Лекція 3 Вкладення поліедрів в $\mathbb{R}^n$. Кусково-лінійні відобр. поліедрів.

Симпліціальний комплекс.

$\underbrace{A = \{x_0 \ldots x_k\}}_{\text{"симп. комплекс"}} \Rightarrow \underbrace{\bar{A}}_{\text{поліедр}}$

Нехай K – довільна множина

$\Sigma(K)$ – деяка сім'я скінченних підмножин в K

яка "замкнена відносно взяття підмножин", тобто

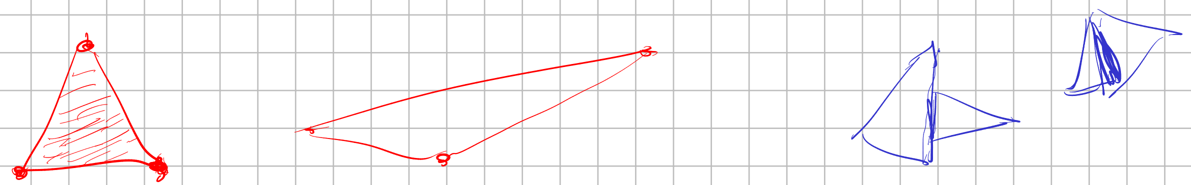
якщо $A \in \Sigma(K)$ і $B \subset A$ – підм. в A, то $B \in \Sigma(K)$

Тоді $\Sigma(K)$ наз. симпліціальна структура на K,

а $(K, \Sigma(K))$, або просто K назив. симпліціальним комплексом.

[Приклад $K = \{x_0 \ldots x_n\}$, $\Sigma(K) = 2^K$ – мн-на всіх підмножин

- Елементи $\Sigma(K)$ називають симплексами.
- якщо $B \subset A \in \Sigma(K)$, то B назив. гранню A.



якщо $A, B \in \Sigma(K)$, тоді $A \cap B \in \Sigma(K)$ і є спільною гранню A і B.

Нехай $L \subset \mathbb{R}^n$ поліедр з заданою тріангуляцією $L = \bigcup_i A_i$ $\forall i,j$ $A_i\ A_j$ мають правильні перетини

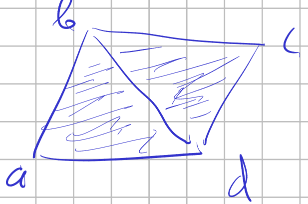
Тоді L можна поставити у відповідність симпліціальний комплекс K:

K – мн-на вершин L.

$\Sigma(K) = \{$ мн-ни вершин граней всіх симплексів $A_i \}$

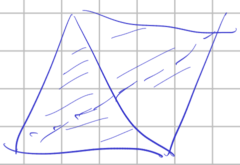
Тоді $\Sigma(K)$ – симпліціальна структ. на K

і L – називають геометричною реалізацією K.



$K = \{a, b, c, d\}$

$\Sigma(K) = \{\emptyset, a, b, c, d, ab, bd, ad, bc, cd, abd, bcd\}$



abcd

Теорема 1 Нехай K — скінч. симпліціальний комплекс з n вершин. Тоді існує його геометрична реалізація у вигляді підкомплексу симплекса розм. $n-1$

$K = \{\underbrace{x_0 \dots x_n}_{(n-1)+1}\}$ в $\mathbb{R}^{n-1}$ беремо n ЛНЗ точок

кожен $\sigma = \{x_{i_1}, \dots, x_{i_l}\} \in \Sigma(K)$

$\Rightarrow$ грань симплекса Δ^{n-1}

Означення.

Нехай K — симпл. комплекс, $\sigma = \{x_0, \dots, x_l\} \in \Sigma(K)$ і складається з $l+1$ точок. Тоді $\dim \sigma := l$.

$$\dim K := \max_{\sigma \in \Sigma(K)} \dim \sigma$$

Теорема 2. Нехай K — скінченний симпл. комплекс $\dim K = n$. Тоді $\exists$ геометрична реалізація K в $\mathbb{R}^{2n+1}$

Приклад. $\dim K = 0$ . . . . . $\mathbb{R}^{2\cdot 0+1} =$

$\dim K = 1$

$\subset \mathbb{R}^{2\cdot 1+1=3}$

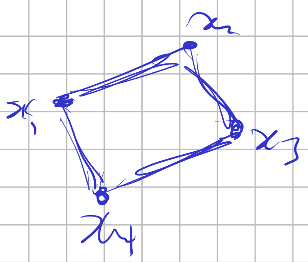
$\Downarrow$ (Теорема 2.)

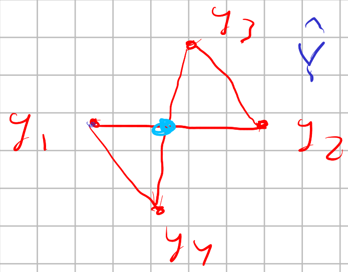
Нехай a — число вершин в $K = \{x_1, \dots, x_a\}$

Візьмемо в $\mathbb{R}^{2n+1} = k$ довільних a точок $Y = \{y_1, \dots, y_a\}$

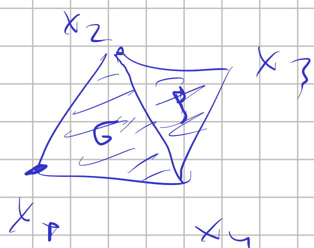
$\forall$ симплекс $\sigma = \{x_{i_1} \dots x_{i_e}\} \in \Sigma(K) \Rightarrow \hat{\sigma} = \{y_{i_1} \dots y_{i_e}\}$

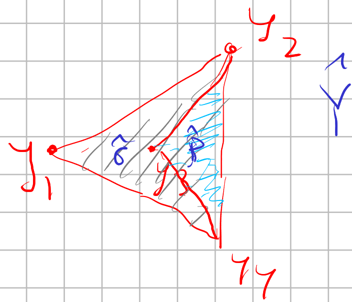
Опукла оболонка цих точок





$\hat{Y} = \bigcup_{\sigma \in \Sigma(K)} \hat{\sigma}$





$K - \mathbb{R}P^2 \not\subset \mathbb{R}^3$

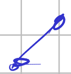
$x_1 \quad x_2 \quad x_3 \quad x_4$

$x_1x_2 \quad 24 \quad 14 \quad 13 \quad 34$

$124 \quad 234$

Тверд.: Якщо $k \geq 2n+1$ (розмірність $\mathbb{R}^k$)

то $\forall \varepsilon > 0$ $\{y_1 \dots y_a\}$ можна ε-поворушити так, щоб нова множина точок $Z = \{z_1 \dots z_a\}$ задавала геом. реалізацію.



$\Downarrow$ Нам потрібно, щоб $\forall$ симплекс $\sigma, \rho \in \Sigma(K)$ $\hat{\sigma}$ $\hat{\rho}$ мали правильний перетин.

$\dim \hat{\sigma}, \dim \hat{\rho} \leq n = \dim K$

Ми можемо побачити собі 2 симплекси в $\mathbb{R}^{2n+1}$

$\sigma = \{y_{i_0} \dots y_{i_p}\} \qquad \rho = \{y_{j_0} \dots y_{j_q}\}$

$p+q+2 \leq n+n+2 = 2n+2$ — максимальне число ЛНЗ точок в $\mathbb{R}^{2n+1}$

$\sigma \cup \rho = \{ \overbrace{z_0 \dots z_k}^{2n+2} \}$ $\quad k = 2n+1$

$$2n+1 \geq \overbrace{\begin{pmatrix} z_1 - z_0 \\ z_2 - z_0 \\ \dots \\ z_k - z_0 \end{pmatrix}}^{2n+1} = A_{\sigma,\rho}$$

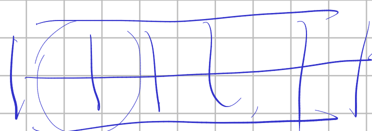
(так само як в k)

Коли $\hat{\sigma}\, \hat{\rho}$ - прав. перетинаються $\iff$ $\sigma \cup \rho$ - ЛНЗ система $\iff$ ранк $A_{\sigma\cup\rho}$ - максимальний $= k$

$\iff$ $A_{\sigma\cup\rho}$ містить ненульовий мінор.

$\iff$ $\sum M_\alpha^2 \neq 0$

M_α - мінор $A_{\sigma\cup\rho}$



C_5^2

$$f(y_1 \dots y_q) = \prod_{\sigma,\rho \in \Sigma(K)} \sum_{M_\alpha \text{ - мінор } A_{\sigma\cup\rho}} M_\alpha^2 \text{ - многочлен.}$$

$2n+1$ коорд.

$f^{-1}(0) \subset \mathbb{R}^{q(2n+1)}$ $\qquad \dim f^{-1}(0) \leq q(2n+1) - 1.$

$\forall\, (y_1 \dots y_q)$ $\qquad \mathbb{R}^{q(2n+1)} \setminus f^{-1}(0)$ - всюди щільна множина

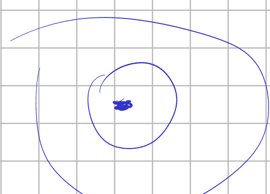
ми завжди знайдемо $\exists$ поруч $(z_1 \dots z_q)$: $f(z_1 \dots z_q) \neq 0$, тоді для $z = (z_1 \dots z_q)$

симплекси в $\hat{z}$ - правильно розміщені

тобто $\hat{z}$ - є геометр. реаліз. K.

$f(x,y) = xy$

$f(x,y) = x^2 + y^2$



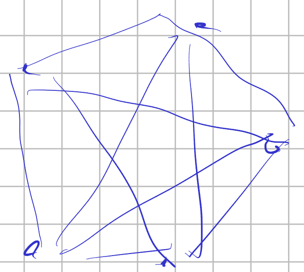
$\forall\ \sigma, \rho$ система $\{ y_{i_0} \ldots y_{i_\rho}\ y_{\delta_0} \ldots y_{\delta_q} \}$

$y_{i_r} = \boxed{}$ в $\mathbb{R}^{2n+1}$

$$n+n+2-1 = 2n+1 \geq \begin{array}{c} 2n+1 \\ \left| \begin{array}{c} y_{i_1} - y_{i_0} \\ \hline y_{i_2} - y_{i_0} \\ \hline \ldots \\ y_{i_\rho} - y_{i_0} \\ \hline y_{\delta_0} - y_{i_0} \\ \hline \ldots \\ \hline y_{\delta_q} - y_{i_0} \end{array} \right| \end{array}$$

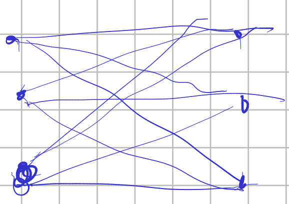
Теорема Понтрягіна – Куратовського

K_5



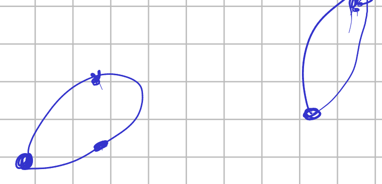
$\not\subset \mathbb{R}^2$

K_{33}



K – граф який не вкладається в $\mathbb{R}^2$, то K містить або K_5 або K_{33}

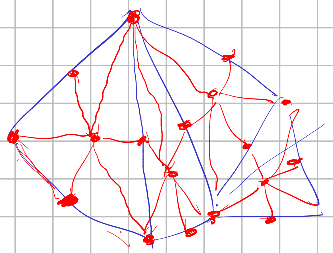
$\dim K = 1 \subset \mathbb{R}^{2n+1} = \mathbb{R}^3$



$\mathrm{Emb}(K^n, \mathbb{R}^{2n+1}) \hookrightarrow C(K^n, \mathbb{R}^{2n+1})$

Всюди щільне (першої категорії)

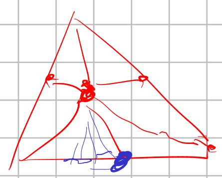
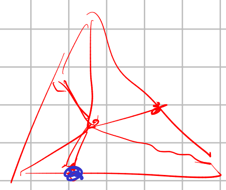
1 В внутр. кожної грані беремо точку

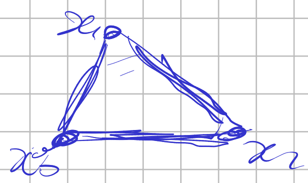


$A = \{x_0 \dots x_k\}$

$\bar{A} = \{\underline{\sum \alpha_i x_i} \mid \alpha_i \geq 0,\ \sum \alpha_i = 1\}$

$B \subset A$ – підмн. $\quad \underbrace{\bar{B}}_{}$ – грань A

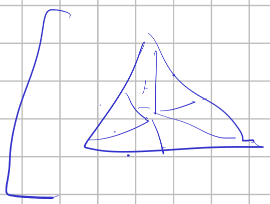


-1 $\quad \emptyset \quad x_0\ x_1\ x_2$

$x_0 x_1 \quad x_1 x_2$

$x_0 x_2$

$x_0 x_1 x_2$

 $\quad \mathbb{Z}^6 \to \mathbb{Z}^{12} \to \mathbb{Z}^7$

 $\quad \mathbb{Z}^1 \to \mathbb{Z}^3 \to \mathbb{Z}^3$

$D^4 \xrightarrow{f} D^4$

 $\quad \mathbb{Z} \to \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$

$\exists\ x \in D^4$

$\underline{f(x) = x}$