قضیه پرون–فروبنیوس Peron-Frobenius

فرض کنیم که M یک ماتریس با درایه های کاملا نامنفی باشد . آنگاه :

$$\exists X \in \mathbb{R}^n : X_n \geq 0, \lambda \geq 0 \Rightarrow MX = \lambda X$$

اثبات :

$$\sum = \{x \in \mathbb{R}^n : x \geq 0, \sum x_i = 1\}$$

دو حالت در نظر میگیریم . حالت نخست اینکه :

$$\exists x : M(x) = 0$$

و حالت دوم $M(x) \neq 0 \quad , \quad \forall x \in \sum$.

ابتدا حالت اول را بررسی میکنیم :

$$\exists x \in \sum : M(x) = 0$$

پس

$$\exists x \geq 0 \quad , \quad \lambda = 0 \quad , \quad x \neq 0$$

چون $x = 1$ $\sum$ حکم ثابت میشود. حال دوم اینکه :

$$\forall x \quad MX \neq 0$$

چون $y = MX \neq 0$ و M و X هر دو عناصر نامنفی دارند پس حداقل یک مولفه Mx غیر صفر است . پس :

$$\sum_{i=1}^{n} M^i x \neq 0$$

حال تابع زیر را تعریف میکنیم

$$f : \sum \to \sum$$
$$f(x) = \frac{MX}{\sum_{i=1}^{n} M^i X}$$

بدیهی است که $\sum$ فشرده f خوش تعریف و پیوسته است.بنابر قضیه نقطه ثابت براوئر یک نقطه ثابت موجود است.

$$\exists u \in \sum : f(u) = U$$
$$\frac{Mu}{\sum M^i U} = u \Rightarrow MU = (\underbrace{\sum M^i U}_{>0})U \geq 0$$

و تمام

حال نشان میدهیم که برای یک ماتریس مربعی مثبت $\lambda > 0$ بزرگترین مقدار از لحاظ اندازه است یعنی

$$\lambda > |\lambda| \quad \rightarrow \sqrt{a^2+b^2}\lambda \text{ طول}$$

و درجه هندسی آن یک است . همچنین درجه بصری آن یک است. برای این منظور مفاهیم زیر یاد آوری میشود:

$$A \Rightarrow c_{ij} = (-1)^{i+j} \quad det(A_{ij})$$

که A_{ij} که از حذف سطر i ام و ستون j ام به دست می آید به ماتریس C ماتریس cofactor گویند.

$$Adj(A) = C^T$$
$$A^{-1} = \frac{adj(A)}{det(A)}$$
$$A.adj(A) = det(A)I$$
$$adj(A).A = det(A)I$$

چون M یک ماتریس مثبت است پس یک $v \geq 0$ هست که

$$Mv = \lambda v \quad \lambda \geq 0, v \neq 0$$

بنابراین هر $M^i v > 0$ بنابراین $\lambda > 0$ و $v > 0$ حال نشان میدهیم درجه هندسی λ یک است:
فرض کنیم که بردار دیگری چون w باشد که $Aw = \lambda w$ بنابراین $w - rv > 0$ که $r = min\{\frac{w_i}{v_i}\}$

$$M(w-rv) = Mw - rMv = \lambda(w-rv)$$

با توجه به انتخاب v حداقل یک مولفه $w - rv$ صفر است . پس $w - rv = 0$ بنابراین درجه هندسی λ برابر با یک است . حال نشان میدهیم که درجه جبری آن نیز یک است. ماتریس $M - xI$ را لحاظ میکنیم

$$adj(M - xI) = A(x)$$
$$(M - xI)A(x) = det(M - Ix)I$$

اگر $x = \lambda$ آنگاه $det(M - \lambda I) = 0$ پس

$$(M - \lambda I)A(\lambda) = 0$$

بنابراین ستون های $A(\lambda)$ متعلق به $ker(M - \lambda I)$ است .

$$col_j(A(\lambda)) \in span(\{\underset{v_i>0}{v_1, \cdots, v_n}\})$$

پس هر ستون A یا کامل صفر است یا کامل مثبت یا کامل منفی . حال همین عمل را برای ماتریس M^T تکرار کنیم مشاهده خواهد شد که ستون های $A(\lambda)^T$ همین حکم را دارد بنابراین سطر های A یا همه صفراند یا همه منفی اند یا همه مثبت . بنابراین عناصر ماتریس $A(\lambda)$ یا همه صفر اند یا همه منفی یا همه مثبت . بنابراین

$$KXA(\lambda) > 0$$

حال از چند جمله ای $det(\underset{B}{M} - xI)$ مشتق میگیریم .

$$\det\left(B(x)\right) = \operatorname{tr}\left(\operatorname{adj}\left(M(x)\right)\frac{dM(x)}{dx}\right)$$

$$K\det(M - xI)' = K\operatorname{tr}\left(A(x)\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\0 & 1 & 0\\0 & 0 & 1\end{pmatrix}\right)$$

$$kdet(M - \lambda I) \geq 0 \Rightarrow$$

پس λ ریشه مشتق تابع مشخصه نیست . پس λ از مرتبه جبری یک برخوردار است.

طبق نامساوی مثلث

$$|MZ| = \sum_{i=1}^{n} |\sum_{j=1}^{n} M_{ij} z_j| \leq$$