20 Composition de deux applications.

Activité d'introduction 1
On considère les deux applications suivantes définies par : $f(x) = 2x+1$ et $g(x) = \sqrt{x}$.

— Précise leurs ensembles de définition.

— Calcule $f(4)$ puis $g(9)$.

— Calcule $f(40)$ puis $g(f(40))$.

— Calcule $f(0)$ puis $g(f(0))$.

— Calcule $g(f(3))$.

— Calcule $f(a)$ puis donne l'expression de $g(f(a))$ en fonction du nombre positif a.

Définition - Notation - Exemples

Définition 2
Soient deux applications f et g .
On appelle composée de g par f, l'application notée $g \circ f$ définie par :

$$(g \circ f)(x) = g[f(x)]$$

Méthode 3
Pour déterminer l'expression de $(g \circ f)(x)$:

— on cherche d'abord l'image de x par f, c'est-à-dire $f(x)$;

— puis l'image de $f(x)$ par g, c'est-à-dire $g(f(x))$;

— on écrit alors :

$$g \circ f(x) = g[f(x)].$$

Dans les exemples suivants, déterminons l'expression des applications $g \circ f$ et de $f \circ g$.

Exemple 4
Soit $f(x) = 2x+1$ et $g(x) = \sqrt{x}$
On a $(g \circ f)(x) = g[f(x)] = g(2x+1) = \sqrt{2x+1}$
On a aussi $(f \circ g)(x) = f[g(x)] = f\left[\sqrt{x}\right] = 2\sqrt{x}+1$

Exemple 5
Soit $f(x) = x-5$ et $g(x) = x^2$
On a $(g \circ f)(x) = g[f(x)] = g(x-5) = (x-5)^2$
On a aussi $(f \circ g)(x) = f[g(x)] = f\left[x^2\right] = x^2-5$

Exemple 6
Soit $f(x) = \dfrac{x+4}{x}$ et $g(x) = \sqrt{x}$
Alors $(g \circ f)(x) = g[f(x)] = \sqrt{\dfrac{x+4}{x}}$

Remarque 7
En général $(g \circ f) \neq (f \circ g)$

Exemple 8 (Reconnaissance)
L'application h définie sur $\mathbb{R}$ par $h(x) = (x-2)^2$ est la composée de l'application

$$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & x^2 \end{array}$$

par l'application

$$g : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & x-2 \end{array}$$

Ainsi, on a :

$$h(x) = f[g(x)] = (f \circ g)(x).$$