

代数系入門
第 3 章 環と多項式

今村勇輝

January 13, 2022

1 第 3 章 環と多項式

■ §1 環とその例

■ §2 整域, 体

■ §3 イデアルと商環

■ §4 \mathbb{Z} の商環

■ §5 準同型写像

■ §6 商の体

■ §7 多項式環

■ §8 体の上の多項式, 単項イデアル整域

■ §9 素元分解とその一意性

■ §10 $\mathbb{Z}[i]$ の素元

■ §11 多項式の根, 代数的閉体

■ §12 \mathbb{Z} または \mathbb{Q} の上の多項式

■ §13 多変数の多項式

Def. 1.1

R : 集合, $R \neq \emptyset$,

$R \times R \rightarrow R, (a, b) \mapsto a + b, (a, b) \mapsto ab$

1 R : 加法について可換群

2 $\forall a, b, c \in R \Rightarrow (ab)c = a(bc)$

3 $\forall a, b, c \in R \Rightarrow a(b + c) = ab + ac, (b + c)a = ba + ca$

4 $\exists e \in R$ s.t. $\forall a \in R, ea = ae = a$

$\stackrel{\text{def}}{\Leftrightarrow} R$: 環 (ring)

Def. 1.2

R : 環

■ $\exists! e_+ \in R$ s.t. $\forall a \in R, e_+ + a = a \stackrel{\text{def}}{\Leftrightarrow} 0 := e_+ : R$ の零元

■ $\forall a \in R, \exists! a' \in R$ s.t. $a + a' = 0 \stackrel{\text{def}}{\Leftrightarrow} -a := a'$

Def. 1.3

R : 環, $\forall a, b \in R \Rightarrow ab = ba \stackrel{\text{def}}{\Leftrightarrow} R$: 可換環

Thm. 1.1

R : 環, $\exists! e \in R$ s.t. $\forall a \in R, ea = ae = e \stackrel{\text{def}}{\Leftrightarrow} 1 := e : R$ の単位元

Exm. 1

\mathbb{Z} : 可換環: 有理整数環

Exm. 2

$\mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$: 可換環

Exm. 3

$[0, 1] \subset \mathbb{R}, R = \{f \mid f: [0, 1] \rightarrow [0, 1]\},$
 $f, g \in R, \forall t \in [0, 1], (f + g)(t) = f(t) + g(t), (fg)(t) = f(t)g(t) \Rightarrow R$: 可換環

Exm. 4

$\forall R : \text{環}, \forall S : \text{集合}, S \neq \emptyset, M(S, R) = \{f \mid f: S \rightarrow R\},$
 $f, g \in M(S, R), \forall x \in S, (f + g)(x) = f(x) + g(x), (fg)(x) = f(x)g(x) \Rightarrow M(S, R) : \text{環}$

Def. 1.4

- $0 \in M(S, R) : S \text{ から } R \text{ の零写像}$
- $-f \in M(S, R), \forall x \in S, (-f)(x) = -f(x)$

Rem. $\forall x \in S, 0(x) = 0_R$

Def. 1.5

$\forall A : \text{加法群}, f: A \rightarrow A : \text{hom.} : \text{自己準同型写像, 自己準同型 (endomorphism)}$
 $\text{End}(A) := \{f \mid f: A \rightarrow A : \text{hom.}\}$

Exm. 5

$\forall A : \text{加法群},$
 $f, g \in \text{End}(A), \forall x \in A, (f + g)(x) = f(x) + g(x), (fg)(x) = f(g(x)) \Rightarrow \text{End}(A) : \text{環}$

Rem. $\text{End}(A) : \text{自己準同型環}$

Thm. 1.2

 R : 環

$$1 \quad 0 \in R, \forall a \in R \Rightarrow a0 = 0a = 0$$

$$2 \quad \forall a, b \in R \Rightarrow a(-b) = (-a)b = -ab$$

$$3 \quad \forall a, b \in R \Rightarrow (-a)(-b) = ab$$

$$4 \quad \forall a, b, c \in R \Rightarrow a(b - c) = ab - ac, (b - c)a = ba - ca$$

$$5 \quad a_1, \dots, a_m, b_1, \dots, b_n \in R \Rightarrow (a_1 + \dots + a_m)(b_1 + \dots + b_n) = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n a_i b_j$$

1 第 3 章 環と多項式

- §1 環とその例
- §2 整域, 体
- §3 イデアルと商環
- §4 \mathbb{Z} の商環
- §5 準同型写像
- §6 商の体
- §7 多項式環
- §8 体の上の多項式, 単項イデアル整域
- §9 素元分解とその一意性
- §10 $\mathbb{Z}[i]$ の素元
- §11 多項式の根, 代数的閉体
- §12 \mathbb{Z} または \mathbb{Q} の上の多項式
- §13 多変数の多項式

Thm. 2.1

 R : 環, $0, 1 \in R$ $1 = 0 \Rightarrow R = \{0\} \quad (\because \forall a \in R, a = 1a = 0a = 0)$

Def. 2.1

 R : 環, $0, 1 \in R, 1 = 0 \stackrel{\text{def}}{\Leftrightarrow} R$: 零環Rem. 今後, R は零環ではないとする.

Def. 2.2

 $\exists a, b \in R$ s.t. $a \neq 0, b \neq 0, ab = 0 \stackrel{\text{def}}{\Leftrightarrow} a, b : R$ の零因子 (a : 左零因子, b : 右零因子)

Def. 2.3

 $\forall a, b \in R, a \neq 0, b \neq 0 \Rightarrow ab \neq 0, R$: 可換 $\stackrel{\text{def}}{\Leftrightarrow} R$: 整域

Exm. 1

 \mathbb{Z} : 整域

Exm. 2

§1 Exm. 3 は整域ではない

Def. 2.4

 $a \in R, \exists b \in R \text{ s.t. } ba = ab = 1 \stackrel{\text{def}}{\Leftrightarrow} a : R \text{ の可逆元または単元, } a^{-1} := b : a \text{ の逆元}$

Thm. 2.2

- $a \in R$: 単元 $\Rightarrow a \neq 0$
- $a \in R$: 単元 $\Rightarrow \exists! a^{-1} \in R \text{ s.t. } a^{-1}a = aa^{-1} = 1$

Lem. A

R : 環, $G = \{a \in R \mid a : R \text{ の単元} \} \Rightarrow G$: 乗法に関して群

Exm. 3

A : 加法群, $A \neq \{0\}$

- $f \in \text{End}(A), f : \text{単元} \Rightarrow f : \text{iso.}$
- $G = \{f \in \text{End}(A) \mid f : \text{単元} \} \Rightarrow G = \text{Aut}(A)$

Def. 2.5

R : 環

- $\forall a \in R, a \neq 0 \Rightarrow a : \text{単元} \stackrel{\text{def}}{\Leftrightarrow} R : \text{斜体}$
- $R : \text{斜体}, \forall a, b \in R, ab = ba \stackrel{\text{def}}{\Leftrightarrow} R : \text{体}$

Thm. 2.3

 R : 環

- R : 斜体 $\Leftrightarrow G = \{a \in R \mid a \neq 0\}$: 乗法に関して群
- R : 体 $\Leftrightarrow G = \{a \in R \mid a \neq 0\}$: 乗法に関して可換群

Exm. 4

- \mathbb{Z} : 環 $\Rightarrow \mathbb{Z}$: 体
- $\mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$: 環 $\Rightarrow \mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$: 体

Rem. \mathbb{Q} : 有理数体, \mathbb{R} : 実数体, \mathbb{C} : 複素数体

Thm. 2.4

 $\forall R : \text{体} \Rightarrow R : \text{整域}$

Lem. B

 $R : \text{整域}, |R| < \infty \Rightarrow R : \text{体}$

Def. 2.6

 $R : \text{環}, R' \subset R, R' \neq \emptyset$ $R' : R$ で定義されている加法, 乗法に関して環, $1_R \in R' \stackrel{\text{def}}{\Leftrightarrow} R' : R$ の **部分環**

Thm. 2.5

 $R : \text{環}, R' \subset R$ $R' : R$ の部分環 $\Leftrightarrow 1_R \in R', \forall a, b \in R' \Rightarrow -a, a+b, ab \in R'$

Def. 2.7

 $R' : R$ の部分環

- $R' : \text{斜体} \stackrel{\text{def}}{\Leftrightarrow} R$ の部分斜体
- $R' : \text{体} \stackrel{\text{def}}{\Leftrightarrow} R$ の部分体

Exm. 5

- 環 \mathbb{Z} : 体 \mathbb{Q} の部分環
- 体 \mathbb{Q} : 体 \mathbb{R} の部分体

Exm. 6

 $R = \{f \mid f: [0, 1] \rightarrow [0, 1]\}$ (§1 Exm. 3 の環)

- $R' = \{f \mid f: [0, 1] \rightarrow [0, 1] : \text{連続関数}\} \Rightarrow R' : R$ の部分環
- $R'' = \{f \mid f: [0, 1] \rightarrow [0, 1] : \text{微分可能関数}\} \Rightarrow R'' : R'$ の部分環

Def. 2.8

R : 斜体, $\forall a, b \in R \Rightarrow ab \neq ba \stackrel{\text{def}}{\Leftrightarrow} R$: 非可換体

Exm. 7

\mathbb{C} : 複素数の加法群, $A = \mathbb{C} \times \mathbb{C}$

1 $\alpha, \beta \in \mathbb{C}, f_{\alpha, \beta}: A \rightarrow A, (x, y) \mapsto (\alpha x - \beta y, \bar{\beta}x + \bar{\alpha}y) \Rightarrow f_{\alpha, \beta} \in \text{End}(A)$

2 $Q = \{f_{\alpha, \beta} \mid \text{上記 } f_{\alpha, \beta}\} \Rightarrow Q: \text{End}(A) \text{ の部分環}$

3 Q : 非可換体

Rem. $Q: \mathbb{R}$ 上の四元数環

Thm. 2.6

R : 整域または斜体 $\Rightarrow \exists 0, 1 \in R \text{ s.t. } 0 \neq 1$

1 第 3 章 環と多項式

- §1 環とその例
- §2 整域, 体
- §3 イデアルと商環
- §4 \mathbb{Z} の商環
- §5 準同型写像
- §6 商の体
- §7 多項式環
- §8 体の上の多項式, 単項イデアル整域
- §9 素元分解とその一意性
- §10 $\mathbb{Z}[i]$ の素元
- §11 多項式の根, 代数的閉体
- §12 \mathbb{Z} または \mathbb{Q} の上の多項式
- §13 多変数の多項式

1 第 3 章 環と多項式

- §1 環とその例
- §2 整域, 体
- §3 イデアルと商環
- §4 \mathbb{Z} の商環
- §5 準同型写像
- §6 商の体
- §7 多項式環
- §8 体の上の多項式, 単項イデアル整域
- §9 素元分解とその一意性
- §10 $\mathbb{Z}[i]$ の素元
- §11 多項式の根, 代数的閉体
- §12 \mathbb{Z} または \mathbb{Q} の上の多項式
- §13 多変数の多項式

1 第 3 章 環と多項式

- §1 環とその例
- §2 整域, 体
- §3 イデアルと商環
- §4 \mathbb{Z} の商環
- §5 準同型写像
- §6 商の体
- §7 多項式環
- §8 体の上の多項式, 単項イデアル整域
- §9 素元分解とその一意性
- §10 $\mathbb{Z}[i]$ の素元
- §11 多項式の根, 代数的閉体
- §12 \mathbb{Z} または \mathbb{Q} の上の多項式
- §13 多変数の多項式

1 第 3 章 環と多項式

- §1 環とその例
- §2 整域, 体
- §3 イデアルと商環
- §4 \mathbb{Z} の商環
- §5 準同型写像
- **§6 商の体**
- §7 多項式環
- §8 体の上の多項式, 単項イデアル整域
- §9 素元分解とその一意性
- §10 $\mathbb{Z}[i]$ の素元
- §11 多項式の根, 代数的閉体
- §12 \mathbb{Z} または \mathbb{Q} の上の多項式
- §13 多変数の多項式

1 第 3 章 環と多項式

- §1 環とその例
- §2 整域, 体
- §3 イデアルと商環
- §4 \mathbb{Z} の商環
- §5 準同型写像
- §6 商の体
- **§7 多項式環**
- §8 体の上の多項式, 単項イデアル整域
- §9 素元分解とその一意性
- §10 $\mathbb{Z}[i]$ の素元
- §11 多項式の根, 代数的閉体
- §12 \mathbb{Z} または \mathbb{Q} の上の多項式
- §13 多変数の多項式

1 第 3 章 環と多項式

- §1 環とその例
- §2 整域, 体
- §3 イデアルと商環
- §4 \mathbb{Z} の商環
- §5 準同型写像
- §6 商の体
- §7 多項式環
- §8 体の上の多項式, 単項イデアル整域
- §9 素元分解とその一意性
- §10 $\mathbb{Z}[i]$ の素元
- §11 多項式の根, 代数的閉体
- §12 \mathbb{Z} または \mathbb{Q} の上の多項式
- §13 多変数の多項式

1 第 3 章 環と多項式

- §1 環とその例
- §2 整域, 体
- §3 イデアルと商環
- §4 \mathbb{Z} の商環
- §5 準同型写像
- §6 商の体
- §7 多項式環
- §8 体の上の多項式, 単項イデアル整域
- §9 素元分解とその一意性
- §10 $\mathbb{Z}[i]$ の素元
- §11 多項式の根, 代数的閉体
- §12 \mathbb{Z} または \mathbb{Q} の上の多項式
- §13 多変数の多項式

1 第 3 章 環と多項式

- §1 環とその例
- §2 整域, 体
- §3 イデアルと商環
- §4 \mathbb{Z} の商環
- §5 準同型写像
- §6 商の体
- §7 多項式環
- §8 体の上の多項式, 単項イデアル整域
- §9 素元分解とその一意性
- §10 $\mathbb{Z}[i]$ の素元
- §11 多項式の根, 代数的閉体
- §12 \mathbb{Z} または \mathbb{Q} の上の多項式
- §13 多変数の多項式

1 第 3 章 環と多項式

- §1 環とその例
- §2 整域, 体
- §3 イデアルと商環
- §4 \mathbb{Z} の商環
- §5 準同型写像
- §6 商の体
- §7 多項式環
- §8 体の上の多項式, 単項イデアル整域
- §9 素元分解とその一意性
- §10 $\mathbb{Z}[i]$ の素元
- §11 多項式の根, 代数的閉体
- §12 \mathbb{Z} または \mathbb{Q} の上の多項式
- §13 多変数の多項式

1 第 3 章 環と多項式

- §1 環とその例
- §2 整域, 体
- §3 イデアルと商環
- §4 \mathbb{Z} の商環
- §5 準同型写像
- §6 商の体
- §7 多項式環
- §8 体の上の多項式, 単項イデアル整域
- §9 素元分解とその一意性
- §10 $\mathbb{Z}[i]$ の素元
- §11 多項式の根, 代数的閉体
- §12 \mathbb{Z} または \mathbb{Q} の上の多項式
- §13 多変数の多項式

1 第 3 章 環と多項式

- §1 環とその例
- §2 整域, 体
- §3 イデアルと商環
- §4 \mathbb{Z} の商環
- §5 準同型写像
- §6 商の体
- §7 多項式環
- §8 体の上の多項式, 単項イデアル整域
- §9 素元分解とその一意性
- §10 $\mathbb{Z}[i]$ の素元
- §11 多項式の根, 代数的閉体
- §12 \mathbb{Z} または \mathbb{Q} の上の多項式
- §13 多変数の多項式