Limites (TS2)

Exercice 1
Vrai ou faux ?

1. Si $\lim\limits_{x\to a} g(x) = a$ et $\lim\limits_{x\to b} f(x) = a$ alors $\lim\limits_{x\to b} (g\circ f)(x) = a$.
2. Soit la fonction u telle que $x-2 \leq u(x) \leq x+3$ pour tout $x > 1$. Alors $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{u(x)}{\sqrt{x}} = +\infty$.
3. Si une fonction f définie et strictement croissante sur $\mathbb{R}$ telle que : $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = 0$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 1$ alors :

   a) $\lim\limits_{x\to+\infty} f(-x+1) = 0$ **b)** $\lim\limits_{x\to 0^+} f\left(x+\dfrac{1}{x}\right) = 1$ **c)** $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{f(x)+x}{f(|x|)-1} = +\infty$.

Exercice 2
Étudier les limites suivantes.

1. $\lim\limits_{x\to+\infty} \sin\dfrac{\pi}{x}$
2. $\lim\limits_{x\to\infty} x\sin\dfrac{\pi}{x}$
3. $\lim\limits_{x\to-\infty} \sqrt{\dfrac{2x^2}{1-x}}$
4. $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(x-\sqrt{x}+\dfrac{1}{x}\right)^3$
5. $\lim\limits_{x\to+\infty} x\left(\sqrt{\dfrac{x}{x+1}}-1\right)$

Exercice 3
Calculer la limite suivante. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{x+4}-2}{x}$
En déduire :

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{\sqrt{4+\cos x}-2}{\cos x} \quad \text{et} \quad \lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{\sqrt{4+\sin x}-2}{x}$$

Exercice 4
On considère la fonction f définie sur $[2,\ +\infty[$ par $f(x) = \dfrac{3x+\sin x}{x-1}$
Montrer que , pour tout $x \geq 2$, $|f(x)-3| \leq \dfrac{4}{x-1}$.
En déduire la limite de f en $+\infty$?.

Exercice 5

Soit la fonction f définie par : $f : x \mapsto x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right) + 1 \quad \forall x \in \mathbb{R}^*$

1. Montrer que $\forall x \in \mathbb{R}^* \quad 1 - x^2 \leq f(x) \leq 1 + x^2$
2. En déduire :
   (a) $\lim\limits_{x \to 0} f(x)$
   (b) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{f(x)}{x^3}$
   (c) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{f(x) - 1}{x}$.

Exercice 6

Soi f une fonction définie sur $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$ telle que : $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = 0$, $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 1$, $\lim\limits_{x \to -1^-} f(x) = +\infty$ et $\lim\limits_{x \to -1^+} f(x) = -\infty$.

1. Interpréter graphiquement ces limites.
2. En déduire les limites suivantes.
   (a) $\lim\limits_{x \to +\infty} f\left(\sqrt{x}\right)$
   (b) $\lim\limits_{x \to +\infty} f\left(-1 + \dfrac{1}{x}\right)$
   (c) $\lim\limits_{x \to 0^-} f\left(\dfrac{1}{x}\right)$
   (d) $\lim\limits_{x \to -\infty} \left(\dfrac{f(x) - 1}{2f(x) + 1}\right)^2$

Exercice 7

Étudier les limites suivantes.

1. $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x^{10} - 1}{x - 1}$
2. $\lim\limits_{x \to -1} \dfrac{x\sqrt{x+2} + 1}{x + 1}$
3. $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{6}} \dfrac{2\sin x - 1}{6x - \pi}$
4. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\cos^5 x + \sin 2x - 1}{x}$

Exercice 8

Soit f une fonction définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ tel que $f(1) = 0$ et $f'(1) = -1$.

$\mathscr{C}_f$ admet une asymptote d'équation $y = 3$ en $-\infty$ et une asymptote d'équation $y = x + 4$ en $+\infty$.

1. Calculer les limites suivantes.
   (a) $\lim\limits_{x\to 0} f\left(\dfrac{x-1}{x^2}\right)$
   (b) $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{f(x)}{x+f(x)}$
   (c) $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{1}{f(x)-x+3}$

2. On considère la limite suivante $\lim\limits_{x\to +\infty} xf\left(1+\dfrac{1}{x}\right)$.
   (a) Justifier qu'il y a une présence de forme indéterminée.
   (b) En posant $X = 1+\dfrac{1}{x}$, calculer cette limite.