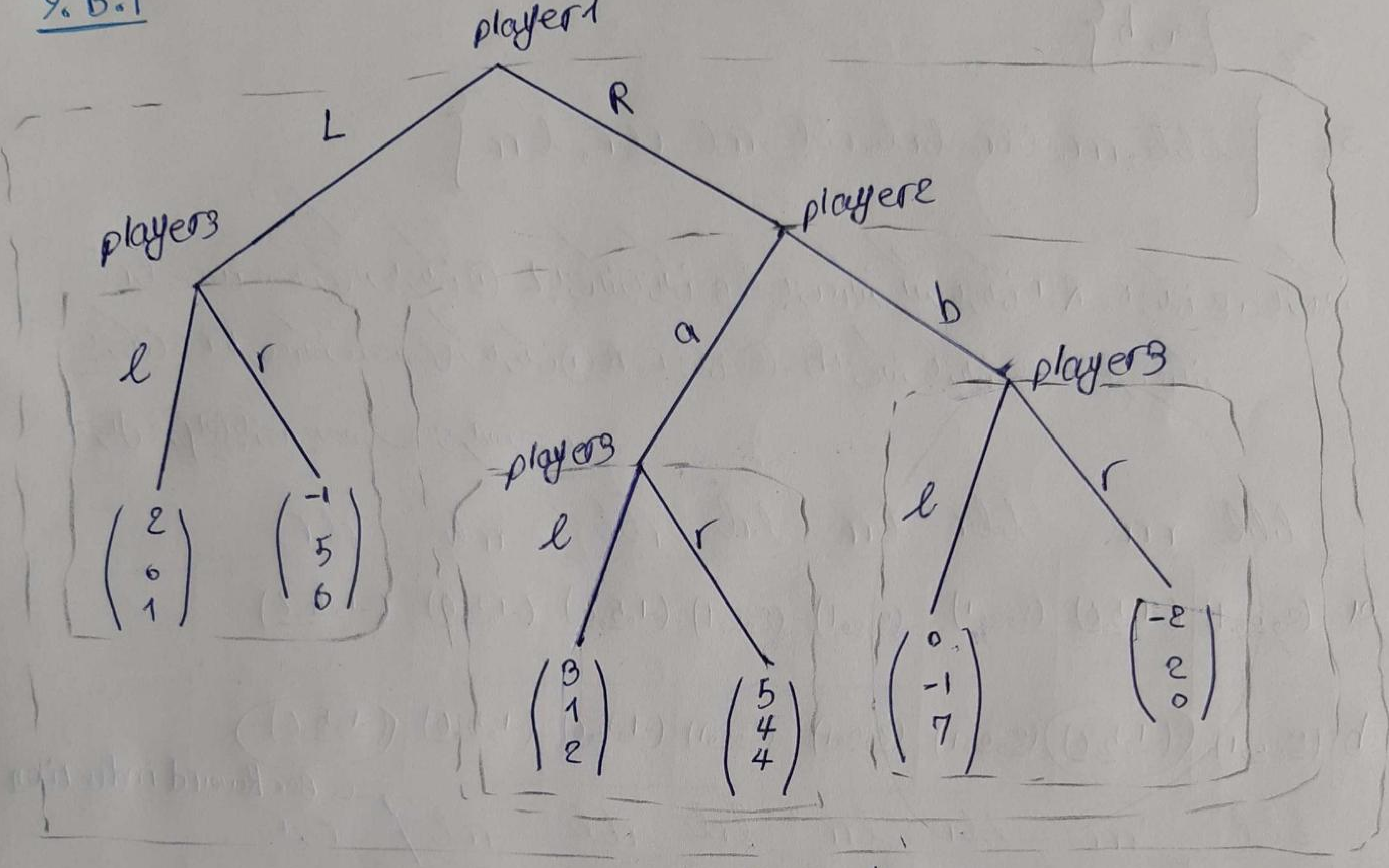
علی نقی زاده

9.B.1



این بازی ۵ زیر بازی (subgame) دارد:

9.B.2

a) طبق تعریف می‌دانیم پروفایل استراتژی σ یک SPNE است اگر در هر زیر بازی یک بازی باعث ایجاد تعادل نش شود. بنابراین در بازی‌ای که فقط یک زیر بازی دارد (آن هم خود بازی است) هر تعادل نش که این بازی را داشته باشد در تعریف فوق صدق کرده و در نتیجه SPNE است.

b) باید ثابت کنیم که

9.B.9:

استراتژی های هر بازیکن به شرح زیر است

$S_1 = \{L, R\}$

$S_2 = \{a, b\}$

$S_3 = \{lll, rrr, llr, lrl, rll, rrl, rlr, lrr\}$

lrl : یعنی در صورتی که بازیکن ① L بازی کند بازیکن 3 l بازی می کند اگر بازیکن ① R و بازیکن 2 a بازی کند بازیکن 3 r بازی می کند و در صورتی که بازیکن ① R و بازیکن ② b بازی کند بازیکن ③ l بازی می کند

نرمال فرم این بازی به صورت زیر است.

		lll	rrr	llr	lrr	lrl	rll	rrl	rlr
L	a	(2,0,1)	(-1,5,6)	(2,0,1)	(2,0,1)	(2,0,1)	(-1,5,6)	(-1,5,6)	(-1,5,6)
	b	(2,0,1)	(-1,5,6)	(2,0,1)	(2,0,1)	(2,0,1)	(-1,5,6)	(-1,5,6)	(-1,5,6)

Backward induction

		lll	rrr	llr	lrr	lrl	rll	rrl	rlr
R	a	(3,1,2)	(5,4,4)	(3,1,2)	(5,4,4)	(5,4,4)	(3,1,2)	(5,4,4)	(3,1,2)
	b	(0,-1,7)	(-2,2,0)	(-2,2,0)	(-2,2,0)	(0,-1,7)	(0,-1,7)	(0,-1,7)	(-2,2,0)

همانطور که مشاهده می کنید این بازی 6 تعادل نش خالص وجود دارد. همانطور که در مثال **2B.2** مشاهده می شود جواب این بازی از روش Backward --- ، $\sigma=(R, a, rrL)$ است که این جواب جزء تعادل های نش است که در بالا بدست آمده است

حال در ادامه می خواهیم بگوییم که چرا سایر جواب ها با قاعده sequential rationality سازگاری ندارند

برای مثال $\sigma_2=(L,b,rlr)$ ، $\sigma_1=(L,b,rrr)$ جواب این بازی نخواهد بود زیرا فرد ① می داند بازیکن ها عقلانی رفتار می کنند و در صورتی که بازیکن 1، L را انتخاب کند ← بازیکن 3 r را انتخاب می کند و این موجب می شود که پیامد 1- نصیب فرد 1 شود در صورتی که اگر R را انتخاب کند و در صورت عقلانی رفتار کردن سایر بازیکن ها پیامدی معادل 5 نصیبش می شود

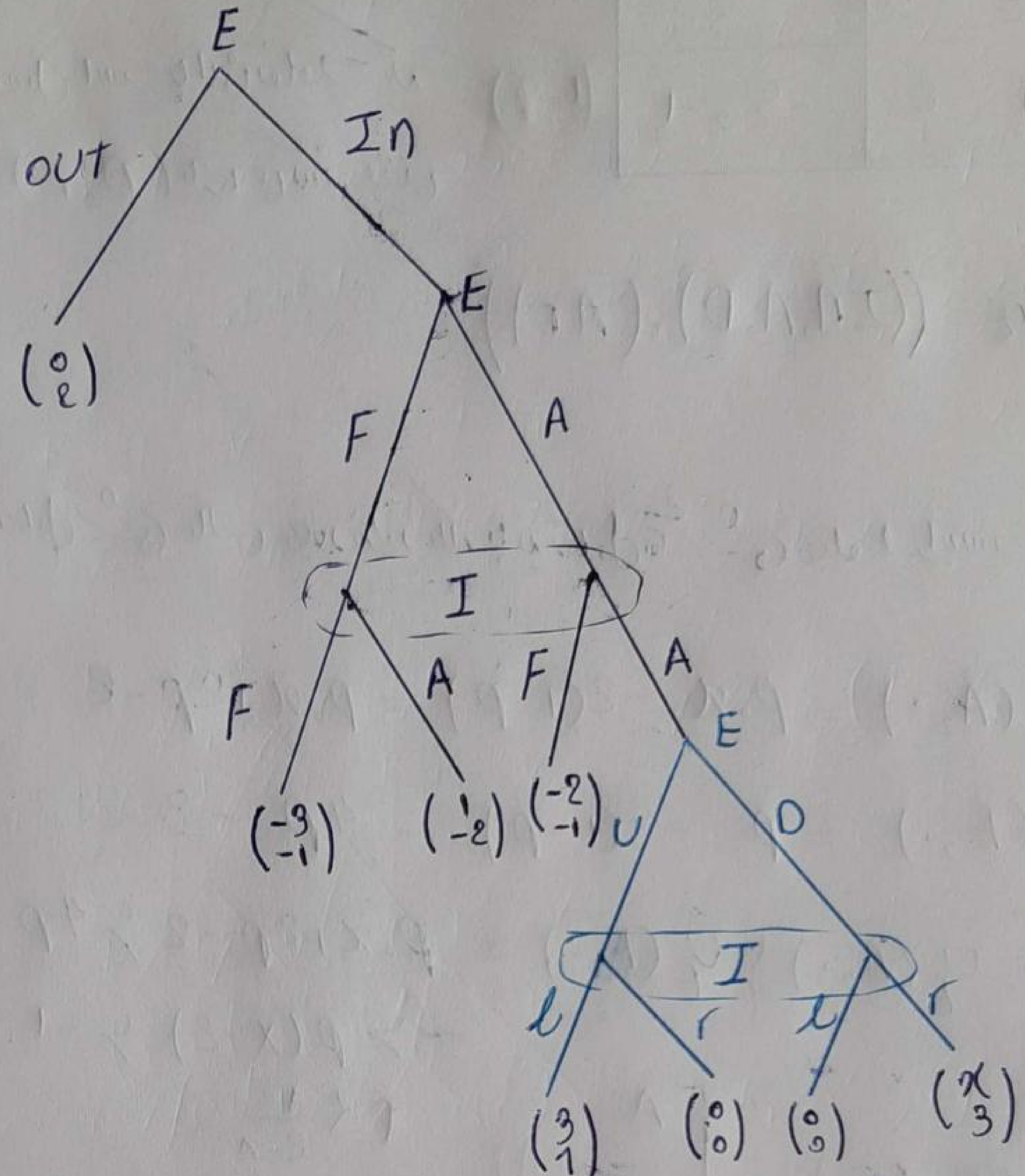
9.B.10

I

$x > 0$

	l	r
U	3, 1	0, 0
D	0, 0	x, 3

E



$x < 0$

	l	r
U	3, 1	0, 0
D	0, 0	x, 3

E

اگر $x<0$ باشد تنها تعادل نش زیربازی جدیدی که به بازی اضافه شده است برابر (U, l) است که پیامدی مانند قبل ایجاد می‌کند و SPNE بازی جدید مانند آن چیزی است که در مثال 9.B.3 است.

SPNE = ((In - Accomodate if in - U), (accomodate if firm E plays in - l))

حال اگر $x>0$ باشد

یک حالت این است این است که بازیکنان در زیربازی اضافه شده (U, l) بازی کنند که در این صورت SPNE بازی مانند حالت قبل است

حالت‌های دیگر مربوط به زمانی است که در این زیربازی بازیکنان (D, r) را بازی کنند. حال باید با توجه به پیامد حاصل از این تعادل، پیامد حاصل از تعادل در زیربازی مرحله قبل را به دست آوریم یعنی باید در بازی زیر تعادل نش را به دست آوریم

I

	A	F
A	(x, 3)	(−2, −1)
F	(1, −2)	(−3, −1)

E

		I	
	A (p)	F (1-p)	
A	(x , 3)	-2 , -1	(q)
F	1 , -2	-3 , -1	(1-q)

E

در صورتی که $x>1$ باشد =>

بنابراین در این حالت نیز SPNE مانند قبل است با این تفاوت که بازیکنان در زیربازی اضافه شده (D , r) بازی می‌کنند یعنی

$$SPNE=((In,A,D),(A\,r))$$

حال اگر $x<1$ باشد در زیربازی فوق تعادل نش خالص وجود ندارد بلکه باید تعادل های نش مخلوط را بدست آوریم

$$U_E(A,\cdot) = p\cdot x - 2(1-p) = p\cdot x + 2p - 2$$

$$U_E(F,\cdot) = p - 3(1-p) = 4p - 3$$

$$\rightarrow U_E(A,\cdot) > U_E(F,\cdot) = p\cdot x + 2p - 2 > 4p - 3$$

$$\rightarrow p(x-2) > -1 \rightarrow p(2-x) < 1 \rightarrow \boxed{p < \frac{1}{2-x}}$$

$$\rightarrow BR_E(s_I) = \begin{cases} A & p < \frac{1}{2-x} \\ \{A , F\} & p = \frac{1}{2-x} \\ F & p > \frac{1}{2-x} \end{cases}$$

$$U_I(A,\cdot) = 3q - 2(1-q) = 5q - 2$$

$$U_I(F,\cdot) = -1$$

$$\Rightarrow U_I(A,\cdot) > U_I(F,\cdot) \rightarrow 5q - 2 > -1 \rightarrow \boxed{q > 1/5}$$

$$BR_I(s_E) = \begin{cases} A & q > 1/5 \\ \{A , F\} & q = 1/5 \\ F & q < 1/5 \end{cases}$$

همانطور که در بالا ذکر شد بازی فوق تعادل نش خالص ندارد بنابراین تعادل نش مخلوط آن بدین صورت است که شرکت I با احتمال $\frac{1}{2-x}$ A را بازی کند و با احتمال $(1-\frac{1}{2-x})$ F را بازی کند و شرکت E با احتمال $1/5$ A را بازی کند و با احتمال $4/5$ F را بازی کند در این حالت پیامد انتظاری هر بازیکن به صورت زیر بدست می‌آید.

$$E(U_E) = \frac{x}{5(2-x)} - 2 \times \frac{1}{5}\left(1 - \frac{1}{2-x}\right) + \frac{4}{5} \times \frac{1}{2-x} - 3 \times \frac{4}{5}\left(1 - \frac{1}{2-x}\right)$$

$$= \frac{x}{5 \times (2-x)} - \frac{2(1-x)}{5(2-x)} + \frac{4}{5(2-x)} - \frac{12(1-x)}{5(2-x)} = \frac{15x-10}{5(2-x)} = \boxed{\frac{3x-2}{2-x}}$$

$$E(U_I) = -1$$

بنابراین حالت های زیر پیش می آید

if $3x - 2 < 0 \rightarrow x < 2/3$

در این صورت شرکت E می داند درصورتی که در گره اول In بازی کند تعادل نش مخلوطی ایجاد خواهد شد که برای او پیامد انتظاری منفی ای دارد بنابراین در گره اول OUT بازی می کند

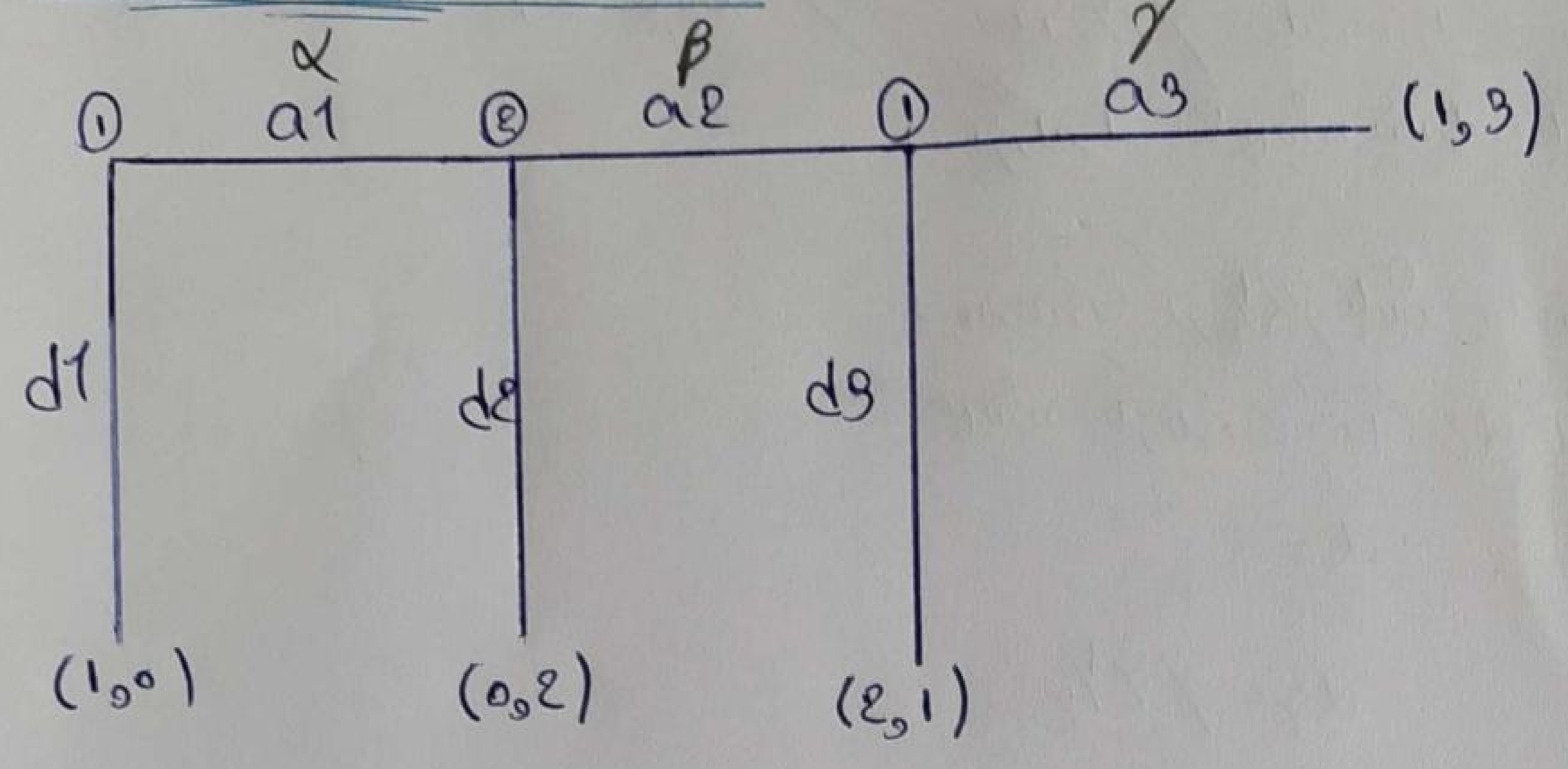
if $3x - 2 > 0 \rightarrow 2/3 < x < 1$

در این صورت شرکت E در گره اول In بازی می کند و پس از آن تعادل نش حاصل می شود که پیامد انتظاری ناشی برای شرکت E مثبت است (اگر OUT بازی می کرد مطلوبیت صفر کسب می کرد)

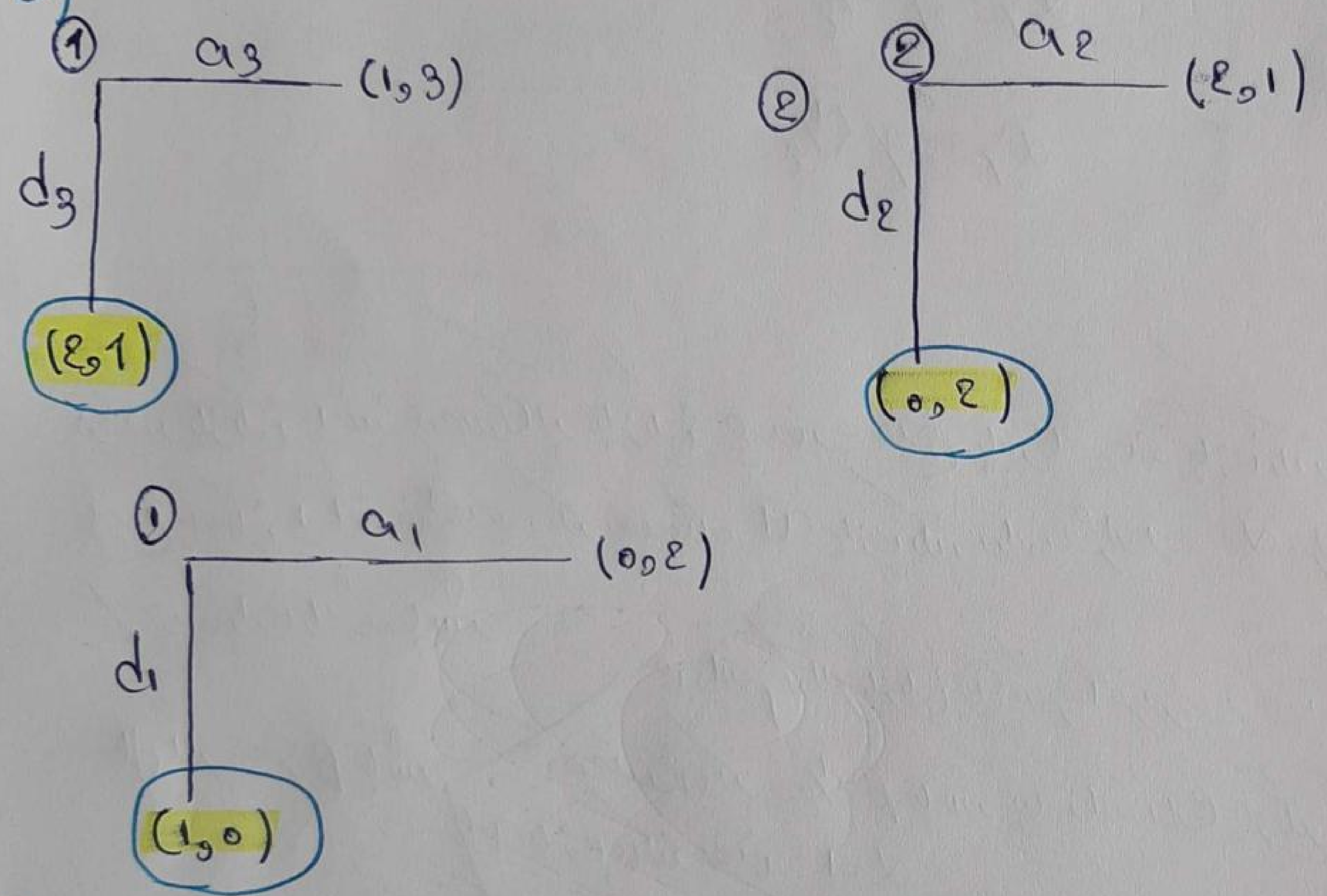
if $3x - 2 = 0 \rightarrow x = 2/3$

در این حالت برای بازیکن ① فرقی نمی کند که در گره اول In بازی کند یا <u>OUT</u>

Aditional Exercise 1:



a)



b)

پیامدهای انتظاری بازیکن ها به شکل زیر است

$$U_2(\beta \mid \alpha,\gamma) = \alpha\Big(2(1-\beta) + \beta\big(3\gamma + (1-\gamma)1\big)\Big)$$

$$= \alpha\big(\beta(2\gamma-1)+2\big)$$

$$U_1(\alpha,\gamma \mid \beta) = (1-\alpha) + \alpha\Big((1-\beta)\times 0 + \beta\times\big(\gamma\times 1 + (1-\gamma)2\big)\Big)$$

$$= (1-\alpha) + \alpha\beta(2-\gamma)$$

بیشترین پاسخ هر بازیکن به استراتژی های طرف مقابل به صورت زیر به دست می آید

اگر بازیکن ① تحت هیچ شرایطی a1 را بازی نکند یا به عبارتی α برابر صفر باشد آنگاه فرقی نمی کند β چه مقداری داشته باشد یعنی در این حالت $\beta \in [0,1]$

حال درصورتی که $\alpha > 0$ باشد

درصورتی بازیکن ① در گره آخر با احتمالی بزرگتر از $\frac{1}{2}$ ، a_1 بازی کند یعنی $\gamma > 1/2$ در این صورت پیامد انتظاری در این گره برای بازیکن 2 بزرگتر از 2 می شود بنابراین بازیکن 2 حتماً a_2 بازی می کند یعنی $\beta = 1$

و درصورتی که $\gamma < 1/2$ باشد پیامد انتظاری بازیکن 2 در این گره کمتر از 2 می شود و بازیکن 2 حتماً d_2 بازی می کند یعنی $\beta = 0$

$$\Rightarrow BR_2 = \begin{cases} \beta \in [0, 1] & \alpha = 0 \\ \beta = 1 & \alpha > 0 , \gamma > 1/2 \\ \beta \in [0, 1] & \alpha > 0 , \gamma = 1/2 \\ \beta = 0 & \alpha > 0 , \gamma < 1/2 \end{cases}$$

درمورد بازیکن 1 نیز درصورتی که بازیکن 2 تحت هیچ شرایطی a_2 بازی نکند یعنی $\beta = 0$ آنگاه بهترین پاسخ بازیکن 1 این خواهد بود که هیچگاه a_1 بازی نکند در این شرایط α برابر صفر است و فرقی نمی کند که γ چه مقداری داشته باشد

حال اگر $\beta > 0$ باشد

می دانیم که اگر بازیکن ① به گره آخر برسد حتماً d_1 را بازی می کند یعنی $\gamma = 0$ بنابراین درصورتی که $\beta > 1/2$ باشد پیامد انتظاری بازیکن 1 در گره 2 بزرگتر از 1 می شود و حتماً a_1 بازی می کند یعنی $\alpha = 1$

درصورتی که $\beta < 1/2$ باشد پیامد انتظاری بازیکن 1 در گره 2 کوچکتر از ① خواهد شد و بازیکن ① حتماً d_1 بازی می کند یعنی $\alpha = 0$

$$\Rightarrow BR_1(\beta) = \begin{cases} \alpha = 0 , \gamma \in [0, 1] & \beta = 0 \\ \alpha = 1 , \gamma = 0 & \beta > 1/2 \\ \alpha \in [0, 1] , \gamma = 0 & \beta = 1/2 \\ \alpha = 0 , \gamma \in [0, 1] & \beta < 1/2 \end{cases}$$

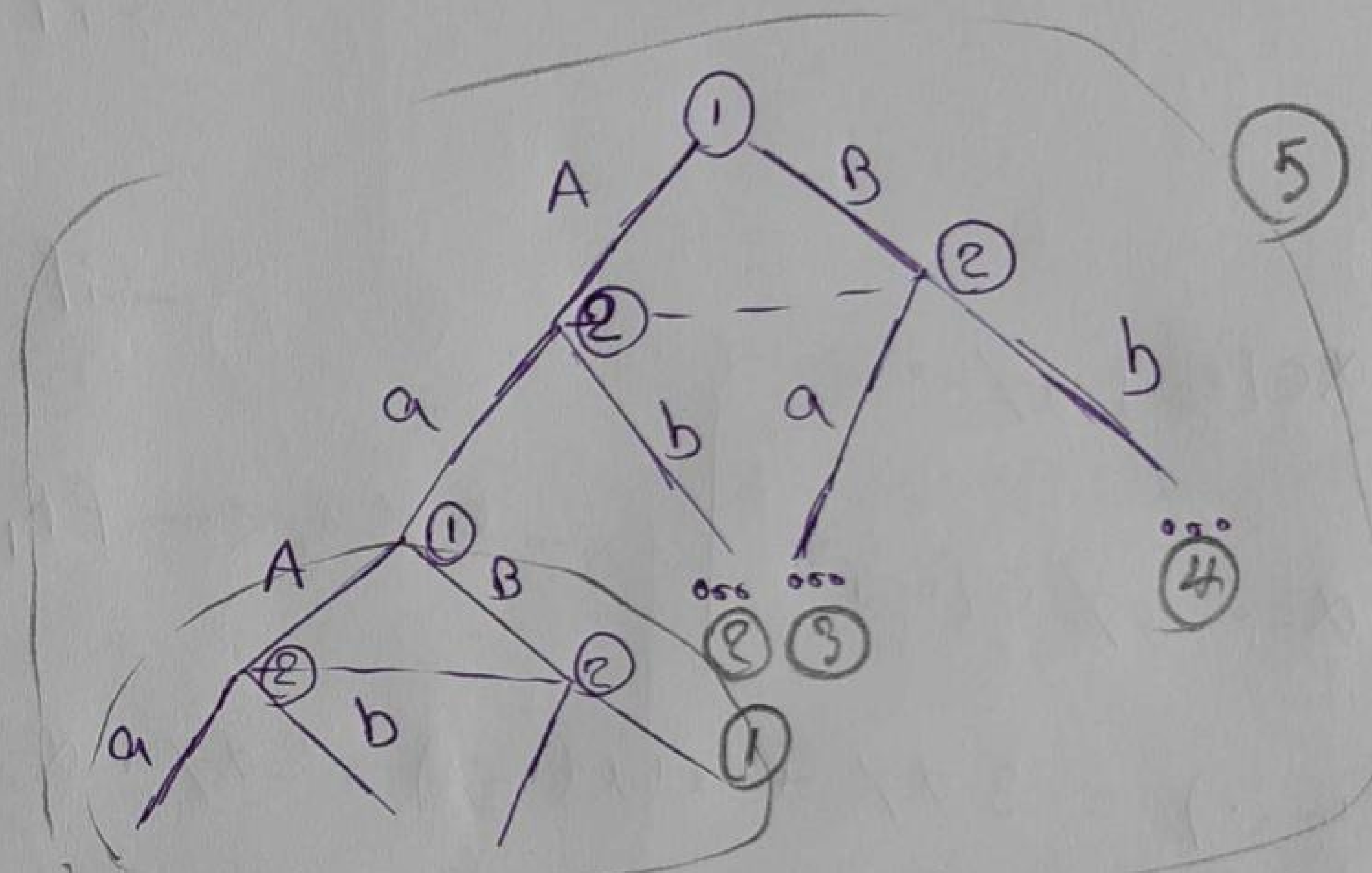
اگر $\gamma, \alpha > 0$ باشد بازیکن ۲ $\beta \in [0,1]$ را بازی می‌کند ولی متاسفانه که در مجموعه بهترین پاسخ‌های بازیکن ۱ آمده است $\alpha > 0, \gamma = 1/2$ هیچگاه رخ نمی‌دهد β ای (بهترین پاسخ برای شخص ۱ نخواهد بود بنابراین این حالت نیز تعادل نش نیست

بهترین پاسخ بازیکن ۱

حالتی که $\alpha > 0, \gamma < 1/2$ باشد بهترین پاسخ بازیکن ۲ $\beta = 0$ است ولی درصورتی $\alpha > 0, \gamma < 1/2$ می‌شود که $\beta > 1/2$ باشد بنابراین این حالت نیز تعادل نش نیست

Additional Exercise 2:

		②	
		a	b
①	A	10, 10	5, 20
	B	20, 5	7, 7



بازیکن ۱ پنج مجموعه اطلاعاتی دارد (information set) و در هر مجموعه اطلاعاتی دو عمل A, B وجود دارد، بنابراین تعداد استراتژی‌های بازیکن ۱ در این بازی 2^5 است به طور مثال یکی از استراتژی‌های بازیکن ۱ به صورت زیر است ←

ABBAA

بازیکن ۲ نیز از آنجایی که نمی‌داند در مرحله قبل بازیکن چه حرکتی انجام داده است، پنج مجموعه اطلاعاتی دارد که در هر مجموعه اطلاعاتی دو عمل a, b وجود دارد بنابراین این بازیکن نیز 2^5 استراتژی دارد

به طور مثال ababb

این بازی 5 زیر بازی دارد

در حالت تک مرحله‌ای بازی می‌دانیم تعادل نش به این صورت است که هر بازیکن ۱ B و بازیکن ۲ b بازی کند بنابراین در چهار زیر بازی که در مرحله آخر اتفاق می‌افتد یک تعادل نش وجود دارد و آن (B, b) است و حال با علم به این نتیجه در مرحله آخر در مرحله اول نیز بازیکنان (B, b) بازی می‌کنند

همچنین برای بدست آوردن بهترین پاسخ ها از فرم نرمال بازی استفاده کرد.

player②

①

	a_2 (β)	d_2 ($1-\beta$)	
a_1a_3	$(1,3)$	$(0,2)$	$\alpha\gamma$
a_1d_3	$(2,1)$	$(0,2)$	$\alpha(1-\gamma)$
d_1a_3	$(1,0)$	$(1,0)$	$(1-\alpha)\gamma$
d_1d_3	$(1,0)$	$(1,0)$	$(1-\alpha)(1-\gamma)$

$$u_1(a_1a_3,\cdot)=\beta$$
$$u_1(a_1d_3,\cdot)=2\beta$$
$$u_1(d_1a_3)=1$$
$$u_1(d_1d_3)=1$$

$\rightarrow$ if $\beta<1/2 \rightarrow BR_1=\{d_1a_3, d_1d_3\} \rightarrow \alpha=0, \gamma\in[0,1]$

$\rightarrow$ if $\beta>1/2 \rightarrow BR_1=\{a_1d_3\} \rightarrow \alpha=1, \gamma=0$

$\rightarrow$ if $\beta=1/2 \rightarrow BR_1=\{a_1d_3, d_1a_3, d_1d_3\} \rightarrow BR_1=S_1-\{a_1a_3\} \rightarrow \alpha\gamma=0 \rightarrow \begin{cases}\alpha\in[0,1], \gamma=0\\ \alpha=0, \gamma\in[0,1]\end{cases}$

$$u_2(a_2,\cdot)=3\alpha\gamma+1\times\alpha(1-\gamma)=2\alpha\gamma+\alpha=\alpha(1+2\gamma)$$
$$u_2(d_2,\cdot)=2\alpha\gamma+2\alpha(1-\gamma)=2\alpha$$

$u_2(a_2,\cdot)>u_2(d_2,\cdot) \rightarrow \alpha(1+2\gamma)>2\alpha \xrightarrow{\text{if } \alpha>0} (1+2\gamma)>2 \rightarrow \gamma>1/2$

$u_2(d_2,\cdot)>u_2(a_2,\cdot) \rightarrow 2\alpha>(1+2\gamma)\alpha \xrightarrow{\text{if } \alpha>0} (1+2\gamma)<2 \rightarrow \gamma<1/2$

$u_2(a_2,\cdot)=u_2(d_2,\cdot) \rightarrow \alpha(1+2\gamma)=2\alpha \begin{cases}\alpha=0\\ \alpha\neq0, \gamma=1/2\end{cases}$

تعادل های نش:

$\{d_1a_3, d_2\}$

$\{d_1d_3, d_3\}$

$\rightarrow$ زمانی که بازیکن ۲ بخواهد استراتژی $\beta=1$ را انتخاب کند باید $\alpha>0$ و $\gamma>1/2$ باشد ولی مشخص است که $\beta=1$ باشد بازیکن ۱ انگیزه تخطی دارد و $\gamma=0$ را بازی می کند پس این حالت تعادل نش نیست

بنابراین تعادل SPNE این بازی برابر است با (BBBBB, bbbbb)

Additional Ex9 :

a) تشریح بازی : ابتدا یک شرکت مقدار q_1 تولید می‌کند (رهبر) و بعد شرکت ② با توجه مقداری که شرکت ① تولید کرده، تولید خود را مشخص می‌کند

تابع تقاضا بازار $P(Q) = 6 - Q$

$$Q = q_1 + q_2$$

هزینه نهایی هر شرکت 4 دلار است و هر شرکت بیشتر از 3 واحد نمی‌تواند تولید کند بنابراین استراتژی هر شرکت به صورت زیر است

$$S_1 \in [0, 3]$$

$$S_2 : [0, 3] \rightarrow [0, 3]$$

بهترین پاسخ شرکت 2 به مقداری که شرکت ① تولید می‌کند به صورت زیر بدست می‌آید

$$\max_{q_2 \geq 0} M_2(q_1, q_2) = \max_{q_2 \geq 0} q_2 [a - q_1 - q_2 - c]$$

$$\frac{\partial M_2}{\partial q_2} = (a - q_1 - q_2 - c) - q_2 \rightarrow R_2(q_1) = \frac{a - q_1 - c}{2}$$

حال برای اینکه به تعادل نش دست یابیم که در آن برانداره مدل کورنو تولید شود به صورت زیر عمل می‌کنیم

در تعادل مدل کورنو هر شرکت $\frac{a-c}{3}$ تولید می‌کرد، بنابراین درصورتی که شرکت رهبر ① $\frac{a-c}{3}$ تولید کند

$$\rightarrow q_1 = \frac{6-4}{3} = 2/3 \rightarrow q_2 = R_2(q_1) = 2/3$$

حال اگر شرکت 2 استراتژی تولید خود را به گونه‌ای اتخاذ کند که درصورتی که شرکت ① $2/3$ تولید کند شرکت 2 نیز $2/3$ تولید خواهد کرد و در غیر این صورت شرکت 2 بیشتر از 2 واحد تولید می‌کند، در این حالت تعادل نش ایجاد می‌شود که خروجی آن مقادیری است که از تعادل مدل کورنو حاصل می‌شود زیرا شرکت 2 بهترین پاسخ خود را داده است و شرکت ① نیز بهترین پاسخ خود را در مقابل استراتژی که بهترین پاسخ شرکت ① است داده است، ولی این تعادل SPNE نیست زیرا با فرض عقلایی رفتار

کردن شرکت ها شرکت ۱ تهدید شرکت ۲ مبنی بر تولید بیشتر از ۲ واحد را نمی پذیرد.

c)

تولید در حالت انحصار:

$$\max_{q} \; q(6-q-4)$$

$$(2-q)-q=0 \quad \rightarrow \boxed{q=1}$$

همانند استدلال قبل اگر شرکت ۲ استراتژی خود را اینگونه اتخاذ کند که در صورت عدم تولید شرکت اول ۱ واحد تولید می کند و در صورت تولید شرکت اول بیشتر از ۲ واحد تولید خواهد کرد، تعادل نش شکل می گیرد که در آن شرکت ۱ تولید نمی کند زیرا بهترین پاسخ در برابر استراتژی شرکت ۲ این است که تولید نکند (در صورت تولید شرکت ۱ پیامد منفی نصیبش می شود) و همچنین شرکت ۲ نیز بهترین پاسخ خود را در صورت عدم تولید شرکت ۱ داده است.

d)

برای بدست آوردن جواب های SPNE ابتدا بهترین پاسخ شرکت ۲ را برای هر q_1 ای بدست می آوریم که این بهترین پاسخ همانطور که در صفحه قبل بدست آمده برابر است با

$$R_2(q_1) = \frac{a-q_1-c}{2}$$

حال شرکت ۱ با توجه به اینکه شرکت ۲ بهترین پاسخش را انجام می دهد (یعنی مقدار فوق را تولید می کند نه مقدار دیگری) سود خود را حداکثر می کند

$$\max_{q_1 \geq 0} \pi_1(q_1; R_2(q_1)) = \max q_1\left[a-q_1-R_2(q_1)-c\right]$$

$$=\max q_1\left[6-q_1-1+q_1/2-4\right]=$$

$$=\max q_1\left[1-\tfrac{1}{2}q_1\right]$$

$$\rightarrow (1-\tfrac{1}{2}q_1)-\tfrac{1}{2}q_1=0 \rightarrow \boxed{q_1=1}$$

$$\rightarrow \boxed{SPNE=(q_1=1,\; q_2=1/2)}$$

$$\rightarrow R_2(q_1)=\frac{2-1}{2}=1/2$$

Additional Ex4 :

a)

در این بازی نفر اول کیک را بین n نفر تقسیم می‌کند و درصورتی که همه راضی باشند قبول می‌کنند و در غیر این صورت قبول نمی‌کنند و کیک ها را می‌دهند به سگ. بنابراین استراتژی بازیکنان این بازی به شکل زیر است

$$S_1 = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) \; ; \; \sum \alpha_i = 1 \, , \, \alpha_i \geq 0$$

$$S_{j \neq 1} = \{Yes, No\}$$

b)

در این بازی ۲ نفره، نفر اول سهمی از کیک را به نفر دوم پیشنهاد می‌کند، به ازای هر سهم مثبتی از کیک نفر دوم می‌پذیرد زیرا درصورت نپذیرفتن چیزی نصیبش نمی‌شود و درصورت پذیرفتن مطلوبیتی مثبت کسب می‌کند

حال اگر بازیکن ۱ سهم صفر را پیشنهاد دهد، که همان بازیکن ۱ نسبت به اینکه کیک را سگ بخورد یا بازیکن ①، بی‌تفاوت است بنابراین در این حالت بازیکن ۲ از آنجایی نسبت به استراتژی های Yes, No بی‌تفاوت خواهد بود

بنابراین بهترین پاسخ فرد به صورت زیر خواهد بود

$$BR(S_1) = \begin{cases} Yes & \alpha_2 > 0 \\ \{No, Yes\} & \alpha_2 = 0 \end{cases}$$

بنابراین هر $\alpha_2 = \varepsilon > 0$ ای که بازیکن ۱ پیشنهاد دهد بازیکن ۲ می‌پذیرد ولی به ازای هر ε ای بازیکن ۱ انگیزه‌ی تخطی دارد زیرا همچنان مقدار کمتری مثل $\varepsilon/2$ می‌تواند پیشنهاد دهد و بازیکن ۲ بپذیرد بنابراین ε ای وجود ندارد که بازیکن ۱ به ازای آن انگیزه‌ی تخطی نداشته باشد؛ در نتیجه تعادل نش وجود ندارد.

(سؤال: نفهمیدم چرا دو نوع بهترین پاسخ برای حل این سؤال در نظر گرفته شده؟)

در حالتی که ۳ بازیکن نیز وجود داشته باشند بهترین پاسخ هر یک به صورت زیر است

$$BR_2(S_1) = \begin{cases} Yes & \alpha_2 > 0 \\ \{No, Yes\} & \alpha_2 = 0 \end{cases} \quad , \quad BR_3(S_1) = \begin{cases} Yes & \alpha_3 > 0 \\ \{No, Yes\} & \alpha_3 = 0 \end{cases}$$

در این حالت نیز مانند قسمت قبل، از آنجایی که $e_1 = \alpha_2$, $e_2 = \alpha_3$ ای موجود ندارد که به ازای آن ۰ بازیکن 1 انگیزه ی تخطی نداشته باشد، نتیجه می شود که تعادل نشی موجود ندارد.

Additional Ex5 :

اگر از آخر به این بازی نگاه کنیم در صورتی که بازی به مرحله آخر برسد یعنی مرحله ای که دزد دریایی R ام باید تصمیم بگیرد که پیشنهاد دزد دریایی R-1 را بپذیرد یا خیر مطلوبیت حاصل از استراتژی های وی به شرح زیر است

در صورتی که بازیکن R-1 هر پیشنهادی کمتر از سکه هایی که دارد بدهد بازیکن R پیشنهاد او را رد کرده تمام سکه هایش را می گیرد و او را طعمه کوسه ها می کند

حتی اگر بازیکن R-1 تمام سکه هایش را پیشنهاد دهد باز هم بازیکن R از عدم قبول این پیشنهاد مطلوبیت بیشتری کسب می کند زیرا هم تمام سکه هایش را پس می گیرد و هم شاهد خورده شدن او توسط کوسه ها می شود که امری لذت بخش برایش است

لذا با این استدلال می توان استراتژی های بازیکنان را از آخر به اول مشخص کرد

	①	②	...	R-2	R-1	R
R فرد :		Accept	...	Reject	Accept	Reject
R زوج :		Reject				

بنابراین اگر تعداد بازیکنان فرد باشد بازیکن 2 هر پیشنهاد بازیکن ① را می پذیرد، لذا بازیکن ① با علم به اینکه بازیکن 2 هر پیشنهاد او را می پذیرد لذا به او صفر پیشنهاد می دهد و بازیکن 2 نیز می پذیرد، زیرا در صورتی که نپذیرد در ادامه بازیکن بعدی او را طعمه کوسه ها خواهد کرد.

حال اگر تعداد بازیکنان زوج باشد بازیکن 2 نمی پذیرد ولی بازیکن 3 هر پیشنهاد بازیکن 2 را می پذیرد و بازی تمام می شود.

Add Ex6 :

فرض کنید بازیکن 1 مقدار k_1 واحد و بازیکن 2، k_2 واحد سرمایه گذاری می کند، آنگاه بهترین پاسخ هر بازیکن برحسب زیر مشخص می شود

a)

می دانیم که این سرمایه گذاری برای اینکه به بازدهی برسد به K واحد سرمایه نیاز دارد همچنین می دانیم $K/2 < V < K$

بنابراین بهترین پاسخ هر بازیکن میزان سرمایه ای است که منجر به ثمر رسیدن سرمایه گذاری شود و همچنین از V نیز کمتر باشد.

$$BR_1(K_2) = \begin{cases} K-K_2 & K/2 < K_2 < V \\ K-K_2 & K/2 < K_2 = V \\ K-K_2 & K/2 < V < K_2 \\ K-K_2 & K_2 < K/2 < V,\ K-K_2 < V \\ 0 & K_2 < K/2 < V,\ K-K_2 > V \end{cases}$$

تعادل نشی

بازیکن 2 انگیزه تخطی دارد بنابراین تعادل نشی نیست

تعادل نشی

$$BR_2(K_1) = \begin{cases} K-K_1 & K/2 < K_1 < V \\ K-K_1 & K/2 < K_1 = V \\ K-K_1 & K/2 < V < K_1 \\ K-K_1 & K_1 < K/2 < V,\ K-K_1 < V \\ 0 & K_1 < K/2 < V,\ K-K_1 > V \end{cases}$$

تعادل نشی

بازیکن 1 انگیزه تخطی دارد بنابراین تعادل نشی نیست

تعادل نشی

بنابراین می توان تعادل های نشی را به صورت زیر نوشت

$$(s_1, s_2) = (0, 0) \quad , \quad (s_i, s_j) = \begin{cases} ((K_i-\epsilon) < V,\ \epsilon < V) \\ ((\epsilon < V), (K_j-\epsilon) < V) \end{cases}$$

b)

با توجه به تعریف R مقدار سرمایه مورد نیاز در زمان t برای به اتمام رساندن پروژه است حال در صورتی که $R < \frac{V}{2}$ باشد و در مرحله $t=T$ باشیم استراتژی R برای بازیکن t غالب اکید دارد بر سایر استراتژی های او، ولی در صورتی که در $t < T-1$ باشیم بازیکن t می داند که بازیکن های بعدی عقلانی رفتار می کنند و پروژه را به اتمام می رسانند بنابراین برای اینکه بازدهی ای از این پروژه نصیبشان شود تمایل دارند که کمترین مقدار ممکن

سرمایه گذاری کنند و از آنجایی که مقدار سرمایه گذاری پیوسته در نظر گرفته شده نمی توان استراتژی غالب اکیدی یافت زیرا به ازای هر ε ای می توان مقدار کمتری مثل $\varepsilon/2$ سرمایه گذاری کرده و پیامد بیشتری حاصل گردد. (ε ها مثبت هستند)

c)

در صورتی که بازیکن ۱ مقدار K_1 سرمایه گذاری کند، برای اینکه سرمایه گذاری تکمیل شود بازیکن ۲ باید $K-K_1$ سرمایه گذاری کند، بازیکن ۲ زمانی $K-K_1$ سرمایه گذاری می کند که $K-K_1 \leq V$ باشد لذا بازیکن ۱ با علم به این موضوع مقدار K_1 را به گونه ای تعیین می کند که بازیکن ۲ سرمایه گذاری را به اتمام برساند

$$\to K-K_1 \leq V \to K_1 \geq K-V \to SPNE = (K-V, V)$$

d)

در قسمت قبل اگر $K-K_1 > V$ باشد (سرمایه مورد نیاز جهت به اتمام رسیدن پروژه توسط شخص ۲) بهترین پاسخ شخص ۲ صفر خواهد بود لذا بازیکن ۱ نیز با علم به این موضوع (که یا باید بیشتر از $K-V$ سرمایه گذاری کند یا صفر) صفر سرمایه گذاری خواهد کرد. لذا زوج مرتب $(0,0)$ نیز تعادل نش این بازی است.