

## Ćwiczenie 3

Estymacja bayesowska

termin oddania (wysłania) sprawozdań: **13 maja 2018**

Rozwiązanie każdego zadania składa się z dwóch części. Pierwszą z nich stanowi opracowanie zadania (założenia, opis metody, wyprowadzenia niezbędnych zależności, rysunki, wnioski, komentarze), którego rezultatem powinien być plik PDF przesłany na adres [MWS.A-owner@elka.pw.edu.pl](mailto:MWS.A-owner@elka.pw.edu.pl). Na ten sam adres należy przesłać r-skrypt ( $R$ ), w którym zawarte są wszelkie obliczenia numeryczne oraz wywołania procedur związanych z generowaniem wykresów zamieszczonych w „opisowej” części sprawozdania.

Nadsyłane pliki (dokładnie dwa) powinny mieć nazwy (pisane małymi literami): `xxxxxxin.pdf` oraz `xxxxxxin.r` (skrypt w  $R$ ), gdzie `xxxxxx` jest numerem albumu (indeksu), a `in` — inicjałami autora sprawozdania.

**Zadanie 1.** Rzucona pinezka upada ostrzem do dołu lub do góry. Zaproponuj rozkład a priori prawdopodobieństwa  $p$  tego, że pinezka upadnie ostrzem do góry. Następnie rzuć pinezką 20 razy (zanotuj wyniki kolejnych rzutów) i na tej podstawie wyznacz rozkład a posteriori parametru  $p$  oraz bayesowski estymator  $\hat{p}$ .

Rzuć pinezką jeszcze 20 razy (zanotuj wyniki). Wyznacz rozkład a posteriori oparty na wszystkich 40 rzutach i porównaj go z rozkładem uzyskanym po pierwszych 20 rzutach.

**Zadanie 2.** Załóż, że czas oczekiwania na obsługę w pewnej kolejce jest modelowany rozkładem wykładniczym z nieznanym parametrem  $\lambda$ . Rozważ następujące rozkłady a priori parametru  $\lambda$ :

- a) rozkład gamma ze średnią 0.5 i wariancją 1,
- b) rozkład gamma ze średnią 10 i wariancją 20.

Dla każdego z tych rozkładów wyznacz numerycznie (przy pomocy reguły Bayesa, bez wykorzystywania rozkładów sprzężonych) i narysuj funkcje gęstości rozkładów a posteriori uzyskanych po zaobserwowaniu, że średni czas oczekiwania w rozważanej kolejce, wyliczony dla losowo wybranych 20 osób, wynosi 5.1 minuty. Porównaj i skomentuj uzyskane rozkłady. Czy otrzymane rozkłady da się zaliczyć do jakiejś znanej klasy rozkładów?

**Zadanie 3.** 100 wyprodukowanych urządzeń (z tej samej linii produkcyjnej) zostało poddanych testom. Okazało się, że wśród nich znalazło się  $x$  urządzeń wadliwych, gdzie  $x$  jest ostatnią cyfrą numeru indeksu wykonującego ćwiczenie. Niech  $\theta$  oznacza frakcję urządzeń wadliwych uzyskiwanych z rozważanej linii produkcyjnej (tzn. stosunek liczby urządzeń wadliwych do liczby wszystkich wyprodukowanych urządzeń). Przyjmując za rozkład a priori parametru  $\theta$  rozkład beta z parametrami

a)  $\alpha = \beta = 1$ ,

b)  $\alpha = 0.5$ ,  $\beta = 5$ ,

wyznacz i porównaj rozkłady a posteriori parametru  $\theta$ . Na podstawie uzyskanych rozkładów wyznacz estymatory parametru  $\theta$ . Skomentuj uzyskane wyniki.