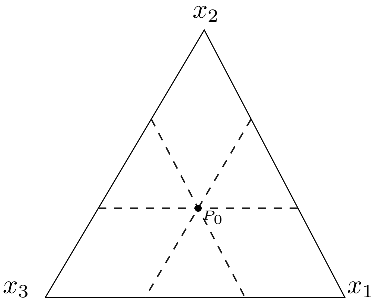
Robustificación de medidas no aditivas mediante la variación total

David Nieto-Barba nietodavid@uniovi.es
Ignacio Montes imontes@uniovi.es
Enrique Miranda mirandaenrique@uniovi.es

XLI Congreso Nacional de Estadística e Investigación Operativa

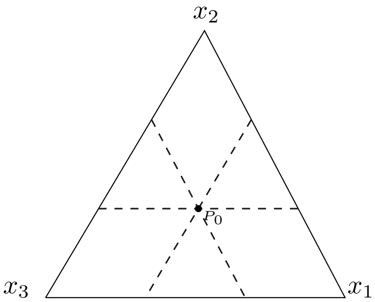
Motivación

$$\mathcal{X} = \{x_1, x_2, x_3\}, \quad (\nu, \overline{\nu}), \quad P$$



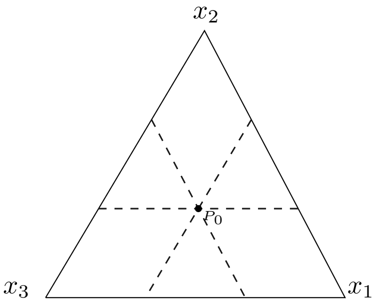
Motivación

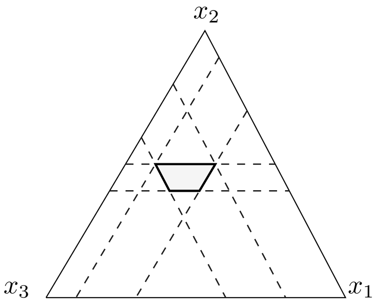
$$\mathcal{X} = \{x_1, x_2, x_3\}, \quad (\nu, \overline{\nu}), \quad P$$



Motivación

$$\mathcal{X} = \{x_1, x_2, x_3\}, \quad (\nu, \overline{\nu}), \quad P$$





1. Nociones previas
2. Distorsiones de juegos
3. Otras aplicaciones
4. Conclusiones y líneas futuras

Sea $\mathcal{X} = \{x_1, \ldots, x_n\}$ y $\mathbb{P}(\mathcal{X})$ el conjunto de probabilidades sobre $\mathcal{P}(\mathcal{X})$.

Definición (Juego y core)

Se dice ***juego cooperativo (normalizado)*** *a* $\nu : \mathcal{P}(\mathcal{X}) \to [0,1]$ *tal que* $\nu(\emptyset) = 0$ *y* $\nu(\mathcal{X}) = 1$ *, el cual es* ***monótono***, ***balanceado***, ***exacto****, resp., si:*

$$A \subseteq B \Rightarrow \nu(A) \leq \nu(B), \quad \mathit{core}(\nu) \neq \emptyset, \quad \nu(A) = \min_{P \in \mathit{core}(\nu)} P(A),$$

$\forall A, B \subseteq \mathcal{X}$ *, donde el* ***core de*** ν *recoge las soluciones compatibles con* ν*:*

$$\mathit{core}(\nu) := \{P \in \mathbb{P}(\mathcal{X}) \mid P(A) \geq \nu(A) \quad \forall A \subseteq \mathcal{X}\}.$$

Dado ν, se define su **juego conjugado** como: $\overline{\nu}(A) = 1 - \nu(A^c)$ $\forall A \subseteq \mathcal{X}$.

Partiremos de juegos normalizados y monótonos, recogidos en $\underline{\mathbb{P}}(\mathcal{X})$ (a.k.a. capacidades normalizadas, medidas difusas o probabilidades imprecisas).

Entre los casos particulares de juegos balanceados, cabe destacar:

- ***Convexos***: $\nu(A \cup B) \geq \nu(A) + \nu(B) - \nu(A \cap B) \quad \forall A, B \subseteq \mathcal{X}$.
- ***k-monótonos***: Para cada $k \geq 3$, $1 \leq p \leq k \in \mathbb{N}$ y $A_1, \ldots, A_p \subseteq \mathcal{X}$:

$$\nu\left(\bigcup_{i=1}^{p} A_i\right) \geq \sum_{I \subseteq \{1, \ldots p\}} (-1)^{|I|+1} \nu\left(\bigcap_{i \in I} A_i\right).$$

- ***Minitivos***: $\nu(A \cap B) = \min\{\nu(A), \nu(B)\} \quad \forall A, B \subseteq \mathcal{X}$.
- ***P-box***: existe $(\underline{\mathcal{F}}, \overline{\mathcal{F}})$ tal que, sea $A_i = \{x_1, \ldots, x_i\}$:

$$\text{core}(\nu) = \{P \in \mathbb{P}(\mathcal{X}) \mid \underline{\mathcal{F}}(A_i) \leq F_P(A_i) \leq \overline{\mathcal{F}}(A_i) \ \forall i \in \{1, \ldots, n\}\}.$$

- ***Intervalos de probabilidad***: ν exacto y tal que:

$$\text{core}(\nu) = \{P \in \mathbb{P}(\mathcal{X}) \mid \nu(\{x\}) \leq P(\{x\}) \leq \overline{\nu}(\{x\}) \ \forall x \in \mathcal{X}\}.$$

- ***Probabilidades precisas***: $\nu = P \in \mathbb{P}(\mathcal{X}) \subset \underline{\mathbb{P}}(\mathcal{X})$.

En el marco de las probabilidades imprecisas, se dan las visiones de ν:

- Epistémica: cota inferior a una "verdadera" probabilidad en core(ν).
- Comportamental: supremo precio de compra aceptable de apuestas.

Definición (Previsión inferior)

*Una **previsión inferior** es un funcional real sobre* $\mathcal{K} \subseteq \mathcal{L}(\mathcal{X}) := \{g : \mathcal{X} \to \mathbb{R}\}$.

Definición (Extensión natural, envolvente por abajo)

*La **extensión natural** de ν se define como $\underline{E}_\nu : \mathcal{L}(\mathcal{X}) \to \mathbb{R}$ tal que*

$$\underline{E}_\nu(f) = \min_{P \in \textit{core}(\nu)} E_P(f) \quad \forall f \in \mathcal{L}(\mathcal{X}), \quad \textit{si core}(\nu) \neq \emptyset.$$

*La **envolvente por abajo** de core $\subseteq \mathbb{P}(\mathcal{X})$ cerrado, convexo y no vacío se define como:*

$$\underline{E}(f) := \min_{P \in \textit{core}} E_P(f), \quad \forall f \in \mathcal{L}(\mathcal{X}).$$

Sean $P_0 \in \mathbb{P}(\mathcal{X})$, $\delta \geq 0$ y $d : \mathbb{P}(\mathcal{X}) \times \mathbb{P}(\mathcal{X}) \to [0, +\infty)$, se define:

$$B_d^\delta(P_0) := \{P \in \mathbb{P}(\mathcal{X}) \mid d(P, P_0) \leq \delta\}.$$

Proposición

$d(\cdot, P_0)$ *continua,convexa* $\Rightarrow B_d^\delta(P_0) =$ *core*$(\underline{E})$, $\underline{E}(f) = \min_{P \in B_d^\delta(P_0)} E_P(f)$.

Definición (Variación Total)

$$d_{\mathrm{TV}}(Q, P_0) := \max_{A \subseteq \mathcal{X}} |Q(A) - P_0(A)|, \quad \forall Q, P_0 \in \mathbb{P}(\mathcal{X}).$$

Proposición

Si $\delta \in (0,1)$, *la restricción a eventos de la envolvente por abajo de* $B_{d_{\mathrm{TV}}}^\delta(P_0)$ *coincide con* $\nu \in \underline{\mathbb{P}}(\mathcal{X})$ *dado por:*

$$\nu(A) = \max\{P_0(A) - \delta, 0\}, \quad \forall A \neq \emptyset, \mathcal{X}.$$

Distorsiones y entornos de juegos

Definición (Distorsión como transformación directa)

Sea $\{\phi_\delta : [0,1] \to [0,1]\}_{\delta\in\Lambda}$ *una familia de funciones no decrecientes acotadas por la identidad en* $[0,1]$. *Dados* $\nu \in \underline{\mathbb{P}}(\mathcal{X})$ *y* $\delta \in \Lambda$, *se define* $\mu_\delta[\nu] : \mathcal{P}(\mathcal{X}) \to [0,1]$ *como:*

$$\mu_\delta[\nu](A) := (\phi_\delta \circ \nu)(A) = \phi_\delta\big(\nu(A)\big) \quad \forall A \neq \emptyset, \mathcal{X}.$$

Ejemplo

- **(I)TVM**: $\Lambda = [0,+\infty)$, $\phi_\delta(t) = \max\{t-\delta, 0\}$.
- **(I)LV**: $\Lambda = [0,+\infty)$, $\phi_\delta(t) = \max\{(1-\delta)t, 0\}$.
- **(I)PMM**: $\Lambda = [0,+\infty)$, $\phi_\delta(t) = \max\{(1+\delta)t-\delta, 0\}$.

Posibles propiedades

Sea $\{\mu_\delta[\cdot]\}_{\delta\in\Lambda}$, $\Lambda = [0, +\infty)$, y $\nu \in \underline{\mathbb{P}}(\mathcal{X})$ cualquiera:

1. (Expansión) $\delta_1 \leq \delta_2 \Rightarrow \mu_{\delta_2}[\nu] \leq \mu_{\delta_1}[\nu]$.
2. (Semigrupo)
   a. $\mu_{\delta_0}[\nu] = \nu$ para $\delta_0 = 0$,
   b. $\mu_{\delta_2+\delta_1}[\nu] = \mu_{\delta_2}\left[\mu_{\delta_1}[\nu]\right]$ $\forall \delta_1, \delta_2 \in \Lambda$.
3. (Preservación de estructuras) $\nu \in \mathcal{H} \subseteq \underline{\mathbb{P}}(\mathcal{X}) \Rightarrow \mu_\delta[\nu] \in \mathcal{H}$ $\forall \delta \in \Lambda$.
4. (Reversibilidad) A partir del par $(\delta, \mu_\delta[\nu])$ puede recuperarse ν.
5. (Invarianza) bajo marginalización, permutaciones y condicionamiento.

Proposición

Si para toda $P \in \mathbb{P}(\mathcal{X})$ se preserva la exactitud, entonces también se preserva esta propiedad para cualquier $\nu \in \underline{\mathbb{P}}(\mathcal{X})$.

Modelo de entorno generalizado

❽ (Modelo de entorno generalizado) $\exists d : \mathbb{P}(\mathcal{X}) \times \underline{\mathbb{P}}(\mathcal{X}) \to \mathbb{R}$ tal que

$$\text{core}\big(\mu_\delta[\nu]\big) = \{Q \in \mathbb{P}(\mathcal{X}) \mid d(Q,\nu) \leq \delta\} =: B_d^\delta(\nu), \quad \forall \delta \in \Lambda.$$

❾ (Conmutatividad débil en puntos extremos) Si ν es exacto:

$$\mu_\delta[\nu](A) = \inf\left\{Q(A) \mid Q \in \bigcup_{P \in \text{ext}(\text{core}(\nu))} \text{core}\big(\mu_\delta[P]\big)\right\}, \quad \forall \delta \in \Lambda.$$

❿ (Conmutatividad fuerte) Si ν es exacto:

$$\text{core}\big(\mu_\delta[\nu]\big) = \bigcup_{P \in \text{core}(\nu)} \text{core}\big(\mu_\delta[P]\big) \quad \forall \delta \in \Lambda.$$

El caso del ITVM

Definición (ITVM)

Dados $\nu \in \underline{\mathbb{P}}(\mathcal{X})$ y $\delta \geq 0$, se define:

$$\mu_\delta[\nu](A) = \max\{\nu(A) - \delta, 0\} \quad \forall A \neq \emptyset, \mathcal{X}.$$

Propiedad	(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)	(7)	(8)	(9)	(10)
ITVM	✓	✓	$\sim^{*1}$	✓^{*2}	✓	✓	✗	✓	✓	✓^{*3}

- ^{*1}: balanceados, exactos, convexos, minitivos (✓); k-monótonos, intervalos de probabilidad, p-box (✗)
- ^{*2}: si $\delta < \min_{x \in \mathcal{X}} \nu(\{x\})$.
- ^{*3}: si ν es convexo.

Si ν es balanceado:

$$d'_{\mathrm{TV}}(Q,\nu) := \max_{A\subseteq\mathcal{X}} \big(\nu(A) - Q(A)\big) = \max_{A\subseteq\mathcal{X}} \min_{P\in\mathsf{core}(\nu)} |P(A) - Q(A)|$$

y

$$Q \in \mathsf{core}(\mu_\delta[\nu]) \Leftrightarrow d'_{\mathrm{TV}}(Q,\nu) \leq \delta,$$

mientras que:

$$Q \in \bigcup_{P\in\mathsf{core}(\nu)} \mathsf{core}\big(\mu_\delta[P]\big) \Leftrightarrow \min_{P\in\mathsf{core}(\nu)} \max_{A\subseteq\mathcal{X}} |P(A) - Q(A)| \leq \delta$$

$$\Leftrightarrow d^{\min}_{\mathrm{TV}}(Q,\nu) := \min_{P\in\mathsf{core}(\nu)} d_{\mathrm{TV}}(Q,P) \leq \delta.$$

Teorema

Si ν es convexo, entonces se satisface:

$$d'_{\mathrm{TV}}(Q,\nu) = d^{\min}_{\mathrm{TV}}(Q,\nu) \quad \forall Q \in \mathbb{P}(\mathcal{X}).$$

N.b. En general, los modelos de entorno difieren a nivel apuestas.

Otros modelos

a. ILV, IPMM y otras extrapolaciones directas.
b. Funciones de distorsión dependientes de eventos:

$$d'_{\mathrm{PTV}}(Q,\nu) := \max_{\emptyset \neq A \subseteq \mathcal{X}} \frac{\nu(A) - Q(A)}{|A|}$$

$$d_{\infty}^{\min}(Q,\nu) := \min_{P \in \mathsf{core}(\nu)} d_{\infty}(Q,P) = \min_{P \in \mathsf{core}(\nu)} \max_{\emptyset \neq A \subseteq \mathcal{X}} \frac{|P(A) - Q(A)|}{|A|}$$

c.

$$d_{\mathrm{TV}}^{\max}(Q,\nu) := \max_{P \in \mathsf{core}(\nu)} d_{\mathrm{TV}}(P,Q).$$

d. Distorsiones a nivel apuestas.

1. Nociones previas
2. Distorsiones de juegos
3. **Otras aplicaciones**
4. Conclusiones y líneas futuras

Definición (Valores probabilísticos)

$$S(\nu)(\{x\}) = \sum_{A|x\notin A} p_A^x \big(\nu(A\cup\{x\}) - \nu(A)\big),$$

donde para cada $x \in \mathcal{X}$, los valores $\{p_A^x : x \notin A\}$ dan lugar a una probabilidad sobre la familia de coaliciones en las que x no está incluido.

Definición (Valor de Shapley)

$$\Phi(\nu)(\{x\}) = \sum_{A|x\notin A} \frac{|A|!(n-|A|-1)!}{n!} \big(\nu(A\cup\{x\}) - \nu(A)\big).$$

Proposición

Sea $\{\mu_\delta[\cdot]\}_{\delta\geq 0}$ el ITVM y $\nu \in \underline{\mathbb{P}}(\mathcal{X})$. Si $\delta < \min_{x\in\mathcal{X}} \nu(\{x\})$ y S es un valor probabilístico tal que $p_\emptyset^x = p_{\{x\}^c}^x \ \forall x \in \mathcal{X}$, entonces $S(\nu) = S(\mu_\delta[\nu])$.

Definición (Strong and weak δ-core)

Dados ν*, con core*$(\nu) = \emptyset$*,* $\delta \geq 0$*, su* strong δ-core *y* weak δ-core *se definen, resp., como:*

$$\mathit{core}^S_\delta(\nu) = \{P \in \mathbb{P}(\mathcal{X}) \mid P(A) \geq \nu(A) - \delta \quad \forall A \neq \emptyset, \mathcal{X}\},$$

$$\mathit{core}^W_\delta(\nu) = \{P \in \mathbb{P}(\mathcal{X}) \mid P(A) \geq \nu(A) - \delta|A| \quad \forall A \neq \emptyset, \mathcal{X}\}.$$

Proposición

$$\mathit{core}\left(\mu_\delta^{d'_{\mathrm{TV}}}[\nu]\right) = \mathit{core}^S_\delta(\nu) \quad \mathit{y} \quad \mathit{core}\left(\mu_\delta^{d'_{\mathrm{PTV}}}[\nu]\right) = \mathit{core}^W_\delta(\nu) \quad \forall \delta \geq 0.$$

1. Nociones previas
2. Distorsiones de juegos
3. Otras aplicaciones
4. Conclusiones y líneas futuras

Conclusiones y líneas futuras

- Extrapolación de modelos clásicos y otros resultados generales.
- Más propiedades de otros modelos ($d_{\mathrm{TV}}^{\text{máx}}$, $d_{\infty}^{\text{mín}}$, d'_{PTV} ...).
- Distorsiones a nivel apuestas.
- Otras conexiones con teoría de juegos.
- Medidas de disimilitud o conflicto entre modelos imprecisos.
- Reglas de agregación en situaciones de conflicto global.

Referencias

Grabisch, M.: Set functions, games and capacities in decision making. Springer (2016)

Miranda, E., Montes, I.: Centroids of the core of exact capacities: a comparative study. Annals of Operations Research **321**, 409–449 (2023)

Montes, I., Miranda, E., Destercke, S.: Unifying neighbourhood and distortion models: Part I- New results on old models. International Journal of General Systems **49**(6), 602–635 (2020)

Moral, S.: Discounting imprecise probabilities. In: Gil, E., Gil, E., Gil, J., Gil, M. (eds.) The Mathematics of the Uncertain, Studies in Systems, Decision and Control, vol. 142. Springer (2018)

Nieto-Barba, D., Miranda, E., Montes, I.: The total variation distance for comparing non-additive measures. Submitted (2025)

Nieto-Barba, D., Montes, I., Miranda, E.: The imprecise total variation model and its connections with game theory. Fuzzy Sets and Systems **517**, 109448 (2025)

Shapley, L., Shubik, M.: Quasi-cores in a monetary economy with nonconvex preferences. Econometrica **34**(4), 805–827 (1966)

Financiación

Proyecto **PID2022-140585NB-I00** financiado por MICIU/AEI/10.13039/501100011033 y por FEDER, UE

Robustificación de medidas no aditivas mediante la variación total

David Nieto-Barba
nietodavid@uniovi.es

Ignacio Montes
imontes@uniovi.es

Enrique Miranda
mirandaenrique@uniovi.es

XLI Congreso Nacional de Estadística e Investigación Operativa