Лекція 9. Теорема Брауера про нерухому точку.

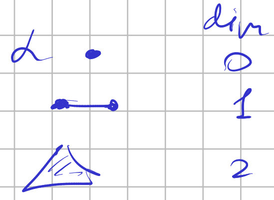
K – комплекс, з трикутників (K, Λ) – симпліціальний комплекс

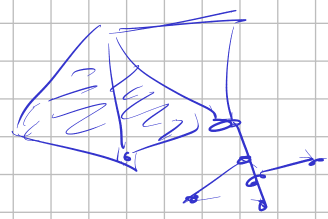
K – скінч. множина, Λ – сім'я підмножин підмнож. в K

$\forall \alpha \in \Lambda$ і $\beta \subset \alpha \Rightarrow \beta \in \Lambda$

$|\alpha|$ – число елементів в α

$\dim \alpha = |\alpha| - 1$





$\Lambda^i = \{$ всі $\alpha \in \Lambda \mid \dim \alpha = i \}$

$C_i(K, G) = \bigoplus_{\alpha \in \Lambda^i} G_\alpha$

a b c d

ab ad bd

bc cd

bcd

$$C_2(K,G) \xrightarrow{\partial} C_1(K,G) \xrightarrow{\partial} C_0(K,G)$$

$$G \qquad G^5 \qquad G^4$$

$$\partial(a_0 a_1 \ldots a_k) = (a_1 \ldots a_k) - (a_0 a_2 \ldots a_k) + \ldots + (-1)^i (a_0 \ldots \hat{a}_i \ldots a_k) + \ldots$$

$K \xrightarrow{f} L$ – симп. відобр. сім. компл.

$f(\text{симплекс } a_0 \ldots a_k) = \text{симплекс } (f(a_0) \ldots f(a_k))$

$$\begin{tikzcd}
\ldots \arrow[r] & C_{i+1}(K) \arrow[r, "\partial"] \arrow[d, "f_{i+1}"] & C_i(K) \arrow[r, "\partial"] \arrow[d, "f_i"] & C_{i-1}(K) \arrow[r, "\partial"] \arrow[d, "f_{i-1}"] & C_{i-2}(K) \arrow[d, "f_{i-2}"] \\
\arrow[r] & C_{i+1}(L) \arrow[r, "\partial"] & C_i(L) \arrow[r, "\partial"] & C_{i-1}(L) \arrow[r, "\partial"] & C_{i-2}(L)
\end{tikzcd}$$

ланцюгове відобр.

$$\boxed{f_i \circ \partial = \partial \circ f_{i+1}} \quad \forall i \Rightarrow$$

$f(Z_i(K)) \subset Z_i(L)$ $\qquad Z_i = \ker \partial$

$f(B_i(K)) \subset B_i(L)$ $\qquad B_i = \partial(C_{i+1})$

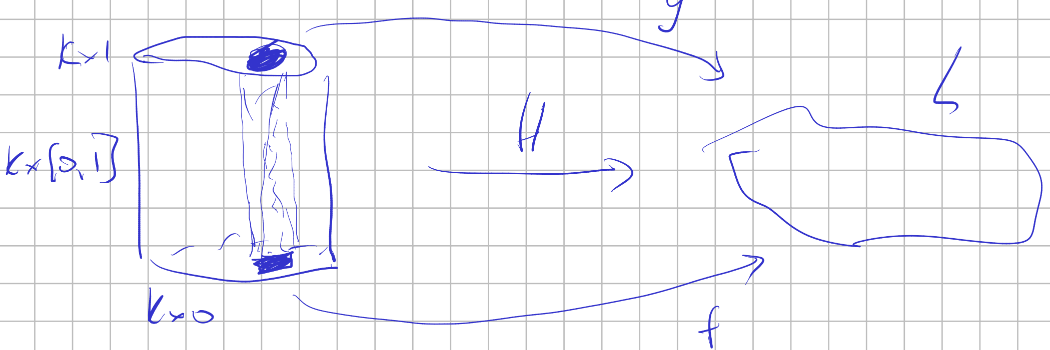
$$f_*: H_i(K, G) = Z_i / B_i \longrightarrow \frac{Z_i(L)}{B_i(L)} = H_i(L, G)$$

Достатня умова, коли $\{f_i\} \simeq \{g_i\} : H_*(K) \to H_*(L)$

f і g повинні бути ланцюгово гомотопними

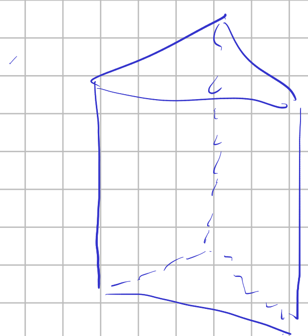
$$\begin{tikzcd}
\to C_{i+1}(K) \arrow[r] \arrow[d, "f_{i+1}"] & C_i(K) \arrow[r, "\partial_i"] \arrow[d, "f_i"] \arrow[dl, "\delta_i"'] & C_{i-1}(K) \arrow[r, "\partial"] \arrow[d, "f_{i-1}"] \arrow[dl, "\delta_{i-1}"'] & C_{i-2}(K) \arrow[d, "f_{i-2}"] \\
\to C_{i+1}(L) \arrow[r, "\partial_{i+1}"] & C_i(L) \arrow[r, "\partial"] & C_{i-1}(L) \arrow[r, "\partial"] & C_{i-2}(L)
\end{tikzcd}$$

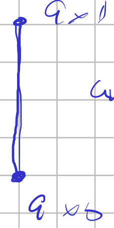
$\exists\ \delta_i : C_i(K) \to C_{i+1}(L) : \quad f_i - g_i = \pm \partial_{i+1}\delta_i \pm \delta_{i-1}\partial_i$



Якщо f і g — гомотопні як симпліціальні відображ. поліедрів

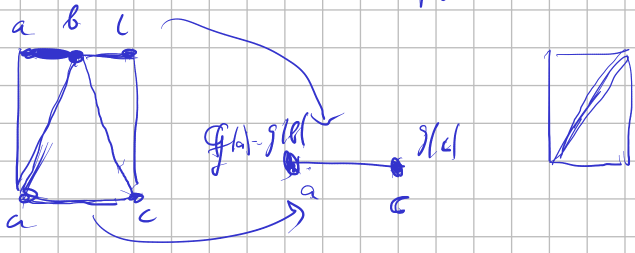
α — симплекс в K





симплекс в $K \times I$

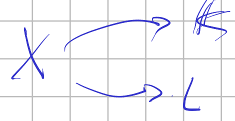
$\delta_0(a) = f(\underbrace{a \times [0,1]}_{C_1(K)}) \in C_1(L)$



$K \times I$

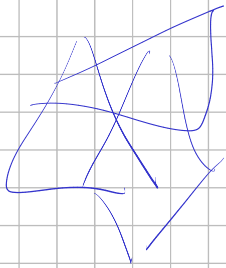
$K \times 1 \xrightarrow{f}$ симпл відобр id

$K \times 0 \xrightarrow{g}$



$K \times 1$ і $K \times 0$ мають спільне підрозбиття.

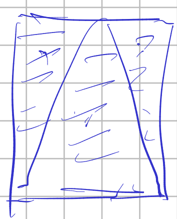
Тоді $K \times I$ також має підрозбиття, яке продовжує $K \times 0$ і $K \times 1$

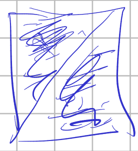


∀ симп. $\alpha \in K$, $\alpha \times [0,1] \in$ підкомплекс

$\alpha \longrightarrow \alpha \times [0,1]$ суму симплексів розм $\dim +1$

$$\begin{tikzcd}
\alpha \arrow[r] \arrow[rr, bend left, "\delta_i"] & \alpha\times I \arrow[r] & H_{i+1}(\alpha\times I) \\
C_i(K) \arrow[u] \arrow[rr, bend right, "\delta_i"'] & C_{i+1}(K\times I) \arrow[u] & C_{i+1}(L)
\end{tikzcd}$$





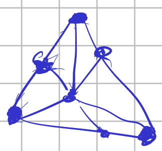
$$\boxed{f_i - g_i = \pm\partial\delta \pm \delta\partial} \Rightarrow f_i = g_i : H_i(K) \to H_i(L)$$

$z \in Z_i(K)$ – цикл $\partial z = 0$ тоді $f_i(z)$ і $g_i(z)$ належать одному класу гомологій $H_i(L)$

$$f_i(z) - g_i(z) = \pm\partial\delta(z) \pm \delta\underbrace{\partial(z)}_{0} = \pm\underbrace{\partial\delta(z)}_{\text{границя}} \in B_i(L)$$

$= 0$ в $H_i(L)$

Наслідок Нехай K – поліедр і K' – барицентричне підрозбиття K

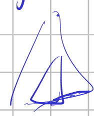


Розгл довільне відобр $f: K' \to K$ такого виду:

$$f(a) = a \quad \forall \text{ вершини } a \text{ з } K$$

якщо $a \in$ внутрішності симплекса $(a_0 \dots a_k)$ то

$$f(a) = a_i \text{ для деякого } i$$



Тоді $f: K' \to K$ – симпліціальне відобр. гомотопне тотожному відобр $K \to K$

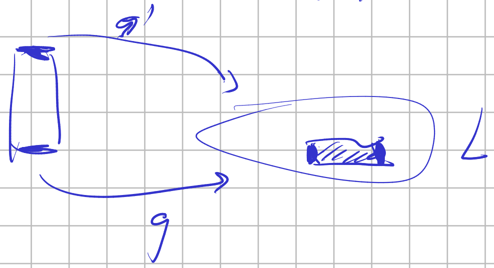
$$F(x,t) = (1-t)f(x) + t\cdot x$$

Наслідок $f_i: H_i(K) \to H_i(L)$ $=$ $\mathrm{id}: H_i(K') \to H_i(L)$

Наслідок Нехай $f: K \to L$ неперервне відобр. між поліедрами і $g, g': K \to L$ дві симпліційні апроксимації f

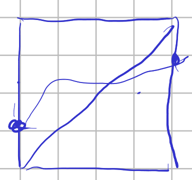
$g' \sim f \sim g$. тоді $g_i = g'_i : H_i(K) \to H_i(L)$

Довед. по гомотопії $G: K \times I \to L$ між g і g' можна побудувати $\delta: C_i(K) \to C_{i+1}(L)$ $\quad g - g' = \pm\partial\delta \pm \delta\partial$

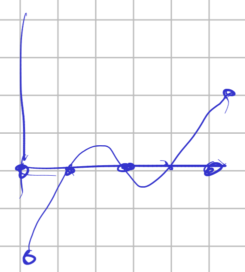


Теореми про нерухомі точки

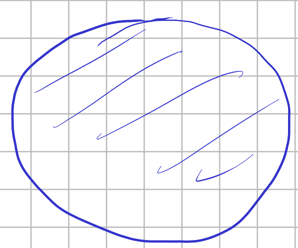
T1 $f: [0,1] \to [0,1]$, — непер. ф-я, тоді $\exists\, x \in [0,1]$ таке, що $f(x) = x$.

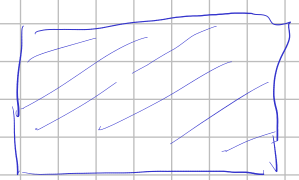


припуст. що $f(0) \neq 0$ і $f(1) \neq 1$



T2 Нехай $f: D^n \to D^n$ тоді $\exists\, x \in D^n : f(x) = x$





Нехай група коефіцієнтів — це поле $\mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$.

тоді $C_i(K, G)$ — векторний простір над G

$\forall$ ЛНЗ сім'я елементів $v_1 \ldots v_k \in C_i(K, G)$ продовж. до базису до максим. ЛНЗ сім'ї яка породжує $C_i(K, G)$

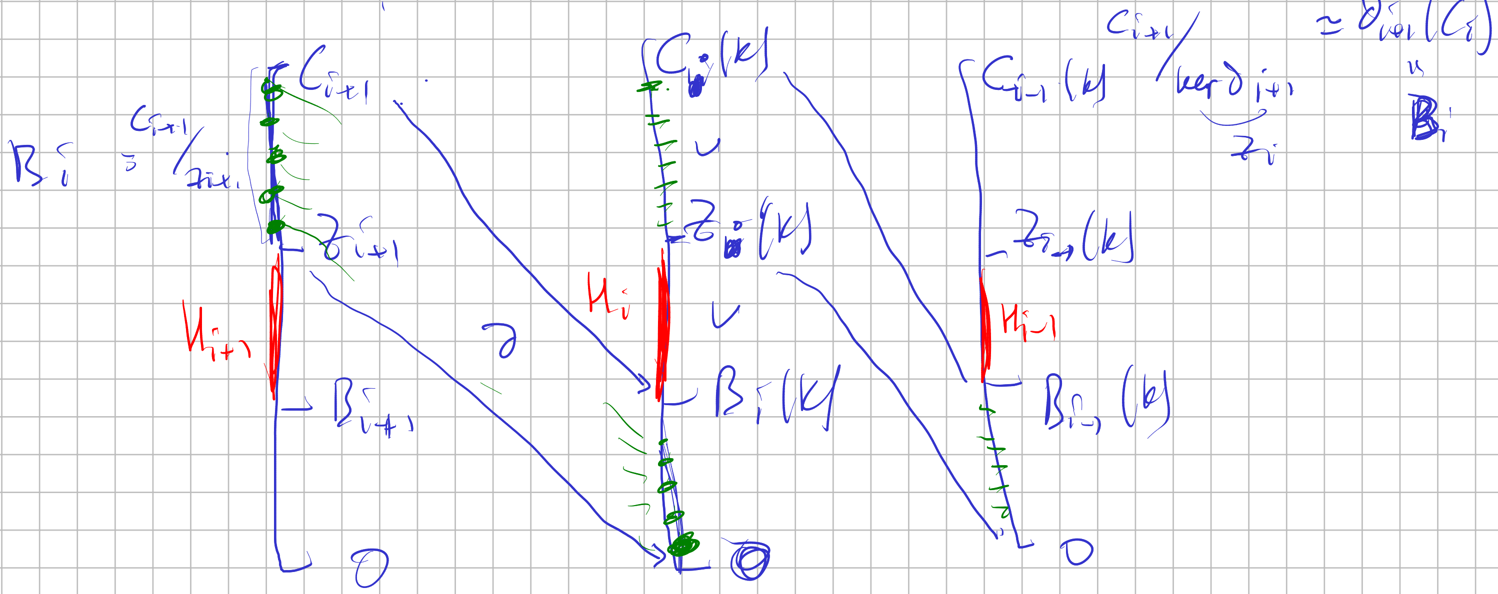
<u>Приклад</u> $G = \mathbb{Z}$ і $v = 2 \in \mathbb{Z}$.

тоді $\{2\}$ — ЛНЗ сім. над $\mathbb{Z}$ але не продовж. до базису

$\{2, 1\}$ — ЛЗ над $\mathbb{Z}$ $\quad$ $\underline{2 = 2 \cdot 1}$

Нехай G — поле, $\dim K \le n$

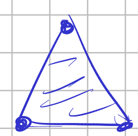
$C_{i+1} \longrightarrow C_i$



$b^1_{i+1} \ldots b^{*}_{i+1} \in B_{i+1}$ $\quad$ $b_i = \partial_{i+1}(c_i)$

$h_{i+1} \ldots \in H_{i+1}$

$c_{i+1} \ldots \in$



$d_i = \dim_G C_i(K, G)$ — число симплексів в розм. i

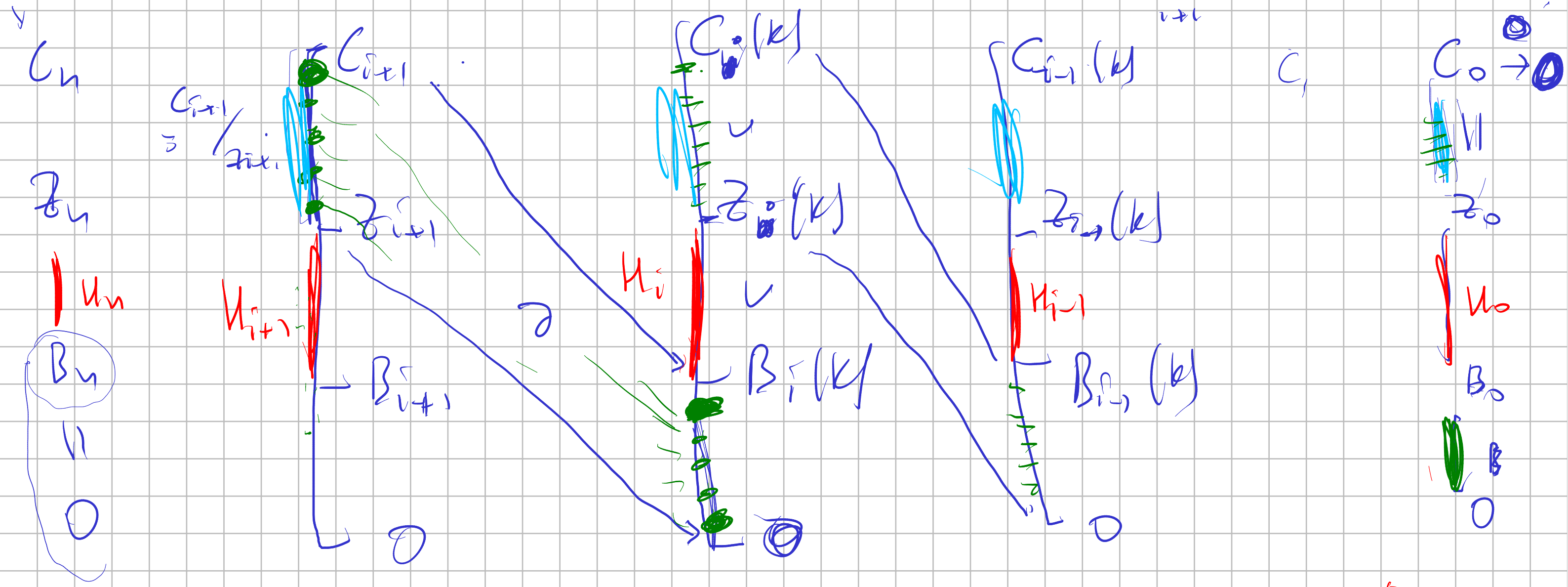
$\beta_i = \dim_G H_i(K, G)$

$\dim K = n$

$$\chi(K) = \alpha_0 - \alpha_1 + \alpha_2 - \alpha_3 + \dots (-1)^n \alpha_n$$

$$\beta_0 - \beta_1 + \beta_2 - \dots (-1)^n \beta_n$$ — ейлерова характеристика K

$0 \to$



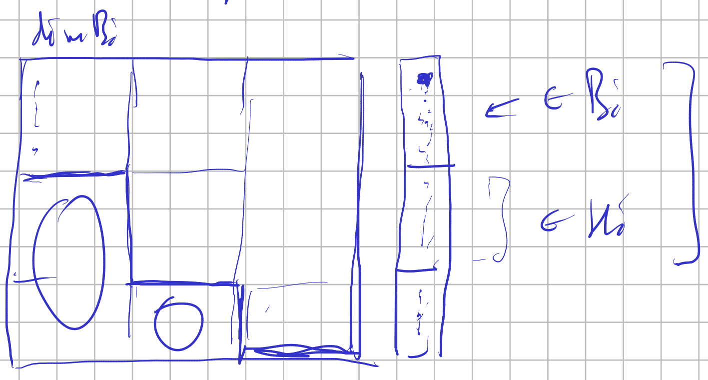
$\beta_i(K) = \dim H_i(K, G)$ — числа Бетті

Нехай $f: K \to K$ — лінійне відобр.

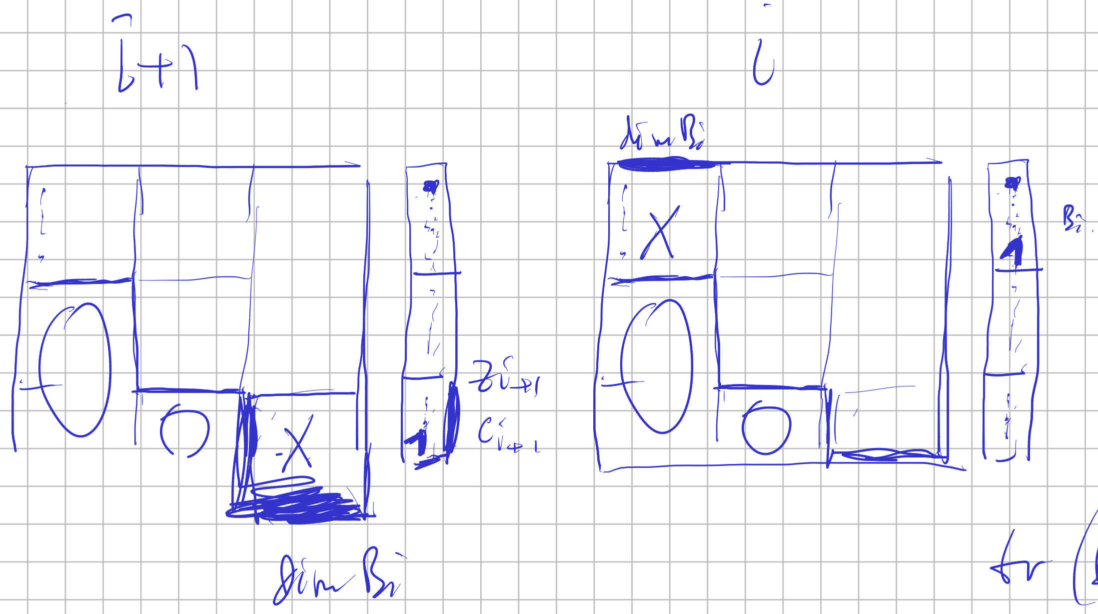
$f_i : C_i(K) \to C_i(K)$ $\qquad \alpha_i = \dim C_i(K)$

$f_i(B_i) \subset B_i \qquad f_i(Z_i) \subset Z_i$

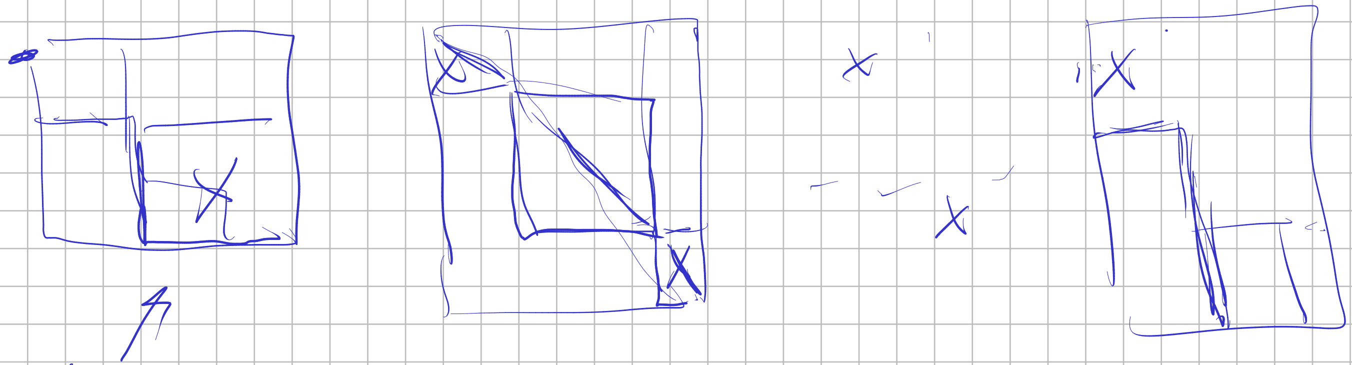
f_i — задається квадратною матрицею $\alpha_i \times \alpha_i$



$$\begin{pmatrix} 2 & 8 \\ 7 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 7 \end{pmatrix}$$



$$tr(B^{-1}AB) = tr(A)$$



$tr(f_i)$ = слід матриці — сума діагон. елементів

$tr(f_i) =$ ⌴ ⌴ ⌴

$B_i \to B_i$ $\quad$ $H_i \to H_i$ $\quad$ $C_i/Z_i \to C_i/Z_i$

$$L(f) = tr(f_0) - tr(f_1) + tr(f_2) - \dots (-1)^n tr(f_n)$$

$$\hat{tr}(f_i) = tr : (H_i \xrightarrow{f_i} H_i)$$

$$= \hat{tr}(f_0) - \hat{tr}(f_1) + \dots (-1)^n tr(f_n)$$

Число Лефшеця $\qquad$ Сильне Лефшеця

$f = id \qquad tr\, E = \begin{pmatrix} 1 & & 0 \\ & 1 & \\ 0 & & 1 \end{pmatrix} = \dim E$

$$\boxed{\chi(K) = L(\mathrm{id}_K)}$$

Теорема. Нехай K – комп. поліедр і $f: K \to K$ таке, що $L(f) \neq 0$. Тоді $\exists x \in K$: $f(x) = x$.

$\Downarrow$ Припустимо, що $f(x) \neq x$ для $\forall x$.
Тоді K – компакт, то $\exists \varepsilon > 0$: $d(f(x), x) > \varepsilon \quad \forall x$

$f(x) \neq x$ то $\exists$ окіл т. x U : $f(U) \cap U = \emptyset$.

Розіб'ємо підрозбиття K таке, щоб діаметр симплексів був $< \varepsilon/4$. Продеформуємо f у симпл. відобр. g, яке $\varepsilon/4$ близьке до f. Тоді g також не має нерух. т.

$L(g) = \sum (-1)^i \, \mathrm{tr}(\quad)$

$g_i(\alpha) = a_0\alpha_0 + a_1\alpha_1 + \square\,\alpha + \dots$

$\forall$ симпл. $\alpha \in K$ коеф. при α в $g_i(\alpha) = 0$.

$\Rightarrow \mathrm{tr}\, g_i = 0 \Rightarrow L(g) = 0 \Rightarrow L(f) = L(g)$
по $f \simeq g$.