№1

Условие задачи

$$\Delta u = 0 \tag{1}$$

Краевые условия стационарной задачи:

$$\begin{cases} u(0,y) = 0 \\ u(x,3) = -4\sin\frac{5\pi x}{2} \\ u(2,y) = 0 \\ u(x,0) = 2\sin\frac{\pi x}{2} \end{cases} \tag{2}$$

Решение

Найдем решения вида $u = X(x)Y(y)$.

$$\begin{gathered} \Delta u = u_{xx} + u_{yy} = 0 \\ X''Y + XY'' = 0 \\ \frac{X''}{X} = -\frac{Y''}{Y} = c \end{gathered} \tag{3}$$

Задача Ш-Л для X:

$$\begin{cases} X'' = cX \\ X(0) = 0 \\ X(2) = 0 \end{cases} \tag{4}$$

Решение:

$$\begin{gathered} c = -\lambda^2 \\ \lambda_n = \frac{\pi n}{2} \\ X_n = \sin \lambda_n x \end{gathered} \tag{5}$$

Найдем Y_n.

$$\begin{gathered} Y_n'' = \lambda_n^2 Y_n \\ Y_n = A_n e^{\lambda_n y} + B_n e^{-\lambda_n y} \end{gathered} \tag{6}$$

Мы знаем, что:

$$u(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty} X_n Y_n \tag{7}$$

Используя два оставшихся условия найдем A_n и B_n.

$$\begin{gathered} u(x,0) = \sum_{n=1}^{\infty} \sin\frac{\pi n x}{2}(A_n + B_n) = 2\sin\frac{\pi x}{2} \\ A_n + B_n = \begin{cases} 2, n = 1 \\ 0, n \neq 1 \end{cases} \end{gathered} \tag{8}$$

$$u(x,3) = \sum_{n=1}^{\infty} \sin\frac{\pi n x}{2}(A_n e^{\frac{3\pi n}{2}} + B_n e^{-\frac{3\pi n}{2}}) = -4\sin\frac{5\pi x}{2}$$
$$A_n e^{\frac{3\pi n}{2}} + B_n e^{-\frac{3\pi n}{2}} = \begin{cases} -4, n=5 \\ 0, n\neq 5 \end{cases} \tag{9}$$

Рассмотрим все значения n:

- $\mathbf{n \notin \{1,5\}}$ $A_n = B_n = 0$
- $\mathbf{n=1}$

$$\begin{cases} A_1 + B_1 = 2 \\ A_1 e^{\frac{3\pi}{2}} + B_1 e^{-\frac{3\pi}{2}} = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} A_1 = 2 - B_1 \\ 2e^{\frac{3\pi}{2}} + B_1(e^{-\frac{3\pi}{2}} - e^{\frac{3\pi}{2}}) = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} A_1 = 2 - \frac{2e^{\frac{3\pi}{2}}}{e^{-\frac{3\pi}{2}} - e^{\frac{3\pi}{2}}} \\ B_1 = \frac{2e^{\frac{3\pi}{2}}}{e^{-\frac{3\pi}{2}} - e^{\frac{3\pi}{2}}} \end{cases} \tag{10}$$

- $\mathbf{n=5}$

$$\begin{cases} A_5 + B_5 = 0 \\ A_5 e^{\frac{15\pi}{2}} + B_5 e^{-\frac{15\pi}{2}} = -4 \end{cases} \quad \begin{cases} A_5 = \frac{4}{e^{-\frac{15\pi}{2}} - e^{\frac{15\pi}{2}}} \\ B_5 = \frac{4}{e^{\frac{15\pi}{2}} - e^{-\frac{15\pi}{2}}} \end{cases} \tag{11}$$

Ответ:

$$u(x,y) = \sin\left(\frac{\pi x}{2}\right)\frac{2e^{\frac{\pi}{2}(3-y)} - 2e^{\frac{\pi}{2}(y-3)}}{e^{\frac{3\pi}{2}} - e^{-\frac{3\pi}{2}}} + \sin\left(\frac{5'pix}{2}\right)\frac{4e^{-\frac{5\pi y}{2}} - 4e^{\frac{5\pi y}{2}}}{e^{\frac{15\pi}{2}} - e^{-\frac{15\pi}{2}}} \tag{12}$$

№2

Условие задачи

$$u_t = u_{xx} + \sin 4x \sin x \tag{13}$$

Краевые условия:

$$\begin{cases} u_x(t,0) = 3 \\ u_x(t,\pi) = 3 \end{cases} \tag{14}$$

Начальное условие:

$$u(0,x) = \cos 3x + 3x \tag{15}$$

Решение

Представим функцию в виде суммы:

$$u = v + w \tag{16}$$

Так, что:

$$\begin{cases} w_x(t,0) = 3 \\ w_x(t,\pi) = 3 \end{cases} \tag{17}$$

Понятно, что $w(t,x) = 3x$.

——————————

Примечание: вид w не всегда очевиден. Например, если:

$$\begin{cases} w_x(t,0) = -2t \\ w(t,\pi) = 3 \end{cases} \tag{18}$$

Тогда решение можно найти следующим образом:

$$\begin{gathered} \int w_x(t,0)dx = \int -2tdx \\ w(t,x) = -2tx + c(t) \\ w(t,\pi) = -2\pi t + c(t) = 3 \\ c(t) = 3 + 2\pi t \\ w(t,x) = -2tx + 2\pi t + 3 \end{gathered} \tag{19}$$

——————————

Теперь построим задачу для v.

$$\begin{gathered} v_t = v_{xx} + \sin 4x \sin x \\ \begin{cases} v_x(t,0) = 0 \\ v_x(t,\pi) = 0 \end{cases} \\ v(0,x) = \cos 3x \end{gathered} \tag{20}$$

Задача Ш-Л:

$$\begin{cases} X'' = cX \\ X'(0) = 0 \\ X(\pi) = 0 \end{cases} \tag{21}$$

Решение:

$$\begin{gathered} c = -\lambda^2 \\ \lambda_n = n \\ X_n = \cos \lambda_n x \end{gathered} \tag{22}$$

Выражаем НУ и неоднородную часть через ряд:

$$\begin{gathered} v(0,x) = \cos 3x = \sum_{n=0}^{\infty} \phi_n \cos nx \\ \phi_n = \begin{cases} 1, n = 3 \\ 0, n \neq 3 \end{cases} \end{gathered} \tag{23}$$

$$\begin{gathered} f(x) = \sin 4x \sin x = \frac{1}{2}(\cos 3x - \cos 5x) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n \cos nx \\ f_n = \begin{cases} \frac{1}{2}, n = 3 \\ -\frac{1}{2}, n = 5 \\ 0, n \notin \{3,5\} \end{cases} \end{gathered} \tag{24}$$

Подставим ряды в исходную задачу.

$$\sum_{n=1}^{\infty} X_n T_n' = \sum_{n=1}^{\infty} -\lambda_n^2 X_n T_n + \sum_{n=1}^{\infty} f_n X_n$$
$$\sum_{n=1}^{\infty} X_n T(0) = \sum_{n=1}^{\infty} \phi_n X_n \tag{25}$$

Закрепив n и сократив обе части уравнений на X_n получим задачу Коши для T_n. Решим её для каждого n.

- **$\mathbf{n \notin \{3, 5\}}$**

$$\begin{cases} T' = -9T \\ T(0) = 0 \end{cases} \Rightarrow T = 0 \tag{26}$$

- **$\mathbf{n = 3}$**

$$\begin{cases} T' = -9T + \frac{1}{2} \\ T(0) = 1 \end{cases} \tag{27}$$

$$\frac{dT}{T} = -9dt$$
$$lnT = -9t + c(t)$$
$$T = c(t)e^{-9t} \tag{28}$$

Подставляем в исходное уравнение и находим $c(t)$.

$$-9ce^{-9t} + c'e^{-9t} = -9ce^{-9t} + \frac{1}{2}$$
$$dc = \frac{dt}{2e^{-9t}}$$
$$c(t) = \frac{e^{9t}}{18} + c$$
$$T = \frac{1}{18} + ce^{-9t} \tag{29}$$

Находим c.

$$T(0) = \frac{1}{18} + c = 1$$
$$c = \frac{17}{18} \tag{30}$$

- **$\mathbf{n = 5}$**

$$\begin{cases} T' = -25T - \frac{1}{2} \\ T(0) = 0 \end{cases}$$
$$T = c(t)e^{-25t}$$
$$c'e^{-25t} = -\frac{1}{2}$$
$$c(t) = -\frac{e^{25t}}{50} + c$$
$$T = -\frac{1}{50} + ce^{-25t}$$
$$T(0) = -\frac{1}{50} + c \Rightarrow c = \frac{1}{50} \tag{31}$$

Не забываем прибавить $w(t,x)$.
Ответ:

$$u(t,x) = \cos 3x \left(\frac{1+17e^{-9t}}{18}\right) + \cos 5x \left(\frac{e^{-25t}-1}{50}\right) + 3x \tag{32}$$

№3

Условие задачи

$$u_{tt} = 9u_{xx} \tag{33}$$

Начальные условия:

$$\begin{cases} u(0,x) = 1 - 7\sin\frac{9\pi x}{2} \\ u_t(0,x) = 2\sin\frac{3\pi x}{2} - 3x \end{cases} \tag{34}$$

Греничные условия:

$$\begin{cases} u(t,0) = 1 \\ u_x(t,1) = -3t \end{cases} \tag{35}$$

Решение

$$\begin{gathered} u = v + w \\ \begin{cases} w(t,0) = 1 \\ w_x(t,1) = -3t \end{cases} \end{gathered} \tag{36}$$

$$\begin{gathered} w(t,x) = -3tx + c(t) \\ w(t,0) = c = 1 \\ w(t,x) = -3tx + 1 \end{gathered} \tag{37}$$

$$\begin{gathered} v_{tt} = 9v_{xx} \\ \begin{cases} v(0,x) = -7\sin\frac{9\pi x}{2} \\ v_t(0,x) = 2\sin\frac{3\pi x}{2} \end{cases} \quad \begin{cases} v(t,0) = 0 \\ v_x(t,1) = 0 \end{cases} \end{gathered} \tag{38}$$

Задача Ш-Л:

$$\begin{cases} X'' = cX \\ X(0) = 0 \\ X_x(1) = 0 \end{cases} \tag{39}$$

$$\begin{gathered} c = \lambda^2 \\ \lambda_n = \frac{\pi n}{2} \\ X_n = \sin\lambda_n x \end{gathered} \tag{40}$$

$$T_n = A_n e^{3\lambda_n t} + B_n e^{-3\lambda_n t} \tag{41}$$

Выражаем НУ через ряд:

$$\begin{gathered} v(0,x) = -7\sin\frac{9\pi x}{2} = \sum_{n=1}^{\infty} \phi_n \sin\frac{\pi n x}{2} \\ \phi_n = \begin{cases} -7, n = 9 \\ 0, n \neq 9 \end{cases} \end{gathered} \tag{42}$$

$$\begin{gathered} v_t(0,x) = 2\sin\frac{3\pi x}{2} = \sum_{n=1}^{\infty} \psi_n \sin\frac{\pi n x}{2} \\ \psi_n = \begin{cases} 2, n = 3 \\ 0, n \neq 3 \end{cases} \end{gathered} \tag{43}$$

Находим A_n и B_n для каждого n.

- $\mathbf{n \notin \{3, 9\}}$

$$\begin{cases} (A_n + B_n)\sin\frac{\pi n x}{2} = 0 \\ (\frac{3\pi n}{2} A_n - \frac{3\pi n}{2} B_n)\sin\frac{\pi n x}{2} = 0 \end{cases} \Rightarrow A_n = B_n = 0 \tag{44}$$

- $\mathbf{n = 3}$

$$\begin{cases} (A_3 + B_3)\sin\frac{3\pi x}{2} = 0 \\ \frac{9\pi}{2}(A_3 - B_3)\sin\frac{3\pi x}{2} = 2\sin\frac{3\pi x}{2} \end{cases} \quad \begin{cases} A_3 + B_3 = 0 \\ A_3 - B_3 = \frac{2}{9\pi} \end{cases} \quad \begin{cases} A_3 = \frac{1}{9\pi} \\ B_3 = -\frac{1}{9\pi} \end{cases} \tag{45}$$

- $\mathbf{n = 9}$

$$\begin{cases} (A_9 + B_9)\sin\frac{9\pi x}{2} = -7\sin\frac{9\pi x}{2} \\ \frac{27\pi}{2}(A_9 - B_9)\sin\frac{9\pi x}{2} = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} A_9 + B_9 = -7 \\ A_9 - B_9 = 0 \end{cases} \quad A_9 = B_9 = -\frac{7}{2} \tag{46}$$

Ответ:

$$u(t,x) = \frac{1}{9\pi}\sin\left(\frac{3\pi x}{2}\right)(e^{\frac{9\pi t}{2}} - e^{-\frac{9\pi t}{2}}) - \frac{7}{2}\sin\left(\frac{9\pi x}{2}\right)(e^{\frac{27\pi t}{2}} + e^{-\frac{27\pi t}{2}}) - 3tx + 1 \tag{47}$$