

## Dual de $L_p$

Avec les propriétés hilbertiennes de  $L_2$  couplées à certaines propriétés des espaces  $L_p$ , on montre que le dual d'un espace  $L_p$  est  $L_q$  pour  $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ , dans le cas où  $p \in ]1, 2[$  et où l'espace est de mesure finie.

Soit  $(X, \mathcal{A}, \mu)$  un espace mesuré de mesure finie.

**Notation 1.** On note  $\forall p \in ]1, 2[, L_p = L_p(X, \mathcal{A}, \mu)$ .

**Lemme 2.** Soient  $p \in ]1, 2[$  et  $f \in L_2$ . Alors  $f \in L_p$  telle que  $\|f\|_p \leq M \|f\|_2$  où  $M \geq 0$ .

*Démonstration.* Comme  $p \in ]1, 2[$ , on a  $\frac{2}{p} > 1$ . Soit  $r$  tel que  $\frac{p}{2} + \frac{1}{r} = 1$ . On applique l'inégalité de Hölder à  $g = |f|^p \mathbb{1}_X$  de sorte que

$$\int_X |f|^p d\mu = \| |f|^p \mathbb{1}_X \|_1 \leq \| |f|^p \|_{\frac{2}{p}} \| \mathbb{1}_X \|_r \leq \mu(X)^{\frac{1}{r}} \|f\|_2^p$$

d'où le résultat. □

**Lemme 3.** Soit  $p \in ]1, 2[$ . Alors  $L_2$  est dense dans  $L_p$  pour la norme  $\|\cdot\|_p$ .

*Démonstration.* Soit  $f \in L_p$ . On considère la suite de fonction  $(f_n)$  définie par

$$\forall n \in \mathbb{N}, f_n = f \mathbb{1}_{|f| \leq n}$$

Clairement,  $(f_n)$  est une suite de  $L_2$ . On va chercher à appliquer le théorème de convergence dominée à la suite de fonctions  $(g_n)$  définie pour tout  $n \in \mathbb{N}$  par  $g_n = |f_n - f|^p$  :

- $\forall n \in \mathbb{N}, g_n$  est mesurable.
- $(g_n)$  converge presque partout vers la fonction nulle.
- Par convexité de la fonction  $x \mapsto x^p$ , on a

$$|f_n - f|^p = 2^p \left| \frac{f_n}{2} - \frac{f}{2} \right|^p \leq 2^{p-1} (|f|^p + |f_n|^p) \leq 2^p |f|^p \in L_1$$

On peut donc conclure

$$\|f - f_n\|_p^p = \int_X |f - f_n|^p d\mu \longrightarrow 0$$

ce qu'il fallait démontrer. □

**Théorème 4.** L'application

$$\varphi : \begin{array}{ll} L_q & \rightarrow (L_p)' \\ g & \mapsto \left( \varphi_g : f \mapsto \int_X f \overline{g} d\mu \right) \end{array} \quad \text{où } \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$$

est une isométrie linéaire surjective. C'est donc un isomorphisme isométrique.

*Démonstration.* Soient  $g \in L_q$  et  $f \in L_p$ . L'inégalité de Hölder donne

$$|\varphi_g(f)| \leq \|g\|_q \|f\|_p$$

donc  $\varphi_g \in (L_p)'$  et  $\|\varphi_g\| \leq \|g\|_q$ . De plus, si  $g = 0$ , alors  $\|\varphi_g\| = \|g\|_q = 0$ . On peut donc supposer  $g \neq 0$ .

Soit  $u$  une fonction mesurable de module 1, telle que  $g = u|g|$ . On pose  $h = \bar{u}|g|^{q-1}$ . Comme  $q = p(q-1)$ , on a

$$\int_X |h|^p d\mu = \int_X |g|^{(q-1)p} d\mu = \int_X |g|^q d\mu < +\infty$$

d'où  $h \in L_p$  et  $\|h\|_p^p = \|g\|_q^q = |\varphi_g(h)|$ . Comme,  $\frac{|\varphi_g(h)|}{\|h\|_p} \leq \|\varphi_g\|$ , on a en particulier,

$$\underbrace{\int_X |g|^q d\mu}_{=|\varphi_g(h)|} \leq \|\varphi_g\| \underbrace{\left( \int_X |g|^q d\mu \right)^{\frac{1}{p}}}_{=\|h\|_p}$$

et ainsi,

$$\|\varphi_g\| \geq \left( \int_X |g|^q d\mu \right)^{1-\frac{1}{p}} = \left( \int_X |g|^q d\mu \right)^{\frac{1}{q}} = \|g\|_q$$

donc  $\|\varphi_g\| = \|g\|_q$  et  $\varphi$  est une isométrie.

Montrons qu'elle est surjective. Soit  $\ell \in (L_p)'$ . D'après le Lemme 2, on a  $L_2 \subseteq L_p$ , donc on peut considérer la restriction  $\tilde{\ell} = \ell|_{L_2}$ .

$$\forall f \in L_2, \quad |\tilde{\ell}(f)| \leq \|\ell\| \|f\|_p \leq M \|\ell\| \|f\|_2 \implies \tilde{\ell} \in (L_2)'$$

Comme  $L_2$  est un espace de Hilbert, on peut appliquer le théorème de représentation de Riesz à  $\tilde{\ell}$ . Il existe  $g \in L_2$  telle que

$$\forall f \in L_2, \quad \tilde{\ell}(f) = \int_X f \bar{g} d\mu$$

Pour conclure, il reste à montrer que  $g \in L_q$  et que l'égalité précédente est vérifiée sur  $L_p$ . Comme précédemment, on considère  $u$  de module 1 telle que  $g = u|g|$  et on pose  $f_n = \bar{u}|g|^{q-1} \mathbb{1}_{|g| \leq n} \in L_\infty \subseteq L_2$ . On a

$$\int_X |g|^q \mathbb{1}_{|g| \leq n} d\mu = |\ell(f_n)| \leq \|\ell\| \|f_n\|_p = \|\ell\| \left( \int_X |g|^q \mathbb{1}_{|g| \leq n} d\mu \right)^{\frac{1}{p}}$$

D'où

$$\left( \int_X |g|^q \mathbb{1}_{|g| \leq n} d\mu \right)^{\frac{1}{q}} = \left( \int_X |g|^q \mathbb{1}_{|g| \leq n} d\mu \right)^{1-\frac{1}{p}} \leq \|\ell\|$$

D'après le théorème de convergence monotone, on a

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left( \int_X |g|^q \mathbb{1}_{|g| \leq n} d\mu \right)^{\frac{1}{q}} = \left( \int_X |g|^q d\mu \right)^{\frac{1}{q}} \leq \|\ell\|$$

Et en particulier,  $g \in L_q$  de norme inférieure ou égale à  $\|\ell\|$ . Ainsi, on a  $\forall f \in L_2, \ell(f) = \varphi_g(f)$ . Les applications  $\ell$  et  $\varphi_g$  sont continues sur  $L_p$  et  $L_2$  est dense dans  $L_p$  (par le Lemme 3), donc on a

bien  $\ell = \varphi_g = \varphi(g)$ .

□

*Remarque 5.* Plus généralement, si l'on identifie  $g$  et  $\varphi_g$  :

- $L_q$  est le dual topologique de  $L_p$  pour  $p \in ]1, +\infty[$ .
- $L_\infty$  est le dual topologique de  $L_1$  si  $\mu$  est  $\sigma$ -finie.

[LI]  
p. 140

# Bibliographie

## Cours d'analyse fonctionnelle

---

[LI]

Daniel LI. *Cours d'analyse fonctionnelle. avec 200 exercices corrigés*. Ellipses, 3 déc. 2013.

<https://www.editions-ellipses.fr/accueil/6558-cours-danalyse-fonctionnelle-avec-200-exercices-corriges-9782729883058.html>.

## Analyse pour l'agrégation

---

[Z-Q]

Claude ZUILY et Hervé QUEFFÉLEC. *Analyse pour l'agrégation. Agrégation/Master Mathématiques*. 5<sup>e</sup> éd. Dunod, 26 août 2020.

<https://www.dunod.com/prepas-concours/analyse-pour-agregation-agregationmaster-mathematiques>.