

## 206 Exemples d'utilisation de la notion de dimension finie en analyse.

### I - Espaces vectoriels normés

#### 1. Complétude

Soit  $(E, d)$  un espace métrique.

[DAN]  
p. 52

**Définition 1.** On dit que  $E$  est complet si toute suite de Cauchy de  $E$  est convergente dans  $E$ .

**Exemple 2.** —  $(\mathbb{R}, |.|)$  est complet.  
—  $(\mathbb{R}^p, |.|)$  est complet pour tout  $p \in \mathbb{N}^*$ .

**Proposition 3.** On suppose que  $E$  est un espace métrique complet. Soit  $A \subseteq E$ . Alors  $(A, d)$  est complet si et seulement si  $A$  est une partie fermée de  $E$ .

**Proposition 4.** On suppose que  $E$  est un espace vectoriel sur  $\mathbb{R}$  de dimension finie  $n \geq 1$  muni de la norme infinie  $\|.\|_\infty$ . Alors  $E$  est un espace vectoriel normé complet.

**Contre-exemple 5.** L'espace des fonctions polynômiales définies sur  $[-1, 1]$  et muni de la norme  $\|.\|_\infty$  n'est pas complet.

**Application 6** (Théorème du point fixe de Banach). Soient  $(E, d)$  un espace métrique complet et  $f : E \rightarrow E$  une application contractante (ie.  $\exists k \in ]0, 1[$  tel que  $\forall x, y \in E, d(f(x), f(y)) \leq k d(x, y)$ ). Alors,

$$\exists ! x \in E \text{ tel que } f(x) = x$$

De plus la suite des itérés définie par  $x_0 \in E$  et  $\forall n \in \mathbb{N}, x_{n+1} = f(x_n)$  converge vers  $x$ .

**Application 7** (Théorème de prolongement des applications uniformément continues). Soient  $(E, d_E)$  et  $(F, d_F)$  des espaces métriques. On suppose  $F$  complet. Soient  $A \subseteq E$  dense et  $f : A \rightarrow F$  une application uniformément continue. Alors, il existe une unique application  $\hat{f} : E \rightarrow F$  uniformément continue et telle que  $\hat{f}|_A = f$ .

## 2. Compacité

Soit  $(E, d)$  un espace métrique.

[DAN]  
p. 51

**Définition 8.** Un espace métrique est **compact** s'il vérifie la propriété de Bolzano-Weierstrass :

*De toute suite de l'espace on peut extraire une sous-suite convergente dans cet espace.*

**Exemple 9.** Tout segment  $[a, b]$  de  $\mathbb{R}$  est compact, mais  $\mathbb{R}$  n'est pas compact.

**Proposition 10.** (i) Un espace métrique compact est complet.  
(ii) Un espace métrique compact est borné.

**Proposition 11.** Soit  $A \subseteq E$ .

- (i) Si  $A$  est compacte, alors  $A$  est une partie fermée bornée de  $E$ .
- (ii) Si  $E$  est compact et  $A$  est fermée, alors  $A$  est compacte.

**Proposition 12.** Un produit d'espaces métriques compacts est compact pour la distance produit.

**Proposition 13.** On suppose que  $E$  est un espace vectoriel de dimension finie  $n \geq 1$  muni de la norme infinie  $\|\cdot\|_\infty$ . Les compacts de cet espace vectoriel normé sont les parties fermées et bornées.

**Application 14.** Un intervalle de  $\mathbb{R}$  est compact si et seulement si c'est un segment.

## 3. Équivalence des normes

Soit  $E$  un espace vectoriel.

[LI]  
p. 15

**Définition 15.** On dit que deux normes  $\|\cdot\|_1$  et  $\|\cdot\|_2$  sur  $E$  sont équivalentes si

$$\exists \alpha, \beta > 0 \text{ tels que } \forall x \in E, \alpha \|x\|_2 \leq \|x\|_1 \leq \beta \|x\|_2$$

*Remarque 16.* Deux normes équivalentes sur  $E$  définissent la même topologie sur  $E$ .

**Théorème 17.** En dimension finie, toutes les normes sont équivalentes.

[DEV]

Le corollaire suivant justifie l'étude de la compacité dans la Section 2.

**Corollaire 18.** Les parties compactes d'un espace vectoriel normé de dimension finie sont les parties fermées bornées.

Et le corollaire suivant justifie l'étude de la complétude dans la Section 1.

**Corollaire 19.** (i) Tout espace vectoriel de dimension finie est complet.

(ii) Tout espace vectoriel de dimension finie dans un espace vectoriel normé est fermé dans cet espace.

(iii) Si  $E$  est un espace vectoriel normé, alors toute application linéaire  $T : E \rightarrow F$  (où  $F$  désigne un espace vectoriel normé arbitraire) est continue.

**Application 20** (Théorème de d'Alembert-Gauss). Tout polynôme non constant de  $\mathbb{C}$  admet une racine dans  $\mathbb{C}$ .

[DAN]  
p. 58

**Application 21.** L'exponentielle d'une matrice est un polynôme en la matrice.

[C-G]  
p. 407

**Théorème 22** (Riesz). La boule unité fermée d'un espace vectoriel normé est compacte si et seulement s'il est dimension finie.

[LI]  
p. 17

## 4. Applications linéaires

Soient  $(E, \|\cdot\|_E)$  et  $(F, \|\cdot\|_F)$  deux espaces vectoriels normés sur  $\mathbb{K} = \mathbb{R}$  ou  $\mathbb{C}$ .

[GOU20]  
p. 48

**Notation 23.** On note  $L(E, F)$  l'ensemble des applications linéaires de  $E$  dans  $F$  et  $\mathcal{L}(E, F)$  l'ensemble des applications linéaires continues de  $E$  dans  $F$ . Si  $E = F$ , on note  $L(E, F) = L(E)$  et  $\mathcal{L}(E, F) = \mathcal{L}(E)$ .

**Théorème 24.** Soit  $f \in L(E, F)$ . Les assertions suivantes sont équivalentes.

- (i)  $f \in \mathcal{L}(E, F)$ .
- (ii)  $f$  est continue en 0.
- (iii)  $f$  est bornée sur  $\overline{B}(0, 1) \subseteq E$ .
- (iv)  $f$  est bornée sur  $S(0, 1) \subseteq E$ .
- (v) Il existe  $M \geq 0$  tel que  $\|f(x)\|_F \leq M\|x\|_E$ .
- (vi)  $f$  est lipschitzienne.
- (vii)  $f$  est uniformément continue sur  $E$ .

**Proposition 25.** Toute application linéaire d'un espace vectoriel normé de dimension finie dans un espace vectoriel normé quelconque est continue.

**Contre-exemple 26.** La dérivation sur  $\mathbb{K}[X]$ ,  $P \mapsto P'$  n'est pas continue.

## II - Espaces de Hilbert

### 1. Espaces de Hilbert et dimension finie

Soit  $\mathbb{K} = \mathbb{R}$  ou  $\mathbb{C}$ .

[LI]  
p. 31

**Définition 27.** Un espace vectoriel  $H$  sur le corps  $\mathbb{K}$  est un **espace de Hilbert** s'il est muni d'un produit scalaire  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  et est complet pour la norme associée  $\|\cdot\| = \sqrt{\langle \cdot, \cdot \rangle}$ .

**Exemple 28.** Tout espace préhilbertien (ie. muni d'un produit scalaire) de dimension finie est un espace de Hilbert.

**Théorème 29** (Projection sur un convexe fermé). Soit  $C \subseteq H$  un convexe fermé non-vide. Alors :

$$\forall x \in H, \exists ! y \in C \text{ tel que } d(x, C) = \inf_{z \in C} \|x - z\| = d(x, y)$$

On peut donc noter  $y = P_C(x)$ , le **projeté orthogonal de  $x$  sur  $C$** . Il s'agit de l'unique point de  $C$  vérifiant

$$\forall z \in C, \langle x - P_C(x), z - P_C(x) \rangle \leq 0$$

**Théorème 30.** Si  $F$  est un sous espace vectoriel fermé dans  $H$  (par exemple, si  $F$  est de dimension finie), alors  $P_F$  est une application linéaire continue. De plus, pour tout  $x \in H$ ,  $P_F(x)$  est l'unique point  $y \in F$  tel que  $x - y \in F^\perp$ .

**Théorème 31.** Si  $F$  est un sous espace vectoriel fermé dans  $H$  (par exemple, si  $F$  est de dimension finie), alors

$$H = F \oplus F^\perp$$

et  $P_F$  est la projection sur  $F$  parallèlement à  $F^\perp$  : c'est la **projection orthogonale** sur  $F$ .

**Remarque 32.** En reprenant les notations précédentes, en supposant  $F$  de dimension finie et en notant  $(e_1, \dots, e_n)$  une base orthonormée de  $F$ , alors

$$\forall x \in H, p_F(x) = \sum_{i=1}^n \langle x, e_i \rangle e_i$$

[BMP]  
p. 93

## 2. Séries de Fourier

**Notation 33.** — Pour tout  $p \in [1, +\infty]$ , on note  $L_p^{2\pi}$  l'espace des fonctions  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ ,  $2\pi$ -périodiques et mesurables, telles que  $\|f\|_p < +\infty$ .

— Pour tout  $n \in \mathbb{Z}$ , on note  $e_n$  la fonction  $2\pi$ -périodique définie pour tout  $t \in \mathbb{R}$  par  $e_n(t) = e^{int}$ .

[Z-Q]  
p. 73

*Remarque 34.*

$$1 \leq p < q \leq +\infty \implies L_q^{2\pi} \subseteq L_p^{2\pi} \text{ et } \|\cdot\|_p \leq \|\cdot\|_q$$

**Proposition 35.**  $L_2^{2\pi}$  est un espace de Hilbert pour le produit scalaire

$$\langle \cdot, \cdot \rangle : (f, g) \mapsto \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(t) \overline{g(t)} dt$$

**Théorème 36.** La famille  $(e_n)_{n \in \mathbb{Z}}$  est une base hilbertienne (totale et orthonormée) de  $L_2^{2\pi}$ .

[BMP]  
p. 123

**Corollaire 37.** Soit  $n \geq 1$ . On note

$$\mathcal{P}_n = \text{Vect}(e_k)_{k \in \llbracket 1, n \rrbracket}$$

le sous-espace vectoriel des polynômes trigonométriques de degré  $n$ . Alors :

- (i)  $L_2^{2\pi} = \mathcal{P}_n \oplus \mathcal{P}_n^\perp$ .
- (ii)  $P_{\mathcal{P}_n}(f) = S_n(f)$  où  $S_n(f)$  est la somme partielle d'ordre  $n$  de la série de Fourier de  $f$ .
- (iii)  $\inf_{g \in \mathcal{P}_n} \|f - g\|^2 = \|f - S_n(f)\|^2 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(t)|^2 dt - \sum_{k=-n}^n |c_k(f)|^2$  où  $c_k(f)$  est le  $k$ -ième coefficient de Fourier.

[GOU21]  
p. 270

**Application 38** (Inégalité de Beissel).

$$\sum_{k=-\infty}^{+\infty} |c_k(f)|^2 \leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(t)|^2 dt$$

*Remarque 39.* Cette inégalité est en fait une égalité : c'est l'égalité de Parseval.

**Exemple 40.** On considère  $f : x \mapsto 1 - \frac{x^2}{\pi^2}$  sur  $[-\pi, \pi]$ . Alors,

$$\frac{\pi^4}{90} = \|f\|_2^2 = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n^4}$$

### III - Calcul différentiel

#### 1. Différentielle et dérivées partielles

Soient  $(E, \|\cdot\|_E)$  et  $(F, \|\cdot\|_F)$  deux espaces vectoriels normés sur  $\mathbb{R}$ . Soient  $U \subseteq E$  ouvert et  $f : U \rightarrow F$  une application de  $U$  dans  $F$ .

[GOU20]  
p. 323

**Définition 41.**  $f$  est dite **différentiable** en un point  $a$  de  $U$  s'il existe  $\ell_a \in \mathcal{L}(E, F)$  telle que

$$f(a + h) = f(a) + \ell_a(h) + o(\|h\|_E) \text{ quand } h \rightarrow 0$$

Si  $\ell_a$  existe, alors elle est unique et on la note  $df_a$  : c'est la **différentielle** de  $f$  en  $a$ .

*Remarque 42.* — En dimension quelconque  $df_a$  dépend a priori des normes  $\|\cdot\|_E$  et  $\|\cdot\|_F$ . Cependant, en dimension finie, l'équivalence des normes implique que l'existence et la valeur de  $df_a$  ne dépend pas des normes choisies.

— La définition demande à  $\ell_a$  d'être continue. En dimension finie, le problème ne se pose donc pas.

**Exemple 43.** Si  $f$  est linéaire et continue, alors  $df_a = f$  pour tout  $a \in E$ .

On se place maintenant dans le cas où  $E = \mathbb{R}^n$ .

**Définition 44.** Soit  $a \in U$ .

— Soit  $v \in E$ . Si la fonction de la variable réelle  $\varphi : t \mapsto f(a + tv)$  est dérivable en 0, on dit que  $f$  est **dérivable en  $a$  selon le vecteur  $v$** . On note alors

$$f'_v(a) = \varphi'(0)$$

— Soit  $(e_1, \dots, e_n)$  la base canonique de  $\mathbb{R}^n$  et soit  $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$ . On dit que  $f$  admet une  **$i$ -ième dérivée partielle en  $a$**  si  $f$  est dérivable en  $a$  selon le vecteur  $e_i$ . On note alors

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(a) = f'_{e_i}(a)$$

**Proposition 45.** Une fonction différentiable en un point est dérivable selon tout vecteur en ce point.

**Contre-exemple 46.** La fonction

$$\begin{aligned} \mathbb{R}^2 &\rightarrow \mathbb{R} \\ (x, y) &\mapsto \begin{cases} \frac{y^2}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ y & \text{sinon} \end{cases} \end{aligned}$$

est dérivable selon tout vecteur au point  $(0, 0)$  mais n'est pas continue en  $(0, 0)$ .

**Théorème 47.** Si toutes les dérivées partielles de  $f$  existent et si elles sont continues en un point  $a$  de  $U$ , alors  $f$  est différentiable en  $a$  et on a

$$df_a = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i}(a) e_i^*$$

où  $(e_i^*)_{i \in \llbracket 1, n \rrbracket}$  est la base duale de la base canonique  $(e_i)_{i \in \llbracket 1, n \rrbracket}$  de  $\mathbb{R}^n$ .

**Application 48.** Soit  $a \in U$ . Si  $F = \mathbb{R}^m$ , la matrice de  $df_a$  dans les bases canoniques de  $\mathbb{R}^n$  et  $\mathbb{R}^m$  est

$$\left( \frac{\partial f_i}{\partial x_j}(a) \right)_{\substack{i \in \llbracket 1, n \rrbracket \\ j \in \llbracket 1, m \rrbracket}}$$

(où l'on a noté  $f = (f_1, \dots, f_m)$ ) : c'est la **matrice jacobienne** de  $f$  en  $a$ .

## 2. Équations différentielles linéaires

**Définition 49.** Soient  $n \in \mathbb{N}^*$ ,  $E$  un espace de Banach et  $\Omega \subseteq \mathbb{R} \times E^n$  un ouvert. Soit  $F : \Omega \times \mathbb{R}^n \rightarrow E$  une fonction.

— On appelle **équation différentielle** une équation de la forme

$$y^{(n)} = F(t, y, y', \dots, y^{(n-1)}) \quad (*)$$

(ie. une équation portant sur les dérivées d'une fonction.)

— Toute application  $\varphi : I \rightarrow E$  (où  $I$  est un intervalle de  $\mathbb{R}$ )  $n$  fois dérivable vérifiant :

- (i)  $\forall t \in I, (t, \varphi(t), \dots, \varphi^{(n-1)}(t)) \in \Omega;$
- (ii)  $\forall t \in I, F(t, \varphi(t), \dots, \varphi^{(n-1)}(t)) = \varphi^{(n)}(t);$

est une **solution** de  $(*)$ . On note  $\mathcal{S}_*$  l'ensemble des solutions de  $(*)$ .

— Une solution  $\varphi : I \rightarrow E$  de  $(*)$  est dite **maximale** s'il n'existe pas d'autre solution  $\psi : J \rightarrow E$  (où  $J$  est un intervalle de  $\mathbb{R}$ ) de  $(*)$  telle que  $I \subseteq J$ ,  $I \neq J$  et  $\psi = \varphi$  sur  $I$ .

— On appelle **problème de Cauchy** de  $(*)$  en  $(t_0, x_0, \dots, x_{n-1})$  la recherche d'une solution

$\varphi : I \rightarrow E$  de (\*) vérifiant

$$\forall t_0 \in I, \varphi(t_0) = x_0, \dots, \varphi^{(n-1)}(t_0) = x_{n-1}$$

**Définition 50.** Toute équation différentielle sur  $\mathbb{K}^n$  d'ordre  $p \geq 1$  du type

$$Y^{(p)} = A_{p-1}(t)Y^{(p-1)} + \dots + A_0(t)Y + B(t) \quad (L)$$

(où  $A_{p-1}, \dots, A_0$  sont des fonctions continues d'un intervalle  $I$  de  $\mathbb{R}$  non réduit à un point dans  $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$  et  $B : I \rightarrow \mathbb{K}^n$  est une fonction continue) est appelée **équation différentielle linéaire** d'ordre  $p$ .

Si de plus  $B = 0$ , alors (L) est qualifiée d'**homogène**.

p. 377

[DEV]

**Théorème 51** (Cauchy-Lipschitz linéaire). Soient  $A : I \rightarrow \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$  et  $B : I \rightarrow \mathbb{K}^d$  deux fonctions continues. Alors  $\forall t_0 \in I$ , le problème de Cauchy

$$\begin{cases} Y' = A(t)Y + B(t) \\ Y(t_0) = y_0 \end{cases}$$

admet une unique solution définie sur  $I$  tout entier.

[DAN]  
p. 520

**Exemple 52.** Considérons l'équation  $y' - y = 0$ . Comme la fonction nulle est solution maximale, il s'agit de l'unique solution qui s'annule sur  $\mathbb{R}$ .

[ROM19-1]  
p. 402



# Bibliographie

## Objectif agrégation

[BMP]

Vincent BECK, Jérôme MALICK et Gabriel PEYRÉ. *Objectif agrégation*. 2<sup>e</sup> éd. H&K, 22 août 2005.

<https://objectifagregation.github.io>.

## Nouvelles histoires hédonistes de groupes et de géométries

[C-G]

Philippe CALDERO et Jérôme GERMONI. *Nouvelles histoires hédonistes de groupes et de géométries. Tome 1*. Calvage & Mounet, 13 mai 2017.

<http://www.calvage-et-mounet.fr/2022/05/09/nouvelles-histoires-hedoniste-de-groupes-et-de-geometrie/>.

## Mathématiques pour l'agrégation

[DAN]

Jean-François DANTZER. *Mathématiques pour l'agrégation. Analyse et probabilités*. De Boeck Supérieur, 20 avr. 2021.

<https://www.deboecksuperieur.com/ouvrage/9782807332904-mathematiques-pour-l-agregation-analyse-et-probabilites>.

## Les maths en tête

[GOU20]

Xavier GOURDON. *Les maths en tête. Analyse*. 3<sup>e</sup> éd. Ellipses, 21 avr. 2020.

<https://www.editions-ellipses.fr/accueil/10446-les-maths-en-tete-analyse-3e-edition-9782340038561.html>.

## Les maths en tête

[GOU21]

Xavier GOURDON. *Les maths en tête. Algèbre et probabilités*. 3<sup>e</sup> éd. Ellipses, 13 juill. 2021.

<https://www.editions-ellipses.fr/accueil/13722-25266-les-maths-en-tete-algebre-et-probabilites-3e-edition-9782340056763.html>.

## Cours d'analyse fonctionnelle

[LI]

Daniel LI. *Cours d'analyse fonctionnelle. avec 200 exercices corrigés*. Ellipses, 3 déc. 2013.

<https://www.editions-ellipses.fr/accueil/6558-cours-danalyse-fonctionnelle-avec-200-exercices-corriges-9782729883058.html>.

## Éléments d'analyse réelle

[ROM19-1]

Jean-Étienne ROMBALDI. *Éléments d'analyse réelle*. 2<sup>e</sup> éd. EDP Sciences, 6 juin 2019.

<https://laboutique.edpsciences.fr/produit/1082/9782759823789/elements-d-analyse-reelle>.

Claude ZUILY et Hervé QUEFFÉLEC. *Analyse pour l'agrégation. Agrégation/Master Mathématiques*. 5<sup>e</sup> éd. Dunod, 26 août 2020.

<https://www.dunod.com/prepas-concours/analyse-pour-agregation-agregationmaster-mathematiques>.