اختلاف قوت و قضایای کیسی

ایمان قادر و مهران طلایی

۱۲ شهریور ۱۴۰۲

چکیده

قضیه کیسی از قضایای کلاسیک و پر استفاده در هندسه است که با توجه به کمبود متریال آموزشی در حیطه این مبحث ولی کاربرد زیاد آن، به گرد آوری این مقاله روی آوردیم که شامل تعاریف و قضایای مورد نیاز و همینطوری از هر بخش مثال هایی مطرح شده اند که به یادگیری هرچه بیشتر کمک میکنند. و در انتها تمرین هایی برای دست ورزی و خودآزمایی قرار داده شده است.

ابتدا با یک تعریف شروع میکنیم:

تعریف ۰.۱.
تابع اختلاف قوت نقطه P نسبت به دو دایره ω_1 و ω_2 را به شکل زیر تعریف میکنیم:

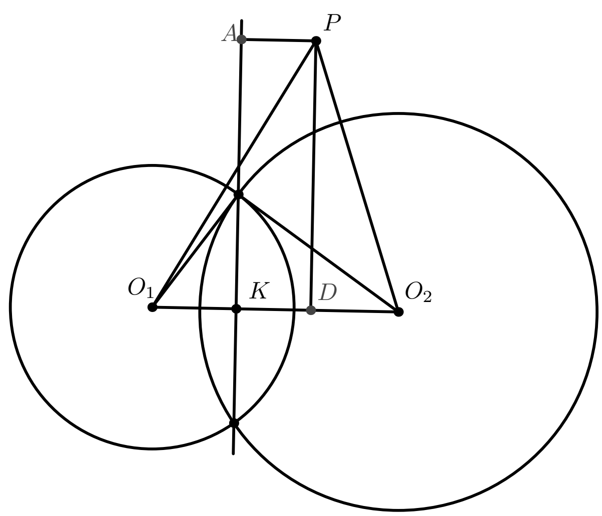
$$\mathbf{P}(P,\omega_1,\omega_2) = Pow^P_{\omega_1} - Pow^P_{\omega_2}$$

۱ صورت قضیه کیسی (اختلاف قوت)

قضیه ۱.۱.
فرض کنید که دوایر ω_1 و ω_2 به مراکز O_1 و O_2 در صفحه هستند و خط l محور اصلی این دو دایره است و نقطه P نقطه ای در صفحه ω_1 و ω_2 است. آنوقت رابطه زیر برقرار است:

$$\mathbf{P}(P,\omega_1,\omega_2) = 2dist(P,l)\overline{O_1O_2}$$

اثبات. دوایر $\omega_1(O_1,r_1)$ و $\omega_2(O_2,r_2)$ را در نظر بگیرید. و A و D به ترتیب پاهای عمود از P بر محور اصلی و خط المرکزین این دو دایره هستند.



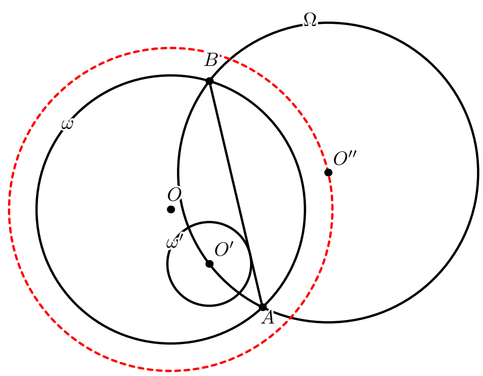
حال داریم:

$$\begin{aligned} Pow_{\omega_1}^{P} - Pow_{\omega_2}^{P} &= PO_1^2 - r_1^2 - PO_2^2 + r_2^2 \\ &= DO_1^2 - DO_2^2 + r_2^2 - r_1^2 \\ &= (DO_1 - DO_2)\overline{O_1O_2} + KO_1^2 - KO_2^2 \\ &= (DO_1 - DO_2)\overline{O_1O_2} + (KO_1 - KO_2)\overline{O_1O_2} \\ &= (DO_1 - DO_2 + KO_1 - KO_2)\overline{O_1O_2} \\ &= 2\overline{PA}\,\overline{O_1O_2} \end{aligned}$$

□

مثال ۱.۲.
دایره ω' دایره ای به مرکز O' به طور کامل درون دایره ω و مرکز O قرار دارد. نقاط A و B به گونه ای بر روی دایره ω قرار دارند که $\overline{AB}$ بر ω' مماس است. دایره Ω را دایره محیطی $\triangle O'AB$ در نظر بگیرید. خط $\overline{AB}$ را با حفظ جهت حرکت میدهیم مکان هندسی مرکز Ω را بیابید.

اثبات. مرکز Ω را O'' میناميم.



حال $\mathbf{P}(O',\omega,\Omega)$ را محاسبه میکنیم:

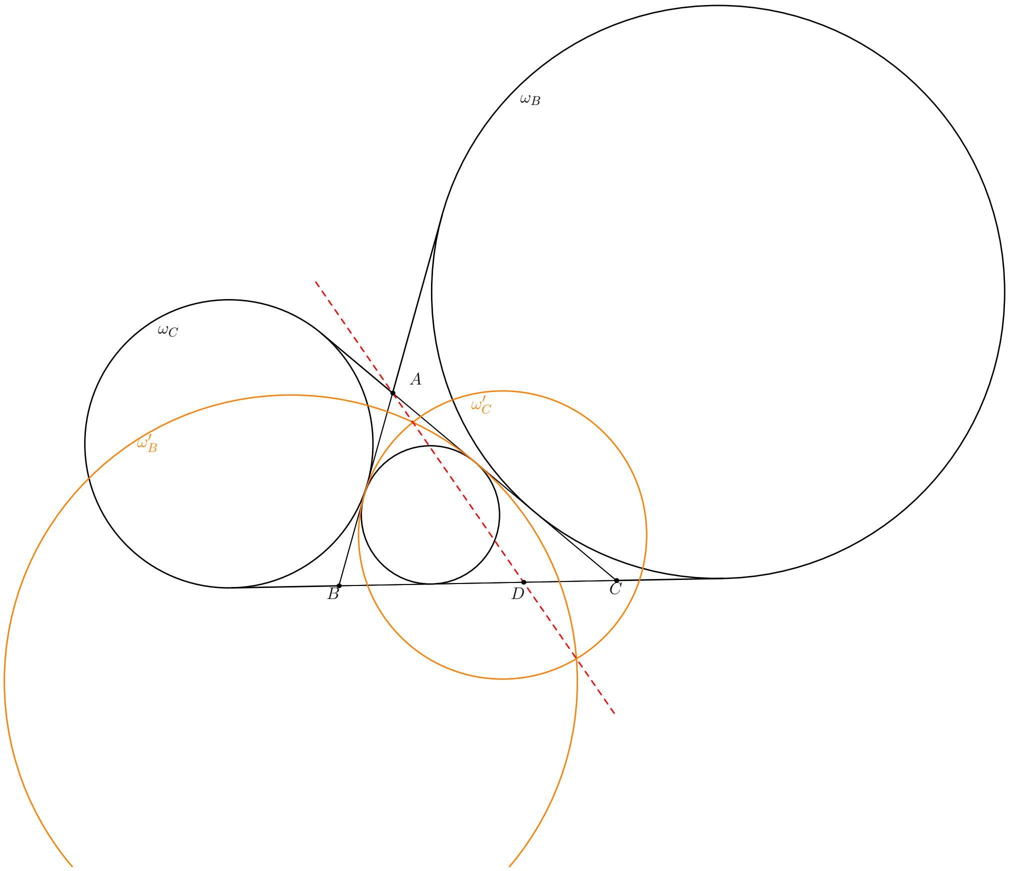
$$\begin{aligned} \mathbf{P}(O',\omega,\Omega) = Pow_{\omega}^{O'} - Pow_{\Omega}^{O'} &= 2R_{\omega'}\overline{OO''} \\ \leftrightarrow \frac{Pow_{\omega}^{O'} - 0}{2R_{\omega'}} &= \overline{OO''} \end{aligned}$$

بنابر این طول OO'' ثابت است و این نتیجه میدهد که مکان هندسی O'' دایره ای است به مرکز O و شعاع $\frac{Pow_{\omega}^{O'}}{2R_{\omega'}}$.

□

مثال ۳.۱. ω_B و ω_C دوایر محاطی خارجی مثلث $\triangle ABC$ هستند. دایره ω'_B با دایره ω_B نسبت به وسط AC متقارن هستند و دایره ω'_C با دایره ω_C نسبت به وسط AB متقارن هستند. اثبات کنید که محور اصلی ω'_B و ω'_C محیط مثلث را نصف میکن. (روسیه ۲۰۰۵)

اثبات. دایره محاطی مثلث را ω بنامید و محل تماس ω_A با خط BC را D در نظر میگیریم حال اثبات میکنیم که خط AD محور اصلی دو دایره ω'_B و ω'_C است.



کافی است بگوییم که:

$$Pow^D_\omega - Pow^D_{\omega_B} = Pow^D_\omega - Pow^D_{\omega_C}$$

داریم:

$$\begin{aligned} Pow^D_\omega - Pow^D_{\omega_B} &= 2dist(D, \overline{AC})(r_B - r) \\ &= 2(p-b)Sin(\angle ACB)(r_B - r) \end{aligned}$$

به نحو مشابه داریم:

$$Pow^D_\omega - Pow^D_{\omega_C} = 2(p-c)Sin(\angle ABC)(r_C - r)$$

و در نهایت

$$\begin{aligned} 2(p-c)Sin(\angle ABC)(r_C - r) &= 2(p-b)Sin(\angle ACB)(r_B - r) \\ \iff \frac{b}{c} &= \frac{(p-b)(r_B - r)}{(p-c)(r_C - r)} \ (*) \end{aligned}$$

از طرفی داریم:

$$\frac{r_B - r}{r} = \frac{c}{p-c} \quad \frac{r_c - r}{r} = \frac{b}{p-c}$$

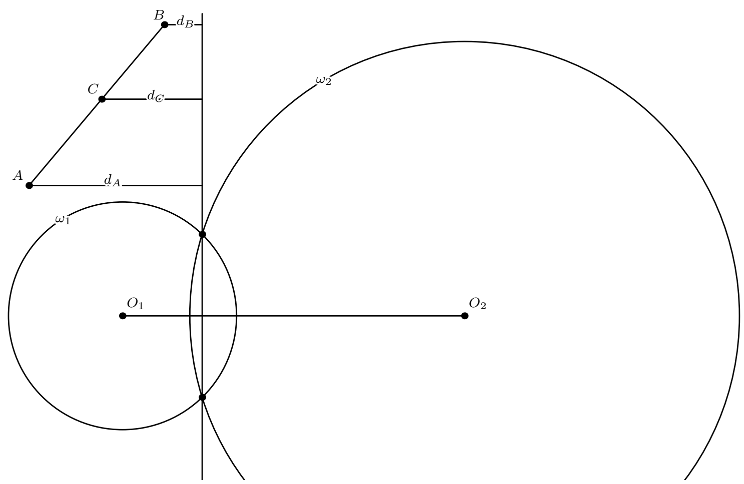
حالا با تقسیم این دو عبارت بر هم درستی $(*)$ را نتیجه میگیریم. $\square$

۲ اختلاف قوت

قضیه ۱.۲. فرض کنید که دوایر ω_1 ω_2 و نقاط همخط A، B و C در یک صفحه هستند. و $C = \alpha A + (1-\alpha)B$ آنوقت داریم:

$$\mathbf{P}(C, \omega_1, \omega_2) = \alpha \mathbf{P}(A, \omega_1, \omega_2) + (1-\alpha)\mathbf{P}(B, \omega_1, \omega_2)$$

اثبات. فرض کنید که d_P فاصله نقطه P تا محور اصلی ω_1 و ω_2 باشد.



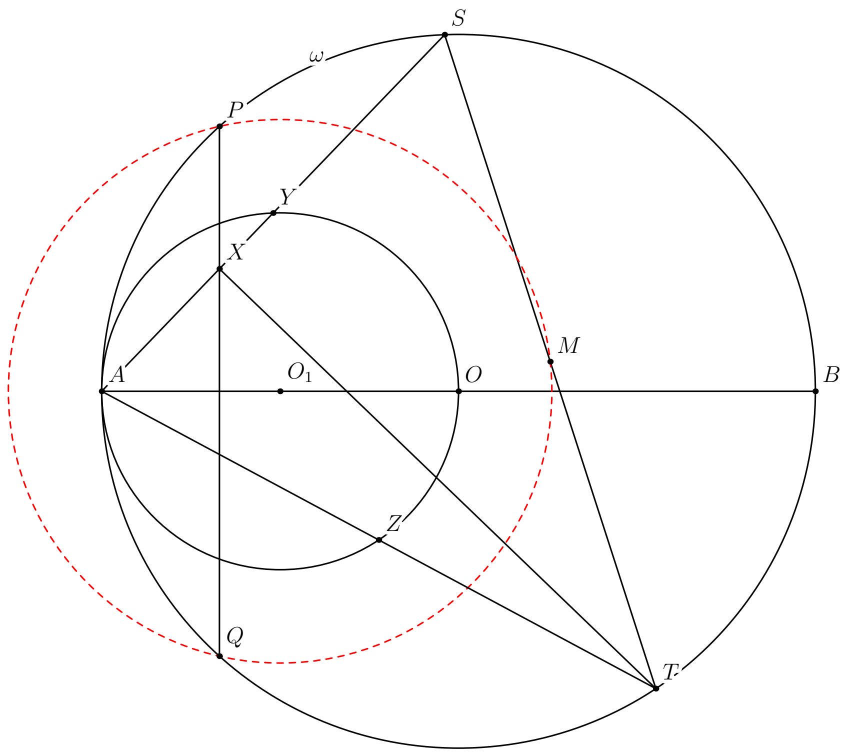
حالا از قضیه **کیسی** داریم:

$$\begin{aligned}\mathbf{P}(C, \omega_1, \omega_2) = 2d_c O_1 O_2 &= \frac{BC}{AB} \times \overbrace{2d_A O_1 O_2}^{\mathbf{P}(A,\omega_1,\omega_2)} + \frac{AC}{AB} \times \overbrace{2d_B O_1 O_2}^{\mathbf{P}(B,\omega_1,\omega_2)} \\ &= \alpha \mathbf{P}(A, \omega_1, \omega_2) + (1-\alpha)\mathbf{P}(B, \omega_1, \omega_2)\end{aligned}$$

که به این ترتیب حکم اثبات میشود. $\square$

مثال ۲.۲. چهاضلعی $APBQ$ در دایره ω محاط شده است به طوری که $\angle P = \angle Q = 90^\circ$ و $AP = AQ < BP$. فرض کنید که X نقطه ای متغیر بر روی پاره خط $\overline{PQ}$ باشد. خط AX، دایره ω را برای بار دیگر در نقطه S قطع میکند. نقطه T به روی کمان AQB از ω قرار دارد به طوری که $\overline{XT}$ بر $\overline{AX}$ عمود است. اثبات کنید که اگر M را وسط $\overline{ST}$ بنامیم، با حرکت X روی پاره خط $\overline{PQ}$ مکان هندسی M یک دایره است.

اثبات. دایره به قطر AO را ω' در نظر بگیرید. اثبات میکنیم که M به روی دایره ای هم مرکز با ω' قرار دارد. برای این منظور کافی است اثبات کنیم قوت M نسبت به ω' مستقل از X است. بر اساس خطی بودن قوت نقطه میتوانیم بنویسیم:



$$\begin{aligned}
&\mathbf{P}(M,\omega',\omega) = (\frac{1}{2})\mathbf{P}(S,\omega',\omega) + (\frac{1}{2})\mathbf{P}(T,\omega',\omega) \\
\implies\ & Pow_M^{\omega'} = \frac{AS^2 + AT^2 - ST^2}{4} \\
&= \frac{2AS \cdot AT \cos(\angle A)}{4} \\
&= \frac{AP^2}{2}
\end{aligned}$$

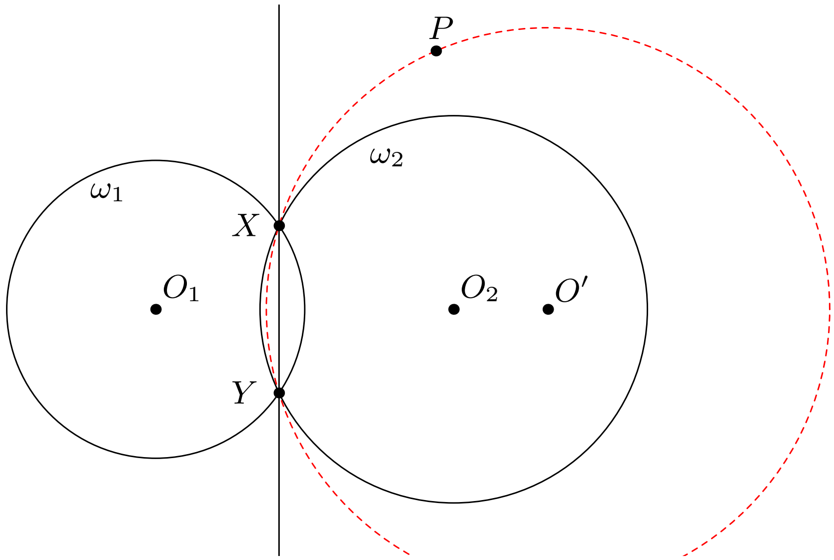
پس قوت M نسبت به ω' برابر با ثابت $\frac{AP^2}{2}$ که نتیجه میدهد M بر روی دایره ای به مرکز وسط AO حرکت میکند.

□

لم ۱.۲ (نسبت قوت).

فرض کنید که دوایر ω_1 و ω_2 در صفحه موجود اند و برای نقطه P مقدار $\frac{Pow_{\omega_1}^P}{Pow_{\omega_2}^P}$ ثابت است. آنوقت مکان هندسی نقاط P با این خاصیت دایره ای است هم محور با ω_1 و ω_2.

اثبات. فرض میکنیم که X و Y محل برخورد دو دایره ω_1 و ω_2 باشند. و O'،O_1 و O_2 به ترتیب مرکز دوایر (PXY)، ω_1 و ω_2 هستند. l را هم محور اصلی ω_1 و ω_2 معرفی میکنیم. ادعا میکنیم که O' ساکن است، چون اگر چنین باشد P نیز بر روی دایره ای ثابت حرکت میکند.



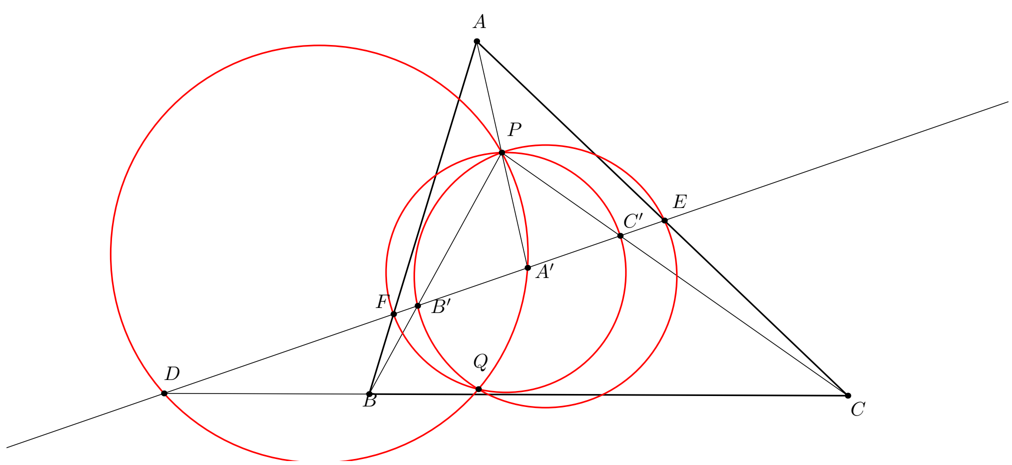
حال با دو بار استفاده از قضیه کیسی داریم:

$$\left.\begin{array}{ll}\mathbf{P}(P,(PXY),\omega_1)=2dist(P,l)O'O_1 & =Pow^P_{\omega_1}\\ \mathbf{P}(P,(PXY),\omega_2)=2dist(P,l)O'O_2 & =Pow^P_{\omega_2}\end{array}\right\}\implies \frac{Pow^P_{\omega_1}}{Pow^P_{\omega_2}}=\frac{O_1O'}{O_2O'}$$

بنا بر این نسبت $\frac{O_1O'}{O_2O'}$ ثابت است که با توجه به جهت P فقط میتوان یک نقطه برای O' در نظر گرفت. □

مثال ۳.۲. فرض کنید نقطه P نقطه ای در صفحه مثلث $\triangle ABC$ است. و خط l خطوط BC، AC و AB به ترتیب در نقاط D، E و F قطع میکند. A' را محل برخورد خط AP با l و نقاط B' و C' را به همین ترتیب تعریف میکنیم. اثبات کنید که دوایر (PDA') ، (PEB') و (PFC') در نقطه ی دیگری به غیر از P برخورد دارند.

اثبات. دایره $(PA'D)$ را ω_A مینامیم و ω_B و ω_C را به نحو مشابه تعریف میکنیم.



دایره $(PA'D)$ را ω_A مینامیم و ω_B و ω_C را به نحو مشابه تعریف میکنیم. حالا کافی است اثبات کنیم که $\frac{Pow_{\omega_B}^{A'}}{Pow_{\omega_C}^{A'}} = \frac{Pow_{\omega_B}^{D}}{Pow_{\omega_C}^{D}}$ زیرا برا اساس لم نسبت قوت میتوانیم نتیجه بگیریم که D و A' برو روی دایره ای قرار دارند که از قضا با دوایر ω_B و ω_C هم محور است و ما را به نتیجه مطلوب میرساند. بنا بر این داریم:

$$\frac{Pow_{\omega_B}^{D}}{Pow_{\omega_C}^{D}} = \frac{Pow_{\omega_B}^{A'}}{Pow_{\omega_C}^{A'}}$$
$$\iff \frac{DB'.DE}{DF.DC'} = \frac{A'B'.A'E}{A'C'.A'F}$$
$$\iff \frac{\frac{DB'}{DC'}}{\frac{A'B'}{A'C'}} = \frac{\frac{DE}{DF}}{\frac{A'E}{A'F}} \ (*)$$

حال با استفاده از ناهمساز ادامه میدهیم:

$$LHS = (DA', B'C') \overset{P}{=} (D\overline{AP}\cap\overline{BC}, BC) \overset{A}{=} (DA', FE) = RHS$$

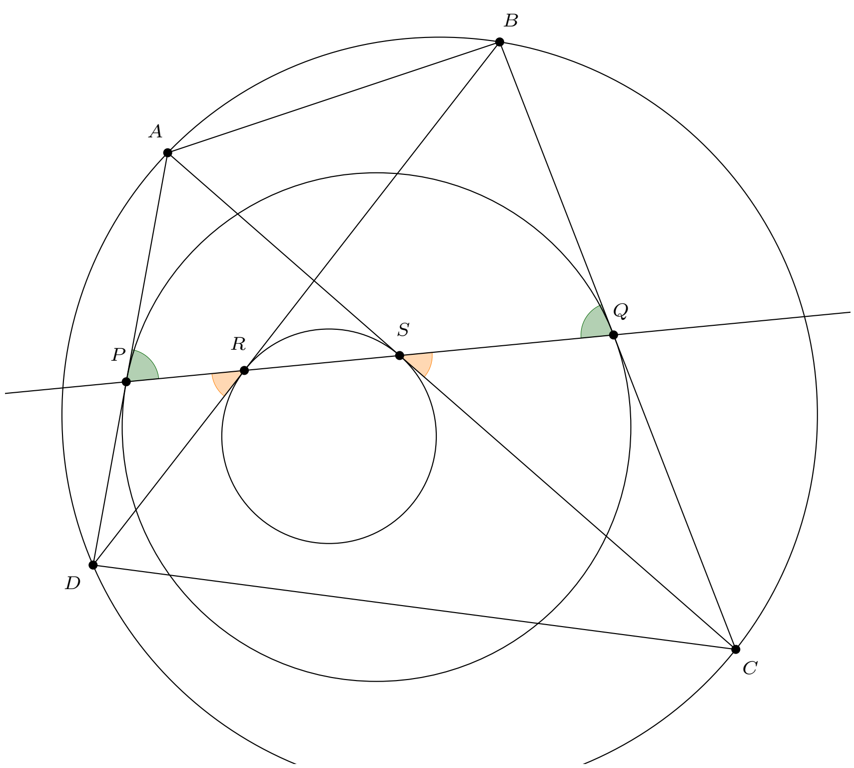
□

لم ۲.۲ (لم هم محوری).

اگر $ABCD$ چهارضلعی محاطی باشد و خط l خطوط AD و BC را در P و Q قطع کنند و داشته باشیم $\angle BQP = \angle APQ$ و اگر خطوط AC و BD را در S و R قطع کند. آنوقت دایره ای که از P و S میگذرد و بر اقطار چهارضلعی مماس است ، دایره ای که از P و Q میگذرد و بر اضلاع چهارضلعی مماس است و دایره محیطی $(ABCD)$ هم محور اند.

اثبات. اولا واضح است که دایره ای وجود دارد که در R و S بر قطر ها مماس باشد چون داریم:

$$\angle CSQ = 180^\circ - \angle SQC - \angle BCA = 180^\circ - \angle ADB - \angle DPR = \angle DRP$$



حالا توجه کنید که $\triangle APS \sim \triangle BQR$ و $\triangle PRD \sim \triangle QSC$ پس داریم:

$$\frac{AP}{AS}=\frac{BQ}{BR}=\frac{\sin(\angle BRQ)}{\sin(\angle BQR)}=\frac{\sin(\angle CSQ)}{\sin(\angle CQS)}=\frac{CQ}{CS}=\frac{DP}{DR}$$

پس در نتیجه نسبت قوت نقاط A، B، C و D نسبت به دو دایره کوچکتر ثابت است بنابراین روی دایره ای هم محور با دو دایره کوچکتر قرار دارن. که این حکم را نتیجه میدهد.

□

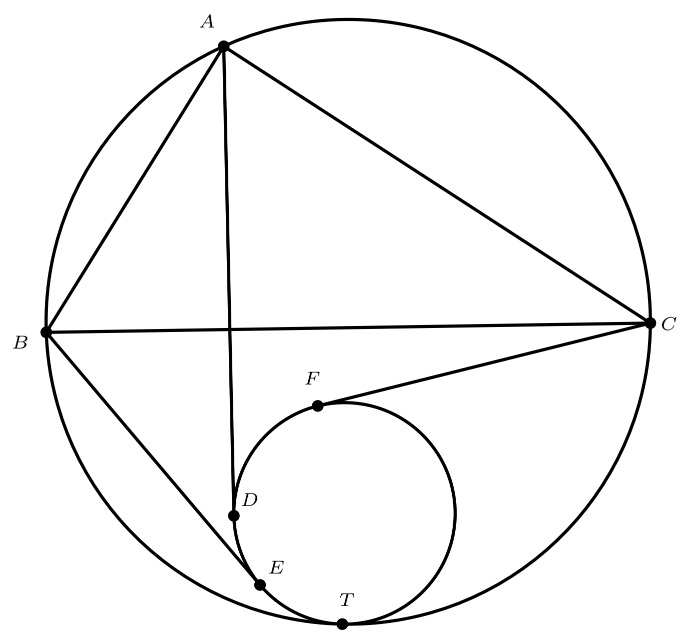
۳ قضیه کیسی (برای دوایر)

قضیه ۱.۳ (قضیه کیسی). مثلث $\triangle ABC$ مفروض است. و دایره ی ω در صفحه مفروض است. AD، BE و CF مماس های وارد بر دایره ی ω هستند. رابطه ی:

$$AD\cdot BC \pm BE\cdot AC \pm CF\cdot AB = 0$$

برقرار است اگر و تنها اگر (ABC) و ω بر هم مماس باشند.

اثبات. ابتدا طرف اگر را اثبات میکنم. فرض کنید که دو دایره (ABC) و ω در نقطه T مماس باشند.



میتوانیم T را نقطه ای هم محور با دو دایره دیگر در نظر بگیریم بنابر این طبق لم نسبت قوت، ثابت $c \neq 0$ وجود دارد که:

$$\frac{AD}{AT}=\frac{BE}{BT}=\frac{CF}{CT}=c$$

پس طبق فرض داریم:

$$AD\cdot BC \pm BE\cdot AC \pm CF\cdot AB = c(AT\cdot BC \pm BT\cdot AC \pm CT\cdot AB)=0$$

که چون $ABTC$ محاطی است طبق قضیه بطلمیوس این رابطه برقرار است. حالا برعکس قضیه را اثبات میکنیم. فرض کنید که دو دایره مماس نیستند و این رابطه برقرار است. T را نقطه ای در نظر بگیرید که با دو دایره (ABC) و ω هم محور باشد. دوباره طبق لم نسبت قوت، ثابت $c \neq 0$ وجود دارد که:

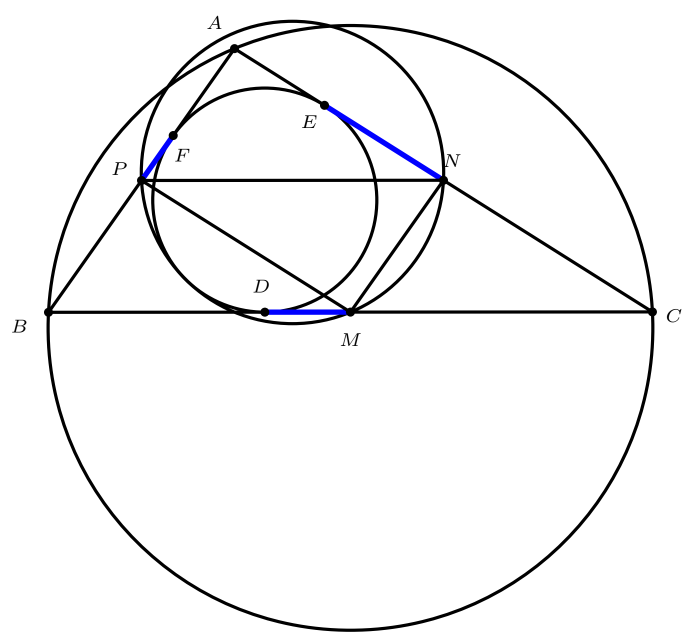
$$AD \cdot BC \pm BE \cdot AC \pm CF \cdot AB = c(AT \cdot BC \pm BT \cdot AC \pm CT \cdot AB) = 0$$

اما اگر $AT \cdot BC \pm BT \cdot AC \pm CT \cdot AB = 0$ طبق قضیه بطلمیوس T باید روی دایره ی (ABC) باشد که این نتیجه میدهد که دو دایره ی (ABC) و ω بر هم مماس اند.

□

مثال ۲.۳.
ثابت کنید که در هر مثلثی دایره ی نه نقطه بر دایره محاطی آن مثلث مماس است.

اثبات. با استفاده از قضیه کیسی بر مثلث $\triangle MNP$ حکم را اثبات میکنیم:



$$\begin{aligned} MD \cdot NP \pm NE \cdot MP \pm PF \cdot MN &= \frac{b-c}{2} \cdot \frac{a}{2} - \frac{a-c}{2} \cdot \frac{b}{2} + \frac{a-b}{2} \cdot \frac{c}{2} \\ &= \frac{ba - ca - ab + bc + ac - bc}{4} \\ &= 0 \end{aligned}$$

بنابر این طبق قضیه کیسی دایره ی محاطی و دایره نه نقطه بر هم مماس اند.

□

۴ سوالات پایان فصل

مسئله ۱. **(KöMaL A. 733)** دایره ω درون دایره Ω قرار دارد و نقطه X روی Ω حرکت می‌کند. خطوط مماس از X به ω برخورده دوم با دایره Ω را در نقاط $A \neq X$ و $B \neq X$ قرار می‌دهند. ثابت کنید خطوط AB یا همگی به یک دایره ثابت مماس هستند یا همگی از یک نقطه عبور می‌کنند.

مسئله ۲. **(RMM 2017)** چهارضلعی محدب $ABCD$ و نقاط دلخواه P و Q در داخل آن را در نظر بگیرید بطوری که $\angle APB = \angle CPD = \angle AQB = \angle CQD$ باشد. ثابت کنید که خط های PQ بدست آمده از این روش، همگی از یک نقطه ثابت می گذرند یا همگی موازی اند.

مسئله ۳. **(USAMO 2013)** در مثلث ABC نقاط P ، Q و R به ترتیب روی اضلاع BC ، CA و AB قرار دارند. ω_A وω_B ،ω_C به ترتیب دایره های محیطی مثلث های AQR ، BRP و CPQ هستند. با این فرض که پاره خط AP ، ω_A وω_B و ω_C، را دوباره به ترتیب در X ، Y و Z قطع کند، ثابت کنید $YX/XZ = BP/PC$.

مسئله ٤. در مثلث ABC نقطه ی D روی ضلع BC انتخاب شده است.دایره محیطی مثلث های ABD و ACD اضلاع AC و AB را به ترتیب در نقاط E و F قطع میکند.ثابت کنید با تغییر D روی ضلع BC، دایره محیطی AEF از نقطه ثابتی میگذرد.و این نقطه روی میانه ی گذرنده از A می‌باشد.

مسئله ۵. دایره های (O_1) و (O_2) به ترتیب در نقاط M و N از داخل به دایره ی مفروض (O) مماس هستند. مماس های داخلی مشترک این دو دایره، دایره ی (O) را در ۴ نقطه قطع می کنند، نقاط B و C را دو نقطه از این نقاط در نظر بگیرید بطوری که B و C هر دو در یک سمت خط O_1O_2 باشند. ثابت کنید که BC با یک مماس خارجی مشترک (O_1) و (O_2) موازی است.

مسئله ٦. فرض کنید Ω دایره محیطی ABC و نقطه ی D نقطه ی اشتراک BC با دایره محاطی مثلث ABC باشد.فرض کنید ω دایره ای درون Ω مماس باشد که و در نقطه ی D بر BC باشد.ثابت کنید $\angle ATI = 90$

مسئله ٧. دوایر ω_A،ω_B و ω_C با مراکز همخط A، B و C موجودند.g خطی است که از این سه نقطه میگذرد. X محل برخورد محور اصلی $_B$ و ω_C با gواست. به همین ترتیب Y محل برخورد محور اصلی ω_A و ω_C با خط g و Z محل برخورد محور اصلی ω_A و ω_B با g است. رابطه ی زیر را اثبات کنید:

$$\overline{YZ} = \frac{1}{2}\left(\frac{x^2}{\overline{AB}\cdot\overline{AC}} + \frac{y^2}{\overline{BC}\cdot\overline{BA}} + \frac{z^2}{\overline{CA}\cdot\overline{CB}}\right)\cdot\overline{BC}$$

مسئله ٨. دایره ی ω و نقطه ی T خارج آن مفروض اند. A و B برخورد مماس های وارده از T بر ω اند. نقطه ی P بر روی کمان کوچکتر AB قرار دارد. از طرفی داریم $E = AP \cap RB$ و $F = AT \cap BP$. Q نقطه ی دوم برخورد دو دایره ی (AFP) و (PBE) است.ثابت کنید:

$$\angle POT = |\angle TAP - \angle TBP|$$

مسئله ٩. **(USA TSTST 2016)** فرض کنید $\triangle ABC$ یک مثلث با مرکز دایره محاطی I باشد و دایره محاطی آن به ترتیب بر $\overline{BC}$، $\overline{CA}$، $\overline{AB}$ در D، E و F مماس باش. فرض کنید K پای ارتفاع از D بر $\overline{EF}$ باشد. فرض کنید که دایره $\triangle AIB$ با دایره محاطی در دو نقطه مجزا C_1 و C_2 ملاقات کند، در حالی که دایره $\triangle AIC$ با دایره محاطی در دو نقطه مجزا B_1 و B_2 ملاقات کند. ثابت کنید که محور اصلی دایره‌های $\triangle BB_1B_2$ و $\triangle CC_1C_2$ از وسط $\overline{DK}$ میگذرد.

مسئله ١٠. مثلث $\triangle ABC$ مفروض است. I مرکز دایره محاطی آن و نقطه ی D بر روی خط BC به طور دلخواه انتخاب شده است. ω_1 دایره ای است که بر دو پاره خط AD و BD و (ABC) از داخل محاط است. دایره ی ω_2 هم به نحو مشابه بر $\overline{AD}$، $\overline{CD}$ و (ABC) از داخل مماس است. دایره های ω_1 و ω_2 به ترتیب در نقاط P و Q بر $\overline{BC}$ مماس اند. ثابت کنید که وسط کمان کوچکتر BC روی (ABC)، وسط PQ و وسط ID همخط اند.

مسئله ١١. مثلث $\triangle ABC$ مفروض است. نقاط E و F بر روی اضلاع AC و AB قرار دارند به طوری که بر دایره محاطی $\triangle ABC$ مماس اند، $BC \neq EF$ و $BC \parallel EF$. ثابت کنید دایره ای وجود دارد که از دو نقطه B و C بگذرد و بر دو دایره ی محاطی مثلث های $\triangle ABC$ و $\triangle AEF$ مماس باشد.

مسئله ۱۲. مثلث $\triangle ABC$ مفروض است. دایره ی (I_A) دایره ی میکستیلینیر متناظر به A در این مثلث است و M وسط کمان کوچک تر BC است. اگر T محل برخورد مماس از M بر (I_A) باشد ثابت کنید:

$$\frac{MT}{MA} = |\frac{b-c}{b+c}|$$

مسئله ۱۳. **(IMO 2019)** مثلث $\triangle ABC$ به همراه دایره محاطی اش (I) مفروض است. (I) بر BC، AC و AB در D، E و F مماس است. ارتفاع وارده از D بر خط EF، (I) را برای بار دوم در R قطع میکند. خط AR، (I) را برای بار دوم در P قطع میکند. دوایر (PCE) و (PBF) یکدیگر را برای بار دوم در Q قطع میکنند. ثابت کنید که خطوط DI و PQ یکدیگر را روی نیمساز خارجی زاویه ی $\angle ABC$ قطع میکنند.

مسئله ۱۴. **(AOPS)** مثلث $\triangle ABC$ به همراه دایره محاطی اش (I) مفروض است. (I) بر BC، AC و AB در D، E و F مماس است. AD، BE و CF دایره ی (I) را برای بار دوم در X، Y و Z قطع میکنند. دوایر (ω_A)، (ω_B) و ω_C از A، B و C میگذرند و بر (I) به ترتیب در X، Y و Z مماس اند. اگر Ge نقطه ی ژرگون مثلث $\triangle ABC$ باشد، ثابت کنید که مرکز قوت دوایر (ω_A)، (ω_B) و ω_C بر روی خط IGeقرار دارد.