Теорема. Нехай $f: K \to L$ непер. відобр. між скінченними поліедрами $K \subset \mathbb{R}^n$, $L \subset \mathbb{R}^m$. K має тріанг. σ, L – τ.
Тоді $\forall \varepsilon > 0$ підрозбиття $\sigma' < \sigma$, $\tau' < \tau$ і симпліційне відобр. $g: (K, \sigma') \to (L, \tau')$ такі, що

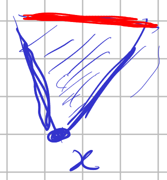
① $\exists$ гомотопія $H: K \times [0,1] \to L$
$H_0 = f$, $H_1 = g$

② • $\operatorname{diam}(H(x \times [0,1])) < \varepsilon$

• $|H_t(x) - f(x)| < \varepsilon \quad \forall x \in K$

зокрема $|g(x) - f(x)| < \varepsilon \quad \forall x \in K$

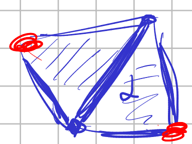
$\Downarrow$ $K \ni x$ – вершина σ



$\mathring{St}_\sigma(x) = \bigcup\limits_{x \in \alpha}$ відкритих симплексів α
відкритий окіл т. x

α-симплекс

$\mathring{St}_\sigma(\alpha) = \bigcup\limits_{\alpha \cap \beta}$ відкр. симплексів β

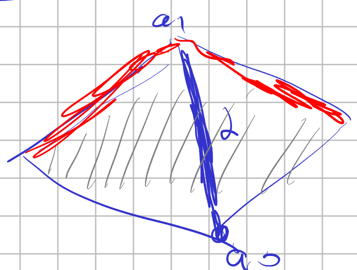


$St_\sigma(\alpha) = \bigcup\limits_{\alpha \cap \beta \neq \emptyset,\ \beta \in \sigma} \beta$

$\partial St_\sigma(\alpha) = St_\sigma(\alpha) \setminus \mathring{St}_\sigma(\alpha)$

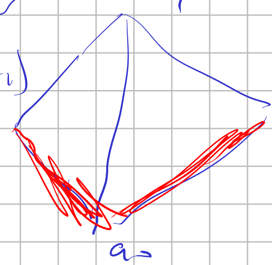
Лема: $\forall \alpha = \langle a_0 \dots a_k \rangle \in \sigma$ то $\mathring{\alpha} \subset \bigcap\limits_{i=0}^{k} \mathring{St}(a_i)$

$\alpha \setminus \partial \alpha$

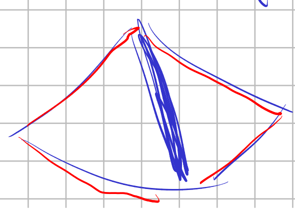


$\mathring{St}(a_0)$

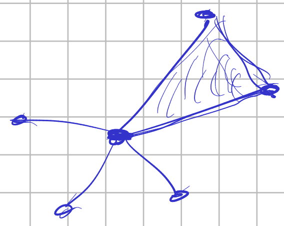
$\mathring{St}(a_1)$



$\mathring{St}(a_0) \cap \mathring{St}(a_1)$



$a_1 \in \mathring{\alpha} \in \mathring{St}(a_0)$ $\quad a_1$ і $a_0 \in L$



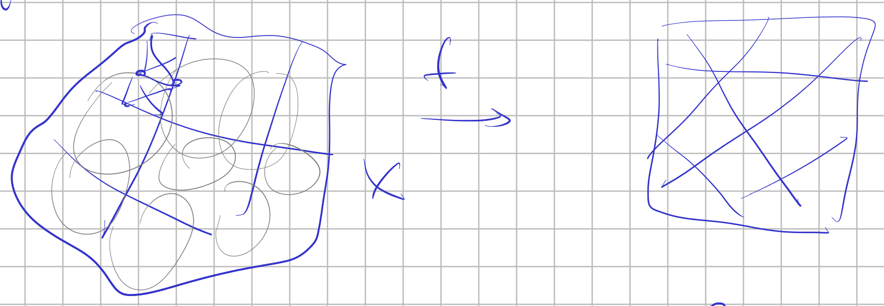
$f: (K, \sigma) \longrightarrow (L, \tau)$

⓪ "Дробимо" τ до τ' так, щоб $\forall\, y \in L$ $\operatorname{diam} \mathring{St}_{\tau'}(y) < \varepsilon$

① Беремо відкрите покриття L, $\{\mathring{St}_\tau(x)\}$

② Беремо відкр. покр $\{U_i = f^{-1}(\mathring{St}_\tau(x))\}$ — K

③ "Дробимо" σ так, щоб $\mathring{St}(y)$ містилось в деякому U_i



Тоді $\forall\, x \in \sigma'$ $\quad f(\mathring{St}_{\sigma'}(x)) \subset \mathring{St}_\tau(y) \quad (*)$

Покладемо у відпов $\forall$ вершині $x \in (K, \sigma') \Rightarrow g(x) \in L$

$f(\mathring{St}_{\sigma'}(x)) \subset \mathring{St}_\tau(g(x))$

Тоді g — симпліціальне відобр

g(симплекс з σ') — симплекс в L

Тоді (!) g — продовж до симпліціального відобр

$g: K \to L$

② $\exists$ гомотопія $H: K \times [0,1] \to L$, $H_t(x) = (1-t)f(x) + g(x)$

$f(x)$ —— $g(x)$

Лема. Нехай $f: K \to L$ непер. відобр між поліедрами таке, що $\forall$ вершини $x \in K$ $\exists$ вершина $y \in L$ така, що $\Rightarrow$ $\boxed{f(St(x)) \subset \mathring{St}(y)}$

Розгл. відобр $g: K^{\circ} \to L^{\circ}$ $\quad g(x) = y$

ми-ми вершини

Тоді ① g(симплекс) – симплекс $\Rightarrow$ g продовж. до симпліційного відобр $g: K \to L$

② $\exists$ гомотопія між f і g $\quad H(x,t) = (1-t)f(x) + t\,g(x)$

③ $\operatorname{diam}(H(x \times [0,1])) < \sup\limits_{x \in K} |f(x) - g(x)| < \sup\limits_{y \in L} \operatorname{diam} \mathring{St}(y)$

$\Downarrow$ ① Нехай $\alpha = \langle x_0 \dots x_k \rangle$ – симплекс в K

$f(\mathring{St}(x_i)) \subset \mathring{St}(y_i)$

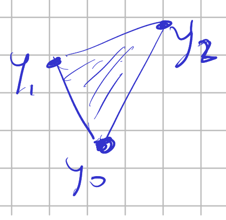
Тоді $\{y_0 \dots y_k\}$ – належать одному симплексу в L.

$f(\bar{\alpha}) = f(\bigcap St(x_i)) \subset \underbrace{\bigcap \mathring{St}(y_i)}_{} \neq \emptyset \Rightarrow$ містить симплекс $\{y_0 \dots y_k\}$

Лема. Нехай $y_0 \dots y_k$ – вершини поліедра L

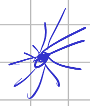
Тоді $\langle y_0 \dots y_k \rangle$ – симплекс в L $\Longleftrightarrow$ $\bigcap \mathring{St}(y_i) \neq \emptyset$

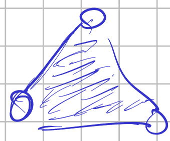
і в цій ситуації відкр симплекс $\langle y_0 \dots y_k \rangle \subset \bigcap\limits_i \mathring{St}(y_i)$



$St(y_0) \underbrace{\cap}_{\alpha} St(y_1) \neq \emptyset \Rightarrow \exists$ $\bar{\alpha} \ni y_0, y_1$

$N,\ \Sigma = \{\varnothing, \{u\}, \{0, m\}\}$





власне f^{-1}(компакт) — компакт.

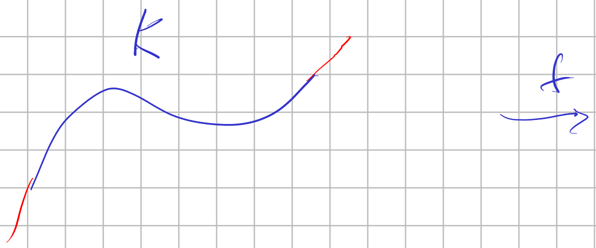
Апроксимативна для

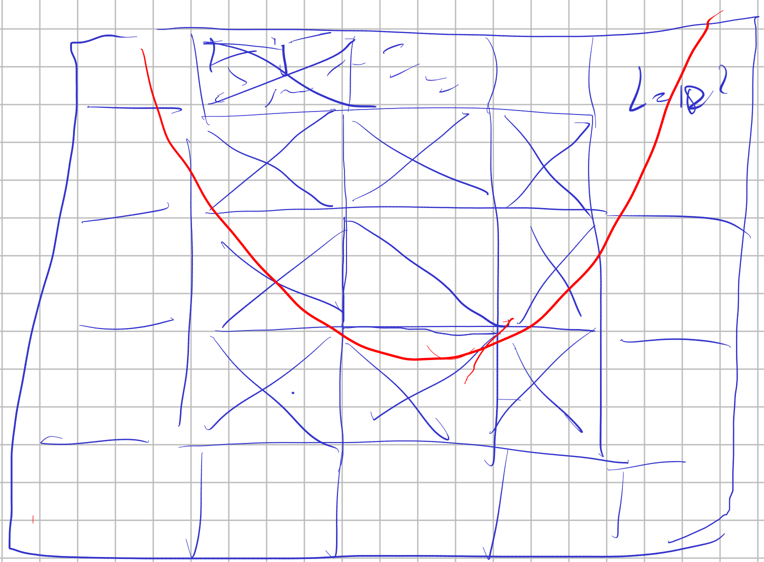
$f: K_\sigma \to L_\tau$ — власне відображення злічених локально-скінченних комплексів.

$\forall$ неперервної функції $\varepsilon: K \to (0; +\infty)$ $\exists$ подрібнення $\sigma' < \sigma$ і $\tau' < \tau$ і симпліціальне відобр. $g: (K, \sigma') \to (L, \tau')$ і гомотопія $H: K \times [0,1] \to L$:

- $\operatorname{diam} H(x \times [0,1]) < \varepsilon(x) \quad \forall x \in K$

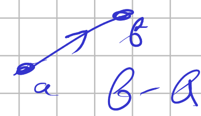
$H_0 = f \qquad H_1 = g$





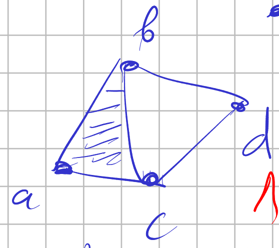
Лекція 6 Гомології симпліціальних комплексів.

K, Λ = сім'я скінч. підмножин замкнена відносно включень тобто якщо $\alpha \in$, і $\beta \subset \alpha \Rightarrow \beta \in \Sigma$



елементи з Λ називають симплексами.

$$K = \{a, b, c, d\}$$



$$= \{\emptyset, a, b, c, d, \; ab, bc, ac, bd, cd, \; abc\}$$

$\Lambda^{-1} = \{\emptyset\}$

$\Lambda^{0} = \{a, b, c, d\}$

$\Lambda^{1} = \{ab, bc, cd, ac, bd\}$

$\Lambda^{2} = \{abc\}$

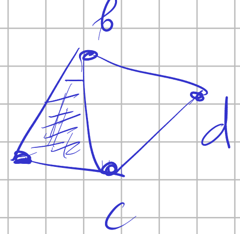
Група i-вимірних ланцюгів K,

$$\Lambda^{i} = \{\alpha \in \; , \#\alpha = i+1 \text{ - число елементів}\}$$

Нехай G - довільна комутативна група ($\mathbb{Z}$, $\mathbb{Z}_n$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$, $\mathbb{Q}$ ...)

$$C_i(K, G) = \bigoplus_{\alpha \in} G = \left\{ \sum_{\alpha \in \Lambda} g_\alpha \cdot \alpha \right\}$$

$$C_0(K, \mathbb{Q}) = \{ q_a \cdot a + q_b \cdot b + q_c c + q_d d \}$$



$$0{,}7a - 0{,}43b + \frac{1}{325} c - 14{,}7329 d$$

$$C_0(K, G) = G^4 = G \oplus G \oplus G \oplus G$$

$$C_1(K, G) = G^6 =$$

$$C_2(K, G) = G$$

Впорядкуємо всі вершини K!!!

Вводимо позначення для симплексів. Тоді кожен симплекс $\alpha = \{a_0 < \ldots < a_n\}$ можна єдиним чином записати як впорядковану послідовність вершин.

З іншого боку α можна записати в будь-якому порядку

$(a_0 a_1 \dots a_n)$ $\qquad$ $(a_1 a_0 a_3 a_2 \dots a_7)$

$+\alpha = (a_0 \dots a_n)$ так, щоб $a_0 < a_1 < \dots < a_n$

якщо $\lambda = ($перестановка $\{a_0 \dots a_n\})$ то

$$a_0\ a_1\ a_2\ a_3 \longrightarrow a_1\ a_3\ a_0\ a_2$$

за скінченне число "транспозицій" – перестановка двох сусідніх

$$0\ 1\ 2\ 3 \longrightarrow 1\ 3\ 0\ 2$$

$1\ 0\ 2\ 3$

3 $\quad 1\ 0\ 3\ 2$

$1\ 3\ 0\ 2$

$\alpha \longrightarrow \beta$

$\boxed{\text{Парність числа таких перестановок завжди буде одна і та ж.}}$

Залежить від пари (α, β)

$\#(\alpha, \beta) \longrightarrow +1$ – парне число транспозицій щоб

-1 – непарне $\quad$ перейти від α до β

$$\alpha = (a_0 < a_1 < \dots < a_n)$$

якщо $\alpha = \beta = \{a_{\delta_1}\ a_{\delta_2} \dots a_{\delta_n})$ – перес.

$$\beta = (-1)^{\#(\alpha,\beta)} \cdot \alpha$$

$\alpha = (a_0\ a_1\ a_2)$ $\qquad$ $(a_1\ a_0\ a_2) = -\alpha$

$(a_1\ a_2\ a_0) = \alpha$

базисный эл-т $C_n(K,G)$

$\alpha = (a_0 a_1 \dots a_n) \longrightarrow \partial\alpha$

$\in C_n(K,G) \qquad\qquad \rotatebox{90}{$\in$}\ C_{n-1}(K,G)$

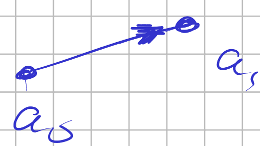
$$\partial\alpha = (a_1 a_2 \dots a_n) - (a_0 a_2 a_3 \dots a_n) + (a_0 a_1 a_3 \dots a_n)$$
$$+ (-1)^i (a_0 \dots a_{i-1}\ a_{i+1} \dots a_n) \pm (-1)^n (a_0 a_1 \dots a_{n-1})$$
$$= \sum_{i=0}^{n} (-1)^i (a_0 a_1 \dots a_{i-1}\ \hat{a}_i\ a_{i+1} \dots a_n)$$

$$\partial(a_0 a_1 a_2 \dots) = (a_1 a_2 \dots) - (a_0 a_2 \dots) + \dots$$
$$+ (a_0 a_1 a_3 \dots) - (a_0 a_1 a_2 a_4 \dots) \dots$$

$$\partial(a_1 a_0 a_2 \dots) = (a_0 a_2 \dots) - (a_1 a_2 \dots)$$
$$\underbrace{(a_1 a_0 a_3 \dots)}_{\cdot(-1)} - \underbrace{(a_1 a_0 a_2 a_4 \dots)}_{\cdot(-1)}$$
$$= -\partial(a_0 a_1 \dots a_n)$$

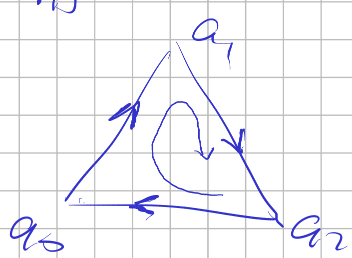
$\partial(a) = 0 \qquad C^{-1}(K) = 0 \qquad \Lambda^{-1} = \{\varnothing\}$

$\partial(a_0 a_1) = a_1 - a_0$



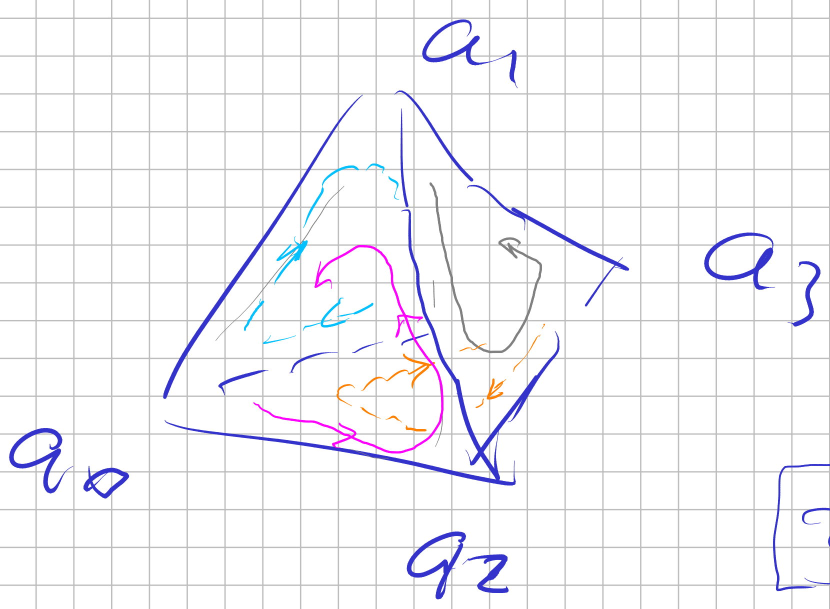
$\partial(a_0 a_1 a_2) = (a_1 a_2) - (a_0 a_2) + (a_0 a_1)$

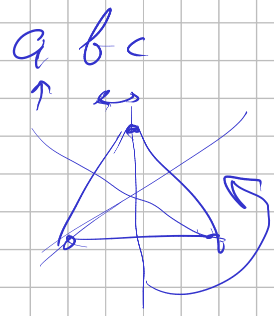
$\qquad\qquad + (a_2 a_0)$



$$\partial(a_0 a_1 a_2 a_3) = (a_1 a_2 a_3) - \underline{(a_0 a_2 a_3)} + (a_0 a_1 a_3) - (a_0 a_1 a_2)$$

в нутри





$$\boxed{\partial\partial(a_0a_1a_2a_3)=0}$$

<u>Д/З</u> Доказать что $\forall$ симплекса

$$\partial\partial(a_0 \ldots a_n) \equiv 0$$