

## 244 Exemples d'études et d'applications de fonctions usuelles et spéciales.

### I - La fonction exponentielle

#### 1. Dans le champ complexe

**Définition 1.** On définit la fonction **exponentielle complexe** pour tout  $z \in \mathbb{C}$  par

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{n!}$$

on note cette somme  $e^z$  ou parfois  $\exp(z)$ .

[QUE]  
p. 4

*Remarque 2.* Cette somme est bien définie pour tout  $z \in \mathbb{C}$  d'après le critère de d'Alembert.

- Proposition 3.** (i)  $\forall z, z' \in \mathbb{C}, e^{z+z'} = e^z e^{z'}$ .  
 (ii)  $\exp$  est holomorphe sur  $\mathbb{C}$ , de dérivée elle-même.  
 (iii)  $\exp$  ne s'annule jamais.  
 (iv)  $|\exp(z)| = \exp(\operatorname{Re}(z))$  pour tout  $z \in \mathbb{C}$ .

**Proposition 4.** La fonction  $\varphi : t \mapsto e^{it}$  est un morphisme surjectif de  $\mathbb{R}$  sur  $\mathbb{U}$ .

**Proposition 5.** En reprenant les notations précédentes,  $\operatorname{Ker}(\varphi)$  est un sous-groupe fermé de  $\mathbb{R}$ , de la forme  $\operatorname{Ker}(\varphi) = a\mathbb{Z}$ . On note  $a = 2\pi$ .

**Application 6.** Pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ , il y a  $n$  racines  $n$ -ièmes de l'unité, données par

$$e^{\frac{2ik\pi}{n}} = \cos\left(\frac{2ik\pi}{n}\right) + i \sin\left(\frac{2ik\pi}{n}\right)$$

où  $k$  parcourt les entiers de 0 à  $n-1$ .

[R-R]  
p. 259

**Corollaire 7.** Tout nombre complexe non nul  $\alpha$  écrit  $\alpha = r e^{i\theta}$  admet exactement  $n$  racines  $n$ -ièmes données par

$$\sqrt[n]{r} e^{i\frac{\theta}{n}} e^{\frac{2ik\pi}{n}}$$

où  $k$  parcourt les entiers de 0 à  $n-1$ .

## 2. Dans le champ réel

**Définition 8.** On a plusieurs définitions (équivalentes) de la fonction exponentielle réelle.

- **Vision “moderne”** : Soit  $x \in \mathbb{R}$ .  $\exp(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!}$  (restriction de la série entière de la Définition 1).
- **Vision “pédagogique”** :  $\exp$  est l'unique solution au problème de Cauchy

$$\begin{cases} y' = y \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

- **Vision “historique”** : Soit  $x \in \mathbb{R}$ .  $\exp(x) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n$ .

[D-L]  
p. 528

**Théorème 9.** (i)  $\exp$  est une bijection croissante de  $\mathbb{R}$  sur  $\mathbb{R}_*^+$ .

(ii)  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \exp(x) = 0$  et  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \exp(x) = +\infty$ .

(iii)  $x < 0 \iff \exp(x) < 1$ .

[QUE]  
p. 6

## 3. Fonctions trigonométriques

**Définition 10.** On définit les fonctions  $\sin$  et  $\cos$  sur  $\mathbb{R}$  par

$$\forall t \in \mathbb{R}, \sin(t) = \operatorname{Im}(\exp(it)) \text{ et } \cos(t) = \operatorname{Re}(\exp(it))$$

**Proposition 11.** Soit  $t \in \mathbb{R}$ .

- (i)  $\sin(t) = \frac{e^{it} - e^{-it}}{2i} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{t^{2n+1}}{(2n+1)!}$ .
- (ii)  $\cos(t) = \frac{e^{it} + e^{-it}}{2} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{t^{2n}}{(2n)!}$ .
- (iii) Ces fonctions sont réelles,  $2\pi$ -périodiques et admettent un développement en série entière de rayon de convergence infini. Ceci permet de les prolonger de manière unique sur tout le plan complexe.
- (iv)  $\sin$  et  $\cos$  sont dérivables avec  $\cos' = -\sin$  et  $\sin' = \cos$ .
- (v)  $\cos$  est paire,  $\sin$  est impaire.

[DAN]  
p. 352

**Proposition 12.** L'application

$$\exp(i\theta) \mapsto \begin{pmatrix} \cos(\theta) & \sin(\theta) \\ -\sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}$$

définit un isomorphisme de  $\mathbb{U}$  dans  $\operatorname{SO}_2(\mathbb{R})$ .

[ROM21]  
p. 36

## 4. Polynômes trigonométriques

**Définition 13.** — On appelle **polynôme trigonométrique** de degré inférieur à  $N \in \mathbb{N}$  toute fonction de la forme  $x \mapsto \sum_{n=-N}^N c_n e^{inx}$  avec  $\forall n \in \llbracket -N, N \rrbracket, c_n \in \mathbb{C}$ .

[GOU20]  
p. 268

— On appelle **série trigonométrique** une série de fonctions de la variable réelle  $x$  et de la forme  $c_n + \sum_{n \in \mathbb{N}^*} (c_n e^{inx} + c_{-n} e^{-inx})$ , notée  $\sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n e^{inx}$ .

**Exemple 14.** — Pour tout  $N \in \mathbb{N}$ , la fonction  $D_N = \sum_{n=-N}^N e_N$  est appelée **noyau de Dirichlet** d'ordre  $N$ .

[AMR08]  
p. 184

— Pour tout  $N \in \mathbb{N}$ , la fonction  $K_N = \frac{1}{N} \sum_{j=0}^{N-1} D_j$  est appelé **noyau de Fejér** d'ordre  $N$ .

**Théorème 15 (Fejér).** Soit  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$  une fonction  $2\pi$ -périodique.

p. 190

- (i) Si  $f$  est continue, alors  $\|\sigma_N(f)\|_\infty \leq \|f\|_\infty$  et  $(\sigma_N(f))$  converge uniformément vers  $f$ .
- (ii) Si  $f \in L_p^{2\pi}$  pour  $p \in [1, +\infty[$ , alors  $\|\sigma_N(f)\|_p \leq \|f\|_p$  et  $(\sigma_N(f))$  converge vers  $f$  pour  $\|\cdot\|_p$ .

**Corollaire 16.** L'espace des polynômes trigonométriques  $\{\sum_{n=-N}^N c_n e_n \mid (c_n) \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}, N \in \mathbb{N}\}$  est dense dans l'espace des fonction continues  $2\pi$ -périodiques pour  $\|\cdot\|_\infty$  et est dense dans  $L_p^{2\pi}$  pour  $\|\cdot\|_p$  avec  $p \in [1, +\infty[$ .

**Théorème 17 (Dirichlet).** Soient  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$   $2\pi$ -périodique, continue par morceaux sur  $\mathbb{R}$  et  $t_0 \in \mathbb{R}$  tels que la fonction

[GOU20]  
p. 271

$$h \mapsto \frac{f(t_0 + h) + f(t_0 - h) - f(t_0^+) - f(t_0^-)}{h}$$

est bornée au voisinage de 0. Alors,

$$S_N(f)(t_0) \xrightarrow{N \rightarrow +\infty} \frac{f(t_0^+) + f(t_0^-)}{2}$$

**Contre-exemple 18.** Soit  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  paire,  $2\pi$ -périodique telle que :

$$\forall x \in [0, \pi], f(x) = \sum_{p=1}^{+\infty} \frac{1}{p^2} \sin\left((2^{p^3} + 1) \frac{x}{2}\right)$$

Alors  $f$  est bien définie et continue sur  $\mathbb{R}$ . Cependant, sa série de Fourier diverge en 0.

**Corollaire 19.** Soient  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$   $2\pi$ -périodique,  $\mathcal{C}^1$  par morceaux sur  $\mathbb{R}$ . Alors,

$$\forall x \in \mathbb{R}, S_N(f)(x) \xrightarrow{N \rightarrow +\infty} \frac{f(x^+) + f(x^-)}{2}$$

En particulier, si  $f$  est continue en  $x$ , la série de Fourier de  $f$  converge vers  $f(x)$ .

**Exemple 20.** On considère  $f : x \mapsto 1 - \frac{x^2}{\pi^2}$  sur  $[-\pi, \pi]$ . Alors,

$$\forall x \in [-\pi, \pi], f(x) = \frac{2}{3} - \frac{4}{\pi^2} \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{\cos(nx)}{n^2}$$

**Théorème 21** (Formule sommatoire de Poisson). Soit  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$  une fonction de classe  $\mathcal{C}^1$  telle que  $f(x) = O\left(\frac{1}{x^2}\right)$  et  $f'(x) = O\left(\frac{1}{x^2}\right)$  quand  $|x| \rightarrow +\infty$ . Alors :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \sum_{n \in \mathbb{Z}} f(x+n) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \hat{f}(2\pi n) e^{2i\pi n x}$$

p. 284

**Application 22** (Identité de Jacobi).

$$\forall s > 0, \sum_{n=-\infty}^{+\infty} e^{-\pi n^2 s} = \frac{1}{\sqrt{s}} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{\pi n^2}{s}}$$

## II - Logarithmes

### 1. Logarithme dans le champ réel

**Proposition 23.**  $\exp$  réalise une bijection strictement croissante de  $\mathbb{R}$  sur  $\mathbb{R}_*^+$ .

[DAN]  
p. 346

**Définition 24.** La bijection réciproque de  $\exp : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_*^+$  est appelée **logarithme népérien** et est notée  $\ln$ .

**Théorème 25.** (i)  $\forall x \in \mathbb{R}_*^+, \ln(x) = \int_1^x \frac{1}{x} dx$ .

(ii)  $\forall x, y \in \mathbb{R}_*^+, \ln(xy) = \ln(x) + \ln(y)$ .

**Remarque 26.** La fonction  $\ln$  permet de définir la mise à la puissance par un réel :

$$\forall t \in \mathbb{R}_*^+, \forall \alpha \in \mathbb{R}, t^\alpha = e^{\alpha \ln(t)}$$

## 2. Logarithmes dans le champ complexe

**Théorème 27.** Soient  $\alpha \in \mathbb{R}$  et  $\Omega_\alpha = \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}^* e^{i\alpha}$ . Alors, il existe une fonction  $L_\alpha$  holomorphe sur  $\Omega_\alpha$ . Elle vérifie :

- (i)  $e^{L_\alpha(z)} = z$  pour tout  $z \in \Omega_\alpha$ .
- (ii)  $L_\alpha(z) = \ln(|z|) + i\theta_\alpha(z)$  avec  $\theta_\alpha \in ]\alpha, \alpha + 2\pi[$ .
- (iii)  $L_\alpha$  est dérivable dans  $\Omega_\alpha$  avec  $L'_\alpha(z) = \frac{1}{z}$  pour tout  $z \in \Omega_\alpha$ .

[QUE]  
p. 81

**Définition 28.** La fonction  $L_\alpha$  précédente est appelée **détermination d'ordre  $\alpha$**  (ou **détermination principale** si  $\alpha = -\pi$ ) du logarithme.

**Théorème 29.** On pose  $D = D(0, 1)$  et on définit  $\ell : D \rightarrow \mathbb{C}$  par  $\ell : z \mapsto \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n+1} \frac{z^n}{n}$ . Alors :

- (i)  $1 + z = \exp(\ell(z))$  pour tout  $z \in D$ .
- (ii)  $\ell(z) = L_{-\pi}(1 + z)$  pour tout  $z \in D$ .

## III - La fonction $\Gamma$ d'Euler

### 1. Définition

**Définition 30.** On pose

$$\forall x > 0, \Gamma(x) = \int_0^{+\infty} e^{-t} t^{x-1} dt$$

[GOU20]  
p. 162

**Proposition 31.** (i)  $\Gamma$  est  $\mathcal{C}^\infty$  sur  $]0, +\infty[$  et pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ , on a

$$\forall x \in \mathbb{R}_*^+, \Gamma^{(n)}(x) = \int_0^{+\infty} (\ln(t))^n e^{-t} t^{x-1} dt$$

- (ii)  $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$ .
- (iii)  $\forall x > 0, \Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$  et en particulier,  $\forall n \in \mathbb{N}, \Gamma(n) = n!$ .

**Lemme 32.** La fonction  $\Gamma$  définie pour tout  $x > 0$  par  $\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} t^{x-1} e^{-t} dt$  vérifie :

- (i)  $\forall x \in \mathbb{R}_*^+, \Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$ .
- (ii)  $\Gamma(1) = 1$ .
- (iii)  $\Gamma$  est log-convexe sur  $\mathbb{R}_*^+$ .

[ROM19-1]  
p. 364

**Théorème 33** (Bohr-Mollerup). Soit  $f : \mathbb{R}_*^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$  vérifiant le Point (i), Point (ii) et Point (iii) du Lemme 32. Alors  $f = \Gamma$ .

*Remarque 34.* À la fin de la preuve, on obtient une formule due à Gauss :

$$\forall x \in ]0, 1], \Gamma(x) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n^x n!}{(x+n) \dots (x+1)x}$$

que l'on peut aisément étendre à  $\mathbb{R}_*^+$  entier.

**Lemme 35.** Soient  $X$  et  $Y$  deux variables aléatoires indépendantes telles que  $X \sim \Gamma(a, \gamma)$  et  $Y \sim \Gamma(b, \gamma)$ . Alors  $Z = X + Y \sim \Gamma(a + b, \gamma)$ .

[G-K]  
p. 180

**Application 36** (Formule de Stirling).

$$n! \sim \sqrt{2n\pi} \left(\frac{n}{e}\right)^n$$

p. 556

## 2. Prolongement complexe

On suppose ici que  $E$  est un ouvert  $\Omega$  de  $\mathbb{C}$ .

[Z-Q]  
p. 314

**Théorème 37** (Holomorphie sous le signe intégral). On suppose :

- (i)  $\forall z \in \Omega, x \mapsto f(z, x) \in L_1(X)$ .
- (ii) pp. en  $x \in X, z \mapsto f(z, x)$  est holomorphe dans  $\Omega$ . On notera  $\frac{\partial f}{\partial z}$  cette dérivée définie presque partout.
- (iii)  $\forall K \subseteq \Omega$  compact,  $\exists g_K \in L_1(X)$  positive telle que

$$|f(x, z)| \leq g_K(x) \quad \forall z \in K, \text{ pp. en } x$$

Alors  $F$  est holomorphe dans  $\Omega$  avec

$$\forall z \in \Omega, F'(z) = \int_X \frac{\partial f}{\partial z}(z, t) d\mu(z)$$

**Exemple 38.** La fonction  $\Gamma$  est holomorphe dans l'ouvert  $\{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Re}(z) > 0\}$ .

p. 318

**Théorème 39.** On peut prolonger  $\Gamma$  en une fonction holomorphe non nulle sur  $\mathbb{C} \setminus -\mathbb{N}$ .

[QUE]  
p. 255

**Théorème 40** (Formule des compléments).

$$\forall z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}, \Gamma(z)\Gamma(1-z) = \frac{\pi}{\sin(\pi z)}$$

## IV - La fonction $\zeta$ de Riemann

### 1. Définition

**Définition 41.** Pour tout  $s > 1$ , on pose

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^s}$$

[GOU20]  
p. 302

**Proposition 42.**  $\zeta$  définit une fonction de classe  $\mathcal{C}^\infty$  sur  $]1, +\infty[$  et,

$$\forall p \in \mathbb{N}^*, \forall s \in ]1, +\infty[, \zeta^{(p)}(s) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\ln(n)^p}{n^s}$$

**Proposition 43.**

$$\lim_{s \rightarrow +\infty} \zeta(s) = 1 \text{ et } \zeta(s) \sim_{1+} \frac{1}{s-1} + \gamma + o(1)$$

où  $\gamma$  désigne la constante d'Euler.

**Proposition 44.**

$$\forall s > 1, \zeta(s)\Gamma(s) = \int_0^{+\infty} t^{s-1} \frac{e^{-t}}{1-e^{-t}} dt$$

[G-K]  
p. 108

### 2. Prolongement complexe

**Proposition 45.** On prolonge la définition de  $\zeta$  donnée à la Définition 41 en posant

$$\zeta : \begin{array}{ccc} \{s \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Re}(s) > 0\} & \mapsto & \mathbb{C} \\ s & \mapsto & \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^s} \end{array}$$

[Z-Q]  
p. 20

**Proposition 46.**  $\zeta$  est holomorphe sur  $\{s \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Re}(s) > 1\}$ .

**Théorème 47.** Il existe une fonction  $\tilde{\zeta}$ , holomorphe dans  $\mathbb{C} \setminus \{1\}$  telle que :

(i) Pour tout  $s \in \mathbb{C} \setminus \{1\}$ ,  $\tilde{\zeta}(s) = \frac{1}{s-1} + \eta(s)$  avec  $\eta$  holomorphe dans  $\mathbb{C}$ .

p. 28

- (ii) Pour tout  $s \in \mathbb{C}$  tel que  $\operatorname{Re}(s) > 1$ ,  $\tilde{\zeta}(s) = \zeta(s)$ .
- (iii) En posant  $I(s) = \pi^{\frac{s}{2}} \Gamma\left(\frac{s}{2}\right) \zeta(s)$ , on a  $I(s) = I(1-s)$ .



# Bibliographie

## Analyse de Fourier dans les espaces fonctionnels

[AMR08]

Mohammed EL-AMRANI. *Analyse de Fourier dans les espaces fonctionnels. Niveau M1*. Ellipses, 28 août 2008.

<https://www.editions-ellipses.fr/accueil/3908-14232-analyse-de-fourier-dans-les-espaces-fonctionnels-niveau-m1-9782729839031.html>.

## Mathématiques pour l'agrégation

[DAN]

Jean-François DANTZER. *Mathématiques pour l'agrégation. Analyse et probabilités*. De Boeck Supérieur, 20 avr. 2021.

<https://www.deboecksuperieur.com/ouvrage/9782807332904-mathematiques-pour-l-agregation-analyse-et-probabilites>.

## Leçons pour l'agrégation de mathématiques

[D-L]

Maximilien DREVETON et Joachim LHABOUZ. *Leçons pour l'agrégation de mathématiques. Préparation à l'oral*. Ellipses, 28 mai 2019.

<https://www.editions-ellipses.fr/accueil/3543-13866-lecons-pour-lagregation-de-mathematiques-preparation-a-loral-9782340030183.html>.

## De l'intégration aux probabilités

[G-K]

Olivier GARET et Aline KURTZMANN. *De l'intégration aux probabilités*. 2<sup>e</sup> éd. Ellipses, 28 mai 2019.

<https://www.editions-ellipses.fr/accueil/4593-14919-de-l-integration-aux-probabilites-2e-edition-augmentee-9782340030206.html>.

## Les maths en tête

[GOU20]

Xavier GOURDON. *Les maths en tête. Analyse*. 3<sup>e</sup> éd. Ellipses, 21 avr. 2020.

<https://www.editions-ellipses.fr/accueil/10446-les-maths-en-tete-analyse-3e-edition-9782340038561.html>.

## Analyse complexe et applications

[QUE]

Martine QUEFFÉLLEC et Hervé QUEFFÉLEC. *Analyse complexe et applications. Nouveau tirage*. Calvage & Mounet, 13 mai 2017.

<http://www.calvage-et-mounet.fr/2022/05/09/analyse-complexe-et-applications/>.

## Formulaire de maths

[R-R]

Olivier RODOT et Jean-Étienne ROMBALDI. *Formulaire de maths. Avec résumés de cours*. De Boeck Supérieur, 30 août 2022.

<https://www.deboecksuperieur.com/ouvrage/9782807339880-formulaire-de-maths>.

## **Éléments d'analyse réelle**

**[ROM19-1]**

Jean-Étienne ROMBALDI. *Éléments d'analyse réelle*. 2<sup>e</sup> éd. EDP Sciences, 6 juin 2019.  
<https://laboutique.edpsciences.fr/produit/1082/9782759823789/elements-d-analyse-reelle>.

## **Mathématiques pour l'agrégation**

**[ROM21]**

Jean-Étienne ROMBALDI. *Mathématiques pour l'agrégation. Algèbre et géométrie*. 2<sup>e</sup> éd. De Boeck Supérieur, 20 avr. 2021.  
<https://www.deboecksuperieur.com/ouvrage/9782807332201-mathematiques-pour-l-agregation-algebre-et-geometrie>.

## **Analyse pour l'agrégation**

**[Z-Q]**

Claude ZUILY et Hervé QUEFFÉLEC. *Analyse pour l'agrégation. Agrégation/Master Mathématiques*. 5<sup>e</sup> éd. Dunod, 26 août 2020.  
<https://www.dunod.com/prepas-concours/analyse-pour-agregation-agregationmaster-mathematiques>.