10 Schéma de Bernoulli- Loi binomiale

I - Epreuve de Bernoulli

Définition 1
Une épreuve de Bernoulli est une expérience aléatoire qui ne comporte que deux issues, l'une appelée succès (S) et l'autre échec ($\overline{S}$).

Exemple 2
— On lance une pièce de monnaie équilibrée ou non. On appelle par exemple succès, l'issue Pile et échec, l'issue Face.
— On lance un dé. On peut décider d'appeler succès la sortie du 6 et échec la sortie de 1 ; 2 ; 3 ; 4 ou 5.

Loi de Bernoulli

Définition 3
Une loi de Bernoulli est une loi de probabilité définie sur l'ensemble $\Omega = \left\{S, \overline{S}\right\}$ des issues d'une épreuve de Bernoulli. On associe au succès S la probabilité $p \ (0 \leq p \leq 1)$.
La probabilité de l'échec $\overline{S}$ est donc $1 - p$

Issue	S	$\overline{S}$
probabilité	p	$1-p$

p est appelé le paramètre de la loi de Bernoulli.

Exemple 4
— On lance une pièce équilibrée. La probabilité du succès «Obtenir Pile » est $p = \frac{1}{2}$.
La loi de Bernoulli de paramètre $\frac{1}{2}$ est donc :

Issue	Pile	Face
probabilité	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$

— On lance un dé équilibré. La probabilité du succès «Obtenir le 3 » est $p = \frac{1}{6}$.
La loi de Bernoulli de paramètre $\frac{1}{6}$ est donc :

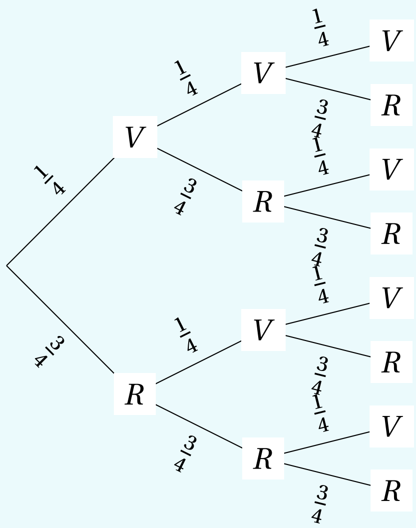
Issue	S	$\overline{S}$
probabilité	$\frac{1}{6}$	$\frac{5}{6}$

II - Schéma de Bernoulli

Définition 5
Un schéma de Bernoulli est une répétition d'épreuves de Bernoulli identiques et indépendantes.

Remarque 6
Des expériences aléatoires successives sont **indépendantes** lorsque l'issue de l'une quelconque de ces expériences ne dépend pas de l'issue des autres.

Exemple 7
Une urne contient 3 boules rouges et 1 boule verte. On tire successivement et avec remise 3 boules de l'urne.
Pour chacun des tirages, l'évènement «obtenir une boule verte» est considéré comme succès.
On représente à l'aide de l'arbre ci-dessous les différents résultats.
Les issues de cette répétition sont des listes : (V,V,V); (V,V,R); (R,V,R); (R,V,V)...



Remarque : Si les tirages ont lieu sans remise, il ne s'agit plus d'un schéma de Bernoulli car les expériences répétées ne sont plus identiques.

III - Loi binomiale

Définition 8
On considère un schéma de Bernoulli, répétition de n épreuves de Bernoulli identiques et indépendantes de même paramètre p. On note X la variable aléatoire qui associe à cette répétition de n épreuves, le nombre de succès.
La loi de X est appelée **loi binomiale de paramètres** n **et** p.
On dit que X suit la loi binomiale $\mathscr{B}(n,p)$.

Exemple 9
On reprend l'exemple précédent et on note X la variable aléatoire égale au nombre de boules vertes obtenues. X suit la loi binomiale $\mathscr{B}(3, \frac{1}{4})$. Les valeurs possibles de X sont : 0; 1; 2; 3 et 4

• Calculons $\mathrm{P}(X = 0)$
Le nombre de chemins dans l'arbre réalisant 0 succès parmi 3 tirages est égal à 1. (c'est C_3^0)
Donc $\mathrm{P}(X = 0) = \left(\frac{1}{4}\right)^0 \times \left(\frac{3}{4}\right)^3$

• Calculons $\mathrm{P}(X = 1)$
Le nombre de chemins dans l'arbre réalisant 1 succès parmi 3 tirages est égal à 3. (c'est C_3^1)
Donc $\mathrm{P}(X = 1) = 3 \times \left(\frac{1}{4}\right)^1 \times \left(\frac{3}{4}\right)^2$

• Calculons $\mathrm{P}(X = 2)$
Le nombre de chemins dans l'arbre réalisant 2 succès parmi 3 tirages est égal à 3. (c'est C_3^2)
Donc $\mathrm{P}(X = 2) = 3 \times \left(\frac{1}{4}\right)^2 \times \left(\frac{3}{4}\right)^1$

• Calculons $\mathrm{P}(X = 3)$
Le nombre de chemins dans l'arbre réalisant 3 succès parmi 3 tirages est égal à 1. (c'est C_3^3)
Donc $\mathrm{P}(X = 1) = 1 \times \left(\frac{1}{4}\right)^3 \times \left(\frac{3}{4}\right)^0$

La loi de X est donc :

k	0	1	2	3
$P(X = k)$	$\frac{27}{64}$	$\frac{27}{64}$	$\frac{9}{64}$	$\frac{1}{64}$

Remarque 10
Le nombre de chemins dans l'arbre réalisant k succès parmi n tirages est égal à C_n^k.

Propriété 11 (Admis)
Si X est une variable aléatoire qui suit la loi binomiale de paramètres n et p, alors pour entier k compris entre 0 et n :

$$P(X = k) = C_n^k p^k (1 - p)^{n-k}$$

Propriété 12 (Admis)
Si X est une variable aléatoire qui suit la loi binomiale de paramètres n et p, alors :

• $\mathrm{E(X)}=np$ • $\mathrm{V(X)} = np(1 - p)$

Exercice 13
Un QCM comporte trois questions. Pour chacune d'elles, quatre réponses sont proposées dont une seule est correcte. Un élève donne au hasard une réponse à chaque question. On note X le nombre de réponses correctes données par l'élève.

1. Justifier que la situation relève d'une loi binomiale dont on précisera les paramètres.
2. Déterminer la loi de probabilité de la variable aléatoire X.

3. Calculer E(X) et $\sigma(X)$.

Solution. 1. Choisir au hasard une réponse à une question peut-être considéré comme une épreuve de Bernoulli. On appelle succès le choix de la réponse correcte ; sa probabilité est $p = \frac{1}{4}$.
il y a donc une répétition de trois épreuves identiques et indépendantes.L'expérience décrite est bien un schéma de Bernoulli. La variable aléatoire qui prend le nombre de succès c-à-d le nombre de bonnes réponses données par l'élève, suit la loi binomiale de paramètres 3 et $\frac{1}{4}$.

2. La variable aléatoire X prend les valeurs 0 ; 1 ; 2 ou 3.
$\mathrm{P}(X=0) = C_3^0\left(\frac{1}{4}\right)^0\left(\frac{3}{4}\right)^3 = \frac{27}{64}$
$\mathrm{P}(X=1) = C_3^1\left(\frac{1}{4}\right)^1\left(\frac{3}{4}\right)^2 = \frac{27}{64}$
$\mathrm{P}(X=2) = C_3^2\left(\frac{1}{4}\right)^2\left(\frac{3}{4}\right)^1 = \frac{9}{64}$
$\mathrm{P}(X=3) = C_3^3\left(\frac{1}{4}\right)^3\left(\frac{3}{4}\right)^0 = \frac{1}{64}$

k	0	1	2	3
$P(X=k)$	$\frac{27}{64}$	$\frac{27}{64}$	$\frac{9}{64}$	$\frac{1}{64}$

3. X suit la loi binomiale de paramètres 3 et $\frac{1}{4}$ donc :
E(X)= $3\times\frac{1}{4} = \frac{3}{4}$, V(X)= $3\times\frac{1}{4}\times\frac{3}{4} = \frac{9}{16}$ et $\sigma(X) = \frac{3}{4}$.

Si un grand nombre de personnes répondent au hasard à ce QCM, alors on observera en moyenne 0.75 bonne réponse par QCM. □