6 Probabilités simples (TS2)

En 1654, Blaise Pascal (1623; 1662) entretient avec Pierre de Fermat (1601; 1665) des correspondances sur le thème des jeux de hasard et d'espérance de gain qui les mènent à exposer une théorie nouvelle : les calculs de probabilités. Ils s'intéressent à la résolution de problèmes comme par exemple celui du Chevalier de Méré : « Comment expliquer le fait qu'il était plus avantageux de parier sur l'apparition d'un 6 en lançant 4 fois le dé que de parier sur l'apparition d'un double-six, quand on lance 24 fois deux dés » .
Aujourd'hui , le champ immense de leurs applications à la totalité des sciences et des techniques donne raison aux physicien et mathématicien Maxwell : «La vrai logique du monde est celle du calcul des probabilités»

I - Vocabulaire de la probabilité

Expérience aléatoire et univers

Le calcul des probabilités s'appuie sur les expériences aléatoires.

Définition 1
Une expérience est dite aléatoire si :

- on ne peut prédire le résultat avec certitude,
- on peut décrire l'ensemble des résultats possibles.

Exemple 2 — Lancer d'une pièce de monnaie et s'intéresser à la face apparue.

- Le jet d'un dé et regarder le numéro apparu.
- Le choix d'une ou de plusieurs boules d'une urne contenant des boules.

Définition 3
Tout résultat d'une expérience aléatoire est appelé une **éventualité**.
L'ensemble des éventualités est appelé **univers des possibles** ou **univers**; il est noté en général Ω.

Evénement

Définition 4
Toute partie de l'univers Ω est appelée **événement**.
Ainsi :
Ω est appelé l'**événement certain.**
L'ensemble vide est appelé l'**événement impossible**.

Un événement réduit à un singleton est appelé un **événement élémentaire**. Il est noté $\{\omega\}$ ou ω.

Exemple 5 — Dans le lancer du dé, l'univers des possibles est $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

- La partie $A = \{2, 4, 6\}$ est un événement de cette expérience aléatoire ; on peut le décrire par : A : « un nombre pair sort lors du lancer »
- L'événement B : « le six apparaît » est élémentaire ; tandis que l'événement C : « un nombre supérieur à 7 apparaît » est impossible et l'événement D : « un nombre inférieur ou égal à 7 apparaît » est certain.

Remarque 6
Nous dirons qu'un résultat ω **réalise** l'événement A si $\omega \in A$.
L'événement certain est toujours réalisé tandis que l'événement impossible n'est jamais réalisé.

Evénements particuliers

On considère une expérience d'univers Ω et deux événements A et B liés à elle.

Définition 7
On appelle :

- **événement « A ou B »**, l'ensemble $A \cup B$.
- **événement « A et B »** , l'ensemble $A \cap B$.
- **événements incompatibles**, deux événements A et B tels que $A \cap B = \emptyset$.
  En d'autres termes, il n'existe aucun résultat qui les réalise à la fois.
- **événement contraire** de l'événement A, le sous-ensemble complémentaire de A dans Ω. Il est noté : $\overline{A}$.
  En d'autres termes, si A est réalisé alors son contraire ne l'est pas et vice versa.

Remarque 8
Si deux événements sont contraires alors ils sont incompatibles. Mais la réciproque est fausse. Les événements $A = \{1, 4\}$ et $B = \{5, 6\}$ sont incompatibles car $A \cap B = \emptyset$ mais ils ne sont pas contraires.

Exemples d'événements particuliers.

Dans le lancer du dé, considérons les deux événements suivants :

A : « obtenir un nombre pair»

B : « obtenir un nombre supérieur ou égal à 3»

On écrit alors $A = \{2, 4, 6\}$ et $B = \{3, 4, 5, 6\}$

— $A \cap B$ est l'événement:«obtenir un nombre pair supérieur ou égal à 3» donc $A \cap B = \{4, 6\}$.

— $A \cup B$ est l'événement:«obtenir un nombre pair ou un nombre supérieur ou égal à 3» donc $A \cup B = \{2, 3, 4, 5, 6\}$.

II - Probabilité d'un événement

(Approche expérimentale de la probabilité)

Activité d'introduction 9
On dispose d'une pièce de monnaie qu'on lance plusieurs fois. On recommence cette opération plusieurs fois , et à chaque fois on note le nombre de « Pile » obtenu.

Nombre de lancers	100	200	300	400	500	600	700	800
Nombre de Pile								
Fréquence								
Fréquence cumulée								

1. Faire l'expérience suivant ce modèle et remplir le tableau.
2. Représenter dans un repère les points de coordonnées (x,y), où x est le nombre de lancers et y est la fréquence de Pile. (1cm représente 100 sur l'axe des abscisses et 1cm représente 0.1 sur l'axe des ordonnées)
3. Tracer la droite d'équation $y = \frac{1}{2}$. Quelle conjecture peux- tu faire sur la disposition des points par rapport à cette droite ?

Définition et propriétés

L'activité suggère, qu'en effectuant un nombre encore plus grand de lancers, les fréquences se rapprocheraient de $\frac{1}{2}$ de façon encore plus évidente. On dit que $\frac{1}{2}$ est la probabilité de l'événement Pile.
D'une manière générale nous admettons le résultat suivant : **les fréquences obtenues d'un événement A se rapprochent d'une valeur théorique lorsque le nombre d'expériences augmente (Loi des grands nombres). Cette valeur s'appelle la probabilité de l'événement A.**

Définition 10
Soit $\mathscr{E}$ une expérience aléatoire d'univers Ω fini, et $\mathscr{P}(\Omega)$ l'ensemble des événements de Ω.
On appelle probabilité sur $\mathscr{P}(\Omega)$, toute application $P : \mathscr{P}(\Omega) \longrightarrow [0\ ,\ 1]$, telle que :

1. $P(\Omega) = 1$,
2. $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$, pour tout couple (A, B) d'événements incompatibles.

Si $A \in \mathscr{P}(\Omega)$ alors $P(A)$ s'appelle la probabilité de l'événement A.

Remarque 11 — Pour tout événement A, $0 \leq P(A) \leq 1$ (*Une fréquence est toujours comprise entre* 0 *et* 1.)

— La somme des probabilités des événements élémentaires $\{\omega_k\}$ de Ω est égale à 1 (somme de fréquences) : $\omega_1 + \omega_2 + \cdots + \omega_n = 1$

Propriété 12
Soit une expérience d'univers Ω . On considère A et B deux événements liés à cette expérience;

— $P(\varnothing) = 0$

— $P(\overline{A}) = 1 - P(A)$

— Lorsque l'événement A est inclus dans B alors, $P(A) \leq P(B)$.

— $P(A \cup B) = P(A) + p(B) - P(A \cap B)$

Cas où les événements élémentaires sont équiprobables

Définition 13
Lorsque les événements élémentaires ont la même probabilité , on dit qu'ils sont **équiprobables**.

Propriété 14
Dans un cas d'équiprobabilité, la probabilité d'un événement quelconque A est donnée par :

$$P(A) = \frac{\text{card } A}{\text{card } \Omega}$$

Démonstration
Soit Ω un univers de cardinal n et A un événement de cardinal N.
On a $P(A) = \sum_{k=1}^{N} P(\omega_k)$. Or pour chaque k, $P(\omega_k) = \omega$ donc $P(A) = N\omega$
Par ailleurs $\sum_{k=1}^{n} P(\omega_k) = 1 \Longleftrightarrow \sum_{k=1}^{n} \omega = 1 \Longleftrightarrow n\omega = 1 \Longleftrightarrow \omega = \frac{1}{n}$
On en déduit que $P(A) = N \times \frac{1}{n} = \frac{\text{card } A}{\text{card } \Omega}$

Exercice 15
On lance un dé cubique **pipé** dont les faces sont numérotées de 1 à 6.
Ce dé est tel que les événements élémentaires {1}, {2} et {3} ont la même probabilité, cette probabilité étant le double de la probabilité de chacun des autres événements élémentaires.
Quelle est la probabilité P définie sur l'univers Ω de cette expérience aléatoire ?
Quelle est la probabilité d'avoir un chiffre pair ?

Solution. L'univers Ω de cette expérience aléatoire est défini par : $\Omega = \{1;2;3;4;5;6\}$
Le dé n'étant pas parfaitement équilibré, les événements élémentaires ne sont pas équiprobables.
Calculons les probabilités :

— $P(\{1\}) = P(\{2\}) = P(\{3\}) = 2P(\{4\}) = 2P(\{5\}) = 2P(\{6\})$
Or $P(\{1\}) + P(\{2\}) + P(\{3\}) + P(\{4\}) + P(\{5\}) + P(\{6\}) = 1$
D'où $9P(\{6\}) = 1$ donc $P(\{4\}) = P(\{5\}) = P(\{6\}) = \frac{1}{9}$ et $P(\{1\}) = P(\{2\}) = P(\{3\}) = \dfrac{2}{9}$.

— Désignons par A l'événement « le numéro de la face supérieure est un chiffre pair »
A= {2; 4; 6} et donc P(A)= $P(\{2\}) + P(\{4\}) + P(\{6\}) = \dfrac{2}{9} + \dfrac{1}{9} + \dfrac{1}{9} = \dfrac{4}{9}$

□

Exercice 16
Dans une urne se trouvent huit boules indiscernables au toucher dont cinq rouges R_1, R_2, R_3, R_4, R_5 et trois noires N_1, N_2 N_3 . On tire au hasard une boule de l'urne, on note sa couleur, on ne la remet pas dans l'urne puis on tire au hasard une deuxième boule, on note sa couleur.
Calculer les probabilités de chacun des événements suivants :
- A : « les deux boules tirées sont de la même couleur».
- B : «les deux boules tirées sont de couleur différente » .

Solution. L'expérience a lieu dans le cadre de l'équiprobabilité des événements élémentaires.
Une éventualité est un ensemble ordonné de deux boules prises dans l'ensemble des huit boules.
Désignons par Ω l'univers des éventualités. On a card $\Omega = A_8^2 = 8 \times 7 = 56$

• Probabilité de A.

A est constitué des 2 arrangements de $\{R_1; R_2; R_3; R_4\}$ ou des 2 arrangements de $\{N_1; N_2; N_3\}$

D'où cardA= $A_4^2 + A_3^2 = 26$

donc P(A)= $\dfrac{26}{56} = \dfrac{13}{28}$

• Probabilité de B.

L'événement B est le contraire de A.

Donc P(B)= 1− P(A)= $1 - \dfrac{13}{28} = \dfrac{15}{28}$

□