简介

在数值分析中，**拉格朗日插值法**是以法国十八世纪数学家约瑟夫·拉格朗日命名的一种多项式插值方法。许多实际问题中都用函数来表示某种内在联系或规律，而不少函数都只能通过实验和观测来了解。如对实践中的某个物理量进行观测，在若干个不同的地方得到相应的观测值，拉格朗日插值法可以找到一个多项式，其恰好在各个观测的点取到观测到的值。这样的多项式称为**拉格朗日（插值）多项式。**

对于给定的 $n+1$ 个点 $(x_0,y_0),(x_1,y_1),\cdots,(x_n,y_n)$，可以确定唯一的最高为 n 次的多项式，求该多项式在某一点的取值。拉格朗日插值法可以在 $O(n^2)$ 的时间复杂度内解决该问题。

定义

对某个多项式函数，已知有给定的 $n+1$ 个取值点 $(x_0,y_0),(x_1,y_1),\cdots,(x_n,y_n)$。

假设任意两个不同的 x_i 都互不相同，应用拉格朗日插值公式所得到的**拉格朗日插值多项式**为：

$$L(x)=\sum_{i=0}^{n}y_il_i(x)$$

其中每个 $l_i(x)$ 为**拉格朗日基本多项式**（或称**插值基函数**），其表达式为：

$$l_i(x)=\prod_{j=0,j\neq i}^{n}\frac{x-x_j}{x_i-x_j}=\frac{(x-x_0)}{(x_i-x_0)}\cdots\frac{(x-x_{j-1})(x-x_{j+1})}{(x_i-x_{j-1})(x_i-x_{j+1})}\cdots\frac{x-x_n}{x_i-x_n}$$

拉格朗日基本多项式 $l_i(x)$ 的特点是在 x_i 上取值为 1，在其他点上取值为 0。

举例

假设有某个二次多项式 f，已知它在三个点上的取值为：

$$f(4)=10,f(5)=\frac{21}{4},f(6)=1$$

求 $f(18)$ 的值。

首先写出每个拉格朗日基本多项式：

$$\begin{aligned}l_0(x)&=\frac{(x-5)(x-6)}{(4-5)(4-6)}\\l_1(x)&=\frac{(x-4)(x-6)}{(5-4)(5-6)}\\l_2(x)&=\frac{(x-4)(x-5)}{(6-4)(6-5)}\end{aligned}$$

应用拉格朗日插值法，可以得到 L 的表达式：

$$\begin{aligned}L(x)&=f(4)l_0(x)+f(5)l_1(x)+f(6)l_2(x)\\&=10\cdot\frac{(x-5)(x-6)}{(4-5)(4-6)}+\frac{21}{4}\cdot\frac{(x-4)(x-6)}{(5-4)(5-6)}+1\cdot\frac{(x-4)(x-5)}{(6-4)(6-5)}\\&=\frac{1}{4}(x^2-28x+136)\end{aligned}$$

此时代入数值 18 就可以求出值：$L(18)=f(18)=-11$

证明

存在性

对于给定的 $n+1$ 个点 $(x_0,y_0),(x_1,y_1),\cdots,(x_n,y_n)$，拉格朗日插值法的思路是找到一个在一点 x_i 取值为 1，而在其他点取值都是 0 的多项式 $l_i(x)$。这样，多项式 $y_i l_i(x)$ 在点 x_i 取值为 y_i，而在其他点取值都是 0。

多项式 $L(x)=\sum_{i=0}^{n} y_i l_i(x)$ 就可以满足：

$$L(x)=\sum_{i=0}^{n} y_i l_i(x)=0+0+\cdots+y_i+\cdots+0=y_i$$

在其他点取值为 0 的多项式容易找到，例如：

$$(x-x_0)\cdots(x-x_{i-1})(x-x_{i+1})\cdots(x-x_n)$$

它在点 x_i 处取值为：

$$(x_i-x_0)\cdots(x_i-x_{i-1})(x_i-x_{i+1})\cdots(x_i-x_n)$$

将多项式除以上述取值，就得到一个满足**在 x_i 取值为 1，而在其他点取值都是 0 的多项式**：

$$l_i(x)=\prod_{j=0,j\neq i}^{n}\frac{x-x_j}{x_i-x_j}=\frac{(x-x_0)}{(x_i-x_0)}\cdots\frac{(x-x_{j-1})(x-x_{j+1})}{(x_i-x_{j-1})(x_i-x_{j+1})}\cdots\frac{x-x_n}{x_i-x_n}$$

这就是拉格朗日基本多项式。

唯一性

次数不超过 n 的拉格朗日多项式至多只有 1 个，因为对任意两个次数不超过 n 的拉格朗日多项式：P_1 和 P_2，它们的差 P_1-P_2 在所有 $n+1$ 个点上取值都是 0，因此必然是多项式 $(x-x_0)(x-x_1)\cdots(x-x_n)$ 的倍数。因此，如果这个差 P_1-P_2 不等于 0，次数就一定不小于 $n+1$。但是 P_1-P_2 是两个次数不超过 n 的多项式之差，它的次数也不超过 n。

所以 $P_1-P_2=0$，也就是说 $P_1=P_2$，这样就证明了唯一性。

【例题】P4781 【模板】拉格朗日插值

n 个点 (x_i,y_i) 可以唯一地确定一个多项式 $y=f(x)$。

现在，给定这 n 个点，请你确定这个多项式，并求出 $f(k) \mod 998244353$ 的值 $(1\le n\le 2\times 10^3, 1\le x_i,y_i,k<998244353)$。

代码

```cpp
#include<bits/stdc++.h>
using namespace std;
const int mod=998244353;
long long quick_pow(long long a,long long b)
{
    long long ans=1;
    while(b)
    {
        if(b&1)
```

```
            ans=ans*a%mod;
        a=a*a%mod;
        b>>=1;
    }
    return ans;
}
long long x[2010],y[2010];
int main()
{
    long long n,k,ans=0;
    cin>>n>>k;
    for(int i=1;i<=n;i++)
        cin>>x[i]>>y[i];
    for(int i=1;i<=n;i++)
    {
        long long temp=1;
        for(int j=1;j<=n;j++)
            if(i!=j)
                temp=temp*(x[i]-x[j]+mod)%mod;
        temp=quick_pow(temp,mod-2);
        for(int j=1;j<=n;j++)
            if(i!=j)
                temp=temp*(k-x[j]+mod)%mod;
        temp=temp*y[i]%mod;
        ans=(ans+temp)%mod;
    }
    cout<<ans<<endl;
    return 0;
}
```