Fonction racine n-ième

Théorème 1 (et définition)
$n \in \mathbb{N}^*$
La fonction $x \longmapsto x^n$ est continue et strictement croissante sur $\mathbb{R}_+$ donc elle est bijective de $\mathbb{R}_+$ vers $\mathbb{R}_+$ et admet une bijection réciproque appelée *fonction racine n-ième* et notée $x \longmapsto x^{\frac{1}{n}}$ ou $x \longmapsto \sqrt[n]{x}$.

Exemple 2
— $\sqrt[1]{x} = x$,
— $\sqrt[2]{x} = \sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}}$ (racine carrée) ,
— $\sqrt[3]{x} = x^{\frac{1}{3}}$ appelée la racine cubique de x.

Notation 3

$$\sqrt[n]{x^p} = (x^p)^{\frac{1}{n}} = x^{\frac{p}{n}}$$

Résolution de l'équation $x^n = a$

- si n est pair et $a \geq 0$ alors $x = \sqrt[n]{a}$ ou $x = -\sqrt[n]{a}$
- si n est impair et $a \geq 0$ alors $x = \sqrt[n]{a}$
- si n est pair et $a < 0$ alors pas de solution.
- si n est impair et $a \leq 0$ alors $x = -\sqrt[n]{-a}$

Exemple 4
1. $x^3 = 8 \Longleftrightarrow x = \sqrt[3]{8} = 8^{\frac{1}{3}} = (2^3)^{\frac{1}{3}} = 2$
2. $x^3 + 1 = 0 \Longleftrightarrow x^3 = -1 \Longleftrightarrow x = -\sqrt[3]{1} = -1$
3. $x^4 = 3 \Longleftrightarrow x = \sqrt[4]{3}$ ou $x = -\sqrt[4]{3}$