Theme: 微分積分とは？

みなさん、**”微分積分”**って聞いたことありますか？「難しそう」という感想を持つ人がほとんどだと思いますが、実はすごくシンプルで便利なツールなんですよ。

まずは、復習から。**”変化の割合”**という言葉はきいたことあると思います。変化の割合 $= \frac{y\text{ の増加量}}{x\text{ の増加量}}$ とかいうやつです。具体例を用いながら思い出していきましょう。

* * *

$y = x^2$ というグラフを考えてみましょう。$x = 1$ から $x = 2$ に変化したときの変化の割合は、次のような式から求められます。

$$\frac{y\text{ の増加量}}{x\text{ の増加量}} = \frac{f(2) - f(1)}{2 - 1} = \frac{2^2 - 1^2}{2 - 1} = 3$$

さて、ここからは文字にしていきます。文字にしたとたんにわからない人が急増するのでお気を付けを。

$$\frac{y\text{ の増加量}}{x\text{ の増加量}} = \frac{f(x+h) - f(x)}{(x+h) - x} = \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

具体例では**「$\boldsymbol{1 \to 2}$」**という変化でしたが、これを**「$\boldsymbol{x \to x + h}$」**という変化にしてみました。グラフからよく確認しておいてください。

このタイミングで微分係数を求める公式（定義）を紹介することにします。

微分係数の求め方（定義）

関数 $f(x)$ の微分係数 $f'(x)$ は以下のように定義される。

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

さっき作った式にすごく似ていることがわかりますね？

さっきの図をでは、**幅を $\boldsymbol{h}$** としていたので、「**その幅をごくごく小さくすれば、瞬間の変化率がわかるんじゃね？**」という発想になります。実際にさっきの例で計算してみましょうか。

$$\begin{aligned}
f'(x) &= \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \\
&= \lim_{h \to 0} \frac{(x+h)^2 - x^2}{h} \\
&= \lim_{h \to 0} \frac{x^2 + 2xh + h^2 - x^2}{h} \\
&= \lim_{h \to 0} \frac{2xh + h^2}{h} \\
&= \lim_{h \to 0} (2x + h) \\
&= 2x
\end{aligned}$$

よって、$\boldsymbol{f'(x) = 2x}$ となります。実際に、「$f(x) = x^2$ の**導関数**を求めろ」と言われたら、これが答えになります。「$x = 2$ における $f(x) = x^2$ の**微分係数**」とか言われたら、$x = 2$ を代入して、$f'(2) = 4$ が答えになります。少しだけ単語が複雑ですが、問題を解くときにはあまり困らないので、あまり気にしないでおくことにしましょう。

これがとても便利なんですよ。今回はこれで終わりですが、この分野は物理や数学以外にも、経済学や社会学でもよく使われるんですよ。では、少しだけ教科書の問題を解いて終わることとしましょう。

練習 4, 5（教科書 P.195,199）

練習 4　関数 $f(x) = x^3 + 2$ の $x = 1$ における微分係数 $f'(1)$ を求めよ。

練習 5　導関数の定義に従って、次の関数の導関数を求めよ。

(1) $f(x) = 3x^2$　　(2) $f(x) = -x^2$