حال که نشان دادیم $CA+B$ یک تبدیل خطی از $V \to W$ فضای $L(V,W)$ ... مشترک F شامل همه تبدیل های خطی یا ماتریس منتاظر یک فضای برداری است. حال اگر w, v یکسان باشند آنگاه $L(V,W)=L(V)$ می نامند.

حال پایه استاندارد برای این $L(V)$ عبارت است از :

$$\{E^{p,q}\}_{p=1,q=1}^{n} = \begin{Bmatrix} E^{1,1}, \cdots, E^{1,n} \\ E^{n,1}, \cdots, E^{n,n} \end{Bmatrix}$$

که این خانواده n^2 عضو دارد که

$$[E^{p,q}] = \sigma_{pq} = \begin{cases} 1 & p=q \\ 0 & p \neq q \end{cases}$$

مثلا اگر $n=5$ باشد آنگاه $E^{2,3}$ عبارت است از

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

همانگونه که در بالا مشاهده شد عملیات $conv$ یک تبدیل خطی است . حال میخواهیم یک نمایش ماتریسی برای این تبدیل پیدا کنیم .

فرض کنیم که $E=\{E^{p,q}\}_{p=1,q=1}^{5}$ یک پایه برای فضای $\mathbb{R}^{5\times 5}$ باشد

$$c_a = \begin{bmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{bmatrix}$$

و

$$\begin{array}{cc} & \begin{matrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{matrix} \\ T(E^{1,1}) = & \begin{bmatrix} b_2 & a_2 & 0 & 0 & 0 \\ c_1 & a_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{array}$$

$$\begin{array}{cc} & \begin{matrix} 0 & 0 & 0 & 0 \end{matrix} \\ T(E^{1,2}) = & \begin{bmatrix} c_2 & b_2 & a_2 & 0 & 0 \\ c_1 & b_1 & a_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{array}$$

$$T(E^{1,3}) = \begin{array}{ccccc} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \end{array}$$
$$\begin{bmatrix} 0 & c_2 & b_2 & a_2 & 0 \\ 0 & c_1 & b_1 & a_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

برای اینکه به قاعده کلی برسیم ماتریس کانولوشون $conv$ ستون اول با آخر و سطر اول با سطر آخر تعویض میشود[در حالت کلی ستون i با ستون $n-i+1$ و سطر i با سطر $n-i+1$] به ماتریس زیر میرسیم

$$\overline{con} = \begin{bmatrix} c_3 & b_3 & a_3 \\ c_2 & b_2 & a_2 \\ c_1 & b_1 & a_1 \end{bmatrix}$$

$$T(E^{p,q}) = \begin{bmatrix} \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \\ \cdots & c_3 & b_3 & a_3 & \cdots \\ \cdots & c_2 & b_2 & a_2 & \cdots \\ \cdots & c_1 & b_1 & a_1 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \end{bmatrix} \longrightarrow$$ جایگاه b_2 در ستون q و سطر p

$$T(E^{n,n}) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & c_3 & b_3 \\ 0 & 0 & c_1 & b_1 \end{bmatrix}$$

$$T(A) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} A_{ij} \, T(E^{i,j})$$

در اینجا به جای استفاده از نمایش ماتریس و $\sum \alpha_i T(\alpha_i)$ از نمایش بلوک استفاده کرده ایم . در حالت عادی $T(\alpha_i)$ یک ستون است اما این ستون یک بلوک است.

$$\left[T(E^{1,1}) T(E^{1,2}) \cdots T(E^{n,n}) \right] \begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{12} \\ \vdots \\ a_{nn} \end{bmatrix}$$

اما در محاسبات بهتر است به شیوه زیر عمل کنیم :

..... از سطر بالایی و پایینی و ستون ابتدا و آخر صرف نظر میکنیم

$$A = 0$$
$$for \quad i = 2 : n-1$$
$$for \quad j = 2 : n-1$$
$$A \begin{bmatrix} \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & ij & ij+1 \\ \cdots & \cdots & i+1j+1 \end{bmatrix} + B_{ij} * \overline{con}$$
$$A \begin{bmatrix} & & \end{bmatrix} \quad B_{ij} * con$$

در اینجا به جای استفاده از نمایش ماتریس و استفاده از $T(X) = Y = \sum_{i=1}^{n} x_i T(\alpha_i)$ از نمایش بلوک ماتریس استفاده کردیم و در حالت عادی $T(\alpha_i)$ یک ستون است . اما اینجا $T(E^{p,q})$ یک بلوک ماتریس است . پس

$$\begin{bmatrix} T(E^{1,1})T(E^{1,2})\cdots T(E^{n,n}) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{12} \\ \vdots \\ a_{1n} \end{bmatrix}$$

اما در محاسبات بهتر است به شیوه زیر عمل کنیم :

$$\begin{aligned} &for \quad i = 2 : n-1 \\ &\quad for j = 2 : n-1 \\ &con_{ij} = a_{ij} * \overline{con} \\ &con_{ij}?? = (i, 2 : j) + con_{ij}(?) \\ &con_{ij}(1 : j, :) = con_{i-1,j}(1 : j-1, :) + con_{ij}(1 : j, :) \end{aligned}$$

با کمک ماتریس اسپارس $2(k^2 - k) \times n^2$ جمع و n^2k^2 ضرب

این روش از لحاظ ضرب با عمل $conv$ برابر است و به جمع ... نیاز دارد

این روش از لحاظ تئوری بسیار ارزشمند است به خصوص در محاسبه مشتقات موتورهای یادگیری عمیق :

در روش کلاسیک	k^2n^2	ضرب
	k^2n^2	جمع
در روش پایه	k^2n^2	ضرب
	$2(k^2 - k)n^2$	جمع

در این روش تقریبا دو برابر روش کلاسیک جمع نیاز است که البته چندان مهم نیست .

روش بدست آوردن مقادیر ویژه و بردارهای ویژه و علت درست بودن این روش :[برای قطری شدنی ها درست است]

فرض کنیم ماتریس A داده شده است و مقادیر ویژه آن به شکل زیر خواهد بود

$$|\lambda_1| > |\lambda_2| > \cdots > |\lambda_n|$$

و بردار های ویژه آن به شکل ماتریس زیر

$$[x_1, x_2, \cdots, x_n] \qquad , D = \begin{bmatrix} \lambda & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{bmatrix}$$

و بنابر قاعده قطری شدن خواهیم داشت

$$A = XDX^{-1}$$

روش :

بنابر قاعده اینکه دو ماتریس به مقادیر ویژه یکسان دارند

اگر

$$A_{S+1} = Q_S A_S Q_S = Q_{S-1} A_{S-1} Q_{S-1} \cdots$$
$$Q_0 A Q_0$$

ماتریس ها مشابه هستند . پس اگر A_{S+1} ساخته شود که مقادیر ویژه آن $clear$ شفاف باشد مساله حل میشود. بر اساس این قاعده برای A تجزیه به شکل QR انجام میدهیم .

$$
\begin{aligned}
A &= A_1 = Q_1 R_1 \\
Q_1^T A_1 &= \underbrace{Q_1^T Q_1^P}_{I} R_1 = R_1 \\
A_2 &= \underbrace{Q_1^T A Q_1}_{\text{مشابه}} = R_1 Q_1 \\
A_2 &= Q_2 R_2 \Rightarrow Q_2^T A_2 Q_2 = \mathbb{R} Q_2 \Rightarrow A_3 = R_2 Q_2 \\
&\vdots \\
A_{n+1} &= Q_N^T A_n Q_n = \underbrace{Q_N^T Q_{n-1}^T \cdots A}\,\underbrace{Q_1 Q_2 \cdots Q_n}_{P_n} \\
&= P_n^T A P_n \quad *
\end{aligned}
$$

از طرف دیگر نشان خواهیم داد که A_{n+1} یک ماتریس ؟؟

حال

$$
\begin{aligned}
P_n U_n &= Q_1 Q_2 Q_{n-1} \underbrace{Q_n R_n}_{A_n} R_{n-1} \cdots R_1 \\
&= Q_{n-1} A_n U_{n-1} \quad *
\end{aligned}
$$

فرض کنید که برای ماتریس مربعی A مقادیر ویژه $|\lambda_n| < \cdots < |\lambda_2| < |\lambda_1|$ موجود است و فرض کنید که ماتریس X ستونهایش بردارهای ویژه متناظر λ_i هستند.

$$
\begin{aligned}
A = A_0 \qquad\qquad A_{i+1} &= R_i Q_i \\
A_i &= Q_i R_i \qquad\qquad \text{که} \\
lim_{n\to\infty} Q_n &= I \qquad\qquad \text{آنگاه} \\
lim_{n\to\infty} (R_n)_{ii} &\to \lambda_i
\end{aligned}
$$

اثبات :

ابتدا نشان میدهیم که A_i ، A_{i+1} ماتریس های مشابه هستند .

$$
\begin{aligned}
A_i = Q_i R_i \quad &\Rightarrow \quad Q^T A_i = Q^T Q R_i \\
\Rightarrow R_i = Q^T A_i \quad &\Rightarrow \overbrace{R_i Q_i}^{A_{i+1}} = Q^T A_i Q_i \\
A_i \Rightarrow A_{i+1} &= Q^T A_i Q_i
\end{aligned}
$$

پس A_{i+1} مشابه A_i است.

$$
\begin{aligned}
A_{n+1} &= Q_n^T A_n Q_n = Q_n^T Q_{n-1}^T A_{n-1} Q_{n-1} Q_n = \cdots \\
&= \underbrace{Q_n^T Q_{n-1}^T \cdots Q_1^T}_{P_n^T} \quad A \quad \underbrace{Q_1 \cdots Q_n}_{P_n}
\end{aligned}
$$

$$A_{n+1} = P_n^T A_? P_n$$

از طرفی دیگر $A = \underset{\downarrow_{X=QR}}{X} \quad D \quad \underset{\downarrow_{X^{-1}=LU}}{X^{-1}}$ بنابراین

$$A = Q \quad R \quad D \quad R^{-1} \quad Q^{-T}$$

$$\Rightarrow Q^{-T} \quad A \quad Q = R \quad D \quad R^{-1}$$

???