Введение

Общий вид задачи оптимизации:

1. **Задача оптимального выбора**

   $\min(\max) f(x), x \in X$ - множество операторов.

   Если $X = R^n$ - задача безусловной минимизации (задача без ограничений)

2. **Общая задача математического программирования**

   $\min f_0(x)$ - функция m переменных. $x \in X_0 \subset R^n$

   $f_i(x) \leq 0, i \in \overline{1, m_1}$

   $f_i(x) = 0, i \in \overline{m_1 + 1, m}$

3. **Задача вариационного исчисления**

   $\min J(x) = \int_{t_0}^{T} L(t, x(t), x'(t))$

   $x(t_0) = x_0, x(T) = x_1$

Задача планирования производства

Переработка m видов ингредиентов (ресурсов)
b_i – объем i-го ресурса
n технологий
$a_{i,j}$ – затраты i–го ресурса при использовании j–ой технологии с единичной интенсивностью (например, за единицу времени)
c_j – ценность за ед. времени j-го способа
Требуется спланировать производство так, чтобы не выходя за рамки отпущенных ресурсов получить конечную продукцию максимальной суммарной ценности.
Ищем интенсивность j-ого способа производства x_j.
Ищем $x = (x1 \dots xn)$ - план производства, который максимизирует суммарную ценность.

$$\begin{cases} \max \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \\ \sum_{j=1}^{n} a_{i,j} x_j \leq b_i, i \in \overline{1, m} \\ x_j \geq 0, j \in \overline{1, n} \end{cases}$$

Задача диеты

m полезных веществ
b_i - минимальное количество i-го вещества
n продуктов питания
$a_{i,j}$ - количество i–го вещества в единице веса j-го продукта
c_j - цена единицы j-го продукта
Требуется найти количество продуктов x_j

$$\begin{cases} \min \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \\ \sum_{j=1}^{n} a_{i,j} x_j \geq b_i, i \in \overline{1, m} \\ x_j \geq 0, j \in \overline{1, n} \end{cases}$$

Транспортная задача

m пунктов производства
a_i - количество продукта в i-м пункте
n потребителей
b_j - потребность j-го потребителя
$c_{i,j}$ - стоимость перевозки из пункта i в пункт j единицы продукта
Требуется организовать перевозки так, чтобы:

1. из каждого пункта производства вывезти весь имеющийся там продукт
2. полностью насытить потребности каждого потребителя
3. суммарные транспортные затраты были минимальны

Определить объемы перевозок $x_{i,j}$

$$\begin{cases} \min \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} c_{i,j} x_{i,j} \\ \sum_{j=1}^{n} x_{i,j} = a_i, i \in \overline{1,m} \\ \sum_{i=1}^{m} x_{i,j} = b_j, j \in \overline{1,n} \\ x_{i,j} \geq 0, \forall i, j \end{cases}$$

Все три задачи оптимизационные, во всех надо найти оптимум линейной функции. Существуют ограничения в виде неравенств и равенств. В ограничениях левая часть – линейная функция. Есть условия неотрицательных переменных ($x_{i,j} > 0$)
Примеры задач линейного программирования вкладываются в общую схему задач математического программирования.

Общая задача линейного программирования

$$\begin{cases} \min(\max) \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \\ \sum_{j=1}^{n} a_{i,j} x_j \{=, \leq, \geq\} b_i, i \in \overline{1,m} \\ x_j \geq 0, j \in \overline{1,m} \end{cases}$$

Целевая функция - функция, которая минимизируется или максимизируется.
Вектор цели $c = (c_1 \dots {}_n)$ определяет целевую функцию.
Ограничения могут быть равенствами или неравенствами.
Матрица задачи (условий) $A = (a_{i,j})_{m \times n}$.
Вектор правых частей (ограничений) $B = (b_1 \dots b_m)$.
Условие неотрицательности переменных $x_j >= 0$.
План задачи $x = (x_1 \dots x_n)$ - допустимый, если удовлетворяет всем ограничениям.
Допустимое множество X – множество всех допустимых планов задачи.
$\overline{x} = (\overline{x_1} \dots \overline{x_n})$ - **Оптимальный план** , если $\forall x \in X : \sum_{j=1}^{n} c_j \overline{x_j} \leq \sum_{j=1}^{n} c_j x_j$
$\sum_{j=1}^{n} c_j \overline{x_j}$ - **Оптимальное значение задачи**
Решение задачи линейного программирования - найти хотя бы один оптимальный план и вычислить оптимальное значение.

Частные формы задачи ЛП

1. Планирования производства

$$\begin{cases} \max \sum_{j=1}^n c_j x_j \\ \sum_{j=1}^n a_{i,j} x_j = b_i, \forall i \\ x_j \geq 0, \forall j \end{cases}$$

2. Каноническая задача

$$\begin{cases} \min \sum_{j=1}^n c_j x_j \\ \sum_{j=1}^n a_{i,j} x_j = b_i, \forall i \\ x_j \geq 0, \forall j \end{cases}$$

3. Основная задача

$$\begin{cases} \min \sum_{j=1}^n c_j x_j \\ \sum_{j=1}^n a_{i,j} x_j \leq b_i, \forall i \end{cases}$$

Существуют правила перехода от одной задачи к другой (формы эквивалентны).

1. важна с точки зрения приложений
2. решается алгебраическими методами, приводим задачи к этому виду для решения
3. важна при рассмотрении теоретических вопросов

- Матричная запись:

  X, C, B - вектор-столбцы

  $$\begin{cases} \max C^T X \\ AX \leq B \\ X \geq 0 \end{cases}$$

- Векторная запись:

  $A = \begin{bmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_m \end{bmatrix}$ - набор векторов (строк)

  $$\begin{cases} \max(C, X) \\ (a_i, X) \leq b_i, \forall i \\ X \geq 0 \end{cases}$$

- Запись через столбцы:

  $A = (A_1 \dots A_n)$ - набор столбцов

  $$\begin{cases} \max(C, X) \\ \sum_{j=1}^n A_j x_j \leq B \\ X \geq 0 \end{cases}$$

Правила перехода

1. $\max\limits_{x \in S} f(x) = -\min\limits_{x \in S}(-f(x))$

   x^* - точка максимума $f(x)$

   $\forall x \in S : f(x^*) \geq f(x)$

   $\forall x \in S : -f(x^*) \leq -f(x)$

   x^* - точка минимума $-f(x)$

2. $f_i(x) \geq 0 \sim -f_i(x) \leq 0$

3. $(a_i, x) \leq b_i$

   Добавим переменную $x_{n+i} = b_i - (a_i, x) \geq 0$

   $(a_i, x) \leq b_i \sim \begin{cases} (a_i, x) + x_{n+i} = b_i \\ x_{n+i} \geq 0 \end{cases}$

4. $(a_i, x) = b_i \sim \begin{cases} (a_i, x) \leq b_i \\ -(a_i, x) \leq b_i \end{cases}$

5. $a_{i,1}x_1 + \dots + a_{i,n}x_n = b_i$

   Пусть $a_{i,1} \neq 0$

   $x_1 = \frac{1}{a_{i,1}}(b_i - a_{i,2}x_2 - \dots - a_{i,n}x_n)$

   $x_i \geq 0 \Rightarrow a_{i,2}x_2 + \dots + a_{i,n}x_n \leq b_i$

   Применим метод Жордана-Гаусса. Количество ограничений сократится.

6. $x_j \geq 0 \sim -x_j \leq 0 \sim (a_j, x) \leq b_j, b_j = 0, a_j = -1$

7. x_j - свободная переменная.

   Замена $x_j = x'_j - x''_j, x'_j, x''_j \geq 0$

Геометрическая задача ЛП на плоскости и графический метод решения

$z = c_1x_1 + c_2x_2 \to \max$

$\begin{cases} a_{1,1}x_1 + a_{1,2}x_2 \leq b_1 \\ \vdots \\ a_{m,1}x_1 + a_{m,2}x_2 \leq b_m \end{cases}$

$x_i \geq 0 \forall i$

1. Построение допустимого множества X.

   $a_{i,1}x_1 + a_{i,2}x_2 \leq b_i$

   Множество точек, удовлетворяющих неравенству - полуплоскость. Построим прямую $a_{i,1}x_1 + a_{i,2}x_2 = b_i$. Вектор нормали $(a_{i,1}, a_{i,2})$ направлен в искомую полуплоскость.

   Также учитываем условия неотрицательности переменных.

   Множество X - пересечение всех полученных полуплоскостей. Возможны три случая:

(a) X - многоугольник

(b) X - неограниченное многоугольное множество

(c) X - пустое множество (решений нет)

2. Поиск $\max z = \max(c, x)$ с помощью линий уровня.

   $(c, x) = z_0$ - начальная прямая. Как правило, $z_0 = 0$.

   c - её вектор нормали.

   Возьмем $z_1 > z_0$. Прямая $(c, x) = z_1$ параллельно сдвинута в сторону вектора нормали (в задаче на min сдвигаем в обратную сторону).

   Сдвигаем прямую до крайнего положения $(c, x) = f^*$. Множество оптимальных планов x^* - пересечение X и прямой $(c, x) = f^*$.

   Если X - неограниченное множество, то возможна (зависит от направления вектора c) ситуация, когда $f^* = \infty$.

Геометрические свойства задачи ЛП в пространстве R^n

Опр. Выпуклая комбинация

$x - x_1$ - часть вектора $x_2 - x_1$.
$x - x_1 = \alpha(x_2 - x_1)$.
Значение α задает положение точки x на отрезке $[x_1, x_2]$.
$x = (1 - \alpha)x_1 + \alpha x_2$ - уравнение отрезка $[x_1, x_2]$ при $0 \leq \alpha \leq 1$ (выпуклая комбинация точек x_1, x_2).

Опр. Выпуклое множество

S - выпуклое, если любой отрезок с концами в S целиком содержится в S.
$\forall x_1, x_2 \in S : [x_1, x_2] \subset S$
Или:
$\forall x_1, x_2 \in S, \alpha \in [0, 1] : x = (1 - \alpha)x_1 + \alpha x_2 \in S$

Утв. Непустое пересечение выпуклых множеств - выпуклое.

Доказательство:

$S = S_1 \cap S_2$
Возьмем $x_1, x_2 \in S$
$x_1, x_2 \in S_i \Rightarrow [x_1, x_2] \subset S_i \Rightarrow [x_1, x_2] \subset S_1 \cap S_2$

Опр. Гиперплоскость

$x \in R^m$
$H = \{x | (a, x) = b\}$ - гиперплоскость
a - нормаль гиперплоскости

Утв. Гиперплоскость - выпуклое множество.

Доказательство:

$x_1, x_2 \in H, \alpha \in [0, 1]$
$x = (1 - \alpha)x_1 + \alpha x_2$
Скалярное произведение линейно $\Rightarrow$
$(a, x) = (1 - \alpha)(a, x_1) + \alpha(a, x_2) = (1 - \alpha)b + \alpha b = b$
$\Rightarrow x \in H$

H делит пространство на две полуплоскости:
$H^+ = \{x|(a,x) \geq b\}$
$H^- = \{x|(a,x) < b\}$
Утв. H^+ и H^- - выпуклые множества.
Доказательство:

$x_1, x_2 \in H^+, \alpha \in [0,1]$
$x = (1-\alpha)x_1 + \alpha x_2$
$(a,x) = (1-\alpha)(a,x_1) + \alpha(a,x_2) = (1-\alpha)(b+\theta_1) + \alpha(b+\theta_2) = b + (1-\alpha)\theta_1 + \alpha\theta_2 \geq b$
где $\theta_1, \theta_2 \geq 0$
Для H^- аналогично.

$H_i^- = \{x|(a_i,x) \leq b_i\}$
$X = \bigcap\limits_{i=1}^{m} H_i^-$ - допустимое множество основной задачи (многогранник решений)
Утв. X - выпуклое множество.
Опр. Предельная точка

$\overline{x} \in X$ - предельная точка, если:
$\exists \{x_k\} \subset X : \forall k \in N : x_k \neq \overline{x}$ и $x_k \xrightarrow[k\to\infty]{} \overline{x}$

Скалярное произведение непрерывно $\Rightarrow (a_i, x_k) \xrightarrow[k\to\infty]{} (a_i, \overline{x}) \leq b_i$
Значит X - замкнутое множество.
Опр. k-грань

x - k-грань, если:
$\exists \{i_1 \dots i_k\} \subset \overline{1,n}$, такое, что:

1. a_{i_l} - линейно независимы
2. $\forall l \in \overline{1,k} : (a_{i_l}, x) = b_{i_l}$
3. $\forall i \in \overline{1,n} : (a_i, x) \leq b_i$

Опр. Вершина - n-грань
Утв.

Пусть $X \neq \varnothing$, $r = r(A)$. Тогда $\forall k \in \overline{1,r} : \exists k$-грань
(Без доказательства)

Опр. Выпуклая комбинация

Выпуклая комбинация точек $x_1 \dots x_k$ - $\sum_{i=1}^{k} \alpha_i x_i$, где:
$\forall i : \alpha_i = 0$
$\sum_{i=1}^{k} \alpha_i = 1$

Утв. Выпуклое множество содержит все выпуклые комбинации своих точек.
Доказательство:

Пусть S - выпуклое множество, $x_1 \dots x_m \in S$
$x = \sum_{i=1}^{m} \alpha_i x_i$
Докажем, что $x \in S$ индукцией по числу точек m:
Б.И. $k = 2$
Множество значений x - отрезок. Из определения выпуклого множества $x \in S$.
Ш.И.
Рассмотрим три случая:

1. $\alpha_m = 0$
   Количество слагаемых - $m-1$. Выполнено П.И.
2. $\alpha_m = 1$
   $\sum_{i=1}^{m} \alpha_i = 1 \Rightarrow$ одно слагаемое, очевидно.
3. $0 < \alpha_m < 1$
   $x = (1-\alpha_m)\sum_{i=1}^{m-1} \frac{\alpha_i}{1-\alpha_m} x_i + \alpha_m x_m = (1-\alpha_m)y + \alpha_m x_m$
   $\sum_{i=1}^{m-1} \alpha_i = 1-\alpha_m \Rightarrow \sum_{i=1}^{m-1} \frac{\alpha_i}{1-\alpha_m} = 1 \Rightarrow y$ - выпуклая комбинация $m-1$ точек и по П.И. $y \in S$
   $\Rightarrow x$ - выпуклая комбинация 2-х точек из $S \Rightarrow x \in S$

Опр. Выпуклая оболочка

Выпуклая оболочка множества M - множество всех выпуклых комбинаций точек из M.

Свойства coM:

1. coM - выпуклое множество.

   $x_1, x_2 \in coM$

   $x_1 = \sum_{i=1}^{k} \alpha_i x_i$

   $x_2 = \sum_{j=1}^{m} \beta_j x_j^*$

   $x = \lambda x_1 + (1-\lambda)x_2$

   Легко проверить, что x - выпуклая комбинация $x_1 \dots x_k, x_1^* \dots x_m^*$.

2. $M \subset coM$

   Любая точка множества - выпуклая комбинация из одного слагаемого.

3. $\forall S$ - выпуклое множество: $M \subset S \Rightarrow coM \subset S$

   S - выпуклое, значит, оно содержит все выпуклые комбинации своих точек.

   $M \subset S \Rightarrow S$ содержит все выпуклые комбинации точек из $M \Rightarrow coM \subset S$

Пример:

Треугольник - выпуклая оболочка его трех вершин.
Доказательство:

x_1, x_2, x_3 - вершины.
$y = \alpha x_1 + (1-\alpha)x_2$ - отрезок $[x_1, x_2]$
$x = \beta y + (1-\beta)x_3$ - треугольник
$x = \beta\alpha x_1 + \beta(1-\alpha)x_2 + (1-\beta)x_3$
Сумма коэффициентов равна единице $\Rightarrow x$ - выпуклая комбинация.

Многоугольник - выпуклая оболочка своих вершин.

Опр. Крайняя точка

$\overline{x} \in M$ - крайняя (угловая) точка, если ее нельзя представить в виде нетривиальной ($\alpha > 0$) выпуклой комбинации двух различных точек из M.

Пример:

Крайние точки многоугольника - его вершины. У сферы все точки являются крайними.

Теорема Любое непустое выпуклое замкнутое ограниченное множество из R^n можно представить как выпуклую оболочку своих крайних точек.
Опр. **Выпуклый многогранник** - выпуклая оболочка конечного числа точек.
Свойства:

1. выпуклое множество
2. ограниченное
3. замкнутое

   Доказательство:

   M - выпуклый многогранник.

   $\{x_k\} \subset M$

   $x_k \xrightarrow[k\to\infty]{} \overline{x}$

   $x_k = \sum_{i=1}^m \alpha_i^k x^i$

   $\forall k : \sum_{i=1}^m \alpha_i^k = 1$

   Последовательность $\{\alpha_i^k\}_{k=0}^\infty$ ограничена. Выделим сходящуюся подпоследовательность для каждого i:

   $i = 1 : \exists\{x_{k_j^1}\} \subset \{x_k\} : \alpha_1^{k_j^1} \xrightarrow[j\to\infty]{} \overline{\alpha_1}$

   $i = 2 : \exists\{x_{k_j^2}\} \subset \{x_{k_j^1}\} : \alpha_2^{k_j^2} \xrightarrow[j\to\infty]{} \overline{\alpha_2}$

   $\vdots$

   $i = m : \exists\{x_{k_j^m}\} \subset \{x_{k_j^{m-1}}\} : \alpha_m^{k_j^m} \xrightarrow[j\to\infty]{} \overline{\alpha_m}$

   Имеем $x_{k_j^m} \xrightarrow[j\to\infty]{} \sum_{i=1}^m \overline{\alpha_i} x^i$

   При этом $\sum_{i=1}^m \overline{\alpha_i} = 1$

   Но $x_k \xrightarrow[k\to\infty]{} \overline{x}$, а $x_{k_j^m}$ - подпоследовательность x_k, значит $\overline{x} = \sum_{i=1}^m \overline{\alpha_i} x^i$ - выпуклая комбинация точек из M. Следовательно, $\overline{x} \in M$.

Из теоремы следует, что выпуклый многогранник - выпуклая оболочка своих **крайних** точек.
$X = x|Ax \leq B$ - допустимое множество задачи ЛП.
X - выпуклое и замкнутое.

1. X - ограничено.

   По теореме X можно представить как выпуклую оболочку своих крайних точек (вершин)

   Количество вершин конечно, а точнее, не превосходит C_m^n, где n - размерность задачи, m - количество ограничений.

   Значит X - выпуклый многогранник.

2. X - неограниченно.

   Пусть $p_1 \dots p_s$ - вершины X.

   У X есть два неограниченных ребра. Возьмем их направляющие векторы S_1, S_2.

   Тогда $x = \sum_{i=1}^s \alpha_i p_i + \beta_1 S_1 + \beta_2 S_2$.

Если X - ограничено и непусто, то задача ЛП имеет решение.
Признак разрешимости: Если целевая функция задачи ЛП на max (min) ограничена сверху (снизу) на допустимом множестве, то задача разрешима.
Утв. Если задача ЛП разрешима, то среди решений есть хотя бы одна вершина допустимого множества.
Доказательство:

$$\begin{cases} \max(c,x) \\ (a_i,x) \le b_i, i \in \overline{1,m} \\ x_i \ge 0, i \in \overline{1,m} \end{cases} \quad \text{- задача ЛП}$$

x^* - решение
X - ограничено $\Rightarrow x^* = \sum_{i=1}^N \alpha_i p_i$, где $p_1 \dots p_N$ - вершины X.
$f^* = (c,x^*) = \sum_{i=1}^N \alpha_i (c,p_i)$
Возьмем $p = \max\limits_{1 \le i \le N} p_i$
Тогда $f^* \le (c,p) \sum_{i=1}^N \alpha_i = (c,p)$
Но f^* - оптимальное значение функции $\Rightarrow \forall x \in X : f^* \ge (c,x)$
Отсюда, $(c,x^*) = (c,p) \Rightarrow x^* = p \Rightarrow x^*$ - вершина.

Утв. Любая выпуклая комбинация решений является решением.
Доказательство:

$p_1 \dots p_k$ - решения
$\forall i \in \overline{1,k} : f^* = (c,p_i)$
$p = \sum_{i=1}^k \alpha_i p_i$
$(c,p) = \sum_{i=1}^k \alpha_i (c,p_i) = \sum_{i=1}^k \alpha_i f^* = f^*$

Опорный план

Определен для канонической задачи ЛП:

$$\begin{cases} \min(c,x) \\ \sum_{j=1}^n A_j x_j = B \\ x \ge 0 \end{cases}$$

Опр. Опорный план

План задачи $\overline{x} = (\overline{x_1} \dots \overline{x_n})$ является опорным, если столбцы $\{A_j | \overline{x_j} > 0\}$ линейно независимы.
Если столбцов столько же, сколько и ограничений, то план - невырожденный.

Утв. $\overline{x}$ - опорный план $\Longleftrightarrow \overline{x}$ - крайняя точка.
Доказательство:

Необходимость
Пусть $\overline{x}$ - опорный план.
Предположим от противного: $\overline{x}$ - не крайняя точка.
Тогда $\exists \alpha_1, \alpha_2 > 0 : \exists x', x'' \in X, x' \ne x'' : \overline{x} = \alpha_1 x' + \alpha_2 x'', \alpha_1 + \alpha_2 = 1$
x' и x'' удовлетворяют ограничениям задачи ЛП:

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^n A_j x'_j = B \\ \sum_{j=1}^n A_j x''_j = B \end{cases}$$

Пусть $I = \{j | \overline{x_j} > 0\}$ - множество индексов. Тогда $\forall j \notin I : x'_j = x''_j = 0$. Вычитая одно равенство из другого получаем:
$\sum_{j \in I} A_j (x'_j - x''_j) = 0$

A_j - линейно независимы, значит $\forall j \in I : x'_j = x''_j$. При этом $\forall j \notin I : x'_j = x''_j = 0$. Отсюда, $x' = x''$, противоречие.

Достаточность
Пусть $\overline{x}$ - крайняя точка, $I = \{j | \overline{x_j} > 0\}$ - множество индексов при ненулевых компонентах.
$\overline{x}$ удовлетворяет ограничениям задачи ЛП: $\sum_{j \in I} A_j \overline{x_j} = B$
Предположим от противного: $\overline{x}$ - не опорный план. Тогда $\{A_j\}_{j \in I}$ - линейно зависимы, то есть, существует нетривиальная линейная комбинация $d_1 \dots d_k$, такая, что:
$\sum_{j \in I} d_j A_j = 0$
Возьмем $\epsilon > 0$. Умножим обе части равенства на $\pm\epsilon$ и сложим с ограничением задачи ЛП.
Получим:
$\sum_{j \in I} A_j(\overline{x_j} \pm \epsilon d_j) = B$
Выберем ϵ таким, что $\forall j \in I : x_j \pm \epsilon d_j \geq 0$
Пусть вектора x', x'' имеют координаты:
$\forall j \in I : \begin{cases} x'_j = \overline{x_j} - \epsilon d_j \\ x''_j = \overline{x_j} + \epsilon d_j \end{cases}$
$\forall j \notin I : x'_j = x''_j = 0$
x' и x'' имеют неотрицательные координаты и удовлетворяют ограничениям задачи лп, значит, являются планами задачи. Кроме того, $x' \neq x''$ и $\overline{x} = \frac{1}{2}x' + \frac{1}{2}x''$. Следовательно, $\overline{x}$ - выпуклая комбинация различных точек из X, а значит, не является крайней, противоречие.

Симплекс метод

Условия применимости:

1. Задача - в каноническом виде
2. Число уравнений строго меньше числа неизвестных
3. Все свободные члены $b_i \geq 0$
4. $r(A) = m$. Матрица A содержит единичную m-мерную подматрицу

   Без ограничения общности будем считать, что $\forall k \in \overline{1, m} : A_{k,j} = \begin{cases} 0, j \neq k \\ 1, j = k \end{cases}$

   $x_1 \dots x_m$ - базисные компоненты, остальные - небазисные

Начальный опорный план $x^1 = (x^1_1 \dots x^1_m, 0 \dots 0), \quad x^1_i = b_i$
Выразим столбцы матрицы A через столбцы при базисных компонентах:
$\forall j \in \overline{1, n} : A_j = \chi_{1,j} A_1 + \dots + \chi_{m,j} A_m$
Такое разложение существует, т.к. $A_1 \dots A_m$ - линейно независимы, а значит являются базисом m-мерного пространства столбцов.
$X = \{\chi_{i,j}\}_{m \times n}$ - матрица коэффициентов разложения.
Разложение в матричном виде: $A = [A_1 \dots A_m]X$

Пусть $A_{m+1} = \chi_{1,m+1} A_1 \dots \chi_{m,m+1} A_m$ - разложение некоторого небазисного столбца A_{m+1}. Пусть $\chi_{1,m+1} > 0$.
Положим $\theta > 0$ - некоторый неопределенный множитель.

Умножим равенство выше на θ и вычтем из ограничений задачи. Получим:
$A_1(x_1^1 - \theta\chi_{1,m+1}) + \dots + A_m(x_m^1 - \theta\chi_{m,m+1}) + A_{m+1}\theta = b$
Пусть $x_\theta = (x_1^1 - \theta\chi_{1,m+1}, \dots, x_m^1 - \theta\chi_{m,m+1}, \theta, 0, \dots, 0)$
Из полученного равенства следует, что x_θ удовлетворяет ограничениям задачи. Для того, чтобы x_θ был допустимым планом нужно, чтобы $\forall i : x_i^1 - \theta\chi_{i,m+1} \geq 0$
Если $\chi_{i,m+1} \leq 0$, то верно для любого $\theta > 0$. Если $\chi_{i,m+1} > 0$, то верно при $0 < \theta \leq \frac{x_i^1}{\chi_{i,m+1}}$.
Возьмем $\theta \leq \theta_0 = \min\limits_{\chi_{i,m+1}>0} \frac{x_i^1}{\chi_{i,m+1}}$.
Пусть min достигается при $i = 1$. Тогда, подставляя $\theta = \theta_0$, получим:
$x^2 = (0, x_2^2, \dots, x_m^2, \theta_0, 0, \dots, 0)$ - новый допустимый план задачи.
Докажем, что x^2 является опорным.
От противного: пусть столбцы $A_2 \dots A_{m+1}$ - линейно зависимы. Значит:
$\exists \alpha_2 \dots \alpha_{m+1}$ - нетривиальная л.к.: $\alpha_2 A_2 + \dots + \alpha_{m+1}A_{m+1} = 0$
$A_1 \dots A_m$ - лин. независимы $\Rightarrow A_2 \dots A_m$ - лин. независимы $\Rightarrow \alpha_{m+1} \neq 0$
Отсюда $A_{m+1} = \sum_{i=2}^m \beta_i A_i, \;\; \beta_i = \frac{\alpha_1}{\alpha_{m+1}}$
Вычтем это равенство из разложения A_{m+1} через базисные столбцы:
$0 = \chi_{1,m+1}A_1 + (\chi_{2,m+1} - \beta_2)A_2 + \dots + (\chi_{m,m+1} - \beta_m)A_m$
$A_1 \dots A_m$ - лин. независимы, значит коэффициенты равны нулю. В частности:
$\chi_{1,m+1} = 0$
Но мы ранее положили, что $\chi_{1,m+1} > 0$, противоречие.

В итоге мы перешли к новому опорному плану. Теперь сравним значения целевой функции.
Возьмем разложение $A_j = \chi_{1,j}A_1 + \dots + \chi_{m,j}A_m$ и подставим вместо $A_1 \dots A_m$ коэффициенты целевого вектора c с базисными компонентами:
$z_j = \sum_{i=1}^m \chi_{i,j} c_{B_i}$
Или в матричной записи:
$z^T = c_B X$
Введем оценки опорного плана $\Delta_j = z_j - c_j$. Понятно, что $\forall j \in \overline{1,m} : \Delta_j = 0$
$z_0^2 = (c, x^2) = c_2 x_2^2 + \dots + c_m x_m^2 + c_{m+1}x_{m+1}^2 = c_2(x_2^1 - \theta_0\chi_{2,m+1}) + \dots + c_m(x_m^1 - \theta_0\chi_{m,m+1}) + c_{m+1}\theta_0$
Прибавим $c_1(x_1^1 - \theta_0\chi_{1,m+1}) = 0$:
$F^* = \dots + c_1(x_1^1 - \theta_0\chi_{1,m+1}) = c_1x_1^1 + \dots + c_m x_m^1 - \theta_0(c_1\chi_{1,m+1} + \dots + c_m\chi_{m,m+1}) + c_{m+1}\theta_0 =$
$(c, x^1) - \theta_0(z_{m+1} - c_{m+1}) = z_0^1 - \theta_0\Delta_{m+1}$
Как итог: $z_0^2 = z_0^1 - \theta_0\Delta_{m+1}$

<u>Утв.</u> О сходимости симплекс метода

1. Пусть $\exists j : \Delta_j > 0$ и $\exists i : \chi_{i,j} > 0$. Тогда $z_0^2 < z_0^1$
2. Пусть $\exists j : \Delta_j > 0$ и $\forall i : \chi_{i,j} \leq 0$. Тогда $z_0 = -\infty$ (оптимального плана не существует)
3. Пусть $\forall j : \Delta_j \leq 0$. Тогда x^1 - оптимальный план

Доказательство:

1. Мы это уже доказали, взяв б.о.о $j = m+1$ и $i = 1$.
2. б.о.о. $j = m+1$
   Мы доказывали, что $x_\theta = (x_1^1 - \theta\chi_{1,m+1}, \dots, x_m^1 - \theta\chi_{m,m+1}, \theta, 0, \dots, 0)$ удовлетворяет ограничениям задачи. Если $\forall i : \chi_{i,j} \leq 0$, то $\forall \theta > 0 : x_\theta$ является допустимым планом задачи.
   $(c, x_\theta) = z_0^1 - \theta\Delta_{m+1} \xrightarrow[\theta\to\infty]{} -\infty$

Целевую функцию можно уменьшать сколь угодно, значит оптимального плана не существует.

3.

Алгоритм симплекс метода

Шаг 0:
$B^0 = A_{i_1} \dots A_{i_m}$ - базисные столбцы. A_{i_k} - единица на k-ой позиции, все остальные - нули.
$I_B^0 = \{i_1 \dots i_m\}$ - номера базисных векторов.
$J_N^0 = \overline{1,n} \setminus I_B^0$
x^0 - начальный план. $x_i^0 = \begin{cases} b_k, i = i_k \in I_B^0 \\ 0, i \in J_N^0 \end{cases}$
Шаг k:

1. Разлагаем A_j по векторам из B^k. Получаем матрицу разложений X^k
2. Находим z_j^k. Матрица $(z^k)^T = c_{B_k} X^k$
3. Находим оценки $\Delta_j^k = z_j^k - c_j$
4. Если $\forall j \in J_N^k : \Delta_j^k \leq 0$, то стоп. x^k является оптимальным планом задачи.
5. Введем множество $J_>^N = \{j | \Delta_j^k \geq 0\}$
6. Если $\exists j \in J_>^N : \forall i : \chi_{i,j}^k \leq 0$, то стоп. Оптимального плана не существует.
7. Введем p, равный такому $j \in J_>^N$, что Δ_j^k максимально. Это будет номер столбца, который мы добавим в базис.
8. Ведем l такой, что $\theta_0 = \frac{x_l^k}{\chi_{l,p}^k}$ (достигается минимум). Это будет номер столбца, который мы удалим из базиса.
9. $B^{k+1} = B^k \cup \{A_p\} \setminus \{A_l\}$
   $\forall i \in I_B^{k+1} : x_i^{k+1} = x_i^k - \theta_0 \chi_{i,p}^k$

Примечание: возможно зацикливание симплекс метода, если $\theta_0 = \min\limits_{\chi_{i,p}>0} \frac{x_i}{\chi_{i,p}}$ - минимум достигается при нескольких i. Для избежания этого необходимо в таких ситуациях выбирать наименьший из всех i.

Симплекс таблица

Выведем новое разложение матрицы A через базисные столбцы.
Старое разложение:
$A_0 = x_1^1 A_1 + \dots + x_m^1 A_m$
$A_p = \chi_{1,p} A_1 + \dots + \chi_{l,p} A_l + \dots + \chi_{m,p} A_m$
$\forall j : A_j = \chi_{1,j} A_1 + \dots + \chi_{l,j} A_l + \dots + \chi_{m,j} A_m$
Из разложения A_p получаем:
$A_l = \frac{1}{\chi_{l,p}}(A_p - \chi_{1,p} A_1 - \dots - \chi_{m,p} A_m)$
Подставляем A_l в разложение A_0:

$A_0 = A_1(x_1^1 - \frac{x_l^1}{\chi_{l,p}}\chi_{1,p}) + \dots + A_p\frac{x_l^1}{\chi_{l,p}} + \dots + A_m(x_m^1 - \frac{x_l^1}{\chi_{l,p}}\chi_{m,p})$

Получаем:

$$\begin{cases} \overline{x_i} = x_i - \frac{x_l}{\chi_{l,p}}\chi_{i,p}, i \neq l \\ \overline{x_l} = \frac{x_l}{\chi_{l,p}} \end{cases}$$

- формулы для пересчета столбца A_0

Аналогично выводим формулы для пересчета остальных столбцов:

$$\begin{cases} \overline{\chi_{i,j}} = \chi_{i,j} - \frac{\chi_{l,j}}{\chi_{l,p}}\chi_{i,p}, i \neq l \\ \overline{\chi_{l,j}} = \frac{\chi_{l,i}}{\chi_{l,p}} \end{cases}$$

Это - формулы прямоугольного метода Жордана-Гаусса.