25 Fonction logarithme népérien (TL)

Avant l'invention des calculateurs (ordinateurs, calculatrices, ...) les mathématiciens ont cherché à simplifier les calculs à effectuer.

1) Durant l'Antiquité (IIIème siècle avant J.C.), Archimède avait remarqué que pour multiplier certains nombres, il suffisait de savoir additionner ! et qu'il était plus facile d'effectuer des additions plutôt que des multiplications !

2) John Napier (ou Neper), baron écossais (1550-1617), a repris et étendu l'idée d'Archimède et a mis au point une méthode générale qui permet d'effectuer
-des additions à la place de multiplications
-des soustractions à la place de divisions ;
ce sont les **logarithmes.**

3) Modéliser la forme d'un cyclone, d'un coquillage ou d'une fleur de tournesol, mais aussi représenter sur un même graphique les distances des planètes en fonction de leurs périodes de révolution , sont autant d'activités qui utilisent une même famille de fonctions : les logarithmes.

I - Définition et propriétés

Définition 1
On appelle fonction logarithme népérien, notée ln , la fonction dérivable sur $]0\,,\,+\infty[$ qui a pour fonction dérivée $x \longmapsto \dfrac{1}{x}$ et qui s'annule pour $x = 1$.

Exemple 2 (calcul à l'aide de la calculatrice)

x	-3	-1	0	0.2	0.5	1	2	8	50	100
$\ln x$	$\times$	$\times$	$\times$	$-1,609$	$-0,693$	0	$0,693$	$2,079$	$3,912$	$4,605$

Conséquence 3
1. Le domaine de définition de la fonction ln est $]0\,,\,+\infty[$.
2. La fonction ln est dérivable sur $]0\,,\,+\infty[$ et pour tout $x > 0$ on a $\boxed{\ln'(x) = \dfrac{1}{x}}$.
3. $\boxed{\ln(1) = 0}$.
4. La dérivée de la fonction ln étant strictement positive sur $]0\,,\,+\infty[$, donc la fonction ln est strictement croissante sur $]0\,,\,+\infty[$.

Propriété 4

$$\text{Pour tous } a>0 \text{ et } b>0,\quad \begin{aligned} a<b &\Longleftrightarrow \ln a<\ln b\\ a>b &\Longleftrightarrow \ln a>\ln b\\ a=b &\Longleftrightarrow \ln a=\ln b \end{aligned}$$

Propriété 5 (Propriété fondamentale)

$$\text{Pour tous}\quad a>0 \quad \text{et} \quad b>0,\ \text{on a} \quad \ln(ab)=\ln a+\ln b$$

Conséquence 6 (propriétés algébriques)
Soient $a>0$ et $b>0$.

- $\ln\left(\dfrac{1}{a}\right)=-\ln a$
- $\ln\left(\dfrac{a}{b}\right)=\ln a-\ln b$
- $\ln\sqrt{a}=\frac{1}{2}\ln a$
- $\ln a^n=n\ln a \quad$ pour tout $n\in\mathbb{Q}$

II - Étude de la fonction ln

Propriété 7 (Limites)

- $\lim\limits_{x\to+\infty}\ln x=+\infty$
- $\lim\limits_{x\to 0^+}\ln x=-\infty$

Tableau de variation
Des propriétés précédentes, on en déduit le tableau de variation suivant.

x	0	$+\infty$
$\ln'(x)$	$+$	
$\ln(x)$	$-\infty$	$+\infty$

Conséquence 8
La fonction ln est continue et strictement croissante sur $]0\,,\,+\infty[$ cela entraîne que c'est une bijection de $]0\,,\,+\infty[$ vers $\mathbb{R}$.
Donc pour tout $y\in\mathbb{R}$, il existe un unique $x\in\,]0\,,\,+\infty[$ tel que $\ln x=y$.
En particulier il existe un unique réel noté e tel que : $\boxed{\ln \mathrm{e}=1}$.

On démontre que $\mathrm{e} \simeq 2,718$, il est appelé la **constante d' Euler**.

On a alors pour tout $n \in \mathbb{Q}$, $\ln \mathrm{e}^n = n \ln \mathrm{e} = n$

Ainsi :

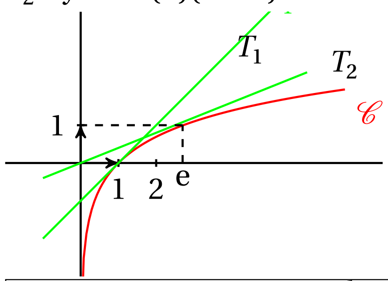
$\ln x = n \iff x = \mathrm{e}^n$	$\ln x > n \iff x > \mathrm{e}^n$	$\ln x < n \iff x < \mathrm{e}^n$

Représentation graphique de la fonction ln

On construit les tangentes T_1 et T_2 à la courbe de ln respectives aux points d'abscisses $x = 1$ et $x = \mathrm{e}$.

$\mathrm{T}_1 : y = \ln'(1)(x-1) + \ln 1$ soit $\mathrm{T}_1 : y = x - 1$

$\mathrm{T}_2 : y = \ln'(\mathrm{e})(x-\mathrm{e}) + \ln \mathrm{e}$ soit $\mathrm{T}_2 : y = \frac{1}{\mathrm{e}} x$



$\lim_{x \to 0^+} x \ln x = 0 \qquad \lim_{x \to +\infty} \dfrac{\ln x}{x} = 0$

Equations, inéquations et systèmes

Equations comportant ln

methode

Pour résoudre une équation comportant des logarithmes,

- on détermine le domaine D de résolution ;
- on transforme si possible l'équation sous la forme $\ln A = \ln B$;
- résout l'équation $A = B$;
- puis on retient que les solutions appartenant à D.

Exemple 9

Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation : $\ln(2x-3) - \ln x = 0$

L'équation est définie lorsque $2x - 3 > 0$ et $x > 0$ c'est-à-dire $x > \frac{3}{2}$. Ainsi D= $\left]\frac{3}{2}, +\infty\right[$.

L'équation devient $\ln(2x-3) = \ln x$ ce qui équivaut à $2x - 3 = x$ soit $x = 3$ qui est bien dans D. Donc S= $\{3\}$

Exemple 10

Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation : $\ln(x+5) + \ln(x+3) = \ln 15$

L'équation est définie lorsque $x + 5 > 0$ et $x + 2 > 0$ c'est-à-dire $x > -5$ et $x > -3$.

Ainsi D= $]-3\,,\,+\infty[$.
L'équation devient $\ln(x+5)(x+3) = \ln 15$
Ce qui équivaut à $(x+5)(x+3) = 15$ soit $x^2+8x+15=0$ ou encore $x^2+8x=0$ soit $x=0$ ou $x=-8$ Donc S= $\{0\}$

Equations du type $a\ln^2 x + b\ln x + c = 0$
Poser $\ln x = X$ puis résoudre l'équation E du second degré $aX^2+bX+c=0$ et enfin les équations $\ln x = X_1$ et $\ln x = X_2$ où X_1 et X_2 sont les solutions de E.

Exemple 11
Résolvons dans $\mathbb{R}$ l'équation : $(\ln x)^2 - 6\ln x + 5 = 0$.
Pour $x>0$, posons $\ln x = X$, l'équation devient $X^2-6X+5=0$ d'où $X=1$ ou $X=5$.
Ainsi $\ln x = 1 \Longleftrightarrow x = \mathrm{e}$ ou $\ln x = 5 \Longleftrightarrow x = \mathrm{e}^5$ d'où S= $\{\mathrm{e}, \mathrm{e}^5\}$

Inéquation comportant ln
methode
Pour résoudre une inéquation comportant des logarithmes,

- on détermine le domaine D de résolution;
- on transforme si possible l'inéquation sous la forme $\ln A < \ln B$ ou $\ln A \geq \ln B$;
- résout l'inéquation $A<B$ ou $A \geq B$;
- puis on retient que les solutions appartenant à D.

Exemple 12
Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation : $\ln(2x-3) - \ln x < 0$.
L'inéquation est définie lorsque $2x-3>0$ et $x>0$ c'est-à-dire $x>\frac{3}{2}$. Ainsi D= $]\frac{3}{2}\,,\,+\infty[$.
L'inéquation devient $\ln(2x-3) < \ln x$ ce qui équivaut à $2x-3<x$ soit $x<3$ qui est bien dans D. Donc S= $]\frac{3}{2}\,,\,+\infty[\,\cap\,]-\infty\,,\,3[\; = \;]\frac{3}{2}\,,\,3[$

Exemple 13
Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation : $\ln(x+5)+\ln(x+3) \leq \ln 15$
L'inéquation est définie lorsque $x+5>0$ et $x+2>0$ c'est-à-dire $x>-5$ et $x>-3$.
Ainsi D= $]-3\,,\,+\infty[$.
L'inéquation devient $\ln(x+5)(x+3) \leq \ln 15$
Ce qui équivaut à $(x+5)(x+3) \leq 15$ soit $x^2+8x+15 \leq 0$ ou encore $x^2+8x \leq 0$.

x	$-\infty < x < -8$	$x=-8$	$-8<x<0$	$x>0$
x^2+8x	$+$	0	$-$	$+$

Donc S= $]-3\,,\,+\infty[\,\cap\,[-8\,,\,0] = \;]-3\,,\,0]$

Systèmes d'équations comportant ln

Exemple 14
Résolvons le système suivant.
$$\begin{cases} 2\ln x + 3\ln y = 2 \\ 5\ln x - \ln y = 22 \end{cases}$$
Le système est défini pour $x > 0$ et $y > 0$.

En posant $X = \ln x$ et $Y = \ln y$, le système devient : $\begin{cases} 2X + 3Y = 2 \\ 5X - Y = 22 \end{cases}$

En utilisant la méthode d'addition par exemple, on trouve $X = 4$ et $Y = -2$.

Puis $\ln x = 4 \Longleftrightarrow x = \mathrm{e}^4$ et $\ln y = -2 \Longleftrightarrow y = \mathrm{e}^{-2}$

D'où S= $\left\{\left(\mathrm{e}^4, \mathrm{e}^{-2}\right), \left(\mathrm{e}^{-2}, \mathrm{e}^4\right)\right\}$

Exemple 15
Résolvons le système suivant.
$$\begin{cases} \ln x + \ln y = \ln 12 \\ \ln(x+y) = \ln 2 + \ln 4 \end{cases}$$
Le système est défini pour $x > 0$ et $y > 0$.

On peut réécrire le système sous la forme :
$$\begin{cases} \ln xy = \ln 12 \\ \ln(x+y) = \ln 8 \end{cases} \quad \text{soit} \begin{cases} xy = 12 \\ x + y = 8 \end{cases}$$
Ainsi les réels x et y vérifient l'équation du second degré $X^2 - 8X + 12 = 0$

On trouve $X_1 = 2$ et $X_2 = 6$ d'où S= $\{(2,6), (6,2)\}$

III - Etude des fonctions faisant intervenir ln

Soit u une fonction définie sur un intervalle I.
On considère la fonction f définie pour tout $x \in I$ par : $f(x) = \ln(u(x))$.
Domaine de définition
$f(x)$ existe si et seulement si $u(x) > 0$

Exemple 16
$f(x) = \ln\left(x^2 - 1\right)$ existe si et seulement si $x^2 - 1 > 0$ c'est-à-dire $x < -1$ ou $x > 1$

$Df =]-\infty\,,\, -1[\, \cup\,]1\,,\, +\infty[$

Remarque 17
• Attention le domaine de définition de $\ln u$ n'est pas forcément celui de la fonction $\ln x$ de la définition initiale.

- $f(x) = \ln|u(x)|$ existe si et seulement si $u(x) \neq 0$

Exemple 18
$f(x) = \ln\left|\dfrac{x-3}{x-2}\right|$ existe si et seulement si $\dfrac{x-3}{x-2} \neq 0$ si et seulement si $x \neq 3$ et $x \neq 2$ c'est-à-dire $x \in \mathbb{R} \setminus \{2,3\}$. Ainsi $Df =]-\infty\,,\,2[\cup]2\,,\,3[\cup]3\,,\,+\infty[$

Propriété 19 (Limites)
- Si u tend vers L alors $\ln u$ tend vers $\ln L$.
- Si u tend vers $+\infty$ alors $\ln u$ tend vers $+\infty$.
- Si u tend vers 0^+ alors $\ln u$ tend vers $-\infty$.

Exemple 20
- $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x+3}{x-8} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x}{x} = 1$ donc $\lim\limits_{x\to+\infty} \ln\left(\dfrac{x+3}{x-8}\right) = \ln 1 = 0$
- $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{x+3}{x-8} = \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{x}{x} = 1$ donc $\lim\limits_{x\to-\infty} \ln\left(\dfrac{x+3}{x-8}\right) = \ln 1 = 0$
- $\lim\limits_{x\to1^+} x^2-1 = 0^+$ donc $\lim\limits_{x\to1^+} \ln\left(x^2-1\right) = -\infty$
- $\lim\limits_{x\to1^-} x^2-1 = 0^+$ donc $\lim\limits_{x\to1^-} \ln\left(x^2-1\right) = -\infty$

Dérivée
Nous admettons le théorème suivant.

Théorème 21
- Si u est une fonction dérivable et strictement positive sur un intervalle I alors la fonction $\ln u$ est dérivable sur I et on a : $(\ln u)' = \dfrac{u'}{u}$
- Si u est une fonction dérivable et non nulle sur un intervalle I alors la fonction $\ln|u|$ est dérivable sur I et on a : $(\ln|u|)' = \dfrac{u'}{u}$

Exemple 22
- La fonction $x \longmapsto 2x-1$ est dérivable et strictement positive sur $\left]\dfrac{1}{2}\,,\,+\infty\right[$ donc la fonction $x \longmapsto \ln(2x-1)$ est dérivable sur ; $]\frac{1}{2}\,,\,+\infty[$ et pour tout $x > \frac{1}{2}$, on a : $\ln'(2x-1) = \dfrac{2}{2x-1}$.
- Soit f la fonction définie par $f(x) = \ln\left(x^2+3x-4\right)$
  $\ln\left(x^2+3x-4\right)$ existe si et seulement si $x^2+3x-4 > 0$.
  On recherche les racines de $u(x) = x^2+3x-4$.
  $\Delta = 3^2 - 4\times1(-4) = 25 = 5^2$. Le trinôme a deux racines : $x_1 = \dfrac{-3-5}{2} = -4$ et $x_2 = \dfrac{-3+5}{2} = 1$.
  $u(x)$ est du signe de $a = 1$, soit positif sauf entre les racines.
  Donc f est bien définie sur $]-\infty\,;\,-4[\cup]1\,;\,+\infty[$.

u est dérivable (car polynôme) et strictement positive sur $]-\infty\,;\,-4[\cup]1\,;\,+\infty[$.
Donc $f'(x)=\ln'\left(x^2+3x-4\right)=\dfrac{2x+3}{x^2+3x-4}$