3 Suites numériques (TS2)

I - Généralités

Définition 1
On appelle **suite numérique** toute fonction u de $\mathbb{N}$ vers $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

$$u: \begin{array}{ccc} \mathbb{N} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ n & \longmapsto & u(n) \end{array}$$

Notation et vocabulaire

- $u(n)$ est notée u_n (lire u indice n) est appelé le terme d'indice n ou le terme de rang n ou terme général de la suite u.
- La suite u est notée $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ou (u_n).
- La suite est dite **positive** (respectivement **négative**) lorsque tous ses termes sont positifs (respectivement négatifs).
- Lorsque la suite est à valeurs dans l'ensemble $\mathbb{C}$; elle est appelée suite numérique complexe .
  Sauf mention contraire, nous entendons par « suite » dans ce cours une suite réelle.

Attention :
(u_n) désigne la suite alors que u_n désigne la valeur du terme de rang n.

Remarque 2
Si les indices de la suite commencent à partir d'un entier naturel k alors on dit que la suite est définie à partir du rang k ou que le domaine de définition de la suite est l'ensemble I des entiers naturels n tels que $n \geq k$.
Dans ce cas on notera la suite par $(u_n)_{n\geq k}$ ou par $(u_n)_{n\in I}$.

Modes de définition d'une suite

On distingue deux modes de définition usuels :

1. **Suite définie par une formule explicite**
   Une suite explicite est une suite dont le terme général s'exprime en fonction de n. Elle est du type $u_n = f(n)$ où f est une fonction définie sur $\mathbb{R}_+$.

Exemple 3
Soit (u_n) la suite définie par : $u_n = 2n + 4$
Calculons les quatre premiers termes de la suite ainsi que u_{10} .

Réponse : $u_0 = 4$, $u_1 = 6$, $u_2 = 8$, $u_3 = 10$ et $u_{10} = 44$

2. **Suite définie par une relation de récurrence**
Une suite récurrente est définie par la donnée des premiers termes et la relation liant des termes consécutifs de la suite en général du type :
$u_{n+1} = f(u_n)$ ou $u_n = f(u_{n-1})$

Exemple 4
Soit la suite (u_n) définie par $u_1 = -2$ et $u_{n+1} = 2u_n + 4$
Calculons les quatre premiers termes de la suite ainsi que u_{10} .

Réponse :
$u_1 = -2, \quad u_2 = 2u_1 + 4 = -4 + 4 = 0, \quad u_3 = 0 + 4 = 4 \quad u_4 = 12$
Pour calculer u_{10} cette fois-ci , il faut connaître u_9 car $u_{10} = 2u_9 + 4$ puis pour calculer u_9 ,il faut connaître u_8 ... ainsi de suite pour calculer un terme il faut connaître le précédent : on dit que la suite (u_n) est définie par récurrence ou qu'elle est héréditaire. On ne peut calculer directement la valeur de u_{10} contrairement à l'exemple précédent.

Remarque 5
$*$ Une suite récurrente peut aussi être définie par la donnée de u_0 et u_1 et une relation de récurrence du type $u_{n+2} = f(u_{n+1}; u_n)$ ou $u_n = f(u_{n-1}; u_{n-2})$.

Exemple 6
La suite (u_n) définie par :
$u_0 = 3$, $u_1 = -1$ et $u_{n+2} = 2u_{n+1} - 5u_n$

$*$ L'objet de certains exercices est de transformer une suite donnée par une relation de récurrence en une suite écrite par une formule explicite pour pouvoir calculer directement la valeur d'un terme de rang donné. Pour cela on utilise une autre suite appelée suite auxiliaire qui soit arithmétique ou géométrique (qu'on verra ultérieurement).

Représentation graphique d'une suite récurrente

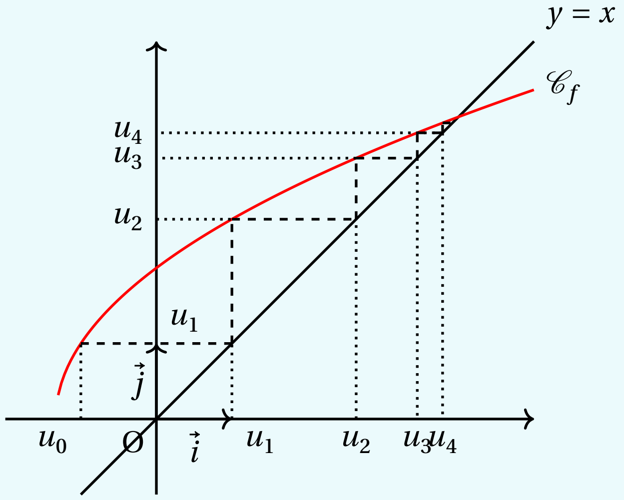
Méthode

On représente les premiers termes sur un axe (celui des abscisses par exemple) en s'appuyant sur la courbe représentative de la fonction f définissant la relation de récurrence.
On procède alors ainsi :

— On trace les représentations graphiques de f et de la première bissectrice d'équation $y = x$;
— On place le premier terme u_0 sur l'axe des abscisses;
— On utilise $\mathscr{C}_f$ pour construire $u_1 = f(u_0)$ sur l'axe des ordonnées;
— On reporte u_1 sur l'axe des abscisses à l'aide de la première bissectrice,
— On utilise $\mathscr{C}_f$ pour construire $u_2 = f(u_1)$ sur l'axe des ordonnées;
— etc.

On obtient un diagramme en « escalier» ou en « escargot ». On peut alors faire des conjectures en termes de variation, de convergence , etc.

Exemple 7
Prenons comme exemple la suite (u_n) définie par :
$u_0 = -1$ et $u_{n+1} = \sqrt{3u_n + 4}$ pour tout n de $\mathbb{N}^*$.
Le terme général de cette suite est définie par la relation de récurrence $u_{n+1} = f(u_n)$ où $f : x \mapsto \sqrt{3x+4}$.
Plaçons sur l'axe des abscisses les quatre premiers termes de la suite sans les calculer.



Ici la suite semble être croissante et, plus n devient grand, plus ses termes semblent se rapprocher de 4.

Suites monotones

Une suite est une fonction particulière, on retrouve donc naturellement la notion de sens de variation pour une suite.

Définition 8
Soit (u_n) une suite, k un entier naturel. On dit que :

- la suite (u_n) est **croissante** à partir du rang k si, pour tout entier $n \geq k$: $u_{n+1} \geq u_n$;
- la suite (u_n) est **décroissante** à partir du rang k si, pour tout entier $n \geq k$: $u_{n+1} \leq u_n$;
- la suite (u_n) est **constante** à partir du rang k si, pour tout entier $n \geq k$: $u_{n+1} = u_n$.

Remarque 9
∗ On dit que (u_n) est **monotone** si son sens de variation ne change pas (elle reste croissante ou décroissante à partir d'un rang).
Étudier la monotonie d'une suite c'est donc étudier ses variations.
∗ On obtient les définitions de strictement croissante, décroissante ou monotone en remplaçant les inégalités larges par des inégalités strictes.

Méthodes

Signe de la différence de $u_{n+1} - u_n$

Pour étudier le sens de variation d'une suite, on peut étudier le signe de la différence $u_{n+1} - u_n$.
Si $u_{n+1} - u_n \geq 0$ alors (u_n) est croissante.
Si $u_{n+1} - u_n \leq 0$ alors (u_n) est décroissante.
Si $u_{n+1} - u_n = 0$ alors (u_n) est constante.

Exemple 10
Soit (u_n) la suite définie, pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $u_n = n^2 - n$.
On a, pour tout $n \in \mathbb{N}$:
$u_{n+1} - u_n = (n+1)^2 - (n+1) - n^2 + n = n^2 + 2n + 1 - n - 1 - n^2 + n = 2n$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $2n \geq 0$ donc $u_{n+1} - u_n \geq 0$ donc $u_{n+1} \geq u_n$. La suite (u_n) est croissante.

Comparaison de $\dfrac{u_{n+1}}{u_n}$ à 1

Pour étudier le sens de variation d'une suite à *termes strictement positifs* , on peut comparer $\dfrac{u_{n+1}}{u_n}$ à 1.
Si $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} > 1$ alors (u_n) est croissante.
Si $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} < 1$ alors (u_n) est décroissante.
Si $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} = 1$ alors (u_n) est constante.

Exemple 11
Soit (u_n) la suite définie, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, par $u_n = 2^{-n}$.
La suite (u_n) est à termes strictement positifs .
On a : $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} = \dfrac{2^{-n-1}}{2^{-n}} = 2^{-1} = \dfrac{1}{2} < 1$. La suite (u_n) est donc décroissante.

Cas d'une suite en mode explicite

Soit (u_n) une suite définie par $u_n = f(n)$ où f est une fonction définie sur $\mathbb{R}_+$.

- Si f est croissante alors (u_n) est croissante.
- Si f est décroissante alors (u_n) est décroissante.

Cas d'une suite définie par récurrence

On démontre par récurrence que $u_{n+1} \leq u_n$ (suite croissante) ou $u_n \geq u_{n+1}$ (suite décroissante).

Suites bornées

Définition 12
Une suite (u_n) est dite :

- **majorée** s'il existe un réel M tel que pour tout entier naturel n, $u_n \leq M$.
  M est dit majorant de la suite.
- **minorée** s'il existe un réel m tel que pour tout entier naturel n, $u_n \geq m$.

m est dit minorant de la suite.

- **bornée** si elle est majorée et minorée.

Remarque 13
$*$ Une suite (u_n) est bornée si et seulement si il existe un réel k positif tel que $|u_n| \leq k$.
$*$ Une suite positive est minorée par 0 et une suite négative est majorée par 0.
$*$ Une suite croissante est minorée par son premier terme et une suite décroissante est majorée par son premier terme .

Suites périodiques

Définition 14
Une suite (u_n) est dite **périodique** s'il existe un entier naturel non nul p tel pour tout entier naturel n :

$$u_{n+p} = u_n$$

On dit p est une période de la suite (u_n).

Exemple 15
$u_n = \cos \dfrac{2n\pi}{5}$, $n \geq 0$.
On a : $u_{n+5} = \cos(\dfrac{2(n+5)\pi}{5}) = \cos(\dfrac{2n\pi}{5} + 2\pi)$ donc $u_{n+5} = u_n$
Il en résulte que (u_n) est périodique et 5 est une période.

II - Le raisonnement par récurrence

Pour montrer qu'une propriété P_n est vraie pour tout entier n supérieure ou égal à un entier naturel n_0 donné , on utilise un raisonnement de type particulier, appelé raisonnement par récurrence .
Principe

1. Montrer que P_{n_0} est vraie.
2. Montrer que si P_n est vraie alors P_{n+1} l'est aussi .

Exemple 16
Montrons que pour tout entier $n \geq 1$

$$1 + 2 + ... + n = \frac{n(n+1)}{2}$$

Réponse

$$\text{Posons} \quad P_n : 1 + 2 + ... + n = \frac{n(n+1)}{2}$$

1°) P_1 s'écrit $1 = \dfrac{1(1+1)}{2}$ égalité qui est vérifiée, donc P_1 est vraie .
2°) Supposons la propriété vérifiée pour un certain $n \geq 1$ c'est à dire :

$$P_n : 1 + 2 + ... + n = \frac{n(n+1)}{2} \quad \text{(H)}$$

Montrons que P_{n+1} est vérifiée c'est à dire :

$$1 + 2 + ... + (n+1) = \frac{(n+1)(n+2)}{2}$$

$$1 + 2 + ... + n + (n+1) = (1 + 2 + ... + n) + (n+1)$$

$$1 + 2 + ... + n + (n+1) = \frac{n(n+1)}{2} + (n+1) \quad \text{en utilisant (H)}$$

$$1 + 2 + ... + n + (n+1) = \frac{n(n+1) + 2(n+1)}{2}$$

donc

$$1 + 2 + ... + (n+1) = \frac{(n+1)(n+2)}{2}$$

ce qui prouve P_{n+1} que est vraie .

Le principe du raisonnement par récurrence permet d'affirmer que P_n est vérifiée pour tout $n \geq 1$, c'est à dire : $1 + 2 + ... + n = \dfrac{n(n+1)}{2}$.

Remarque 17
∗ Pour comprendre le mécanisme de ce raisonnement, il suffit de se rappeler que d'après 1°) P_1 est vérifiée et que d'après 2°) puisque P_1 est vraie, alors P_2 est vraie.
Toujours d'après 2°) puisque P_2 est vraie alors P_3 est vraie, etc.
On comprend ainsi que P_n puisse être vérifiée quel que soit l'entier $n \geq 1$.
Dans ce cas la propriété P_n est **héréditaire** .
∗ Lorsqu'on vérifie que P_{n_0} est vraie ; on **initialise** la récurrence .
La supposition (H) est appelée hypothèse de récurrence.

Exercice 18
Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = 0$ et $u_{n+1} = \dfrac{u_n + 1}{u_n + 2}$.
Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \in [0\,,\,1]$

Solution :
Nous allons procéder à un raisonnement par récurrence
$u_0 = 0 \in [0\,,\,1]$ donc la propriété est vraie pour $n = 0$.
Supposons que pour un certain entier n , $u_n \in [0\,,\,1]$.
Or pour tout réel $x \in [0\,,\,1]$, $\dfrac{x+1}{x+2} \in [0\,,\,1]$ et puisque $u_n \in [0\,,\,1]$ par hypothèse donc

$\dfrac{u_n+1}{u_n+2} \in [0\ ,\ 1]$ c'est à dire $u_{n+1} \in [0\ ,\ 1]$.
Conclusion : Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \in [-1\ ,\ 1]$

Exercice 19

On considère la suite (u_n), définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par : $\begin{cases} u_0 = 0 \\ u_{n+1} = 2u_n + 1 \end{cases}$

Prouver que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = 2^n - 1$

Solution :
$2^0 - 1 = 1 - 1 = 0 = u_0$ donc la propriété est vérifiée pour $n = 0$.
Supposons que pour un certain entier n c'est à dire $u_n = 2^n - 1$.
Alors, on a $u_{n+1} = 2u_n + 1 = 2(2^n - 1) + 1$

Conclusion : Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = 2^n - 1$

III - Suites arithmétiques

Définition 20
Définition par récurrence Une suite (u_n) est dite **suite arithmétique** s'il existe un réel r tel que pour tout entier naturel n on ait :

$$u_{n+1} = u_n + r$$

r est appelé **la raison** de la suite arithmétique.

Remarque 21
La raison d'une suite arithmétique est un réel indépendant de n. On passe d'un terme au terme de rang suivant en ajoutant toujours r.

Exemple 22
$*$ La suite des entiers naturels est une suite arithmétique de premier terme 0 et de raison 1.
$*$ La suite des entiers naturels pairs est une suite arithmétique de premier terme 0 et de raison 2.

Méthode

- Pour montrer qu'une suite est arithmétique, on peut montrer que la différence $u_{n+1} - u_n$ (ou $u_n - u_{n-1}$) est constante.

  Exemple 23
  Soit la suite (u_n) définie, pour tout $n \in \mathbb{N}$, par $u_n = -6n + 1$. Montrons que cette suite est arithmétique :
  $u_{n+1} - u_n = -6(n+1) + 6n - 1 = -6n - 6 + 6n + 1 = -6$. De plus $u_0 = -6 \times 0 + 1 = 1$

La suite (u_n) est arithmétique de premier terme 1 et de raison -6.

- Pour montrer qu'une suite est arithmétique, on peut aussi exprimer u_{n+1} en fonction de u_n et vérifier que u_{n+1} se met sous la forme $u_{n+1} = u_n + r$.
  (C'est la même chose d'exprimer u_n en fonction de u_{n-1} et vérifier que u_n se met sous la forme $u_n = u_{n-1} + r$).

Expression du terme général en fonction de n

Théorème 24
Soit (u_n) une suite est arithmétique de premier terme u_0 et de raison r. Alors pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$u_n = u_0 + nr$$

Démonstration On a :

$$\begin{aligned} u_1 &= u_0 + r \\ u_2 &= u_1 + r \\ \vdots &\quad \vdots \\ u_{n-1} &= u_{n-2} + r \\ u_n &= u_{n-1} + r \end{aligned}$$

En additionnant membre à membre ces n égalités, on obtient :

$$u_1 + u_2 + \cdots + u_{n-1} + u_n = u_0 + u_1 + \cdots + u_{n-1} + nr$$

après simplification on obtient : $u_n = u_0 + nr$.

Exemple 25
Soit (u_n) la suite arithmétique de premier terme $u_0 = 2$ et de raison $r = 3$, d'après le théorème 1.1 pour tout n de $\mathbb{N}$, $u_n = u_0 + nr = 2 - 3nr$. On peut alors directement calculer n'importe quel terme à partir de son rang.
Par exemple $u_5 = 2 - 3 \times 5 = -13$.

Remarque 26
Toute suite (u_n) de terme général $u_n = an + b$ où a et b sont deux réels, est une suite arithmétique de premier terme $u_0 = b$ et de raison a.

Théorème 27
Soit (u_n) une suite est arithmétique de premier terme u_0 et de raison r. Alors pour tous p et n de $\mathbb{N}$,

$$u_n = u_p + (n-p)r$$

Démonstration
Pour tous p et n de $\mathbb{N}$, $u_n = u_0 + nr$ et $u_p = u_0 + pr$.
On en tire $u_n - u_p = u_0 + nr - (u_0 + pr) = (n-p)r$ d'où $u_n = u_P + (n-p)r$

Exemple 28
Soit (u_n) une suite est arithmétique telle que $u_{27} = 6$ et $u_{39} = 10$, on se propose de calculer u_{27}. Pour cela, on commence par calculer la raison r de la suite .
On a $u_{27} = u_{39} + (27-39)r$, soit $u_{27} - u_{39} = (27-39)r$ d'où :

$$-4 = -12r \quad \text{soit} \quad r = \frac{1}{3}$$

On en tire : $u_{75} = u_{39} + (75-39)r = 10 + 36 \times \dfrac{1}{3} = 22$

Sens de variation

Théorème 29
Soit (u_n) une suite est arithmétique de raison r.
- si $r > 0$ alors la suite (u_n) est strictement croissante;
- si $r = 0$ alors la suite (u_n) est strictement constante;
- si $r < 0$ alors la suite (u_n) est strictement décroissante.

Moyenne arithmétique

Trois réels a, b et c sont les terme consécutifs d'une suite arithmétique si, et seulement si $b = \dfrac{a+b}{2}$.
On dit que a, b , c sont en progression arithmétique et que, b est la moyenne arithmétique de a et c.

Somme de termes consécutifs

1. Nombre de termes d'une somme

Soit (u_n) une suite. $p \in \mathbb{N}$, $q \in \mathbb{N}$ tels que $p \leq q$. On retiendra le résultat suivant :
La somme $u_p + u_{p+1} + \cdots + u_q$ comporte $q - p + 1$ termes .

Exemple 30
La somme $u_0 + u_1 + \cdots + u_{10}$ contient $10 - 0 + 1 = 11$ termes.

Somme de termes consécutifs d'une suite est arithmétique

Théorème 31
Soit S la somme de N termes consécutifs d'une suite arithmétique de raison r, a le premier terme de cette somme et b le dernier terme. On a :

$$S = N\frac{a+b}{2}$$

Démonstration
Ecrivons S de deux façons différentes :

$$S = a + (a+r) + (a+2r) + (a+3r) + \cdots + [a+(N-1)r]$$

$$S = b + (b-r) + (b-2r) + (b-3r) + \cdots + [b-(N-1)r]$$

En additionnant membre à membre ces deux égalités ,on obtient :

$$2S = \underbrace{(a+b) + (a+b) + (a+b) + \cdots + (a+b)}_{N\text{fois}}$$

$$2S = N(a+b)$$

On en déduit que :

$$S = \frac{a+b}{2}N$$

A retenir
Cette formule peut se retenir de la façon suivante :
La somme de termes consécutifs d'une suite arithmétique est égale au produit du nombre de termes par la demi somme des termes extrêmes.

$$S = \text{nombre de termes} \times \frac{\text{premier terme} + \text{dernier terme}}{2}$$

Cas particulier
La somme des n premiers nombres entiers naturels non nuls est : $\dfrac{n(n+1)}{2}$.
En d'autres termes :

$$1 + 2 + 3 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{n}$$

Exemple 32

$$1 + 2 + 3 + \cdots + 10 = \frac{10 \times 11}{2} = 55$$

IV - Suites géométriques

Définition 33
(Définition par récurrence)
Une suite (u_n) est dite **suite géométrique** s'il existe un réel q tel que pour tout entier naturel n on ait :

$$u_{n+1} = qu_n$$

q est appelé **la raison** de la suite géométrique.

Remarque 34
La raison d'une suite géométrique est un réel indépendant de n. On passe d'un terme au terme de rang suivant en multipliant toujours par q.

Exemple 35
$\ast$ La suite des puissances entières de 3 $(1;3;9;27;81...etc)$ est la suite géométrique de premier terme 1 et de raison 3 .
$\ast$ La suite définie par $u_0 = 0,5$ et $u_n = -3u_{n-1}$ est la suite géométrique de premier terme $0,5$ et de raison -3 .

La suite de terme général $v_n = 10^{-n}$ est une suite géométrique de premier terme 1 et de raison 10^{-1} .
$\ast$ La suite v_n définie par $v_n = n3^n$ n'est pas une suite géométrique car $v_0 = 0$, $v_1 = 3$, $v_2 = 18$, $v_3 = 81$.
On ne passe pas d'un terme au terme de rang suivant en multipliant toujours par une même constante.

Méthode

- Pour montrer qu'une suite de termes non nuls est géométrique, on peut montrer que le quotient $\dfrac{u_{n+1}}{u_n}$ (ou $\dfrac{u_n}{u_{n-1}}$) est constant.

  Exemple 36
  Soit la suite (u_n) définie, pour tout $n \in \mathbb{N}$, par $u_n = \dfrac{3}{5^n}$. Montrons que cette suite est géométrique .
  $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} = \dfrac{\frac{3}{5^{n+1}}}{\frac{3}{5^n}} = \dfrac{5^n}{5^{n+1}} = \dfrac{1}{5}$. De plus $u_0 = \dfrac{3}{5^0} = 3$
  La suite (u_n) est géométrique de premier terme 3 et de raison $\dfrac{1}{5}$.

- Pour montrer qu'une suite est géométrique, on peut exprimer u_{n+1} en fonction de u_n et vérifier que u_{n+1} se met sous la forme $u_{n+1} = qu_n$.
  (C'est la même chose d'exprimer u_n en fonction de u_{n-1} et vérifier que u_n se met sous la forme $u_n = qu_{n-1}$).

Expression du terme général en fonction de n

Théorème 37
Soit (u_n) une suite est géométrique de premier terme u_0 et de raison $q \neq 0$. Alors pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$u_n = u_0 q^n$$

Démonstration

$$u_1 = u_0 q$$

$$u_2 = u_1 q$$

$$\vdots \qquad \vdots$$

$$u_{n-1} = u_{n-2} q$$

$$u_n = u_{n-1} q$$

En multipliant membre à membre ces n égalités, on obtient :

$$u_1 \times u_2 \times \cdots \times u_{n-1} \times u_n = u_0 q \times u_1 q \times \cdots \times u_{n-1} q$$

après simplification on obtient :

$$u_n = u_0 q^n$$

Exemple 38
Soit (u_n) la suite est géométrique de premier terme $u_0 = -1$ et de raison $q = 2$, d'après le théorème 1.5 pour tout n de $\mathbb{N}$, $u_n = u_0 q^n = -1 \times 2^n$. On peut alors directement calculer n'importe quel terme à partir de son rang.
Par exemple $u_5 = -1 \times 2^5 = -32$.

Remarque 39
Toute suite (u_n) dont le terme général est de la forme $u_n = aq^n$ où a et q sont deux réels, est une suite géométrique de premier terme $u_0 = a$ et de raison q.

Théorème 40
Soit (u_n) une suite géométrique de premier terme u_0 et de raison q.
Alors pour tous p et n de $\mathbb{N}$,

$$u_n = u_p q^{n-p}$$

Démonstration
Pour tous p et n de $\mathbb{N}$, $u_n = u_0 q^n$ et $u_p = u_0 q^p$.
On en tire $\quad u_n = u_0 q^{n-p+p} = u_0 q^p q^{n-p} \quad$ d'où $\quad u_n = u_p q^{n-p}$.

Exemple 41
Soit (u_n) la suite géométrique telle que $q = 3$ et $u_{11} = 729$.

On se propose de calculer u_1.
On a $u_1 = u_{11}q^{1-11} = 729 \times 3^{-10} = \dfrac{1}{81}$

Sens de variation

Théorème 42
Soit (u_n) une suite est géométrique de raison q et de premier terme u_0 strictement positif.

- si $q > 0$ alors la suite (u_n) est strictement croissante;
- si $q = 1$ alors la suite (u_n) est strictement constante;
- si $0 < q < 1$ alors la suite (u_n) est strictement décroissante.

Moyenne géométrique

Trois réels a, b et c sont les termes consécutifs d'une suite géométrique si, et seulement si $b^2 = ac$. On dit que a, b , c sont en progression géométrique et que, b est la moyenne géométrique de a et c.

Somme de termes consécutifs d'une suite géométrique

Théorème 43
Soit S la somme de N termes consécutifs d'une suite géométrique de raison q et a le premier terme de cette somme. On a :

$$S = a\frac{1-q^N}{1-q} \quad \text{si} \quad q \neq 1$$

Démonstration

$$\text{On a : } S = a + aq + aq^2 + aq^3 + \cdots + aq^{N-2} + aq^{N-1}$$

Multiplions les deux membres de cette égalité par q ; on obtient

$$qS = aq + aq^2 + aq^3 + \cdots + aq^{N-1} + aq^N$$

En soustrayant membre à membre ces deux égalités ,on obtient :

$$S(1-q) = a - aq^N = a(1-q^N)$$

On en déduit que :

$$\text{si} \quad q \neq 1 \quad \text{on a} \quad S = a\frac{1-q^N}{1-q}$$

Remarque 44
$*$ si $q = 1$ alors $S = Na$
$*$ $S = a\dfrac{1-q^N}{1-q} = a\dfrac{q^N-1}{q-1}$

A retenir
Somme S de termes consécutifs d'une suite géométrique :

$$S = \text{premier terme} \times \frac{1 - \text{raison}^{\text{nombre de termes}}}{1 - \text{raison}}$$

Exemple 45
Soit (u_n) la suite est géométrique de premier terme $u_4 = 2$ et de raison $q = \dfrac{1}{2}$.
On se propose de calculer la somme $S = u_4 + u_5 + \cdots + u_{14}$.
Elle comporte $14 - 4 + 1 = 11$ termes . D'après le théorème 1.8 on a :

$$S = u_4\frac{1-q^{11}}{1-q} = u_4\frac{1-(\frac{1}{2})^{11}}{1-\frac{1}{2}} = 4[1-(\frac{1}{2})^{11}] = -8188$$

Cas particulier
Pour tout réel $q \neq 1$ on a :

$$1 + q + q^2 + \cdots + q^{n-1} = \frac{1-q^n}{1-q}$$

V - Convergence d'une suite

Définition 46
Une suite (u_n) est dite **convergente** si elle admet une limite finie l lorsque n tend vers $+\infty$.
On dit la suite (u_n) converge vers l.
Dans le cas contraire, la suite est dite divergente.

Exemple 47
Soit $u_n = 5 + \dfrac{1}{n}$ $\quad n \in \mathbb{N}^*$
$\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 5$ donc la suite (u_n) converge vers 5.

Remarque 48
Dire qu'une suite est divergente peut signifier qu'elle n'a pas de limite, par exemple $u_n = (-1)^n$ou que sa limite est $+\infty$ ou $-\infty$ par exemple $u_n = 3^n$

Cas d'une suite géométrique

Soit (u_n) suite est géométrique de raison q.

— si $q \in]-1\,,\,1[$ alors la suite (u_n) est convergente et converge vers 0.

— si $q < -1$, u_n n'a pas de limite , alors la suite (u_n) est divergente.

— si $q > 1$ on a $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \pm\infty$, alors la suite (u_n) est divergente.

— si $q = 1$ alors (u_n) est une suite constante et converge vers u_0.

Exercice 49
Soit (u_n) est la définie par : $u_n = 3 + (-\frac{1}{2})^n$, $\forall n \in \mathbb{N}$

1. Etudier la convergence de la suite (u_n).
2. Soit (v_n) la suite définie par $v_n = u_n - u_{n-1}$.
   (a) Exprimer v_{n+1} en fonction de v_n. En déduire la nature de la suite (v_n).
   (b) La suite (v_n) est -elle convergents ?

Solution. 1. Calculons $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$.
On a $-1 < -\frac{1}{2} < 1$, donc $\lim\limits_{n\to+\infty}(-\frac{1}{2})^n = 0$ d'où $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 3$, la suite (u_n) converge vers 3.

2. (a) $v_n = 3 - (-\frac{1}{2})^n - 3 - (-\frac{1}{2})^{n-1} = (-\frac{1}{2})^n - (-\frac{1}{2})^{n-1} = (-\frac{1}{2})^{n-1}(-\frac{1}{2} - 1) = 3 \times (-\frac{1}{2})^n$ la suite (v_n) est donc une suite géométrique de raison $q = -\frac{1}{2}$.
   (b) Or $-1 < -\frac{1}{2} < 1$ on a donc $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = 0$
   Donc la suite (v_n) converge vers 0.

□

Remarque 50 — Si $|q| < 1$ alors $\lim\limits_{n\to+\infty} q^n = 0$

— Si $q > 1$ alors $\lim\limits_{n\to+\infty} q^n = +\infty$

— Soient (u_n) et (v_n) deux suites telles que : $|u_n - \alpha| < v_n$ si $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = 0$ alors $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \alpha$.

Théorèmes de convergence

On admettra les théorèmes suivants :

Théorème 51 — Toute suite croissante majorée est convergente

— Toute suite décroissante minorée est convergente

Remarque 52
∗ Ce théorème particulièrement important, permet de savoir si une suite converge ou pas.

Mais s'il donne l'existence de la limite de la suite, il ne donne pas la valeur de la limite.
$*$ Il ne faut pas confondre majorant (ou minorant) et limite : une suite peut être croissante et majorée par 2 sans que sa limite soit égale à 2.
$*$ Si une suite positive converge alors sa limite est positive.

Théorème 53
Si (u_n) converge vers l et si f est une fonction continue en l alors la suite $(f(u_n))$ converge vers $f(l)$.

Théorème 54
Soit (u_n) une suite définie par la relation $u_{n+1} = f(u_n)$.
Si (u_n) converge vers l et si f est une fonction continue en l alors l est solution de l'équation $f(x) = x$.

Remarque 55
On commence donc par montrer que la suite (u_n) converge, puis on résout l'équation $f(x) = x$.

Exercice 56
Soit la suite (u_n) définie par :
$u_0 = 1$ et $u_{n+1} = \sqrt{u_n + 2}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

1. Démontrer que la suite est croissante .
2. Démontrer que la suite est majorée par 2.
   En déduire la convergence de la suite .
3. On se propose de calculer la limite de cette suite par deux méthodes .
   (a) En utilisant le théorème 53, calculer la limite l de la suite .
   (b) Montrer que pour tout n de $\mathbb{N}$ on a :

$$|u_{n+1} - 2| \leq \frac{1}{2}|u_n - 2| \quad \text{puis que } |u_n - 2| \leq \frac{1}{2^n}$$

   En déduire la limite l de la suite .

Solution

1. Pour étudier la monotonie de cette suite, au lieu d'étudier le rapport $\dfrac{u_{n+1}}{u_n}$, étudions la différence $u_{n+1} - u_n$.
   Démontrons par récurrence que : $\forall n \in \mathbb{N} \quad u_{n+1} - u_n > 0$.

$$\text{On a :} \quad u_1 - u_0 > 0$$

Supposons que pour un certain entier naturel n, $u_{n+1}-u_n>0$ alors :

$$u_{n+2}-u_{n-1}=\sqrt{2+u_{n+1}}-u_{n+1}=\sqrt{2+u_{n+1}}-\sqrt{2+u_n}=\frac{u_{n+1}-u_n}{\sqrt{2+u_{n+1}}-\sqrt{2+u_n}}$$

Donc $\forall n\in\mathbb{N}:\quad u_{n+1}-u_n>0$. La suite est croissante.

2. Démontrons par récurrence que la suite est majorée par 2.
On a $u_0=1<2$
Supposons que pour un certain entier naturel n, $u_n<2$ alors :
$u_n+2<4$ puis $\sqrt{u_n+2}<\sqrt{4}$ donc $\sqrt{u_n+2}<2$ c'est à dire $u_{n+1}<2$
Donc $\forall n\in\mathbb{N}:\quad u_n<2$. La suite est majorée par 2.
La suite (u_n) étant croissante et majorée par 2 donc converge.

3. (a) La suite (u_n) étant croissante et majorée par 2, admet une limite l qui est positive car la suite est à termes positifs.
La fonction $x\mapsto\sqrt{x+2}$ est continue sur $]-2\,,\,+\infty[$ donc au point l
D'où d'après le théorème 1.11 on a ; $l=\sqrt{l+2}$ c'est à dire $l^2-l-2=0$
On trouve $l=2$, la limite de la suite est 2.

(b) On peut écrire pour tout n de $\mathbb{N}$:

$$u_{n+1}-2=\sqrt{u_n+2}-2=\frac{(\sqrt{u_n+2}-2)(\sqrt{u_n+2}+2)}{\sqrt{u_n+2}+2}=\frac{u_n-2}{\sqrt{u_n+2}+2}$$

$$|u_{n+1}-2|=\frac{|u_n-2|}{\sqrt{u_n+2}+2}$$

$$\text{Or}\quad\sqrt{u_n+2}+2\geq 2$$

$$\text{Donc}\quad |u_{n+1}-2|\leq\frac{|u_n-2|}{2}$$

Ecrivons l'inégalité précédente pour l'indice variant de n à 1

$$|u_n-2|\leq\frac{1}{2}|u_{n-1}-2|$$

$$|u_{n-1}-2|\leq\frac{1}{2}|u_{n-2}-2|$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$|u_2-2|\leq\frac{1}{2}|u_1-2|$$

$$|u_1-2|\leq\frac{1}{2}|u_0-2|$$

Par produit membre à membre et après simplification , on obtient :

$$|u_n-2|\leq\frac{1}{2^n}|u_0-2|$$

Or $|u_0-2|=1$ donc $|u_n-2|\leq\dfrac{1}{2^n}$

Et puisque $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{2^n} = 0$ on en déduit que $\lim\limits_{n\to+\infty} |u_n - 2| = 0$
d'où $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 2$.