اگر A یک ماتریس با درایه های مثبت باشد ، آنگاه :

$$\exists x \geq 0 \quad Ax = \lambda_m x \quad \lambda_m = argmax\{|\lambda| : Ax = \lambda\}$$
$$\exists y \geq 0 \quad A^t y = \lambda_m y,$$
$$\underset{*\to\infty}{\text{limit}}(\frac{A^r}{\lambda_m^r}) = \underset{\downarrow}{xy^t},$$

این ماتریس تصویر پرون نامیده میشود.

فرض کنیم که A یک ماتریس مربعی زوجی باشد . یعنی $a_{ij} = \frac{1}{a_{ji}}$. اگر A سازگار باشد یعنی خاصیت تعدی در آن برقرار باشد به عبارتی :

$$\forall_{i,j,k} \quad a_{ij} = a_{ik}a_{kj}$$

آنگاه معادله مشخصه آن $(\lambda - n)\lambda^{n-1}$ خواهد بود.

در ماتریس سازگار همه ستون ها مضرب ستون اول هستند . زیرا اگر ستون kام را در نظر میگیریم :

$$a_{ik} = a_{i1}a_{1k} \Rightarrow (a_k) = \frac{1}{a_{k1}}a_1$$

پس ستون kام مضربی از ستون اول است.

$$[a_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{bmatrix} \frac{1}{a_{21}}a_1, \cdots, \frac{1}{a_{n1}}a_1]$$

بدیهی است که ستون اول بردار ویژه و مقدار ویژه آن برابر با n است و چون رتبه آن ۱ است پس بعد هسته آن $n-1$ است. پس از آنجایی که درجه هندسی از درجه جبری همواره کوچکتر مساوی است و مقدار ویژه دیگر با توجه به وجود هسته برابر با $\lambda = 0$ است. پس معادله مشخصه ماتریس سازگار $(\lambda - n)\lambda^{n-1}$ خواهد بود.

اگر ماتریس ناسازگار باشد آنگاه مطابق قضیه پرون فروبنیوس $Ax' = \lambda_{max}x'$.حال فرض میکنیم که $x'^T x' = 1$. پس :

$$x'^T x' \leq x'^T Ax'$$

که $o_{ij} = 1$

پس

$$max \quad x' ox' \leq max \quad x' Ax$$

اما مطابق با قضیه ریلی سمت چپ برابر است با $\lambda_{max}(o)$. پس $\lambda_{max}(o) = n$. در نتیجه :

$$n \leq max \quad x'^T Ax'$$

اما برای حل این مساله با توجه به $x^T x = 1$ از ضرایب لاگرانژ بهره میبریم.

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}(x', \lambda) &= x'^T A x - \lambda(x'^T x' - 1) \\
\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x'} &= 2Ax' - 2\lambda x' = 0 \\
&\Rightarrow Ax' = \lambda x'
\end{aligned}$$

طبق قضیه پرون فروبنیوس $\lambda_{max} > 0$ موجود است که $|\lambda| < |\lambda_{max}|$ پس :

$$x^T A x = x^T \lambda_{max} x = \lambda_{max}$$

بنابراین : $n \leq \lambda_{max}$.