Вступ в теорію груп

Сергій Максименко

9 травня 2021 р.

1 Поняття групи

Задача 1.1. Описати множини всіх симетрій

1) правильного трикутника;
2) правильного квадрата;
3) правильного п'ятикутника;
4) правильного шестикутника (на лекції я сказав ось неправильне про шестикутник. Знайдіть помилку);
5) правильного n-кутника;
6) прямокутника;
7) ромба;
8) паралелограма;
9) кола;
10) рівнобедреного трикутника

Задача 1.2. Описати симетрії букв українського та англійського алфавіту. Чи є букви у яких множини симетрій «схожі», якщо так, то чим?

Задача 1.3. Чим «схожі» чи «однакові» множини симетрій правильного трикутника, букви Y, символу «Мерседес»?

Задача 1.4. Які симетрії є у числової прямої?

Задача 1.5. Які з наступних функцій (можливо їх графіки) є «симетричними» і в якому сенсі? Якщо так, то опишіть множини симетрій цих функцій.

1) $f(x) = \sin(x)$
2) $f(x) = \cos(x)$
3) $f(x) = \mathrm{tg}(x)$
4) $f(x) = \mathrm{ctg}(x)$
5) $f(x) = x^2$
6) $f(x) = x^3$
7) $f(x) = |x|$
8) $f(x) = 2x + 4$
9) $f(x) = x^2 + 5x + 6$
10) $f(x) = 2^x$
11) періодична функція з періодом 5

Задача 1.6. Перевірити, що множина цілих чисел

$$\mathbb{Z} = \{\ldots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, \ldots\}$$

утворює групу відносно одерації додавання. Тобто відображення

$$\mu : \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}, \qquad \mu(x, y) = x + y,$$

задовольняє аксіоми групи. Що буде нейтральним елементом $\mathbb{Z}$? Що є оберненим елементом для $x \in \mathbb{Z}$?

Задача 1.7. Чи утворює групу множина натуральних чисел $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \ldots\}$ відносно такої ж операції додавання:

$$\mu : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}, \qquad \mu(x, y) = x + y?$$

Задача 1.8. Встановити, які з операцій на множинах задовольняють аксіоми груп:

1. $\mathbb{R}$ – множина дійсних чисел з операцією додавання $\mu : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $\mu(x, y) = x + y$;
2. $\mathbb{R}$ – множина дійсних чисел з операцією множення $\mu : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $\mu(x, y) = xy$;
3. $\mathbb{R}$ – множина дійсних чисел з операцією віднімання $\mu : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $\mu(x, y) = x - y$;

2 Ізоморфізми груп

Нехай $f : A \to B$ – відображення між групами $(A, *)$ та $(B, \star)$ з операціями $*$ та $\star$ відповідно. Воно називається *ізоморфізмом груп*, якщо

1. f – біекція
2. для довільних $x, y \in A$ виконується співвідношеня: $f(x * y) = f(x) \star f(y)$.

Ізоморфізм $f : A \to A$ групи A на себе називається *автоморфізмом групи*. Множина всіх автоморфізмів групи на себе позначається через $\mathrm{Aut}(A)$.

Задача 2.1. Довести, що відображення $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$, $f(x) = 3^x$, є ізоморфізмом групи $\mathbb{R}$ з операцією додавання чисел на групу $\mathbb{R}_+$ з операцією множення.

Задача 2.2. Довести, що відображення $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$, $f(x) = \log_7 x$, є ізоморфізмом групи $(\mathbb{R}_+, \cdot)$ на групу $(\mathbb{R}, +)$.

Задача 2.3. Нехай $f : A \to B$ – ізоморфізм груп A і B. Довести, що обернене відображення $f^{-1} : B \to A$ також ізоморфізм.

Задача 2.4. Нехай $f : A \to B$, $g : B \to C$ – ізоморфізми груп. Довести, що композиція $g \circ f : A \to C$ також ізоморфізм груп.

Задача 2.5. Позначимо через $\mathrm{Aut}(A)$ – множина всіх ізоморфізмів групи A на себе. Довести, що $\mathrm{Aut}(A)$ є групою відносно композиції ізоморфізмів як відображень.

Задача 2.6. Описати всі автоморфізми групи цілих чисел $(\mathbb{Z}, +)$.

Задача 2.7. Описати всі підмножини в групі цілих чисел $\mathbb{Z}$ відносно додавання, які також є утворюють групи відносно додавання.

Задача 2.8. Нехай $4\mathbb{Z}$ і $7\mathbb{Z}$ множини цілих чисел кратних 4 та 7 вдповідно. Перевірити, що вони уворюють групи відносно операції додавання. Чи ізоморфні ці групи? Якщо так, побудувати всі можливі ізоморфізми між $(4\mathbb{Z}, +)$ і $(7\mathbb{Z}, +)$.