

# Введение

Общий вид задачи оптимизации:

## 1. Задача оптимального выбора

$\min(\max)f(x), x \in X$  - множество операторов.

Если  $X = R^n$  - задача безусловной минимизации (задача без ограничений)

## 2. Общая задача математического программирования

$\min f_0(x)$  - функция  $m$  переменных.  $x \in X_0 \subset R^n$

$f_i(x) \leq 0, i \in \overline{1, m_1}$

$f_i(x) = 0, i \in \overline{m_1 + 1, m}$

## 3. Задача вариационного исчисления

$\min J(x) = \int_{t_0}^T L(t, x(t), x'(t))$

$x(t_0) = x_0, x(T) = x_1$

## Задача планирования производства

Переработка  $m$  видов ингредиентов (ресурсов)

$b_i$  - объем  $i$ -го ресурса

$n$  технологий

$a_{i,j}$  - затраты  $i$ -го ресурса при использовании  $j$ -ой технологии с единичной интенсивностью (например, за единицу времени)

$c_j$  - ценность за ед. времени  $j$ -го способа

Требуется спланировать производство так, чтобы не выходя за рамки отпущенных ресурсов получить конечную продукцию максимальной суммарной ценности.

Ищем интенсивность  $j$ -ого способа производства  $x_j$ .

Ищем  $x = (x_1 \dots x_n)$  - план производства, который максимизирует суммарную ценность.

$$\begin{cases} \max \sum_{j=1}^n c_j x_j \\ \sum_{j=1}^n a_{i,j} x_j \leq b_i, i \in \overline{1, m} \\ x_j \geq 0, j \in \overline{1, n} \end{cases}$$

## Задача диеты

$m$  полезных веществ

$b_i$  - минимальное количество  $i$ -го вещества

$n$  продуктов питания

$a_{i,j}$  - количество  $i$ -го вещества в единице веса  $j$ -го продукта

$c_j$  - цена единицы  $j$ -го продукта

Требуется найти количество продуктов  $x_j$

$$\begin{cases} \min \sum_{j=1}^n c_j x_j \\ \sum_{j=1}^n a_{i,j} x_j \geq b_i, i \in \overline{1, m} \\ x_j \geq 0, j \in \overline{1, n} \end{cases}$$

## Транспортная задача

$m$  пунктов производства

$a_i$  - количество продукта в  $i$ -м пункте

$n$  потребителей

$b_j$  - потребность  $j$ -го потребителя

$c_{i,j}$  - стоимость перевозки из пункта  $i$  в пункт  $j$  единицы продукта

Требуется организовать перевозки так, чтобы:

1. из каждого пункта производства вывезти весь имеющийся там продукт
2. полностью насытить потребности каждого потребителя
3. суммарные транспортные затраты были минимальны

Определить объемы перевозок  $x_{i,j}$

$$\begin{cases} \min \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n c_{i,j} x_{i,j} \\ \sum_{j=1}^n x_{i,j} = a_i, i \in \overline{1, m} \\ \sum_{i=1}^m x_{i,j} = b_j, j \in \overline{1, n} \\ x_{i,j} \geq 0, \forall i, j \end{cases}$$

Все три задачи оптимизационные, во всех надо найти оптимум линейной функции. Существуют ограничения в виде неравенств и равенств. В ограничениях левая часть – линейная функция. Есть условия неотрицательных переменных ( $x_{i,j} > 0$ )

Примеры задач линейного программирования вкладываются в общую схему задач математического программирования.

## Общая задача линейного программирования

$$\begin{cases} \min(\max) \sum_{j=1}^n c_j x_j \\ \sum_{j=1}^n a_{i,j} x_j \{=, \leq, \geq\} b_i, i \in \overline{1, m} \\ x_j \geq 0, j \in \overline{1, n} \end{cases}$$

**Целевая функция** - функция, которая минимизируется или максимизируется.

**Вектор цели**  $c = (c_1 \dots c_n)$  определяет целевую функцию.

**Ограничения** могут быть равенствами или неравенствами.

**Матрица задачи (условий)**  $A = (a_{i,j})_{m \times n}$ .

**Вектор правых частей (ограничений)**  $B = (b_1 \dots b_m)$ .

**Условие неотрицательности переменных**  $x_j \geq 0$ .

**План задачи**  $x = (x_1 \dots x_n)$  - допустимый, если удовлетворяет всем ограничениям.

**Допустимое множество**  $X$  – множество всех допустимых планов задачи.

$\bar{x} = (\bar{x}_1 \dots \bar{x}_n)$  - **Оптимальный план**, если  $\forall x \in X : \sum_{j=1}^n c_j \bar{x}_j \leq \sum_{j=1}^n c_j x_j$

$\sum_{j=1}^n c_j \bar{x}_j$  - **Оптимальное значение задачи**

**Решение задачи линейного программирования** - найти хотя бы один оптимальный план и вычислить оптимальное значение.

## Частные формы задачи ЛП

1. Планирования производства

$$\begin{cases} \max \sum_{j=1}^n c_j x_j \\ \sum_{j=1}^n a_{i,j} x_j = b_i, \forall i \\ x_j \geq 0, \forall j \end{cases}$$

2. Каноническая задача

$$\begin{cases} \min \sum_{j=1}^n c_j x_j \\ \sum_{j=1}^n a_{i,j} x_j = b_i, \forall i \\ x_j \geq 0, \forall j \end{cases}$$

3. Основная задача

$$\begin{cases} \min \sum_{j=1}^n c_j x_j \\ \sum_{j=1}^n a_{i,j} x_j \leq b_i, \forall i \end{cases}$$

Существуют правила перехода от одной задачи к другой (формы эквивалентны).

1. важна с точки зрения приложений
2. решается алгебраическими методами, приводим задачи к этому виду для решения
3. важна при рассмотрении теоретических вопросов

- Матричная запись:

$X, C, B$  - вектор-столбцы

$$\begin{cases} \max C^T X \\ AX \leq B \\ X \geq 0 \end{cases}$$

- Векторная запись:

$$A = \begin{bmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_m \end{bmatrix} - \text{набор векторов (строк)}$$

$$\begin{cases} \max(C, X) \\ (a_i, X) \leq b_i, \forall i \\ X \geq 0 \end{cases}$$

- Запись через столбцы:

$A = (A_1 \dots A_n)$  - набор столбцов

$$\begin{cases} \max(C, X) \\ \sum_{j=1}^n A_j x_j \leq B \\ X \geq 0 \end{cases}$$

## Правила перехода

$$1. \max_{x \in S} f(x) = -\min_{x \in S} (-f(x))$$

$x^*$  - точка максимума  $f(x)$

$$\forall x \in S : f(x^*) \geq f(x)$$

$$\forall x \in S : -f(x^*) \leq -f(x)$$

$x^*$  - точка минимума  $-f(x)$

$$2. f_i(x) \geq 0 \sim -f_i(x) \leq 0$$

$$3. (a_i, x) \leq b_i$$

Добавим переменную  $x_{n+i} = b_i - (a_i, x) \geq 0$

$$(a_i, x) \leq b_i \sim \begin{cases} (a_i, x) + x_{n+i} = b_i \\ x_{n+i} \geq 0 \end{cases}$$

$$4. (a_i, x) = b_i \sim \begin{cases} (a_i, x) \leq b_i \\ -(a_i, x) \leq b_i \end{cases}$$

$$5. a_{i,1}x_1 + \dots + a_{i,n}x_n = b_i$$

Пусть  $a_{i,1} \neq 0$

$$x_1 = \frac{1}{a_{i,1}}(b_i - a_{i,2}x_2 - \dots - a_{i,n}x_n)$$

$$x_i \geq 0 \Rightarrow a_{i,2}x_2 + \dots + a_{i,n}x_n \leq b_i$$

Применим метод Жордана-Гаусса. Количество ограничений сократится.

$$6. x_j \geq 0 \sim -x_j \leq 0 \sim (a_j, x) \leq b_j, b_j = 0, a_j = -1$$

$$7. x_j - \text{свободная переменная.}$$

$$\text{Замена } x_j = x'_j - x''_j, x'_j, x''_j \geq 0$$

## Геометрическая задача ЛП на плоскости и графический метод решения

$$z = c_1x_1 + c_2x_2 \rightarrow \max$$

$$\begin{cases} a_{1,1}x_1 + a_{1,2}x_2 \leq b_1 \\ \vdots \\ a_{m,1}x_1 + a_{m,2}x_2 \leq b_m \\ x_i \geq 0 \forall i \end{cases}$$

$$1. \text{ Построение допустимого множества } X.$$

$$a_{i,1}x_1 + a_{i,2}x_2 \leq b_i$$

Множество точек, удовлетворяющих неравенству - полуплоскость. Построим прямую

$$a_{i,1}x_1 + a_{i,2}x_2 = b_i. \text{ Вектор нормали } (a_{i,1}, a_{i,2}) \text{ направлен в искомую полуплоскость.}$$

Также учитываем условия неотрицательности переменных.

Множество  $X$  - пересечение всех полученных полуплоскостей. Возможны три случая:

- (a)  $X$  - многоугольник
- (b)  $X$  - неограниченное многоугольное множество
- (c)  $X$  - пустое множество (решений нет)

2. Поиск  $\max z = \max(c, x)$  с помощью линий уровня.

$(c, x) = z_0$  - начальная прямая. Как правило,  $z_0 = 0$ .

$c$  - её вектор нормали.

Возьмем  $z_1 > z_0$ . Прямая  $(c, x) = z_1$  параллельно сдвинута в сторону вектора нормали (в задаче на  $\min$  сдвигаем в обратную сторону).

Сдвигаем прямую до крайнего положения  $(c, x) = f^*$ . Множество оптимальных планов  $x^*$  - пересечение  $X$  и прямой  $(c, x) = f^*$ .

Если  $X$  - неограниченное множество, то возможна (зависит от направления вектора  $c$ ) ситуация, когда  $f^* = \infty$ .

## Геометрические свойства задачи ЛП в пространстве $R^n$

### Опр. Выпуклая комбинация

$x - x_1$  - часть вектора  $x_2 - x_1$ .

$x - x_1 = \alpha(x_2 - x_1)$ .

Значение  $\alpha$  задает положение точки  $x$  на отрезке  $[x_1, x_2]$ .

$x = (1 - \alpha)x_1 + \alpha x_2$  - уравнение отрезка  $[x_1, x_2]$  при  $0 \leq \alpha \leq 1$  (выпуклая комбинация точек  $x_1, x_2$ ).

### Опр. Выпуклое множество

$S$  - выпуклое, если любой отрезок с концами в  $S$  целиком содержится в  $S$ .

$\forall x_1, x_2 \in S : [x_1, x_2] \subset S$

Или:

$\forall x_1, x_2 \in S, \alpha \in [0, 1] : x = (1 - \alpha)x_1 + \alpha x_2 \in S$

**Утв.** Непустое пересечение выпуклых множеств - выпуклое.

*Доказательство:*

$S = S_1 \cap S_2$

Возьмем  $x_1, x_2 \in S$

$x_1, x_2 \in S_i \Rightarrow [x_1, x_2] \subset S_i \Rightarrow [x_1, x_2] \subset S_1 \cap S_2$

### Опр. Гиперплоскость

$x \in R^m$

$H = \{x | (a, x) = b\}$  - гиперплоскость

$a$  - нормаль гиперплоскости

**Утв.** Гиперплоскость - выпуклое множество.

*Доказательство:*

$x_1, x_2 \in H, \alpha \in [0, 1]$

$x = (1 - \alpha)x_1 + \alpha x_2$

Скалярное произведение линейно  $\Rightarrow$

$(a, x) = (1 - \alpha)(a, x_1) + \alpha(a, x_2) = (1 - \alpha)b + \alpha b = b$

$\Rightarrow x \in H$

$H$  делит пространство на две полуплоскости:

$$H^+ = \{x | (a, x) \geq b\}$$

$$H^- = \{x | (a, x) < b\}$$

**УТВ.**  $H^+$  и  $H^-$  - выпуклые множества.

*Доказательство:*

$$x_1, x_2 \in H^+, \alpha \in [0, 1]$$

$$x = (1 - \alpha)x_1 + \alpha x_2$$

$$(a, x) = (1 - \alpha)(a, x_1) + \alpha(a, x_2) = (1 - \alpha)(b + \theta_1) + \alpha(b + \theta_2) = b + (1 - \alpha)\theta_1 + \alpha\theta_2 \geq b$$

где  $\theta_1, \theta_2 \geq 0$

Для  $H^-$  аналогично.

$$H_i^- = \{x | (a_i, x) \leq b_i\}$$

$X = \bigcap_{i=1}^m H_i^-$  - допустимое множество основной задачи (многогранник решений)

**УТВ.**  $X$  - выпуклое множество.

**Опр. Предельная точка**

$\bar{x} \in X$  - предельная точка, если:

$$\exists \{x_k\} \subset X : \forall k \in N : x_k \neq \bar{x} \text{ и } x_k \xrightarrow[k \rightarrow \infty]{} \bar{x}$$

Скалярное произведение непрерывно  $\Rightarrow (a_i, x_k) \xrightarrow[k \rightarrow \infty]{} (a_i, \bar{x}) \leq b_i$

Значит  $X$  - замкнутое множество.

**Опр. k-грань**

$x$  - k-грань, если:

$\exists \{i_1 \dots i_k\} \subset \overline{1, n}$ , такое, что:

1.  $a_{i_l}$  - линейно независимы
2.  $\forall l \in \overline{1, k} : (a_{i_l}, x) = b_{i_l}$
3.  $\forall i \in \overline{1, n} : (a_i, x) \leq b_i$

**Опр. Вершина - n-грань**

**УТВ.**

Пусть  $X \neq \emptyset$ ,  $r = r(A)$ . Тогда  $\forall k \in \overline{1, r} : \exists k\text{-грань}$   
(Без доказательства)

**Опр. Выпуклая комбинация**

Выпуклая комбинация точек  $x_1 \dots x_k$  -  $\sum_{i=1}^k \alpha_i x_i$ , где:

$$\forall i : \alpha_i \geq 0$$

$$\sum_{i=1}^k \alpha_i = 1$$

**УТВ.** Выпуклое множество содержит все выпуклые комбинации своих точек.

*Доказательство:*

Пусть  $S$  - выпуклое множество,  $x_1 \dots x_m \in S$

$$x = \sum_{i=1}^m \alpha_i x_i$$

Докажем, что  $x \in S$  индукцией по числу точек  $m$ :

*Б.И.*  $k = 2$

Множество значений  $x$  - отрезок. Из определения выпуклого множества  $x \in S$ .

*Ш.И.*

Рассмотрим три случая:

1.  $\alpha_m = 0$

Количество слагаемых -  $m - 1$ . Выполнено П.И.

2.  $\alpha_m = 1$

$\sum_{i=1}^m \alpha_i = 1 \Rightarrow$  одно слагаемое, очевидно.

3.  $0 < \alpha_m < 1$

$$x = (1 - \alpha_m) \sum_{i=1}^{m-1} \frac{\alpha_i}{1 - \alpha_m} x_i + \alpha_m x_m = (1 - \alpha_m) y + \alpha_m x_m$$

$$\sum_{i=1}^{m-1} \alpha_i = 1 - \alpha_m \Rightarrow \sum_{i=1}^{m-1} \frac{\alpha_i}{1 - \alpha_m} = 1 \Rightarrow y - \text{выпуклая комбинация } m - 1 \text{ точек и по П.И.}$$

$$y \in S$$

$$\Rightarrow x - \text{выпуклая комбинация 2-х точек из } S \Rightarrow x \in S$$

### Опр. Выпуклая оболочка

Выпуклая оболочка множества  $M$  - множество всех выпуклых комбинаций точек из  $M$ .

Свойства  $coM$ :

1.  $coM$  - выпуклое множество.

$$x_1, x_2 \in coM$$

$$x_1 = \sum_{i=1}^k \alpha_i x_i$$

$$x_2 = \sum_{j=1}^m \beta_j x_j^*$$

$$x = \lambda x_1 + (1 - \lambda) x_2$$

Легко проверить, что  $x$  - выпуклая комбинация  $x_1 \dots x_k, x_1^* \dots x_m^*$ .

2.  $M \subset coM$

Любая точка множества - выпуклая комбинация из одного слагаемого.

3.  $\forall S$  - выпуклое множество:  $M \subset S \Rightarrow coM \subset S$

$S$  - выпуклое, значит, оно содержит все выпуклые комбинации своих точек.

$$M \subset S \Rightarrow S \text{ содержит все выпуклые комбинации точек из } M \Rightarrow coM \subset S$$

*Пример:*

Треугольник - выпуклая оболочка его трех вершин.

*Доказательство:*

$x_1, x_2, x_3$  - вершины.

$y = \alpha x_1 + (1 - \alpha) x_2$  - отрезок  $[x_1, x_2]$

$x = \beta y + (1 - \beta) x_3$  - треугольник

$$x = \beta \alpha x_1 + \beta (1 - \alpha) x_2 + (1 - \beta) x_3$$

Сумма коэффициентов равна единице  $\Rightarrow x$  - выпуклая комбинация.

Многоугольник - выпуклая оболочка своих вершин.

### Опр. Крайняя точка

$\bar{x} \in M$  - крайняя (угловая) точка, если ее нельзя представить в виде нетривиальной ( $\alpha > 0$ ) выпуклой комбинации двух различных точек из  $M$ .

*Пример:*

Крайние точки многоугольника - его вершины. У сферы все точки являются крайними.

**Теорема** Любое непустое выпуклое замкнутое ограниченное множество из  $R^n$  можно представить как выпуклую оболочку своих крайних точек.