8 Probabilités conditionnelles

Activité d'introduction 1
Dans une classe de 40 élèves, les 25 sont des garçons.
10 garçons et 5 filles ont la moyenne à l'issue d'une composition.
On choisit au hasard un élève de cette classe. On considère les événements suivants :
G : « l'élève choisi est un garçon.» M : « l'élève choisi a la moyenne.»

1. Décrire l'événement G∩M.
2. Donner les valeurs de P(G), P(M) et P(G∩M).
3. On choisit un élève parmi les garçons. Quelle est la probabilité qu'il ait la moyenne ? On note cette probabilité par P(M/G).
4. Comparer P(M/G) et $\dfrac{P(G\cap M)}{P(G)}$

I - Définition et propriétés

Définition 2
Soient A et B deux événements de l'univers Ω d'une expérience aléatoire avec $P(A) \neq 0$.
On appelle **probabilité conditionnelle de B sachant que A est réalisé**, le nombre :

$$P(B/A) = \frac{P(A\cap B)}{P(A)} \qquad \textit{(l'univers se réduit à } A\textit{)}$$

Le nombre réel $P(B/A)$ se note aussi $P_A(B)$.

Exemple 3
On lance un dé équilibré à six faces numérotées de 1 à 6.

• Si A est l'événement « **le résultat est pair**», on a $P_A(\{2\}) = \dfrac{\frac{1}{6}}{\frac{1}{2}} = \dfrac{1}{3}$ et $P_A(\{5\}) = 0$

• Si B désigne l'événement « **le résultat est un multiple de 3**», on a

B= $\{3;6\}$ et $P_A(B) = \dfrac{P(\{6\})}{P(A)} = \dfrac{1}{3}$

Théorème 4
L'application qui, à tout événement B associe le réel P_A(B) définit une probabilité sur Ω , appelée **probabilité conditionnelle sachant A**.

Démonstration
P_A associe à tout événement un réel positif, et on a $P_A(\emptyset) = 0$

De plus, si $\{x\}$ est un événement élémentaire dans Ω, par définition de P_A, on a : si $x \notin$A, alors $P_A(\{x\}) = 0$.

Ainsi $\sum\limits_{x\in\Omega} P_A(\{x\}) = \sum\limits_{x\in A} P_A(\{x\}) = \sum\limits_{x\in A} \dfrac{P(\{x\})}{P(A)} = \dfrac{1}{P(A)} \sum\limits_{x\in A} P(\{x\}) = \dfrac{1}{P(A)} \times P(A) = 1$
On peut donc conclure que $P_A(B)$ est une probabilité sur Ω.

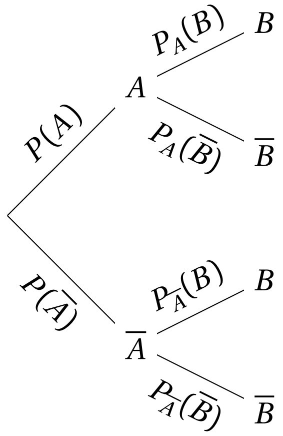
Propriété 5
Si A est un événement de probabilité non nul et B un événement quelconque dans l'univers Ω, on a :

1. $PA \cap B = P(A) \times P_A(B)$
2. Si A et B sont **incompatibles**, $P_A(B) = 0$
3. $P_A(A) = 1$
4. $P_A(\overline{B}) = 1 - P_A(B)$

Les démonstrations sont immédiates à partir de la définition de P_A.

II - Probabilités conditionnelles et arbre de pondéré

Pour modéliser une situation de probabilités conditionnelles, on utilise souvent un arbre pondéré dans lequel s'applique le principe multiplicatif qui découle de l'égalité : $PA \cap B = P(A) \times P_A(B)$.
Si par exemple dans une expérience aléatoire on considère la réalisation ou non d'un événement A puis la réalisation d'un autre événement B alors on peut représenter la situation par l'arbre ci-dessous.
Les probabilités figurant sur les sous branches sont des probabilités conditionnelles.



III - Formule des probabilités totales

Théorème 6
Soient A_1, A_2 $\cdots$ A_n des événements formant une partition de Ω et B un événement quelconque de Ω. On a :

$$P(B) = P(A_1) \times P_{A_1}(B) + P(A_2) \times P_{A_2}(B) + \cdots + P(A_n) \times P_{A_n}(B)$$

Démonstration
B est la réunion des événements $B \cap A_1$, $B \cap A_2$, $\cdots$ $B \cap A_n$, qui sont deux à deux disjoints. Ainsi :
P(B)= $P(B \cap A_1) + P(B \cap A_2) + \cdots + P(B \cap A_n)$
Or pour tout $i \in \{1; 2; \cdots; n\}$; $P(B \cap A_i) = P(A_i) \times P_{A_i}(B)$
D'où : $P(B) = P(A_1) \times P_{A_1}(B) + P(A_2) \times P_{A_2}(B) + \cdots + P(A_n) \times P_{A_n}(B)$

Un cas particulier très utilisé

$$P(B) = P(A) \times P(B/A) + P(\overline{A}) \times P\left(B/\overline{A}\right) \quad \text{(Voir arbre pondéré)}$$

IV - Indépendance deux événements

Définition 7
Soit P une probabilité sur un univers Ω.
On dit que **les événements A et B sont indépendants** si, $P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$

Exemple 8
Dans le lancer d'un dé équilibré à six faces, les événements A : « le résultat est pair » et B : « le résultat est 2 » ne sont pas indépendants.
En effet $P(A \cap B) = \dfrac{1}{6}$ et $P(A) \times P(B) = \dfrac{1}{2} \times \dfrac{1}{6}$. Donc $P(A) \times P(B) \neq \dfrac{1}{6}$
Si C est l'événement : « le résultat est supérieur ou égal à 5 » , alors les événements A et C sont indépendants.

Propriété 9
On suppose P$(A) \neq 0$.
A et B sont indépendants si, et seulement si, $P_A(B) = P(B)$

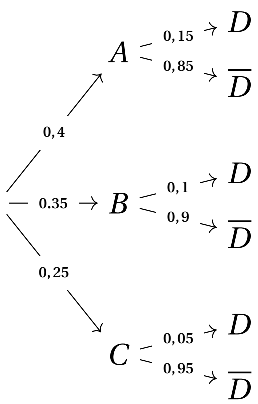
Démonstration
On suppose P$(A) \neq 0$. On alors $P(A \cap B) = P(A) \times P_A(B)$
A et B sont indépendants si, et seulement si : $P(A) \times P_A(B) = P(A) \times P(B)$
C'est-à-dire $P_A(B) = P(B)$, en simplifiant par P$(A) \neq 0$.

Exercice 10
Afin d'équiper les élèves des groupes scolaires de la commune, une municipalité achète auprès d'un grossiste des stylos-billes de trois marques différentes, A, B et C.
- 40% des stylos commandés sont de marques A, la moins chère ; parmi ces stylos, 15% sont défectueux.
- 35% des stylos commandés sont de marques B et 10% sont défectueux.
- 25% des stylos commandés sont de marques C et 5% sont défectueux.

On choisit hasard un stylo dans le stock de la municipalité.

1. Construire un arbre pondéré décrivant la situation étudiée.
2. Déterminer la probabilité que le stylo choisi soit défectueux.
3. Le stylo choisi est en bon état de fonctionnement. Quelle est la probabilité, au centième près, qu'il soit de marque C ?

Solution. 1. On construit un arbre pondéré dont les branches de premier niveau aboutissent aux événements A, B et C. En effet l'énoncé donne les probabilités de ces événements puis ensuite les probabilités conditionnelles sachant que l'un de ces événements est réalisé. On adopte les notations A (respectivement B, C) : « le stylo choisi est de marque A»,(respectivement B, C) ; D « le stylo choisi est défectueux».



2. Les événements A, B, C forment une partition de l'univers des choix possibles (en effet ils sont de probabilités non nulles, et incompatibles deux à deux car un stylo ne peut-être de deux marques différentes et leur réunion couvre tous les cas possibles). On peut donc appliquer la formule des probabilités totales pour calculer la probabilité P(D).

P(D)= $P(A)\times P_A(D)+P(B)\times P_B(D)+P(C)\times P_C(D)$

On obtient P(D)= $0,4\times 0,15+0,35\times 0,1+0,25\times 0,05=0,1075$

3. On cherche ici à calculer la probabilité $P_{\overline{D}}(C)$.
On applique la définition d'une probabilité conditionnelle.

$$P_{\overline{D}}(C)=\frac{P(\overline{D}\cap C)}{P(\overline{D})}$$

Le calcul de $P(\overline{D}\cap C)$ s'obtient en appliquant le principe multiplicatif dans la branche la plus basse de l''arbre pondéré construit à la question 1) $P(\overline{D} \cap C) = P(C) \times P_C(\overline{D}) = 0,95 \times 0,25$

Ainsi , $P(\overline{D} \cap C) = 0,2375$ et $\mathrm{P}_{\overline{D}}(C) = \dfrac{0,2375}{1-0,1075}$, soit $0,27$ au centième près.

$\square$