Subject: PS2 - Micro II

مهدی میر - محمدعلی بختیاری‌نژاد - مرتضی نوراللهی

Year. Month. Date. ( )

Additional exercise 1:

a) Strategy B is strictly dominated by M. ~~B~~ → for player 1

for player 2: $\frac{1}{2}C + \frac{1}{2}B \gg L$ → mix strategy with

probability of $\frac{1}{2}$ for C and $\frac{1}{2}$ for B strictly dominates L

hence we remove L.

Therefore These strategies remains:

	C	R
T	0, -3	2, 0
M	2, 0	2, -2

b) for finding nash equilibria we assume player 1

choose between T and M with probability of P_1 and $1-P_1$

and player 2 chooses between C and R with probability

of P_2 and $1-P_2$.

	P_2	$1-P_2$
T : P_1	0, -3	2, 0
M : $1-P_1$	2, 0	2, -2

so $U_1 = 2(1-P_2) + 2P_2(1-P_1)$

$U_2 = -3P_2P_1 - 2(1-P_2)(1-P_2)$

Subject:
Year. Month. Date. ( )

for finding p_1^* and p_2^* => $\begin{cases} \frac{\partial u_1}{\partial p_1^*} = 0 \Rightarrow -2p_1^* = 0 \Rightarrow p_1^* = 0 \\ \frac{\partial u_2}{\partial p_2^*} = 0 \Rightarrow 2(1-p_2^*) - 3p_2^* = 0 \end{cases}$

$\Rightarrow p_2^* = 2/5$

so nash equilibrium is a mix strategy in which player 1 plays T with $2/5$ probability and M with $\frac{3}{5}$ probability and player 2 just plays R.

Additional exercise 2 8

If we mix a, b, d by $\frac{1}{8}$ and $\frac{3}{8}$ and $\frac{4}{8}$

we have

$\frac{1}{8} > \overset{c}{0}$

$\frac{10}{8} + \frac{1}{8} > 1$ so this mix strictly dominates C

$\frac{5}{8} + \frac{12}{8} + \frac{2}{8} > 2$ so we eliminate C for player 2

$\frac{15}{8} + \frac{4}{8} > 1$

now we have

	a	b	d
A	3,1	0,0	0,0
B	1,1	1,0	1,2
C	1,2	0,4	1,1
D	0,4	1,0	2,3

Subject:
Year. Month. Date. ( )

now we mix A with $\frac{2}{5}$ and B with $\frac{3}{5}$ for player 1

this mix strictly dominates C so we eliminate it

now we have:

	a	b	d
A	3,1	0,0	0,0
B	1,1	1,0	1,2
D	0,4	1,0	2,3

but b strictly dominates by a so we remove b

now we have

	a	d
A	3,1	0,0
B	1,1	1,2
D	0,4	2,3

if we mix A and D with $\frac{2}{5}, \frac{3}{5}$ probability it will strictly dominates B $\frac{2}{5}A + \frac{3}{5}D > B$ so we remove B.

now we have

	a	d
A	3,1	0,0
D	0,4	2,3

but here a strictly dominates d → so we remove d

we have then

	a
A	3,1
D	0,4

but we don't have any nash equilibrium!

PAPCO

Subject:
Year. Month. Date. ( )

Additional exercise 3:

a) we have this game:

		A_2: 100	200	300
player A_1	100	100, 100	300, 0	300, 100
	200	0, 300	200, 200	400, 100
	300	100, 300	100, 400	300, 300

b) we don't have any strictly dominated strategy in this game but "300" strategy is weakly dominated by "100" strategy for each player.

c) This game has a pure nash equilibrium (100, 100) and it's pay off is (100, 100)

d) becaues we have only one pure nash equilbrium So we don't have any Nash mixed strategies.

7.D.2

	H	T
H	-1,1	1,-1
T	1,-1	-1,1

(1)

8.B.5

a) monopoly quantity : $M=(a-c)Q-bQ^2 \Rightarrow \frac{\partial M}{\partial Q}=0$

پس نفر اول هیچ مقداری بیش از این تولید نمی‌کند زیرا

$\Rightarrow q_m = \frac{a-c}{2b}$ $\frac{a-c}{2b}$ strictly dominant است به همه‌ی اعداد بزرگتر از خودش و بدیهی است

زیرا

$$M(\underbrace{q_m+x}_{q_1'}+q_2) < M(q_m, q_2) \quad \forall q_2 \geq 0$$

$$\left(\frac{a-c}{2b}+x\right)\left(\frac{a-c}{2b}-x-q_2\right) = M(q_m, q_2) - (q_2+x)x$$

$\frac{a-c}{4b}$ is strictly dominant for all smaller values

because :

$$M\left(\frac{a-c}{4b}-x, q_2\right) = \left(\frac{a-c}{4b}-x\right)\left(\frac{3(a-c)}{4b}+x-q_2\right) = M\left(\frac{a-c}{4b}, q_2\right)$$

$$-x\underbrace{\left(\frac{a-c}{2b}-q_2+x\right)}_{>0} \rightarrow M\left(\frac{a-c}{4b}-x, q_2\right) < M\left(\frac{a-c}{4b}, q_2\right)$$

حال فرض کنید x , x' هم عددی مثبت و هم عددی منفی می‌توانند باشند و داریم: $\forall x, q_2 > 0$

علامت

player 1

(M_1-M^*, M_2-M^*)

player 2	$x<0$	$x=0$	$x>0$
$x'<0$		$0, 0<$	$0<, 0<$
$x'=0$	$0>, 0$	$0, 0$	$0<, 0$
$x'>0$	$0>, 0>$	$0, 0<$	$0>, 0<$

← تعیین شده

حالاتی که دورآن دایره کشیده شده است، بازیکن طرف مقابل طوری بازی می‌کند که طرف بازی حتما ضرر ببیند چون طبق فرمول ها سودش بیشتر می‌شود

و پس تمام payoff ها رسم شده است، چون ستون دوم

به تمامی ستون‌ها و سطر دوم به تمامی سطرها برتری دارد پس $x'=0$ و $x=0$

انتخاب می‌شود پس جواب $\frac{a-c}{3b}$ است

Date: Subject:

$\frac{a-c}{3b}+n \,,\ \frac{a-c}{3b}+n' \qquad M_1 = M^*\left(\frac{a-c}{3b}, \frac{a-c}{3b}\right) - n(n+n')$

8.C.4) بازیکن 2 حالت U با احتمال α و D را با احتمال $1-\alpha$ بازی می‌کند

و بازیکن 3 L را با احتمال β و r را با احتمال $1-\beta$ بازی می‌کند.

$$Payoff_M = P_M = M + \left(\frac{3\alpha+3\beta}{2} - 3\alpha\beta - U\right)\eta$$

$$\frac{\partial P_M}{\partial \alpha} = \eta\left(\frac{3}{2} - 3\beta\right)$$

$P_L = M + (2\beta - 1)\varepsilon$

$P_R = M + (1-2\beta)\varepsilon$

a) برای آنکه ثابت کنیم که P_M هیچ وقت بهترین پاسخ به بازیکن های 2 و 3 است

برای 3 حالت $\frac{1}{2}<\beta$ و $\frac{1}{2}>\beta$ و $\beta=\frac{1}{2}$ این را اثبات می‌کنیم.

1) $\beta > \frac{1}{2}$ $\frac{\partial P_M}{\partial \alpha} < 0 \Rightarrow$ بهترین پاسخ زمانی است که $\alpha = 0$ باشد و

$P_M(\alpha=0) = M + \eta\left(\frac{3}{2}\beta - 1\right) < M + 4\varepsilon\left(\frac{3}{2}\beta - 1\right) < P_L$

$= M + 4\varepsilon(2\beta - 1)$ و در P_L هیچ α ای وجود ندارد پس این برای تمام α ها درست است

پس M در این حالت بهترین Payoff را ندارد

2) $\beta = \frac{1}{2}$ $P_L = P_R = M > M - \frac{\eta}{4} = P_M$

3) $\beta < \frac{1}{2}$ $\frac{\partial P_M}{\partial \alpha} > 0$ پس $\alpha = 1$ بهترین پاسخ P_M را در خود دارد

و داریم:

$M + \eta\left(\frac{1}{2} - \frac{3}{2}\beta\right) < M + \eta\left(\frac{1}{2} - \frac{3}{2}\beta + \frac{1}{2} - \beta\right)$

$< M + 4\varepsilon(1-2\beta) = P_R$

Raz

در این حالت هم P_R به α بستگی ندارد پس برای تمام α ها درست است پس این قسمت حل شد.

ط) باید ثابت کنیم که اگر R با احتمال γ و L با احتمال $1-\gamma$ باشد strictly dominates نمی‌کند M را که برای این ۲ حالت $\gamma < \frac{1}{2}$ و $\gamma > \frac{1}{2}$ را در نظر بگیریم:

حالت ۱) $\gamma < \frac{1}{2}$. اگر $\alpha = 1$ و $0 = \beta$ باشد $P_M = M + \frac{n}{2} > M$ ، استراتژی Mixed آن $M - 4\epsilon(1-2\gamma) < M$ پس strictly dominates شود توسط یک استراتژی Mixed.

حالت ۲) $\gamma > \frac{1}{2}$ ؛ اگر $\beta = 1$ ، $\alpha = 0$ ، $M < M + \frac{n}{2} - \frac{P_M}{4}$ ،
$P_{mixed} = M - 4\epsilon(2\gamma - 1) \leq M$

ج) اگر بازیکن ۲ و ۳ بازی correlate انجام دهند و هر یک از ۲ حالت (U, r) (D, l) را با احتمال $\frac{1}{2}$ انتخاب کنند، استراتژی های L و R هر کدام Payoff برابر n برای شخص ۱ دارد در حالی که M ، Payoff ای برابر $M + \frac{n}{2}$ دارد.

Raz

Date: Subject:

8.0.3. b_1 : player 1's bid b_2 : player 2's bid

a)

v_1 : value of object for player 1

v_2 : value of object for player 2

1) $b_1 > b_2$ $\begin{cases} u_1(b_1, b_2) = v_1 - b_1 \\ u_2(b_1, b_2) = 0 \end{cases}$

2) $b_2 > b_1$ $\begin{cases} u_2(b_1, b_2) = v_2 - b_2 \\ u_1(b_1, b_2) = 0 \end{cases}$

3) $b_1 = b_2$ $\begin{cases} u_1(b_1, b_2) = \frac{v_1 - b_1}{2} \times \frac{1}{2} \\ u_2(b_1, b_2) = \frac{v_2 - b_2}{2} \times \frac{1}{2} \end{cases}$

$$\Rightarrow u_1(b_1, b_2) = \begin{cases} 0 & b_1 < b_2 \\ \frac{1}{2}(v_1 - b_1) & b_1 = b_2 \\ v_1 - b_1 & b_1 > b_2 \end{cases}$$

$$u_2(b_1, b_2) = \begin{cases} 0 & b_1 > b_2 \\ \frac{1}{2}(v_2 - b_2) & b_1 = b_2 \\ v_2 - b_2 & b_2 > b_1 \end{cases}$$

هیچ استراتژی برای بازیکنان strictly dominant نیست. فرض خلف می‌کنیم که b_1 وجود
دارد که b_1 توسط b'_1 strictly dominate است، حال اگر $b'_1 < b_1$ باشد
که غیر ممکن است زیرا $b'_1 < \frac{b_1 + b'_1}{2} = b_2^* < b_1$ در نظر گرفته شود اگر
$u_1(b'_1, b_2^*) = 0 < v_1 - b_1$ است پس باید $b_1 < b'_1$ باشد حال اگر $b_1 + \epsilon = b_2^*$
که ϵ کوچکترین واحد پول ممکن است، $u_1(b'_1, b_2^*) = u_1(b_1, b_2^*) = 0$

Raz

Date: Subject:

b) اگر $b_1 > v_1$ باشد، b_1 is weakly dominated by v_1

اثبات: ۴ حالت داریم:

① $b_2 < v_1$: $u_1(b_1, b_2) = v_1 - b_1 < 0 = u_1(v_1, b_2)$

② $v_1 < b_2 < b_1$: $u_1(b_1, b_2) = v_1 - b_1 < 0 = u_1(v_1, b_2)$

③ $v_1 < b_2 = b_1$: $u_2(b_1, b_2) = \frac{1}{2}(v_1 - b_1) < 0 = u_1(v_1, b_2)$

④ $b_2 > b_1$: $u_1(b_1, b_2) = 0 = u_1(v_1, b_2)$

$\Leftarrow$ $u_1(v_1, b_2) \geq u_1(b_1, b_2)$

برای بازیکن ۲ هم برقرار است

Date: Subject:

9) اگر اولی در x_1 و دومی در x_2 قرار داشته باشد اولی سمت چپ قرار داشته (8.D-5)
باشد به تمامی افراد سمت چپ $\frac{x_1+x_2}{2}$ می‌فروشد یعنی $\frac{x_1+x_2}{2}$ نیز و نفر دوم به تمامی
افراد سمت راست $\frac{x_1+x_2}{2}$ می‌فروشد یعنی $\frac{x_1+x_2}{2}$ - 1 نیز و بالعکس
داریم:

$$u_1(x_1,x_2) = \begin{cases} \frac{x_1+x_2}{2} & x_1<x_2 \\ \frac{1}{2} & x_1=x_2 \\ 1-\frac{x_1+x_2}{2} & x_1>x_2 \end{cases} \qquad u_2(x_1,x_2) = \begin{cases} 1-\frac{x_1+x_2}{2} & x_1<x_2 \\ \frac{1}{2} & x_1=x_2 \\ \frac{x_1+x_2}{2} & x_1>x_2 \end{cases}$$

حال $x_1=x_2$، تعادل نش است، زیرا اگر به اندازه ε از این حالت دور شود هر
کدامشان به اندازه $\frac{\varepsilon}{2}$ از profit کم می‌شود. حالت ثابت می‌کنیم که این unique
است تمام حالات دیگر را ثابت می‌کنیم که نش نیستند.

حالت 1) اگر $\frac{1}{2} > x_1=x_2$ باشد، هر کدامشان اگر جابجایی به $\frac{1}{2}$ از x دو میانه‌اش که
$\frac{1}{2}$ بود به $\frac{1}{2} > \frac{1}{2}\left(1-\left(\frac{1}{2}-x_1\right)\right)+\frac{1}{2}$ می‌رسد که از حالت قبلی u اش بیشتر است پس تعادل
نش نیست.

حالت 2) $\frac{1}{2} < x_1=x_2$ اگر هر کدام به $\frac{1}{2}$ بروند از $u_1=\frac{1}{2}$ به $u_1' = \frac{1}{4}+\frac{x_1}{2} > \frac{1}{2} = u_1$
می‌رود که در نتیجه تعادل نش نیست.

حالت 3) اگر $x_1<x_2$ باشد، اگر اولی از x_1 به $x_2-\varepsilon > x_1$ برود به u اش میزان $\frac{x_2-x_1-\varepsilon}{2}$
اضافه می‌شود پس این هم نیست، البته دومی هم می‌تواند با آمدن به $x_1+\varepsilon$، مطلوبیت اش را افزایش دهد.

b) هیچ تعادل نش وجود ندارد، در نقطه‌ی $\frac{1}{2} < x_1=x_2=x_3$ اگر هر کدام ε به سمت چپ بروند
u اش از $\frac{1}{3}$ به بیشتر مساوی $\frac{1}{2}$ یا $\frac{1}{2}-\frac{\varepsilon}{2} > \frac{1}{3}$ می‌رسد و اگر $x_1=x_2=x_3 < \frac{1}{2}$
اگر هر کدام به سمت راست بروند، u آن فرد از $\frac{1}{3}$ به بیشتر از $\frac{1}{2}$ می‌رود پس اگر هر 3 برابر باشند
تعادل نش نیست. حال اگر در یک جا نباشند حداقل یکی از آن‌ها سمت راست نقطه یا سمت چپ
همه‌ی تای دیگر است که با آمدن به فاصله‌ی ε از آن‌ها u اش را افزایش می‌دهد.