لم-دترمنون(Matrix determinont ...)

$$det(A+UV^T) = det(A) + (1+V^TA^{-1}U)$$

اثبات : تساوی زیر را در حالت $A=I$ در نظر بگیرید .

$$\begin{array}{ccc} s_1 & s_2 & s_3 \\ \begin{bmatrix} T & 0 \\ V^T & 1 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} I+UV^T & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} I & 0 \\ -V^T & 1 \end{bmatrix} \\ det(s_1)=1 & det(s_2)=det(I+UV^T) & det(s_3)=1 \end{array}$$

$$= \quad \begin{array}{c} s \\ \begin{bmatrix} I & U \\ 0 & 1+V^TU \end{bmatrix} \\ det(s) = 1+V^TU \end{array}$$

بنابراین $det(s) = det(s_1) \quad det(s_2) \quad det(s_3)$

پس $det(I+UV^T) = 1+V^TU$

اگر A معکوس پذیر باشد :

$$A+UV^T = A(I+(A^{-1}U)V^T)$$
$$det(A+UV^t) = det(A)(1+v^TA^{-1}U)$$

اگر A یک ماتریس مربعی معکوس پذیر باشد و $w, v \in \mathbb{R}^n$ آنگاه $A+UV^T$ معکوس پذیر است و اگر و تنها اگر $1+V^TA^{-1}U \leq 0$ و در این حالت

$$(A+UV^T)^{-1} = A^{-1} - \frac{(A^{-1}U)(V^TA^{-1})}{1+V^TA^{-1}U}$$
$$(I+UV^T)^{-1} = (I+\frac{UV^T}{1+V^TU}) \qquad \text{(}(A=I \text{ در حالت اینکه)}$$

Jack Sherman Morrison Morrison formula 1945 $\underset{}{}$1950

$$u = Aw \ \Rightarrow \ w = A^{-1}u$$

$$(A+UV^T)^{-1} = A^{-1} - \frac{A^{-1}\,U\,V^T\,A^{-1}}{1+V^TA^{-1}U} = A^{-1} - \frac{W\,V^T\,A^{-1}}{1+V^TW}$$

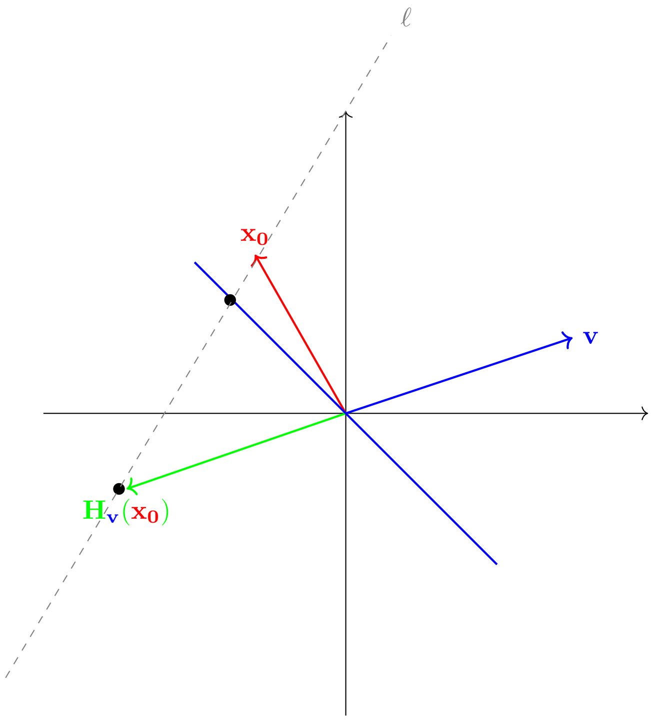
$$= A^{-1}\Big(I - \frac{W\,V^T}{1+V^TW}\Big)$$

اگر $V = U$ و $U^T V = 1$ آنگاه :

$$
\begin{aligned}
(I+\alpha U V^T)^{-1} &= I - \frac{\alpha V v^T}{1+\alpha} \\
&= I - \frac{\alpha}{1+\alpha} v v^T
\end{aligned}
$$

Aleston scote Householder ۱۹۹۳-۱۹۰۴
unitory triangularization of non symmetric matrix ۱۹۵۸

انعکاس نسبت به یک ابر صفحه:



$\overline{x} = proj(x_0) \qquad \rightarrow p(v$ ابرصفحه وابسته به$)$

بدیهی است که اگر V بردار نرمال ابر صفحه باشد آنگاه $P : V^T X = 0$ توصیف صریحی از ابر صفحه خواهد بود .
ابتدا S را .... می‌کنیم. بدین منظور خط عمودی از نقطه‌ی x_o و موازی بردار v را به شکل پارامتری بیان می‌کنیم:

$$\ell \colon \mathbf{x} = v\, t + x_0.$$

این خط را با ابرصفحه تقاطع میدهیم:

$$\ell \cap P :$$

$$v^T \left(v\, t + x_0\right) = 0 \quad \Rightarrow \quad t = -\frac{V^T\, x_0}{v^T\, v}.$$

پس

$$\bar{\mathbf{x}} = V\left(-\frac{-V^T\, x_0}{V^T\, V}\right) + \mathbf{x}_0.$$

حال $\overline{x}$ میبایست دقیقا بین $H_v(x_0), x_0$ قرار گیرد.

بدین منظور

$$
\begin{aligned}
\frac{H_v(x_0)+x_0}{2} &= \overline{x} \\
H_v(x_0) &= -x_0 + 2\overline{x} \\
&= 2v\frac{-v^T x_0}{v^T v} + 2x_0 - x_0
\end{aligned}
$$

حال اگر $v^T v = 1$ آنگاه :

$$
\begin{aligned}
H_v(x_0) &= x_0 - (2VV^T)x_0 \\
&= \underbrace{(I - 2vv^T)}_{\text{Householder این ماتریس}} \quad x_0
\end{aligned}
$$

خواص این ماتریس

$$
\begin{aligned}
H &= H^t \\
&(I - 2vv^T)^t \\
&= I^t - (2vv^t)^t \\
&= I^t - 2vv^{t^t}v^t \\
&= I - 2vv^T
\end{aligned}
$$

برای یافتن معکوس $I - 2VV^T$ از نتیجه خاص شرمن..... بهره میبریم.

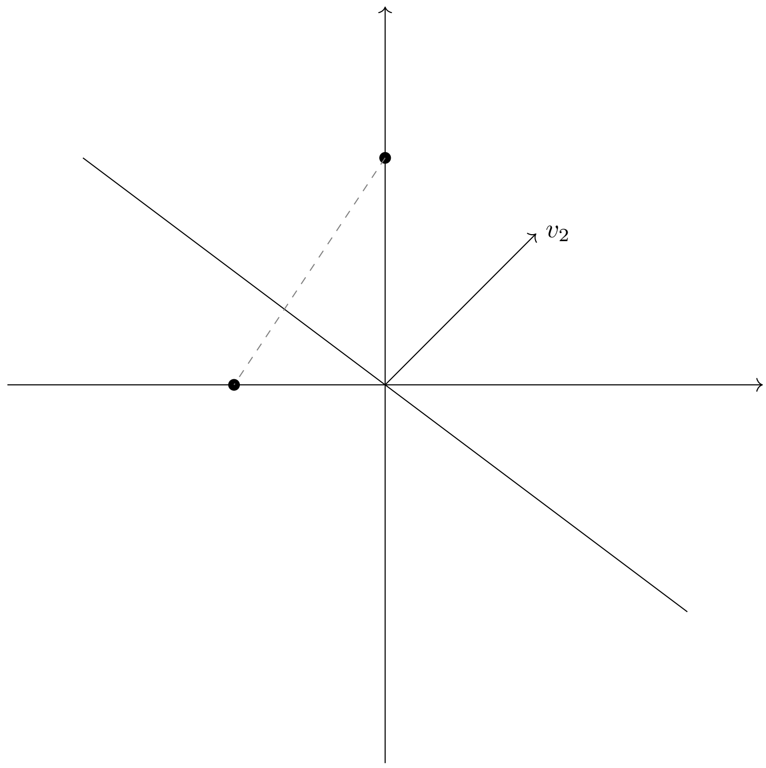
$$
\begin{aligned}
(I - 2vv^T)^{-1} &= I - \frac{-2}{1+(-2)}vv^T \\
&= I - 2vv^T
\end{aligned}
$$

بنابراین $H^{-1} = H$. پس این ماتریس Unitary و متقارن است . چون مقادیر ویژه این ماتریس حقیقی هستند و

$$
\underbrace{|\lambda| = 1}_{\text{Unitaru بودن}}
$$

بنابراین این ماتریس دو مقدار ویژه ۱- و ۱+ خواهد داشت.

مثال : فرض کنیم که $v = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}$



$(\lambda-1)^{n-1}(\lambda+1) \rightarrow$ بردار عمود برابر صفحه کاملا وارون منعکس میشود

معادله مشخصه

تمام $n-1$ بردار حاصل در برابر صفحه روی خودشان منعکس میشود

$$HI - 2\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix} \times (\frac{1}{\sqrt{2}}[1,1]) = \begin{bmatrix}1 & 0\\0 & 1\end{bmatrix} - \begin{bmatrix}1 & 1\\1 & 1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0 & 1\\-1 & 0\end{bmatrix}$$

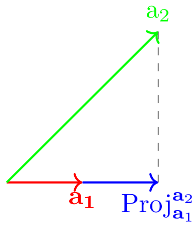
$$H\begin{bmatrix}x_1\\x_2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0 & -1\\-1 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}-x_2\\-x_1\end{bmatrix}$$

$$H^{-1} = \begin{bmatrix}0 & -1\\-1 & 0\end{bmatrix} det(H-\lambda I) = \begin{bmatrix}\lambda & -1\\-1 & \lambda\end{bmatrix} \Rightarrow \underset{\lambda=+-1}{\lambda^2 - 1 = 0}$$

روش گرام – اشمیت جهت مقاوم سازی و یکه سازی پایه:

فرض کنیم که $A = \{a_1, \cdots, a_n\}$ یک پایه برای فضای $\mathbb{R}^n$ باشد

تصویر $\mathbf{a_2}$ روی $\mathbf{a_1}$



$$proj_{a_1}^{a_2} = b \qquad ||b|| = ||a_2|| \cos\theta$$

$$b = ||a_2|| \cos\theta \frac{a_1}{||a_1||}$$

$$= \frac{||a_2|| ||a_1|| \cos\theta}{||a_2||^2} a_1$$

$$= \frac{< a_2, a_1 >}{< a_1, a_1 >} a_1 \Rightarrow u_2 = a_2 - \underbrace{\cancel{\frac{\langle a_w, a_1 \rangle}{< a_1, a_1 >} \times a_1}}_{e_1}$$

$$e_1 = \frac{a}{||a_1||} = \frac{u_1}{||u_1||} \qquad e_2 = \frac{U_2}{||u_2||}$$

حال فرض کنیم $k-1$ بردار متعامد یکه ساخته شده و به دنبال kامین بردار متعامد یکه باشیم .

$$u_k = a_k - \alpha_1 e_1 - \alpha_2 e_2 - \alpha_{k-1} e_{k-1}$$

$$< u_k, e_i >= 0 \Rightarrow \alpha_i =< a_k, e_i >$$

$$u_k = a_k - \sum_{i=1}^{k-1} < a_k, e_i > ei \Rightarrow e_k = \frac{u_k}{||u_k||}$$ kامین بردار

تجزیه QR به روش گرام اشمیت وقتی که ماتریس رتبه ستونی کامل دارد

$$[a_1, a_2, \cdots, a_n]$$

گرام $\Downarrow$

$$E = [e_1, e_2, \cdots, e_n]$$

$$a_1 =< e_1, a_1 > e_1$$

$$\vdots$$

$$a_k = \sum_{i=1}^{k} < e_i, a_k > e_i$$

$$\vdots$$

$$a_n = \sum_{i=1}^{n} < e_i, a_n > e_i$$

$$Q = [e_1, \cdots, e_n]$$

در حالتی که رتبه کامل نباشد با کمی آشفتگی میتوان QR را ساخت . هر چند که منطقی نیست

$$a_i \in span\{e_1, \cdots, e_i\}$$

$$R = \begin{bmatrix} < e_1, a_1 > & < e_1, a_2 > & \cdots & < e_1, a_n > \\ 0 & < e_2, a_2 > & \cdots & < e_2, a_n > \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ & & & < e_n, a_n > \end{bmatrix}$$

$\downarrow$ مختصات a_1 برای پایه E $\quad$ $\downarrow$ مختصات a_2 برای پایه E $\quad$ $\downarrow$ مختصات a_n برای پایه E

$$A = \sum_{i=1}^{n} q_i r^i = \underbrace{[q_1 r^1]}_{\text{رتبه یک}} + \underbrace{[q_2 r^2]}_{\text{رتبه یک}} + \cdots + \underbrace{[q_n r^n]}_{\text{رتبه یک}}$$

$$A^1 = A$$

$$A^k = [q_k r^k] + [q_{k+1} r^{k+1}] + \cdots + [q_n r^n] = A - [q_1 r^1] - [q_2 r^2] - \cdots - [q_{k-1} r^{k-1}]$$

$$\Rightarrow A^k - A^{k+1} = [q_k r^k]$$

$$(A^{k+1}) = A^k - [q_k r^k]$$

$$A^k e_k = [q_k r^k] e_k + [q_{k+1} r^{k+1}] + \cdots + [q_n r^n] e_k$$

$$q_k r_{kk} + \begin{bmatrix} \vdots \end{bmatrix} + \cdots + \begin{bmatrix} \vdots \end{bmatrix}$$

چون e_k فقط یک عنصر آن هم k مهم است و چون q_k یکی است پس :

$$r_{kk} = ||A_K^{(K)}||_2$$

و

$$q_k = \frac{A_K^{(K)}}{r_{kk}}$$

حال به محاسبه سطر kام میپردازیم

$$\underset{0}{q_k^T} A^{(k+1)} = \underset{0}{q_k^T}[q_{k+1}r^{k+1}] + \underset{0}{q_k^T}[q_{k+2}r^{k+2}] + \cdots + \underset{0}{q_k^T}[q_n r^n] = \underset{\text{سطر با عناصر}}{[0, 0, \cdots, 0]}$$

اما:

$$A^k - A^{(K+1)} = [q_k r^k]$$

$$q_k^T A^{(k)} \underbrace{q_k^T A^{(k+1)}}_{0} = \underbrace{q_k^t [q_k r^k]}_{1}$$

پس

$$[r_{k1}, \cdots, r - nk, \cdots, r_{kn}] = q_k^t A^{(k)}$$

$$k = 1 \qquad A = A^1 \Rightarrow r_{11} = ||a_1||, q_1 = \frac{a_1}{r_{11}} r^1 = q_1^t A^1$$

$$k = 2 \qquad A^2 = A^1 - [q_1 r^1], q_2 = r_{22} = ||a_2^{(2)}||, q_2 = \frac{a_2^2}{r_{22}}, r^2 = q_2^t A^{(2)}$$

$$k = 3 \qquad A^3 = A^2 - [q_2 r^2] \Rightarrow r_{33} = ||a_3^3||, q_3 = \frac{a_3^3}{r_{33}}, r^3 = q_3^t A^3$$

$$\vdots$$

$$A^{k+1} = A^k - [q_k r^k] \Rightarrow r_{k+1k+1} = ||a_k^{(k+1)}||, q_{k+1} = \frac{a_k^{k+1}}{r_{k+1k+1}}, r^{k+1} = q_{k+1}^t A^k$$

$$\vdots$$

$$A$$