Лекція 5. Симпліціальні апроксимації.

Теорема. Нехай (K,σ) і (L,τ) поліедри з тріангуляціями ($K \subset \mathbb{R}^n$, $L \subset \mathbb{R}^m$), K — скінченний і $f: K \to L$ — неперервне відображення.

Тоді $\forall \varepsilon > 0$ $\exists$ непер. відобр. $g: K \to L$ з такими властив.:

① g — симпліціальне відносно деяких тріангуляцій

$\sigma' < \sigma$ ~~$\tau' < \tau$~~ $g: (K, \sigma') \to (L, \tau)$

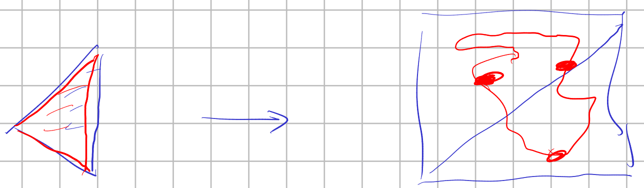
σ' і τ' підрозбиття σ і τ

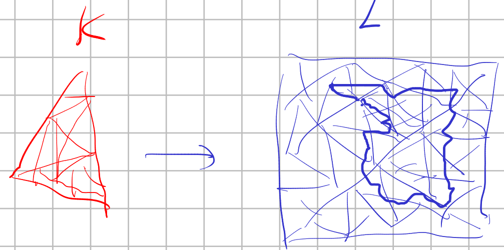
② g гомотопне f, причому $\exists H: K \times [0,1] \to L$

ⓐ $H_0 = f$, $H_1 = g$

ⓑ $\mathrm{diam}(H(x \times [0,1])) < \varepsilon$ $\forall x \in K$

$|f(x) - H_t(x)| < \varepsilon$





Т. (Мілнор) $\exists$ K — топ. пр-р і на ньому дві тріангуляції (K, σ) (K, τ) такі, що $\nexists$ спільного підрозбиття σ і τ.

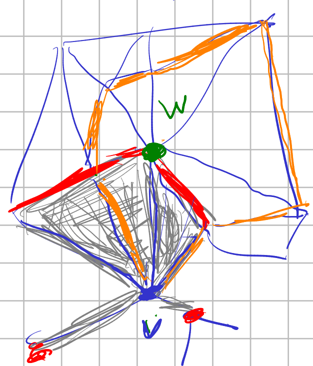
$\varrho < \sigma$
$< \tau$

"Локальна структура поліедрів в "околі симплекса"

Нехай K — поліедр з тріангуляцією σ.

① Зірка вершини v — об'єднання всіх симплексів із σ які містять v.

$St(v)$



② Відкрита зірка v — це об'єднання внутрішностей симплексів, які містять v.

$\mathring{St}(v)$

$\mathrm{Int}(\bullet) = \bullet$

$\mathrm{Int}(\bullet\!-\!\bullet) = \circ\!-\!\circ$

$\mathrm{Int}\,\Delta =$

$\partial St(v) = St(v) \setminus \mathring{St}(v)$

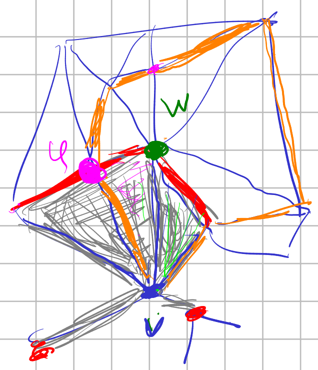
Лема. Нехай v — вершина (K, σ).

① $\mathring{St}(v)$ — це відкритий окіл v в K

② $St(v)$ — гомеоморфна конусу над $\partial St(v)$ з вершиною в т. v.

③ Якщо $\mathring{St}(v) \cap \mathring{St}(w) \neq \emptyset$, то K містить симплекс $[v, w]$

④ Якщо $\bigcap_{i=1}^{a} \mathring{St}(v_i) \neq \emptyset$ і $v_i \neq v_j$, $i \neq j$, то K містить симплекс $(v_1, \dots, v_a)$



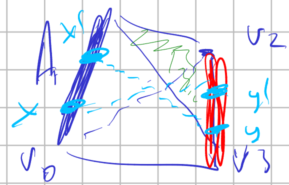
Зірка симплекса $A \in \sigma$ — це об'єднання всіх симплексів, які перетинають A.

$St(A)$

Відкрита зірка A — це об'єднання внутрішностей симплексів, які перетинають A.

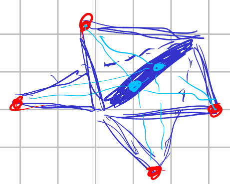
$\mathring{St}(A)$

$\partial St(A) = St(A) \setminus \mathring{St}(A)$



$St\,A$ — вся піраміда

$St(A)$ $\quad$ A



Лема. Нехай A — симплекс в σ. Тоді

① $\mathring{St}(A)$ — це відкритий окіл A

② $St(A)$ має таку власт. $\forall x, x' \in A$ і $y, y' \in \partial St(A)$

ⓐ Відрізки $[x, y]$ і $[x', y'] \subset St(A)$

ⓑ $(x, y) \cap (x', y') = \emptyset$, якщо $x \neq x'$ або $y \neq y'$

$St(A)$ є об'єднання конусів над $\partial St(A)$ з вершиною в A.

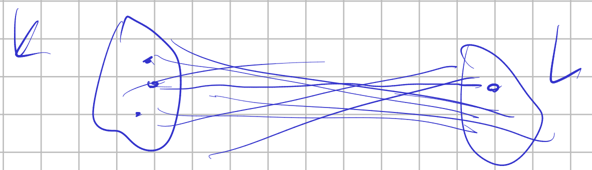
або $St(A)$ є об'єднання конусів над A з вершиною на $\partial St(A)$

$$\boxed{St(A) = A * \partial St(A)}$$

Join поліедрів K і L = $K * L$

"Ке стар" $K * L$ – це поліедр, який утворений

$$K * L = \bigcup_{k \in K} C_k(L) = \bigcup_{e \in L} C_e(K)$$



K і L – симпліц. комплекси $(K, \Sigma(K))$ $(L, \Sigma(L))$

$$\left(K * L, \ \Sigma = \{ \alpha \cup \beta \mid \alpha \in \Sigma(K), \ \beta \in \Sigma(L) \}\right)$$

$K = \{a, b\}$ $\Sigma(K) = 2^K = \{\emptyset, a, b, ab\}$

$L = \{c, d\}$ $\Sigma(L) = 2^L = \{\emptyset, c, d, cd\}$

$K * L$, $\Sigma = 2^{\{a, b, c, d\}}$

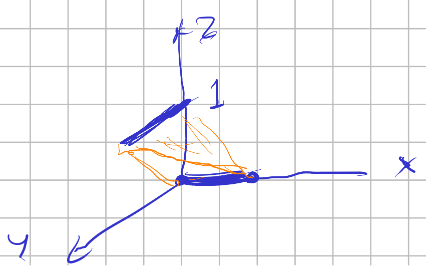
Геометрична реалізація $K * L$

Нехай $K \subset \mathbb{R}^n$, $L \subset \mathbb{R}^m$

$$K * L \subset \mathbb{R}^{n+m+1} = \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}$$

$$K * L = \{ ((1-t)x, \ ty, \ t) \mid t \in [0,1], \ x \in K, \ y \in L \}$$

$K = [0,1]$ $L = [0,1]$



$t=0$ $\quad ((1-0)x,\ 0y,\ 0) = (x,0,0) \in K$

$t=1$ $\quad ((1-1)x,\ 1y,\ 1) = (0,y,1)$

$$((1-t)x,\ ty,\ t) = ((1-s)x',\ sy',\ s) \qquad s,t\in(0,1)$$

$$\Downarrow$$

$$t=s$$

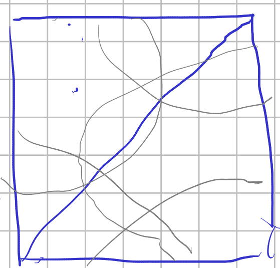
$$((1-t)x,\ ty,\ t) = ((1-t)x',\ ty',\ t) \qquad t\in(0,1)$$

$x=x'$ $\quad y=y'$

Лема 1. Нехай (K,σ) — скінченний комплекс, і $U_1 \dots U_a$ — відкрите покриття K: $\bigcup_{i=1}^{a} U_i = K$

Тоді $\exists$ тріангуляція σ' яка є підрозбиттям σ $\boxed{\sigma' < \sigma}$ таке, що $\forall$ вершини $v\in\sigma'$ її зірка $St_{\sigma'}(v)$ міститься в деякому U_i

$\Downarrow$

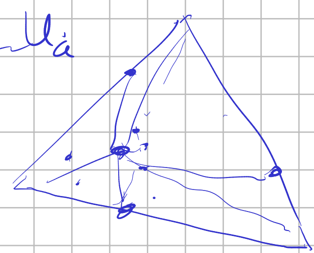


(Лема Лебега)

K-компакт і $U_1 \dots U_a$ - відкрите покр. $\Rightarrow$ $\exists\, \varepsilon>0$ $\forall x\in K$ шар радіусу $B_\varepsilon(x)$ міститься в деякому U_i

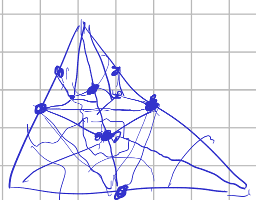
ε — число Лебега покриття

Нехай ε — число Лебега покр $U_1 \dots U_a$



Нехай $d = \max\limits_{\alpha\in\Sigma(K)} \operatorname{diam}(\alpha)$

Тоді $d<\infty$. Розгл операцію β — барицентр. підрозбиття



Якщо $\alpha=(v_0 \dots v_k)$ то задаємо нову вершину $w = \dfrac{v_0+v_1+\dots+v_k}{k+1}$

$\beta\beta(\sigma)$

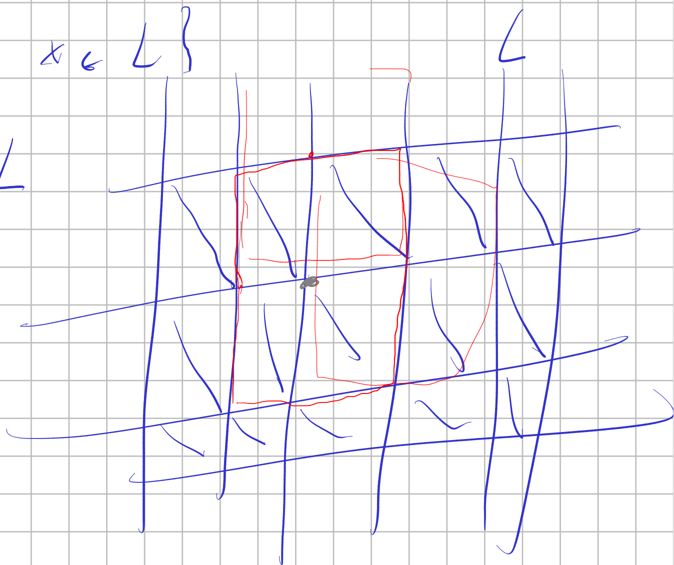
Якщо взяти $\sigma' = \beta\beta\beta \dots \beta(\sigma)$ достатньо малих розбиттів, то

$\forall v \in \sigma' \quad \mathrm{diam}(St_{\sigma'}(v)) < \varepsilon$

<u>Доведення теореми.</u> Нехай $f: (K, \sigma) \to (L, \tau)$ непер. відобр. поліедрів, K — скінченний.

① Нехай $\{ V_x = \mathring{St}_\tau(x), \ x \in L \}$

Тоді $\{V_x\}$ — це відкрите покриття L



② Нехай $U_x = f^{-1}(V_x)$ — $x \in L$

Тоді $\{U_x\}$ — відкр. покриття K

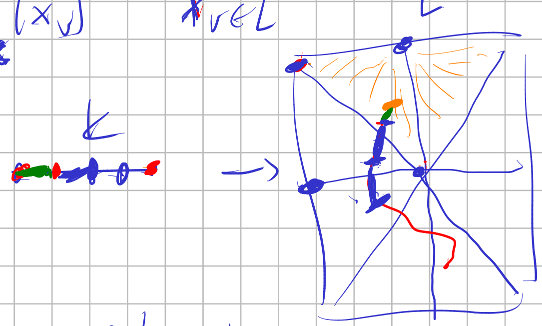
Нехай $U_1 \dots U_n$ — скінченне підпокриття K

③ Нехай σ' — тріангуляція K, $\sigma' < \sigma$ і

$\forall v \in \sigma'$ $St_{\sigma'}(v)$ міститься в якомусь $U_i = f^{-1}(\mathring{St}(x_i))$

Таким чином $\forall v \in \sigma'$ $\exists$ (не одна) вершина $x_v \in \tau$

така, що $\underset{v \in K}{f(St_{\sigma'}(v))} \subset \mathring{St}_\tau(x_v)$ $\quad x_v \in L$



Побудуємо відобр. між <u>вершинами</u> $g: (K, \sigma') \to (L, \tau)$

$g(v) = \underline{x_v}$ таке, щоб $f(St_{\sigma'}(v)) \subset \mathring{St}(x_v)$

<u>Тоді</u> g — симпліціальне відобр між симпліціальними комплексами K і L, тобто:

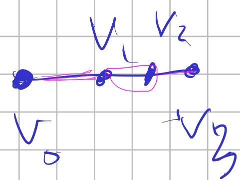
Якщо $\alpha = (v_0 \dots v_p)$ — симплекс в (K, σ') то $(x_{v_0} \dots x_{v_p})$ — симплекс в (L, τ)

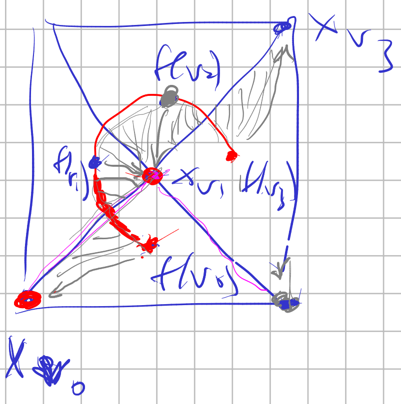
Тоді g індукує симпліціальне відображ. між поліедрами

$$g(\alpha_0 v_0 + \dots + \alpha_p v_p) = \alpha_0 x_{v_0} + \dots + \alpha_p x_{v_p}$$

Більш того

f гомотопне g





$H: K \times [0,1] \to L$

можна задати формулою

$$H(x,t) = (1-t) f(x) + t g(x)$$

$f(St(v_0)) \subset St(x_{v_0})$

$f(St(v_1)) \subset St(x_{v_1})$

$f(St(v_2)) \subset St(x_{v_1})$

$f(St(v_3)) \subset St(x_{v_3})$

$x_{v_2} = x_{v_1}$