Terminale

Exercices

Document intégralement écrit par Ismaila Mbodji.
Visitez `IsmailaMbodji` pour plus de ressources et d'informations.

Une coquille ? Une correction à apporter ? Rendez-vous sur le dépôt GitHub `SenCoursDeMaths/SenCoursDeMaths` ou contactez-moi via mon site web personnel `sencoursdemaths.github.io`.

Table des matières

1 Nombres complexes 1

Initiation sur les nombres complexes

Exercice 1 1. Rappeler la forme algébrique d'un nombre complexe z.

2. Déterminer la forme algébrique les nombres complexes suivants.**a)** $z=(4+\mathrm{i}\sqrt{3})(1-\mathrm{i})$ **b)** $z=\dfrac{\sqrt{2}+\mathrm{i}\sqrt{3}}{\sqrt{2}-\mathrm{i}\sqrt{3}}$ **c)** $z=\dfrac{-1-2\mathrm{i}}{(1+\mathrm{i})^2}$ **d)** $z=\dfrac{3-2\mathrm{i}}{2+\mathrm{i}}-\dfrac{\mathrm{i}+3}{1-\mathrm{i}}$

Exercice 2
Résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations suivantes. On donnera les solutions sous forme algébrique.

1. $5\mathrm{i}z-3=-2z-5\mathrm{i}$
2. $\dfrac{\mathrm{i}z+1}{z-3\mathrm{i}}=2+\mathrm{i}$
3. $(1-\mathrm{i})\overline{z}=1-3\mathrm{i}$
4. $(z-\mathrm{i})^2+(z-3\mathrm{i})^2=0$
5. $2z-\overline{z}=3-6\mathrm{i}$
6. $(3+\mathrm{i})z-(1-2\mathrm{i})\overline{z}=1-2\mathrm{i}$

Exercice 3
On considère dans le plan complexe muni du repère orthonormal $(O;\vec{u},\vec{v})$, les points A , B , C et D d'affixes respectives $z_A=3+\mathrm{i}$, $z_B=1+3\mathrm{i}$, $z_C=1-\mathrm{i}$ et $z_D=\overline{z_A}$.

1. Placer ces points dans le repère.
2. À l'aide de nombres complexes calculer AB, AC et BC.
3. En déduire la nature du triangle ABC.
4. Le jardin potager de M. Mbaye est formé du quadrilatère $ABCD$ qu'il voudrait clôturer par un fil barbelé en laissant une porte de 0.8 mètre. Le rouleau de 5m dece fil lui est vendu à 3500 FCFA. (*On prendra dans cette question 1 m pour unité*)Combien va-t-il dépenser pour clôturer son jardin.

Exercice 4
Soit $z=x+\mathrm{i}y$ où x et y sont des réels et M son image.Soit $Z=\dfrac{z+2-\mathrm{i}}{z-\mathrm{i}}$

1. Écrire $Re(Z)$ et $Im(Z)$ en fonction de x et y .
2. Déterminer l'ensemble des points $M(z)$ tel que Z soit réel.
3. Déterminer l'ensemble des points $M(z)$ tel que Z soit imaginaire pur.
4. Déterminer l'ensemble des points $M(z)$ tel que $|Z|=1$.
5. Déterminer l'ensemble des points $M(z)$ tel que $|Z|=2$.

Exercice 5

Identifier la réponse juste et donner la justification.

1. Pour tout nombre complexe z et tout réel y, le conjugué de $z+\mathrm{i}y$ est égale à :**a)** $z-\mathrm{i}y$ **b)**$\overline{z}-\mathrm{i}y$ **c)**$z-\mathrm{i}\overline{y}$
2. La partie imaginaire du complexe z est égale à :**a)** $\dfrac{z+\overline{z}}{2}$ **b)**$\dfrac{z-\overline{z}}{2\mathrm{i}}$ **c)**$\dfrac{z-\overline{z}}{2}$
3. Le module du nombre complexe $z+\mathrm{i}$ est égal :**a/** $|z|+1$ **b)**$\sqrt{z^2+1}$ **c)** $|\mathrm{i}z-1|$
4. Le système $\begin{cases}(1-\mathrm{i})z+\mathrm{i}z'=2-3\mathrm{i}\\(1+\mathrm{i})z-(2+3\mathrm{i})z'=3\mathrm{i}\end{cases}$ a pour ensemble solution dans $\mathbb{C}^2$**a)** $(2+\mathrm{i},-\mathrm{i})$ **b)**$(2+\mathrm{i},\ \mathrm{i})$ **c)**$(2-\mathrm{i},-\mathrm{i})$

Exercice 6

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé $(O;\vec{u},\vec{v})$. L'unité graphique est le mètre.• **M.DIOP** a un terrain de forme rectangulaire dont les dimensions x et y sont tels que :$(2+3\mathrm{i})z+(1-3\mathrm{i})\overline{z}=6+3\mathrm{i}$ où $z=x+\mathrm{i}y$Il voudrait construire sur ce terrain une école, et pour cela il a besoin de recouvrir toute la superficie de ce terrain avec des carreaux. Le carton de carreaux coûte 14 000 FCFA et peut recouvrir une superficie de $5m^2$.• Le terrain que **M.NDIAYE** possède est situé en plein quartier administratif dont la forme est celle des points M d'affixes $z\neq -1+2\mathrm{i}y$ tel que $\dfrac{z-7+4\mathrm{i}}{z+1-2\mathrm{i}}$ soit un imaginaire pur. Il souhaite l'hypothéquer avec une voiture dont la valeur est estimée à 1 170 000 FCFA. Sachant que son terrain a une valeur de 15000 F CFA le mètre carré.**Votre travail en tant qu'élève de TS2, consiste à résoudre les tâches suivantes en justifiant votre démarche par un raisonnement bien détaillé**.**Tâches :**

1. Déterminer une estimation du montant nécessaire pour l'achat des carreaux devant recouvrir entièrement le terrain de **M.DIOP**.
2. **M.NDIAYE** réussira- t-il à être propriétaire de cette voiture ?

2 Nombres complexes 2

Initiation sur les nombres complexes

Exercice 1 1. Rappeler la forme trigonométrique d'un nombre complexe z.

2. Mettre sous la forme trigonométrique les nombres complexes z suivants.**a)** $z = 2\sqrt{3} - 6\mathrm{i}$ **b)** $z = -\dfrac{3}{2} + \mathrm{i}\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ **c)** $z = (2+2\mathrm{i})\left(-\sqrt{3}+\mathrm{i}\right)^2$ **d)** $z = 2\mathrm{i}e^{\mathrm{i}\frac{\pi}{6}}$**e)** $z = (-3+3\mathrm{i})\,e^{\mathrm{i}\frac{\pi}{3}}$ **f)** $z = 1 + \cos 2\theta + \mathrm{i}\sin 2\theta$ **g)** $z = \sin\dfrac{\pi}{5} + \mathrm{i}\cos\dfrac{\pi}{5}$**h)** $z = \dfrac{1+\sqrt{2}+\mathrm{i}}{1-\sqrt{2}+\mathrm{i}}$

Exercice 2
Mettre sous forme algébrique les nombres complexes suivants.$z_1 = (1+\mathrm{i})^{17}$ $z_2 = \left(-\sqrt{3}+\mathrm{i}\right)^{2021}$ $z_3 = \dfrac{(1+\mathrm{i})^3}{\left(\sqrt{3}+\mathrm{i}\right)^4}$ $z_4 = e^{\mathrm{i}\frac{\pi}{3}} + e^{-\mathrm{i}\frac{\pi}{6}}$ $z_5 = \dfrac{-\mathrm{i}\left(\sqrt{3}-\mathrm{i}\right)^2}{2\left(1-\mathrm{i}\sqrt{3}\right)^7}$

Exercice 3
Le plan complexe est rapporté d'un repère orthonormé direct $(O;\vec{u},\vec{v})$.On considère les points A , B et C d'affixes respectives $1+\mathrm{i}$, $3+2\mathrm{i}$ et $3\mathrm{i}$.

1. Donner une mesure de chacun des angles orientés suivants :$(\vec{u},\overrightarrow{OA})$, $(\vec{u},\overrightarrow{OC})$, $(\vec{v},\overrightarrow{OA})$,$(\vec{v},\overrightarrow{OC})$, $(\overrightarrow{CA},\overrightarrow{CB})$ et $(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC})$.
2. Soit $Z = \dfrac{z_C - z_A}{z_B - z_A}$.
   (a) Calculer $|Z|$ et un argument Z.
   (b) Interpréter géométriquement $|Z|$ et un argument Z.En déduire la nature du triangle ABC .

Exercice 4
Soit $z_1 = \sqrt{2} + \mathrm{i}\sqrt{6}$, $z_2 = 2 - 2\mathrm{i}$ et $Z = \dfrac{z_1}{z_2}$.

1. Ecrire Z sous forme algébrique.
2. Ecrire z_1 et z_2 sous forme trigonométrique.
3. En déduire Z sous forme trigonométrique.
4. Déterminer les valeurs de $\cos\dfrac{\pi}{12}$ et $\sin\dfrac{\pi}{12}$.

Exercice 5
Soit $\omega = \sqrt{3} + 1 + \mathrm{i}\left(\sqrt{3}-1\right)$

1. Ecrire ω^2 sous forme algébrique.
2. Déterminer le module et un argument de ω^2. En déduire le module et un argument de ω.

Exercice 6
Identifier la réponse juste et donner la justification.

1. Si $\frac{\pi}{6}$ est un argument de $\frac{9}{z}$ alors un argument de $\frac{\mathrm{i}}{z^2}$ est :
   a) $\frac{\pi}{6}$ **b)** $-\frac{5\pi}{6}$ **c)** $\frac{5\pi}{6}$
2. Soit z un nombre complexe non nul d'argument θ. Un argument de $\frac{-1+\mathrm{i}\sqrt{3}}{\overline{z}}$ est :
   a) $-\frac{\pi}{3}+\theta$ **b)** $\frac{2\pi}{3}+\theta$ **c)** $\frac{2\pi}{3}-\theta$
3. Un argument de $\sin(x)+\mathrm{i}\cos(x)$ est :
   a) $-x$ **b)** x **c)** $\frac{\pi}{2}-xv$ **d)** $\frac{\pi}{2}+x$
4. Le nombre complexe $(\sqrt{3}+\mathrm{i})^{1689}$
   a/ est un réel **b/** est un imaginaire pur **c/** n'est ni réel ni imaginaire pur.
5. Le conjugué de $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$ est :**a)** $-\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$ **b)** $\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta}$ **c)** $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$

Exercice 7
On considère les trois nombres complexes suivants : $z_1=(1-i)(1+2i)$, $z_2=\frac{2+6i}{3-i}$ et $z_3=\frac{4i}{i-1}$.Soit M_1 , M_2 et M_3 leurs images respectives dans le plan.

1. Donner leurs formes agébriques.
2. Placer M_1 , M_2 et M_3 dans le plan complexe.
3. Calculer $\frac{z_3-z_1}{z_2-z_1}$. En déduire que le triangle $M_1M_2M_3$ est rectangle isocèle .
4. Déterminer l'affixe du point M_4 telle que le quadrilatère $M_1M_2M_4M_3$ soit un carré .
5. Montrer que les points M_1 ,M_2 , M_3 et M_4 appartiennent à un même cercle dont on précisera les éléments .

Exercice 8
$x\in\mathbb{R}$. Soient les nombres complexes suivants :$Z'=-2\left(\cos\frac{\pi}{3}+\mathrm{i}\sin\frac{\pi}{3}\right)$ et $Z=(1-x)\left(\cos\frac{\pi}{3}+\mathrm{i}\sin\frac{\pi}{3}\right)$

1. Calculer le module et un argument de Z'.
2. Calculer le module et un argument de Z.(On discutera selon les valeurs de x)Donner pour chaque cas la forme trigonométrique et la forme algébrique de Z.
3. Montrer que Z^{2004} est un nombre réel dont on précisera le signe.

4. Montrer que l'équation $|Z| = 2$ a deux solutions Z_1 et Z_2.Ecrire Z_1 et Z_2 forme algébrique.
5. Placer les points A et B d'affixes respectives $2e^{i\frac{\pi}{3}}$ et $-2e^{i\frac{\pi}{3}}$ dans le plan complexe muni d'un repère orthonormé $(O;\vec{u},\vec{v})$.Vérifier que les points A, B et O sont alignés.

3 Composition des applications

Exercice 1

Soient $f(x) = x+2$ et $g(x) = x+1$ deux applications définies sur $\mathbb{R}$.Recopier et compléter les pointillés :

1. $(f \circ g)(3) = \cdots$
2. $(g \circ f)(3) = \cdots$
3. $(f \circ g)(x) = \cdots$
4. $(g \circ f)(x) = \cdots$

Exercice 2

Dans chacun des cas suivants, déterminer l'application $g \circ f$.

1. $f(x) = 3x$ et $g(x) = x+5$
2. $f(x) = 2x$ et $g(x) = -7x$
3. $f(x) = 2x^2$ et $g(x) = -7x$
4. $f(x) = 2x+3$ et $g(x) = 2x^2+5x+1$
5. $f(x) = 1-x$ et $g(x) = \dfrac{1}{x}$

Exercice 3

Dans chacun des cas suivants , déterminer l'application $f \circ g$.

1. $g(x) = 3x$ et $f(x) = \sqrt{x}$
2. $g(x) = 2\sqrt{x+1}$ et $f(x) = 5x^2$
3. $g(x) = \sqrt{x}$ et $f(x) = 5x^2+1$
4. $g(x) = x+1$ et $f(x) = 2x^2+3x+4$

Exercice 4

Dans chacun des cas suivants , déterminer une expression de $g \circ f$ en fonction de x. (*on simplifiera si possible l'expression de $g \circ f$ obtenue.*)

1. $f(x) = \dfrac{x+1}{x-1}$ et $g(x) = \sqrt{x}$
2. $f(x) = \sqrt{x}$ et $g(x) = \dfrac{x+1}{x-1}$
3. $f(x) = 3x+1$ et $g(x) = x^3$
4. $f(x) = x+1$ et $g(x) = \dfrac{x+1}{x-1}$

Exercice 5 (Reconnaissance)
Dans chacun des cas suivants, déterminer deux applications f et g telles que l'application h soit la composée de g par f : c'est à dire $h = g \circ f$.

1. $h(x) = \sqrt{7x+1}$
2. $f(x) = (5x+6)^2$
3. $h(x) = (x-2)^2 - 4$
4. $h(x) = \dfrac{\sqrt{x}+1}{1-2\sqrt{x}}$

Exercice 6 1. Soit deux applications f et g définies par : $f(x) = 1 - x$ et $g(x) = \dfrac{8x-4}{3x+3}$.

(a) Calculer $(f \circ g)(0)$ et $(g \circ f)(2)$.

(b) Déterminer une expression de $(g \circ f)(x)$.

2. On considère l'application h définie par : $h(x) = 2(5x-2)^2$.Déterminer deux applications u et v telles que : $h(x) = (v \circ u)(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

Exercice 7
Pour chaque item, indiquer le résultat exact parmi les trois proposés.

n°	Items	Résultat A	Résultat B	Résultat C
1.	Si $f(x) = -x^2 + 1$ et$g(x) = (x-1)^2$ Alors la valeur de $g \circ f(-1)$ est	1	0	4
2.	Soit $f(x) = 3x+4$. Une expression de $f(2x)$ en fonction de x est	$6x+8$	10	$6x+4$
3.	L'application définie par $f(x) = (x+3)^4$ est la composée de $u \circ v$ avec :	$u(x) = x+3$ et $v(x) = x^4$	$u(x) = x^4$ et $v(x) = x+3$	$u(x) = x$ et $v(x) = 3 + x^4$

4 Fonctions continues et T.V.I

Exercice 1
Recopier et compléter les pointillés.

1. Si la fonction u est .... alors la fonction $\sqrt{u}$ est continue sur l'intervalle I.
2. Si une fonction f est .... sur un intervalle $[a,b]$ et si .... alors l'équation $f(x)=0$ admet une solution unique sur$[a,b]$.
3. Si une fonction f est .... sur l'intervalle $[2,3]$ et si .... alors l'équation $f(x)=m$ admet au moins une solution sur$[2,3]$.
4. Dans un repère orthonormal la courbe d'une fonction bijective et celle de sa réciproque sont symétriques ....

Exercice 2
Les affirmations suivantes sont-elles vraies ou fausses ? On justifiera la réponse.

1. La fonction définie par $h(x)=\dfrac{\cos\sqrt{x}-1}{x}$ admet un prolongement par continuité en 0.
2. L'image d'un intervalle par une fonction est un intervalle.
3. La fonction $x \longmapsto \sqrt{x^2-1}$ est continue sur $]-\infty\,;\,-1]$.
4. Si f est continue sur un intervalle I et si $m \in$ f(I) alors l'équation f(x) = m admet au moins unesolution dans I.
5. Soit la fonction u telle que $x-2 \leq u(x) \leq x+3$ pour tout $x>1$. Alors $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{u(x)}{\sqrt{x}}=+\infty$.
6. Si f est continue et monotone sur un intervalle I alors elle réalise une bijection de I vers $f(I)$.

Exercice 3
Montrer que la fonction f définie par : $f(x)=\dfrac{x+2}{x}-(x-1)\sqrt{x+1}$ est continue sur $]0,\,+\infty[$ puis justifier que l'équation $f(x)=0$ admet au moins une solution dans $]0,\,+\infty[$.

Exercice 4
1. Soit la fonction h définie par $h(x)=\dfrac{\sqrt{x+1}-2}{x^2-2x-3}$.
   (a) Déterminer l'ensemble de définition de h.
   (b) Étudier la limite de h en 3.
   (c) Définir le prolongement par continuité de h en 3.
2. Soit g la fonction définie sur $]-1;+\infty[$ par $g(x)=\dfrac{1}{\left(\sqrt{x+1}+2\right)(x+1)}$.

(a) Montrer que g est continue sur $]-1;+\infty[$.

(b) Montrer que l'équation $g(x) = 1$ admet au moins une solution dans $]-0,7\,;\,-0,6[$.

Exercice 5

On considère la fonction f de $\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par : $f(x) = \begin{cases} 3x - 1 + \dfrac{3x}{x-2} & \text{si } x > 1 \\ -x + \sqrt{1-x} & \text{si } x \leq 1 \end{cases}$

1. Justifier que l'ensemble de définition de f est $D_f = \mathbb{R} \setminus \{2\}$.
2. Étudier les limites de f aux bornes de D_f.
3. Étudier la continuité de f en 1 puis sur les intervalles $]-\infty,\ 1[$, $]1,2[$ et $]2,\ +\infty[$.
4. Étudier la nature des branches infinies de la courbe $\mathscr{C}_f$.
5. Préciser la position relative de $\mathscr{C}_f$ par rapport à son asymptote oblique.

5 Calcul de dérivées (TL)

Exercice 1
Dans chaque cas, calculer la dérivée de la fonction f.

1. $f(x) = 3x - 2$
2. $f(x) = x^2 + 3x$
3. $f(x) = -2x^3 - x^2 - 3x + 3$
4. $f(x) = (x+1)(x^2-1)$
5. $f(x) = (2x+1)(2x^2+x+1)$
6. $f(x) = \dfrac{2x+3}{x-2}$
7. $f(x) = \dfrac{2-3x}{4-2x}$

Exercice 2
Mêmes questions qu'à l'exercice précédent.

1. $f(x) = \dfrac{2x^2+x+3}{x-2}$
2. $f(x) = \dfrac{-x^2+3x+4}{3x-2}$
3. $f(x) = \dfrac{x-2}{x^2-3x}$
4. $f(x) = \dfrac{x^2+5x-4}{x^2+5x+4}$
5. $f(x) = \sqrt{6x-8}$
6. $f(x) = 2\sqrt{1-3x}$

Exercice 3
Dans chacun des cas suivants, déterminer une équation de la tangente à la courbe de f au point d'abscisse a.

1. $f(x) = -3x^3 + 2x^2 - 3x - 1$ $\quad a = -1$
2. $f(x) = \dfrac{x^2-2x-2}{x-3}$ $\quad a = 2$
3. $f(x) = \sqrt{3x+1}$ $\quad a = 1$

Exercice 4
Dans chaque cas, calculer $f'(x)$.

1. $f(x) = (2x-7)^3$
2. $f(x) = \left(x^2+2x\right)^2$
3. $f(x) = \sqrt{2x+1}$
4. $f(x) = 2\sqrt{1-3x}$
5. $f(x) = \sqrt{x^2+x}$
6. $f(x) = \left(1-\sqrt{x}\right)^2$

Exercice 5
Dans chaque cas, étudier le sens de variations de la fonction f puis donner son tableau de variations complet.

1. $f(x) = x^2-2x-3$
2. $f(x) = -x^2+8x-1$
3. $f(x) = -x^3-3x^2+3$
4. $f(x) = 4x^3+3x^2-6x-11$
5. $f(x) = \dfrac{2x-12}{x-3}$
6. $f(x) = \dfrac{-2x+1}{2x+4}$

Exercice 6
Même question que l'exercice précédent.

1. $f(x) = \dfrac{2x^2-5x+4}{x-2}$
2. $f(x) = \dfrac{x^2+5x+5}{x+1}$
3. $f(x) = \sqrt{3x-6}$
4. $f(x) = \sqrt{-2x-3}$

6 Calcul de dérivées (TS2)

Exercice 1
Montrer les dérivées suivantes.

1. $f(x) = \dfrac{2x-3}{(2x+1)^2} \quad f'(x) = \dfrac{-4x+14}{(2x+1)^3}$
2. $g(x) = \dfrac{x\sqrt{x}}{2x+1} \quad g'(x) = \dfrac{2x^2+3x}{2\sqrt{x}(2x+1)^2}$.
3. $f(x) = \sin^2 x \cos 2x \quad f'(x) = 2\sin x \cos 3x$
4. $h(x) = \dfrac{2x-1}{\sqrt{x-x^2}} \quad h''(x) = \dfrac{6x-3}{4\left(\sqrt{x-x^2}\right)^5}$
5. $k(x) = \dfrac{1+\cos 3x}{\cos^3 x} \quad k'(x) = \dfrac{3\sin x(1-2\cos x)}{\cos^4 x}$

Exercice 2
Calculer la dérivée f' dans chacun des cas suivants en simplifiant le résultat :

1. $f(x) = \dfrac{-2x+3}{\sqrt{x^3-1}}$
2. $f(x) = \dfrac{1}{1+\sqrt{1-x}}$
3. $f(x) = (x^2-1)\sqrt{1-x}$
4. $f(x) = 5\sin^2(3x-1)$
5. $f(x) = -\cos 2x + 2\sin^2 x$
6. $f(x) = x(1-\cos x)^2$

Exercice 3
Le but de l'exercice est d'appliquer la formule suivante $((f\circ g))'(x) = g'(x)\times f'(g(x))$
Soit la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ telle que $g'(x) = \dfrac{1}{x^2+1}$.

1. Calculer la dérivée des fonctions $x \longmapsto g\left(\sqrt{x}\right)$ et $x \longmapsto g(\tan x)$.
2. Exprimer en fonction de $g(x)$ la dérivée des fonctions $x \longmapsto \sqrt{g(x)}$ et $x \longmapsto \tan(g(x))$.

Exercice 4
Soit la fonction f définie par $f(x) = \begin{cases} x^3+1 & \text{si} \leq 1. \\ 2\cos(x-1) & \text{si } x > 1. \end{cases}$ Étudier la dérivabilité de f en 1.

Interpréter graphiquement le résultat.Calculer $f'(x)$.

Exercice 5

Soit la fonction f définie par$f(x) = \begin{cases} x+1+\frac{4x}{x^2+1} & \text{si } x < -1. \\ 2x+\sqrt{x+1} & \text{si } x \geq -1. \end{cases}$

1. Étudier la continuité de f en -1.
2. Étudier la dérivabilité de f en -1. Interpréter graphiquement le résultat obtenu.
3. Étudier la dérivabilité de f sur $]-\infty;\ -1[$ et $]-1;\ +\infty[$.
4. Calculer $f'(x)$ puis établir le tableau de variation de f.

Exercice 6

Les questions sont indépendantes

1. Déterminer les abscisses des points de la courbe de la fonction $x \mapsto x^3$ où la tangente parallèle à la droite $y = 6x - 1$.
2. Si $\lim\limits_{x\to 2^+} \dfrac{f(x)-f(2)}{x-2} = -\infty$ alors $\mathscr{C}_f$ admet au point d'abscisse 2 une tangente d'équation $\cdots$
3. Si $f'_d(1) = -3$ et $f'_g(1) = 0$ alors $\mathscr{C}_f$ admet au point d'abscisse 1 $\cdots$

Exercice 7

Le plan est muni d'un repère orthonormé $(O;\vec{i},\vec{j})$.Soit une fonction f définie par $f(x) = ax^2 + bx + c$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

— la tangente à $\mathscr{C}$ au point $A(1;-2)$ est paralléle à l'axe des abscisses;

— la tangente à $\mathscr{C}$ au point d'abscisse 0 est paralléle à la droite $2x + y + 3 = 0$.

Déterminer les réels a, b et c.

7 Etude de fonctions (TL)

Éléments de symétrie

Exercice 1
On considère les fonctions suivantes définies sur leur ensemblede définition. Montrer que la courbe de ces fonctions admet l'élément de symétrie indiqué.

1. $f(x) = \dfrac{3x-5}{1-x}$ centre de symétrie $I(1,-3)$
2. $f(x) = \dfrac{x^2+2x+1}{x^2+1}$ centre de symétrie $I(0,1)$
3. $f(x) = 3x^2 - 6x + 7$ axe de symétrie $x = 1$
4. $f(x) = \dfrac{x^2-x-2}{x^2-x+1}$ axe de symétrie $x = \dfrac{1}{2}$

Etude de fonctions numériques

Exercice 2
Soit la fonction f définie par : $f(x) = x^3 - 3x - 2$

1. Déterminer $\mathscr{D}_f$.
2. Calculer les limites aux bornes de $\mathscr{D}_f$
3. Calculer $f'(x)$ et dresser le tableau de variation de f.
4. Montrer que le point $S(0;-2)$ est un centre de symétrie à la courbe $\mathscr{C}_f$ de f .
5. Déterminer les abscisses des points d'intersection de la courbe $\mathscr{C}_f$ avec l'axe des abscisses.
6. Déterminer une équation de la tangente à $\mathscr{C}_f$ en chacun de ces points .
7. Construire les tangentes , puis la courbe $\mathscr{C}_f$ dans le repère

Exercice 3
Le plan est muni du repère orthonormé $(O;\vec{i},\vec{j})$.Soit f la fonctions définies par :$f(x) = \dfrac{2x-1}{x-1}$.
On désigne par $(\mathscr{C})$ la représentation graphique de f.

1. Étudier les limites aux bornes du domaine D de f.
2. En déduire les asymptotes de $(\mathscr{C})$.
3. Calculer $f'(x)$ puis donner son signe sur D.

4. Etablir le tableau de variation de f puis construire $(\mathscr{C})$ dans le repère.

Exercice 4

Soit la fonction définie par :$f(x) = \sqrt{2x+5}$

1. Déterminer le domaine de définition $\mathscr{D}_f$ de f, et calculer les limites aux bornes de$\mathscr{D}_f$.
2. Calculer $f'(x)$ pour $x \in \left]-\frac{5}{2};\ +\infty\right[$
3. Représenter graphiquement f dans un repère $(O;\vec{i},\vec{j})$.

Exercice 5

Soit la fonction f définie par $f(x) = \dfrac{x^2-3x+6}{x-1}$

1. Déterminer le domaine de définition $\mathscr{D}_f$ de f .
2. Calculer les limites aux bornes de $\mathscr{D}_f$ et préciser les asymptotes éventuelles.
3. Déterminer 3 réels $a, b,$ et c tels que $f(x) = ax+b+\dfrac{c}{x-1}$.En déduire que la droite$y = ax+b$ est une asymptotes à la courbe de f .
4. Calculer $f'(x)$ et dresser son tableau de variation .
5. Montrer que le point $I(1;\ -1)$ est un centre de symétrie à la courbe de f .
6. Etudier la position de la courbe de f, par rapport à l'asymptote $y = ax+b$.
7. Tracer la courbe $(\mathscr{C}_f)$ de f et les asymptotes dans un repère orthonormé.

Exercice 6

Soit la fonction numérique f de la variable réelle x définie$f(x) = \dfrac{x^2+x-2}{x+1}$.On appelle $\mathscr{C}_f$, la représentation graphique de f dans un repère orthonormé; unité graphique : $1cm$

1. Déterminer l'ensemble de définition $\mathscr{D}_f$ de f; puis étudier les limites aux bornes de$\mathscr{D}_f$.
2. Montrer que la droite $(\mathscr{D})$ d'équation $y = x$ est une asymptote oblique à $\mathscr{C}_f$, etpréciser l'autre asymptote.
3. Etudier la position de $\mathscr{C}_f$ par rapport à $(\mathscr{D})$.
4. Montrer que le point $S(-1;\ -1)$ est un centre de symétrie de $(\mathscr{C}_f)$.
5. Déterminer pour tout $x \in \mathscr{D}_f,\ f'(x)$, puis établir le tableau de variation de f .
6. Montrer que $(\mathscr{C}_f)$ rencontre l'axe des abscisses aux points A et B d'abscisses respectives -2 et 1.
7. Donner une équation de la tangente à $\mathscr{C}_f$ en A, puis une équation de la tangente à$(\mathscr{C}_f)$.
8. Construire $\mathscr{C}_f$, les asymptotes et les tangentes.

Exercice 7

On donne $f(x) = \dfrac{2x^2+3}{x^2-1}$

1. Déterminer l'ensemble de définition de f
2. Etudier la parité de f.
3. Dresser le tableau de f sur $[0,\ +\infty[$.
4. Tracer sa courbe représentative.

Exercice 8

Monsieur Ahmadou est le gestionnaire de l'entreprise où vous avez postulé pour un emploi. M. Ahmadou vousexplique, lors de l'interview, que le bénéfice en fonction du nombre (en milliers) de chaussures est défini par :$b(x) = x^3 - x^2 - 5x + 5$ avec $1 < x < 3$M. Ahmadou

souhaite maîtriser l'évolution de ce bénéfice, pour cela il vous propose de l'aider à :

1. déterminer le nombre de chaussures dont le bénéfice est nul.
2. déterminer l'intervalle de valeurs du nombre de chaussures menant à une perte.
3. déterminer l'intervalle de valeurs du nombre de chaussures menant à un gain positif.

8 Fonctions numériques(TS2)

Exercice 1

Soit la fonction f définie par :$f(x) = x^3 - 3x^2 + 4$On note $\mathscr{C}_f$sa courbe dans un repère orthonormé.

1. Étudier le sens de variations de f puis établir son tableau de variations.
2. Justifier que l'équation $f(x) = 2$ admet au moins une solution dans $\mathbb{R}$.
3. Montrer que f admet sur $[2\,,\,+\infty[$ une bijection réciproque f^{-1} dont on précisera l'ensemble de définition.
4. Montre que le point $(1,2)$ est un point d'inflexion de $\mathscr{C}_f$.
5. Tracer $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_{f^{-1}}$.

Exercice 2

Soit la fonction f définie par :$f(x) = \dfrac{x^3 + x^2 - 4}{x^2 - 4}$On note par $\mathscr{C}_f$ sa courbe dans un repère orthonormé.

1. (a) Déterminer les asymptotes à la courbe $\mathscr{C}_f$.
   (b) Soit l'asymptote oblique Δ de $\mathscr{C}_f$.Étudier la position relative de $\mathscr{C}_f$ par rapport à Δ.
2. Étudier le sens de variations de f puis établir son tableau de variations.
3. Soit I le point d'intersection de Δ et $\mathscr{C}_f$.Montrer que I est un centre de symétrie de $\mathscr{C}_f$.
4. Tracer $\mathscr{C}_f$ (unité 1cm).

Exercice 3

On considère la fonction f définie par : $\quad f(x) = \dfrac{2x - \sqrt{x}}{2 + \sqrt{x}}$.

1. Déterminer Df puis calculer $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$.
2. (a) Montrer que sa dérivée est définie par : $\quad f'(x) = \dfrac{x + 4\sqrt{x} - 1}{\sqrt{x}\left(2 + \sqrt{x}\right)^2}$.
   (b) Résoudre l'équation :$X^2 + 4X - 1 = 0$puis en déduire le signe de $f'(x)$ ainsi que les variations de f sur Df.
   (c) Dresser alors le tableau de variations de la fonction f sur Df.On veillera notamment à calculer la valeur exacte de l'extremum de f.
3. Déterminer la branche infinie de la courbe de f puis construire cette courbe (unité 8cm).

Exercice 4
Soit la fonction f définie par :$f(x) = (1-x)\sqrt{|1-x^2|}\mathscr{C}_f$ sa courbe dans un repère orthonormé d'unité 2cm.

1. Déterminer l'ensemble de définition de f.
2. Etudier la dérivabilité de f en 1 et -1.
3. Calculer $f'(x)$ et étudier son signe.Dresser le tableau de variations de f.
4. Déterminer les branches infinies de la courbe de f.
5. Tracer $\mathscr{C}_f$ dans le repère.

Exercice 5
Partie A Soit la fonction P définie par $P(x) = 4x^3 - 3x - 8$.

1. Etablir le tableau de variations de P.
2. Montrer que l'équation $P(x) = 0$ admet une unique solution α dans $\mathbb{R}$.Vérifier que $\alpha \in \left[1,45\ ;\ 1,46\right]$.
3. En déduire le signe de $P(x)$ sur $\mathbb{R}$.

Partie B Soit la fonction f définie sur $[0\ ,\ +\infty[$ par : $f(x) = \dfrac{x^3+1}{4x^2-1}$. $\mathscr{C}_f$ sa courbe représentative.

1. Etudier les limites de f aux bornes de Df.
2. Calculer $f'(x)$ en fonction de $P(x)$.
3. En déduire le signe de $f'(x)$ puis dresser le tableau de variations de f.
4. Montrer que $f(\alpha) = \dfrac{3}{8}\alpha$.
5. Montrer que la droite d'équation $\mathscr{D} : y = \dfrac{x}{4}$ est une asymptote à $\mathscr{C}_f$.
6. Étudier les positions relatives de $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{D}$.
7. Tracer $\mathscr{C}_f$ dans un repère orthonormé.

Exercice 6
Partie A Soit la fonction g définie par :$g(x) = -x\sqrt{1+x^2} - 1$.

1. Etudier les variations de g.
2. Montrer que l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution α dans $\mathbb{R}$.
3. Déterminer la valeur exacte de α.
4. En déduire que :
   si $\alpha < 0$ alors $g(x) > 0$ et si $\alpha \geq 0$ alors $g(x) \leq 0$

Partie B
Soit la fonction f définie par :$f(x) = -\dfrac{x^3}{3} - \sqrt{1+x^2}$.

1. Calculer les limites aux bornes de Df.
2. Déterminer la nature des branches infinies de $\mathscr{C}$.
3. Calculer $f'(x)$ en fonction de $g(x)$.
4. Montrer que $f(\alpha) = \dfrac{3-\alpha^4}{3\alpha}$.
5. Dresser le tableau de variations de f.
6. Déterminer l'équation de la tangente (T) à $\mathscr{C}_f$ au point d'abscisse 0.
7. Étudier la position relative de $\mathscr{C}$ par rapport à (T).
8. Tracer $\mathscr{C}_f$ dans un repère orthonormé d'unité 2cm.

Exercice 7
On considère la fonction f définie par :

$$f(x) = \begin{cases} -x+2-\dfrac{2x}{x^2+1} & \text{si } x \leq 1 \\ x-1-3\sqrt{x^2-1} & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

1. Calculer les limites aux bornes de D_f.
2. Etudier la continuité de f en 1.
3. Etudier la dérivabilité de f en 1. Interpréter graphiquement le résultat.
4. (a) Déterminer les asymptotes de $\mathscr{C}_f$.
   (b) Etudier la position de $\mathscr{C}_f$ par rapport à ses asymptotes.
5. Calculer $f'(x)$ sur les intervalles où f est dérivable en justifiant la dérivabilité de f sur chacun de ces intervalles puis dresser son tableau de variations.
6. Construire la courbe $\mathscr{C}_f$.
7. (a) Soit g la restriction de f à l'intervalle$I =]-\infty,\ 1]$.Montrer que g réalise une bijection de I vers un intervalle J à préciser.
   (b) Tracer $\mathscr{C}_{g^{-1}}$ dans le repère.

Exercice 8
Soit $f(x) = \cos 4x + 2\sin 2x$.

1. Déterminer D_f puis justifier le choix de $I = [0,\ \pi]$ comme intervalle d'étude de f.
2. Montrer que : $f'(x) = 4(1-2\sin 2x)\cos 2x$, $x \in I$.
3. Résoudre dans I l'équation $f'(x) = 0$.
4. En déduire le tableau de variations de f.
5. Construire $\mathscr{C}_f$ sur $[0,\ \pi]$.

Exercice 9

Soit $f(x) = \dfrac{\cos^2 x}{\sin x}$.

1. Déterminer l'ensemble de définition de f.
2. Démontrer que f est une fonction impaire et periodique de période 2π.
3. Démontrer que $\mathscr{C}_f$ admet la droite $x = \dfrac{\pi}{2}$ comme axe de symétrie.
4. Dresser le tableau de variations de f sur $\left[0\,,\,\dfrac{\pi}{2}\right]$.
5. Construire $\mathscr{C}_f$ sur $[-\pi,\,\pi]$.

9 Fonction expo (TS2)

Initiation expo

Exercice 1 1. Simplifier au maximum les expressions suivantes :$A = \dfrac{e^{3+\ln x^2}}{2x}$ $B = \dfrac{e^{3x}+e^{x}}{e^{2x}+1}$

2. Prouver que pour tout réel x :**a)** $\dfrac{e^{x}-e^{-x}}{e^{x}+e^{-x}} = \dfrac{e^{2x}-1}{e^{2x}+1} = \dfrac{1-e^{-2x}}{1+e^{-2x}}$**b)** $\ln\left(1+e^{x}\right) = x+\ln\left(1+e^{-x}\right)$

Exercice 2
On considère le polynôme $P(x) = 2x^3 - 9x^2 + x + 12$.

1. Résoudre dans $\mathbb{R}$: $P(x) \leq 0$.
2. En déduire les solutions de l'équation et l' inéquation suivantes.**a)** $2e^{3x} - 9e^{2x} + e^{x} + 12 = 0$ **b)** $\dfrac{e^{2x}\left(2e^{x}-9\right)}{e^{x}+12} \leq -1$.

Exercice 3
Résoudre dans $\mathbb{R}^2$ les systèmes suivants :**a)** $\begin{cases} 2e^{x} + 3e^{1+y} = 13 \\ e^{x} + e^{1+y} = 5 \end{cases}$ **b)** $\begin{cases} xy = -15 \\ e^{x} \times e^{y} = e^{2} \end{cases}$

Exercice 4
Calculer la dérivée de chacune des fonctions suivantes.1) $f(x) = (x^2 - 5x + 1)e^{3x-1}$ 2) $f(x) = \sqrt{x}e^{-x^2}$ 3) $f(x) = \ln\left(1+e^{x}\right)$ 4) $f(x) = \dfrac{e^{x}+e^{-x}}{e^{x}-e^{-x}}$ 5) $f(x) = \ln\left(\dfrac{e^{x}-1}{x+e^{x}}\right)$ 6) $f(x) = \exp\left(\dfrac{1}{x^2-x}\right)$

Exercice 5
Etudier les limites suivantes :1) $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(e^{x} - x^2 - x\right)$ 2) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1-e^{-2x}}{3x}$ 3) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^{2x}-e^{-x}}{x}$ 4) $\lim\limits_{x\to-\infty} e^{-2x} + 3x$ 5) $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{\ln(2-e^{-x})}{x}$ 6) $\lim\limits_{|x|\to+\infty} (x+2)e^{-x}$

Exercice 6

Dresser le tableau de variations des fonctions suivantes.1) $f(x) = e^{2x} - e^{-2x} - 4x$ 2) $f(x) = (x^2 - 5x + 7)e^{2x}$ 3) $f(x) = x - \dfrac{e^x}{e^x + 2}$ 4) $f(x) = x - e^{\frac{x-2}{2}}$ 5) $f(x) = (x-1)(2 - e^{-x})$

Exercice 7

Soit $f(x) = 1 - \dfrac{4e^x}{1 + e^{2x}}$ et $\mathscr{C}$ sa courbe.

1. Démontrer que pour tout x, $f(-x) = f(x)$. Que peut-on en déduire pour la courbe $\mathscr{C}$?
2. Déterminer $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$.Interpréter.
3. Vérifier que $\forall x \in \mathbb{R}$ $f'(x) = \dfrac{4e^x\left(e^{2x} - 1\right)}{(e^{2x} + 1)^2}$
4. En déduire le sens de variation de la fonction f sur l'intervalle $[0, +\infty[$.
5. Montrer que la courbe $\mathscr{C}$ coupe l'axe des abscisses en un unique point A d'abscisse a positive. Montrer que $1,31 < a < 1,32$. Donner une allure de $\mathscr{C}$ dans le repère.
6. Donner le signe de $f(x)$ pour $x \in \mathbb{R}$.

Exercice 8

Soit $f(x) = \begin{cases} -x + 7 - 4e^x & \text{si } x \leq 0 \\ x + 3 - x\ln x & \text{si } x > 0 \end{cases}$

1. (a) Etudier la continuité de f en 0.
   (b) Etudier la dérivabilité de f en 0 . Interpréter le résultat graphiquement.
   (c) Ecrire l'équation de la tangente à $\mathscr{C}_f$ au point d'abscisse e.
2. Déterminer les limites aux bornes de Df.
3. Etudier les branches infinies de $\mathscr{C}_f$.
4. Établir le tableau de variations de f.
5. Démontrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une solution unique $\alpha > 0$.
6. Construire la courbe $\mathscr{C}_f$.

Exercice 9

On considère la suite (U_n) de nombres réels définie pour tout entier naturel n par : $\begin{cases} U_0 & = & 0 \\ U_{n+1} & = & \ln\left(1 + e^{U_n}\right) \end{cases}$

1. Calculer U_3.
2. Exprimer U_n en fonction de U_{n+1}.
3. Soit la suite (V_n) définie par : $V_n = e^{U_n}$, $n \in \mathbb{N}$.
   (a) Montrer que (V_n) est une suite arithmétique dont on précisera la raison et le premier terme.

(b) Exprimer V_n puis U_n en fonction de n.
(c) Etudier la convergence de la suite (U_n) et préciser sa limite.

10 Fonction ln (TS2)

Initiation ln

Exercice 1
Ecrire plus simplement en un seul logarithme, chacune des expressions suivantes.$A = 3\ln 2 + \ln 5 - 2\ln 5 \quad B = 2\ln 2 + 2\ln 5 + 1 C = \frac{1}{2}\ln 3 + \ln e^2 - \ln\frac{2}{e} + 3 \quad D = \ln\left(3+\sqrt{5}\right) + \ln\left(3-\sqrt{5}\right)$

Exercice 2
Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes.**1)** $\ln(x-1) = \ln(2-x)$ **2)** $\ln(x-2) - \ln(x+1) = 2\ln 2$ **3)** $\ln(x-2) + \ln(x+3) = \ln(5x-9)$ **4)** $\ln\left(\frac{x-1}{2x-1}\right) = 0$

Exercice 3
Résoudre dans $\mathbb{R}$ les inéquations suivantes.**1)** $\ln(x-4) \leq \ln(10-x)$ **3)** $\ln(x-1) + \ln(x+2) \geq \ln(4x-8)$ **4)** $\ln\left(\frac{x-1}{2x-1}\right) > 0$

Exercice 4
On considère le polynôme $P(x) = 2x^3 - 9x^2 + x + 12$.

1. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation $P(x) \leq 0$.
2. En déduire les solutions de l'équation et l' inéquation suivantes.**a)** $2\ln^3 x - 9\ln^2 x + \ln(x) + 12 = 0$.**b)** $\ln(2x-3) + 2\ln(x-2) \leq \ln(-2x^2 + 19x - 24)$

Exercice 5
Résoudre dans $\mathbb{R}^2$ les systèmes suivants :**1)** $\begin{cases} \ln(x+2) + 3\ln(y-1) = 4 \\ 2\ln(x+2) - \ln(y-1) = 2 \end{cases}$ **2)** $\begin{cases} x - y = \frac{3}{2} \\ \ln x + \ln y = 0 \end{cases}$

Exercice 6
Déterminer les limites de f aux bornes de D_f puis calculer sa fonction dérivée f'.1) $f(x) = \dfrac{\ln(x)+1}{\ln(x)-1}$ 2) $f(x) = \dfrac{\ln(1+2x)}{x}$3) $f(x) = \dfrac{x+\ln(x)}{2x}$ 4) $f(x) = x\ln\left(1+\dfrac{1}{x}\right)$

Exercice 7
Dresser le tableau de variations des fonctions suivantes.1) $f(x) = \sqrt{3 - \ln(x)}$ 2) $f(x) = (\ln x)^2 - 2\ln x - 33)$ $f(x) = \dfrac{\ln(x)}{1 - \ln(x)}$ 4) $f(x) = \dfrac{\ln(x+1)}{x+1}$

Exercice 8
Etudier le signe des expressions suivantes :$A(x) = \ln x\big(\ln x + 1\big)$ $B(x) = 1 - \ln(1-x)C(x) =$

$2\ln^2(x) - \ln(x) - 1$ $D(x) = \ln(x) - x + 1$

Exercice 9
Soit $f(x) = x - 1 + \ln\left|\dfrac{x+1}{x-1}\right|$

1. Déterminer les limites aux bornes de D_f.
2. Dresser le tableau de variations de f.
3. Montrer que le point $\mathrm{I}(0;1)$ est à la fois centre de symétrie et point d'inflexion de la courbe de f.
4. Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution α tel que $0 < \alpha < \frac{1}{2}$.
5. Représenter f.

Exercice 10
Soit $f(x) = \ln(-x^2 + 4x - 3)$.

1. (a) Étudier les variations de f.
   (b) En déduire le signe de $f(x)$ sur D_f.
2. Soit g la restriction de f à $I =]2,3[$.Montrer que g est une bijection de $]2,3[$ sur un intervalle J à déterminer.

Soit $F(x) = (x-1)\ln(x-1) - (3-x)\ln(3-x) - 2x$

1. Montrer que F est une primitive sur I de f.
2. Etudier les variations de F et tracer C_F.

11 Limites (TS2)

Exercice 1
Vrai ou faux?

1. Si $\lim\limits_{x\to a} g(x) = a$ et $\lim\limits_{x\to b} f(x) = a$ alors $\lim_{x\to b} (g \circ f)(x) = a$.
2. Soit la fonction u telle que $x-2 \leq u(x) \leq x+3$ pour tout $x > 1$. Alors $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{u(x)}{\sqrt{x}} = +\infty$.
3. Si une fonction f définie et strictement croissante sur $\mathbb{R}$ telle que : $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = 0$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 1$ alors :**a)** $\lim\limits_{x\to+\infty} f(-x+1) = 0$ **b)** $\lim\limits_{x\to0^+} f\left(x + \dfrac{1}{x}\right) = 1$ **c)** $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{f(x)+x}{f(|x|)-1} = +\infty$.

Exercice 2
Étudier les limites suivantes.

1. $\lim\limits_{x\to+\infty} \sin\dfrac{\pi}{x}$
2. $\lim\limits_{x\to\infty} x\sin\dfrac{\pi}{x}$
3. $\lim\limits_{x\to-\infty} \sqrt{\dfrac{2x^2}{1-x}}$
4. $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(x - \sqrt{x} + \dfrac{1}{x}\right)^3$
5. $\lim\limits_{x\to+\infty} x\left(\sqrt{\dfrac{x}{x+1}} - 1\right)$

Exercice 3
Calculer la limite suivante.$\lim\limits_{x\to0} \dfrac{\sqrt{x+4}-2}{x}$En déduire :

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{\sqrt{4+\cos x}-2}{\cos x} \quad \text{et} \quad \lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{\sqrt{4+\sin x}-2}{x}$$

Exercice 4
On considère la fonction f définie sur $[2,\ +\infty[$ par $f(x) = \dfrac{3x+\sin x}{x-1}$Montrer que , pour tout $x \geq 2$, $|f(x)-3| \leq \dfrac{4}{x-1}$.En déduire la limite de f en $+\infty$?.

Exercice 5
Soit la fonction f définie par : $f : x \mapsto x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right) + 1 \quad \forall x \in \mathbb{R}^*$

1. Montrer que $\forall x \in \mathbb{R}^* \quad 1 - x^2 \leq f(x) \leq 1 + x^2$
2. En déduire :
   (a) $\lim\limits_{x \to 0} f(x)$
   (b) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{f(x)}{x^3}$
   (c) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{f(x) - 1}{x}$.

Exercice 6
Soi f une fonction définie sur $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$ telle que : $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = 0$, $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 1$, $\lim\limits_{x \to -1^-} f(x) = +\infty$ et $\lim\limits_{x \to -1^+} f(x) = -\infty$.

1. Interpréter graphiquement ces limites.
2. En déduire les limites suivantes.
   (a) $\lim\limits_{x \to +\infty} f\left(\sqrt{x}\right)$
   (b) $\lim\limits_{x \to +\infty} f\left(-1 + \frac{1}{x}\right)$
   (c) $\lim\limits_{x \to 0^-} f\left(\frac{1}{x}\right)$
   (d) $\lim\limits_{x \to -\infty} \left(\dfrac{f(x) - 1}{2f(x) + 1}\right)^2$

Exercice 7
Étudier les limites suivantes.

1. $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x^{10} - 1}{x - 1}$
2. $\lim\limits_{x \to -1} \dfrac{x\sqrt{x+2} + 1}{x + 1}$
3. $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{6}} \dfrac{2\sin x - 1}{6x - \pi}$
4. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\cos^5 x + \sin 2x - 1}{x}$

Exercice 8
Soit f une fonction définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ tel que $f(1) = 0$ et $f'(1) = -1$.$\mathscr{C}_f$ admet une asymptote d'équation $y = 3$ en $-\infty$ et une asymptote d'équation $y = x + 4$ en $+\infty$.

1. Calculer les limites suivantes.

(a) $\lim\limits_{x \to 0} f\left(\dfrac{x-1}{x^2}\right)$

(b) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{f(x)}{x+f(x)}$

(c) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{1}{f(x)-x+3}$

2. On considère la limite suivante $\lim\limits_{x \to +\infty} xf\left(1+\dfrac{1}{x}\right)$.

   (a) Justifier qu'il y a une présence de forme indéterminée.

   (b) En posant $X = 1 + \frac{1}{x}$, calculer cette limite.

12 Exponentielle

Exercice 1
Simplifier au maximum les expressions suivantes.

1. $\dfrac{(\mathrm{e}^2)^5}{\mathrm{e}^5}$
2. $\sqrt{\mathrm{e}^2} \times \dfrac{1}{\mathrm{e}^{-2}}$
3. $\dfrac{\mathrm{e}^{-3} \times \mathrm{e}^2}{\mathrm{e}^7}$
4. $\dfrac{1}{1+\mathrm{e}} - \dfrac{\mathrm{e}^{-1}}{1+\mathrm{e}^{-1}}$

Exercice 2
Simplifier chacune des expressions.

1. $\mathrm{e}^{-2x} \times \mathrm{e}^{2x}$
2. $(\mathrm{e}^x)^3 \times \mathrm{e}^{-2x}$
3. $\mathrm{e}^{2x+1} \times \mathrm{e}^{1-x}$
4. $\dfrac{\mathrm{e}^{2x+3}}{\mathrm{e}^{2x-1}}$
5. $\dfrac{\mathrm{e}^{x+2}}{\mathrm{e}^{-x+2}}$
6. $\dfrac{\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x}}{\mathrm{e}^x}$
7. $\dfrac{\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x}}{\mathrm{e}^{-x}}$
8. $(\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x})^2 - 1 - \mathrm{e}^{-2x}$
9. $\dfrac{\mathrm{e}^{3x} + \mathrm{e}^x}{\mathrm{e}^{2x} + 1}$

Exercice 3
Démontrer les égalités suivantes.

1. $(\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x})^2 - (\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{-x})^2 = 2.$
2. $\mathrm{e}^{2x} - 5\mathrm{e}^x + 4 = (\mathrm{e}^x - 1)(\mathrm{e}^x - 4)$
3. $\mathrm{e}^{-x} - \mathrm{e}^{-2x} = \frac{\mathrm{e}^x - 1}{\mathrm{e}^{2x}}$
4. $\dfrac{\mathrm{e}^x - 1}{\mathrm{e}^x + 1} = \dfrac{1 - \mathrm{e}^{-x}}{1 + \mathrm{e}^{-x}}$
5. $\dfrac{\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{-x}}{\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x}} = \dfrac{\mathrm{e}^{2x} - 1}{\mathrm{e}^{2x} + 1}$

Exercice 4
Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes.

1. $e^{3x} = 1$
2. $e^{-3x+5} = e^{-2x+5}$
3. $e^{-3x+5} \times e^{x+1} = e^{5}$
4. $e^{-3x+5} = e^{2}$
5. $e^{x} + 4 = 0$
6. $e^{2x-1} = 16$
7. $e^{-x} - \frac{1}{2} = 0$
8. $e^{(x+1)(2x+1)} = 1$
9. $e^{x^2+3x+4} = e^{2}$
10. $e^{x^2+x+1} = e^{3x+5}$
11. $e^{x^2+1} \times e^{2x} = e^{2x^2}$

Exercice 5
Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes.

1. $(e^{x}-1)(e^{x}-2) = 0$
2. $e^{2x} - 4e^{x} + 3 = 0$
3. $e^{2x} - 5e^{x} = 14$
4. $e^{2x} + e^{x} = 2$
5. $e^{x} + e^{-x} = 2$
6. $e^{-x} + 2e^{x} = 3$
7. $e^{-2x} + 2e^{-x} - 3 = 0$
8. $e^{3x} + 3e^{2x} + 2e^{x} = 0$
9. $e^{3x} - e^{2x} - 2e^{x} = 0$

Exercice 6
Résoudre dans $\mathbb{R}$ les inéquations suivantes.

1. $e^{2x} > 3$
2. $e^{-2x} \leq 3$
3. $e^{-2x} \leq e^{x+5}$
4. $e^{x^2} > e^{9}$
5. $e^{x^2} > e^{3x+2}$
6. $(e^{x}-1)(e^{x}-2) > 0$
7. $(2e^{x}-4)(e^{x}-3) < 0$

8. $(e^x+5)\left(e^{2x}-2\right)>0$
9. $\dfrac{e^x-3}{e^x-2}\geq 0$
10. $\dfrac{e^x-3}{e^x-2}\geq 2$

Exercice 7
Résoudre dans $\mathbb{R}$ les inéquations suivantes.

1. $e^{2x}-e^x<0$
2. $e^{2x}-5e^x-14<0$
3. $e^{2x}-3e^x+2\geq 0$
4. $e^{2x}-12e^x+20>0$
5. $-e^{2x}+11e^x-30>0$
6. $e^{2x}-25<0$

Exercice 8
On considère le polynôme $P(x)=2x^3-3x^2-11x+6$.

1. Calculer $P(2)$ puis montrer que :
   $P(x)=(x+2)(x-3)(2x-1)$.
2. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $P(x)=0$.
3. En déduire les solutions des équations suivantes.
   (a) $2(\ln(x))^3-3(\ln(x))^2-11\ln(x)+6=0$.
   (b) $2e^{3x}-3e^{2x}-11e^x+6=0$.

Exercice 9
On considère le polynôme $P(x)=x^3-9x^2-x+9$.

1. Calculer $P(9)$ en déduire une factorisation de $P(x)$.
2. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $P(x)=0$.
3. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $\dfrac{e^{2x}+9e^{-x}}{9e^x+1}=1$.

Exercice 10 1. Développer, réduire et ordonner $P(x)=(x+2)(x-3)(x+1)$

2. Résoudre $\mathbb{R}$, $P(x)=0$ et $P(x)\leq 0$.
3. En déduire la résolution des équations suivantes.
   (a) $(\ln x)^3-7(\ln x)^2-6=0$
   (b) $e^{3x}-7e^x-6=0$.

Exercice 11 1. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $x^3 - 3x^2 + 2x = 0$

2. En déduire la résolution des équations suivantes.
   (a) $(\ln x)^3 - 3(\ln x)^2 + 2\ln x = 0$
   (b) $e^{3x} - 3e^{2x} + 2e^x = 0$.

Exercice 12
On considère le polynôme $P(x) = ax^3 + bx^2 + 14x + c$ où a, b et c sont des réels.

1. Déterminer a, b et c sachant que $P(0) = -20$, $P(-2) = 0$ et $P(-1) = -24$
2. On pose $P(x) = -2x^3 + 8x^2 + 14x - 20$
   (a) Factoriser $P(x)$.
   (b) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $P(x) = 0$.
   (c) En déduire les solutions des équations suivantes.
   (d) $-2e^{3x} + 8e^{2x} + 14e^x - 20 = 0$.
   (e) $-2(\ln(x))^3 + 8(\ln(x))^2 + 14\ln(x) - 20 = 0$.

Exercice 13
Résoudre les systèmes d'équations suivants.

1. $\begin{cases} 2e^x - e^y = 15 \\ e^x + 2e^y = 40 \end{cases}$
2. $\begin{cases} 2e^x - 3e^y = -5 \\ 3e^x + 4e^y = 18 \end{cases}$
3. $\begin{cases} 5e^{-x} - 3e^{-y} = 3 \\ 7e^{-x} + 6e^{-y} = 11 \end{cases}$
4. $\begin{cases} e^x \times e^{2y+2} = 0 \\ e^{x+7} \times e^y = e \end{cases}$
5. $\begin{cases} e^{x-y} = 12 \\ e^{x+y} = \frac{4}{3} \end{cases}$

Exercice 14 1. Résoudre dans $\mathbb{R}^2$: $\begin{cases} 2X - Y = 7 \\ 3X + 4Y = 5 \end{cases}$

2. En déduire la résolution dans $\mathbb{R}^2$ des systèmes : $\begin{cases} 2e^x - e^y = 7 \\ 3e^x + 4e^y = 5 \end{cases}$ $\begin{cases} 2\ln x - \ln y = 7 \\ 3\ln x + 4\ln x = 5 \end{cases}$

Exercice 15
Résoudre les systèmes d'équations suivants.

1. $\begin{cases} e^x \times e^y = e^2 \\ xy = -15 \end{cases}$
2. $\begin{cases} e^x \times e^y = e^{10} \\ \ln x + \ln y = \ln 21 \end{cases}$
3. $\begin{cases} e^x - 3\ln y = 11 \\ 2e^x + \ln y = 1 \end{cases}$
4. $\begin{cases} \ln x + \ln 4 = \ln 3 - \ln y \\ e^x = e^{2-y} \end{cases}$

Exercice 16

Calculer la dérivée de f dans chaque cas.

1. $f(x) = e^x - x - 1$
2. $f(x) = (x+5)e^x$
3. $f(x) = x^2 e^x$
4. $f(x) = xe^{2x}$
5. $f(x) = e^x - e^{-x}$
6. $f(x) = e^{x^2-6x}$
7. $f(x) = xe^{x^2-6x}$
8. $f(x) = e^{\frac{2}{x}}$
9. $f(x) = e^{\frac{x}{x+2}}$
10. $f(x) = \dfrac{e^x+1}{e^x-2}$
11. $f(x) = \dfrac{e^{2x}}{e^x-2}$
12. $f(x) = \dfrac{e^x+e^{-x}}{e^x-e^{-x}}$
13. $f(x) = (4e^x-1)(e^{2x}+1)$
14. $f(x) = \dfrac{1+e^x}{1-2e^x}$
15. $f(x) = \dfrac{2e^x}{e^x-1}$

Exercice 17

Déterminer les limites suivantes.

1. $\lim\limits_{x\to+\infty}(e^{-x}+1)$
2. $\lim\limits_{x\to 0}(e^{-x}+1)$
3. $\lim\limits_{x\to-\infty}(e^{-x}+1)$

4. $\lim\limits_{x \to +\infty} x e^{x}$
5. $\lim\limits_{x \to -\infty} x e^{-x}$
6. $\lim\limits_{x \to -\infty} x e^{x}$
7. $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{e^{2x}-1}{e^{x}+1}$
8. $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{1}{1+e^{x}}$
9. $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(e^{x}+\dfrac{1}{x}\right)$
10. $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{1}{1+e^{-2x}}$

Exercice 18

Déterminer les limites suivantes.

1. $\lim\limits_{x \to +\infty} (e^{2x}-e^{x}+1)$
2. $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{e^{x}+1}{2x}$
3. $\lim\limits_{x \to -\infty} (x^2-4x+1)e^{x}$
4. $\lim\limits_{x \to +\infty} (e^{x}-x^2-x)$
5. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{1-3e^{x}}{e^{x}-1}$

Etude de fonctions

Exercice 19

Etudier les variations de f dans chaque cas.

1. $f(x) = x\mathrm{e}^x$
2. $f(x) = \dfrac{x}{\mathrm{e}^x}$
3. $f(x) = x^2\mathrm{e}^x$
4. $f(x) = \dfrac{\mathrm{e}^x}{x}$
5. $f(x) = \mathrm{e}^{x+2}$
6. $f(x) = \mathrm{e}^{2x-2}$
7. $f(x) = \mathrm{e}^{-x^2}$
8. $f(x) = \mathrm{e}^{x^2+2x+1}$
9. $f(x) = \mathrm{e}^{3-x}$
10. $f(x) = x - \mathrm{e}^x$
11. $f(x) = x + \mathrm{e}^x$

Exercice 20

Soit $f(x) = x - \dfrac{\mathrm{e}^x}{\mathrm{e}^x + 2}$, pour tout réel x.

1. Calculer les limites de f en $+\infty$ et $-\infty$.
2. Montrer que $f'(x) = \dfrac{\mathrm{e}^{2x}+1}{(\mathrm{e}^x+2)^2}$
3. En déduire le tableau de variation de f.
4. Montrer que la droite (D) d'équation $y = x$ est une asymptote à la courbe de f en $-\infty$.
5. Montrer que la droite (D') d'équation $y = x - 1$ est une asymptote à la courbe de f en $+\infty$.

Exercice 21

On considère la fonction f définie par $f(x) = \dfrac{2\mathrm{e}^{2x}}{\mathrm{e}^{2x}+1}$

1. Calculer les limites de f en $+\infty$ et $-\infty$.
2. Montrer que $f'(x) = \dfrac{4\mathrm{e}^{2x}}{(\mathrm{e}^{2x}+1)^2}$.. En déduire le tableau de variations de f.
3. Montrer que le point $I(0,1)$ est un centre de symétrie à la courbe de f.

Exercice 22

Soit la fonction f définie par $f(x) = \left(x^2 - 5x + 7\right)\mathrm{e}^x$

1. Calculer les limites de f en $+\infty$ et $-\infty$.
2. Montrer que le signe de $f'(x)$ est celui de $x^2 - 3x + 2$.

3. Dresser le tableau de variations de f.
4. Que représente l'axe des abscisses pour la courbe de f ?
5. Donner une équation de la tangente au point d'abscisse 0.

Exercice 23
Soit la fonction f définie par $f(x) = \mathrm{e}^{2x} - \mathrm{e}^{-2x} - 4x$

1. Etudier la parité de f
2. Dans la suite on étudie f sur $[0\ ,\ +\infty[$.
   (a) Calculer la limite de f en $+\infty$.
   (b) Montrer que $f'(x) = 2\left(\mathrm{e}^{x} - \mathrm{e}^{-x}\right)^2$.
   (c) Dresser le tableau de variations de f.
   (d) Représenter la courbe de f

Exercice 24
On considère la fonction f définie par $f(x) = \dfrac{2}{\mathrm{e}^{x}+2}$

1. Calculer les limites de f en $+\infty$ et $-\infty$ et préciser les asymptotes à la courbe de f.
2. Calculer $f'(x)$. En déduire le tableau de variation de f.
3. Montrer que le point $\mathrm{I}\left(\ln 2, \frac{1}{2}\right)$ est un centre de symétrie à la courbe de f.
4. Donner une équation de la tangente au point d'abscisse 1.
5. Déterminer les coordonnées du point A intersection de la courbe avec l'axe des ordonnées.

Exercice 25
On considère la fonction f définie par : $f(x) = xe^{-x}$

1. Déterminer le domaine de définition E de f puis les limites aux bornes de E.
2. a. Montrer que la fonction dérivée de f est telle que $f'(x) = (1-x)e^{-x}$.
   b. Dresser le tableau de variations de f.
3. Déterminer la nature de la branche infinie de la courbe en $-\infty$.
4. Tracer la courbe.

Exercice 26
Soit la fonction f définie par : $f(x) = (1-x)e^{x} + 1$

1. Déterminer le domaine de définition de f puis les limites aux bornes de ce domaine. Que peut-on en déduire pour la courbe de f ?
2. Calculer la fonction dérivée de f, étudier son signe puis dresser son tableau de variations de f.

3. Déterminer l'équation de la tangente au point où la courbe coupe l'axe des ordonnées.
4. Déterminer la nature de la branche infinie de la courbe en $-\infty$.
5. Tracer la courbe.

Exercice 27
Soit la fonction f définie par : $f(x) = e^{x^2-2x}$

1. Déterminer le domaine de définition de f puis les limites aux bornes.
2. Calculer la fonction dérivée de f, étudier son signe puis dresser le tableau de variations de f.
3. Déterminer l'équation de la tangente aux points d'abscisse 0 et 2.
4. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $f(x) = 1$.

Exercice 28
Soit la fonction f définie par : $f(x) = \dfrac{e^x - 1}{e^x + 1}$

1. Déterminer le domaine de définition de f.
   Calculer la limite de f en $-\infty$.
   En déduire l'équation d'une asymptote à la courbe en $-\infty$
   Calculer la limite de f en $+\infty$.En déduire l'équation d'une deuxième asymptote à la courbe en $+\infty$.
2. Calculer la fonction dérivée de f, étudier son signe puis dresser le tableau de variations de f.
3. Déterminer l'équation de la tangente au point où la courbe coupe l'axe des ordonnées.
4. Montrer que pour tout x réel , $f(-x) = -f(x)$.Que peut on en déduire pour la fonction f et pour sa courbe représentative ?

Exercice 29
Soit la fonction f définie par : $f(x) = \dfrac{2e^x - 1}{e^x - 1}$

1. Déterminer les réels a et b tels que $f(x) = a + \dfrac{b}{e^x - 1}$
2. Déterminer l'ensemble de définition de la fonction f et étudier les limites aux bornes de cet ensemble de définition.
3. (a) Déterminer la dérivée f' de la fonction f.
   (b) Etudier le sens de variations de la fonction f.
   (c) Dresser le tableau de variations de la fonction f.
4. On appelle $\mathscr{C}$ la courbe représentative de f dans un repère orthonormé $(O;\vec{i},\vec{j})$ (unité:2cm)
   (a) Montrer que le point A $\left(0;\frac{3}{2}\right)$ est un centre de symétrie pour $\mathscr{C}$.
   (b) Tracer $\mathscr{C}$.

Exercice 30

Soit la fonction f définie par : $f(x) = x + \ln(2 - e^x)$

1. Résoudre l'inéquation $2 - e^x > 0$.
   En déduire le domaine de définition Df de f..
2. Etudier les limites $-\infty$ et en $\ln 2$ de la fonction f.
3. Calculer f' puis établir le tableau de variation de f.
4. (a) Montrer que pour tout $x \in Df$,
   $f(x) = x + \ln 2 + \ln\left(1 - \dfrac{e^x}{2}\right)$.
   (b) En déduire que la droite $y = x + \ln 2$ est une asymptote en $-\infty$ à la courbe de f.
   (c) Préciser la position de la courbe par rapport à cette asymptote.
5. Tracer la courbe $\mathscr{C}$ représentative de f dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$ (unité:1cm)

13 Limites de fonctions composées

a , b et c désignent soit un réel soit $\pm\infty$.Rappel : $\boxed{\text{Si } \lim\limits_{x\to a} f(x) = b \text{ et } \lim\limits_{x\to b} g(x) = c \text{ alors par composée } \lim\limits_{x\to a} g}$

Exercice 1
Justifier les limites suivantes.

1. $\lim\limits_{x\to 0} \left(\dfrac{3x-1}{x^2}\right)^4 = +\infty$
2. $\lim\limits_{x\to -\infty} \sqrt{4+\dfrac{1}{x}} = 2$
3. $\lim\limits_{x\to +\infty} \cos\left(\dfrac{\pi x - 2}{x-4}\right) = -1$

Exercice 2
Etudier les limites suivantes.

1. $\lim\limits_{x\to +\infty} \sqrt{x^2 - x - 3}$
2. $\lim\limits_{x\to -2^-} \sqrt{\dfrac{1+x}{4-x^2}}$
3. $\lim\limits_{x\to -\infty} \sin\left(\dfrac{\pi x - 2}{6x-4}\right)$
4. $\lim\limits_{x\to +\infty} \left(\sqrt{x} - x\right)^5$

Exercice 3
Une fonction f définie sur $\mathbb{R}\setminus\{-1\}$ tel que : $\lim\limits_{x\to -\infty} f(x) = 0$, $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x) = 1$, $\lim\limits_{x\to -1^-} f(x) = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to -1^+} f(x) = -\infty$.

1. Interpréter graphiquement ces limites.
2. Déterminer les limites suivantes.
   — $\lim\limits_{x\to +\infty} f\left(\sqrt{x}\right)$
   — $\lim\limits_{x\to +\infty} f\left(-1+\dfrac{1}{x}\right)$
   — $\lim\limits_{x\to -\infty} f\left(-1+\dfrac{1}{x}\right)$
   — $\lim\limits_{x\to 0^-} f\left(\dfrac{1}{x}\right)$
   — $\lim\limits_{x\to +\infty} f\left(\dfrac{x^2+1}{2x-1}\right)$

— $\lim\limits_{x \to -\infty} f\left(\dfrac{2-x^2}{2+x^2}\right)$

Exercice 4
Une fonction f a pour tableau de variations celui donné ci-dessous.

x	$-\infty$		-1		2		$+\infty$
$f(x)$	0	$\nearrow$	$+\infty$ ‖ $+\infty$	$\rightarrow$	0	$\nearrow$	1

Donner en utilisant ce tableau les limites suivantes.

1. $\lim\limits_{x \to +\infty} f(-x+1)$
2. $\lim\limits_{x \to +\infty} f\left(2+\dfrac{2}{x}\right)$
3. $\lim\limits_{x \to -1^-} \dfrac{x-2}{f(x)}$
4. $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{f(x)+x}{f(|x|)-1}$

Exercice 5
Soit f une fonction définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ tel que $f(1)=0$ et $f'(1)=-1$.$\mathscr{C}_f$ admet une asymptote d'équation $y=3$ en $-\infty$ et une asymptote d'équation $y=x+4$ en $+\infty$.

1. Calculer les limites suivantes.
   — $\lim\limits_{x \to 0} f\left(\dfrac{x-1}{x^2}\right)$
   — $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{f(x)}{x+f(x)}$
   — $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{1}{f(x)-x+3}$
2. On considère la limite suivante $\lim\limits_{x \to +\infty} xf\left(1+\dfrac{1}{x}\right)$.
   (a) Justifier qu'il y a une présence de forme indéterminée.
   (b) En posant $X = 1+\frac{1}{x}$, calculer cette limite.

14 Limites (TL)

Exercice 1

Reproduire et compléter le tableau suivant.

$\lim\limits_{x\to 0} f(x)$	$+\infty$	-5	2
$\lim\limits_{x\to 0} g(x)$	-3	0^-	
$\lim\limits_{x\to 0} (f(x)+g(x))$			
$\lim\limits_{x\to 0} f(x)\times g(x)$			
$\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{f(x)}{g(x)}$			0^-

Exercice 2

Calculer les limites suivantes en utilisant la somme, le produit ou le quotient de limites :

1. $\lim\limits_{x\to -\infty} 2x+1+\dfrac{3}{x-1}$
2. $\lim\limits_{x\to 0^+} \left(\dfrac{2}{x}+3\right)\left(x-\dfrac{1}{x}\right)$
3. $\lim\limits_{x\to -\infty} (-x+1)(3x-2)$
4. $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{\frac{2}{x}+3}{2-\frac{1}{x}}$

Exercice 3

Calculer les limites de la fonction f en $+\infty$ et en $-\infty$ si elles existent.

1. $f(x) = -8x^3+x-2$
2. $f(x) = -x^2+x-2$
3. $f(x) = (2x-5)(-5x+1)$
4. $f(x) = -2(3-2x)^3$
5. $f(x) = \sqrt{2x-3}$
6. $f(x) = \sqrt{3-x}$

Exercice 4

Etudier les limites de la fonction f aux bornes de son domaine de définition en précisant les asymptotes éventuelles de la courbe de f.

1. $f(x) = \dfrac{3x-1}{x-6}$

2. $f(x)=\dfrac{-8x+3}{2x-4}$
3. $f(x)=2+\dfrac{3}{x+2}$
4. $f(x)=1-\dfrac{6}{1-x}$

Exercice 5
Même question qu'à l'exercice précédent.

1. $f(x)=\dfrac{2x^2-7}{x^2-9}$
2. $f(x)=\dfrac{5x}{x^2-4}$
3. $f(x)=\dfrac{3x^2-3}{x^2}$
4. $f(x)=2+\dfrac{x+1}{x^2+2}$

Exercice 6
Pour chacun des cas suivants, montrer que la droite Δ est une asymptote à la courbe de la fonction f puisétudier la positive relative de $\mathscr{C}$ par rapport à Δ.

1. $f(x)=2x+1+\dfrac{2}{x-3}$ $\qquad \Delta:\ y=2x+1$
2. $f(x)=-x+4-\dfrac{5}{x-1}$ $\qquad \Delta:\ y=-x+4$
3. $f(x)=4-x-\dfrac{5x}{x^2+2}$ $\qquad \Delta:\ y=4-x$

Exercice 7
Déterminer une équation de l'asymptote oblique de la courbe de f dans chacun des cas suivants.

1. $f(x)=\dfrac{x^2+3x-1}{x-1}$
2. $f(x)=\dfrac{2x^2+x+1}{x+1}$
3. $f(x)=\dfrac{x^2-x+3}{2x-4}$
4. $f(x)=\dfrac{3x^2+4x}{x+3}$

Exercice 8

Étudier les limites de la fonction f aux bornes de son D_f.

1. $f(x) = -x^4 - 3x^2 + 4$
2. $f(x) = \dfrac{x^2 - 10x + 24}{x^2 - 3x - 4}$
3. $f(x) = \dfrac{x^2 - 6x - 7}{-x + 1}$
4. $f(x) = \sqrt{8 - 4x}$

15 Logarithme népérien

Exercice 1
Exprimer en fonction de $\ln 3$ chacun des nombres suivants

1. $\ln \frac{1}{9}$
2. $\ln 63 - \ln 7$
3. $\ln \sqrt{27}$
4. $4\ln 6 - \ln 16$
5. $\ln(3e^2)$

Exercice 2
Exprimer en fonction de $\ln 2$ les nombres suivants.

1. $\ln 32$
2. $\ln \frac{1}{16}$
3. $\ln 40 - \ln 5$
4. $\ln 4\sqrt{2}$
5. $4\ln 2 - \ln 8$
6. $\ln \frac{1}{1024}$

Exercice 3
Exprimer en fonction de $\ln 3$ et $\ln 5$ les nombres suivants.

1. $\ln \frac{27}{25}$
2. $4\ln 15 + \ln 81$
3. $\ln 25 - \ln 15$
4. $\ln 15\sqrt{25}$
5. $4\ln 6 - 2\ln 20$
6. $\ln 675$

Exercice 4
Exprimer chacun des nombres suivants sous la forme $\ln A$ où A est un réel strictement positif.

1. $\ln 4 + \ln 5$
2. $4\ln 6 - \ln 7$
3. $\frac{1}{2}\ln 3 - \ln 5$

4. $1-2\ln 6$
5. $-\ln 2+1$
6. $3\ln 5+2\ln 3$
7. $-2\ln 3+2\ln 2$

Exercice 5
Simplifier au maximum.

1. $\ln 8-\ln 2$
2. $4\ln 6+\ln 3$
3. $\ln 25-\ln 30+\ln 10$
4. $\ln 50+\ln 2-\ln 10$
5. $2\ln 2-\ln 16+\ln 128$
6. $3\ln \mathrm{e}+2\ln \mathrm{e}^2$
7. $-2\ln \mathrm{e}^3+\ln \mathrm{e}^{-2}-\ln \mathrm{e}^2$
8. $3\ln\left(\frac{2}{\mathrm{e}}\right)+\ln 2\mathrm{e}^3+1$

Exercice 6
Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes.

1. $\ln x=5$
2. $\ln x+4=0$
3. $\ln(3-2x)=5$
4. $2\ln x-6=0$
5. $1-4\ln x=\ln x-9$
6. $(\ln x)^2=1$

Exercice 7
Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes.

1. $\ln(x+2)=\ln 2$
2. $\ln(2x-6)=1$
3. $4\ln(1-x)=8$
4. $\ln(x+1)=\ln x$
5. $\ln(2x-3)=\ln(x-2)$
6. $\ln(2x)=\ln(x+1)$

Exercice 8
Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes.

1. $\ln(x+1)+\ln x=0$
2. $\ln(3-x)=3\ln 2$
3. $\ln(3-x)\times\ln(x+1)=0$
4. $\ln(5x-6)-2\ln x=0$

Exercice 9
Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes.

1. $\ln(x-2)-\ln(x+1)=2\ln 2$
2. $\ln(x-2)+\ln(x+3)=\ln(5x-9)$
3. $\ln(x-1)=\ln(2-x)$
4. $\ln(-x+1)+\ln(-x+2)=\ln(x+7)$
5. $2\ln(x+1)+\ln(x-1)=3\ln x$
6. $\ln\left(\frac{x-1}{2x-1}\right)=0$

Exercice 10
Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes.

1. $(\ln x)^2-\ln x-2=0$
2. $(\ln(x-1))^2-\ln(x-1)-2=0$
3. $3(\ln x)^2+\ln x-1=0$
4. $(\ln x)^2-6\ln x+9=0$
5. $\ln x^2-6\ln x+4=0$

Exercice 11
Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes.

1. $\ln(3x-4)=\ln(2x+1)$
2. $\ln(4-2x)=\ln(x-1)$
3. $(\ln x)^2-3\ln x+2=0$
4. $2(\ln x)^2-5\ln x-3=0$
5. $\ln(x^2-3x+2)=2\ln(x+4)$
6. $\ln(2x^2-10x+8)=\ln(3x^2-3x-18)$

Exercice 12
Résoudre dans $\mathbb{R}$ les inéquations suivantes.

1. $\ln x \leq 1$
2. $2\ln x > \ln 3$
3. $4\ln x + 6 \geq 0$
4. $3\ln x - 4 \leq \ln x$
5. $(1,2)^n \geq 4 \quad n \in \mathbb{N}$
6. $(0,02)^n \geq 4 \quad n \in \mathbb{N}$
7. $(5,5)^n < 20 \quad n \in \mathbb{N}$
8. $(0,007)^n \leq 0.001 \quad n \in \mathbb{N}$

Exercice 13
Résoudre dans $\mathbb{R}$ les inéquations suivantes.

1. $\ln(x+1) \leq 0$
2. $\ln(x-6) > 1$
3. $2\ln(3-x) < 1$
4. $\ln(x-2) > \ln x$
5. $\ln(x-2) > 1$
6. $(1-3x)\ln x \geq 0$

Exercice 14
Résoudre dans $\mathbb{R}$ les inéquations suivantes.

1. $\ln(5x+20) > \ln(3x-9)$
2. $\ln(8-2x) \leq \ln(5x-25)$
3. $\ln(x^2-1) \leq \ln(2x+2)$
4. $\ln(x^2+1) < \ln(2x^2+x+2)$

Exercice 15
On considère le polynôme $P(x) = 2x^3 - 9x^2 + x + 12$.

1. Montrer que -1 est une racine de $P(x)$.
2. En déduire une factorisation de $P(x)$.
3. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $P(x) = 0$.
4. En déduire les solutions des équation et inéquation suivantes.
   (a) $2(\ln(x))^3 - 9(\ln(x))^2 + \ln(x) + 12 = 0$.
   (b) $2(\ln(2x+3))^3 - 9(\ln(2x+3))^2 + \ln(2x+3) + 12 = 0$.
   (c) $2(\ln(x))^3 - 9(\ln(x))^2 + \ln(x) + 12 < 0$.
   (d) $\ln(2x-3) + 2\ln(x-2) = \ln(-2x^2+19x-24)$

Exercice 16 1. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $x^3+2x^2-x-2=0$

2. En déduire la résolution des équations suivantes.
   (a) $(\ln x)^3+2(\ln x)^2-\ln x-2=0$
   (b) $(\ln(x-1))^3+2(\ln(x-1))^2-\ln(x-1)-2=0$
   (c) $\ln(x^2+2x-1)=\ln 2-\ln x$

Exercice 17
Résoudre les systèmes d'équations suivants

1. $\begin{cases} -\ln x+2\ln y=1 \\ 3\ln x-5\ln y=-1 \end{cases}$
2. $\begin{cases} 2\ln x-3\ln y=5 \\ \ln x+2\ln y=-1 \end{cases}$
3. $\begin{cases} x+y=2 \\ \ln x-\ln y=\ln 3 \end{cases}$
4. $\begin{cases} x+y=3 \\ \ln x+\ln y=\ln 2 \end{cases}$
5. $\begin{cases} \ln(xy)=4 \\ (\ln x)(\ln y)=-12 \end{cases}$
6. $\begin{cases} \ln(xy)=-2 \\ (\ln x)(\ln y)=-15 \end{cases}$
7. $\begin{cases} \ln x+\ln y=2 \\ (\ln x)(\ln y)=-24 \end{cases}$
8. $\begin{cases} 2\ln(x+3)+3\ln(4-y)=4 \\ 5\ln(x+3)-3\ln(4-y)=-11 \end{cases}$
9. $\begin{cases} \ln x^3-\ln y^2=-4 \\ \ln x+\ln y^4=1 \end{cases}$

Exercice 18
Dans chaque cas déterminer l'ensemble de définition de la fonction f.

1. $f(x)=x+\ln(x+3)$
2. $f(x)=\ln x+\ln(x+3)$
3. $f(x)=\ln\left(-x^2+2x+3\right)$
4. $f(x)=\ln\left(x^2-1\right)$
5. $f(x)=\dfrac{4}{\ln(x-2)}$
6. $f(x)=\dfrac{1}{\ln x-1}$

7. $f(x)=\dfrac{\ln(1-x)}{x+2}$

Exercice 19
Calculer la dérivée de f dans chaque cas.

1. $f(x)=\ln x - x - 1$
2. $f(x)=2x+\ln(3x-1)$
3. $f(x)=x\ln x$
4. $f(x)=\ln x\ln(2-x)$
5. $f(x)=\dfrac{1}{\ln x}$
6. $f(x)=\dfrac{x+1}{\ln x}$
7. $f(x)=(\ln x)^2$
8. $f(x)=\ln(2x^2+3x)$
9. $f(x)=\ln\left(\dfrac{2x+3}{3x-6}\right)$

Exercice 20
Etudier et représenter graphiquement f dans chaque cas.

1. $f(x)=\ln x$
2. $f(x)=\ln x^2$
3. $f(x)=(\ln x)^2$
4. $f(x)=x\ln x$
5. $f(x)=x^2\ln x$
6. $f(x)=x\ln|x|$
7. $f(x)=\dfrac{x}{\ln x}$
8. $f(x)=\dfrac{\ln x}{x}$
9. $f(x)=\ln(x-2)$
10. $f(x)=\ln(4-2x)$

Exercice 21
Soit la fonction f définie par : $f(x)=\ln(-2x^2+x+1)$
et de représentation $\mathscr{C}$.

1. Montrer que le domaine de définition de f est
   $D=\left]-\frac{1}{2}\,,\,1\right[$.

2. Calculer les limites aux bornes de D.
3. Démontrer que pour tout $x \in D$,
   $f'(x) = \dfrac{-4x+1}{-2x^2+x+1}$
4. Dresser le tableau de variation de f.
5. Déterminer les points d'intersection de $\mathscr{C}$ avec l'axe des abscisses.
6. Déterminer l'équation de la tangente au point d'abscisse 0.

Exercice 22
Soit la fonction f définie par :
$f(x) = \ln\left(\dfrac{3x-6}{x}\right)$, de représentation $\mathscr{C}$.

1. Montrer que le domaine de définition de f est
   $D =]-\infty\,,\,0[\cup]2\,,\,+\infty[$.
2. Calculer les limites aux bornes de D.
   Préciser les asymptotes à $\mathscr{C}$.
3. Démontrer que pour tout $x \in D$, $f'(x) = \dfrac{6}{x(3x-6)}$
4. Etudier le signe de $f'(x)$ puis dresser le tableau de variation de f.
5. Déterminer le point A intersection de $\mathscr{C}$ avec l'axe des abscisses.
6. Déterminer l'équation de la tangente au point d'abscisse 3.
7. Montrer que le point I$(1,\ \ln 3)$ est un centre de symétrie de $\mathscr{C}$.
8. Construire $\mathscr{C}$.

Exercice 23
Soit la fonction f définie par : $f(x) = \frac{1}{x} + 2\ln(x+1)$, de représentation $\mathscr{C}$.

1. Déterminer le domaine de définition D de f.
2. Calculer les limites aux bornes de ce domaine.
   Préciser les asymptotes à $\mathscr{C}$.
3. Démontrer que pour tout $x \in D$,
   $f'(x) = \dfrac{2x^2-x-1}{x^2(x+1)}$
4. Dresser le tableau de variation de f.
5. Construire $\mathscr{C}$.

Exercice 24
Soit la fonction f définie par : $f(x) = (\ln x - 2)\ln x$, de représentation $\mathscr{C}$.

1. Déterminer le domaine de définition D de f.

2. Calculer les limites aux bornes de ce domaine.
3. Déterminer $f'(x)$.
4. Dresser le tableau de variation de f.
5. Montrer que $\mathscr{C}$. coupe l'axe des abscisses en deux points A et B dont on précisera les coordonnées.
6. Déterminer les équations des tangentes en A et B.

Exercice 25 1. Soit la fonction f définie par : $f(x) = (\ln ax + b)$ où a et b sont des réels et $\mathscr{C}$ sa représentation graphique.
   (a) Déterminer $f'(x)$ en fonction de a et b.
   (b) Calculer les réels a et b pour que $\mathscr{C}$ passe par le point $\mathrm{I}(1\ ,\ 0)$ et admette en ce point une tangente (T) parallèle à la droite $(\mathrm{D}) : y = -x$.
2. Dans la suite on prend $a = -1$ et $b = 2$ et donc $f(x) = \ln(-x+2)$
   (a) Dresser le tableau de variation de f.
   (b) Ecrire une équation de la tangente (T).
   (c) Caluler $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{x}$.
   En déduire la nature de la branche infinie à $\mathscr{C}$.
   (d) Déterminer les coordonnées du point J intersection de $\mathscr{C}$ avec l'axe des ordonnées.
   (e) Tracer la courbe $\mathscr{C}$.

Exercice 26
Soit la fonction f définie par : $f(x) = x - 2 + \ln\left(\dfrac{x-2}{x+2}\right)$, de représentation $\mathscr{C}$.

1. Etudier le signe de $\dfrac{x-2}{x+2}$ en déduire le domaine de définition de f.
2. Calculer les limites aux bornes du domaine de définition et préciser les asymptotes à $\mathscr{C}$.
3. Calculer $f'(x)$.
4. Dresser le tableau de variation de f.
5. Montrer que la droite d'équation $y = x - 2$ est une asymptote à $\mathscr{C}$
6. Montrer que le point $\mathrm{I}(0,\ 2)$ est un centre de symétrie de $\mathscr{C}$.
7. Construire $\mathscr{C}$.

Exercice 27
Soit la fonction f définie par : $f(x) = -\dfrac{1}{2}x + \ln\left(\dfrac{x-1}{x}\right)$, de représentation $\mathscr{C}$.

1. Résoudre l'inéquation $\dfrac{x-1}{x} > 0$
2. En déduire le domaine de définition D de f.
3. Calculer les limites aux bornes du domaine de définition.
4. Montrer que $f'(x) = \dfrac{-x^2+x+2}{2x(x-1)}$ pour $x \in D$.
5. Dresser le tableau de variation de f.
6. Montrer que la droite d'équation (Δ) : $y = -\dfrac{1}{2}x$ est une asymptote oblique à $\mathscr{C}$.
7. Etudier la position de $\mathscr{C}$ par rapport à (Δ) sur les intervalles $]-\infty\,,\,0[$ et $]0\,,\,+\infty[$.
8. Montrer que le point $\mathrm{I}\left(\dfrac{1}{2}, -\dfrac{1}{4}\right)$ est un centre de symétrie de $\mathscr{C}$.
9. Construire $\mathscr{C}$.

Exercice 28

Soit la fonction f définie par : $f(x) = \dfrac{1+2\ln x}{2x}$, de représentation $\mathscr{C}$.

1. Déterminer le domaine de définition D de f.
2. Calculer les limites aux bornes du domaine de définition.
   On précisera les asymptotes éventuelles.
3. Calculer $f'(x)$ pour $x \in D$.
4. Dresser le tableau de variation de f.
5. Déterminer le point A intersection de $\mathscr{C}$ avec l'axe des abscisses.
6. Déterminer l'équation de la tangente au point A.
7. Construire les tangentes, les asymptote et la courbe $\mathscr{C}$.

16 Polynômes

Exercice 1
Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes :

1. $-x^2-2x+3=0$
2. $x^2-2x=15$
3. $x(x+3)=x+1$
4. $4x^2-3x=0$
5. $(2x-1)\left(-3x^2+12x-8\right)=0$
6. $\left(x^2-2\right)\left(x^2+1\right)=0$
7. $\dfrac{30}{x}+\dfrac{18}{x+3}=7$

Exercice 2
Résoudre dans $\mathbb{R}$ les inéquations suivantes :

1. $x^2-13x-48\leq 0$
2. $-x^2+13x+48\leq 0$
3. $-x^2+13x+48>0$
4. $2x^2+2\sqrt{2}x+1>0$
5. $x^2+2\sqrt{3}x+2<0$
6. $x^2+x-2\geq 1$
7. $(x+1)(-x^2+x+6)>0$
8. $(1-4x)(x^2+5x+4)>0$
9. $\dfrac{x^2-3x-4}{x-3}\geq 0$
10. $\dfrac{x-1}{x+1}>2x$

Exercice 3
On considère le polynôme suivant : $P(x)=-2x^3+9x^2-7x-6$.

1. (a) Montrer que 2 est une racine de $P(x)$.
   (b) En déduire que $P(x)$ peut s'écrire sous la forme $P(x)=(x-2)(ax^2+bx+c)$ où a , b et c sont des réels à préciser.
   (c) Factoriser $P(x)$ en produit de facteurs de polynômes de premier degré.
2. On suppose maintenant que : $P(x)=(-2x-1)(x-2)(x-3)$.

(a) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $P(x) = 0$.
(b) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation $P(x) < 0$.

Exercice 4
On considère le polynôme suivant : $P(x) = 3x^3 + 17x^2 + 9x - 5$.

1. Montrer que $P(x)$ est factorisable par $x+1$ puis l'écrire sous la forme : $P(x) = (x+1)Q(x)$ où $Q(x)$ est un polynôme à préciser.
2. Factoriser $Q(x)$.
3. En déduire que $P(x) = (3x-1)(x+5)(x+1)$.
4. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation $P(x) \leq 0$.
5. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $P(x) = 0$ puis $3(2x-5)^3 + 17(2x-5)^2 + 9(2x-5) - 5 = 0$.

Exercice 5
Soit le polynôme $P(x) = 2x^4 + 5x^3 - 5x^2 - 5x + 3$.

1. Calculer $P(1)$ et $P(-3)$. Que peut-on en déduire ?
2. Montrer que : $P(x) = (x-1)(2x^3 + 7x^2 + 2x - 3)$.
3. On pose $\mathrm{Q}(x) = 2x^3 + 7x^2 + 2x - 3$.
   (a) Trouver trois réels a, b et c tels que : $\mathrm{Q}(x) = (x+3)(ax^2 + bx + c)$.
   (b) En déduire une factorisation de $P(x)$.
4. Étudier dans $\mathbb{R}$, le signe de $P(x)$.

Exercice 6
On considère le polynôme suivant : $h(x) = 4x^3 + x^2 - 4x - 1$.

1. Vérifier que 1 est une racine de $h(x)$.
2. En déduire une factorisation de $h(x)$ par la méthode de HORNER.
3. Soit $R(x) = \dfrac{(4x+1)(x+1)(x-1)}{4x^2 - 7x - 2}$
   (a) Montrer que $(4x+1)(x-2) = 4x^2 - 7x - 2$.
   (b) Simplifier $R(x)$.
   (c) Étudier, suivant les valeurs du réel x ,le signe de $R(x)$.

Exercice 7
On considère le polynôme suivant : $P(x) = 3x^4 + 14x^3 - 8x^2 - 14x + 5$.

1. Vérifier que 1 et -5 sont des racines de $P(x)$.
2. En utilisant la méthode de HORNER, trouver le quotient $Q(x)$ de la division de $P(x)$ par $(x-1)$.

3. Puis en utilisant de nouveau la méthode de HORNER, trouver le quotient $Q'(x)$ de la division de $Q(x)$ par $(x+5)$.
4. Factoriser $Q'(x)$ puis $P(x)$.
5. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation $P(x) \geq 0$.
6. Soit $F(x) = \dfrac{(3x-1)(x^2-1)(x+5)}{x^2+x-2}$.
   (a) Montrer que $x^2+x-2 = (x-1)(x+2)$.
   (b) Simplifier $F(x)$.
   (c) Étudier, suivant les valeurs du réel x ,le signe de $F(x)$.

Exercice 8 1. Soit $P(x) = x^3+bx^2+cx+d$ où b, c et d sont des réels.Sachant que $P(1) = 4$, $P(-1) = -16$ et $P(3) = 0$, déterminer les réels b, c et d.

2. On pose $P(x) = x^3-6x^2+9x$
   (a) Factoriser $P(x)$.
   (b) Etudier suivant les valeurs de x , le signe de $P(x)$.
3. Une entreprise vend un produit, et le profit réalisé en fonction du nombre de produits vendus$x$ est donné par la fonction de profit suivante : $P(x) = x^3-6x^2+9x$Combien de produits l"entreprise doit-elle produire au moins pour réaliser un bénéfice ?

17 Primitives (TS2)

Exercice 1

Pour chacune des fonctions définies ci-dessous, trouver :

1. le(s) plus grand(s) intervalle(s) I sur le(s)quel(s) elle admet des primitives.
2. l'expression d'une primitive sur chaque intervalle.

1) $f(x)=3x^2-2x+5$2) $f(x)=(2x+1)(x^2+x-5)$3) $f(x)=\dfrac{x}{(1-x^2)^2}$4) $f(x)=\dfrac{1}{4x^2-4x+1}$5)

$f(x)=\dfrac{1}{x^3-3x^2+3x-1}$6) $f(x)=\cos 2x\cos 3x$7) $f(x)=\sin^3 x\cos^4 x$8) $f(x)=\cos x\sin 3x$

Exercice 2

Pour chaque fonction f, déterminer une primitive sur I, prenant la valeur b en a :

1) $f(x)=\dfrac{2}{(3-x)^3}, \quad I=]-\infty,3], \quad a=0,\ b=4$

2) $f(x)=\dfrac{\sin x}{\cos^3 x}, \quad I=]0,\frac{\pi}{2}[, \quad a=\frac{\pi}{3},\ b=1$

3) $f(x)=\dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}, \quad I=\mathbb{R}, \quad a=0,\ b=1$

4) $f(x)=\dfrac{x\sin x+\cos x}{x^2}, \quad I=]-\infty,0[, \quad a=0,\ b=1$

5) $f(x)=\dfrac{1+\sin x}{\cos^2 x}, \quad I=[0,\frac{\pi}{2}[\quad a=\frac{\pi}{4},\ b=1$

Exercice 3

Déterminer une primitive F dans chacun des cas suivants :

1) $f(x) = (x^2+x+1)\sqrt{x}$

2) $f(x) = (x^2+x+1)\sqrt{x+1}$

3) $f(x) = x\sqrt{3-x}$

4) $f(x) = \dfrac{x+1}{(x^2+2x+3)\sqrt{x^2+2x+3}}$

5) $f(x) = \sin(x^2+2x) + (2x^2+2x)\cos(x^2+2x)$

6) $f(x) = \dfrac{1}{1+\cos x}$

7) $f(x) = \sqrt{x+1} + \dfrac{1}{2}\dfrac{x}{\sqrt{x+1}}$

8) $f(x) = \dfrac{12}{(x-1)^2}\left(1+\dfrac{3}{x-1}\right)^3$

9) $f(x) = 1 + \dfrac{1}{\tan^2 x}$

10) $f(x) = \dfrac{\cos(\sqrt{x})}{\sqrt{x}}$

11) $f(x) = \dfrac{x^2-2x}{(x-1)^2}$

12) $f(x) = \dfrac{x^3+3x}{(x^2-1)^3}$ $\Big(crire\ f(x) = \dfrac{a}{(x-1)^3} + \dfrac{b}{(x+1}$

13) $f(x) = \dfrac{x^2+1}{(x^2-1)^2}$ $\Big(crire\ x^2+1 = \dfrac{1}{2}\big((x+1)^2+(x$

14) $f(x) = \dfrac{3x^2+4x+4}{(x^2+2x)^2}$ $\Big(crire\ f(x) = \dfrac{a}{x^2} + \dfrac{b}{(x+2)^2}$

Exercice 4

On se propose de déterminer une primitive sur $\mathbb{R}$ des fonctions :

$$f(x) = x\cos^2 x, \quad g(x) = x\sin^2 x$$

1. Déterminer une primitive de $f+g$.
2. Linéariser $\cos^2 x - \sin^2 x$. En déduire qu'il existe deux réels a et b tels que la fonction $x \longmapsto a\sin 2x + b\cos 2x$ soit une primitive sur $\mathbb{R}$ de $f-g$.
3. Conclure.

Exercice 5

Soit la fonction f définie sur $[0, +\infty[$ par : $f(x) = \dfrac{x^3}{(1+x^2)^3} + \dfrac{x^2}{(1+x^3)^2\sqrt{1+x^3}}$.

1. Justifier que f admet des primitives sur $[0, +\infty[$.
2. Déterminer les réels a et b tels que : $\dfrac{x^3}{(1+x^2)^3} = \dfrac{ax}{(1+x^2)^2} + \dfrac{bx}{(1+x^2)^3}$.
3. En déduire la primitive F de f sur $[0, +\infty[$ qui s'annule en 0.

Exercice 6

Soit la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par :
$g(x) = (\cos 3x + \cos x)\cos x$.

1. Déterminer les réels a , b, c et d tels que : $g(x) = a + b\cos 2x + c\cos 4x + d\cos 6x$.
2. En déduire une primitive de g sur $\mathbb{R}$.

Exercice 7

Une entreprise modélise la température (en °C) d'un four en fonction du temps t (en minutes) par la dérivée $T'(t) = 4t - 20$, valable pour $t \in [0, 10]$.
On sait qu'à l'instant $t = 0$, la température est de 300°C.
À quel instant la température est-elle minimale ? Quelle est cette température ?

18 Etude de fonctions ln et expo

Fonctions de raccordement

PROBLÈME 1 On considère la fonction f définie par :

$$f(x)=\begin{cases} x-1-\dfrac{1}{\ln(x-2)} & \text{si } x>2 \\ x-\mathrm{e}^{\frac{x-2}{2}} & \text{si } x\leq 2 \end{cases}$$

1. Montrer que f est définie sur $\mathbb{R}\smallsetminus\{3\}$.
2. Étudier les limites de f aux bornes de son ensemble de définition.
3. Déterminer la nature des branches infinies de $\mathscr{C}_f$.
4. Montrer que f est continue en 2.
5. Étudier la dérivabilité de f en 2. Interpréter graphiquement les résultats.
6. Calculer la dérivée $f'(x)$ pour $x<2$ et pour $x>2$.
7. Déterminer le sens de variations de f puis établir son tableau de variations.
8. Montrer que l'équation $f(x)=0$ admet une unique solution α dans $[0\ ,\ 1]$. En déduire que $0,4<\alpha<0,5$.
9. Tracer $\mathscr{C}_f$ dans un repère orthonormé.
10. Une population d'insectes se développe initialement dans un environnement aux ressources limitées, puis prolifère une fois que les conditions deviennent favorables. On modélise l'évolution de cette population en fonction du temps (en semaines) par la fonction : $F(x)=5+\dfrac{x^2}{2}-2\mathrm{e}^{\dfrac{x-2}{2}}$ où $F(x)$ représente le nombre d'individus (en milliers) au temps $x\in[0,\ 2]$.
    (a) Calculer $F(0)$ et interpréter ce résultat.
    (b) Calculer la population minimale au cours de ces deux premières semaines.

PROBLÈME 2Partie A Soit g la fonction définie par $g(x)=1-x\mathrm{e}^{-x}$

(a) Étudier les variations de g sur $\mathbb{R}$.
(b) En déduire le signe de $g(x)$ sur $\mathbb{R}$.

Partie B Soit la fonction f définie par :$f(x)=\begin{cases} \ln|x| & \text{si } x<-1 \\ (x+1)(1+\mathrm{e}^{-x}) & \text{si } x\geq -1 \end{cases}$

(a) Déterminer D_f
(b) Étudier la continuité et la dérivabilité de f en -1.
(c) Dresser le tableau de variations de f.
(d) Montrer que la droite $\Delta : y=x+1$ une asymptote $\mathscr{C}_f$ en $+\infty$.
(e) Étudier la position de $\mathscr{C}_f$ et Δ .
(f) Montrer qu'il existe un unique point A de $\mathscr{C}_f$ où la tangente (T) est parallèle à Δ.
(g) Tracer Δ , (T) et $\mathscr{C}_f$.

PROBLÈME 3PARTIE A

Soit u la fonction définie par :$u(x) = \dfrac{1+x}{2+x} + \ln x$

(a) Dresser le tableau de variations de u .

(b) En déduire que la fonction u s'annule pour un unique réel α puisvérifier que $0,54 < \alpha < 0,55$

(c) Donner le signe de $u(x)$.

PARTIE B On considère la fonction f définie par :$f(x) = \begin{cases} \dfrac{-x^2 \ln x}{1+x} & \text{si } x > 0 \\ e^{-x} + x^2 - 1 & \text{si } x \leq 0 \end{cases}$On désigne par $\mathscr{C}_f$ la courbe représentative de f dans le plan muni d'un repère orthonormal $(O; \vec{u}, \vec{v})$ d 'unité 4 cm.

(a) Déterminer les limites aux bornes de D_f .

(b) Étudier la continuité et la dérivabilité de f en 0.

(c) Étudier les branches infinies de $\mathscr{C}_f$.

(d) i. Pour $x > 0$, calculer $f'(x)$ .Vérifier que $f'(x)$ et $-u(x)$ ont le même signe .

ii. Pour $x < 0$, donner le signe de $f'(x)$.

iii. Montrer que $f(\alpha) = \dfrac{\alpha^2}{2+\alpha}$

iv. Établir le tableau de variations de f.

v. Tracer la courbe C .On prend $\alpha = 0,55$

(e) Soit h la restriction de f à $]-\infty, 0]$.

i. Montrer que h réalise une bijection de $]-\infty, 0]$ vers un intervalle J à préciser .

ii. Tracer la courbe de h^{-1} dans le repère.

PROBLÈME 4

(a) Soit $g(x) = 1 + (1-x)e^{2-x}, \quad x \leq 0$

Étudier les variations de g.En déduire le signe de g sur $]-\infty\ ,\ 0]$.

(b) Soit la fonction f définie par :

$f(x) = \begin{cases} x(1+e^{2-x}) & \text{si } x \leq 0 \\ \ln|x^2 - 1| & \text{si } x > 0 \end{cases}$

i. Déterminer l'ensemble de définition de f.

ii. Étudier la continuité et la dérivabilité de f en 0.

iii. Étudier les variations de f.

iv. Déterminer les points d'intersection de $\mathscr{C}_f$ avec les axes du repère.

(c) Soit h la restriction de f à $[0\ ,\ 1]$.

Montrer que h admet une bijection réciproque dont on dressera le tableau de variation.

(d) Expliciter h^{-1}

(e) Tracer $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_{h^{-1}}$.

PROBLÈME 5 PARTIE A

On considère la fonction f définie par :
$f(x)=\begin{cases} x+2+\ln\left|\dfrac{x-1}{x+1}\right| & \text{si } x<0 \\ (2+x)e^{-x} & \text{si} x\geq 0 \end{cases}$ On désigne par $\mathscr{C}_f$ la courbe représentative de f dans le plan muni d'un repèreorthonormal $(O;\vec{i},\vec{j})$ d'unité 1 cm.

(a) Montrer que f est définie sur $\mathbb{R}\setminus\{-1\}$.

(b) i. Calculer les limites aux bornes du domaine de définition de f. Préciser les asymptotes parallèles aux axes de coordonnées.

ii. Calculer $\lim\limits_{x\to-\infty}[f(x)-(x+2)]$ .Interpréter graphiquement le résultat .

(c) i. Étudier la continuité de f en 0.

ii. Démontrer que $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{-x}-1}{x}=-1$ et $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1-x)}{x}=-1$.

iii. En déduire que f est dérivable à droite et à gauche en 0 . f est - elle dérivable en 0 ?

(d) Calculer $f'(x)$ pour $x\in]0,+\infty[$ puis pour $x\in]-\infty,-1[\cup]-1,0[$.

(e) Étudier le signe de $f'(x)$ pour $x\in]0,+\infty[$ puis pour $x\in]-\infty,-1[\cup]-1,0[$.

(f) Dresser le tableau de variations de f .

(g) Montrer que l'équation $f(x)=0$ admet une unique solution α appartenant à $]-3,-2[$

(h) Tracer (C) dans le repère.On mettra en évidence l'allure de (C) au point d'abscisse 0 et les droites asymptotes.

(i) Soit g la restriction de f à $]-\infty,-1[$

i. Montrer que g définit une bijection de $]-\infty,-1[$ sur un intervalle J à préciser.

ii. On note g^{-1} sa bijection réciproque.Représenter la courbe de g^{-1} dans le repère précèdent.

PROBLÈME 6PARTIE A

(a) Étudier sur $\mathbb{R}$ le signe de $4e^{2x}-5e^{x}+1$.

(b) Soit : $g(x)=\ln x-2\sqrt{x}+2$.

i. Déterminer les limites de g aux bornes de son domaine de définition.

ii. Étudier ses variations et dresser son tableau de variations.

iii. En déduire son signe.

PARTIE B Soit$f(x)=\begin{cases} x+\dfrac{e^{x}}{2e^{x}-1} & \text{si } x\leq 0 \\ 1-x+\sqrt{x}\ln x & \text{si } x>0 \end{cases}$ On désigne par $\mathscr{C}$la courbe représentative de f dans un repère orthonormé d'unité 2 cm.

(a) i. Déterminer D_f le domaine de définition de f.

ii. Calculer les limites de f aux bornes de D_f et étudier les branches infinies de $\mathscr{C}$.

iii. Étudier la position de $\mathscr{C}$ par rapport à l'asymptote oblique dans $]-\infty,\ 0]$.

(b) i. Étudier la continuité de f en 0.

ii. Étudier la dérivabilité de f en 0 et interpréter graphiquement les résultats.

(c) Déterminer la dérivée de f et dresser le tableau de variations de f.

(d) Construire dans le repère les asymptotes, la courbe $\mathscr{C}$ et les demi-tangentes.On remarquera que $f(1) = 0$ et $f'(1) = 0$.

19 Etude de fonctions ln

Problèmes sur le logarithme népérien

PROBLÈME 1Partie A Soit g la fonction définie par : $g(x) = 2x - 2 - x\ln(x)$

1. Étudier les variations de g puis dresser son tableau de variations.
2. Montrer que l'équation $g(x) = 0$ admet deux solutions α et β telles que : $\alpha \in]0\,,\,e[$ et $\beta \in]e\,,\,+\infty[$.Préciser la valeur exacte de α et établir que $4,5 < \beta < 5$.
3. En déduire le signe de $g(x)$ suivant les valeurs de x.

Partie B On considère la fonction f définie sur $]0\,,\,+\infty[$ par :

$$\begin{cases} f(x) = \dfrac{(\ln(x))^2}{x-1} & \text{si } x \neq 1 \\ f(1) = 0 \end{cases}$$

1. (a) Étudier la continuité de f en 1.
   (b) Étudier la dérivabilité de f en 1.
2. (a) Montrer que pour $x \neq 1$ et $x > 0$: $f'(x) = \dfrac{\ln(x)}{x(x-1)^2} \times g(x)$.
   (b) Dresser le tableau de variations de f.
3. Montrer que $f(\beta) = \dfrac{4(\beta-1)}{\beta^2}$.
4. Donner une équation de la tangente à la courbe $\mathscr{C}$ de f au point d'abscisse 1.
5. Soit h la restriction de f à l'intervalle $]0\,,\,1]$.
   (a) Montrer que h admet une bijection réciproque h^{-1} puis établir le tableau de variation de h^{-1}.
6. Tracer $\mathscr{C}$ et celle de h^{-1} dans le même repère.

PROBLÈME 2 On considère la fonction f définie par :

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x\ln(x)}{x+1} & \text{si } x > 0 \\ \ln(1-x) & \text{si } x \leq 0 \end{cases}$$

Partie A

1. Montrer que $D_f = \mathbb{R}$ et calculer les limites de f aux bornes de D_f .
   (a) Étudier la continuité de f en 0.
   (b) Étudier la dérivabilité de f en 0.
   Interpréter graphiquement les résultats obtenus.
2. Étudier les branches infinies de $\mathscr{C}_f$

Partie B

1. Soit $h(x) = \ln(x) + x + 1$
   (a) Dresser le tableau de variations de h.
   (b) Montrer que l'équation $h(x) = 0$ admet une unique solution α et montrer que $0,27 < \alpha < 0,28$.
   (c) En déduire le signe de $h(x)$.
2. (a) Montrer que $f'(x) = \dfrac{h(x)}{(x+1)^2}$ pour $x > 0$ en déduire le signe de $f'(x)$.
   (b) Calculer $f'(x)$ pour $x < 0$
   (c) Montrer que $f(\alpha) = -\alpha$.
   Établir le tableau de variations de f.
   (d) Tracer la courbe $\mathscr{C}_f$ dans un RON.

Partie C Soit g la restriction de la fonction f à l'intervalle $I = [\alpha\ ,\ +\infty[$.

1. Montrer que g réalise une bijection de I vers un intervalle J à déterminer.
2. Déterminer une équation de la tangente à $\mathscr{C}_{g^{-1}}$ au point d'abscisse 0.
3. Tracer $\mathscr{C}_{g^{-1}}$ dans le repère précèdent.

20 Probabilités (TS2)

Exercices de probabilités avancés

Exercice 1
Soit A et B deux événements d'une expérience aléatoire tel que $P(A) = \dfrac{1}{5}$ et $P(A \cup B) = \dfrac{1}{2}$.

1. Si A et B sont incompatibles alors calculer $P(B)$.
2. Si A et B sont indépendants alors calculer $P(B)$.
3. Si A nepeut être réalisé que si B est réalisé, alors calculer $P(B)$.

Exercice 2
Une urne contient 9 jetons indiscernables autoucher dont cinq rouges numérotés 1,1,1,3,3 et quatrenoirs numérotés 2,2,3,3.Une épreuve consiste à tirer au hasard et simultanément deux jetons de l'urne.

1. Calculer la probabilité des événements suivants
   A :« Les jetons tirés sont de couleurs différentes. »
   B :« Les jetons tirés sont de couleurs différentes etde numéros différents. »
   C :« Les jetons tirés portent le même chiffre. »
   D :« Les jetons tirés sont rouges. »
   E :« Les jetons tirés portent le même chiffre sachant qu'ils sont rouges ».
2. Soit X la variable aléatoire égale à la somme deschiffres marqués sur les 2 jetons tirés.
   a) Déterminer la loi de X et calculer l'espérance mathématiques de X.
   b) Déterminer et représenter la fonction de répartition de X.

Exercice 3
On dispose d'une U contient 2 boules rouges, 2 boules jaunes et 4 boules vertes.
Un jeu consiste à tirer une boule dans U.
• Si elle est rouge, on la remet dans U et on ajoute une boule rouge dans U puis le joueur tire simultanément au hasard deux boules.
• Si elle n'est pas rouge, on ne la remet pas et le joueur tirer successivement au hasard sans remise deux boules de l'urne U.
Le joueur gagne s'il obtient deux boules rouges.On note G l'événement obtenir deux boules rouges au deuxièmement tirage et R l'événement obtenir une boule rouge au premier tirage ?.

1. Calculer que $P(G)$
2. Un joueur joue cinq fois de suite de façon indépendante. Quelle est la probabilité qu'il gagne exactement 2 fois ?

Exercice 4
À l'issue de l'examen du bac, les résultats des mentions des élèves d'une classe de terminale

L sont donnés dans le tableau ci-dessous :

Résultats	Bien	ABien	Passable	Echec
Nombres	5	10	15	10

On choisit au hasard simultanément trois élèves de cette classe. Les élèves ont la même probabilité d'être choisi. Calculer la probabilité de chacun des évènements suivants :A : «

les trois élèves ont réussi au bac »
B : « les trois élèves ont la mention Bien ou ABien »
C : « aucun des trois n'a réussi au bac »
D : « au moins un élève a réussi avec la mention Bien »
E : « D sachant A »

Exercice 5
On dispose d'une urne J contenant des jetons indiscernables au toucher et de trois urnes B_1, B_2 et B_3 contenant des billes indiscernables au toucher.J contient dix jetons : quatre jetons rouges , des jetons verts et des jetons jaunes.B_1 contient 3 billes noires et 7 billes bleues.B_2 contient 4 billes noires et 6 billes bleues.B_3 contient 5 billes noires et 5 billes bleues.On réalise l'expérience suivante : on tire un jeton de J• si le jeton est rouge, on tire une bille de B_1 • si le jeton est verte, on tire une bille de B_2 • si le jeton est jaune, on tire une bille de B_3Soit les événements suivants : R : «on tire un jeton rouge », V : «on tire un jeton vert », J : «on tire un jeton jaune » et N : «on tire une bille noire»La probabilité p(N) de N est 0,37.

1. Calculer le nombre de jetons verts et le nombre de jetons jaunes.
2. Calculer p(J/N)
3. On réalise cinq fois l'expérience.Soit X la variable aléatoire égale au nombre de fois qu'on a tiré un jeton jaune et une bille noire.**a)** Donner la loi de X.**b)** Déterminer E(X).

Exercice 6
Une association prévoit d'organiser une cérémonie dans la place publiquele 5 Août 2024 mais il y a la menace de l'hivernage vu que le mois d'Aoûtest très pluvieux.Pour s'assurer de la tenue de l'évènement, le bureau va demander lesservices d'un institut météorologique, ce dernier donne les informationssuivantes :

— La probabilité qu'il pleuve le premier Août 2024 est de $\frac{1}{4}$
— S'il a plu un jour dans le mois la probabilité qu'il pleuve le jour suivant est $\frac{1}{2}$
— S'il n'a pas plu un jour dans le mois la probabilité qu'il ne pleuve pasle jour suivant est $\frac{1}{5}$.

Le bureau a décidé d'entamer les préparatifs de la cérémonie que si laprobabilité qu'il pleuve le jour de la cérémonie est inférieure à 0,5 sinon il vachanger la date.On note par A_n l'évènement « Il a plu le n-ieme du mois d'Août ».Et p_n la probabilité de l'évènement A_n soit $p_n = P(A_n)$.

1. Calculer p_2 .
2. Donner $P(A_{n+1}/A_n)$ et $P\left(A_{n+1}/\overline{A_n}\right)$.
3. Montrer que $p_{n+1} = -\dfrac{3}{10}p_n + \dfrac{4}{5}$
4. Soit la suite (U_n) définie par $U_n = p_n - \dfrac{8}{13}$.
   (a) Montrer que (U_n) est une suite géométrique dont précisera la raison etle premier terme.
   (b) Exprimer U_n en fonction de n et en déduire p_n en fonction de n.
5. L'association va-t-elle entamer les préparatifs pour l'organisation de lacérémonie ? Justifier la réponse.

Exercice 7
En début d'année scolaire 2025, un élève de terminale qui habite à trois kilomètres de son établissement décide d'acheter un scooter et un réveil pour ne pas arriver en retard en classe. On sait qu'il peut être victime de deux situations indépendantes, à chaque matin de classe :

— R : il n'entend pas son réveil sonner ;

— S : son scooter, mal entretenu, tombe en panne.

Il a observé que chaque jour de classe, il y a 2 possibilités sur 10 que la situation R se produise et 5 possibilités sur 100 que la situation S se produise.Lorsqu'au moins une de ces situations se produit, l'élève arrive en retard au lycée, sinon il est à l'heure.

Au cours d'une semaine, cet élève se rend 5 fois de suite en classe. On admet que le fait qu'il soit en retard un jour de classe donné n'influe pas sur le fait qu'il le soit ou non les jours suivants.

Quelle est la chance qu'il soit à l'heure au moins quatre jours sur les cinq durant une semaine ?
(Donner les résultats sous forme de fraction irréductible.)

21 Similitudes directes plan complexe

Exercice 1
Déterminer en justifiant la nature des transformations du plan suivantes :

1. $z' = z + 1 - 2\mathrm{i}$
2. $z' = \mathrm{i}z + 1$
3. $z' = -3z - 1 + \mathrm{i}$
4. $z' = (1 + \mathrm{i})z - 1 + \mathrm{i}$

Exercice 2
Déterminer l'écriture complexe des transformations suivantes :

1. Translation de vecteur $\vec{u}$ d'affixe $-2 + 3\mathrm{i}$.
2. Rotation de centre A d'affixe $-\mathrm{i}$ et d'angle $\frac{3\pi}{4}$.
3. Homothétie de centre A d'affixe $-1 + \mathrm{i}$ et de rapport $\frac{1}{2}$.
4. Similitude directe de centre A d'affixe -2, de rapport 2 et d'angle $-\frac{2\pi}{3}$.

Exercice 3
Dans chacun des cas suivants, déterminer l'écriture complexe, puis la nature et les éléments caractéristiques des transformations $s_2 \circ s_1$ et $s_1 \circ s_2$.

1. $s_1 : z' = 2\mathrm{i}z + 1 - 2\mathrm{i} \quad \text{et} \quad s_2 : z' = \frac{1}{2}\mathrm{i}z + 1 - \frac{1}{2}\mathrm{i}$
2. $s_1 : z' = (1 - \mathrm{i})z + 1 + \mathrm{i} \quad \text{et} \quad s_2 : z' = -2z$

Exercice 4
Soit f l'application du plan dans lui-même d'expression analytique :

$$\begin{cases} x' = x + y + 2 \\ y' = -x + y + 1 \end{cases}$$

1. Déterminer l'écriture complexe de f.
2. Déterminer la nature et les éléments caractéristiques de f.

Exercice 5
Dans le plan complexe, on considère les points A et C d'affixes respectives $1 + \mathrm{i}\sqrt{3}$ et $1 - \mathrm{i}\sqrt{3}$, et l'application f définie par $z' = e^{2\mathrm{i}\frac{\pi}{3}} z$.

1. Déterminer les images des points A et C par f.

2. En déduire l'équation de l'image de la droite (AC).

Exercice 6
Soit le plan muni d'un repère orthonormé $(o, \vec{u}, \vec{v})$, Ω est le point de coordonnées $(2, 1)$, S est la similitude de centre Ω, de rapport $\sqrt{2}$ et d'angle $\frac{\pi}{4}$, (D) est la droite $3x + 3y - 4 = 0$, (C) le cercle de centre O et de rayon 3.

1. Soit $M(x, y)$ un point et $M'(x', y')$ son image par S. Exprimer x' et y' en fonction de x et y.
2. En déduire l'équation de (D') image de (D) par S.
3. En déduire l'équation de C' image de C par S.

Exercice 7
Soit S la similitude directe d'écriture complexe : $z' = 3\mathrm{i}z - 9 - 3\mathrm{i}$. Déterminer l'image par S :

1. Du cercle de centre $K(1 - 3\mathrm{i})$ et de rayon 1.
2. De la droite (D) d'équation $x = 1$.

Exercice 8
Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormal $(o, \vec{u}, \vec{v})$. On donne $Z_A = -1 - \mathrm{i}$, $Z_B = 2 - \mathrm{i}$, $Z_C = -1 + 2\mathrm{i}$. On considère la similitude S de centre B qui transforme A en C.

1. Déterminer le rapport et l'angle de la similitude S.
2. Donner l'écriture complexe de S.
3. $\mathscr{C}$ est le cercle circonscrit au triangle ABC, déterminer les caractéristiques de $\mathscr{C}'$ image par S.

Exercice 9
On considère les points $Z_A = 2\mathrm{i}$, $Z_B = -\sqrt{3} + 2\mathrm{i}$, $Z_C = -2\sqrt{3} - \mathrm{i}$.

1. Donner l'écriture complexe de la similitude directe qui transforme A en B et B en C.
2. Déterminer l'affixe du centre, le rapport et l'angle de cette similitude.

Exercice 10
A et B ont pour affixes $Z_A = 3\mathrm{i}$ et $Z_B = 4 + \mathrm{i}$. r est la rotation de centre A et d'angle $\frac{\pi}{2}$.

1. Montrer que $z' = \mathrm{i}z + 3 + 3\mathrm{i}$.
2. Montrer que $Z_C = 2 + 7\mathrm{i}$ si $r(B) = C$.
3. Montrer que ABC est rectangle isocèle en A.
4. Soit D le milieu de $[AC]$, $h(z) = \frac{1}{2}z + \frac{3}{2}\mathrm{i}$.
   (a) Montrer que $h(C) = D$.

(b) Exprimer $z' - 3\mathrm{i}$ en fonction de $z - 3\mathrm{i}$ et en déduire la nature de h.

5. S est la similitude de centre A, de rapport $\frac{1}{2}$ et d'angle $\frac{\pi}{2}$. Donner son écriture complexe.

Exercice 11

Soit $a = -1 - \mathrm{i}$ et (z_n) la suite définie par :

$$\begin{cases} z_0 = 0, \quad z_1 = \mathrm{i} \\ z_{n+1} = (1-a)z_n + az_{n-1} \end{cases}$$

1. Déterminer z_2 et z_3.
2. Soit $u_n = z_{n+1} - z_n$
   (a) Déterminer u_0 et u_1.
   (b) Montrer que (u_n) est géométrique de raison $-a$.
   (c) Exprimer u_n en fonction de n et a.
3. Montrer que $S_n = z_n$ avec $S_n = u_0 + \cdots + u_{n-1}$, puis que $z_n = -1 + (1+\mathrm{i})^n$.
4. (a) Déterminer le module et un argument de a.
   (b) Donner la forme algébrique de z_{19}.

Exercice 12

Soit $T(z) = (1 + \mathrm{i}\sqrt{3})z + \sqrt{3}$.

1. (a) Montrer que T admet un point invariant J.
   (b) Déterminer la nature et les éléments caractéristiques de T.
   (c) Exprimer $\overrightarrow{JM'}$ en fonction de $\overrightarrow{JM}$ et donner l'angle $(\overrightarrow{JM}, \overrightarrow{JM'})$.
2. Soit I d'affixe -1.
   (a) Déterminer $I' = T(I)$.
   (b) Déterminer l'ensemble $\mathcal{D}$ des z tels que $|z+1| = |\mathrm{i}z+1|$.
   (c) Déterminer $\mathcal{C}$ des z tels que $|(1+\mathrm{i})z - 1 + \mathrm{i}| = |1 - \mathrm{i}|$.
   (d) Déterminer $\mathcal{D}' = T(\mathcal{D})$, $\mathcal{C}' = T(\mathcal{C})$.
3. Soit $S(z) = \frac{\mathrm{i}}{2}z - \mathrm{i}$.
   (a) Déterminer le rapport et l'angle de $T \circ S$.
   (b) En déduire la nature de $T \circ S$.
   (c) Donner l'écriture complexe de $T \circ S$.
4. (a) Montrer que T^3 est une homothétie.
   (b) Déterminer les $n \in \mathbb{N}$ pour lesquels T^n est une homothétie.

Exercice 13
Soit $T(z) = a^2 z + b$ et le point $I(2i)$.

1. T est une translation de vecteur $\vec{U}(0,2)$.
2. T est une homothétie de rapport -4 et de centre I.
3. T est une rotation de centre I et d'angle $-\frac{\pi}{2}$.
4. T est une similitude directe transformant $A(-1,0)$ en I et de centre $B(-1,1)$.

22 Statistique

Exercice 1
Soit (x_i, y_i) une série statistique double d'effectif total N.

x_i	x_1	x_2	$\dots$	x_N
y_j	y_1	y_2	$\dots$	y_N

Reproduire et compléter chacune des formules ci-dessous :

1. $\overline{x} = \dfrac{\cdots}{N}$ $\quad \overline{y} = \dfrac{\cdots}{N}$.
2. $V(x) = \dfrac{\cdots}{N} - \dots$ $\quad V(y) = \dfrac{\cdots}{N} \cdots - \dots$
3. $\text{cov}(x, y) = \dfrac{\cdots}{N} - \cdots \times \dots$. le coefficient de corrélation $r = \dfrac{\cdots}{\cdots \times \dots}$.
4. La droite de régression de y en x notée $\text{D}_{y/x}$ a pour équation …

Exercice 2
Répondre par vrai (V) ou faux (F) à chacune des affirmations ci-dessous.

1. Dans une série statistique double (x, y) le point moyen G a pour coordonnées $(\overline{x}\,;\,\overline{y})$.
2. Dans une série statistique double le coefficient de corrélation linéaire vérifie $0.87 \leq |r| \leq 1$.
3. La droite de régression $\text{D}_{y/x}$ passe par le point moyen.
4. Si un nuage de points semble être allongé alors, un ajustement linéaire est suggéré.

Exercice 3
Le tableau ci-dessous donne le poids moyen (y) d'un enfant en fonction de son âge (x).

x (années)	0	1	2	4	7	11	12
y (kg)	3,5	6,5	9,5	14	21	32,5	34

1. Représenter le nuage de points de cette série statistique dans le plan muni du repère orthogonal.Unité graphique : en abscisse 1cm pour 1 année et en ordonnée 1cm pour 2 kg.
2. Calculer :
   (a) les moyennes $\overline{x}$ et $\overline{y}$ puis placer le point moyen G.
   (b) les variances $V(x)$ et $V(y)$.
   (c) les écart-types $\sigma(x)$ et $\sigma(y)$.
3. Calculer le coefficient de corrélation linéaire r. Interpréter le résultat .

4. Déterminer une équation de la droite de régression de y en x.
5. Si l'évolution se poursuit dans les mêmes conditions,
   (a) déterminer l'âge à partir duquel le poids est égal à 40 kg.
   (b) quel sera le poids de l'enfant au bout de 15 années?

Exercice 4
Le tableau suivant donne la production d'arachide d'une certaine région depuis l'année 2000.
Les années ont été numérotées x_i et la production exprimée en centaine de tonnes,est notée y_i.

Années :	2000	2001	2002	2003	2004	2005
numéro de l'année x_i	1	2	3	4	5	6
Production y_i	5	9	7	10	12	10

1. Représenter le nuage de points associé à cette série statistique.
2. Par la méthode des moindres carrés, donner une équation de la droite de régression y en x .Tracer cette droite sur le graphique de la question précédente et indiquer les coordonnées du point moyen G.
3. En supposant que l'évolution est la même au cours des années suivantes quel tonnage pourrait-on prévoir en 2014?

Exercice 5
On donne la série statistique double :

x	35	40	35	65	65	85	90	k
y	3	4	5	10	8	13	14	15

1. Déterminer l'entier naturel k sachant que la droite de régression de y par rapport à x passe par le point moyen G d'abscisse 65 .
2. Calculer le coefficient de corrélation linéaire entre les caractères x et y.
3. Déterminer une équation de la droite de régression de y par rapport à x.
4. Estimer x sachant que $y = 20$.

Exercice 6
Une entreprise sénégalaise effectue un don d'engrais (en milliers de kilogrammes) à la culture d'arachide dans cinqrégions du pays. Son intention est de tester l'efficacité de son engrais par rapport à la production (en milliers detonnes) obtenue. Le tableau ci-dessous

représente la production d'arachide (y_i) en fonction de la quantitéd'engrais (x_i) utilisée.

x_i	6	8	9	10	12
y_i	10	14	15	18	20

A l'aide des informations ci-dessus et des outils mathématiques au programme :

1. la production d'arachide obtenue est-elle fortement corrélée à la quantité d'engrais utilisée ? Justifier laréponse.
2. donner une estimation de la production si le don d'engrais s'élève à 20 (en milliers de kilogrammes).

Exercice 7
Le tableau ci-dessous donne le nombre total d'adhérents au club de mathématiques pour les dix premiers mois de l'année 2025(de janvier à octobre).

Mois de l'année 2025 (x)	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Nombre d'adhérents (y)	10	30	50	40	60	55	70	80	70	80

Une fondation veut octroyer une aide financière au club si le nombre d'adhérents dépasse 200 élèves. Les élèves veulent déterminer quand ils pourront recevoir ce don.Faisant partie de ce club, vous êtes sollicité par tes camarades pour répondre à leur préoccupation.Exploitez le tableau ci-dessus pour répondre aux questions suivantes.En supposant que les adhésions suivent cette évolution, déterminer la période (mois et année) à laquelle le club pourrait recevoir ce don.