5 Fonction exponentielle (TS2)

Introduction

La fonction $\begin{array}{rccl} \ln : &]0\,,\,+\infty[& \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & \ln x \end{array}$ est continue et strictement croissante.
Elle admet une **bijection réciproque** de $\mathbb{R}$ vers $]0\,,\,+\infty[$.

I - Définition et propriétés

Définition 1
On appelle fonction exponentielle, notée exp ou e, la bijection réciproque de la fonction ln.

Notation 2

$$\begin{array}{rccl} \exp : & \mathbb{R} & \longrightarrow &]0\,,\,+\infty[\\ & x & \longmapsto & \exp(x) = \mathrm{e}^x \end{array}$$

Conséquence 3
- $\forall x \in \mathbb{R},\ \mathrm{e}^x > 0$
- $\mathrm{e}^0 = 1$ et $\mathrm{e}^1 = \mathrm{e}$
- $\forall x > 0,\ \mathrm{e}^{\ln x} = x$
- $\forall y \in \mathbb{R},\ \ln \mathrm{e}^y = y$
- exp est continue et dérivable sur $\mathbb{R}$.
- exp est bijective et strictement croissante sur $\mathbb{R}$. D'où :
- $\mathrm{e}^a = \mathrm{e}^b \Longleftrightarrow a = b$
- $\mathrm{e}^a > \mathrm{e}^b \Longleftrightarrow a > b$

Propriété 4 (fondamentale)

$$\forall a \in \mathbb{R} \text{ et } \forall b \in \mathbb{R} : \quad \mathrm{e}^{a+b} = \mathrm{e}^a \times \mathrm{e}^b$$

Démonstration
$\ln\left(\mathrm{e}^{a+b}\right) = a + b$
$\ln\left(\mathrm{e}^a \times \mathrm{e}^b\right) = \ln(\mathrm{e}^a) + \ln \mathrm{e}^b = a + b$
D'où $\mathrm{e}^{a+b} = \mathrm{e}^a \times \mathrm{e}^b$

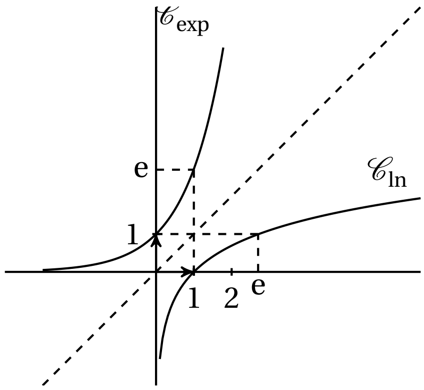
Conséquence 5
- $\mathrm{e}^{-a} = \dfrac{1}{\mathrm{e}^a}$

— $e^{a-b} = \dfrac{e^a}{e^b}$

— $(e^a)^r = e^{ra} \quad \forall r \in \mathbb{Q}$

II - Étude et représentation graphique

Les courbes de la fonction exp et de la fonction ln sont symétriques par rapport à la première bissectrice du repère.



Limites

Aux bornes de l'ensemble de définition de la fonction exp, on obtient les limites suivantes :

Propriété 6 — $\lim\limits_{x \to +\infty} e^x = +\infty$

— $\lim\limits_{x \to -\infty} e^x = 0$

Démonstration

— Soit φ la fonction définie par : $x \longmapsto e^x - x - 1$.
φ est dérivable sur $[0\,,\,+\infty[$ et $\forall x > 0 \quad \varphi'(x) = e^x - 1 \geq 0$. φ est donc croissante sur $[0\,,\,+\infty[$ or $\varphi(0) = 0$.
Donc $\forall x \geq 0$, $\varphi(x) \geq 0$ càd $e^x \geq x + 1$. Or $\lim\limits_{x \to +\infty} x + 1 = +\infty$ par comparaison $\lim\limits_{x \to +\infty} e^x = +\infty$

— Pour calculer $\lim\limits_{x \to -\infty} e^x$ posons $y = -x$
On a alors $\lim\limits_{x \to -\infty} e^x = \lim\limits_{y \to +\infty} e^{-y} = \lim\limits_{y \to +\infty} \dfrac{1}{e^y} = 0$

Tableau de variations

x	$-\infty$ $+\infty$
$(e^x)'$	$+$
e^x	$0 \nearrow +\infty$

Dérivée

On sait que $\forall x \in \mathbb{R}$, $\ln \mathrm{e}^x = x$.
Dérivons les 2 membres de cette égalité.
$\ln'(\mathrm{e}^x) \times (\mathrm{e}^x)' = 1$
$\dfrac{(\mathrm{e}^x)'}{\mathrm{e}^x} = 1 \Longleftrightarrow (\mathrm{e}^x)' = \mathrm{e}^x$

Propriété 7
La fonction exponentielle est dérivable sur $\mathbb{R}$ et est égale à sa propre dérivée : $(\mathrm{e}^x)' = \mathrm{e}^x \quad \forall x \in \mathbb{R}$

Conséquence 8
Si u est une fonction dérivable sur un intervalle I alors la fonction $f : x \mapsto \mathrm{e}^{u(x)}$ est dérivable sur I et $f'(x) = (\exp'(u(x))) \times u'(x) = \mathrm{e}^{u(x)} \times u'(x) = \mathrm{e}^{u(x)} \times u'(x)$
$\boxed{(\mathrm{e}^u)' = u'\mathrm{e}^u}$

La fonction $u'\mathrm{e}^u$ a pour primitive sur I, toute fonction du type $\mathrm{e}^u + C$ $(C \in \mathbb{R})$.

III - Quelques limites classiques

Propriété 9
- $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\mathrm{e}^x}{x} = +\infty$
- $\lim\limits_{x \to -\infty} x\mathrm{e}^x = 0$
- $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\mathrm{e}^x - 1}{x} = 1$

Démonstration

- Montrons que $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\mathrm{e}^x}{x} = +\infty$

  Pour $x > 0$, $\ln\left(\dfrac{\mathrm{e}^x}{x}\right) = \ln \mathrm{e}^x - \ln x = x - \ln x = x\left(1 - \dfrac{\ln x}{x}\right)$ d'où par produit $\lim\limits_{x \to +\infty} x\left(1 - \dfrac{\ln x}{x}\right) = +\infty$

— Montrons que $\lim\limits_{x \to -\infty} x\mathrm{e}^{x} = 0$
En posant $X = -x$, on obtient $\lim\limits_{x \to -\infty} x\mathrm{e}^{x} = \lim\limits_{X \to +\infty} -X\mathrm{e}^{-X} = \lim\limits_{X \to +\infty} \dfrac{-X}{\mathrm{e}^{X}} = 0$

— Montrons que $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\mathrm{e}^{x}-1}{x} = 1$
Soit $\varphi(x) = \mathrm{e}^{x}$.
$\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\mathrm{e}^{x}-1}{x} = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\varphi(x)-\varphi(0)}{x-0} = \varphi'(0) = \mathrm{e}^{0} = 1$