

1 Fonctions numériques. Rappels et compléments

I - Limites

Lorsque nous écrivons ∞ cela signifie que c'est valable pour $+\infty$ comme pour $-\infty$

Il existe quatre cas d'indétermination dans les opérations sur les limites :

$$<< +\infty - \infty >>; \quad << \frac{\infty}{\infty} >>; \quad << \frac{0}{0} >>; \quad << 0 \times \infty >>$$

Limites usuelles

$n \in \mathbb{N}^*$

$$- \lim_{x \rightarrow +\infty} x^n = +\infty$$

$$- \lim_{x \rightarrow -\infty} x^n = \begin{cases} +\infty & \text{si } n \text{ pair} \\ -\infty & \text{si } n \text{ impair} \end{cases}$$

$$- \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x} = +\infty$$

$$- \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x^n} = 0$$

$$- \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1 \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x}{x} = 1$$

$$- \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} = \frac{1}{2} \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x} = 0$$

Remarque 1

Les fonctions cosinus et sinus n'ont pas de limites à l'infini.

Limite de la composée de deux fonctions

Propriété 2

Soient f et g deux fonctions, a , b et c trois réels pouvant éventuellement être $+\infty$ ou $-\infty$.

$$\text{Si } \lim_{x \rightarrow a} f(x) = b \quad \text{et} \quad \lim_{x \rightarrow b} g(x) = c \quad \text{alors} \quad \lim_{x \rightarrow a} g[f(x)] = c$$

Exemple 3

$$\text{Calculons } \lim_{x \rightarrow +\infty} \cos\left(\frac{x+1}{x^2-2}\right)$$

$$\text{On a : } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x+1}{x^2-2} = 0 \quad \text{et} \quad \lim_{x \rightarrow 0} \cos x = \cos 0 = 1 \quad \text{donc par composée} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \cos\left(\frac{x+1}{x^2-2}\right) = 1$$

Comparaisons de limites

Théorème 4

Soient f, g et h trois fonctions et $l \in \mathbb{R}$ et $a = +\infty$ ou $a = -\infty$ ou $a \in \mathbb{R}$.

Hypothèse 1	Hypothèse 2	Conclusion
$f \leq g$	$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = +\infty$	$\lim_{x \rightarrow a} g(x) = +\infty$
$f \leq g$	$\lim_{x \rightarrow a} g(x) = -\infty$	$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = -\infty$
$ f(x) - l \leq g(x)$	$\lim_{x \rightarrow a} g(x) = 0$	$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = l$
$g \leq f \leq h$	$\lim_{x \rightarrow a} g(x) = l$ et $\lim_{x \rightarrow a} h(x) = l$	$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = l$

Remarque 5

Le dernier théorème est parfois appelée « le théorème des gendarmes ».

Exemple 6 — Soit $f(x) = x + 3 \cos x$.

Pour tout $x \in \mathbb{R}$: $x - 3 \leq f(x) \leq x + 3$

· On a : $x - 3 \leq f(x)$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} x - 3 = +\infty$ donc $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$

· On a : $f(x) \leq x + 3$ et $\lim_{x \rightarrow -\infty} x + 3 = -\infty$ donc $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$

— Calculons $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sin x}{x}$.

Pour tout $x \geq 1$: $-1 \leq \sin x \leq 1$

En multipliant par $\frac{1}{x}$: on a $-\frac{1}{x} \leq \frac{\sin x}{x} \leq \frac{1}{x}$

Or $\lim_{x \rightarrow +\infty} (-\frac{1}{x}) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = 0$ donc $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sin x}{x} = 0$

Limites et nombre dérivé

Théorème 7

Soit f une fonction dérivable.

Si $\lim_{x \rightarrow a} f'(x) = l$, (l réel fini ou pas) alors $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = l$

Exemple 8

Calculons $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x}$

Posons $f(x) = \sin x$

On a $f(0) = 0$ et $f'(x) = \cos x$

$$\text{Donc } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} f'(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \cos x = 1$$

II - Branches infinies d'une courbe

Soit une fonction numérique f et \mathcal{C} sa courbe représentative dans un repère orthogonal du plan.

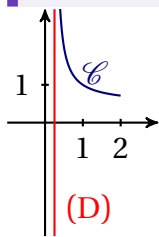
1. Asymptotes

Asymptote verticale

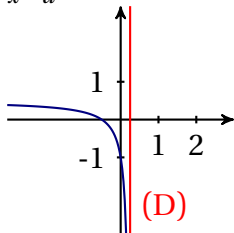
Elle traduit, graphiquement, le fait que la fonction f admet une limite infinie en un réel a .

Définition 9

Si $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = +\infty$ ou $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = +\infty$ ou $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = +\infty$ alors la droite d'équation (D) $x = a$ est une asymptote verticale à la courbe \mathcal{C} .



$$\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = +\infty$$



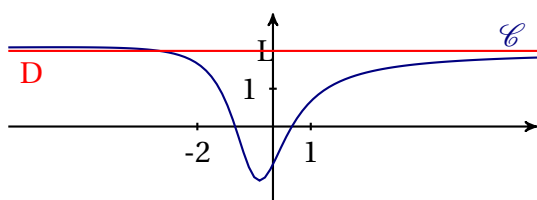
$$\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = -\infty$$

Asymptote horizontale

Elle traduit, graphiquement, le fait que la fonction f admet une limite finie à l'infini.

Définition 10

Si $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = b$ (réel) alors la droite $y = b$ est une asymptote horizontale à la courbe \mathcal{C} en ∞ .

**Exemple 11**

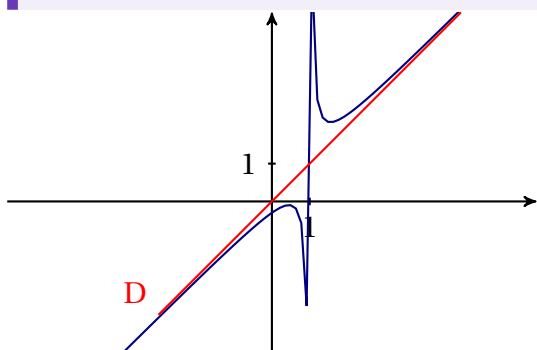
Pour la fonction $f : x \mapsto 3 + \frac{5}{x-1}$

- la droite d'équation $y = 3$ est asymptote horizontale
- la droite d'équation $x = 1$ est asymptote verticale à la courbe de f .

Asymptote oblique**Définition 12**

Soit f une fonction et Δ la droite d'équation $y = ax + b$.

Si $\lim_{x \rightarrow \infty} (f(x) - (ax + b)) = 0$ alors la droite d'équation $y = ax + b$ est une asymptote oblique à la courbe de f en ∞ .

**Exemple 13**

Pour la fonction $f : x \mapsto x + \frac{2}{x-1}$ dont la courbe est représentée ci dessous, la droite d'équation $y = x$ est asymptote oblique à la courbe.

Remarque 14

Si f s'écrit sous la forme $f(x) = ax + b + g(x)$ et si $\lim_{x \rightarrow \infty} g(x) = l$ (réel) alors la droite $y = ax + b + l$ est une asymptote à \mathcal{C} en ∞ .

Exemple 15

Pour la fonction $f : x \mapsto 2x + 5 - \frac{2x}{x-1}$ la droite d'équation $y = 2x + 3$ est asymptote oblique à sa courbe en ∞ car $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x}{x-1} = 2$.

Position relative d'une courbe et son asymptote

Pour étudier la position relative de la courbe \mathcal{C} d'une fonction f par rapport à son asymptote $\Delta : y = ax + b$, on étudie le signe de la différence $f(x) - ax - b$.

- Si $f(x) - ax - b > 0$ alors \mathcal{C} est située au-dessus de la courbe de Δ
- Si $f(x) - ax - b < 0$ alors la courbe de \mathcal{C} est située en-dessous de la courbe de Δ
- Si $f(x) - ax - b = 0$ alors la courbe de \mathcal{C} et Δ sont sécantes.

On tiendra compte de l'ensemble sur lequel on doit étudier la position relative des deux courbes.

2. Recherche de branches infinies

Lorsque $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty$, la courbe \mathcal{C} présente une branche infinie qu'il faut étudier.

- Si $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = 0$ alors la courbe \mathcal{C} présente une branche parabolique dans la direction de l'axe des abscisses.
- Si $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = \infty$ alors la courbe \mathcal{C} présente une branche parabolique dans la direction de l'axe des ordonnées.
- Si $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = a$ réel non nul alors on calcule $\lim_{x \rightarrow \infty} (f(x) - ax)$
 - Si $\lim_{x \rightarrow \infty} (f(x) - ax) = b$ (réel) alors la droite (D) d'équation : $y = ax + b$ est asymptote à la courbe \mathcal{C} .
 - Si $\lim_{x \rightarrow \infty} (f(x) - ax) = \infty$ alors la courbe admet une branche parabolique de direction asymptotique la droite d'équation $y = ax$.

Exercice 16

On considère la fonction f définie par : $f(x) = \begin{cases} \sqrt{x+4} & \text{si } x \geq 2 \\ x+3 - \frac{2}{x-1} & \text{si } x < 2 \end{cases}$

1. Déterminer les limites de f aux bornes de D_f .
2. Etudier la nature des branches infinies de la courbe \mathcal{C} de f .
3. Etudier la position relative de \mathcal{C} par rapport à son asymptote oblique.

Solution. 1. $f(x)$ existe ssi $\begin{cases} x+4 \geq 0 \\ x \geq 2 \end{cases}$ ou $\begin{cases} x-1 \neq 0 \\ x < 2 \end{cases}$

$$f(x) \text{ existe ssi } \begin{cases} x \geq -4 \\ x \geq 2 \end{cases} \text{ ou } \begin{cases} x \neq -1 \\ x < 2 \end{cases}$$

$f(x)$ existe ssi $x \geq 2$ ou $x \in]-\infty, -1[\cup]-1, 2[$

donc $f(x)$ existe ssi $x \in]-\infty, -1[\cup]-1, 2[\cup [2, +\infty[$

D'où $D_f =]-\infty, -1[\cup]-1, +\infty[$

Limites aux bornes de D_f $\lim_{x \rightarrow +\infty} x+4 = +\infty$ par composée $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x+4} = +\infty$ d'où $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} x + 3 - \frac{2}{x-1} = \lim_{x \rightarrow -\infty} x + 3 - \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2}{x-1} = -\infty \text{ d'où } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$$

L'étude de la limite en 1 se fait uniquement sur la restriction $x \mapsto x + 3 - \frac{2}{x-1}$

$$\begin{cases} \lim_{x \rightarrow 1^+} x + 3 = 4 \\ \lim_{x \rightarrow 1^+} -\frac{2}{x-1} = -\infty \end{cases} \text{ donc } \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = -\infty$$

$$\begin{cases} \lim_{x \rightarrow 1^-} x + 3 = 4 \\ \lim_{x \rightarrow 1^-} -\frac{2}{x-1} = +\infty \end{cases} \text{ donc } \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = +\infty$$

2. Puisque $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = -\infty$ et $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = +\infty$ donc la droite d'équation $x = 1$ est une asymptote verticale à la courbe de f .

Puisque la restriction de f sur $] -\infty, 2[$ s'écrit sous la forme $x \mapsto x + 3 - \frac{2}{x-1}$ et que

$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2}{x-1} = 0$ donc la droite Δ d'équation $y = x + 3$ est une asymptote oblique à la courbe de f .

D'autre part $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ donc \mathcal{C}_f présente une branche infinie en $+\infty$.

Calculons $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x}$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x+3}}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x+3}{x\sqrt{x+3}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x+3}{x} \times \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{\sqrt{x+3}} = 1 \times 0 = 0 \text{ d'où } \mathcal{C}_f \text{ admet un}$$

branche parabolique d'axe (Ox).

3. Etudions la position relative de Δ et \mathcal{C}_f .

Pour cela étudions le signe de $f(x) - (x + 3) = -\frac{2}{x-1}$ pour $x < 2$

x	$-\infty$	1	2
signe de $-\frac{2}{x-1}$	+		-

Sur $] -\infty, 1[$ $-\frac{2}{x-1} > 0$ donc \mathcal{C}_f est au dessus de Δ .

Sur $] 1, 2[$ $-\frac{2}{x-1} < 0$ donc \mathcal{C}_f est au dessous de Δ .

□

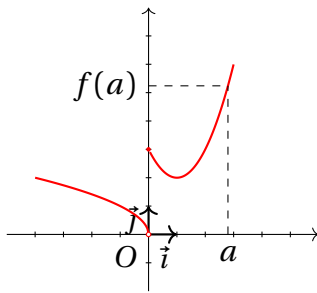
III - Continuité

Continuité en un réel

Définition 17

Une fonction f est continue en un réel a ssi $a \in D_f$ et $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$.

Illustration graphique



• f continue en a signifie : dans le tracé de la courbe on « **ne lève pas** » la main quand on passe au point d'abscisse a .

La courbe n'y présente aucun saut, aucun trou, aucune asymptote verticale.

• Par exemple ici la fonction n'est pas continue en 0.

Exemple 18

$$\text{Soit } f(x) = \begin{cases} \frac{\sqrt{x}-1}{x-1} & \text{si } x \neq 1 \\ \frac{1}{2} & \text{si } x = 1 \end{cases}$$

Etudions la continuité de f en 1.

Pour $x \neq 1$, $f(x)$ existe si et seulement, si $x \geq 0$ et $x-1 \neq 0$

si et seulement, si $x \geq 0$ et $x \neq 1$

si et seulement, si $x \in [0, 1[\cup]1, +\infty[$

Or $f(1) = \frac{1}{2}$ d'où $f(x)$ existe si et seulement, si $x \in [0, +\infty[$

$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x}-1}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{\sqrt{x}+1} = \frac{1}{2}$$

donc $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = f(1) = \frac{1}{2}$ d'où f est continue en 1.

Continuité à droite - continuité à gauche

Propriété 19

f est continue en a si et seulement, si $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = f(a)$.

Prolongement par continuité

Définition 20

Soit f une fonction **non** définie en a et l un nombre réel tel que $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = l$.

On appelle **prolongement par continuité** de f en a , la fonction g définie par :

$$g(x) = \begin{cases} f(x) & \text{si } x \neq a \\ l & \text{si } x = a \end{cases}$$

NB : La fonction g est définie et continue en a .

Exemple 21

Montrons que la fonction $f : x \mapsto \frac{x^2 - x - 2}{x - 2}$ est prolongeable par continuité en 2 et trouvons son prolongement par continuité.

Réponse :

$f(x)$ existe si et seulement, si $x \neq 2$.

$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - x - 2}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x - 2)(x + 1)}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2} (x + 1) = 3$ finie donc f est prolongeable par continuité en 2.

Son prolongement par continuité en 2 est la fonction g définie par :

$$g(x) = \begin{cases} \frac{x^2 - x - 2}{x - 2} & \text{si } x \neq 2 \\ 3 & \text{si } x = 2 \end{cases}$$

IV - Dérivabilité

Dérivabilité en un réel

Définition 22

Soit f une fonction définie sur un intervalle I et $a \in I$.

f est dérivable en a s'il existe un nombre réel l tel que $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = l$

l est le **nombre dérivé** de f en a . On le note $f'(a)$.

Autre formulation de la définition

On fait le changement de variable suivant $h = x - a$

f est dérivable en a s'il existe un nombre réel l tel que $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a + h) - f(a)}{h} = l$

Exemple 23

$$\text{Soit } f(x) = \begin{cases} \frac{\sqrt{x} - 1}{x - 1} & \text{si } x \neq 1 \\ \frac{1}{2} & \text{si } x = 1 \end{cases}$$

Etudions la dérivabilité de f en 1.

Réponse :

On avait trouvé que $D_f = [0, +\infty[$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\frac{\sqrt{x} - 1}{x - 1} - \frac{1}{2}}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{2\sqrt{x} - (x + 1)}{2(x - 1)^2} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{-x^2 + 2x - 1}{2(x - 1)^2(2\sqrt{x} + x + 1)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{-1}{2(2\sqrt{x} + x + 1)} = -\frac{1}{8}$$

Donc f est dérivable en 1 et de nombre dérivé $f'(1) = -\frac{1}{8}$.

Propriété

Propriété 24

Si f est dérivable en a , alors f est continue en a

.

Contre-exemple 25

La réciproque de cette propriété est fausse.

La fonction $x \mapsto |x|$ est continue en 0 mais elle n'est pas dérivable en 0.

Propriété : Dérivabilité à droite - dérivabilité à gauche

Propriété 26

f est dérivable en a si et seulement, si :

$$\lim_{x \rightarrow a^+} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \lim_{x \rightarrow a^-} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = l \quad \text{réel}$$

$$f'_d(a) = f'_g(a)$$

Le nombre dérivé de f à droite en a = Le nombre dérivé de f à gauche en a

Notation 27

Les notations $f'_d(a)$ et $f'_g(a)$ s'utilisent que lorsque la limite du taux de variation est un réel.

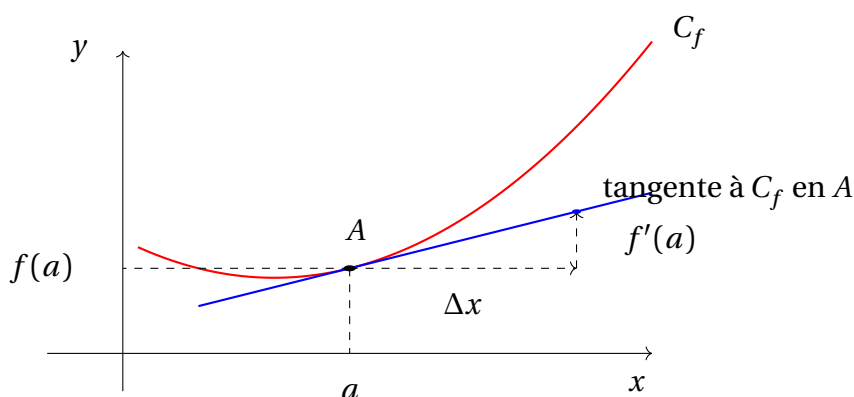
Cas de non dérivabilité

- Si $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = +\infty$ ou $-\infty$ alors f n'est pas dérivable en a .
- Si $f'_d(a) \neq f'_g(a)$ alors f n'est pas dérivable en a .

Interprétation graphique de la dérivabilité

1. Si f est dérivable en a alors sa courbe \mathcal{C} admet au point d'abscisse a c-à-d le point $A(a, f(a))$ une **tangente** de coefficient directeur (ou pente) $f'(a)$ d'équation :

$$y = f'(a)(x - a) + f(a)$$



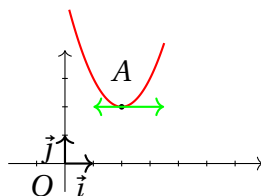
Méthode 28 (Méthode pour construire la tangente)

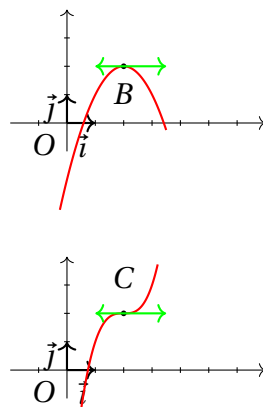
Si la pente s'écrit sous la forme $f'(a) = \frac{\Delta y}{\Delta x}$. Alors on part de A , on « avance » vers la droite du dénominateur (positif) Δx et on « monte » (ou « descend ») du numérateur Δy : ce qui donne un deuxième point que l'on relie à A .

Remarque 29

$f'(a) = 0$ si et seulement si \mathcal{C} admet au point d'abscisse a une tangente horizontale d'équation $y = f(a)$.

Dans ce cas, le point $A(a, f(a))$ est soit un **extremum** (maximum ou minimum) soit un **point d'inflexion**.





A est un minimum, B est un maximum, C est un point d'inflexion

2. Si f est dérivable à droite et à gauche de a telle que $f'_d(a) \neq f'_g(a)$ alors \mathcal{C} admet au point $A(a, f(a))$ deux demi-tangentes de pentes respectives $f'_d(a)$ et $f'_g(a)$: le point A est un **point anguleux**.
3. Détaillons les cas d'une limite infinie.

<ul style="list-style-type: none"> • $\lim_{x \rightarrow a^+} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = +\infty$ <p>La courbe de f admet au point $A(a, f(a))$ une demi-tangente verticale dirigée vers le haut.</p>	<ul style="list-style-type: none"> • $\lim_{x \rightarrow a^-} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = +\infty$ <p>La courbe de f admet au point $A(a, f(a))$ une demi-tangente verticale dirigée vers le bas.</p>
<ul style="list-style-type: none"> • $\lim_{x \rightarrow a^+} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = -\infty$ <p>La courbe de f admet au point $A(a, f(a))$ une demi-tangente verticale dirigée vers le bas.</p>	<ul style="list-style-type: none"> • $\lim_{x \rightarrow a^-} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = -\infty$ <p>La courbe de f admet au point $A(a, f(a))$ une demi-tangente verticale dirigée vers le haut.</p>

4. Si $\lim_{x \rightarrow a^+} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = +\infty$ et $\lim_{x \rightarrow a^-} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = -\infty$ alors la courbe de f admet au point $A(a, f(a))$ deux demi-tangentes verticales dirigées vers le haut d'équation $x = a$. A est un **point de rebroussement**.
5. Si $\lim_{x \rightarrow a^+} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = -\infty$ et $\lim_{x \rightarrow a^-} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = +\infty$ alors la courbe de f admet au point $A(a, f(a))$ deux demi-tangentes verticales dirigées vers le bas d'équation $x = a$. A est un point de rebroussement.
6. Si $\lim_{x \rightarrow a^+} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = +\infty$ et $\lim_{x \rightarrow a^-} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = +\infty$ alors la courbe de f admet au point $A(a, f(a))$ deux demi-tangentes verticales de même équation $x = a$ l'une dirigée vers le haut et l'autre vers le bas. A est un point d'inflexion.
7. Si $\lim_{x \rightarrow a^+} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = +\infty$ et $\lim_{x \rightarrow a^-} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = -\infty$ alors la courbe de f admet au point $A(a, f(a))$ deux demi-tangentes verticales de même équation $x = a$ l'une dirigée vers le haut et l'autre vers le bas. A est un point d'inflexion à tangente verticale.

V - Continuité et dérivabilité sur un intervalle

Définition 30 — f est continue (resp. dérivable) sur l'intervalle I si elle est continue (resp. dérivable) en tout réel $x \in I$.

— La fonction qui à tout réel x de I associe le nombre dérivé de f en x s'appelle **fonction dérivée ou dérivée** de f et est notée $f' : x \mapsto f'(x)$.

L'ensemble des réels x pour lesquels $f'(x)$ existe est appelé **ensemble ou domaine de dérivabilité de f** : c'est le domaine de définition de f' .

Rappelons ci-dessous les fonctions dérivées de certaines fonctions usuelles.

Fonction f définie par :	Dérivable sur	Fonction dérivée $f'(x)$
$f(x) = k, k \in \mathbb{R}$	\mathbb{R}	0
$f(x) = x^n, n \in \mathbb{Q}$	\mathbb{R}	nx^{n-1}
$f(x) = \frac{1}{x}$	\mathbb{R}^*	$-\frac{1}{x^2}$
$f(x) = \sqrt{x}$	\mathbb{R}_+^*	$\frac{1}{2\sqrt{x}}$
$f(x) = \cos x$	\mathbb{R}	$-\sin x$
$f(x) = \sin x$	\mathbb{R}	$\cos x$
$f(x) = \tan x$	$\left] (2k-1)\frac{\pi}{2}, (2k+1)\frac{\pi}{2} \right[, k \in \mathbb{Z}$	$1 + \tan^2 x$ ou $\frac{1}{\cos^2 x}$

Propriété 31

Soient f et g deux fonctions continues (resp. dérivables) sur un intervalle I .

- les fonctions $f + g$ et fg sont continues (resp. dérivables) sur I .
- Si de plus $g \neq 0$ sur I alors les fonctions $\frac{1}{g}$ et $\frac{f}{g}$ sont continues (resp. dérivables) sur I .

Cas particuliers

- Les fonctions polynômes sont continues et dérivables sur \mathbb{R} .
- Les fonctions rationnelles sont continues et dérivables sur tout intervalle de leur ensemble de définition.
- Les fonctions $x \mapsto \cos x$ et $x \mapsto \sin x$ sont continues et dérivables sur \mathbb{R} .
- La fonction $x \mapsto \tan x$ est continue et dérivable sur tout intervalle du type $\left] (2k-1)\frac{\pi}{2}, (2k+1)\frac{\pi}{2} \right[, k \in \mathbb{Z}$.

Image d'un intervalle par une fonction continue

Nous admettons le théorème suivant.

Théorème 32

Si f est une fonction *continue* sur un intervalle I alors $f(I)$ est un intervalle .

Cas particuliers

Le tableau suivant donne les images de quelques intervalles simples par une fonction **continue et strictement monotone** . a et b peuvent être éventuellement $+\infty$ ou $-\infty$.

	$f(I)$ si f continue et strictement croissante		$f(I)$ si f continue et strictement décroissante	
$I = [a, b]$	$[f(a), f(b)]$		$[f(b), f(a)]$	
$I = [a, b[$	$f(a), \lim_{x \rightarrow b^-} f(x)$		$\lim_{x \rightarrow b^-} f(x), f(a)$	
$I =]a, b]$	$\lim_{x \rightarrow a^+} f(x), f(b)$		$f(b), \lim_{x \rightarrow a^+} f(x)$	
$I =]a, b[$	$\lim_{x \rightarrow a^+} f(x), \lim_{x \rightarrow b^-} f(x)$		$\lim_{x \rightarrow b^-} f(x), \lim_{x \rightarrow a^+} f(x)$	

Continuité et dérivabilité de la composée de deux fonctions

Propriété 33

- Si f est continue sur l'intervalle I et g continue sur l'intervalle $f(I)$ alors la fonction $g \circ f$ est continue sur I .
- Si f est dérivable sur l'intervalle I et g dérivable sur l'intervalle $f(I)$ alors la fonction $g \circ f$ est dérivable sur I et pour tout $x \in I$, on a :

$$(g \circ f(x))' = f'(x) \times g'[f(x)]$$

Exemple 34

Soit $h(x) = \cos\left(\frac{1}{x}\right)$. Calculons $h'(x)$.

On a $D_h =]-\infty, 0[\cup]0, +\infty[$

Attention : Avant de dériver une fonction, il est recommandé de justifier sa dérivabilité même si la question ne le précise pas.

La fonction rationnelle $x \mapsto \frac{1}{x}$ est définie sur \mathbb{R}^* donc dérivable sur chacun des intervalles $]-\infty, 0[$ et $]0, +\infty[$.

La fonction $x \mapsto \cos x$ est dérivable sur \mathbb{R} ; en particulier sur chacun des intervalles $]-\infty, 0[$ et $]0, +\infty[$

D'où par composée h est dérivable sur chacun des intervalles $]-\infty, 0[$ et $]0, +\infty[$.

Pour tout $x \neq 0$: $h'(x) = \frac{1}{x^2} \sin\left(\frac{1}{x}\right)$

Conséquence 35

- Si f est dérivable (resp. continue) sur I et g dérivable sur \mathbb{R} alors $g \circ f$ est dérivable (resp. continue) sur I .
- Si f est **continue et positive** sur I alors \sqrt{f} est continue sur I .
- Si f est **dérivable et strictement positive** sur I alors \sqrt{f} est dérivable sur I .

Formules de dérivation

Soient u et v deux fonctions dérivables, $r \in \mathbb{Z}^*$ et $k \in \mathbb{R}$

Fonction	ku	$u + v$	uv	$\frac{u}{v}$	$\frac{1}{v}$	\sqrt{u}	u^r
Dérivée	ku'	$u' + v'$	$u'v + v'u$	$\frac{u'v - v'u}{v^2}$	$-\frac{v'}{v^2}$	$\frac{u'}{2\sqrt{u}}$	$ru'u^{r-1}$

$v \circ u$	$\sin u$	$\cos u$	$\tan u$
$u' \times (v' \circ u)$	$u' \cos u$	$-u' \sin u$	$\frac{u'}{\cos^2 u}$ ou $u'(1 + \tan^2 u)$

Exercice 36

Soit $f(x) = \frac{(x+1)\sqrt{x-2}}{x-1}$.

1. Justifier la continuité de f sur son D_f .
2. Etudier la dérivabilité de f sur son D_f .
3. Calculer $f'(x)$.

Solution. 1. $f(x)$ existe si et seulement, si $x \geq 2$ et $x \neq 1$ donc $D_f = [2, +\infty[$

1^{re} méthode

La fonction $x \mapsto \frac{x+1}{x-1}$ est une fonction rationnelle définie sur $[2, +\infty[$ donc continue sur $[2, +\infty[$

La fonction $x \mapsto x-2$ est continue et positive sur $[2, +\infty[$ donc la fonction $x \mapsto \sqrt{x-2}$ est continue sur $[2, +\infty[$ par composée.

On en déduit que f est continue sur D_f comme produit et composée de fonctions continues.

2^{re} méthode

La fonction $x \mapsto x+1$ est continue sur $[2, +\infty[$,

La fonction $x \mapsto x-1$ est continue et non nulle sur $[2, +\infty[$,

La fonction $x \mapsto x-2$ est continue et positive sur $[2, +\infty[$ donc la fonction $x \mapsto \sqrt{x-2}$ est continue sur $[2, +\infty[$ par composée.

On en déduit que f est continue sur D_f comme produit, quotient et composée de fonctions continues.

2. 1^{re} méthode

La fonction $x \mapsto \frac{x+1}{x-1}$ est une fonction rationnelle définie sur $[2, +\infty[$ donc dérivable sur

$[2, +\infty[$

La fonction $x \mapsto x - 2$ est dérivable et strictement positive sur $]2, +\infty[$ donc la fonction $x \mapsto \sqrt{x - 2}$ est dérivable sur $]2, +\infty[$ par composée.

On en déduit que f est dérivable sur $]2, +\infty[$ comme produit et composée de fonctions dérivables.

2^{re} méthode

La fonction $x \mapsto x + 1$ est dérivable sur $[2, +\infty[$

La fonction $x \mapsto x - 1$ est dérivable et non nulle sur $]2, +\infty[$

La fonction $x \mapsto x - 2$ est dérivable et strictement positive sur $]2, +\infty[$ donc la fonction $x \mapsto \sqrt{x - 2}$ est dérivable sur $]2, +\infty[$ par composée.

On en déduit que f est dérivable sur $]2, +\infty[$ comme produit, quotient et composée de fonctions dérivables.

$$3. \forall x > 2, f'(x) = \frac{-2}{(x-1)^2} \times \sqrt{x-2} + \frac{1}{2\sqrt{x-2}} \times \frac{x+1}{x-1}$$

$$\text{Soit } f'(x) = \frac{x^2 - 4x + 7}{2(x-1)^2 \sqrt{x-2}}$$

□

Dérivée et sens de variations

Théorème 37

Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I .

- f est strictement croissante sur I si et seulement si : $\forall x \in I, f'(x) \geq 0$ et f' ne s'annule qu'en un nombre fini de points de I .
- f est strictement décroissante sur I si et seulement si : $\forall x \in I, f'(x) \leq 0$ et f' ne s'annule qu'en un nombre fini de points de I .
- f est croissante sur I si et seulement si : $\forall x \in I, f'(x) \geq 0$.
- f est décroissante sur I si et seulement si : $\forall x \in I, f'(x) \leq 0$.

Signe d'une fonction à partir de ses variations

Les cas classiques :

x	...	α	...
$f'(x)$	-	0	+
$f(x)$	$\searrow \quad f(\alpha) \geq 0 \quad \nearrow$		

Si $f(x)$ admet un minimum positif sur I alors f est positive sur I .

x	...	α	...
$f'(x)$	+	0	-
$f(x)$	$\nearrow f(\alpha) \leq 0 \searrow$		

Si $f(x)$ admet un maximum négatif sur I alors f est négative sur I .

x	...	α	...
$f'(x)$	+		
$f(x)$	$\nearrow 0 \searrow$		

$f(x)$ est négatif si $x \leq \alpha$.

$f(x)$ est positif si $x \geq \alpha$.

x	...	α	...
$f'(x)$	-		
$f(x)$	$\searrow 0 \nearrow$		

$f(x)$ est positif si $x \leq \alpha$.

$f(x)$ est négatif si $x \geq \alpha$.

Dérivées successives

Définition 38

Soit f une fonction dérivable sur I , sa fonction dérivée f' est appelée *fonction dérivée première* et est notée $f^{(1)}$.

Si f' est dérivable sur I , on dit que f est deux fois dérivable alors dans ce cas la fonction dérivée de f' c'est à dire $(f')'$ est appelée *fonction dérivée seconde* de f et est notée f'' ou $f^{(2)}$.

Si f'' est à son tour dérivable sur I , alors sa fonction dérivée est appelée *fonction dérivée troisième* de f et est notée f''' ou $f^{(3)}$.

Par itération si la dérivée n -ième de f existe, on la note $f^{(n)}$.

Exemple 39

$$f(x) = x \sin x$$

$$f'(x) = \sin x + x \cos x, f''(x) = 2 \cos x + x \sin x, f^{(3)}(x) = -3 \sin x + x \cos x, \text{ etc.}$$

Remarque 40

· $f^{(n)}$ est aussi appelée *dérivée d'ordre n de f* .

· En **Physique** $f', f'', \dots, f^{(n)}$ sont notées respectivement $\frac{df}{dx}, \frac{d^2f}{dx^2}, \dots, \frac{d^nf}{dx^n}$.

Notion de différentielle

Une petite variation Δx de la variable x provoque une petite variation $\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x)$ des images.

Lorsque Δx est voisin de 0, on assimile $dx = \Delta x$ et on peut écrire : $\frac{dy}{dx} = f'(x)$ ou $dy = f'(x)dx$ ou $dy = f'(x)\Delta x$.

Exemple 41

Pour la fonction $y = 2x^2 - x$ avec $x = 1$ et $\Delta x = 0,01$

Vérifier que la différentielle $dy = 0,03$ et l'accroissement $\Delta y = 0,0302$

Position d'une courbe par rapport à sa tangente

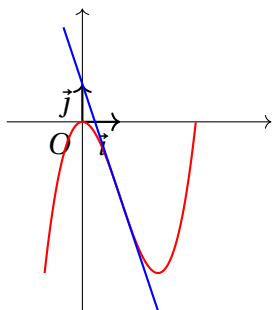
Nous admettons le résultat suivant :

Si f est une fonction deux fois dérivable sur I et si f'' est négative sur I , alors la courbe \mathcal{C} de f est en dessous de toutes ses tangentes. On dit que \mathcal{C} est **concave**.

Si f est une fonction deux fois dérivable sur I et si f'' est positive sur I , alors la courbe \mathcal{C} de f est en dessus de toutes ses tangentes. On dit que \mathcal{C} est **convexe**.

Point d'inflexion**Définition 42**

On dit que la courbe de f admet un point d'inflexion d'abscisse x_0 si la courbe y traverse sa tangente.



La courbe traverse sa tangente (en bleu).

Théorème 43

Si f est deux fois dérivable sur un intervalle ouvert I contenant x_0 et si f'' s'annule en changeant de signe en x_0 alors le point de la courbe d'abscisse x_0 est un **un point d'inflexion**.

Exemple 44

Reprenons l'exemple précédent $f : x \mapsto x^3 - 3x^2$

f est dérivable sur \mathbb{R} car fonction polynôme.

On a $f'(x) = 6x^2 - 6x$ et $f''(x) = 6x - 6$

$f''(x) = 0 \iff x = 1$

x	$-\infty$	1	$+\infty$
signe de $f''(x)$	+	0	-

D'après le tableau de signes, f'' s'annule en 1 en changeant de signe; donc le point $(1, -2)$ est un point d'inflexion de la courbe.

Inégalité des accroissements finis

Nous admettons le théorème de l'inégalité des accroissements finis et nous donnons ici les deux formes.

Théorème 45**Première forme**

Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I . On suppose qu'il existe deux réels m et M tels que : $m \leq f'(x) \leq M$ pour tout $x \in I$.

Alors pour tous a et b de I ($b > a$) on a : $m(b-a) \leq f(b) - f(a) \leq M(b-a)$

Deuxième forme

Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I . On suppose qu'il existe un réel M tel que : $|f'(x)| \leq M$ pour tout $x \in I$.

Alors pour tous a et b de I on a : $|f(b) - f(a)| \leq M|b - a|$

Exercice 46

Soit f la fonction définie sur $\left[0, \frac{\pi}{4}\right]$ par $f(x) = \sin x$

Démontrer que $\forall x \in \left[0, \frac{\pi}{4}\right]$ on a : $\frac{\sqrt{2}}{2}x \leq \sin x \leq x$

Solution. La fonction f est dérivable sur $I = \left[0, \frac{\pi}{4}\right]$ et $\forall x \in I$ on a : $f'(x) = \cos x$

Or $\forall x \in \left[0, \frac{\pi}{4}\right]$ on a $\frac{\sqrt{2}}{2} \leq \cos x \leq 1$ donc pour $a = 0$ et $b = x \in I$,

le T.I.A.F donne : $-1 \times \frac{\sqrt{2}}{2}(x-0) \leq \sin x - \sin 0 \leq 1 \times (x-0)$

d'où $\frac{\sqrt{2}}{2}x \leq \sin x \leq x$. □

VI - Théorème des valeurs intermédiaires

Théorème 47 (T.V.I)

Soit f une fonction **continue** sur un intervalle $[a, b]$.

Pour tout nombre réel β compris entre $f(a)$ et $f(b)$, il existe **au moins** un réel $\alpha \in [a, b]$ tel que $f(\alpha) = \beta$.

Conséquence 1

Si f une fonction **continue et strictement monotone** sur l'intervalle $[a, b]$ alors pour tout nombre réel β compris entre $f(a)$ et $f(b)$, il existe **un unique** un réel $\alpha \in [a, b]$ tel que $f(\alpha) = \beta$.

Conséquence 2

a, b, c et d désignent soit des réels, soit $+\infty$, soit $-\infty$.

Soit f une fonction **continue et strictement monotone** sur l'intervalle $]a, b[$ telle que :

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = c \quad \text{et} \quad \lim_{x \rightarrow b} f(x) = d$$

Alors pour tout nombre réel β compris entre c et d , l'équation $f(x) = \beta$ admet une solution unique $\alpha \in]a, b[$.

Exercice 48

Soit f la fonction définie par $f(x) = x^3 + x + 1$.

1. Etudier les variations de f .
2. Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une seule solution α dans \mathbb{R} .
En déduire que $\alpha \in]-1, 0[$
3. Déterminer un encadrement de α d'amplitude 0,01.

Solution. 1. f est définie, continue et dérivable sur \mathbb{R} .

$f'(x) = 3x^2 + 1 > 0 \forall x \in \mathbb{R}$ Donc f est strictement croissante sur \mathbb{R}

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x^3 + x + 1 = \lim_{x \rightarrow +\infty} x^3 = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} x^3 + x + 1 = \lim_{x \rightarrow -\infty} x^3 = -\infty$$

x	$-\infty \quad +\infty$
$f'(x)$	$+$
$f(x)$	$-\infty \quad +\infty$

2. f est continue et strictement croissante sur \mathbb{R} à valeurs dans \mathbb{R} . Or $0 \in \mathbb{R}$ donc d'après la conséquence du T.V.I il existe un unique réel α tel que $f(\alpha) = 0$.
De plus $f(-1)f(0) = -1 \times 1 < 0$ donc

$$f(-1) < 0 < f(0)$$

$$\Leftrightarrow f(-1) < f(\alpha) < f(0)$$

$$\Leftrightarrow -1 < \alpha < 0 \quad \text{car } f \text{ est strictement croissante.}$$

3. Encadrement de α d'amplitude 0,01 par **la méthode du balayage**.
• Recherchons d'abord un encadrement de α par deux décimaux consécutifs d'ordre 1.
Calculons de proche en proche les images par f des nombres décimaux d'ordre 1 de l'intervalle $[-1, 0[$ jusqu'à ce qu'on observe un changement de signe.

x	-0,9	-0,8	-0,7	-0,6	-0,5	-0,4	-0,3	-0,2	-0,1
$f(x)$	-	-	-	+					

On obtient $-0,7 < \alpha < -0,6$

- Recherchons ensuite un encadrement de α par deux décimaux consécutifs d'ordre 2.
Calculons de proche en proche les images par f des nombres décimaux d'ordre 2 de l'intervalle $]-0,7, -0,6[$ jusqu'à ce qu'on observe un changement de signe.

x	-0,69	-0,68	-0,67	-0,66	-0,65	-0,64	-0,63	-0,62	-0,61
$f(x)$	-	+							

On obtient $-0,69 < \alpha < -0,68$

□

Conséquence 3

Si f est **continue et strictement monotone** sur l'intervalle $[a, b]$ et si $f(a)f(b) < 0$
Alors l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution $\alpha \in [a, b]$.

Remarque 49

Pour montrer que l'équation $f(x) = x$ admet une unique solution dans l'intervalle I ; on pose $g(x) = f(x) - x$ et on applique le T.V.I à la fonction g sur l'intervalle I .

Exemple 50

Montrons que l'équation $\cos x = x$ admet une unique solution α telle que $\frac{\pi}{6} \leq \alpha \leq \frac{\pi}{4}$.

Réponse

Remarquons que $\cos x = x \Leftrightarrow \cos x - x = 0$

Posons la fonction $f(x) = \cos x - x$ pour $x \in \left[\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{4}\right]$.

f est dérivable sur $\left[\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{4}\right]$ comme somme de deux fonctions dérivables.

Pour $x \in \left[\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{4}\right]$, $f'(x) = -\sin x - 1 < 0$; donc f est strictement décroissante.

De plus $f\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\pi}{6} > 0$ et $f\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\pi}{4} < 0$.

Donc f est continue et strictement décroissante sur l'intervalle $\left[\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{4}\right]$

et $f\left(\frac{\pi}{6}\right)f\left(\frac{\pi}{4}\right) < 0$ d'où l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution $\alpha \in \left[\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{4}\right]$.

VII - Fonction réciproque d'une fonction continue et strictement monotone

Théorème 51 (Théorème de la bijection)

Soit f une fonction continue et strictement monotone sur l'intervalle I ; alors f réalise une bijection de I vers l'intervalle $f(I)$.

En plus sa bijection réciproque f^{-1} est continue et strictement monotone sur l'intervalle $f(I)$ et a le même sens de variation que f .

Les courbes représentatives de f et f^{-1} , dans un repère orthonormé sont symétriques par rapport à la droite d'équation $y = x$ (la première bissectrice du repère).

• Si de plus f est dérivable sur I et f' ne s'annule pas sur I alors f^{-1} dérivable sur $f(I)$ et

$$(f^{-1})'(y) = \frac{1}{f'(f^{-1}(y))} \quad \forall y \in f(I)$$

Remarque 52

Posons $f(a) = b$

Si f est dérivable en a et $f'(a) \neq 0$ alors f^{-1} est dérivable en b et $(f^{-1})'(b) = \frac{1}{f'(a)}$.

Attention

Si f est dérivable en a et $f'(a) = 0$ ou n'existe pas alors f^{-1} n'est pas dérivable en b .

Exercice 53

Soit f la fonction définie par $f(x) = 4x^2 + 4x + 2$.

1. Etablir le tableau de variations de f .
2. (a) Soit g la restriction de f à l'intervalle $\left[-\frac{1}{2}, +\infty\right]$. Montrer que g réalise une bijection de $\left[-\frac{1}{2}, +\infty\right]$ vers un intervalle J à préciser.
 (b) Justifier que g^{-1} est dérivable en 2 puis calculer $(g^{-1})'(2)$.

Solution. 1. f est définie, continue et dérivable sur \mathbb{R} .

$$f'(x) = 8x + 4 \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} 4x^2 + 4x + 2 = \lim_{x \rightarrow +\infty} 4x^2 = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} 4x^2 + 4x + 2 = \lim_{x \rightarrow -\infty} 4x^2 = +\infty$$

x	$-\infty$	$-\frac{1}{2}$	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	0	$+$
$f(x)$	\searrow	1	\nearrow

2. (a) g est continue et strictement croissante sur $\left[-\frac{1}{2}, +\infty\right]$ donc réalise une bijection

$$\left[-\frac{1}{2}, +\infty\right] \text{ de vers } g\left(\left[-\frac{1}{2}, +\infty\right]\right)$$

$$\text{Or } g\left(\left[-\frac{1}{2}, +\infty\right]\right) = \left[g\left(-\frac{1}{2}\right), \lim_{x \rightarrow +\infty} g(x)\right] = [1, +\infty[$$

$$\text{D'où } J = [1, +\infty[.$$

- (b) Pour répondre à cette question, il faut calculer l'antécédent de 2 par g .

$$g(x) = 2 \Leftrightarrow 4x^2 + 4x + 2 = 2 \Leftrightarrow 4x^2 + 4x = 0 \Leftrightarrow x = 0 \text{ ou } x = -1$$

$$\text{Le seul antécédent dans } \left[-\frac{1}{2}, +\infty\right] \text{ est } 0.$$

$$\text{Or } g \text{ est dérivable en } 0 \text{ et } g'(0) = f'(0) = 4 \neq 0 \text{ donc } g^{-1} \text{ est dérivable en } 2.$$

$$\text{On a } (g^{-1})'(2) = \frac{1}{g'(0)} = \frac{1}{4}.$$

□