Limites de fonctions composées

a , b et c désignent soit un réel soit $\pm\infty$.

Rappel : $\boxed{\text{Si } \lim\limits_{x\to a} f(x) = b \text{ et } \lim\limits_{x\to b} g(x) = c \text{ alors par composée } \lim\limits_{x\to a} g(f(x)) = c}$

Exercice 1

Justifier les limites suivantes.

1. $\lim\limits_{x\to 0} \left(\dfrac{3x-1}{x^2}\right)^4 = +\infty$
2. $\lim\limits_{x\to -\infty} \sqrt{4+\dfrac{1}{x}} = 2$
3. $\lim\limits_{x\to +\infty} \cos\left(\dfrac{\pi x - 2}{x-4}\right) = -1$

Exercice 2

Etudier les limites suivantes.

1. $\lim\limits_{x\to +\infty} \sqrt{x^2-x-3}$
2. $\lim\limits_{x\to -2^-} \sqrt{\dfrac{1+x}{4-x^2}}$
3. $\lim\limits_{x\to -\infty} \sin\left(\dfrac{\pi x - 2}{6x-4}\right)$
4. $\lim\limits_{x\to +\infty} \left(\sqrt{x}-x\right)^5$

Exercice 3

Une fonction f définie sur $\mathbb{R}\setminus\{-1\}$ tel que : $\lim\limits_{x\to -\infty} f(x) = 0$, $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x) = 1$, $\lim\limits_{x\to -1^-} f(x) = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to -1^+} f(x) = -\infty$.

1. Interpréter graphiquement ces limites.
2. Déterminer les limites suivantes.
   — $\lim\limits_{x\to +\infty} f\left(\sqrt{x}\right)$
   — $\lim\limits_{x\to +\infty} f\left(-1+\dfrac{1}{x}\right)$
   — $\lim\limits_{x\to -\infty} f\left(-1+\dfrac{1}{x}\right)$
   — $\lim\limits_{x\to 0^-} f\left(\dfrac{1}{x}\right)$

— $\lim\limits_{x\to+\infty} f\left(\dfrac{x^2+1}{2x-1}\right)$

— $\lim\limits_{x\to-\infty} f\left(\dfrac{2-x^2}{2+x^2}\right)$

Exercice 4
Une fonction f a pour tableau de variations celui donné ci-dessous.

x	$-\infty$		-1		2		$+\infty$
$f(x)$	0	$\nearrow$	$+\infty$ || $+\infty$	$\rightarrow$	0	$\nearrow$	1

Donner en utilisant ce tableau les limites suivantes.

1. $\lim\limits_{x\to+\infty} f(-x+1)$
2. $\lim\limits_{x\to+\infty} f\left(2+\dfrac{2}{x}\right)$
3. $\lim\limits_{x\to-1^-} \dfrac{x-2}{f(x)}$
4. $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{f(x)+x}{f(|x|)-1}$

Exercice 5
Soit f une fonction définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ tel que $f(1)=0$ et $f'(1)=-1$.
$\mathscr{C}_f$ admet une asymptote d'équation $y=3$ en $-\infty$ et une asymptote d'équation $y=x+4$ en $+\infty$.

1. Calculer les limites suivantes.
   — $\lim\limits_{x\to0} f\left(\dfrac{x-1}{x^2}\right)$
   — $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{x+f(x)}$
   — $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{f(x)-x+3}$
2. On considère la limite suivante $\lim\limits_{x\to+\infty} xf\left(1+\dfrac{1}{x}\right)$.
   (a) Justifier qu'il y a une présence de forme indéterminée.
   (b) En posant $X=1+\dfrac{1}{x}$, calculer cette limite.