# Введение

Общий вид задачи оптимизации:

1. **Задача оптимального выбора**

   $\min(\max) f(x), x \in X$ - множество операторов.

   Если $X = R^n$ - задача безусловной минимизации (задача без ограничений)

2. **Общая задача математического программирования**

   $\min f_0(x)$ - функция m переменных. $x \in X_0 \subset R^n$

   $f_i(x) \leq 0, i \in \overline{1, m_1}$

   $f_i(x) = 0, i \in \overline{m_1 + 1, m}$

3. **Задача вариационного исчисления**

   $\min J(x) = \int_{t_0}^{T} L(t, x(t), x'(t))$

   $x(t_0) = x_0, x(T) = x_1$

## Задача планирования производства

Переработка $m$ видов ингредиентов (ресурсов)
$b_i$ – объем $i$-го ресурса
$n$ технологий
$a_{i,j}$ – затраты $i$–го ресурса при использовании $j$–ой технологии с единичной интенсивностью (например, за единицу времени)
$c_j$ – ценность за ед. времени $j$-го способа
Требуется спланировать производство так, чтобы не выходя за рамки отпущенных ресурсов получить конечную продукцию максимальной суммарной ценности.
Ищем интенсивность $j$-ого способа производства $x_j$.
Ищем $x = (x1 \dots xn)$ - план производства, который максимизирует суммарную ценность.

$$\begin{cases} \max \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \\ \sum_{j=1}^{n} a_{i,j} x_j \leq b_i, i \in \overline{1, m} \\ x_j \geq 0, j \in \overline{1, n} \end{cases}$$

## Задача диеты

$m$ полезных веществ
$b_i$ - минимальное количество $i$-го вещества
$n$ продуктов питания
$a_{i,j}$ - количество $i$–го вещества в единице веса $j$-го продукта
$c_j$ - цена единицы $j$-го продукта
Требуется найти количество продуктов $x_j$

$$\begin{cases} \min \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \\ \sum_{j=1}^{n} a_{i,j} x_j \geq b_i, i \in \overline{1, m} \\ x_j \geq 0, j \in \overline{1, n} \end{cases}$$

**Транспортная задача**

$m$ пунктов производства
$a_i$ - количество продукта в $i$-м пункте
$n$ потребителей
$b_j$ - потребность $j$-го потребителя
$c_{i,j}$ - стоимость перевозки из пункта $i$ в пункт $j$ единицы продукта
Требуется организовать перевозки так, чтобы:

1. из каждого пункта производства вывезти весь имеющийся там продукт

2. полностью насытить потребности каждого потребителя

3. суммарные транспортные затраты были минимальны

Определить объемы перевозок $x_{i,j}$
$$\begin{cases} \min \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} c_{i,j} x_{i,j} \\ \sum_{j=1}^{n} x_{i,j} = a_i, i \in \overline{1,m} \\ \sum_{i=1}^{m} x_{i,j} = b_j, j \in \overline{1,n} \\ x_{i,j} \geq 0, \forall i, j \end{cases}$$
Все три задачи оптимизационные, во всех надо найти оптимум линейной функции. Существуют ограничения в виде неравенств и равенств. В ограничениях левая часть – линейная функция. Есть условия неотрицательных переменных ($x_{i,j} > 0$)
Примеры задач линейного программирования вкладываются в общую схему задач математического программирования.

## Общая задача линейного программирования

$$\begin{cases} \min(\max) \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \\ \sum_{j=1}^{n} a_{i,j} x_j \{=, \leq, \geq\} b_i, i \in \overline{1,m} \\ x_j \geq 0, j \in \overline{1,m} \end{cases}$$
**Целевая функция** - функция, которая минимизируется или максимизируется.
**Вектор цели** $c = (c_1 \ldots _n)$ определяет целевую функцию.
**Ограничения** могут быть равенствами или неравенствами.
**Матрица задачи (условий)** $A = (a_{i,j})_{m \times n}$.
**Вектор правых частей (ограничений)** $B = (b_1 \ldots b_m)$.
**Условие неотрицательности переменных** $x_j >= 0$.
**План задачи** $x = (x_1 \ldots x_n)$ - допустимый, если удовлетворяет всем ограничениям.
**Допустимое множество** $X$ – множество всех допустимых планов задачи.
$\overline{x} = (\overline{x_1} \ldots \overline{x_n})$ - **Оптимальный план** , если $\forall x \in X : \sum_{j=1}^{n} c_j \overline{x_j} \leq \sum_{j=1}^{n} c_j x_j$
$\sum_{j=1}^{n} c_j \overline{x_j}$ - **Оптимальное значение задачи**
**Решение задачи линейного программирования** - найти хотя бы один оптимальный план и вычислить оптимальное значение.

## Частные формы задачи ЛП

1. Планирования производства

   $$\begin{cases} \max \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \\ \sum_{j=1}^{n} a_{i,j} x_j = b_i, \forall i \\ x_j \geq 0, \forall j \end{cases}$$

2. Каноническая задача

   $$\begin{cases} \min \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \\ \sum_{j=1}^{n} a_{i,j} x_j = b_i, \forall i \\ x_j \geq 0, \forall j \end{cases}$$

3. Основная задача

   $$\begin{cases} \min \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \\ \sum_{j=1}^{n} a_{i,j} x_j \leq b_i, \forall i \end{cases}$$

Существуют правила перехода от одной задачи к другой (формы эквивалентны).

1. важна с точки зрения приложений
2. решается алгебраическими методами, приводим задачи к этому виду для решения
3. важна при рассмотрении теоретических вопросов

- Матричная запись:

  $X, C, B$ - вектор-столбцы

  $$\begin{cases} \max C^T X \\ AX \leq B \\ X \geq 0 \end{cases}$$

- Векторная запись:

  $A = \begin{bmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_m \end{bmatrix}$ - набор векторов (строк)

  $$\begin{cases} \max (C, X) \\ (a_i, X) \leq b_i, \forall i \\ X \geq 0 \end{cases}$$

- Запись через столбцы:

  $A = (A_1 \dots A_n)$ - набор столбцов

  $$\begin{cases} \max (C, X) \\ \sum_{j=1}^{n} A_j x_j \leq B \\ X \geq 0 \end{cases}$$

### Правила перехода

1. $\max\limits_{x \in S} f(x) = -\min\limits_{x \in S}(-f(x))$

   $x^*$ - точка максимума $f(x)$

   $\forall x \in S : f(x^*) \geq f(x)$

   $\forall x \in S : -f(x^*) \leq -f(x)$

   $x^*$ - точка минимума $-f(x)$

2. $f_i(x) \geq 0 \sim -f_i(x) \leq 0$

3. $(a_i, x) \leq b_i$

   Добавим переменную $x_{n+i} = b_i - (a_i, x) \geq 0$

   $(a_i, x) \leq b_i \sim \begin{cases} (a_i, x) + x_{n+i} = b_i \\ x_{n+i} \geq 0 \end{cases}$

4. $(a_i, x) = b_i \sim \begin{cases} (a_i, x) \leq b_i \\ -(a_i, x) \leq b_i \end{cases}$

5. $a_{i,1}x_1 + \cdots + a_{i,n}x_n = b_i$

   Пусть $a_{i,1} \neq 0$

   $x_1 = \frac{1}{a_{i,1}}(b_i - a_{i,2}x_2 - \cdots - a_{i,n}x_n)$

   $x_i \geq 0 \Rightarrow a_{i,2}x_2 + \cdots + a_{i,n}x_n \leq b_i$

   Применим метод Жордана-Гаусса. Количество ограничений сократится.

6. $x_j \geq 0 \sim -x_j \leq 0 \sim (a_j, x) \leq b_j, b_j = 0, a_j = -1$

7. $x_j$ - свободная переменная.

   Замена $x_j = x'_j - x''_j, x'_j, x''_j \geq 0$

## Геометрическая задача ЛП на плоскости и графический метод решения

$z = c_1x_1 + c_2x_2 \to \max$
$\begin{cases} a_{1,1}x_1 + a_{1,2}x_2 \leq b_1 \\ \vdots \\ a_{m,1}x_1 + a_{m,2}x_2 \leq b_m \end{cases}$
$x_i \geq 0 \forall i$

1. Построение допустимого множества $X$.

   $a_{i,1}x_1 + a_{i,2}x_2 \leq b_i$

   Множество точек, удовлетворяющих неравенству - полуплоскость. Построим прямую $a_{i,1}x_1 + a_{i,2}x_2 = b_i$. Вектор нормали $(a_{i,1}, a_{i,2})$ направлен в искомую полуплоскость.

   Также учитываем условия неотрицательности переменных.

   Множество $X$ - пересечение всех полученных полуплоскостей. Возможны три случая:

   (a) $X$ - многоугольник

   (b) $X$ - неограниченное многоугольное множество

   (c) $X$ - пустое множество (решений нет)

2. Поиск $\max z = \max(c, x)$ с помощью линий уровня.

   $(c, x) = z_0$ - начальная прямая. Как правило, $z_0 = 0$.

   $c$ - её вектор нормали.

   Возьмем $z_1 > z_0$. Прямая $(c, x) = z_1$ параллельно сдвинута в сторону вектора нормали (в задаче на min сдвигаем в обратную сторону).

   Сдвигаем прямую до крайнего положения $(c, x) = f^*$. Множество оптимальных планов $x^*$ - пересечение $X$ и прямой $(c, x) = f^*$.

   Если $X$ - неограниченное множество, то возможна (зависит от направления вектора $c$) ситуация, когда $f^* = \infty$.

## Геометрические свойства задачи ЛП в пространстве $R^n$

**Опр. Выпуклая комбинация**

$x - x_1$ - часть вектора $x_2 - x_1$.
$x - x_1 = \alpha(x_2 - x_1)$.
Значение $\alpha$ задает положение точки $x$ на отрезке $[x_1, x_2]$.
$x = (1 - \alpha)x_1 + \alpha x_2$ - уравнение отрезка $[x_1, x_2]$ при $0 \leq \alpha \leq 1$ (выпуклая комбинация точек $x_1$, $x_2$).

**Опр. Выпуклое множество**

$S$ - выпуклое, если любой отрезок с концами в $S$ целиком содержится в $S$.
$\forall x_1, x_2 \in S : [x_1, x_2] \subset S$
Или:
$\forall x_1, x_2 \in S, \alpha \in [0, 1] : x = (1 - \alpha)x_1 + \alpha x_2 \in S$

**Утв.** Непустое пересечение выпуклых множеств - выпуклое.

*Доказательство:*

$S = S_1 \cap S_2$
Возьмем $x_1, x_2 \in S$
$x_1, x_2 \in S_i \Rightarrow [x_1, x_2] \subset S_i \Rightarrow [x_1, x_2] \subset S_1 \cap S_2$

**Опр. Гиперплоскость**

$x \in R^m$
$H = \{x | (a, x) = b\}$ - гиперплоскость
$a$ - нормаль гиперплоскости

**Утв.** Гиперплоскость - выпуклое множество.

*Доказательство:*

$x_1, x_2 \in H, \alpha \in [0, 1]$
$x = (1 - \alpha)x_1 + \alpha x_2$
Скалярное произведение линейно $\Rightarrow$
$(a, x) = (1 - \alpha)(a, x_1) + \alpha(a, x_2) = (1 - \alpha)b + \alpha b = b$
$\Rightarrow x \in H$

$H$ делит пространство на две полуплоскости:
$H^+ = \{x | (a,x) \geq b\}$
$H^- = \{x | (a,x) < b\}$
**Утв.** $H^+$ и $H^-$ - выпуклые множества.
*Доказательство:*

$x_1, x_2 \in H^+, \alpha \in [0,1]$
$x = (1-\alpha)x_1 + \alpha x_2$
$(a,x) = (1-\alpha)(a,x_1) + \alpha(a,x_2) = (1-\alpha)(b+\theta_1) + \alpha(b+\theta_2) = b + (1-\alpha)\theta_1 + \alpha\theta_2 \geq b$
где $\theta_1, \theta_2 \geq 0$
Для $H^-$ аналогично.

$H_i^- = \{x | (a_i, x) \leq b_i\}$
$X = \bigcap\limits_{i=1}^{m} H_i^-$ - допустимое множество основной задачи (многогранник решений)
**Утв.** $X$ - выпуклое множество.
**Опр. Предельная точка**

$\overline{x} \in X$ - предельная точка, если:
$\exists \{x_k\} \subset X : \forall k \in N : x_k \neq \overline{x}$ и $x_k \xrightarrow[k\to\infty]{} \overline{x}$

Скалярное произведение непрерывно $\Rightarrow (a_i, x_k) \xrightarrow[k\to\infty]{} (a_i, \overline{x}) \leq b_i$
Значит $X$ - замкнутое множество.
**Опр. k-грань**

$x$ - k-грань, если:
$\exists \{i_1 \dots i_k\} \subset \overline{1,n}$, такое, что:

1. $a_{i_l}$ - линейно независимы
2. $\forall l \in \overline{1,k} : (a_{i_l}, x) = b_{i_l}$
3. $\forall i \in \overline{1,n} : (a_i, x) \leq b_i$

**Опр. Вершина** - $n$-грань
**Утв.**

Пусть $X \neq \varnothing$, $r = r(A)$. Тогда $\forall k \in \overline{1,r} : \exists k$-грань
*(Без доказательства)*

**Опр. Выпуклая комбинация**

Выпуклая комбинация точек $x_1 \dots x_k$ - $\sum_{i=1}^{k} \alpha_i x_i$, где:
$\forall i : \alpha_i = 0$
$\sum_{i=1}^{k} \alpha_i = 1$

**Утв.** Выпуклое множество содержит все выпуклые комбинации своих точек.
*Доказательство:*

Пусть $S$ - выпуклое множество, $x_1 \dots x_m \in S$
$x = \sum_{i=1}^{m} \alpha_i x_i$
Докажем, что $x \in S$ индукцией по числу точек $m$:
*Б.И.* $k = 2$
Множество значений $x$ - отрезок. Из определения выпуклого множества $x \in S$.
*Ш.И.*
Рассмотрим три случая:

1. $\alpha_m = 0$

   Количество слагаемых - $m-1$. Выполнено П.И.

2. $\alpha_m = 1$

   $\sum_{i=1}^{m} \alpha_i = 1 \Rightarrow$ одно слагаемое, очевидно.

3. $0 < \alpha_m < 1$

   $x = (1-\alpha_m)\sum_{i=1}^{m-1} \frac{\alpha_i}{1-\alpha_m} x_i + \alpha_m x_m = (1-\alpha_m)y + \alpha_m x_m$

   $\sum_{i=1}^{m-1} \alpha_i = 1-\alpha_m \Rightarrow \sum_{i=1}^{m-1} \frac{\alpha_i}{1-\alpha_m} = 1 \Rightarrow y$ - выпуклая комбинация $m-1$ точек и по П.И. $y \in S$

   $\Rightarrow x$ - выпуклая комбинация 2-х точек из $S \Rightarrow x \in S$

**Опр. Выпуклая оболочка**

Выпуклая оболочка множества $M$ - множество всех выпуклых комбинаций точек из $M$.

Свойства $coM$:

1. $coM$ - выпуклое множество.

   $x_1, x_2 \in coM$

   $x_1 = \sum_{i=1}^{k} \alpha_i x_i$

   $x_2 = \sum_{j=1}^{m} \beta_j x_j^*$

   $x = \lambda x_1 + (1-\lambda) x_2$

   Легко проверить, что $x$ - выпуклая комбинация $x_1 \dots x_k, x_1^* \dots x_m^*$.

2. $M \subset coM$

   Любая точка множества - выпуклая комбинация из одного слагаемого.

3. $\forall S$ - выпуклое множество: $M \subset S \Rightarrow coM \subset S$

   $S$ - выпуклое, значит, оно содержит все выпуклые комбинации своих точек.

   $M \subset S \Rightarrow S$ содержит все выпуклые комбинации точек из $M \Rightarrow coM \subset S$

*Пример:*

Треугольник - выпуклая оболочка его трех вершин.

*Доказательство:*

$x_1, x_2, x_3$ - вершины.
$y = \alpha x_1 + (1-\alpha) x_2$ - отрезок $[x_1, x_2]$
$x = \beta y + (1-\beta) x_3$ - треугольник
$x = \beta\alpha x_1 + \beta(1-\alpha) x_2 + (1-\beta) x_3$
Сумма коэффициентов равна единице $\Rightarrow x$ - выпуклая комбинация.

Многоугольник - выпуклая оболочка своих вершин.

**Опр. Крайняя точка**

$\overline{x} \in M$ - крайняя (угловая) точка, если ее нельзя представить в виде нетривиальной $(\alpha > 0)$ выпуклой комбинации двух различных точек из $M$.

*Пример:*

Крайние точки многоугольника - его вершины. У сферы все точки являются крайними.

**Теорема** Любое непустое выпуклое замкнутое ограниченное множество из $R^n$ можно представить как выпуклую оболочку своих крайних точек.
**Опр.** **Выпуклый многогранник** - выпуклая оболочка конечного числа точек.
Свойства:

1. выпуклое множество
2. ограниченное
3. замкнутое

   *Доказательство:*

   $M$ - выпуклый многогранник.

   $\{x_k\} \subset M$

   $x_k \xrightarrow[k\to\infty]{} \overline{x}$

   $x_k = \sum_{i=1}^m \alpha_i^k x^i$

   $\forall k : \sum_{i=1}^m \alpha_i^k = 1$

   Последовательность $\{\alpha_i^k\}_{k=0}^\infty$ ограничена. Выделим сходящуюся подпоследовательность для каждого $i$:

   $i = 1 : \exists \{x_{k_j^1}\} \subset \{x_k\} : \alpha_1^{k_j^1} \xrightarrow[j\to\infty]{} \overline{\alpha_1}$

   $i = 2 : \exists \{x_{k_j^2}\} \subset \{x_{k_j^1}\} : \alpha_2^{k_j^2} \xrightarrow[j\to\infty]{} \overline{\alpha_2}$

   $\vdots$

   $i = m : \exists \{x_{k_j^m}\} \subset \{x_{k_j^{m-1}}\} : \alpha_m^{k_j^m} \xrightarrow[j\to\infty]{} \overline{\alpha_m}$

   Имеем $x_{k_j^m} \xrightarrow[j\to\infty]{} \sum_{i=1}^m \overline{\alpha_i} x^i$

   При этом $\sum_{i=1}^m \overline{\alpha_i} = 1$

   Но $x_k \xrightarrow[k\to\infty]{} \overline{x}$, а $x_{k_j^m}$ - подпоследовательность $x_k$, значит $\overline{x} = \sum_{i=1}^m \overline{\alpha_i} x^i$ - выпуклая комбинация точек из $M$. Следовательно, $\overline{x} \in M$.

Из теоремы следует, что выпуклый многогранник - выпуклая оболочка своих **крайних** точек.
$X = x|Ax \leq B$ - допустимое множество задачи ЛП.
$X$ - выпуклое и замкнутое.

1. $X$ - ограничено.

   По теореме $X$ можно представить как выпуклую оболочку своих крайних точек (вершин)

   Количество вершин конечно, а точнее, не превосходит $C_m^n$, где $n$ - размерность задачи, $m$ - количество ограничений.

   Значит $X$ - выпуклый многогранник.

2. $X$ - неограниченно.

   Пусть $p_1 \dots p_s$ - вершины $X$.

   У $X$ есть два неограниченных ребра. Возьмем их направляющие векторы $S_1, S_2$.

   Тогда $x = \sum_{i=1}^s \alpha_i p_i + \beta_1 S_1 + \beta_2 S_2$.

Если $X$ - ограничено и непусто, то задача ЛП имеет решение.

**Признак разрешимости:** Если целевая функция задачи ЛП на max (min) ограничена сверху (снизу) на допустимом множестве, то задача разрешима.

**Утв.** Если задача ЛП разрешима, то среди решений есть хотя бы одна вершина допустимого множества.

*Доказательство:*

$$\begin{cases} \max(c,x) \\ (a_i,x) \le b_i, i \in \overline{1,m} \\ x_i \ge 0, i \in \overline{1,m} \end{cases} \quad \text{- задача ЛП}$$

$x^*$ - решение

$X$ - ограничено $\Rightarrow x^* = \sum_{i=1}^N \alpha_i p_i$, где $p_1 \dots p_N$ - вершины $X$.

$f^* = (c,x^*) = \sum_{i=1}^N \alpha_i (c,p_i)$

Возьмем $p = \max\limits_{1 \le i \le N} p_i$

Тогда $f^* \le (c,p) \sum_{i=1}^N \alpha_i = (c,p)$

Но $f^*$ - оптимальное значение функции $\Rightarrow \forall x \in X : f^* \ge (c,x)$

Отсюда, $(c,x^*) = (c,p) \Rightarrow x^* = p \Rightarrow x^*$ - вершина.

**Утв.** Любая выпуклая комбинация решений является решением.

*Доказательство:*

$p_1 \dots p_k$ - решения

$\forall i \in \overline{1,k} : f^* = (c,p_i)$

$p = \sum_{i=1}^k \alpha_i p_i$

$(c,p) = \sum_{i=1}^k \alpha_i (c,p_i) = \sum_{i=1}^k \alpha_i f^* = f^*$

## Опорный план

Определен для канонической задачи ЛП:

$$\begin{cases} \min(c,x) \\ \sum_{j=1}^n A_j x_j = B \\ x \ge 0 \end{cases}$$

**Опр. Опорный план**

План задачи $\overline{x} = (\overline{x_1} \dots \overline{x_n})$ является опорным, если столбцы $\{A_j | \overline{x_j} > 0\}$ линейно независимы.

Если столбцов столько же, сколько и ограничений, то план - невырожденный.

**Утв.** $\overline{x}$ - опорный план $\Longleftrightarrow \overline{x}$ - крайняя точка.

*Доказательство:*

Необходимость

Пусть $\overline{x}$ - опорный план.

Предположим от противного: $\overline{x}$ - не крайняя точка.

Тогда $\exists \alpha_1, \alpha_2 > 0 : \exists x', x'' \in X, x' \ne x'' : \overline{x} = \alpha_1 x' + \alpha_2 x'', \alpha_1 + \alpha_2 = 1$

$x'$ и $x''$ удовлетворяют ограничениям задачи ЛП:

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^n A_j x'_j = B \\ \sum_{j=1}^n A_j x''_j = B \end{cases}$$

Пусть $I = \{j | \overline{x_j} > 0\}$ - множество индексов. Тогда $\forall j \notin I : x'_j = x''_j = 0$. Вычитая одно равенство из другого получаем:

$\sum_{j \in I} A_j (x'_j - x''_j) = 0$

$A_j$ - линейно независимы, значит $\forall j \in I : x'_j = x''_j$. При этом $\forall j \notin I : x'_j = x''_j = 0$. Отсюда, $x' = x''$, противоречие.

Достаточность
Пусть $\overline{x}$ - крайняя точка, $I = \{j | \overline{x_j} > 0\}$ - множество индексов при ненулевых компонентах.
$\overline{x}$ удовлетворяет ограничениям задачи ЛП: $\sum_{j \in I} A_j \overline{x_j} = B$
Предположим от противного: $\overline{x}$ - не опорный план. Тогда $\{A_j\}_{j \in I}$ - линейно зависимы, то есть, существует нетривиальная линейная комбинация $d_1 \dots d_k$, такая, что:
$\sum_{j \in I} d_j A_j = 0$
Возьмем $\epsilon > 0$. Умножим обе части равенства на $\pm\epsilon$ и сложим с ограничением задачи ЛП.
Получим:
$\sum_{j \in I} A_j (\overline{x_j} \pm \epsilon d_j) = B$
Выберем $\epsilon$ таким, что $\forall j \in I : x_j \pm \epsilon d_j \geq 0$
Пусть вектора $x', x''$ имеют координаты:
$\forall j \in I : \begin{cases} x'_j = \overline{x_j} - \epsilon d_j \\ x''_j = \overline{x_j} + \epsilon d_j \end{cases}$
$\forall j \notin I : x'_j = x''_j = 0$
$x'$ и $x''$ имеют неотрицательные координаты и удовлетворяют ограничениям задачи лп, значит, являются планами задачи. Кроме того, $x' \neq x''$ и $\overline{x} = \frac{1}{2}x' + \frac{1}{2}x''$. Следовательно, $\overline{x}$ - выпуклая комбинация различных точек из $X$, а значит, не является крайней, противоречие.

## Симплекс метод

Условия применимости:

1. Задача - в каноническом виде
2. Число уравнений строго меньше числа неизвестных
3. Все свободные члены $b_i \geq 0$
4. $r(A) = m$. Матрица $A$ содержит единичную $m$-мерную подматрицу

   Без ограничения общности будем считать, что $\forall k \in \overline{1, m} : A_{k,j} = \begin{cases} 0, j \neq k \\ 1, j = k \end{cases}$

   $x_1 \dots x_m$ - базисные компоненты, остальные - небазисные

Начальный опорный план $x^1 = (x^1_1 \dots x^1_m, 0 \dots 0), \quad x^1_i = b_i$
Выразим столбцы матрицы $A$ через столбцы при базисных компонентах:
$\forall j \in \overline{1, n} : A_j = \chi_{1,j} A_1 + \dots + \chi_{m,j} A_m$
Такое разложение существует, т.к. $A_1 \dots A_m$ - линейно независимы, а значит являются базисом $m$-мерного пространства столбцов.
$X = \{\chi_{i,j}\}_{m \times n}$ - матрица коэффициентов разложения.
Разложение в матричном виде: $A = [A_1 \dots A_m] X$

Пусть $A_{m+1} = \chi_{1,m+1} A_1 \dots \chi_{m,m+1} A_m$ - разложение некоторого небазисного столбца $A_{m+1}$. Пусть $\chi_{1,m+1} > 0$.
Положим $\theta > 0$ - некоторый неопределенный множитель.

Умножим равенство выше на $\theta$ и вычтем из ограничений задачи. Получим:
$A_1(x_1^1 - \theta\chi_{1,m+1}) + \dots + A_m(x_m^1 - \theta\chi_{m,m+1}) + A_{m+1}\theta = b$
Пусть $x_\theta = (x_1^1 - \theta\chi_{1,m+1}, \dots, x_m^1 - \theta\chi_{m,m+1}, \theta, 0, \dots, 0)$
Из полученного равенства следует, что $x_\theta$ удовлетворяет ограничениям задачи. Для того, чтобы $x_\theta$ был допустимым планом нужно, чтобы $\forall i : x_i^1 - \theta\chi_{i,m+1} \geq 0$
Если $\chi_{i,m+1} \leq 0$, то верно для любого $\theta > 0$. Если $\chi_{i,m+1} > 0$, то верно при $0 < \theta \leq \frac{x_i^1}{\chi_{i,m+1}}$.
Возьмем $\theta \leq \theta_0 = \min\limits_{\chi_{i,m+1}>0} \frac{x_i^1}{\chi_{i,m+1}}$.
Пусть min достигается при $i = 1$. Тогда, подставляя $\theta = \theta_0$, получим:
$x^2 = (0, x_2^2, \dots, x_m^2, \theta_0, 0, \dots, 0)$ - новый допустимый план задачи.
Докажем, что $x^2$ является опорным.
От противного: пусть столбцы $A_2 \dots A_{m+1}$ - линейно зависимы. Значит:
$\exists \alpha_2 \dots \alpha_{m+1}$ - нетривиальная л.к.: $\alpha_2 A_2 + \dots + \alpha_{m+1}A_{m+1} = 0$
$A_1 \dots A_m$ - лин. независимы $\Rightarrow A_2 \dots A_m$ - лин. независимы $\Rightarrow \alpha_{m+1} \neq 0$
Отсюда $A_{m+1} = \sum_{i=2}^m \beta_i A_i, \;\; \beta_i = \frac{\alpha_1}{\alpha_{m+1}}$
Вычтем это равенство из разложения $A_{m+1}$ через базисные столбцы:
$0 = \chi_{1,m+1}A_1 + (\chi_{2,m+1} - \beta_2)A_2 + \dots + (\chi_{m,m+1} - \beta_m)A_m$
$A_1 \dots A_m$ - лин. независимы, значит коэффициенты равны нулю. В частности:
$\chi_{1,m+1} = 0$
Но мы ранее положили, что $\chi_{1,m+1} > 0$, противоречие.

В итоге мы перешли к новому опорному плану. Теперь сравним значения целевой функции.
Возьмем разложение $A_j = \chi_{1,j}A_1 + \dots + \chi_{m,j}A_m$ и подставим вместо $A_1 \dots A_m$ коэффициенты целевого вектора $c$ с базисными компонентами:
$z_j = \sum_{i=1}^m \chi_{i,j} c_{B_i}$
Или в матричной записи:
$z^T = c_B X$
Введем оценки опорного плана $\Delta_j = z_j - c_j$. Понятно, что $\forall j \in \overline{1,m} : \Delta_j = 0$
$z_0^2 = (c, x^2) = c_2 x_2^2 + \dots + c_m x_m^2 + c_{m+1}x_{m+1}^2 = c_2(x_2^1 - \theta_0\chi_{2,m+1}) + \dots + c_m(x_m^1 - \theta_0\chi_{m,m+1}) + c_{m+1}\theta_0$
Прибавим $c_1(x_1^1 - \theta_0\chi_{1,m+1}) = 0$:
$F^* = \dots + c_1(x_1^1 - \theta_0\chi_{1,m+1}) = c_1x_1^1 + \dots + c_mx_m^1 - \theta_0(c_1\chi_{1,m+1} + \dots + c_m\chi_{m,m+1}) + c_{m+1}\theta_0 =$
$(c, x^1) - \theta_0(z_{m+1} - c_{m+1}) = z_0^1 - \theta_0\Delta_{m+1}$
Как итог: $z_0^2 = z_0^1 - \theta_0\Delta_{m+1}$

**Утв.** О сходимости симплекс метода

1. Пусть $\exists j : \Delta_j > 0$ и $\exists i : \chi_{i,j} > 0$. Тогда $z_0^2 < z_0^1$
2. Пусть $\exists j : \Delta_j > 0$ и $\forall i : \chi_{i,j} \leq 0$. Тогда $z_0 = -\infty$ (оптимального плана не существует)
3. Пусть $\forall j : \Delta_j \leq 0$. Тогда $x^1$ - оптимальный план

*Доказательство:*

1. Мы это уже доказали, взяв б.о.о $j = m+1$ и $i = 1$.
2. б.о.о. $j = m+1$
   Мы доказывали, что $x_\theta = (x_1^1 - \theta\chi_{1,m+1}, \dots, x_m^1 - \theta\chi_{m,m+1}, \theta, 0, \dots, 0)$ удовлетворяет ограничениям задачи. Если $\forall i : \chi_{i,j} \leq 0$, то $\forall \theta > 0 : x_\theta$ является допустимым планом задачи.
   $(c, x_\theta) = z_0^1 - \theta\Delta_{m+1} \xrightarrow[\theta \to \infty]{} -\infty$

Целевую функцию можно уменьшать сколь угодно, значит оптимального плана не существует.

3.

### Алгоритм симплекс метода

**Шаг 0:**
$B^0 = A_{i_1} \dots A_{i_m}$ - базисные столбцы. $A_{i_k}$ - единица на $k$-ой позиции, все остальные - нули.
$I_B^0 = \{i_1 \dots i_m\}$ - номера базисных векторов.
$J_N^0 = \overline{1,n} \setminus I_B^0$
$x^0$ - начальный план. $x_i^0 = \begin{cases} b_k, i = i_k \in I_B^0 \\ 0, i \in J_N^0 \end{cases}$

**Шаг k:**

1. Разлагаем $A_j$ по векторам из $B^k$. Получаем матрицу разложений $X^k$
2. Находим $z_j^k$. Матрица $(z^k)^T = c_{B_k} X^k$
3. Находим оценки $\Delta_j^k = z_j^k - c_j$
4. Если $\forall j \in J_N^k : \Delta_j^k \leq 0$, то стоп. $x^k$ является оптимальным планом задачи.
5. Введем множество $J_>^N = \{j | \Delta_j^k \geq 0\}$
6. Если $\exists j \in J_>^N : \forall i : \chi_{i,j}^k \leq 0$, то стоп. Оптимального плана не существует.
7. Введем $p$, равный такому $j \in J_>^N$, что $\Delta_j^k$ максимально. Это будет номер столбца, который мы добавим в базис.
8. Ведем $l$ такой, что $\theta_0 = \frac{x_l^k}{\chi_{l,p}^k}$ (достигается минимум). Это будет номер столбца, который мы удалим из базиса.
9. $B^{k+1} = B^k \cup \{A_p\} \setminus \{A_l\}$
   $\forall i \in I_B^{k+1} : x_i^{k+1} = x_i^k - \theta_0 \chi_{i,p}^k$

*Примечание:* возможно зацикливание симплекс метода, если $\theta_0 = \min\limits_{\chi_{i,p} > 0} \frac{x_i}{\chi_{i,p}}$ - минимум достигается при нескольких $i$. Для избежания этого необходимо в таких ситуациях выбирать наименьший из всех $i$.

### Симплекс таблица

Выведем новое разложение матрицы $A$ через базисные столбцы.
Старое разложение:
$A_0 = x_1^1 A_1 + \dots + x_m^1 A_m$
$A_p = \chi_{1,p} A_1 + \dots + \chi_{l,p} A_l + \dots + \chi_{m,p} A_m$
$\forall j : A_j = \chi_{1,j} A_1 + \dots + \chi_{l,j} A_l + \dots + \chi_{m,j} A_m$
Из разложения $A_p$ получаем:
$A_l = \frac{1}{\chi_{l,p}} (A_p - \chi_{1,p} A_1 - \dots - \chi_{m,p} A_m)$
Подставляем $A_l$ в разложение $A_0$:

$A_0 = A_1(x_1^1 - \frac{x_l^1}{\chi_{l,p}}\chi_{1,p}) + \dots + A_p\frac{x_l^1}{\chi_{l,p}} + \dots + A_m(x_m^1 - \frac{x_l^1}{\chi_{l,p}}\chi_{m,p})$
Получаем:
$\begin{cases} \overline{x_i} = x_i - \frac{x_l}{\chi_{l,p}}\chi_{i,p}, i \neq l \\ \overline{x_l} = \frac{x_l}{\chi_{l,p}} \end{cases}$
- формулы для пересчета столбца $A_0$
Аналогично выводим формулы для пересчета остальных столбцов:
$\begin{cases} \overline{\chi_{i,j}} = \chi_{i,j} - \frac{\chi_{l,j}}{\chi_{l,p}}\chi_{i,p}, i \neq l \\ \overline{\chi_{l,j}} = \frac{\chi_{l,i}}{\chi_{l,p}} \end{cases}$
Это - формулы прямоугольного метода Жордана-Гаусса.
*Примечание:* если на последнем шаге симплекс метода $\exists j \notin I_B : \Delta_j = 0$, то мы можем изменить базис, а значит, и опорный план, не изменив при этом значение целевой функции. Это значит, что решение задачи не единственно.

## Метод искусственного базиса

Дана задача ЛП:
$\begin{cases} \max(c, x) \\ \forall i : (a_i, x)\{=, \leq, \geq\}b_i \\ x \geq 0 \end{cases}$
Если ограничения со знаком $\leq$ и $\forall i : b_i \geq 0$, можно перейти к канонической задаче:
$(a_i, x) + x_{n+i} = b_i$
$x_{n+i} \geq 0$ - дополнительные переменные.
Существует единичная подматрица матрицы ограничений, значит, можно применить симплекс метод.
Если ограничения со знаком $\geq$, то при переходе к канонической задаче не всегда можно найти единичную подматрицу. В таком случае ставим расширенную задачу:
$\begin{cases} \min(c, x) + M\sum_{i=1}^{m} x_{n+i} \\ \forall i : (a_i, x) + x_{n+i} = b_i \\ x_1 \dots x_{n+m} \geq 0 \end{cases}$
Здесь $M$ - некоторое большое число, из-за которого все решения с ненулевыми $x_{n+i}$ являются неоптимальными.
$x_{n+i}$ - фиктивные (искусственные) переменные.
К задаче применим симплекс метод:
$\overline{X} = (\overline{x_1}, \dots, \overline{x_{n+m}})$ - оптимальный план.
$\overline{z} = Z(\overline{X})$
**Утв.** Если $\forall j \in \overline{n+1, n+m} : \overline{x_j} = 0$, то $\overline{x} = (\overline{x_1}, \dots, \overline{x_n})$ является решением исходной задачи.
*Доказательство:*

От противного: $\overline{x}$ не является решением. Тогда $\exists x^* : z(x^*) < z(\overline{x})$
$X^* = (x_1^*, \dots, x_n^*, 0, \dots, 0)$ - допустимый план расширенной задачи.
$Z(X^*) = z(x^*) < z(\overline{x}) = Z(\overline{X})$
Но $\overline{X}$ - оптимальный план расширенной задачи. Противоречие.

Утверждение верно и в обратную сторону:
От противного: $\exists i : \overline{x_{n+i}} > 0$
Положим, что допустимое множество исходной задачи непусто ($X \neq \emptyset$)

Тогда $\exists X' = (x'_1, \dots, x'_n, 0, \dots, 0)$ - некоторый план расширенной задачи
$Z(\overline{X}) \geq (c, \overline{x}) + M\overline{x_{n+i}} > (c, x') = Z(X')$
Но $\overline{X}$ - оптимален. Противоречие.

У таблицы расширенной задачи строка для оценок $(\Delta_i)$ разбивается на две. Во вторую строку записывается коэффициент при числе $M$. Вторая строка имеет приоритет при выборе вектора, добавляемого в базис.