Logarithme népérien

Exercice 1
Exprimer en fonction de $\ln 3$ chacun des nombres suivants

1. $\ln \frac{1}{9}$
2. $\ln 63 - \ln 7$
3. $\ln \sqrt{27}$
4. $4\ln 6 - \ln 16$
5. $\ln(3e^2)$

Exercice 2
Exprimer en fonction de $\ln 2$ les nombres suivants.

1. $\ln 32$
2. $\ln \frac{1}{16}$
3. $\ln 40 - \ln 5$
4. $\ln 4\sqrt{2}$
5. $4\ln 2 - \ln 8$
6. $\ln \frac{1}{1024}$

Exercice 3
Exprimer en fonction de $\ln 3$ et $\ln 5$ les nombres suivants.

1. $\ln \frac{27}{25}$
2. $4\ln 15 + \ln 81$
3. $\ln 25 - \ln 15$
4. $\ln 15\sqrt{25}$
5. $4\ln 6 - 2\ln 20$
6. $\ln 675$

Exercice 4
Exprimer chacun des nombres suivants sous la forme $\ln A$ où A est un réel strictement positif.

1. $\ln 4 + \ln 5$
2. $4\ln 6 - \ln 7$

3. $\frac{1}{2}\ln 3 - \ln 5$
4. $1 - 2\ln 6$
5. $-\ln 2 + 1$
6. $3\ln 5 + 2\ln 3$
7. $-2\ln 3 + 2\ln 2$

Exercice 5
Simplifier au maximum.

1. $\ln 8 - \ln 2$
2. $4\ln 6 + \ln 3$
3. $\ln 25 - \ln 30 + \ln 10$
4. $\ln 50 + \ln 2 - \ln 10$
5. $2\ln 2 - \ln 16 + \ln 128$
6. $3\ln \mathrm{e} + 2\ln \mathrm{e}^2$
7. $-2\ln \mathrm{e}^3 + \ln \mathrm{e}^{-2} - \ln \mathrm{e}^2$
8. $3\ln\left(\frac{2}{\mathrm{e}}\right) + \ln 2\mathrm{e}^3 + 1$

Exercice 6
Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes.

1. $\ln x = 5$
2. $\ln x + 4 = 0$
3. $\ln(3 - 2x) = 5$
4. $2\ln x - 6 = 0$
5. $1 - 4\ln x = \ln x - 9$
6. $(\ln x)^2 = 1$

Exercice 7
Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes.

1. $\ln(x + 2) = \ln 2$
2. $\ln(2x - 6) = 1$
3. $4\ln(1 - x) = 8$
4. $\ln(x + 1) = \ln x$
5. $\ln(2x - 3) = \ln(x - 2)$
6. $\ln(2x) = \ln(x + 1)$

Exercice 8
Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes.

1. $\ln(x+1) + \ln x = 0$
2. $\ln(3-x) = 3\ln 2$
3. $\ln(3-x) \times \ln(x+1) = 0$
4. $\ln(5x-6) - 2\ln x = 0$

Exercice 9
Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes.

1. $\ln(x-2) - \ln(x+1) = 2\ln 2$
2. $\ln(x-2) + \ln(x+3) = \ln(5x-9)$
3. $\ln(x-1) = \ln(2-x)$
4. $\ln(-x+1) + \ln(-x+2) = \ln(x+7)$
5. $2\ln(x+1) + \ln(x-1) = 3\ln x$
6. $\ln\left(\frac{x-1}{2x-1}\right) = 0$

Exercice 10
Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes.

1. $(\ln x)^2 - \ln x - 2 = 0$
2. $(\ln(x-1))^2 - \ln(x-1) - 2 = 0$
3. $3(\ln x)^2 + \ln x - 1 = 0$
4. $(\ln x)^2 - 6\ln x + 9 = 0$
5. $\ln x^2 - 6\ln x + 4 = 0$

Exercice 11
Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes.

1. $\ln(3x-4) = \ln(2x+1)$
2. $\ln(4-2x) = \ln(x-1)$
3. $(\ln x)^2 - 3\ln x + 2 = 0$
4. $2(\ln x)^2 - 5\ln x - 3 = 0$
5. $\ln(x^2-3x+2) = 2\ln(x+4)$
6. $\ln(2x^2-10x+8) = \ln(3x^2-3x-18)$

Exercice 12
Résoudre dans $\mathbb{R}$ les inéquations suivantes.

1. $\ln x \leq 1$
2. $2\ln x > \ln 3$
3. $4\ln x + 6 \geq 0$
4. $3\ln x - 4 \leq \ln x$
5. $(1,2)^n \geq 4 \quad n \in \mathbb{N}$
6. $(0,02)^n \geq 4 \quad n \in \mathbb{N}$
7. $(5,5)^n < 20 \quad n \in \mathbb{N}$
8. $(0,007)^n \leq 0.001 \quad n \in \mathbb{N}$

Exercice 13
Résoudre dans $\mathbb{R}$ les inéquations suivantes.

1. $\ln(x+1) \leq 0$
2. $\ln(x-6) > 1$
3. $2\ln(3-x) < 1$
4. $\ln(x-2) > \ln x$
5. $\ln(x-2) > 1$
6. $(1-3x)\ln x \geq 0$

Exercice 14
Résoudre dans $\mathbb{R}$ les inéquations suivantes.

1. $\ln(5x+20) > \ln(3x-9)$
2. $\ln(8-2x) \leq \ln(5x-25)$
3. $\ln(x^2-1) \leq \ln(2x+2)$
4. $\ln(x^2+1) < \ln(2x^2+x+2)$

Exercice 15
On considère le polynôme $P(x) = 2x^3 - 9x^2 + x + 12$.

1. Montrer que -1 est une racine de $P(x)$.
2. En déduire une factorisation de $P(x)$.
3. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $P(x) = 0$.
4. En déduire les solutions des équation et inéquation suivantes.
   (a) $2(\ln(x))^3 - 9(\ln(x))^2 + \ln(x) + 12 = 0$.
   (b) $2(\ln(2x+3))^3 - 9(\ln(2x+3))^2 + \ln(2x+3) + 12 = 0$.

(c) $2(\ln(x))^3 - 9(\ln(x))^2 + \ln(x) + 12 < 0$.

(d) $\ln(2x-3) + 2\ln(x-2) = \ln(-2x^2 + 19x - 24)$

Exercice 16 1. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $x^3 + 2x^2 - x - 2 = 0$

2. En déduire la résolution des équations suivantes.

(a) $(\ln x)^3 + 2(\ln x)^2 - \ln x - 2 = 0$

(b) $(\ln(x-1))^3 + 2(\ln(x-1))^2 - \ln(x-1) - 2 = 0$

(c) $\ln(x^2 + 2x - 1) = \ln 2 - \ln x$

Exercice 17
Résoudre les systèmes d'équations suivants

1. $\begin{cases} -\ln x + 2\ln y = 1 \\ 3\ln x - 5\ln y = -1 \end{cases}$

2. $\begin{cases} 2\ln x - 3\ln y = 5 \\ \ln x + 2\ln y = -1 \end{cases}$

3. $\begin{cases} x + y = 2 \\ \ln x - \ln y = \ln 3 \end{cases}$

4. $\begin{cases} x + y = 3 \\ \ln x + \ln y = \ln 2 \end{cases}$

5. $\begin{cases} \ln(xy) = 4 \\ (\ln x)(\ln y) = -12 \end{cases}$

6. $\begin{cases} \ln(xy) = -2 \\ (\ln x)(\ln y) = -15 \end{cases}$

7. $\begin{cases} \ln x + \ln y = 2 \\ (\ln x)(\ln y) = -24 \end{cases}$

8. $\begin{cases} 2\ln(x+3) + 3\ln(4-y) = 4 \\ 5\ln(x+3) - 3\ln(4-y) = -11 \end{cases}$

9. $\begin{cases} \ln x^3 - \ln y^2 = -4 \\ \ln x + \ln y^4 = 1 \end{cases}$

Exercice 18
Dans chaque cas déterminer l'ensemble de définition de la fonction f.

1. $f(x) = x + \ln(x+3)$
2. $f(x) = \ln x + \ln(x+3)$
3. $f(x) = \ln\left(-x^2 + 2x + 3\right)$
4. $f(x) = \ln\left(x^2 - 1\right)$

5. $f(x) = \dfrac{4}{\ln(x-2)}$
6. $f(x) = \dfrac{1}{\ln x - 1}$
7. $f(x) = \dfrac{\ln(1-x)}{x+2}$

Exercice 19
Calculer la dérivée de f dans chaque cas.

1. $f(x) = \ln x - x - 1$
2. $f(x) = 2x + \ln(3x-1)$
3. $f(x) = x \ln x$
4. $f(x) = \ln x \ln(2-x)$
5. $f(x) = \dfrac{1}{\ln x}$
6. $f(x) = \dfrac{x+1}{\ln x}$
7. $f(x) = (\ln x)^2$
8. $f(x) = \ln(2x^2 + 3x)$
9. $f(x) = \ln\left(\dfrac{2x+3}{3x-6}\right)$

Exercice 20
Etudier et représenter graphiquement f dans chaque cas.

1. $f(x) = \ln x$
2. $f(x) = \ln x^2$
3. $f(x) = (\ln x)^2$
4. $f(x) = x \ln x$
5. $f(x) = x^2 \ln x$
6. $f(x) = x \ln |x|$
7. $f(x) = \dfrac{x}{\ln x}$
8. $f(x) = \dfrac{\ln x}{x}$
9. $f(x) = \ln(x-2)$
10. $f(x) = \ln(4-2x)$

Exercice 21
Soit la fonction f définie par : $f(x) = \ln(-2x^2 + x + 1)$
et de représentation $\mathscr{C}$.

1. Montrer que le domaine de définition de f est
   $D = \left]-\frac{1}{2}\,,\,1\right[$.
2. Calculer les limites aux bornes de D.
3. Démontrer que pour tout $x \in D$,
   $f'(x) = \dfrac{-4x+1}{-2x^2+x+1}$
4. Dresser le tableau de variation de f.
5. Déterminer les points d'intersection de $\mathscr{C}$ avec l'axe des abscisses.
6. Déterminer l'équation de la tangente au point d'abscisse 0.

Exercice 22
Soit la fonction f définie par :
$f(x) = \ln\left(\dfrac{3x-6}{x}\right)$, de représentation $\mathscr{C}$.

1. Montrer que le domaine de définition de f est
   $D = \left]-\infty\,,\,0\right[\cup \left]2\,,\,+\infty\right[$.
2. Calculer les limites aux bornes de D.
   Préciser les asymptotes à $\mathscr{C}$.
3. Démontrer que pour tout $x \in D$, $f'(x) = \dfrac{6}{x(3x-6)}$
4. Etudier le signe de $f'(x)$ puis dresser le tableau de variation de f.
5. Déterminer le point A intersection de $\mathscr{C}$ avec l'axe des abscisses.
6. Déterminer l'équation de la tangente au point d'abscisse 3.
7. Montrer que le point $\mathrm{I}(1,\ \ln 3)$ est un centre de symétrie de $\mathscr{C}$.
8. Construire $\mathscr{C}$.

Exercice 23
Soit la fonction f définie par : $f(x) = \frac{1}{x} + 2\ln(x+1)$, de représentation $\mathscr{C}$.

1. Déterminer le domaine de définition D de f.
2. Calculer les limites aux bornes de ce domaine.
   Préciser les asymptotes à $\mathscr{C}$.
3. Démontrer que pour tout $x \in D$,
   $f'(x) = \dfrac{2x^2-x-1}{x^2(x+1)}$
4. Dresser le tableau de variation de f.
5. Construire $\mathscr{C}$.

Exercice 24
Soit la fonction f définie par : $f(x) = (\ln x - 2)\ln x$, de représentation $\mathscr{C}$.

1. Déterminer le domaine de définition D de f.
2. Calculer les limites aux bornes de ce domaine.
3. Déterminer $f'(x)$.
4. Dresser le tableau de variation de f.
5. Montrer que $\mathscr{C}$. coupe l'axe des abscisses en deux points A et B dont on précisera les coordonnées.
6. Déterminer les équations des tangentes en A et B.

Exercice 25 1. Soit la fonction f définie par : $f(x) = (\ln ax + b)$ où a et b sont des réels et $\mathscr{C}$ sa représentation graphique.
   (a) Déterminer $f'(x)$ en fonction de a et b.
   (b) Calculer les réels a et b pour que $\mathscr{C}$ passe par le point I$(1\ ,\ 0)$ et admette en ce point une tangente (T) parallèle à la droite (D) : $y = -x$.
2. Dans la suite on prend $a = -1$ et $b = 2$ et donc $f(x) = \ln(-x+2)$
   (a) Dresser le tableau de variation de f.
   (b) Ecrire une équation de la tangente (T).
   (c) Caluler $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{x}$.

   En déduire la nature de la branche infinie à $\mathscr{C}$.
   (d) Déterminer les coordonnées du point J intersection de $\mathscr{C}$ avec l'axe des ordonnées.
   (e) Tracer la courbe $\mathscr{C}$.

Exercice 26
Soit la fonction f définie par : $f(x) = x - 2 + \ln\left(\dfrac{x-2}{x+2}\right)$, de représentation $\mathscr{C}$.

1. Etudier le signe de $\dfrac{x-2}{x+2}$ en déduire le domaine de définition de f.
2. Calculer les limites aux bornes du domaine de définition et préciser les asymptotes à $\mathscr{C}$.
3. Calculer $f'(x)$.
4. Dresser le tableau de variation de f.
5. Montrer que la droite d'équation $y = x - 2$ est une asymptote à $\mathscr{C}$
6. Montrer que le point I$(0,\ 2)$ est un centre de symétrie de $\mathscr{C}$.
7. Construire $\mathscr{C}$.

Exercice 27
Soit la fonction f définie par : $f(x) = -\frac{1}{2}x + \ln\left(\frac{x-1}{x}\right)$, de représentation $\mathscr{C}$.

1. Résoudre l'inéquation $\frac{x-1}{x} > 0$
2. En déduire le domaine de définition D de f.
3. Calculer les limites aux bornes du domaine de définition.
4. Montrer que $f'(x) = \frac{-x^2+x+2}{2x(x-1)}$ pour $x \in D$.
5. Dresser le tableau de variation de f.
6. Montrer que la droite d'équation (Δ) : $y = -\frac{1}{2}x$ est une asymptote oblique à $\mathscr{C}$.
7. Etudier la position de $\mathscr{C}$ par rapport à (Δ) sur les intervalles $]-\infty\,,\ 0[$ et $]0\,,\ +\infty[$.
8. Montrer que le point $\mathrm{I}\left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{4}\right)$ est un centre de symétrie de $\mathscr{C}$.
9. Construire $\mathscr{C}$.

Exercice 28
Soit la fonction f définie par : $f(x) = \frac{1+2\ln x}{2x}$, de représentation $\mathscr{C}$.

1. Déterminer le domaine de définition D de f.
2. Calculer les limites aux bornes du domaine de définition.
   On précisera les asymptotes éventuelles.
3. Calculer $f'(x)$ pour $x \in D$.
4. Dresser le tableau de variation de f.
5. Déterminer le point A intersection de $\mathscr{C}$ avec l'axe des abscisses.
6. Déterminer l'équation de la tangente au point A.
7. Construire les tangentes, les asymptote et la courbe $\mathscr{C}$.