Fonction de raccordement

Recherche d'un ensemble de définition d'une fonction de raccordement

f_1 et f_2 sont deux fonctions numériques d'ensembles de définition respectifs D_1 et D_2.

Soit la fonction f définie par : $f(x) = \begin{cases} f_1(x) & \text{si } x < a \\ f_2(x) & \text{si } x \geq a \end{cases}$ $\quad a$ réel.

f_1 désigne la restriction de f à l'intervalle $]-\infty\,,\ a[$ et f_2 désigne la restriction de f à l'intervalle $[a\,,\ +\infty[$. On a alors :

$f(x)$ existe si et seulement si $\begin{cases} f_1(x) \text{ existe dans } \mathbb{R} \\ x < a \end{cases}$ ou $\begin{cases} f_2(x) \text{ existe dans } \mathbb{R} \\ x \geq a \end{cases}$

$f(x)$ existe si et seulement si $\begin{cases} x \in D_1 \\ x < a \end{cases}$ ou $\begin{cases} x \in D_2 \\ x \geq a \end{cases}$

$f(x)$ existe si et seulement si $\quad x \in D_1 \cap]-\infty\,,\ a[\quad$ ou $\quad x \in D_2 \cap [a\,,\ +\infty[$

On note S_1 l'ensemble des solutions du premier système et S_2 celui du second.
Finalement l'ensemble de définition de la fonction f est la **réunion** $S_1 \cup S_2$.

$$D_f = S_1 \cup S_2$$

Exemple 1

On considère la fonction f définie par : $f(x) = \begin{cases} \sqrt{x+4} & \text{si } \quad x \geq 2 \\ x + 3 - \dfrac{2}{x-1} & \text{si } \quad x < 2 \end{cases}$

Déterminons l'ensemble de définition de f.

Solution

$f(x)$ existe si et seulement si $\begin{cases} x + 4 \geq 0 \\ x \geq 2 \end{cases}$ ou $\begin{cases} x - 1 \neq 0 \\ x < 2 \end{cases}$

$f(x)$ existe si et seulement si $\begin{cases} x \geq -4 \\ x \geq 2 \end{cases}$ ou $\begin{cases} x \neq -1 \\ x < 2 \end{cases}$

$f(x)$ existe si et seulement si $x \geq 2$ $\quad$ ou $x \in]-\infty\,,\ -1[\cup]-1\,,\ 2[$
donc $f(x)$ existe si et seulement si $x \in]-\infty\,,\ -1[\cup]-1\,,\ 2[\cup [2\,,\ +\infty[$
D'où $D_f =]-\infty\,,\ -1[\cup]-1\,,\ +\infty[$