7 Fonctions puissances d'exposant rationnel

I - Définition et propriétés

Définition 1
r étant un nombre rationnel non nul, on appelle *fonction puissance d'exposant r,* la fonction :

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R}_+ & \longrightarrow & \mathbb{R}_+ \\ x & \longmapsto & x^r \end{array}$$

Notation 2
$x^r = \mathrm{e}^{r\ln x}$

Propriété 3 1. r et r' étant des nombres rationnels non nuls, x et y des réels strictement positifs.

— $x^r \times y^r = (xy)^r$
— $(x^r)^{r'} = x^{rr'}$
— $\dfrac{x^r}{y^r} = (\dfrac{x}{y})^r$
— $x^r \times x^{r'} = x^{r+r'}$

II - Dérivabilité

La fonction $x \to x^r$ est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ car composée des deux fonctions dérivables : $x \longmapsto r\ln x$ et $x \longmapsto \mathrm{e}^x$.
On a : $\forall x > 0, \quad (x^r)' = \left(\mathrm{e}^{r\ln x}\right)' = \dfrac{r}{x} \times \mathrm{e}^{r\ln x} = \dfrac{r}{x} \times x^r = rx^{r-1}$.
Ainsi la fonction $x \longmapsto x^r$ est dérivable sur $]0\,,\,+\infty[$ et sa dérivée est la fonction $x \longmapsto rx^{r-1}$.

III - Fonction composée

Soit r un rationnel et u une fonction strictement positive sur un intervalle I.
La fonction $x \longmapsto (u(x))^r$ est la composée de la fonction $x \longmapsto u(x)$ suivie de la fonction $x \longmapsto x^r$.
De plus on a : $(u(x))^r = \mathrm{e}^{r\ln(u(x))}$
On en déduit la propriété suivante.

Propriété 4
Soit r un rationnel et u une fonction dérivable et strictement positive sur un intervalle I.
La fonction u^r est dérivable sur I et on a : $(u^r)' = ru'u^{r-1}$

Exemple 5
$f(x)=\sqrt[3]{2x+1}$
$f(x)$ existe $\Leftrightarrow 2x+1 \Leftrightarrow x \geq -\dfrac{1}{2}$ donc f est dérivable sur $\left]-\dfrac{1}{2}\,,\,+\infty\right[$
$f(x)=\sqrt[3]{2x+1}=(2x+1)^{\frac{1}{3}} \Longrightarrow f'(x)=\dfrac{2}{3}(2x+1)^{-\frac{2}{3}}=\dfrac{2}{3\sqrt[3]{(2x+1)^2}}$

Conséquence 6
Soit r un rationnel différent de -1 et u une fonction dérivable et strictement positive sur un intervalle I.
La fonction $u'u^r$ admet pour primitives sur I les fonctions $\dfrac{u^{r+1}}{r+1}+C$.

Exemple 7
La fonction $x \longmapsto 2x\left(3-x^2\right)^{\frac{1}{4}}$ admet pour primitives sur $\left]-\sqrt{3}\,,\,\sqrt{3}\right[$ les fonctions $x \longmapsto -\dfrac{\left(3-x^2\right)^{\frac{5}{4}}}{\frac{5}{4}}+C$

IV - Croissances comparées

Propriété 8
Soit α un rationnel strictement positif. On a :

— $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x^\alpha}=0$

— $\displaystyle\lim_{x\to0^+}x^\alpha\ln x=0$

— $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\frac{\mathrm{e}^x}{x^\alpha}=+\infty$

— $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}x^\alpha\mathrm{e}^{-x}=0$

Remarque 9
Lorsqu'on ne peut pas conclure directement, on peut conjecturer la limite d'une fonction comportant des fonctions logarithmes, puissances ou exponentielles en remarquant que :

— la fonction exponentielle « l'emporte » sur la fonction puissance.

— la fonction puissance « l'emporte » sur la fonction logarithme.

Démonstration

— Posons : $X=x^\alpha$ on a : $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x^\alpha}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{\alpha}\frac{\ln x^\alpha}{x^\alpha}=\lim_{X\to+\infty}\frac{1}{\alpha}\frac{\ln X}{X}=0$

— Posons : $X=x^\alpha$ on a : $\displaystyle\lim_{x\to0^+}x^\alpha\ln x=\lim_{x\to0^+}\frac{1}{\alpha}x^\alpha\ln x^\alpha=\lim_{X\to0^+}\frac{1}{\alpha}X\ln X=0$

— Posons : $X = \dfrac{x}{\alpha}$ on a : $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x^\alpha} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{\alpha}\left(\frac{e^{\frac{x}{\alpha}}}{\frac{x}{\alpha}}\right)^\alpha = \lim_{X\to+\infty} \frac{1}{\alpha}\left(\frac{e^X}{X}\right)^\alpha = +\infty$

— On a : $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} x^\alpha e^{-x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^\alpha}{e^x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{\frac{e^x}{x^\alpha}} = 0$

Exemple 10 — $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \sqrt{x} - \ln x = \lim_{x\to+\infty} x^{\frac{1}{2}}\left[1 - \frac{\ln x}{x^{\frac{1}{2}}}\right]$, or $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\left(1 - \frac{\ln x}{x^{\frac{1}{2}}}\right) = 1 - 0 = 1$ et $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} x^{\frac{1}{2}} = +\infty$ donc $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \sqrt{x} - \ln x = +\infty$

— $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} e^x - \ln x = \lim_{x\to+\infty} \ln x\left(\frac{e^x}{\ln x} - 1\right)$ or $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \ln x = +\infty$ et $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{\ln x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x} \times \frac{x}{\ln x} = +\infty$

Par suite $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \ln x\left(\frac{e^x}{\ln x} - 1\right) = +\infty$

— $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{n}$. On a : $\sqrt[n]{n} = n^{\frac{1}{n}} = e^{\frac{1}{n}\ln n}$. Or $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{\ln n}{n} = 0$ par composée , $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} e^{\frac{1}{n}\ln n} = e^0 = 1$ il vient : $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{n} = 1$