جایگشت یک تابع به شرح زیر است

$$f:\{1,2,\cdots,n\}\to\{1,2,\cdots,n\}$$

که هم یک به یک باشد هم پوشا و به دو شیوه دیگر میتوان نشان داد اگر $n=5$:

$$f:\begin{pmatrix}1&2&3&4&5\\4&3&1&2&5\end{pmatrix}$$

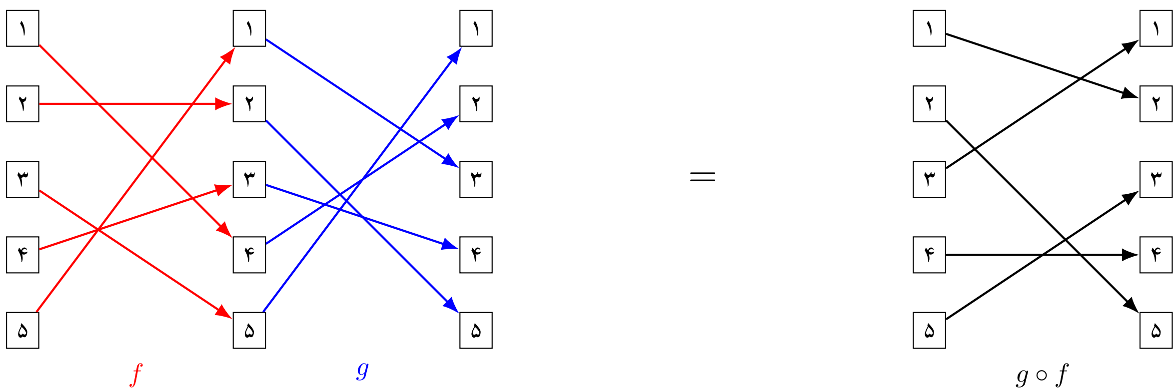
$$f(1)=4\quad f(2)=3\quad f(3)=1\quad f(4)=2\quad f(5)=5$$

شیوه دوم در ماتریس ها

$$a_{14}\quad a_{23}\quad a_{31}\quad a_{42}\quad a_{55}$$

دو تابع را میتوان ترکیب کرد بنابراین از این منظر میتوان دو جایگشت را ترکیب [ضرب] کرد و یا برعکس fog که اول g خوانده میشود و بعد f

$$\begin{array}{cc} f & g \\ \begin{bmatrix}1&2&3&4&5\\4&2&5&3&1\end{bmatrix} & \begin{bmatrix}1&2&3&4&5\\3&5&4&2&1\end{bmatrix}\end{array}=\begin{bmatrix}1&2&3&4&5\\2&5&1&4&3\end{bmatrix}$$



$$\begin{pmatrix}1&2&3&4&\cdots&n\\1&2&3&4&\cdots&n\end{pmatrix}=I$$ عنصر همانی

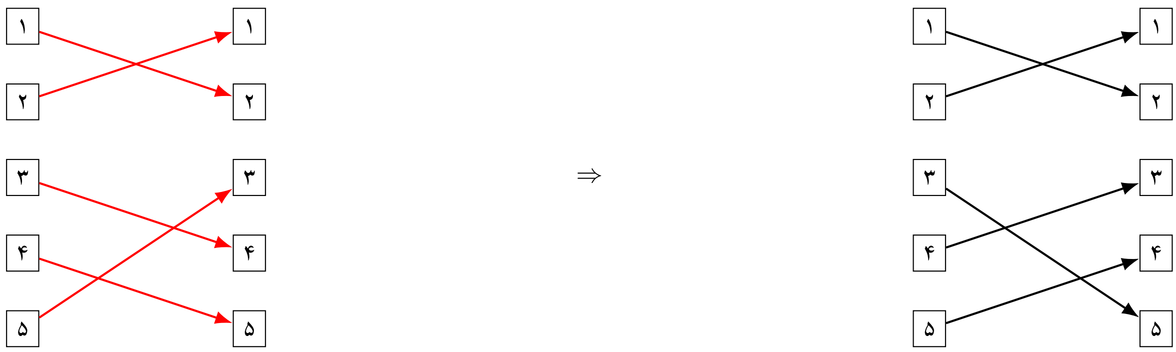
یعنی هیچ تغییری در این جایگشت رخ نداده است

دور دوتایی (در برخی کتب ترانهش نامیده میشود)

$$(\alpha,\beta)=\begin{pmatrix}1&2&3&\cdots&\alpha&\cdots&\beta&\cdots&n-1&n\\1&2&3&\cdots&\beta&\cdots&\alpha&\cdots&n-1&n\end{pmatrix}$$

یعنی همه مقادیر ثابت است و فقط α و β جا به جا شده اند.

σ^{-1} را وارون جایگشت σ می نامند . هر گاه :



σ σ^{-1}

$$\sigma\,\sigma^{-1} \;=\; \sigma^{-1}\sigma \;=\; I$$ معکوس یک دور دوتایی خودش است

معکوس ترکیب برابر است با ترکیب معکوس‌ها، یعنی:

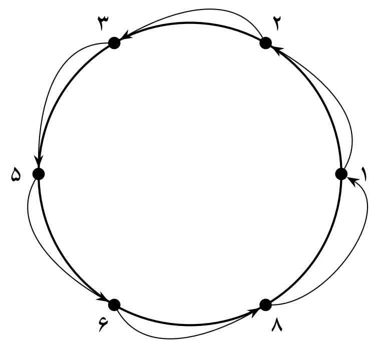
$$(\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_k)^{-1} = \sigma_k^{-1}\,\sigma_{k-1}^{-1}\,\cdots\,\sigma_2^{-1}\,\sigma_1^{-1}$$

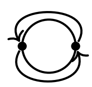
مفهوم دور در جایگشت ها

فرض کنید جایگشت زیر موجود باشد

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 2 & 3 & 5 & 4 & 6 & 8 & 7 & 1 \end{pmatrix}$$

مشاهده میشود که ۷ و ۴ ثابت مانده اند اما ۱،۲،۳،۵،۶،۸ به شکل زیر روی دایره توزیع شده اند.



یا در جایگشت $\left(\begin{smallmatrix}1&2&3\\2&1&3\end{smallmatrix}\right)$ یک دور 1  2 داریم که قبلا گفتیم دور ها را به صورت مختصر در مثال اول با $(1,2,3,5,6,8)$ و در مثال دوم با $(1,2)$ نمایش میدهند یعنی $(a_1,\cdots,a_k)$ نمایش میدهند یعنی :

$$\sigma(a_1) = a_2, \sigma(a_2) = a_3, \cdots, \sigma(a_{n-1}) = a_n, \sigma(a_k) = a_1$$

قضیه اول

هر جایگشت ترکیبی از دورها است :

اثبات

$$\sigma(1),\sigma(\sigma(1)),\sigma(\sigma(\sigma(1))),\cdots$$
$$\cdots,\sigma(\cdots\sigma(1))\cdots),\cdots$$

در نظر میگیریم . بدیهی است که این ترکیب ها نمیتواند تا بی نهایت متمایز باشد و اولین عنصر تکرار شونده یعنی

$$\underbrace{\sigma(\sigma\cdots\sigma(1))}_{\text{مرتبه } r_1}=1$$

را در نظر میگیریم . بدیهی است که

$$(1,\sigma(1),\cdots,\underbrace{\sigma(\sigma(\cdots\sigma(1)\cdots))}_{\text{مرتبه } r}))$$

یک دور است .

حال اولین عنصر که در دور بالا نباشد مثلا i را انتخاب میکنیم و مانند شیوه بالا عمل میکنیم . پس

$$\overbrace{\sigma(\cdots\sigma(i)\cdots)}^{\text{مرتبه} r_i}=1$$
$$(i,\sigma(i),\cdots,\underbrace{\sigma(\sigma(\cdots\sigma(i)\cdots))}_{r_i-1}$$

یک دور است . حال اولین عنصری که در ۲ دور بالا نباشد را انتخاب میکنیم . این انخاب ها متناهی است . پس :

$$\sigma=(1,\cdots,\sigma(\sigma\cdots\sigma(1))\cdots)(i,\sigma(i),\cdots,\sigma(\cdots,\sigma(i)\cdots))(\cdots)\cdots(\cdots)$$

ترکیب متناهی از دور ها شد .

قضیه دوم

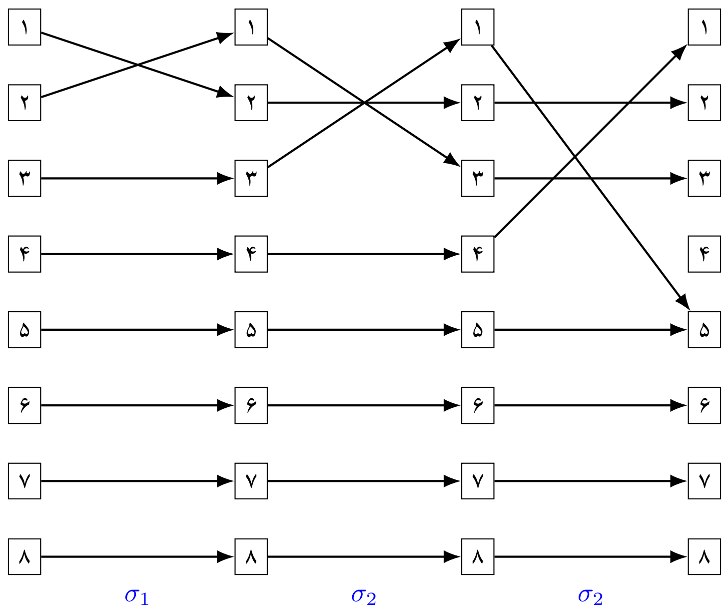
هر دور حاصل ترکیب متناهی دور ۲ تایی است .

مثال

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 2 & 3 & 4 & 1 & 5 & 6 & 7 \end{pmatrix}$$

در این جایگشت یک دور $(1,2,3,4)$ موجود است . پس

$$\overset{\sigma_1}{\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 2 & 1 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \end{pmatrix}} \overset{\sigma_2}{\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 3 & 2 & 1 & 4 & 5 & 6 & 7 \end{pmatrix}} \overset{\sigma_3}{\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 4 & 2 & 3 & 1 & 5 & 6 & 7 \end{pmatrix}}$$



$$\sigma_3(\sigma_2(\sigma_1(1))) = 2 = \sigma(1) \qquad \sigma_3(\sigma_2(\sigma_1(5))) = \sigma(5) = 5$$

$$\sigma_3(\sigma_2(\sigma_1(2))) = 3 = \sigma(2) \qquad \sigma_3(\sigma_2(\sigma_1(6))) = \sigma(6) = 6$$

$$\sigma_3(\sigma_2(\sigma_1(3))) = 4 = \sigma(3) \qquad \sigma_3(\sigma_2(\sigma_1(7))) = \sigma(7) = 7$$

$$\sigma_3(\sigma_2(\sigma_1(4))) = 5 = \sigma(4)$$

حال از دو قضیه فوق نتیجه میگیریم که هر جایگشت حاصل ضرب (ترکیب) دورهای دوتایی است . یعنی هر جایگشت را میتوان با تعویض دوتا دوتا بدست آورد.

قضیه سوم

یک جایگشت نمیتواند هم تعداد زوج از دورهای ۲ تایی باشد و هم تعداد فرد از دور هایی ۲ تایی

اثبات : جایگشت همانی همواره به تعداد زوج دور دوتایی تجزیه میشود . فرض کنید که :

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & n \\ 1 & 2 & 3 & \cdots & n \end{pmatrix} = t_1 t_2 t_3 \cdots t_k$$

تجزیه شود k همواره زوج خواهد بود .

مثال $(1,2)(2,1) = I = (1,3)(3,1)(4,5)(5,4)$

زیرا فرض کنید که در تجزیه $t_1 \cdots t_k$، m عددی باشد که در یکی از t_i ها و آن هم اولین بار دیده شده است . پس بدیهی است که i نمیتواند k باشد . پس $t_i t_{i+1}$ به شکل زیر است:

$$t_i \quad t_{i+1}$$

$$(m,x)(m,x) \rightarrow ?????????$$

$$(m,x)(x,y) \rightarrow (x,y)(m,x)$$

$$(m,x)(y,z) \rightarrow (y,z)(m,x)$$

$$(m,x)(x,y) \rightarrow (x,y)(m,y)$$

پس در هر حالت یا دو تا از دور های دوتایی حذف میشود یا m یک مرحله به سمت راست حرکت میکند . این کار آنقدر تکراری میشود که m حذف میشود.[یعنی یک دور دوتایی مانده به آخر میرسد هیچگاه به آخرین دور نمیرسد]

این عمل را برای سایر اعداد * تکرار میکنیم تا همه حذف شوند . بدیهی است که در هر سه مرحله تعداد زوج حذف کردیم پس هنگامی که هیچ دوری نداشته باشیم یعنی k زوج بوده است [معکوس هر دور ۲ تایی خودش است]

حال فرض کنید که σ یک جایگشت به دو شیوه تجزیه شده است .

$$\sigma = q_1 \cdots q_r \qquad\qquad , \sigma = t_1 \cdots t_3$$

پس $\sigma^{-1} = t_?^{-1} \cdots t_1^{-1}$ یعنی $\sigma^{-1} = t_5 \cdots t_1$ پس $\sigma\sigma^{-1} = I_{\text{همانی}}$

$$q_1 \cdots q_r \qquad t_? \cdots t_1 = \text{همانی}$$

پس چون همانی همواره به تعداد زوج دور ۲ تایی تجزیه میشود پس

$$r + s = \text{زوج} \Rightarrow r = \text{زوج}, s = \text{زوج}$$

$$r = \text{فرد}, s = \text{فرد}$$

و اثبات تمام میشود

جایگشتی که به تعداد زوج دور ۲ تایی تجزیه شود جایگشت زوج و جایگشتی که به تعداد فرد دور دوتایی تجزیه شود جایگشت فرد نامیده میشود.

قضیه چهارم

تعداد جایگشت های زوج با تعداد جایگشت های فرد برابر است .

زوج ها را A_n و فرد ها را B می نامیم.

$$f : A \to B \qquad\qquad f(\sigma) = (1,2)\sigma$$

این یک تابع یک به یک است زیرا اگر :

$$f(\sigma_1) = f(\sigma_2)$$

$$(1,2)\sigma_1 = (1,2)\sigma_2$$

آنگاه $$\underbrace{(2,1)(1,2)}_{\text{همانی}}\sigma_1 = \underbrace{(2,1)(1,2)}_{\text{همانی}}\sigma_2$$

پس $$\sigma_1 = \sigma_2$$

این تابع پوشا است زیرا اگر $\sigma \in B$ آنگاه $(2,1)\sigma$ به A متعلق است و $f((2,1)\sigma) = (1,2)(2,1)\sigma = \sigma$

یعنی برای هر عضو B یک عضو در A یافت شد که به B نگاشت شود. بنابر این بین A ، B یک هم ارزی برقرار است . پس تعداد A با تعداد B برابر است.

حال یک ماتریس $n \times n$ ، $n!$ جایگشت را به شکل زیر مینویسیم.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{23} & a_{31} \\ a_{13} & a_{21} & a_{32} \\ a_{11} & a_{23} & a_{32} \\ a_{13} & a_{22} & a_{31} \\ a_{12} & a_{21} & a_{33} \end{vmatrix}$$

$det(A)$

زوج   تجزیه به دورها

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} = \underset{\text{زوج}}{\underline{(1,2)(2,1)}}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} = \underset{\text{زوج}}{\underline{(1,2)(1,3)}}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} = \underset{\text{زوج}}{\underline{(1,3)(1,2)}}$$

فرد

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix} = \underset{\text{فرد}}{\underline{(3,2)}}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} = \underset{\text{فرد}}{\underline{(1,3)}}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} = \underset{\text{فرد}}{\underline{(1,2)}}$$

در واقع منفی یک به توان تعداد تغییرات ۲تایی را ؟ جایگشت گویند.

(اگر جایگشت زوج علامت +) - (اگر جایگشت فرد علامت $-$)

$$det \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

دترمینان:

تابع f با شرایط زیر روی ماتریس های $n \times n$ را دترمینان گویند .

$$f : A = \begin{bmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix} \to \mathbb{R} \qquad f(a_1 \cdots \alpha a_i + a_i^{'}, \cdots a_n)$$

$$\forall i =? \cdots n \qquad = \alpha f(a_1 \cdots a_i, \cdots a_n)$$

$$\forall \leftarrow \mathbb{R} \qquad + f(a_1 \cdots a_i^{'}, \cdots a_n)$$

یعنی نسبت به تک تک سطرها خطی باشد .یعنی n خطی باشد.

شرط دوم : اگر در سطر ماتریس جابجا شودد آنگاه حاصل قرینه شود یعنی

$$f(a_1 \cdots a_i \cdots , a_j \cdots a_n) = -f(a_1 \cdots , a_n \cdots a_i, \cdots a_n)$$

بدیهی است که اگر $a_i = a_j$ آنگاه دترمینان برابر صفر باشد.

شرط سوم $D(I) = 1$

قضیه : اگر f روی ماتریس های $n - 1 \times n - 1$ شرایط دترمینان بودن را داشته باشد آنگاه :

$$E_j(A) = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+j} A_{ij} D_{ij}(A)$$

شرایط دترمینان بودن را نظیر به نظیر دارد . منظور از $D_{ij}(A)$ یعنی $f(A^{-ij})$ که A^{-ij} حاصل از حذف سطر iام و ستون jام است . بدیهی است :

$$A_{3\times 3} \Rightarrow E_1(A) = \sum_{i=1}^{3} (-1)^{i+1} A_{i1}\, D_{i1}(A)$$

$$= A_{11}\, D_{11}(A) \; - \; A_{21}\, D_{21}(A) \; + \; A_{31}\, D_{31}(A)$$

$$= A_{11} \begin{vmatrix} A_{22} & A_{23} \\ A_{32} & A_{33} \end{vmatrix} - A_{21} \begin{vmatrix} A_{12} & A_{13} \\ A_{32} & A_{33} \end{vmatrix} + A_{31} \begin{vmatrix} A_{12} & A_{13} \\ A_{22} & A_{23} \end{vmatrix}$$

$$= A_{11} \big((-1)^{2+2} A_{22} A_{33} \big)$$

$$+ A_{21} \big(\qquad\qquad \big)$$

$$+ A_{31} \big(\qquad\qquad \big)$$

$$\alpha_i = \sum_{j=1}^{n} \alpha_{ij}\, e_j$$

$$D(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n) = D\big(\sum_{j=1}^{n} \alpha_{ij} e_{j_1},\, \alpha_1, \ldots, \alpha_n\big)$$

$$= \sum \alpha_{ij}\, D(e_{j_1},\, \alpha_1, \ldots, \alpha_n)$$

$$= \sum_{j_n=1}^{n} \sum_{j_{n-1}=1}^{n} \cdots \sum_{j_1=1}^{n} \qquad a_{1j_1}\, a_{2j_2} \cdots a_{nj_n}\, D\big(e_{j_1}, \ldots, e_{j_n}\big).$$

اگر دو یا بیشتر e_{j_k} ها یکسان باشند آنگاه $D(e_{j_1}, \cdots, e_{j_n}) = 0$. پس تنها $D(e_{j_1}, \cdots, e_{j_n})$ فرد باشد آنگاه

$$D(e_{j_1}, \cdots, ?) = -1$$

$$D(e_{j_1}, \cdots, e_{j_n}) = +1$$ و اگر زوج باشد

مثال

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow D(e_1, e_3, e_2, e_4) = -1$$

$$1 \to 1 \qquad 2 \to 3 \qquad 3 \to 2 \qquad 4 \to 4$$

$$\sigma(1) = 1 \qquad \sigma(2) = 3 \qquad \sigma(3) = 2 \qquad \sigma(4) = 4$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 2 & 4 \end{pmatrix} = (2, 3)$$

جایگشت فرد یک جابجایی

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow D(e_4, e_3, e_2, e_1) = -1$$

$$1 \to 4 \qquad 2 \to 3 \qquad 3 \to 2 \qquad 4 \to 1$$

$$\sigma(1) = 4 \qquad \sigma(2) = 3 \qquad \sigma(3) = 2 \qquad \sigma(4) = 1$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} = (1, 4)(2, 3)$$

تجزیه . بنابراین جایگشت زوج در جابجایی

$$D(e_{j_1}, \cdots, e_{j_n}) = sign(\sigma)$$

$$D(A) = \sum_{j_1, \cdots, j_n} sign(\sigma) A_{1\sigma(1)} A_{2\sigma(2)} \cdots A_{n\sigma(n)}$$

معکوس به روش دترمینان

فرض کنیم که A یک ماتریس مربعی باشد آنگاه

$$adj(A) = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & \cdots & c \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ c_{m1} & c_{m2} & \cdots & c_{mm} \end{bmatrix}^t$$

که c_{ij} عبارت است از $(-1)^{i+j}det(A^{-ij})$. منظور از A^{-ij} ماتریسی است که حاصل حذف سطر iام و ستون jام است .

اگر ؟ قضیه فرض کنیم که A یک ماتریس مربعی باشد انگاه $A \quad adj(A) = det(A)I$

اثبات را در قالب یک ماتریس 3×3 بیان میکنیم .

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\begin{vmatrix} A_{22} & A_{23} \\ A_{32} & A_{33} \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} A_{?2} & A_{13} \\ A_{32} & A_{33} \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} A_{12} & A_{13} \\ A_{22} & A_{23} \end{vmatrix} \\ +\begin{vmatrix} A_{21} & A_{23} \\ A_{31} & A_{33} \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} A_{?1} & A_{13} \\ A_{31} & A_{33} \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} A_{?} & A_{?} \\ A_{?} & A_{?} \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} A_{21} & A_{22} \\ A_{31} & A_{32} \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{31} & A_{32} \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{vmatrix} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} det(A) & b_{12} = 0 & 0 \\ 0 & det(A) & 0 \\ 0 & 0 & det(A) \end{bmatrix} \underset{b_{12}=det}{\Rightarrow} \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \times(-1) = 0$$

مثال : اگر A بالامثلثی و معکوس پذیر باشد آنگاه ماتریس مهکوس پذیر نیز بالا مثلثی است
اثبات :

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & & & \\ & a_{22} & & \\ & & \ddots & \\ & 0 & & \\ & & & a_{nn} \end{bmatrix} \quad \xrightarrow{\text{عملیات جردن}} \quad A^{-1} = \begin{bmatrix} b_1 & & & \\ & a_{22} & & \\ & & \ddots & \\ & 0 & & \\ & & & b_{nn} \end{bmatrix}$$

زیرا عملیات جردن در هر قطر روی بالای قطر انجام میشود پس A^{-1} نیز بالا مثلثی است. حاصل ضرب دوتایی بالامثلثی نیز بالامثلثی است.

$$C = AB \quad , C_{ij} = \alpha^i b_j \qquad i > j$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & \alpha_{ii} & \cdots \end{pmatrix} \begin{bmatrix} \vdots \\ b_{jj} \\ b_{ii} = 0 \\ \vdots \end{bmatrix} = 0$$

پس مجموعه ماتریس های بالا مثلثی با عضو خنثی I یک گروه است .

دترمینان حاصل ضرب دو ماتریس A, B

$$det(AB) = det(A)det(B)$$

فرض کنیم که B معکوس پذیر نباشد . پس $\exists x \in \mathbb{R}^n \quad Bx = \vec{0} \quad \Rightarrow ABx = 0$

پس AB معکوس ندارد بنابراین $det(AB) = 0 \Rightarrow det(A) \times det(B) = 0$

فرض کنیم که A معکوس پذیر نیست . پس $\exists y \quad \forall y = 0 \Rightarrow \exists x, Bx = y \Rightarrow ABx = Ay = 0$

بنابراین AB معکوس ندارد . پس $det(AB) = 0 \Rightarrow det(A) \times det(B) = 0 \times det(B) = 0$

حال فرض کنیم که A معکوس ندارد . پس :

$$A = E_k E_{k-1} \cdots E_1, det(A) = det(E_k) det(E_{k-1}) \cdots det(E_1)$$

و

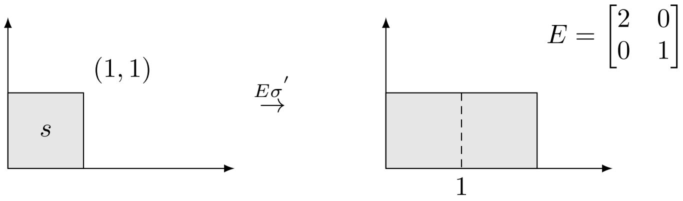
$$AB = E_k \cdots E_1 B, det(AB) = det(E_K) det(E_{k-1}) \cdots det(E_1)$$

$$= det(A) det(B)$$

حکم اثبات شد

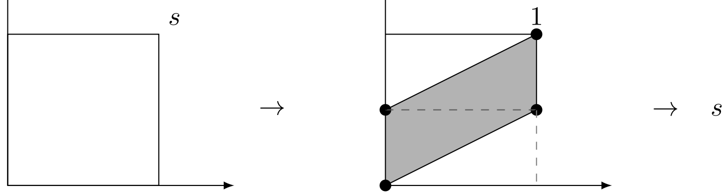
حال فرض کنید که E یک ماتریس مقدماتی باشد که اثر آن C برابر کردن یک سطر است .

$$E \quad A \quad = \begin{bmatrix} c\alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{bmatrix}$$



یک ضلع مربع واحد را چند برابر میکند سپس مساحت چند c برابر میشود . حال فرض کنید که E یک ماتریس مقدماتی باشد که اثر آن اضافه کردن یک مضرب از سطری به سطری دیگر باشد . مثال

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots \\ C & 1 & 0 & \cdots \\ \vdots & \vdots & I_{n-2} & \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$$



مساحت یکسان است $ES = S' \Rightarrow$

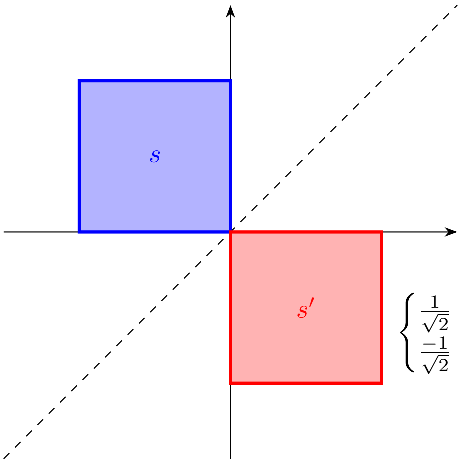
حال اگر n بعدی باشد با استفاده از اثر ؟ نتیجه میگیریم که اندازه ثابت می ماند.

اثر هندسی دترمینان روی ماتریس های مقدماتی

فرض کنید که E ماتریس جابجایی دو سطر باشد . مثلا سطر اول دوم

$$E = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & I_{n-2} & & \end{bmatrix}$$

این ماتریس به شکل $E = I - 2vv^t$ که $v = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{-1}{\sqrt{2}} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$ نوشته میشود که ماتریس $Householder$ است و انعکاس یک ابرصفحه است .



$$ES = S^{'}$$

مساحت $s^{'}$ برابر s است و فقط جهت آن به خاطر انعکاس عوض شده است.

حال فرض کنیم که ماتریس A معکوس پذیر باشد

$$A = E_1 \cdots E_k I$$

بنابراین اثر این ماتریس برابر است با حاصل ضرب ماتریس های مقدماتی . بنابراین اثر هندسی برابر است با حاصل ضرب اثر هندسی این ماتریس های مقدماتی پس بنابراین اگر تعداد انعکاس های عدد زوج باشد اثری بر دترمینان ندارد و اگر فرد باشد دترمینان فرد میشود.مضارب اگر مثبت باشد دترمینان I چند برابر میشود و اضافه کردن مضرب یک سطر به سطر دیگر تاثیری برحجم حاصل ندارد.

ماتریس های بلوکی :

$$det\left(\begin{bmatrix} A & \vec{0} \\ & \vdots \\ \vec{0} & 1 \end{bmatrix}_{n+1\times n+1} \right)$$

؟ سطر آخر از بسط دترمینان استفاده میکنیم . بنابراین :

$$det\left(\begin{bmatrix} A & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = (-1)^{n+1\times n+1} \times 1 \quad det(A) = det(A) \right)$$

حال فرض کنیم که

$$det = \begin{bmatrix} A_{n\times n} & 0 \\ 0 & I_{n\times n} \end{bmatrix} = det \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} A_{n\times n} & 0 \\ 0 & I_{n-1} \end{bmatrix} & \vdots \\ \cdots & 1 \end{bmatrix}$$

$$= det \begin{pmatrix} A & \\ & I_{n-1} \end{pmatrix} \cdots det(A)$$

حال فرض کنیم که

$$\begin{bmatrix} A & 0 \\ 0 & ? \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} A & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & D \end{bmatrix}$$

$$= det\left(\begin{bmatrix} A & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix}\right) = det(A) \times 1 \times det(D) = det(A)det(D)$$

ماتریس های قطری بلوکی :

$$\begin{bmatrix} A & B \\ 0_{m\times m}^{\text{زیرصفر}} & D \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & D \end{bmatrix} \qquad \underset{\downarrow \text{ماتریس بالا مثلثی}}{\begin{bmatrix} I & B \\ 0 & I \end{bmatrix}} \qquad \begin{bmatrix} A & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix}$$

بنابراین دترمینان ماتریس قطری

$$det\left(\begin{bmatrix} A & B \\ 0 & D \end{bmatrix}\right) = det(D) \quad det(A)$$

حالت عمومی

$$S = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix}$$

اگر A معکوس پذیر باشد

$$det(S) = det(A)det\Big(D - CA^{-1}B\Big)$$

و اگر D معکوس پذیر باشد

$$det(S) = det(D)det(A - BD^{-1}C)$$

اثبات

$$S = \underset{\downarrow det1}{\begin{bmatrix} I & 0 \\ CA^{-1} & I \end{bmatrix}} \quad \underset{\downarrow det(A)det(D-CA^{-1}B)}{\begin{bmatrix} A & 0 \\ 0 & D - CA^{-1}B \end{bmatrix}} \quad \underset{\downarrow det1}{\begin{bmatrix} I & A^{-1}B \\ 0 & I \end{bmatrix}}$$

بنابراین

پس $det(S) = det(A)det(D - CA^{-1}B)$

و اگر D معکوس پذیر باشد.

$$S = \underbrace{\begin{bmatrix} I & BD^{-1} \\ 0 & I \end{bmatrix}}_{1} \begin{bmatrix} A - BD^{-1}c & 0 \\ 0 & D \end{bmatrix} \underbrace{\begin{bmatrix} I & 0 \\ D^{-1}C & I \end{bmatrix}}_{1} {}_{det(D)det(A-BD^{-1}C)}$$

در مورد اینکه A, D معکوس پذیر نباشند تواما قضیه جدی وجود ندارد