Punto 4 Taller4 abril

En el error de la aproximación (o de truncamiento) en la interpolación de Lagrange, saldrá una expresión del error de aproximación de la misma interpolación que se muestra en el siguiente teorema:

Sea f ∈(C^(n+1))([a, b]) y sea Pn el polinomio de interpolación de Lagrange de f sobre los nodos {xj}^n con j=0 en [a, b].

Entonces, para cada x ∈ [a, b] existe ξx ∈ [a, b] tal que:

f(x) − Pn(x) = [1/ (n + 1)!] * f^ (n+1)(ξx) Y hasta n con j=0 (x − xj).

Demostración: Se asume en primera instancia que x es diferente a Xj ∀j ∈ {0, 1, 2, . . . , n} porque de no ser así, la expresión de error sale de un método trivial.

Se define entonces una función w de la forma:

w(t) = Y hasta n con j=0 (t − xj)

y (con x ya fijado) un número c mediante c = (f(x) − Pn(x)) / w(x)

mirando que, puesto que x es diferente a xj ∀j ∈ {0, 1, 2, . . . , n}, se tiene que w(x) es diferente a 0.

Aparte definimos una segunda función ϕ mediante ϕ(t) = f(t) − Pn(t) − c w(t), donde puesto que f es de clase C^n+1([a, b]).

Por otro lado, es fácil probar que ϕ presenta n + 2 raíces puesto que:

ϕ(xj) = (f(xj) − Pn(xj)) − c w(xj) = 0 − 0 = 0 ∀j ∈ {0, 1, 2, . . . , n}

ϕ(x) = (f(x) − Pn(x)) − c w(x) = 0

de modo que, por aplicación del teorema de Rolle, ϕ ' tiene n + 1 raíces, ϕ '' tiene n raíces ... y, finalmente, ϕ derivada(n+1) tiene 1 raíz. Sea entonces ξx la raíz de ϕ derivada(n+1) cuya existencia se acaba de asegurar. Es claro que:

ϕ derivada(n+1)(ξx) = f derivada (n+1(ξx) − P derivada (n+1 n (ξx) − c w derivada (n+1)(ξx) = f derivada (n+1)(ξx) − 0 − c (n + 1)! .