Metody Monte Carlo – laboratorium 7

Zadanie 1

Napisać program implementujący model Monte Carlo (MC) propagacji niepewności pomiaru dla następujących danych wejściowych:

• model pomiaru: $Y = f(X_1 + X_2)$,

• wartość wejściowa X_1 opisana rozkładem $N(0,\ 1)$ (rozkład Gaussa),

• wartość wejściowa X_2 opisana rozkładem $N(0,\ 2)$ (rozkład Gaussa),

• M – liczba prób Monte Carlo – np. 10^6,

• prawdopodobieństwo rozszerzenia (ang. *coverage probability*) p = 0,9545.

Dane wyjściowe:

• estymator Y: $\hat{y} = \frac{1}{M}\sum_{r=1}^{M} y_r$, gdzie $y_r = f(x_{1r}, x_{2r}) = x_{1r} + x_{2r}$,

• odchylenie standardowe estymatora: $\sigma(\hat{y}) = \sqrt{\frac{1}{M-1}\sum_{r=1}^{M}(y_r - \hat{y})^2}$

• przedział rozszerzenia (ang. *coverage interval*): $[y_{min}, y_{max}]$ dla zadanego prawdopodobieństwa rozszerzenia p

i następnie porównać otrzymane wyniki z obliczeniami wykonanymi zgodnie z „tradycyjnym" modelem propagacji niepewności GUM*.

Uwagi pomocnicze:

Algorytm MC składa się z następujących kroków:

1. określenie liczby prób Monte Carlo M
2. wygenerowanie M wektorów danych wejściowych $\boldsymbol{X}$
3. dla każdego tak wygenerowanego wektora obliczenie odpowiadającej mu wartości Y
4. obliczenie danych wyjściowych (odpowiednich statystyk)

• Wyznaczanie przedziału rozszerzenia można dokonać według następującego algorytmu

1. przyjąć $q = pM$, jeżeli pM jest liczbą całkowitą lub q = część całkowita z $pM + 1/2$
2. $y_{min} = y_{(r)}$ i $y_{max} = y_{(r+q)}$, gdzie $r = (M-q)/2$ lub r = część całkowita z $(M-q+1)/2$, a

Metody Monte Carlo – laboratorium 7

$y_{(r)}$ to dyskretna reprezentacja dystrybuanty G_Y, otrzymana poprzez posortowanie zbioru otrzymanych wartości y_r w porządku rosnącym. Sortowania tego można dokonać za pomocą funkcji standardowej *qsort* (*yr, M, sizeof*(*double*), *funkcja_porownujaca*). Funkcja porównująca powinna mieć postać:

```
int funkcja_porownujaca (const void * a, const void * b) {
    if (*(double*)a - *(double*)b <  0.0) return -1;
    if (*(double*)a - *(double*)b >  0.0) return  1;
    if (*(double*)a - *(double*)b == 0.0) return  0;
}
```

* Według *Guide to the expression of uncertainty in measurement* (*GUM*) wartość niepewności złożonej (odchylenie standardowe) należy wyznaczyć zgodnie z zależnością:

$\sigma_c(y) = \sqrt{\sum_{i=1}^{N} \left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right)^2 \sigma^2(x_i)}$ (dla danych wejściowych nie skorelowanych, w tym przypadku $N = 2$ i $\frac{\partial f}{\partial x_1} = 1$, $\frac{\partial f}{\partial x_2} = 1$, a $\sigma(x_i)$ to odchylenia standardowe wielkości wejściowych), a przedział rozszerzenia wyznaczyć jako $[\mu(y) - 2\sigma_c(y),\ \mu(y) + 2\sigma_c(y)]$, gdzie $\mu(y)$ to wartość średnia.

Zadanie 2

Napisać program implementujący model MC propagacji niepewności pomiaru dla następujących danych wejściowych:

• model pomiaru: $Y = f(X_1 + X_2)$,

• wartość wejściowa X_1 opisana rozkładem prostokątnym (tj. równomiernym) $R(0,\ 4)$,

• wartość wejściowa X_2 opisana rozkładem prostokątnym $R(5,\ 6)$,

• *M* – liczba prób Monte Carlo – np. 10^6,

• prawdopodobieństwo rozszerzenia $p = 0{,}95$

i wyznaczyć estymator *Y*, odchylenie standardowe estymatora oraz przedział rozszerzenia.

Dodatkowo w programie proszę wyznaczyć histogramy funkcji gęstości prawdopodobieństwa $X_1,\ X_2,\ Y$ i przedstawić je w formie graficznej. Jakiego rozkładu należy oczekiwać?

Metody Monte Carlo – laboratorium 7

Zadanie 3

(Opracowane na podstawie: JCGM 101:2008 *Guide to the expression of uncertainty in measurement – Propagation of distributions using a Monte Carlo method* – rozdział 9.5.)

Napisać program implementujący model MC propagacji niepewności pomiaru dla następujących danych wejściowych:

• model pomiaru: $Y = X_1 + X_2 + X_3 + X_4 - X_1[X_8(X_6 + X_7) + X_5 X_9] - K$

Wejście	Rozkład	Parametry
X_1	$t_\nu(\mu, \sigma^2)$	μ = 50000623 nm, σ = 25 nm, ν = 18
X_2	$t_\nu(\mu, \sigma^2)$	μ = 215 nm, σ = 6 nm, ν = 24
X_3	$t_\nu(\mu, \sigma^2)$	μ = 0 nm, σ = 4 nm, ν = 5
X_4	$t_\nu(\mu, \sigma^2)$	μ = 0 nm, σ = 7 nm, ν = 8
X_5	$R(a, b)$	$a = 9{,}5\times10^{-6}$ °C^{-1}, $b = 13{,}5\times10^{-6}$ °C^{-1}
X_6	$N(\mu, \sigma^2)$	μ = – 0,1 °C, σ = 0,2 °C
X_7	$U(a, b)$	a = – 0,5 °C, b = 0,5 °C
X_8	$Ctrap(a, b, d)$	$a = -1{,}0\times10^{-6}$ °C^{-1}, $b = 1{,}0\times10^{-6}$ °C^{-1}, $d = 0{,}1\times10^{-6}$ °C^{-1}
X_9	$Ctrap(a, b, d)$	a = – 0,050 °C, b = 0,050 °C, d = 0,025 °C
K	50 mm	

i wyznaczyć estymator *Y*, odchylenie standardowe estymatora oraz przedział rozszerzenia dla $p = 0{,}99$.

Porównać otrzymane wyniki z danymi ze strony 55 dokumentu JCGM 101:2008 (http://www.bipm.org/utils/common/documents/jcgm/JCGM_101_2008_E.pdf)

Uwagi:

• $t_\nu(\mu, \sigma^2)$ – rozkład ten otrzymamy korzystając z następującej zależności: $\xi = \mu + \sigma t$, gdzie *t* to zmienna losowa wylosowana zgodnie z centralnym rozkładem *t* (Studenta) o *v* stopniach swobody; do wygenerowania *t* proszę wykorzystać funkcję *gsl_ran_tdist* (*const gsl_rng * r, double stopnie_swobody*) z biblioteki *gsl*,

Metody Monte Carlo – laboratorium 7

- $R(a,b)$ – rozkład prostokątny: $\xi = a+(b-a)r$, gdzie $r = R(0, 1)$,
- $N(\mu,\sigma^2)$ – rozkład Gaussa: $\xi = \mu+\sigma t$, gdzie t to zmienna losowa wylosowana zgodnie z rozkładem $N(0, 1)$; proszę wykorzystać funkcję *gsl_ran_gaussian* (*const gsl_rng* * *r, double sigma*) z biblioteki *gsl*,
- $U(a,b)$ – rozkład arc sin: $\xi = \frac{a+b}{2}+\frac{b-a}{2}\sin(2\pi r)$, gdzie $r = R(0, 1)$,
- $Ctrap(a,b,d)$ – rozkład prostokątny z niepewnymi wartościami kresów: $\xi = a_s+(b_s-a_s)r_2$, $a_s=(a-d)+2dr_1$, $b_s=(a+b)-a_s$, zaś $r_1, r_2 = R(0, 1)$.