Введение

Общий вид задачи оптимизации:

1. **Задача оптимального выбора**

   $\min(\max) f(x), x \in X$ - множество операторов.

   Если $X = R^n$ - задача безусловной минимизации (задача без ограничений)

2. **Общая задача математического программирования**

   $\min f_0(x)$ - функция m переменных. $x \in X_0 \subset R^n$

   $f_i(x) \leq 0, i \in \overline{1, m_1}$

   $f_i(x) = 0, i \in \overline{m_1 + 1, m}$

3. **Задача вариационного исчисления**

   $\min J(x) = \int_{t_0}^{T} L(t, x(t), x'(t))$

   $x(t_0) = x_0, x(T) = x_1$

Задача планирования производства

Переработка m видов ингредиентов (ресурсов)
b_i – объем i-го ресурса
n технологий
$a_{i,j}$ – затраты i–го ресурса при использовании j–ой технологии с единичной интенсивностью (например, за единицу времени)
c_j – ценность за ед. времени j-го способа
Требуется спланировать производство так, чтобы не выходя за рамки отпущенных ресурсов получить конечную продукцию максимальной суммарной ценности.
Ищем интенсивность j-ого способа производства x_j.
Ищем $x = (x1 \dots xn)$ - план производства, который максимизирует суммарную ценность.

$$\begin{cases} \max \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \\ \sum_{j=1}^{n} a_{i,j} x_j \leq b_i, i \in \overline{1, m} \\ x_j \geq 0, j \in \overline{1, n} \end{cases}$$

Задача диеты

m полезных веществ
b_i - минимальное количество i-го вещества
n продуктов питания
$a_{i,j}$ - количество i–го вещества в единице веса j-го продукта
c_j - цена единицы j-го продукта
Требуется найти количество продуктов x_j

$$\begin{cases} \min \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \\ \sum_{j=1}^{n} a_{i,j} x_j \geq b_i, i \in \overline{1, m} \\ x_j \geq 0, j \in \overline{1, n} \end{cases}$$

Транспортная задача

m пунктов производства
a_i - количество продукта в i-м пункте
n потребителей
b_j - потребность j-го потребителя
$c_{i,j}$ - стоимость перевозки из пункта i в пункт j единицы продукта
Требуется организовать перевозки так, чтобы:

1. из каждого пункта производства вывезти весь имеющийся там продукт
2. полностью насытить потребности каждого потребителя
3. суммарные транспортные затраты были минимальны

Определить объемы перевозок $x_{i,j}$

$$\begin{cases} \min \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} c_{i,j} x_{i,j} \\ \sum_{j=1}^{n} x_{i,j} = a_i, i \in \overline{1,m} \\ \sum_{i=1}^{m} x_{i,j} = b_j, j \in \overline{1,n} \\ x_{i,j} \geq 0, \forall i,j \end{cases}$$

Все три задачи оптимизационные, во всех надо найти оптимум линейной функции. Существуют ограничения в виде неравенств и равенств. В ограничениях левая часть – линейная функция. Есть условия неотрицательных переменных ($x_{i,j} > 0$)
Примеры задач линейного программирования вкладываются в общую схему задач математического программирования.

Общая задача линейного программирования

$$\begin{cases} \min(\max) \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \\ \sum_{j=1}^{n} a_{i,j} x_j \{=, \leq, \geq\} b_i, i \in \overline{1,m} \\ x_j \geq 0, j \in \overline{1,m} \end{cases}$$

Целевая функция - функция, которая минимизируется или максимизируется.
Вектор цели $c = (c_1 \ldots_n)$ определяет целевую функцию.
Ограничения могут быть равенствами или неравенствами.
Матрица задачи (условий) $A = (a_{i,j})_{m \times n}$.
Вектор правых частей (ограничений) $B = (b_1 \ldots b_m)$.
Условие неотрицательности переменных $x_j >= 0$.
План задачи $x = (x_1 \ldots x_n)$ - допустимый, если удовлетворяет всем ограничениям.
Допустимое множество X – множество всех допустимых планов задачи.
$\overline{x} = (\overline{x_1} \ldots \overline{x_n})$ - **Оптимальный план** , если $\forall x \in X : \sum_{j=1}^{n} c_j \overline{x_j} \leq \sum_{j=1}^{n} c_j x_j$
$\sum_{j=1}^{n} c_j \overline{x_j}$ - **Оптимальное значение задачи**
Решение задачи линейного программирования - найти хотя бы один оптимальный план и вычислить оптимальное значение.

Частные формы задачи ЛП

1. Планирования производства

$$\begin{cases} \max \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \\ \sum_{j=1}^{n} a_{i,j} x_j = b_i, \forall i \\ x_j \geq 0, \forall j \end{cases}$$

2. Каноническая задача

$$\begin{cases} \min \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \\ \sum_{j=1}^{n} a_{i,j} x_j = b_i, \forall i \\ x_j \geq 0, \forall j \end{cases}$$

3. Основная задача

$$\begin{cases} \min \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \\ \sum_{j=1}^{n} a_{i,j} x_j \leq b_i, \forall i \end{cases}$$

Существуют правила перехода от одной задачи к другой (формы эквивалентны).

1. важна с точки зрения приложений
2. решается алгебраическими методами, приводим задачи к этому виду для решения
3. важна при рассмотрении теоретических вопросов

- Матричная запись:

  X, C, B - вектор-столбцы

  $$\begin{cases} \max C^T X \\ AX \leq B \\ X \geq 0 \end{cases}$$

- Векторная запись:

  $A = \begin{bmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_m \end{bmatrix}$ - набор векторов (строк)

  $$\begin{cases} \max (C, X) \\ (a_i, X) \leq b_i, \forall i \\ X \geq 0 \end{cases}$$

- Запись через столбцы:

  $A = (A_1 \dots A_n)$ - набор столбцов

  $$\begin{cases} \max (C, X) \\ \sum_{j=1}^{n} A_j x_j \leq B \\ X \geq 0 \end{cases}$$

Правила перехода

1. $\max\limits_{x \in S} f(x) = -\min\limits_{x \in S}(-f(x))$

   x^* - точка максимума $f(x)$

   $\forall x \in S : f(x^*) \geq f(x)$

   $\forall x \in S : -f(x^*) \leq -f(x)$

   x^* - точка минимума $-f(x)$

2. $f_i(x) \geq 0 \sim -f_i(x) \leq 0$

3. $(a_i, x) \leq b_i$

   Добавим переменную $x_{n+i} = b_i - (a_i, x) \geq 0$

   $(a_i, x) \leq b_i \sim \begin{cases} (a_i, x) + x_{n+i} = b_i \\ x_{n+i} \geq 0 \end{cases}$

4. $(a_i, x) = b_i \sim \begin{cases} (a_i, x) \leq b_i \\ -(a_i, x) \leq b_i \end{cases}$

5. $a_{i,1}x_1 + \cdots + a_{i,n}x_n = b_i$

   Пусть $a_{i,1} \neq 0$

   $x_1 = \frac{1}{a_{i,1}}(b_i - a_{i,2}x_2 - \cdots - a_{i,n}x_n)$

   $x_i \geq 0 \Rightarrow a_{i,2}x_2 + \cdots + a_{i,n}x_n \leq b_i$

   Применим метод Жордана-Гаусса. Количество ограничений сократится.

6. $x_j \geq 0 \sim -x_j \leq 0 \sim (a_j, x) \leq b_j, b_j = 0, a_j = -1$

7. x_j - свободная переменная.

   Замена $x_j = x'_j - x''_j, x'_j, x''_j \geq 0$

Геометрическая задача ЛП на плоскости и графический метод решения

$z = c_1x_1 + c_2x_2 \to \max$

$\begin{cases} a_{1,1}x_1 + a_{1,2}x_2 \leq b_1 \\ \vdots \\ a_{m,1}x_1 + a_{m,2}x_2 \leq b_m \end{cases}$

$x_i \geq 0 \forall i$

1. Построение допустимого множества X.

   $a_{i,1}x_1 + a_{i,2}x_2 \leq b_i$

   Множество точек, удовлетворяющих неравенству - полуплоскость. Построим прямую $a_{i,1}x_1 + a_{i,2}x_2 = b_i$. Вектор нормали $(a_{i,1}, a_{i,2})$ направлен в искомую полуплоскость.

   Также учитываем условия неотрицательности переменных.

   Множество X - пересечение всех полученных полуплоскостей. Возможны три случая:

   (a) X - многоугольник
   (b) X - неограниченное многоугольное множество
   (c) X - пустое множество (решений нет)

2. Поиск $\max z = \max(c, x)$ с помощью линий уровня.

   $(c, x) = z_0$ - начальная прямая. Как правило, $z_0 = 0$.

   c - её вектор нормали.

   Возьмем $z_1 > z_0$. Прямая $(c, x) = z_1$ параллельно сдвинута в сторону вектора нормали (в задаче на min сдвигаем в обратную сторону).

   Сдвигаем прямую до крайнего положения $(c, x) = f^*$. Множество оптимальных планов x^* - пересечение X и прямой $(c, x) = f^*$.

   Если X - неограниченное множество, то возможна (зависит от направления вектора c) ситуация, когда $f^* = \infty$.

Геометрические свойства задачи ЛП в пространстве R^n

Опр. Выпуклая комбинация

$x - x_1$ - часть вектора $x_2 - x_1$.
$x - x_1 = \alpha(x_2 - x_1)$.
Значение α задает положение точки x на отрезке $[x_1, x_2]$.
$x = (1 - \alpha)x_1 + \alpha x_2$ - уравнение отрезка $[x_1, x_2]$ при $0 \leq \alpha \leq 1$ (выпуклая комбинация точек x_1, x_2).

Опр. Выпуклое множество

S - выпуклое, если любой отрезок с концами в S целиком содержится в S.
$\forall x_1, x_2 \in S : [x_1, x_2] \subset S$
Или:
$\forall x_1, x_2 \in S, \alpha \in [0, 1] : x = (1 - \alpha)x_1 + \alpha x_2 \in S$

Утв. Непустое пересечение выпуклых множеств - выпуклое.

$S = S_1 \cap S_2$
Возьмем $x_1, x_2 \in S$
$x_1, x_2 \in S_i \Rightarrow [x_1, x_2] \subset S_i \Rightarrow [x_1, x_2] \subset S_1 \cap S_2$