

آزمون پایان ترم درس طراحی و تحلیل الگوریتم‌ها دانشگاه شهید بهشتی - رشته‌ی علوم کامپیوتر

۱۵ تیر ۱۳۹۹

مدت: ۱۲۰ دقیقه

شماره دانشجوئی:

نام و نام خانوادگی:

1. به دلخواه، یکی از مسائل زیر را انتخاب کنید و آنرا P بنامید.

\* مسئله‌ی کوله‌پشتی صفر/یک

\* مسئله‌ی بلندترین زیرتوالی مشترک

الف) ویژگی زیرساختار بهینه در مسأله‌ی P را مورد تحقیق قرار دهید.

ب) با استفاده از ویژگی زیرساختار بهینه، یک رابطه‌ی بازگشتی برای حل P بدست آورید.

ج) برای رسیدن به مقدار بهینه، زیرمسائل را با چه ترتیبی مورد ارزیابی قرار می‌دهید؟

د) چگونگی استخراج جواب از جدول برنامه‌ریزی پویا را شرح دهید. (ارائه‌ی شبه‌کد کافی است)

ه) پیچیدگی زمان و فضای الگوریتم را بررسی کنید.

و) مرتبه‌ی زمانی الگوریتم پیشنهادی را چگونه بهبود می‌دهید؟

(۲۵ نمره)

2. الف) شبه‌کد الگوریتم  $k$ -رنگ‌پذیری رأسی گراف را بنویسید.

ب) الگوریتم فوق را تغییر دهید تا بجای بررسی  $k$ -رنگ‌پذیری گراف، عدد رنگی آنرا بدست آورد. جزئیات و درستی الگوریتم خود را توضیح دهید.

ج) بار دیگر، الگوریتم فوق را تغییر دهید تا تمام  $k$ -رنگ‌آمیزی‌های غیر یکرخت رأسی را چاپ کند. الگوریتم باید از تولید رنگ‌آمیزی‌های یکرخت اجتناب کند. استدلال کنید چگونه الگوریتم شما، غیر یکرخت بودن رنگ‌آمیزی‌ها را تضمین می‌دهد.

(۱۵ نمره)

(۱۰ نمره)

\* تنها به یکی از سئوالات ۳ و ۴ پاسخ دهید.

3. گراف جهت‌دار  $G=(V, E)$  با تابع وزن  $w: E \rightarrow \mathbb{R}$  و یک رأس  $s \in V$  به عنوان رأس مبدا داده شده است. به ازای هر  $u \in V$   $h(u)$  را برابر با تعداد یال‌های واقع بر کوتاهترین مسیر از  $s$  به  $u$  بگیرید و قرار دهید  $m = \max_{u \in V} h(u)$ . شبه‌کد الگوریتمی کارآمد برای محاسبه  $m$  ارائه دهید و پیچیدگی زمانی آنرا تحلیل کنید.

4. با استفاده از روش برنامه‌ریزی پویا، یک پراتزنبدی برای ضرب زنجیری ماتریس‌های زیر بدست آورید به قسمی که هزینه‌ی محاسبات لازم برای بدست آوردن ماتریس حاصلضرب (بر حسب تعداد ضربهای اسکالر) کمینه باشد.

$$A_1 : 3 \times 2 \quad A_2 : 2 \times 3 \quad A_3 : 3 \times 3 \quad A_4 : 3 \times 4 \quad A_5 : 4 \times 4$$

5. الف) شبه‌کد الگوریتم دایجکسترا را بنویسید.

ب) فرض کنید وزن یالهای گراف، اعداد صحیح از مجموعه  $\{0, 1, \dots, W\}$  هستند. با ارائه شبه‌کد یا تشریح جزئیات کافی توضیح دهید چگونه می‌توان با تغییر الگوریتم دایجکسترا، کوتاهترین مسیرها از مبدا واحد را در زمان  $O(VW + E)$  بدست آورد.  
(۱۰ نمره)

6. شبه‌کد الگوریتم فلویید-وارشال را با رعایت خواست‌های زیر بنویسید:

الف) الگوریتم، علاوه بر  $D$ ، ماتریس کوتاهترین فاصله‌ها،  $\Pi$ ، ماتریس رأس ماقبل واقع بر کوتاهترین مسیرها را نیز محاسبه کند.  
ب) الگوریتم تنها مجاز است از  $3n^2 + \Theta(n)$  حافظه استفاده کند. به عبارت دقیق، بجز حافظه مورد نیاز برای سه ماتریس  $W$  و  $D$  و  $\Pi$  الگوریتم برای متغیرهای میانی مجاز نیست از حافظه‌ای از مرتبه  $\Theta(n^2)$  استفاده کند.  $n$  را تعداد رأس‌های گراف بگیرید.  
(۱۵ نمره)

#### تنها به یکی از دو مسأله زیر پاسخ دهید.

۷. مجموعه‌ای از  $n$  فعالیت داده شده است:  $S = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ . برای هر فعالیت  $a_i$ ، طول زمان لازم برای به انجام رسیدن آن فعالیت،  $p_i$  از پیش مشخص و داده شده است. همچنین، درخواست اجرای هر فعالیت  $a_i$ ، رأس ساعت معین  $r_i$  به سیستم داده می‌شود که بر این اساس، سیستم نباید فعالیت  $a_i$  را پیش از سپری شده زمان  $r_i$  انجام دهد. تمامی فعالیت‌ها می‌بایست بر روی یک پردازشگر به صورت سریال (غیر موازی) اجرا شوند. ضمناً پردازشگر این توانایی را دارد که اجرای یک فعالیت را برای مدت زمان دلخواهی به حالت تعلیق درآورد و در آن زمان به اجرای یک یا چند فعالیت دیگر بپردازد و در زمان دلخواه مجدداً اجرای فعالیت معلق شده را از سر گیرد. الگوریتمی کارآمد ارائه دهید که ترتیب زمانبندی اجرا و تعلیق فعالیت‌های داده شده را به قسمی بدست آورد که مجموع زمان انتظار برای انجام تمامی فعالیت‌ها کمینه گردد.

8. فرض کنید دو آرایه‌ی  $A$  و  $B$ ، هر یک شامل  $n$  عدد صحیح مثبت داده شده‌اند. شما می‌توانید در هر یک از این آرایه‌ها، ترتیب عناصر را به دلخواه تغییر دهید. فرض کنید  $a_i$  و  $b_i$  به ترتیب نمایانگر عناصر  $i$ -ام  $A$  و  $B$  هستند. بر اساس ترتیب قرارگیری اعداد، شما معادل  $\prod_{i=1}^n a_i^{b_i}$  تومان بدست می‌آورید. الگوریتمی ارائه دهید که ترتیب بهینه برای رسیدن به بیشترین سود را بدست آورد. درباره‌ی درستی و پیچیدگی محاسباتی الگوریتم خود توضیح دهید.

موفق باشید.