

Algorytmy numeryczne – Projekt 1 (marzec 2023)

Projekty przydzielone zostaną zespołom liczącym od 2 do 4 osób. Ocenie podlega napisana dokumentacja projektowa, jakość programu i jego prezentacja.

1. Obliczyć $\sqrt{23}$ za pomocą wielomianów interpolacyjnych dla danych z tabeli:

x	0	1	4	9	16	25	36	49	64	81
$f(x)$	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9

Sprawdzić, jaki podzbiór danych z tabeli daje najlepsze przybliżenie dokładnej wartości pierwiastka (czyli dla jakiego zestawu tych węzłów wielomian Lagrange’a przebiega najbliżej punktu $(23, \sqrt{23})$).

2. Zbadać, jak dobrze możemy interpolować funkcję $f(x) = \sqrt{x}$ na przedziale $[4, 64]$ za pomocą wielomianów stopnia co najwyżej 4, używając jako węzłów interpolacji punktów o obu współrzędnych całkowitych. Wynikiem działania napisanego programu powinien być znaleziony wielomian, stopnia co najwyżej 4, którego maksymalna różnica na węzłach z krokiem $\frac{1}{10}$ od funkcji \sqrt{x} jest najmniejsza.
3. Interpolować funkcję $f(x) = \frac{4}{\sqrt[3]{x}}$ za pomocą wielomianów Lagrange’a stopnia nie większego niż 6 dla węzłów o rzędnej całkowitej z przedziału $[1, 12]$. Program powinien dla zadanego zbioru 2 do 7 punktów podawać wielomian interpolacyjny dla zadanych węzłów.
4. Napisać program, który pyta użytkownika o kolejne wyrazy (od jednego do trzech) ciągu 1, 4, 9, 16, a następnie gratuluje mu dobrej odpowiedzi i odgadnięcia „zasady budowania ciągu”, podając wzór pasującego wielomianu. Można przyjąć, że podane wartości są wartościami wielomianu w punktach $1, \dots, 4$ lub innych.
5. Interpolować funkcję $f(x) = \frac{x+2}{x}$ na przedziale $[\frac{1}{2}, 2]$, budując wielomian interpolacyjny w postaci Newtona dla węzłów będących ułamkami postaci $\frac{a}{b}$ dla $a, b \in \mathbb{N}$ oraz $b \leq 5$. Znaleźć maksymalne odchylenie interpolującego wielomianu w 136 węzłach równoodległych na przedziale $[\frac{1}{2}, 2]$.
6. Zademonstrować działanie algorytmu Neville’a dla wielomianu $x^4 - 3x^3 + x + 1$. Program powinien na życzenie użytkownika wyświetlać wielomian $P_{i,j}$ dla funkcji zadanej tabelą:

x	-1	0	1	2	3
$f(x)$	4	1	0	-5	4

7. Dana jest tabela wartości funkcji i jej pochodnych:

x	-1	0	1	2
$f(x)$	9	1	-1	-3
$f'(x)$	-19	-2	-3	2
$f''(x)$	34	4	-2	16

Rozwiązując zagadnienie interpolacyjne z węzłami wielokrotnymi znaleźć funkcję wielomianową pasującą do podanych danych. Program powinien umożliwiać użycie tylko niektórych informacji z tabeli, pozwalając użytkownikowi wybrać krotność poszczególnych węzłów.