Similitudes directes plan complexe

Exercice 1
Déterminer en justifiant la nature des transformations du plan suivantes :

1. $z' = z + 1 - 2\mathrm{i}$
2. $z' = \mathrm{i}z + 1$
3. $z' = -3z - 1 + \mathrm{i}$
4. $z' = (1 + \mathrm{i})z - 1 + \mathrm{i}$

Exercice 2
Déterminer l'écriture complexe des transformations suivantes :

1. Translation de vecteur $\vec{u}$ d'affixe $-2 + 3\mathrm{i}$.
2. Rotation de centre A d'affixe $-\mathrm{i}$ et d'angle $\frac{3\pi}{4}$.
3. Homothétie de centre A d'affixe $-1 + \mathrm{i}$ et de rapport $\frac{1}{2}$.
4. Similitude directe de centre A d'affixe -2, de rapport 2 et d'angle $-\frac{2\pi}{3}$.

Exercice 3
Dans chacun des cas suivants, déterminer l'écriture complexe, puis la nature et les éléments caractéristiques des transformations $s_2 \circ s_1$ et $s_1 \circ s_2$.

1. $s_1 : z' = 2\mathrm{i}z + 1 - 2\mathrm{i} \quad \text{et} \quad s_2 : z' = \frac{1}{2}\mathrm{i}z + 1 - \frac{1}{2}\mathrm{i}$
2. $s_1 : z' = (1 - \mathrm{i})z + 1 + \mathrm{i} \quad \text{et} \quad s_2 : z' = -2z$

Exercice 4
Soit f l'application du plan dans lui-même d'expression analytique :

$$\begin{cases} x' = x + y + 2 \\ y' = -x + y + 1 \end{cases}$$

1. Déterminer l'écriture complexe de f.
2. Déterminer la nature et les éléments caractéristiques de f.

Exercice 5
Dans le plan complexe, on considère les points A et C d'affixes respectives $1 + \mathrm{i}\sqrt{3}$ et $1 - \mathrm{i}\sqrt{3}$, et l'application f définie par $z' = e^{2\mathrm{i}\frac{\pi}{3}} z$.

1. Déterminer les images des points A et C par f.

2. En déduire l'équation de l'image de la droite (AC).

Exercice 6
Soit le plan muni d'un repère orthonormé $(o, \vec{u}, \vec{v})$, Ω est le point de coordonnées $(2,1)$, S est la similitude de centre Ω, de rapport $\sqrt{2}$ et d'angle $\frac{\pi}{4}$, (D) est la droite $3x+3y-4=0$, (C) le cercle de centre O et de rayon 3.

1. Soit $M(x,y)$ un point et $M'(x',y')$ son image par S. Exprimer x' et y' en fonction de x et y.
2. En déduire l'équation de (D') image de (D) par S.
3. En déduire l'équation de C' image de C par S.

Exercice 7
Soit S la similitude directe d'écriture complexe : $z' = 3\mathrm{i}z - 9 - 3\mathrm{i}$. Déterminer l'image par S :

1. Du cercle de centre $K(1-3\mathrm{i})$ et de rayon 1.
2. De la droite (D) d'équation $x = 1$.

Exercice 8
Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormal $(o, \vec{u}, \vec{v})$. On donne $Z_A = -1-\mathrm{i}$, $Z_B = 2-\mathrm{i}$, $Z_C = -1+2\mathrm{i}$. On considère la similitude S de centre B qui transforme A en C.

1. Déterminer le rapport et l'angle de la similitude S.
2. Donner l'écriture complexe de S.
3. $\mathscr{C}$ est le cercle circonscrit au triangle ABC, déterminer les caractéristiques de $\mathscr{C}'$ image par S.

Exercice 9
On considère les points $Z_A = 2\mathrm{i}$, $Z_B = -\sqrt{3}+2\mathrm{i}$, $Z_C = -2\sqrt{3}-\mathrm{i}$.

1. Donner l'écriture complexe de la similitude directe qui transforme A en B et B en C.
2. Déterminer l'affixe du centre, le rapport et l'angle de cette similitude.

Exercice 10
A et B ont pour affixes $Z_A = 3\mathrm{i}$ et $Z_B = 4+\mathrm{i}$. r est la rotation de centre A et d'angle $\frac{\pi}{2}$.

1. Montrer que $z' = \mathrm{i}z + 3 + 3\mathrm{i}$.
2. Montrer que $Z_C = 2+7\mathrm{i}$ si $r(B) = C$.
3. Montrer que ABC est rectangle isocèle en A.
4. Soit D le milieu de $[AC]$, $h(z) = \frac{1}{2}z + \frac{3}{2}\mathrm{i}$.
   (a) Montrer que $h(C) = D$.

(b) Exprimer $z' - 3\mathrm{i}$ en fonction de $z - 3\mathrm{i}$ et en déduire la nature de h.

5. S est la similitude de centre A, de rapport $\frac{1}{2}$ et d'angle $\frac{\pi}{2}$. Donner son écriture complexe.

Exercice 11

Soit $a = -1 - \mathrm{i}$ et (z_n) la suite définie par :

$$\begin{cases} z_0 = 0, \quad z_1 = \mathrm{i} \\ z_{n+1} = (1-a)z_n + az_{n-1} \end{cases}$$

1. Déterminer z_2 et z_3.
2. Soit $u_n = z_{n+1} - z_n$
   (a) Déterminer u_0 et u_1.
   (b) Montrer que (u_n) est géométrique de raison $-a$.
   (c) Exprimer u_n en fonction de n et a.
3. Montrer que $S_n = z_n$ avec $S_n = u_0 + \cdots + u_{n-1}$, puis que $z_n = -1 + (1+\mathrm{i})^n$.
4. (a) Déterminer le module et un argument de a.
   (b) Donner la forme algébrique de z_{19}.

Exercice 12

Soit $T(z) = (1 + \mathrm{i}\sqrt{3})z + \sqrt{3}$.

1. (a) Montrer que T admet un point invariant J.
   (b) Déterminer la nature et les éléments caractéristiques de T.
   (c) Exprimer $\overrightarrow{JM'}$ en fonction de $\overrightarrow{JM}$ et donner l'angle $(\overrightarrow{JM}, \overrightarrow{JM'})$.
2. Soit I d'affixe -1.
   (a) Déterminer $I' = T(I)$.
   (b) Déterminer l'ensemble $\mathscr{D}$ des z tels que $|z+1| = |\mathrm{i}z+1|$.
   (c) Déterminer $\mathscr{C}$ des z tels que $|(1+\mathrm{i})z - 1 + \mathrm{i}| = |1-\mathrm{i}|$.
   (d) Déterminer $\mathscr{D}' = T(\mathscr{D})$, $\mathscr{C}' = T(\mathscr{C})$.
3. Soit $S(z) = \frac{\mathrm{i}}{2}z - \mathrm{i}$.
   (a) Déterminer le rapport et l'angle de $T \circ S$.
   (b) En déduire la nature de $T \circ S$.
   (c) Donner l'écriture complexe de $T \circ S$.
4. (a) Montrer que T^3 est une homothétie.
   (b) Déterminer les $n \in \mathbb{N}$ pour lesquels T^n est une homothétie.

Exercice 13
Soit $T(z) = a^2 z + b$ et le point $I(2\mathrm{i})$.

1. T est une translation de vecteur $\vec{U}(0,2)$.
2. T est une homothétie de rapport -4 et de centre I.
3. T est une rotation de centre I et d'angle $-\frac{\pi}{2}$.
4. T est une similitude directe transformant $A(-1,0)$ en I et de centre $B(-1,1)$.