

Método de gradiente

Dr. Iván de Jesús May-Cen
Email: imaycen@hotmail.com

Octubre 2024

1 Introducción

El método del gradiente es un esquema numérico iterativo utilizado para resolver problemas de optimización. Dado un conjunto de variables $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$, el objetivo es encontrar el punto \mathbf{x}^* que minimice una función objetivo $f(\mathbf{x})$.

El método del gradiente se basa en la idea de que, en cada iteración, se actualiza el valor de \mathbf{x} en la dirección del gradiente negativo de la función objetivo, ya que esta es la dirección de mayor descenso. El esquema numérico básico del método del gradiente se puede describir mediante la siguiente ecuación:

$$\mathbf{x}^{(k+1)} = \mathbf{x}^{(k)} - \alpha \nabla f(\mathbf{x}^{(k)})$$

donde:

- $\mathbf{x}^{(k)}$ es el vector de variables en la iteración k ,
- α es la tasa de aprendizaje o tamaño de paso,
- $\nabla f(\mathbf{x}^{(k)})$ es el gradiente de la función objetivo evaluado en $\mathbf{x}^{(k)}$.

El gradiente $\nabla f(\mathbf{x})$ representa la dirección de mayor crecimiento de la función, por lo que al moverse en la dirección opuesta ($-\nabla f(\mathbf{x})$), se busca reducir el valor de $f(\mathbf{x})$.

El proceso iterativo continúa hasta que la diferencia entre dos iteraciones consecutivas $\mathbf{x}^{(k+1)}$ y $\mathbf{x}^{(k)}$ sea menor que una tolerancia predefinida o hasta que se alcance un número máximo de iteraciones.

Este método es ampliamente utilizado en problemas de optimización convexa y se puede aplicar tanto a funciones de una variable como de múltiples variables.

2 Ejemplo 1, en una variable

Aquí tienes un ejemplo en Python utilizando el método del gradiente descendente para minimizar una función cuadrática simple. El código también genera una gráfica que muestra la convergencia del valor de la función objetivo en cada iteración.

Este ejemplo minimiza la función $f(x) = (x - 3)^2$, que tiene un mínimo en $x = 3$.

2.1 Explicación

Función objetivo: En este caso, la función es $f(x) = (x - 3)^2$, que es una parábola con un mínimo en $x = 3$.

Gradiente: El gradiente de esta función es $f'(x) = 2(x - 3)$.

Método del gradiente descendente: Comienza con un valor aleatorio para x y en cada iteración actualiza el valor de x en la dirección del gradiente negativo.

Gráfica de convergencia: La gráfica muestra cómo el valor de la función objetivo disminuye a medida que avanzan las iteraciones.

El algoritmo se detiene si la diferencia entre las iteraciones consecutivas es menor que un valor de tolerancia o si se alcanza el número máximo de iteraciones.

2.2 Código del ejemplo

<https://github.com/imaycen/gradiente-ejemplo-1-variable.git>

3 Ejemplo 2, en dos variables

A continuación te muestro un ejemplo de cómo implementar el método del gradiente en Python para una función de dos variables. El código también genera dos gráficas: una para la convergencia de la función objetivo y otra que muestra el camino de la optimización en el espacio de las dos variables.

En este caso, vamos a minimizar la función:

$$f(x, y) = (x - 2)^2 + (y - 3)^2$$

que tiene un mínimo en $(x, y) = (2, 3)$.

3.1 Explicación del código

Función objetivo: La función a minimizar es:

$$f(x, y) = (x - 2)^2 + (y - 3)^2$$

una función cuadrática simple con un mínimo en $(x, y) = (2, 3)$.

Gradiente: El gradiente de la función es:

$$\nabla f(x, y) = [2(x - 2), 2(y - 3)]$$

lo que nos indica la dirección de mayor aumento de la función.

Método del gradiente descendente: El algoritmo se detiene cuando la diferencia entre iteraciones consecutivas es menor que una tolerancia especificada o cuando se alcanza el número máximo de iteraciones.

Gráficas:

Subplot 1: Muestra la convergencia del valor de la función objetivo conforme avanzan las iteraciones.

Subplot 2: Muestra una gráfica de contornos de la función objetivo en el espacio de x y y , junto con el camino seguido por el método del gradiente descendente, marcado en rojo. La solución final está resaltada en verde.

Este código ilustra cómo el método del gradiente descendente converge hacia el mínimo de una función de dos variables y permite visualizar el proceso de optimización gráficamente.

3.2 Código del ejemplo

<https://github.com/imaycen/gradiente-ejemplo-2-variables.git>