaque objectif, sachant qu'une solution a été retenue. Nous devons alors définir des métriques, correspondant à cette satisfaction. Par exemple, pour le comptable, cette satisfaction sera exprimée par le ratio du bénéfice obtenue dans un solution par rapport au bénéfice maximal. Ensuite, nous choisirons comme point de départ la solution qui offre le plus de satisfaction à tout le monde, par exemple en utilisant une moyenne pondérée, dont la pondération sera basée sur *l'importance* de chaque critère.

9 Affinement de la solution

Les solutions trouvées précédemment peuvent certainement être optimisées. Il peut alors être intéressant de « perdre » dans un critère, si cela nous fait « gagner » beaucoup dans un autre critère, d'autant plus si ce second critère est jugé plus *intéressant* que le premier.

10 Métriques utilisées

Cette section décrit les métriques utilisées pour caractériser une solution, du point de vue d'un cadre de l'entreprise. Les solutions pourront ainsi être comparées entre elles.

Comptable : La métrique utilisée sera le pourcentage du bénéfice par rapport au bénéfice maximum :

$$M_{Comptable} = \frac{B_S}{B_{max}} \times 100$$

Responsable d'atelier La métrique utilisée sera le pourcentage du nombre de produits fabriqués par rapport au nombre maximum :

$$M_{Atelier} = \frac{N_S}{N_{max}} \times 100$$

Responsable des stocks Pour élaborer la métrique de satisfaction pour le responsable des stocks nous opterons pour la fonction suivante, qui correspond à ce qui était précédemment annoncé dans la partie 1 (page 13).

Cette fonction est décrite par l'expression suivante :

$$M_{Stocks} = \begin{cases} \frac{x}{1192} & \text{si } x \in [0; 1192] \\ x = 1 & \text{si } x \in [1192; 1559] \\ \frac{-x}{1192} + 1 + \frac{1559}{1192} & \text{si } x \in [1559; 1691] \end{cases}$$

Cette fonction pourrait être justifiée par le fait que plus on s'éloigne des valeurs admises moins le responsable des stocks est satisfait. Les valeurs numériques présentes dans la formules viennent des résultats de la section 5 et sont visibles dans le graphique ci-dessous :

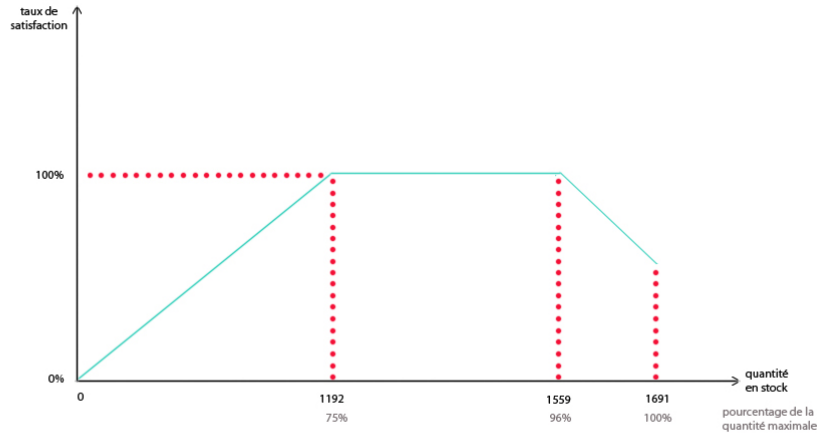


FIGURE 4 – Représentation graphique de la métrique pour le responsable des stocks.

Responsable commercial La métrique utilisée sera l'écart par rapport à un équilibre parfait. Si autant de produit de la famille de produit 1 (comprenant les produits A, B et C) que de la famille 2 (comprenant les produits D, E et F), la métrique sera à 100%. Si une seule famille de produit est fabriquée, la métrique devra valoir zéro.

Si F_1 (respectivement F_2) est le nombre de produit de la famille 1 (respectivement famille 2), la métrique sera :

$$M_{Commercial} = \left(1 - \frac{|F_1 - F_2|}{F_1 + F_2}\right) \times 100$$

11 Utilisation

Les résultats seront placés dans un tableau de ce type, qui permettra d'un seul coup d'œil de voir la meilleur des solutions. Ce tableau a été créé en calculant les métrique pour chaque solution des quatre responsables.

La case en rouge se lira par exemple :

« En suivant la volonté du responsable d'atelier, le comptable aura une satisfaction de 96.5498% »

	Comptable	Atelier	Stock	Commercial
Comptable	100.000%	94.7678%	88.9030%	11.4302%
Atelier	96.5498%	100.000%	77.7846%	50.6491%
Stock	74.1546%	70.8003%	99.9796%	0.00000%
Commercial	81.8653%	93.4330%	80.2626%	100.000%

On voit déjà que la solution du commercial contente, dans une certaine mesure, l'ensemble des responsables de l'entreprise, toutes les métriques sont supérieures à 80%.

12 Optimisation

Nous allons dans cette partie essayer de modifier les solutions précédentes pour trouver une solution qui tente de maximiser la satisfaction des différents responsables.

Le but premier d'une entreprise étant de faire du profit, et les meilleur manière de faire du profit étant souvent maximiser le bénéfice et d'avoir une bonne politique commerciale, nous allons donc favoriser ces critères (bénéfice et équilibrage des solutions), en leur appliquant un léger coefficient.

Nous allons par la même regarder l'évolution des autres critères lorsque ce coefficient évolue, c'est à dire recalculer les différentes métriques.

Il apparaît plausible qu'avoir un *stock non optimal* puisse être acceptable si c'est pour avoir un bénéfice plus important, dans une certaine mesure. Une dégradation de la satisfaction du responsable des stock sera donc moins pénalisante, en terme de qualité de solution, qu'une baisse dans la satisfaction du commercial (produire sans vendre ne sert pas à grand chose, en terme de rentabilité).

De la même manière, produire un nombre de produit important peut être intéressant, mais cela ne doit pas aller à l'encontre du profit et de la mauvaise répartition de la production.

Nous pouvons donc donner des coefficients aux critères :

Responsable	Comptable	Atelier	Stocks	Commercial
Coefficient	1.2	0.8	0.8	1.2

TABLE 1 – Coefficients associés aux critères des différents responsables

Il faut cependant garder à l'esprit que ces coefficient devraient être ajustés par une plus grande étude du cas spécifique d'**Optim**, les informations dont nous disposons étant encore trop faibles pour effectuer une pondération efficace.

12.1 Méthodologie d'optimisation

Le procédé est itératif, *i.e.* que nous allons, à chaque exécution de l'algorithme, nous rapproche, de la solution, et tentera de contenter au mieux le comptable et le commercial (comme expliqué ci-dessus).

Il s'agira donc de **partir de la solution du responsable commercial** (celle qui dispose des taux de satisfaction les plus haut), en essayant d'améliorer la métrique caractérisant la solution du responsable comptable, tout en restant dans le domaines des solutions possibles au vu des contraintes. Il faudra toutefois tâcher de ne pas trop dégrader les autres critères.

Une solution serait de *sacrifier* un peu d'équilibre dans les familles de produit pour fabriquer des produits plus rentables. D'après la partie 1, section 2, le produit qu'il faut fabriquer plus celui de type *E*.

12.2 Résultats

Etonnament, après le déroulement de l'algorithme, les résultats n'ont pas apporté autant d'amélioration que prévu, du fait de la faible latitude de changement des solutions, et parce que les produits en grande quantité dans la famille 1 ne sont pas fait à partir des même matériaux que le produit à produire dans la famille 2 (respectivement le produit *B* et le produit *E*). Nous avons donc une solution *a priori* déjà proche d'un résultat optimal.

L'algorithme, assez naïf, essaie d'enlever un produit de la famille 1 pour essayer de rajouter un produit de type *E*.

Ci-dessous sont présentées les valeurs de satisfaction des quatre responsables , en enlevant du produit de type C , et en rajoutant un produit de type E .

Trois itérations sont possibles :

Itération	Comptable	Atelier	Stocks	Commercial
1	81.9901	93.4330	30.6925	99.4319
2	82.1148	93.4330	30.7764	98.8639
3	82.2396	93.4330	30.8603	98.2958

TABLE 2 – Résultats de l'exécution d'un algorithme d'optimisation

Nous choisirons donc la solution 3, qui est la plus équilibrée, à partir de la solution de départ que nous avons choisis.

Troisième partie

Analyse multicritère

Des deux parties précédentes, émergent 6 propositions de gestion de l'atelier. Basons nous sur les données fournies par l'entreprise **Optim** pour établir la meilleure solution parmi les 8 stratégies et en fonction des 4 critères présélectionnées.

Ces 4 critères sont :

- g_1 : Les bénéfice
- g_2 : Le critère commercial
- g_3 : L'équilibre de la production
- g_4 : La taille du stock

13 Méthode choisie

La méthode de résolution choisie sera Électre III car elle donne plus de résultat qu'Électre I et Électre II.

14 Algorithme de la méthode

La résolution des méthodes d'Électre se base sur l'utilisation de deux matrices :

- la matrice de concordance
- la matrice de discordance.

Ces deux matrices contiennent des valeurs qui, respectivement, confirme ou infirme la supériorité d'une solution sur une autre.

14.1 Changement d'échelle

Avant de calculer ces matrices, les notes données dans la matrice de jugement peuvent varier suivant les coefficients attribués aux critères. Ainsi, si un critère a un coefficient 2 fois supérieur à un autre, les notes du coefficient le plus important seront réparties sur une échelle plus importante que celles du coefficient le moins important.

14.2 Matrices de concordances et de discordances

Les matrices de concordance et de discordance peuvent être calculées à partir de cette nouvelle matrice de jugement.

Soit n , le nombre de solutions, alors les matrices de discordances et de concordances sont carrées de côté n .

Soit la i ème et la j ème solution, représentées par la i ème ligne et la j ème colonne.

En chaque case $\{i, j\}$ de la matrice de concordance, on trouve la valeur confirmant la supériorité de la solution i sur la solution j . Cette valeur est calculée comme la somme des poids des critères dans lesquels i domine j , divisée par la somme des poids de tous les critères.

À l'inverse, dans la matrice de discordance, les valeurs infirment la supériorité de i sur j . Elles sont calculées comme le plus grand écart positif entre les notes de j et les notes de i sur un critère donné.

14.3 Graphe de surclassement

À partir de ces deux matrices et en fonction des seuils de concordances et de discordance, on peut établir le graphe de surclassement. Pour qu'une solution i soit supérieure à une solution

j , la concordance de la supériorité de i sur j doit être supérieur au seuil de concordance, et la discordance inférieur ou égal au seuil de discordance.

Le graphe de surclassement permet de visualiser les supériorités entres les solutions. On peut ainsi aisément se faire une idée du classement finale.

15 Mise en œuvre de la méthode

L'algorithme suivant est une implémentation de la méthode Électre III. À partir de la matrice des jugements, il remet à l'échelle les notes des critères en fonction des poids.

```
1 for i = 1:n
2     J(:,i) = ( (J(:,i) - (e/2)) * (w(i)/max(w)) ) + (e/2);
3 end;
```

Puis il calcule les matrices de concordance et de discordance.

```
1 for i = 1:n
2     for j = 1:n
3         if (i ~= j)
4             C(i,j) = sum( (J(i,:) >= J(j,:)) .* w ) / sum(w);
5             D(i,j) = max(max(J(j,:) - J(i,:), 0), 0) / e;
6         end;
7     end;
8 end;
```

Pour finir, il établit la matrice des surclassement en fonction de ces deux dernières matrices.

```
1 S = ((C > s) .* (D <= v));
```

Un graphe est ensuite généré à partir de cette matrice, pour faciliter la lecture du résultat. La meilleur solution apparait alors clairement en tête du graphe, et grâce à la méthode du classement et du classement inverse, on peut obtenir l'ordre des solutions.

16 Solution proposée

Dans un premier temps, sans pondérer les critères, on trie les solutions pour en tirer la plus avantageuse. Dans un second temps, on prendras en compte les poids des critères apporté par les résultats de la seconde partie.

16.1 Sans pondération

La matrice des jugements est la suivante :

	g_1	g_2	g_3	g_4
a	6	5	5	5
b	5	2	5	6
c	3	4	6	3
d	3	7	5	4
e	5	4	3	7
f	2	5	6	3
g	5	4	3	7
h	3	5	6	4

Après quelques tâtonnement, on utilise les seuils de concordance 0,7 et 0,9, et le seuil de discordance 0,4 pour générer un graphe de surclassement le plus clair possible, sans liens superflus.

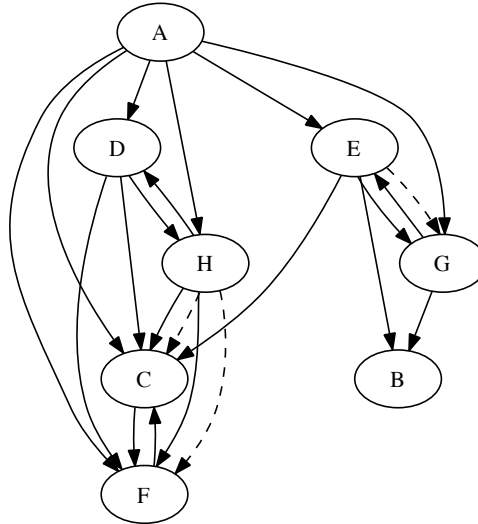


FIGURE 5 – Graphe des surclassement sans prise en compte des poids de chaque critère

Sur le graphe généré, on voit clairement que la la meilleur solution serait la solution A car c'est la seule qui n'est dominé par aucune autre. On voit également que certaines solutions sont équivalentes puisqu'elles se dominent entres elles. Les couples de solutions $\{D, H\}$, $\{E, G\}$ et $\{C, F\}$ sont des couples de solutions équivalentes. Les solutions F, C et B sont dominés, elles sont donc les moins intéressantes.

Hormis la solution A qui se démarque, il sera difficile d'établir un classement très juste car beaucoup de solutions sont équivalentes entre elles.

16.2 Avec pondération

Reprendrons les pondérations de la partie 2 :

- g_1 : 1.2
- g_2 : 1.2
- g_3 : 0.8
- g_4 : 0.8

La matrice des jugement après mise à l'échelle des notes devient donc :

	g_1	g_2	g_3	g_4
a	6	5	5	5
b	5	2	5.6	6.3
c	3	4	6.3	3.6
d	3	7	5	4.3
e	5	4	3.6	7.6
f	2	5	6.3	3.6
g	5	4	3	7.6
h	3	5	6.3	4.3

Une fois les pondération appliquées, le graphe de surclassement suivant apparaît :

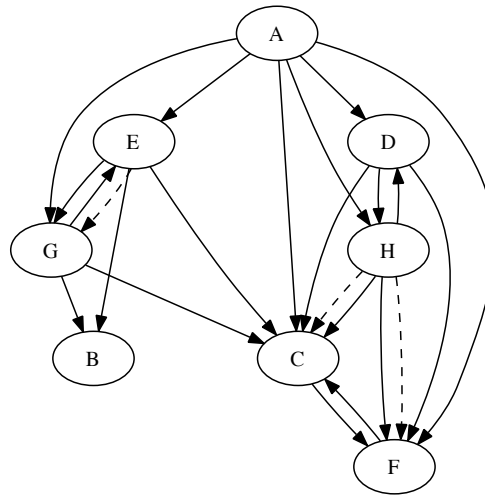


FIGURE 6 – Graphe des surclassement avec prise en compte des poids de chaque critère

Comme précédemment, la solution A est la meilleure. Les autres surclassement sont restés inchangés sauf un : celui de G sur C.

Par conséquent l'application de la pondération n'a pas modifié radicalement les résultats trouvés plus haut, ce qui, n'est pas une surprise car ces poids sont peu différents de 1.0. De plus, n'ayant pas pu nous mettre d'accord avec la société **Optim** pour décider ensemble de la nouvelle pondération, des résultats trop différents n'auraient pas eu vraiment de valeur.

17 Conclusion

La méthode d'Électre III permet de classer un grand nombre de solution suivant plusieurs critères de manière fiable. En pratique elle permet effectivement de tirer des groupes de solutions optimaux d'un ensemble vaste. Nous avons en effet réussi à isoler une solution optimale parmi les 8 proposés, mais il a été plus difficile d'établir un classement entre toutes les solutions.

Quatrième partie

Annexe

18 Code source

18.1 Mise en place des contraintes

```

1  %-----
2  % RAW DATA
3  %-----
4
5  % Indices - product mapping
6  a = 1;
7  b = 2;
8  c = 3;
9  d = 4;
10 e = 5;
11 f = 6;
12
13 Products = [a, b, c, d, e, f];
14
15 % Manufacturing time per machine, for each product. (Table 1)
16 % Usage : T(a,2), T(d,7), ...
17 T = [
18     8, 0, 8, 2, 5, 5, 5;
19     15, 1, 1, 10, 0, 5, 3;
20     0, 2, 11, 5, 0, 3, 5;
21     5, 15, 0, 4, 0, 12, 8;
22     0, 7, 10, 13, 10, 8, 0;
23     10, 12, 25, 7, 25, 0, 0
24 ];
25
26 % Quantity of raw material needed for each product
27 % Usage : Q(1,a), Q(3,f), ...
28 Q = [
29     1, 2, 1, 5, 0, 2;
30     2, 2, 1, 0, 2, 1;
31     1, 0, 3, 2, 2, 0
32 ];
33
34 % Maximum stock of raw material
35 % Usage : S(1), S(2), ...
36 S = [
37     350, 620, 485
38 ];
39
40 % Sale price of each product
41 % Usage : V(a), V(f), ...
42 V = [
43     20, 27, 26, 30, 45, 40
44 ];
45
46 % Cost of each raw material
47 % Usage : A(1), A(2), ...
48 A = [
49     3, 4, 2
50 ];
51
52 % TODO
53 % Usage : C(1), C(4), ...
54 C = [
55     2, 2, 1, 1, 2, 3, 1
56 ];
57
58 % TODO
59 % Usage : J(a,2)
60 J = [
61     6, 5, 5, 5;
62     5, 2, 6, 7;
63     3, 4, 7, 3;
64     3, 7, 5, 4;
65     5, 4, 3, 9;
66     2, 5, 7, 3;
67     5, 4, 2, 9;
68     3, 5, 7, 4
69 ];
70
71 % Weight of each factor.

```

```

72 % Usage : P(1), P(2), ...
73 P = [
74     1.2, 1.2, 0.8, 0.8
75 ];
76
77 %-----
78 % BASE CONSTRAINTS
79 %-----
80
81 InfEqConstraints = zeros(16,6);
82 InfEqValues = zeros(16,1);
83 OffSet = 0;
84
85 % Quantity of products must be >= 0
86 for i = Products,
87     InfEqConstraints(i+Offset,i) = -1;
88     InfEqValues(i+Offset) = 0;
89 end
90 OffSet = OffSet + 6;
91
92 % Work time is limited
93 for i = 1:7,
94     for j = Products,
95         InfEqConstraints(i+Offset,j) = T(j,i);
96     end
97     InfEqValues(i+Offset) = 2*8*60*5;
98 end
99 OffSet = OffSet + 7;
100
101 % We have limited stocks of raw material
102 for i = 1:3,
103     for j = Products,
104         InfEqConstraints(i+Offset,j) = Q(i,j);
105     end
106     InfEqValues(i+Offset) = S(i);
107 end
108 OffSet = OffSet + 3;

```

18.2 Stratégie comptable

```

1 function [ OptProduction, MaxEarnings ] = Comptable( )
2 %COMPTABLE Summary of this function goes here
3 % Detailed explanation goes here
4
5 FetchData;
6
7 % This is the matrix corresponding to the earnings function
8 Earnings = (V - ( (T * C' ./ 60)' + (A * Q) ))
9
10 % We'll try to maximize the function, so we minimize the opposite
11 Earnings = -Earnings;
12
13 % Optimisation
14 OptProduction = zeros(size(Earnings,2),1)
15 OptProduction = linprog(Earnings, InfEqConstraints, InfEqValues);
16
17 % Effective earnings
18 MaxEarnings = -Earnings * OptProduction;

```

18.3 Stratégie atelier

```

1 function [ N ] = Atelier( )
2
3 FetchData;
4
5 % This is the matrix corresponding to the earnings function
6 Units = [1; 1; 1; 1; 1; 1; 1];
7
8 % We'll try to maximize the function, so we minimize the opposite
9 Units = -Units;
10

```

```

11 % Optimisation
12 N = linprog(Units, InfEqConstraints, InfEqValues);

```

18.4 Stratégie commerciale

```

1 function [X1,Y1,NN1,X2,Y2,NN2] = ResponsableCommercial()
2 % Minimise la difference de production entre les familles des produits {A,B,C} et {D,E,F}
3 % pour toutes les valeurs possibles du benefice
4
5 %Prise en compte des contraintes generales
6 FetchData;
7
8 %La precision des iterations
9 steps=200;
10
11 %La fonction qu'on veut etudier et qui modelise la difference de production
12 %entre les deux familles des produits
13 F=[ones(1,3) -ones(1,3)];
14
15 %On approche F et -F de 0 et on cherche les minimums.
16 [X1,Y1,NN1]=linprog_earnings(0,1,steps,F,[InfEqConstraints;-F],[InfEqValues;0]);
17 [X2,Y2,NN2]=linprog_earnings(0,1,steps,-F,[InfEqConstraints;F],[InfEqValues;0]);
18
19 %Les valeurs obtenus pour F
20 Y1 = abs(Y1);
21 %Les valeurs obtenus pour -F
22 Y2 = abs(Y2);
23
24 %On construit le graphe des deux fonctions pour trouver la meilleure
25 %solution.
26 close;
27 hold on;
28 plot(X1,Y1,'Color',[1 0 0]);
29 plot(X2,Y2,'Color',[0 1 0]);
30 xlabel('Benefice_minimum_impose_(exprime_par_rapport_au_benefice_maximum)');
31 ylabel('Ecart_optimal_de_quantite_produite_entre_les_deux_familles');
32 hold off;
33
34
35 end

```

18.5 Stratégie stock

```

1 function result = get_remaining_stock(produits)
2 % Quantite de matiere premiere par produit :
3 MatPremParProduit = [
4 1 2 1 5 0 2
5 2 2 1 0 2 1
6 1 0 3 2 2 0
7 ];
8 %Quantite max de matiere premiere par produit
9 MatPremMax = [
10 350 620 485
11 ];
12
13 produits = produits';
14
15 result = MatPremMax - (produits * MatPremParProduit');
16
17 end

```

```

1 function result = compute_stock(input)
2 remaining = get_remaining_stock(input);
3
4 input = sum(input) + sum(remaining);
5
6 if input < 1192 && input > 0
7 result = (input / 1192) * 100;
8 elseif input > 1192 && input < 1559

```

```

9         result = 100;
10    elseif input >= 1691 && input >= 1559
11        result = (-input/1192 + 1 + 1559/1192) * 100;
12    end
13 end

```

18.6 Optimisation multicritère

Calcul de la matrice de satisfaction :

```

1  result = ones(4);
2
3  % Qtt max comptable
4  QttProdMaxComptable = [0
5                        20.4082
6                        0
7                        0
8                        242.5
9                        94.1837];
10 % Qtt max atelier
11 QttProdMaxAtelier = [0
12                    56.732
13                    38.6928
14                    0
15                    182.4608
16                    98.9216];
17
18 % Qtt max commercial
19 QttProduitEquilibre = [0.8888
20                      114.9102
21                      60.2321
22                      0.2537
23                      148.7430
24                      27.0343];
25
26
27 % Qtt max stocks
28 QttMaxStock = [1.91903382074088e-10
29              2.63753463514149e-10
30              1.89174897968769e-10
31              1.23691279441118e-10
32              124.634235411818
33              142.146305832495];
34
35 result(1,1:4) = compute_satisfaction(QttProdMaxComptable);
36 result(2,1:4) = compute_satisfaction(QttProdMaxAtelier);
37 result(3,1:4) = compute_satisfaction(QttMaxStock);
38 result(4,1:4) = compute_satisfaction(QttProduitEquilibre);
39
40
41 result

```

Calcul de l'optimisation :

```

1  function [ optimized ] = OptimisationPartie2( inputs )
2      % Quantite de matiere premiere par produit :
3      MatPremParProduit = [
4          1 2 1 5 0 2
5          2 2 1 0 2 1
6          1 0 3 2 2 0
7      ];
8      %Quantite max de matiere premiere par produit
9      MatPremMax = [
10         350 620 485
11     ];
12
13     result = ones(100,4);
14

```

```

15     stock = MatPremMax - (inputs' * MatPremParProduit');
16
17     % Pour chaque iteration, on enleve un produit de la famille 1, et
18     % on rajoute un produit de type E si on a les matieres premieres pour.
19     % A chaque fois, on recalcule les metriques.
20     for a=1:1:100
21         if stock(1,1) > MatPremParProduit(1,3)
22             if stock(1,2) > MatPremParProduit(2,3)
23                 if stock(1,3) > MatPremParProduit(3,3)
24                     % On ajoute un element au stock : il n'est plus
25                     % fabrique
26                     stock = stock + MatPremParProduit(1:3,3)';
27                     % On le retire en quantite
28                     inputs(3,1) = inputs(3,1) - 1;
29                 end
30             end
31         end
32         if stock(1,1) > MatPremParProduit(1,5)
33             if stock(1,2) > MatPremParProduit(2,5)
34                 if stock(1,3) > MatPremParProduit(3,5)
35                     % On fabrique un nouvel element : on me retire
36                     % du stock
37                     stock = stock - MatPremParProduit(1:3,5)';
38                     % On l'ajoute en quantite
39                     inputs(5,1) = inputs(5,1) + 1;
40                 end
41             end
42         end
43         % On recalcule les metriques
44         result(a,1:4) = compute_satisfaction(inputs);
45         %inputs'
46         %stock'
47     end
48
49     result
50     %stock'
51
52 end

```

Fonctions annexes :

```

1  function result = compute_satisfaction(inputs)
2
3  % Prix unitaires des produits
4  PuProduits = [20
5                27
6                26
7                30
8                45
9                40];
10
11  % Qtt max comptable
12  QttProdMaxComptable = [0
13                        20.4082
14                        0
15                        0
16                        242.5
17                        94.1837];
18
19  % Qtt max atelier
20  QttProdMaxAtelier = [0
21                      56.732
22                      38.6928
23                      0
24                      182.4608
25                      98.9216];
26
27  % Qtt max commercial
28  QttProduitEquilibre = [0.888810041865781
29                        114.910246268340
30                        60.2321120650158
31                        0.253790723745169
32                        148.743054004414
33                        27.0343236470630];

```



```

33
34 % Qtt max stocks
35 QttMaxStock = [1.91903382074088e-10
36                2.63753463514149e-10
37                1.89174897968769e-10
38                1.23691279441118e-10
39                124.634235411818
40                142.146305832495];
41
42 result = zeros(1,4);
43
44 result(1,1) = (sum((inputs .* PuProduits)) / sum((QttProdMaxComptable .* PuProduits)))
45               * 100;
46 result(1,2) = (sum(inputs) / sum(QttProdMaxAtelier)) * 100;
47 result(1,3) = compute_stock(inputs);
48 result(1,4) = (1-abs(sum(inputs(1:3))-sum(inputs(4:6)))/sum(inputs)) * 100;
49 end

```

```

1 function result = compute_stock(input)
2     remaining = get_remaining_stock(input);
3
4     input = sum(input) + sum(remaining);
5
6     if input < 1192 && input > 0
7         result = (input / 1192) * 100;
8     elseif input > 1192 && input < 1559
9         result = 100;
10    elseif input >= 1691 && input >= 1559
11        result = (-input/1192 + 1 + 1559/1192) * 100;
12    end
13 end

```

18.7 Électre III

```

1 function [S1,S2,C,D] = electre3 (J,w,s1,s2,v)
2 % J = m x n judgment matrix
3 % w = n weight
4
5 n = size(J,1); % alternatives
6 m = size(J,2); % indicators
7 e = 10; % scale
8
9 graphname = 'graph.dot';
10
11 if (m ~= size(w))
12     error('Size doesn't match. ');
13 end;
14
15 C = zeros(n);
16 D = zeros(n);
17
18 % APPLY NEW SCALE TO JUDGMENT MATRIX
19 for i = 1:m
20     J(:,i) = ( (J(:,i) - (e/2)) * (w(i)/max(w))) + (e/2)
21 end;
22
23 % EVALUATE AGREEMENT-DESAGREEMENT MATRICES
24 for i = 1:n
25     for j = 1:n
26         if (i ~= j)
27             C(i,j) = sum( (J(i,:) >= J(j,:)) .* w ) / sum(w);
28             D(i,j) = max(max(J(j,:)-J(i,:),0))/e;
29         end;
30     end;
31 end;
32
33 % EVALUATE OUTCLASS MATRIX
34 S1 = ((C > s1) .* (D <= v));
35 S2 = ((C > s2) .* (D <= v));
36
37 % DRAW ORDER GRAPH
38 fid = fopen(graphname, 'w');

```

```
39 fprintf(fid, 'digraph_G_{\n');
40 [row1, col1] = find(S1);
41 [row2, col2] = find(S2);
42
43 for i = 1:n
44     fprintf(fid, [char(64+i), ';\n']);
45 end;
46 fprintf(fid, '\n');
47
48 k = size(row1,1);
49 for i = 1:k
50     fprintf(fid, [char(64+row1(i)), '_->', char(64+col1(i)), ';\n']);
51 end;
52 fprintf(fid, '\n');
53
54 k = size(row2,1);
55 for i = 1:k
56     fprintf(fid, [char(64+row2(i)), '_->', char(64+col2(i)), '[style=_dashed];\n']);
57 end;
58 fprintf(fid, '\n');
59
60 fprintf(fid, '}\n');
61 fclose(fid);
```