Universidad de Oviedo

Extensiones de la preferencia estadística a la comparación de vectores aleatorios

Julián Ros, Raúl Pérez-Fernández, Ignacio Montes
Universidad de Oviedo

Estructura

Estructura

Órdenes estocásticos

Dominancia estocástica

Dominancia estocástica

Dadas $\mathbf{x}$ e $\mathbf{y}$ con CDFs $F_{\mathbf{x}}, F_{\mathbf{y}}$, $\mathbf{x}$ *domina estocásticamente* a $\mathbf{y}$, y se denota como $\mathbf{x} \succ_{\mathrm{FSD}} \mathbf{y}$, si

$$F_{\mathbf{x}}(t) \lneq F_{\mathbf{y}}(t) \quad \forall t \in \mathbb{R}.$$

Equivalentemente, $\mathbf{x} \succ_{\mathrm{FSD}} \mathbf{y}$ si

$$E\big[u(\mathbf{x})\big] \geq E\big[u(\mathbf{y})\big]$$

para toda función creciente u, con alguna desigualdad estricta.

Preferencia estadística

Ingrediente

$\mathcal{A}$: conjunto de variables aleatorias

Winning probability

$$\begin{array}{rccc} Q: & \mathcal{A}\times\mathcal{A} & \longrightarrow & [0,1] \\ & (\mathbf{x},\mathbf{y}) & \mapsto & Q(\mathbf{x},\mathbf{y}) = P(\mathbf{x}>\mathbf{y}) + \frac{1}{2}P(\mathbf{x}=\mathbf{y}) \end{array}$$

Relación probabilística: $Q(\mathbf{x},\mathbf{y}) + Q(\mathbf{y},\mathbf{x}) = 1$.

Preferencia estadística

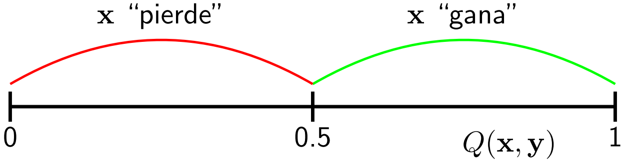
Ingrediente

$\mathcal{A}$: conjunto de variables aleatorias

Winning probability

$$\begin{array}{rccl} Q: & \mathcal{A}\times\mathcal{A} & \longrightarrow & [0,1] \\ & (\mathbf{x},\mathbf{y}) & \mapsto & Q(\mathbf{x},\mathbf{y}) = P(\mathbf{x}>\mathbf{y}) + \frac{1}{2}P(\mathbf{x}=\mathbf{y}) \end{array}$$

Relación probabilística: $Q(\mathbf{x},\mathbf{y}) + Q(\mathbf{y},\mathbf{x}) = 1$.



Preferencia estadística

Ingrediente

$\mathcal{A}$: conjunto de variables aleatorias

Winning probability

$$\begin{array}{rccl} Q: & \mathcal{A}\times\mathcal{A} & \longrightarrow & [0,1] \\ & (\mathbf{x},\mathbf{y}) & \mapsto & Q(\mathbf{x},\mathbf{y}) = P(\mathbf{x}>\mathbf{y}) + \frac{1}{2}P(\mathbf{x}=\mathbf{y}) \end{array}$$

Relación probabilística: $Q(\mathbf{x},\mathbf{y}) + Q(\mathbf{y},\mathbf{x}) = 1$.

Preferencia estadística

$\mathbf{x}$ es *preferida estadísticamente* a $\mathbf{y}$, denotado como $\mathbf{x} \succ_{\mathrm{SP}} \mathbf{y}$, si $Q(\mathbf{x},\mathbf{y}) > 0.5$.

Preferencia estadística

Home > IFSA 2003 > Conference paper

A Fuzzy Approach to Stochastic Dominance of Random Variables

Bart De Schuymer, Hans De Meyer & Bernard De Baets

pp 253–260 | Cite this conference paper

Expresiones alternativas

$$
\begin{aligned}
Q(\mathbf{x},\mathbf{y}) > 0.5 &\Leftrightarrow Q(\mathbf{x},\mathbf{y}) > Q(\mathbf{y},\mathbf{x}) \\
&\Leftrightarrow P(\mathbf{x} > \mathbf{y}) > P(\mathbf{y} > \mathbf{x}) \Leftrightarrow P(\mathbf{x} \geq \mathbf{y}) > P(\mathbf{y} \geq \mathbf{x})
\end{aligned}
$$

Preferencia estadística

Home > IFSA 2003 > Conference paper

A Fuzzy Approach to Stochastic Dominance of Random Variables

Bart De Schuymer, Hans De Meyer & Bernard De Baets

pp 253–260 | Cite this conference paper

Expresiones alternativas

$$Q(\mathbf{x},\mathbf{y}) > 0.5 \Leftrightarrow Q(\mathbf{x},\mathbf{y}) > Q(\mathbf{y},\mathbf{x}) \Leftrightarrow P(\mathbf{x} > \mathbf{y}) > P(\mathbf{y} > \mathbf{x}) \Leftrightarrow P(\mathbf{x} \geq \mathbf{y}) > P(\mathbf{y} \geq \mathbf{x})$$

Terminología

- $Q(\mathbf{x},\mathbf{y})$: winning probability *(De Schuymer, 2003)*, measure of stochastic superiority *(Vargha, 1998)*, probabilistic index *(Kieser, 2012)*, ...
- Preferencia estadística *(De Schuymer, 2003)* o superioridad estocástica *(Vargha, 1998)* si $Q(\mathbf{x},\mathbf{y}) > 0.5$
- Orden de precedencia *(Boland, 2004)* si $P(\mathbf{x} > \mathbf{y}) > P(\mathbf{y} > \mathbf{x})$

Cópulas

Cópulas

Una cópula es una función $C : [0,1] \times [0,1] \to [0,1]$ cumpliendo:

- $C(0,x) = C(x,0) = 0$ para todo $x \in [0,1]$.
- $C(1,x) = C(x,1) = x$ para todo $x \in [0,1]$.
- Es 2-creciente: para todo $x_1 \leq x_2$, $y_1 \leq y_2$

$$C(x_2,y_2) + C(x_1,y_1) \geq C(x_1,y_2) + C(x_2,y_1).$$

Ejemplos

- Producto: $\Pi(x,y) = x \cdot y$.
- Mínimo: $M(x,y) = \min\{x,y\}$.
- Łuckasiewicz: $W(x,y) = \max\{x+y-1,0\}$.
- Desigualdad de Fréchet-Hoeffding:

$$W(x,y) \leq C(x,y) \leq M(x,y)$$

Teorema de Sklar

Teorema de Sklar

Dadas $\mathbf{x}$ e $\mathbf{y}$ con CDFs $F_{\mathbf{x}}, F_{\mathbf{y}}$, existe una cópula C cumpliendo:

$$F_{\mathbf{x},\mathbf{y}}(x, y) = C\big(F_{\mathbf{x}}(x), F_{\mathbf{y}}(y)\big) \quad \forall x, y \in \mathbb{R}.$$

Ejemplos

- Independencia: $F_{\mathbf{x},\mathbf{y}}(x, y) = F_{\mathbf{x}}(x) \cdot F_{\mathbf{y}}(y)$.
- Comonotonía: $F_{\mathbf{x},\mathbf{y}}(x, y) = \min\{F_{\mathbf{x}}(x), F_{\mathbf{y}}(y)\}$.
- Contramonotonía: $F_{\mathbf{x},\mathbf{y}}(x, y) = \max\{F_{\mathbf{x}}(x) + F_{\mathbf{y}}(y) - 1, 0\}$.

Cópulas y SP

Expresión simplificada de Q

Dadas $\mathbf{x}$ e $\mathbf{y}$ continuas con CDFs $F_{\mathbf{x}}, F_{\mathbf{y}}$ ...

- Independencia: $Q(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = E_{\mathbf{x}}\big[F_{\mathbf{y}}\big]$.
- Comonotonía:

$$Q(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \int_{x : F_{\mathbf{x}}(x) < F_{\mathbf{y}}(x)} f_{\mathbf{x}}(x)\mathrm{d}x + \frac{1}{2}\int_{x : F_{\mathbf{x}}(x) = F_{\mathbf{y}}(x)} f_{\mathbf{x}}(x)\mathrm{d}x.$$

- Contramonotonía: $Q(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = F_{\mathbf{y}}(u)$, donde $F_{\mathbf{x}}(u) + F_{\mathbf{y}}(u) = 1$.

Journal of Multivariate Analysis 98 (2007) 177–193

On the transitivity of the comonotonic and countermonotonic comparison of random variables

H. De Meyer[a,*], B. De Baets[b], B. De Schuymer[a]

Journal of Multivariate Analysis

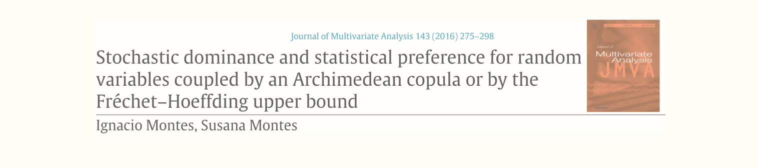
Relación FSD vs SP

FSD vs SP

$\mathbf{x} \succ_{\mathrm{FSD}} \mathbf{y}$ implica $\mathbf{x} \succ_{\mathrm{SP}} \mathbf{y}$ si ...

- ... $\mathbf{x}$ e $\mathbf{y}$ son independientes.
- ... $\mathbf{x}$ e $\mathbf{y}$ son continuas y comonótonas.
- ... $\mathbf{x}$ e $\mathbf{y}$ son discretas y comonótonas.
- ... $\mathbf{x}$ e $\mathbf{y}$ son continuas y su cópula es Arquimediana estricta.

$\mathbf{x} \succ_{\mathrm{FSD}} \mathbf{y}$ no implica $\mathbf{x} \succ_{\mathrm{SP}} \mathbf{y}$ en general.


Journal of Multivariate Analysis 143 (2016) 275–298

Stochastic dominance and statistical preference for random variables coupled by an Archimedean copula or by the Fréchet–Hoeffding upper bound

Ignacio Montes, Susana Montes

Relación con la mediana

SP vs Mediana

1. $\mathbf{x} \succ_{\mathrm{SP}} \mathbf{y} \Rightarrow \mathrm{Me}(\mathbf{x}-\mathbf{y}) \subseteq [0, \infty)$.
2. $\inf \mathrm{Me}(\mathbf{x}-\mathbf{y}) > 0 \Rightarrow \mathbf{x} \succ_{\mathrm{SP}} \mathbf{y}$.
3. Si $P(\mathbf{x}=\mathbf{y}) = 0$ entonces $\mathbf{x} \succ_{\mathrm{SP}} \mathbf{y} \Leftrightarrow \inf \mathrm{Me}(\mathbf{x}-\mathbf{y}) > 0$.

INFOR, Vol. 53, No. 1, February 2015, pp. 1–12

Interpretation of Statistical Preference in Terms of Location Parameters

Ignacio Montes, Davide Martinetti, Susana Díaz and Susana Montes

Estructura

1) Agregación de winning probabilities

Ingredientes

$\mathcal{A}_2$: conjunto de vectores aleatorios
$M : [0,1] \times [0,1] \to [0,1]$ creciente e idempotente

Winning probability agregada

$$\begin{array}{rccl} Q^M\colon & \mathcal{A}_2 \times \mathcal{A}_2 & \longrightarrow & [0,1] \\ & \big(\vec{\mathbf{x}}, \vec{\mathbf{y}}\big) & \mapsto & Q^M\big(\vec{\mathbf{x}}, \vec{\mathbf{y}}\big) = M\big(Q(\mathbf{x_1}, \mathbf{y_1}), Q(\mathbf{x_2}, \mathbf{y_2})\big) \end{array}$$

1) Agregación de winning probabilities

Ingredientes

$\mathcal{A}_2$: conjunto de vectores aleatorios
$M : [0,1] \times [0,1] \to [0,1]$ creciente e idempotente

Winning probability agregada

$$
\begin{array}{rccl}
Q^M: & \mathcal{A}_2 \times \mathcal{A}_2 & \longrightarrow & [0,1] \\
 & (\vec{\mathbf{x}}, \vec{\mathbf{y}}) & \mapsto & Q^M(\vec{\mathbf{x}}, \vec{\mathbf{y}}) = M\big(Q(\mathbf{x_1}, \mathbf{y_1}), Q(\mathbf{x_2}, \mathbf{y_2})\big)
\end{array}
$$

Resultado

Q^M es una relación probabilística si y solo si

$$M(a,b) + M(1-a, 1-b) = 1$$

para todo $(a,b) \in [0,1] \times [0,1]$

1) Agregación de winning probabilities

Definición: M-SP

$\vec{\mathbf{x}}$ es Q^M-*preferido estadísticamente* a $\vec{\mathbf{y}}$, denotado como $\vec{\mathbf{x}} \succ_{\mathrm{SP}}^{M} \vec{\mathbf{y}}$, si $Q^M\big(\vec{\mathbf{x}}, \vec{\mathbf{y}}\big) > 0.5$.

1) Agregación de winning probabilities

Definición: M-SP

$\vec{\mathbf{x}}$ es Q^M*-preferido estadísticamente* a $\vec{\mathbf{y}}$, denotado como $\vec{\mathbf{x}} \succ_{\mathrm{SP}}^{M} \vec{\mathbf{y}}$, si $Q^M\big(\vec{\mathbf{x}}, \vec{\mathbf{y}}\big) > 0.5$.

Caso particular: av-SP

Si $M(a,b) = \mathrm{am}(a,b) = \frac{1}{2}(a+b)$, Q^{am} es una relación probabilística dada por:

$$Q^{\mathrm{am}}\big(\vec{\mathbf{x}}, \vec{\mathbf{y}}\big) = \frac{1}{2}\big(Q(\mathbf{x_1}, \mathbf{y_1}) + Q(\mathbf{x_2}, \mathbf{y_2})\big).$$

1) Agregación de winning probabilities

Definición: M-SP

$\vec{\mathbf{x}}$ es Q^M*-preferido estadísticamente* a $\vec{\mathbf{y}}$, denotado como $\vec{\mathbf{x}} \succ_{\mathrm{SP}}^{M} \vec{\mathbf{y}}$, si $Q^M(\vec{\mathbf{x}}, \vec{\mathbf{y}}) > 0.5$.

Caso particular: av-SP

Si $M(a,b) = \mathrm{am}(a,b) = \frac{1}{2}(a+b)$, Q^{am} es una relación probabilística dada por:

$$Q^{\mathrm{am}}(\vec{\mathbf{x}}, \vec{\mathbf{y}}) = \frac{1}{2}\big(Q(\mathbf{x_1}, \mathbf{y_1}) + Q(\mathbf{x_2}, \mathbf{y_2})\big).$$

Resultado

Son equivalentes:

- $\vec{\mathbf{x}} \succ_{\mathrm{SP}}^{\mathrm{am}} \vec{\mathbf{y}}$
- $Q^{\mathrm{am}}(\vec{\mathbf{x}}, \vec{\mathbf{y}}) > Q^{\mathrm{am}}(\vec{\mathbf{y}}, \vec{\mathbf{x}})$
- $P(\mathbf{x_1} > \mathbf{y_1}) + P(\mathbf{x_2} > \mathbf{y_2}) > P(\mathbf{y_1} > \mathbf{x_1}) + P(\mathbf{y_2} > \mathbf{x_2})$

2) Winning probability de las componentes agregadas

Ingredientes

$\mathcal{A}_2$: conjunto de vectores aleatorios

$g : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ creciente

Winning probability de las agregaciones

$$\begin{array}{rccl} Q^g: & \mathcal{A}_2 \times \mathcal{A}_2 & \longrightarrow & [0,1] \\ & \big(\vec{\mathbf{x}}, \vec{\mathbf{y}}\big) & \mapsto & Q^g\big(\vec{\mathbf{x}}, \vec{\mathbf{y}}\big) = Q\big(g(\vec{\mathbf{x}}), g(\vec{\mathbf{y}})\big) \end{array}$$

Definición: g-SP

$\vec{\mathbf{x}}$ es Q^g-*preferido estadísticamente* a $\vec{\mathbf{y}}$, denotado como $\vec{\mathbf{x}} \succ^g_{\mathrm{SP}} \vec{\mathbf{y}}$, si $Q^g\big(\vec{\mathbf{x}}, \vec{\mathbf{y}}\big) > 0.5$

2) Winning probability de las componentes agregadas

Caso particular: $+$-SP

Si $g(a,b) = a + b$, Q^+ viene dada por

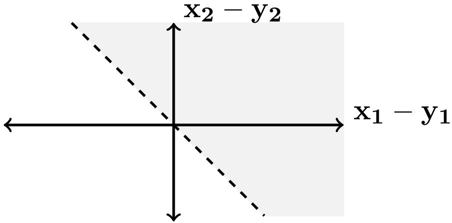
$$Q^+(\vec{\mathbf{x}}, \vec{\mathbf{y}}) = Q(\mathbf{x_1} + \mathbf{x_2}, \mathbf{y_1} + \mathbf{y_2})$$
$$= P(\mathbf{x_1} + \mathbf{x_2} > \mathbf{y_1} + \mathbf{y_2}) + \frac{1}{2} P(\mathbf{x_1} + \mathbf{x_2} = \mathbf{y_1} + \mathbf{y_2})$$

2) Winning probability de las componentes agregadas

Caso particular: $+$-SP

Si $g(a,b) = a + b$, Q^+ viene dada por

$$\begin{aligned} Q^+(\vec{\mathbf{x}}, \vec{\mathbf{y}}) &= Q(\mathbf{x_1} + \mathbf{x_2}, \mathbf{y_1} + \mathbf{y_2}) \\ &= P(\mathbf{x_1} + \mathbf{x_2} > \mathbf{y_1} + \mathbf{y_2}) + \frac{1}{2} P(\mathbf{x_1} + \mathbf{x_2} = \mathbf{y_1} + \mathbf{y_2}) \end{aligned}$$



2) Winning probability de las componentes agregadas

Caso particular: $+$-SP

Si $g(a,b) = a + b$, Q^+ viene dada por

$$\begin{aligned} Q^+\big(\vec{\mathbf{x}}, \vec{\mathbf{y}}\big) &= Q(\mathbf{x_1} + \mathbf{x_2}, \mathbf{y_1} + \mathbf{y_2}) \\ &= P(\mathbf{x_1} + \mathbf{x_2} > \mathbf{y_1} + \mathbf{y_2}) + \frac{1}{2} P(\mathbf{x_1} + \mathbf{x_2} = \mathbf{y_1} + \mathbf{y_2}) \end{aligned}$$

Resultado

Son equivalentes:

- $\vec{\mathbf{x}} \succ^g_{\mathrm{SP}} \vec{\mathbf{y}}$
- $Q^g\big(\vec{\mathbf{x}}, \vec{\mathbf{y}}\big) > Q^g\big(\vec{\mathbf{y}}, \vec{\mathbf{x}}\big)$
- $P\big(g(\vec{\mathbf{x}}) > g(\vec{\mathbf{y}})\big) > P\big(g(\vec{\mathbf{y}}) > g(\vec{\mathbf{x}})\big)$

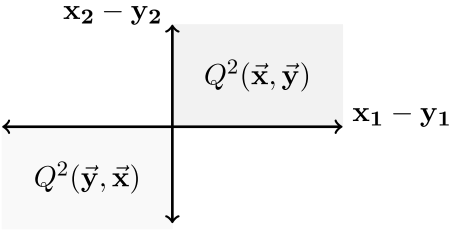
3) Winning probability bivariante

Ingredientes

$\mathcal{A}_2$: conjunto de vectores aleatorios

Joint winning probability

$$\begin{array}{llll} Q^2\colon & \mathcal{A}_2 \times \mathcal{A}_2 & \longrightarrow & [0,1] \\ & (\vec{\mathbf{x}}, \vec{\mathbf{y}}) & \mapsto & Q^2(\vec{\mathbf{x}}, \vec{\mathbf{y}}) = P(\mathbf{x_1} > \mathbf{y_1} \wedge \mathbf{x_2} > \mathbf{y_2}) \end{array}$$



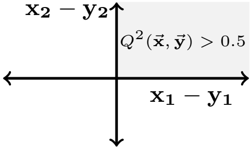
3) Agregación de winning probabilities

Definición

$\vec{\mathbf{x}}$ es *preferido estadísticamente* de forma ...

- ... *fuerte* a $\vec{\mathbf{y}}$, denotado como $\vec{\mathbf{x}} \succ^{s}_{\mathrm{SP}} \vec{\mathbf{y}}$, si $Q^2(\vec{\mathbf{x}}, \vec{\mathbf{y}}) > 0.5$;

SP fuerte

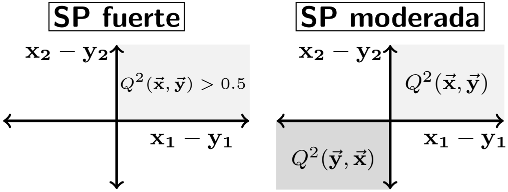


3) Agregación de winning probabilities

Definición

$\vec{\mathbf{x}}$ es *preferido estadísticamente* de forma ...

- ... *fuerte* a $\vec{\mathbf{y}}$, denotado como $\vec{\mathbf{x}} \succ^{s}_{\mathrm{SP}} \vec{\mathbf{y}}$, si $Q^2(\vec{\mathbf{x}}, \vec{\mathbf{y}}) > 0.5$;
- ... *moderada* a $\vec{\mathbf{y}}$, denotado como $\vec{\mathbf{x}} \succ^{m}_{\mathrm{SP}} \vec{\mathbf{y}}$, si $Q^2(\vec{\mathbf{x}}, \vec{\mathbf{y}}) > Q^2(\vec{\mathbf{y}}, \vec{\mathbf{x}})$;

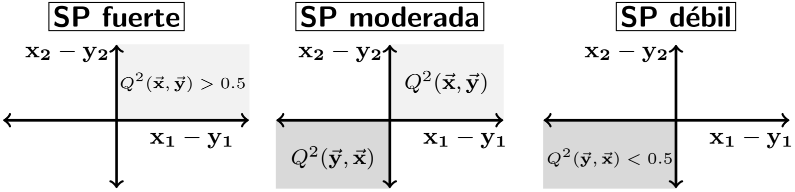


3) Agregación de winning probabilities

Definición

$\vec{\mathbf{x}}$ es *preferido estadísticamente* de forma ...

- ... *fuerte* a $\vec{\mathbf{y}}$, denotado como $\vec{\mathbf{x}} \succ^{s}_{\mathrm{SP}} \vec{\mathbf{y}}$, si $Q^2(\vec{\mathbf{x}}, \vec{\mathbf{y}}) > 0.5$;
- ... *moderada* a $\vec{\mathbf{y}}$, denotado como $\vec{\mathbf{x}} \succ^{m}_{\mathrm{SP}} \vec{\mathbf{y}}$, si $Q^2(\vec{\mathbf{x}}, \vec{\mathbf{y}}) > Q^2(\vec{\mathbf{y}}, \vec{\mathbf{x}})$;
- ... *débil* a $\vec{\mathbf{y}}$, denotado como $\vec{\mathbf{x}} \succ^{w}_{\mathrm{SP}} \vec{\mathbf{y}}$, si $Q^2(\vec{\mathbf{y}}, \vec{\mathbf{x}}) < 0.5$.



Estructura

Relación entre las propuestas

$$\boxed{\vec{\mathbf{x}} \succ^{s}_{\mathrm{SP}} \vec{\mathbf{y}}}$$

$$\boxed{\vec{\mathbf{x}} \succ^{m}_{\mathrm{SP}} \vec{\mathbf{y}}}$$

$$\boxed{\vec{\mathbf{x}} \succ^{w}_{\mathrm{SP}} \vec{\mathbf{y}}}$$

Relación entre las propuestas

$$
\begin{tikzcd}
\boxed{\vec{\mathbf{x}} \succ_{\mathrm{SP}}^{s} \vec{\mathbf{y}}} \arrow[dr] & \\
& \boxed{\vec{\mathbf{x}} \succ_{\mathrm{SP}}^{m} \vec{\mathbf{y}}} \arrow[dl] \\
\boxed{\vec{\mathbf{x}} \succ_{\mathrm{SP}}^{w} \vec{\mathbf{y}}} &
\end{tikzcd}
$$

Relación entre las propuestas

$$
\begin{tikzcd}
\boxed{\vec{\mathbf{x}} \succ^{s}_{\mathrm{SP}} \vec{\mathbf{y}}} \arrow[dr] & \\
\boxed{\vec{\mathbf{x}} \succ^{M}_{\mathrm{SP}} \vec{\mathbf{y}}} & \boxed{\vec{\mathbf{x}} \succ^{m}_{\mathrm{SP}} \vec{\mathbf{y}}} \arrow[dl] \\
\boxed{\vec{\mathbf{x}} \succ^{w}_{\mathrm{SP}} \vec{\mathbf{y}}} &
\end{tikzcd}
$$

Relación entre las propuestas

$$
\begin{tikzcd}
\boxed{\vec{\mathbf{x}} \succ^{s}_{\mathrm{SP}} \vec{\mathbf{y}}} \arrow[d] \arrow[dr] & \\
\boxed{\vec{\mathbf{x}} \succ^{M}_{\mathrm{SP}} \vec{\mathbf{y}}} \arrow[d] & \boxed{\vec{\mathbf{x}} \succ^{m}_{\mathrm{SP}} \vec{\mathbf{y}}} \arrow[dl] \\
\boxed{\vec{\mathbf{x}} \succ^{w}_{\mathrm{SP}} \vec{\mathbf{y}}} &
\end{tikzcd}
$$

Relación entre las propuestas

$$
\begin{tikzcd}
 & \boxed{\vec{\mathbf{x}} \succ^{s}_{\mathrm{SP}} \vec{\mathbf{y}}} \arrow[d] \arrow[dr] & \\
\boxed{\vec{\mathbf{x}} \succ^{g}_{\mathrm{SP}} \vec{\mathbf{y}}} & \boxed{\vec{\mathbf{x}} \succ^{M}_{\mathrm{SP}} \vec{\mathbf{y}}} \arrow[d] & \boxed{\vec{\mathbf{x}} \succ^{m}_{\mathrm{SP}} \vec{\mathbf{y}}} \arrow[dl] \\
 & \boxed{\vec{\mathbf{x}} \succ^{w}_{\mathrm{SP}} \vec{\mathbf{y}}} &
\end{tikzcd}
$$

Relación entre las propuestas

$$
\begin{tikzcd}
 & \vec{\mathbf{x}} \succ_{\mathrm{SP}}^{s} \vec{\mathbf{y}} \arrow[dl] \arrow[d] \arrow[dr] & \\
\vec{\mathbf{x}} \succ_{\mathrm{SP}}^{g} \vec{\mathbf{y}} \arrow[dr] & \vec{\mathbf{x}} \succ_{\mathrm{SP}}^{M} \vec{\mathbf{y}} \arrow[d] & \vec{\mathbf{x}} \succ_{\mathrm{SP}}^{m} \vec{\mathbf{y}} \arrow[dl] \\
 & \vec{\mathbf{x}} \succ_{\mathrm{SP}}^{w} \vec{\mathbf{y}} &
\end{tikzcd}
$$

Relación con la mediana

Mediana bivariante

$$\inf \mathrm{Me}(\vec{\mathbf{x}} - \vec{\mathbf{y}}) = \begin{pmatrix} \inf \mathrm{Me}(\mathbf{x_1} - \mathbf{y_1}) \\ \inf \mathrm{Me}(\mathbf{x_2} - \mathbf{y_2}) \end{pmatrix}$$

- $\inf \mathrm{Me}(\vec{\mathbf{x}} - \vec{\mathbf{y}}) > 0$: ambas medianas son > 0.
- $\inf \mathrm{Me}(\vec{\mathbf{x}} - \vec{\mathbf{y}}) \nleq 0$: al menos una mediana es > 0.
- $\inf \mathrm{Me}(\vec{\mathbf{x}} - \vec{\mathbf{y}}) \nless 0$: al menos una mediana es ≥ 0.

Relación con la mediana

$$\begin{tikzcd}
 & \boxed{\vec{\mathbf{x}} \succ^{s}_{\mathrm{SP}} \vec{\mathbf{y}}} \arrow[dl] \arrow[d] \arrow[dr] & \\
\boxed{\vec{\mathbf{x}} \succ^{g}_{\mathrm{SP}} \vec{\mathbf{y}}} \arrow[dr] & \boxed{\vec{\mathbf{x}} \succ^{M}_{\mathrm{SP}} \vec{\mathbf{y}}} \arrow[d] & \boxed{\vec{\mathbf{x}} \succ^{m}_{\mathrm{SP}} \vec{\mathbf{y}}} \arrow[dl] \\
 & \boxed{\vec{\mathbf{x}} \succ^{w}_{\mathrm{SP}} \vec{\mathbf{y}}} &
\end{tikzcd}$$

Relación con la mediana

$$
\begin{tikzcd}
 & \vec{\mathbf{x}} \succ_{\mathrm{SP}}^{s} \vec{\mathbf{y}} \arrow[ddl] \arrow[dr] & \\
 & & \inf \mathrm{Me}\left(\vec{\mathbf{x}} - \vec{\mathbf{y}}\right) > 0 \arrow[dl] \arrow[d] \\
\vec{\mathbf{x}} \succ_{\mathrm{SP}}^{g} \vec{\mathbf{y}} \arrow[dr] & \vec{\mathbf{x}} \succ_{\mathrm{SP}}^{M} \vec{\mathbf{y}} \arrow[d] & \vec{\mathbf{x}} \succ_{\mathrm{SP}}^{m} \vec{\mathbf{y}} \arrow[dl] \\
 & \vec{\mathbf{x}} \succ_{\mathrm{SP}}^{w} \vec{\mathbf{y}} &
\end{tikzcd}
$$

Relación con la mediana

$$
\begin{tikzcd}
 & \vec{\mathbf{x}} \succ^{s}_{\mathrm{SP}} \vec{\mathbf{y}} \arrow[ddl] \arrow[dr] & & \\
 & & \inf \mathrm{Me}\big(\vec{\mathbf{x}} - \vec{\mathbf{y}}\big) > 0 \arrow[dl] \arrow[d] \arrow[dr] & \\
\vec{\mathbf{x}} \succ^{g}_{\mathrm{SP}} \vec{\mathbf{y}} \arrow[dr] & \vec{\mathbf{x}} \succ^{M}_{\mathrm{SP}} \vec{\mathbf{y}} \arrow[d] & \vec{\mathbf{x}} \succ^{m}_{\mathrm{SP}} \vec{\mathbf{y}} \arrow[dl] & \inf \mathrm{Me}\big(\vec{\mathbf{x}} - \vec{\mathbf{y}}\big) \not\leq 0 \arrow[dll] \\
 & \vec{\mathbf{x}} \succ^{w}_{\mathrm{SP}} \vec{\mathbf{y}} & &
\end{tikzcd}
$$

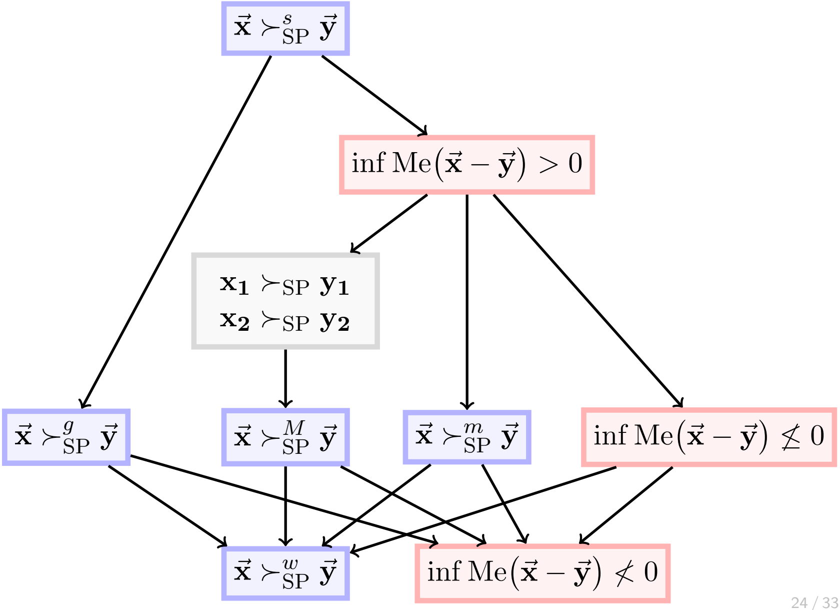
Relación con la mediana

$$
\begin{tikzcd}
 & \vec{\mathbf{x}} \succ^{s}_{\mathrm{SP}} \vec{\mathbf{y}} \arrow[ddl] \arrow[dr] & & \\
 & & \inf \mathrm{Me}\big(\vec{\mathbf{x}} - \vec{\mathbf{y}}\big) > 0 \arrow[dl] \arrow[d] \arrow[dr] & \\
\vec{\mathbf{x}} \succ^{g}_{\mathrm{SP}} \vec{\mathbf{y}} \arrow[dr] \arrow[drr] & \vec{\mathbf{x}} \succ^{M}_{\mathrm{SP}} \vec{\mathbf{y}} \arrow[d] \arrow[dr] & \vec{\mathbf{x}} \succ^{m}_{\mathrm{SP}} \vec{\mathbf{y}} \arrow[dl] \arrow[d] & \inf \mathrm{Me}\big(\vec{\mathbf{x}} - \vec{\mathbf{y}}\big) \nleq 0 \arrow[dll] \arrow[dl] \\
 & \vec{\mathbf{x}} \succ^{w}_{\mathrm{SP}} \vec{\mathbf{y}} & \inf \mathrm{Me}\big(\vec{\mathbf{x}} - \vec{\mathbf{y}}\big) \not< 0 &
\end{tikzcd}
$$

Relación con la SP univariante

$$\boxed{\begin{array}{c}\mathbf{x_1} \succ_{\mathrm{SP}} \mathbf{y_1} \\ \mathbf{x_2} \succ_{\mathrm{SP}} \mathbf{y_2}\end{array}}$$

Relación con la SP univariante



Relación con la FSD univariante

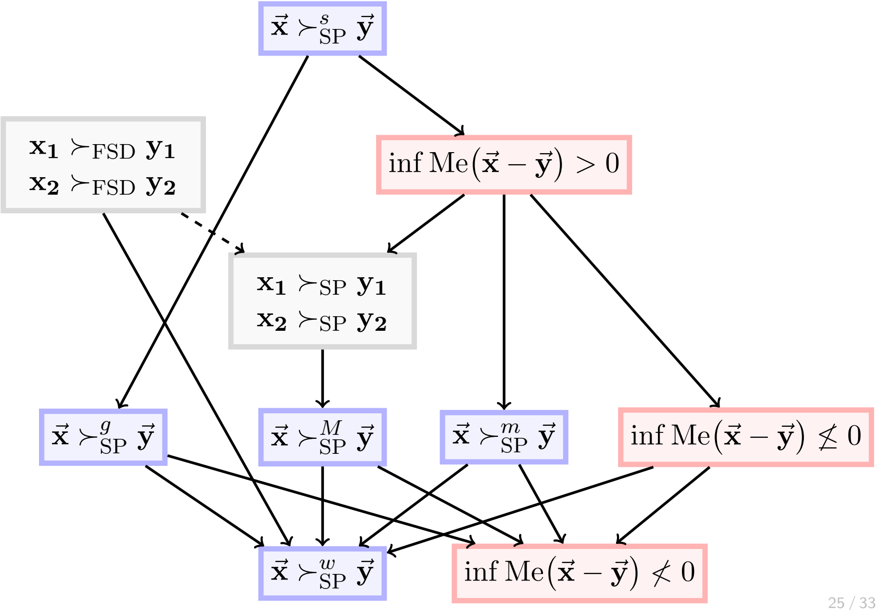
$$\mathbf{x_1} \succ_{\mathrm{FSD}} \mathbf{y_1}$$
$$\mathbf{x_2} \succ_{\mathrm{FSD}} \mathbf{y_2}$$

Relación con la FSD univariante

$$\begin{aligned} \mathbf{x_1} &\succ_{\text{FSD}} \mathbf{y_1} \\ \mathbf{x_2} &\succ_{\text{FSD}} \mathbf{y_2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathbf{x_1} &\succ_{\text{SP}} \mathbf{y_1} \\ \mathbf{x_2} &\succ_{\text{SP}} \mathbf{y_2} \end{aligned}$$

Relación con la FSD univariante



Relación con la FSD bivariante

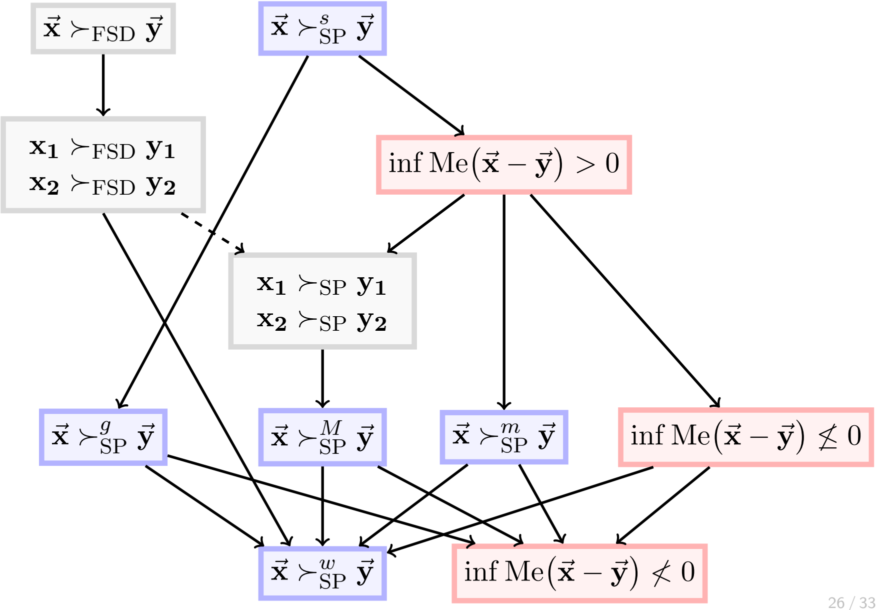
$\vec{\mathbf{x}} \succ_{\mathrm{FSD}} \vec{\mathbf{y}}$

$\vec{\mathbf{x}} \succ_{\mathrm{FSD}} \vec{\mathbf{y}}$ si $E\big[u(\vec{\mathbf{x}})\big] \geq E\big[u(\vec{\mathbf{y}})\big]$ para toda función $u : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ creciente *(con alguna desigualdad estricta)*.

Relación con la FSD bivariante

$$
\begin{tikzcd}
\boxed{\vec{\mathbf{x}} \succ_{\mathrm{FSD}} \vec{\mathbf{y}}} \arrow[d] & \\
\boxed{\begin{array}{c} \mathbf{x_1} \succ_{\mathrm{FSD}} \mathbf{y_1} \\ \mathbf{x_2} \succ_{\mathrm{FSD}} \mathbf{y_2} \end{array}} \arrow[dr, dashed] & \\
& \boxed{\begin{array}{c} \mathbf{x_1} \succ_{\mathrm{SP}} \mathbf{y_1} \\ \mathbf{x_2} \succ_{\mathrm{SP}} \mathbf{y_2} \end{array}}
\end{tikzcd}
$$

Relación con la FSD bivariante



Estructura

1) Otras propuestas

Definición alternativa

Dada $g : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ creciente, se define:

$$Q^g_{\mathrm{dif}}(\vec{\mathbf{x}}, \vec{\mathbf{y}}) = Q\big(g(\vec{\mathbf{x}} - \vec{\mathbf{y}}), \mathbf{0}\big).$$

- ¿Propiedades?
- ¿Relación con Q^g?
- ¿Relación con el resto de propuestas?

2) Conexión con la dif-FSD

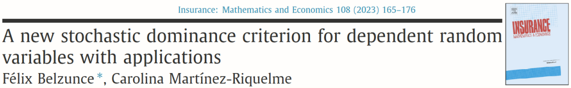
Definición: dif-FSD

$\mathbf{x}$ domina estocásticamente en diferencias a $\mathbf{y}$, y se denota $\mathbf{x} \succ_{\mathrm{FSD}}^{\mathrm{dif}} \mathbf{y}$, si $\mathbf{x} - \mathbf{y} \succ_{\mathrm{FSD}} \mathbf{y} - \mathbf{x}$.

Statistics and Probability Letters 165 (2020) 108848

A modified version of stochastic dominance involving dependence

Ignacio Montes *, Juan Jesús Salamanca, Susana Montes



Insurance: Mathematics and Economics 108 (2023) 165–176

A new stochastic dominance criterion for dependent random variables with applications

Félix Belzunce *, Carolina Martínez-Riquelme

- ¿Relación con Q^{g}_{dif}?
- ¿Relación con $\inf \mathrm{Me}\big(\vec{\mathbf{x}} - \vec{\mathbf{y}}\big)$?.

3) Dependencia

- Depedencia entre las componentes de $\vec{\mathbf{x}}$ y de $\vec{\mathbf{y}}$.
- Dependencia entre los vectores aleatorios $\vec{\mathbf{x}}$ e $\vec{\mathbf{y}}$.
- Papel de la cópula.
- Conexiones adicionales bajo determinadas relaciones de (in)dependencia.

4) Otras definiciones de mediana

Mediana puramente bivariante:

- Spatial median *(Weber, 1909)*.
- Halfspace median *(Tukey, 1975)*.
- Simplex median *(Oja, 1983)*.
- Convex hull peeling median *(Eddy, 1982)*.
- ...

ELSEVIER

Fuzzy Sets and Systems 414 (2021) 70–84

On an order-based multivariate median

Raúl Pérez-Fernández

FUZZY sets and systems

Resumen

	Relación probabilística	Dependencia
$\succ_{\mathrm{SP}}^{M}$	✓	✗
$\succ_{\mathrm{SP}}^{g}$	✓✓	✓
$\succ_{\mathrm{SP}}^{s}$	✗	✓✓
$\succ_{\mathrm{SP}}^{m}$	✗	✓✓
$\succ_{\mathrm{SP}}^{w}$	✗	✓✓

Financiación

Proyecto **PID2022-140585NB-I00** financiado por MICIU/AEI/10.13039/501100011033 y por FEDER, UE