圧縮センシングアルゴリズムの構造学習における構造パラメータの二値化

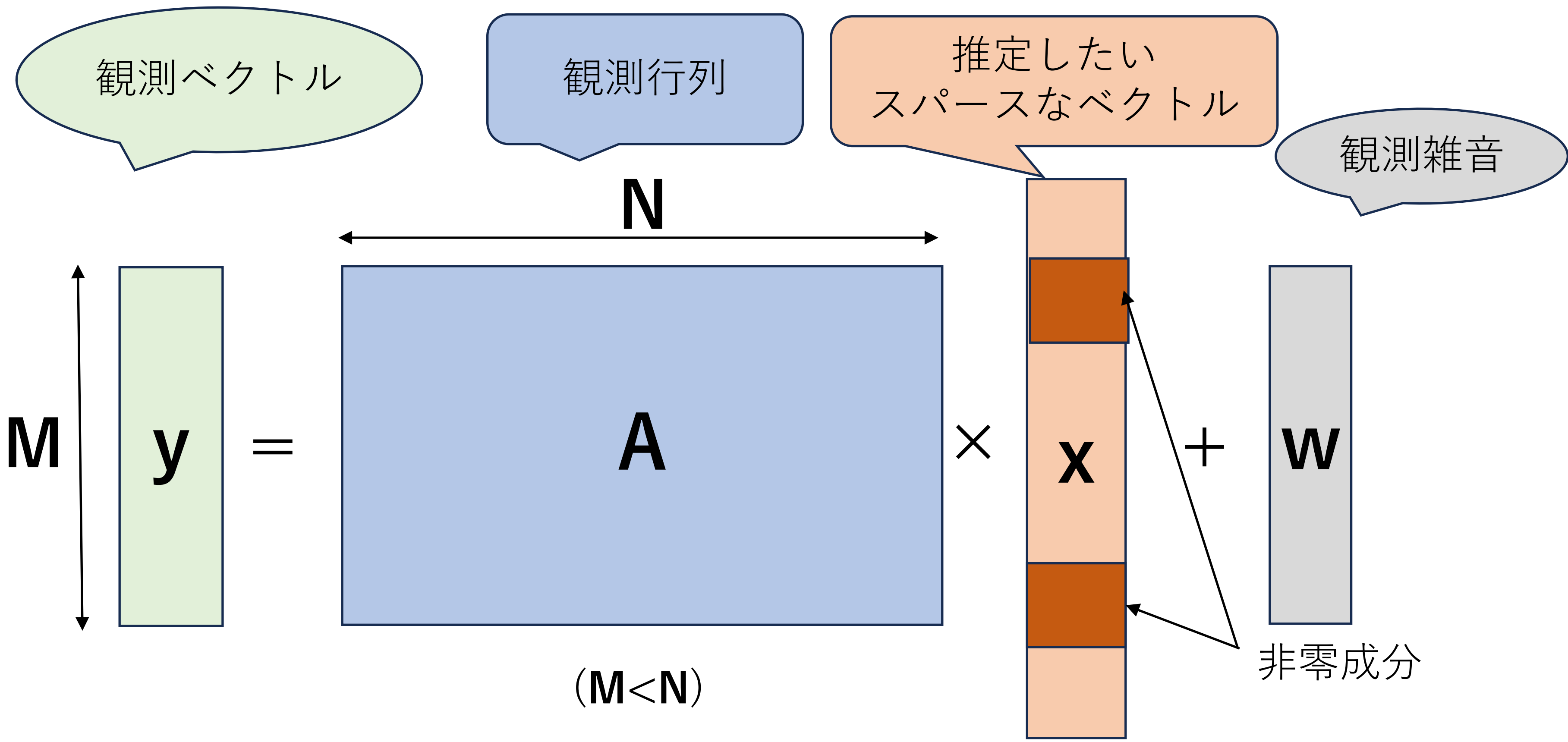
大阪大学　基礎工学部　システム科学科
知能システム学コース
飯國研究室　B4　今井智也

目次

- 研究背景
- 研究目的
- 実験結果
- 結論

研究背景 | 圧縮センシング[1]

- 少ない観測データ$\mathbf{y} \in \mathbb{R}^{M}$からスパースな（非零成分が少ない）$\mathbf{x} \in \mathbb{R}^{N}$を推定する



[1] D. L. Donoho, "Compressed sensing," *IEEE Transactions on Information Theory*, vol. 52, no. 4, pp. 1289-1306, April 2006, doi: 10.1109/TIT.2006.871582.

研究背景 | ISTA(iterative shrinkage thresholding algorithm)[2]

- 圧縮センシングの最適化問題

観測との誤差

スパース性

$$\hat{\boldsymbol{x}} = \underset{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^N}{\operatorname{argmin}} \left\{ \frac{1}{2} \| \boldsymbol{y} - \boldsymbol{A}\boldsymbol{x} \|_2^2 + \lambda \| \boldsymbol{x} \|_1 \right\}$$

(λ:正則化係数)

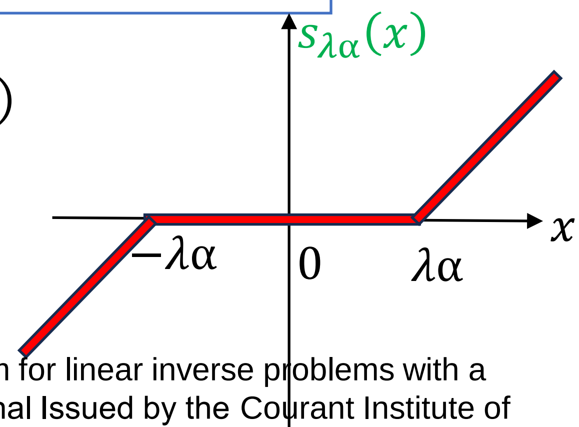
- ISTA

$$\boldsymbol{r}^{(t)} = \boldsymbol{x}^{(t)} - \alpha \boldsymbol{A}^\top \left(\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}^{(t)} - \boldsymbol{y} \right)$$ →勾配降下ステップ

$$\boldsymbol{x}^{(t+1)} = S_{\lambda\alpha}\left(\boldsymbol{r}^{(t)} \right)$$ →縮小ステップ

(α:実定数)

$S_{\lambda\alpha}(\cdot)$:ソフト閾値関数(l_1ノルムの近接写像)



ISTAは最適化問題の解を与える

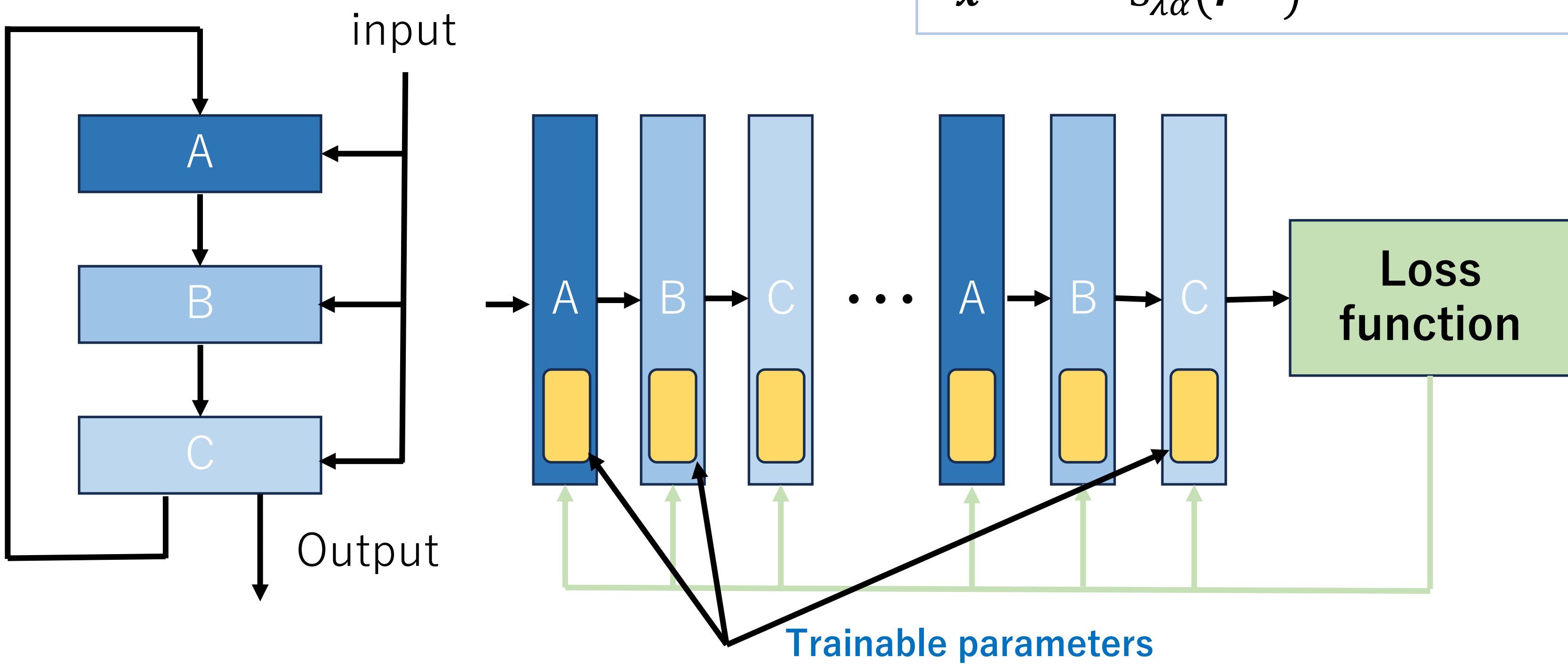
[2] I. Daubechies, M. Defrise, and C. De Mol, “An iterative thresholding algorithm for linear inverse problems with a sparsity constraint,” Communications on Pure and Applied Mathematics: A Journal Issued by the Courant Institute of Mathematical Sciences, vol. 57, no. 11, pp. 1413–1457, 2004

研究背景 | 深層展開[3]

深層展開:深層学習技術を反復型アルゴリズムに適用することでパラメータを適切に学習

→ 推定精度や収束速度が向上

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{r}^{(t)} &= \boldsymbol{x}^{(t)} - \alpha^{(t)} \boldsymbol{A}^{\top}\left(\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}^{(t)} - \boldsymbol{y}\right) \\
\boldsymbol{x}^{(t+1)} &= \mathrm{S}_{\lambda\alpha}\left(\boldsymbol{r}^{(t)}\right)
\end{aligned}
$$



LISTA(Learned ISTA):ISTAに深層展開技術を適用したアルゴリズム

[3]K. Gregor and Y. LeCun, “Learning fast approximations of sparse coding,” in Proc. the 27th International Conference on International Conference on Machine Learning, Jun. 2010, pp. 399–406.

研究背景｜AS-ISTA (Architecture Searched-ISTA)[4]

- 従来の深層展開ではアルゴリズムのパラメータのみを学習して構造自体は固定していた
- スパース信号復元により特化した構造も学習する

AS−ISTA

$$\boldsymbol{r}^{(t)} = w_{x,f}^{(t)} \times f\left(\boldsymbol{x}^{(t)}\right) + w_{x,g}^{(t)} \times g\left(\boldsymbol{x}^{(t)}\right)$$

$$\boldsymbol{x}^{(t+1)} = w_{r,x}^{(t)} \times f\left(\boldsymbol{r}^{(t)}\right) + w_{r,g}^{(t)} \times g\left(\boldsymbol{r}^{(t)}\right)$$

構造パラメータ: $\beta_1, \beta_2, \gamma_1, \gamma_2$

$f(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{x} - \alpha^{(t)} \boldsymbol{A}^{\top}(\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y})$:勾配降下ステップ

$g(\boldsymbol{x}) = \mathrm{S}_{\lambda\alpha^{(t)}}(\boldsymbol{x})$:縮小ステップ

$$w_{x,f}^{(t)} = \frac{\exp\left(\beta_1^{(t)}\right)}{\exp\left(\beta_1^{(t)}\right) + \exp\left(\beta_2^{(t)}\right)}, \quad w_{x,g}^{(t)} = \frac{\exp\left(\beta_2^{(t)}\right)}{\exp\left(\beta_1^{(t)}\right) + \exp\left(\beta_2^{(t)}\right)}$$

$$w_{r,x}^{(t)} = \frac{\exp\left(\gamma_1^{(t)}\right)}{\exp\left(\gamma_1^{(t)}\right) + \exp\left(\gamma_2^{(t)}\right)}, \quad w_{r,g}^{(t)} = \frac{\exp\left(\gamma_2^{(t)}\right)}{\exp\left(\gamma_1^{(t)}\right) + \exp\left(\gamma_2^{(t)}\right)}$$

ソフトマックス型の重み

[4]長久, 早川, 飯國, "圧縮センシングアルゴリズムの構造学習, " 第38回信号処理シンポジウム, 2023年11月.

研究目的 I AS−ISTAの重みの二値化

AS−ISTA

構造パラメータ: $\beta_1, \beta_2, \gamma_1, \gamma_2$

$$\boldsymbol{r}^{(t)} = w_{x,f}^{(t)} \times f\left(\boldsymbol{x}^{(t)}\right) + w_{x,g}^{(t)} \times g\left(\boldsymbol{x}^{(t)}\right)$$

$$\boldsymbol{x}^{(t+1)} = w_{r,x}^{(t)} \times f\left(\boldsymbol{r}^{(t)}\right) + w_{r,g}^{(t)} \times g\left(\boldsymbol{r}^{(t)}\right)$$

$f(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{x} - \alpha^{(t)} \boldsymbol{A}^\top (\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y})$:勾配降下ステップ

$g(\boldsymbol{x}) = \mathrm{S}_{\lambda\alpha^{(t)}}(\boldsymbol{x})$:縮小ステップ

重み部分がソフトマックス型のため重みの値は0より大きく1未満の値をとる

ISTAにくらべて２倍の計算量がかかる

目的 ⇒ 重みを二値化することでどちらのステップを利用しているかを明確にするとともに計算量を削減

新たな重みの設定

0と1の値をとることのできる新たな重みを設定

$$\boldsymbol{r}^{(t)} = w_{x,f}^{(t)} \times f\left(\boldsymbol{x}^{(t)}\right) + w_{x,g}^{(t)} \times g\left(\boldsymbol{x}^{(t)}\right)$$

$$\boldsymbol{x}^{(t+1)} = w_{r,x}^{(t)} \times f\left(\boldsymbol{r}^{(t)}\right) + w_{r,g}^{(t)} \times g\left(\boldsymbol{r}^{(t)}\right)$$

パターン1

$$w_{x,f}^{(t)} = \beta^{(t)}, \qquad w_{x,g}^{(t)} = 1 - \beta^{(t)}$$

$$w_{r,x}^{(t)} = 1 - \gamma^{(t)}, \qquad w_{r,g}^{(t)} = \gamma^{(t)}$$

パターン2

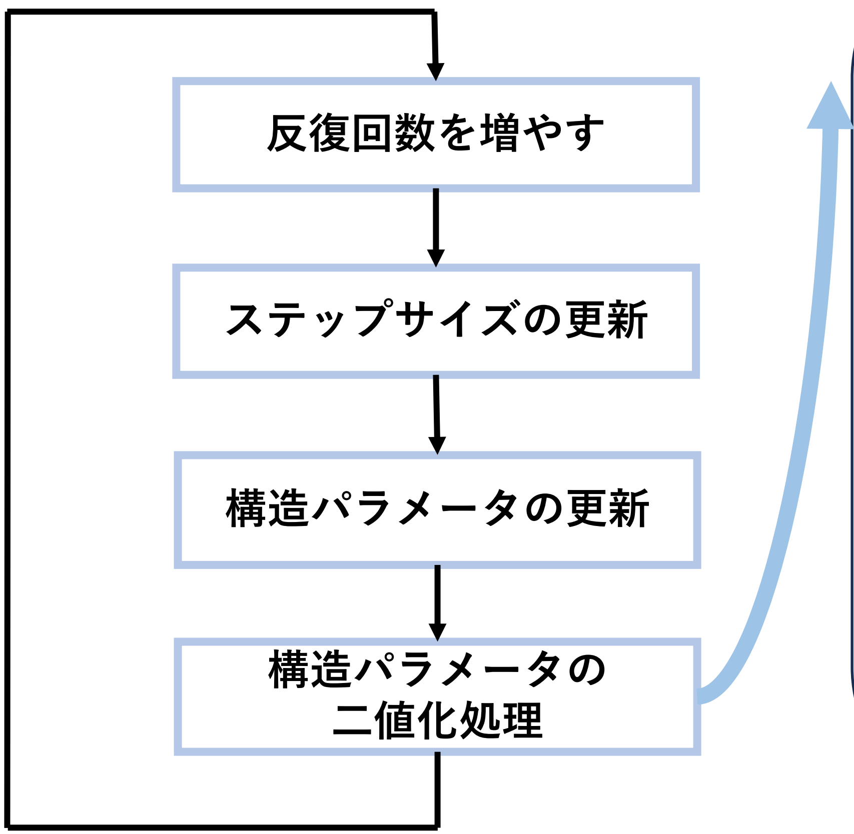
$$w_{x,f}^{(t)} = \frac{\beta_1^{(t)}}{\beta_1^{(t)} + \beta_2^{(t)}}, \qquad w_{x,g}^{(t)} = \frac{\beta_2^{(t)}}{\beta_1^{(t)} + \beta_2^{(t)}}$$

$$w_{r,x}^{(t)} = \frac{\gamma_1^{(t)}}{\gamma_1^{(t)} + \gamma_2^{(t)}}, \qquad w_{r,g}^{(t)} = \frac{\gamma_2^{(t)}}{\gamma_1^{(t)} + \gamma_2^{(t)}}$$

AS-ISTAの重みの二値化

AS-ISTAの重みを二値化したアルゴリズムをBAS-ISTA(Binarized AS-ISTA)とする

BAS-ISTAの学習方法の概略



構造パラメータの二値化方法

パターン1

$$\beta^{(t)} = \begin{cases} 1 & (\beta^{(t)} \geq 0.5) \\ 0 & (\beta^{(t)} < 0.5) \end{cases} \qquad \gamma^{(t)} = \begin{cases} 1 & (\gamma^{(t)} \geq 0.5) \\ 0 & (\gamma^{(t)} < 0.5) \end{cases}$$

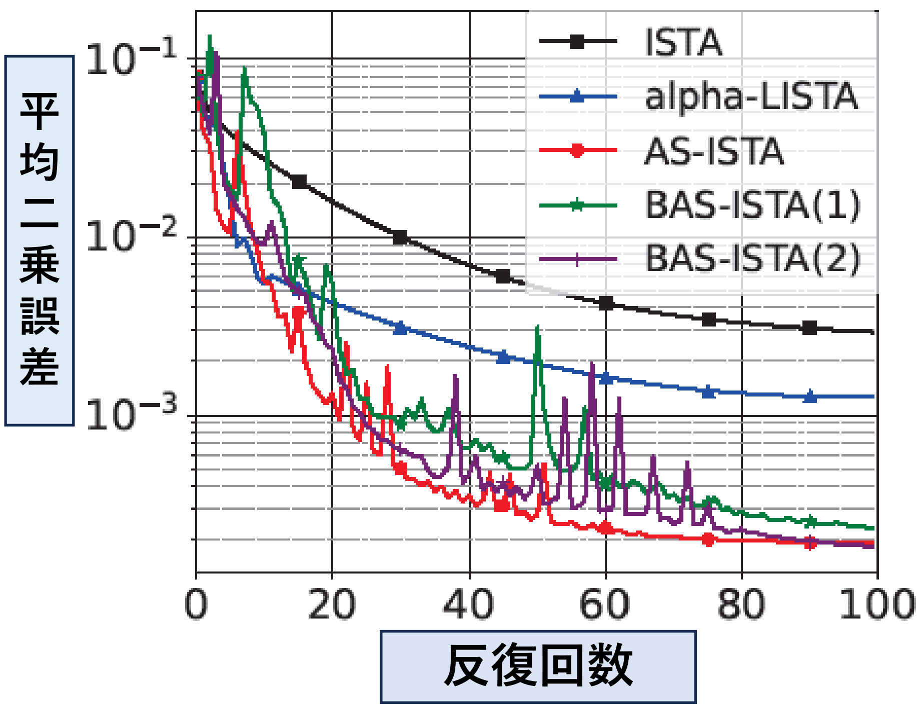
パターン2

$$\beta_1^{(t)} = \begin{cases} 1 & (\beta_1^{(t)} \geq \beta_2^{(t)}) \\ 0 & (\beta_1^{(t)} < \beta_2^{(t)}) \end{cases} \qquad \gamma_1^{(t)} = \begin{cases} 1 & (\gamma_1^{(t)} \geq \gamma_2^{(t)}) \\ 0 & (\gamma_1^{(t)} < \gamma_2^{(t)}) \end{cases}$$

$$\beta_2^{(t)} = \begin{cases} 1 & (\beta_2^{(t)} \geq \beta_1^{(t)}) \\ 0 & (\beta_2^{(t)} < \beta_1^{(t)}) \end{cases} \qquad \gamma_2^{(t)} = \begin{cases} 1 & (\gamma_2^{(t)} \geq \gamma_1^{(t)}) \\ 0 & (\gamma_2^{(t)} < \gamma_1^{(t)}) \end{cases}$$

実験の結果

AS-ISTAとBAS-ISTAのグラフの比較



alpha-LISTA

$$\boldsymbol{r}^{(t)} = \boldsymbol{x}^{(t)} - \alpha^{(t)} \boldsymbol{A}^{\top}\left(\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}^{(t)} - \boldsymbol{y}\right)$$
$$\boldsymbol{x}^{(t+1)} = S_{\lambda\alpha}\left(\boldsymbol{r}^{(t)}\right)$$

BAS-ISTA(1)：パターン1

$$\boldsymbol{r}^{(t)} = \beta^{(t)} \times f\left(\boldsymbol{x}^{(t)}\right) + \left(1 - \beta^{(t)}\right) \times g\left(\boldsymbol{x}^{(t)}\right)$$
$$\boldsymbol{x}^{(t+1)} = \left(1 - \gamma^{(t)}\right) \times f\left(\boldsymbol{r}^{(t)}\right) + \gamma^{(t)} \times g\left(\boldsymbol{r}^{(t)}\right)$$

BAS-ISTA(2)：パターン2

$$\boldsymbol{r}^{(t)} = \frac{\beta_1^{(t)}}{\beta_1^{(t)} + \beta_2^{(t)}} \times f\left(\boldsymbol{x}^{(t)}\right) + \frac{\beta_2^{(t)}}{\beta_1^{(t)} + \beta_2^{(t)}} \times g\left(\boldsymbol{x}^{(t)}\right)$$
$$\boldsymbol{x}^{(t+1)} = \frac{\gamma_1^{(t)}}{\gamma_1^{(t)} + \gamma_2^{(t)}} \times f\left(\boldsymbol{r}^{(t)}\right) + \frac{\gamma_2^{(t)}}{\gamma_1^{(t)} + \gamma_2^{(t)}} \times \boldsymbol{g}\left(\boldsymbol{r}^{(t)}\right)$$

重みを二値化したにもかかわらず，最終的にBAS-ISTAはAS-ISTAと同様の精度を得ることができた

実験の結果

100反復時のアルゴリズムの計算時間の比較

表１　各アルゴリズムの100 反復にかかる計算時間とAS-ISTAとの 比較

アルゴリズム	計算時間[s]	AS-ISTA比(%)
ISTA	1.72×10^{-2}	50.7
AS-ISTA	3.39×10^{-2}	—
BAS-ISTA(1)	1.84×10^{-2}	54.3
BAS-ISTA(2)	1.83×10^{-2}	54.0

BAS-ISTAはAS-ISTAに比べて計算時間を削減することができた

結論

まとめ

・圧縮センシングのためのアルゴリズムであるISTAの精度を
　向上させるため，パラメータと構造を学習させたAS-ISTAの
　重みの二値化を行った
・二値化を行った際でも精度は変わらない結果を得た
・反復時間の削減を行うことができた

今後の課題

・重みを二値化した場合でも反復途中の精度の落ちないような学習
　方法を検討する