GMIN 317 – Moteur de Jeux

Mathématiques pour le jeu vidéo

Rémi Ronfard

Remi.ronfard@inria.fr

https://team.inria.fr/imagine/remi-ronfard/

Cette présentation récapitule les concepts mathématiques nécessaires à la mise en place d'un pipeline d'affichage 3D. Son but n'est pas de développer les aspects mathématiques purs, mais bien de fournir des clefs « pratiques » de mise en œuvre.

Ce cours est largement inspiré des cours de Marc Moulis et Benoit Lange.

Plan du cours

1. Espace 3D
   - Définitions
   - Points et vecteurs
   - Opérateurs utiles
   - Géométrie dans l'espace 3D
   - Rappels de trigonométrie
2. Stockage matriciel
   - Représentation
   - Addition et multiplication
   - Inversion de matrices
3. Transformations 3D
   - Définition
   - Translations, rotations, changements d'échelle
   - Compositions matricielles
4. Quaternions
   - Définition
   - Opérateurs utiles

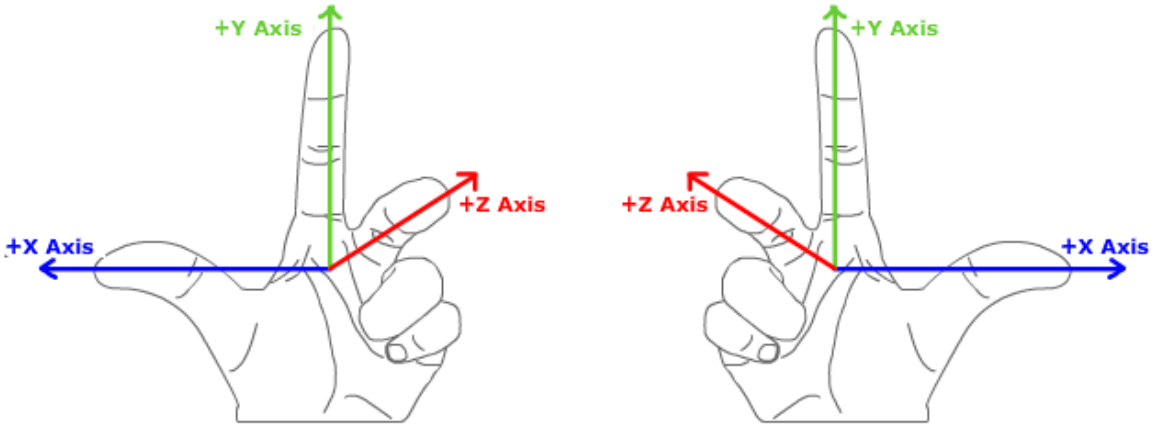
Axes et repères

L'espace de travail usuel est un espace Euclidien continu : R3

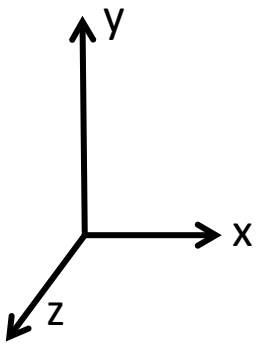
La base de cet espace est formée par les vecteurs suivants:
(1,0, 0), (0, 1, 0) et (0, 0, 1)
Les vecteurs de la base sont 2 à 2 orthogonaux et de norme 1, ils forment donc une base orthogonale.

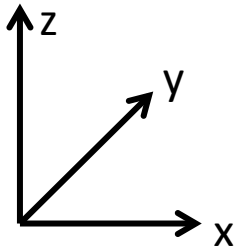
Les 3 dimensions sont généralement dénommées respectivement X, Y et Z

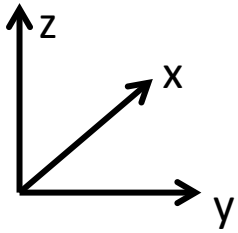
La base peut être soit directe (repère main droite), soit indirecte (repère main gauche)



- Different game engines define coordinate systems differently
  - Most of you will probably use the OpenGL coordinate system
- "Horizontal plane"
  - Plane parallel to the ground (in OpenGL, the xz-plane)
- "Up-axis"
  - Axis perpendicular to horizontal plane (in OpenGL, the y-axis)

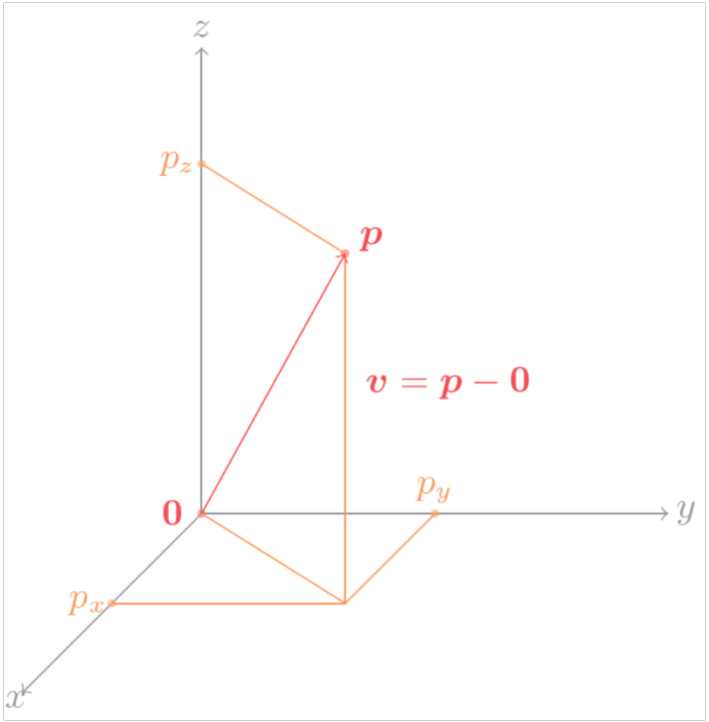






Points et vecteurs

- Un point est un objet de dimension zéro, défini par 3 coordonnées cartésiennes (px,py,pz)
- Un vecteur est également défini par 3 coordonnées cartésiennes (vx,vy,vz)
- Notation v = p - q



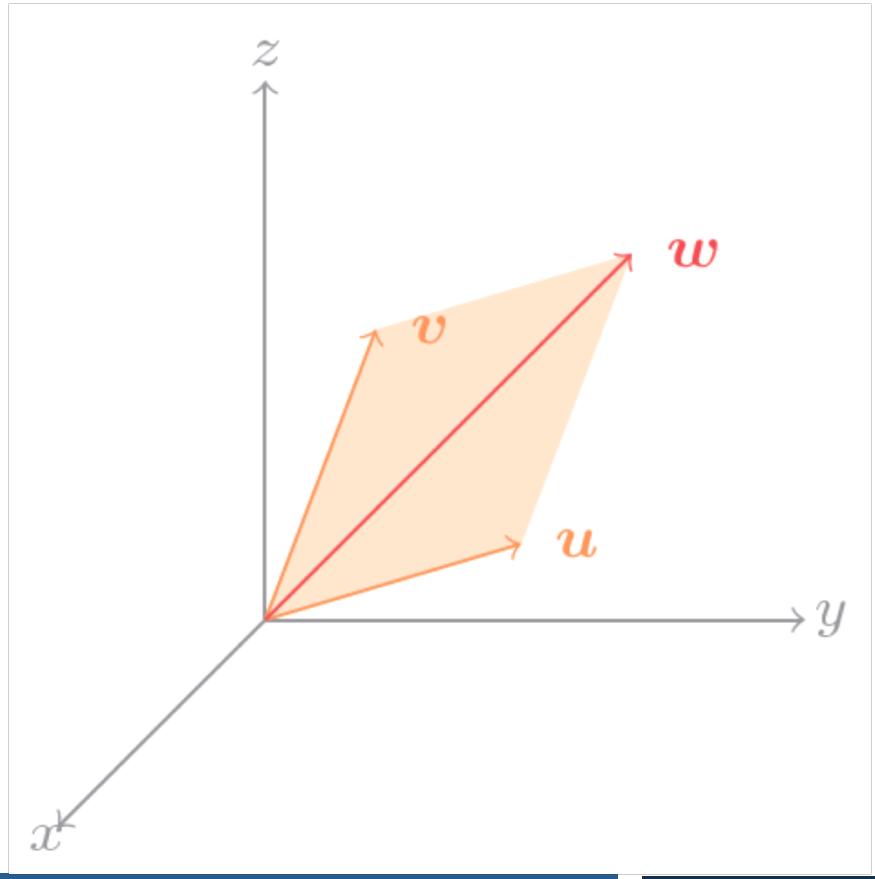
Somme de deux vecteurs

- L'addition est associative et commutative
- W = U + V a pour coordonnées

wx = ux + vx

wy = uy + vy

wz = uz + vz



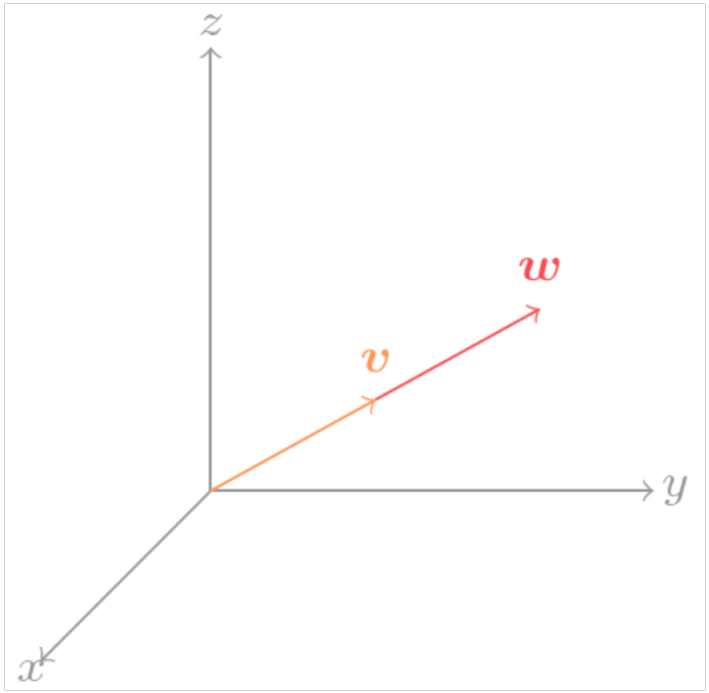
Multiplication par un scalaire

- W = k V a pour coordonnées

  wx = k vx

  wy = k vy

  wz = k vz



Produit scalaire

Le produit scalaire (dot product) de deux vecteurs u et v est le nombre réel:

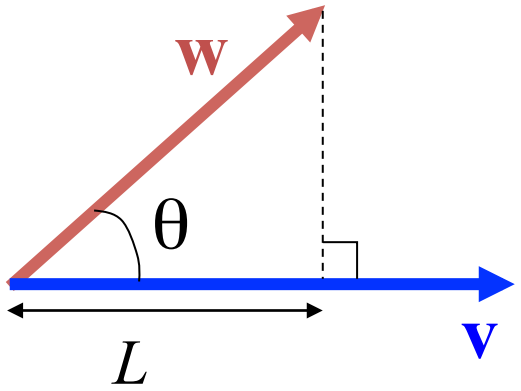
$v \cdot w = xv*xw + yv*yw + zv*zw$

Le produit scalaire du vecteur v par lui même est la carré de sa longueur

$v^2 = xv^2 + yv^2 + zv^2$

Le produit scalaire est la longueur de la projection du vecteur v sur le vecteur w, qui dépend du cosinus de l'angle entre les 2 vecteurs:

$$< \mathbf{v}, \mathbf{w} > = \| \mathbf{v} \| \cdot \| \mathbf{w} \| \cdot \cos\theta$$



Propriétés remarquables:

- $v \cdot w = 0$, les 2 vecteurs sont perpendiculaires
- $v \cdot w > 0$, les 2 vecteurs ont la même direction
- $v \cdot w < 0$, les 2 vecteurs ont des directions opposées

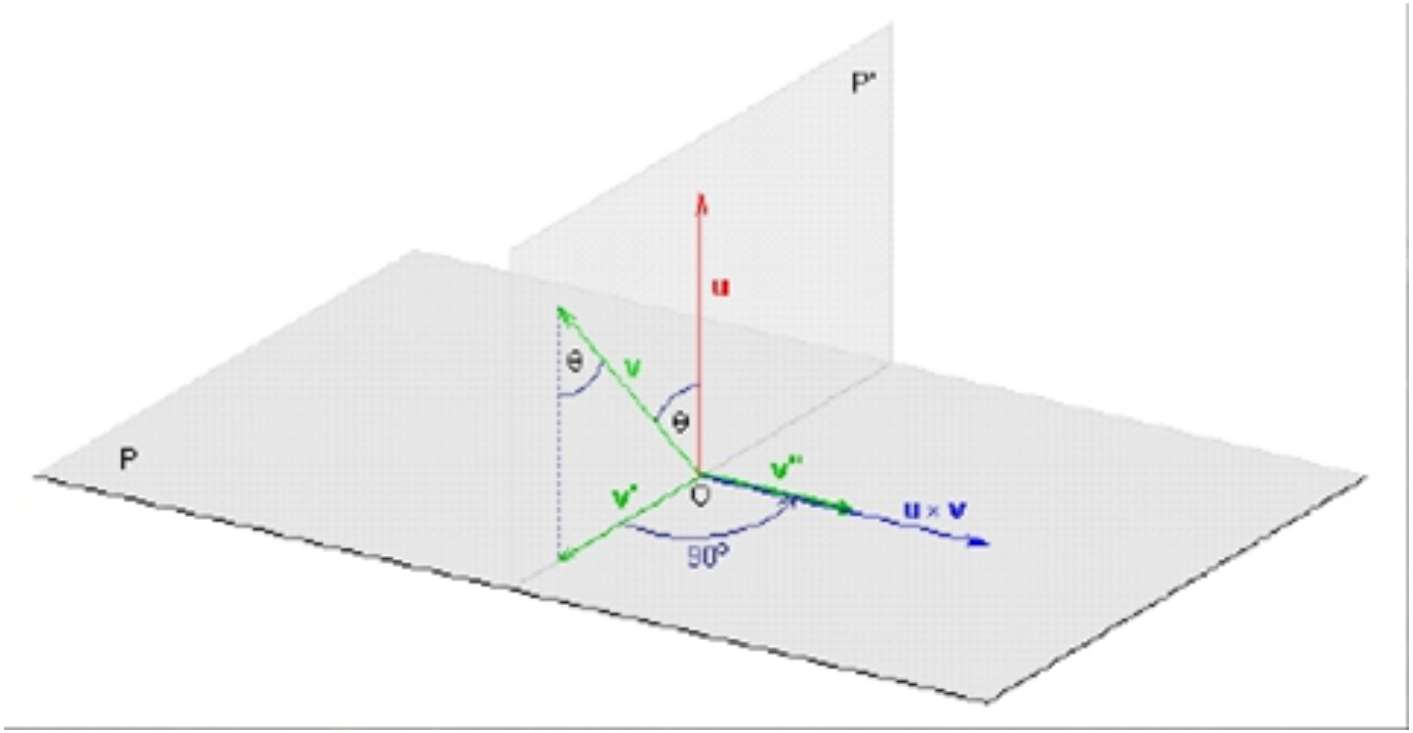
Produit vectoriel

Le produit vectoriel (cross product) de deux vecteurs u et v non colinéaires est le vecteur:

$$u \times v = (yu - zv, xv - zu, xu - yv)$$

Le produit vectoriel est le vecteur orthogonal au plan formé par les 2 vecteurs u et v.

NB: Le produit vectoriel est non-commutatif : uxv != vxu



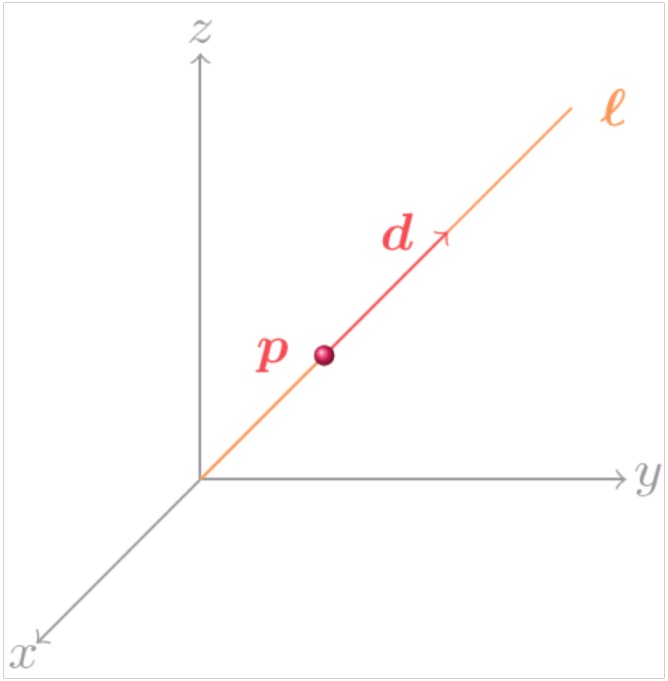
Equation d'une droite

L'équation paramétrique de la droite passant par le point p et de direction d s'écrit

$x(t) = p + td$

L'équation paramétrique de la droite passant par 2 points p et q s'écrit

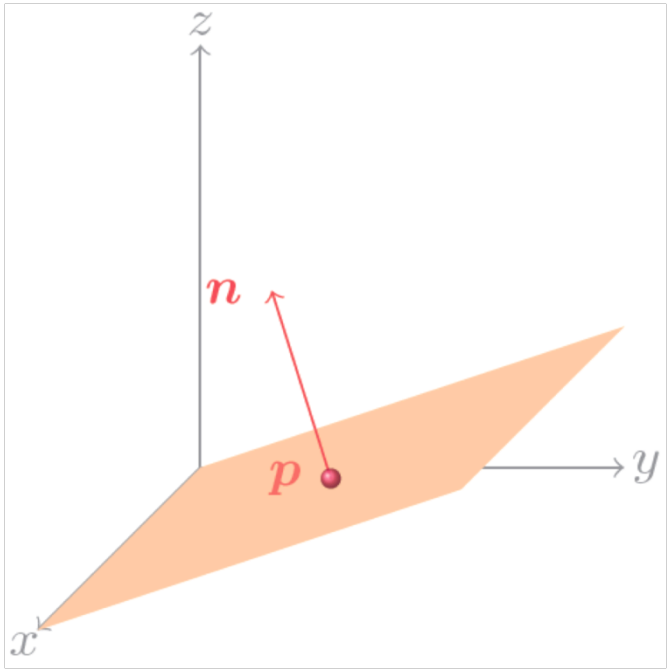
$x(t) = p + t(q-p) = (1-t)\,p + t\,q$



Equation d'un plan

Soit le plan P défini par les éléments suivants:

- un point p de coordonnées xp, yp, zp
- le vecteur normal au plan n de coordonnées xn, yn, zn



Le plan P est donc formé par l'ensemble des points x de l'espace, tels que:

$$(x-p).n = 0$$

Soit

$$(x-xp)*xn + (y-yp)*yn + (z-zp)*zn = 0$$

Soit

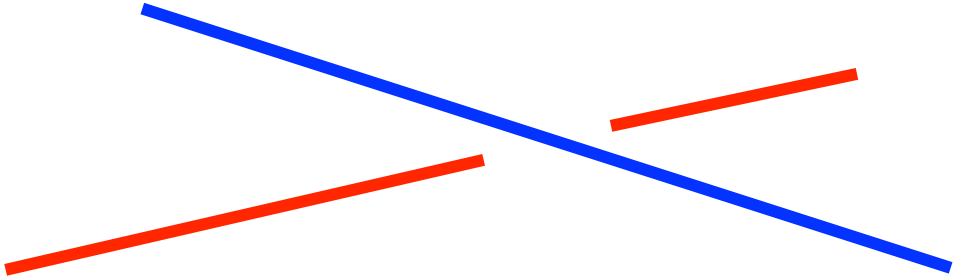
$$xn*x + yn*y + zn*z - xp*xn - yp*yn - zp*zn = 0$$

Réciproquement, toute équation de la forme ax+by+cz+d = 0 est l'équation d'un plan perpendiculaire à (a,b,c) passant par les point (-d/a,0,0), (0,-d/b,0) et (0,0,-d/c) !

Intersection de deux droites

Soient les droites (P1P2) et (P3P4) d'équations paramétriques:

$$Pa = P1 + ua\ (P2 - P1)$$
$$Pb = P3 + ub\ (P4 - P3)$$



Leur intersection est vide en général !

En résolvant pour le point où Pa = Pb, on obtient 3 équations à 2 inconnues (ua et ub) :

$$x1 + ua\ (x2 - x1) = x3 + ub\ (x4 - x3)$$
$$y1 + ua\ (y2 - y1) = y3 + ub\ (y4 - y3)$$
$$z1 + ua\ (z2 - z1) = z3 + ub\ (z4 - z3)$$

Par contre, on peut toujours trouver deux points de distance minimale sur les deux droites. Si ces deux points sont confondus (distance nulle), ils nous donnent le point d'intersection. Sinon, ils nous indiquent la "distance" entre les deux droites.

Intersection d'une droite et d'un plan

Soit le plan représenté par l'équation suivante:

$$Ax + By + Cz + D = 0$$

Soit la droite représentée par l'équation suivante:

$$P = P1 + u(P2 - P1)$$

En injectant l'équation de la droite dans l'équation du plan, on obtient:

$$A\,(x1 + u\,(x2 - x1)) + B\,(y1 + u\,(y2 - y1)) + C\,(z1 + u\,(z2 - z1)) + D = 0$$

En réinjectant u dans l'équation de la droite, on obtient la position du point d'intersection.

Notes:

- Si le dénominateur est 0, la droite est parallèle au plan et il n'y a pas d'intersection.
- Si l'on doit déterminer l'intersection sur le segment P1P2, il suffit de vérifier que la valeur de u est comprise entre 0 et 1.

Projection d'un point sur une droite

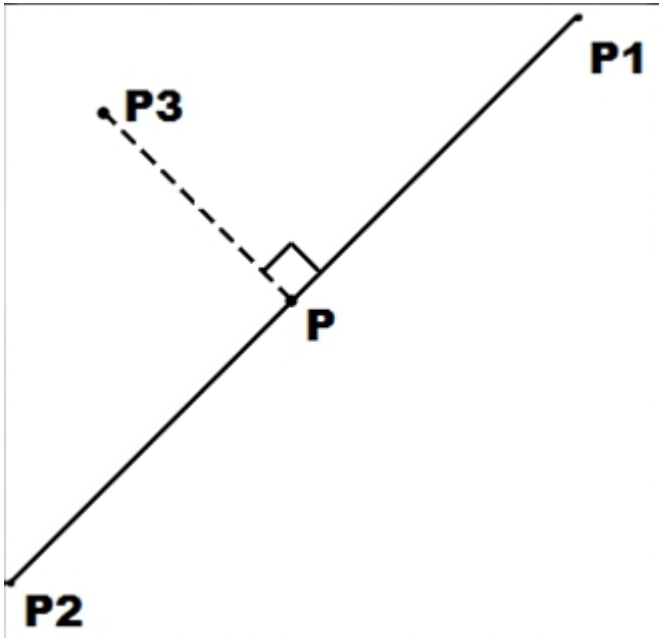
Soit la droite: P = P1 + u (P2 - P1)

Le point de la droite au plus proche de P3 est à l'endroit où la tangente à la droite passe par P3, soit: $(P3 - P) \cdot (P2 - P1) = 0$

En calculant le produit scalaire $(P - P1) \cdot (P2 - P1)$, on obtient la longueur de la projection du segment (P3-P1) sur la droite.

On en déduit la valeur de

En réinjectant la valeur de u dans l'équation de droite, on obtient la position du point projeté.



Distance entre un point et un plan

Soit le plan d'équation:

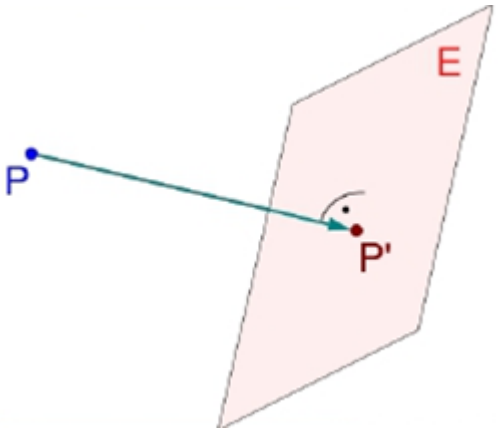
$$Ax + By + Cz + D = 0$$

Soit le point P, dont on veut connaître la distance et la position relativement au plan.

En injectant les coordonnées xp, yp, zp du point P dans l'équation du plan, on obtient :

$$V = Axp + Byp + Czp + D$$

- La valeur absolue de V définit la distance du point P au plan
- Le signe de V définit la position du point relativement au plan (positif: le point P est situé au-dessus du plan relativement à la normale)



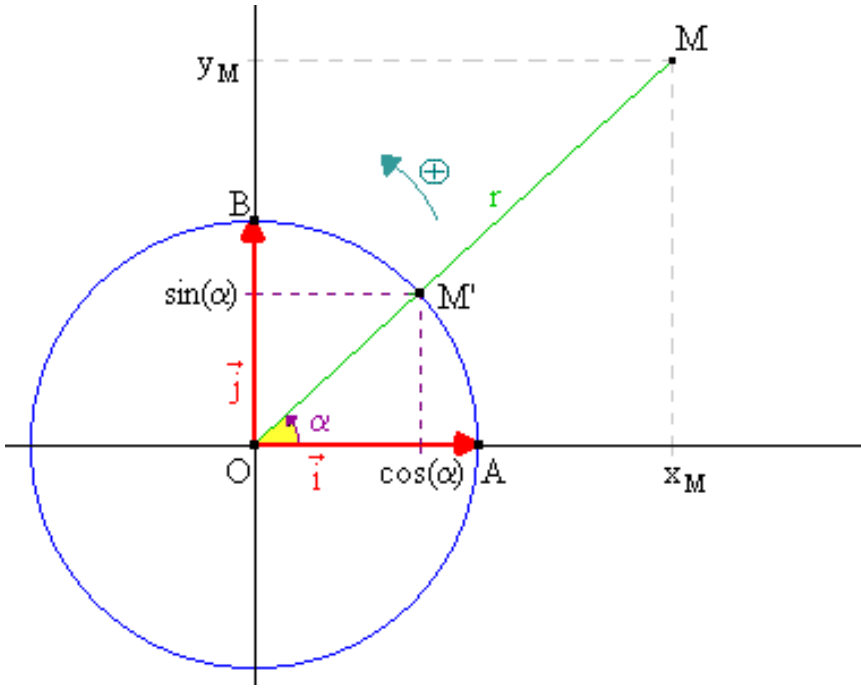
Rappels de trigonométrie

Cosinus et Sinus

Soit le cercle de centre O et de rayon 1. Soit α l'angle entre un rayon OM' de ce cercle et l'axe horizontal.

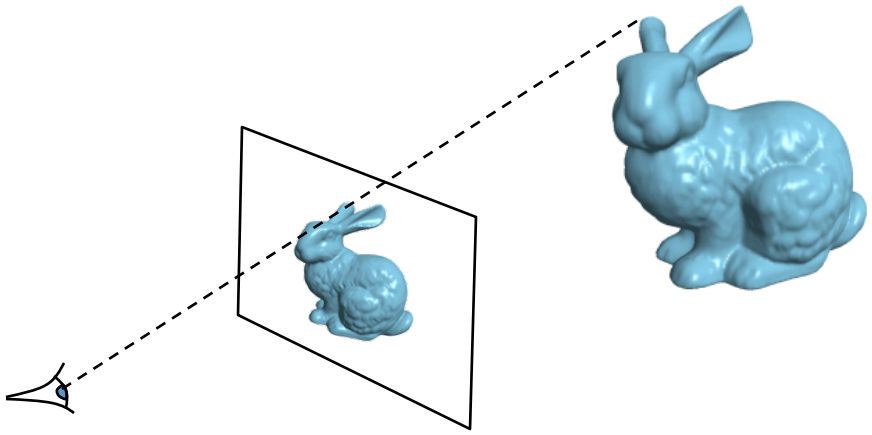
On appelle cosinus de l'angle α, noté cos(α), la longueur de la projection orthogonale du rayon OM' sur l'axe horizontal passant par O.

On appelle sinus de l'angle α, noté sin(α), la longueur de la projection orthogonale du rayon OM' sur l'axe vertical passant par O.

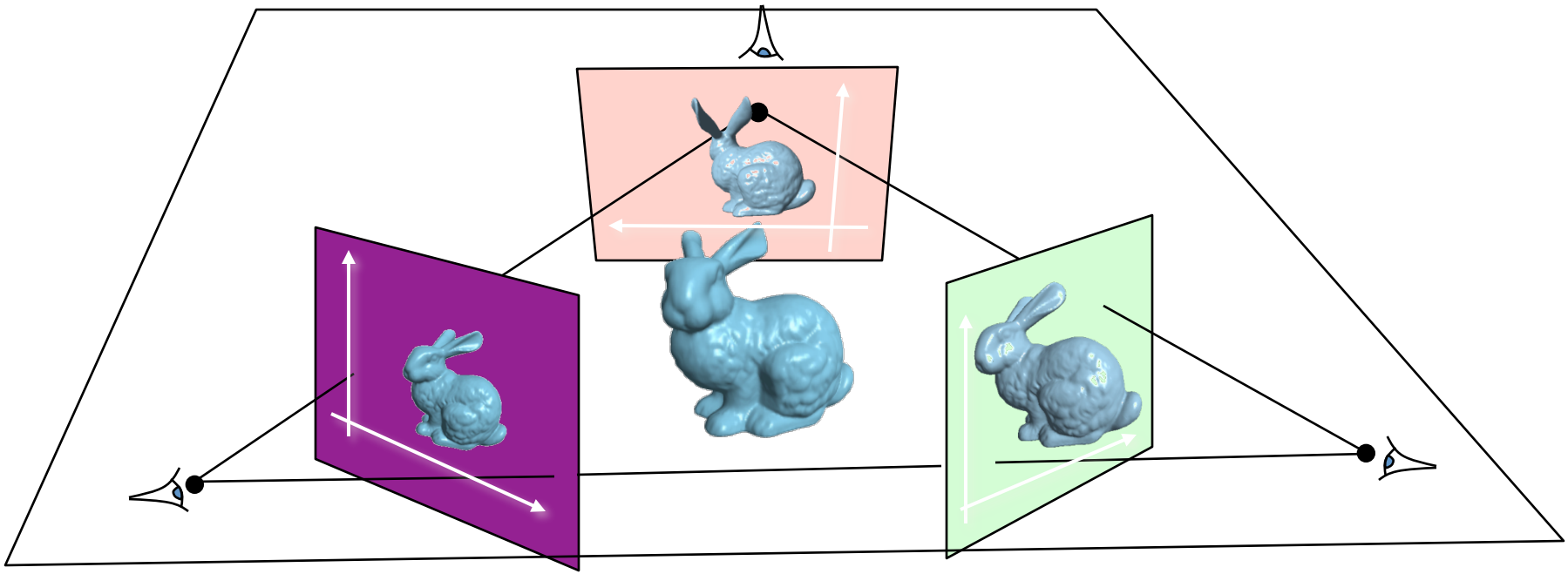


Projective geometry

- Images of 3D world are some projective transformations 3D → 2D
- Expressed in matrix (linear) form when homogeneous coordinates are used



Relation between different images



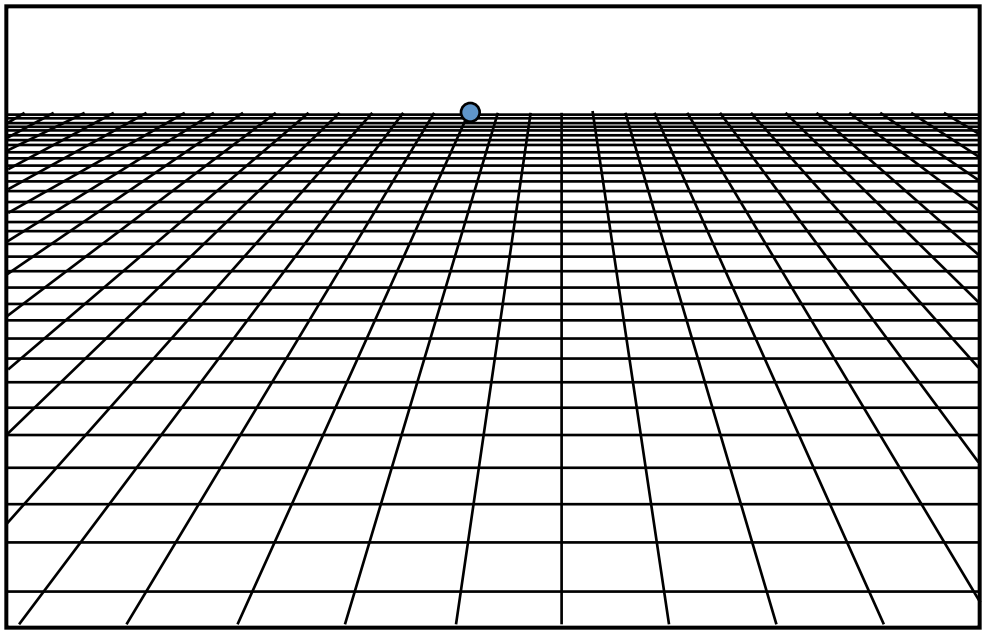
The different images are related by Fundamental Matrices

Projective transformations

- A general projective transformation
  - Preserves collinearity (three points on a line will stay on the line)
  - Doesn't preserve parallelism, lengths, angles

Projective transformations

- Projective transformation is not linear
- Points at infinity may be mapped to finite points in the image and vice versa



Homogeneous coordinates

- Add one dimension to the representation
- Any linear transformation in homogeneous coordinates is in fact projective transformation

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{pmatrix}$$

Homogeneous coordinates

- The representation is unique up to scale

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ c \end{pmatrix} \text{ represents the point } \begin{pmatrix} x/c \\ y/c \end{pmatrix} \text{ for any } c \neq 0$$

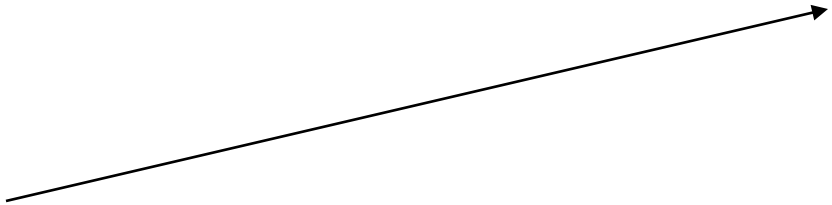
$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ c \end{pmatrix} \text{ represents the point } \begin{pmatrix} x/c \\ y/c \\ z/c \end{pmatrix} \text{ for any } c \neq 0$$

Homogeneous coordinates

- Points at infinity:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ 0 \end{pmatrix} \text{ represents the infinite point in direction } \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ 0 \end{pmatrix} \text{ represents the infinite point in direction } \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$



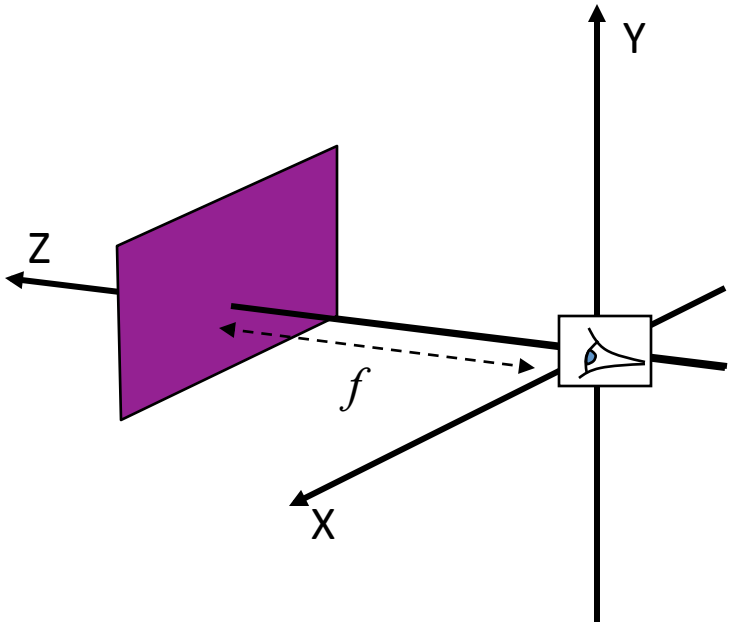
Projective transformation

- Linear transformation of homogeneous coordinates
- From 3D model to 2D image: 3×4 matrix

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ c' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} m_{11} & m_{12} & m_{13} & m_{14} \\ m_{21} & m_{22} & m_{23} & m_{24} \\ m_{31} & m_{32} & m_{33} & m_{34} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ c \end{pmatrix}$$

Simple pinhole camera model

- The camera center C is in the origin of R^3
- The image plane is $z = f$

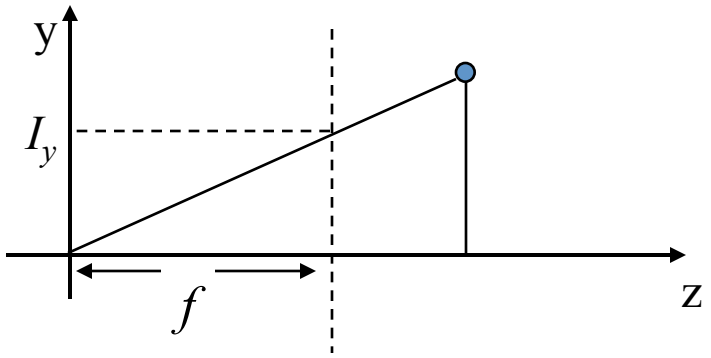


Simple pinhole camera model

- The simple camera matrix:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} fx \\ fy \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f & & & 0 \\ & f & & 0 \\ & & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{pmatrix} \cong \begin{pmatrix} fx/z \\ fy/z \\ 1 \end{pmatrix}$$

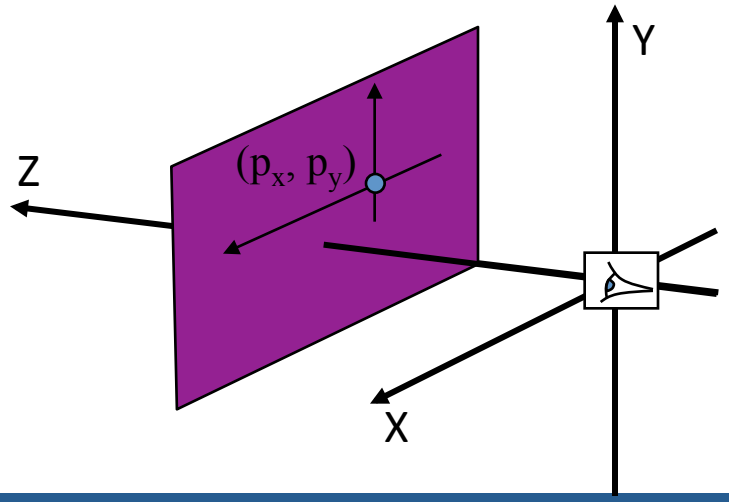
$I_y / f = y / z$
$I_y = fy/z$



General pinhole camera model

1) The image plane origin may be translated:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} fx + p_x z \\ fy + p_y z \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f & & p_x & 0 \\ & f & p_y & 0 \\ & & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{pmatrix} \cong \begin{pmatrix} fx/z + p_x \\ fy/z + p_y \\ 1 \end{pmatrix}$$



General pinhole camera model

K is called calibration matrix (internal camera parameters):

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} fx + p_x z \\ fy + p_y z \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f & & p_x & 0 \\ & f & p_y & 0 \\ & & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{pmatrix} \cong \begin{pmatrix} fx/z + p_x \\ fy/z + p_y \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$K = \begin{pmatrix} f & & p_x \\ & f & p_y \\ & & 1 \end{pmatrix}$$

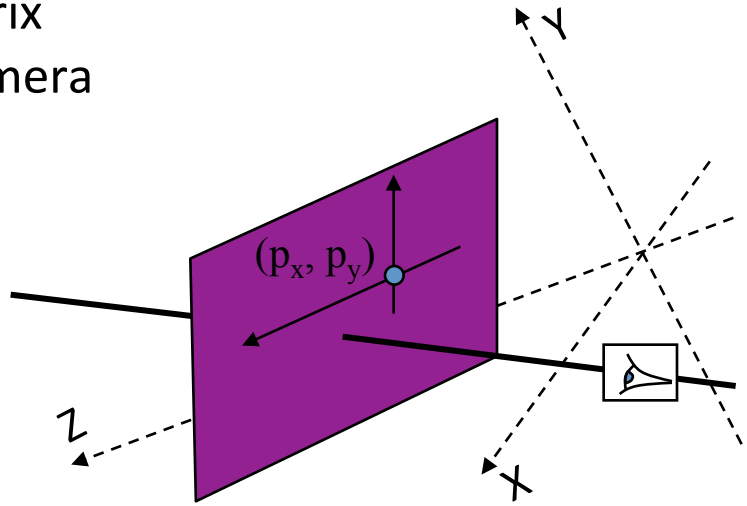
General pinhole camera model

2) The world coordinates may be rotated and translated

$$P = K\,R\,(I_{3\times3}\ -C)$$

rotation 3×3 matrix
from world to camera

camera center (3×1)



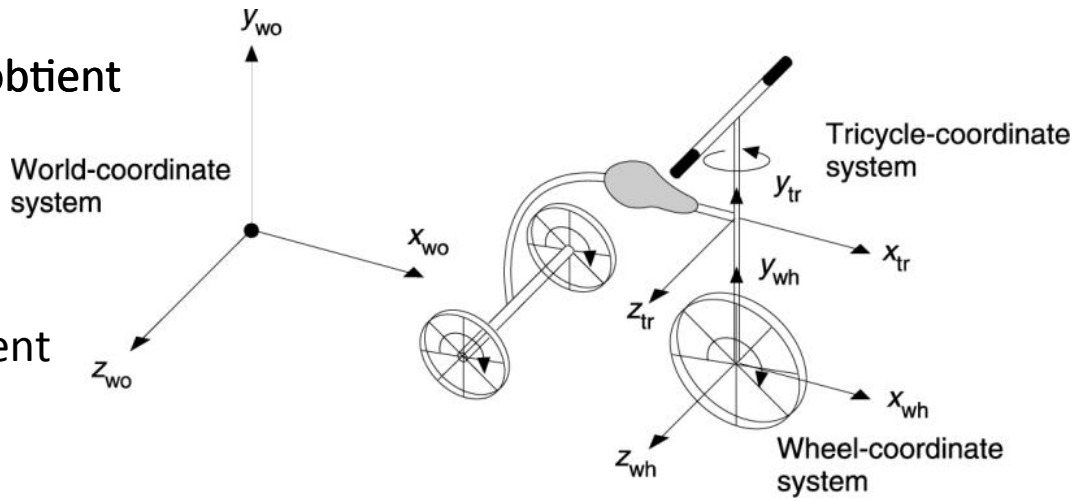
Composition de translations, rotations et changements d'échelles

Si on applique Mi→j suivi de Mj→k on obtient

$$M\text{i}\rightarrow\text{k} = M\text{j}\rightarrow\text{k} * M\text{i}\rightarrow\text{j}$$

Si on inverse la transformation, on obtient

$$M\text{i}\rightarrow\text{k} = (M\text{k}\rightarrow\text{i})\text{-}1$$



Prenons pour exemple l'animation d'un tricycle. La rotation de la roue avant doit être dépendante de la direction du guidon, et sa position dépendante de la position du cadre dans le repère global.

Le principe est d'animer chaque sous-partie dans son propre repère, lui-même exprimé dans le repère de l'élément parent (hiérarchie), puis de cumuler les transformations des éléments parents jusqu'à la racine (repère global).

$$Mwheel = \text{T}bike * Rbike * \text{T}fork * Rfork * Rwheel$$

Quaternions et rotations

Tomb Raider titles use quaternion rotations to animate camera movements.

Définition des quaternions

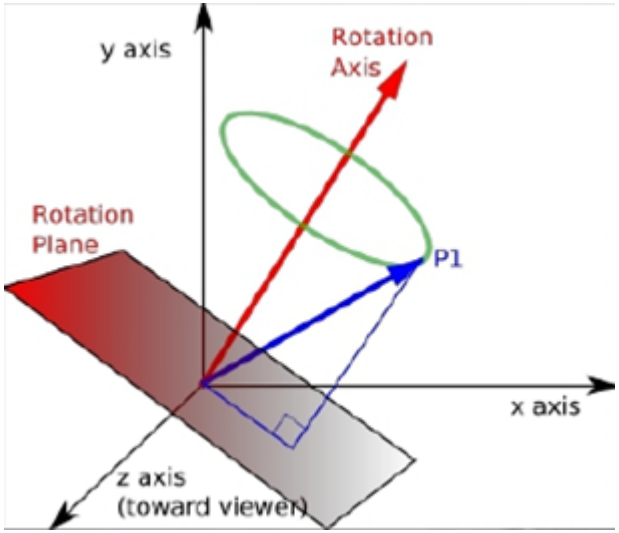
L'ensemble des quaternions constitue un extension de l'ensemble des nombres complexes. Les relations entre les quaternions et les rotations 3D en font un outil mathématique de choix pour l'animation dans l'espace.

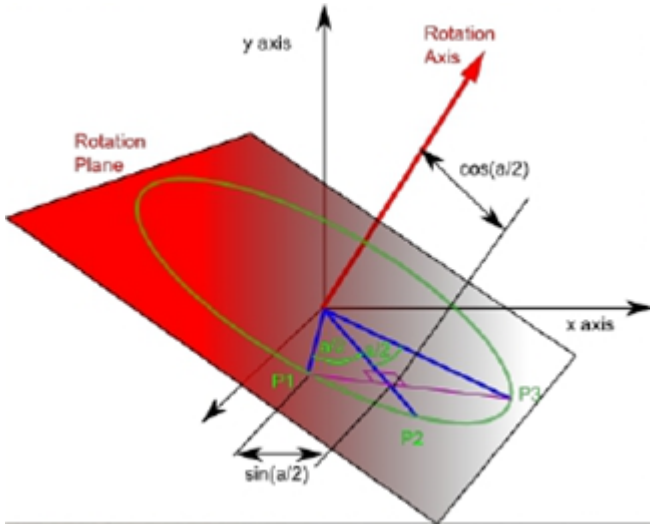
L'espace $\mathbb{H}$ des quaternions est un espace vectoriel réel de dimension 4 rapporté à une base notée (i, j, k, 1).

Tout quaternion $q \in \mathbb{H}$ s'écrit donc de manière unique $q = ai + bj + ck + d$.

Pour faire simple, un quaternion stocke:

- Un axe 3D de rotation
- Un rotation signée autour de cet axe





Addition et soustraction de quaternions

L'addition/soustraction de quaternions est équivalente à l'addition/ soustraction terme à terme

$$Qx = Q1x + Q2x$$
$$Qy = Q1y + Q2y$$
$$Qz = Q1z + Q2z$$
$$Qw = Q1w + Q2w$$

L'opposé d'un quaternion s'obtient en inversant chaque terme du quaternion.

$$Q'x = -Qx$$
$$Q'y = -Qy$$
$$Q'z = -Qz$$
$$Q'w = -Qw$$

Produit de deux quaternions

Le produit de deux quaternions q = [w, v] et q' = [w',v'] est

qq´ = [ww´ - v · v´, v x v´ + wv´ + w´v]

(· est le produit scalaire et x est le produit vectoriel)

La multiplication de deux quaternions correspond à la composition des deux transformations, de la même manière que pour la composition de deux rotations stockées sous forme matricielle. La multiplication de deux quaternions n'est pas commutative (comme pour la forme matricielle).

$$Qx = Q1w * Q2x + Q1x * Q2w + Q1y * Q2z - Q1z * Q2y$$
$$Qy = Q1w * Q2y + Q1y * Q2w + Q1z * Q2x - Q1x * Q2z$$
$$Qz = Q1w * Q2z + Q1z * Q2w + Q1x * Q2y - Q1y * Q2x$$
$$Qw = Q1w * Q2w - Q1x * Q2x - Q1y * Q2y - Q1z * Q2z$$

Rotation et quaternion

- Deux résultats simples et surprenants
  - Le quaternion q = (cosθ, v sinθ) représente une rotation d'axe v et d'angle 2θ !
  - Le résultat de la rotation du vecteur v par q est le produit des quaternions

$$v' = q\, v\, q^{-1}$$

avec v = [0, v] !

Interpolation linéaire sphérique

- Interpolation linéaire entre deux points:

$$LERP(P,Q,t) = (1-t)\,P + t\,Q$$

- Interpolation linéaire entre deux quaternions :

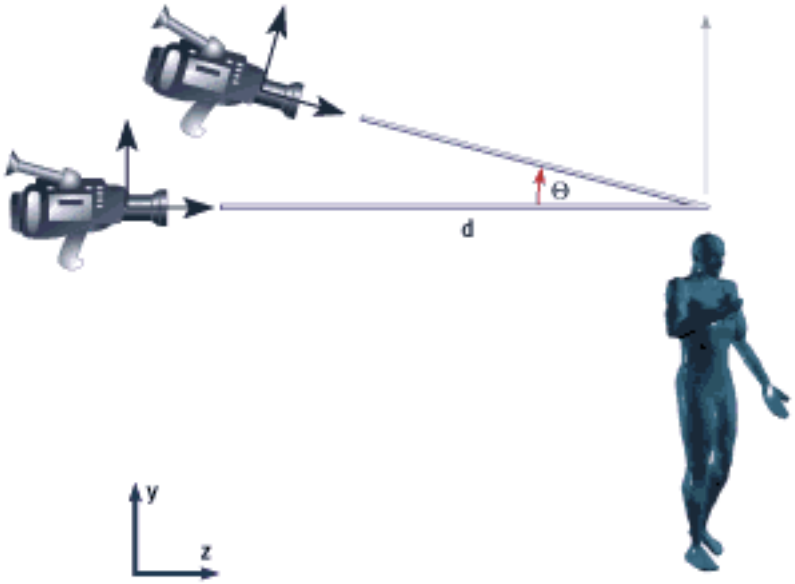
$$SLERP(p,q,t) = \frac{p\sin((1-t)\theta) + q\sin(t\theta)}{\sin(\theta)}$$

Quaternion et caméra

GD,9801,Fig4

GD,9801,Fig4

- Mouvement d'une caméra 3ème personne



$$\frac{dQ}{dt} + 0.5 * quat(angular) * Q$$

Pour aller plus loin