9 Variables aléatoires

Activité d'introduction 1
On lance deux fois de suite une pièce de monnaie et on note les côtés apparus : Pile (P) ou Face (F).
L'ensemble des issues est :
$\Omega = \{(P,P);(F,F);(F,P);(P,F)\}$.
On convient du jeu suivant : on gagne $5F$ chaque fois que sort Pile et on perd $2F$ chaque fois sort Face.
Par exemple à l'issue (F,P) on perd 2F et gagne 5F donc le gain résultant est $-2+5=3$F.

1. On note par G un gain possible pour un joueur. Donner toutes les valeurs x de G.
2. Justifier que G est une application et préciser son ensemble de départ et d'arrivée.
3. Pour chacune des valeurs x de G, calculer la probabilité de gagner x francs ?
   On notera cette probabilité par $P(G=x)$.
4. Vérifier que la somme des probabilités trouvées est égale à 1.

Définition 2
Ω est l'ensemble des issues d'une expérience aléatoire.
Une **variable aléatoire** sur Ω est une fonction qui, à chaque issue de Ω , associe un nombre réel.

Notation 3
Une variable aléatoire est généralement notée X, Y ,$Z \cdots$
Lorsque x désigne un nombre réel, dire « X prend la valeur x» est un événement, il est noté $(X=x)$.
$(X<x)$ désigne l'événement « X prend une valeur strictement inférieure à x»
$(X \geq x)$ désigne l'événement « X prend au moins une fois la valeur x» , c'est le contraire de l'événement précédent.

Exemple 4
On reprend l'exercice de l'activité.
On lance deux fois de suite une pièce de monnaie et on note les côtés apparus : P ou F.
L'ensemble des issues est :
$\Omega = \{(P,P);(F,F);(F,P);(P,F)\}$.
On gagne $5F$ chaque fois que sort Pile et on perd $2F$ chaque fois sort Face. On définit ainsi une variable aléatoire X sur Ω qui prend les valeurs; -4; 3 et 10.
L'événement $(X=3)$ est réalisé par les issues (F,P) et (P,F)

I - Loi de probabilité d'une variable aléatoire

Définition 5
Une loi de probabilité est définie sur un ensemble Ω d'issues.
X est une variable aléatoire définie sur Ω et $E = \{x_1, x_2, \cdots, x_n\}$ est l'ensemble des valeurs prises par X.
Lorsqu'on associe à chaque valeur x_i , la probabilité de l'événement $(X = x_i)$, on définit une loi de probabilité sur E.
Cette loi est appelée **loi de probabilité de variable aléatoire X.**

Remarque 6
On présente souvent la loi de probabilité d'une variable aléatoire discrète X à l'aide d'un tableau.

Valeurs de X	x_1	x_2	$\cdots$	x_n
$P(X = x_i)$	p_1	p_2	$\cdots$	p_n

On a : $P(X = x_1) + P(X = x_2) + \cdots + P(X = x_n) = p_1 + p_2 + \cdots + p_n = \sum_{k=1}^{n} p_k = 1$

Exemple 7
On reprend l'exemple de l'activité d'introduction.
La probabilité de l'événement $(X = -4)$ est la probabilité de l'issue (F, F) c'est-à-dire $P(X = -4) = \frac{1}{4}$
La probabilité de l'événement $(X = 3)$ est la somme des probabilités des issues (P, F) et (F, P) c'est-à-dire $P(X = 3) = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2}$.
La probabilité de l'événement $(X = 10)$ est la probabilité de l'issue (P, P) c'est-à-dire $P(X = 10) = \frac{1}{4}$
La loi de la variable aléatoire X est résumée dans le tableau ci-dessous.

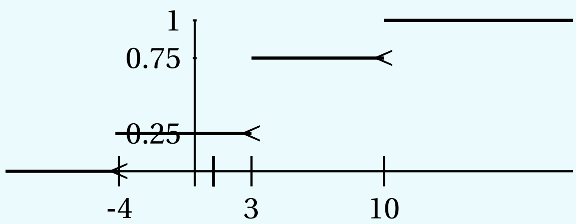
x_i	-4	3	10
$P(X = x_i)$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$

II - Fonction de répartition

Définition 8
Soit X une variable aléatoire définie sur un univers Ω muni d'une probabilité P.
La fonction de répartition de X est l'application F de $\mathbb{R}$ vers $[0\,,\,1]$ définie par : $F(x) = P(X \leq x)$

Exemple 9
Reprenons l'exemple de l'activité.

$$F \text{ est définie par : } \begin{cases} F(x) = 0, \ \text{si} \ x < -4 \\ F(x) = \dfrac{1}{4}, \ \text{si} \ -4 \leq x < 3 \\ F(x) = \dfrac{3}{4}, \ \text{si} \ 3 \leq x < 10 \\ F(x) = 1, \ \text{si} \ 10 \leq x \end{cases}$$



Remarque 10 — F est une fonction croissante en escalier.
— La représentation graphique de F correspond en statistiques à la courbe des fréquences cumulées croissantes.

III - Paramètres d'une variable aléatoire

Espérance, variance et écart-type

Définition 11
Une loi de probabilité est définie sur un ensemble Ω d'issues.
X est une variable aléatoire définie sur Ω dont la loi de probabilité est résumée dans le tableau ci-dessous.

Valeurs de X	x_1	x_2	$\cdots$	x_n
$P(X = x_i)$	p_1	p_2	$\cdots$	p_n

— L'espérance de la variable aléatoire X est le nombre réel, noté $\text{E}(X)$ défini par :

$$\text{E}(X) = p_1x_1 + p_2x_2 + \cdots + p_nx_n = \sum_{k=1}^{n} p_kx_k$$

— La variance de la variable aléatoire X est le nombre réel positif , noté $\text{V}(X)$ défini par :

$$\text{V}(X) = p_1(x_1 - \text{E}(X))^2 + p_2(x_2 - \text{E}(X))^2 + \cdots + p_n(x_n - \text{E}(X))^2 = \sum_{k=1}^{n} p_k(x_k - \text{E}(X))^2$$

— L'écart-type de la variable aléatoire X est le nombre réel positif , noté $\sigma(X)$ défini par :

$$\sigma(X) = \sqrt{\text{V}(X)}.$$

Exemple 12
On reprend l'exemple de la variable aléatoire X précédent.
$\mathrm{E}(X) = \frac{1}{4}(-4) + \frac{1}{2} \times 3 + \frac{1}{4} \times 10 = 3$ francs. $\mathrm{E}(X) = 3$ francs signifie qu'en jouant un grand nombre de fois à ce jeu , un joueur peut espérer gagner 3 francs en moyenne.
$\mathrm{V}(X) = \frac{1}{4}(-4-3)^2 + \frac{1}{2}(3-3)^2 + \frac{1}{4}(10-3)^2 = \frac{49}{2}$ et $\sigma(X) = \frac{7\sqrt{2}}{2}$.

Remarque 13 — L'espérance mathématique correspond, en statistiques, à la moyenne.
- L'espérance et l'écart-type sont exprimés dans la même unité que les valeurs x_i prises par X
- Un jeu est dit équitable lorsque $\mathrm{E}(X) = 0$.

Propriété 14
Soit X une variable aléatoire. On a $\mathrm{V}(X) = \mathrm{E}(X^2) - (\mathrm{E}(X))^2$

Démonstration
On a V(X)= $\sum_{k=1}^{n} p_k (x_k - \mathrm{E}(X))^2 = \sum_{k=1}^{n} p_k x_k^2 - 2\mathrm{E}(X) \sum_{k=1}^{n} p_k x_k + (\mathrm{E}(X))^2 \sum_{k=1}^{n} p_k$
Or $\sum_{k=1}^{n} p_k x_k = \mathrm{E}(X)$, $\sum_{k=1}^{n} p_k = 1$ et $\sum_{k=1}^{n} p_k x_k^2 = \mathrm{E}(X^2)$

V(X)= $\mathrm{E}(X^2) - 2 \times \mathrm{E}(X) \times \mathrm{E}(X) + (\mathrm{E}(X))^2 = \mathrm{E}(X^2) - (\mathrm{E}(X))^2$

Propriété 15 (Admise)
X est une variable aléatoire. Pour tous nombres réels a et b.

$$\mathrm{E}(aX + b) = a\mathrm{E}(X) + b \qquad \text{et} \qquad \mathrm{V}(aX + b) = a^2\mathrm{V}(X)$$