

158 Endomorphismes remarquables d'un espace vectoriel euclidien (de dimension finie).

Soit E un espace vectoriel sur \mathbb{R} de dimension finie n . On munit E d'un produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle$, qui en fait un **espace euclidien**. On note $\|\cdot\|$ la norme associée à ce produit scalaire.

I - Conséquences du caractère euclidien de E

1. Adjoint d'un endomorphisme

Lemme 1 (Théorème de représentation de Riesz).

[ROM21]
p. 718

$$\forall \varphi \in E^*, \exists ! a \in E \text{ tel que } \forall x \in E, \varphi(x) = \langle x, a \rangle$$

Théorème 2.

$$\forall u \in \mathcal{L}(E), \exists ! u^* \in \mathcal{L}(E) \text{ tel que } \forall x, y \in E, \langle u(x), y \rangle = \langle x, u^*(y) \rangle$$

Définition 3. Avec les notations du théorème précédent, on dit que u^* est l'**adjoint** de u .

Théorème 4. Soient $\mathcal{B} = (e_i)_{i \in I}$ une base de E et $G = (\langle e_i, e_j \rangle)_{i,j \in \llbracket 1, n \rrbracket}$ la matrice de Gram correspondante. Si $u \in \mathcal{L}(E)$ a pour matrice A dans la base \mathcal{B} , alors la matrice de u^* dans la base \mathcal{B} est

$$B = G^{-1t} A G$$

En particulier, si \mathcal{B} est orthonormée, on a $B = {}^t A$.

Proposition 5.

p. 748

$$\forall u \in \mathcal{L}(E), \| \| u \| \| = \| \| u^* \| \|$$

Il en résulte que l'application linéaire (cf. Proposition 6) $u \mapsto u^*$ est continue pour la norme $\| \cdot \|$ subordonnée à $\| \cdot \|$.

2. Propriétés de l'adjoint

Proposition 6 (Propriétés de $u \mapsto u^*$). Soient $u, v \in \mathcal{L}(E)$. On a :

p. 719

- (i) $\forall \lambda \in \mathbb{R}, (\lambda u + v)^* = \lambda u^* + v^*$.
- (ii) $(u^*)^* = u$.
- (iii) $(u \circ v)^* = v^* \circ u^*$.
- (iv) $u \in \text{GL}(E) \implies u^* \in \text{GL}(E)$, et $(u^*)^{-1} = (u^{-1})^*$.

Proposition 7 (Propriétés de l'endomorphisme adjoint). Soit $u \in \mathcal{L}(E)$. On a :

- (i) $\det(u^*) = \det(u)$.
- (ii) $\text{Ker}(u^*) = \text{Im}(u)^\perp$.
- (iii) $\text{Im}(u^*) = \text{Ker}(u)^\perp$.
- (iv) $\text{rang}(u^*) = \text{rang}(u)$.
- (v) Si F est un sous-espace vectoriel de E stable par u , alors F^\perp est stable par u^* .

Proposition 8. Soit $u \in \mathcal{L}(E)$.

p. 751

$$u = 0 \iff \text{trace}(u \circ u^*) = 0$$

II - Endomorphismes normaux

Définition 9. Un endomorphisme $u \in \mathcal{L}(E)$ est dit **normal** s'il est tel que $u \circ u^* = u^* \circ u$.

p. 743

Remarque 10. En désignant par $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ la matrice de $u \in \mathcal{L}(E)$ dans une base orthonormée, u est normal si et seulement si,

$${}^tAA = A^tA$$

ce qui se traduit en disant que la matrice A est normale.

Exemple 11. Les endomorphismes symétriques, anti-symétriques (Section III) et orthogonaux (Section IV) sont des endomorphismes normaux.

Proposition 12. $u \in \mathcal{L}(E)$ est normal si et seulement si $\|u(x)\| = \|u^*(x)\|$ pour tout $x \in E$ où $\|\cdot\|$ est une norme euclidienne.

p. 758

p. 743

Proposition 13. Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ un endomorphisme normal.

- (i) Si F est un sous-espace vectoriel de E stable par u , alors F^\perp est stable par u .
- (ii) Il existe un sous-espace vectoriel de E de dimension 1 ou 2 stable par u .

Proposition 14 (Réduction dans le cas $n = 2$). On suppose $n = 2$. Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ un endomorphisme normal.

- Si u a une valeur propre réelle : u est diagonalisable dans une base orthonormée.
- Sinon : il existe \mathcal{B} une base orthonormée de E telle que la matrice de u dans \mathcal{B} est

$$R(a, b) = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$$

avec $b \neq 0$.

Théorème 15 (Réduction des endomorphismes normaux). Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ un endomorphisme normal. Alors, il existe \mathcal{B} une base orthonormée de E telle que la matrice de u dans \mathcal{B} est

$$\begin{pmatrix} D_p & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & R(a_1, b_1) & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & R(a_2, b_2) & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & \dots & 0 & R(a_r, b_r) \end{pmatrix}$$

où D_p est diagonale d'ordre p et $R(a, b)$ est définie à la Proposition 14.

III - Endomorphismes symétriques

1. Définitions et propriétés

Définition 16. Un endomorphisme $u \in \mathcal{L}(E)$ est dit **symétrique** s'il est tel que $u^* = u$.

p. 732

Proposition 17. Un endomorphisme $u \in \mathcal{L}(E)$ est symétrique si et seulement si sa matrice dans une base orthonormée est symétrique.

Corollaire 18. $\mathcal{S}(E)$ est un sous-espace vectoriel de E de dimension $\frac{n(n+1)}{2}$.

Proposition 19. Si $u \in \mathcal{S}(E)$, alors $u^p \in \mathcal{S}(E)$ pour tout entier naturel p , et $v^* \circ u \circ v \in \mathcal{S}(E)$ pour tout $v \in \mathcal{L}(E)$.

Théorème 20 (Spectral). Tout endomorphisme symétrique $u \in \mathcal{S}(E)$ se diagonalise dans une base orthonormée.

Corollaire 21. Toute matrice symétrique réelle se diagonalise dans une base orthonormée.

2. Endomorphismes symétriques positifs

Définition 22. — Un endomorphisme $u \in \mathcal{L}(E)$ est dit **symétrique positif** (resp. **symétrique défini positif**) s'il est symétrique tel que $\langle x, u(x) \rangle \geq 0$ (resp. $\langle x, u(x) \rangle > 0$) pour tout $x \in E$. On note $\mathcal{S}^+(E)$ (resp. $\mathcal{S}^{++}(E)$) l'ensemble des endomorphismes symétriques positifs (resp. symétriques définis positifs).

— Une matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est dite **symétrique positive** (resp. **symétrique définie positive**) si elle est symétrique telle que $\langle x, Ax \rangle \geq 0$ (resp. $\langle x, Ax \rangle > 0$) pour tout $x \in E$. On note $\mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$ (resp. $\mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$) l'ensemble des matrices symétriques positives (resp. symétriques définies positives).

Théorème 23. Soit $u \in \mathcal{S}(E)$. Alors, $u \in \mathcal{S}^+(E)$ (resp. $u \in \mathcal{S}^{++}(E)$) si et seulement si toutes ses valeurs propres sont positives (resp. strictement positives).

Corollaire 24. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Alors, $A \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$ si et seulement s'il existe $B \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ telle que $A = {}^t B B$.

Exemple 25.

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} = P^{-1} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} P \text{ avec } P = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} \sqrt{2} & \sqrt{3} & 1 \\ \sqrt{2} & -\sqrt{3} & 1 \\ \sqrt{2} & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

p. 752

Lemme 26. Soit $M \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$. Alors,

$$\|M\| = \rho(M)$$

où ρ est l'application qui à une matrice y associe son rayon spectral.

[I-P]
p. 182

Théorème 27. L'application $\exp : \mathcal{S}_n(\mathbb{R}) \rightarrow \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ est un homéomorphisme.

[DEV]

3. Endomorphismes antisymétriques

Définition 28. Un endomorphisme $u \in \mathcal{L}(E)$ est dit **anti-symétrique** s'il est tel que $u^* = -u$.

[ROM21]
p. 718

Théorème 29. Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ un endomorphisme anti-symétrique. Alors, les valeurs propres de u sont imaginaires pures (éventuellement nulles) et il existe \mathcal{B} une base orthonormée de E telle que la matrice de u dans \mathcal{B} est

p. 746

$$\begin{pmatrix} D_p & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & R(0, b_1) & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & R(0, b_2) & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & \dots & 0 & R(0, b_r) \end{pmatrix}$$

où D_p est diagonale d'ordre p et $R(a, b)$ est définie à la Proposition 14.

IV - Endomorphismes orthogonaux

1. Le groupe orthogonal

Définition 30. Un endomorphisme $u \in \mathcal{L}(E)$ est dit **orthogonal** (ou est une **isométrie**) s'il est tel que $\langle u(x), u(y) \rangle = \langle x, y \rangle$ pour tout $x, y \in E$. On note $\mathcal{O}(E)$ l'ensemble des endomorphismes orthogonaux de E .

p. 720

Exemple 31. — Les seules homothéties qui sont des isométries sont $-\text{id}_E$ et id_E .
— Si $n = 1$, on a $\mathcal{O}(E) = \{\pm \text{id}_E\}$.

Proposition 32. Soit $u \in \mathcal{L}(E)$.

p. 743

$$u \in \mathcal{O}(E) \iff \forall x \in E, \|u(x)\| = \|x\| \iff u \in \text{GL}(E) \text{ et } u^{-1} = u^*$$

Théorème 33. Les isométries sont des automorphismes. Il en résulte que $\mathcal{O}(E)$ est un sous-groupe de $\text{GL}(E)$.

p. 721

Remarque 34. Ce n'est pas vrai en dimension infinie.

Théorème 35. Un endomorphisme de E est une isométrie si et seulement s'il transforme toute base orthonormée de E en une base orthonormée.

Théorème 36. Un endomorphisme de E est une isométrie si et seulement si sa matrice A dans une base orthonormée est inversible, d'inverse ${}^t A$.

On dit alors que A est **orthogonale**.

Notation 37. On note $\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ le groupe des matrices orthogonales.

Théorème 38.

$$\forall u \in \mathcal{O}(E), \det(u) = \pm 1$$

Remarque 39. On a des résultats équivalents pour les matrices.

Théorème 40 (Réduction des endomorphismes orthogonaux). Soit $u \in \mathcal{O}(E)$. Alors, il existe \mathcal{B} une base orthonormée de E telle que la matrice de u dans \mathcal{B} est

$$\begin{pmatrix} I_p & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & -I_q & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & R_1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & \dots & 0 & R_r \end{pmatrix}$$

où $R_i = R(\cos(\theta_i), \sin(\theta_i))$ avec $R(a, b)$ définie à la Proposition 14 et $\forall i \in \llbracket 1, r \rrbracket, \theta_i \in]0, 2\pi[$.

Lemme 41.

$$\forall A \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R}) \exists ! B \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R}) \text{ telle que } B^2 = A$$

[C-G]
p. 376

[DEV]

Théorème 42 (Décomposition polaire). L'application

$$\mu : \begin{array}{ccc} \mathcal{O}_n(\mathbb{R}) \times \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R}) & \rightarrow & \mathrm{GL}_n(\mathbb{R}) \\ (O, S) & \mapsto & OS \end{array}$$

est un homéomorphisme.

2. Étude en dimensions 2 et 3

Définition 43. On définit $\text{SO}(E) = \{u \in \mathcal{O}(E) \mid \det(u) = 1\}$ et $\text{SO}_n(\mathbb{R}) = \{A \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R}) \mid \det(A) = 1\}$

[GRI]
p. 241

Proposition 44. $\text{SO}(E)$ est un sous-groupe distingué de $\mathcal{O}(E)$ d'indice 2 (de même que $\text{SO}_n(\mathbb{R})$ dans $\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$).

[ROM21]
p. 724

Exemple 45.

$$\frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 2 & 2 & -1 \\ -1 & 2 & 2 \end{pmatrix} \in \text{SO}_3(\mathbb{R})$$

[GRI]
p. 241

Théorème 46. Soit $A \in \mathcal{O}_2(\mathbb{R})$. Alors :

— Si $A \in \text{SO}_2(\mathbb{R})$:

$$\exists \theta \in \mathbb{R} \text{ tel que } A = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}$$

(rotation d'angle θ).

— Si $A \notin \text{SO}_2(\mathbb{R})$:

$$\exists \theta \in \mathbb{R} \text{ tel que } A = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & \sin(\theta) \\ \sin(\theta) & -\cos(\theta) \end{pmatrix}$$

(symétrie orthogonale par rapport à la droite d'angle polaire $\frac{\theta}{2}$).

Théorème 47. On suppose $n = 3$. Soit $A \in \mathcal{O}_3(\mathbb{R})$ et u l'endomorphisme de E dont la matrice dans la base canonique est A . Alors, il existe \mathcal{B} une base orthonormée de E telle que la matrice de u dans \mathcal{B} est

$$\begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) & 0 \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) & 0 \\ 0 & 0 & \epsilon \end{pmatrix}$$

avec $\epsilon = \pm 1$. On note E_ϵ le sous-espace vectoriel associé à la valeur propre ϵ .

— Si $\epsilon = 1$: $f \in \text{SO}(E)$ est la rotation d'angle $2 \cos(\theta) + 1$ autour de l'axe E_1 .

— Si $\epsilon = -1$: $f \notin \text{SO}(E)$ est la composée de la rotation d'angle $2 \cos(\theta) - 1$ autour de l'axe E_{-1} avec la symétrie orthogonale par rapport à E_{-1}^\perp .

3. Propriétés topologiques

Proposition 48. $\mathcal{O}(E)$ est une partie compacte de $\mathcal{L}(E)$.

[ROM21]
p. 722

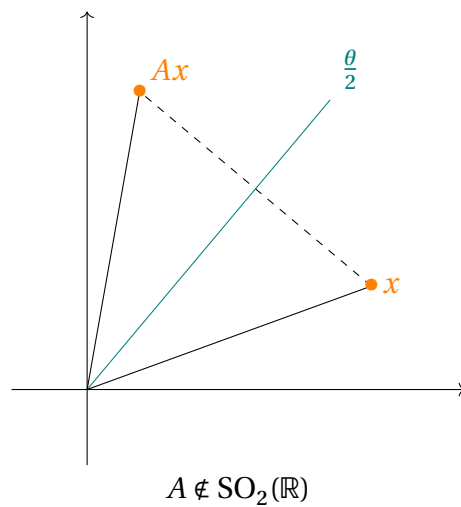
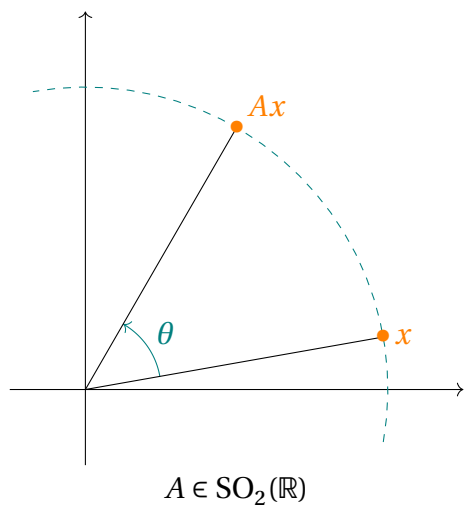
Proposition 49. $SO(E)$ est connexe dans $\mathcal{O}(E)$.

Corollaire 50. $\mathcal{O}(E)$ est non-connexe. Ses composantes connexes sont $SO(E)$ et $\{u \in \mathcal{O}(E) \mid \det(u) = -1\}$.

Proposition 51. Tout sous-groupe compact de $GL(E)$ qui contient $\mathcal{O}(E)$ est égal à $\mathcal{O}(E)$.

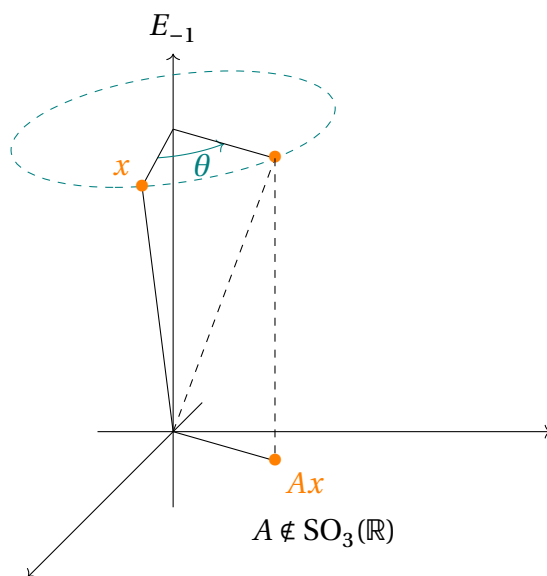
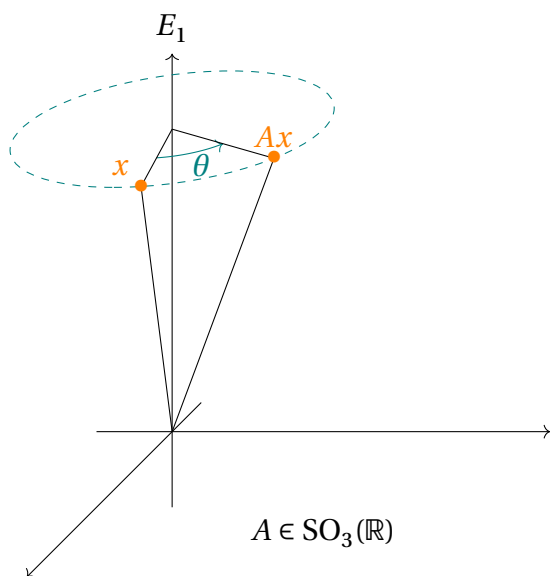
p. 756

Annexes



[GRI]
p. 242

FIGURE 1 – Le groupe $\mathcal{O}_2(\mathbb{R})$.



p. 244

FIGURE 2 – Le groupe $\mathcal{O}_3(\mathbb{R})$.

Bibliographie

Nouvelles histoires hédonistes de groupes et de géométries

[C-G]

Philippe CALDERO et Jérôme GERMONI. *Nouvelles histoires hédonistes de groupes et de géométries. Tome 1*. Calvage & Mounet, 13 mai 2017.

<http://www.calvage-et-mounet.fr/2022/05/09/nouvelles-histoires-hedoniste-de-groupes-et-de-geometrie/>.

Algèbre Linéaire

[GRI]

Joseph GRIFONE. *Algèbre Linéaire*. 6^e éd. Cépaduès, 9 jan. 2019.

<https://www.cephadues.com/livres/algebre-lineaire-edition-9782364936737.html>.

L'oral à l'agrégation de mathématiques

[I-P]

Lucas ISENMANN et Timothée PECATTE. *L'oral à l'agrégation de mathématiques. Une sélection de développements*. 2^e éd. Ellipses, 26 mars 2024.

<https://www.editions-ellipses.fr/accueil/15218-28346-loral-a-lagregation-de-mathematiques-une-selection-de-developpements-2e-edition-9782340086487.html>.

Mathématiques pour l'agrégation

[ROM21]

Jean-Étienne ROMBALDI. *Mathématiques pour l'agrégation. Algèbre et géométrie*. 2^e éd. De Boeck Supérieur, 20 avr. 2021.

<https://www.deboecksuperieur.com/ouvrage/9782807332201-mathematiques-pour-l-agregation-algebre-et-geometrie>.