

# 151 Sous-espaces stables par un endomorphisme ou une famille d'endomorphismes d'un espace vectoriel de dimension finie. Applications.

Soit  $E$  un espace vectoriel sur un corps  $\mathbb{K}$  de dimension finie  $n$ . Soit  $u \in \mathcal{L}(E)$  un endomorphisme de  $E$ .

## I - Stabilité

### 1. Définitions, endomorphismes induits

**Définition 1.** Soit  $F$  un sous-espace vectoriel de  $E$ . On dit que  $F$  est **stable** par  $u$  si  $u(F) \subseteq F$ .

[BMP]  
p. 158

**Exemple 2.** Le noyau et l'image de  $u$  sont stables par  $u$ .

**Proposition 3.** Si  $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ , alors  $u$  admet au moins une droite ou un plan stable.

**Proposition 4.** Soit  $F$  un sous-espace de  $E$  stable par  $u$ . Alors  $u$  induit deux endomorphismes :

- $u|_F : F \rightarrow F$  la restriction de  $u$  à  $F$ .
- $\bar{u} : E/F \rightarrow E/F$  obtenu par passage au quotient.

**Définition 5.** Soit  $A$  la matrice de l'endomorphisme  $u$  dans une base quelconque de  $E$ . On définit le **polynôme caractéristique** de  $u$  par  $\chi_u = \det(XI_n - A)$ .

p. 163

**Proposition 6.** Soit  $F$  un sous-espace de  $E$  stable par  $u$  de dimension  $r$ . Soit  $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$  une base de  $E$  telle que les  $r$  premiers vecteurs forment une base  $\mathcal{B}_F$  de  $F$ . Alors :

p. 158

- (i) La matrice de  $u$  dans la base  $\mathcal{B}$  est de la forme

$$\text{Mat}(u, \mathcal{B}) = \begin{pmatrix} A & C \\ 0 & B \end{pmatrix}$$

- (ii)  $\mathcal{B}_{E/F} = \pi_F(\mathcal{B} \setminus \mathcal{B}_F)$  est une base de  $E/F$  où  $\pi_F : E \rightarrow E/F$  désigne la projection canonique sur le quotient.
- (iii)  $A = \text{Mat}(u|_F, \mathcal{B}_F)$  et  $B = \text{Mat}(\bar{u}, \mathcal{B}_{E/F})$ .
- (iv)  $\chi_u = \chi_{u|_F} \chi_{\bar{u}}$ .

## 2. Sous-espaces stables et polynôme minimal

**Proposition 7.** Il existe un polynôme qui engendre l'idéal  $\{P \in \mathbb{K}[X] \mid P(u) = 0\}$ . Il s'agit du **polynôme minimal** de  $u$  noté  $\pi_u$ .

p. 161

**Théorème 8** (Cayley-Hamilton).

$$\pi_u \mid \chi_u$$

**Proposition 9.** Soit  $F$  un sous-espace de  $E$  stable par  $u$ . Alors  $\pi_{u|_F} \mid \pi_u$ .

**Proposition 10.** Si  $E = F_1 \oplus F_2$  avec  $F_1$  et  $F_2$  deux sous-espaces stables par  $u$ , alors  $\pi_u = \text{ppcm}(\pi_{u|_{F_1}}, \pi_{u|_{F_2}})$ .

**Proposition 11.** Soient  $P$  et  $Q$  deux polynômes unitaires tels que  $\pi_u = PQ$ . On note  $F = \text{Ker}(P(u))$ . Alors  $\pi_{u|_F} = P$ .

## 3. Recherche de sous-espaces stables

**Définition 12.** On suppose que le polynôme caractéristique de  $u$  est scindé sur  $\mathbb{K}$  :

$$\chi_u = \prod_{i=1}^p (X - \lambda_i)^{\alpha_i} \text{ où les } \lambda_i \text{ sont distincts deux-à-deux}$$

Pour tout  $i \in \llbracket 1, p \rrbracket$ , le sous-espace vectoriel  $N_i = \text{Ker}(f - \lambda_i \text{id}_E)^{\alpha_i}$  s'appelle le **sous-espace caractéristique** de  $f$  associé à  $\lambda_i$ .

[GOU21]  
p. 201

**Proposition 13** (Lemme des noyaux). Soient  $P_1, \dots, P_r \in \mathbb{K}[X]$  premiers entre eux. Alors

$$\bigoplus_{i=1}^r \text{Ker}(P_i(u)) = \text{Ker} \left( \left( \prod_{i=1}^r P_i \right) (u) \right)$$

p. 185

**Proposition 14.** On suppose que le polynôme caractéristique de  $u$  est scindé sur  $\mathbb{K}$ . On note  $N_1, \dots, N_p$  les sous-espaces caractéristiques de  $u$ .

- $\forall i \in \llbracket 1, p \rrbracket$ ,  $N_i$  est stable par  $u$ .
- $E = N_1 \oplus \dots \oplus N_p$ .
- $\forall i \in \llbracket 1, p \rrbracket$ ,  $\dim N_i = \alpha_i$  où  $\alpha_i$  est la multiplicité de  $\lambda_i$  dans  $\chi_u$ .

p. 202

[BMP]  
p. 159

**Remarque 15.** Plus généralement,  $\forall \lambda \in \mathbb{K}, \forall i \in \mathbb{N}, \text{Ker}(u - \lambda \text{id}_E)^i$  est stable par  $u$ . C'est en fait un corollaire de la proposition suivante.

**Proposition 16.** Soient  $u, v \in \mathcal{L}(E)$  tels que  $uv = vu$  (pour la composition). Alors le noyau et l'image de  $v$  sont stables par  $u$  (et réciproquement).

**Proposition 17.** On suppose que le polynôme caractéristique de  $u$  est scindé sur  $\mathbb{K}$ .

[GOU21]  
p. 202

$$\chi_u = \prod_{i=1}^p (X - \lambda_i)^{\alpha_i} \text{ où les } \lambda_i \text{ sont distincts deux-à-deux}$$

Alors :

(i)  $\pi_u$  est de la forme :

$$\pi_u = \prod_{i=1}^p (X - \lambda_i)^{r_i} \text{ où les } \lambda_i \text{ sont distincts deux-à-deux}$$

(ii)  $\forall i \in \llbracket 1, p \rrbracket, N_i = \text{Ker}(f - \lambda_i \text{id}_E)^{r_i}$ .

(iii)  $\forall i \in \llbracket 1, p \rrbracket, r_i$  est l'indice de nilpotence de l'endomorphisme  $f|_{N_i} - \lambda_i \text{id}_{N_i}$ .

## 4. Utilisation de la dualité

**Définition 18.** On appelle **forme linéaire** de  $E$  toute application linéaire de  $E$  dans  $\mathbb{K}$  et on note  $E^*$  appelé **dual** de  $E$  l'ensemble des formes linéaires de  $E$ .

p. 132

**Proposition 19.**  $E^*$  est un espace vectoriel sur  $\mathbb{K}$  de dimension  $n$ .

**Définition 20.** Si  $A \subset E$ , on note  $A^\perp = \{\varphi \in E^* \mid \forall x \in A, \varphi(x) = 0\}$  l'**orthogonal** (au sens de la dualité) de  $A$  qui est un sous-espace vectoriel de  $E^*$ .

**Proposition 21.** Si  $F$  est un sous-espace vectoriel de  $E$ , on a  $\dim F + \dim F^\perp = \dim E$ .

**Définition 22.** On définit  ${}^t u : E^* \rightarrow E^*$  l'**application transposée** de  $u$  par

$$\forall \varphi \in E^*, {}^t u(\varphi) = \varphi \circ u$$

**Proposition 23.** Un sous-espace vectoriel  $F$  de  $E$  est stable par  $u$  si et seulement si  $F^\perp$  est stable par  ${}^t u$ .

*Remarque 24.* C'est un résultat qui peut s'avérer utile dans les démonstrations par récurrence s'appuyant sur la dimension d'un sous-espace stable (cf. Théorème 31).

## II - Application à la réduction d'endomorphismes

### 1. Diagonalisation et trigonalisation

**Définition 25.** On dit que  $\lambda \in \mathbb{K}$  est **valeur propre** de  $u$  s'il existe  $x \neq 0$  tel que  $u(x) = \lambda x$ .  $x$  est alors un **vecteur propre** de  $u$  associé à  $\lambda$ . Le sous-espace

$$E_\lambda = \{x \in E \mid u(x) = \lambda x\} = \text{Ker}(u - \lambda \text{Id})$$

est le **sous-espace propre** associé à  $\lambda$ .

p. 171

**Définition 26.** On dit que  $u$  est **diagonalisable** (resp. **trigonalisable**) s'il existe une base  $\mathcal{B}$  de  $E$  telle que  $\text{Mat}(u, \mathcal{B})$  soit diagonale (resp. triangulaire supérieure).

**Théorème 27.** Les assertions suivantes sont équivalentes :

- (i)  $u$  est diagonalisable.
- (ii)  $\pi_u$  est scindé à racines simples.
- (iii)  $\chi_u$  est scindé et, pour toute valeur propre  $\lambda$ , la dimension du sous-espace propre  $E_\lambda$  est égale à la multiplicité de  $\lambda$  dans  $\chi_u$ .
- (iv)  $E$  est somme directe des sous-espaces propres de  $u$ .

[BMP]  
p. 165

**Exemple 28.** — Soit  $p \in \mathcal{L}(E)$  tel que  $p^2 = p$ . Alors  $p$  est annulé par  $X^2 - X$  donc est diagonalisable et à valeurs propres dans  $\{0, 1\}$ .

— Soit  $s \in \mathcal{L}(E)$  tel que  $s^2 = \text{id}_E$ . Alors si  $\text{car}(\mathbb{K}) \neq 2$ ,  $s$  est annulé par  $X^2 - 1$  donc est diagonalisable et à valeurs propres dans  $\{\pm 1\}$ .

**Théorème 29.** Les assertions suivantes sont équivalentes :

- (i)  $u$  est trigonalisable.
- (ii)  $\pi_u$  est scindé.
- (iii)  $\chi_u$  est scindé.

**Exemple 30.** Si  $\mathbb{K}$  est algébriquement clos, tout endomorphisme de  $E$  est trigonalisable.

**Théorème 31.** Soit  $(u_i)_{i \in I}$  une famille d'endomorphismes telle que  $\forall i, j \in I, u_i u_j = u_j u_i$ . Si tous les  $u_i$  sont trigonalisables (resp. diagonalisables), on peut co-trigonaliser (resp. co-diagonaliser) la famille  $(u_i)_{i \in I}$ .

*Remarque 32.* Dans le cas de la diagonalisabilité, cette condition est à la fois nécessaire et suffisante.

**Proposition 33.** On suppose que  $u$  est diagonalisable. Soit  $F$  un sous-espace de  $E$  stable par  $u$ . Alors  $u|_F$  est diagonalisable.

[GOU21]  
p. 174

**Application 34.** Les assertions suivantes sont équivalentes :

[BMP]  
p. 170

- (i)  $u$  est trigonalisable avec des zéros sur la diagonale.
- (ii)  $u$  est nilpotent (ie.  $\exists m \in \mathbb{N}$  tel que  $u^m = 0$ ).
- (iii)  $\chi_u = X^n$ .
- (iv)  $\pi_u = X^p$  où  $p$  est l'indice de nilpotence de  $u$ .

## 2. Décomposition de Dunford

[DEV]

**Théorème 35** (Décomposition de Dunford). On suppose que  $\pi_u$  est scindé sur  $\mathbb{K}$ . Alors il existe un unique couple d'endomorphismes  $(d, n)$  tels que :

[GOU21]  
p. 203

- $d$  est diagonalisable et  $n$  est nilpotent.
- $u = d + n$ .
- $dn = nd$ .

**Corollaire 36.** Si  $u$  vérifie les hypothèses précédentes, pour tout  $k \in \mathbb{N}$ ,  $u^k = (d + n)^k = \sum_{i=0}^m \binom{k}{i} d^i n^{k-i}$ , avec  $m = \min(k, l)$  où  $l$  désigne l'indice de nilpotence de  $n$ .

*Remarque 37.* — Un autre intérêt est le calcul d'exponentielles de matrices.  
— On peut montrer de plus que  $d$  et  $n$  sont des polynômes en  $u$ .

### 3. Réduction de Jordan

**Définition 38.** Un **bloc de Jordan** de taille  $m$  associé à  $\lambda \in \mathbb{K}$  désigne la matrice  $J_m(\lambda)$  suivante :

$$J_m(\lambda) = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ & & & \lambda \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_m(\mathbb{K})$$

[BMP]  
p. 171

**Proposition 39.** Les assertions suivantes sont équivalentes :

- (i) Il existe une base de  $E$  telle que la matrice de  $u$  est  $J_n(0)$ .
- (ii)  $u$  est nilpotent et cyclique (voir Définition 43).
- (iii)  $u$  est nilpotent d'indice de nilpotence  $n$ .

**Théorème 40** (Réduction de Jordan d'un endomorphisme nilpotent). On suppose que  $u$  est nilpotent. Alors il existe des entiers  $n_1 \geq \dots \geq n_p$  et une base  $\mathcal{B}$  de  $E$  tels que :

$$\text{Mat}(u, \mathcal{B}) = \begin{pmatrix} J_{n_1}(0) & & \\ & \ddots & \\ & & J_{n_p}(0) \end{pmatrix}$$

De plus, on a unicité dans cette décomposition.

*Remarque 41.* Comme l'indice de nilpotence d'un bloc de Jordan est égal à sa taille, l'indice de nilpotence de  $u$  est la plus grande des tailles des blocs de Jordan de la réduite.

**Théorème 42** (Réduction de Jordan d'un endomorphisme). On suppose que le polynôme caractéristique de  $u$  est scindé sur  $\mathbb{K}$  :

$$\chi_u = \prod_{i=1}^p (X - \lambda_i)^{\alpha_i} \text{ où les } \lambda_i \text{ sont distincts deux-à-deux}$$

Alors il existe des entiers  $n_1 \geq \dots \geq n_p$  et une base  $\mathcal{B}$  de  $E$  tels que :

$$\text{Mat}(u, \mathcal{B}) = \begin{pmatrix} J_{n_1}(\lambda_1) & & \\ & \ddots & \\ & & J_{n_p}(\lambda_p) \end{pmatrix}$$

De plus, on a unicité dans cette décomposition.

[GOU21]  
p. 209

## 4. Réduction de Frobenius

p. 397

**Définition 43.** On dit que  $u$  est **cyclique** s'il existe  $x \in E$  tel que  $\{P(u)(x) \mid P \in \mathbb{K}[X]\} = E$ .

**Proposition 44.**  $u$  est cyclique si et seulement si  $\deg(\pi_u) = n$ .

**Définition 45.** Soit  $P = X^p + a_{p-1}X^{p-1} + \dots + a_0 \in \mathbb{K}[X]$ . On appelle **matrice compagnon** de  $P$  la matrice

$$\mathcal{C}(P) = \begin{pmatrix} 0 & \dots & \dots & 0 & -a_0 \\ 1 & 0 & \ddots & \vdots & -a_1 \\ 0 & 1 & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 & -a_{p-2} \\ 0 & \dots & 0 & 1 & -a_{p-1} \end{pmatrix}$$

**Proposition 46.**  $u$  est cyclique si et seulement s'il existe une base  $\mathcal{B}$  de  $E$  telle que  $\text{Mat}(u, \mathcal{B}) = \mathcal{C}(\pi_u)$ .

**Théorème 47.** Il existe  $F_1, \dots, F_r$  des sous-espaces vectoriels de  $E$  tous stables par  $u$  tels que :

- $E = F_1 \oplus \dots \oplus F_r$ .
- $u_i = u|_{F_i}$  est cyclique pour tout  $i$ .
- Si  $P_i = \pi_{u_i}$ , on a  $P_{i+1} \mid P_i$  pour tout  $i$ .

La famille de polynômes  $P_1, \dots, P_r$  ne dépend que de  $u$  et non du choix de la décomposition. On l'appelle **suite des invariants de similitude** de  $u$ .

**Théorème 48** (Réduction de Frobenius). Si  $P_1, \dots, P_r$  désigne la suite des invariants de  $u$ , alors il existe une base  $\mathcal{B}$  de  $E$  telle que :

$$\text{Mat}(u, \mathcal{B}) = \begin{pmatrix} \mathcal{C}(P_1) & & \\ & \ddots & \\ & & \mathcal{C}(P_r) \end{pmatrix}$$

On a d'ailleurs  $P_1 = \pi_u$  et  $P_1 \dots P_r = \chi_u$ .

**Corollaire 49.** Deux endomorphismes de  $E$  sont semblables si et seulement s'ils ont la même suite d'invariants de similitude.

**Application 50.** Toute matrice est semblable à sa transposée.

### III - Endomorphismes remarquables

#### 1. Endomorphismes normaux

Soit  $E$  un espace vectoriel sur  $\mathbb{C}$  de dimension finie  $n$ . On munit  $E$  d'un produit scalaire  $\langle \cdot, \cdot \rangle$ , qui en fait un espace hermitien.

**Notation 51.** On note  $u^*$  l'adjoint de  $u$ .

[GRI]  
p. 286

**Définition 52.** Un endomorphisme  $u \in \mathcal{L}(E)$  est dit **normal** s'il est tel que  $u \circ u^* = u^* \circ u$ .

**Proposition 53.** On suppose  $u$  normal. Soit  $\lambda \in \mathbb{C}$  une valeur propre de  $u$ . Alors :

- (i)  $E_\lambda^\perp = \{x \in E^\lambda \mid \forall y \in E^\lambda, \langle x, y \rangle = 0\}$  est stable par  $u$ .
- (ii)  $u|_{E_\lambda^\perp}$  est normal.

**Corollaire 54.** On suppose  $u$  normal. Alors  $u$  est diagonalisable dans une base orthonormée.

#### 2. Sous-représentations

Soit  $G$  un groupe d'ordre fini.

[ULM21]  
p. 144

**Définition 55.** — Une **représentation linéaire**  $\rho$  est un morphisme de  $G$  dans  $\text{GL}(V)$  où  $V$  désigne un espace-vectoriel de dimension finie  $n$  sur  $\mathbb{C}$ .

- On dit que  $n$  est le **degré** de  $\rho$ .
- On dit que  $\rho$  est **irréductible** si  $V \neq \{0\}$  et si aucun sous-espace vectoriel de  $V$  n'est stable par  $\rho(g)$  pour tout  $g \in G$ , hormis  $\{0\}$  et  $V$ .

**Exemple 56.** Soit  $\varphi : G \rightarrow S_n$  le morphisme structurel d'une action de  $G$  sur un ensemble de cardinal  $n$ . On obtient une représentation de  $G$  sur  $\mathbb{C}^n = \{e_1, \dots, e_n\}$  en posant

$$\rho(g)(e_i) = e_{\varphi(g)(i)}$$

c'est la représentation par permutations de  $G$  associé à l'action. Elle est de degré  $n$ .

**Définition 57.** La représentation par permutations de  $G$  associée à l'action par translation à gauche de  $G$  sur lui-même est la **représentation régulière** de  $G$ , on la note  $\rho_G$ .



**Définition 58.** Soit  $\rho : G \rightarrow \text{GL}(V)$  une représentation linéaire de  $G$ . On suppose  $V = W \oplus W_0$  avec  $W$  et  $W_0$  stables par  $\rho(g)$  pour tout  $g \in G$ . On dit alors que  $\rho$  est **somme directe** de  $\rho_W$  et de  $\rho_{W_0}$ .

**Théorème 59** (Maschke). Toute représentation linéaire de  $G$  est somme directe de représentations irréductibles.

Annexes

$$\begin{array}{ccccc} F & \hookrightarrow & E & \twoheadrightarrow & E/F \\ \downarrow u|_F & & \downarrow u & & \downarrow \bar{u} \\ F & \hookrightarrow & E & \twoheadrightarrow & E/F \end{array}$$

[BMP]  
p. 158

FIGURE 1 – Endomorphismes induits par  $u$  sur un sous-espace stable  $F$ .

$u$	Diagonalisable	Trigonalisable	Quelconque
Décomposition	de $E$ suivant les vec- teurs propres	de Dunford	de Frobenius
Sous-espace stable $F$	espace propre	espace caractéris- tique	engendré par un élé- ment
$u _F$	homothétie	homothétie + nil- potent	cyclique

p. 157

FIGURE 2 – Réduction d'un endomorphisme en fonction de ses propriétés.

# Bibliographie

## Objectif agrégation

[BMP]

Vincent BECK, Jérôme MALICK et Gabriel PEYRÉ. *Objectif agrégation*. 2<sup>e</sup> éd. H&K, 22 août 2005.  
<https://objectifagregation.github.io>.

## Les maths en tête

[GOU21]

Xavier GOURDON. *Les maths en tête. Algèbre et probabilités*. 3<sup>e</sup> éd. Ellipses, 13 juill. 2021.  
<https://www.editions-ellipses.fr/accueil/13722-25266-les-maths-en-tete-algebre-et-probabilites-3e-edition-9782340056763.html>.

## Algèbre Linéaire

[GRI]

Joseph GRIFONE. *Algèbre Linéaire*. 6<sup>e</sup> éd. Cépaduès, 9 jan. 2019.  
<https://www.cepades.com/livres/algebre-lineaire-edition-9782364936737.html>.

## Théorie des groupes

[ULM21]

Felix ULMER. *Théorie des groupes. Cours et exercices*. 2<sup>e</sup> éd. Ellipses, 3 août 2021.  
<https://www.editions-ellipses.fr/accueil/13760-25304-theorie-des-groupes-2e-edition-9782340057241.html>.