رابطه هم ارزی

رابطه : فرض کنیم A یک زیر مجموعه ناتهی باشد . حاصل ضرب دکارتی(دکارتین) را به شرح زیر تعریف می کنیم

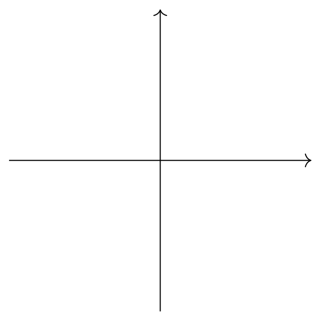
$$A\times A=\{(x,y):x,y\in A\}$$

مثال: $A=\{1,2,3\}$

$$A\times A=\{(1,1),(1,2),(1,3),(2,1),(2,2),(2,3),(3,1),(3,2),(3,3)\}$$

مثال:

$$A\times A=\{(x,y):x\in\mathbb{R},y\in\mathbb{R}\}=\mathbb{R}^2=A=\mathbb{R}$$

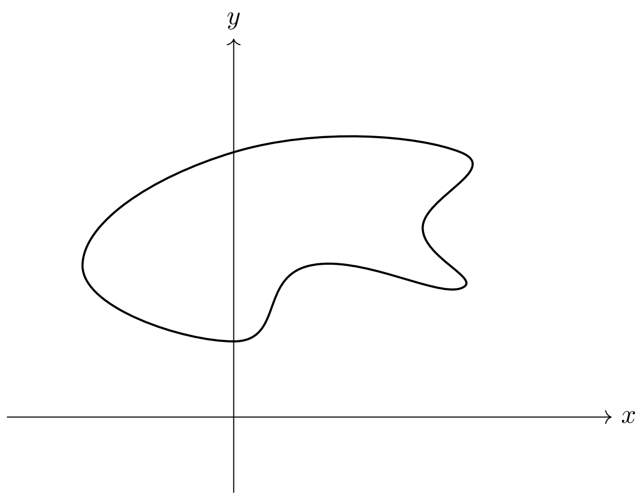


حال هر زیر مجموعه ای از این $A\times A$ را یک رابطه گویند و با R نمایش میدهیم .

$$R=\{(1,1,)\}\quad R=\{(1,2),(3,1),(2,3)\}$$

یا اگر $A=\mathbb{R}$ آنگاه :

$$R=[0,1]^2\quad \text{یا}\quad R=$$



حال اگر این رابطه سه ویژگی زیر را داشته باشد. به این رابطه هم ارزی گویند.

- الف : برای $x\in A$ داشته باشیم $(x,x)\in R$
- ب : اگر $(x,y)\in R$ آنگاه $(y,x)\in R$
- پ : اگر $(x,y)\in R$, $(y,z)\in R$ آنگاه داشته باشیم $(x,z)\in R$

مثال
فرض کنید که $A=\mathbb{R}^2$ انگاه رابطه زیر هم ارزی است .

$$R=\{(X,Y):X,Y\in\mathbb{R}^2, X=(x_1,x_2), y=(y_1,y_2), x_1^2+x_2^2=y_1^2+y_2^2\}$$

زیرا اگر $X=(x_1,x_2)\in\mathbb{R}^2$ آنگاه :

$$x_1^2+x_2^2=x_1^2+x_2^2\Rightarrow(X,X)\in R$$

ب :

$$if\quad(X,Y)\in R\Rightarrow x_1^2+x_2^2=y_1^2+y_2^2\Rightarrow y_1^2+y_2^2=x_1^2+x_2^2\Rightarrow(Y,X)\in R$$

پ:

اگر فرض شود که $(Y,Z)\in R\quad,\quad(X,Y)\in R$ پس :

$$\left.\begin{matrix}x_1^2+x_2^2=y_1^2+y_2^2\\ y_1^2+y_2^2=z_1^2+z_2^2\end{matrix}\right\}\Rightarrow x_1^2+x_2^2=z_1^1+z_2^2$$

پس $(X,Z)\in R$

مثال دیگر فرض کنیم که $A=\mathbb{R}^3$ آنگاه

$$R=\{\quad(X,Y)=\left\{\begin{matrix}2x_1+x_2+x_3=2y_1+y_2+y_3\\ x_1-x_2+x_3=y-1-y_2+y_3\end{matrix}\right\}\quad\}$$

اثبات دقیقا شبیه بالا است .

به طور کلی اگر f یک تابع پیوسته از $\mathbb{R}^n\to R^m$ باشد :

$$R=\{(X,Y):f(X)=f(Y)\}$$

یک رابطه هم ارزی است.

فرض کنیم $A=Z$

$$R=\{(m,n):|m-n|5\qquad \text{یعنی } |m-n| \text{ بر ۵ بخش پذیر است}\}$$

برهان:

اگر $m\in z$ پس $|m-m|=0$. پس صفر بر ۵ بخش پذیر است . بنابراین $(m,m)\in R$

ب : اگر $(m,n)\in R$ پس $|m-n|$ بر ۵ بخش پذیر است و .....

پ : اگر $(m,n)\in R$ و $(n,k)\in R$. پس :

$$\begin{cases}m-n=5k\\ n-k=5k'\end{cases}\quad\Rightarrow m-k=5(k+k')$$

بنابراین $(m,k)\in R$

مهم ترین خاصیت هم ارزی افراز فضا است.

بدین معنی که ابتدا کلاس هم ارزی را به شرح زیر تعریف میکنیم

$$[x]=\{y:(x,y)\in R\quad \text{یا}\quad(y,x)\in R\}$$

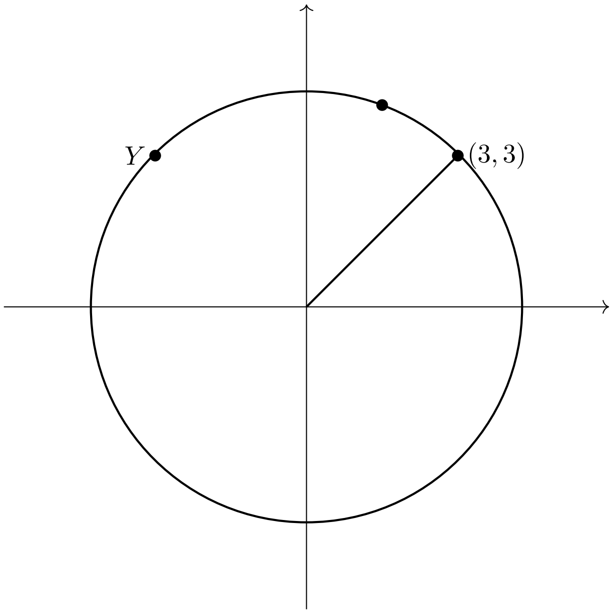
پس $A=\underset{x\in A}{U}[x]$ بدیهی است زیرا : $x\in[x]$

اما میتوان در واقع اندیس گذار A را نیز کوچکتر انتخاب کرد . یعنی B زیر مجموعه اکید A

$$\exists B \subset A: \quad A = \underset{x\in B}{U}[x]$$

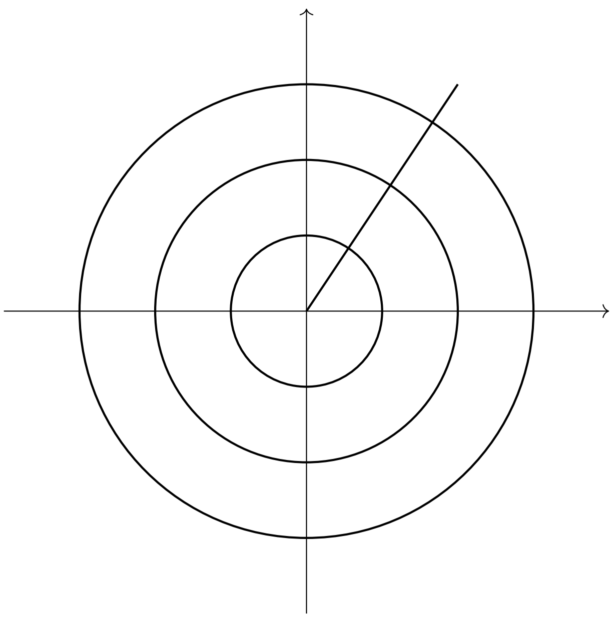
مثال اول را مجدد مرور میکنیم .

$$[(B,Z)] = \{Y : y_1^2 + y_2^2 = 3^2 + 3^2\}$$



در واقع $B = \{(x,x) : x \in R^+$. پس $\mathbb{R}^2 = \underset{x\in B}{U}[x]$

در واقع فضا به دایره متحد المرکز به شعاع های مختلف افراز میشود.



$$[(0,0)] = \{(0,0)\}$$

مثال سوم را در نظر میگیریم :

$$\begin{aligned}
&[0] = \{m = 5k\} \\
&[1] = \{m : m \in z, m = 5k+1\} \\
&[2] = \{m : m \in z, m = 5k+2\} \\
&[3] = \{m : m \in z, m = 5k+3\} \\
&[4] = \{m : m \in z, m = 5k+4\}
\end{aligned}$$

$$B = \{0,1,2,3,4\} \quad \text{که} \quad z = [0], \cup [1] \cup [2] \cup [3] \cup [4]$$

حال مثال دیگری فرض میکنیم :

$$A = \mathbb{R}, \quad R = \{(x,y) : x = y\} \quad [x] = \{x\} \Rightarrow A = R = \underset{X \in R}{U}[x]$$

در واقع هر کلاس تک عضوی است و فرض کنییم که T یک نگاشت .... از v به w باشد . آنگاه

$$\{(X,Y) \in V : T(X) = T(Y)\}$$

یک رابطه هم ارزی است . حال به بررسی کلاس مبدا میپردازیم . یعنی :

$$\lfloor \begin{bmatrix} \vdots \end{bmatrix}_n \rfloor = (x_i T(X) = T \begin{bmatrix} \vdots \end{bmatrix} = 0_{\text{بعدی m}})$$

به این کلاس هسته ....