# 24 Étude de fonctions (TL)

## I - Parité et éléments de symétrie

Soit $f$ une fonction de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$, $\mathscr{D}_f$ est son ensemble de définition et $\mathscr{C}_f$ sa courbe représentative dans un repère $(O;\vec{i},\vec{j})$.

**Définition 1** — $f$ est **paire** si et seulement si pour tout $x \in \mathscr{D}_f$, $-x \in \mathscr{D}_f$ et $f(-x) = f(x)$.
— $f$ est **impaire** si et seulement si pour tout $x \in \mathscr{D}_f$, $-x \in \mathscr{D}_f$ et $f(-x) = -f(x)$.

**Remarque 2**
Pour une fonction paire ou impaire, $\mathscr{D}_f$ est symétrique par rapport à 0.

**Exemple 3**
- La fonction $x \longmapsto x(x^2-1)$ définie sur $\mathbb{R}$ est impaire.
- La fonction $x \longmapsto \dfrac{-x^2}{x^2-1}$ définie sur $\mathbb{R} \setminus \{-1,1\}$ est paire.
- La fonction $x \longmapsto \dfrac{x^2}{x-1}$ définie sur $\mathbb{R} \setminus \{1\}$ n'est ni paire ni impaire.

**Définition 4** — Le point $\mathrm{I}(a,b)$ est centre de symétrie de $\mathscr{C}_f$ si et seulement si pour tout $x \in \mathscr{D}_f$, $2a-x \in \mathscr{D}_f$ et $f(2a-x)+f(x) = 2b$.
— La droite $(D)$ : $x = a$ est axe de symétrie de $\mathscr{C}_f$ si et seulement si pour tout $x \in \mathscr{D}_f$, $2a-x \in \mathscr{D}_f$ et $f(2a-x) = f(x)$.

**Remarque 5**
• Dans ce cas on peut restreindre l'étude de $f$ à $\mathscr{D}_f \cap [a\,,\,+\infty[$.
• Si $f$ est paire (respectivement impaire), l' axe des ordonnées du repère est axe de symétrie (respectivement l'origine du repère est centre de symétrie ) de $\mathscr{C}_f$.

**Exemple 6**
La courbe $\mathscr{C}_f$ de la fonction $f : x \longmapsto x^2+x-1$ définie sur $\mathbb{R}$ admet comme axe de symétrie la droite d'équation $x = -\frac{1}{2}$.
En effet pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a $-1-x \in \mathbb{R}$ et $f(-1-x) = (-1-x)^2+(-1-x)-1 = f(x)$

**Exemple 7**
La courbe $\mathscr{C}_f$ de la fonction $f : x \longmapsto \dfrac{4x+1}{x-1}$ définie sur $\mathbb{R} \setminus \{1\}$ admet comme centre de symétrie le point $\mathrm{I}\,(1,4)$.

En effet pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$, on a $2 - x \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$

Et $f(2-x)+f(x) = \dfrac{4(2-x)+1}{2-x-1} + \dfrac{4x+1}{x-1} = \dfrac{8-4x+1}{1-x} + \dfrac{4x+1}{x-1} = \dfrac{4x-9}{x-1} + \dfrac{4x+1}{x-1} = \dfrac{8(x-1)}{x-1} =$ 8

## II - Branches infinies à une courbe

Nous distinguons deux sortes de branches infinies : les **asymptotes** et les **branches paraboliques**.

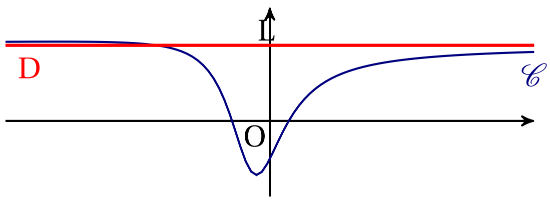
**Asymptote parallèle à l'axe des abscisses**

**Définition 8**

Soit $L$ un nombre réel.

• La droite D d'équation : $y = L$ est une asymptote à la courbe $\mathscr{C}_f$ en $+\infty$ si et seulement si $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = L$.

• La droite $D$ d'équation : $y = L$ est une asymptote à la courbe $\mathscr{C}_f$ en $-\infty$ si et seulement si $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = L$.

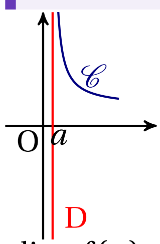



**Asymptote parallèle à l'axe des ordonnées**

**Définition 9**

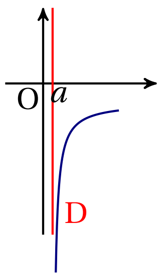
La droite $D$ d'équation : $x = a$ est une asymptote à la courbe $\mathscr{C}_f$ si et seulement si

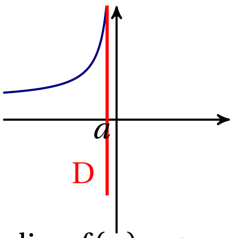
$\lim\limits_{x \to a^+} f(x) = +\infty$ ou $\lim\limits_{x \to a^+} f(x) = -\infty$ ou $\lim\limits_{x \to a^-} f(x) = +\infty$ ou $\lim\limits_{x \to a^-} f(x) = -\infty$



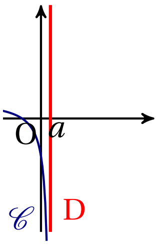

$\lim\limits_{x \to a^+} f(x) = +\infty$

$\lim\limits_{x \to a^+} f(x) = -\infty$





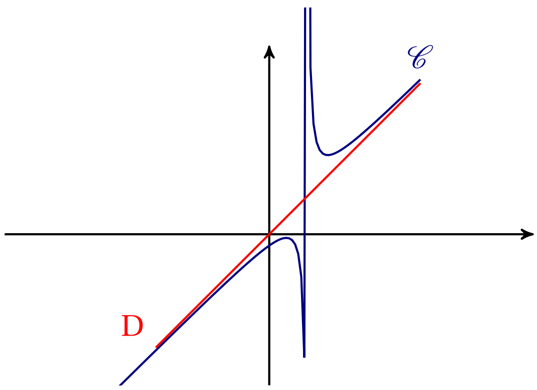

$\lim\limits_{x \to a^-} f(x) = +\infty$




$\boxed{\lim\limits_{x \to a^-} f(x) = -\infty}$

**Asymptote oblique**

**Définition 10**
• La droite $D$ d'équation : $y = ax + b$ est une asymptote (oblique) à $\mathscr{C}_f$ en $+\infty$ si et seulement si $\lim\limits_{x \to +\infty} (f(x) - (ax + b)) = 0$.
• La droite $D$ d'équation : $y = ax + b$ est une asymptote (oblique) à $\mathscr{C}_f$ en $-\infty$ si et seulement si $\lim\limits_{x \to -\infty} (f(x) - (ax + b)) = 0$




**Remarque 11**
Si $f$ s'écrit sous la forme $f(x) = ax + b + g(x)$ et si $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = 0$ alors la droite $y = ax + b$ est une asymptote à $\mathscr{C}_f$ en $+\infty$.

Enoncé valable en $-\infty$.

**Exemple 12**
Déterminons une équation de l'asymptote oblique à la courbe de la fonction $f : x \longmapsto 3x - 5 + \dfrac{2}{x+1}$

Puisque $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{2}{x+1} = 0$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{2}{x+1} = 0$ , on en déduit que la droite $y = 3x-5$ est une asymptote oblique à $\mathscr{C}_f$.

**Exemple 13**

Déterminons une équation de l'asymptote oblique sachant que $f(x) = \dfrac{2x^2+3x+1}{x-2}$.

Pour cela , effectuons la division euclidienne suivante.

$$\begin{array}{r|l} -2x^2+3x+1 & 2x-2 \\ 2x^2-4x & 2x+7 \\ \hline -7x+1 & \\ 7x-14 & \\ \hline 15 & \end{array}$$

Ainsi on a $f(x) = 2x+7+\dfrac{15}{x-2}$ et comme $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{15}{x-2} = 0$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{15}{x-2} = 0$ , on en déduit que la droite $\Delta : y = 2x+7$ est une asymptote oblique à $\mathscr{C}_f$.

**Position relative d'une courbe par rapport à une droite**

Soit $\mathscr{C}_f$ la courbe d'équation $y = f(x)$ et $\mathscr{D}$ la droite d'équation $y = ax+b$.

Pour déterminer la position relative de $\mathscr{C}_f$ par rapport à $\mathscr{D}$ sur un intervalle I, on étudie le signe de $g(x) = f(x)-(ax+b)$.

• Si $g(x) > 0$ sur I alors $\mathscr{C}_f$ est au dessus de $\mathscr{D}$ sur I .

• Si $g(x) < 0$ sur I alors $\mathscr{C}_f$ est au dessous de $\mathscr{D}$ sur I

**Exemple 14**

En reprenant l'exemple précèdent, étudions la position relative de $\Delta$ et $\mathscr{C}_f$.

Pour cela étudions le signe de $f(x)-(2x+7) = \dfrac{15}{x-2}$.

| $x$ | $-\infty$ | | $2$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| signe de $\dfrac{15}{x-2}$ | | $-$ | | $+$ | |

Sur $]-\infty\,,\,2[$ on a $\dfrac{15}{x-2} < 0$ donc $\mathscr{C}_f$ est au dessous de $\Delta$.

Sur $]2\,,\,+\infty[$ on a $\dfrac{15}{x-2} > 0$ donc $\mathscr{C}_f$ est au dessus de $\Delta$.

**Branches paraboliques.**

**Propriété 15** — Si $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{x} = \infty$ alors $\mathscr{C}_f$ admet une branche parabolique de direction l'axe des ordonnées.

— Si $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{x} = 0$ alors $\mathscr{C}_f$ admet une branche parabolique de direction l'axe des abscisses.

**Remarque 16**
La courbe d'une fonction polynôme admet à l'infini une branche parabolique dans la direction l'axe des ordonnées.

## III - Représentation graphique d'une fonction

Pour représenter la courbe d'une fonction, on peut procéder comme suit :

- représenter les points particuliers de la courbe ( points figurants sur le tableau de variation, points d'intersection avec les axes $\cdots$)
- représenter les droites particulières de la courbe ( asymptotes , tangentes $\cdots$)
- tracer la courbe en s'appuyant sur les variations de $f$ sur chaque intervalle du tableau de variation.

**Remarque 17**
Si les points particuliers et les droites remarquables ne sont sont pas suffisants pour tracer la courbe, on peut dresser un tableau de valeurs permettant de représenter quelques points de la courbe.

**Intersection d'une courbe et d'une droite**
**Méthode**

- Le point d'intersection de $\mathscr{C}_f$ avec l'axe des ordonnées est le point $(0, f(0))$ si $0 \in \mathscr{D}_f$
- Pour déterminer les points d'intersection de $\mathscr{C}_f$ avec l'axe des abscisses , on résout l'équation $f(x) = 0$.
- Pour déterminer les points d'intersection de $\mathscr{C}_f$ avec la droite d'équation $y = ax + b$ , on résout l'équation $f(x) = ax + b$.

## IV - Résolution graphique de l'équation f(x) = m

**Méthode**
Le nombre de solutions de cette équation est égal au nombre de points d'intersection de la courbe de $f$ avec la droite d'équation $y = m$ parallèle à l'axe des abscisses qu'on fera *coulisser* du bas vers le haut pour déterminer le nombre de points d'intersection suivant les valeurs de $m$.

# V - Représentation graphique de la fonction | f(x)|

**Méthode**

Si $g(x) = |f(x)|$ alors

- $\mathscr{C}_g$ est confondue à $\mathscr{C}_f$ si $\mathscr{C}_f$ est sur ou au dessus de l'axe des abscisses.
- $\mathscr{C}_g$ est le symétrique de $\mathscr{C}_f$ par rapport à l'axe des abscisses si $\mathscr{C}_f$ est sur ou au dessous de l'axe des abscisses.