# Лекція 4. Симпліціальні відображення.

Поліедр — об'єдн. симплексів, будь-які 2 з яких прав. перетин.

Симпліціальний комплекс $K$, $\Sigma(K) = \{\sigma \subset K\}$, що $\forall \sigma \in \Sigma(K)$

① $\sigma$ — скінченна

② $\rho \subset \sigma \Rightarrow \rho \in \Sigma(K)$

$\boxed{\dim \sigma = |\sigma| - 1}$

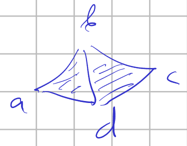
$\dim \varnothing = -1$

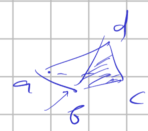
$\dim \{a\} = 0$

$\dim\{a,b\} = 1$

**Теорема** $K$ — скінч. симпл. комплекс то $\exists$ його геом. реалізація в $\mathbb{R}^N$

① $|K| = N+1 \Rightarrow K \subset \Delta^N$

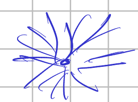



② $\dim K = \max\limits_{\sigma} \dim \sigma = n$ то $N = 2n+1$

---

$\mathbb{R}$



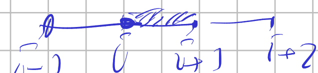
**Означення**

$K$ — симпл. компл. $\Sigma = \Sigma(K) = \{\sigma \subset K\}$ —

$K$ — є локально скінченним, якщо $\forall \sigma \in \Sigma$

множина $\{\rho \in \Sigma \mid \rho \cap \sigma \neq \varnothing\}$ — скінченна

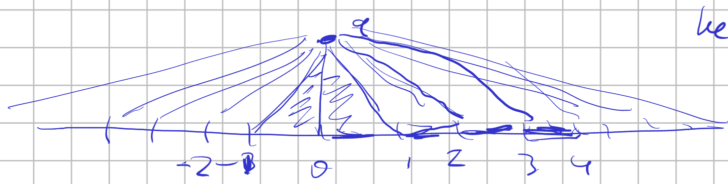
① "$\mathbb{R}$" $K = \mathbb{Z}$, $\Sigma = \{\mathbb{Z}, \{i, i+1\}\}$




— локально скінчене

② $C(\mathbb{R})$ $\Sigma = \{a, \mathbb{Z}, \{i, i+1\}, \{a, a\}, \{a, i, i+1\} \ \forall a \in \mathbb{Z}\}$

не є лок. скін.




**Означення**

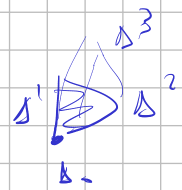
$\dim K = \sup\limits_{\sigma \in \Sigma} \dim \sigma$

**Приклад** $K = \mathbb{N}$, $\Sigma$ — множ. всіх скінченних підмножин в $\mathbb{N}$

$\Delta^n = 2^{\{1..n\}}$ $\quad \Delta^0 = \varnothing$ $\quad \Delta^1 = \{\varnothing, 1\}$ $\quad \Delta^2 = \{\varnothing, 1, 2, 12\}$

$\Delta^3 = \{\emptyset, 1, 2, 3, 12, 13, 23, 123\}$

$\Delta^0 < \Delta^1 < \Delta^2 < \dots \qquad K$




$\dim K = \infty$

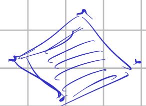
<u>Теорема</u> Нехай $K$ — злічений, лок. скінчений симпліціальний комплекс розмірності $n$. Тоді $\exists$ геометрична реалізація $K$ в $\mathbb{R}^{2n+1}$

$\Downarrow$ $K$ — мн-на вершин, $N=2n+1$, $f: K \to \mathbb{R}^N \Rightarrow$ "майже геомет. реаліз."

$\sigma$ — симплекс в $K \Rightarrow \bar\sigma$ = опукла оболонка $\{f(\sigma)\}$

$\sigma = \{a, b, c\}$

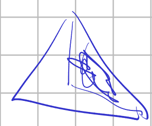

$\{abcd\}$



$f$ задає геом. реалізацію якщо виконані умови

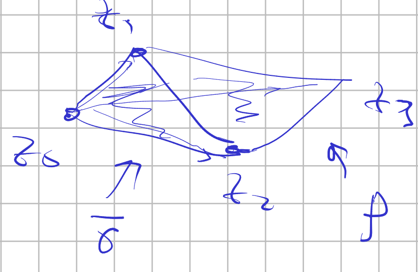
① $\forall \sigma$: вершини $f(\sigma)$ — АНЗ

② $\forall \sigma, \rho$ перетин $\bar\sigma \cap \bar\rho = \overline{\sigma \cap \rho}$



$$A_{\sigma,\rho} = \begin{pmatrix} f(z_1) - f(z_0) \\ f(z_2) - f(z_0) \\ \dots \\ f(z_k) - f(z_0) \end{pmatrix} \Bigg\} \text{ } k \text{ рядків}$$

$\sigma \cup \rho = \{z_0 \dots z_k\}$




①, ② $\Leftrightarrow$ $\operatorname{rank} A_{\sigma\rho} = k$
$\forall \sigma, \rho$

$\forall \sigma, \rho \Rightarrow Q_{\sigma,\rho} \subset \operatorname{Map}(K, \mathbb{R}^N) \overset{\sim}{=} \mathbb{R}^\infty$ ← тут потрібно ввести "правильну топ."

$f \in Q \Leftrightarrow f$ задов. умови ① і ② для $\sigma, \rho$

① $Q_{\sigma,\rho}$ — відкриті всюди щільні

Тоді загал. реалізації $K$ це відобр. з $\boxed{\bigcap_{\sigma,\rho} Q_{\sigma,\rho}}$

Припустимо, що топологія на $Map(K, \mathbb{R}^n)$ — метризовна і повна.

Теорема Бера про категорії: Нехай $X$ — повний метричний простір і $G_0, G_1, \ldots$ — злічене число відкритих і всюди щільних підмножин. Тоді $\bigcap_{i=0}^{\infty} G_i$ — всюди щільна.

Приклад: $(0,1)$ — не повний метр. пр-р, а $\mathbb{R} = (-\infty, +\infty)$ — повний

$\left\{\frac{1}{n}\right\} \to 0 \notin (0,1)$

$K = \{a, b, c\}$ $\quad f \in \underline{Map(\{a,b,c\}, \mathbb{R}^4)} \equiv \mathbb{R}^{12}$

$\sigma \cup \rho = \{a, a, b, c\}$

$$\underbrace{\begin{array}{l} a \to (x_1^a \; x_2^a \; x_3^a \; x_4^a) - a \\ b \to (x_1^b \; x_2^b \; x_3^b \; x_4^b) - a \\ c \to (x_1^c \; x_2^c \; x_3^c \; x_4^c) - a \end{array}}_{A_{\sigma,\rho}} \in \mathbb{R}^{12}$$

rank $A_{\sigma\rho}$ — максимальний $\iff$ $\overbrace{\underline{\sum \text{квадр. мінорів } 3\times 3 \text{ матр. } A_{\sigma\rho}}}^{=\alpha_{\sigma,\rho}} \neq 0$

мн-на загал. реалізацій $K \equiv \alpha_{\sigma,\rho}^{-1}(\mathbb{R} \setminus 0)$ — всюди щільна

# Симпліціальні відобр. комплексів і комплексів

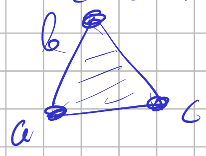
K, L – симпл. комплекси : $(K, \Sigma_K)$ $(L, \Sigma_L)$

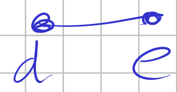
Відобр $f: K \to L$ – симпліціальним якщо

$$f(\sigma) \in \Sigma_L \quad \forall \sigma \in \Sigma_K$$

$\Sigma_K \ni \sigma = \{x_0, x_1 \dots x_k\}$ $\quad f(\sigma) = \{f(x_0), f(x_1) \dots f(x_k)\} \in \Sigma_L$

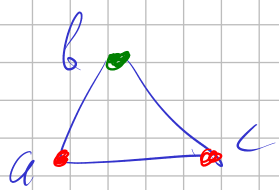
Приклади ① $K = \{a, b, c\}$, $\Sigma_K = 2^K$ – всі підмн.

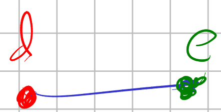



$L = \{d, e\}$ $\quad \Sigma_L = 2^L$

$f: K \to L$ $\quad f(a) = d$ $\quad f(b) = e$, $\quad f(c) = d$

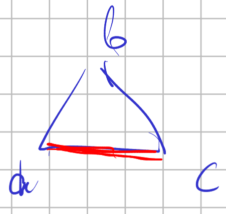


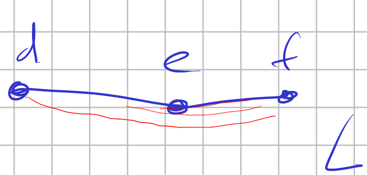




$f(ab) = \{de\}$, $\quad f(bc) = \{de\}$ $\quad f(ac) = d$ $\quad f(abc) = de$

f – симпліціальне

② $K = 2^{\{a,b,c\}}$ $\qquad L = \{d, e, f\}$ $\quad \Sigma_L = \{d, e, f, de, ef\}$




$\varphi(a) = d$, $\quad \varphi(b) = e$, $\quad \varphi(c) = f$.

$\varphi(ac) = df \notin \Sigma_L$

Нехай $A = \{a_0 \dots a_k\} \subset \mathbb{R}^n$ $\quad B = \{b_0 \dots b_l\} \subset \mathbb{R}^m$

дві системи АНЗ точок. $\bar{A}$ і $\bar{B}$ — це відповідні симплекси

$f: A \to B$ — довільне відобр. Тоді $f$ продовжується до "афінного відобр." $\bar{f}: \bar{A} \to \bar{B}$

$x \in \bar{A}$ $\quad x = \alpha_0 a_0 + \alpha_1 a_1 + \dots + \alpha_k a_k$ $\quad \sum \alpha_i = 1$, $\alpha_i \geq 0$

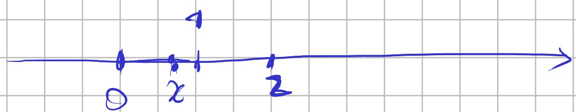
Визначимо $\bar{f}(x) = \alpha_0 f(a_0) + \alpha_1 f(a_1) + \dots + \alpha_k f(a_k)$

Назвемо $\bar{f}$ — лінійним продовженням $f$

<u>Приклади</u> $\quad A = \{0, 1\} \subset \mathbb{R}^1$ $\quad B = \{5, 7\} \subset \mathbb{R}^1$

$f: A \to B$ $\quad f(0) = 7$ $\quad f(1) = 5$

$A = \{0, 1\}$ $\quad B = \{0, 2\}$ $\quad f(0) = 0$ $\quad f(1) = 2$




Нехай $x \in [0, 1]$ $\quad \alpha_0 + \alpha_1 = 1$

$x = \alpha_0 \cdot 0 + \alpha_1 \cdot 1 \Rightarrow \alpha_1 = x$

$\alpha_0 = 1 - \alpha_1 = 1 - x$

$x = (1-x) \cdot 0 + x \cdot 1 \Rightarrow (1-x) f(0) + x \cdot f(1) =$

$= (1-x) 0 + x \cdot 2 = 2x$

$\bar{f}: [0, 1] \to [0, 2]$ $\quad \bar{f}(x) = 2x$

$A = \{0, 1\}$ $\quad B = \{0, 2\}$ $\quad f(0) = 2$ $\quad f(1) = 0$

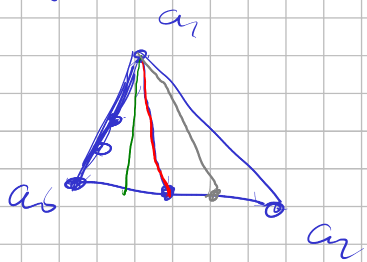
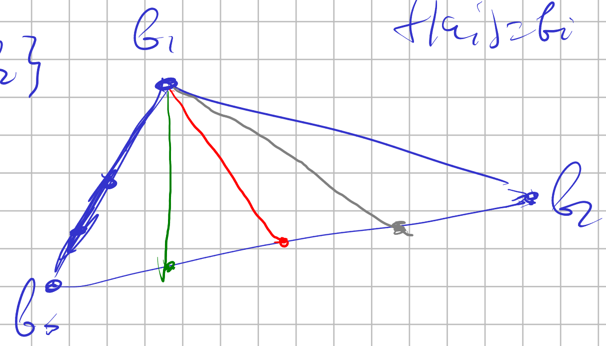
$f(x) = 2 - 2x$

$x = (1-x) 0 + x \cdot 1$ $\quad \bar{f}(x) = (1-x) \cdot \overset{=2}{f(0)} + x \cdot \overset{=0}{f(1)} = (1-x) \cdot 2 = 2 - 2x$

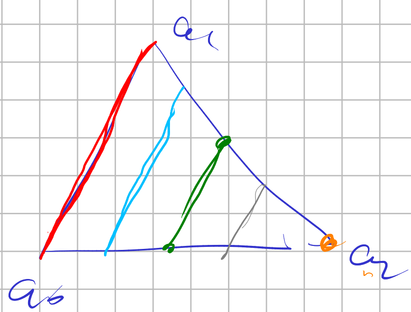
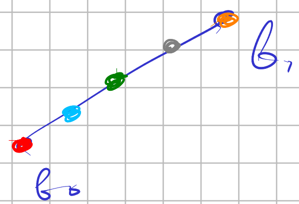
$A = \{0, 1\}$ $\quad B = \{3\}$ $\quad \underline{f(0) = f(1) = 3}$


$\bar{f}(x) = (1-x) \cdot 3 + x \cdot 3 = 3$

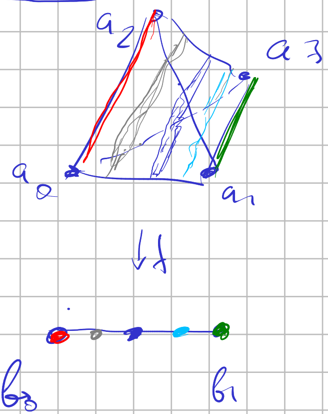
$A = \{a_0, a_1, a_2\}$ $\quad B = \{b_0, b_1, b_2\}$ $\quad f(a_i) = b_i$

$A = \{a_0, a_1, a_2\}$ $\quad B = \{b_0, b_1\}$ $\quad f(a_0) = f(a_1) = b_0$, $f(a_2) = b_1$

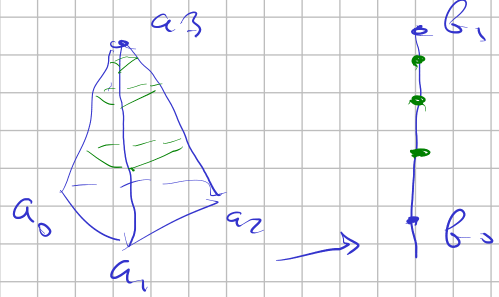
 

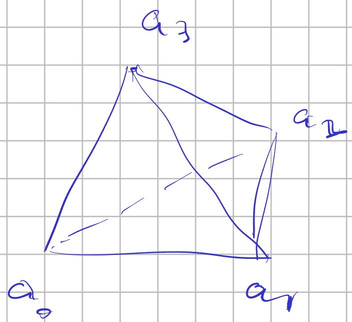
---



$f(a_0) = f(a_2) = b_0$

$f(a_1) = f(a_3) = b_1$



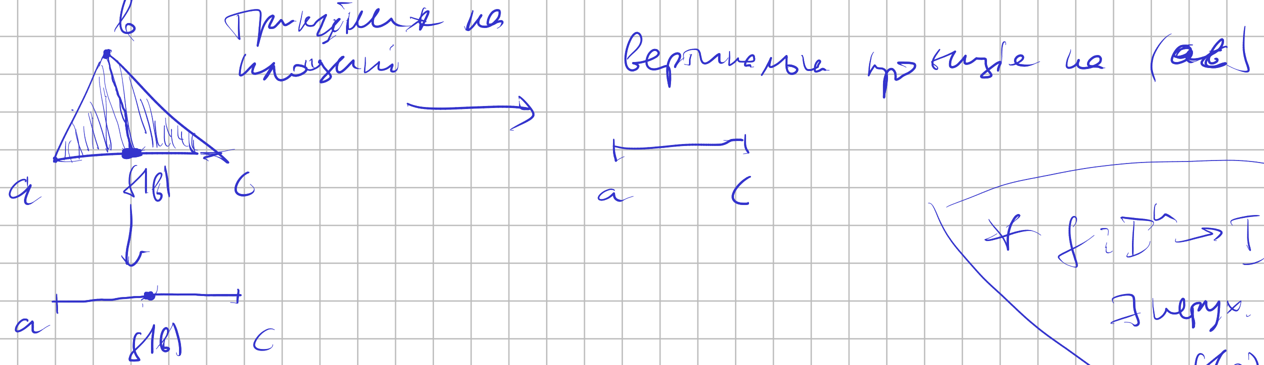


---

Нехай $\bar{K}$, $\bar{L}$ – поліедри з триангуляціями $\Sigma_K$, $\Sigma_L$. $\quad \bar{K} \subset \mathbb{R}^n$ $\quad \bar{L} \subset \mathbb{R}^m$

Відобр. $f: \bar{K} \to \bar{L}$ назив. <u>симпліціальним</u> (кусково лінійним) якщо $\forall$ симплекс $\sigma \in \Sigma_K$, $f(\sigma)$ – симплекс в $\Sigma_L$, а відобр. $f|_\sigma : \sigma \to f(\sigma)$ є лінійним відобр. симплексів.

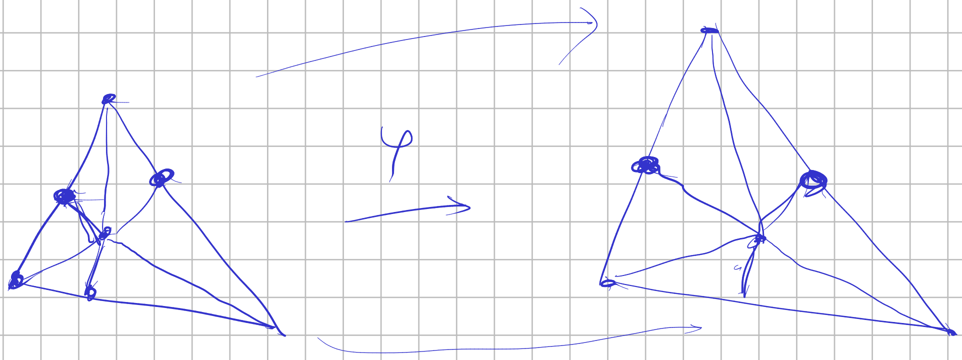
$f: \tilde{T} \to T$ — назив. кусково-лінійне, якщо $\exists$ триангуляції $\Sigma_K$ і $\Sigma_L$ такі, що $f$ — є симпліціальним відносно цих триангуляцій




$\forall f: I^n \to I^n$ $\exists$ нерух. точка $f(x) = x$

не симпліціальне, бо $f(b)$ — не вершина

але воно кусково лінійне




$A$ — симплекс    $A_1$ і $A_2$ — 2 барицентр. підрозбиття $A$

Тоді $\exists$ симпліціальний гомеоморфізм $\varphi$ між $A_1$ і $A_2$

більше того $\varphi$ ізотопний до $id_A$ за допомогою ізотопії з симпліціальних гомеоморфізмів

$\exists\ \Phi: A \times [0,1] \to A$    $\Phi_0 = id$    $\Phi_t: A \to A$ симпліціальний гомеоморфізм

$\Phi_1 = \varphi$

$A = [0,1]$