Uso de aproximaciones 2-monótonas interiores y exteriores en problemas de decisión

Ignacio Montes Enrique Miranda Andrés Presa

(imontes,mirandaenrique)@uniovi.es presa@strw.leidenuniv.nl

Universidad de Oviedo Universiteit Leiden

UNIVERSIDAD OVIEDO

Universiteit Leiden

SEIO’2023, Elche

Resumen

En este trabajo, transformamos un conjunto de probabilidades (o conjunto *credal*) en otro que tenga *mejores* propiedades, a la vez que no añadimos imprecisión al modelo.

Las propiedades se analizarán en función de la probabilidad inferior que inducen.

Compararemos el modelo inicial y el transformado en un problema de decisión.

Probabilidades inferiores (coherentes)

Sea $\mathcal{X}$ finito. Una probabilidad inferior es una función monótona y normalizada $\underline{P} : \mathcal{P}(\mathcal{X}) \to [0,1]$.

Su conjunto credal es

$$\mathcal{M}(\underline{P}) = \{P \text{ medida de probabilidad} \mid P(A) \geq \underline{P}(A)\ \forall A \subseteq \mathcal{X}\}.$$

$\underline{P}$ evita la pérdida segura si $\mathcal{M}(\underline{P}) \neq \emptyset$, y es coherente si

$$\underline{P}(A) = \min_{P \in \mathcal{M}(\underline{P})} P(A)\ \forall A \subseteq \mathcal{X}.$$

Su probabilidad superior conjugada se define como $\overline{P}(A) = 1 - \underline{P}(A^c)\ \forall A \subseteq \mathcal{X}$.

¿Por qué (no) usar modelos coherentes?

- $\underline{P}$ es coherente $\iff \underline{P} = \min \mathcal{M}(\underline{P})$. ✓
- Además de la interpretación de análisis de sensibilidad, la coherencia posee una interpretación comportamental. ✓
- Sin embargo, la estructura de $\mathcal{M}(\underline{P})$ puede ser compleja. ✗
- La extensión a un operador esperanza no es única. ✗

k-monotonía

Una probabilidad inferior es k-monótona cuando

$$\underline{P}\Big(\cup_{i=1}^{k} A_i\Big) \geq \sum_{\emptyset \neq I \subseteq \{1,\dots,k\}} (-1)^{|I|+1} \underline{P}\Big(\cap_{i \in I} A_i\Big)$$

para todo $A_1, \dots, A_k$ in $\mathcal{P}(\mathcal{X})$. Si es k-monótona para todo k, se dice función de creencia.

Denotamos por $\mathcal{C}_2$ y $\mathcal{C}_\infty$ las familias de probabilidades inferiores 2-monótonas y funciones de creencia, respectivamente.

La inversa Möbius de una probabilidad inferior $\underline{P}$ es

$$m_{\underline{P}}(A) = \sum_{B \subseteq A} (-1)^{|A \setminus B|} \underline{P}(B) \quad \forall A \subseteq \mathcal{X}.$$

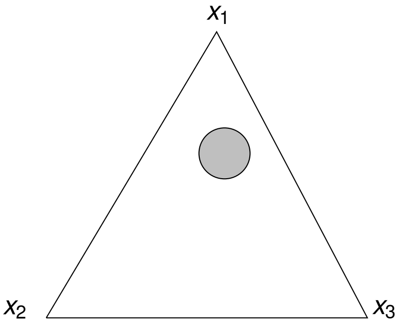
¿Por qué (no) usar modelos 2-monótonos?

Si $\underline{P}$ es 2-monótono:

- Tiene una única extensión como operador esperanza (la integral de Choquet). ✓
- Hay un procedimiento sencillo para determinar los puntos extremos de $\mathcal{M}(\underline{P})$. ✓
- La mayoría de los modelos son 2-monótonos. ✓
- Pero la interpretación comportamental no está muy clara. ✗

Formulación del problema

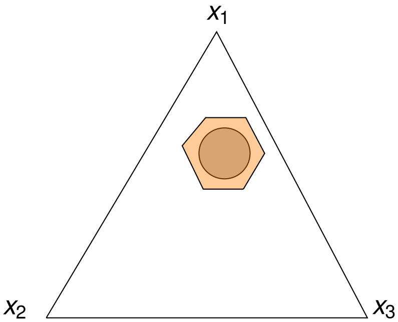
Consideramos una probabilidad inferior coherente $\underline{P}$ en $\mathcal{P}(\mathcal{X})$ y buscamos un modelo cercano $\underline{Q}$ con mejores propiedades. Consideramos dos casos:



Formulación del problema

Consideramos una probabilidad inferior coherente $\underline{P}$ en $\mathcal{P}(\mathcal{X})$ y buscamos un modelo cercano $\underline{Q}$ con mejores propiedades. Consideramos dos casos:

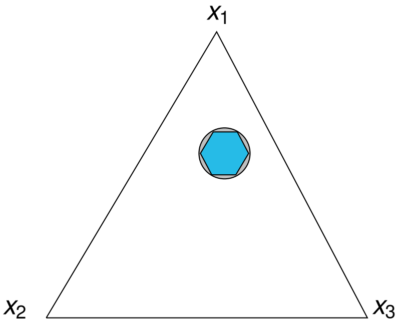
1. Aproximaciones exteriores: en colaboración con Paolo Vicig, Ignacio Montes.



Formulación del problema

Consideramos una probabilidad inferior coherente $\underline{P}$ en $\mathcal{P}(\mathcal{X})$ y buscamos un modelo cercano $\underline{Q}$ con mejores propiedades. Consideramos dos casos:

2. Aproximaciones interiores: en colaboración con Ignacio Montes, Andrés Presa.



Aproximaciones exteriores

Dada una probabilidad inferior coherente $\underline{P}$, buscamos $\underline{Q}$ en una subfamilia de interés de manera que:

- Sea una aproximación exterior (AE) de $\underline{P}$: $\underline{Q} \leq \underline{P}$.
- Sea no dominada: no existe $\underline{Q}'$ tal que $\underline{Q} \lneq \underline{Q}' \leq \underline{P}$.

Una manera de obtener AE no dominadas es determinar el modelo más cercano a $\underline{P}$, en el sentido de que minimice la distancia de Baroni y Vicig:

$$d_{BV}(\underline{P}, \underline{Q}) = \sum_{E \subseteq \mathcal{X}} |\underline{P}(E) - \underline{Q}(E)|.$$

AE en $\mathcal{C}_2$ por programación lineal

Se resuelve el siguiente problema de programación lineal:

$$\min d_{BV}(\underline{P}, \underline{Q}) \tag{LP-2monot}$$

sujeto a

$$\sum_{B \subseteq \mathcal{X}} m_{\underline{Q}}(B) = 1, \qquad m_{\underline{Q}}(\emptyset) = 0. \tag{LP-2monot.1}$$

$$\sum_{\{x_i, x_j\} \subseteq A \subseteq E} m_{\underline{Q}}(A) \geq 0, \quad \forall E \subseteq \mathcal{X}, \ \forall x_i, x_j \in E, \ x_i \neq x_j. \tag{LP-2monot.2}$$

$$m_{\underline{Q}}(\{x_i\}) \geq 0, \quad \forall x_i \in \mathcal{X}. \tag{LP-2monot.3}$$

$$\sum_{B \subseteq E} m_{\underline{Q}}(B) \leq \underline{P}(E) \quad \forall E \subseteq \mathcal{X}. \tag{LP-2monot.4}$$

AE en $\mathcal{C}_\infty$ por programación lineal

Análogamente, resolvemos

$$\min d_{BV}(\underline{P}, Bel) \tag{LP-Bel}$$

sujeto a

$$\sum_{B\subseteq\mathcal{X}} m_{Bel}(B) = 1, \qquad m_{Bel}(B) \geq 0 \quad \forall B \subseteq \mathcal{X}. \tag{LP-Bel.1}$$

$$\sum_{B\subseteq E} m_{Bel}(B) \leq \underline{P}(E) \quad \forall E \subseteq \mathcal{X}. \tag{LP-Bel.2}$$

Propiedades

Proposición

1. Las soluciones óptimas de (LP-2monot) sujetas a (LP-2monot.1)$\div$(LP-2monot.4) son AE no dominadas de $\underline{P}$ en $\mathcal{C}_2$.✓
2. Las soluciones óptimas de (LP-Bel) sujetas a (LP-Bel.1) y (LP-Bel.2) son AE no dominadas de $\underline{P}$ en $\mathcal{C}_\infty$.✓
3. Se cumple $\underline{Q}(\{x\}) = \underline{P}(\{x\})\ \forall x$.✓

Propiedades

Proposición

1. Las soluciones óptimas de (LP-2monot) sujetas a (LP-2monot.1)$\div$(LP-2monot.4) son AE no dominadas de $\underline{P}$ en $\mathcal{C}_2$.✓
2. Las soluciones óptimas de (LP-Bel) sujetas a (LP-Bel.1) y (LP-Bel.2) son AE no dominadas de $\underline{P}$ en $\mathcal{C}_\infty$.✓
3. Se cumple $\underline{Q}(\{x\}) = \underline{P}(\{x\})\ \forall x$.✓
4. La solución a los problemas de programación lineal *no* es siempre única.✗
5. Existen AE no dominadas de $\underline{P}$ en $\mathcal{C}_2$ y $\mathcal{C}_\infty$ que no son solución de los problemas de programación lineal.✗

AE por programación cuadrática

Una estrategia para obtener una única aproximación es considerar la distancia cuadrática:

$$d_q(\underline{P},\underline{Q}) := \sum_{E\subseteq\mathcal{X}} (\underline{P}(E) - \underline{Q}(E))^2. \tag{QP}$$

Proposición

1. El problema (QP) con restricciones (LP-2monot.1)÷(LP-2monot.4) y $d_{BV}(\underline{P},\underline{Q}) = \min_{\underline{Q}'\in\mathcal{C}_2} d_{BV}(\underline{P},\underline{Q}')$ tiene solución única, la cual es una AE no dominada de $\underline{P}$ en $\mathcal{C}_2$.
2. El problema (QP) con restricciones (LP-Bel.1), (LP-Bel.2) y $d_{BV}(\underline{P},Bel) = \min_{\underline{Q}'\in\mathcal{C}_\infty} d_{BV}(\underline{P},\underline{Q}')$ tiene solución única, la cual es una AE no dominada de $\underline{P}$ en $\mathcal{C}_\infty$.

Unicidad de solución

- La solución al problema de programación cuadrática no se encuentra necesariamente entre las soluciones al problema de programación lineal.
- Una alternativa es resolver el seleccionar, entre las soluciones al problema de programación lineal, la que minimiza el problema de programación cuadrática.
- También se puede garantizar una solución única para algunos modelos particulares de distorsión, como son los modelos de contaminación o el pari mutuel.

Aproximaciones interiores

De manera dual, dada una probabilidad inferior coherente $\underline{P}$, buscamos $\underline{Q}$ en una subfamilia de interés de manera que:

- Sea una aproximación interior (AI) de $\underline{P}$: $\underline{P} \leq \underline{Q}$.
- Sea no dominante: no existe $\underline{Q}'$ tal que $\underline{P} \leq \underline{Q}' \lneq \underline{P}$.

En el caso de AE, se exige que todo modelo compatible con la información inicial lo sea también con el transformado; en el caso de AI, se pide que el modelo transformado no introduzca imprecisión adicional.

AI en $\mathcal{C}_2$ por programación lineal

Se resuelve el siguiente problema de programación lineal:

$$\min d_{BV}(\underline{P}, \underline{Q}) \tag{LP-2monot}$$

sujeto a

$$\sum_{B \subseteq \mathcal{X}} m_{\underline{Q}}(B) = 1, \qquad m_{\underline{Q}}(\emptyset) = 0. \tag{LP-2monot.1}$$

$$\sum_{\{x_i, x_j\} \subseteq A \subseteq E} m_{\underline{Q}}(A) \geq 0, \quad \forall E \subseteq \mathcal{X},\ \forall x_i, x_j \in E,\ x_i \neq x_j. \tag{LP-2monot.2}$$

$$m_{\underline{Q}}(\{x_i\}) \geq 0, \quad \forall x_i \in \mathcal{X}. \tag{LP-2monot.3}$$

$$\sum_{B \subseteq E} m_{\underline{Q}}(B) \geq \underline{P}(E) \quad \forall E \subseteq \mathcal{X}. \tag{LP-2monot.4'}$$

AI en $\mathcal{C}_\infty$ por programación lineal

Análogamente, resolvemos

$$\min d_{BV}(\underline{P}, Bel) \tag{LP-Bel}$$

sujeto a

$$\sum_{B \subseteq \mathcal{X}} m_{Bel}(B) = 1, \qquad m_{Bel}(B) \geq 0 \quad \forall B \subseteq \mathcal{X}. \tag{LP-Bel.1}$$

$$\sum_{B \subseteq E} m_{Bel}(B) \geq \underline{P}(E) \quad \forall E \subseteq \mathcal{X}. \tag{LP-Bel.2'}$$

Propiedades

Proposición

1. Las soluciones óptimas de (LP-2monot) sujetas a (LP-2monot.1)$\div$(LP-2monot.4') son AI no dominantes de $\underline{P}$ en $\mathcal{C}_2$.✓
2. Las soluciones óptimas de (LP-Bel) sujetas a (LP-Bel.1) y (LP-Bel.2') son AI no dominantes de $\underline{P}$ en $\mathcal{C}_\infty$.✓

Propiedades

Proposición

1. Las soluciones óptimas de (LP-2monot) sujetas a (LP-2monot.1)÷(LP-2monot.4') son AI no dominantes de $\underline{P}$ en $\mathcal{C}_2$.✓
2. Las soluciones óptimas de (LP-Bel) sujetas a (LP-Bel.1) y (LP-Bel.2') son AI no dominantes de $\underline{P}$ en $\mathcal{C}_\infty$.✓
3. No siempre se cumple $\underline{Q}(\{x\}) = \underline{P}(\{x\})\ \forall x$. ✗
4. La solución a los problemas de programación lineal *no* es siempre única.✗
5. Existen AI no dominantes de $\underline{P}$ en $\mathcal{C}_2$ y $\mathcal{C}_\infty$ que no son solución de los problemas de programación lineal.✗

AI por programación cuadrática

De nuevo podemos considerar la distancia cuadrática:

$$d_q(\underline{P}, \underline{Q}) := \sum_{E \subseteq \mathcal{X}} (\underline{P}(E) - \underline{Q}(E))^2. \tag{QP}$$

Proposición

1. El problema (QP) con restricciones (LP-2monot.1)÷(LP-2monot.4') y $d_{BV}(\underline{P}, \underline{Q}) = \min_{\underline{Q}' \in \mathcal{C}_2} d_{BV}(\underline{P}, \underline{Q}')$ tiene solución única, la cual es una AI no dominante de $\underline{P}$ en $\mathcal{C}_2$.
2. El problema (QP) con restricciones (LP-Bel.1), (LP-Bel.2') y $d_{BV}(\underline{P}, Bel) = \min_{\underline{Q}' \in \mathcal{C}_\infty} d_{BV}(\underline{P}, \underline{Q}')$ tiene solución única, la cual es una AI no dominante de $\underline{P}$ en $\mathcal{C}_\infty$.

Decisión bajo incertidumbre

Consideremos el problema de decisión entre un conjunto de alternativas D, cuya utilidad depende de un experimento tomando valores en $\mathcal{X}$. Identificamos $d \in D$ con $J_d : \mathcal{X} \to \mathbb{R}$.

Si conocemos la probabilidad de los posibles resultados en $\mathcal{X}$, una opción es elegir $d \in D$ con la mayor utilidad esperada:

$$\mathrm{opt}_{E_P}(D) = \left\{ d \in D \mid P(J_d) = \max_{e \in D} P(J_e) \right\},$$

siendo

$$P(J_d) = \sum_{x \in \mathcal{X}} P(\{x\}) \cdot J_d(x).$$

Decisión bajo imprecisión

Supongamos que sólo sabemos que P pertenece a $\mathcal{M}(\underline{P})$.

Para cada alternativa, se cumple:

$$\underline{P}(J_d) = \min_{P \in \mathcal{M}(\underline{P})} \sum_{x \in \mathcal{X}} P(\{x\}) \cdot J_d(x)$$

$$\overline{P}(J_d) = \max_{P \in \mathcal{M}(\underline{P})} \sum_{x \in \mathcal{X}} P(\{x\}) \cdot J_d(x)$$

La utilidad esperada se generaliza de varias formas:
Γ-maximin:

$$\mathrm{opt}_{\underline{P}}(D) = \left\{ d \in D \mid \underline{P}(J_d) = \max_{e \in D} \underline{P}(J_e) \right\}.$$

Γ-maximax:

$$\mathrm{opt}_{\overline{P}}(D) = \left\{ d \in D \mid \overline{P}(J_d) = \max_{e \in D} \overline{P}(J_e) \right\}.$$

Decisión bajo imprecisión (II)

Maximalidad:

$$\mathrm{opt}_{>_{\underline{P}}}(D) = \{d \in D \mid \underline{P}(J_e - J_d) \leq 0 \ \forall e \in D\}.$$

Dominancia intervalar:

$$\mathrm{opt}_{\sqsupset_{\underline{P}}}(D) = \{d \in D \mid \overline{P}(J_d) \geq \underline{P}(J_e) \ \forall e \in D\}.$$

E-admisibilidad:

$$\mathrm{opt}_{\mathcal{M}(\underline{P})}(D) = \{d \in D \mid \exists P \in \mathcal{M}(\underline{P}) : P(J_e) \leq P(J_d) \ \forall d \in D\}.$$

Relaciones entre los criterios

$$
\begin{tikzcd}
\Gamma\text{-maximax} \arrow[d] \arrow[drr] & & \Gamma\text{-maximin} \arrow[d] \\
\text{E-admisibilidad} \arrow[rr] \arrow[dr] & & \text{Maximalidad} \arrow[dl] \\
& \text{Dominancia intervalar} &
\end{tikzcd}
$$

Relaciones entre las soluciones

Proposición

Criterio	Relación
Γ-maximin	—
Γ-maximax	—
Maximalidad	$\mathrm{opt}_{\geq_{\underline{Q}^{AI}}} \subseteq \mathrm{opt}_{\geq_{\underline{P}}} \subseteq \mathrm{opt}_{\geq_{\underline{Q}^{AE}}}$
Dominancia intervalar	$\mathrm{opt}_{\sqsupset_{\underline{Q}^{AI}}} \subseteq \mathrm{opt}_{\sqsupset_{\underline{P}}} \subseteq \mathrm{opt}_{\sqsupset_{\underline{Q}^{AE}}}$
E-admisibilidad	$\mathrm{opt}_{\mathcal{M}(\underline{Q}^{AI})} \subseteq \mathrm{opt}_{\mathcal{M}(\underline{P})} \subseteq \mathrm{opt}_{\mathcal{M}(\underline{Q}^{AE})}$

No hay más relaciones de inclusión entre los conjuntos de alternativas óptimas.

Relaciones entre las soluciones (II)

Proposición

Sea $\underline{P}$ coherente y $\underline{Q}$ una AI de $\underline{P}$ en $\mathcal{C}_2$. Consideramos las esperanzas inferiores determinadas como envolventes por abajo de $\mathcal{M}(\underline{P}), \mathcal{M}(\underline{Q})$. Si f toma valores en $[0, 1]$,

$$d_{\mathrm{BV}}(\underline{P}, \underline{Q}) \leq \delta \Rightarrow |\underline{P}(f) - \underline{Q}(f)| \leq \delta.$$

Como consecuencia, si if $d_{\mathrm{BV}}(\underline{P}, \underline{Q}) \leq \delta$:

- $\underline{P}(f) - \underline{P}(g) \geq \delta \Rightarrow \underline{Q}(f) - \underline{Q}(g) \geq 0$.
- $\overline{P}(f) - \overline{P}(g) \geq \delta \Rightarrow \overline{Q}(f) - \overline{Q}(g) \geq 0$.
- $\underline{P}(f - g) \leq -\delta \Rightarrow \underline{Q}(f - g) \leq 0$.
- $\overline{P}(f) - \underline{P}(g) \geq 2\delta \Rightarrow \overline{Q}(f) - \underline{Q}(g) \geq 0$.

Presentación del problema

Ejemplo [Jansen et al., 2017]

El problema consiste en elegir entre tres ofertas de empleo: J_1, J_2 y J_3. Cada oferta de empleo tiene asociada un salario mensual y una serie de beneficios adicionales de entre un conjunto $\mathcal{B} = \{b_1, ..., b_5\}$.

- Cada oferta de empleo depende de 4 diferentes previsiones económicas que puede haber.
- La probabilidad de cada escenario está modelada por un conjunto credal.

	x_1	x_2	x_3	x_4
J_1	$\underbrace{(5000, \mathcal{B})}_{a_1}$	$\underbrace{(2700, \{b_1, b_2\})}_{a_2}$	$\underbrace{(2300, \{b_1, b_2, b_3\})}_{a_3}$	$\underbrace{(1000, \emptyset)}_{a_4}$
J_2	$\underbrace{(3500, \{b_1, b_5\})}_{a_5}$	$\underbrace{(2400, \{b_1, b_2\})}_{a_6}$	$\underbrace{(1700, \{b_1, b_2\})}_{a_7}$	$\underbrace{2500, \{b_1\}}_{a_8}$
J_3	$\underbrace{(3000, \{b_1, b_2, b_3\})}_{a_9}$	$\underbrace{(1000, \{b_1\})}_{a_{10}}$	$\underbrace{(2000, \{b_1\})}_{a_{11}}$	$\underbrace{(3000, \{b_1, b_4, b_5\})}_{a_{12}}$

Decisión bajo imprecisión generalizada

Sistema de preferencias

Sea A un conjunto no vacío y sea $R_1 \subseteq A \times A$ un preorden en A. Asimismo, sea $R_2 \subseteq R_1 \times R_1$ un preorden en R_1. La terna $\mathcal{A} = [A, R_1, R_2]$ se denomina sistema de preferencias en A.

Parte de indiferencia: $I_R = \{(a, b) \in R \mid (b, a) \in R\}$.

Parte estricta: $P_R = \{(a, b) \in R \mid (b, a) \notin R\}$.

Decisión bajo imprecisión generalizada

Sistema de preferencias

Sea A un conjunto no vacío y sea $R_1 \subseteq A \times A$ un preorden en A. Asimismo, sea $R_2 \subseteq R_1 \times R_1$ un preorden en R_1. La terna $\mathcal{A} = [A, R_1, R_2]$ se denomina sistema de preferencias en A.

$$\text{Parte de indiferencia: } I_R = \{(a, b) \in R \mid (b, a) \in R\}.$$

$$\text{Parte estricta: } P_R = \{(a, b) \in R \mid (b, a) \notin R\}.$$

Consistencia

$\mathcal{A}$ es consistente si existe $u \colon A \longrightarrow [0, 1]$ tal que $\forall a, b, c, d \in A$ se cumple:
i) Si $(a, b) \in R_1$, entonces $u(a) \geq u(b)$, con igualdad sii $(a, b) \in I_{R_1}$.
ii) Si $((a, b), (c, d)) \in R_2$, entonces $u(a) - u(b) \geq u(c) - u(d)$, con igualdad sii $((a, b)(c, d)) \in I_{R_2}$.

Representaciones débiles

Cada función u en esas condiciones es una representación débil de $\mathcal{A}$. El conjunto de todas las representaciones débiles de $\mathcal{A}$ se denota por $\mathcal{U}_{\mathcal{A}}$.

El subconjunto de $\mathcal{U}_{\mathcal{A}}$ formado por los u tales que $\inf_{a\in A} u(a) = 0$ y $\sup_{a\in A} u(a) = 1$ se denota $\mathcal{N}_{\mathcal{A}}$.

Decisión bajo imprecisión generalizada

Representaciones débiles

Cada función u en esas condiciones es una representación débil de $\mathcal{A}$. El conjunto de todas las representaciones débiles de $\mathcal{A}$ se denota por $\mathcal{U}_{\mathcal{A}}$.

El subconjunto de $\mathcal{U}_{\mathcal{A}}$ formado por los u tales que $\inf_{a \in A} u(a) = 0$ y $\sup_{a \in A} u(a) = 1$ se denota $\mathcal{N}_{\mathcal{A}}$.

Granularidad

Para $\delta \in (0, 1)$, denotamos por $\mathcal{N}_{\mathcal{A}}^{\delta}$ al conjunto de los $u \in \mathcal{N}_{\mathcal{A}}$ tales que $u(a) - u(b) \geq \delta$ para todo $(a, b) \in P_{R_1}$ y $u(a) - u(b) - u(c) + u(d) \geq \delta$ para todo $((a, b)(c, d)) \in P_{R_2}$.

$N_{\mathcal{A}}^{\delta}$ se denomina conjunto de representaciones débiles de granularidad al menos δ.

Criterios de decisión

Intervalo de esperanza generalizado:

$$E_{\mathcal{D}_\delta}(X) = \left[\inf_{u \in \mathcal{N}_{\mathcal{A}}^\delta} \underline{P}(u \circ X), \sup_{u \in \mathcal{N}_{\mathcal{A}}^\delta} \overline{P}(u \circ X) \right] = \left[\underline{P}_{\mathcal{D}_\delta}(X), \overline{P}_{\mathcal{D}_\delta}(X) \right].$$

$\mathcal{D}_\delta$-maximin:

$$\underline{\mathcal{G}}_\delta = \{X \in D \mid \forall Y \in D \text{ se cumple } \underline{P}_{\mathcal{D}_\delta}(X) \geq \underline{P}_{\mathcal{D}_\delta}(Y)\}.$$

$\mathcal{D}_\delta$-maximax:

$$\overline{\mathcal{G}}_\delta = \{X \in D \mid \forall Y \in D \text{ se cumple } \overline{P}_{\mathcal{D}_\delta}(X) \geq \overline{P}_{\mathcal{D}_\delta}(Y)\}.$$

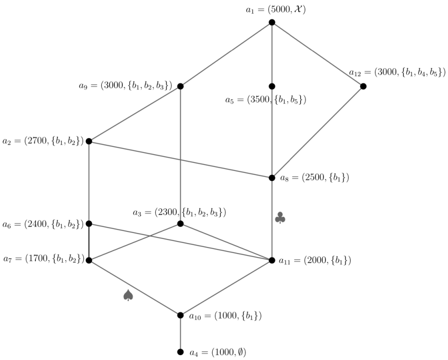
Estos criterios son una generalización de Γ-maximin y Γ-maximax.

Otros criterios: $\mathcal{A}$-admissibility, local admissibility, ...

Relaciones del problema

$$R_1 = \{((y_1, B_1), (y_2, B_2)) : y_1 \geq y_2 \wedge B_2 \subseteq B_1\}.$$

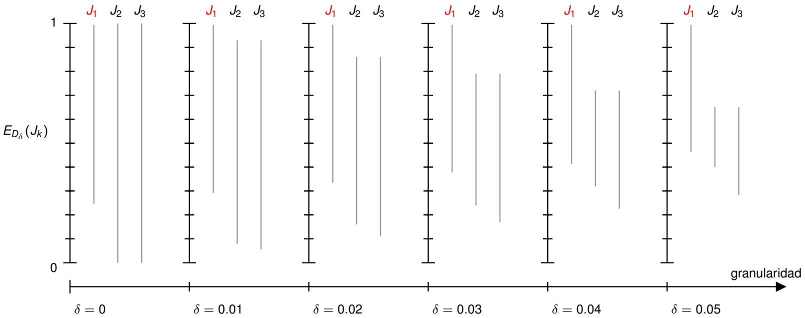
$$R_2 = \{(((y_1, B_1), (y_2, B_2)), ((y_3, B_3), (y_4, B_4))) : \\ y_1 - y_2 \geq y_3 - y_4 \wedge B_2 \subseteq B_4 \subseteq B_3 \subseteq B_1\}.$$



Resultados

Modelo original:

$$\mathcal{M}(\underline{P}) = \{P\colon P(\{x_1\}) \geq P(\{x_2\}) \geq P(\{x_3\}) \geq P(\{x_4\})\}.$$



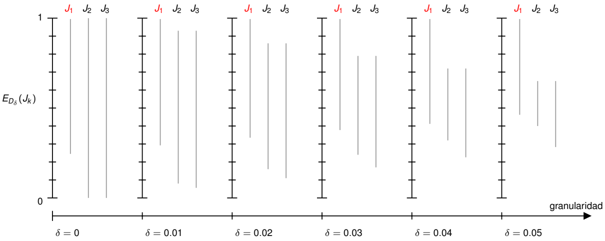
Según los criterios $\mathcal{D}_\delta$-maximin y $\mathcal{D}_\delta$-maximax se debería optar por el empleo J_1.

Resultados con aproximaciones interiores

A	$\underline{P}^{AI}(A)$
$\{x_1\}$	$7/24$
$\{x_2\}$	0
$\{x_3\}$	0
$\{x_4\}$	0
$\{x_1, x_2\}$	$1/2$
$\{x_1, x_3\}$	$1/2$
$\{x_1, x_4\}$	$1/3$

A	$\underline{P}^{AI}(A)$
$\{x_2, x_3\}$	0
$\{x_2, x_4\}$	0
$\{x_3, x_4\}$	0
$\{x_1, x_2, x_3\}$	$3/4$
$\{x_1, x_2, x_4\}$	$2/3$
$\{x_1, x_3, x_4\}$	$13/24$
$\{x_2, x_3, x_4\}$	0

AI en $\mathcal{C}_2$ de $\underline{P}$. La distancia entre ambos modelos es $d_{BV}(\underline{P}, \underline{P}^I) = 0.08\overline{3}$.



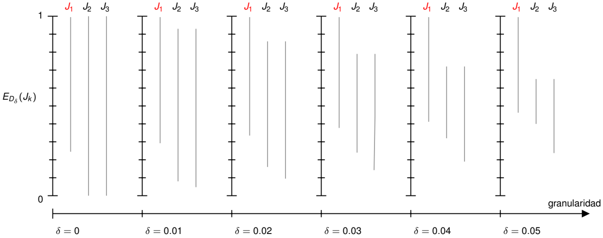
La solución óptima según los criterios $\mathcal{D}_\delta$-maximin y $\mathcal{D}_\delta$-maximax sigue siendo J_1.

Resultados con aproximaciones exteriores

A	$\underline{P}^{AE}(A)$
$\{x_1\}$	$1/4$
$\{x_2\}$	0
$\{x_3\}$	0
$\{x_4\}$	0
$\{x_1, x_2\}$	$1/2$
$\{x_1, x_3\}$	$11/24$
$\{x_1, x_4\}$	$7/24$

A	$\underline{P}^{AE}(A)$
$\{x_2, x_3\}$	0
$\{x_2, x_4\}$	0
$\{x_3, x_4\}$	0
$\{x_1, x_2, x_3\}$	$3/4$
$\{x_1, x_2, x_4\}$	$2/3$
$\{x_1, x_3, x_4\}$	$1/2$
$\{x_2, x_3, x_4\}$	0

AE en $\mathcal{C}_2$ de $\underline{P}$. La distancia entre ambos modelos es $d_{BV}(\underline{P}, \underline{P}^{AE}) = 1.75$.



La solución óptima según los criterios $\mathcal{D}_\delta$-maximin y $\mathcal{D}_\delta$-maximax sigue siendo J_1.

Resumen y conclusiones

Propiedad		$\mathcal{C}_2$	$\mathcal{C}_\infty$
Unicidad de solución del problema LP	AE	NO	NO
	AI	NO	NO
$\underline{P}(A) = \underline{Q}(A)$ para $\lvert A \rvert = 1, n-1$	AE	SÍ	NO
	AI	NO	NO
La solución del problema QP lo es del LP	OA	NO	NO
	AI	NO	NO

Líneas de trabajo futuro:

- Estudio con otras distancias/divergencias entre conjuntos de probabilidades.
- Comparación de las decisiones óptimas.

Referencias

I. Montes, E. Miranda, P. Vicig.
2-monotone outer approximations of coherent lower probabilities
International Journal of Approximate Reasoning, 101:181-205, 2018.

I. Montes, E. Miranda, P. Vicig.
Outer approximations of coherent lower probabilities with belief functions.
International Journal of Approximate Reasoning, 101:1-30, 2019.

E. Miranda, I. Montes, P. Vicig.
On the selection of an optimal outer approximation of a coherent lower probability.
Fuzzy Sets and Systems, 424C:1-16, 2021.

Referencias

M. C. M. Troffaes.
Decision making under uncertainty using imprecise probabilities.
International Journal of Approximate Reasoning, 45(1), 17–29, 2007.

C. Jansen, G. Schollmeyer, T. Augustin.
Concepts for decision making under severe uncertainty with partial ordinal and partial cardinal preferences.
International Journal of Approximate Reasoning, 98, 112–131, 2018.

E. Miranda, I. Montes, A. Presa.
Inner approximations of coherent lower probabilities and their application to decision making problems.
Annals of Operations Research, in press. 2023.

Gracias por la atención...

...y por las preguntas!