Exponentielle

Exercice 1
Simplifier au maximum les expressions suivantes.

1. $\dfrac{(e^2)^5}{e^5}$
2. $\sqrt{e^2} \times \dfrac{1}{e^{-2}}$
3. $\dfrac{e^{-3} \times e^2}{e^7}$
4. $\dfrac{1}{1+e} - \dfrac{e^{-1}}{1+e^{-1}}$

Exercice 2
Simplifier chacune des expressions.

1. $e^{-2x} \times e^{2x}$
2. $(e^x)^3 \times e^{-2x}$
3. $e^{2x+1} \times e^{1-x}$
4. $\dfrac{e^{2x+3}}{e^{2x-1}}$
5. $\dfrac{e^{x+2}}{e^{-x+2}}$
6. $\dfrac{e^x + e^{-x}}{e^x}$
7. $\dfrac{e^x + e^{-x}}{e^{-x}}$
8. $(e^x + e^{-x})^2 - 1 - e^{-2x}$
9. $\dfrac{e^{3x} + e^x}{e^{2x} + 1}$

Exercice 3
Démontrer les égalités suivantes.

1. $(e^x + e^{-x})^2 - (e^x - e^{-x})^2 = 2.$
2. $e^{2x} - 5e^x + 4 = (e^x - 1)(e^x - 4)$
3. $e^{-x} - e^{-2x} = \frac{e^x-1}{e^{2x}}$
4. $\dfrac{e^x - 1}{e^x + 1} = \dfrac{1 - e^{-x}}{1 + e^{-x}}$

5. $\dfrac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} = \dfrac{e^{2x} - 1}{e^{2x} + 1}$

Exercice 4
Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes.

1. $e^{3x} = 1$
2. $e^{-3x+5} = e^{-2x+5}$
3. $e^{-3x+5} \times e^{x+1} = e^5$
4. $e^{-3x+5} = e^2$
5. $e^x + 4 = 0$
6. $e^{2x-1} = 16$
7. $e^{-x} - \frac{1}{2} = 0$
8. $e^{(x+1)(2x+1)} = 1$
9. $e^{x^2+3x+4} = e^2$
10. $e^{x^2+x+1} = e^{3x+5}$
11. $e^{x^2+1} \times e^{2x} = e^{2x^2}$

Exercice 5
Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes.

1. $(e^x - 1)(e^x - 2) = 0$
2. $e^{2x} - 4e^x + 3 = 0$
3. $e^{2x} - 5e^x = 14$
4. $e^{2x} + e^x = 2$
5. $e^x + e^{-x} = 2$
6. $e^{-x} + 2e^x = 3$
7. $e^{-2x} + 2e^{-x} - 3 = 0$
8. $e^{3x} + 3e^{2x} + 2e^x = 0$
9. $e^{3x} - e^{2x} - 2e^x = 0$

Exercice 6
Résoudre dans $\mathbb{R}$ les inéquations suivantes.

1. $e^{2x} > 3$
2. $e^{-2x} \leq 3$
3. $e^{-2x} \leq e^{x+5}$
4. $e^{x^2} > e^9$

5. $e^{x^2} > e^{3x+2}$
6. $(e^x - 1)(e^x - 2) > 0$
7. $(2e^x - 4)(e^x - 3) < 0$
8. $(e^x + 5)\left(e^{2x} - 2\right) > 0$
9. $\dfrac{e^x - 3}{e^x - 2} \geq 0$
10. $\dfrac{e^x - 3}{e^x - 2} \geq 2$

Exercice 7
Résoudre dans $\mathbb{R}$ les inéquations suivantes.

1. $e^{2x} - e^x < 0$
2. $e^{2x} - 5e^x - 14 < 0$
3. $e^{2x} - 3e^x + 2 \geq 0$
4. $e^{2x} - 12e^x + 20 > 0$
5. $-e^{2x} + 11e^x - 30 > 0$
6. $e^{2x} - 25 < 0$

Exercice 8
On considère le polynôme $P(x) = 2x^3 - 3x^2 - 11x + 6$.

1. Calculer $P(2)$ puis montrer que :
   $P(x) = (x+2)(x-3)(2x-1)$.
2. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $P(x) = 0$.
3. En déduire les solutions des équations suivantes.
   (a) $2(\ln(x))^3 - 3(\ln(x))^2 - 11\ln(x) + 6 = 0$.
   (b) $2e^{3x} - 3e^{2x} - 11e^x + 6 = 0$.

Exercice 9
On considère le polynôme $P(x) = x^3 - 9x^2 - x + 9$.

1. Calculer $P(9)$ en déduire une factorisation de $P(x)$.
2. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $P(x) = 0$.
3. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $\dfrac{e^{2x} + 9e^{-x}}{9e^x + 1} = 1$.

Exercice 10 1. Développer, réduire et ordonner $P(x) = (x+2)(x-3)(x+1)$

2. Résoudre $\mathbb{R}$, $P(x) = 0$ et $P(x) \leq 0$.

3. En déduire la résolution des équations suivantes.
   (a) $(\ln x)^3 - 7(\ln x)^2 - 6 = 0$
   (b) $e^{3x} - 7e^x - 6 = 0$.

Exercice 11 1. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $x^3 - 3x^2 + 2x = 0$

2. En déduire la résolution des équations suivantes.
   (a) $(\ln x)^3 - 3(\ln x)^2 + 2\ln x = 0$
   (b) $e^{3x} - 3e^{2x} + 2e^x = 0$.

Exercice 12
On considère le polynôme $P(x) = ax^3 + bx^2 + 14x + c$ où a, b et c sont des réels.

1. Déterminer a, b et c sachant que $P(0) = -20$, $P(-2) = 0$ et $P(-1) = -24$
2. On pose $P(x) = -2x^3 + 8x^2 + 14x - 20$
   (a) Factoriser $P(x)$.
   (b) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $P(x) = 0$.
   (c) En déduire les solutions des équations suivantes.
   (d) $-2e^{3x} + 8e^{2x} + 14e^x - 20 = 0$.
   (e) $-2(\ln(x))^3 + 8(\ln(x))^2 + 14\ln(x) - 20 = 0$.

Exercice 13
Résoudre les systèmes d'équations suivants.

1. $\begin{cases} 2e^x - e^y = 15 \\ e^x + 2e^y = 40 \end{cases}$
2. $\begin{cases} 2e^x - 3e^y = -5 \\ 3e^x + 4e^y = 18 \end{cases}$
3. $\begin{cases} 5e^{-x} - 3e^{-y} = 3 \\ 7e^{-x} + 6e^{-y} = 11 \end{cases}$
4. $\begin{cases} e^x \times e^{2y+2} = 0 \\ e^{x+7} \times e^y = e \end{cases}$
5. $\begin{cases} e^{x-y} = 12 \\ e^{x+y} = \frac{4}{3} \end{cases}$

Exercice 14 1. Résoudre dans $\mathbb{R}^2$: $\begin{cases} 2X - Y = 7 \\ 3X + 4Y = 5 \end{cases}$

2. En déduire la résolution dans $\mathbb{R}^2$ des systèmes :

$$\begin{cases} 2\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^y = 7 \\ 3\mathrm{e}^x + 4\mathrm{e}^y = 5 \end{cases} \qquad \begin{cases} 2\ln x - \ln y = 7 \\ 3\ln x + 4\ln x = 5 \end{cases}$$

Exercice 15

Résoudre les systèmes d'équations suivants.

1. $\begin{cases} \mathrm{e}^x \times \mathrm{e}^y = \mathrm{e}^2 \\ xy = -15 \end{cases}$
2. $\begin{cases} \mathrm{e}^x \times \mathrm{e}^y = \mathrm{e}^{10} \\ \ln x + \ln y = \ln 21 \end{cases}$
3. $\begin{cases} \mathrm{e}^x - 3\ln y = 11 \\ 2\mathrm{e}^x + \ln y = 1 \end{cases}$
4. $\begin{cases} \ln x + \ln 4 = \ln 3 - \ln y \\ \mathrm{e}^x = \mathrm{e}^{2-y} \end{cases}$

Exercice 16

Calculer la dérivée de f dans chaque cas.

1. $f(x) = \mathrm{e}^x - x - 1$
2. $f(x) = (x+5)\mathrm{e}^x$
3. $f(x) = x^2\mathrm{e}^x$
4. $f(x) = xe^{2x}$
5. $f(x) = \mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{-x}$
6. $f(x) = \mathrm{e}^{x^2-6x}$
7. $f(x) = x\mathrm{e}^{x^2-6x}$
8. $f(x) = \mathrm{e}^{\frac{2}{x}}$
9. $f(x) = \mathrm{e}^{\frac{x}{x+2}}$
10. $f(x) = \dfrac{\mathrm{e}^x + 1}{\mathrm{e}^x - 2}$
11. $f(x) = \dfrac{\mathrm{e}^{2x}}{\mathrm{e}^x - 2}$
12. $f(x) = \dfrac{\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x}}{\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{-x}}$
13. $f(x) = (4e^x - 1)(e^{2x} + 1)$
14. $f(x) = \dfrac{1 + e^x}{1 - 2e^x}$
15. $f(x) = \dfrac{2e^x}{e^x - 1}$

Exercice 17
Déterminer les limites suivantes.

1. $\lim\limits_{x \to +\infty} (e^{-x} + 1)$
2. $\lim\limits_{x \to 0} (e^{-x} + 1)$
3. $\lim\limits_{x \to -\infty} (e^{-x} + 1)$
4. $\lim\limits_{x \to +\infty} x e^{x}$
5. $\lim\limits_{x \to -\infty} x e^{-x}$
6. $\lim\limits_{x \to -\infty} x e^{x}$
7. $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{e^{2x} - 1}{e^{x} + 1}$
8. $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{1}{1 + e^{x}}$
9. $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(e^{x} + \dfrac{1}{x}\right)$
10. $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{1}{1 + e^{-2x}}$

Exercice 18
Déterminer les limites suivantes.

1. $\lim\limits_{x \to +\infty} (e^{2x} - e^{x} + 1)$
2. $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{e^{x} + 1}{2x}$
3. $\lim\limits_{x \to -\infty} (x^2 - 4x + 1) e^{x}$
4. $\lim\limits_{x \to +\infty} (e^{x} - x^2 - x)$
5. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{1 - 3e^{x}}{e^{x} - 1}$

Etude de fonctions

Exercice 19
Etudier les variations de f dans chaque cas.

1. $f(x) = x\mathrm{e}^{x}$
2. $f(x) = \dfrac{x}{\mathrm{e}^{x}}$
3. $f(x) = x^2\mathrm{e}^{x}$
4. $f(x) = \dfrac{\mathrm{e}^{x}}{x}$
5. $f(x) = \mathrm{e}^{x+2}$

6. $f(x) = \mathrm{e}^{2x-2}$
7. $f(x) = \mathrm{e}^{-x^2}$
8. $f(x) = \mathrm{e}^{x^2+2x+1}$
9. $f(x) = \mathrm{e}^{3-x}$
10. $f(x) = x - \mathrm{e}^{x}$
11. $f(x) = x + \mathrm{e}^{x}$

Exercice 20

Soit $f(x) = x - \dfrac{\mathrm{e}^x}{\mathrm{e}^x + 2}$, pour tout réel x.

1. Calculer les limites de f en $+\infty$ et $-\infty$.
2. Montrer que $f'(x) = \dfrac{\mathrm{e}^{2x} + 1}{(\mathrm{e}^x + 2)^2}$
3. En déduire le tableau de variation de f.
4. Montrer que la droite (D) d'équation $y = x$ est une asymptote à la courbe de f en $-\infty$.
5. Montrer que la droite (D') d'équation $y = x - 1$ est une asymptote à la courbe de f en $+\infty$.

Exercice 21

On considère la fonction f définie par $f(x) = \dfrac{2\mathrm{e}^{2x}}{\mathrm{e}^{2x} + 1}$

1. Calculer les limites de f en $+\infty$ et $-\infty$.
2. Montrer que $f'(x) = \dfrac{4\mathrm{e}^{2x}}{(\mathrm{e}^{2x} + 1)^2}$.. En déduire le tableau de variations de f.
3. Montrer que le point $I(0, 1)$ est un centre de symétrie à la courbe de f.

Exercice 22

Soit la fonction f définie par $f(x) = \left(x^2 - 5x + 7\right)\mathrm{e}^x$

1. Calculer les limites de f en $+\infty$ et $-\infty$.
2. Montrer que le signe de $f'(x)$ est celui de $x^2 - 3x + 2$.
3. Dresser le tableau de variations de f.
4. Que représente l'axe des abscisses pour la courbe de f ?
5. Donner une équation de la tangente au point d'abscisse 0.

Exercice 23

Soit la fonction f définie par $f(x) = \mathrm{e}^{2x} - \mathrm{e}^{-2x} - 4x$

1. Etudier la parité de f

2. Dans la suite on étudie f sur $[0\ ,\ +\infty[$.
   (a) Calculer la limite de f en $+\infty$.
   (b) Montrer que $f'(x) = 2\left(\mathrm{e}^{x} - \mathrm{e}^{-x}\right)^2$.
   (c) Dresser le tableau de variations de f.
   (d) Représenter la courbe de f

Exercice 24
On considère la fonction f définie par $f(x) = \dfrac{2}{\mathrm{e}^{x}+2}$

1. Calculer les limites de f en $+\infty$ et $-\infty$ et préciser les asymptotes à la courbe de f.
2. Calculer $f'(x)$. En déduire le tableau de variation de f.
3. Montrer que le point $\mathrm{I}\left(\ln 2, \frac{1}{2}\right)$ est un centre de symétrie à la courbe de f.
4. Donner une équation de la tangente au point d'abscisse 1.
5. Déterminer les coordonnées du point A intersection de la courbe avec l'axe des ordonnées.

Exercice 25
On considère la fonction f définie par : $f(x) = xe^{-x}$

1. Déterminer le domaine de définition E de f puis les limites aux bornes de E.
2. a. Montrer que la fonction dérivée de f est telle que $f'(x) = (1-x)e^{-x}$.
   b. Dresser le tableau de variations de f.
3. Déterminer la nature de la branche infinie de la courbe en $-\infty$.
4. Tracer la courbe.

Exercice 26
Soit la fonction f définie par : $f(x) = (1-x)e^{x} + 1$

1. Déterminer le domaine de définition de f puis les limites aux bornes de ce domaine. Que peut-on en déduire pour la courbe de f ?
2. Calculer la fonction dérivée de f, étudier son signe puis dresser son tableau de variations de f.
3. Déterminer l'équation de la tangente au point où la courbe coupe l'axe des ordonnées.
4. Déterminer la nature de la branche infinie de la courbe en $-\infty$.
5. Tracer la courbe.

Exercice 27
Soit la fonction f définie par : $f(x) = e^{x^2-2x}$

1. Déterminer le domaine de définition de f puis les limites aux bornes.

2. Calculer la fonction dérivée de f, étudier son signe puis dresser le tableau de variations de f.
3. Déterminer l'équation de la tangente aux points d'abscisse 0 et 2.
4. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $f(x) = 1$.

Exercice 28
Soit la fonction f définie par : $f(x) = \dfrac{e^x - 1}{e^x + 1}$

1. Déterminer le domaine de définition de f.
   Calculer la limite de f en $-\infty$.
   En déduire l'équation d'une asymptote à la courbe en $-\infty$
   Calculer la limite de f en $+\infty$. En déduire l'équation d'une deuxième asymptote à la courbe en $+\infty$.
2. Calculer la fonction dérivée de f, étudier son signe puis dresser le tableau de variations de f.
3. Déterminer l'équation de la tangente au point où la courbe coupe l'axe des ordonnées.
4. Montrer que pour tout x réel , $f(-x) = -f(x)$.
   Que peut on en déduire pour la fonction f et pour sa courbe représentative ?

Exercice 29
Soit la fonction f définie par : $f(x) = \dfrac{2e^x - 1}{e^x - 1}$

1. Déterminer les réels a et b tels que $f(x) = a + \dfrac{b}{e^x - 1}$
2. Déterminer l'ensemble de définition de la fonction f et étudier les limites aux bornes de cet ensemble de définition.
3. (a) Déterminer la dérivée f' de la fonction f.
   (b) Etudier le sens de variations de la fonction f.
   (c) Dresser le tableau de variations de la fonction f.
4. On appelle $\mathscr{C}$ la courbe représentative de f dans un repère orthonormé $(O;\vec{i},\vec{j})$ (unité:2cm)
   (a) Montrer que le point A $\left(0;\frac{3}{2}\right)$ est un centre de symétrie pour $\mathscr{C}$.
   (b) Tracer $\mathscr{C}$.

Exercice 30
Soit la fonction f définie par : $f(x) = x + \ln(2 - \mathrm{e}^x)$

1. Résoudre l'inéquation $2 - \mathrm{e}^x > 0$.
   En déduire le domaine de définition Df de f..
2. Etudier les limites $-\infty$ et en $\ln 2$ de la fonction f.

3. Calculer f' puis établir le tableau de variation de f.
4. (a) Montrer que pour tout $x \in Df$,
   $f(x) = x + \ln 2 + \ln\left(1 - \dfrac{e^x}{2}\right)$.
   (b) En déduire que la droite $y = x + \ln 2$ est une asymptote en $-\infty$ à la courbe de f.
   (c) Préciser la position de la courbe par rapport à cette asymptote.
5. Tracer la courbe $\mathscr{C}$ représentative de f dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$ (unité:1cm)