

# Введение

Общий вид задачи оптимизации:

## 1. Задача оптимального выбора

$\min(\max) f(x), x \in X$  - множество операторов.

Если  $X = R^n$  - задача безусловной минимизации (задача без ограничений)

## 2. Общая задача математического программирования

$\min f_0(x)$  - функция  $m$  переменных.  $x \in X_0 \subset R^n$

$f_i(x) \leq 0, i \in \overline{1, m_1}$

$f_i(x) = 0, i \in \overline{m_1 + 1, m}$

## 3. Задача вариационного исчисления

$\min J(x) = \int_{t_0}^T L(t, x(t), x'(t))$

$x(t_0) = x_0, x(T) = x_1$

## Задача планирования производства

Переработка  $m$  видов ингредиентов (ресурсов)

$b_i$  - объем  $i$ -го ресурса

$n$  технологий

$a_{i,j}$  - затраты  $i$ -го ресурса при использовании  $j$ -ой технологии с единичной интенсивностью (например, за единицу времени)

$c_j$  - ценность за ед. времени  $j$ -го способа

Требуется спланировать производство так, чтобы не выходя за рамки отпущенных ресурсов получить конечную продукцию максимальной суммарной ценности.

Ищем интенсивность  $j$ -ого способа производства  $x_j$ .

Ищем  $x = (x_1 \dots x_n)$  - план производства, который максимизирует суммарную ценность.

$$\begin{cases} \max \sum_{j=1}^n c_j x_j \\ \sum_{j=1}^n a_{i,j} x_j \leq b_i, i \in \overline{1, m} \\ x_j \geq 0, j \in \overline{1, n} \end{cases}$$

## Задача диеты

$m$  полезных веществ

$b_i$  - минимальное количество  $i$ -го вещества

$n$  продуктов питания

$a_{i,j}$  - количество  $i$ -го вещества в единице веса  $j$ -го продукта

$c_j$  - цена единицы  $j$ -го продукта

Требуется найти количество продуктов  $x_j$

$$\begin{cases} \min \sum_{j=1}^n c_j x_j \\ \sum_{j=1}^n a_{i,j} x_j \geq b_i, i \in \overline{1, m} \\ x_j \geq 0, j \in \overline{1, n} \end{cases}$$

## Транспортная задача

$m$  пунктов производства

$a_i$  - количество продукта в  $i$ -м пункте

$n$  потребителей

$b_j$  - потребность  $j$ -го потребителя

$c_{i,j}$  - стоимость перевозки из пункта  $i$  в пункт  $j$  единицы продукта

Требуется организовать перевозки так, чтобы:

1. из каждого пункта производства вывезти весь имеющийся там продукт
2. полностью насытить потребности каждого потребителя
3. суммарные транспортные затраты были минимальны

Определить объемы перевозок  $x_{i,j}$

$$\begin{cases} \min \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n c_{i,j} x_{i,j} \\ \sum_{j=1}^n x_{i,j} = a_i, i \in \overline{1, m} \\ \sum_{i=1}^m x_{i,j} = b_j, j \in \overline{1, n} \\ x_{i,j} \geq 0, \forall i, j \end{cases}$$

Все три задачи оптимизационные, во всех надо найти оптимум линейной функции. Существуют ограничения в виде неравенств и равенств. В ограничениях левая часть – линейная функция. Есть условия неотрицательных переменных ( $x_{i,j} > 0$ )

Примеры задач линейного программирования вкладываются в общую схему задач математического программирования.

## Общая задача линейного программирования

$$\begin{cases} \min(\max) \sum_{j=1}^n c_j x_j \\ \sum_{j=1}^n a_{i,j} x_j \{=, \leq, \geq\} b_i, i \in \overline{1, m} \\ x_j \geq 0, j \in \overline{1, n} \end{cases}$$

**Целевая функция** - функция, которая минимизируется или максимизируется.

**Вектор цели**  $c = (c_1 \dots c_n)$  определяет целевую функцию.

**Ограничения** могут быть равенствами или неравенствами.

**Матрица задачи (условий)**  $A = (a_{i,j})_{m \times n}$ .

**Вектор правых частей (ограничений)**  $B = (b_1 \dots b_m)$ .

**Условие неотрицательности переменных**  $x_j \geq 0$ .

**План задачи**  $x = (x_1 \dots x_n)$  - допустимый, если удовлетворяет всем ограничениям.

**Допустимое множество**  $X$  – множество всех допустимых планов задачи.

$\bar{x} = (\bar{x}_1 \dots \bar{x}_n)$  - **Оптимальный план**, если  $\forall x \in X : \sum_{j=1}^n c_j \bar{x}_j \leq \sum_{j=1}^n c_j x_j$

$\sum_{j=1}^n c_j \bar{x}_j$  - **Оптимальное значение задачи**

**Решение задачи линейного программирования** - найти хотя бы один оптимальный план и вычислить оптимальное значение.

## Частные формы задачи ЛП

1. Планирования производства

$$\begin{cases} \max \sum_{j=1}^n c_j x_j \\ \sum_{j=1}^n a_{i,j} x_j = b_i, \forall i \\ x_j \geq 0, \forall j \end{cases}$$

2. Каноническая задача

$$\begin{cases} \min \sum_{j=1}^n c_j x_j \\ \sum_{j=1}^n a_{i,j} x_j = b_i, \forall i \\ x_j \geq 0, \forall j \end{cases}$$

3. Основная задача

$$\begin{cases} \min \sum_{j=1}^n c_j x_j \\ \sum_{j=1}^n a_{i,j} x_j \leq b_i, \forall i \end{cases}$$

Существуют правила перехода от одной задачи к другой (формы эквивалентны).

1. важна с точки зрения приложений
2. решается алгебраическими методами, приводим задачи к этому виду для решения
3. важна при рассмотрении теоретических вопросов

- Матричная запись:

$X, C, B$  - вектор-столбцы

$$\begin{cases} \max C^T X \\ AX \leq B \\ X \geq 0 \end{cases}$$

- Векторная запись:

$$A = \begin{bmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_m \end{bmatrix} - \text{набор векторов (строк)}$$

$$\begin{cases} \max(C, X) \\ (a_i, X) \leq b_i, \forall i \\ X \geq 0 \end{cases}$$

- Запись через столбцы:

$A = (A_1 \dots A_n)$  - набор столбцов

$$\begin{cases} \max(C, X) \\ \sum_{j=1}^n A_j x_j \leq B \\ X \geq 0 \end{cases}$$

## Правила перехода

1.  $\max_{x \in S} f(x) = -\min_{x \in S} (-f(x))$

$x^*$  - точка максимума  $f(x)$

$$\forall x \in S : f(x^*) \geq f(x)$$

$$\forall x \in S : -f(x^*) \leq -f(x)$$

$x^*$  - точка минимума  $-f(x)$

2.  $f_i(x) \geq 0 \sim -f_i(x) \leq 0$

3.  $(a_i, x) \leq b_i$

Добавим переменную  $x_{n+i} = b_i - (a_i, x) \geq 0$

$$(a_i, x) \leq b_i \sim \begin{cases} (a_i, x) + x_{n+i} = b_i \\ x_{n+i} \geq 0 \end{cases}$$

4.  $(a_i, x) = b_i \sim \begin{cases} (a_i, x) \leq b_i \\ -(a_i, x) \leq b_i \end{cases}$

5.  $a_{i,1}x_1 + \dots + a_{i,n}x_n = b_i$

Пусть  $a_{i,1} \neq 0$

$$x_1 = \frac{1}{a_{i,1}}(b_i - a_{i,2}x_2 - \dots - a_{i,n}x_n)$$

$$x_i \geq 0 \Rightarrow a_{i,2}x_2 + \dots + a_{i,n}x_n \leq b_i$$

Применим метод Жордана-Гаусса. Количество ограничений сократится.

6.  $x_j \geq 0 \sim -x_j \leq 0 \sim (a_j, x) \leq b_j, b_j = 0, a_j = -1$

7.  $x_j$  - свободная переменная.

$$\text{Замена } x_j = x'_j - x''_j, x'_j, x''_j \geq 0$$

## Геометрическая задача ЛП на плоскости и графический метод решения

$$z = c_1x_1 + c_2x_2 \rightarrow \max$$

$$\begin{cases} a_{1,1}x_1 + a_{1,2}x_2 \leq b_1 \\ \vdots \\ a_{m,1}x_1 + a_{m,2}x_2 \leq b_m \\ x_i \geq 0 \forall i \end{cases}$$

1. Построение допустимого множества  $X$ .

$$a_{i,1}x_1 + a_{i,2}x_2 \leq b_i$$

Множество точек, удовлетворяющих неравенству - полуплоскость. Построим прямую

$$a_{i,1}x_1 + a_{i,2}x_2 = b_i. \text{ Вектор нормали } (a_{i,1}, a_{i,2}) \text{ направлен в искомую полуплоскость.}$$

Также учитываем условия неотрицательности переменных.

Множество  $X$  - пересечение всех полученных полуплоскостей. Возможны три случая:

- (a)  $X$  - многоугольник
- (b)  $X$  - неограниченное многоугольное множество
- (c)  $X$  - пустое множество (решений нет)

2. Поиск  $\max z = \max(c, x)$  с помощью линий уровня.

$(c, x) = z_0$  - начальная прямая. Как правило,  $z_0 = 0$ .

$c$  - её вектор нормали.

Возьмем  $z_1 > z_0$ . Прямая  $(c, x) = z_1$  параллельно сдвинута в сторону вектора нормали (в задаче на  $\min$  сдвигаем в обратную сторону).

Сдвигаем прямую до крайнего положения  $(c, x) = f^*$ . Множество оптимальных планов  $x^*$  - пересечение  $X$  и прямой  $(c, x) = f^*$ .

Если  $X$  - неограниченное множество, то возможна (зависит от направления вектора  $c$ ) ситуация, когда  $f^* = \infty$ .

## Геометрические свойства задачи ЛП в пространстве $R^n$

### Опр. Выпуклая комбинация

$x - x_1$  - часть вектора  $x_2 - x_1$ .

$x - x_1 = \alpha(x_2 - x_1)$ .

Значение  $\alpha$  задает положение точки  $x$  на отрезке  $[x_1, x_2]$ .

$x = (1 - \alpha)x_1 + \alpha x_2$  - уравнение отрезка  $[x_1, x_2]$  при  $0 \leq \alpha \leq 1$  (выпуклая комбинация точек  $x_1, x_2$ ).

### Опр. Выпуклое множество

$S$  - выпуклое, если любой отрезок с концами в  $S$  целиком содержится в  $S$ .

$\forall x_1, x_2 \in S : [x_1, x_2] \subset S$

Или:

$\forall x_1, x_2 \in S, \alpha \in [0, 1] : x = (1 - \alpha)x_1 + \alpha x_2 \in S$

**Утв.** Непустое пересечение выпуклых множеств - выпуклое.

*Доказательство:*

$S = S_1 \cap S_2$

Возьмем  $x_1, x_2 \in S$

$x_1, x_2 \in S_i \Rightarrow [x_1, x_2] \subset S_i \Rightarrow [x_1, x_2] \subset S_1 \cap S_2$

### Опр. Гиперплоскость

$x \in R^m$

$H = \{x | (a, x) = b\}$  - гиперплоскость

$a$  - нормаль гиперплоскости

**Утв.** Гиперплоскость - выпуклое множество.

*Доказательство:*

$x_1, x_2 \in H, \alpha \in [0, 1]$

$x = (1 - \alpha)x_1 + \alpha x_2$

Скалярное произведение линейно  $\Rightarrow$

$(a, x) = (1 - \alpha)(a, x_1) + \alpha(a, x_2) = (1 - \alpha)b + \alpha b = b$

$\Rightarrow x \in H$

$H$  делит пространство на две полуплоскости:

$$H^+ = \{x | (a, x) \geq b\}$$

$$H^- = \{x | (a, x) < b\}$$

**УТВ.**  $H^+$  и  $H^-$  - выпуклые множества.

*Доказательство:*

$$x_1, x_2 \in H^+, \alpha \in [0, 1]$$

$$x = (1 - \alpha)x_1 + \alpha x_2$$

$$(a, x) = (1 - \alpha)(a, x_1) + \alpha(a, x_2) = (1 - \alpha)(b + \theta_1) + \alpha(b + \theta_2) = b + (1 - \alpha)\theta_1 + \alpha\theta_2 \geq b$$

где  $\theta_1, \theta_2 \geq 0$

Для  $H^-$  аналогично.

$$H_i^- = \{x | (a_i, x) \leq b_i\}$$

$X = \bigcap_{i=1}^m H_i^-$  - допустимое множество основной задачи (многогранник решений)

**УТВ.**  $X$  - выпуклое множество.

**Опр. Предельная точка**

$\bar{x} \in X$  - предельная точка, если:

$$\exists \{x_k\} \subset X : \forall k \in N : x_k \neq \bar{x} \text{ и } x_k \xrightarrow[k \rightarrow \infty]{} \bar{x}$$

Скалярное произведение непрерывно  $\Rightarrow (a_i, x_k) \xrightarrow[k \rightarrow \infty]{} (a_i, \bar{x}) \leq b_i$

Значит  $X$  - замкнутое множество.

**Опр. k-грань**

$x$  - k-грань, если:

$\exists \{i_1 \dots i_k\} \subset \overline{1, n}$ , такое, что:

1.  $a_{i_l}$  - линейно независимы
2.  $\forall l \in \overline{1, k} : (a_{i_l}, x) = b_{i_l}$
3.  $\forall i \in \overline{1, n} : (a_i, x) \leq b_i$

**Опр. Вершина - n-грань**

**УТВ.**

Пусть  $X \neq \emptyset$ ,  $r = r(A)$ . Тогда  $\forall k \in \overline{1, r} : \exists k\text{-грань}$   
(Без доказательства)

**Опр. Выпуклая комбинация**

Выпуклая комбинация точек  $x_1 \dots x_k$  -  $\sum_{i=1}^k \alpha_i x_i$ , где:

$$\forall i : \alpha_i \geq 0$$

$$\sum_{i=1}^k \alpha_i = 1$$

**УТВ.** Выпуклое множество содержит все выпуклые комбинации своих точек.

*Доказательство:*

Пусть  $S$  - выпуклое множество,  $x_1 \dots x_m \in S$

$$x = \sum_{i=1}^m \alpha_i x_i$$

Докажем, что  $x \in S$  индукцией по числу точек  $m$ :

*Б.И.*  $k = 2$

Множество значений  $x$  - отрезок. Из определения выпуклого множества  $x \in S$ .

*III.И.*

Рассмотрим три случая:

1.  $\alpha_m = 0$

Количество слагаемых -  $m - 1$ . Выполнено П.И.

2.  $\alpha_m = 1$

$\sum_{i=1}^m \alpha_i = 1 \Rightarrow$  одно слагаемое, очевидно.

3.  $0 < \alpha_m < 1$

$$x = (1 - \alpha_m) \sum_{i=1}^{m-1} \frac{\alpha_i}{1 - \alpha_m} x_i + \alpha_m x_m = (1 - \alpha_m)y + \alpha_m x_m$$

$$\sum_{i=1}^{m-1} \alpha_i = 1 - \alpha_m \Rightarrow \sum_{i=1}^{m-1} \frac{\alpha_i}{1 - \alpha_m} = 1 \Rightarrow y - \text{выпуклая комбинация } m - 1 \text{ точек и по П.И.}$$

$$y \in S$$

$$\Rightarrow x - \text{выпуклая комбинация 2-х точек из } S \Rightarrow x \in S$$

### **Опр. Выпуклая оболочка**

Выпуклая оболочка множества  $M$  - множество всех выпуклых комбинаций точек из  $M$ .

Свойства  $coM$ :

1.  $coM$  - выпуклое множество.

$$x_1, x_2 \in coM$$

$$x_1 = \sum_{i=1}^k \alpha_i x_i$$

$$x_2 = \sum_{j=1}^m \beta_j x_j^*$$

$$x = \lambda x_1 + (1 - \lambda)x_2$$

Легко проверить, что  $x$  - выпуклая комбинация  $x_1 \dots x_k, x_1^* \dots x_m^*$ .

2.  $M \subset coM$

Любая точка множества - выпуклая комбинация из одного слагаемого.

3.  $\forall S$  - выпуклое множество:  $M \subset S \Rightarrow coM \subset S$

$S$  - выпуклое, значит, оно содержит все выпуклые комбинации своих точек.

$$M \subset S \Rightarrow S \text{ содержит все выпуклые комбинации точек из } M \Rightarrow coM \subset S$$

*Пример:*

Треугольник - выпуклая оболочка его трех вершин.

*Доказательство:*

$x_1, x_2, x_3$  - вершины.

$y = \alpha x_1 + (1 - \alpha)x_2$  - отрезок  $[x_1, x_2]$

$x = \beta y + (1 - \beta)x_3$  - треугольник

$$x = \beta \alpha x_1 + \beta(1 - \alpha)x_2 + (1 - \beta)x_3$$

Сумма коэффициентов равна единице  $\Rightarrow x$  - выпуклая комбинация.

Многоугольник - выпуклая оболочка своих вершин.

### **Опр. Крайняя точка**

$\bar{x} \in M$  - крайняя (угловая) точка, если ее нельзя представить в виде нетривиальной ( $\alpha > 0$ ) выпуклой комбинации двух различных точек из  $M$ .

*Пример:*

Крайние точки многоугольника - его вершины. У сферы все точки являются крайними.

**Теорема** Любое непустое выпуклое замкнутое ограниченное множество из  $R^n$  можно представить как выпуклую оболочку своих крайних точек.

**Опр. Выпуклый многогранник** - выпуклая оболочка конечного числа точек.

Свойства:

1. выпуклое множество
2. ограниченное
3. замкнутое

*Доказательство:*

$M$  - выпуклый многогранник.

$$\{x_k\} \subset M$$

$$x_k \xrightarrow[k \rightarrow \infty]{} \bar{x}$$

$$x_k = \sum_{i=1}^m \alpha_i^k x^i$$

$$\forall k : \sum_{i=1}^m \alpha_i^k = 1$$

Последовательность  $\{\alpha_i^k\}_{k=0}^\infty$  ограничена. Выделим сходящуюся подпоследовательность для каждого  $i$ :

$$i = 1 : \exists \{x_{k_j^1}\} \subset \{x_k\} : \alpha_1^{k_j^1} \xrightarrow[j \rightarrow \infty]{} \bar{\alpha}_1$$

$$i = 2 : \exists \{x_{k_j^2}\} \subset \{x_{k_j^1}\} : \alpha_2^{k_j^2} \xrightarrow[j \rightarrow \infty]{} \bar{\alpha}_2$$

$\vdots$

$$i = m : \exists \{x_{k_j^m}\} \subset \{x_{k_j^{m-1}}\} : \alpha_m^{k_j^m} \xrightarrow[j \rightarrow \infty]{} \bar{\alpha}_m$$

$$\text{Имеем } x_{k_j^m} \xrightarrow[j \rightarrow \infty]{} \sum_{i=1}^m \bar{\alpha}_i x^i$$

$$\text{При этом } \sum_{i=1}^m \bar{\alpha}_i = 1$$

Но  $x_k \xrightarrow[k \rightarrow \infty]{} \bar{x}$ , а  $x_{k_j^m}$  - подпоследовательность  $x_k$ , значит  $\bar{x} = \sum_{i=1}^m \bar{\alpha}_i x^i$  - выпуклая комбинация точек из  $M$ . Следовательно,  $\bar{x} \in M$ .

Из теоремы следует, что выпуклый многогранник - выпуклая оболочка своих **крайних** точек.

$X = x | Ax \leq B$  - допустимое множество задачи ЛП.

$X$  - выпуклое и замкнутое.

1.  $X$  - ограничено.

По теореме  $X$  можно представить как выпуклую оболочку своих крайних точек (вершин)

Количество вершин конечно, а точнее, не превосходит  $C_m^n$ , где  $n$  - размерность задачи,  $m$  - количество ограничений.

Значит  $X$  - выпуклый многогранник.

2.  $X$  - неограниченно.

Пусть  $p_1 \dots p_s$  - вершины  $X$ .

У  $X$  есть два неограниченных ребра. Возьмем их направляющие векторы  $S_1, S_2$ .

$$\text{Тогда } x = \sum_{i=1}^s \alpha_i p_i + \beta_1 S_1 + \beta_2 S_2.$$



Если  $X$  - ограничено и непусто, то задача ЛП имеет решение.

**Признак разрешимости:** Если целевая функция задачи ЛП на  $\max$  ( $\min$ ) ограничена сверху (снизу) на допустимом множестве, то задача разрешима.

**Утв.** Если задача ЛП разрешима, то среди решений есть хотя бы одна вершина допустимого множества.

*Доказательство:*

$$\begin{cases} \max(c, x) \\ (a_i, x) \leq b_i, i \in \overline{1, m} \\ x_i \geq 0, i \in \overline{1, m} \end{cases} \quad \text{- задача ЛП}$$

$x^*$  - решение

$X$  - ограничено  $\Rightarrow x^* = \sum_{i=1}^N \alpha_i p_i$ , где  $p_1 \dots p_N$  - вершины  $X$ .

$$f^* = (c, x^*) = \sum_{i=1}^N \alpha_i (c, p_i)$$

Возьмем  $p = \max_{1 \leq i \leq N} p_i$

Тогда  $f^* \leq (c, p) \sum_{i=1}^N \alpha_i = (c, p)$

Но  $f^*$  - оптимальное значение функции  $\Rightarrow \forall x \in X : f^* \geq (c, x)$

Отсюда,  $(c, x^*) = (c, p) \Rightarrow x^* = p \Rightarrow x^*$  - вершина.

**Утв.** Любая выпуклая комбинация решений является решением.

*Доказательство:*

$p_1 \dots p_k$  - решения

$\forall i \in \overline{1, k} : f^* = (c, p_i)$

$$p = \sum_{i=1}^k \alpha_i p_i$$

$$(c, p) = \sum_{i=1}^k \alpha_i (c, p_i) = \sum_{i=1}^k \alpha_i f^* = f^*$$

## Опорный план

Определен для канонической задачи ЛП:

$$\begin{cases} \min(c, x) \\ \sum_{j=1}^n A_j x_j = B \\ x \geq 0 \end{cases}$$

**Опр. Опорный план**

План задачи  $\bar{x} = (\bar{x}_1 \dots \bar{x}_n)$  является опорным, если столбцы  $\{A_j | \bar{x}_j > 0\}$  линейно независимы.

Если столбцов столько же, сколько и ограничений, то план - невырожденный.

**Утв.**  $\bar{x}$  - опорный план  $\iff \bar{x}$  - крайняя точка.

*Доказательство:*

Необходимость

Пусть  $\bar{x}$  - опорный план.

Предположим от противного:  $\bar{x}$  - не крайняя точка.

Тогда  $\exists \alpha_1, \alpha_2 > 0 : \exists x', x'' \in X, x' \neq x'' : \bar{x} = \alpha_1 x' + \alpha_2 x'', \alpha_1 + \alpha_2 = 1$

$x'$  и  $x''$  удовлетворяют ограничениям задачи ЛП:

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^n A_j x'_j = B \\ \sum_{j=1}^n A_j x''_j = B \end{cases}$$

Пусть  $I = \{j | \bar{x}_j > 0\}$  - множество индексов. Тогда  $\forall j \notin I : x'_j = x''_j = 0$ . Вычитая одно равенство из другого получаем:

$$\sum_{j \in I} A_j (x'_j - x''_j) = 0$$

$A_j$  - линейно независимы, значит  $\forall j \in I : x'_j = x''_j$ . При этом  $\forall j \notin I : x'_j = x''_j = 0$ . Отсюда,  $x' = x''$ , противоречие.

#### Достаточность

Пусть  $\bar{x}$  - крайняя точка,  $I = \{j | \bar{x}_j > 0\}$  - множество индексов при ненулевых компонентах.

$\bar{x}$  удовлетворяет ограничениям задачи ЛП:  $\sum_{j \in I} A_j \bar{x}_j = B$

Предположим от противного:  $\bar{x}$  - не опорный план. Тогда  $\{A_j\}_{j \in I}$  - линейно зависимы, то есть, существует нетривиальная линейная комбинация  $d_1 \dots d_k$ , такая, что:

$$\sum_{j \in I} d_j A_j = 0$$

Возьмем  $\epsilon > 0$ . Умножим обе части равенства на  $\pm \epsilon$  и сложим с ограничением задачи ЛП.

Получим:

$$\sum_{j \in I} A_j (\bar{x}_j \pm \epsilon d_j) = B$$

Выберем  $\epsilon$  таким, что  $\forall j \in I : x_j \pm \epsilon d_j \geq 0$

Пусть вектора  $x', x''$  имеют координаты:

$$\forall j \in I : \begin{cases} x'_j = \bar{x}_j - \epsilon d_j \\ x''_j = \bar{x}_j + \epsilon d_j \end{cases}$$

$$\forall j \notin I : x'_j = x''_j = 0$$

$x'$  и  $x''$  имеют неотрицательные координаты и удовлетворяют ограничениям задачи лп, значит, являются планами задачи. Кроме того,  $x' \neq x''$  и  $\bar{x} = \frac{1}{2}x' + \frac{1}{2}x''$ . Следовательно,  $\bar{x}$  - выпуклая комбинация различных точек из  $X$ , а значит, не является крайней, противоречие.

## Симплекс метод

Условия применимости:

1. Задача - в каноническом виде
2. Число уравнений строго меньше числа неизвестных
3. Все свободные члены  $b_i \geq 0$
4.  $r(A) = m$ . Матрица  $A$  содержит единичную  $m$ -мерную подматрицу

Без ограничения общности будем считать, что  $\forall k \in \overline{1, m} : A_{k,j} = \begin{cases} 0, j \neq k \\ 1, j = k \end{cases}$

$x_1 \dots x_m$  - базисные компоненты, остальные - небазисные

Начальный опорный план  $x' = (x'_1 \dots x'_m, 0 \dots 0)$ ,  $x'_i = b_i$

Переход к опорному плану с меньшим значением функции: