

代数系入門

第2章 群

今村勇輝

February 17, 2022

1 第 2 章 群

■ §2 群とその例

- §3 部分群と生成系
- §4 剰余類分解
- §5 正規部分群と商群
- §6 準同型写像
- §7 自己同型写像, 共役類
- §8 巡回群
- §9 置換群
- §10 置換表現, 群の集合への作用
- §11 直積
- §12 Sylow の定理

Def. 2.1

G : 集合, $G \neq \emptyset$, $*$: $G \times G \rightarrow G$: 二項演算

G が演算 $*$ について次の 3 条件を満たす $\stackrel{\text{def}}{\Leftrightarrow} G$: **群**

G1 $(a * b) * c = a * (b * c)$: 結合律

G2 $\exists e \in G, \forall a \in G (e * a = a * e = a) \stackrel{\text{def}}{\Leftrightarrow} e$: **単位元**

G3 $\forall a \in G, \exists b \in G (b * a = a * b = e) \stackrel{\text{def}}{\Leftrightarrow} a^{-1} := b$: a の**逆元**

乗法記号によって $a * b$ を ab と書く場合, 群 G は **乗法群**

加法記号によって $a + b$ と書く場合, 群 G は **加法群**

Thm. 2.1

- 単位元はただ一つである
- a の逆元は一意的に定まる
- $(a^{-1})^{-1} = a$

Def. 2.2

G : 群, $\forall a, \forall b \in G, ab = ba \stackrel{\text{def}}{\Leftrightarrow} G$: 可換群 または Abel 群

Exm. 1

$\mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$ は加法について群をなす.

Exm. 2

$\mathbb{Q}^* := \mathbb{Q} - \{0\}, \mathbb{R}^* := \mathbb{R} - \{0\}, \mathbb{C}^* := \mathbb{C} - \{0\}$

$\mathbb{Q}^*, \mathbb{R}^*, \mathbb{C}^*$ は乗法について群をなす ($\mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$ では成り立たない).

Thm. 1

$\forall a, b \in G, \exists! u, v \in G$ s.t. $au = b, va = b$

1 第 2 章 群

- §2 群とその例
- §3 部分群と生成系
- §4 剰余類分解
- §5 正規部分群と商群
- §6 準同型写像
- §7 自己同型写像, 共役類
- §8 巡回群
- §9 置換群
- §10 置換表現, 群の集合への作用
- §11 直積
- §12 Sylow の定理

Def. 3.1

 G : 群, $H \subset G$, $\cdot : G$ の演算 $H : \cdot$ に関して群 $\stackrel{\text{def}}{\Leftrightarrow} H \leq G$, H : 部分群

Lem. D

 $H \subset G$ $H \leq G \Leftrightarrow$

$$1 \quad e \in H$$

$$2 \quad a, b \in H \Rightarrow ab \in H$$

$$3 \quad a \in H \Rightarrow a^{-1} \in H$$

Rem. 条件 1 は「 $H \neq \emptyset$ 」に置き換えてもよい
 H が有限の場合は条件 3 を取り除ける

Lem. E

 $H \subset G, H \neq \emptyset, |H| < \infty, H : \cdot$ に関して閉じている $\Rightarrow H \leq G$

Thm. 3.1

$$G \leq G, \{e\} \leq G$$

Def. 3.2

$$H \leq G, H \neq G, H \neq \{e\} \stackrel{\text{def}}{\Leftrightarrow} H : G \text{ の 真部分群}$$

Thm. 3.2

$$H_1 \leq G, H_2 \leq G \Rightarrow H_1 \cap H_2 \leq G$$

Exm. 1

$$\mathbb{Z}, \mathbb{Q} : \text{加法群}, \mathbb{Z} \leq \mathbb{Q}$$

Exm. 2

0 でない有理数の乗法群 \mathbb{Q}^* は 0 でない実数の乗法群 \mathbb{R}^* の部分群である
絶対値が 1 である複素数全体のなす乗法群は乗法群 \mathbb{C}^* の部分群である

Exm. 3

Thm. 3.3

$$S \subset G, S \neq \emptyset, S^{-1} := \{x^{-1} \mid x \in S\}$$

$$H := \{x_1 x_2 \cdots x_m \mid x_i \in S \cup S^{-1}\} \Rightarrow H \leq G$$

Thm. 3.4

$$S \subset H$$

$$\forall K \leq G, S \subset K \Rightarrow H \subset K$$

H は S を含む「最小」の部分群.

Proof.

$\forall a \in H \Rightarrow a \in K$ を示す.

$a \in H$ なので $\exists x_i \in S \cup S^{-1}, \exists m \in \mathbb{N}$ s.t $a = x_1 \cdots x_m$.

$x_i \in S$ のとき $S \subset K$ なので $x_i \in K$.

$x_i \in S^{-1}$ のとき $x_i^{-1} \in S, S \subset K$ なので $x_i^{-1} \in K$.

$x_i^{-1} \in K$ と 補題 D(3) より $x_i \in K$.

$x_i \in K$ と 補題 D(2) より $a = x_1 \cdots x_m \in K$. よって成立.



Def. 3.3

$H := \langle S \rangle$: S によって生成される G の部分群

S : H の 生成元の集合 または H の 生成系

$S = \{a\}$ のとき 乗法 $\langle S \rangle = \{a^n \mid n \in \mathbb{Z}\}$, 加法 $\langle S \rangle = \{na \mid n \in \mathbb{Z}\}$

Exm. 4

$H = \langle -1 \rangle, H \leq \mathbb{R}^*$ のとき $H = \{1, -1\}$

$H = \langle i \rangle, H \leq \mathbb{C}^*$ のとき $H = \{1, -1, i, -i\}$

Exm. 5

\mathbb{Z} : 加法群

$m \in \mathbb{Z}, m\mathbb{Z} = \langle m \rangle, m\mathbb{Z} \leq \mathbb{Z}$ のとき $m\mathbb{Z} = \{0, \pm m, \pm 2m, \dots\}$

Exm. 6

π : 平面, $d(P, Q)$: π の 2 点 P, Q の距離, 写像 $\phi: \pi \rightarrow \pi$ が全単射で

$$d(\phi(P), \phi(Q)) = d(P, Q)$$

が成り立つとき, $\phi: \pi$ の **運動**

運動の全体は対称群 $S(\pi)$ の 1 つの部分群をつくる: π の **運動群**

Exm. 7

シンメトリー: 図形をそれ自身に重ねるような平面の運動

正方形のシンメトリーの全体は, 運動群の 1 つの部分群をつくる.

Exm. 8

X : 集合, $\langle X \rangle \leq S(X) \stackrel{\text{def}}{\Leftrightarrow} \langle X \rangle$: **置換群**

1 第 2 章 群

- §2 群とその例
- §3 部分群と生成系
- §4 剰余類分解
- §5 正規部分群と商群
- §6 準同型写像
- §7 自己同型写像, 共役類
- §8 巡回群
- §9 置換群
- §10 置換表現, 群の集合への作用
- §11 直積
- §12 Sylow の定理

Def. 4.1

$$H \leq G$$

$a, b \in G$ が H を法として左合同, $a \equiv b \pmod{H} \stackrel{\text{def}}{\Leftrightarrow} a^{-1}b \in H$

Thm. 4.1

G における同値関係

- 1 $\forall a \in G, a \equiv a \pmod{H}$
- 2 $a \equiv b \pmod{H} \Rightarrow b \equiv a \pmod{H}$
- 3 $a \equiv b \pmod{H}, b \equiv c \pmod{H} \Rightarrow a \equiv c \pmod{H}$

Thm. 4.2

$$C_a := \{x \mid a \equiv x \pmod{H}\} \Rightarrow C_a = \{ah \mid h \in H\}$$

Def. 4.2

$$aH := \{ah \mid h \in H\} : a \text{ の左剰余類}$$

Thm. 4.3

$$a, b \in G, H \leq G$$

$$a^{-1}b \in H \Leftrightarrow aH = bH$$

$$ab^{-1} \in H \Leftrightarrow Ha = Hb$$

$$a \not\equiv b \pmod{H} \Rightarrow aH \cap bH = \emptyset$$

Rem. H : 左剰余類 ($\because H = eH$)

Thm. 4.4

$$\exists a_1, a_2, \dots \in G \text{ s.t. } G = a_1H \cup a_2H \cup \dots, a_iH \cap a_jH = \emptyset, i \neq j$$

$H \leq G$ のとき, G は H を法とする互いに交わらない (有限個または無限個) の左剰余類に分割される.

Def. 4.3

$$\text{右合同} \stackrel{\text{def}}{\Leftrightarrow} ab^{-1} \in H$$

$$Ha := \{ha \mid h \in H\} : a \text{ の右剰余類}$$

Thm. 4.5

$$a, b \in G, \forall c \in G, cH = Hc$$

$$a^{-1}b \in H \Leftrightarrow ab^{-1} \in H$$

Def. $a^{-1}b, ab^{-1} \in H \stackrel{\text{def}}{\Leftrightarrow} aH = Ha$: 剰余類

Thm. 4.6

$$G : \text{可換群}, \forall H \leq G \Rightarrow a^{-1}b, ab^{-1} \in H$$

Rem. G : 加法群 のとき, $a + H = \{a + h \mid h \in H\}$

Exm. 1

$m \in \mathbb{Z}, m > 0, m\mathbb{Z} \leq \mathbb{Z}$: 加法群

$$a, b \in \mathbb{Z}, a \equiv b \pmod{m\mathbb{Z}} \Rightarrow \exists n \in \mathbb{Z} \text{ s.t. } a - b = nm$$

Def. 4.4

$$(G : H) := |\{aH \mid a \in G\}| : H \text{ の指数}$$

Rem. 指数の定義を Ha の個数としても同じ. $(G : H) = |\{Ha \mid a \in G\}|$

Rem. $|G| < \infty \Rightarrow \forall H \leq G, (G : H) < \infty$

Exm. Exm.1 の \mathbb{Z} について, $(\mathbb{Z} : m\mathbb{Z}) = m$

Def. 4.5

$$o(G) := |G| : G \text{ の位数}$$

Rem. o は order の頭文字.

Lem. F

$$H \leq G, |H| < \infty$$

$$\forall aH \subset G \Rightarrow |aH| = o(H)$$

Thm. 2

$$|G| < \infty$$

$$H \leq G \Rightarrow o(G) = (G : H) \cdot o(H)$$

Cor. 2.1 (Lagrange)

$$|G| < \infty$$

$$\forall H \leq G \Rightarrow o(H) | o(G)$$

Thm. $(G : G) = 1, (G : e) = o(G) (\because \text{Thm.2})$

Exm. 2

Thm. 4.7

$J_n = \{1, 2, \dots, n\}$: 集合

$S_n = \{f \mid f: J_n \rightarrow J_n : \text{bijection}\}$: n 次対称群

$$o(S_n) = n!$$

剰余類分解と Thm.2 を使って証明する.

$n \geq 2, H \subset S_n, H = \{\sigma \mid \sigma(n) = n\}$

明らかに $H \leq S_n$

このとき, H を S_{n-1} とみなせる

$\sigma, \rho \in S_n, \sigma^{-1} \circ \rho \in H \Leftrightarrow \sigma(n) = \rho(n)$

$\tau_i : J_n$ の置換 s.t $\tau_i(n) = i, \tau_i(i) = n, 1 \leq i \leq n, i, n$ 以外は固定

τ_1, \dots, τ_n について $\tau_i^{-1} \circ \tau_j \notin H, i \neq j$

一方, $\forall \sigma \in S_n, \sigma(n) = i$ ならば $\sigma^{-1} \circ \tau_i \in H$

ゆえに $S_n = \tau_1 H \sqcup \dots \sqcup \tau_n H$

$o(S_n) = (S : S_{n-1}) \cdot o(S_{n-1})$

1 第 2 章 群

- §2 群とその例
- §3 部分群と生成系
- §4 剰余類分解
- §5 正規部分群と商群
- §6 準同型写像
- §7 自己同型写像, 共役類
- §8 巡回群
- §9 置換群
- §10 置換表現, 群の集合への作用
- §11 直積
- §12 Sylow の定理

Def. 5.1

$H \triangleleft G$ の正規部分群 $\stackrel{\text{def}}{\Leftrightarrow} \forall a \in G, aH = Ha$

Thm. 5.1

G : 可換群 $\Rightarrow \forall H \leq G, H \triangleleft G$

Thm. 5.2

$\forall G, G \triangleleft G, \{e\} \triangleleft G$

Exm. 1

$\forall G, Z = \{x \in G \mid \forall a \in G, ax = xa\} \Rightarrow Z \triangleleft G$

Def. 5.2

$Z(G) := Z : G$ の中心

Rem. G : 可換群 $\Rightarrow Z(G) = G$

Exm. 2

$S_n : J_n$ 上の対称群, $H = \{\sigma \in S \mid \sigma(n) = n\}, H \leq S_n$
 $n \geq 3 \Rightarrow H \ntriangleleft S_n$

交換子群

Lem. G

$$H \triangleleft G \Leftrightarrow \forall a \in G, \forall x \in H, axa^{-1} \in H$$

Exm. 3

$$a, b \in G$$

$$aba^{-1}b^{-1} \in G : \text{交換子}$$

$$D(G) := \langle \{aba^{-1}b^{-1} \mid a, b \in G\} \rangle : \text{交換子群}$$

Thm. 5.3

$$\forall H, D(G) \subset H \Rightarrow H \triangleleft G$$

$$\text{Rem. } G : \text{可換群} \Rightarrow D(G) = \{e\}$$

Def. 5.3

 $S, S' \subset G, S \neq \emptyset, S' \neq \emptyset$ $SS' := \{xx' \mid x \in S, x' \in S'\} : S, S' \text{ の積}$ Rem.

- 加法記号の場合, $S + S'$
- $S = \{x\}$ の場合, xS'
- $S' = \{x'\}$ の場合, Sx'

Thm. 5.4

 $S_1, S_2, S_3 \subset G, S_1 \neq \emptyset, S_2 \neq \emptyset, S_3 \neq \emptyset$ $S_1(S_2S_3) = (S_1S_2)S_3 = \{x_1x_2x_3 \mid x_1 \in S_1, x_2 \in S_2, x_3 \in S_3\}$

Exm. 4

 $H \leq G \Rightarrow HH = H$

Thm. 3

 $a, b \in G$ $N \triangleleft G \Rightarrow (aN)(bN) = abN$ かつ $\{aN \mid a \in G\} : \text{群}$

Def. 5.4

 $G/N := \{aN \mid a \in G\} : G \text{ の } N \text{ による 剰余群 (または 商群)}$ Rem. N : 単位元, $a^{-1}N : aN$ の逆元Rem. G : 可換群 $\Rightarrow \forall N, G/N$: 可換群

Thm. 5.5

 $N \triangleleft G$ $(G : N) < \infty \Rightarrow o(G/N) = (G : N)$

Thm. 5.6

$$|G| < \infty \Rightarrow o(G/N) = \frac{o(G)}{o(N)}$$

Def. 5.5

$n > 0, n \in \mathbb{Z}, \mathbb{Z} : \text{加法群}, n\mathbb{Z} \leq \mathbb{Z}$

$$\mathbb{Z}_n := \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$$

Exm. 5

$$o(\mathbb{Z}_n) = n$$

$$N = n\mathbb{Z}, k \in \mathbb{Z}$$

$$\bar{k} := k + N$$

$$\mathbb{Z}_n = \{\bar{0}, \bar{1}, \dots, \overline{n-1}\}$$

\mathbb{Z}_4 の場合,

$$\bar{0} + \bar{1} = \bar{1}, \bar{1} + \bar{1} = \bar{2}, \bar{2} + \bar{1} = \bar{3}, \bar{3} + \bar{1} = \bar{0}$$

Thm. 4

$$N \triangleleft G$$

$$G/N : \text{可換群} \Leftrightarrow D(G) \subset N$$

1 第 2 章 群

- §2 群とその例
- §3 部分群と生成系
- §4 剰余類分解
- §5 正規部分群と商群
- §6 準同型写像
- §7 自己同型写像, 共役類
- §8 巡回群
- §9 置換群
- §10 置換表現, 群の集合への作用
- §11 直積
- §12 Sylow の定理

Def. 6.1

$f: G \rightarrow G' : \text{準同型写像 (hom.)} \stackrel{\text{def}}{\Leftrightarrow} \forall x, y \in G, f(xy) = f(x)f(y)$

Rem. 群の算法の種類には関係ない.

Exm. G : 加法群, G' : 乗法群, $f(x+y) = f(x)f(y)$

Exm. 1

$\forall G, G', e' \in G'$

$f(x) = e' \Rightarrow f : \text{hom.}$

Rem. $f : \text{trivial}$ な準同型写像

Exm. 2

Rem. $\mathbb{R}^+ := \{x \in \mathbb{R} \mid x > 0\}$, $\mathbb{R}^* : \text{乗法群} \Rightarrow \mathbb{R}^+ \leq \mathbb{R}^*$

$\mathbb{R} : \text{加法群}$

■ $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^+, x \mapsto 2^x \Rightarrow f : \text{hom.} (\because 2^{x+y} = 2^x 2^y)$

■ $f: \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto \log_2 x \Rightarrow f : \text{hom.} (\because \log_2 xy = \log_2 x + \log_2 y)$

Exm. 3

$a \in G, n \in \mathbb{Z}, \mathbb{Z} : \text{加法群}$

$$f: n \mapsto a^n \Rightarrow f: \text{hom.} (\because a^{m+n} = a^m a^n)$$

Exm. 4

$z \in \mathbb{C}, z \neq 0$

$$f: \mathbb{C}^* \rightarrow \mathbb{R}^+, z \mapsto |z| \Rightarrow f: \text{hom.}$$

Exm. 5

$N \triangleleft G, a \in G$

$$\varphi: G \rightarrow G/N, a \mapsto aN \Rightarrow \varphi: \text{hom.}$$

$$\because \varphi(ab) = abN = (aN)(bN) = \varphi(a)\varphi(b)$$

Def. φ : 標準的準同型写像 または 自然な準同型写像

Thm. 6.1

$$f: G \rightarrow G', g: G' \rightarrow G'' : \text{hom.}$$

- $e \in G, e' \in G', f(e) = e'$
- $\forall x \in G, f(x^{-1}) = f(x)^{-1}$
- $g \circ f: G \rightarrow G'' : \text{hom.}$

Rem. 準同型写像を省略して準同型と呼ぶときもある

Def. 6.2

$$f: G \rightarrow G' : \text{hom.}$$

- f : 単射: **単射準同型** (injective hom.)
- f : 全射: **全射準同型** (surjective hom.)
- f : 全単射: **同型写像** または **同型** (iso.)

Thm. 6.2

$$f: G \rightarrow G' : \text{iso.} \Rightarrow f^{-1}: G' \rightarrow G : \text{iso.}$$

Def. 6.3

$G \cong G' : \text{同型} \stackrel{\text{def}}{\Leftrightarrow} \exists f: G \rightarrow G' : \text{iso.}$

Thm. 6.3

- $G \cong G$
- $G \cong G' \Rightarrow G' \cong G$
- $G \cong G', G' \cong G'' \Rightarrow G \cong G''$

Exm. 6

$\mathbb{R} \cong \mathbb{R}^+ (\because \text{Exm.2})$

Thm. 6.4

$$f: G \rightarrow G' : \text{hom.} \Rightarrow f(G) \leq G'$$

Rem. 単射準同型は, G から G' の **中への同型写像** と呼ばれる

Def. 6.4

$$f : \text{hom.}$$

$$\text{Ker } f := \{x \in G \mid f(x) = e'\} : f \text{ の } \textcolor{red}{\text{核}} \text{ (Kernel)}$$

Thm. 6.5

$$\text{Ker } f \triangleleft G$$

Exm. 7

$$N \triangleleft G, \varphi : G \rightarrow G/N \Rightarrow \text{Ker } \varphi = N$$

Thm. 5

$f: G \rightarrow G' : \text{hom.}, \text{Ker } f = N, a, b \in G$
 $f(a) = f(b) \Leftrightarrow a \equiv b \pmod{N}$

Cor. 5.1

$f: G \rightarrow G' : \text{hom.}$
 $f: \text{injective} \Leftrightarrow \text{Ker } f = \{e\}$

Thm. 6.6

$f: G \rightarrow G' : \text{hom.}, \text{Ker } f = N, f(G) = G'_0, g: G/N \rightarrow G'_0, aN \mapsto f(a)$
 $\Rightarrow g: \text{bijective} (\because \text{Thm.5})$

Def. $g: f$ から誘導される全単射

Thm. 6 (準同型定理)

$f: G \rightarrow G' : \text{hom.}, \text{Ker } f = N \Rightarrow g: G/N \rightarrow f(G) : \text{iso.} (G/N \cong f(G))$

Exm. 8

$f: \mathbb{C}^* \rightarrow \mathbb{R}^+, z \mapsto |z| : \text{hom.}, f(\mathbb{C}^*) = \mathbb{R}^+, \mathbb{T} := \text{Ker } f = \{z \in \mathbb{C}^* \mid |z| = 1\}$
 $\mathbb{C}^*/\mathbb{T} \cong \mathbb{R}^+ (\because \text{Thm.6})$

Def. $z(\theta) := e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta$

Rem. $z(\theta_1)z(\theta_2) = z(\theta_1 + \theta_2)$

Exm. 9

$\mathbb{R}, \mathbb{Z} : \text{加法群}, f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{T}, \theta \mapsto z(2\pi\theta) : \text{hom.}$

$\mathbb{R}/\mathbb{Z} \cong \mathbb{T}$

$\because f(\mathbb{R}) = \mathbb{T}, \text{Ker } f = \mathbb{Z}, (\because \theta \in \mathbb{Z} \Rightarrow z(2\pi\theta) = 0)$

Rem. $\mathbb{R}/\mathbb{Z}, \mathbb{T} : 1 \text{ 次元の トーラス群}$

Exm. 10

$I: G \rightarrow G, I(G) = G, \text{Ker } I = \{e\}, f: \text{Exm.1}, f(G) = \{e\}, \text{Ker } f = G$
 $G/\{e\} \cong G, G/G \cong \{e\}$

Def. 6.5

$G' : G$ の **準同型像** $\stackrel{\text{def}}{\Leftrightarrow} \exists f: G \rightarrow G' : \text{surjective hom.}$

Cor. 6.1

$G' : G$ の準同型像 $\Leftrightarrow \exists N \triangleleft G$ s.t. $G' \cong G/N$

Def. 6.6

G : **単純群** $\stackrel{\text{def}}{\Leftrightarrow} \forall N \triangleleft G, N = \{e\} \text{ or } G$

Lem. H

$f: G \rightarrow G' : \text{surjective hom.}$

$H \leq G (H \triangleleft G) \Rightarrow f(H) \leq G' (f(H) \triangleleft G')$

$H' \leq G' (H' \triangleleft G') \Rightarrow f^{-1}(H') \leq G (f^{-1}(H') \triangleleft G)$

Thm. 7 (第 1 同型定理, 第 3 同型定理)

$f: G \rightarrow G'$: surjective hom., $\text{Ker } f = N$

$\Omega = \{H \mid H \leq G, N \subset H\}, \Omega' = \{H' \mid H' \leq G'\}$

$\varphi: \Omega \rightarrow \Omega' (H \mapsto f(H)), \varphi': \Omega' \rightarrow \Omega (H' \mapsto f^{-1}(H'))$

(a1) φ, φ' : bijection, $\varphi^{-1} = \varphi'$

(a2) (a1) の対応において, $H/N \cong H'$

(b1) $f(H) = H', f^{-1}(H') = H, H \triangleleft G \Leftrightarrow H' \triangleleft G'$

(b2) $G/H \cong G'/H' \cong (G/N)/(H/N)$

Exm. 6.1

$G = \mathbb{Z}, H = 3\mathbb{Z}, N = 12\mathbb{Z} \Rightarrow (\mathbb{Z}/12\mathbb{Z})/(3\mathbb{Z}/12\mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$

$a, b \in \mathbb{N}, a|b \Rightarrow (\mathbb{Z}/b\mathbb{Z})/(a\mathbb{Z}/b\mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}/a\mathbb{Z}$

Thm. 8 (第 2 同型定理)

$$\forall H \leq G, N \triangleleft G \Rightarrow$$

- $HN \leq G, H \cap N \triangleleft H$
- $H/(H \cap N) \cong HN/N$

Exm. 6.2

$$G = \mathbb{Z}, H = 6\mathbb{Z}, N = 10\mathbb{Z} \Rightarrow 6\mathbb{Z}/30\mathbb{Z} \cong 2\mathbb{Z}/10\mathbb{Z}$$

$$a, b \in \mathbb{Z}, \text{lcm}(a, b) = l, \text{gcd}(a, b) = m \Rightarrow a\mathbb{Z}/l\mathbb{Z} \cong m\mathbb{Z}/b\mathbb{Z}$$

1 第 2 章 群

- §2 群とその例
- §3 部分群と生成系
- §4 剰余類分解
- §5 正規部分群と商群
- §6 準同型写像
- **§7 自己同型写像, 共役類**
- §8 巡回群
- §9 置換群
- §10 置換表現, 群の集合への作用
- §11 直積
- §12 Sylow の定理

Def. 7.1

$f: G \rightarrow G : \text{iso.} \stackrel{\text{def}}{\Leftrightarrow} f: G \text{ の自己同型写像または自己同型 (automorphism)}$

Exm. 7.1

$$I_G: G \rightarrow G : \text{aut.}$$

Thm. 7.1

$$f, g : \text{aut.} \Rightarrow f \circ g, f^{-1} : \text{aut.}$$

Thm. 7.2

$$\text{Aut}(G) := \{f \in S(G) \mid f : \text{aut.}\} \leq S(G)$$

Def. 7.2

$\text{Aut}(G) : G \text{ の自己同型群}$

Exm. 1

$$\begin{aligned} G: \text{可換群}, f: G \rightarrow G (x \mapsto x^{-1}) &\Rightarrow f : \text{aut.} \\ \because f(xy) &= (xy)^{-1} = y^{-1}x^{-1} = x^{-1}y^{-1} = f(x)f(y) \end{aligned}$$

Lem. 1

$$a \in G, \sigma_a: G \rightarrow G, x \mapsto axa^{-1} \Rightarrow \sigma_a \in \text{Aut}(G)$$

Rem. σ_a が I_G と一致するのは, $a \in Z(G)$ のとき ($\because axa^{-1} = x, ax = xa$)

Def. 7.3

$\sigma_a: G$ の内部自己同型

Def. 7.4

$$a, b \in G, \exists s \in G \text{ s.t. } \sigma_s(a) = sas^{-1} = b \stackrel{\text{def}}{\Leftrightarrow} a \sim b : a \text{ は } b \text{ に共役}$$

Thm. 7.3

$$a, b, c \in G$$

$$\boxed{1} \quad a \sim a$$

$$\boxed{2} \quad a \sim b \Rightarrow b \sim a$$

$$\boxed{3} \quad a \sim b, b \sim c \Rightarrow a \sim c$$

Def. 7.5

$a \in G, C_a := \{xax^{-1} \mid x \in G\} : a \text{ の共役類}$

Def. 7.6

$a \in G, N(a) := \{x \in G \mid ax = xa\} : G \text{ の } a \text{ による正規化群}$

Thm. 7.4

$$N(a) \leq G$$

Lem. J

$$|G| < \infty, |C_a| = (G : N(a))$$

Thm. 9

$$|G| < \infty, Z = Z(G), C := \{a \in C_a \mid a \in G \setminus Z\}$$
$$o(G) = o(Z) + \sum_{a \in C} (G : N(a)) : \text{類等式}$$

Def. 7.7

p : 素数, $n \geq 1, o(G) = p^n \stackrel{\text{def}}{\Leftrightarrow} G : p \text{ 群}$

Exm. 2

$G : p \text{ 群} \Rightarrow \exists a \in Z(G) \text{ s.t. } a \neq e$

Exm. 3

$o(G) = p^2 \Rightarrow G : \text{可換群}$

Def. 7.8

$S, S' \leq G, \exists a \in G \text{ s.t. } \sigma_a(S) = aSa^{-1} = S' \stackrel{\text{def}}{\Leftrightarrow} S \text{ は } S' \text{ に共役}$

Thm. 7.5

$S, T, U \leq G$

1 $S \sim S$

2 $S \sim T \Rightarrow T \sim S$

3 $S \sim T, T \sim U \Rightarrow S \sim U$

Thm. 7.6

$$H \leq G, a \in G \Rightarrow \sigma_a(H) = aHa^{-1} \leq G$$

Def. 7.9

 $\sigma_a(H)$: 共役部分群

Thm. 7.7

$$H \triangleleft G \Leftrightarrow H \leq G, a \in G, H = \bigcup C_a$$

Thm. 7.8

$$H \triangleleft G \Leftrightarrow \forall a \in G, \sigma_a(H) = H$$

1 第 2 章 群

- §2 群とその例
- §3 部分群と生成系
- §4 剰余類分解
- §5 正規部分群と商群
- §6 準同型写像
- §7 自己同型写像, 共役類
- §8 巡回群
- §9 置換群
- §10 置換表現, 群の集合への作用
- §11 直積
- §12 Sylow の定理

Rem. $n \in \mathbb{Z}, n \geq 0, n\mathbb{Z} \leq \mathbb{Z} (\because \S 3 \text{ Exm.5})$

Lem. K

$\forall A \leq \mathbb{Z} \Rightarrow \exists n \in \mathbb{Z} \text{ s.t. } n \geq 0, A = n\mathbb{Z}$

Def. 8.1

$a \in G, G = \{a^k \mid k \in \mathbb{Z}\} \stackrel{\text{def}}{\Leftrightarrow} G := \langle a \rangle : \text{巡回群}$
 $a : G \text{ の生成元}$

Rem. 加法群の場合, $\langle a \rangle = \{ka \mid k \in \mathbb{Z}\}$

Exm. 8.1

$\mathbb{Z} = \langle 1 \rangle, n\mathbb{Z} = \langle n \rangle$

$\mathbb{Z}_n = \langle 1 + n\mathbb{Z} \rangle, o(\mathbb{Z}_n) = n$: 有限巡回群

Thm. 10

 G, H : 巡回群

- $o(G) = \infty \Rightarrow G \cong \mathbb{Z}$
- $o(H) = n \Rightarrow H \cong \mathbb{Z}_n$

Exm. 1

$$G = \langle i \rangle = \langle -i \rangle = \{1, i, -1, -i\}$$

Thm. 8.1

$$a \in G \Rightarrow \langle a \rangle \leq G$$

Def. 8.2

$$a \in G, \langle a \rangle \leq G$$

$$n > 0, \langle a \rangle \cong \mathbb{Z}_n \stackrel{\text{def}}{\Leftrightarrow} o(a) = n : a \text{ の位数または周期}$$

$$\langle a \rangle \cong \mathbb{Z} \stackrel{\text{def}}{\Leftrightarrow} a : \text{無限位数の元}$$

Rem. 位数が 1 の元は単位元

Exm. 2

Exm.1 において $o(-1) = 2, o(i) = o(-i) = 4$

Thm. 11

$o(G) < \infty, \forall a \in G \Rightarrow o(a) | o(G)$

Cor. 11.1

$o(G) = n \Rightarrow \forall a \in G, a^n = e$

Thm. 12

$G : \text{巡回群}, \forall H \leq G \Rightarrow H : \text{巡回群}$

1 第 2 章 群

- §2 群とその例
- §3 部分群と生成系
- §4 剰余類分解
- §5 正規部分群と商群
- §6 準同型写像
- §7 自己同型写像, 共役類
- §8 巡回群
- §9 置換群
- §10 置換表現, 群の集合への作用
- §11 直積
- §12 Sylow の定理

Def. 9.1

$J_n = \{1, 2, \dots, n\}$, $S_n : J_n$ 上の n 次対称群

$$\tau \in S_n, \tau : \begin{cases} i \mapsto j \\ j \mapsto i & (j \neq i) \\ k \mapsto k & (k \neq i, k \neq j) \end{cases} \stackrel{\text{def}}{\Leftrightarrow} \tau = (ij) : J_n \text{ 上の互換}$$

Rem. $\tau : \text{互換} \Rightarrow \tau = \tau^{-1}$

Lem. L

$\forall \sigma \in S_n, n \geq 2 \Rightarrow \exists \tau_1, \dots, \tau_s \in S_n : \text{互換 s.t. } \sigma = \tau_1 \cdots \tau_s$

Exm. 1

次の置換を互換の積で表す.

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 1 & 4 & 2 \end{pmatrix}$$

Def. 9.2

$n \geq 2, \Omega := \{\{i, j\} \mid i, j \in J_n, i \neq j\}, \sigma \in S_n$

$$\varepsilon(\sigma) := \prod_{\{i, j\} \in \Omega} \frac{\sigma(i) - \sigma(j)}{i - j} : \sigma \text{ の符号}$$

Rem. $\varepsilon(\sigma)$ は $\text{sgn}(\sigma)$ とも書かれる.

Thm. 13

$n \geq 2$

- $\forall \sigma \in S_n \Rightarrow \varepsilon(\sigma) = 1$ または $\varepsilon(\sigma) = -1, \varepsilon: S_n \rightarrow \{1, -1\} : \text{hom.}$
- $\forall \tau \in S_n : \text{互換} \Rightarrow \varepsilon(\tau) = -1$

Def. 9.3

$n \geq 2, \sigma \in S_n$

$\varepsilon(\sigma) = 1 \stackrel{\text{def}}{\Leftrightarrow} \sigma : \text{偶置換}, \varepsilon(\sigma) = -1 \stackrel{\text{def}}{\Leftrightarrow} \sigma : \text{奇置換}$

Rem. $\forall \tau \in S_n : \text{互換} \Rightarrow \tau : \text{奇置換} (\because \text{Thm. 13})$

Cor. 13.1

$\sigma \in S_n, \exists \tau_1, \dots, \tau_s \in S_n : \text{互換 s.t. } \sigma = \tau_1 \cdots \tau_s$
 $\sigma : \text{偶置換 (奇置換)} \Rightarrow s : \text{偶数 (奇数)}$

Cor. 13.2

$n \geq 2, \Omega_e = \{\sigma \in S_n \mid \varepsilon(\sigma) = 1\}, \Omega_o = \{\sigma \in S_n \mid \varepsilon(\sigma) = -1\}$

- $A_n := \Omega_e, A_n \triangleleft S_n : n \text{ 次の交代群}$
- $o(\Omega_e) = o(\Omega_o) = n!/2$

Exm. 9.1

$A_3 = \{e, (1\ 2\ 3), (1\ 3\ 2)\}$

Def. 9.4

$$i_1, \dots, i_r \in J_n (r \geq 2, i_i \neq i_j)$$

$$\sigma \in S_n, \sigma(i_1) = i_2, \sigma(i_2) = i_3, \dots, \sigma(i_{r-1}) = i_r, \sigma(i_r) = i_1, \sigma(i_k) = i_k (r < k \leq n)$$

$$\stackrel{\text{def}}{\Leftrightarrow} \sigma = (i_1 \ i_2 \ \dots \ i_r) : \text{長さ } r \text{ の巡回置換 (サイクル), } r\text{-巡回置換}$$

$$J_n(\sigma) := \{i_1, i_2, \dots, i_r\} : \sigma \text{ の巡回域}$$

Rem. 互換: 2-巡回置換, e : 1-巡回置換

Thm. 9.1

$$\sigma \in S_n : r\text{-巡回置換}, \forall i \in J_n(\sigma) \Rightarrow \sigma = (i \ \sigma(i) \ \sigma^2(i) \ \dots \ \sigma^{r-1}(i))$$

Def. 9.5

$$\sigma, \sigma' \in S_n : \text{巡回置換}, J_n(\sigma) \cap J_n(\sigma') = \emptyset \stackrel{\text{def}}{\Leftrightarrow} \sigma, \sigma' \text{ は互いに素}$$

Thm. 9.2

$\sigma, \sigma' \in S_n$: 互いに素 $\Rightarrow \sigma\sigma' = \sigma'\sigma$

Def. 9.6

$\forall \sigma \in S_n, i, j \in J_n, \exists \alpha \in \mathbb{Z}$ s.t. $\sigma^\alpha(i) = j \stackrel{\text{def}}{\Leftrightarrow} i \equiv_\sigma j$

$T_i := \{i \in J_n \mid i \equiv_\sigma j\} : \sigma$ に関する推移類

Lem. M

$\forall \sigma \in S_n \Rightarrow \exists ! \sigma_1, \dots, \sigma_k \in S_n$: 巡回置換 s.t. $\sigma = \sigma_1 \cdots \sigma_k$ (σ_i, σ_j : 互いに素)
 $\sigma = \sigma_1 \cdots \sigma_k : \sigma$ の標準分解

Exm. 2

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 5 & 3 & 9 & 4 & 7 & 2 & 1 & 8 & 6 \end{pmatrix} = (1 \ 5 \ 7)(2 \ 3 \ 9 \ 6)(4)(8)$$

Def. 9.7

$\sigma \in S_n, \sigma = \sigma_1 \cdots \sigma_k : \sigma$ の標準分解

$r_1, \dots, r_k : \sigma_i$ の長さ, $r_1 \geq \dots \geq r_k, r_1 + \dots + r_k = n$

$\stackrel{\text{def}}{\Leftrightarrow} [r_1, \dots, r_k] : \sigma$ の分解型

Thm. 14

$\sigma, \sigma' \in S_n, [r_1, \dots, r_k] : \sigma$ の分解型, $[r'_1, \dots, r'_k] : \sigma'$ の分解型

$\sigma \sim \sigma' \Leftrightarrow [r_1, \dots, r_k] = [r'_1, \dots, r'_k]$

Def. 9.8

$n \in \mathbb{Z}, n > 0, \exists r_1, \dots, r_k \in \mathbb{Z} \text{ s.t. } r_1 \geq \dots \geq r_k > 0, n = r_1 + \dots + r_k$

$\stackrel{\text{def}}{\Leftrightarrow} [r_1, \dots, r_k] : n$ の分割

$p(n) : n$ の分割の数

Cor. 14.1

S_n の共役類の個数 $= p(n)$

1 第 2 章 群

- §2 群とその例
- §3 部分群と生成系
- §4 剰余類分解
- §5 正規部分群と商群
- §6 準同型写像
- §7 自己同型写像, 共役類
- §8 巡回群
- §9 置換群
- §10 置換表現, 群の集合への作用
- §11 直積
- §12 Sylow の定理

Def. 10.1

$a \in G, T_a: G \rightarrow G, T_a(x) = ax \stackrel{\text{def}}{\Leftrightarrow} T_a: a \text{ による } G \text{ の左移動}$

Thm. 10.1

$T_a \in S(G)$

Thm. 15 (Cayley)

$X: \text{集合}, \forall G: \text{群} \Rightarrow \exists S' \leq S(X) \text{ s.t. } G \cong S'$

Def. 10.2

$X: \text{集合}, \rho: G \rightarrow S(X): \text{hom.} \stackrel{\text{def}}{\Leftrightarrow} \rho: G \text{ の } X \text{ における置換表現}$

$\rho: \text{injective hom.} \stackrel{\text{def}}{\Leftrightarrow} \rho: \text{忠実な置換表現}$

Thm. 10.2

$a \in G, x \in X, \rho : G$ の X における置換表現, $a \cdot x := (\rho(a))(x) \Rightarrow$

1 $e \in G, \forall x \in X \Rightarrow e \cdot x = x$

2 $\forall a, b \in G, \forall x \in X \Rightarrow ab \cdot x = a \cdot (b \cdot x)$

Thm. 10.3

写像 $G \times X \rightarrow X, (a, x) \mapsto a \cdot x$ は Thm. 10.2 (1)(2) を満たす. \Rightarrow

$\forall a \in G, \rho(a) : X \rightarrow X, \rho(a) \in S(X), \rho : G \rightarrow S(X) : \text{hom.}$

Def. 10.3

Thm. 10.2 (1)(2) を満足する写像 $G \times X \rightarrow X, (a, x) \mapsto a \cdot x : G$ の X への作用
 G の 1 つの作用が与えられた $X : G$ -集合

Exm. 1

$T: G \rightarrow S(G)$: 群 G の集合 G における忠実な置換表現
作用の意味の $a \cdot x$ は G における積としての ax

Rem. $T: G$ の左正則表現

Exm. 2

$\sigma_a: G$ の内部自己同型, $\sigma: G \rightarrow S(G), a \mapsto \sigma_a: G$ の G における置換表現
作用の意味の $a \cdot x$ は G における積としての axa^{-1}

Exm. 3

$\forall H \leq G, G/H := \{aH \mid a \in G\}$ ($H \ntriangleleft G$ のときこれは群ではない)
 $a \in G, xH \in G/H, a \cdot xH = axH: G$ の G/H への作用
この作用により, G の G/H における 1 つの置換表現, G/H に G -集合としての 1 つの構造が与えられる.

Rem. $H = \{e\}$ のとき, G の G/H における置換表現は G の左正則表現.

Rem. 今後, 混乱する恐れがなければ, $ax := a \cdot x$

Thm. 10.4

$X : G$ -集合, $x, y \in X, \exists a \in G$ s.t. $ax = y \stackrel{\text{def}}{\Leftrightarrow} x \sim y \Rightarrow \sim : X$ における同値関係

Def. 10.4

$C_x := \{y \in X \mid x \sim y\} : G$ -集合 X の**推移類**または**軌道** (orbit)

Thm. 10.5

$Gx := \{ax \mid a \in G\} \Rightarrow C_x = Gx$

Def. 10.5

$\forall x, y \in X, \exists a \in G$ s.t. $ax = y : G$ の X への作用 (とそれに対応する G の置換表現) は**推移的** (transitive)
上記を満たす $X : \text{推移的 } G\text{-集合 または 等質 } G\text{-集合}$

Exm. 4

Exm. 2 の意味で群 G を G -集合と考えるとき, その推移類は G の共役類

Exm. 5

Exm. 3 で述べた G の G/H への作用は推移的

$$\because \forall xH, yH \in G/H, yx^{-1} \cdot xH = yH$$

Def. 10.6

$X, X' : G$ -集合, $\rho, \rho' : X, X'$ の置換表現

- 1 $\varphi : X \rightarrow X' : \text{bij.}, \forall a \in G, \forall x \in X \Rightarrow \varphi(ax) = a\varphi(x) \stackrel{\text{def}}{\Leftrightarrow} \varphi : G\text{-同型写像}$
- 2 $\varphi : G\text{-同型写像のとき}, \rho, \rho' \text{ は同値}$

$$\begin{array}{ccc}
 X \ni x & \xrightarrow{\rho(a)} & ax \in X \\
 \varphi \downarrow & & \downarrow \varphi \\
 X' \ni \varphi(x) & \xrightarrow{\rho'(a)} & a\varphi(x) = \varphi(ax) \in X'
 \end{array}$$

Thm. 16

X : 推移的な G -集合, $x_0 \in X, H = \{a \in G \mid ax_0 = x_0\}$

- 1 $H \leq G: x_0$ の安定部分群 (stabilizer) または固定群
- 2 G の X における表現は G の G/H における表現と同値

Cor. 16.1

X : 推移的な G -集合, $|X| < \infty, H \leq G: x_0 \in X$ の安定部分群
 $(G:H) = |X|$

Rem. $X: G$ -集合 $\Rightarrow \forall C_x: \text{推移的な } G\text{-集合}$

Thm. 10.6

$X: G$ -集合, $|X| = n, X_1, \dots, X_k: X$ の推移類,
 $x_i \in X_i (1 \leq i \leq k): X_i$ の代表元, $H_i: x_i$ の安定部分群
 $\Rightarrow n = \sum_{i=1}^k (G:H_i): X$ の推移類分解等式または軌跡分解等式

Rem. Exm. 2 の軌跡分解等式は有限群の類等式 (§7 Thm. 9)

Thm. 17

 $H \leq G, \rho: G \rightarrow S(G/H) : \text{置換表現}, N = \text{Ker } \rho$

$$1 \quad N \subset H$$

$$2 \quad \forall N_1 \triangleleft G, N_1 \subset H \Rightarrow N_1 \subset N$$

Cor. 17.1

 $\rho: G \rightarrow S(G/H) : \text{忠実} \Leftrightarrow \forall N \triangleleft G, N \subset H \Rightarrow N = \{e\}$

Lem. N

 $H \leq G, o(G) = n, (G : H) = i$ $n \nmid i! \Rightarrow \exists N \triangleleft G \text{ s.t. } N \neq \{e\}, N \subset H$

1 第 2 章 群

- §2 群とその例
- §3 部分群と生成系
- §4 剰余類分解
- §5 正規部分群と商群
- §6 準同型写像
- §7 自己同型写像, 共役類
- §8 巡回群
- §9 置換群
- §10 置換表現, 群の集合への作用
- §11 直積
- §12 Sylow の定理

Thm. 11.1

G_1, G_2 : 群, $a_1, b_1 \in G_1, a_2, b_2 \in G_2, G' := G_1 \times G_2$
 $(a_1, a_2), (b_1, b_2) \in G', (a_1, a_2)(b_1, b_2) = (a_1b_1, a_2b_2) \Rightarrow G' : \text{群}$

Def. 11.1

$G_1 \times G_2 : G_1, G_2$ の直積

Rem. $G' : \text{可換群} \Leftrightarrow G_1, G_2 : \text{可換群}$

Thm. 11.2

G_1, G_2 : 群, $G' = G_1 \times G_2$

- 1 $f_1 : G_1 \rightarrow G', a_1 \mapsto a'_1 = (a_1, e_2) \Rightarrow G_1 \cong f_1(G_1), f_1(G_1) \leq G'$
- 2 $f_2 : G_2 \rightarrow G', a_2 \mapsto a'_2 = (e_1, a_2) \Rightarrow G_2 \cong f_2(G_2), f_2(G_2) \leq G'$
- 3 $G'_1 := f_1(G_1), G'_2 := f_2(G_2), \forall a'_1 \in G'_1, \forall a'_2 \in G'_2 \Rightarrow a'_1 a'_2 = a'_2 a'_1$
- 4 $\forall a' \in G' \Rightarrow \exists ! a'_1 \in G'_1, a'_2 \in G'_2 \text{ s.t. } a' = a'_1 a'_2$

Def. 11.2

$$N_1, N_2 \leq G$$

$$\forall x_1 \in N_1, \forall x_2 \in N_2, x_1 x_2 = x_2 x_1, \forall x \in G, \exists! x_1 \in N_1, x_2 \in N_2 \text{ s.t. } x = x_1 x_2$$

$\stackrel{\text{def}}{\Leftrightarrow} G$ は N_1, N_2 の直積に分解される

Thm. 11.3

G が N_1, N_2 の直積に分解される $\Rightarrow G \cong N_1 \times N_2$

Rem. G が N_1, N_2 の直積に分解されるとき, $G = N_1 \times N_2$ とかく

Lem. O

$$N_1, N_2 \leq G$$

G が N_1, N_2 の直積に分解される \Leftrightarrow

- 1 $N_1, N_2 \triangleleft G$
- 2 $G = N_1 N_2$
- 3 $N_1 \cap N_2 = \{e\}$

Exm. 1

$$\mathbb{C} \cong \mathbb{R} \times \mathbb{R}$$

§8 Exc. 5

$$a, b \in G, ab = ba, o(a) = m, o(b) = n, (m, n) = 1 \Rightarrow o(ab) = mn$$

Exm. 2

$$G_1, G_2 : \text{巡回群}, o(G_1) = n_1, o(G_2) = n_2$$

$$G_1 \times G_2 : \text{巡回群} \Leftrightarrow (n_1, n_2) = 1$$

Exm. 3

p : 素数, G : 群, $o(G) = p^2 \Rightarrow G$: 可換群 (\because §7 Exm. 3) で次のいずれか

1 G : 巡回群

2 $\exists N_1, N_2$: 巡回群 s.t. $o(N_1) = o(N_2) = p, G = N_1 \times N_2$

Thm. 11.4

G_1, \dots, G_n : 群, $e_i \in G_i$ ($i = 1, \dots, n$)

$$G' := \prod_{i=1}^n G_i = G_1 \times \dots \times G_n = \{(a_1, \dots, a_n) \mid a_i \in G_i \ (i = 1, \dots, n)\}$$

$a', b' \in G', a'b' = (a_1, \dots, a_n)(b_1, \dots, b_n) = (a_1b_1, \dots, a_nb_n) \Rightarrow G' : \text{群}$

Def. 11.3

$\prod_{i=1}^n G_i : G_1, \dots, G_n$ の直積

Thm. 11.5

G_1, \dots, G_n : 群, $G' = G_1 \times \dots \times G_n, 1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq n, i \neq j$

- 1 $f_i: G_i \rightarrow G', a_i \mapsto a'_i = (e_1, \dots, a_i, \dots, e_n) \Rightarrow G_i \cong f_i(G_i), f_i(G_i) \leq G'$
- 2 $G'_i := f_i(G_i), G'_j := f_j(G_j), \forall a'_i \in G'_i, \forall a'_j \in G'_j \Rightarrow a'_i a'_j = a'_j a'_i$
- 3 $\forall a' \in G' \Rightarrow \exists! a'_1 \in G'_1, \dots, a'_n \in G'_n \text{ s.t. } a' = a'_1 \cdots a'_n$

Def. 11.4

$$N_1, \dots, N_n \leq G, 1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq n, i \neq j$$

$$\forall i, j, \forall x_i \in N_i, \forall x_j \in N_j, x_i x_j = x_j x_i, \forall x \in G, \exists! x_1 \in N_1, \dots, x_n \in N_n \text{ s.t. } x = x_1 \cdots x_n$$

$\stackrel{\text{def}}{\Leftrightarrow} G$ は N_1, \dots, N_n の直積に分解される

Thm. 11.6

$$G \text{ が } N_1, \dots, N_n \text{ の直積に分解される} \Rightarrow G \cong \prod_{i=1}^n N_i$$

Lem. O (n)

$$N_1, \dots, N_n \leq G$$

G が N_1, \dots, N_n の直積に分解される \Leftrightarrow

1 $N_1, \dots, N_n \triangleleft G$

2 $G = N_1 \cdots N_n$

3 $(N_1 \cdots N_{i-1} N_{i+1} \cdots N_n) \cap N_i = \{e\} \quad (i = 1, \dots, n)$

1 第 2 章 群

- §2 群とその例
- §3 部分群と生成系
- §4 剰余類分解
- §5 正規部分群と商群
- §6 準同型写像
- §7 自己同型写像, 共役類
- §8 巡回群
- §9 置換群
- §10 置換表現, 群の集合への作用
- §11 直積
- §12 Sylow の定理

Lem. 12.1

$$p : \text{素数}, \alpha, m \in \mathbb{Z}, (p, m) = 1 \Rightarrow p \nmid \binom{p^\alpha m}{p^\alpha}$$

Thm. 18 (Sylow の第 1 定理)

$$p : \text{素数}, \exists \alpha \in \mathbb{Z} \text{ s.t. } p^\alpha \mid o(G) \Rightarrow \exists H \leq G \text{ s.t. } o(H) = p^\alpha$$

Cor. 18.1

$$p : \text{素数}, p \mid o(G) \Rightarrow \exists x \in G \text{ s.t. } o(x) = p$$

Cor. 18.2

$$p : \text{素数}, p \mid o(G), \exists e, s \in \mathbb{Z} \text{ s.t. } o(G) = p^e s, (p, s) = 1 \Rightarrow \exists H \leq G \text{ s.t. } o(H) = p^e$$

Def. 12.1

Cor. 18.2 を満たす $H \leq G$: G の p Sylow 部分群

Thm. 12.1

$H \leq G, A, B \subset G, \exists x \in H \text{ s.t. } xAx^{-1} = B \stackrel{\text{def}}{\Leftrightarrow} A \sim_H B : A, B \text{ は } H \text{ に関して共役}$
 $\Rightarrow \sim_H : G \text{ の部分集合間同値関係}$

§5 Exc. 12

$S \neq \emptyset, S \subset G, N(S) := \{x \in G \mid xS = Sx\} \Rightarrow N(S) \leq G$
 $N(S) : G \text{ における } S \text{ の正規化群}$

§7 Exc. 6

$S \subset G, (G : N(S)) < \infty \Rightarrow |\{S' \subset G \mid S \sim S'\}| = (G : N(S))$

Lem. P

$o(G) < \infty, H \leq G, A \subset G \Rightarrow |\{A' \subset G \mid A \sim_H A'\}| = (H : H \cap N(A))$

Def. 12.2

$H \leq G, \exists x \in \mathbb{Z} \text{ s.t. } o(H) = p^x \stackrel{\text{def}}{\Leftrightarrow} H : p \text{ 部分群}$

Thm. 19

$o(G) < \infty, p : \text{素数}, o(G) = p^e s, (p, s) = 1$

- a $\forall H \leq G : p \text{ 部分群} \Rightarrow \exists P \leq G : p \text{ Sylow 部分群 s.t. } H \subset P$
- b (Sylow の第 2 定理) $\forall P, P' \leq G : p \text{ Sylow 部分群} \Rightarrow P \sim P'$
- c (Sylow の第 3 定理)
 $s' := |\{P \mid P \leq G : p \text{ Sylow 部分群}\}| \Rightarrow s' = 1 + kp, s' \mid o(G)$

Exm. 1

位数 15 のすべての群を決定せよ.

Exm. 2

位数 10 のすべての群を決定せよ.