

Введение

Общий вид задачи оптимизации:

1. Задача оптимального выбора

$\min(\max)f(x), x \in X$ - множество операторов.

Если $X = R^n$ - задача безусловной минимизации (задача без ограничений)

2. Общая задача математического программирования

$\min f_0(x)$ - функция m переменных. $x \in X_0 \subset R^n$

$f_i(x) \leq 0, i \in \overline{1, m_1}$

$f_i(x) = 0, i \in \overline{m_1 + 1, m}$

3. Задача вариационного исчисления

$\min J(x) = \int_{t_0}^T L(t, x(t), x'(t))$

$x(t_0) = x_0, x(T) = x_1$

Задача планирования производства

Переработка m видов ингредиентов (ресурсов)

b_i - объем i -го ресурса

n технологий

$a_{i,j}$ - затраты i -го ресурса при использовании j -ой технологии с единичной интенсивностью (например, за единицу времени)

c_j - ценность за ед. времени j -го способа

Требуется спланировать производство так, чтобы не выходя за рамки отпущенных ресурсов получить конечную продукцию максимальной суммарной ценности.

Ищем интенсивность j -ого способа производства x_j .

Ищем $x = (x_1 \dots x_n)$ - план производства, который максимизирует суммарную ценность.

$$\begin{cases} \max \sum_{j=1}^n c_j x_j \\ \sum_{j=1}^n a_{i,j} x_j \leq b_i, i \in \overline{1, m} \\ x_j \geq 0, j \in \overline{1, n} \end{cases}$$

Задача диеты

m полезных веществ

b_i - минимальное количество i -го вещества

n продуктов питания

$a_{i,j}$ - количество i -го вещества в единице веса j -го продукта

c_j - цена единицы j -го продукта

Требуется найти количество продуктов x_j

$$\begin{cases} \min \sum_{j=1}^n c_j x_j \\ \sum_{j=1}^n a_{i,j} x_j \geq b_i, i \in \overline{1, m} \\ x_j \geq 0, j \in \overline{1, n} \end{cases}$$

Транспортная задача

m пунктов производства

a_i - количество продукта в i -м пункте

n потребителей

b_j - потребность j -го потребителя

$c_{i,j}$ - стоимость перевозки из пункта i в пункт j единицы продукта

Требуется организовать перевозки так, чтобы:

1. из каждого пункта производства вывезти весь имеющийся там продукт
2. полностью насытить потребности каждого потребителя
3. суммарные транспортные затраты были минимальны

Определить объемы перевозок $x_{i,j}$

$$\begin{cases} \min \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n c_{i,j} x_{i,j} \\ \sum_{j=1}^n x_{i,j} = a_i, i \in \overline{1, m} \\ \sum_{i=1}^m x_{i,j} = b_j, j \in \overline{1, n} \\ x_{i,j} \geq 0, \forall i, j \end{cases}$$

Все три задачи оптимизационные, во всех надо найти оптимум линейной функции. Существуют ограничения в виде неравенств и равенств. В ограничениях левая часть – линейная функция. Есть условия неотрицательных переменных ($x_{i,j} > 0$)

Примеры задач линейного программирования вкладываются в общую схему задач математического программирования.

Общая задача линейного программирования

$$\begin{cases} \min(\max) \sum_{j=1}^n c_j x_j \\ \sum_{j=1}^n a_{i,j} x_j \{=, \leq, \geq\} b_i, i \in \overline{1, m} \\ x_j \geq 0, j \in \overline{1, n} \end{cases}$$

Целевая функция - функция, которая минимизируется или максимизируется.

Вектор цели $c = (c_1 \dots c_n)$ определяет целевую функцию.

Ограничения могут быть равенствами или неравенствами.

Матрица задачи (условий) $A = (a_{i,j})_{m \times n}$.

Вектор правых частей (ограничений) $B = (b_1 \dots b_m)$.

Условие неотрицательности переменных $x_j \geq 0$.

План задачи $x = (x_1 \dots x_n)$ - допустимый, если удовлетворяет всем ограничениям.

Допустимое множество X – множество всех допустимых планов задачи.

$\bar{x} = (\bar{x}_1 \dots \bar{x}_n)$ - **Оптимальный план**, если $\forall x \in X : \sum_{j=1}^n c_j \bar{x}_j \leq \sum_{j=1}^n c_j x_j$

$\sum_{j=1}^n c_j \bar{x}_j$ - **Оптимальное значение задачи**

Решение задачи линейного программирования - найти хотя бы один оптимальный план и вычислить оптимальное значение.

Частные формы задачи ЛП

1. Планирования производства

$$\begin{cases} \max \sum_{j=1}^n c_j x_j \\ \sum_{j=1}^n a_{i,j} x_j = b_i, \forall i \\ x_j \geq 0, \forall j \end{cases}$$

2. Каноническая задача

$$\begin{cases} \min \sum_{j=1}^n c_j x_j \\ \sum_{j=1}^n a_{i,j} x_j = b_i, \forall i \\ x_j \geq 0, \forall j \end{cases}$$

3. Основная задача

$$\begin{cases} \min \sum_{j=1}^n c_j x_j \\ \sum_{j=1}^n a_{i,j} x_j \leq b_i, \forall i \end{cases}$$

Существуют правила перехода от одной задачи к другой (формы эквивалентны).

1. важна с точки зрения приложений
2. решается алгебраическими методами, приводим задачи к этому виду для решения
3. важна при рассмотрении теоретических вопросов

- Матричная запись:

X, C, B - вектор-столбцы

$$\begin{cases} \max C^T X \\ AX \leq B \\ X \geq 0 \end{cases}$$

- Векторная запись:

$$A = \begin{bmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_m \end{bmatrix} - \text{набор векторов (строк)}$$

$$\begin{cases} \max(C, X) \\ (a_i, X) \leq b_i, \forall i \\ X \geq 0 \end{cases}$$

- Запись через столбцы:

$A = (A_1 \dots A_n)$ - набор столбцов

$$\begin{cases} \max(C, X) \\ \sum_{j=1}^n A_j x_j \leq B \\ X \geq 0 \end{cases}$$

Правила перехода

1. $\max_{x \in S} f(x) = -\min_{x \in S} (-f(x))$

x^* - точка максимума $f(x)$

$$\forall x \in S : f(x^*) \geq f(x)$$

$$\forall x \in S : -f(x^*) \leq -f(x)$$

x^* - точка минимума $-f(x)$

2. $f_i(x) \geq 0 \sim -f_i(x) \leq 0$

3. $(a_i, x) \leq b_i$

Добавим переменную $x_{n+i} = b_i - (a_i, x) \geq 0$

$$(a_i, x) \leq b_i \sim \begin{cases} (a_i, x) + x_{n+i} = b_i \\ x_{n+i} \geq 0 \end{cases}$$

4. $(a_i, x) = b_i \sim \begin{cases} (a_i, x) \leq b_i \\ -(a_i, x) \leq b_i \end{cases}$

5. $a_{i,1}x_1 + \dots + a_{i,n}x_n = b_i$

Пусть $a_{i,1} \neq 0$

$$x_1 = \frac{1}{a_{i,1}}(b_i - a_{i,2}x_2 - \dots - a_{i,n}x_n)$$

$$x_i \geq 0 \Rightarrow a_{i,2}x_2 + \dots + a_{i,n}x_n \leq b_i$$

Применим метод Жордана-Гаусса. Количество ограничений сократится.

6. $x_j \geq 0 \sim -x_j \leq 0 \sim (a_j, x) \leq b_j, b_j = 0, a_j = -1$

7. x_j - свободная переменная.

Замена $x_j = x'_j - x''_j, x'_j, x''_j \geq 0$

Геометрическая задача ЛП на плоскости и графический метод решения

$$z = c_1x_1 + c_2x_2 \rightarrow \max$$

$$\begin{cases} a_{1,1}x_1 + a_{1,2}x_2 \leq b_1 \\ \vdots \\ a_{m,1}x_1 + a_{m,2}x_2 \leq b_m \\ x_i \geq 0 \forall i \end{cases}$$

1. Построение допустимого множества X .

$$a_{i,1}x_1 + a_{i,2}x_2 \leq b_i$$

Множество точек, удовлетворяющих неравенству - полуплоскость. Построим прямую

$$a_{i,1}x_1 + a_{i,2}x_2 = b_i. \text{ Вектор нормали } (a_{i,1}, a_{i,2}) \text{ направлен в искомую полуплоскость.}$$

Также учитываем условия неотрицательности переменных.

Множество X - пересечение всех полученных полуплоскостей. Возможны три случая:

- (a) X - многоугольник
- (b) X - неограниченное многоугольное множество
- (c) X - пустое множество (решений нет)

2. Поиск $\max z = \max(c, x)$ с помощью линий уровня.

$(c, x) = z_0$ - начальная прямая. Как правило, $z_0 = 0$.

c - её вектор нормали.

Возьмем $z_1 > z_0$. Прямая $(c, x) = z_1$ параллельно сдвинута в сторону вектора нормали (в задаче на \min сдвигаем в обратную сторону).

Сдвигаем прямую до крайнего положения $(c, x) = f^*$. Множество оптимальных планов x^* - пересечение X и прямой $(c, x) = f^*$.

Если X - неограниченное множество, то возможна (зависит от направления вектора c) ситуация, когда $f^* = \infty$.

Геометрические свойства задачи ЛП в пространстве R^n

Опр. Выпуклая комбинация

$x - x_1$ - часть вектора $x_2 - x_1$.

$x - x_1 = \alpha(x_2 - x_1)$.

Значение α задает положение точки x на отрезке $[x_1, x_2]$.

$x = (1 - \alpha)x_1 + \alpha x_2$ - уравнение отрезка $[x_1, x_2]$ при $0 \leq \alpha \leq 1$ (выпуклая комбинация точек x_1, x_2).

Опр. Выпуклое множество

S - выпуклое, если любой отрезок с концами в S целиком содержится в S .

$\forall x_1, x_2 \in S : [x_1, x_2] \subset S$

Или:

$\forall x_1, x_2 \in S, \alpha \in [0, 1] : x = (1 - \alpha)x_1 + \alpha x_2 \in S$

Утв. Непустое пересечение выпуклых множеств - выпуклое.

Доказательство:

$S = S_1 \cap S_2$

Возьмем $x_1, x_2 \in S$

$x_1, x_2 \in S_i \Rightarrow [x_1, x_2] \subset S_i \Rightarrow [x_1, x_2] \subset S_1 \cap S_2$

Опр. Гиперплоскость

$x \in R^m$

$H = \{x | (a, x) = b\}$ - гиперплоскость

a - нормаль гиперплоскости

Утв. Гиперплоскость - выпуклое множество.

Доказательство:

$x_1, x_2 \in H, \alpha \in [0, 1]$

$x = (1 - \alpha)x_1 + \alpha x_2$

Скалярное произведение линейно \Rightarrow

$(a, x) = (1 - \alpha)(a, x_1) + \alpha(a, x_2) = (1 - \alpha)b + \alpha b = b$

$\Rightarrow x \in H$

H делит пространство на две полуплоскости:

$$H^+ = \{x | (a, x) \geq b\}$$

$$H^- = \{x | (a, x) < b\}$$

УТВ. H^+ и H^- - выпуклые множества.

Доказательство:

$$x_1, x_2 \in H^+, \alpha \in [0, 1]$$

$$x = (1 - \alpha)x_1 + \alpha x_2$$

$$(a, x) = (1 - \alpha)(a, x_1) + \alpha(a, x_2) = (1 - \alpha)(b + \theta_1) + \alpha(b + \theta_2) = b + (1 - \alpha)\theta_1 + \alpha\theta_2 \geq b$$

где $\theta_1, \theta_2 \geq 0$

Для H^- аналогично.

$$H_i^- = \{x | (a_i, x) \leq b_i\}$$

$X = \bigcap_{i=1}^m H_i^-$ - допустимое множество основной задачи (многогранник решений)

УТВ. X - выпуклое множество.

Опр. Предельная точка

$\bar{x} \in X$ - предельная точка, если:

$$\exists \{x_k\} \subset X : \forall k \in N : x_k \neq \bar{x} \text{ и } x_k \xrightarrow[k \rightarrow \infty]{} \bar{x}$$

Скалярное произведение непрерывно $\Rightarrow (a_i, x_k) \xrightarrow[k \rightarrow \infty]{} (a_i, \bar{x}) \leq b_i$

Значит X - замкнутое множество.

Опр. k-грань

x - k-грань, если:

$\exists \{i_1 \dots i_k\} \subset \overline{1, n}$, такое, что:

1. a_{i_l} - линейно независимы
2. $\forall l \in \overline{1, k} : (a_{i_l}, x) = b_{i_l}$
3. $\forall i \in \overline{1, n} : (a_i, x) \leq b_i$

Опр. Вершина - n-грань

УТВ.

Пусть $X \neq \emptyset$, $r = r(A)$. Тогда $\forall k \in \overline{1, r} : \exists k\text{-грань}$
(Без доказательства)

Опр. Выпуклая комбинация

Выпуклая комбинация точек $x_1 \dots x_k$ - $\sum_{i=1}^k \alpha_i x_i$, где:

$$\forall i : \alpha_i \geq 0$$

$$\sum_{i=1}^k \alpha_i = 1$$

УТВ. Выпуклое множество содержит все выпуклые комбинации своих точек.

Доказательство:

Пусть S - выпуклое множество, $x_1 \dots x_m \in S$

$$x = \sum_{i=1}^m \alpha_i x_i$$

Докажем, что $x \in S$ индукцией по числу точек m :

Б.И. $k = 2$

Множество значений x - отрезок. Из определения выпуклого множества $x \in S$.

Ш.И.

Рассмотрим три случая:

1. $\alpha_m = 0$

Количество слагаемых - $m - 1$. Выполнено П.И.

2. $\alpha_m = 1$

$\sum_{i=1}^m \alpha_i = 1 \Rightarrow$ одно слагаемое, очевидно.

3. $0 < \alpha_m < 1$

$$x = (1 - \alpha_m) \sum_{i=1}^{m-1} \frac{\alpha_i}{1 - \alpha_m} x_i + \alpha_m x_m = (1 - \alpha_m)y + \alpha_m x_m$$

$$\sum_{i=1}^{m-1} \alpha_i = 1 - \alpha_m \Rightarrow \sum_{i=1}^{m-1} \frac{\alpha_i}{1 - \alpha_m} = 1 \Rightarrow y - \text{выпуклая комбинация } m - 1 \text{ точек и по П.И.}$$

$$y \in S$$

$$\Rightarrow x - \text{выпуклая комбинация 2-х точек из } S \Rightarrow x \in S$$

Опр. Выпуклая оболочка

Выпуклая оболочка множества M - множество всех выпуклых комбинаций точек из M .

Свойства coM :

1. coM - выпуклое множество.

$$x_1, x_2 \in coM$$

$$x_1 = \sum_{i=1}^k \alpha_i x_i$$

$$x_2 = \sum_{j=1}^m \beta_j x_j^*$$

$$x = \lambda x_1 + (1 - \lambda)x_2$$

Легко проверить, что x - выпуклая комбинация $x_1 \dots x_k, x_1^* \dots x_m^*$.

2. $M \subset coM$

Любая точка множества - выпуклая комбинация из одного слагаемого.

3. $\forall S$ - выпуклое множество: $M \subset S \Rightarrow coM \subset S$

S - выпуклое, значит, оно содержит все выпуклые комбинации своих точек.

$$M \subset S \Rightarrow S \text{ содержит все выпуклые комбинации точек из } M \Rightarrow coM \subset S$$

Пример:

Треугольник - выпуклая оболочка его трех вершин.

Доказательство:

x_1, x_2, x_3 - вершины.

$y = \alpha x_1 + (1 - \alpha)x_2$ - отрезок $[x_1, x_2]$

$x = \beta y + (1 - \beta)x_3$ - треугольник

$$x = \beta \alpha x_1 + \beta(1 - \alpha)x_2 + (1 - \beta)x_3$$

Сумма коэффициентов равна единице $\Rightarrow x$ - выпуклая комбинация.

Многоугольник - выпуклая оболочка своих вершин.

Опр. Крайняя точка

$\bar{x} \in M$ - крайняя (угловая) точка, если ее нельзя представить в виде нетривиальной ($\alpha > 0$) выпуклой комбинации двух различных точек из M .

Пример:

Крайние точки многоугольника - его вершины. У сферы все точки являются крайними.

Теорема Любое непустое выпуклое замкнутое ограниченное множество из R^n можно представить как выпуклую оболочку своих крайних точек.

Опр. Выпуклый многогранник - выпуклая оболочка конечного числа точек.

Свойства:

1. выпуклое множество
2. ограниченное
3. замкнутое

Доказательство:

M - выпуклый многогранник.

$$\{x_k\} \subset M$$

$$x_k \xrightarrow[k \rightarrow \infty]{} \bar{x}$$

$$x_k = \sum_{i=1}^m \alpha_i^k x^i$$

$$\forall k : \sum_{i=1}^m \alpha_i^k = 1$$

Последовательность $\{\alpha_i^k\}_{k=0}^\infty$ ограничена. Выделим сходящуюся подпоследовательность для каждого i :

$$i = 1 : \exists \{x_{k_j^1}\} \subset \{x_k\} : \alpha_1^{k_j^1} \xrightarrow[j \rightarrow \infty]{} \bar{\alpha}_1$$

$$i = 2 : \exists \{x_{k_j^2}\} \subset \{x_{k_j^1}\} : \alpha_2^{k_j^2} \xrightarrow[j \rightarrow \infty]{} \bar{\alpha}_2$$

\vdots

$$i = m : \exists \{x_{k_j^m}\} \subset \{x_{k_j^{m-1}}\} : \alpha_m^{k_j^m} \xrightarrow[j \rightarrow \infty]{} \bar{\alpha}_m$$

$$\text{Имеем } x_{k_j^m} \xrightarrow[j \rightarrow \infty]{} \sum_{i=1}^m \bar{\alpha}_i x^i$$

$$\text{При этом } \sum_{i=1}^m \bar{\alpha}_i = 1$$

Но $x_k \xrightarrow[k \rightarrow \infty]{} \bar{x}$, а $x_{k_j^m}$ - подпоследовательность x_k , значит $\bar{x} = \sum_{i=1}^m \bar{\alpha}_i x^i$ - выпуклая комбинация точек из M . Следовательно, $\bar{x} \in M$.

Из теоремы следует, что выпуклый многогранник - выпуклая оболочка своих **крайних** точек.

$X = x | Ax \leq B$ - допустимое множество задачи ЛП.

X - выпуклое и замкнутое.

1. X - ограничено.

По теореме X можно представить как выпуклую оболочку своих крайних точек (вершин)

Количество вершин конечно, а точнее, не превосходит C_m^n , где n - размерность задачи, m - количество ограничений.

Значит X - выпуклый многогранник.

2. X - неограниченно.

Пусть $p_1 \dots p_s$ - вершины X .

У X есть два неограниченных ребра. Возьмем их направляющие векторы S_1, S_2 .

Тогда $x = \sum_{i=1}^s \alpha_i p_i + \beta_1 S_1 + \beta_2 S_2$.

Если X - ограничено и непусто, то задача ЛП имеет решение.

Признак разрешимости: Если целевая функция задачи ЛП на \max (\min) ограничена сверху (снизу) на допустимом множестве, то задача разрешима.

Утв. Если задача ЛП разрешима, то среди решений есть хотя бы одна вершина допустимого множества.

Доказательство:

$$\begin{cases} \max(c, x) \\ (a_i, x) \leq b_i, i \in \overline{1, m} \\ x_i \geq 0, i \in \overline{1, m} \end{cases} \quad \text{- задача ЛП}$$

x^* - решение

X - ограничено $\Rightarrow x^* = \sum_{i=1}^N \alpha_i p_i$, где $p_1 \dots p_N$ - вершины X .

$$f^* = (c, x^*) = \sum_{i=1}^N \alpha_i (c, p_i)$$

$$\text{Возьмем } p = \max_{1 \leq i \leq N} p_i$$

$$\text{Тогда } f^* \leq (c, p) \sum_{i=1}^N \alpha_i = (c, p)$$

Но f^* - оптимальное значение функции $\Rightarrow \forall x \in X : f^* \geq (c, x)$

Отсюда, $(c, x^*) = (c, p) \Rightarrow x^* = p \Rightarrow x^*$ - вершина.

Утв. Любая выпуклая комбинация решений является решением.

Доказательство:

$p_1 \dots p_k$ - решения

$$\forall i \in \overline{1, k} : f^* = (c, p_i)$$

$$p = \sum_{i=1}^k \alpha_i p_i$$

$$(c, p) = \sum_{i=1}^k \alpha_i (c, p_i) = \sum_{i=1}^k \alpha_i f^* = f^*$$