

代数系入門
第3章 環と多項式

今村勇輝

October 24, 2021

1 第 3 章 環と多項式

■ §1 環とその例

■ §2 整域, 体

■ §3 イデアルと商環

■ §4 \mathbb{Z} の商環

■ §5 準同型写像

■ §6 商の体

■ §7 多項式環

■ §8 体の上の多項式, 単項イデアル整域

■ §9 素元分解とその一意性

■ §10 $\mathbb{Z}[i]$ の素元

■ §11 多項式の根, 代数的閉体

■ §12 \mathbb{Z} または \mathbb{Q} の上の多項式

■ §13 多変数の多項式

Def. 1.1

R : 集合, $R \neq \emptyset$,

$R \times R \rightarrow R, (a, b) \mapsto a + b, (a, b) \mapsto ab$

1 R : 加法について可換群

2 $\forall a, b, c \in R \Rightarrow (ab)c = a(bc)$

3 $\forall a, b, c, d \in R \Rightarrow a(b + c) = ab + ac, (b + c)a = ba + ca$

4 $\exists e \in R$ s.t. $\forall a \in R, ea = ae = a$

$\stackrel{\text{def}}{\Leftrightarrow} R$: 環 (ring)

Def. 1.2

R : 環

■ $\exists! e_+ \in R$ s.t. $\forall a \in R, e_+ + a = a \stackrel{\text{def}}{\Leftrightarrow} 0 := e_+ : R$ の零元

■ $\exists! a' \in R$ s.t. $a \in R, a + a' = 0 \stackrel{\text{def}}{\Leftrightarrow} -a := a'$

Def. 1.3

R : 環, $\forall a, b \in R \Rightarrow ab = ba \stackrel{\text{def}}{\Leftrightarrow} R$: 可換環

Thm. 1.1

R : 環, $\exists! e \in R$ s.t. $\forall a \in R, ea = ae = e \stackrel{\text{def}}{\Leftrightarrow} 1 := e : R$ の単位元

Exm. 1

\mathbb{Z} : 可換環: 有理整数環

Exm. 2

$\mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$: 可換環

Exm. 3

$[0, 1] \subset \mathbb{R}, R = \{f \mid f: [0, 1] \rightarrow [0, 1]\},$
 $f, g \in R, \forall t \in [0, 1], (f + g)(t) = f(t) + g(t), (fg)(t) = f(t)g(t) \Rightarrow R$: 可換環

Exm. 4

$\forall R : \text{環}, \forall S : \text{集合}, S \neq \emptyset, M(S, R) = \{f \mid f : S \rightarrow R\},$
 $f, g \in M(S, R), \forall x \in S, (f + g)(x) = f(x) + g(x), (fg)(x) = f(x)g(x) \Rightarrow M(S, R) : \text{環}$

Def. 1.4

$0 \in M(S, R) : S \text{ から } R \text{ の零写像}$

Rem. $\forall x \in S, 0(x) = 0_R$

Def. 1.5

$\forall A : \text{加法群}, f : A \rightarrow A : \text{hom.} : \text{自己準同型写像, 自己準同型 (endomorphism)}$
 $\text{End}(A) := \{f \mid f : A \rightarrow A : \text{hom.}\}$

Exm. 5

$\forall A : \text{加法群},$
 $f, g \in \text{End}(A), \forall x \in A, (f + g)(x) = f(x) + g(x), (fg)(x) = f(x)g(x) \Rightarrow \text{End}(A) : \text{環}$

Rem. $\text{End}(A) : \text{自己準同型環}$

Thm. 1.2

 R : 環

$$1 \quad 0 \in R, \forall a \in R \Rightarrow a0 = 0a = 0$$

$$2 \quad \forall a, b \in R \Rightarrow a(-b) = (-a)b = -ab$$

$$3 \quad \forall a, b \in R \Rightarrow (-a)(-b) = ab$$

$$4 \quad \forall a, b, c \in R \Rightarrow a(b - c) = ab - ac, (b - c)a = ba - ca$$

$$5 \quad a_1, \dots, a_m, b_1, \dots, b_n \in R \Rightarrow (a_1 + \dots + a_m)(b_1 + \dots + b_n) = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n a_i b_j$$

1 第 3 章 環と多項式

- §1 環とその例
- §2 整域, 体
- §3 イデアルと商環
- §4 \mathbb{Z} の商環
- §5 準同型写像
- §6 商の体
- §7 多項式環
- §8 体の上の多項式, 単項イデアル整域
- §9 素元分解とその一意性
- §10 $\mathbb{Z}[i]$ の素元
- §11 多項式の根, 代数的閉体
- §12 \mathbb{Z} または \mathbb{Q} の上の多項式
- §13 多変数の多項式

1 第 3 章 環と多項式

- §1 環とその例
- §2 整域, 体
- §3 イデアルと商環
- §4 \mathbb{Z} の商環
- §5 準同型写像
- §6 商の体
- §7 多項式環
- §8 体の上の多項式, 単項イデアル整域
- §9 素元分解とその一意性
- §10 $\mathbb{Z}[i]$ の素元
- §11 多項式の根, 代数的閉体
- §12 \mathbb{Z} または \mathbb{Q} の上の多項式
- §13 多変数の多項式

1 第 3 章 環と多項式

- §1 環とその例
- §2 整域, 体
- §3 イデアルと商環
- §4 \mathbb{Z} の商環
- §5 準同型写像
- §6 商の体
- §7 多項式環
- §8 体の上の多項式, 単項イデアル整域
- §9 素元分解とその一意性
- §10 $\mathbb{Z}[i]$ の素元
- §11 多項式の根, 代数的閉体
- §12 \mathbb{Z} または \mathbb{Q} の上の多項式
- §13 多変数の多項式

1 第 3 章 環と多項式

- §1 環とその例
- §2 整域, 体
- §3 イデアルと商環
- §4 \mathbb{Z} の商環
- §5 準同型写像
- §6 商の体
- §7 多項式環
- §8 体の上の多項式, 単項イデアル整域
- §9 素元分解とその一意性
- §10 $\mathbb{Z}[i]$ の素元
- §11 多項式の根, 代数的閉体
- §12 \mathbb{Z} または \mathbb{Q} の上の多項式
- §13 多変数の多項式

1 第 3 章 環と多項式

- §1 環とその例
- §2 整域, 体
- §3 イデアルと商環
- §4 \mathbb{Z} の商環
- §5 準同型写像
- **§6 商の体**
- §7 多項式環
- §8 体の上の多項式, 単項イデアル整域
- §9 素元分解とその一意性
- §10 $\mathbb{Z}[i]$ の素元
- §11 多項式の根, 代数的閉体
- §12 \mathbb{Z} または \mathbb{Q} の上の多項式
- §13 多変数の多項式

1 第 3 章 環と多項式

- §1 環とその例
- §2 整域, 体
- §3 イデアルと商環
- §4 \mathbb{Z} の商環
- §5 準同型写像
- §6 商の体
- **§7 多項式環**
- §8 体の上の多項式, 単項イデアル整域
- §9 素元分解とその一意性
- §10 $\mathbb{Z}[i]$ の素元
- §11 多項式の根, 代数的閉体
- §12 \mathbb{Z} または \mathbb{Q} の上の多項式
- §13 多変数の多項式

1 第 3 章 環と多項式

- §1 環とその例
- §2 整域, 体
- §3 イデアルと商環
- §4 \mathbb{Z} の商環
- §5 準同型写像
- §6 商の体
- §7 多項式環
- §8 体の上の多項式, 単項イデアル整域
- §9 素元分解とその一意性
- §10 $\mathbb{Z}[i]$ の素元
- §11 多項式の根, 代数的閉体
- §12 \mathbb{Z} または \mathbb{Q} の上の多項式
- §13 多変数の多項式

1 第 3 章 環と多項式

- §1 環とその例
- §2 整域, 体
- §3 イデアルと商環
- §4 \mathbb{Z} の商環
- §5 準同型写像
- §6 商の体
- §7 多項式環
- §8 体の上の多項式, 単項イデアル整域
- §9 素元分解とその一意性
- §10 $\mathbb{Z}[i]$ の素元
- §11 多項式の根, 代数的閉体
- §12 \mathbb{Z} または \mathbb{Q} の上の多項式
- §13 多変数の多項式

1 第 3 章 環と多項式

- §1 環とその例
- §2 整域, 体
- §3 イデアルと商環
- §4 \mathbb{Z} の商環
- §5 準同型写像
- §6 商の体
- §7 多項式環
- §8 体の上の多項式, 単項イデアル整域
- §9 素元分解とその一意性
- §10 $\mathbb{Z}[i]$ の素元
- §11 多項式の根, 代数的閉体
- §12 \mathbb{Z} または \mathbb{Q} の上の多項式
- §13 多変数の多項式

1 第 3 章 環と多項式

- §1 環とその例
- §2 整域, 体
- §3 イデアルと商環
- §4 \mathbb{Z} の商環
- §5 準同型写像
- §6 商の体
- §7 多項式環
- §8 体の上の多項式, 単項イデアル整域
- §9 素元分解とその一意性
- §10 $\mathbb{Z}[i]$ の素元
- §11 多項式の根, 代数的閉体
- §12 \mathbb{Z} または \mathbb{Q} の上の多項式
- §13 多変数の多項式

1 第 3 章 環と多項式

- §1 環とその例
- §2 整域, 体
- §3 イデアルと商環
- §4 \mathbb{Z} の商環
- §5 準同型写像
- §6 商の体
- §7 多項式環
- §8 体上の多項式, 単項イデアル整域
- §9 素元分解とその一意性
- §10 $\mathbb{Z}[i]$ の素元
- §11 多項式の根, 代数的閉体
- §12 \mathbb{Z} または \mathbb{Q} の上の多項式
- §13 多変数の多項式

1 第 3 章 環と多項式

- §1 環とその例
- §2 整域, 体
- §3 イデアルと商環
- §4 \mathbb{Z} の商環
- §5 準同型写像
- §6 商の体
- §7 多項式環
- §8 体の上の多項式, 単項イデアル整域
- §9 素元分解とその一意性
- §10 $\mathbb{Z}[i]$ の素元
- §11 多項式の根, 代数的閉体
- §12 \mathbb{Z} または \mathbb{Q} の上の多項式
- §13 多変数の多項式