ضریب خارج قسمت ریلی در ماتریس هرمیتی $A = A^H$

فرض کنید که M هرمیتی باشد

$$R(M,x) = \frac{x^*Mx}{x^*x}$$

اگر M هرمیتی باشد آنگاه :

$$\forall \underset{\forall x \in}{\lambda \in} \mathbb{C} \quad Mx = \lambda x \quad \Rightarrow \quad \lambda \in \mathbb{R}$$

زیرا:

$$\begin{aligned} x^*Mx &= x^*\lambda x \\ x^*Mx &= \lambda \|x\|^2 \end{aligned}$$

از طرفی:

$$\begin{aligned} \overline{x^*Mx} &= \overline{\lambda}\|x\|^2 \\ &= \overline{x^*}\overline{M}\overline{x} \\ &= x\overline{M}x^* \\ &= x^*Mx = \overline{\lambda}\|x\|^2 \quad \Rightarrow \lambda \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

یعنی در هرمیت $v_i \perp v_j$

$$\begin{aligned} v_j^*Mv_i &= v_j^*\lambda v_i \\ \overline{v_j^*Mv_i^*} &= \overline{v_j^*\lambda v_i} \\ v_j^*\lambda_j v_j &= v_i^*\lambda_i v_j \Rightarrow (\lambda_j - \lambda_i)v_i^*v_j = 0 \end{aligned}$$

$$R(M,x) = \frac{x^*Mx}{x^*x} = \frac{\sum \lambda_i y_i^2}{\sum y_i^2} \leq \lambda_{\max} \quad \frac{\sum y_i^2}{\sum y_i^2} = \lambda_{\max}$$

و اگر x بردار ویژه‌ی متناظر با λ_{mn} باشد آنگاه:

$$\frac{x^*Mx}{x^*x} = \frac{x^*\lambda_{\max}x}{x^*x} = \lambda_{\max}$$

که $y_i = v_i^*x$ که v_i ها بردار ویژه λ_i است. به همین طریق

$$\lambda_{\min} \leq R(M,x) \leq \lambda_{\max}$$

$$\frac{x^* M x}{x^* x} \qquad x^* x = 1$$

$$\ell(x) = x^* M x - \lambda(x^* x - 1)$$

$$\nabla \ell(x) = 2x^2 M - 2\lambda x^T = 0 \quad \Rightarrow \quad Mx = \lambda x$$

یعنی بردارهای ویژه نقاط بحرانی تابع زیر هستند.

ماتریس cov(x) که :

$$X = \begin{bmatrix} x^1 \\ \vdots \\ x^n \end{bmatrix} = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} \text{ویژگی} & & \text{ویژگی} \\ \uparrow & & \uparrow \end{array} \\ \begin{bmatrix} x_{11} & \cdots & x_{1d} \\ \vdots & & \vdots \\ x_{n1} & \cdots & x_{nd} \end{bmatrix} \end{array}$$

$$x^i \in \mathbb{R}^d$$

$$\overline{x} = \begin{bmatrix} \bar{x}_1 \cdots \bar{x}_0 \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{Reshape}} \overline{X} = \begin{bmatrix} \bar{x}_1 & \cdots & \bar{x}_d \\ \vdots & & \vdots \\ \bar{x}_1 & \cdots & \bar{x}_d \end{bmatrix}$$

$$X - \overline{X} \ = \ Y$$

$$s = \text{Var}(\text{ویژگیِ}) = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^{n} \big(x_i - \bar{x}\big)^2 \quad n = 1, \cdots, d$$

$$s_{jk} = \text{Cov}\big(\text{ویژگی}_j, \text{ویژگی}_k\big) = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^{n} \big(x_{ij} - \bar{x}_j\big)\,\big(x_{ik} - \bar{x}_k\big), \quad j \neq k$$

$$S = \begin{bmatrix} s_{11} & s_{12} & \cdots & s_{1d} \\ s_{21} & s_{21} & \cdots & s_{2d} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ s_{d1} & s_{d1} & \cdots & s_{dd} \end{bmatrix}$$

$$S = \begin{bmatrix} \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(x_{i1}-\overline{x}_1)^2 & \cdots & \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(x_{i1}-\overline{x}_1)(x_{id}-\overline{x}_d) \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(x_{id}-\overline{x}_d)(x_{i1}-\overline{x}_1) & \cdots & \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(x_{id}-\overline{x}_d)^2 \end{bmatrix}$$

$$= \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n} \begin{bmatrix} (x_{i1}-\overline{x_1})^2 & \cdots & (x_{i1}-\overline{x}_1)(x_{1d}-\overline{x}_d) \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ (x_{1d}-\overline{x}_d)(x_{i1}-\overline{x}_1) & \cdots & (x_i-\overline{x}_d)^2 \end{bmatrix}$$

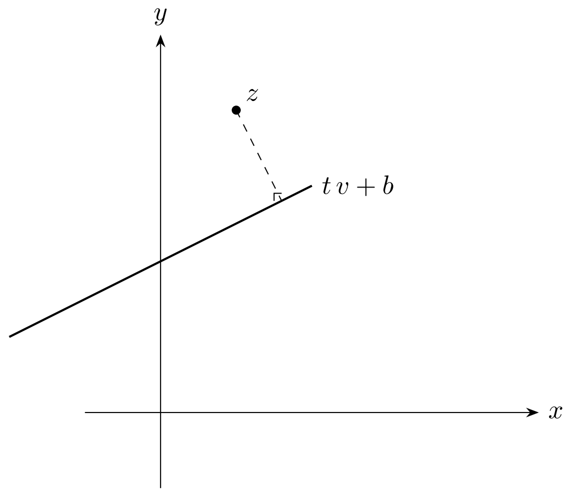
$$= \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n} \begin{bmatrix} x_{i1} & \cdots & \overline{x}_1 \\ & \vdots & \\ & \vdots & \\ & \vdots & \\ x_{id} & \cdots & \overline{x}_d \end{bmatrix} \left[x_{i1}-\overline{x}_1, \cdots, x_{id}-\overline{x}_d\right]$$

$$= \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\overline{x})(X_i-\overline{x})^T \left[\overline{x}_1, \cdots, \overline{x}_d\right]$$

s یک ماتریس متقارن است و ضرایب ویژه آن همگرا حقیقی مقدار است

تصویر کردن نقاط روی خط آفینی در فضای $\mathbb{R}^d$

فرض کنید معادله خط آفینی به صورت پارامتری.$v,b \in \mathbb{R}^d \quad x(t) = t\,v + b$ باشد و بدون خلل در کلیت مسئله فرض کنیم $\|v\|_2 = 1$. تصویر و نقطه z به شکل زیر است :



ابتدا z و x(t) را به اندازه b-انتقال میدهیم و تا خط آفین به خط برداری تبدیل میشود بنابراین:

$$\overline{z} = z - b, \overline{x}(t) = t.v$$

حال این فضا یعنی $\{x \,:\, x = tv \,:\, t \in \mathbb{R}\}$ یک فضای یک بعدی است که پایه آن یک بعدی است و $\beta = \{v\}$ حال طبق قضیه عمود خواهیم نوشت :

$$\begin{aligned} \exists C \in \mathbb{R} \quad \overline{z} - cv \perp v \quad &\Rightarrow \quad \langle \overline{z} - cv, v \rangle = 0 \\ &\Rightarrow \quad \langle \overline{z}, v \rangle = c \underbrace{\langle v, v \rangle}_{\|v\|_2^2 = 1} \\ &\Rightarrow \quad c = \langle \overline{z}, v \rangle \end{aligned}$$

پس تصویر

$$\mathrm{Proj}_{\overline{z}} = cv = \langle \overline{z}, v \rangle v$$

حال فضا را به حالت غیر برداری یعنی آفین تبدیل می‌کنیم. یعنی خط و $\overline{z}$ را به اندازه b انتقال می‌دهیم: پس نقطه تصویر

$$\mathrm{proj}_z = v(\langle v, z_i - b \rangle) + b$$

و به عبارت برداری

$$= v\underbrace{v^T(z-b)}_{a_i} + b$$

حال فرض کنید $X_1, \cdots, X_n \in \mathbb{R}^d$ باشند. هدف آن است که یک خط آفین یکتا به گونه‌ای یافت شود که واریانس تصویر نقاط روی خط ماکسیمم شود. یعنی:

$$v(\underbrace{v^T(x_i-b)}_{t_i}) + b$$

$$\underbrace{v^T(x_1-b)}_{t_1}, \cdots, \underbrace{v^T(x_i-b)}_{t_i}, \cdots, \underbrace{v^T(x_n-b)}_{t_n}$$

بردار b آزد است اما با ماتریس زیر میتوان آن را ثابت در نظر گرفت

$$\sum t_i = 0 \Rightarrow b = \frac{\sum_{i=1}^n x_i}{n} = [\overline{x_1}, \cdots, \overline{x}_d]$$

میانگین ویژگی ها

$$\begin{bmatrix} x_1^1 & \cdots & x_{1d} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ x_{n1} & \cdots & x_{nd} \end{bmatrix} \Rightarrow \overline{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n x_{i1}, \cdots, \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n x_{id}$$

حال میخواهیم واریانس نمونه t_i ها بیشتر شود

$$\begin{aligned} \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^n t_i^2 &= \frac{1}{n-1}\sum v^T(X_i-\overline{X})(X_i-\overline{X})^T v \\ &= v^T\left(\frac{1}{n-1}\sum (X_i-\overline{X})(X_i-\overline{X})^T\right)v \\ &= v^T S v \end{aligned}$$

بنابراین مطابق با ضرایب ریلی $argmax \quad v^T sv$ برابر است با $v_{\lambda max}$ یعنی بردار ویژه یکه متناظر λ_{max} ماتریس کوواریانس نمونه . پس بدین گونه به دست می آید.