

## 246 Séries de Fourier. Exemples et applications.

### I - Coefficients de Fourier

#### 1. Définitions

**Notation 1.** — Pour tout  $p \in [1, +\infty]$ , on note  $L_p^{2\pi}$  l'espace des fonctions  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ ,  $2\pi$ -périodiques et mesurables, telles que  $\|f\|_p < +\infty$ .

— Pour tout  $n \in \mathbb{Z}$ , on note  $e_n$  la fonction  $2\pi$ -périodique définie pour tout  $t \in \mathbb{R}$  par  $e_n(t) = e^{int}$ .

[Z-Q]  
p. 73

*Remarque 2.*

$$1 \leq p < q \leq +\infty \implies L_q^{2\pi} \subseteq L_p^{2\pi} \text{ et } \|\cdot\|_p \leq \|\cdot\|_q$$

**Proposition 3.**  $L_2^{2\pi}$  est un espace de Hilbert pour le produit scalaire

$$\langle \cdot, \cdot \rangle : (f, g) \mapsto \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(t) \overline{g(t)} dt$$

**Définition 4.** Soit  $f \in L_1^{2\pi}$ . On appelle :

— **Coefficients de Fourier complexes**, les complexes définis par

$$\forall n \in \mathbb{Z}, c_n(f) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(t) e^{-int} dt = \langle f, e_n \rangle$$

— **Coefficients de Fourier réels**, les complexes définis par

$$\forall n \in \mathbb{N}, a_n(f) = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(t) \cos(nt) dt \text{ et } \forall n \in \mathbb{N}^*, b_n(f) = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(t) \sin(nt) dt$$

[GOU20]  
p. 268

*Remarque 5.* Soit  $f \in L_1^{2\pi}$ .

- On utilise en général les coefficients réels lorsque  $f$  est à valeurs réelles.
- Si  $f$  est paire (resp. impaire), les coefficients  $b_n(f)$  (resp.  $a_n(f)$ ) sont nuls.
- $\forall n \in \mathbb{N}, a_n(f) = c_n(f) + c_{-n}(f)$  et  $\forall n \in \mathbb{N}^*, b_n(f) = i(c_n(f) - c_{-n}(f))$ .
- On pourrait plus généralement définir les coefficients de Fourier d'une fonction  $T$ -périodique pour toute période  $T > 0$ .

p. 273

**Exemple 6.** On définit  $\forall \alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}, f_\alpha : t \mapsto \cos(\alpha t)$ . Alors,

$$\forall n \in \mathbb{N}, a_n(f_\alpha) = (-1)^n \frac{2\alpha \sin(\alpha\pi)}{\pi(\alpha^2 - n^2)} \text{ et } \forall n \in \mathbb{N}^*, b_n(f_\alpha) = 0$$

## 2. Propriétés structurelles des espaces $L_p^{2\pi}$

### a. L'algèbre $L_1^{2\pi}$

**Proposition 7.** Tout comme sur  $L_1(\mathbb{R})$ , on a un opérateur de convolution sur  $L_1^{2\pi}$  :

$$\forall f, g \in L_1^{2\pi}, \forall x \in \mathbb{R}, f * g(x) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(y)g(x-y) dy$$

qui munit  $L_1^{2\pi}$  d'une structure d'algèbre normée.

[BMP]

p. 125

**Proposition 8.** Soient  $f \in L_1^{2\pi}, a \in \mathbb{R}$  et  $k, n \in \mathbb{Z}$ .

- (i)  $f * e_n = c_n(f) e_n$ .
- (ii)  $|c_n(f)| \leq \|f\|_1$ .
- (iii)  $c_{-n}(f) = c_n(x \mapsto f(-x))$ .
- (iv)  $c_n(\bar{f}) = \overline{c_{-n}(f)}$ .
- (v)  $c_n(x \mapsto f(x-a)) = e_n(a) c_n(f)$ .
- (vi)  $c_n(e_k f) = c_{n-k}(f) e_n$ .
- (vii)  $c_n(f') = i n c_n(f)$  si  $f$  est continue et  $\mathcal{C}^1$  par morceaux.

[AMR08]

p. 174

**Lemme 9** (Riemann-Lebesgue). Soit  $f \in L_1^{2\pi}$ . Alors  $(c_n(f))$  tend vers 0 lorsque  $n$  tend vers  $\pm\infty$ .

[BMP]

p. 126

**Théorème 10.** Soit  $c_0$  l'espace des suites de complexes qui convergent vers 0 en  $-\infty$  et  $+\infty$ . L'application

$$\mathcal{F} : \begin{array}{ccc} L_1^{2\pi} & \rightarrow & c_0 \\ f & \mapsto & (c_n(f))_{n \in \mathbb{Z}} \end{array}$$

est un morphisme d'algèbres de  $(L_1^{2\pi}, +, *, \|\cdot\|_1)$  dans  $(c_0, +, \cdot, \|\cdot\|_\infty)$  continu, de norme 1.

## b. Propriétés hilbertiennes de $L_2^{2\pi}$

**Théorème 11.** Soit  $H$  un espace de Hilbert et  $(\epsilon_n)_{n \in I}$  une famille orthonormée dénombrable de  $H$ . Les propriétés suivantes sont équivalentes :

- (i) La famille orthonormée  $(\epsilon_n)_{n \in I}$  est une base hilbertienne de  $H$ .
- (ii)  $\forall x \in H, x = \sum_{n=0}^{+\infty} \langle x, \epsilon_n \rangle \epsilon_n$ .
- (iii)  $\forall x \in H, \|x\|_2 = \sum_{n=0}^{+\infty} |\langle x, \epsilon_n \rangle|^2$ .

p. 109

*Remarque 12.* L'égalité du Théorème 11 Point (iii) est appelée **égalité de Parseval**.

**Théorème 13.** La famille  $(e_n)_{n \in \mathbb{Z}}$  est une base hilbertienne de  $L_2^{2\pi}$ .

p. 123

**Corollaire 14.**

$$\forall f \in L_2^{2\pi}, f = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n(f) e_n$$

**Exemple 15.** On considère  $f : x \mapsto 1 - \frac{x^2}{\pi^2}$  sur  $[-\pi, \pi]$ . Alors,

$$\frac{\pi^4}{90} = \|f\|_2 = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n^4}$$

[GOU20]  
p. 272

*Remarque 16.* L'égalité du Corollaire 14 est valable dans  $L_2^{2\pi}$ , elle signifie donc que

$$\left\| \sum_{n=-N}^N c_n(f) e_n - f \right\|_2 \xrightarrow{N \rightarrow +\infty} 0$$

[BMP]  
p. 124

## 3. Séries de Fourier

**Définition 17.** Soit  $f \in L_1^{2\pi}$ . On appelle **série de Fourier** associée à  $f$  la série  $(S_N(f))$  définie par

$$\forall N \in \mathbb{N}, S_N(f) = \sum_{n=-N}^N c_n(f) e_n \stackrel{(*)}{=} \frac{a_0(f)}{2} + \sum_{n=1}^N (a_n(f) \cos(nx) + b_n(f) \sin(nx))$$

[GOU20]  
p. 269

*Remarque 18.* L'égalité  $(*)$  de la définition précédente est justifiée car,

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall x \in \mathbb{R}, c_n(f) e^{inx} + c_{-n}(f) e^{-inx} = a_n(f) \cos(nx) + b_n(f) \sin(nx)$$

## II - Divers modes de convergence

Nous avons vu que pour  $f \in L_2^{2\pi}$ , il y a convergence dans  $L_2^{2\pi}$  de  $(S_N(f))$  vers  $f$ . Cette section est dédiée à l'étude d'autres modes de convergence. En particulier, nous allons nous poser plusieurs questions :

[AMR08]  
p. 178

- Pour quelles fonctions  $f$  y a-t-il convergence de  $(S_N(f))$ ?
- Y a-t-il convergence vers  $f$ ?
- De quel type de convergence s'agit-il?

### 1. Convergence au sens de Cesàro

**Définition 19.** Pour tout  $N \in \mathbb{N}$ , la fonction  $D_N = \sum_{n=-N}^N e_n$  est appelé **noyau de Dirichlet** d'ordre  $N$ .

p. 184

**Proposition 20.** Soit  $N \in \mathbb{N}$ .

- (i)  $D_N$  est une fonction paire,  $2\pi$ -périodique, et de norme 1.
- (ii)

$$\forall x \in \mathbb{R} \setminus 2\pi\mathbb{Z}, D_N(x) = \frac{\sin\left(\left(N + \frac{1}{2}\right)x\right)}{\sin\left(\frac{x}{2}\right)}$$

- (iii) Pour tout  $f \in L_1^{2\pi}$ ,  $S_N(f) = f * D_N$ .

**Définition 21.** Pour tout  $N \in \mathbb{N}$ , la fonction  $K_N = \frac{1}{N} \sum_{j=0}^{N-1} D_j$  est appelé **noyau de Fejér** d'ordre  $N$ .

**Notation 22.** Pour tout  $N \in \mathbb{N}^*$ , on note  $\sigma_N = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} S_k(f)$  la somme de Cesàro d'ordre  $N$  de la série de Fourier d'une fonction  $f \in L_1^{2\pi}$ .

**Proposition 23.** Soient  $N \in \mathbb{N}^*$  et  $f \in L_1^{2\pi}$ .

- (i)  $K_N$  est une fonction positive et de norme 1.
- (ii)

$$\forall x \in \mathbb{R} \setminus 2\pi\mathbb{Z}, K_N(x) = \frac{1}{N} \left( \frac{\sin\left(\frac{Nx}{2}\right)}{\sin\left(\frac{x}{2}\right)} \right)^2$$

- (iii)  $K_N = \sum_{n=-N}^N \left(1 - \frac{|n|}{N}\right) e_n$ .
- (iv)  $\sigma_N(f) = f * K_N$ .

**Théorème 24** (Fejér). Soit  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$  une fonction  $2\pi$ -périodique.

- (i) Si  $f$  est continue, alors  $\|\sigma_N(f)\|_\infty \leq \|f\|_\infty$  et  $(\sigma_N(f))$  converge uniformément vers  $f$ .
- (ii) Si  $f \in L_p^{2\pi}$  pour  $p \in [1, +\infty[$ , alors  $\|\sigma_N(f)\|_p \leq \|f\|_p$  et  $(\sigma_N(f))$  converge vers  $f$  pour  $\|\cdot\|_p$ .

**Corollaire 25.** L'espace des polynômes trigonométriques  $\{\sum_{n=-N}^N c_n e_n \mid (c_n) \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}, N \in \mathbb{N}\}$  est dense dans l'espace des fonction continues  $2\pi$ -périodiques pour  $\|\cdot\|_\infty$  et est dense dans  $L_p^{2\pi}$  pour  $\|\cdot\|_p$  avec  $p \in [1, +\infty[$ .

**Application 26.** L'application  $\mathcal{F}$  du Théorème 10 est injective.

[BMP]  
p. 128

**Application 27** (Théorème de Weierstrass). Toute fonction continue sur un intervalle compact  $[a, b]$  est limite uniforme sur  $[a, b]$  d'une suite de polynômes.

[AMR08]  
p. 192

## 2. Convergence ponctuelle

**Théorème 28** (Dirichlet). Soient  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$   $2\pi$ -périodique, continue par morceaux sur  $\mathbb{R}$  et  $t_0 \in \mathbb{R}$  tels que la fonction

$$h \mapsto \frac{f(t_0 + h) + f(t_0 - h) - f(t_0^+) - f(t_0^-)}{h}$$

est bornée au voisinage de 0. Alors,

$$S_N(f)(t_0) \xrightarrow{N \rightarrow +\infty} \frac{f(t_0^+) + f(t_0^-)}{2}$$

[GOU20]  
p. 271

**Contre-exemple 29.** Soit  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  paire,  $2\pi$ -périodique telle que :

$$\forall x \in [0, \pi], f(x) = \sum_{p=1}^{+\infty} \frac{1}{p^2} \sin\left((2^{p^3} + 1)\frac{x}{2}\right)$$

Alors  $f$  est bien définie et continue sur  $\mathbb{R}$ . Cependant, sa série de Fourier diverge en 0.

**Corollaire 30.** Soient  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$   $2\pi$ -périodique,  $\mathcal{C}^1$  par morceaux sur  $\mathbb{R}$ . Alors,

$$\forall x \in \mathbb{R}, S_N(f)(x) \xrightarrow{N \rightarrow +\infty} \frac{f(x^+) + f(x^-)}{2}$$

En particulier, si  $f$  est continue en  $x$ , la série de Fourier de  $f$  converge vers  $f(x)$ .

**Exemple 31.** En reprenant la fonction de l'Exemple 15,

$$\forall x \in [-\pi, \pi], f(x) = \frac{2}{3} - \frac{4}{\pi^2} \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{\cos(nx)}{n^2}$$

### 3. Convergence normale

**Proposition 32.** Soit  $f \in L_1^{2\pi}$  et telle que sa série de Fourier converge normalement. Alors, la somme  $g : x \mapsto \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n(f) e_n(x)$  est une fonction continue  $2\pi$ -périodique presque partout égale à  $f$ . De plus, si  $f$  est continue, l'égalité  $f(x) = g(x)$  est vraie pour tout  $x$ .

[BMP]  
p. 128

**Proposition 33.** Soit  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$   $2\pi$ -périodique continue et  $\mathcal{C}^1$  par morceaux sur  $\mathbb{R}$ . Alors  $(S_N(f))$  converge normalement vers  $f$ .

**Application 34** (Développement eulérien de la cotangente).

$$\forall u \in \mathbb{R} \setminus \pi\mathbb{Z}, \cotan(u) = \frac{1}{u} + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2u}{u^2 - n^2\pi^2}$$

[AMR08]  
p. 211

## III - Applications

### 1. Calcul de sommes, de produits et d'intégrales

**Application 35.** En utilisant l'Exemple 31, avec  $x = \pi$ , on retrouve

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$$

[GOU20]  
p. 272

**Application 36.**

$$\forall t \in ]-\pi, \pi[, \sin(t) = t \prod_{n=1}^{+\infty} \left(1 - \frac{t^2}{n^2\pi^2}\right)$$

**Application 37** (Sommes de Gauss).

$$\forall m \in \mathbb{N}^*, \sum_{n=0}^{m-1} e^{\frac{2i\pi n^2}{m}} = \frac{1 + i^{-m}}{1 + i^{-1}}$$

[AMR08]  
p. 221

**Application 38** (Intégrales de Fresnel).

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \cos(2\pi u^2) du = \int_{-\infty}^{+\infty} \sin(2\pi u^2) du = \frac{1}{2}$$

**Application 39.** Soit  $a > 0$ . En considérant la fonction  $t \mapsto \frac{1}{\cosh(a) + \cos(t)}$ , on en déduit que

[AMR11]  
p. 325

$$\forall n \in \mathbb{N}, \int_0^\pi \frac{\cos(nt)}{\cosh(a) + \cos(t)} dt = (-1)^n \frac{\pi e^{-na}}{\sinh(a)}$$

## 2. Équations fonctionnelles

[DEV]

**Théorème 40** (Formule sommatoire de Poisson). Soit  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$  une fonction de classe  $\mathcal{C}^1$  telle que  $f(x) = O\left(\frac{1}{x^2}\right)$  et  $f'(x) = O\left(\frac{1}{x^2}\right)$  quand  $|x| \rightarrow +\infty$ . Alors :

[GOU20]  
p. 284

$$\forall x \in \mathbb{R}, \sum_{n \in \mathbb{Z}} f(x+n) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \hat{f}(2\pi n) e^{2i\pi n x}$$

où  $\hat{f}$  désigne la transformée de Fourier de  $f$ .

**Application 41** (Identité de Jacobi).

$$\forall s > 0, \sum_{n=-\infty}^{+\infty} e^{-\pi n^2 s} = \frac{1}{\sqrt{s}} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{\pi n^2}{s}}$$

## 3. Inégalités remarquables

**Application 42** (Inégalité isopérimétrique). Soit  $\gamma : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^2$  une courbe de Jordan (ie.  $\gamma(0) = \gamma(1)$ ,  $\gamma$  est injective sur  $]0, 1[$  et  $\gamma' \neq 0$ ) de classe  $\mathcal{C}^1$  de longueur  $L$  et enfermant une surface  $S$ . Alors,

[AMR08]  
p. 215

$$S \leq \frac{L^2}{4\pi}$$

avec égalité si et seulement si  $\gamma$  définit un cercle.

**Application 43** (Inégalité de Wirtinger). Soit  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$  de classe  $\mathcal{C}^1$  telle que  $f(a) = f(b) = 0$ . Alors,

$$\int_a^b |f(x)|^2 dx \leq \frac{(b-a)^2}{\pi} \int_a^b |f'(x)|^2 dx$$

De plus, la constante  $\frac{(b-a)^2}{\pi}$  est optimale.

**Application 44** (Inégalité de Bernstein). Soient  $\lambda > 0$  et  $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}$  distincts et tels que  $\max_{j \in \llbracket 1, n \rrbracket} |\lambda_j| < \lambda$ . On définit

$$h : t \mapsto \sum_{j=1}^n a_j e^{i\lambda_j t} \text{ où } a_1, \dots, a_n \in \mathbb{C}$$

Alors  $h$  et sa dérivée  $h'$  sont bornées et on a :

$$\|h'\|_{\infty} \leq \lambda \|h\|_{\infty}$$



## Annexes

Hypothèses sur $f$	Convergence de sa série de Fourier ( $S_N(f)$ )
$f \in L_2^{2\pi}$	Convergence pour $\ \cdot\ _2$ .
$f$ continue	Convergence uniforme au sens de Cesàro.
$f \in L_p^{2\pi}$ ( $p \in L_p[1, +\infty[$ )	Convergence pour $\ \cdot\ _p$ au sens de Cesàro.
$f \in \mathcal{C}^1$ par morceaux	Convergence ponctuelle vers une valeur moyenne.
$f$ continue et $\mathcal{C}^1$ par morceaux	Convergence normale.

FIGURE 1 – Convergence d'une série de Fourier selon les hypothèses sur la fonction de départ.

# Bibliographie

## **Analyse de Fourier dans les espaces fonctionnels**

[AMR08]

Mohammed EL-AMRANI. *Analyse de Fourier dans les espaces fonctionnels. Niveau M1*. Ellipses, 28 août 2008.

<https://www.editions-ellipses.fr/accueil/3908-14232-analyse-de-fourier-dans-les-espaces-fonctionnels-niveau-m1-9782729839031.html>.

## **Suites et séries numériques, suites et séries de fonctions**

[AMR11]

Mohammed EL-AMRANI. *Suites et séries numériques, suites et séries de fonctions*. Ellipses, 15 nov. 2011.

<https://www.editions-ellipses.fr/accueil/3910-14234-suites-et-series-numeriques-suites-et-series-de-fonctions-9782729870393.html>.

## **Objectif agrégation**

[BMP]

Vincent BECK, Jérôme MALICK et Gabriel PEYRÉ. *Objectif agrégation*. 2<sup>e</sup> éd. H&K, 22 août 2005.

<https://objectifagregation.github.io>.

## **Les maths en tête**

[GOU20]

Xavier GOURDON. *Les maths en tête. Analyse*. 3<sup>e</sup> éd. Ellipses, 21 avr. 2020.

<https://www.editions-ellipses.fr/accueil/10446-les-maths-en-tete-analyse-3e-edition-9782340038561.html>.

## **Analyse pour l'agrégation**

[Z-Q]

Claude ZUILY et Hervé QUEFFÉLEC. *Analyse pour l'agrégation. Agrégation/Master Mathématiques*. 5<sup>e</sup> éd. Dunod, 26 août 2020.

<https://www.dunod.com/prepas-concours/analyse-pour-agregation-agregationmaster-mathematiques>.