Primitives (TS2)

Exercice 1
Pour chacune des fonctions définies ci-dessous, trouver :

1. le(s) plus grand(s) intervalle(s) I sur le(s)quel(s) elle admet des primitives.
2. l'expression d'une primitive sur chaque intervalle.

1) $f(x) = 3x^2 - 2x + 5$

2)$f(x) = (2x+1)(x^2+x-5)$

3) $f(x) = \dfrac{x}{(1-x^2)^2}$

4) $f(x) = \dfrac{1}{4x^2-4x+1}$

5) $f(x) = \dfrac{1}{x^3-3x^2+3x-1}$

6) $f(x) = \cos 2x \cos 3x$

7) $f(x) = \sin^3 x \cos^4 x$

8) $f(x) = \cos x \sin 3x$

Exercice 2
Pour chaque fonction f, déterminer une primitive sur I, prenant la valeur b en a :

$$1) \quad f(x) = \frac{2}{(3-x)^3}, \quad I =]-\infty, 3], \quad a = 0,\ b = 4$$

$$2) \quad f(x) = \frac{\sin x}{\cos^3 x}, \quad I =]0, \tfrac{\pi}{2}[, \quad a = \tfrac{\pi}{3},\ b = 1$$

$$3) \quad f(x) = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}, \quad I = \mathbb{R}, \quad a = 0,\ b = 1$$

$$4) \quad f(x) = \frac{x\sin x + \cos x}{x^2}, \quad I =]-\infty, 0[, \quad a = 0,\ b = 1$$

$$5) \quad f(x) = \frac{1+\sin x}{\cos^2 x}, \quad I = [0, \tfrac{\pi}{2}[\quad a = \tfrac{\pi}{4},\ b = 1$$

Exercice 3

Déterminer une primitive F dans chacun des cas suivants :

1) $f(x) = (x^2+x+1)\sqrt{x}$

2) $f(x) = (x^2+x+1)\sqrt{x+1}$

3) $f(x) = x\sqrt{3-x}$

4) $f(x) = \dfrac{x+1}{(x^2+2x+3)\sqrt{x^2+2x+3}}$

5) $f(x) = \sin(x^2+2x) + (2x^2+2x)\cos(x^2+2x)$

6) $f(x) = \dfrac{1}{1+\cos x}$

7) $f(x) = \sqrt{x+1} + \dfrac{1}{2}\dfrac{x}{\sqrt{x+1}}$

8) $f(x) = \dfrac{12}{(x-1)^2}\left(1+\dfrac{3}{x-1}\right)^3$

9) $f(x) = 1 + \dfrac{1}{\tan^2 x}$

10) $f(x) = \dfrac{\cos(\sqrt{x})}{\sqrt{x}}$

11) $f(x) = \dfrac{x^2-2x}{(x-1)^2}$

12) $f(x) = \dfrac{x^3+3x}{(x^2-1)^3}$ $\Bigg(crire\, f(x) = \dfrac{a}{(x-1)^3} + \dfrac{b}{(x+1$

13) $f(x) = \dfrac{x^2+1}{(x^2-1)^2}$ $\Bigg(crire\, x^2+1 = \dfrac{1}{2}\left((x+1)^2 + (x\right.$

14) $f(x) = \dfrac{3x^2+4x+4}{(x^2+2x)^2}$ $\Bigg(crire\, f(x) = \dfrac{a}{x^2} + \dfrac{b}{(x+2)^2}$

Exercice 4

On se propose de déterminer une primitive sur $\mathbb{R}$ des fonctions :

$$f(x) = x\cos^2 x, \quad g(x) = x\sin^2 x$$

1. Déterminer une primitive de $f+g$.
2. Linéariser $\cos^2 x - \sin^2 x$. En déduire qu'il existe deux réels a et b tels que la fonction $x \longmapsto a\sin 2x + b\cos 2x$ soit une primitive sur $\mathbb{R}$ de $f-g$.
3. Conclure.

Exercice 5

Soit la fonction f définie sur $[0, +\infty[$ par : $f(x) = \dfrac{x^3}{(1+x^2)^3} + \dfrac{x^2}{(1+x^3)^2\sqrt{1+x^3}}$.

1. Justifier que f admet des primitives sur $[0, +\infty[$.
2. Déterminer les réels a et b tels que : $\dfrac{x^3}{(1+x^2)^3} = \dfrac{ax}{(1+x^2)^2} + \dfrac{bx}{(1+x^2)^3}$.
3. En déduire la primitive F de f sur $[0, +\infty[$ qui s'annule en 0.

Exercice 6

Soit la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par :
$g(x) = (\cos 3x + \cos x)\cos x$.

1. Déterminer les réels a , b, c et d tels que : $g(x) = a + b\cos 2x + c\cos 4x + d\cos 6x$.
2. En déduire une primitive de g sur $\mathbb{R}$.

Exercice 7

Une entreprise modélise la température (en °C) d'un four en fonction du temps t (en minutes) par la dérivée $T'(t) = 4t - 20$, valable pour $t \in [0, 10]$.
On sait qu'à l'instant $t = 0$, la température est de 300°C.
À quel instant la température est-elle minimale ? Quelle est cette température ?