Лекція 8. Відображення між симпліціальними комплексами.

K, L — симп. компл.

$f: K \to L$ — симпліціальне, якщо f(симпл.) — симплекс

$f(\{a_0 \dots a_k\}) = \{f(a_0), \dots, f(a_k)\}$

$K, \Lambda = \{\sigma \subset K \mid |\sigma| < \infty, \forall \alpha \subset \sigma \Rightarrow \alpha \in \Lambda\}$

$\forall \sigma \in \Lambda \quad \dim \sigma = |\sigma| - 1$

• 0

— 1

▲ 2

$$C_i(K, G) = \bigoplus_{\dim \sigma = i} G_\sigma$$

$$\partial: \underbrace{C_i(K, G)} \to \underbrace{C_{i-1}(K, G)}$$

$\sum\limits_{\dim \sigma = i} g_j \cdot \sigma$

"майже всі" $g_j = 0$

всі крім скінченного числа

$\partial(a_0, \dots, a_k) =$
$(a_1 a_2 \dots a_k) - (a_0 a_2 \dots a_k) +$
$+ \dots + (-1)^j (a_0 \dots \hat{a}_j \dots a_k) + \dots$

$$\dots \to C_i(K) \xrightarrow{\partial} C_{i-1}(K) \xrightarrow{\partial} C_{i-2}(K) \xrightarrow{\partial} \dots \to C_0(K) \to 0$$

(*) $\underline{\partial \circ \partial \equiv 0}$ ланцюговий комплекс

$$Z_i(K, G) = \ker(\partial : C_i(K) \to C_{i-1}(K))$$

$$B_i(K, G) = \partial(C_{i+1}(K)) \subset C_i(K)$$

із (*) $\Rightarrow$ $B_i \subset Z_i$ $\Rightarrow$ визначено

$$H_i(K, G) = \frac{Z_i(K, G)}{B_i(K, G)}$$ — група i-х гомологій K з коеф. в G.

Поведінка відносно відображень

$f: K \to L$ — симп. відобр. $\{a_0 \dots a_k\}$ — симплекс в $\{f(a_0), \dots, f(a_k)\}$ — симплекс

① Зафіксуємо порядки всіх вершин в K

$$\underbrace{(a_0 \dots a_k)}_{B} = \underbrace{(-1)^{\alpha} (a_1 a_0 \dots a_k)}_{A}$$

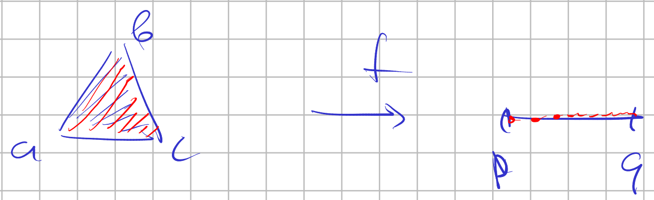
α – число транспозицій необх., щоб перейти від A до B

Приклад
$$\partial(aabc) = (abc) - \underbrace{(abc)}_{} + \underset{0}{(aac)} - \underset{0}{(aab)} = 0$$
$$\partial(abac) = (bac) - \underset{0}{(aac)} + \underbrace{(abc)}_{} - \underset{0}{(aba)} = -(abc) - 0 + (abc) - 0 = 0$$

$$\boxed{(a_0 a_0 a_2 \dots a_k) = 0} \qquad \boxed{\partial(a_0 a_0 a_2 \dots a_k) = 0}$$

$f: K \to L \quad \forall i \quad f(\underbrace{(a_0 \dots a_k)}_{\in C_k(K)}) = \underbrace{(f(a_0) \dots f(a_k))}_{\in C_k(L)}$

$$\forall i \quad C_i(K,G) \xrightarrow{f_i} C_i(L,G)$$



$f(a) = p$
$f(b) = p$
$f(c) = q$

$f(a,b,c) = (p,p,q) = 0$

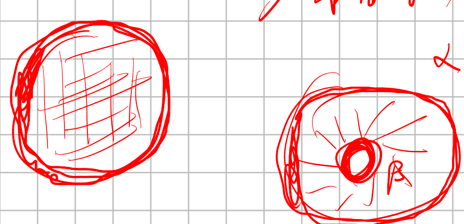
$f(ab) = p \qquad f(bc) = (pq) \qquad f(ac) = (p,q)$

$$\begin{tikzcd}
\dots \arrow[r, "\partial"] & C_i(K,G) \arrow[r, "\partial"] \arrow[d, "f_i"] & C_{i-1}(K,G) \arrow[r, "\partial"] \arrow[d, "f_{i-1}"] & C_{i-2}(K,G) \arrow[r, "\partial"] \arrow[d, "f_{i-2}"] & \dots \\
\arrow[r, "\partial"] & C_i(L,G) \arrow[r, "\partial"] & C_{i-1}(L,G) \arrow[r, "\partial"] & C_{i-2}(L,G) \arrow[r, "\partial"] & \dots
\end{tikzcd} \qquad (*)$$

Лема. Діаграма $(*)$ – комутативна $\quad \partial \circ f_i = f_{i-1} \circ \partial \quad \forall i$

Наслідок
$$\left.\begin{array}{l} f_i(Z_i(K,G)) \subset Z_i(L,G) \quad \text{цикл} \\ f_i(B_i(K,G)) \subset B_i(L,G) \quad \text{границі} \end{array}\right\} \Rightarrow f: H_i(K,G) \to H_i(L,G)$$

циклі / границі



$\alpha \neq \beta$

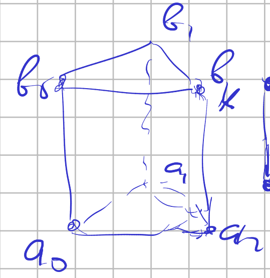
Поведінка відносно гомотопій

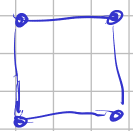
$f: X \times [0,1] \to Y$

$f: K \to L \simeq g: K \to L$ - симпліціальні

K - симпліц. комплекс $K \times [0,1]$ $[0,1] \times [0,1]$

$\alpha = (a_0 a_1 \dots a_k) \times \underset{p \quad q}{[0,1]} = \beta$





— немає триангуляції

$\dim \alpha = k$ $\dim = 1$

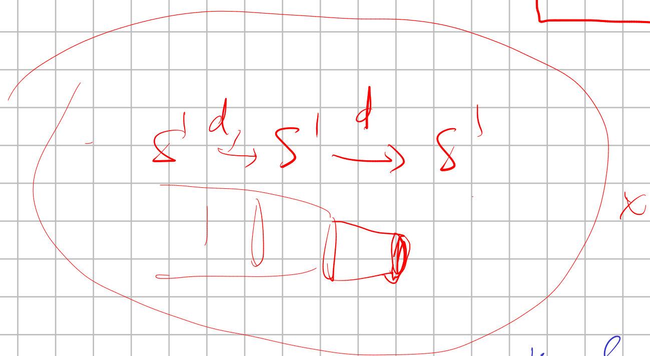
$\dim \alpha \times \beta = k+1$

$a_0 \; a_1 \dots a_k$
$b_0 \; b_1 \dots b_k$ по $k+2$ вершин

$$\left\{\begin{array}{l} a_0 a_1 \dots a_k b_k \\ a_0 a_1 \dots a_{k-1} b_{k-1} b_k \\ - \; a_0 a_1 b_1 \dots b_k \\ + \; a_0 b_0 \dots b_k \end{array}\right.$$

$k+1+1 = k+2$

$(-1)^l \; a_0 a_1 \dots a_{l-1} a_l a_{l+1} \dots a_k$
$b_0 b_1 \dots b_{l-1} b_l b_{l+1} \dots b_k$



$X \times Y = \{(x,y)\}$

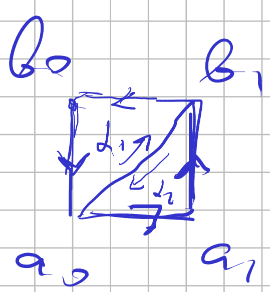
$U_x \times V_y$

$\dim X + \dim Y = \dim X \times Y$
$\geq$

$K \times L$

$\Delta^k \times \Delta^l$
$\Delta^l \times \Delta^k$ $(-1)^{k \cdot l}$

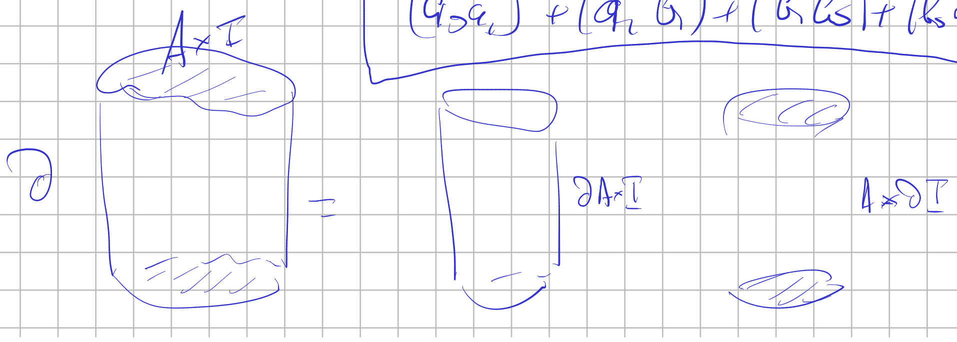
(1)



$\overset{\alpha_1}{a_0 a_1 b_1}$ $\overset{\alpha_2}{- a_0 b_0 b_1}$

$(-1)^{k+l}$

$\partial(\alpha_1 + \alpha_2) =$
$(a_0 a_1) + (a_1 b_1) + (b_1 b_0) + (b_0 a_0)$



$\partial(A \times I) =$
$\pm(\partial A \times I) \pm (A \times \partial I)$

(0) $a_0 \to b_0$ $\qquad a_0 \times [0,1] \qquad \underline{(a_0 b_0)}$ $\qquad [0 \to 1]$ $(0,1)$

(1) $\partial(\alpha_1+\alpha_2) = \underbrace{\big((a_1 b_1) - (a_0 b_0)\big)}_{\text{протилежні}} + \underbrace{\big((a_0 a_1) - (b_0 b_1)\big)}_{\substack{b_0 \to b_1 \\ a_0 \to a_1}}$

$a_0 \to b_0 \quad a_1 \to b_1$

відрізняються знаком

$[a_0, a_1]$

$\partial(a_0 a_1) = a_1 - a_0$

$\partial(a_0 a_1) \times [0,1] = a_1 \times [0,1] - a_0 \times [0,1] = \underline{(a_1 b_1) - (a_0 b_0)}$

$b_0 \to a_0 \quad a_1 \to b_1$

$(a_0 a_1) \times \partial[0,1] = (a_0 a_1) \times (1 - 0) = (a_0 a_1) \times 1 - (a_0 a_1) \times 0 =$
$= \underline{(b_0 b_1) - (a_0 a_1)}$

$\partial\big((a_0 a_1) \times [0,1]\big) = \partial(a_0 a_1) \times [0,1] - (a_0 a_1) \times \partial[0,1]$

$\partial(A \times I) = \partial A \times I - A \times \partial I$

$kl \quad a_0\, a_1 \ldots a_k\, b_0 \ldots b_l$

$\quad\;\; b_0 \ldots b_l\, a_0 \ldots a_k$

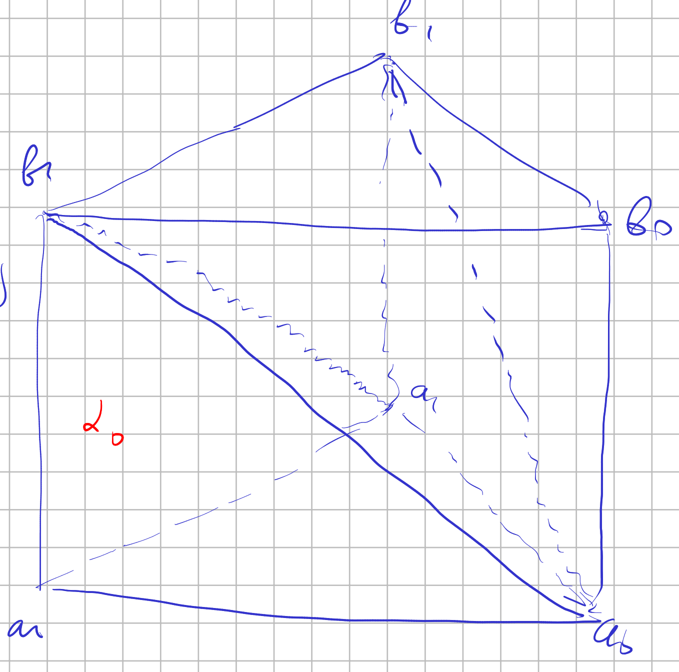
$A = a_0 a_1 a_2 \qquad A \times I \qquad a_0\; a_1\; a_2\; b_0\; b_1\; b_2$

$\alpha_0 \quad a_0\; a_1\; a_2\; b_2$

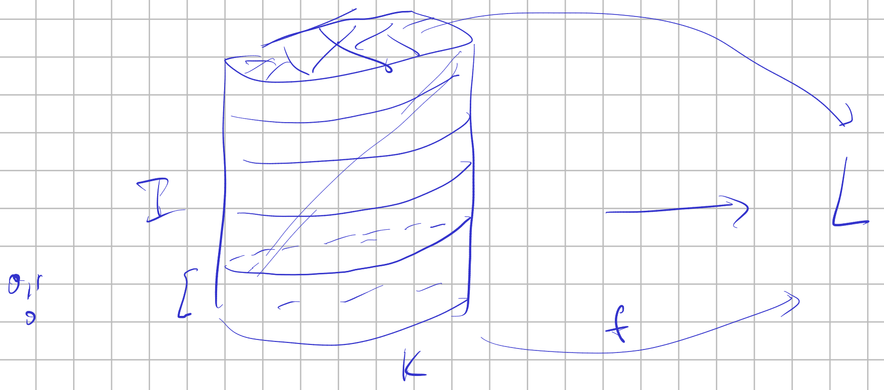
$\alpha_1 \quad a_0\, a_1\; b_1\; b_2$

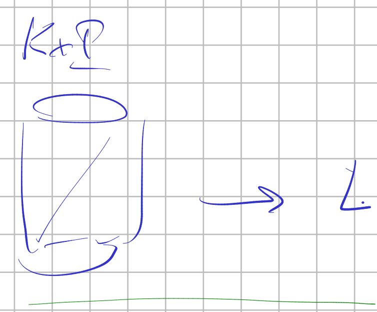
$\alpha_2 \quad a_0\; b_0\; b_1\; b_2$

$\partial(\alpha_0+\alpha_1+\alpha_2) = \pm(A \times \partial I) \pm (\partial A \times I)$



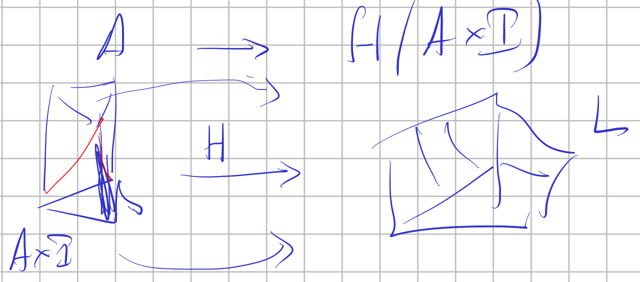
$f: K\times I \to L$ — симпліціальне відображення призми $K\times I$





$$\begin{tikzcd}
C_{i+1}(K) \arrow[r, "\partial"] \arrow[d, "f_{i+1}\, g_{i+1}"] & C_i(K) \arrow[r, "\partial"] \arrow[d, "f_i\, g_i"] \arrow[dl, "c_i"'] & C_{i-1}(K) \arrow[r, "\partial"] \arrow[d, "f_{i-1}\, g_{i-1}"] \arrow[dl, "c_{i-1}"'] & C_{i-2}(K) \arrow[r] \arrow[d, "f_{i-2}\, g_{i-2}"] \arrow[dl, "c_{i-2}"'] & \ldots \\
C_{i+1}(L) \arrow[r, "\partial"'] & C_i(L) \arrow[r, "\partial"'] & C_{i-1}(L) \arrow[r, "\partial"'] & C_{i-2}(L) &
\end{tikzcd}$$

$A \subset K$ $\quad A\times I$



H_i: $\boxed{\partial(A\times I) = (\partial A\times I) \pm (A\times \partial I)}$

$H(A\times I) = \boxed{c(A)}$

$\pm\partial(cA) = \pm c(\partial A) + \underline{g_i^{(A)} - f_i^{(A)}}$

$A\times I = \alpha_0 + \alpha_1 + \ldots \alpha_k$

$f_i: C_i(K) \to C_i(K)$

$(*)$ $\boxed{g - f = \pm\partial\circ c \pm c\circ\partial}$

Означення. Відображення гомоморф. $c: C_i(K,G) \to C_{i+1}(L,G)$ назив. ланцюговою гомотопією між ланцюговими відобр. f і g якщо виконана умова $(*)$.

$$\boxed{\partial\circ c_i \pm c_{i-1}\circ\partial = g_i - f_i}$$

Наслідок. Якщо f і g — ланцюгово гомотопні, то гомоморфізми $f_i = g_i: H_i(K,G) \to H_i(L,G)$.

$\Downarrow$ $f_i, g_i: \begin{matrix} Z_i(K) \longrightarrow Z_i(L) \\ B_i(K) \longrightarrow B_i(L) \end{matrix}$ $f_i, g_i: Z_i/B_i(K) \longrightarrow Z_i/B_i(L)$

$\forall z \in Z_i(K)$

$$f_i(z) - g_i(z) = \partial q, \text{ где некото } q \in C_{i+1}(L)$$

$$f_i(z) - g_i(z) = \pm C \underset{\substack{\parallel \\ 0}}{\partial(z)} \pm \partial \underbrace{C(z)}_{q} \qquad \Uparrow$$

бо z - цикл