

Nombres complexes 1

Initiation sur les nombres complexes

Exercice 1 1. Rappeler la forme algébrique d'un nombre complexe z .

2. Déterminer la forme algébrique les nombres complexes suivants.

$$\text{a) } z = (4 + i\sqrt{3})(1 - i) \quad \text{b) } z = \frac{\sqrt{2} + i\sqrt{3}}{\sqrt{2} - i\sqrt{3}} \quad \text{c) } z = \frac{-1 - 2i}{(1 + i)^2} \quad \text{d) } z = \frac{3 - 2i}{2 + i} - \frac{i + 3}{1 - i}$$

Exercice 2

Résoudre dans \mathbb{C} les équations suivantes. On donnera les solutions sous forme algébrique.

1. $5iz - 3 = -2z - 5i$
2. $\frac{iz + 1}{z - 3i} = 2 + i$
3. $(1 - i)\bar{z} = 1 - 3i$
4. $(z - i)^2 + (z - 3i)^2 = 0$
5. $2z - \bar{z} = 3 - 6i$
6. $(3 + i)z - (1 - 2i)\bar{z} = 1 - 2i$

Exercice 3

On considère dans le plan complexe muni du repère orthonormal $(O; \vec{u}, \vec{v})$, les points A, B, C et D d'affixes respectives $z_A = 3 + i$, $z_B = 1 + 3i$, $z_C = 1 - i$ et $z_D = \bar{z}_A$.

1. Placer ces points dans le repère.
2. À l'aide de nombres complexes calculer AB, AC et BC .
3. En déduire la nature du triangle ABC .
4. Le jardin potager de M. Mbaye est formé du quadrilatère $ABCD$ qu'il voudrait clôturer par un fil barbelé en laissant une porte de 0.8 mètre. Le rouleau de 5m de ce fil lui est vendu à 3500 FCFA. (On prendra dans cette question 1 m pour unité)
Combien va-t-il dépenser pour clôturer son jardin.

Exercice 4

Soit $z = x + iy$ où x et y sont des réels et M son image.

$$\text{Soit } Z = \frac{z + 2 - i}{z - i}$$

1. Écrire $Re(Z)$ et $Im(Z)$ en fonction de x et y .
2. Déterminer l'ensemble des points $M(z)$ tel que Z soit réel.
3. Déterminer l'ensemble des points $M(z)$ tel que Z soit imaginaire pur.
4. Déterminer l'ensemble des points $M(z)$ tel que $|Z| = 1$.

5. Déterminer l'ensemble des points $M(z)$ tel que $|Z| = 2$.

Exercice 5

Identifier la réponse juste et donner la justification.

- Pour tout nombre complexe z et tout réel y , le conjugué de $z + iy$ est égale à :
a) $z - iy$ **b)** $\bar{z} - iy$ **c)** $z - i\bar{y}$
- La partie imaginaire du complexe z est égale à :
a) $\frac{z + \bar{z}}{2}$ **b)** $\frac{z - \bar{z}}{2i}$ **c)** $\frac{z - \bar{z}}{2}$
- Le module du nombre complexe $z + i$ est égal :
a) $|z| + 1$ **b)** $\sqrt{z^2 + 1}$ **c)** $|iz - 1|$
- Le système $\begin{cases} (1 - i)z + iz' = 2 - 3i \\ (1 + i)z - (2 + 3i)z' = 3i \end{cases}$
a pour ensemble solution dans \mathbb{C}^2
a) $(2 + i, -i)$ **b)** $(2 + i, i)$ **c)** $(2 - i, -i)$

Exercice 6

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé $(O; \vec{u}, \vec{v})$. L'unité graphique est le mètre.

- **M.DIOP** a un terrain de forme rectangulaire dont les dimensions x et y sont tels que :

$$(2 + 3i)z + (1 - 3i)\bar{z} = 6 + 3i \text{ où } z = x + iy$$

Il voudrait construire sur ce terrain une école, et pour cela il a besoin de recouvrir toute la superficie de ce terrain avec des carreaux. Le carton de carreaux coûte 14 000 FCFA et peut recouvrir une superficie de $5m^2$.

- Le terrain que **M.NDIAYE** possède est situé en plein quartier administratif dont la forme est celle des points M d'affixes $z \neq -1 + 2iy$ tel que $\frac{z - 7 + 4i}{z + 1 - 2i}$ soit un imaginaire pur. Il souhaite l'hypothéquer avec une voiture dont la valeur est estimée à 1 170 000 FCFA. Sachant que son terrain a une valeur de 15000 F CFA le mètre carré.

Votre travail en tant qu'élève de TS2, consiste à résoudre les tâches suivantes en justifiant votre démarche par un raisonnement bien détaillé.

Tâches :

- Déterminer une estimation du montant nécessaire pour l'achat des carreaux devant recouvrir entièrement le terrain de **M.DIOP**.
- M.NDIAYE** réussira-t-il à être propriétaire de cette voiture?