26 La fonction exponentielle

Combien de grains de sable faudrait-il pour remplir l'univers ?
C'est à partir de cette question qu'Archimède définit le premier, au III$^{\text{eme}}$ siècle avant J.C, un phénomène que nous qualifions aujourd'hui d'exponentiel.
Toute fois c'est Leonhard Euler (1707- 1784) qui donna son nom à cette fonction et qui la relia à des phénomènes temporels.
C'est aujourd'hui une fonction que l'on retrouve dans tous les domaines de la modélisation, que ce soit pour prévoir l'évolution d'une population, comprendre la trajectoire d'une particule etc.
Par exemple une chaîne de lettres demande à la personne qui la reçoit de copier la lettre et de l'envoyer à quatre autres personnes. Supposant que personne ne brise la chaîne, dresser un tableau de valeurs qui montre le nombre de lettres dans la chaîne à chaque stade, à six stades. La situation peut-être représentée une fonction exponentielle.

La fonction $\begin{array}{rccl} \ln : &]0\,,\,+\infty[& \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & \ln x \end{array}$ est bijective
Elle admet donc une bijection réciproque de $\mathbb{R}$ vers $]0\,,\,+\infty[$.

I - Définition et propriétés

Définition 1
On appelle fonction exponentielle, notée exp, la bijection réciproque de la fonction logarithme népérien.

On a donc $\begin{array}{rccl} \exp : & \mathbb{R} & \longrightarrow &]0\,,\,+\infty[\\ & x & \longmapsto & \exp(x) \end{array}$

Notation 2
Pour tout x réel quelconque, le nombre $\exp(x)$ se note e^x, ce qui se lit « e puissance x».

$\boxed{\exp(x) = \mathrm{e}^x}$ où e est le nombre d'Euler étudié dans la leçon sur la fonction $\ln$.

Exemple 3 (Calcul à l'aide de la calculatrice)

x	-3	-1	0	0.2	0.5	1	2	8	10	15
e^x	0,049	0,36	1	1,22	1,64	2,718	7,38	2980,95	22026,46	3269017,37

Conséquence 4
- Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\mathrm{e}^x > 0$
- $\mathrm{e}^0 = 1$
- $\mathrm{e}^1 = \mathrm{e}$
- Pour tout $x > 0$, $\mathrm{e}^{\ln x} = x$

- Pour tout $y \in \mathbb{R}$, $\ln(e^y) = y$
- exp est continue et dérivable sur $\mathbb{R}$.

$\boxed{\text{Pour tout réel } X \text{ strictement positif } \ln X = Y \text{ si et seulement si } X = e^Y.}$

Propriété 5
La fonction exp est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

- $e^a = e^b$ équivaut à $a = b$
- $e^a > e^b$ équivaut à $a > b$

Propriété 6
Pour tous a et b réels :

- $e^{a+b} = e^a e^b$
- $e^{a-b} = \dfrac{e^a}{e^b}$
- $e^{-a} = \dfrac{1}{e^a}$
- $(e^a)^r = e^{ra}, \quad r \in \mathbb{Q}$

Exemple 7
- $e^x(1 + 2e^{-x}) = e^x + 2e^x e^{-x} = e^x + 2$
- $\dfrac{e^{2x}}{e^{3x}} = e^{2x-3x} = e^{-x}$
- $\dfrac{e^{x+2}}{e^{x+1}} = e^{(x+2)-(x+1)} = e^1 = e$
- $(e^x + e^{-x})^2 = (e^x)^2 + 2 \times e^x e^{-x} + (e^{-x})^2 = e^{2x} + 2 + e^{-2x}$

II - Étude et représentation graphique

Propriété 8 (Dérivée)
La fonction exponentielle est dérivable sur $\mathbb{R}$ et est égale à sa propre dérivée :

$(e^x)' = e^x \quad$ pour tout $x \in \mathbb{R}$

Limites
Aux bornes de l'ensemble de définition de la fonction exp, on obtient les limites suivantes :

Propriété 9
- $\lim\limits_{x \to +\infty} e^x = +\infty$
- $\lim\limits_{x \to -\infty} e^x = 0$

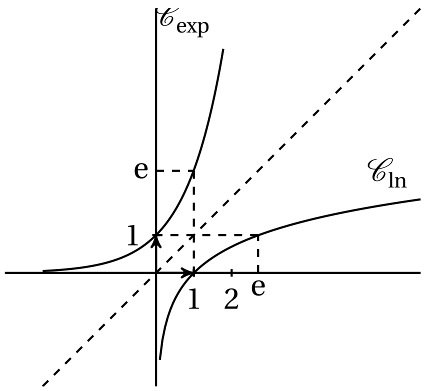
Tableau de variation

x	$-\infty \quad +\infty$
$(e^x)'$	$+$
e^x	$0 \nearrow +\infty$

La droite d'équation $y = 0$ c'est-à-dire l'axe des abscisses est une asymptote à la courbe de la fonction exp en $-\infty$.

Représentation graphique de la fonction exp

Les courbes de la fonction exp et de la fonction ln sont symétriques par rapport à la première bissectrice du repère.



Quelques limites classiques

Propriété 10

- $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{e^x}{x} = +\infty$
- $\lim\limits_{x \to -\infty} x e^x = 0$
- $\lim\limits_{x \to +\infty} x e^{-x} = 0$

III - Equations -Inéquations - Systèmes avec exp

Equations comportant exp

Méthode

Pour résoudre une équation comportant des exponentielles,

- on détermine le domaine D de résolution ;
- on transforme si possible l'équation sous la forme $e^A = e^B$;
- on résout l'équation $A = B$;
- puis on retient que les solutions appartenant à D.

Exemple 11

Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation : $e^{3x-2} - e^{x^2} = 0$

Solution. L'équation est définie pour tout x réel . Ainsi D= $\mathbb{R}$.
L'équation devient $e^{3x-2} = e^{x^2}$ ce qui équivaut à $3x-2 = x^2$ soit $x^2 - 3x + 2 = 0$ dont les solutions sont 1 et 2 .
Donc S= $\{1, 2\}$ □

Exemple 12
Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation : $e^{\frac{2x+1}{x+5}} = 1$

Solution. L'équation est définie lorsque $x \neq -5$.
Ainsi D= $\mathbb{R} \setminus \{-5\}$.
L'équation devient $e^{\frac{2x+1}{x+5}} = e^0$
Ce qui équivaut à $\dfrac{2x+1}{x+5} = 0$ soit $x = -\frac{1}{2}$ Donc S= $\left\{-\frac{1}{2}\right\}$ □

Equations du type $ae^{2x} + be^x + c = 0$
Poser $e^x = X$ puis résoudre l'équation E du second degré $aX^2 + bX + c = 0$ ensuite les équations $e^x = X_1$ et $e^x = X_2$ où X_1 et X_2 sont les solutions de E.

Exemple 13
Résolvons dans $\mathbb{R}$ l'équation : $e^{2x} + e^x - 2 = 0$.
Pour $x \in \mathbb{R}$, posons $e^x = X$, l'équation devient $X^2 + X - 2 = 0$ d'où $X = 1$ ou $X = -2$.
Ainsi $e^x = 1 \iff x = \ln 1 = 0$ et $e^x = -2$ est impossible car la fonction exp est strictement positive.
Donc S= $\{0\}$.

Inéquation comportant exp
Méthode
Pour résoudre une inéquation comportant des exponentielles,

- on détermine le domaine D de résolution ;
- on transforme si possible l'inéquation sous la forme $e^A > e^B$ ou $e^A \leq e^B$;
- puis on résout l'inéquation $A > B$ ou $A \leq B$;
- et afin on retient que les solutions appartenant à D.

Exemple 14
Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation : $e^{2x-3} - e^x < 0$

Solution. L'inéquation devient $e^{2x-3} < e^x$ ce qui équivaut à $2x - 3 < x$ soit $x < 3$.
Donc S= $]-\infty\,,\,3[$. □

Exemple 15
Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation : $e^{-x^2-6} - e^{5x} \geq 0$

Solution. L'inéquation devient $e^{-x^2-6} \geq e^{5x}$

Ce qui équivaut à $-x^2-6 \geq 5x$ soit $-x^2-5x-6 \geq 0$.

x	$-\infty$		-3		-2		$+\infty$
$-x^2-5x-6$		$-$	|	$+$	|	$-$	

Donc S= $[-3\ ,\ -2]$ $\square$

Exemple 16
Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation : $e^{2x}-5e^x+6 \leq 0$

Solution. Pour $x \in \mathbb{R}$, en posant $e^x = X$, l'inéquation devient $X^2-5X+6 \leq 0$

X	$-\infty$		2		3		$+\infty$
X^2-5X-6		$+$		$-$		$+$	

Donc $X \in [2\ ,\ 3]$ équivaut à $e^x \in [2\ ,\ 3]$ équivaut à $x \in \left[e^2\ ,\ e^3\right]$. Donc S= $\left[e^2\ ,\ e^3\right]$. $\square$

Systèmes d'équations comportant exp
La méthode générale consiste à faire un changement de variable.

Exemple 17
Résolvons le système suivant.

$$\begin{cases} 2e^x+3e^y = 14 \\ 5e^x-e^y = 18 \end{cases}$$

Le système est défini pour x et y réels .

En posant $X = e^x$ et $Y = e^y$, le système devient : $\begin{cases} 2X+3Y = 14 \\ 5X-Y = 18 \end{cases}$

En utilisant la méthode d'addition par exemple , on trouve $X = 4$ et $Y = 2$.

Puis $e^x = 4 \iff x = \ln 4$ et $e^y = 2 \iff y = \ln 2$

D'où S= $\{(\ln 4, \ln 2), (\ln 2, \ln 4)\}$

Exemple 18
Résolvons le système suivant.

$$\begin{cases} e^{x+y} = 12 \\ e^x+e^y = 8 \end{cases}$$

Le système est défini pour x et y réels .

On peut réécrire le système sous la forme :

$\begin{cases} e^x \times e^y = 12 \\ e^x+e^y = 8 \end{cases}$ et en posant $e^x = X$ et $e^y = Y$ on obtient : $\begin{cases} XY = 12 \\ X+Y = 8 \end{cases}$

Ainsi les réels X et Y vérifient l'équation du second degré $t^2-8t+12 = 0$

On trouve $t_1 = 2$ et $t_2 = 6$.

Ainsi $e^x = 2$ et $e^y = 6$ c'est-à-dire $x = \ln 2$ et $y = \ln 6$.

d'où S= $\{(\ln 2, \ln 6), (\ln 6, \ln 2)\}$

IV - Etude de fonctions faisant intervenir exp

Soit u une fonction définie sur un intervalle I.

On considère la fonction f définie pour tout $x \in I$ par : $f(x) = e^{u(x)}$.

Domaine de définition

$f(x)$ existe si et seulement si $u(x)$ existe.

Exemple 19

- $f(x) = e^{x^2-2x}$ existe si et seulement si $x^2 - 2x$ existe.

$Df = \mathbb{R}$

- $f(x) = e^{\frac{x+1}{x-2}}$ existe si et seulement si $x \neq 2$ existe.

$Df = \mathbb{R} \setminus \{2\}$

Remarque 20

• Attention le domaine de définition de e^u n'est pas forcément celui de la fonction e^x de la définition initiale.

Limites

Propriété 21

- Si u tend vers L alors e^u tend vers e^L.
- Si u tend vers $+\infty$ alors e^u tend vers $+\infty$.
- Si u tend vers $-\infty$ alors e^u tend vers 0.

Exemple 22

- $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x+1}{x} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x}{x} = 1$ donc $\lim\limits_{x\to+\infty} e^{\dfrac{x+1}{x}} = e^1 = e$
- $\lim\limits_{x\to-\infty} -x = +\infty$ donc $\lim\limits_{x\to-\infty} e^{-x} = +\infty$
- $\lim\limits_{x\to1} x - 1 = 0$ donc $\lim\limits_{x\to1} e^{x-1} = e^0 = 1$

Dérivée

Théorème 23

• Si u est une fonction dérivable sur un intervalle I alors la fonction e^u est dérivable sur I et on a :

$(e^u)' = u'e^u$

Ainsi le signe de la dérivée dépend de celui de u' car e^u est strictement positif.

Exemple 24

• La fonction $x \longmapsto 2x-1$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ donc la fonction $f: x \longmapsto e^{2x-1}$ est dérivable sur $\mathbb{R}$

et pour tout $x \in \mathbb{R}$, et on a : $f'(x) = 2e^{2x-1}$.

• Soit f la fonction définie par $f(x) = e^{x^2+3x-4}$.
On a $f'(x) = (2x+3)e^{x^2+3x-4}$ pour tout x réel.

• Soit f la fonction définie par $f(x) = e^{\frac{2x+3}{4x+8}}$.
On a $f'(x) = \left(\frac{2x+3}{4x+8}\right)' e^{\frac{2x+3}{4x+8}}$ pour tout $x \neq -2$ réel.

Soit $f'(x) = \frac{4}{(4x+8)^2} e^{\frac{2x+3}{4x+8}}$ pour tout $x \neq -2$ réel.