قضیه کیسی و کاربرد ها

ایمان قادر　　　　مهران طلایی

۱ آبان ۱۴۰۱

چکیده

قضیه کیسی از قضایای کلاسیک و پر استفاده در هندسه است که با توجه به کمبود متریال آموزشی در حیطه این مبحث ولی کاربرد زیاد آن، به گرد آوری این مقاله روی آوردیم که شامل تعاریف و قضایای مورد نیاز و همینطوری از هر بخش مثال هایی مطرح شده اند که به یادگیری هرچه بیشتر کمک میکنند. و در انتها تمرین هایی برای دست ورزی و خودآزمایی قرار داده شده است.

ابتدا با یک تعریف شروع میکنیم:

تعریف ۱

تابع اختلاف قوت نقطه P نسبت به دو دایره ω_1 و ω_2 را به شکل زیر تعریف میکنیم:

$$\mathbf{P}(P, \omega_1, \omega_2) = Pow^P_{\omega_1} - Pow^P_{\omega_2}$$

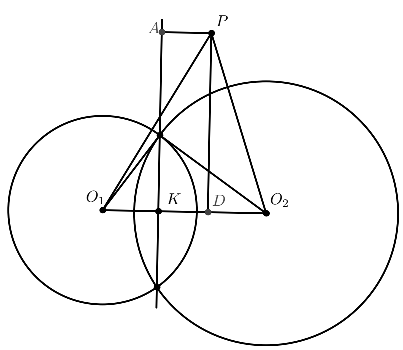
۱ صورت قضیه کیسی

قضیه ۱.۱

فرض کنید که دوایر ω_1 و ω_2 به مراکز O_1 و O_2 در صفحه هستند و خط l محور اصلی این دو دایره است و نقطه P نقطه ای در صفحه ω_1 و ω_2 است. آنوقت رابطه زیر برقرار است:

$$\mathbf{P}(P, \omega_1, \omega_2) = 2dist(P, l)\overline{O_1O_2}$$

اثبات:



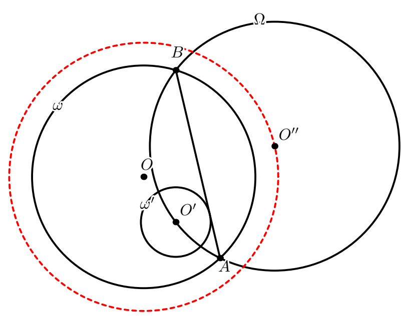
دوایر $\omega_1(O_1, r_1)$ و $\omega_2(O_2, r_2)$ را در نظر بگیرید. و A و D به ترتیب پاهای عمود از P بر محور اصلی و خط المرکزین این دو دایره هستند. حال داریم:

$$\begin{aligned} Pow_{\omega_1}^P - Pow_{\omega_2}^P &= PO_1^2 - r_1^2 - PO_2^2 + r_2^2 \\ &= DO_1^2 - DO_2^2 + r_2^2 - r_1^2 \\ &= (DO_1 - DO_2)\overline{O_1O_2} + KO_1^2 - KO_2^2 \\ &= (DO_1 - DO_2)\overline{O_1O_2} + (KO_1 - KO_2)\overline{O_1O_2} \\ &= (DO_1 - DO_2 + KO_1 - KO_2)\overline{O_1O_2} \\ &= 2\overline{PA}\ \overline{O_1O_2} \ \blacksquare \end{aligned}$$

مثال ۱.۱

دایره ω' دایره ای به مرکز O' به طور کامل درون دایره ω و مرکز O قرار دارد. نقاط A و B به گونه ای بر روی دایره ω قرار دارند که $\overline{AB}$ بر ω' مماس است. دایره Ω را دایره محیطی $\triangle O'AB$ در نظر بگیرید. خط $\overline{AB}$ را با حفظ جهت حرکت میدهیم مکان هندسی مرکز Ω را بیابید.

اثبات: مرکز Ω را O'' مینامیم.



حال $\mathbf{P}(O', \omega, \Omega)$ را محاسبه میکنیم:

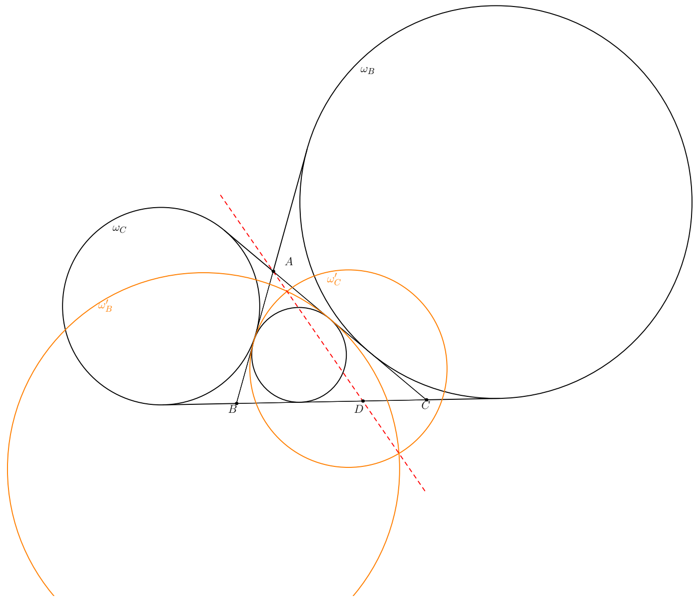
$$\begin{aligned} \mathbf{P}(O', \omega, \Omega) = Pow_{\omega}^{O'} - Pow_{\Omega}^{O'} &= 2R_{\omega'}\overline{OO''} \\ \leftrightarrow \frac{Pow_{\omega}^{O'} - 0}{2R_{\omega'}} &= \overline{OO''} \end{aligned}$$

بنابر این طول OO'' ثابت است و این نتیجه میدهد که مکان هندسی O'' دایره ای است به مرکز O و شعاع $\frac{Pow_{\omega}^{O'}}{2R_{\omega'}}$.

مثال ۲.۱

ω_B و ω_C دوایر محاطی خارجی مثلث $\triangle ABC$ هستند. دایره ω'_B با دایره ω_B نسبت به وسط AC متقارن هستند و دایره ω'_C با دایره ω_C نسبت به وسط AB متقارن هستند. اثبات کنید که محور اصلی ω'_B و ω'_C محیط مثلث را نصف میکند. (روسیه ۲۰۰۵)

اثبات: دایره محاطی مثلث را ω بنامید و محل تماس ω_A با خط BC را D در نظر میگیریم حال اثبات میکنیم که خط AD محور اصلی دو دایره ω'_B و ω'_C است.



کافی است بگوییم که:

$$Pow^D_{\omega} - Pow^D_{\omega_B} = Pow^D_{\omega} - Pow^D_{\omega_C}$$

داریم:

$$\begin{aligned} Pow^D_{\omega} - Pow^D_{\omega_B} &= 2dist(D, \overline{AC})(r_B - r) \\ &= 2(p-b)Sin(\angle ACB)(r_B - r) \end{aligned}$$

به نحو مشابه داریم:

$$Pow^D_{\omega} - Pow^D_{\omega_C} = 2(p-c)Sin(\angle ABC)(r_C - r)$$

و در نهایت

$$2(p-c)Sin(\angle ABC)(r_C - r) = 2(p-b)Sin(\angle ACB)(r_B - r)$$
$$\longleftrightarrow$$

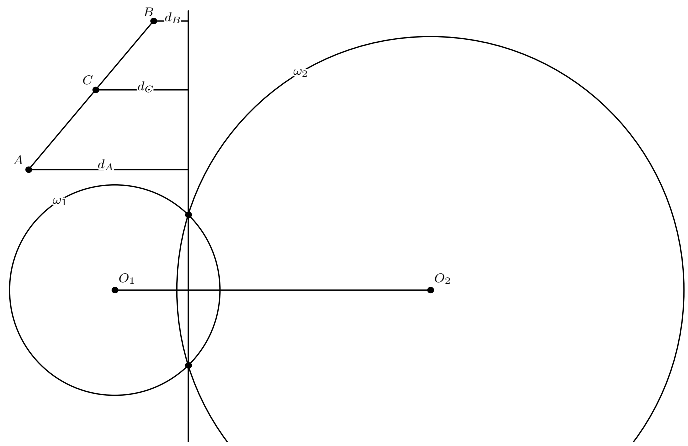
۲ اختلاف قوت

قضیه ۱.۲

فرض کنید که دوایر ω_1 و ω_2 و نقاط همخط A، B و C در یک صفحه هستند. و $C = \alpha A + (1-\alpha)B$ آنوقت داریم:

$$\mathbf{P}(C, \omega_1, \omega_2) = \alpha \mathbf{P}(A, \omega_1, \omega_2) + (1-\alpha)\mathbf{P}(B, \omega_1, \omega_2)$$

اثبات:



فرض کنید که d_P فاصله نقطه P تا محور اصلی ω_1 و ω_2 باشد. حالا از قضیه کیسی داریم:

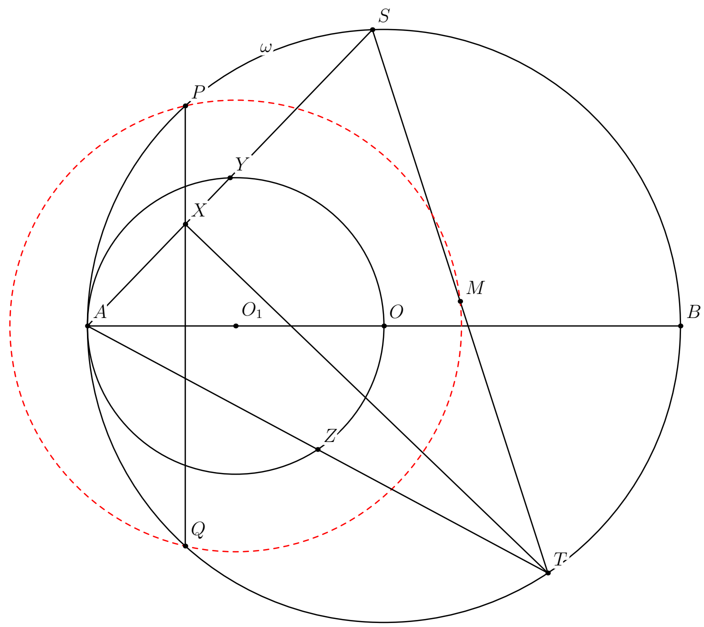
$$\mathbf{P}(C,\omega_1,\omega_2) = 2d_cO_1O_2 = \frac{BC}{AB} \times \overbrace{2d_AO_1O_2}^{\mathbf{P}(A,\omega_1,\omega_2)} + \frac{AC}{AB} \times \overbrace{2d_BO_1O_2}^{\mathbf{P}(B,\omega_1,\omega_2)}$$
$$= \alpha\mathbf{P}(A,\omega_1,\omega_2) + (1-\alpha)\mathbf{P}(B,\omega_1,\omega_2)$$

که به این ترتیب حکم اثبات میشود.■

مثال ۱.۲

چهاضلعی $APBQ$ در دایره ω محاط شده است به طوری که $\angle P = \angle Q = 90^\circ$ و $AP = AQ < BP$. فرض کنید که X نقطه ای متغیر بر روی پاره خط $\overline{PQ}$ باشد. خط AX، دایره ω را برای بار دیگر در نقطه S قطع میکند. نقطه T به روی کمان AQB از ω قرار دارد به طوری که $\overline{XT}$ بر $\overline{AX}$ عمود است. اثبات کنید که اگر M را وسط $\overline{ST}$ بنامیم، با حرکت X روی پاره خط $\overline{PQ}$ مکان هندسی M یک دایره است.

اثبات:



دایره به قطر AO را ω' در نظر بگیرید. اثبات میکنیم که M به روی دایره ای هم مرکز با ω' قرار دارد. برای این منظور کافی است اثبات کنیم قوت M نسبت به ω' مستقل از X است.
بر اساس خطی بودن قوت نقطه میتوانیم بنویسیم:

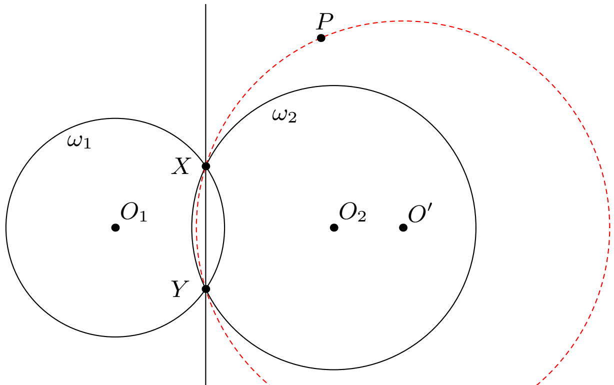
$$\begin{aligned}\mathbf{P}(M,\omega',\omega) &= (\frac{1}{2})\mathbf{P}(S,\omega',\omega)+(\frac{1}{2})\mathbf{P}(T,\omega',\omega)\\ \implies Pow_M^{\omega'} &= \frac{AS^2+AT^2-ST^2}{4}\\ &= \frac{2AS\dot{A}T\cos(\angle A)}{4}\\ &= \frac{AP^2}{2}\end{aligned}$$

پس قوت M نسبت به ω' برابر با ثابت $\frac{AP^2}{2}$ که نتیجه میدهد M بر روی دایره ای به مرکز وسط AO حرکت میکند.

۳ نسبت قوت

لم ۱: (لم نسبت قوت)

فرض کنید که دوایر ω_1 و ω_2 در صفحه موجود اند و برای نقطه P مقدار $\frac{Pow_{\omega_1}^P}{Pow_{\omega_2}^P}$ ثابت است. آنوقت مکان هندسی نقاط P با این خاصیت دایره ای است هم محور با ω_1 و ω_2.



اثبات: فرض میکنیم که X و Y محل برخورد دو دایره ω_1 و ω_2 باشند. و O'، O_1 و O_2 به ترتیب مرکز دوایر (PXY)، ω_1 و ω_2 هستند. l را هم محور اصلی ω_1 و ω_2 معرفی میکنیم. ادعا میکنیم که O' ساکن است، چون اگر چنین باشد P نیز بر روی دایره ای ثابت حرکت میکند.

حال با دو بار استفاده از قضیه کیسی داریم:

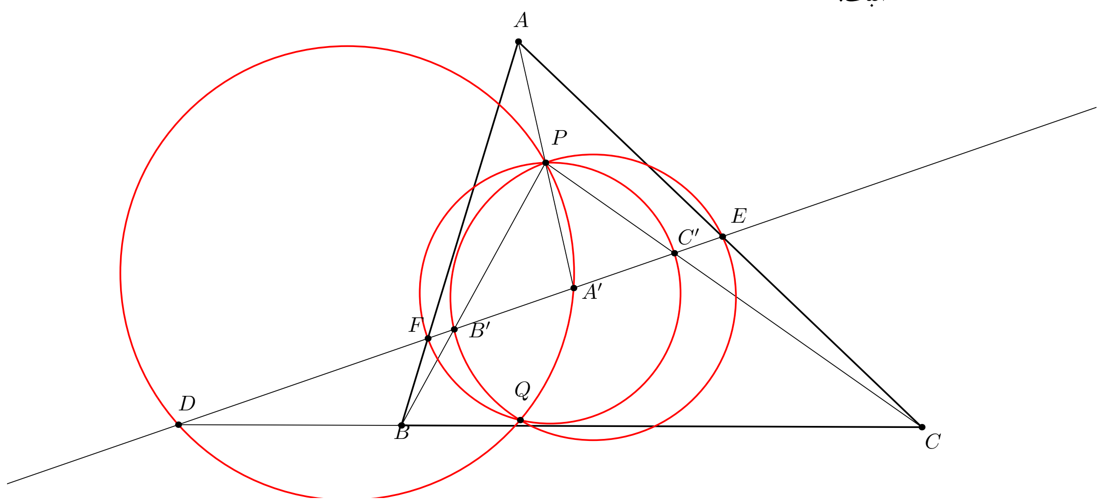
$$\left.\begin{aligned}\mathbf{P}(P,(AXY),\omega_1) &= 2dist(P,l)O'O_1 &= Pow^P_{\omega_1}\\ \mathbf{P}(P,(AXY),\omega_2) &= 2dist(P,l)O'O_2 &= Pow^P_{\omega_2}\end{aligned}\right\} \implies \frac{Pow^P_{\omega_1}}{Pow^P_{\omega_2}} = \frac{O_1O'}{O_2O'}$$

بنا بر این نسبت $\frac{O_1O'}{O_2O'}$ ثابت است که با توجه به جهت P فقط میتوان یک نقطه برای O' در نظر گرفت.

مثال ۱.۳

فرض کنید نقطه P نقطه ای در صفحه مثلث $\triangle ABC$ است. و خط l خطوط BC، AC و AB به ترتیب در نقاط D، E و F قطع میکند. A' را محل برخورد خط AP با l و نقاط B' و C' را به همین ترتیب تعریف میکنیم. اثبات کنید که دوایر (PDA')، (PEB') و (PFC') در نقطه ی دیگری به غیر از P برخورد دارند.

اثبات:



دایره $(PA'D)$ را ω_A مینامیم و ω_B و ω_C را به نحو مشابه تعریف میکنیم. حالا کافی است اثبات کنیم که $\frac{Pow_{\omega_B}^{A}{}'}{Pow_{\omega_C}^{A}{}'} = \frac{Pow_{\omega_B}^{D}}{Pow_{\omega_C}^{D}}$ زیرا برا اساس لم نسبت قوت میتوانیم نتیجه بگیریم که D و A' برو روی دایره ای قرار دارند که از قضا با دوایر ω_B و ω_C هم محور است و ما را به نتیجه مطلوب میرساند. بنا بر این داریم:

$$\frac{Pow_{\omega_B}^{D}}{Pow_{\omega_C}^{D}} = \frac{Pow_{\omega_B}^{A}{}'}{Pow_{\omega_C}^{A}{}'}$$
$$\iff \frac{DB'\dot{D}E}{DF\dot{D}C'} = \frac{A'B'\dot{A}'E}{A'C'\dot{A}'F}$$
$$\iff \frac{\frac{DB'}{DC'}}{\frac{A'B'}{A'C'}} = \frac{\frac{DE}{DF}}{\frac{A'E}{A'F}} \ (*)$$

حال با استفاده از ناهمساز ادامه میدهیم:

$$LHS = (DA', B'C') \overset{P}{=} (D\overline{AP} \cap \overline{BC}, BC) \overset{A}{=} (DA', FE) = RHS$$

■

۴ سوالات برای تمرین بیشتر

۱. المپیاد جهانی ریاضی ۲۰۱۹