№1

Любому алгоритму сортировки можно сопоставить дерево, в котором вершины соответствуют состояниям алгоритма, ребра - переходам в новое состояние на основании сравнения каких-либо двух чисел в массиве, листья - конечным состояниям в алгоритме, в которых получаем отсортированный массив. Сравнение - бинарная операция, значит каждая вершина имеет не более двух сыновей. Существует $n!$ перестановок массива длины n, значит листьев должно быть столько же, иначе найдутся входные данные, на которых алгоритм будет работать некорректно. Легко понять, что двоичное дерево высоты h имеет не более 2^h листьев. Отсюда получаем:

$$n! \leq l \leq 2^h, \text{ где l - количество листьев} \tag{1}$$

Логарифмируя, получаем:

$$h \geq \log_2 n! = \sum_{k=1}^{n} log_2 k > \frac{n}{2} log_2 \frac{n}{2} = \frac{n}{2}(\log_2 n - \log_2 2) = O(\frac{n}{2}\log_2 n - \frac{n}{2}) = O(n \log n) \tag{2}$$

Высота дерева не менее $O(n \log n)$, значит найдутся входные данные, на которых алгоритм выполнит $O(n \log n)$ сравнений. Положим, что операция сравнения 2-х произвольных чисел в массиве выполняется за $O(1)$. Следовательно, сложность работы алгоритма - не менее $O(n \log n)$.

№2

$C_{4n}^{n} = \frac{(4n)!}{n!(3n)!} = \frac{\sqrt{8\pi n}(\frac{4n}{e})^{4n}+o(1)}{(\sqrt{2\pi n}(\frac{n}{e})^{n}+o(1))(\sqrt{6\pi n}(\frac{3n}{e})^{3n}+o(1))} \sim \frac{\sqrt{8\pi n}(\frac{256n^4}{e^4})^n}{\sqrt{12}\pi n(\frac{27n^4}{e^2})^n} = \frac{256\sqrt{2}}{27e^2\sqrt{\pi n}}$

№4

Пусть P_n - вероятность ровно n попаданий. Вычисление P_0 и P_1 по формуле Бернулли может быть затруднительно, поэтому воспользуемся формулой Пуассона:

$$P_0 = 5^0 e^{-5} \approx 0.0067 \tag{3}$$

$$P_1 = 5^1 e^{-5} \approx 0.0337 \tag{4}$$

Искомую вероятность P можно найти следующим образом:

$$P = 1 - P_0 - P_1 \approx 0.9596 \tag{5}$$

№5

Пусть P_i^m - вероятность того, что в i-ом множестве деталей m неисправных. Посчитаем по формуле пуассона:

$$P_1^0 = e^{-0.3} \approx 0.7408 \tag{6}$$

$$P_1^1 = 0.3e^{-0.3} \approx 0.2222 \tag{7}$$

$$P_2^0 = e^{-0.4} \approx 0.6703 \tag{8}$$

$$P_2^1 = 0.4e^{-0.4} \approx 0.2681 \tag{9}$$

$$P_3^0 = e^{-0.7} \approx 0.4966 \tag{10}$$

$$P_3^1 = 0.7e^{-0.7} \approx 0.3476 \tag{11}$$

Вычислим искомую вероятность:

$$P = 1 - P_1^0 P_2^0 P_3^0 - P_1^1 P_2^0 P_3^0 - P_1^0 P_2^1 P_3^0 - P_1^0 P_2^0 P_3^1 \approx 0.4082 \tag{12}$$