

# Modele i Wnioskowanie Statystyczne

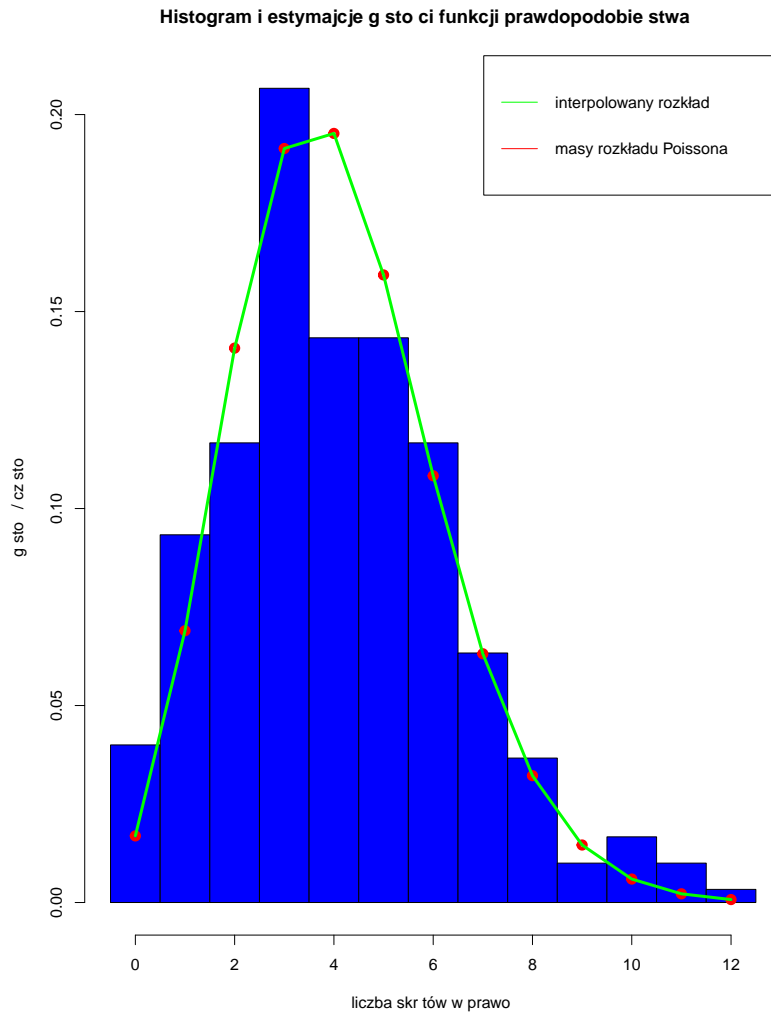
## Laboratorium 2

### Sprawozdanie

Igor Markiewicz

### Zadanie 1

a) Parametr został wyestymowany w następujący sposób  $\lambda = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i \approx 4,08$



Rys. 1: Histogram i estymowane funkcje gęstości

Wnioski :

- Możemy stwierdzić że w przybliżeniu histogram reprezentuje rozkład Poissona

b) Oszacowane odchylenie  $\sigma \approx 0,13$

## Zadanie 2

### b) Estymatory

- metody momentów (wyprowadzenie na wykładzie) :

$$\hat{\alpha} = \frac{m_1^2}{m_2 - m_1^2}$$

$$\hat{\beta} = \frac{m_2 - m_1^2}{m_1}$$

$$m_1 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i$$

$$m_2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i^2$$

- metody największej wiarygodności :

$$p(\alpha, \beta | x) = \frac{x^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)\beta^\alpha} \exp\left(-\frac{x}{\beta}\right)$$

$$p(\alpha, \beta | x_1, x_2, \dots, x_n) = \left(\frac{1}{\Gamma(\alpha)\beta^\alpha}\right)^n (x_1 \cdot x_2 \cdot \dots \cdot x_n)^{\alpha-1} \exp\left(-\frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{\beta}\right)$$

$$l(\alpha, \beta | \mathbf{x}) = n(\alpha - 1)\overline{\ln \mathbf{x}} - n \ln \Gamma(\alpha) - n\alpha \ln \beta - \frac{n\overline{\mathbf{x}}}{\beta}$$

$$\frac{\partial l}{\partial \beta} = -\frac{n\alpha}{\beta} + \frac{n\overline{\mathbf{x}}}{\beta^2} \implies \hat{\beta} = \frac{\overline{\mathbf{x}}}{\hat{\alpha}}$$

$$\frac{\partial l}{\partial \alpha} = n\overline{\ln \mathbf{x}} - n \frac{\partial \ln \Gamma(\alpha)}{\partial \alpha} - n \ln \beta = n\overline{\ln \mathbf{x}} - n \frac{\partial \ln \Gamma(\alpha)}{\partial \alpha} - n \ln \overline{\mathbf{x}} + n \ln \alpha$$

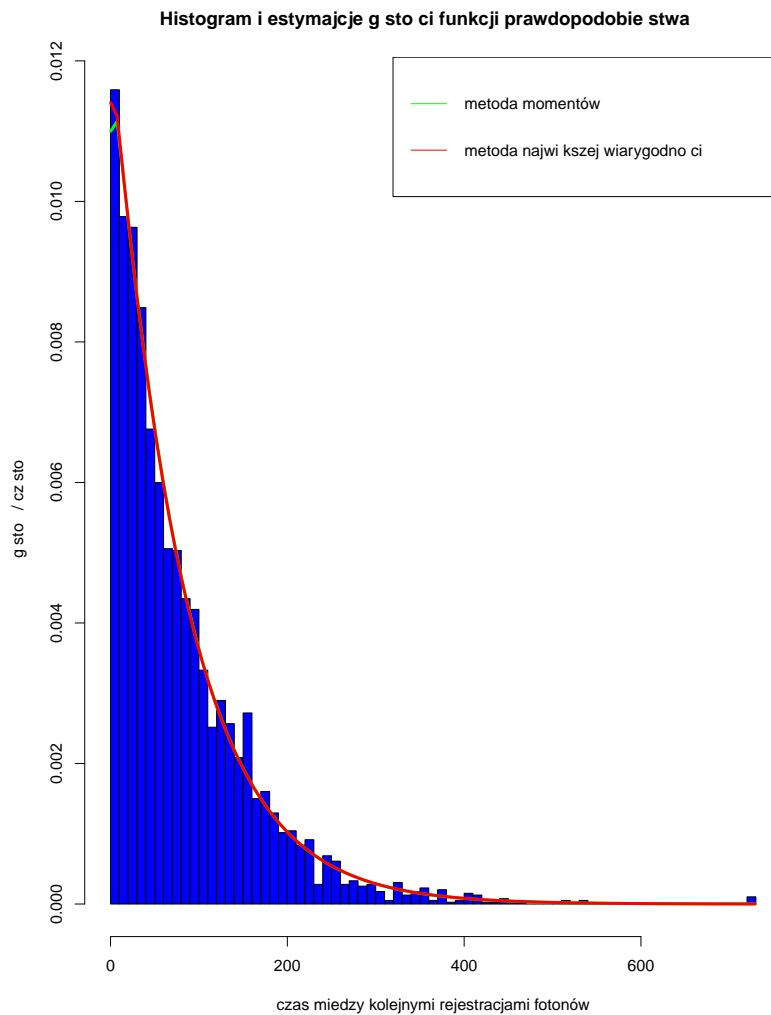
Zadanie sprowadza się teraz do poszukiwania miejsca zerowego funkcji (używając np: metody *uniroot*) :

$$\ln \alpha - \underbrace{\frac{\partial \ln \Gamma(\alpha)}{\partial \alpha}}_{\text{funkcja digamma}} + \underbrace{\overline{\ln \mathbf{x}} - \ln \overline{\mathbf{x}}}_{\text{const}}$$

	$\hat{\alpha}$	$\hat{\beta}$
metoda momentów	1,03	77,93
metoda największej wiarygodności	1,02	78,49

Tab. 1: Porównanie wartości estymatorów

a), c)



Rys. 2: Histogram i estymowane funkcje gęstości (dla 100. koszyków)

Wnioski :

- Rozkład  $\Gamma$  z dużym prawdopodobieństwem może opisywać dane z Rys. 2 estymując rozkład wykładniczy postaci  $\Gamma(1, \lambda)$  (co potwierdzają wyliczone współczynniki  $\alpha$ )
- Oba estymatory dają podobne wyniki, a narysowane funkcje gęstości pokrywają się, poza niewielkim przedziałem dla małych wartości czasu między kolejnymi rejestracjami fotonów

d)

	$\sigma_{\hat{\alpha}}$	$\sigma_{\hat{\beta}}$
metoda momentów	0,03	2,71
metoda największej wiarygodności	0,02	1,94

Tab. 2: Porównanie odchyłeń standardowych estymatorów

	$\sigma_{\hat{\alpha}} - 2,5 \%$	$\sigma_{\hat{\alpha}} - 97,5 \%$	$\sigma_{\hat{\beta}} - 2,5 \%$	$\sigma_{\hat{\beta}} - 97,5 \%$
metoda momentów	0,96	1,09	73,00	83,33
metoda największej wiarygodności	0,99	1,08	74,27	81,86

Tab. 3: Porównanie przedziałów ufności dla estymatorów

Wnioski :

- Estymator metody momentów charakteryzuje się większym odchyleniem standardowym (w szczególności dla parametru  $\beta$ ) przez co posiada szersze przedziały ufności niż estymator metody największej wiarygodności

### Zadanie 3

a) Wyestymowane parametry :

$$\hat{\mu} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i \approx -4,23$$

$$S^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (x_i - \hat{\mu})^2 \approx 0,71$$

b) Przedziały ufności dla  $\mu$  gdy  $\sigma$  nie jest znane :

$$\left[ \bar{X}_n - \frac{S}{\sqrt{n}} F_{t_{n-1}}^{-1} \left( \frac{1+\gamma}{2} \right), \bar{X}_n + \frac{S}{\sqrt{n}} F_{t_{n-1}}^{-1} \left( \frac{1+\gamma}{2} \right) \right]$$

gdzie  $F_{t_{n-1}}^{-1}$  jest funkcją kwantylową rozkładu t-Studenta o  $n-1$  stopniach swobody

	lewy kraniec	prawy kraniec
90 %	-4,49	-3,98
95 %	-4,54	-3,93
99 %	-4,64	-3,83

Tab. 4: Przedziały ufności dla wartości średniej

c) Przedziały ufności dla  $\sigma^2$  gdy  $\mu$  nie jest znane :

$$\left[ \frac{(n-1)S^2}{F_{\chi_{n-1}^2}^{-1}(1-b)}, \frac{(n-1)S^2}{F_{\chi_{n-1}^2}^{-1}(a)} \right]$$

gdzie  $F_{\chi_{n-1}^2}^{-1}$  jest funkcją kwantylową rozkładu  $\chi^2$  o  $n-1$  stopniach swobody oraz przyjęto  $a = b = \frac{1+\gamma}{2}$

	lewy kraniec	prawy kraniec
90 %	0,49	1,14
95 %	0,46	1,25
99 %	0,40	1,52

Tab. 5: Przedziały ufności dla wariancji