Les priorités opératoires

ORGANISER DES CALCULS

Un nouveau jeu de « Pile » ou « Face »

On lance plusieurs fois une pièce de 1 €.
Chaque fois qu'elle tombe sur « Face » (F), on ajoute 2 € à la valeur précédente.
Chaque fois qu'elle tombe sur « Pile » (P), on multiplie la valeur précédente par 2.

Exemples :

Étienne a obtenu successivement : F-P-F-P.

F : $1+2=3$
P : $3\times 2=6$
F : 6..........=......
P :.................=......

Score d'Étienne :

Claire joue à son tour ; elle obtient : P-F-F-P.

P :.................=......
F :.................=......
F :.................=......
P :.................=..... .

Score de Claire :

Enfin Arnaud obtient : F-P-P-F.

F :.................=......
P :.................=......
P :.................=......
F :.................=.......

Score d'Arnaud :

Il a fallu quatre lignes pour calculer le score de chacun.
Peux-tu écrire chaque score sous la forme d'une seule ligne de calculs ?

Étienne :..

Claire :..

Arnaud :..

Les parenthèses sont-elles toutes nécessaires ? Vérifie-le à la calculatrice.
Examine le cas d'Étienne :

....

....

....

....

Encadre le calcul, le plus simple, qui donne le score d'Étienne.
Après une recherche au brouillon, écris en ligne et aussi simplement que possible les calculs donnant les scores de Claire et d'Arnaud :

Claire :..

Arnaud :..

Conclusion :

....

....

ORGANISER DES CALCULS

❶ - Calculs avec des parenthèses

Les opérations à l'intérieur des parenthèses sont prioritaires

Exemples :

$$a = 9 + (7 - 5) - (3 + 4) = 9 + 2 - 7 = 11 - 7 = 4$$
$$b = (9 + 7) - (5 - 3) + 4 = 16 - 2 + 4 = 14 + 4 = 18$$
$$c = 3 \times (5 + 7) = 3 \times 12 = 36$$
$$d = (9 - 5) \times (2 + 3) = 4 \times 5 = 20$$
$$e = 6 \times [7 - (2 + 3)] = 6 \times (7 - 5) = 6 \times 2 = 12$$

❷ - Calculs sans parenthèses

a) **Il n'y a que des additions :**

Exemple
Jean a 10 billes ; il en gagne 7 puis 8 et enfin 3
Il en a en tout
$J = 10 + 7 + 8 + 3 = 17 + 8 + 3 = 17 + 8 + 3 = 25 + 3 = 28$
Et si on change l'ordre des termes et que l'on groupe 7 et 3 :
$J = 10 + 7 + 3 + 8 = 10 + 10 + 8 = 20 + 8 = 28$

Conclusion :
On peut changer l'ordre des termes et les grouper comme l'on veut

b) **Il n'y a que des multiplications :**

Exemple
Une armoire mesure 1,95 m de haut, 1,40 m de large et 60 cm de profondeur (1,60 m).
Son volume est :
$V = 1,95 \times 1,4 \times 0,6 = 2,73 \times 0,6 = 1,638 \text{ m}^3$
En calculant autrement :
$V = 0,6 \times 1,95 \times 1,4 = 1,17 \times 1,4 = 1,638 \text{ m}^3$

Conclusion :
On peut changer l'ordre des facteurs et les grouper comme l'on veut

c) **Il y a des additions et des soustractions :**

Exemple :
Antoine a 10 billes ; il en gagne 7 puis en perd 8, en gagne 3 et enfin en perd 9
A l'issue de ces parties, il en a :
$A = 10 + 7 - 8 + 3 - 9 = 17 - 8 + 3 - 9 = 9 + 3 - 9 = 12 - 9 = 3$
On a calculé pas à pas.
En calculant autrement :
$A = 10 - 8 + 7 - 9 + 3 = 2 + 7 - 9 + 3 = 9 - 9 + 3 = 0 + 3 = 3$
On a changé l'ordre des parties mais les gains et les pertes n'ont pas changé.
On peut aussi grouper :
$A = 10 + 7 + 3 - 8 - 9 = (10 + 7 + 3) - (8 + 9) = 20 - 17 = 3$
On a groupé les termes à ajouter, d'une part et les termes à retrancher, d'autre part.

Conclusion :

On peut calculer pas à pas mais on peut aussi modifier l'ordre des termes à condition de conserver le signe opératoire de chaque terme.
On peut encore grouper les additions et les soustractions…

d) **Multiplication et addition**:

Exemple :
Augustine prend le taxi.
Elle paie 3 € de prise en charge et 2 € du kilomètre.
Elle parcourt 18 km.
Elle paie :
$A = 3 + 18 \times 2 = 3 + 36 = 39$ €

Conclusion :
La multiplication est prioritaire sur l'addition.
Il n'est donc plus nécessaire d'indiquer cette priorité avec des parenthèses.
(*à vérifier avec des calculatrices …et des calculettes ???*

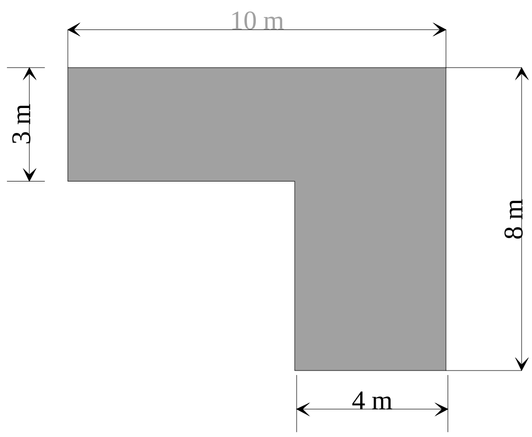
e) **Multiplication et soustraction**:

Exemple
Isabelle a un billet de20 €.
Elle achète 6 pains à 0,70 € pièce.
Il lui reste :
$I = 20 - 6 \times 0,7 = 20 - 4,2 = 15,80$ €
Là aussi la multiplication a été effectuée en premier

Conclusion :
La multiplication est prioritaire sur la soustraction.

❸ - Calculs en ligne

a) **Écrire l'aire d'un terrain**



Il y a plusieurs façons de le faire :
Par la différence des aires de deux rectangles
$Aire = 8 \times 10 - (10 - 4) \times (8 - 3) = 8 \times 10 - 6 \times 5 = 80 - 30 = 50 \text{ m}^2$

Par la somme des aires de deux rectangles :
$Aire = 8 \times 4 + 3 \times (10 - 4) = 8 \times 4 + 3 \times 6 = 32 + 18 = 50 \text{ m}^2$
ou
$Aire = 10 \times 3 + 4 \times (8 - 3) = 10 \times 3 + 4 \times 5 = 30 + 20 = 50 \text{ m}^2$

b) **Écrire un programme de calculs**

On choisit un nombre; on le multiplie par 3 ; on retranche 7 ; on multiplie le résultat par 5 et on ajoute le double du nombre choisi. Que trouve-t-on ?

Choisissons le nombre 8 :

$8 \xrightarrow{\times 3} 24 \xrightarrow{-7} 17 \xrightarrow{\times 5} 85 \xrightarrow{+2\times 8} 101$

Soit, en écrivant le calcul en ligne :
$n = 5 \times (3 \times 8 - 7) + 2 \times 8 = 5 \times (24 - 7) + 2 \times 8 = 5 \times 17 + 2 \times 8 = 85 + 16 = 101$

Si on ne choisit aucun nombre particulier, on peut appeler le nombre de départ *x* :

$x \xrightarrow{\times 3} 3\times x \xrightarrow{-7} 3\times x-7 \xrightarrow{\times 5} 5\times(3\times x-7) \xrightarrow{+2\times x} 5\times(3\times x-7)+2\times x$

On retrouve l'expression en ligne ; si on donne x = 8, il suffit de remplacer x par 8 dans cette expression.

Remarque :
L'expression de ce programme peut s'écrire plus simplement.
En premier lieu, on peut sous-entendre les signes de la multiplication :
$5\times(3\times x-7)+2\times x = 5(3x-7)+2x$
Dans un prochain chapitre, cette expression pourra encore se simplifier…

c) **Trouver le « compte est bon »**

Trouver 184 avec chacun des nombres : 5 ; 2 ; 7 ; 100 ; 6.
$(100+7)\times 2-6\times 5 = 107\times 2-6\times 5 = 214-30 = 184$

❹ - Puissances d'un nombre décimal

a) **Carré d'un nombre**

L'aire d'un carré de 7 cm de côté est :
$7\times 7 = 49 \text{ cm}^2$ on peut écrire : $7^2 = 49 \text{ cm}^2$

L'aire d'un carré dont le côté mesure x est :
$\boxed{x\times x = x^2}$
x^2 est appelé *« carré »* du nombre x

Exemples :
$5^2 = 25$ $1^2 = 1$ $0^2 = 0$ $1{,}1^2 = 1{,}21$ $0{,}4^2 = 0{,}16$

b) **Cube d'un nombre**

Le volume d'un cube dont l'arête mesure 8 cm est :
$8\times 8\times 8 = 512 \text{ cm}^3$ on peut écrire : $8^3 = 512 \text{ cm}^3$

Le volume d'un cube dont l'arête mesure x est :
$\boxed{x\times x\times x = x^3}$

Exemples :
$5^3 = 125$ $1^3 = 1$ $2^3 = 8$ $0{,}1^3 = 0{,}001$ $10^3 = 1000$

c) **En allant plus loin…**

$x\times x\times x\times x = x^4$
$x\times x\times x\times x\times x = x^5$
...etc...

← On lit x « exposant » 4 ou x « puissance » 4

Exemples :
$10^4 = 10000$ $2^5 = 32$ $1^5 = 1$ $5^5 = 3125$ $10^6 = 1\,000\,000$

d) **Multiplication et puissance**

La puissance est prioritaire sur la multiplication.

Exemples :
$2\times 4^3 = 2\times 64 = 128$ alors que : $(2\times 4)^3 = 8^3 = 512$ (priorité aux parenthèses)

ORGANISER UN CALCUL

❶ - Calcule :

$9\times(5+3)=$ .... $(9-5)\times(7-4)=$ ....

$158-(14+35)=$ .... $7\times[(3+9)-(14-9)]=$ ....

❷ - Calcule aussi simplement que possible :

$18+22+29+11=$ .... $25\times 3{,}7\times 4=$ ....

$5{,}27+3{,}75+0{,}73+1{,}25=$ .... $8\times 1{,}4\times 125\times 2=$ ....

❸ - Calcule en pensant à respecter les règles de priorité :

$1+7\times 4=$ .... $9\times 6+17=$ ....

$4\times 35-19=$ .... $103-7\times 8=$ ....

$5\times 13+6\times 17=$ .... $14\times 8-9\times 7-6\times 7+3=$ ....

❹ - Calcule :

$7+2\times(11-6)-3=$ .... $2\times 5+3\times 7-4=$ ....

$(13+17)\times 5+2=$ .... $2\times(5+3)\times(7-2)\times 4=$ ....

❺ - Place un minimum de parenthèses pour que toutes les expressions soient égales à 100 :

$A=32+18\times 2$ $\quad$ $B=26\times 2+6\times 3+5$

$C=7-2\times 11-6\times 4$ $\quad$ $D=4+4\times 2\times 5\times 2+2\times 6$

❻ - *Le compte est bon*

Trouve **474** en utilisant une seule fois chacun des nombres suivants : **10** ; **7** ; **3** ; **9** ; **8**.

....

Même question pour trouver **81** avec : **10** ; **1** ; **8** ; **25** ; **2**.

....

❼ - a) Si on double le côté d'un carré de 5 cm, que devient son aire ?

....

b) Si on double le côté **a** d'un carré, que devient son aire ?

....

c) Si on double l'arête d'un cube de 5 cm, que devient son volume ?

....

d) Si on double l'arête a d'un cube, que devient son volume ?

....

DEVOIR 1

❶ - Calcule :

$$a = 3\times 6 + 5 - 2\times 6$$
$$b = 3\times\left(6 + 5 - 2\right)\times 6$$
$$c = 3\times\left(6 + 5\right) - 2\times 6$$
$$d = 3\times 6 + \left(5 - 2\right)\times 6$$

❷ - Écris le programme suivant :

Partant d'un nombre **x**, tu lui ajoutes 5 ;

tu multiplies le résultat par 3 ;

enfin, tu retranches le double du nombre **x**.

❸ - Quelle est, parmi les expressions de la première question,

celle qui correspond, dans le programme, au nombre **x** = 6 ?

DEVOIR 2

❶ - Pour calculer : $E = 4 \times 2{,}5 + 1{,}5 - 1{,}2 \times 5 + 1$, cinq élèves ont proposé les réponses suivantes :

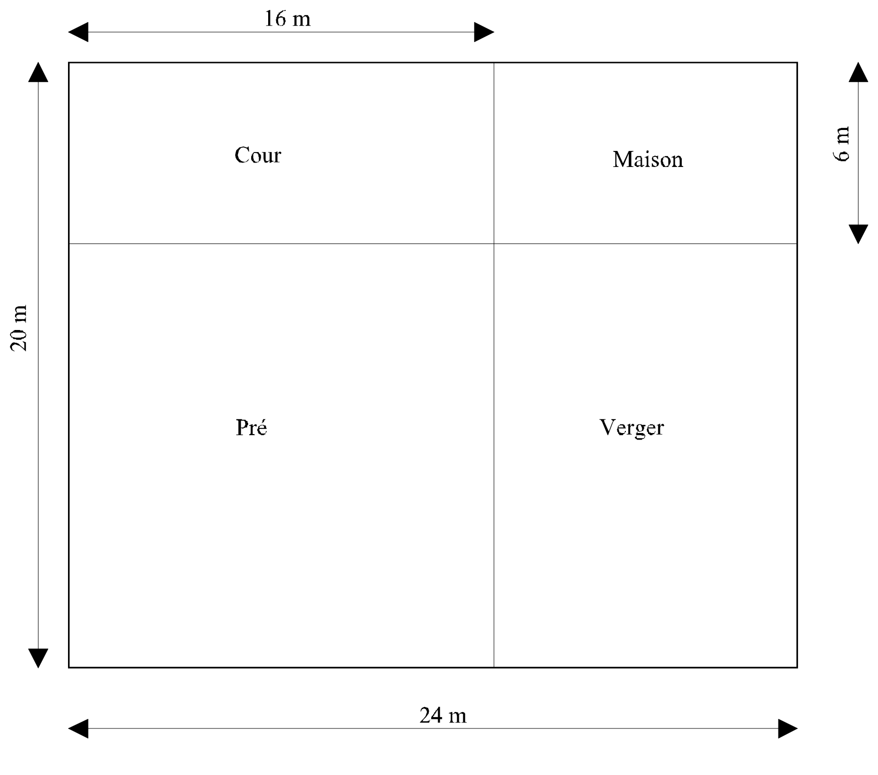
1ère réponse : $E = 4 \times 4 - 6 + 1 = 11$
2ème réponse : $E = 4 \times 4 - 1{,}2 \times 6 = 16 - 7{,}2 = 8{,}8$
3ème réponse : $E = 10 + 0{,}3 \times 5 + 1 = 10 + 1{,}5 + 1 = 12{,}5$
4ème réponse : $E = 10 + 1{,}5 - 6 + 1 = 6{,}5$
5ème réponse : $E = 10 + 0{,}3 \times 6 = 10 + 1{,}8 = 11{,}8$

a) Il y a une bonne réponse. Laquelle ?
b) Dans les quatre autres réponses ; les élèves ont fait comme s'il y avait des parenthèses à certains endroits. Place ces parenthèses !

❷ - Un cultivateur doit labourer son champ de 3400 m².
Il laboure d'abord une partie rectangulaire de 27 m de large sur 38 m de long.
Le lendemain, il laboure une deuxième partie rectangulaire de même largeur que la veille et de 43 m de long.
Que lui reste-t-il à labourer ?
Parmi les solutions proposées, trouve toutes celles qui sont exactes :

$3400 - 27 \times 38 + 43$	$3400 - 27 \times 38 - 38 \times 43$
$3400 - (27 + 38 + 43)$	$3400 - 27 \times (38 + 43)$
$3400 - (27 \times 38 + 43)$	$3400 - 27 \times 38 + 27 \times 43$
$3400 - 27 \times 38 \times 43$	$3400 - (27 \times 38 + 38 \times 43)$
$3400 - 27 \times 38 - 27 \times 43$	$3400 - 27 \times 38 - 43$

❸- Thierry et Christophe sèment de l'herbe sur le verger et sur le pré.
Pour connaître la quantité de graines nécessaires, ils doivent calculer l'aire de la surface à ensemencer.
Thierry propose :« Je calcule l'aire du tout puis je retranche celle de la cour et celle de la maison ».
Christophe préfère calculer les dimensions du terrain à semer.
Présente sur une ligne le calcul de Thierry puis celui de Christophe.



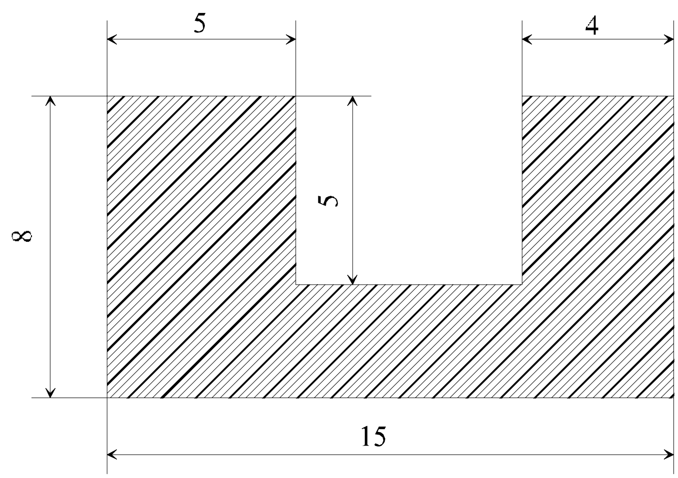
DEVOIR 3

La calculatrice n'est pas autorisée

❶ - Calcule les nombres suivants:

$$15\times8-5\times8+4\times8$$
$$5+4\times(5+15-8)$$
$$15\times8-5\times(15-5-4)$$
$$5\times(15\times8-5\times4)$$
$$15\times(8-5)+5\times5-5\times4$$
$$(15+8)\times(5+4)-15\times5$$
$$(15-5+4)\times8$$
$$5\times8+(8-5)\times(15-5-4)+4\times8$$
$$5\times(15+8)+8\times4$$

❷ - On considère la surface suivante (l'unité est le mètre):



Parmi les expressions de l'exercice précédent, quelles sont celles qui expriment l'aire de cette surface?

❸ - Ce terrain appartient à Léon qui, à la faveur d'un "remembrement", va pouvoir l'échanger contre un terrain rectangulaire.
Quelles peuvent être les dimensions (longueur et largeur) de son nouveau terrain?
(*tu as plusieurs solutions*)

DEVOIR 4

HUIT PROBLÈMES

Voici huit problèmes semblant identiques puisqu'ils utilisent les mêmes nombres.

Traite **chacun** en organisant les calculs nécessaires **en une seule ligne**.
Effectue les calculs puis donne chaque réponse en une **phrase**.

❶ - Dans un restaurant, le plat du jour est composé d'une viande à 57 F et de sa garniture à 18 F.
Sachant que 46 plats du jour sont servis à midi et 27 le soir, quel est le montant de la recette ?

❷ - Promotion : remise de 18 F sur tout achat d'une boîte de chocolats marquée 57 F.
Quelle sera la recette sur ces chocolats lorsque le stock des 27 cartons de 46 boîtes sera épuisé ?

❸ - Un pommier produit en moyenne 57 kg de fruits ; mais, cette année, à cause de la sécheresse, la production a diminué de 18 kg par arbre.
Quelle est, cette année, la production d'un verger composé de 46 rangées de 27 pommiers ?

❹ - Un champ rectangulaire mesure 46 m sur 57 m.
Quelle est sa nouvelle aire si on augmente sa largeur de 27 m et si on diminue sa longueur de 18 m ?

❺ - 27 adultes et 18 enfants participent à un voyage organisé par la commune de Barmont.
La commune finance une partie du voyage à raison de 46 F par adulte et de 57 F par enfant.
Quelle est la somme moyenne versée par la commune par voyageur ?

❻ - M. Dumoulin achète 18 sacs de 57 kg de farine puis 27 sacs de 46 kg de cette même farine.
Il veut répartir sa farine de façon que ses sacs aient tous le même poids.
Quel doit être alors le poids d'un sac ?

❼ - M. Dufour gagne 46 F par heure de travail.
Lorsqu'il s'agit d'un travail de nuit, son salaire horaire est augmenté de 27 F.
Sachant qu'il a fait 57 h de nuit en novembre et 18 h de nuit en décembre, combien M. Dufour a-t-il gagné en heures de nuit ?

❽ - Mme Triton change l'eau de son aquarium qui mesure 46 cm de long, 27 cm de large et 57 cm de haut.
Elle prend la précaution de ne remplir son aquarium qu'à 18 cm du bord supérieur.
Quel est le volume d'eau nécessaire ?

ORGANISER DES CALCULS

Un nouveau jeu de « Pile » ou « Face »

On lance plusieurs fois une pièce de 1 €.
Chaque fois qu'elle tombe sur « Face » (F), on ajoute 2 € à la valeur précédente.
Chaque fois qu'elle tombe sur « Pile » (P), on multiplie la valeur précédente par 2.

Exemples :

Étienne a obtenu successivement : F-P-F-P.

F : $1+2=3$
P : $3\times2=6$
F : $6+2=8$
P :. $8\times2=16$

Score d'Étienne : 16 €

Claire joue à son tour ; elle obtient : P-F-F-P.

P : $1\times2=2$
F : $2+2=4$
F : $4+2=6$
P : $6\times2=12$

Score de Claire : 12 €

Enfin Arnaud obtient : F-P-P-F.

F : $1+2=3$
P : $3\times2=6$
P : $6\times2=12$
F : $12+2=14$

Score d'Arnaud : 14 €

Il a fallu quatre lignes pour calculer le score de chacun.
Peux-tu écrire chaque score sous la forme d'une seule ligne de calculs ?

Étienne : $\left[\left((1+2)\times2\right)+2\right]\times2=\left[(3\times2)+2\right]\times2=[6+2]\times2=8\times2=16$

Claire : $\left[\left((1\times2)+2\right)+2\right]\times2=\left[(2+2)+2\right]\times2=[4+2]\times2=6\times2=12$

Arnaud : $\left[\left((1+2)\times2\right)\times2\right]+2=\left[(3\times2)\times2\right]+2=[6\times2]+2=12+2=14$

Les parenthèses sont-elles toutes nécessaires ? Vérifie-le à la calculatrice.
Examine le cas d'Étienne :

$1+2\times2+2\times2=9$ $\quad$ $(1+2)\times2+2\times2=10$

$(1+2\times2)+2\times2=9$ $\quad$ $[1+2\times2+2]\times2=14$

$\boxed{\left[(1+2)\times2+2\right]\times2=16}$ $\quad$ C'est cette forme qui donne le bon résultat

$\left[(1+2\times2)+2\right]\times2=14$ $\quad$ $\left((1+2)\times2\right)+2\times2=10$

Encadre le calcul, le plus simple, qui donne le score d'Étienne.
Après une recherche au brouillon, écris en ligne et aussi simplement que possible les calculs donnant les scores de Claire et d'Arnaud :

Claire : $\boxed{(1\times2+2+2)\times2}=(2+2+2)\times2=6\times2=12$

Arnaud : $\boxed{(1+2)\times2\times2+2}=3\times2\times2+2=12+2=14$

Conclusion :

Certaines parenthèses sont inutiles (en particulier celles qui indiquent des produits).

ORGANISER UN CALCUL

❶ - Calcule :

$9\times(5+3)=9\times8=72$ $\quad(9-5)\times(7-4)=4\times3=12$

$158-(14+35)=158-49=109$ $\quad 7\times\left[(3+9)-(14-9)\right]=7\times[12-5]=7\times7=49$

❷ - Calcule aussi simplement que possible :

$18+22+29+11=40+40=80$ $\quad 25\times3{,}7\times4=100\times3{,}7=370$

$5{,}27+3{,}75+0{,}73+1{,}25=6+5=11$ $\quad 8\times1{,}4\times125\times2=1000\times2{,}8=2800$.

❸ - Calcule en pensant à respecter les règles de priorité :

$1+7\times4=1+28=29$ $\quad 9\times6+17=54+17=71$

$4\times35-19=140-19=121$ $\quad 103-7\times8=103-56=47$

$5\times13+6\times17=65+102=167$ $\quad 14\times8-9\times7-6\times7+3=112-63-42+3=10$

❹ - Calcule :

$7+2\times(11-6)-3=7+2\times5-3=7+10-3=14$ $\quad 2\times5+3\times7-4=10+21-4=27$

$(13+17)\times5+2=30\times5+2=150+2=152$ $\quad 2\times(5+3)\times(7-2)\times4=2\times8\times5\times10\times32=320$

❺ - Place un minimum de parenthèses pour que toutes les expressions soient égales à 100 :

$A=(32+18)\times2$ $\quad B=26\times2+6\times(3+5)$

$C=(7-2)\times(11-6)\times4$ $\quad D=(4+4\times2\times5)\times2+2\times6$

❻ - *Le compte est bon*

Trouve **474** en utilisant une seule fois chacun des nombres suivants : **10** ; **7** ; **3** ; **9** ; **8**.

$7\times8\times9-3\times10=504-30=474$

Même question pour trouver **81** avec : **10** ; **1** ; **8** ; **25** ; **2**.

$(10-1)\times(25-8\times2)=9\times(25-16)=9\times9=81$

❼ - a) Si on double le côté d'un carré de 5 cm, que devient son aire ?

$\text{côté} : 5\text{ cm}\mapsto10\text{ cm}$ $\quad \text{aire} : 5^2=25\text{ cm}^2\mapsto10^2=100\text{ cm}^2$ $\quad$ L'aire a été multipliée par 4

b) Si on double le côté **a** d'un carré, que devient son aire ?

$\text{côté} : a\mapsto2\times a$ $\quad \text{aire} : a^2\mapsto(2\times a)^2=4a^2$ $\quad$ L'aire a été multipliée par 4

c) Si on double l'arête d'un cube de 5 cm, que devient son volume ?

$\text{arête} : 5\text{ cm}\mapsto10\text{ cm}$ $\quad \text{volume} : 5^3=125\text{ cm}^3\mapsto10^3=1000\text{ cm}^3$ $\quad$ Le volume a été multiplié par 8

d) Si on double l'arête **a** d'un cube, que devient son volume ?

$\text{arête} : a\mapsto2\times a$ $\quad \text{volume} : a^3\mapsto(2\times a)^3=8\times a^3$ $\quad$ Le volume a été multiplié par 8