22 Limites et continuité.

NB : Lorsque nous écrivons ∞ cela peut désigner aussi bien $+\infty$ que $-\infty$.

I - Fonction continue

Définition 1
Soit f une fonction numérique d'ensemble de définition Df et a un réel.

1. On dit que la fonction f est continue en a si :
   - $a \in$Df
   - $\lim\limits_{x \to a} f(x) = f(a)$
2. On dit que la fonction f est continue sur un intervalle I si f est continue en tout réel de I.

Graphiquement, cela signifie que la courbe de f ne présente aucun point de rupture : on peut la tracer sans lever le crayon.

Conséquence 2
- Les fonctions monômes du type $x \longmapsto x^n$, $n \in \mathbb{N}$ sont continues sur $\mathbb{R}$.
- La fonction racine carrée $x \longmapsto \sqrt{x}$ est continue sur $[0\,,\ +\infty]$.
- La fonction valeur absolue $x \longmapsto |x|$ est continue sur $\mathbb{R}$.
- Les fonctions construites à partir de ces fonctions par somme, produit ou composition sont continues sur tout intervalle où elles sont définies.

Exemple 3
- Les fonctions polynômes sont continues sur $\mathbb{R}$.
- Les fonctions rationnelles sont continues sur tout intervalle inclus dans leur ensemble de définition.

Exercice 4
Calculons les limites suivantes.

- $\lim\limits_{x \to 1}(-3x^2 + 4x + 7)$
- $\lim\limits_{x \to -2} \dfrac{2x+1}{x-3}$
- $\lim\limits_{x \to 0} \sqrt{x} + |x|$

Solution.
- La fonction $x \longmapsto -3x^2 + 4x + 7$ est un polynôme donc continue en 1.
  D'où $\lim\limits_{x \to 1}(-3x^2 + 4x + 7) = -3 + 4 + 7 = 8$.

- La fonction rationnelle $x \longrightarrow \frac{2x+1}{x-3}$ est définie sur $\mathbb{R} \setminus \{3\}$ or $-2 \in \mathbb{R} \setminus \{3\}$ donc f est continue en -2 d'où $\lim\limits_{x \to -2} \dfrac{2x+1}{x-3} = \dfrac{2(-2)+1}{-2-3} = \dfrac{3}{5}$.
- $\lim\limits_{x \to 0} \sqrt{x} + |x| = \sqrt{0} + |0| = 0 + 0 = 0$

□

Remarque 5
$\lim\limits_{x \to a} k = k$ pour tout réel k.

Propriété 6
L'image d'un intervalle I par une fonction continue est un intervalle f(I).

Limites de fonctions élémentaires

Soit $n \in \mathbb{N}^*$

- $\lim\limits_{x \to +\infty} x^n = +\infty$
- $\lim\limits_{x \to -\infty} x^n = \begin{cases} +\infty & \text{si n pair} \\ -\infty & \text{si n impair} \end{cases}$
- $\lim\limits_{x \to +\infty} \sqrt{x} = +\infty$
- $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{1}{x^n} = 0$

II - Opérations sur les limites

Dans tout ce qui suit, la notation "FI" désigne une Forme Indéterminée, c'est à dire qu'on ne sait pas calculer par une opération élémentaire.

Limite d'une somme

Limite de f	Limite de g	Limite de $f+g$
l	l'	$l+l'$
l	$+\infty$	$+\infty$
l	$-\infty$	$-\infty$
$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$
$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$
$+\infty$	$-\infty$	FI

Exemple 7

- $\lim\limits_{x \to -\infty} x^4 + \dfrac{1}{x} = +\infty$

- $\lim\limits_{x\to 0} \sqrt{x}+x-4=-4$
- $\lim\limits_{x\to +\infty} x^2-x$ est une forme indéterminée.

Limite d'un produit

Limite de f	Limite de g	Limite de $f.g$
l	l'	$l\times l'$
l	∞	∞ on applique la règle de signes.
$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$
$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$
$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$
0	∞	FI

Exemple 8

- $\lim\limits_{x\to +\infty} x^2-x=\lim\limits_{x\to +\infty} x(x-1)=+\infty$
- $\lim\limits_{x\to +\infty} \left(x^2+3\right)\left(\frac{1}{x}-4\right)=-\infty$
- $\lim\limits_{x\to 0} \frac{2}{x}\left(x^2+5x\right)=$FI

Limite d'un quotient

Limite de f	Limite de g	Limite de f/g
l	$l'\neq 0$	$\frac{l}{l'}$
l	$+\infty$ ou $-\infty$	0
∞	l'	∞ on applique la règle de signes.
∞	∞	FI
l positif	0^+	$+\infty$
l positif	0^-	$-\infty$
l négatif	0^+	$-\infty$
l négatif	0^-	$+\infty$
∞	0	∞
0	0	FI

Exemple 9

- $\lim\limits_{x\to +\infty} \frac{-3}{x^2}=0.$
- $\lim\limits_{x\to -\infty} \frac{x^3+5}{\frac{1}{x}-3}=-\infty.$
- $\lim\limits_{x\to 0} \frac{x^2-x}{x}=FI.$

- $\lim_{x\to+\infty} \dfrac{x+2}{x-2} = \text{FI}.$

Limite d'une fonction composée

Propriété 10
Soit a, b et c trois réels ou $+\infty$ ou $-\infty$. Soit f et g deux fonctions numériques.
Si $\lim\limits_{x\to a} f(x) = b$ et $\lim_{x\to b} g(x) = c$ alors $\lim\limits_{x\to a} g\circ f(x) = c$

Exemple 11
Calculons $\lim\limits_{x\to 0}\sqrt{x^3-2x+4}$ et $\lim\limits_{x\to-\infty}\sqrt{x^2+3}$
- Posons $f(x) = x^3-2x+4$ et $g(x) = \sqrt{x}$. On a $g\circ f(x) = \sqrt{x^3-2x+4}$

Or $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = \lim\limits_{x\to 0} x^3-2x+4 = 4$ et $\lim\limits_{x\to 4} g(x) = \lim\limits_{x\to 4}\sqrt{x} = 2$ donc $\lim_{x\to 0}\sqrt{x^3-2x+4} = 2$.
- $\lim_{x\to-\infty} x^2+3 = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{x} = +\infty$ donc par composée $\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{x^2+3} = +\infty$

III - Méthodes de calcul de limites

Les opérations sur les limites ne permettent pas toujours de déterminer la limite d'une fonction. Il faut alors changer de chemin et modifier l'écriture de cette fonction... afin de pouvoir les appliquer !

Limite d'un polynôme à l'infini

Propriété 12
La limite en $+\infty$ ou en $-\infty$ d'une fonction polynôme est la limite en $+\infty$ ou en $-\infty$ du terme de plus haut degré.

Exemple 13
Déterminons la limite en $+\infty$ de la fonction polynôme f définie pour tout réel x par :
$f(x) = 3x^3-2x^2+1$.

Au premier abord, lorsque x tend vers $+\infty$:

$$\begin{cases} 3x^3 \text{ tend vers } +\infty \\ -2x^2 \text{ tend vers } -\infty \\ 1 \text{ tend vers } 1 \end{cases} \quad \text{donc } \lim_{x\to+\infty} f(x) = FI$$

L'actuelle écriture de f ne permet pas de conclure. Il nous allons donc appliquer la propriété précédente.
On a : $\lim\limits_{x\to+\infty} 3x^3-2x^2+1 = \lim\limits_{x\to+\infty} 3x^3 = +\infty$

Limite d'une fonction rationnelle à l'infini

Propriété 14
La limite en $+\infty$ ou en $-\infty$ d'une fonction rationnelle est la limite en $+\infty$ ou en $-\infty$ du quotient des termes de plus haut degré du numérateur et du dénominateur.

Exemple 15
On considère la fonction f définie par : $f(x) = \dfrac{3x^3+2x+1}{5x^4-4x^3+4}$. Déterminons sa limite en $+\infty$.

Le numérateur $3x^3+2x+1$ tend vers $+\infty$.
Le dénominateur x^4-4x^3+4 tend vers $+\infty$.
Ainsi la limite de f est une forme indéterminée.
La présente écriture de f ne permet pas de conclure. Il nous allons donc appliquer la propriété présidente.
On a : $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{3x^3+2x+1}{5x^4-4x^3+4} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{3x^3}{5x^4} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{3}{5x} = 0$

Calcul de limite en a d'une fonction non définie en a.

Règle 1
Lorsque l'on cherche la limite d'une fonction f en un réel a qui annule en même temps le numérateur et le dénominateur d'une fonction rationnelle (numérateur et dénominateur polynômes) on factorise le numérateur et le dénominateur par $(x-a)$, on simplifie la fonction puis on calcule la limite en a (lorsque c'est possible) de la fonction simplifiée.

Exemple 16
Calculons $\lim\limits_{x\to3} \dfrac{x^2-9}{x-3}$.
On a $\lim\limits_{x\to3} x^2-9=0$ et $\lim\limits_{x\to3} x-3=0$.
Nous pouvons donc factoriser le numérateur et le dénominateur chacun par $(x-3)$.
On obtient $\dfrac{x^2-9}{x-3} = \dfrac{(x-3)(x+3)}{x-3} = x+3$ donc $\lim\limits_{x\to3} \dfrac{x^2-9}{x-3} = \lim\limits_{x\to3} x+3 = 6$

Règle 2

Lorsque l'on cherche la limite d'une fonction f en un réel a qui annule en même temps le numérateur et le dénominateur d'une fonction irrationnelle (expression avec radical au dénominateur comme au numérateur), on factorise toujours par $(x-a)$ mais cette fois ci en utilisant la ou les expressions conjuguées du numérateur et du dénominateur.

Exemple 17
Calculons la limite en 1 de la fonction f définie par : $f(x) = \dfrac{\sqrt{x}-1}{x-1}$

On a $\lim\limits_{x\to 1} \sqrt{x}-1=0$ et $\lim\limits_{x\to 1} x-1=0$.

Transformons l'écriture de $\dfrac{\sqrt{x}-1}{x-1}$ en utilisant l'expression conjuguée du numérateur, il vient :

$\dfrac{\sqrt{x}-1}{x-1}=\dfrac{\left(\sqrt{x}-1\right)\left(\sqrt{x}+1\right)}{(x-1)\left(\sqrt{x}+1\right)}=\dfrac{x-1}{(x-1)\left(\sqrt{x}+1\right)}=\dfrac{1}{\sqrt{x}+1}$.

$\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{x}-1}{x-1}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{1}{\sqrt{x}+1}=\dfrac{1}{2}$.

Règle 3

Lorsque l'on cherche la limite d'une fonction f en un réel a qui annule uniquement le dénominateur, on étudie le signe du dénominateur et l'on obtient une limite à droite et une limite à gauche en a de f.

Exemple 18

Calculons la limite en 4 de la fonction f définie par : $f(x)=\dfrac{x^2-5x+6}{x-4}$

On a $\lim\limits_{x\to 4} x^2-5x+6=2$ et $\lim\limits_{x\to 4} x-4=0$

Etudions le signe du dénominateur (celui du numérateur étant connu).

x	$-\infty$	4	$+\infty$
$x-4$	$-$	|	$+$

A gauche de 4, nous pouvons écrire :$\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x<4}} x-4=\lim\limits_{x\to 4^-} x-4=0^-$

« Lire limite de $x-4$ quand x tend vers 4 à gauche. » les deux notations sont valables mais il faut savoir qu'il n'y a aucun lien entre le signe $-$ sur le 4 et celui sur 0. Il n'en est pas toujours ainsi.

Le signe $-$ sur 4 traduit le fait que x est inférieur à 4 donc il est positif, celui sur 0 traduit aussi que la valeur de $(x-4)$ est inférieure à 0 mais un nombre inférieur à 0 est négatif.

En conclusion :

$\lim\limits_{x\to 4} x^2-5x+6=2$

$\lim_{\substack{x\to 4\\ x<4}} x-4=\lim\limits_{x\to 4^-} x-4=0^-$ donc par quotient de limites $\lim\limits_{\substack{x\to 4\\ x<4}} f(x)=-\infty$.

Nous procédons de même pour la limite à droite et nous obtenons :

$\lim\limits_{x\to 4} x^2-5x+6=2$

$\lim\limits_{\substack{x\to 4\\ x>4}} x-4=\lim\limits_{x\to 4^+} x-4=0^+$

$\lim\limits_{\substack{x\to 4\\ x>4}} f(x)=+\infty$.

La fonction f n'admet pas de limite en 4 car la limite à droite est différente de celle à gauche.

Remarque 19
Lorsque $\lim\limits_{\substack{x \to a \\ x > a}} f(x) = \lim\limits_{\substack{x \to a \\ x < a}} f(x)$ alors f admet une limite en a.