Возведение комплексного числа в степень и извлечение корня из комплексного числа.

Определение 1. Из формулы для произведения комплексных чисел следует **формула Муавра:** если $z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$, то

$$z^n = r^n(\cos(n\cdot\varphi) + i\sin(n\cdot\varphi)).$$

При возведении комплексного числа в натуральную степень модуль возводится в эту степень, а аргумент умножается на нее. Если $z = z_1^n$, то

$$|z^n| = |z_1|^n,\quad Arg z^n = nArg z_1.$$

Определение 2. Корнем n-ой степени ($n \in \mathbf{N}$) из комплексного числа называется комплексное число, n-ая степень которого равна подкоренному числу.

Выведем формулу для вычисления корня. Пусть $z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$, $\sqrt[n]{z} = \rho(\cos\psi + i\sin\psi)$. Тогда

$$\sqrt[n]{r(\cos\varphi + i\sin\varphi)} = \rho(\cos\psi + i\sin\psi)$$

.

По определению корня

$$(\rho(\cos\psi + i\sin\psi))^n = r(\cos\varphi + i\sin\varphi),$$

$$\rho^n(\cos n\psi + i\sin n\psi) = r(\cos\varphi + i\sin\varphi).$$

Чтобы выполнялось это равенство необходимо, чтобы

$$\rho^n = r,\quad n\psi = \varphi + 2\pi k,\ k \in \mathbf{Z};$$

$$\rho = \sqrt[n]{r},\quad \psi = \frac{\varphi + 2\pi k}{n},\ k \in \mathbf{Z}.$$

Подставим данные значения в выражение для корня.

$$\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\varphi + 2\pi k}{n} + i\sin\frac{\varphi + 2\pi k}{n}\right).$$

Меняя $k = \overline{0, n-1}$ мы получим n различных значений корня из комплексного числа. Следовательно, корень n–ой степени из действительного числа также имеет n комплексных значений, т.к. действительное число является частным случаем комплексного числа.

Пример 1. $z = \sqrt[3]{1} = \sqrt[3]{1(\cos 0 + i\sin 0)} = \sqrt[3]{1}\cdot\left(\cos\frac{0 + 2\pi k}{3} + i\sin\frac{0 + 2\pi k}{3}\right).$

$k = 0 \qquad z_1 = 1(\cos 0 + i\sin 0) = 1,$

$k = 1$

$$z_2 = 1\left(\cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3}\right) = 1\left(-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right) = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i,$$

$k = 2$ $\quad z_3 = \cos\frac{4\pi}{3} + i\sin\frac{4\pi}{3} = -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Проверим, что третье из полученных чисел является корнем. Возведем его в куб.

$$(-\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2})^3 = (-\frac{1}{2}(1+i\sqrt{3}))^3 = -\frac{1}{8}(1+i\sqrt{3})^3 = -\frac{1}{8}(1+i\cdot 3\sqrt{3} - 9 - i\cdot 3\sqrt{3}) = -\frac{1}{8}(-8) = 1$$

.

Пример 2. Решим уравнение $x^4 + 16 = 0$.

$$x = \sqrt[4]{-16} = \sqrt[4]{16(\cos\pi + i\sin\pi)} = 2(\cos\frac{\pi + 2\pi k}{4} + i\sin\frac{\pi + 2\pi k}{4}).$$

$k = 0$ $\quad z_1 = 2(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}) = 2(\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i) = 2 + i\sqrt{2}$,

$k = 1$ $\quad z_2 = 2(\cos\frac{3\pi}{4} + i\sin\frac{3\pi}{4}) = 2(-\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i) = -2 + i\sqrt{2}$,

$k = 2$ $\quad z_3 = 2(\cos\frac{5\pi}{4} + i\sin\frac{5\pi}{4}) = 2(-\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}i) = -2 - i\sqrt{2}$,

$k = 3$ $\quad z_4 = 2(\cos\frac{7\pi}{4} + i\sin\frac{7\pi}{4}) = 2(\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}i) = 2 - i\sqrt{2}$.

Получено две пары сопряженных корней.