علی نقی زاده

تمرین سری چهارم اقتصاد خرد

8.D.7.9:

$$\underline{w}_i = \max_{\sigma_i} \left[\min_{\sigma_{-i}} u_i(\sigma_i, \sigma_{-i}) \right]$$

$$\underline{v}_i = \min_{\sigma_{-i}} \left[\max_{\sigma_i} u_i(\sigma_i, \sigma_{-i}) \right]$$

فرض کنید:

$$\min_{\sigma_{-i}} u_i(\sigma_i, \sigma_{-i}) = \sigma_{-1}^{*}$$

$$\to \max_{\sigma_i} u_i(\sigma_i, \sigma_{-i}) \geq \max_{\sigma_i} u_i(\sigma_i, \sigma_{-i}^{*}) = \underline{w}_i$$

می دانیم عبارت فوق همواره برقرار است حال اگر از دو طرف min بگیریم به نتیجه زیر می رسیم

$$\Rightarrow \min_{\sigma_{-i}} \left[\max_{\sigma_i} u_i(\sigma_i, \sigma_{-i}) \right] \geq \underline{w}_i \quad \to \underline{v}_i \geq \underline{w}_i$$

8E.1:

توضیحات بازی

۲ ارتش می خواهند یک جزیره را تصاحب کنند بنابراین هر کدام باید تصمیم بگیرد که حمله کند یا خیر همچنین ارتش ها با احتمال $\frac{1}{2}$ ضعیف یا قوی اند

پیامدها:

ارزش جزیره M است /

درصورتی جزیره تصاحب می شود که یا فقط یک ارتش فارغ از اینکه ضعیف یا قوی است حمله کند یا اینکه هر دو حمله کنند و یکی قوی باشد و دیگری ضعیف

درصورتی که فقط یکی حمله کند جزیره بدون هزینه تصاحب می شود

درصورتی که با هم حمله کنند هزینه ارتش قوی برابر s و ارتش ضعیف برابر w است / ($s < w$)

در این بازی هر ارتش چهار استراتژی دارد که به صورت زیر آن را نمایش می دهیم

$S_i = \{AA, AN, NA, NN\}$

1 به طور مثال AN یعنی اگر قوی بود حمله کند و اگر ضعیف بود حمله نکند

اینجا بازی استراتژیک را به چهار حالت زیر می‌توان فرض کرد.

۱) هردو ارتش قوی باشند   ۲) ارتش I قوی باشد و ارتش ۲ ضعیف باشد

۳) هردو ضعیف باشند   4) ارتش I ضعیف باشد و ارتش ۲ قوی

پیامد هر یک از این حالت ها به صورت زیر است

II strong

I strong	A	N
A	(AA,AA) $-s, -s$ (AA,AN)	$M, 0$ (AN,NA)
N	$0, M$	$0, 0$

II weak

I strong	A	N
A	(AA,AA) $M-s, -w$ (AN,NA)	(AA,AN) $M, 0$
N	$0, M$	$0, 0$

ارتش I قوی است و ارتش II ضعیف بنابراین ارتش I جزیره را تصاحب کرده و M نصیبش می‌شود البته s نیز باید هزینه کند

چون هردو قوی‌اند جزیره را تصاحب نمی‌کنند و صرفاً جنگ برایشان هزینه دارد

II strong

I weak	A	N
A	(AA,AA) $-w, M-s$ (AA,AN)	$M, 0$
N	$0, M$	$0, 0$ (AN,NA)

II weak

I weak	A	N
A	(AA,AA) $-w, -w$	$M, 0$ (AA,AN)
N	$0, M$ (AN,NA)	$0, 0$

از آنجایی که ارتش ۱ حمله نمی‌کند، ارتش ۲ بدون هزینه جزیره را تصاحب می‌کند

می‌دانیم احتمال رخداد هرکدام از حالات بالا 1/4 است حال می‌خواهیم پیامد هر استراتژی بازیکن‌ها به ازای استراتژی های طرف مقابل را محاسبه کنیم

II

(I)	AA	AN	NA	NN
AA	$\frac{1}{4}(m-2s-2w), \frac{1}{4}(m-2s-2w)$	$\frac{1}{4}(2m-s-w), \frac{1}{4}(m-2s)$ (1)	$\frac{1}{4}(3m-s-w), \frac{1}{4}(-2w)$	$M, 0$ (6)
AN	$\frac{1}{4}(m-2s), \frac{1}{4}(2m-s-w)$ (2)	$\frac{1}{4}(m-s), \frac{1}{4}(m-s)$ (3)	$\frac{1}{4}(2m-s), \frac{1}{4}(m-w)$	$M/2, 0$
NA	$\frac{1}{4}(-2w), \frac{1}{4}(3m-s-w)$	$\frac{1}{4}(m-w), \frac{1}{4}(2m-s)$	$\frac{1}{4}(m-w), \frac{1}{4}(m-w)$ (4)	$M/2, 0$
NN	$0, M$ (5)	$0, M/2$	$0, M/2$	$0, 0$

حال باید تعادل های نش خالص را پیدا کنیم می دانیم در تعادل نش هر بازیکن باید بهترین پاسخ خود را بدهد بنابراین برای بررسی تعادل های نش به صورت زیر عمل می کنیم

<- فرض می کنیم AA بهترین پاسخ بازیکن II باشد در این صورت NA و AA نمی توانند بهترین پاسخ اکشن I باشند زیرا:

$$\overset{0}{U(NN,AA)} > \overset{-\omega/2}{U(NA,AA)}$$

و

$$\underset{\frac{1}{4}(m-2s)}{U(AN,AA)} > \underset{\frac{1}{4}(m-2s-2\omega)}{U(AA,AA)}$$

=> بنابراین تا به اینجا (AA,AA) و (NA,AA) نمی توانند تعادل نش باشند

<- NA برای بازیکن I نمی تواند بهترین پاسخ به استراتژی AN بازیکن 2 باشد زیرا

$$U(NA,AN)=\frac{1}{4}(m-\omega) \xrightarrow{s<\omega} U(AN,AN) > U(NA,AN)$$

$$U(AN,AN)=\frac{1}{4}(m-s)$$

<- با توجه به تقارن می توان گفت:

NA و AA برای بازیکن 2 نمی توان بهترین پاسخ برای استراتژی AA بازیکن I باشد

NA برای بازیکن II نمی تواند بهترین پاسخ برای استراتژی AN بازیکن I باشد

حال حالات زیر را بررسی می کنیم

① تعادل نش باشد: (AA, AN)

$$U(AA,AN) \geq U(AN,AN) \rightarrow \frac{1}{4}(2m-s-\omega) \geq \frac{1}{4}(m-s) \rightarrow m \geq \omega$$

$$U(AA,AN) \geq U(NN,AN) \rightarrow \frac{1}{4}(2m-s-\omega) \geq 0 \rightarrow 2m \geq s+\omega$$

$$U(AA,AN) \geq U(AA,NN) \rightarrow \frac{1}{4}(m-2s) \geq 0 \rightarrow m \geq 2s$$

$$\rightarrow \boxed{m \geq \max\{2s,\omega\}}$$

به دلیل تقارن شرط حد اینکه (AN,AA) تعادل نش باشد نیز به صورت فوق است

② (AN,AN) تعادل نش باشد

$$U(AN,AN) \geq U(AA,AN) \rightarrow \frac{1}{4}(m-s) \geq \frac{1}{4}(2m-s-\omega) \rightarrow m \leq \omega$$

$$U(AN,AN) \geq U(NN,AN) \rightarrow \frac{1}{4}(m-s) \geq 0 \rightarrow m \geq s$$

$$\rightarrow \boxed{s \leq m \leq \omega}$$

حالت ⑤ و ⑥ : (NN, AA) و (AA, NN)

$$U(NN, AA) \geq U(AN, AA) \rightarrow 0 \geq \frac{1}{4}(m-2s) \rightarrow \boxed{m \leq 2s}$$

حالت ④ : (NA, NA)

$$U(NA, NA) \geq U(AA, NA) \longrightarrow \frac{1}{4}(m-w) \geq \frac{1}{4}(3m-s-w) \rightarrow 2m \leq s \rightarrow m \leq s/2$$

$$U(NA, NA) \geq U(NN, NA) \rightarrow \frac{1}{4}(m-w) \geq 0 \longrightarrow m \geq w$$

$$U(NA, NA) \geq U(AN, NA) \quad \frac{1}{4}(m-w) \geq \frac{1}{4}(2m-s) \rightarrow m \leq s-w \xrightarrow{s<w} < 0 \; \times$$

بنابراین این حالت نمی تواند تعادل نش باشد

Add Ex1 :

فرض کنید استراتژی بازیکن i به صورت زیر باشد

a' مجموعه عمل هایی است که به ازای آن تعادل نش حاصل نمی شود ولی مطلوبیت بیشتری برای همه بازیکنان ایجاد می کند

$$s_i = \begin{cases} t = 1 \rightarrow & s_i = \sigma_i' \in a' \\ t > 1 \rightarrow & \begin{cases} s_i = \sigma_i' \in a' & \text{if } U(s_{t-1}) = U(a') \\ s_i = \sigma_i \in a & \text{other} \end{cases} \end{cases}$$

a تعادل نش بازی یک مرحله ای

حال می خواهیم ثابت کنیم در صورتی که این بازی بی نهایت بار تکرار شود به ازای یک $\underline{\delta} \in (0,1)$ در صورتی که $\delta \geq \underline{\delta}$ باشد تعادل بازی a' خواهد شد.

حال فرض کنید در تمام مراحل a' بازی شود یعنی همه بازیکن ها استراتژی های روی مجموعه a' را بازی کنند که منجر می شود پیامد بیشتری از تعادل نش در مرحله داشته باشند در این حالت ارزش فعلی کل پیامد ها به صورت زیر به دست می آید (برای هر بازیکن)

$V =$ ارزش فعلی پیامدها

$$\rightarrow V_i = u_i(a') + \delta V \rightarrow V_i(1-\delta) = u_i(a')$$

$$\rightarrow \boxed{V_i = \frac{u_i(a')}{(1-\delta)}}$$

حال ما فرض کنید در صورت سؤال ذکر شد مجموعه استراتژی های a' تعادل نشی نیست علی رغم اینکه پیامد بیشتری برای همه بازیکنان نسبت به تعادل نشی ایجاد می کند (رجوع شود به مسئله معمای زندانیان) بنابراین بنابراین در حالت بازی تک مرحله ای انگیزه تخطی وجود دارد به طور مثال بازیکن i پیامد بیشتری نصیبش می شود در صورتی که بهترین پاسخ خود به استراتژی سایرین را بازی کند ولی این امر موجب می شود تا در مراحل بعد تعادل نشی شکل گرفته و شاهد در مجموع ارزش فعلی پیامدهای کل بازی برای i کمتر شود که این موضوع باید بررسی شود

در صورت تخطی در مرحله اول $V = u_i(a'') + \delta u_i(a) + \delta^2 u_i(a) + \cdots$

$$= u_i(a'') + \frac{\delta u_i(a)}{1-\delta}$$

$$\rightarrow \boxed{u_i(a'') > u_i(a') > u_i(a)}$$

وجود دارد بازیکنی که عبارت فوق برایش برقرار باشد (در صورت عدم وجود چنین بازیکنی a' تعادل نشی بازی تک مرحله ای می شد)

حال در صورتی a' تعادل SPE بازی است که انگیزه تخطی وجود نداشته باشد یعنی:

$$\frac{u_i(a')}{(1-\delta)} > u_i(a'') + \frac{\delta u_i(a)}{1-\delta} \xrightarrow{(1-\delta)>0} u_i(a') > u_i(a'') - \delta(u_i(a'') - u_i(a))$$

$$\rightarrow \delta(u_i(a'') - u_i(a)) > u_i(a'') - u_i(a')$$

$$\rightarrow \delta > \frac{u_i(a'') - u_i(a')}{u_i(a'') - u_i(a)}$$

از آنجایی که $u_i(a') > u_i(a)$ ← عبارت فوق کوچکتر از 1 است بنابراین به ازای تمامی δها

عضو $\left(\frac{u_i(a'') - u_i(a')}{u_i(a'') - u_i(a)} , 1\right)$ ، پروفایل استراتژی a' تعادل SPE است .

Add Exe:

استراتژی بازیکنان به شرح زیر است

$$
\begin{cases} t=1 & s_i = a_i \\ t>1 \longrightarrow & \begin{cases} s_i^t = b_i & \text{if } s_i^{t-1} = b_i \text{ or } c_i \\ c_i & \text{if o.w} \end{cases} \end{cases}
$$

اگر کسی تخطی نکند از سود فعلی پیامد این استراتژی به صورت زیر به دست می آید

$$
\underset{\text{به دلیل تقارن}}{V_{i=1,2}} = 4 - \delta + 2\delta^2 + 2\delta^3 + \dots
$$

چون در مرحله اول (a,a) بازی شد در مرحله دوم (c,c) بازی می شود و در مرحله سوم به بعد (b,b)

$$
= \boxed{4 - \delta + \frac{2\delta^2}{1-\delta}}
$$

حال فرض کنید بازیکن 1 در مرحله اول تخطی کند

در صورتی که b بازی کند : $V'_{i=1,2}((b_1,a_2),(c_1,c_2),(b_i)\dots) = 2 - \delta + \frac{2\delta^2}{1-\delta} < V_i$

در صورتی که c بازی کند : $V''_{i=1,2} = 1 - \delta + \frac{2\delta^2}{1-\delta} < V_i$

بنابراین در مرحله اول برای بازیکن 1 انگیزه تخطی وجود ندارد زیرا از سود فعلی پیامدهای بازی در هر شرایطی کمتر از حالتی است که تخطی نکند همچنین به دلیل تقارن انگیزه تخطی برای بازیکن 2 نیز وجود ندارد

حال فرض کنید بازیکن 1 در مرحله دوم تخطی کند بنابراین بازیکن 2 با فرض عدم تخطی همچنان c بازی می کند و بازیکن 2 نیز یا a بازی می کند یا b (نسبت به بازی a و b بی تفاوت است)

$$
V^*_{i=1,2} = 4 + 1\times\delta - \delta^2 + 2\times\delta^3 + 2\delta^4 + \dots = 4 + \delta - \delta^2 + \frac{2\delta^3}{1-\delta}
$$

حال برای اینکه انگیزه تخطی وجود نداشته باشد باید $V_i > V_i^*$ باشد:

$$
\cancel{4} - \delta + \frac{2\delta^2}{1-\delta} > \cancel{4} + \delta - \delta^2 + \frac{2\delta^3}{1-\delta}
$$

Scanned by TapScanner

$$-\delta + \frac{2\delta^2}{1-\delta} \geq \delta - \delta^2 + \frac{2\delta^3}{1-\delta} \xrightarrow{\delta \neq 0} -1 + \frac{2\delta}{1-\delta} \geq 1 - \delta + \frac{2\delta^2}{1-\delta}$$

$$\rightarrow \frac{2\delta(1-\delta)}{1-\delta} \geq 2 - \delta \xrightarrow{\delta \neq 1} 3\delta \geq 2 \rightarrow \boxed{\delta \geq 2/3}$$

حال فرض کنید بازیکن ① در مرحله سوم تخطی کند

اگر a بازی کند $= V_i^{**} = 4 - \delta + \delta^2 \times 3 - \delta^3 + \frac{2\delta^4}{1-\delta}$

اگر بخواهد تخطی کند c بازی نمی‌کند a بازی می‌کند بنابراین نیازی به بررسی این حالت $\leftarrow$ اگر c بازی کند
نیست

برای اینکه در این مرحله تخطی نکند δ باید به گونه‌ای باشد که $V_i > V_i^{**}$ باشد:

$$\cancel{4} - \cancel{\delta} + 2\delta^2 + 2\delta^3 + \cancel{\frac{2\delta^4}{1-\delta}} > \cancel{4} - \cancel{\delta} + 3\delta^2 - \delta^3 + \cancel{\frac{2\delta^4}{1-\delta}}$$

$$\rightarrow 3\delta^3 > \delta^2 \rightarrow \boxed{\delta > 1/3}$$

بنابراین اگر δ باشد پروفایل استراتژی مذکور SPE این بازی است

Add Ex3:

b)

در صورتی که پروفایل استراتژی به صورت زیر باشد

$$\begin{cases} t = 1 & s_i = C \\ t > 1 & \longrightarrow \begin{cases} (C, C) & \text{if } \quad = (C, C) \\ (D, D) & \text{o.w} \end{cases} \end{cases}$$

در صورتی که کسی از این استراتژی‌ها تخطی نکند ارزش فعلی پیامدهای آن برابر است با

$$V = -1 - \delta - \cdots = \frac{-1}{1-\delta}$$

حال در صورتی که فرد 1 یا 2 در مرحله اول تخطی کنند

$$\to V_i^* = 0 - 3\delta - 3\delta^2 - \dots = \frac{-3\delta}{1-\delta}$$

برای اینکه انگیزه تخطی وجود نداشته باشد:

$$V_i > V_i^* \to \frac{-1}{\cancel{1-\delta}} \geq \frac{-3\delta}{\cancel{1-\delta}} \xrightarrow{0<\delta<1} \boxed{\delta > 1/3}$$

a)

در قسمت b این سوال از آنجایی که افق تکرار بازی بی‌نهایت بود، جریمه‌ای که برای تخطی در نظر گرفته شده بود موجب می‌شد بازیکنان تخطی نکنند و تعادل SPE شکل بگیرد؛ وضعیت همه نسبت تعادل نشی بهتر باشد. حالا در صورتی که افق بازی محدود باشد این جریمه دیگر بازدارنده نیست و در تمام زیربازی‌ها تعادل نشی (D,D) بازی می‌شود.