امید فرهنگ ملکیان

7.D.2.

		نفر دوم H	T
نفر اول	H	-۱ و ۱	۱ و -۱
	T	۱ و -۱	-۱ و ۱

8.B.5.a) monopoly quantity: $\Pi = (a-c)Q - bQ^2 \to \frac{\partial \Pi}{\partial Q} = 0 \to q_m = \frac{a-c}{2b}$

پس نفر اول هیچ مقداری بیش از این تولید نمی‌کند زیرا $\frac{a-c}{2b}$ strictly dominant است به تمام اعداد بزرگتر از خودش، و بالعکس هم است زیرا

$$\Pi(\overbrace{q_m + x}^{q_1'} + q_2) < \Pi(\overbrace{q_m}^{q_1}, q_2) \quad \forall q_2 \geq 0$$

$$\|$$

$$\left(\frac{a-c}{2b}+x\right)\left(\frac{a-c}{2b}-x-q_2\right) = \Pi(q_m, q_2) - (q_2+x)x$$

همین گونه $\frac{a-c}{4b}$ بر تمام مقادیر تولید کوچکتر از خودش strictly dominant است زیرا:

$$\Pi\left(\frac{a-c}{4b}-x, q_2\right) = \left(\frac{a-c}{4b}-x\right)\left(\frac{3(a-c)}{4b}+x-q_2\right) = \Pi\left(\frac{a-c}{4b}, q_2\right) - \underbrace{x}_{\geq 0}\Big(\underbrace{\frac{a-c}{2b}-q_2}_{>0 \text{ طبق بالا}} + \underbrace{x}_{>0}\Big) \to$$

$$\Pi\left(\frac{a-c}{4b}-x, q_2\right) < \Pi\left(\frac{a-c}{4b}, q_2\right)$$ به ازای هر q_2 و $x > 0$

حالا فرض کنید x و x' هم عددی مثبت و هم منفی می‌توانند باشند و داریم:

$$\frac{a-c}{3b}+x \quad , \quad \frac{a-c}{3b}+x'$$

$$\Pi_1 = \Pi^*\left(\frac{a-c}{3b}, \frac{a-c}{3b}\right) - x(x+x')$$

$$\Pi_2 = \Pi^*\left(\frac{a-c}{3b}, \frac{a-c}{3b}\right) - x'(x+x')$$

بازیکن دوم \ بازیکن اول	$x<0$	$x=0$	$x>0$
$x'<0$	۰≮ و ۰<	۰ و ۰<	۰< و ۰<
$x'=0$	۰< و ۰	۰ و ۰	۰ و ۰<
$x'>0$	۰< و ۰<	۰ و ۰<	۰< و ۰<

در این جا ($\Pi_2 - \Pi^*$ و $\Pi_1 - \Pi^*$) علامتش تعیین شده است

حالاتی که دور آن‌ها دایره کشیده شده است، بازیکن طرف مقابل طوری بازی می‌کند که طرف بازی حتماً ضرر ببیند چون طبق فرمول‌ها سودش بیشتر می‌شود پس تمامی payoff ها رسم شده است و چون ستون دوم به تمامی ستون‌ها و سطر دوم به تمامی سطرها برتری دارد پس خانه‌ی $x=0$ و $x'=0$ انتخاب می‌شود پس جواب $\frac{a-c}{3b}$ است.

۲ سطر و ستون را حذف می‌کنیم

۸.C.۴) بازیکن ۲ حالت U به احتمال α و D را به احتمال $1-\alpha$ بازی می‌کند و بازیکن ۳، ۱ را به احتمال β و ۲ را به احتمال $1-\beta$ بازی می‌کند.

$$\text{Payoff}_M = P_M = M + \left(\frac{3\alpha+3\beta}{2} - 3\alpha\beta - 1\right)\eta \qquad \frac{\partial P_M}{\partial \alpha} = \eta\left(\frac{3}{2} - 3\beta\right)$$

$$P_L = M + (2\beta - 1)\varepsilon$$

$$P_R = M + (1-2\beta)\varepsilon$$

a) برای آن که ثابت کنیم که P_M هیچ وقت بهترین پاسخ به بازیکنان ۲ و ۳ است برای ۳ حالت $\beta > \frac{1}{2}$ و $\beta < \frac{1}{2}$ و $\beta = \frac{1}{2}$ این را ثابت می‌کنیم

۱) $\beta > \frac{1}{2}$: $\frac{\partial P_M}{\partial \alpha} < 0$ ← بهترین پاسخ زمانی است که $\alpha = 0$ باشد و

$$P_M(\alpha=0) = M + \eta\left(\frac{3}{2}\beta - 1\right) < M + 4\varepsilon\left(\frac{3}{2}\beta - 1\right) < P_L = M + 4\varepsilon(2\beta - 1)$$

و در P_L هیچ α ای وجود ندارد پس این برای تمام αها درست است پس M در این حالت بیشترین payoff را ندارد.

۲) $\beta = \frac{1}{2}$: $P_M = M - \frac{\eta}{4} < M = P_R = P_L$ ← ✓✓

۳) $\beta < \frac{1}{2}$: $\frac{\partial P_M}{\partial \alpha} > 0$ پس $\alpha = 1$ بهترین پاسخ P_M را خواهد داد و داریم:

$$M + \eta\left(\frac{1}{2} - \frac{3}{2}\beta\right) < M + \eta\left(\frac{1}{2} - \frac{3}{2}\beta + \frac{1}{2} - \beta\right) < M + 4\varepsilon(1-2\beta) = P_R$$

در این حالت هم P_R به α بستگی ندارد پس برای تمام αها درست است پس ✓✓

پس این قسمت حل شد.

b) باید ثابت کنیم R که اگر با احتمال γ و L با احتمال $1-\gamma$ باشد M را strictly dominates نمی‌کند که برای این ۲ حالت $\gamma \le \frac{1}{2}$ و $\gamma > \frac{1}{2}$ را در نظر می‌گیریم:

حالت ۱) $\gamma \le \frac{1}{2}$: اگر $\beta = 0$ و $\alpha = 1$ باشد، $P_M = M + \frac{\eta}{2} > M$. استراتژی mixed، payoff آن $M - 4\varepsilon(1-2\gamma) \le M$. پس M نمی‌تواند strictly dominated شود توسط یک استراتژی mixed.

حالت ۲) $\gamma > \frac{1}{2}$: اگر $\beta = 1$ و $\alpha = 0$ ← $M < M + \frac{\eta}{2} = P_M$ و $M \ge M - 4\varepsilon(2\gamma - 1) = P_{mixed}$ ← ✓✓

(D,1) و (U,2)

c) اگر بازیکن ۲ و ۳ بازی correlate انجام دهند و هر یک از ۲ حالت بالا را به احتمال $\frac{1}{2}$ انتخاب کنند، استراتژی‌های L و R هر کدام payoff ای برابر M برای شخص ۱ دارند در حالی که M، payoff ای برابر $M + \eta/2$ داره.

Ad exercise : B is strictly dominated by M so we remove B.

a mix strategy with probablity $\frac{1}{۲}$ for C, $\frac{1}{۲}$ for R is strictly dominate L so we remove L. so the below strategies will remain:

	C	R
T	۵,-۳	۲,۰
M	۲,۰	۲,-۲

Nash equilibria when C and R probs are p & 1-p and T and M probs are q, 1-q.

$$U_{player1} = ۳(1-p^*) + ۲p^*(1-q) \rightarrow \frac{\partial u_{p1}}{\partial q} = 0 = -۲p^* \rightarrow p^* = 0$$

$$U_{p2} = -۳pq^* - ۲(1-p)(1-q^*) \rightarrow \frac{\partial u_{p2}}{\partial p} = 0 = -۳q^* + ۲(1-q^*) \rightarrow \frac{۲}{۵} = q^*$$

پس جواب این مسئله یک استراتژی mix است که فرد دوم فقط R را بازی می کند و فرد اول T را به احتمال $\frac{۲}{۵}$ و M را به احتمال $\frac{۳}{۵}$ بازی می کند.
Nash تک

Ad exercise 2:

بازی مخلوط a به احتمال $\frac{۱}{۹}$ و b به احتمال $\frac{۳}{۹}$ و d به احتمال $\frac{۵}{۹}$ به وضوح strictly dominates می کند c را زیرا:

$$0 < \frac{d}{۹} \text{ و } ۱ < \frac{۱۰}{۹} + \frac{۱}{۹} \text{ و } ۲ < \frac{۵}{۹} + \frac{۱۲}{۹} + \frac{۲}{۹} = \frac{۱۹}{۹} \text{ و } ۱ < \frac{۱۵}{۹} + \frac{۴}{۹}$$

پس c را حذف می کنیم.

حال بازی مخلوط A به احتمال $\frac{۲}{۵}$ و D به احتمال $\frac{۳}{۵}$، strictly dominates می کند c را پس C را نیز حذف می کنیم پس داریم:

		P2		
		a	b	d
P1	A	۳,۱	۰,۰	۰,۰
	B	۱,۱	۱,۰	۱,۲
	D	۰,۴	۱,۵	۲,۳

به وضوح b توسط a، strictly dominated است پس b را حذف می کنیم.

استراتژی B هم توسط استراتژی مخلوط A به احتمال $\frac{۲}{۵}$ و D به احتمال $\frac{۳}{۵}$، strictly dominated است پس B را هم حذف می کنیم. حال d strictly dominated by a پس d را هم حذف می کنیم. حال بازی زیر باقی می ماند که به صورت بدیهی (A و a) انتخاب می شود.

	a
A	۳,۱
D	۰,۴

Ad exercise 3:

a) →

A1 \ A2	۱۰۰	200	300
100	۱۰۰ و ۱۰۰	۰ و ۳۰۰	۱۰۰ و ۳۰۰
200	۳۰۰ و ۰	۲۰۰ و ۲۰۰	۱۰۰ و ۴۰۰
300	۳۰۰ و ۱۰۰	۴۰۰ و ۱۰۰	۳۰۰ و ۳۰۰

b) هیچ استراتژی strictly dominated نیست ولی استراتژی 300 برای هر ۲ بازیکن weakly dominated است برای استراتژی ۱۰۰ آن‌ها

c) این بازی یک تعادل Nash دارد که آن هم pure هست و بازی (۱۰۰ و ۱۰۰) است که payoff آن (۱۰۰ و ۱۰۰) است.

d) چون تنها یک خانه به عنوان تعادل Nash انتخاب شده است پس هیچ mixed strategy ای که تعادل Nash باشد ندارد

MWG

8.D.3) a) b_1 = player 1's bid b_2 = player 2's bid

V_1 = Value of object for player 1

V_2 = 〃 〃 〃 〃 〃 2

۳ حالت رخ می‌دهد:

1) $b_1 > b_2 \to \begin{cases} u_1(b_1, b_2) = V_1 - b_1 \\ u_2(b_1, b_2) = 0 \end{cases}$

2) $b_2 > b_1 \to \begin{cases} u_2(b_1, b_2) = V_2 - b_2 \\ u_1(b_1, b_2) = 0 \end{cases}$

3) $b_1 = b_2 \to \begin{cases} u_1(b_1, b_2) = \frac{1}{2} \frac{V_1 - b_1}{2} \\ u_2(b_1, b_2) = \frac{1}{2} \frac{V_2 - b_2}{2} \end{cases}$

$\to u_1(b_1, b_2) = \begin{cases} 0 & b_1 < b_2 \\ \frac{1}{2}(V_1 - b_1) & b_1 = b_2 \\ V_1 - b_1 & b_1 > b_2 \end{cases}$

به طور مشابه برای $u_2(b_1, b_2)$ می‌باشد.

هیچ استراتژی برای بازیکن‌ها strictly dominated نیست. فرض خلف می‌کنیم که b_1 وجود دارد که توسط b_1' strictly dominated است حال اگر $b_1 > b_1'$ باشد که غیرممکن است زیرا اگر $b_1' < \frac{b_1 + b_1'}{2} = b_2^* < b_1$ در نظر گرفته شود که $u_1(b_1', b_2^*) = 0 < V_1 - b_1 = u_1(b_1, b_2^*)$ است پس باید $b_1' > b_1$ باشد، حال اگر $b_2^* = b_1 + \epsilon$ که ϵ کوچک‌ترین واحد پولی ممکن است، $0 = u_1(b_1, b_2^*) = u_1(b_1', b_2^*)$

8.D.3.b) ادعا: اگر $b_1 > v_1$ باشد: b_1 is weakly dominated by v_1

اثبات: ۴ حالت داریم: ۱- $b_2 < v_1$:

$u_1(v_1, b_2) \geq u_1(b_1, b_2)$

$\Downarrow$

✓✓

$$u_1(b_1, b_2 = v_1 - b_1 < 0 = u_1(v_1, b_2)$$

۲- $v_1 < b_2 < b_1$:

$$u_1(b_1, b_2) = v_1 - b_1 < 0 = u_1(v_1, b_2)$$

۳- $v_1 < b_2 = b_1$:

$$u_2(b_1, b_2) = \frac{1}{2}(v_1 - b_1) < 0 = u_1(v_1, b_2)$$

۴- $b_2 > b_1$;

$$u_1(b_1, b_2 = 0 = u_1(v_1, b_2)$$

اثبات همین گونه برای بازیکن دوم صادق است.

8.D.5) a)

اگر اولی در x_1 و دومی در x_2 قرار داشته باشد و اولی سمت چپ قرار داشته باشد به تمامی افراد سمت چپ $\frac{x_1+x_2}{2}$ می فروشد و نفر دوم به تمام افراد سمت راست $\frac{x_1+x_2}{2}$ می فروشد یعنی $\frac{x_1+x_2}{2}$ - ۱ نفر یعنی $\frac{x_1+x_2}{2}$ نفر و بالعکس پس داریم:

$$u_1(x_1, x_2) = \begin{cases} \frac{x_1+x_2}{2} & x_1 < x_2 \\ \frac{1}{2} & x_1 = x_2 \\ 1 - \frac{x_1+x_2}{2} & x_1 > x_2 \end{cases} \quad \text{و} \quad u_2(x_1, x_2) = \begin{cases} 1 - \frac{x_1+x_2}{2} & x_1 < x_2 \\ \frac{1}{2} & x_1 = x_2 \\ \frac{x_1+x_2}{2} & x_1 > x_2 \end{cases}$$

حال $x_1 = x_2$ ، تعادل Nash است زیرا اگر به اندازه ε از این حالت دور شود هر که امتیازش به اندازه ی $\frac{\varepsilon}{2}$ از profit شخص کم می شود. حال ثابت می کنیم که این unique است. تمام حالات دیگر را اثبات می کنیم که تعادل Nash نیستند.

حالت ۱) اگر $x_1 = x_2 < \frac{1}{2}$ باشد، هر که امتیازش تغییر جا به جایی به $\frac{1}{2}$ ، اگر u اولیه اش که $\frac{1}{2}$ بود به $\frac{1}{2} < (\frac{1}{2} - x_j)\frac{1}{2}$ + $\frac{1}{2}$ می رسد که از حالت قبلی u اش بیشتر است پس Nash eq نیست.

حالت ۲) $x_1 = x_2 > \frac{1}{2}$ اگر هر که امتیاز به $\frac{1}{2}$ برود از $u_1 = \frac{1}{2}$ به $u_1' = \frac{x_j}{2} + \frac{1}{4} > \frac{1}{2} = u_1$ می رود که در نتیجه Nash eq نیست.

حالت ۳) اگر $x_1 < x_2$ باشد، اگر اولی از x_1 به $x_1 < x_2 - \varepsilon$ (ε یک عدد بسیار کوچک است) برود به u اش میزان $\frac{x_2 - x_1 - \varepsilon}{2}$ اضافه می شود پس این هم نیست. والبته دومی هم می تواند با آمدن به $x_1 + \varepsilon$ ، utility اش را افزایش دهد.

b) هیچ تعادل Nash وجود ندارد، در نقطه ی $\frac{1}{2} , x_1 = x_2 = x_3$ ، اگر هر کدام به سمت چپ ε به روند u اش از $\frac{1}{3}$ به چیزی $\frac{1}{3}$ بیشتر مساوی $\frac{1}{2}$ می رسد و اگر $\frac{1}{2} \neq x_1 = x_2 = x_3$ ، اگر هر کدام ε به به راست روند، u آن فرد از $\frac{1}{3}$ به چیزی بیشتر از $\frac{1}{4}$ می رود پس اگر هر ۳ برابر باشند تعادل Nash نیست. $\frac{1}{2} - \frac{\varepsilon}{2} > \frac{1}{4}$

حال اگر در یک جا نباشند، حداقل یکی از آن ها سمت راست بقیه یا یکی سمت چپ دو تای دیگر است که با آمدن به فاصله ی ε از آن ها u اش را افزایش می دهد.