16 Primitives

I - Définition et propriétés

Définition 1
Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ et f une fonction définie sur I. Une primitive de f sur I est une fonction F dérivable sur I telle que pour tout $x \in I$, $F'(x) = f(x)$.

Exemple 2
Soit $f(x) = 2\cos x \sin x$ sur $\mathbb{R}$.
Alors, les fonctions suivantes sont des primitives de f sur $\mathbb{R}$:

— $F(x) = \dfrac{1}{2}\sin^2 x$

— $F(x) = -\dfrac{1}{2}\cos^2 x$

— $F(x) = -\dfrac{1}{2}\cos(2x)$

— $F(x) = \dfrac{1}{2}\sin^2 x + 5$

Propriété 3 **P1 :** Toute fonction continue sur un intervalle I admet une primitive sur I.

P2 : Si F est une primitive sur un intervalle I d'une fonction f, alors pour tout réel k, $F + k$ est aussi une primitive de f sur I.

P3 : Pour tout couple réel (x_0, y_0), il existe une unique primitive F de f sur I telle que $F(x_0) = y_0$.

Remarque 4
Deux primitives d'une même fonction sur un intervalle diffèrent d'une constante.

II - Détermination d'une primitive

Primitives usuelles

Fonction f	**Primitive** F	**Intervalle** I	**Commentaire**
a	ax	$\mathbb{R}$	$a \in \mathbb{R}$
x^n	$\frac{1}{n+1}x^{n+1}$	$\mathbb{R}$	$n \in \mathbb{N}$
$\frac{1}{x^2}$	$-\frac{1}{x}$	$\mathbb{R} \setminus \{0\}$	
$\frac{1}{x^n}$	$-\frac{1}{(n-1)x^{n-1}}$	$\mathbb{R} \setminus \{0\}$	$n \in \mathbb{N} \setminus \{0,1\}$
$\frac{1}{\sqrt{x}}$	$2\sqrt{x}$	$]0,+\infty[$	
$\cos x$	$\sin x$	$\mathbb{R}$	
$\sin x$	$-\cos x$	$\mathbb{R}$	

Formes de primitives

Propriété 5
Si F et G sont deux primitives respectives de f et g sur un intervalle I :

— $F+G$ est une primitive de $f+g$ sur I;

— λF est une primitive de λf sur I, pour tout réel λ;

— Si f est dérivable sur I et g dérivable sur $f(I)$, alors une primitive de $(g' \circ f) \cdot f'$ est $g \circ f$.

Propriété 6
Soit u une fonction dérivable sur un intervalle I telle que u' soit continue sur I :

Fonction f	**Primitive** F	**Commentaire**
$u'u^n$	$\frac{1}{n+1}u^{n+1}$	$n \in \mathbb{N}$
u'/u^n	$-\frac{1}{n-1}u^{1-n}$	$n \in \mathbb{N}^*, n \neq 1$
$\frac{u'}{\sqrt{u}}$	$2\sqrt{u}$	
$\cos(ax)$	$\frac{1}{a}\sin(ax)$	$a \neq 0$
$\sin(ax)$	$-\frac{1}{a}\cos(ax)$	$a \neq 0$
$\sin^n x \cos x$	$\frac{1}{n+1}\sin^{n+1} x$	$n \in \mathbb{N}$
$\cos^n x \sin x$	$-\frac{1}{n+1}\cos^{n+1} x$	$n \in \mathbb{N}$

Exemple 7 — $f_1(x) = \sin^2 x + x^3$, une primitive : $F_1(x) = -\frac{1}{2}\cos^2 x + \frac{1}{4}x^4$

— $f_2(x) = x(3x^2-1)^3$, une primitive : $F_2(x) = \frac{1}{24}(3x^2-1)^4$

— $f_3(x) = \frac{x}{(x^2+1)^2}$, une primitive : $F_3(x) = -\frac{1}{x^2+1}$