
FICHE D'EXERCICES N° : 1

EXERCICE 1

1) On choisit au hasard deux entiers entre 1 et 15.

a) i) Quelle est la probabilité qu'au moins un des deux entiers soit un nombre pair ?

ii) Donner un code \mathbb{R} qui permet de calculer (approximativement) cette probabilité.

b) Calculer la probabilité que la somme des nombres choisis soit paire ?

c) On note, respectivement, ces deux entiers m_1 et m_2 . Quelle est la probabilité que $7^{m_1} + 7^{m_2}$ soit divisible par 5 ?

2) On choisit au hasard trois entiers entre 1 et 15. Quelle est la probabilité que leur minimum est 4 ou leur maximum est 10 ?

3) Un nombre X est choisi au hasard de l'ensemble $\{1, 2, \dots, n\}$ (n un entier non nul). On note $p(n)$ la probabilité que $X^2 - 1$ est divisible par 10. Calculer :

a) $p(10)$ et $p(35)$.

b) $\lim_{n \rightarrow +\infty} p(n)$.

EXERCICE 2

On lance un dé jusqu'à l'obtention de 6. On note n le nombre de lancers requis pour cela et on choisit au hasard un entier entre 1 et n . Quelle est la probabilité que le nombre choisi est 1 ?

EXERCICE 3

Un avion comporte n sièges ($n \geq 2$). On considère n passagers, chacun ayant une place réservée.

1) On considère dans un premier temps que

- Le premier passager qui arrive est distrait et s'installe à une place choisie au hasard.
- Les passagers suivants, lorsqu'ils arrivent, s'installent à leur place si celle-ci est disponible, et dans le cas contraire ils choisissent une place au hasard parmi les places encore libres.

On note, pour $k \in \llbracket 2, n \rrbracket$ et lorsqu'il y a exactement k places, A_k l'événement : "le k -ième passager s'installe à sa place" et $p_k = P(A_k)$.

Montrer que $p_n = \frac{1}{n} \left(1 + \sum_{k=2}^{n-1} p_k \right)$ et en déduire la valeur de p_n .

2) On suppose maintenant que tous les passagers choisissent une place au hasard.

a) Quelle est la probabilité qu'il y ait au moins un passager installé à sa place ?

b) Quelle est la probabilité d'avoir exactement un passager installé à sa place ?

c) On vous informe que pour les $n-1$ premiers sièges aucun passager n'est à sa place. Quelle est la probabilité que le n -ième passager soit à sa place ?

EXERCICE 4

Deux personnes J_1 et J_2 participent à un jeu avec des probabilités respectives de victoire à chaque partie p et $q = 1 - p$. Le gagnant est celui qui le premier obtient deux victoires de plus que l'autre. Quelle est la probabilité de gain de chaque personne ?

EXERCICE 5

Une personne désire accumuler un capital de N MAD. Elle dispose initialement d'un capital de k MAD ($0 < k < N$). Pour accroître son capital, elle décide de jouer à un jeu de hasard où la probabilité de réaliser un gain de 1 MAD est p , et la probabilité d'une perte de 1 MAD est $1 - p$ ($0 < p < 1$). Elle jouera jusqu'à ce qu'elle atteigne ce capital ou qu'elle soit ruinée.

- 1) Trouver, éventuellement, la probabilité qu'elle se ruine.
- 2) Trouver la probabilité qu'elle accumule éventuellement N MAD.

EXERCICE 6

On dispose de deux pièces E et T . La pièce E est équilibrée et la pièce T donne pile avec la probabilité $1 - p$ et face avec la probabilité p .

On effectue une succession de lancers selon le procédé suivant :

- On choisit une des deux pièces E, T au hasard, on la lance
- A chaque lancer, si on obtient face, on garde la pièce pour le lancer suivant, sinon on change de pièce.

On note, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, E_n l'événement : "le n -ième lancer se fait avec la pièce E " et $p_n = P(E_n)$. Trouver une relation de récurrence vérifiée par la suite $(p_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ et donner sa valeur.

EXERCICE 7

On joue à pile ou face avec une pièce équilibrée et on s'intéresse à l'événement A_n : "lors des n premiers lancers il n'a pas été observé deux piles consécutifs".

On note p_n la probabilité de l'événement A_n .

- 1) Trouver une relation de récurrence vérifiée par la suite $(p_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$.
- 2) Calculer $\lim_{n \rightarrow +\infty} p_n$.

EXERCICE 8

Deux personnes A et B jouent de la façon suivante :

A lance une pièce et B lance un dé. Ceci est répété indépendamment jusqu'à ce que face ou un des nombre 1, 2, 3, 4 est réalisé. A gagne lorsque face est réalisé et B gagne lorsque un des nombres 1, 2, 3, 4 est réalisé. Calculer la probabilité que A gagne le jeu.