# Limites de fonctions composées

a, b et c désignent soit un réel soit  $\pm \infty$ .

Rappel:  $\operatorname{Si}_{x \to a} f(x) = b$  et  $\lim_{x \to b} g(x) = c$  alors par composée  $\lim_{x \to a} g(f(x)) = c$ 

## **Exercice 1**

Justifier les limites suivantes.

1. 
$$\lim_{x \to 0} \left( \frac{3x - 1}{x^2} \right)^4 = +\infty$$

$$2. \lim_{x \to -\infty} \sqrt{4 + \frac{1}{x}} = 2$$

$$3. \lim_{x \to +\infty} \cos\left(\frac{\pi x - 2}{x - 4}\right) = -1$$

## **Exercice 2**

Etudier les limites suivantes.

$$1. \lim_{x \to +\infty} \sqrt{x^2 - x - 3}$$

2. 
$$\lim_{x \to -2^-} \sqrt{\frac{1+x}{4-x^2}}$$

3. 
$$\lim_{x \to -\infty} \sin\left(\frac{\pi x - 2}{6x - 4}\right)$$

4. 
$$\lim_{x \to +\infty} \left( \sqrt{x} - x \right)^5$$

## **Exercice 3**

Une fonction f définie sur  $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$  tel que :  $\lim_{x \to -\infty} f(x) = 0$ ,  $\lim_{x \to +\infty} f(x) = 1$ ,  $\lim_{x \to -1^-} f(x) = +\infty$  et  $\lim_{x \to -1^+} f(x) = -\infty$ .

- 1. Interpréter graphiquement ces limites.
- 2. Déterminer les limites suivantes.

$$-\lim_{x \to +\infty} f\left(\sqrt{x}\right)$$

$$-\lim_{x \to +\infty} f\left(-1 + \frac{1}{x}\right)$$

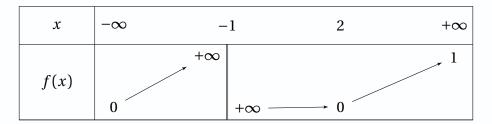
$$-\lim_{x \to -\infty} f\left(-1 + \frac{1}{x}\right)$$

$$-\lim_{x \to 0^{-}} f\left(\frac{1}{x}\right)$$

$$-\lim_{x \to +\infty} f\left(\frac{x^2 + 1}{2x - 1}\right)$$
$$-\lim_{x \to -\infty} f\left(\frac{2 - x^2}{2 + x^2}\right)$$

### **Exercice 4**

Une fonction f a pour tableau de variations celui donné ci-dessous.



Donner en utilisant ce tableau les limites suivantes.

1. 
$$\lim_{x\to+\infty} f(-x+1)$$

$$2. \lim_{x \to +\infty} f\left(2 + \frac{2}{x}\right)$$

3. 
$$\lim_{x \to -1^-} \frac{x-2}{f(x)}$$

4. 
$$\lim_{x \to -\infty} \frac{f(x) + x}{f(|x|) - 1}$$

## **Exercice 5**

Soit f une fonction définie et dérivable sur  $\mathbb{R}$  tel que f(1) = 0 et f'(1) = -1.  $\mathscr{C}_f$  admet une asymptote d'équation y = 3 en  $-\infty$  et une asymptote d'équation y = x + 4 en  $+\infty$ .

1. Calculer les limites suivantes.

$$-\lim_{x \to 0} f\left(\frac{x-1}{x^2}\right)$$

$$-\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x+f(x)}$$

$$-\lim_{x \to +\infty} \frac{1}{f(x)-x+3}$$

- 2. On considère la limite suivante  $\lim_{x \to +\infty} xf\left(1 + \frac{1}{x}\right)$ .
  - (a) Justifier qu'il y a une présence de forme indéterminée.
  - (b) En posant  $X = 1 + \frac{1}{x}$ , calculer cette limite.