

# 149 Déterminant. Exemples et applications.

Soient  $\mathbb{K}$  un corps commutatif et  $E$  un espace vectoriel de dimension finie  $n$  sur  $\mathbb{K}$ .

## I - Construction

### 1. Formes $n$ -linéaires alternées et déterminant

**Définition 1.** Soient  $E_1, \dots, E_p$  et  $F$  des espaces vectoriels sur  $\mathbb{K}$  et  $f : E_1, \dots, E_p \rightarrow F$ .

- $f$  est dite  **$p$ -linéaire** si en tout point les  $p$  applications partielles sont linéaires.
- Si  $f$  est  $p$ -linéaire et si  $E_1 = \dots = E_p$  ainsi que  $F = \mathbb{K}$ ,  $f$  est une **forme  $p$ -linéaire**. On note  $\mathcal{L}_p(E, \mathbb{K})$  l'ensemble des formes  $p$ -linéaires sur  $E$ .
- Si de plus  $f(x_1, \dots, x_p) = 0$  dès que deux vecteurs parmi les  $x_i$  sont égaux, alors  $f$  est dite **alternée**.

[GOU21]  
p. 140

**Exemple 2.** En reprenant les notations précédentes, pour  $p = 2$ ,  $f$  est bilinéaire.

**Proposition 3.**  $\mathcal{L}_p(E, \mathbb{K})$  est un espace vectoriel et,  $\dim(\mathcal{L}_p(E, \mathbb{K})) = \dim(E)^p$ .

**Théorème 4.** L'ensemble des formes  $n$ -linéaires alternées sur  $E$  est un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension 1. De plus, il existe une unique forme  $n$ -linéaire alternée  $f$  prenant la valeur 1 sur une base  $\mathcal{B}$  de  $E$ . On note  $f = \det_{\mathcal{B}}$ .

**Définition 5.**  $\det_{\mathcal{B}}$  est l'application **déterminant** dans la base  $\mathcal{B}$ . En l'absence d'ambiguïté, on s'autorise à noter  $\det = \det_{\mathcal{B}}$ .

**Proposition 6.** Soit  $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$  une base de  $E$ . Si  $x_1, \dots, x_n \in E$  ( $\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket$ , on peut écrire  $x_i = \sum_{j=1}^n x_{i,j} e_j$ ), on a la formule  $\det_{\mathcal{B}}(x_1, \dots, x_n) = \sum_{\sigma \in \mathcal{S}_n} \epsilon(\sigma) \prod_{i=1}^n x_{i, \sigma(i)}$ .

**Proposition 7.** Soit  $\mathcal{B}$  une base de  $E$ . Si  $\mathcal{B}'$  est une autre base de  $E$ , alors  $\det_{\mathcal{B}'} = \det_{\mathcal{B}'}(\mathcal{B}) \det_{\mathcal{B}}$ .

**Théorème 8.** Une famille de vecteurs est liée si et seulement si son déterminant est nul dans une base quelconque de  $E$ .

## 2. Déterminant d'un endomorphisme

**Lemme 9.** Soient  $f \in \mathcal{L}(E)$  et  $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$  une base de  $E$ . Le scalaire  $\det_{\mathcal{B}}(f(e_1), \dots, f(e_n))$  ne dépend pas de la base  $\mathcal{B}$  considérée.

**Définition 10.** Soient  $f \in \mathcal{L}(E)$  et  $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$  une base de  $E$ . On appelle **déterminant** de  $f$  le scalaire  $\det_{\mathcal{B}}(f(e_1), \dots, f(e_n))$ . On le note  $\det(f)$ .

**Proposition 11.** Soient  $f, g \in \mathcal{L}(E)$ .

- (i)  $\det(f \circ g) = \det(f) \times \det(g)$ .
- (ii)  $\det(\text{id}_E) = 1$ .
- (iii)  $f \in \text{GL}(E) \iff \det(f) \neq 0$ . Dans ce cas, on a  $\det(f^{-1}) = \det(f)^{-1}$ .

## 3. Déterminant d'une matrice carrée

**Définition 12.** Soit  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ . On appelle **déterminant** de  $A$ , le déterminant de ses vecteurs colonnes dans la base canonique de  $\mathbb{K}^n$ . On le note  $\det(A)$ .

**Notation 13.** Si  $A = (a_{i,j})_{i,j \in \llbracket 1, n \rrbracket} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ , on note son déterminant sous la forme

$$\det(A) = \begin{vmatrix} a_{1,1} & \dots & a_{1,n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n,1} & \dots & a_{n,n} \end{vmatrix}$$

**Exemple 14.** —  $\begin{vmatrix} a & c \\ b & d \end{vmatrix} = ad - bc$ .

$$\text{— } \begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 2 & 1 & -1 \\ 1 & 5 & 1 \end{vmatrix} = 39.$$

[GRI]  
p. 104

**Proposition 15.** Soit  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ .

- (i)  $\det(A) = \det({}^t A)$ .
- (ii)  $\det(A)$  dépend linéairement des colonnes (resp. des lignes) de  $A$ .
- (iii)  $\forall \lambda \in \mathbb{K}, \det(\lambda A) = \lambda^n \det(A)$ .
- (iv)  $\det(A) \neq 0 \iff A \in \text{GL}_n(\mathbb{K})$ .
- (v) Si  $A$  est la matrice de  $f \in \mathcal{L}(E)$  dans une base, alors  $\det(f) = \det(A)$ .

[GOU21]  
p. 142

- (vi) Si  $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ ,  $\det(AB) = \det(A) \det(B)$ .
- (vii) Deux matrices semblables ont le même déterminant.

## II - Méthodes de calcul

### 1. Propriétés

**Proposition 16.** Soit  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ .

- (i) Si on effectue une permutation  $\sigma \in S_n$  sur les colonnes ou les lignes de  $A$ , le déterminant est multiplié par  $\epsilon(\sigma)$  (la signature de  $\sigma$ ).
- (ii) Si  $A$  est triangulaire,  $\det(A)$  est le produit des éléments diagonaux de  $A$ .
- (iii) On ne change pas la valeur d'un déterminant en ajoutant à une colonne une combinaison linéaire des autres colonnes. Même chose sur les lignes.

**Exemple 17.**

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & m \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & m+1 \end{vmatrix} = -2(m+1)$$

**Proposition 18** (Déterminant par blocs). Soit  $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$  une matrice triangulaire par blocs, de la forme

$$M = \begin{pmatrix} A & C \\ 0 & B \end{pmatrix}$$

alors  $\det(M) = \det(A) \det(B)$ .

### 2. Mineurs et cofacteurs

**Définition 19.** Soit  $A = (a_{i,j})_{i,j \in \llbracket 1, n \rrbracket} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ .

- Pour tout  $i, j \in \llbracket 1, n \rrbracket$ , on appelle **mineur** de l'élément  $a_{i,j}$  le déterminant  $\Delta_{i,j}$  de la matrice obtenue en supprimant la  $i$ -ième ligne et la  $j$ -ième colonne de  $A$ .
- Le scalaire  $A_{i,j} = (-1)^{i+j} \Delta_{i,j}$  s'appelle le **cofacteur** de  $a_{i,j}$ .
- On appelle **mineurs principaux** de  $A$  les déterminants  $\Delta_k = \det((a_{i,j})_{i,j \in \llbracket 1, k \rrbracket})$  pour  $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$ .

**Proposition 20.** En reprenant les notations précédentes :

- (i) Soit  $j \in \llbracket 1, n \rrbracket$ . On a  $\det(A) = \sum_{i=1}^n a_{i,j} A_{i,j}$  (développement par rapport à la  $j$ -ième

colonne).

(ii) Soit  $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$ . On a  $\det(A) = \sum_{j=1}^n a_{i,j} A_{i,j}$  (développement par rapport à la  $i$ -ième ligne).

**Exemple 21.**

$$\begin{vmatrix} 6 & 0 & -6 \\ 0 & 2 & 7 \\ 0 & 2 & 3 \end{vmatrix} = 6 \begin{vmatrix} 2 & 7 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = 6(6 - 14) = -48$$

[GRI]  
p. 118

**Définition 22.** Soit  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ . La matrice  $(A_{i,j})_{i,j \in \llbracket 1, n \rrbracket}$  des cofacteurs des éléments de  $A$  est appelée **comatrice** de  $A$ , et on la note  $\text{com}(A)$ .

[GOU21]  
p. 143

**Proposition 23.** Soit  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ . On a :

$$A^t \text{com}(A) = {}^t \text{com}(A) A = \det(A) I_n$$

**Corollaire 24.** Soit  $A \in \text{GL}_n(\mathbb{K})$ . Alors,

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} {}^t \text{com}(A)$$

**Exemple 25.** Soit  $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \text{GL}_2(\mathbb{K})$ . Alors,

$$A^{-1} = \frac{1}{ad - bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

### 3. Exemples classiques

**Exemple 26** (Déterminant de Vandermonde). Soient  $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{K}$ . Alors

$$\begin{vmatrix} 1 & a_1 & \dots & a_1^{n-1} \\ 1 & a_2 & \dots & a_2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & a_n & \dots & a_n^{n-1} \end{vmatrix} = \prod_{1 \leq i < j \leq n} (a_j - a_i)$$

**Exemple 27** (Déterminant de Cauchy). Soient  $a_1, \dots, a_n, b_1, \dots, b_n \in \mathbb{K}$  tels que pour tout

p. 150

$i, j \in \llbracket 1, n \rrbracket$ ,  $a_i + b_j \neq 0$ . Alors

$$\det\left(\frac{1}{a_i + b_j}\right) = \frac{\prod_{1 \leq i < j \leq n} (a_j - a_i) \prod_{1 \leq i < j \leq n} (b_j - b_i)}{\prod_{i,j=1}^n (a_i + b_j)}$$

**Exemple 28** (Déterminant circulant). Soient  $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{C}$ . On pose  $\omega = e^{\frac{2i\pi}{n}}$ . Alors

$$\begin{vmatrix} a_0 & a_1 & \dots & a_{n-1} \\ a_{n-1} & a_0 & \dots & a_{n-2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_1 & a_2 & \dots & a_0 \end{vmatrix} = \prod_{j=0}^{n-1} P(\omega^j)$$

où  $P = \sum_{k=0}^{n-1} a_k X^k$ .

p. 153

### III - Applications

#### 1. En géométrie

##### a. Volume d'un parallélépipède

**Théorème 29.** L'aire  $\mathcal{A}(v, w)$  du parallélogramme engendré par deux vecteurs  $v, w \in \mathbb{R}^n$  est égale à

$$\mathcal{A}(v, w) = |\det(v, w)|$$

[GRI]  
p. 130

**Corollaire 30.** Soient  $v_1, \dots, v_n \in \mathbb{R}^n$ . On note  $\mathcal{V}(v_1, \dots, v_n)$  le volume du parallélépipède rectangle engendré par  $v_1, \dots, v_n$  (ie. l'ensemble  $\{z \in \mathbb{R}^n \mid z = \sum_{i=1}^n \lambda_i v_i, \lambda_i \in [0, 1]\}$ ). On a alors :

$$\mathcal{V}(v_1, \dots, v_n) = |\det(v_1, \dots, v_n)|$$

##### b. Suite de polygones

**Théorème 31** (Suite de polygones). Soit  $P_0$  un polygone dont les sommets sont  $\{z_{0,1}, \dots, z_{0,n}\}$ . On définit la suite de polygones  $(P_k)$  par récurrence en disant que, pour tout  $k \in \mathbb{N}^*$ , les sommets de  $P_{k+1}$  sont les milieux des arêtes de  $P_k$ .

Alors la suite  $(P_k)$  converge vers l'isobarycentre de  $P_0$ .

[I-P]  
p. 389

[DEV]

## 2. En algèbre linéaire

### a. Aux systèmes d'équations linéaires

On cherche à résoudre un système d'équations linéaires de la forme

p. 143

$$AX = B \quad (S)$$

avec  $A = (a_{i,j})_{\substack{i \in \llbracket 1, p \rrbracket \\ j \in \llbracket 1, q \rrbracket}}$  et  $B = (b_i)_{i \in \llbracket 1, p \rrbracket} \in \mathbb{K}^p$ .

**Théorème 32** (Formules de Cramer). On se place dans le cas  $p = q = n$ . Alors, (S) admet une unique solution si et seulement si  $\det(A) \neq 0$ . Dans ce cas, elle est donnée par  $X = (x_i)_{i \in \llbracket 1, n \rrbracket}$  où

$$\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, x_i = \frac{\det(A_i)}{\det(A)}$$

avec  $A_i$  obtenue en remplaçant la  $i$ -ième colonne de  $A$  par  $B$ .

**Lemme 33.** Soit  $r = \text{rang}(A)$ . Il existe un déterminant  $\Delta$  d'ordre  $r$  extrait de  $A$ .

**Définition 34.** — Le déterminant  $\Delta$  précédent est le **déterminant principal** de  $A$ .

- Les équations (resp. inconnues) dont les indices sont deux des lignes (resp. colonnes) de  $\Delta$  s'appellent les **équations principales** (resp. **inconnues principales**).
- Si  $\Delta = \det(a_{i,j})_{\substack{i \in I \\ j \in J}}$ , on appelle **déterminants caractéristiques** les déterminants d'ordre  $r + 1$  de la forme

$$\begin{vmatrix} (a_{i,j})_{\substack{i \in I \\ j \in J}} & (b_i)_{i \in I} \\ (a_{k,j})_{j \in J} & b_k \end{vmatrix} \text{ avec } k \notin J.$$

**Théorème 35** (Rouché-Fontené). Le système (S) admet des solutions si et seulement si  $p = r$  ou les  $p - r$  déterminants caractéristiques sont nuls. Le système est alors équivalent au système des équations principales. Les inconnues principales étant déterminées par un système de Cramer à l'aide des inconnues non principales.

**Exemple 36.** Si,

$$(S) \iff \begin{cases} x + 2y + z + t = 1 \\ x - z - t = 1 \\ -x + y + z + 2t = m \end{cases} \quad m \in \mathbb{R}$$

on a  $\text{rang}(A) = 2$ , (S) admet des solutions si et seulement si  $m = -1$ , et

$$(S) \iff \begin{cases} x + 2y = 1 + z - t \\ x = 1 + z + t \end{cases} \iff \begin{cases} x = 1 + z + t \\ y = -t \end{cases}$$

## b. À la réduction des endomorphismes

**Définition 37.** Soit  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ . On appelle :

- **Polynôme caractéristique** de  $A$  le polynôme  $\chi_A = \det(A - XI_n)$ .
- **Polynôme minimal** de  $A$  l'unique polynôme unitaire  $\pi_A$  qui engendre l'idéal  $\text{Ann}(A) = \{Q \in \mathbb{K}[X] \mid Q(A) = 0\}$ .

[GOU21]  
p. 171

p. 186

**Proposition 38.**

$$\lambda \text{ est valeur propre de } A \iff \chi_A(\lambda) = 0 \iff \pi_A(\lambda) = 0$$

p. 172

**Proposition 39.** —  $A$  est trigonalisable si et seulement si  $\chi_A$  est scindé sur  $\mathbb{K}$ .

—  $A$  est diagonalisable si et seulement si  $\pi_A$  est scindé à racines simples sur  $\mathbb{K}$ .

p. 185

**Corollaire 40.** Si  $\mathbb{K} = \mathbb{F}_q$ ,  $A$  est diagonalisable si et seulement si  $A^q = A$ .

**Théorème 41** (Cayley-Hamilton).

$$\pi_u \mid \chi_u$$

## c. À l'étude du groupe linéaire

**Théorème 42.** Soit  $u \in \mathcal{L}(E)$ . Les assertions suivantes sont équivalentes :

- (i)  $u \in \text{GL}(E)$ .
- (ii)  $\text{Ker}(u) = \{0\}$ .
- (iii)  $\text{Im}(u) = E$ .
- (iv)  $\text{rang}(u) = n$ .
- (v)  $\det(u) \neq 0$ .
- (vi)  $u$  transforme toute base de  $E$  en une base de  $E$ .
- (vii) Il existe  $v \in \mathcal{L}(E)$  tel que  $u \circ v = \text{id}_E$ .
- (viii) Il existe  $w \in \mathcal{L}(E)$  tel que  $w \circ u = \text{id}_E$ .

[ROM21]  
p. 140

**Proposition 43.**  $\det : \mathrm{GL}(E) \rightarrow \mathbb{K}^*$  est un morphisme surjectif.

[PER]  
p. 95

Soit  $p$  un nombre premier  $\geq 3$ . On se place sur le corps  $\mathbb{K} = \mathbb{F}_p$ .

**Définition 44.** Soit  $H$  un hyperplan de  $E$  et  $G$  un supplémentaire de  $H$ . On définit  $f$  la **dilatation** de base  $H$ , de direction  $G$  et de rapport  $\lambda \in \mathbb{K}^*$  par

[I-P]  
p. 203

$$\forall x \in H, \forall y \in G, f(x + y) = x + \lambda y$$

**Théorème 45.** Si  $|\mathbb{K}| \geq 3$ , les dilatations engendrent  $\mathrm{GL}(E)$ .

**Notation 46.** Soit  $a \in \mathbb{F}_p$ . On note  $\left(\frac{a}{p}\right)$  le symbole de Legendre de  $a$  modulo  $p$ .

**Lemme 47.**  $a \mapsto \left(\frac{a}{p}\right)$  est un morphisme de groupes.

**Lemme 48.** Il y a  $\frac{p-1}{2}$  résidus quadratiques dans  $\mathbb{F}_p^*$ .

**Théorème 49.** Le groupe multiplicatif d'un corps fini est cyclique.

**Théorème 50** (Frobenius-Zolotarev).

$$\forall u \in \mathrm{GL}(E), \epsilon(u) = \left( \frac{\det(u)}{p} \right)$$

où  $u$  est vu comme une permutation des éléments de  $E$ .

[DEV]



## Annexes

[I-P]  
p. 389

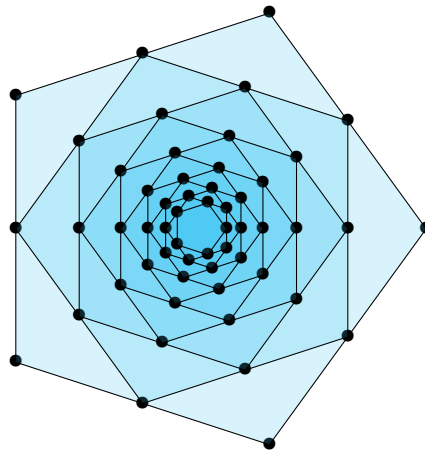


FIGURE 1 – La suite de polygones.

# Bibliographie

## Les maths en tête

[GOU21]

Xavier GOURDON. *Les maths en tête. Algèbre et probabilités*. 3<sup>e</sup> éd. Ellipses, 13 juill. 2021.

<https://www.editions-ellipses.fr/accueil/13722-25266-les-maths-en-tete-algebre-et-probabilites-3e-edition-9782340056763.html>.

## Algèbre Linéaire

[GRI]

Joseph GRIFONE. *Algèbre Linéaire*. 6<sup>e</sup> éd. Cépaduès, 9 jan. 2019.

<https://www.cephadues.com/livres/algebre-lineaire-edition-9782364936737.html>.

## L'oral à l'agrégation de mathématiques

[I-P]

Lucas ISENMANN et Timothée PECATTE. *L'oral à l'agrégation de mathématiques. Une sélection de développements*. 2<sup>e</sup> éd. Ellipses, 26 mars 2024.

<https://www.editions-ellipses.fr/accueil/15218-28346-loral-a-lagregation-de-mathematiques-une-selection-de-developpements-2e-edition-9782340086487.html>.

## Cours d'algèbre

[PER]

Daniel PERRIN. *Cours d'algèbre. pour l'agrégation*. Ellipses, 15 fév. 1996.

<https://www.editions-ellipses.fr/accueil/7778-18110-cours-d-algebre-agregation-9782729855529.html>.

## Mathématiques pour l'agrégation

[ROM21]

Jean-Étienne ROMBALDI. *Mathématiques pour l'agrégation. Algèbre et géométrie*. 2<sup>e</sup> éd. De Boeck Supérieur, 20 avr. 2021.

<https://www.deboecksuperieur.com/ouvrage/9782807332201-mathematiques-pour-l-agregation-algebre-et-geometrie>.