Chapitre

Puissance d'un nombre relatif

Activité

1. Observer le produit suivant : $3 \times 3 \times 3$
   Combien y-a-t'il de facteurs dans ce produit ?
   Comment sont-ils ces facteurs ?
   Complète : $3 \times 3 \times 3$ est le produit de $\cdots\cdots$ facteurs égaux à $\cdots\cdots$
2. Dans le produit $3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3$
   Combien y-a-t'il de facteurs dans ce produit ?
   Comment sont-ils ces facteurs ?
   Complète : $3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3$ est le produit de $\cdots\cdots$ facteurs égaux à $\cdots\cdots$
3. Écris le produit de 100 facteurs égaux à 3
   Quel est l'obstacle que tu as trouvé dans cette écriture ?
   Pour passer de cet obstacle on écrit ce produit saou la forme 3^{100}
   3^{100} est la puissance du nombre 3 et se lit 3 à la puissance 100
4. Écrit le produit de 25 facteurs égaux à 3
5. En utilisant l'écriture précédente sous forme d'une puissance, écrit le produit de 15 facteurs égaux à (-2)

Activité

On considère le tableau suivant :

1 2	**2** 4	**3** 8 ....
4 16	**5**	**6** ....
7	**8**	**9** ....

1. Compléter le tableau après avoir trouver la règle de remplissage des trois premier cases
2. Écrire chaque nombre à l'aide du nombre qui le précède
3. Si le nombre 8 s'écrit sous la forme 2^3, alors comment peut-on exprimer les autres nombres de la mêm façon ?
4. Dans l'écriture 2^3, le nombre 3 s'appelle l'exposant de la puissance (2^3)
   Quelle est la puissance du nombre 2 dans le nombre situé dans la case 7
5. Remplir à nouveau le tableau en utilisant cette fois les puissances du nombre (-2)

I Puissance d'un nombre relatif

On considère le produit suivant : $A = 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2$
Ce produit comporte 5 facteurs égaux à 2
On appelle ce produit la cinquième puissance du nombre 2, et on écrit : 2^5
Le nombre 2^5 se lit : 2 à la puissance 5, ou encore 2 exposant 5

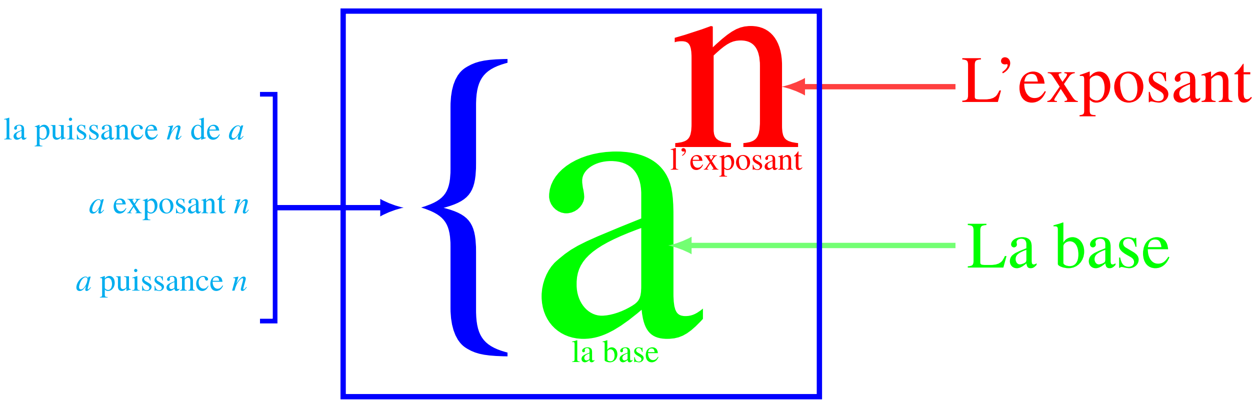
Définition

Soit a un nombre décimal relatif non nul et n un nombre entier positif supérieur à 1

$$a^n = \underbrace{a \times a \times a \times \cdots\cdots\cdots \times a}_{n \text{ facteurs}}$$

De plus : $a^1 = a$ et pour $a \neq 0$ on a : $a^0 = 1$

✸ L'écriture a^n :



✸ Vocabulaire

Si a est un nombre relatif non nul, alors :
☆ a^n se lit " a à la puissance n " ou encore " a exposant n "
☆ Le nombre n est appelé " exposant "
☆ a^2 se lit : a exposant 2, ou a puissance 2, ou a au carrée
☆ a^3 se lit : a exposant 3, ou a puissance 3, ou a au cube

Remarque

La puissance 0^0 n'existe pas

Exemples

- $5^2 = 5 \times 5 = 25$
- $(-3)^2 = (-3) \times (-3) = 9$
- $-3^2 = -3 \times 3 = -9$
- $2^5 = 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 = 32$
- $(-2)^3 = (-2) \times (-2) \times (-2) = -8$
- $-4^3 = -4 \times 4 \times 4 \times 4 = -64$

En l'absence de parenthèses, les puissance ont priorité sur les multiplications et les divisions

Application

Calculer les puissance suivantes

- ★ 2^3
- ★ 1^{12}
- ★ $(-1)^4$
- ★ $(-544)^0$
- ★ 0^{45}
- ★ $(4)^0$

Solution

- ★ $2^3 = 8$
- ★ $1^{12} = 1$
- ★ $(-1)^4 = 1$
- ★ $(-544)^0 = 1$
- ★ $0^{45} = 0$
- ★ $(4)^0 = 1$

II Signe d'une puissance

Activité

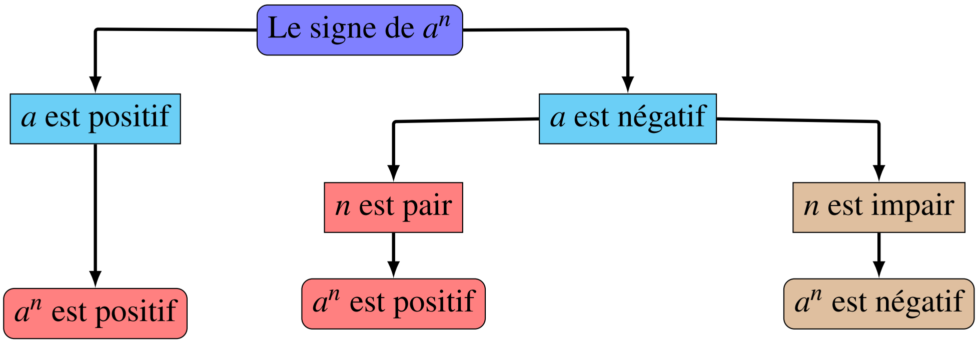
1 Recopier et compléter le tableau suivant

n	1	2	3	4	5	6
$(0.1)^n$	......	......	......	......	......	......
$(-1)^n$	......	......	......	......	......	......
$(-2)^n$	......	......	......	......	......	......

2 En déduire les conditions pour que a^n soit négative, a étant un nombre relatif et n un nombre entier naturel

Règle

Une puissance est négative si sa base est négative et son exposant est impair
Et elle positive dans les autres cas



EXEMPLES

- ★ La puissance $(-11)^4$ est positif car la base -11 est négatif est l'exposant 4 est positif
- ★ La puissance $(-7)^5$ est négatif car la base -7 est négatif et l'exposant 5 est impair
- ★ La puissance 7^{33} est positif car la base 7 est positif
- ★ 5^2 est positif car la base 5 est positif

★ Si a est un nombre décimal et n un nombre entier naturel pair
Alors $(-a)^n = a^n$

Application

Déterminer le signe des puissances suivantes :

$$(-3)^2 \quad ;; \quad (-2)^{15} \quad ;; \quad 5^3 \quad ;; \quad (-7)^{15}$$

Solution

$(-3)^2$: Positif ;; $(-2)^{15}$: Négatif ;; 5^3: Positif ;; $(-7)^{15}$: Négatif

III Opérations sur les puissances

1 Produit de deux puissances de même base

Activité

Observer l'exemple suivant et compléter :

$$2^4 \times 2^3 = \left(\underbrace{2\times2\times2\times2}_{4\ \text{facteurs}}\right) \times \left(\underbrace{2\times2\times2}_{3\ \text{facteurs}}\right)$$
$$= \left(\underbrace{2\times2\times2\times2\times2\times2\times2}_{4+3\ \text{facteurs}}\right)$$
$$= 2^7$$

$$3^4 \times 3^5 = \left(\underbrace{\dots\dots\dots\dots\dots}_{\cdots\ \text{facteurs}}\right) \times \left(\underbrace{\dots\dots\dots\dots\dots}_{\cdots\ \text{facteurs}}\right)$$
$$= \left(\underbrace{\dots\dots\dots\dots\dots}_{\cdots+\cdots\ \text{facteurs}}\right)$$
$$= \cdots$$

$$3^4 \times 3^5 = \left(\underbrace{\dots\dots\dots\dots\dots}_{\cdots\ \text{facteurs}}\right) \times \left(\underbrace{\dots\dots\dots\dots\dots}_{\cdots\ \text{facteurs}}\right)$$
$$= \left(\underbrace{\dots\dots\dots\dots\dots}_{\cdots+\cdots\ \text{facteurs}}\right)$$
$$= \cdots$$

$$a^m \times a^n = \left(\underbrace{\dots\dots\dots\dots\dots}_{\cdots\ \text{facteurs}}\right) \times \left(\underbrace{\dots\dots\dots\dots\dots}_{\cdots\ \text{facteurs}}\right)$$
$$= \left(\underbrace{\dots\dots\dots\dots\dots}_{\cdots+\cdots\ \text{facteurs}}\right)$$
$$= \cdots$$

Règle

Soit a un nombre décimal relatif non nul, et m et n deux nombres entiers relatifs, alors

$$a^m \times a^n = a^{m+n}$$

Exemples

- $5^5 \times 5^8 = 7^{5+8} = 7^{13}$
- $12^3 \times 12^5 = 12^{3+5} = 12^8$
- $(-21)^2 \times (-21)^7 = (-21)^{2+7} = (-21)^9$
- $(-12)^4 \times (-12)^{15} = (-12)^{4+15} = (-12)^{19}$

Application

Écrire sous forme d'une puissance :

- $A = 2^4 \times 2^6$
- $B = (-4.5)^4 \times (-4.5)^3 v(-4.5)^2$
- $C = (-4)^7 \times (-4)^4$
- $D = 9^3 \times 9^2 \times 9$

Solution

- $A = 2^{10}$
- $B = 9^6$
- $C = (-4)^{11}$
- $D = (-4.5)^9$

2 Produit de deux puissances de même exposant

Activité

Soient a et b deux nombres décimaux relatifs tel que : $a = 2$ et $b = 3$
Compléter le tableau suivant :

n▼	a^n	b^n	$a^n \times b^n$	$a \times b$	$(a \times b)^n$
2	……	……	……	……	……
3	……	……	……	……	……
-2	……	……	……	……	……

Que remarquez-vous ?

Règle

Soient a et b deux nombres décimaux relatifs non nul, et n un nombre entier relatif
Alors

$$a^n \times b^n = a \times b^n$$

EXEMPLES

- $5^5 \times 6^5 = (5 \times 6)^5 = 30^5$
- $2^3 \times 10^3 = (2 \times 10)^3 = 20^3$
- $(-3)^2 \times (-2)^2 = ((-3) \times (-2))^2 = 6^2$
- $(-12)^4 \times (-2)^4 = ((-12) \times 2)^4 = (-24)^4$

Application

Écrire sous forme d'une puissance :

- $A = 2^3 \times 6^3$
- $B = (-4)^2 \times (-5)^2$
- $C = (11)^7 \times (12)^7$
- $D = 9^3 \times (-3)^3$

Solution

- $A = 12^3$
- $B = 20^2$
- $C = 132^7$
- $D = (-27)^3$

3 Quotient de deux puissances de même base

Activité

Observer l'exemple suivant et compléter :

$$\frac{2^5}{2^3} = \frac{2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2}{2 \times 2 \times 2} = 2 \times 2 = 2^2$$

$$\frac{3^4}{3^3} = \frac{3 \times 3 \times 3 \times 3}{3 \times 3 \times 3} = \cdots\cdots\cdots\cdots = \cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\frac{10^5}{10^3} = \frac{\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots}{\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots} = \cdots\cdots\cdots\cdots = \cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\frac{a^m}{a^n} = \frac{\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots}{\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots} = \cdots\cdots\cdots\cdots = \cdots\cdots\cdots\cdots$$

Règle

Soit a un nombre décimal relatif non nul, et m et n deux nombres entiers positifs avec $m > n$, alors

$$\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$$

Exemples

- $\dfrac{6^5}{6^3} = 6^{5-3} = 6^2$
- $\dfrac{3^{11}}{3^2} = 3^{11-2} = 3^9$
- $\dfrac{(-4)^7}{(-4)^3} = (-4)^{7-3} = (-4)^4$
- $\dfrac{(-1)^5}{(-1)^3} = (-1)^{5-3} = (-1)^2$

Application

Écrire sous forme d'une puissance :

- $A = \dfrac{4^7}{4^3}$
- $B = \dfrac{6^6}{6^2}$
- $C = \dfrac{(-3)^{13}}{(-3)^7}$
- $D = \dfrac{(-7)^7}{(-7)^6}$

Solution

- $A = 4^4$
- $B = 6^4$
- $C = (-3)^6$
- $D = (-7)^1$

4 Quotient de deux puissances de même exposant

Activité

Soient a et b deux nombres décimaux relatifs tel que : $a = 8$ et $b = 2$

Compléter le tableau suivant :

n ▼	a^n	b^n	$\dfrac{a^n}{b^n}$	$\dfrac{a}{b}$	$\left(\dfrac{a}{b}\right)^n$
2	......	......	......	......	......
3	......	......	......	......	......
-2	......	......	......	......	......

Que remarquez-vous ?

Règle

Soient a et b deux nombres décimaux relatifs non nul, et n un nombre entier relatif
Alors

$$\frac{a^n}{b^n} = \left(\frac{a}{b}\right)^n$$

EXEMPLES

- $\dfrac{3^7}{19^7}=\left(\dfrac{3}{19}\right)^7$
- $\dfrac{3^{11}}{9^{11}}=\left(\dfrac{3}{9}\right)^{11}=\left(\dfrac{1}{3}\right)^9$
- $\dfrac{(-4)^5}{2^5}=\left(\dfrac{-4}{2}\right)^5=(-2)^5$
- $\dfrac{6^3}{(-3)^3}=\left(\dfrac{6}{-3}\right)^3=(-2)^3$

Application

Écrire sous forme d'une puissance :

- $A=\dfrac{5^7}{4^7}$
- $B=\dfrac{11^{17}}{121^{17}}$
- $C=\dfrac{(-3)^4}{(-5)^4}$
- $D=\dfrac{(-2)^3}{(5)^3}$

Solution

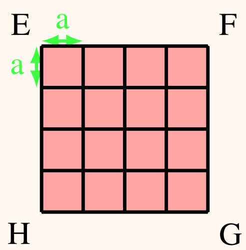
- $A=\left(\dfrac{5}{4}\right)^7$
- $B=\left(\dfrac{1}{11}\right)^{17}$
- $C=\left(\dfrac{3}{5}\right)^4$
- $D=\left(\dfrac{-2}{5}\right)^3$

5 Puissance d'une puissance

Activité

❶ Si 3^2 et 3^3 sont les dimensions d'un rectangle
Exprimer l'aire de ce rectangle sous forme d'une puissance de 3

❷ ➥ Calculer l'aire du carré $EFGH$, ci-contre, de deux façons
➥ En déduire que : $(4a)^2=4^2\times a^2$



❸ ➥ Montrer que : $\left(2^2\right)^3=2\times2\times2\times2\times2\times2$
➥ En déduire que : $\left(2^2\right)^3=2^6$

Règle

Soit a un nombre décimal relatif non nul et m et n deux nombres entiers positifs, alors :

$$(a^m)^n=a^{m\times n}$$

EXEMPLES

- $\left[(-3)^5\right]^3=(-3)^{5\times3}=(-3)^{15}$
- $\left(5^6\right)^2=5^{6\times2}=5^{12}$

Application

Écrire sous forme d'une puissance :

- $A = (2^4)^3$
- $B = (3^5)^2$
- $C = \left[(-2)^3\right]^6$
- $D = \left[(-6)^2\right]^4 \times \left[(0.5)^4\right]^2$

Solution

- $A = 2^{12}$
- $B = 3^{10}$
- $C = (-2)^{18}$
- $D = (-3)^8$

IV Puissance de 10

Règle

Soit n un nombre entier naturel non nul

$$10^n = 1\underbrace{000\ldots\ldots0}_{n \text{ zéros}}$$

Exemples

- $10^3 = 1000$
- $10^7 = 10000000$
- $10^2 = 100$
- $10^5 = 100000$

Application

Écrire en utilisant les puissance de 10

- $A = 10000$
- $B = 100$
- $C = (70+30) \times 100000$
- $D = (250 \times 40) \times 10000$

Solution

- $A = 10^4$
- $B = 10^2$
- $C = 10^7$
- $D = 10^8$

V La notation (Écriture) scientifique d'un nombre décimal

Activité

Calculer le produit 45000×1500000 au moyen d'une calculatrice puis sans calculatrice

Que signifie l'écriture $\boxed{6,75E10}$ ou l'écriture $\boxed{6,75 \times 10^{10}}$ affiché par la calculatrice ?

Définition

Soit b un nombre décimal tel que $b = a \times 10^n$ ou $1 \leqslant a < 10$ et n un nombre entier relatif
$a \times 10^n$ est la notation scientifique , ou l'écriture scientifique de b

EXEMPLES

- $912000 = 9.12 \times 10^5$ est la notation scientifique de 912000
- $0.0235 = 2.35 \times 10^{-2}$ est la notation scientifique de 0.0235

Application

Donner la notation scientifique des nombres suivant :

- $A = 5 \times 10^3 - 2 \times 10^2$
- $B = 64.5 \times 10^8 + 631 \times 10^7$
- $C = 300\ 000\ 000$
- $D = 602\ 000\ 000\ 000\ 000\ 000\ 000\ 000$

Solution

- $A = 4.8 \times 10^3$
- $B = 1.276 \times 10^{10}$
- $C = 3 \times 10^8$ (En m/s c'est la vitesse de la lumière)
- $D = 6.02 \times 10^{23}$ (C'est le nombre d'atome dans un gramme d'Hydrogène)