# 23 Dérivée (TL)

Le mot « dérivé » vient du latin « derivare » qui signifiait « détourner un cours d'eau ».
Le mot a été introduit par le mathématicien franco-italien Joseph Louis Lagrange (1736; 1813) pour signifier que cette nouvelle fonction dérive (au sens de ”provenir”) d'une autre fonction.
La notion de dérivée est une notion fondamentale dans le domaine mathématique de l'analyse numérique. Elle permet d'étudier les variations d'une fonction, de construire des tangentes à une courbe et de résoudre des problèmes d'optimisation.
En sciences, lorsqu'une grandeur est fonction du temps, la dérivée de cette grandeur donne la vitesse instantanée de variation de cette grandeur.
Les dérivées existent un peu partout autour de nous. Même si on ne s'en sert pas dans la vie de tous les jours, la science en a beaucoup besoin. Que ce soit en thermodynamique, en chimie ou en électricité, il existe des tas de formules qui font intervenir des dérivées de fonctions.

## I - Nombre dérivé

**Définition 1**
Soit une fonction $f$ définie sur un intervalle I et $a$ un réel de I.
On dit que $f$ est dérivable en $a$ si $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}$ est un réel.
Ce réel est appelé **nombre dérivé** de $f$ en $a$ et il est noté $f'(a)$.

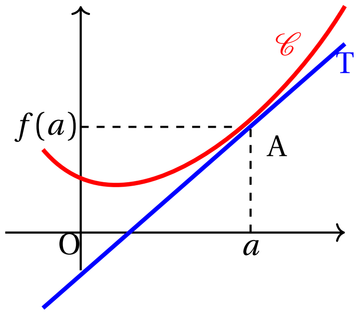
**Exemple 2**
Soit la fonction $f$ définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=x^2$ et $a=3$.

On a $\lim\limits_{x\to 3} \dfrac{f(x)-f(3)}{x-3} = \lim\limits_{x\to 3} \dfrac{x^2-9}{x-3} = \lim\limits_{x\to 3} \dfrac{(x-3)(x+3)}{x-3} = \lim\limits_{x\to 3}(x+3) = 6$

On en déduit que $f$ est dérivable en 3 et que le nombre dérivé de $f$ en 3 est 6 c'est-à-dire $f'(3)=6$.

## Interprétation géométrique

Dans le plan muni d'un repère orthogonal $(O;\vec{i},\vec{j})$, on note par $\mathscr{C}$ la courbe représentative de la fonction $f$.
Soit A le point de $\mathscr{C}$ d'abscisse $a$.
La droite T passant par le point A et de coefficient directeur $f'(a)$ est par définition **la tangente à la courbe** $\mathscr{C}$ au point A.




**Une équation de la tangente T est :** $\boxed{y = f'(a)(x-a)}$

**Exemple 3**
Déterminons une équation de la tangente à la courbe $\mathscr{C}$ de la fonction $f$ de l'exemple précèdent au point d'abscisse 3.

On a $f(3) = 3^2 = 9$ et $f'(3) = 6$.
Donc en appliquant la formule; on obtient : $y = f'(3)(x-3) + f(3) = 6(x-3) + 9 = 6x - 9$.
Ainsi la droite affine $y = 6x - 9$ est une équation de la tangente à $\mathscr{C}$ au point d'abscisse 3.

## II - Fonction dérivée

**Définition 4**
- On dit que $f$ est dérivable sur l'intervalle I si elle est dérivable en tout réel de I.
- La fonction, qui a tout réel $x$, fait correspondre le nombre dérivé de $f$ en $x$, quand elle existe, s'appelle la **fonction dérivée de** $f$ ou encore la **dérivée de** $f$ ; elle est notée $f'$.

L'ensemble de définition de $f'$ est appelé **ensemble de dérivabilité de** $f$.

## III - Dérivées des fonctions usuelles

| **Fonction** $f$ | **dérivée** $f'$ | **Ensemble de dérivabilité** |
|---|---|---|
| $f(x) = k$, $k$ un réel. | $f'(x) = 0$ | $\mathbb{R}$ |
| $f(x) = x$ | $f'(x) = 1$ | $\mathbb{R}$ |
| $f(x) = x^n$, $n \in \mathbb{Z}^*$ | $f'(x) = nx^{n-1}$ | $\mathbb{R}^*, si\ n < 0$ et $\mathbb{R}, si\, n > 0$ |
| $f(x) = \frac{1}{x}$ | $f'(x) = -\frac{1}{x^2}$ | $\mathbb{R}^*$ |
| $f(x) = \sqrt{x}$ | $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$ | $\mathbb{R}_+^*$ |
| $f(x) = ax$ | $f'(x) = a$ | $\mathbb{R}$ |
| $f(x) = ax + b$ | $f'(x) = a$ | $\mathbb{R}$ |

# IV - Formules de dérivations

Soient $u$ et $v$ deux fonctions dérivables, $n \in \mathbb{Z}^*$ et $k \in \mathbb{R}$.

| **Fonction** | $ku$ | $u+v$ | $uv$ | $\frac{u}{v}$ | $\frac{1}{v}$ | $\sqrt{u}$ | $u^n$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| **Dérivée** | $ku'$ | $u'+v'$ | $u'v+v'u$ | $\frac{u'v-v'u}{v^2}$ | $-\frac{v'}{v^2}$ | $\frac{u'}{2\sqrt{u}}$ | $nu'u^{n-1}$ |

**Remarque 5**
Ces formules sont à apprendre par coeur.
En particulier, la dérivée d'un produit (ou d'un quotient) n'est pas égale au produit (ou au quotient) des dérivées.

**Exemple 6**
Calculons la dérivée de chacune des fonctions suivantes.

1. $f(x) = x^4 + x^3 - x^2 - 3x + 7$
2. $g(x) = -8x^3 + 2x^2 + x - 12$
3. $h(x) = (5x-1)\sqrt{x}$
4. $k(x) = \frac{3x^2-2x+1}{2x-3}$

*Solution.*

1. On a : $f'(x) = 4x^3 + 3x^2 - 2x - 3 + 0 = 4x^3 + 3x^2 - 2x - 3$
2. $g'(x) = -8 \times 3x^2 + 2 \times 2x + 1 - 0 = -24x^2 + 4x + 1$
3. Pour $h(x) = (5x-1)\sqrt{x}$
   On pose $u = 5x - 1$ et $v = \sqrt{x}$.
   Donc $u' = 5$ et $v' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$
   Ainsi $h'(x) = 5\sqrt{x} + \frac{1}{2\sqrt{x}} \times (5x-1) = \frac{10x+5x-1}{2\sqrt{x}} = \frac{15x-1}{2\sqrt{x}}$
4. Pour $k(x) = \frac{3x^2-2x+1}{2x-3}$
   Posons $u = 3x^2 - 2x + 1$ et $v = 2x - 3$
   Donc $u' = 6x - 2$ et $v' = 2$

   Ainsi $k'(x) = \frac{(6x-2)(2x-3)-2(3x^2-2x+1)}{(2x-3)^2} = \frac{6x^2-18x+4}{(2x-3)^2}$

□

**Remarque 7**
L'ensemble de dérivabilité d'une fonction polynôme ou d'une fonction rationnelle est égal à l'ensemble de définition.

# V - Dérivée d'une fonction composée

**Théorème 8**
Soient $f$ et $g$ deux fonctions dérivables.

$$\text{On a :}\quad (gof)'(x) = f'(x) \times g'\left[f(x)\right]$$

**Conséquence 9**

1. Pour $a > 0$
   La fonction $x \longmapsto \sqrt{ax+b}$ est définie sur $\left[-\frac{b}{a}\,,\,+\infty\right[$ , dérivable sur $\left]-\frac{b}{a}\,,\,+\infty\right[$ et a pour dérivée :

$$\left(\sqrt{ax+b}\right)'(x) = \frac{a}{2\sqrt{ax+b}}$$

2. Pour $a < 0$
   La fonction $x \longmapsto \sqrt{ax+b}$ est définie sur $\left]-\infty\,,\,-\frac{b}{a}\right]$ , dérivable sur $\left]-\infty\,,\,-\frac{b}{a}\right[$ et a pour dérivée :

$$\left(\sqrt{ax+b}\right)'(x) = \frac{a}{2\sqrt{ax+b}}$$

**Exemple 10**
- $f(x) = \sqrt{2x-5}$ est dérivable sur $\left]\frac{5}{2}\,,\,+\infty\right[$ et pour tout $x > \frac{5}{2}$, $f'(x) = \dfrac{2}{2\sqrt{2x-5}} = \dfrac{1}{\sqrt{2x-5}}$
- $g(x) = \sqrt{-x+1}$ est dérivable sur $]-\infty\,,\,1[$ et pour tout $x < 1$, $g'(x) = \dfrac{-1}{2\sqrt{-x+1}}$

3. Cas général : si u est une fonction dérivable et strictement positive alors on a : $\left(\sqrt{u}\right)' = \frac{u'}{2\sqrt{u}}$.

**Exemple 11**
— Si $f(x) = \sqrt{2x^2-x+1}$ alors $f'(x) = \frac{4x-1}{2\sqrt{2x^2-x+1}}$

— si $g(x) = \sqrt{x^2+7}$ alors $g'(x) = \dfrac{2x}{2\sqrt{x^2+7}} = \dfrac{x}{\sqrt{x^2+7}}$

**Formule**

$$\left(\sqrt{ax^2+bx+c}\right)' = \frac{2ax+b}{2\sqrt{ax^2+bx+c}}$$

4. La fonction $u^n$ a pour dérivée $nu'u^{n-1}$.

**Exemple 12** • si $f(x) = (5x+1)^3$ alors $f'(x) = 3 \times 5(5x+1)^2 = 15(5x+1)^2$.

• Si $g(x) = \left(\sqrt{x}+3\right)^2$ alors $g'(x) = 2 \times \dfrac{1}{2\sqrt{x}}\left(\sqrt{x}+3\right) = \dfrac{\sqrt{x}+3}{\sqrt{x}}$

# VI - Utilisation de la dérivée

## Dérivée et sens de variation

**Théorème 13**
Soit $f$ une fonction dérivable sur un intervalle $I$.

— Si $f$ est positive sur I alors $f$ est croissante sur $I$

— Si $f$ est négative sur I alors $f$ est décroissante sur $I$

— Si $f$ est nulle sur I alors $f$ est constante sur $I$.

**Exemple 14**
Considérons la fonction $f$ définie par $f(x) = x^3 - 3x$.
$f$ est continue et dérivable sur $\mathbb{R}$ et $f'(x) = 3x^2 - 3$.
La dérivée est du second degré , cherchons ses racines.
Posons $3x^2 - 3 = 0$ donc $3x^2 = 3$ c'est-à-dire $x^2 = 1$ d'où $x = -1$ ou $x = 1$.
On en déduit que $f'$ est positive sur les intervalles $]-\infty\,,\,-1]$ et $[1\,,\,+\infty[$ d'où $f$ est croissante sur ces mêmes intervalles.
$f'$ est négative sur $[-1\,,\,1]$ d'où $f$ est croissante sur $[-1\,,\,1]$.
On a le tableau de variation de $f$ suivant :

| $x$ | $-\infty$ | $-1$ | $1$ | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | $+$ | $0$ | $-$ |
| $f(x)$ | $\nearrow$ | $2$ | $\searrow$ | $-2 \nearrow$ |

$-2$ et $2$ sont respectivement maximum et minimum de la fonction $f$ : ce sont des extremums.
**Rappel**
Si en un réel $a$, la dérivée s'annule en changeant de signe, alors le réel $f(a)$ un extremum de $f$.

**Exemple 15**
Soit la fonction $g$ définie par $g(x) = \dfrac{x^2+x-1}{x-1}$ pour $x \neq 1$.
On a : $g'(x) = \dfrac{x^2-2x}{(x-1)^2} = \dfrac{x(x-2)}{(x-1)^2}$.

Le signe de $g'(x)$ dépend de celui de $x(x-2)$ car $(x-1)^2 > 0$.
Or $x(x-2)$ est du second degré et $x(x-2) = 0$ si $x = 0$ ou $x = 2$.
Donc $x(x-2) \geq 0$ si $x \in ]-\infty\,,\,0] \cup [2\,,\,+\infty[$ et $x(x-2) \leq 0$ si $x \in [0\,,\,2]$.
On a le tableau de variation de $g$ suivant :

| $x$ | $-\infty$ | | $0$ | | $1$ | | $2$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $g'(x)$ | | $+$ | $0$ | $-$ | $\|$ | $-$ | $0$ | $+$ | |
| $g(x)$ | $-\infty$ | $\nearrow$ | $1$ | $\searrow$ | $-\infty \;\|\; +\infty$ | $\searrow$ | $5$ | $\nearrow$ | $+\infty$ |

On a $g'0) = 1$ et $g(2) = 5$

Le nombre 1 est un maximum local de $g$ tandis que le nombre réel 5 est un minimum local de $g$.

# Notion de bijection

**Théorème 16**
Si f est définie continue, strictement croissante ( ou strictement décroissante) sur un intervalle I alors f réalise une bijection de I sur f(I).

**Exemple 17**
D'après le tableau de variation de l'exemple précèdent,
• $f$ est une bijection de $]-\infty\,,\,-1]$ sur $]-\infty\,,\,2]$
• $f$ est une bijection de $[-1\,,\,1]$ sur $]-2\,,\,2]$
• $f$ est une bijection de $[1\,,\,+\infty[$ sur $[2\,,\,+\infty[$