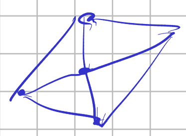
Лекція 7. Ланцюгові комплекси асоційовані з симпліціальними комплексами

$K, \Lambda = \{ \sigma \subset K \mid ① |\sigma| < \infty$

② якщо $\sigma \in \Lambda$, $\beta \subset \sigma \Rightarrow \beta \in \Lambda \}$

Елементи $\sigma \in \Lambda$ називають симплексами, або гранями K

K – симпліціальний комплекс



$\boxed{\dim \sigma = |\sigma| - 1}$

$\dim \{a\} = 0$

$\{a, b\} = 1$

ЛНЗ $(a_0 \dots a_k)$

$a_1 - a_0 \dots a_k - a_0$

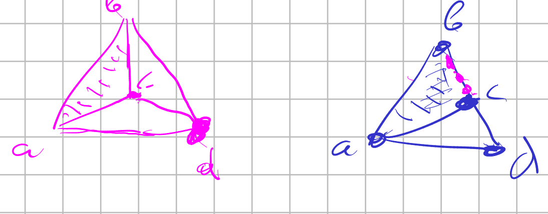
K – скінченний симп. комплекс, або локально скінченний то K має геометричну реалізацію в $\mathbb{R}^n$

$f: K \to L$ неперервне між поліедрами то $f \simeq g$

g – симпліціальне $g(\underset{\text{в } K}{\text{симплекс}}) = \underset{\text{в } L}{\text{симплекс}}$

K – симпл. комплекс $\quad K^i = \{ \sigma \in \Lambda \mid \dim \sigma = i \}$

Нехай G – комутативна група $\quad C_i(K, G) = \bigoplus_{\sigma \in K^i} G_\sigma$



a b c d

ab, bc, ac, ad, cd

abc bd

$C_0(K,G) = G^4$

$C_1(K,G) = G^5$

$C_2(K,G) = G$

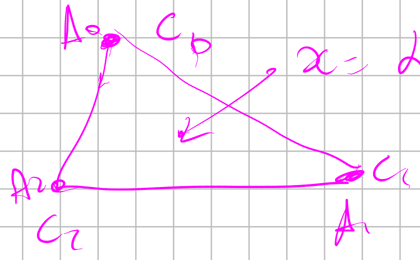
$K = \bigoplus G = \{ (g_1 \dots)$ лише скінченне число координат $\neq 0$ в $G \}$

$K = \mathbb{N} \quad C_0(K,G) = \{ (\boxed{g}\ 0\ 0\ \boxed{\ }\ 0\ 0\ 0\ \boxed{\ }\ 0\ 0\ 0\ 0) \}$

. . . .

$\oplus$ а не Π

$\boxed{L^2 \text{ – теорія}}$



$x = \lambda_0 A_0 + \lambda_1 A_1 + \lambda_2 A_2$

коор $x = \lambda_0 C_0 + \lambda_1 C_1 + \lambda_2 C_2$

Граничний оператор. $\partial : C_{i+1}(K, G) \to C_i(K, G)$

Границя симплекса $\sum a_j \sigma_j \xrightarrow{\partial} \sum a_j \underline{\partial(\sigma_j)}$

майже всі $a_j = 0$

$\dim \sigma_j = i+1$

(1) Зафіксуємо лінійний порядок на K $\quad \forall x, y \in K$ виконується $x < y$ або $y < x$

(2) $\sigma = (a_0 \ldots a_k)$ $\quad a_0 < a_1 < \ldots < a_k$

$(a_{i_0}, a_{i_1} \ldots a_{i_k})$ — перестановка ел-тів $(a_0 \ldots a_k)$

Складемо число транспозицій — перестановок сусідніх ел-тів

парність числа транс. визначена однозначно

$\operatorname{sign}(a_{i_0} \ldots a_{i_k})$ = парність числа транспозицій, що переходять від $(a_{i_0} \ldots a_{i_k})$ до $(a_0 \ldots a_k)$

Симплекс задаватимемо впорядкованим набором вершин зі знаком $(-1)^{\operatorname{sign}(a_{i_0} \ldots a_{i_k})}$

$(a_0, a_1) = -(a_1\ a_0)$ $\qquad (a_0\ a_1 a_2) = -(a_0\ a_2 a_1) = +(a_2 a_0 a_1)$

(3) $g \cdot \sigma \in C_i(K, G) = \oplus G$

$(0 \ldots \underset{\uparrow \sigma}{g} \ldots 0)$ $\qquad \sigma = (a_0 a_1 \ldots a_k)$

то $g(a_1 a_0 a_2 \ldots a_k) = -g\sigma \in C_i(K, G)$

$$C_i(K, G) = \sum q_\sigma \cdot (a_0 a_1 \dots a_i)$$

$q_\sigma \in G$, $\sigma \in K$, $|\sigma| = i$

$$q_\sigma \cdot (a_1 a_0 a_2 \dots a_i) = -q_\sigma \cdot (a_0 a_1 a_2 \dots a_i)$$

$\mathbb{Z}_4$

$$C_1(K, G) = q_{ab} \cdot (a, b) + q_{ac}(a, c) + q_{bc}(a, b)$$

$q_{ab}, q_{ac}, q_{bc} \in \mathbb{Z}_4$

$K = \{ab, ac, bc, a, b, c, \varnothing\}$

$$2 \cdot (ab) + 3(ac) + 1(bc) = -2(ba) + 3(ac) - 1(cb)$$

$$\boxed{(aa) = 0}$$

(4) $(aabcde) = 0$

Если $(a_0 \dots a_k)$ два елем. одинаковые, то $(a_0 \dots a_k) = 0$

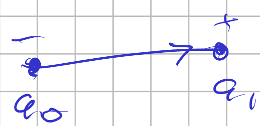
$(aa) = (a, a)$

(5) $$\partial(a_0 \dots a_k) = (a_1 a_2 \dots a_k) - (a_0 a_2 \dots a_k) + (a_0 a_1 a_3 \dots a_k) + (-1)^i (a_0 a_1 \dots a_{i-1} \wedge a_{i+1} \dots a_k) + \dots$$

$$(-1)^i (a_0 a_1 \dots a_{i-1} \hat{a}_i a_{i+1} \dots a_k)$$

$\partial(a) = 0$

$\partial(a_0 a_1) = a_1 - a_0$



$$\partial(a_0 a_1 a_2) = a_1 a_2 - a_0 a_2 + a_0 a_1 = a_1 a_2 + a_2 a_0 + a_0 a_1$$

Лемма: $\partial\partial(a_0 \dots a_k) = 0$

$\Downarrow$ $\partial\partial(ab) = \partial(b - a) = \partial b - \partial a = 0 - 0 = 0$

$$\partial\partial(abc) = \partial(ab + bc + \underbrace{ca}_{-ac}) = b - a + c - b + a - c = 0$$

$$\partial\partial(a_0 \ldots a_k) = \partial \sum (-1)^i (a_0 \ldots \hat{a}_i \ldots a_k) =$$

$= \partial(a_1 a_2 \ldots a_k) -$

$- \partial(a_0 a_2 \ldots a_k)$

$\ldots$

$(-1)^k \cdot \partial(a_0 a_1 \ldots a_{k-1})$

$$= \sum \pm (a_0 \ldots \hat{a}_i \ldots \hat{a}_j \ldots) \mp (a_0 \ldots \hat{a}_i \ldots \hat{a}_j \ldots) = 0$$

$\sigma = (a_0 \ldots a_i \quad a_j \ldots a_k)$

викл a_i $\quad (-1)^i (a_0 \ldots \hat{a}_i \ldots a_j \ldots a_k)$ в $\partial\sigma$

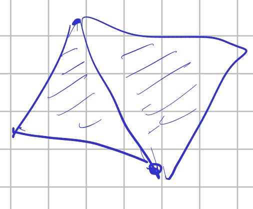
j стоїть на $j-1$ місці

$(-1)^{i+j-1}$

викл a_j $\quad (-1)^j (a_0 \ldots a_i \ldots \hat{a}_j \ldots a_k)$

i стоїть на i-му місці

$(-1)^{j+i} (a_0 \ldots \hat{a}_i \ldots \hat{a}_j \ldots a_k)$



$0 \to C_{i+1}(K, G) \xrightarrow{\partial} C_i(K, G) \xrightarrow{\partial} C_{i-1}(K, G) \to \ldots 0$

(*) $\boxed{\partial \circ \partial = 0}$ ланцюговий комплекс

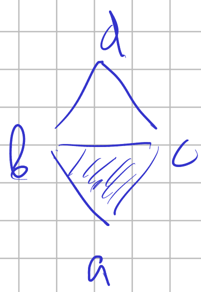
$Z_i(K, G) = \ker(\partial : C_i(K, G) \to C_{i-1}(K, G))$ – група циклів розм. i

$B_i(K, G) = \operatorname{im}(\partial : C_{i+1}(K, G) \to C_i(K, G))$ – група границь розм. i

$\forall \sigma \in B_i : \sigma = \partial \rho \Rightarrow \partial\sigma = \partial\partial\rho = 0 \Rightarrow \sigma \in Z_i$

$(*) \Rightarrow B_i(K, G) \subset Z_i(K, G)$

$H_i(K, G) = Z_i(K,G) \,/\, B_i(K,G)$ – група гомологій K з коеф. в G розмірності i



$K, \ \Lambda = \{\varnothing, a, b, c, d, ab, bc, ac, bd, cd, abc\}$

$$\begin{array}{ccccc} C_2(K,G) & \longrightarrow & C_1(K,G) & \longrightarrow & C_0(K,G) \\ (abc) & & ab \ bc \ ac \ bd \ cd & & a \ b \ c \ d \\ G & \xrightarrow{\partial} & G^5 & \longrightarrow & G^4 \end{array}$$

$\partial(abc) = ab + bc - ac$

$n\cdot(abc) \xrightarrow{\partial} n(ab) + n(bc) - n(ca) + 0(bd) + 0(cd)$

$n \longrightarrow (n, n, -n, 0, 0)$

$C_1 = G^5$

$$\begin{array}{c|ccccc} & ab & bc & ac & bd & cd \\ \hline a & -1 & & -1 & & \\ b & 1 & -1 & & -1 & \\ c & & 1 & 1 & & -1 \\ d & & & & 1 & 1 \end{array} \qquad \begin{pmatrix} m_{ab} \\ m_{bc} \\ m_{ac} \\ m_{bd} \\ m_{cd} \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} m \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

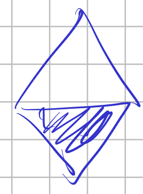
$C_1 \longrightarrow C_0$

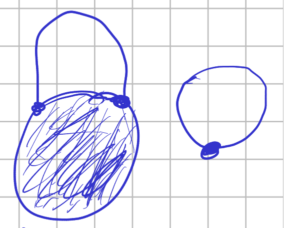
$\partial(m\cdot(ab)) = m\cdot b - m\cdot a$

$m\cdot(ab) + 0(bc) + \ldots$

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \underbrace{\begin{pmatrix} m \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}}_{=\, m(ab)} = \begin{pmatrix} -m \\ m \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = -m\cdot a + m\cdot b$$

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$



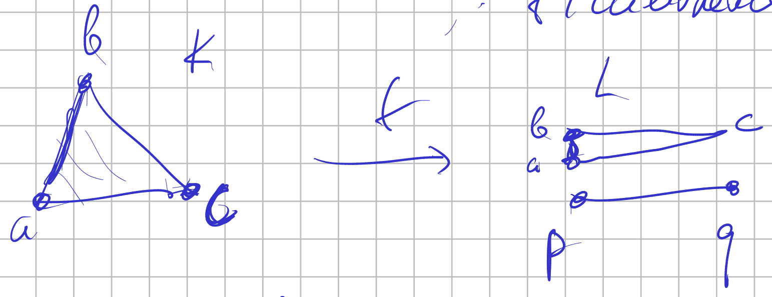


$G \to G^3 \to G^2$

6 Симпліціальні відобр.

$f: K \to L$ — це відобр. між вершинами таке, що

$f(\text{симплекс}) = \text{симплекс}$



$f(ab) = p$

$$\left.\begin{aligned} a, b &\to p \\ c &\to q \end{aligned}\right\} \quad f(ab) = (pp) = 0 \in C_1(L)$$

$$f(a_0 \dots a_k) = (f(a_0) \dots f(a_k))$$

$f: K \to L$ — симпл. відобр., то воно індукує лінійне відобр.

$$f_i: C_i(K, G) \to C_i(L, G)$$

$$f_i\Big(\sum_{\dim\sigma = i} g_\sigma \cdot (a_{j_0} \dots a_{j_i})\Big) = \underline{\sum g_\sigma (f(a_{j_0}) \dots f(a_{j_i}))}$$

$$(*) \quad \begin{tikzcd} \dots \arrow[r] & C_{i+1}(K,G) \arrow[r, "\partial"] \arrow[d, "f_{i+1}"] & C_i(K,G) \arrow[r, "\partial"] \arrow[d, "f_i"] & C_{i-1}(K,G) \arrow[r, "\partial"] \arrow[d, "f_{i-1}"] & C_{i-2}(K,G) \arrow[r] \arrow[d, "f_{i-2}"] & \dots \\ & C_{i+1}(L,G) \arrow[r, "\partial"'] & C_i(L,G) \arrow[r, "\partial"'] & C_{i-1}(L,G) \arrow[r, "\partial"'] & C_{i-2}(L,G) & \end{tikzcd}$$

Лема Діаграма (*) комутативна $\boxed{f_i \circ \partial = \partial \circ f_{i+1}}$

<u>Напомним</u>

$$f_i(Z_i(K,G)) \subset Z_i(L,G)$$
$$f_i(B_i(K,G)) \subset B_i(L,G)$$

а значит f_i индуцирует

$$f_i : H_i(K,G) \longrightarrow H_i(L,G)$$

$\overline{K} \xrightarrow{f} \overline{L}$ — непрерывно

$\overline{K} \xrightarrow[\text{симплиц.}]{g} \overline{L}$

$K \xrightarrow{g} L$ — симп. комплекс $\Rightarrow H_i(K) \longrightarrow H_i(L)$

K, триан. $\tau > \tau'$ — подразб. τ

$(K, \tau') \xrightarrow{f} (K, \tau)$

$f : H_i(K,\tau') \to H_i(K,\tau)$ изоморфизм

симп. отобр.

$x_{ab} \to a$ или b