№1

Найдем матожидание случайной величины ξ, равной количеству опечаток на некоторой странице.

$$E\xi = \sum_{i=1}^{50} E\xi_i = \sum_{i=1}^{50} \frac{1}{500} = \frac{1}{10} \tag{1}$$

...где ξ_i - случайная величина, равная 1, если i-я по счету опечатка оказалась на выбранной странице, и 0 в противном случае.

(a) $P(\xi \geq 3) \leq \frac{E\xi}{3} = \frac{1}{30}$

(b) $P(\xi = 0) = 1 - P(\xi \geq 1) \geq \frac{9}{10}$

№2

Посчитаем дисперсию ξ_1, равной количеству очков, выпавших при первом броске.

$$D\xi_1 = E((\xi - E\xi)^2) = \frac{1}{6}((1-3.5)^2 + (2-3.5)^2 + (3-3.5)^2 + (4-3.5)^2 + (5-3.5)^2 + (6-3.5)^2) = \frac{35}{12} \tag{2}$$

Теперь оценим искомую вероятность используя закон больших чисел.

$$P(|\frac{\sum_{i=1}^{1000} \xi_i}{n} - E\xi_1| \leq 0.3) \geq 1 - P(|...| \geq 0.3) \geq 1 - \frac{D\xi_1}{1000 * 0.3^2} \approx 0.9676 \tag{3}$$

Таким образом, искомая вероятность не меньше чем 0.9676.

№3

Уточним условие задачи. Судя по всему, количество кораблей равно количеству коммерсантов, а в фонд отправляются не 6% прибыли, а 6% от всей суммы убытков при захвате корабля. Тогда необходимо решить такую задачу: найти наименьшее n, при котором:

$$P(\xi > 0.06n) \leq 0.05 \tag{4}$$

...где ξ равна количеству захваченных кораблей. Из неравенства Маркова:

$$P(\xi > 0.06n) \leq P(\xi \geq 0.06n) \leq \frac{E\xi}{0.06n} = \frac{5}{6n} \leq 0.05 \tag{5}$$

Из последнего неравенства получаем:

$$n \geq \frac{50}{3} \approx 16.6 \tag{6}$$

Значит, наименьшее количество коммерсантов равно 17.

№4

Пусть ξ равна количеству ошибок в слове. Используя неравенство Маркова и свойства o-малых, получаем:

$$P(\xi \geq 1) \leq E\xi = \sum_{i=1}^{n} E\xi_i = \sum_{i=1}^{n} o(\frac{1}{n}) = o(\frac{1}{n}) \tag{7}$$

...где ξ_i равна 1, если в i-ой позиции возникла ошибка и 0 в противном случае. Отсюда:

$$\lim_{n\to\infty} P(\xi \geq 1) \leq \lim_{n\to\infty} o(\frac{1}{n}) = 0 \tag{8}$$

№5

(a)

$$\lim_{n\to\infty} np = 0 \implies \lim_{n\to\infty} \frac{p}{\frac{1}{n}} = 0 \implies p = o(\frac{1}{n}) \tag{9}$$

Если смотреть на множество ребер графа как на слово, то задача сводится к задаче №4. Получается, что в таком графе асимптотически почти наверняка нет ребер, а значит и нет подграфов K_3.