

## 201 Espaces de fonctions. Exemples et applications.

### I - Espaces de fonctions continues sur un compact

#### 1. Continuité et compacité

**Proposition 1.** Soient  $(E, d)$  et  $(E', d')$  deux espaces métriques. On suppose  $E$  compact. Si  $f : E \rightarrow E'$  est continue, alors  $f(E)$  est compact.

[DAN]  
p. 55

**Contre-exemple 2.** Cela ne marche pas si  $f$  n'est pas continue. Par exemple,  $\arcsin([-1, 1]) = \mathbb{R}$ .

**Proposition 3.** Sous les mêmes hypothèses et en supposant  $f$  bijective,  $f^{-1}$  est continue (ie.  $f$  est un homéomorphisme).

**Théorème 4 (Des bornes).** Une application continue sur un compact est bornée et atteint ses bornes.

**Théorème 5 (Heine).** Une application continue sur un compact y est uniformément continue.

**Corollaire 6.** Toute fonction périodique continue sur  $\mathbb{R}$  y est uniformément continue.

#### 2. Convergences simple et uniforme

**Définition 7.** Soient  $(f_n)$  et  $f$  respectivement une suite de fonctions et une fonction définies sur un ensemble  $X$  à valeurs dans un espace métrique  $(E, d)$ . On dit que :

[GOU20]  
p. 231

—  $(f_n)$  **converge simplement** vers  $f$  si

$$\forall x \in X, \forall \epsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N} \text{ tel que } \forall n \geq N, d(f_n(x), f(x)) < \epsilon$$

—  $(f_n)$  **converge uniformément** vers  $f$  si

$$\forall \epsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N} \text{ tel que } \forall n \geq N, \forall x \in X, d(f_n(x), f(x)) < \epsilon$$

**Proposition 8.** La convergence uniforme entraîne la convergence simple.

**Contre-exemple 9.** La réciproque est fausse. Il suffit en effet de considérer la suite  $(f_n)$  définie pour tout  $n \in \mathbb{N}$  et pour tout  $x \in [0, 1]$  par  $f_n(x) = x^n$  converge simplement sur  $[0, 1]$  mais pas uniformément.

**Théorème 10** (Critère de Cauchy uniforme). Soit  $(f_n)$  une suite de fonctions définies sur un ensemble  $X$  à valeurs dans un espace métrique  $(E, d)$ . Alors  $(f_n)$  converge uniformément si

$$\forall \epsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N} \text{ tel que } \forall p > q \geq N, \forall x \in X, d(f_p(x), f_q(x)) < \epsilon$$

**Corollaire 11.** Une limite uniforme sur  $\mathbb{R}$  de fonctions polynômiales est une fonction polynômiale.

p. 237

**Notation 12.** — Pour toute fonction  $g$  bornée sur un ensemble  $X$  et à valeurs dans un espace vectoriel normé  $(E, \|\cdot\|)$ , on note

$$\|g\|_\infty = \sup_{x \in X} \|g(x)\|$$

— On note  $\mathcal{B}(X, E)$  l'ensemble des applications bornées de  $X$  dans  $E$ .

p. 232

**Proposition 13.** En reprenant les notations précédentes, une suite de fonctions  $(f_n)$  de  $\mathcal{B}(X, E)$  converge uniformément vers  $f \in \mathcal{B}(X, E)$  si  $\|f_n - f\|_\infty \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$ .

**Proposition 14.** Si  $E$  est de Banach, alors  $(\mathcal{B}(X, E), \|\cdot\|_\infty)$  est de Banach.

**Théorème 15** (Théorèmes de Dini). (i) Soit  $(f_n)$  une suite *croissante* de fonctions réelles *continues* définies sur un segment  $I$  de  $\mathbb{R}$ . Si  $(f_n)$  converge simplement vers une fonction *continue* sur  $I$ , alors la convergence est uniforme.

(ii) Soit  $(f_n)$  une suite de *fonctions croissantes* réelles *continues* définies sur un segment  $I$  de  $\mathbb{R}$ . Si  $(f_n)$  converge simplement vers une fonction *continue* sur  $I$ , alors la convergence est uniforme.

p. 238

### 3. Densité

[DEV]

**Théorème 16** (Weierstrass). Toute fonction continue  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  (avec  $a, b \in \mathbb{R}$  tels que  $a \leq b$ ) est limite uniforme de fonctions polynômiales sur  $[a, b]$ .

p. 304

On a une version plus générale de ce théorème.

**Théorème 17** (Stone-Weierstrass). Soit  $K$  un espace compact et  $\mathcal{A}$  une sous-algèbre de l'algèbre de Banach réelle  $\mathcal{C}(K, \mathbb{R})$ . On suppose de plus que :

[LI]  
p. 46

- (i)  $\mathcal{A}$  sépare les points de  $K$  (ie.  $\forall x \in K, \exists f \in \mathcal{A}$  telle que  $f(x) \neq f(y)$ ).
- (ii)  $\mathcal{A}$  contient les constantes.

Alors  $\mathcal{A}$  est dense dans  $\mathcal{C}(K, \mathbb{R})$ .

*Remarque 18.* Il existe aussi une version “complexe” de ce théorème, où il faut supposer de plus que  $\mathcal{A}$  est stable par conjugaison.

**Exemple 19.** La suite de polynômes réels  $(r_n)$  définie par récurrence par

$$r_0 = 0 \text{ et } \forall n \in \mathbb{N}, r_{n+1} : t \mapsto r_n(t) + \frac{1}{2}(t - r_n(t)^2)$$

converge vers  $\sqrt{\cdot}$  sur  $[0, 1]$ .

## II - Espaces $L_p$

Soit  $(X, \mathcal{A}, \mu)$  un espace mesuré. Les résultats qui vont suivre sont, par extension, également valable pour les fonctions à valeurs dans  $\mathbb{C}$ .

[G-K]  
p. 209

### 1. Espaces $\mathcal{L}_p$

**Définition 20.** — Pour  $p \in [1, +\infty[$ , on note  $\mathcal{L}_p(X, \mathcal{A}, \mu)$  (où  $\mathcal{L}_p$  en l'absence d'ambiguïté) l'ensemble des applications  $f$  mesurables de  $(X, \mathcal{A}, \mu)$  dans  $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$  telles que

$$\int_X |f(x)|^p d\mu(x) < +\infty$$

on note alors  $\|f\|_p = \left(\int_X |f(x)|^p d\mu(x)\right)^{\frac{1}{p}}$ .

— On note de même  $\mathcal{L}_\infty$  l'ensemble des applications mesurables de  $(X, \mathcal{A}, \mu)$  dans  $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$  de sup-essentiel borné. On note alors  $\|f\|_\infty$  pour  $f \in \mathcal{L}_\infty$ .

[B-P]  
p. 163

**Exemple 21.** Si  $\mu$  est la mesure de comptage sur  $(\mathcal{P}(\mathbb{N}), \mathbb{N})$ , alors

$$\mathcal{L}_p = \ell_p = \left\{ (u_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \mid \sum_{n \geq 0} |u_n|^p < +\infty \right\}$$

**Proposition 22.**  $\mathcal{L}_p$  est un sous-espace vectoriel de l'espace vectoriel des fonctions de  $X$  dans  $\mathbb{R}$ .

**Théorème 23** (Inégalité de Hölder). Soient  $p, q \in ]1, +\infty[$  tels que  $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ ,  $f \in \mathcal{L}_p$  et  $g \in \mathcal{L}_q$ . Alors  $fg \in \mathcal{L}_1$  et

$$\|fg\|_1 \leq \|f\|_p \|g\|_q$$

[G-K]  
p. 209

*Remarque 24.* C'est encore vrai pour  $q = +\infty$  en convenant que  $\frac{1}{+\infty} = 0$ .

**Application 25.** On considère la fonction  $\Gamma$  d'Euler. Alors,

$$\forall \theta \in ]0, 1[, \forall x, y > 0, \Gamma(\Theta x + (1 - \Theta)y) \leq \Gamma(x)^\theta \Gamma(y)^{1-\theta}$$

et en particulier,  $\Gamma$  est log-convexe sur  $\mathbb{R}_*^+$ .

**Théorème 26** (Inégalité de Minkowski).

$$\forall f, g \in \mathcal{L}_p, \|f + g\|_p \leq \|f\|_p + \|g\|_p$$

L'application  $\|\cdot\|_p$  définit donc une semi-norme sur  $\mathcal{L}_p$  pour  $p \in [1, +\infty]$ . L'idée dans la sous-section suivante sera de construire un espace dans lequel l'axiome de séparation n'est pas pris en défaut.

## 2. Construction des espaces $L_p$

**Définition 27.** On définit pour tout  $p \in [1, +\infty]$ ,

$$L_p = \mathcal{L}_p / V$$

où  $V = \{v \in \mathcal{L}_p \mid v = 0 \text{ pp.}\}$ .

**Proposition 28.** Dans un espace de mesure finie,

$$1 \leq p < q \leq +\infty \implies L_q \subseteq L_p$$

**Contre-exemple 29.** La fonction  $\mathbb{1}$  est dans  $L_\infty(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \lambda)$  mais dans aucun  $L_p(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \lambda)$  pour tout  $p \in [1, +\infty[$ .

**Théorème 30.** Pour tout  $p \in [1, +\infty]$ ,  $(L_p, \|\cdot\|_p)$  est un espace vectoriel normé.

**Théorème 31** (Riesz-Fischer). Pour tout  $p \in [1, +\infty]$ ,  $L_p$  est complet pour la norme  $\|\cdot\|_p$ .

### 3. Convolution et régularisation dans $L_1$

**Définition 32.** Soient  $f$  et  $g$  deux fonctions de  $\mathbb{R}^d$  dans  $\mathbb{R}$ . On dit que **la convolée** (ou **le produit de convolution**) de  $f$  et  $g$  en  $x \in \mathbb{R}$  **existe** si la fonction

$$\begin{aligned} \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{C} \\ t &\mapsto f(x-t)g(t) \end{aligned}$$

est intégrable sur  $\mathbb{R}^d$  pour la mesure de Lebesgue. On pose alors :

$$(f * g)(x) = \int_{\mathbb{R}^d} f(x-t)g(t) dt$$

[AMR08]  
p. 75

**Exemple 33.** Soient  $a < b \in \mathbb{R}_*^+$ . Alors  $\mathbb{1}_{[-a,a]} * \mathbb{1}_{[-b,b]}$  existe pour tout  $x \in \mathbb{R}$  et

$$(\mathbb{1}_{[-a,a]} * \mathbb{1}_{[-b,b]})(x) = \begin{cases} 2a & \text{si } 0 \leq |x| \leq b-a \\ b+a-|x| & \text{si } b-a \leq |x| \leq b+a \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

**Proposition 34.** Dans  $L_1(\mathbb{R}^d)$ , dès qu'il a un sens, le produit de convolution de deux fonctions est commutatif, bilinéaire et associatif.

**Théorème 35** (Convolution dans  $L_1(\mathbb{R}^d)$ ). Soient  $f, g \in L_1(\mathbb{R}^d)$ . Alors :

- (i) pp. en  $x \in \mathbb{R}^d$ ,  $t \mapsto f(x-t)g(t)$  est intégrable sur  $\mathbb{R}^d$ .
- (ii)  $f * g$  est intégrable sur  $\mathbb{R}^d$ .
- (iii)  $\|f * g\|_1 \leq \|f\|_1 \|g\|_1$ .
- (iv) L'espace vectoriel normé  $(L_1(\mathbb{R}^d), \|\cdot\|_1)$  muni de  $*$  est une algèbre de Banach commutative.

**Proposition 36.** L'algèbre  $(L_1(\mathbb{R}^d), +, *, \cdot)$  n'a pas d'élément unité.

p. 114

**Application 37.**

$$f * f = f \iff f = 0$$

**Définition 38.** On appelle **approximation de l'identité** toute suite  $(\rho_n)$  de fonctions mesurables de  $L_1(\mathbb{R}^d)$  telles que

- (i)  $\forall n \in \mathbb{N}, \int_{\mathbb{R}^d} \rho_n d\lambda_d = 1.$
- (ii)  $\sup_{n \geq 1} \|\rho_n\| < +\infty.$
- (iii)  $\forall \epsilon > 0, \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_{\mathbb{R} \setminus B(0, \epsilon)} \rho_n(x) dx = 0.$

[B-P]  
p. 306

**Exemple 39.**  $\forall n \in \mathbb{N}$ , on note :

$$a_n = \int_{-1}^1 (1 - t^2)^n dt \text{ et } p_n : t \mapsto \frac{(1 - t^2)^n}{a_n} \mathbb{1}_{[-1,1]}(t)$$

Alors,  $(p_n)$  est une approximation positive de l'identité.

[GOU20]  
p. 304

- Application 40.** (i)  $\mathcal{C}_K^\infty(\mathbb{R}^d)$  est dense dans  $\mathcal{C}_K(\mathbb{R}^d)$  pour  $\|\cdot\|_\infty$ .  
(ii)  $\mathcal{C}_K^\infty(\mathbb{R}^d)$  est dense dans  $L_p(\mathbb{R}^d)$  pour  $\|\cdot\|_p$  avec  $p \in [1, +\infty[$ .

[AMR08]  
p. 96

## III - Espace $L_2$

### 1. Propriétés hilbertiennes

**Définition 41.** On considère la forme bilinéaire suivante sur  $L_2$  :

$$\langle \cdot, \cdot \rangle : (f, g) \mapsto \int_X f \bar{g} d\mu$$

C'est un produit scalaire hermitien, ce qui confère à  $(L_2, \langle \cdot, \cdot \rangle)$  une structure d'espace de Hilbert.

[BMP]  
p. 92

On peut donc énoncer quelques propriétés dont hérite  $L_2$ .

**Théorème 42.** Pour tout sous-espace vectoriel fermé  $F$  de  $L_2$ ,

$$L_2 = F \oplus F^\perp$$

p. 98

**Corollaire 43.** Un sous-espace vectoriel  $F$  de  $L_2$  est dense dans  $L_2$  si et seulement si  $F^\perp = \{0\}$ .

**Théorème 44.** Soit  $(e_n)_{n \in I}$  une famille orthonormée dénombrable de  $L_2$ . Les propriétés suivantes sont équivalentes :

- (i) La famille orthonormée  $(e_n)_{n \in I}$  est une base hilbertienne de  $H$ .
- (ii)  $\forall f \in L_2, f = \sum_{n=0}^{+\infty} \langle f, e_n \rangle e_n$ .
- (iii)  $\forall f \in L_2, \|f\|_2 = \sum_{n=0}^{+\infty} |\langle f, e_n \rangle|^2$ .

## 2. Polynômes orthogonaux

Soit  $I$  un intervalle de  $\mathbb{R}$ . On pose  $\forall n \in \mathbb{N}, g_n : x \mapsto x^n$ .

p. 110

**Définition 45.** On appelle **fonction poids** une fonction  $\rho : I \rightarrow \mathbb{R}$  mesurable, positive et telle que  $\forall n \in \mathbb{N}, \rho g_n \in L_1(I)$ .

Soit  $\rho : I \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction poids.

**Notation 46.** On note  $L_2(I, \rho)$  l'espace des fonctions de carré intégrable pour la mesure de densité  $\rho$  par rapport à la mesure de Lebesgue.

**Proposition 47.** Muni de

$$\langle \cdot, \cdot \rangle : (f, g) \mapsto \int_I f(x) \overline{g(x)} \rho(x) dx$$

$L_2(I, \rho)$  est un espace de Hilbert.

**Théorème 48.** Il existe une unique famille  $(P_n)$  de polynômes unitaires orthogonaux deux-à-deux telle que  $\deg(P_n) = n$  pour tout entier  $n$ . C'est la famille de **polynômes orthogonaux** associée à  $\rho$  sur  $I$ .

**Exemple 49** (Polynômes de Hermite). Si  $\forall x \in I, \rho(x) = e^{-x^2}$ , alors

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in I, P_n(x) = \frac{(-1)^n}{2^n} e^{x^2} \frac{\partial}{\partial x^n} (e^{-x^2})$$

**Lemme 50.** On suppose que  $\forall n \in \mathbb{N}, g_n \in L_1(I, \rho)$  et on considère  $(P_n)$  la famille des polynômes orthogonaux associée à  $\rho$  sur  $I$ . Alors  $\forall n \in \mathbb{N}, g_n \in L_2(I, \rho)$ . En particulier, l'algorithme de Gram-Schmidt a bien du sens et  $(P_n)$  est bien définie.

p. 140

**Application 51.** On considère  $(P_n)$  la famille des polynômes orthogonaux associée à  $\rho$  sur  $I$

et on suppose qu'il existe  $a > 0$  tel que

$$\int_I e^{a|x|} \rho(x) dx < +\infty$$

alors  $(P_n)$  est une base hilbertienne de  $L_2(I, \rho)$  pour la norme  $\|\cdot\|_2$ .

**Contre-exemple 52.** On considère, sur  $I = \mathbb{R}_*^+$ , la fonction poids  $\rho : x \mapsto x^{-\ln(x)}$ . Alors, la famille des  $g_n$  n'est pas totale. La famille des polynômes orthogonaux associée à ce poids particulier n'est donc pas totale non plus : ce n'est pas une base hilbertienne.

## IV - Dualité

**Définition 53.** On appelle **forme linéaire** d'un espace vectoriel  $E$  sur un corps  $\mathbb{K}$  toute application linéaire de  $E$  dans  $\mathbb{K}$  et on note  $E^*$  appelé **dual** de  $E$  l'ensemble des formes linéaires de  $E$ .

On note  $E'$  le **dual topologique** de  $E$ , qui est le sous-espace de  $E^*$  constitué des formes linéaires continues.

[GOU21]  
p. 132

**Théorème 54** (de représentation de Riesz). L'application

$$\Phi : \begin{array}{ccc} H & \rightarrow & H' \\ y & \mapsto & (x \mapsto \langle x, y \rangle) \end{array}$$

est une isométrie linéaire bijective de  $H$  sur son dual topologique  $H'$ .

[BMP]  
p. 103

**Exemple 55.** Dans le cas  $L_2(X, \mu)$ ,

$$\forall \varphi \in L_2', \exists ! g \in H, \text{ telle que } \forall f \in L_2, \varphi(f) = \int_X f(g) \overline{g(x)} d\mu(x)$$

**Théorème 56** (Dual de  $L_p$ ). On se place dans un espace mesuré de mesure finie. On note  $\forall p \in ]1, 2[$ . L'application

$$\varphi : \begin{array}{ccc} L_q & \rightarrow & (L_p)' \\ g & \mapsto & (\varphi_g : f \mapsto \int_X f g d\mu) \end{array} \quad \text{où } \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$$

est une isométrie linéaire surjective. C'est donc un isomorphisme isométrique.

[Z-Q]  
p. 222

[DEV]

[LI]  
p. 140



*Remarque 57.* Plus généralement, si l'on identifie  $g$  et  $\varphi_g$  :

- $L_q$  est le dual topologique de  $L_p$  pour  $p \in ]1, +\infty[$ .
- $L_\infty$  est le dual topologique de  $L_1$  si  $\mu$  est  $\sigma$ -finie.

# Bibliographie

## Analyse de Fourier dans les espaces fonctionnels

[AMR08]

Mohammed EL-AMRANI. *Analyse de Fourier dans les espaces fonctionnels. Niveau M1*. Ellipses, 28 août 2008.

<https://www.editions-ellipses.fr/accueil/3908-14232-analyse-de-fourier-dans-les-espaces-fonctionnels-niveau-m1-9782729839031.html>.

## Objectif agrégation

[BMP]

Vincent BECK, Jérôme MALICK et Gabriel PEYRÉ. *Objectif agrégation*. 2<sup>e</sup> éd. H&K, 22 août 2005.

<https://objectifagregation.github.io>.

## Analyse

[B-P]

Marc BRIANE et Gilles PAGES. *Analyse. Théorie de l'intégration*. 8<sup>e</sup> éd. De Boeck Supérieur, 29 août 2023.

<https://www.deboecksuperieur.com/ouvrage/9782807359550-analyse-theorie-de-l-integration>.

## Mathématiques pour l'agrégation

[DAN]

Jean-François DANTZER. *Mathématiques pour l'agrégation. Analyse et probabilités*. De Boeck Supérieur, 20 avr. 2021.

<https://www.deboecksuperieur.com/ouvrage/9782807332904-mathematiques-pour-l-agregation-analyse-et-probabilites>.

## De l'intégration aux probabilités

[G-K]

Olivier GARET et Aline KURTZMANN. *De l'intégration aux probabilités*. 2<sup>e</sup> éd. Ellipses, 28 mai 2019.

<https://www.editions-ellipses.fr/accueil/4593-14919-de-l-integration-aux-probabilites-2e-edition-augmentee-9782340030206.html>.

## Les maths en tête

[GOU20]

Xavier GOURDON. *Les maths en tête. Analyse*. 3<sup>e</sup> éd. Ellipses, 21 avr. 2020.

<https://www.editions-ellipses.fr/accueil/10446-les-maths-en-tete-analyse-3e-edition-9782340038561.html>.

## Les maths en tête

[GOU21]

Xavier GOURDON. *Les maths en tête. Algèbre et probabilités*. 3<sup>e</sup> éd. Ellipses, 13 juill. 2021.

<https://www.editions-ellipses.fr/accueil/13722-25266-les-maths-en-tete-algebre-et-probabilites-3e-edition-9782340056763.html>.

## **Cours d'analyse fonctionnelle**

**[LI]**

Daniel LI. *Cours d'analyse fonctionnelle. avec 200 exercices corrigés*. Ellipses, 3 déc. 2013.

<https://www.editions-ellipses.fr/accueil/6558-cours-danalyse-fonctionnelle-avec-200-exercices-corriges-9782729883058.html>.

## **Analyse pour l'agrégation**

**[Z-Q]**

Claude ZUILY et Hervé QUEFFÉLEC. *Analyse pour l'agrégation. Agrégation/Master Mathématiques*. 5<sup>e</sup> éd. Dunod, 26 août 2020.

<https://www.dunod.com/prepas-concours/analyse-pour-agregation-agregationmaster-mathematiques>.