

代数系入門  
第3章 環と多項式

今村勇輝

February 7, 2022

## 1 第 3 章 環と多項式

### ■ §1 環とその例

#### ■ §2 整域, 体

#### ■ §3 イデアルと商環

#### ■ §4 $\mathbb{Z}$ の商環

#### ■ §5 準同型写像

#### ■ §6 商の体

#### ■ §7 多項式環

#### ■ §8 体の上の多項式, 単項イデアル整域

#### ■ §9 素元分解とその一意性

#### ■ §10 $\mathbb{Z}[i]$ の素元

#### ■ §11 多項式の根, 代数的閉体

#### ■ §12 $\mathbb{Z}$ または $\mathbb{Q}$ の上の多項式

#### ■ §13 多変数の多項式

## Def. 1.1

$R$ : 集合,  $R \neq \emptyset$ ,

$R \times R \rightarrow R, (a, b) \mapsto a + b, (a, b) \mapsto ab$

1  $R$ : 加法について可換群

2  $\forall a, b, c \in R \Rightarrow (ab)c = a(bc)$

3  $\forall a, b, c \in R \Rightarrow a(b + c) = ab + ac, (b + c)a = ba + ca$

4  $\exists e \in R$  s.t.  $\forall a \in R, ea = ae = a$

$\stackrel{\text{def}}{\Leftrightarrow} R$ : 環 (ring)

## Def. 1.2

$R$ : 環

■  $\exists! e_+ \in R$  s.t.  $\forall a \in R, e_+ + a = a \stackrel{\text{def}}{\Leftrightarrow} 0 := e_+ : R$  の零元

■  $\forall a \in R, \exists! a' \in R$  s.t.  $a + a' = 0 \stackrel{\text{def}}{\Leftrightarrow} -a := a'$

## Def. 1.3

$R$ : 環,  $\forall a, b \in R \Rightarrow ab = ba \stackrel{\text{def}}{\Leftrightarrow} R$ : 可換環

## Thm. 1.1

$R$ : 環,  $\exists! e \in R$  s.t.  $\forall a \in R, ea = ae = e \stackrel{\text{def}}{\Leftrightarrow} 1 := e : R$  の単位元

## Exm. 1

$\mathbb{Z}$ : 可換環: 有理整数環

## Exm. 2

$\mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$ : 可換環

## Exm. 3

$[0, 1] \subset \mathbb{R}, R = \{f \mid f: [0, 1] \rightarrow [0, 1]\},$   
 $f, g \in R, \forall t \in [0, 1], (f + g)(t) = f(t) + g(t), (fg)(t) = f(t)g(t) \Rightarrow R$ : 可換環

## Exm. 4

$\forall R : \text{環}, \forall S : \text{集合}, S \neq \emptyset, M(S, R) = \{f \mid f: S \rightarrow R\},$   
 $f, g \in M(S, R), \forall x \in S, (f + g)(x) = f(x) + g(x), (fg)(x) = f(x)g(x) \Rightarrow M(S, R) : \text{環}$

## Def. 1.4

- $0 \in M(S, R) : S \text{ から } R \text{ の零写像}$
- $-f \in M(S, R), \forall x \in S, (-f)(x) = -f(x)$

Rem.  $\forall x \in S, 0(x) = 0_R$

## Def. 1.5

$\forall A : \text{加法群}, f: A \rightarrow A : \text{hom.} : \text{自己準同型写像, 自己準同型 (endomorphism)}$   
 $\text{End}(A) := \{f \mid f: A \rightarrow A : \text{hom.}\}$

## Exm. 5

$\forall A : \text{加法群},$   
 $f, g \in \text{End}(A), \forall x \in A, (f + g)(x) = f(x) + g(x), (fg)(x) = f(g(x)) \Rightarrow \text{End}(A) : \text{環}$

Rem.  $\text{End}(A) : \text{自己準同型環}$

## Thm. 1.2

 $R$ : 環

$$1 \quad 0 \in R, \forall a \in R \Rightarrow a0 = 0a = 0$$

$$2 \quad \forall a, b \in R \Rightarrow a(-b) = (-a)b = -ab$$

$$3 \quad \forall a, b \in R \Rightarrow (-a)(-b) = ab$$

$$4 \quad \forall a, b, c \in R, b - c := b + (-c) \Rightarrow a(b - c) = ab - ac, (b - c)a = ba - ca$$

$$5 \quad a_1, \dots, a_m, b_1, \dots, b_n \in R \Rightarrow (a_1 + \dots + a_m)(b_1 + \dots + b_n) = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n a_i b_j$$

## 1 第 3 章 環と多項式

- §1 環とその例
- §2 整域, 体
- §3 イデアルと商環
- §4  $\mathbb{Z}$  の商環
- §5 準同型写像
- §6 商の体
- §7 多項式環
- §8 体の上の多項式, 単項イデアル整域
- §9 素元分解とその一意性
- §10  $\mathbb{Z}[i]$  の素元
- §11 多項式の根, 代数的閉体
- §12  $\mathbb{Z}$  または  $\mathbb{Q}$  の上の多項式
- §13 多変数の多項式

## Thm. 2.1

 $R$ : 環,  $0, 1 \in R$  $1 = 0 \Rightarrow R = \{0\} \quad (\because \forall a \in R, a = 1a = 0a = 0)$ 

## Def. 2.1

 $R$ : 環,  $0, 1 \in R, 1 = 0 \stackrel{\text{def}}{\Leftrightarrow} R$ : 零環Rem. 今後,  $R$  は零環ではないとする.

## Def. 2.2

 $\exists a, b \in R$  s.t.  $a \neq 0, b \neq 0, ab = 0 \stackrel{\text{def}}{\Leftrightarrow} a, b : R$  の零因子 ( $a$ : 左零因子,  $b$ : 右零因子)

## Def. 2.3

 $\forall a, b \in R, a \neq 0, b \neq 0 \Rightarrow ab \neq 0, R$ : 可換  $\stackrel{\text{def}}{\Leftrightarrow} R$ : 整域



## Exm. 1

 $\mathbb{Z}$ : 整域

## Exm. 2

§1 Exm. 3 は整域ではない

## Def. 2.4

 $a \in R, \exists b \in R \text{ s.t. } ba = ab = 1 \stackrel{\text{def}}{\Leftrightarrow} a : R \text{ の可逆元または単元, } a^{-1} := b : a \text{ の逆元}$ 

## Thm. 2.2

- $a \in R$ : 単元  $\Rightarrow a \neq 0$
- $a \in R$ : 単元  $\Rightarrow \exists! a^{-1} \in R \text{ s.t. } a^{-1}a = aa^{-1} = 1$

## Lem. A

$R$  : 環,  $G = \{a \in R \mid a : R \text{ の単元} \} \Rightarrow G$  : 乗法に関して群

## Exm. 3

$A$  : 加法群,  $A \neq \{0\}$

- $f \in \text{End}(A), f : \text{単元} \Rightarrow f : \text{iso.}$
- $G = \{f \in \text{End}(A) \mid f : \text{単元} \} \Rightarrow G = \text{Aut}(A)$

## Def. 2.5

$R$  : 環

- $\forall a \in R, a \neq 0 \Rightarrow a : \text{単元} \stackrel{\text{def}}{\Leftrightarrow} R : \text{斜体}$
- $R : \text{斜体}, \forall a, b \in R, ab = ba \stackrel{\text{def}}{\Leftrightarrow} R : \text{体}$

## Thm. 2.3

 $R$ : 環

- $R$ : 斜体  $\Leftrightarrow G = \{a \in R \mid a \neq 0\}$ : 乗法に関して群
- $R$ : 体  $\Leftrightarrow G = \{a \in R \mid a \neq 0\}$ : 乗法に関して可換群

## Exm. 4

- $\mathbb{Z}$ : 環  $\Rightarrow \mathbb{Z}$ : 体
- $\mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$ : 環  $\Rightarrow \mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$ : 体

Rem.  $\mathbb{Q}$ : 有理数体,  $\mathbb{R}$ : 実数体,  $\mathbb{C}$ : 複素数体

## Thm. 2.4

 $\forall R : \text{体} \Rightarrow R : \text{整域}$ 

## Lem. B

 $R : \text{整域}, |R| < \infty \Rightarrow R : \text{体}$ 

## Def. 2.6

 $R : \text{環}, R' \subset R, R' \neq \emptyset$  $R' : R$  で定義されている加法, 乗法に関して環,  $1_R \in R' \stackrel{\text{def}}{\Leftrightarrow} R' : R$  の **部分環**

## Thm. 2.5

 $R : \text{環}, R' \subset R$  $R' : R$  の部分環  $\Leftrightarrow 1_R \in R', \forall a, b \in R' \Rightarrow -a, a+b, ab \in R'$

## Def. 2.7

 $R' : R$  の部分環

- $R' : \text{斜体} \stackrel{\text{def}}{\Leftrightarrow} R$  の部分斜体
- $R' : \text{体} \stackrel{\text{def}}{\Leftrightarrow} R$  の部分体

## Exm. 5

- 環  $\mathbb{Z}$  : 体  $\mathbb{Q}$  の部分環
- 体  $\mathbb{Q}$  : 体  $\mathbb{R}$  の部分体

## Exm. 6

 $R = \{f \mid f: [0, 1] \rightarrow [0, 1]\}$  (§1 Exm. 3 の環)

- $R' = \{f \mid f: [0, 1] \rightarrow [0, 1] : \text{連続関数}\} \Rightarrow R' : R$  の部分環
- $R'' = \{f \mid f: [0, 1] \rightarrow [0, 1] : \text{微分可能関数}\} \Rightarrow R'' : R'$  の部分環

## Def. 2.8

$R$ : 斜体,  $\forall a, b \in R \Rightarrow ab \neq ba \stackrel{\text{def}}{\Leftrightarrow} R$ : 非可換体

## Exm. 7

$\mathbb{C}$ : 複素数の加法群,  $A = \mathbb{C} \times \mathbb{C}$

$$1 \quad \alpha, \beta \in \mathbb{C}, f_{\alpha, \beta}: A \rightarrow A, (x, y) \mapsto (\alpha x - \beta y, \bar{\beta}x + \bar{\alpha}y) \Rightarrow f_{\alpha, \beta} \in \text{End}(A)$$

$$2 \quad Q = \{f_{\alpha, \beta} \mid \text{上記 } f_{\alpha, \beta}\} \Rightarrow Q: \text{End}(A) \text{ の部分環}$$

$$3 \quad Q: \text{非可換体}$$

Rem.  $Q: \mathbb{R}$  上の四元数環

## Thm. 2.6

$R$ : 整域または斜体  $\Rightarrow \exists 0, 1 \in R$  s.t.  $0 \neq 1$

## 1 第 3 章 環と多項式

- §1 環とその例
- §2 整域, 体
- **§3 イデアルと商環**
- §4  $\mathbb{Z}$  の商環
- §5 準同型写像
- §6 商の体
- §7 多項式環
- §8 体の上の多項式, 単項イデアル整域
- §9 素元分解とその一意性
- §10  $\mathbb{Z}[i]$  の素元
- §11 多項式の根, 代数的閉体
- §12  $\mathbb{Z}$  または  $\mathbb{Q}$  の上の多項式
- §13 多変数の多項式

## Def. 3.1

 $R$ : 環,  $J \subset R, J \neq \emptyset$ 

$$1 \quad \forall a, b \in J \Rightarrow a + b \in J$$

$$2 \quad \forall r \in R, \forall a \in J \Rightarrow ra \in J$$

 $\stackrel{\text{def}}{\Leftrightarrow} J: R$  の左イデアル

## Thm. 3.1

 $R$ : 環,  $J \subset R, J \neq \emptyset$  $J: R$  の左イデアル  $\Leftrightarrow J \leq R$ : 加法部分群,  $\forall r \in R, \forall a \in J \Rightarrow ra \in J$ 

## Def. 3.2

 $R$ : 環 $J \leq R$ : 加法部分群,  $\forall r \in R, \forall a \in J \Rightarrow ar \in J \stackrel{\text{def}}{\Leftrightarrow} J: R$  の右イデアル



## Def. 3.3

$J: R$  の左イデアルかつ右イデアル  $\stackrel{\text{def}}{\Leftrightarrow} J: R$  のイデアルまたは両側イデアル

Rem.  $R$  が可換なら, 左イデアル, 右イデアル, 両側イデアルは一致する

## Exm. 1

$R = \{f \mid f: [0, 1] \rightarrow [0, 1] : \text{実数値連続関数}\}$

$c \in [0, 1], J_c = \{f \in R \mid f(c) = 0\} \Rightarrow J_c: R \text{ のイデアル}$

## Exm. 2

$n \in \mathbb{Z}, n \geq 0 \Rightarrow n\mathbb{Z}: \text{環 } \mathbb{Z} \text{ のイデアル}$

## Exm. 3

 $R$ : 環

- $a \in R, J_a = \{xa \mid x \in R\} \Rightarrow J_a$ : 左イデアル
- $a_1, \dots, a_n \in R, J = \{x_1a_1 + \dots + x_na_n \mid x_1, \dots, x_n \in R\} \Rightarrow J$ : 左イデアル

## Def. 3.4

 $R$ : 環

- $a \in R, Ra$ (または  $(a)$ )  $:= \{xa \mid x \in R\}$ :  $a$  によって生成される単項左イデアル
- $a_1, \dots, a_n \in R, (a_1, \dots, a_n) := \{x_1a_1 + \dots + x_na_n \mid x_1, \dots, x_n \in R\}$   
:  $a_1, \dots, a_n$  によって生成される左イデアル

## Thm. 3.2

 $\forall J: R \text{ の左イデアル}, a_1, \dots, a_n \in J \Rightarrow (a_1, \dots, a_n) \subset J$

## Thm. 3.3

 $R$ : 環

- $1 \in R \Rightarrow (1) = R$
- $0 \in R \Rightarrow (0) = \{0\}$
- $R, (0) : R$  の両側イデアル

## Def. 3.5

 $J : R$  のイデアル,  $J = \{0\} \stackrel{\text{def}}{\Leftrightarrow} 0 := J$ : 零イデアル

## Thm. 1

 $R$ : 環,  $R \neq \emptyset$  $R$ : 斜体  $\Leftrightarrow \forall J : R$  の左イデアル  $\Rightarrow J = R$  or  $0$ 

Rem. 右イデアルも同様に成り立つが, 両側イデアルの場合  $\Leftarrow$  は必ずしも成り立たない.

## Lem. C

 $R$ : 環,  $J$ :  $R$  のイデアル

$$\forall a, a', b, b' \in R, a \equiv a' \pmod{J}, b \equiv b' \pmod{J} \Rightarrow ab \equiv a'b' \pmod{J}$$

## Thm. 2

 $R$ : 環,  $J$ :  $R$  のイデアル,  $R/J \ni \bar{a} := a + J$ 

$$\bar{a}, \bar{b} \in R/J, \bar{a} + \bar{b} = \overline{a + b}, \bar{a}\bar{b} = \overline{ab} \Rightarrow R/J: \text{環}$$

## Def. 3.6

 $R/J$ :  $R$  の  $J$  による剰余環または商環

## Thm. 3.4

- 1  $R/J$ : 零環  $\Leftrightarrow J = R$
- 2  $J = (0) \Rightarrow R/J \cong R$
- 3  $R$ : 可換環  $\Rightarrow \forall R/J$ : 可換

## 1 第 3 章 環と多項式

- §1 環とその例
- §2 整域, 体
- §3 イデアルと商環
- §4  $\mathbb{Z}$  の商環
- §5 準同型写像
- §6 商の体
- §7 多項式環
- §8 体の上の多項式, 単項イデアル整域
- §9 素元分解とその一意性
- §10  $\mathbb{Z}[i]$  の素元
- §11 多項式の根, 代数的閉体
- §12  $\mathbb{Z}$  または  $\mathbb{Q}$  の上の多項式
- §13 多変数の多項式

本節では特に有理数環  $\mathbb{Z}$  について考える.

#### Thm. 4.1

$n \geq 0, (n) := n\mathbb{Z} : \mathbb{Z}$  のイデアル ( $\because$  §3 Exm. 2)  
 $\forall J : \mathbb{Z}$  のイデアル  $\Leftrightarrow \exists n \in \mathbb{Z}$  s.t.  $n \geq 0, J = (n)$

#### Def. 4.1

$n \geq 1, \mathbb{Z}_n := \mathbb{Z}/(n) : \text{法 } n \text{ に関する } \mathbb{Z} \text{ の商環}$

Rem.  $|\mathbb{Z}_n| = n, \mathbb{Z}_1 = \{0\}$

#### Def. 4.2

$n \geq 2, \mathbb{Z}_n \ni \bar{a} := a + (n)$

## Thm. 4.2

$$\bar{a} \in \mathbb{Z}_n, \bar{a} \neq \bar{0}, (a, n) = 1, \forall a' \in a + (n) \Rightarrow (a', n) = 1$$

Rem. 上記  $\bar{a}$ : 第 1 章 §8 の「法  $n$  に関する既約剰余類」のこと

## Lem. D

$$n \geq 2, \bar{a} \in \mathbb{Z}_n, \bar{a} \neq \bar{0}$$

- $(a, n) = 1 \Rightarrow \bar{a} : \text{unit}$
- $(a, n) \neq 1 \Rightarrow \bar{a} : \text{零因子}$

## Thm. 3

$$n \geq 2$$

- $n = p : \text{素数} \Rightarrow \mathbb{Z}_p : \text{体}$
- $n : \text{素数でない} \Rightarrow \exists \bar{a} \in \mathbb{Z}_n \text{ s.t. } \bar{a} : \text{零因子}$

Rem.  $\mathbb{Z}_2 = \{\bar{0}, \bar{1}\} : \text{体}$

## Def. 4.3

$(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^\times := \{\bar{a} \in \mathbb{Z}_n \mid (a, n) = 1\}$  : 法  $n$  に関する  $\mathbb{Z}$  の既約剰余類群

## Def. 4.4

$\varphi(n) := |\{a \in \mathbb{Z} \mid 1 \leq a < n, (n, a) = 1\}|$  : Euler の関数

## Thm. 4.3

$$|(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^\times| = \varphi(n)$$

## Thm. 4.4 (Euler)

$$a, n \in \mathbb{Z}, n \geq 0, (a, n) = 1 \Rightarrow a^{\varphi(n)} \equiv 1 \pmod{n}$$



## Thm. 4.5

 $p$ : 素数

- $|(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^\times| = p - 1$
- $(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^\times = \{\bar{a} \in \mathbb{Z}_p \mid \bar{a} \neq \bar{0}\}$
- $(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^\times$ : 巡回群

これらの証明は体論と関係させたほうが都合がよいので第 5 章 §2 で行う.

## 1 第 3 章 環と多項式

- §1 環とその例
- §2 整域, 体
- §3 イデアルと商環
- §4  $\mathbb{Z}$  の商環
- §5 準同型写像
- §6 商の体
- §7 多項式環
- §8 体の上の多項式, 単項イデアル整域
- §9 素元分解とその一意性
- §10  $\mathbb{Z}[i]$  の素元
- §11 多項式の根, 代数的閉体
- §12  $\mathbb{Z}$  または  $\mathbb{Q}$  の上の多項式
- §13 多変数の多項式

## Def. 5.1

$R, R' : \text{環}, f: R \rightarrow R'$

$f(1_R) = 1_{R'}, \forall x, y \in R, f(x+y) = f(x) + f(y), f(xy) = f(x)f(y) \stackrel{\text{def}}{\Leftrightarrow} f: \text{準同型写像}$

Rem. 加法群の準同型写像と区別する場合は**環準同型 (写像)** とよぶ

## Thm. 5.1

$R, R', R'' : \text{環}$

$f: R \rightarrow R' : \text{hom.}, g: R' \rightarrow R'' : \text{hom.} \Rightarrow g \circ f: R \rightarrow R'' : \text{hom.}$

Rem. **単射準同型, 全射準同型, 同型, 自己同型**などの語の用法は群の場合と同様

## Def. 5.2

$R, R' : \text{環}$

$\exists f: R \rightarrow R' : \text{iso.} \stackrel{\text{def}}{\Leftrightarrow} R \cong R' : R \text{ と } R' \text{ は同型}$

## Exm. 1

 $R = \{f \mid f: [0, 1] \rightarrow [0, 1] : \text{連続関数}\}$  $c \in [0, 1], F: R \rightarrow \mathbb{R}, f \mapsto f(c) \Rightarrow F: \text{hom.}$ 

## Exm. 2

 $f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}, \alpha \mapsto \bar{\alpha} \Rightarrow f \in \text{Aut}(\mathbb{C})$ 

## Exm. 3

 $R = \{a + b\sqrt{2} \mid a, b \in \mathbb{Z}\} : \text{環}$  $f: R \rightarrow R, a + b\sqrt{2} \mapsto a - b\sqrt{2} \Rightarrow f \in \text{Aut}(R)$

## Exm. 4

 $R$ : 環,  $J$ :  $R$  のイデアル $\varphi: R \rightarrow R/J, a \mapsto \bar{a} \Rightarrow \varphi: \text{hom.}:$  標準的準同型写像または自然な準同型写像

## Thm. 5.2

 $R, R'$ : 環 $f: R \rightarrow R': \text{hom.} \Rightarrow f(0_R) = 0_{R'}, f(-x) = -f(x)$ 

## Thm. 5.3

 $R, R'$ : 環 $f: R \rightarrow R': \text{hom.} \Rightarrow R' \supset f(R): \text{環}$

## Def. 5.3

 $R, R' : \text{環}, f: R \rightarrow R' : \text{hom.}$ 

$$f^{-1}(0) = \{x \in R \mid f(x) = 0\} \stackrel{\text{def}}{\Leftrightarrow} \text{Ker} f := f^{-1}(0) : f \text{ の核}$$

Rem.  $\text{Ker} f$  は加法群の準同型としての  $f$  の核にほかならない

## Thm. 5.4

 $R, R' : \text{環}$  $f: R \rightarrow R' : \text{hom.} \Rightarrow \text{Ker} f : R \text{ の両側イデアル}$ 

## Thm. 5.5

 $R, R' : \text{環}, f: R \rightarrow R' : \text{hom.}$ 

$$R' = \{0\} \Leftrightarrow \text{Ker} f = R$$

## Exm. 5

 $R = \{f \mid f: [0, 1] \rightarrow [0, 1] : \text{連続関数}\}$  $F: f \mapsto f(c) : \text{hom. (Exm. 1), } J_c = \{f \in R \mid f(c) = 0\} \text{ (§3 Exm. 1)} \Rightarrow \text{Ker } F = J_c$ 

## Exm. 6

 $R: \text{環}$  $\forall J: R \text{ のイデアル, } f: R \rightarrow R/J : \text{hom.} \Rightarrow \text{Ker } f = J$

## Thm. 5.6

$R$  : 斜体,  $R' \neq \emptyset$  : 環,  $f: R \rightarrow R' : \text{hom.} \Rightarrow f : \text{injective hom.}$

## Thm. 4 (環の準同型定理)

$R, R' : \text{環}$

$f: R \rightarrow R' : \text{hom.}, \text{Ker } f = J \Rightarrow R/J \cong f(R)$

## Thm. 5

$R, R' : \text{環}, f: R \rightarrow R' : \text{surjective hom.}, \text{Ker } f = J$

- $M$  : left ideal of  $R$ ,  $M'$  : left ideal of  $R'$ ,  $J \subset M \Rightarrow f(M) = M', f^{-1}(M') = M$
- $M$  : right ideal of  $R$ ,  $M'$  : right ideal of  $R'$ ,  $J \subset M \Rightarrow f(M) = M', f^{-1}(M') = M$
- $M$  : ideal of  $R \Leftrightarrow M'$  : ideal of  $R'$
- $M$  : ideal of  $R$ ,  $M'$  : ideal of  $R' \Rightarrow R/M \cong R'/M'$



## Def. 5.4

$R$  : ring,  $J_L, J_R$  : left (right) ideal of  $R$ ,  $J_L, J_R \neq R$

$\forall J$  : left (right) ideal of  $R$ ,  $J_L(J_R) \subset J \Rightarrow J = R$  or  $J_L(J_R)$

$\stackrel{\text{def}}{\Leftrightarrow} J_L(J_R) : R$  の **極大左 (右) イデアル** (maximal left (right) ideal)

## Def. 5.5

$R$  : ring,  $J_L, J_R$  : maximal left (right) ideal of  $R$ ,  $J_L, J_R \neq R$

$R$  : commutative  $\Rightarrow J_L = J_R$  : **極大イデアル** (maximal ideal)

## Thm. 6

$R$  : ring,  $J$  : tow-sided ideal of  $R$ ,  $J \neq R$

$R/J$  : skew field  $\Leftrightarrow J$  : maximal left ideal of  $R \Leftrightarrow J$  : maximal right ideal of  $R$

## Cor. 6.1

$R$  : commutative ring,  $J$  : ideal of  $R$ ,  $J \neq R$

$R/J$  field  $\Leftrightarrow J$  : maximal ideal of  $R$

## Lem. E

$$\forall R : \text{ring} \Rightarrow \exists ! \mu : \mathbb{Z} \rightarrow R : \text{hom. s.t. } \mu(n) = n1_R$$

## Thm. 5.7

$$R : \text{ring}, \mu : \mathbb{Z} \rightarrow R, n \mapsto n1_R$$

$$\forall R' \subset R : \text{subring} \Rightarrow \mu(R) \subset R'$$

## Def. 5.6

$$\mu : \mathbb{Z} \rightarrow R, n \mapsto n1_R, \exists ! m \geq 0 \text{ s.t. } \text{Ker } \mu = (m) \stackrel{\text{def}}{\Leftrightarrow} m : R \text{ の標数 (characteristic)}$$

## Thm. 5.8

$$R : \text{ring}, m : \text{characteristic of } R$$

- $m = 0 \Rightarrow \mu(R) \cong \mathbb{Z}$
- $m > 0 \Rightarrow \mu(R) \cong \mathbb{Z}/(m) = \mathbb{Z}_m$

## Thm. 5.9

$R$  : ring,  $m$  : characteristic of  $R$

- $R = \{0\} \Leftrightarrow m = 1$
- $R \neq \{0\} \Rightarrow m = 0 \text{ or } m \geq 2$
- $m = 0 \Rightarrow 1_R \in R$  : additive group,  $o(1_R) = \infty$
- $m \geq 2 \Rightarrow 1_R \in R$  : additive group,  $o(1_R) = m$

## Lem. F

$R$  : integral domain,  $m$  : characteristic of  $R \Rightarrow m = 0 \text{ or } m$  : prime number

## 1 第 3 章 環と多項式

- §1 環とその例
- §2 整域, 体
- §3 イデアルと商環
- §4  $\mathbb{Z}$  の商環
- §5 準同型写像
- **§6 商の体**
- §7 多項式環
- §8 体の上の多項式, 単項イデアル整域
- §9 素元分解とその一意性
- §10  $\mathbb{Z}[i]$  の素元
- §11 多項式の根, 代数的閉体
- §12  $\mathbb{Z}$  または  $\mathbb{Q}$  の上の多項式
- §13 多変数の多項式

## 1 第 3 章 環と多項式

- §1 環とその例
- §2 整域, 体
- §3 イデアルと商環
- §4  $\mathbb{Z}$  の商環
- §5 準同型写像
- §6 商の体
- **§7 多項式環**
- §8 体の上の多項式, 単項イデアル整域
- §9 素元分解とその一意性
- §10  $\mathbb{Z}[i]$  の素元
- §11 多項式の根, 代数的閉体
- §12  $\mathbb{Z}$  または  $\mathbb{Q}$  の上の多項式
- §13 多変数の多項式

## 1 第 3 章 環と多項式

- §1 環とその例
- §2 整域, 体
- §3 イデアルと商環
- §4  $\mathbb{Z}$  の商環
- §5 準同型写像
- §6 商の体
- §7 多項式環
- §8 体の上の多項式, 単項イデアル整域
- §9 素元分解とその一意性
- §10  $\mathbb{Z}[i]$  の素元
- §11 多項式の根, 代数的閉体
- §12  $\mathbb{Z}$  または  $\mathbb{Q}$  の上の多項式
- §13 多変数の多項式

## 1 第 3 章 環と多項式

- §1 環とその例
- §2 整域, 体
- §3 イデアルと商環
- §4  $\mathbb{Z}$  の商環
- §5 準同型写像
- §6 商の体
- §7 多項式環
- §8 体の上の多項式, 単項イデアル整域
- §9 素元分解とその一意性
- §10  $\mathbb{Z}[i]$  の素元
- §11 多項式の根, 代数的閉体
- §12  $\mathbb{Z}$  または  $\mathbb{Q}$  の上の多項式
- §13 多変数の多項式

## 1 第 3 章 環と多項式

- §1 環とその例
- §2 整域, 体
- §3 イデアルと商環
- §4  $\mathbb{Z}$  の商環
- §5 準同型写像
- §6 商の体
- §7 多項式環
- §8 体の上の多項式, 単項イデアル整域
- §9 素元分解とその一意性
- §10  $\mathbb{Z}[i]$  の素元
- §11 多項式の根, 代数的閉体
- §12  $\mathbb{Z}$  または  $\mathbb{Q}$  の上の多項式
- §13 多変数の多項式



## 1 第 3 章 環と多項式

- §1 環とその例
- §2 整域, 体
- §3 イデアルと商環
- §4  $\mathbb{Z}$  の商環
- §5 準同型写像
- §6 商の体
- §7 多項式環
- §8 体の上の多項式, 単項イデアル整域
- §9 素元分解とその一意性
- §10  $\mathbb{Z}[i]$  の素元
- §11 多項式の根, 代数的閉体
- §12  $\mathbb{Z}$  または  $\mathbb{Q}$  の上の多項式
- §13 多変数の多項式

## 1 第 3 章 環と多項式

- §1 環とその例
- §2 整域, 体
- §3 イデアルと商環
- §4  $\mathbb{Z}$  の商環
- §5 準同型写像
- §6 商の体
- §7 多項式環
- §8 体の上の多項式, 単項イデアル整域
- §9 素元分解とその一意性
- §10  $\mathbb{Z}[i]$  の素元
- §11 多項式の根, 代数的閉体
- §12  $\mathbb{Z}$  または  $\mathbb{Q}$  の上の多項式
- §13 多変数の多項式

## 1 第 3 章 環と多項式

- §1 環とその例
- §2 整域, 体
- §3 イデアルと商環
- §4  $\mathbb{Z}$  の商環
- §5 準同型写像
- §6 商の体
- §7 多項式環
- §8 体の上の多項式, 単項イデアル整域
- §9 素元分解とその一意性
- §10  $\mathbb{Z}[i]$  の素元
- §11 多項式の根, 代数的閉体
- §12  $\mathbb{Z}$  または  $\mathbb{Q}$  の上の多項式
- §13 多変数の多項式