15 Similitudes directes

Définition 1
Une transformation du plan complexe $\mathscr{P}$ est une application

$$f: \begin{array}{ccc} \mathscr{P} & \longrightarrow & \mathscr{P} \\ M & \longmapsto & M' \end{array} \quad \text{qui est bijective.}$$

A toute transformation f du plan complexe, on peut associer une unique application

$$\varphi: \begin{array}{ccc} \mathbb{C} & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ z & \longmapsto & z' \end{array}$$

telle que si $M'(z') = f(M(z))$, alors $\varphi(z) = z'$.

φ , qui est également bijective, est appelée transformation complexe associée à f .
La formule $z' = \varphi(z)$ est appelée écriture ou expression complexe de la transformation f.

Exemple 2 — La translation, l'homothétie et la rotation sont des transformations du plan.
— La composée de deux transformations du plan est une transformation du plan.

Voici les écritures complexes de ces transformations du plan.

Écriture complexe d'une translation

Théorème 3
La translation de vecteur $\vec{u}$, d'affixe a , transforme un point $M(z)$ en un point $M'(z')$ tel que : $z' = z + a$.

Démonstration

Dire que M' est l'image de M par la translation de vecteur $\vec{u}$ revient à dire que $\overrightarrow{MM'} = \vec{a}$, ce qui se traduit en termes d'affixes par $z' - z = a$ soit $z' = z + a$.

Remarque 4 — La translation réciproque a pour vecteur $-\vec{u}$.
— Ajouter un nombre a revient géométriquement à translater d'un vecteur d'affixe a.

Écriture complexe d'une homothétie

Théorème 5
L'homothétie de centre $\Omega(\omega)$ et de rapport $k \in \mathbb{R}$ transforme un point $M(z)$ en un point $M'(z')$ tel que : $z' - \omega = k(z - \omega)$.

Démonstration

Dire que M' est l'image de M par l'homothétie de centre Ω et de rapport k, signifie par définition que : $\overrightarrow{\Omega M'} = k\overrightarrow{\Omega M}$, ce qui se traduit en termes d'affixes par : $z' - \omega = k(z - \omega)$ ou $z' = kz + \omega(1 - k)$.

Exemple 6
Soit f la transformation du plan qui, à tout point $M(z)$ du plan associe le point $M'(z')$ tel que : $z' = -\frac{5}{2}z + 2\text{i}$.
Montrons d'abord que f admet un unique point invariant.
Pour cela, résolvons l'équation $f(\omega) = \omega$.
$f(\omega) = \omega \iff -\frac{5}{2}\omega + 2\text{i} = \omega \iff \omega = \frac{4}{7}\text{i}$.

La transformation f admet donc un unique point invariant Ω d'affixe $\omega = \frac{4}{7}\text{i}$.
Pour déterminer la nature de f, exprimons $z' - \omega$ en fonction de $z - \omega$. On a :

$$\begin{cases} z' & = -\frac{5}{2}z + 2\text{i} \\ \omega & = -\frac{5}{2}\omega + 2\text{i} \end{cases}$$

D'où en soustrayant membre à membre : $z' - \omega = -\frac{5}{2}(z - \omega)$..
On en déduit, grâce à son écriture complexe, que f est l'homothétie de centre Ω et de rapport $k = -\frac{5}{2}$.

Remarque 7 — Comme cas particulier d'une homothétie, on a la symétrie centrale, qui est une homothétie de rapport -1.
L'écriture complexe de la symétrie s de centre Ω d'affixe ω est $\text{s}(z) = z' = -z + 2\omega$.
— Lorsque O (origine du repère)est le centre de l'homothétie alors $z' = kz$.

Écriture complexe d'une rotation

Théorème 8
La rotation de centre $\Omega(\omega)$ et d'angle $\theta \in \mathbb{R}$ transforme un point $M(z)$ en un point $M'(z')$ tel que : $z' - \omega = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}(z-\omega)$ ou $z' = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}z + \omega(1-\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta})$.

Démonstration

Si $M = \Omega$, la relation $z' - \omega = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}(z-\omega)$ est triviale.
Si $M \neq \Omega$, dire que M' est l'image de M par la rotation de centre Ω et d'angle θ signifie que :

$$\begin{cases} \Omega M' = \Omega M \\ \left(\overrightarrow{\Omega M}\,;\,\overrightarrow{\Omega M'}\right) = \theta \quad [2\pi] \end{cases}$$

Ce qui se traduit en termes d'affixes par :

$$\begin{cases} |z'-\omega| = |z-\omega| \\ \arg\left(\dfrac{z'-\omega}{z-\omega}\right) = \theta \quad [2\pi] \end{cases}$$

On en déduit que : $\dfrac{z'-\omega}{z-\omega} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$ d'où $z' - \omega = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}(z-\omega)$.

Cas particulier

Si Ω =O, l'écriture complexe de la rotation devient : $z' = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}z$.

Exemple 9
On donne deux points distincts $A(a)$ et $B(b)$. On construit le carré ABCD de sens direct.
Quelle est l'affixe ω du centre Ω du carré ABCD ?
Il suffit de remarquer que B est l'image de A par la rotation de centre Ω et d'angle $\dfrac{\pi}{2}$.
$b-\omega = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{2}}(a-\omega) = \mathrm{i}(a-\omega) \Longleftrightarrow \omega(1-\mathrm{i}) = a\mathrm{i} - b \Longleftrightarrow \omega = \dfrac{a\mathrm{i}-b}{1-\mathrm{i}}$.

Exercice 10

1. Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé direct $(O; \vec{u}, \vec{v})$.

   Soit A, B et C les points d'affixes respectives $z_A = 4$, $z_B = 1+3\mathrm{i}$ et $z_C = 1-\mathrm{i}$.

   (a) Déterminer l'écriture complexe de la translation de vecteur $\overrightarrow{AB}$ puis trouver l'image C' du point C.

   (b) Déterminer l'écriture complexe de la rotation de centre O et d'angle $\dfrac{\pi}{3}$ puis trouver l'image A' de A.

   (c) Déterminer le rapport de l'homothétie de centre $\Omega(1)$ qui transforme B en C.

   (d) Déterminer le centre de la rotation d'angle $\dfrac{\pi}{4}$ qui transforme B en C.

2. Déterminer la nature et les éléments caractéristiques des transformations suivantes :

a) $T_1 : z' = \left(-\frac{1}{2} + \mathrm{i}\frac{\sqrt{3}}{2}\right)z + 2\mathrm{i}(1 - \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{2\pi}{3}})$ **b)** $T_2 : z' = -\sqrt{3}z + (4+\mathrm{i})(1+\sqrt{3})$

I - Similitudes directes

Définition 11 (Rappel)
On appelle similitude plane directe, toute transformation du plan $\mathscr{P}$ dans lui-même qui multiplie les distances par un nombre réel $k > 0$, appelé *rapport* et qui conserve les mesures d'angles.

Les éléments caractéristiques d'une similitude directe sont :
le rapport,
le centre,
l'angle.

Exemple 12 — Une translation de vecteur non nul est une similitude directe de rapport $k = 1$ et d'angle $\theta = 0$.

— Une homothétie de centre Ω et de rapport k est une similitude directe de centre Ω , de rapport $|k|$ et d'angle $\theta = 0$ si $k > 0$ ou $\theta = \pi$ si $k < 0$.

— Une rotation de centre Ω et d'angle θ est une similitude directe de rapport $k = 1$, de centre Ω et d'angle θ.

Toute similitude directe S de centre Ω, de rapport k et d'angle θ est notée par $\mathrm{S}(\Omega, k, \theta)$.
Ω, k et θ sont les éléments caractéristiques de la similitude directe.

Propriétés géométriques d'une similitude directe

Soit S la similitude directe de centre Ω, de rapport k et d'angle θ qui transforme le point $M(z)$ en $M'(z')$.

$$S(M) = M' \Longleftrightarrow \begin{cases} \Omega M' = k\,\Omega M \\ \left(\overrightarrow{\Omega M}, \overrightarrow{\Omega M'}\right) = \theta \quad [2\pi] \end{cases}$$

Remarque 13 — Le centre de la similitude est le seul *point invariant.*

— Une similitude directe qui n'admet pas de point invariant est une translation.

Propriété 14 — Une similitude directe multiplie :

– les distances par k,
– les aires par k^2.

— Une similitude directe conserve :

– l'alignement des points,
– le parallélisme,

  - l'orthogonalité,
  - le contact.
  - le barycentre
  - les angles orientés.

— Par une similitude directe S l'image d'une droite Δ passant les points A et B est une droite Δ' passant par les images A' et B' de A et B par S.

— Par une similitude directe S l'image d'un cercle $\mathscr{C}$ de centre I et de rayon r est un cercle $\mathscr{C}'$ de centre I' image de I par S et de rayon kr .

— La réciproque d'une similitude directe $S(\Omega,\ k,\ \theta)$ est une similitude directe $S^{-1}\left(\Omega,\ \frac{1}{k},\ -\theta\right)$.

— La composée de deux similitudes directes de même centre , est une similitude directe de même centre, de rapport le produit des rapports et d'angle, la somme des angles.

$$\mathrm{S}(\Omega,\, k,\, \theta)\circ \mathrm{S'}(\Omega',\, k',\, \theta')\mathrm{=S}(\Omega,\, k+k',\, \theta+\theta')$$

Remarque 15
Soit la similitude directe $S(\Omega,\, k,\, \theta)$. Alors :

$$\underbrace{S\circ S\circ S\circ\cdots S\circ S\circ S}_{n\ \text{fois}}=S(\Omega,\ k^n,\ n\theta)$$

Expression complexe d'une similitude directe

Activité d'introduction 16
Le plan complexe $\mathscr{P}$ est muni du repère orthonormé (O ; I , J).

On considère l'application f du plan complexe $\mathscr{P}$ dans lui-même qui à tout point M d'affixe z associe le point M' d'affixe $z' = (1+\mathrm{i})z+2-3\mathrm{i}$.

1. Déterminer l'image A' du point A d'affixe $2+\mathrm{i}$.
2. Quelle est l'affixe de l'image du point O ? du point I ? du point J ?
3. Déterminer l'affixe de l'antécédent du point $B'(-2\mathrm{i})$.
4. Quelle est l'affixe de l'antécédent du point O ?
5. Déterminer le point Ω dont l'affixe ω vérifie $f(\omega)=\omega$.
6. Exprimer z en fonction de z' sous la forme $z = az'+b$ où a et b sont des nombres complexes écrits sous forme algébrique.

Activité d'introduction 17
On considère l'application f du plan complexe $\mathscr{P}$ dans lui-même qui à tout point M d'affixe z associe son image M' d'affixe z' telle que $z' = az+b$ où a et b sont des nombres complexes

non nuls.

On donne les points $A(1)$, $B(\mathrm{i})$, $A'(1+2\mathrm{i})$ et $B'(-1+6\mathrm{i})$

1. Déterminer a et b sachant que $f(A)=A'$ et $f(B)=B'$.
2. Déterminer ω tel que $f(\omega)=\omega$.
3. Exprimer $z'-\omega$ en fonction de $z-\omega$.
4. En posant $z'=x'+\mathrm{i}y'$ et $z=x+\mathrm{i}y$ exprimer x' et y' en fonction de x et y.

Théorème 18 (Écriture complexe)
La similitude directe S de centre Ω d'affixe ω, de rapport k et d'angle θ transforme un point $M(z)$ en un point $M'(z')$ tel que : $z'-\omega=k\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}(z-\omega)$ ou $z'=k\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}z+\omega(1-k\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta})$.

Démonstration

$$S(M)=M' \iff \begin{cases} \Omega M'=k\,\Omega M \\ \left(\overrightarrow{\Omega M}\,,\,\overrightarrow{\Omega M'}\right)=\theta \quad [2\pi] \end{cases} \iff \begin{cases} \dfrac{\Omega M'}{\Omega M}=k \\ \left(\overrightarrow{\Omega M}\,,\,\overrightarrow{\Omega M'}\right)=\theta \quad [2\pi] \end{cases} \iff \begin{cases} \left|\dfrac{z'-\omega}{z-\omega}\right|=k \\ \arg\left(\dfrac{z'-\omega}{z-\omega}\right)=\theta \quad [2\pi] \end{cases}$$

$$\iff \frac{z'-\omega}{z-\omega}=k\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} \iff z'-\omega=k\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}(z-\omega) \text{ ou } z'=k\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}z+\omega(1-k\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}).$$

Conséquence 19
Toute similitude directe a une écriture complexe de la forme : $z'=az+b$ où $a\in\mathbb{C}^{\star}$, $b\in\mathbb{C}$ et z' l'affixe de l'image du point d'affixe z.

Réciproque

Toute transformation f admettant une écriture de la forme : $z'=az+b$ avec $a\neq 0$ est une similitude directe de rapport $k=|a|$ et d'angle $\theta=\arg a$.

Démonstration

Soient M et N points quelconques du plan d'images respectives M' et N' par f.

$\begin{cases} z_{N'} &= az_N+b \\ z_{M'} &= az_M+b \end{cases}$ alors $z_{N'}-z_{M'}=a(z_N-z_M)$ d'où $|z_{N'}-z_{M'}|=|a|\,|z_N-z_M|$.

D'où $M'N'=|a|\times MN$

Et $a\neq 0$, donc f est une similitude de rapport $|a|$.

De plus, comme $a\neq 0$, son argument existe et $\arg(z'_N-z'_M)=\arg a+\arg(z_N-z_M)$

Donc : $\left(\vec{u},\overrightarrow{M'N'}\right)=\arg a+\left(\vec{u},\overrightarrow{MN}\right)$.

D'où : $\left(\overrightarrow{MN},\overrightarrow{M'N'}\right)=\arg a$

f est une similitude et l'angle entre un vecteur et son image est constant donc :

f est donc une similitude directe et son angle vaut cette constante : $\arg a$.

Théorème 20
Soient A, B, A' et B' quatre points donnés du plan tels que A ≠ B et A' ≠ B'.
Alors, il existe une unique similitude directe s telle que : s(A) = A' et s(B) = B'.

Démonstration

Si une telle similitude s existe alors il existe deux nombres complexes a et b , avec $a \neq 0$ tels que :
$z_{A'} = az_A + b$ et $z_{B'} = az_B + b$
alors : $z_{B'} - z_{A'} = a(z_B - z_A)$ soit $a = \dfrac{z_{B'} - z_{A'}}{z_B - z_A}$ et on a : $b = z_{A'} - az_A$
Si s existe, le couple (a, b) est unique et s est donc elle aussi unique.
Soit s la similitude directe dont l'écriture complexe est $z' = az+b$ où $a = \dfrac{z_{B'} - z_{A'}}{z_B - z_A}$ et $b = z_{A'} - az_A$.

B étant différent de A, donc a est défini.
$z_{A'} = az_A + b$ et $z_{B'} - z_{A'} = az_B - az_A$
Donc $z_{B'} = az_B - az_A + z_{A'} = az_B + b$
De plus, comme $B \neq A$, donc a est non nul et s est donc définie.
D'où : $s(A) = A'$ et $s(B) = B'$.

Une similitude directe transformant A en A' et B en B' existe donc et est unique.

Expression analytique d'une similitude directe

À partir de l'écriture complexe d'une similitude s directe, on peut en déduire l'écriture analytique.
Pour cela on remplace z par $x + \mathrm{i}y$ et z' par $x' + \mathrm{i}y'$ dans $z' = az + b$. Puis on exprime x' et y' en fonction de x et y.

Exemple 21
Soit s : $z' = (1 - \mathrm{i})z + 1 + 5\mathrm{i}$

$x' + \mathrm{i}y' = (1 - \mathrm{i})(x + \mathrm{i}y) + 1 + 5\mathrm{i} \Longleftrightarrow x' + \mathrm{i}y' = x + y + 1 + \mathrm{i}(-x + y + 5) \Leftrightarrow \begin{cases} x' &= x + y + 1 \\ y' &= -x + y + 5 \end{cases}$

Utilisation des nombres complexes pour déterminer la nature d'une transformation géométrique

Théorème 22
Soit une similitude directe s d'écriture complexe : $z' = az + b$ avec $a \neq 0$.

— si $a = 1$: s est la translation de vecteur d'affixe b.

— si $a \neq 1$: alors s admet un unique point invariant d'affixe : $\omega = \dfrac{b}{1 - a}$ et s est la composée :

  — de l'homothétie de centre $\Omega(\omega)$ et de rapport $|a|$ (rapport de s) et

  — de la rotation de centre $\Omega(\omega)$ et d'angle : $\arg a$ (angle de s)

  Ω est appelé le centre de la similitude directe s.

  Et une écriture complexe de s est alors $z' - \omega = |a|e^{\mathrm{i}\arg a}(z - \omega)$.

— si $|a| = 1$ et $a \neq 1$ alors s est une rotation de centre d'affixe $\omega = \dfrac{b}{1 - a}$ et d'angle $\arg a$.

— si $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\,,1\}$ alors s une homothétie de centre d'affixe $\omega = \dfrac{b}{1-a}$ et de rapport a.

Récapitulatif des écritures complexes

Transformation	**Écriture complexe**
Translation de vecteur $\vec{u}$	$z' = z + b \quad (b = \text{affixe de } \vec{u})$
Homothétie de centre Ω, rapport k	$z' - \omega = k(z - \omega) \quad (\omega = \text{affixe de } \Omega)$
Rotation de centre Ω, angle θ	$z' - \omega = e^{i\theta}(z - \omega) \quad (\omega = \text{affixe de } \Omega)$
Similitude directe de centre Ω, $k > 0$, $\theta \in \mathbb{R}$	$z' - \omega = ke^{i\theta}(z - \omega) \quad (\omega = \text{affixe de } \Omega)$

Exercice 23 1. Identifier la transformation définie par l'écriture complexe donnée et préciser ses éléments caractéristiques

a) $z' = z - \mathrm{i}\sqrt{3}$

b) $z' = \frac{\sqrt{2}}{2}(1-\mathrm{i})z - \mathrm{i}$

c) $z' = 4z - 2\mathrm{i}$

d) $z' = -\mathrm{i}z + 1 + \mathrm{i}$

2. Donner l'écriture complexe des similitudes directes ci-dessous de centre Ω d'affixe ω , de rapport k et d'angle θ.

a) $\omega = 2 + \mathrm{i},\ \ k = 2,\ \theta = \dfrac{\pi}{2}$

b) $\omega = -\mathrm{i},\ \ k = \dfrac{1}{2},\ \theta = \dfrac{\pi}{2}$

c) $\omega = 1 + 2\mathrm{i},\ \ k = 3,\ \theta = \dfrac{\pi}{2}$

d) $\omega = 0,\ \ k = \sqrt{3},\ \ \theta = \dfrac{3\pi}{4}$

d) $\omega = 1 + \mathrm{i}\ ,\ \ k = 2,\ \theta = \pi$

e) $\omega = -1\ ,\ \ k = 7,\ \theta = 0$