Limites

I - Limite d'une fonction composée

Soient a , b et c des réels ou $+\infty$ ou $-\infty$.

Propriété 1

Si $\lim_{x\to a} f(x) = b$ et $\lim_{x\to b} g(x) = c$ alors $\lim_{x\to a} g(f(x)) = c$

Exemple 2

Calculons $\lim_{x\to+\infty} \cos\left(\dfrac{\pi x}{2x+1}\right)$

La fonction $x \mapsto \cos\left(\dfrac{\pi x}{2x+1}\right)$ est la composée $g\circ f$ où $f : x \mapsto \dfrac{\pi x}{2x+1}$ et $g : x \mapsto \cos x$

$\lim_{x\to+\infty} \dfrac{\pi x}{2x+1} = \lim_{x\to+\infty} \dfrac{\pi x}{2x} = \dfrac{\pi}{2}$ et $\lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \cos x = 0$

Donc $\lim_{x\to+\infty} \cos\left(\dfrac{\pi x}{2x+1}\right) = 0$

Remarque 3

En pratique pour calculer $\lim_{x\to a} g(f(x))$ on peut faire un changement de variable en posant par exemple $X = f(x)$ et la limite devient $\lim_{X\to b} g(X)$.

L'objectif du changement de variable dans un calcul de limites lorsqu'on est en présence d'une forme indéterminée(FI), est de se ramener à une limite connue (limite usuelle ou limite déjà calculée)

Exemple 4

Pour calculer $\lim_{x\to+\infty} x\sin\left(\dfrac{\pi}{x}\right)$

On peut poser $X = \dfrac{\pi}{x}$ et la limite devient : $\lim_{X\to0} \pi\dfrac{\sin X}{X} = \pi$

Donc $\lim_{x\to+\infty} x\sin\left(\dfrac{\pi}{x}\right) = \pi$

II - Théorèmes de comparaison

Théorème 1 (Minoration et majoration)

Théorème 5
Soit f et g deux fonctions telles que $f(x) \leq g(x)$.

— Si $\lim\limits_{x \to a} f(x) = +\infty$ alors $\lim\limits_{x \to a} g(x) = +\infty$
— Si $\lim\limits_{x \to a} g(x) = -\infty$ alors $\lim\limits_{x \to a} f(x) = -\infty$

Théorème 2 (ou théorème des gendarmes)

Théorème 6
Soient f, g et h trois fonctions et l un réel tels que $h(x) \leq f(x) \leq g(x)$.
Si $\lim\limits_{x \to a} h(x) = \lim\limits_{x \to a} g(x) = l$ alors $\lim\limits_{x \to a} f(x) = l$

Théorème 3

Théorème 7
Soit f et g deux fonctions et l un réel telles que $|f(x) - l| \leq g(x)$.
Si $\lim\limits_{x \to a} g(x) = 0$ alors $\lim\limits_{x \to a} f(x) = l$

Utilisation de la dérivée

Théorème 8
Si $\lim\limits_{x \to a} f'(x) = l$ (fini ou infini) alors $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{f(x) - f(a)}{x - a} = l$

Exemple 9
Pour calculer $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x^5 + \cos(2\pi x) - 2}{x - 1}$, on peut procéder comme suit :

$$\lim_{x \to 1} \frac{x^5 + \cos(2\pi x) - 2}{x - 1} = \lim_{x \to 1} \left(x^5 + \cos(2\pi x)\right)' = \lim_{x \to 1} 5x^4 - 2\pi \sin(2\pi x) = 5$$