21 Factorisation des polynômes.

I - Rappels sur le trinôme du second degré

Equations du second degré

Définition 1. On appelle équation du second degré toute équation pouvant se ramener sous la forme : $ax^2 + bx + c = 0$ avec $a \neq 0$.

Nous rappelons la méthode de résolution vue en classe de seconde.
Soit l'équation (E) suivante : $ax^2 + bx + c = 0$.
On utilise le discriminant $\Delta = b^2 - 4ac$.

1. Si $\Delta < 0$ alors l'équation (E) n'a pas de solutions et $ax^2 + bx + c$ n'est pas factorisable.
2. Si $\Delta = 0$ alors l'équation (E) a une seule solution $x_0 = -\dfrac{b}{2a}$ et $ax^2 + bx + c = a(x - x_0)^2$
3. Si $\Delta > 0$ alors l'équation (E) a deux solutions (ou racines) distinctes :
   $x_1 = \dfrac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$; $x_2 = \dfrac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$ et $ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$

Remarque 2. Si l'équation du second degré est incomplète du type $ax^2 + bx = 0$ ou $ax^2 + c = 0$ alors il est inutile de calculer Δ : on peut faire une factorisation pour trouver les racines.

Exemple 3. Résolvons dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes puis factoriser le trinôme figurant au 1^er^ membre.

1. $3x^2 - 2x - 16 = 0$
2. $-5x^2 + x - 1 = 0$
3. $-4x^2 + 20x - 25 = 0$
4. $2x^2 + 3x - 1 = 0$
5. $7x^2 + 3x = 0$

1. $3x^2 - 2x - 16 = 0$
   On a : $\Delta = (-2)^2 - 4 \times 3(-16) = 4 - 4(-48) = 4 + 192 = 196$.
   Donc $\Delta > 0$ et $\sqrt{\Delta} = 14$.
   $x_1 = \dfrac{2-14}{6} = \dfrac{-12}{6} = -2$ et $x_2 = \dfrac{2+14}{6} = \dfrac{16}{6} = \dfrac{8}{3}$ ainsi : $S = \left\{-2, \dfrac{8}{3}\right\}$
   Factorisation : $3x^2 - 2x - 16 = 3\left(x - \dfrac{8}{3}\right)(x+2) = (3x-8)(x+2)$
2. $-5x^2 + x - 1 = 0$
   On a : $\Delta = (1)^2 - 4 \times (-5)(-1) = 1 - 20 = -19$
   Donc $\Delta < 0$ ainsi $S = \emptyset$ et on ne peut pas factoriser $-5x^2 + x - 1$
3. $-4x^2 + 20x - 25 = 0$
   On a : $\Delta = (20)^2 - 4 \times (-4)(-25) = 400 - 400 = 0$
   Donc $\Delta = 0$: il y a une seule solution $x_0 = \dfrac{-20}{-8} = \dfrac{5}{2}$ ainsi $S = \left\{\dfrac{5}{2}\right\}$
   Factorisation : $-4x^2 + 20x - 25 = -4\left(x - \dfrac{5}{2}\right)^2$

4. $7x^2+3x=0$.
   Ici, il est inutile de calculer Δ.
   On a : $7x^2+3x = x(7x+3)=0$
   Donc $x=0$ ou $7x+3=0$ (produit de facteurs nul)
   soit $x=0$ ou $x=-\dfrac{3}{7}$ et $S=\left\{0,-\dfrac{3}{7}\right\}$
   Factorisation : déjà faite $7x^2+3x=x(7x+3)$.

Somme et produit des racines

Propriété 4. — Si l'équation $ax^2+bx+c=0$ a deux racines distinctes ou confondues (c'est-à-dire $\Delta \geq 0$), alors leur somme : $x_1+x_2=-\dfrac{b}{a}$ et leur produit : $x_1\times x_2=\dfrac{c}{a}$.
— Réciproquement, si deux nombres ont pour somme S et pour produit P, alors ils sont les solutions de l'équation du second degré : $X^2-SX+P=0$ ou du système $\begin{cases} x+y=S \\ xy=P \end{cases}$.

Exemple 5. Résolvons dans $\mathbb{R}^2$ le système suivant : $\begin{cases} x+y=5 \\ xy=6 \end{cases}$.

On a : $S=5$ et $P=6$
Résoudre un tel système, revient à résoudre l'équation $X^2-5X+6=0$.
On trouve $\Delta=25-24=1$ et $x_1=3$, $x_2=2$. (faire les calculs).
Les solutions du système sont les couples $(2,3)$ et $(3,2)$.

Equations bicarrées

Définition 6. On appelle équation bicarrée, toute équation (E) pouvant se ramener sous la forme : $ax^4+bx^2+c=0$.

Pour résoudre une telle équation, on procède par un changement d'inconnue en posant $X=x^2$ qui mène à l'équation du second degré (E') : $aX^2+bX+c=0$, ensuite on résout si possible les équations d'inconnue x suivantes ; $x^2=X_1$ et $x^2=X_2$ où X_1 et X_2 sont les solutions possibles (E').

Exemple 7. Soit à résoudre l'équation : $x^4-4x^2+3=0$

En posant $X=x^2$, l'équation devient $X^2-4X+3=0$.
Après calcul, on trouve comme solutions : $X_1=1$ et $X_2=3$.

On a $x^2=1$ soit $x=1$ ou $x=-1$

On a $x^2=3$ soit $x=\sqrt{3}$ ou $x=-\sqrt{3}$

D'où $S=\left\{-\sqrt{3},\ \sqrt{3},\ -1,\ 1\right\}$

Signe du trinôme $ax^2 + bx + c$

Propriété 8. Soit $ax^2 + bx + c$ un trinôme du second degré.

- Si $\Delta < 0$ alors $ax^2 + bx + c$ est du signe de a pour tout $x \in \mathbb{R}$.

x	$-\infty$ $+\infty$
$ax^2 + bx + c$	signe de a

- Si $\Delta = 0$ alors $ax^2 + bx + c$ est du signe de a pour tout $x \neq -\dfrac{b}{2a}$ et s'annule en $-\dfrac{b}{2a}$.

x	$-\infty$		$+\infty$
		$-\frac{b}{2a}$	
$ax^2 + bx + c$	signe de a	0	signe de a

- Si $\Delta > 0$ alors $ax^2 + bx + c$ est :
  - du signe de a quand $x \in]-\infty; x_1[\cup]x_2; +\infty[$ (on suppose $x_1 < x_2$) ;
  - du signe opposé de a quand $x \in]x_1; x_2[$;
  - s'annule en x_1 et en x_2.

x	$-\infty$	x_1		x_2	$+\infty$
$ax^2 + bx + c$	signe de a	0	signe de $(-a)$	0	signe de a

Exemple 9. Résolvons dans $\mathbb{R}$ les inéquations suivantes.

1. $4x^2 - x + 2 \leq 0$ **2.** $-x^2 + x + 2 > 0$ **3.** $x^2 - \sqrt{28}x + 7 > 0$

1. $4x^2 - x + 2 \leq 0$ On a : $\Delta = (-1)^2 - 4 \times 4 \times 2 = 1 - 32 = -31$

x	$-\infty$ $+\infty$
$4x^2 - x + 2$	$+$

$S = \emptyset$

2. $-x^2 + x + 2 > 0$ On a : $\Delta = 1^2 - 4 \times (-1) \times 2 = 1 + 8 = 9$

On trouve $x_1 = \dfrac{-1-3}{-2} = 2$ et $x_2 = \dfrac{-1+3}{-2} = -1$

x	$-\infty$	-1		2	$+\infty$
$-x^2 + x + 2$	$-$	0	$+$	0	$-$

$S =]-1\,,\,2[$

3. $x^2 - \sqrt{28}x + 7 > 0$ On a : $\Delta = (-\sqrt{28})^2 - 4 \times 1 \times 7 = 28 - 28 = 0$

Donc $x_0 = \dfrac{\sqrt{28}}{2} = \dfrac{2\sqrt{7}}{2} = \sqrt{7}$

x	$-\infty$	$\sqrt{7}$	$+\infty$
$x^2 - \sqrt{28}x + 7$	$+$	0	$+$

$S = \left]-\infty\,,\,\sqrt{7}\right[\cup \left]\sqrt{7}\,,\,+\infty\right[$

II - Factorisation d'un polynôme

Définition 10. Dire que le réel α est une **racine** ou un **zéro** d'un polynôme $P(x)$, signifie que : $P(\alpha) = 0$.

Remarque 11. Déterminer les racines d'un polynôme $P(x)$, c'est résoudre l'équation $P(x) = 0$.

Nous admettons le théorème suivant.

Théorème 12. Soit $P(x)$ un polynôme et α un réel.
α est une racine de $P(x)$ si et seulement si $P(x)$ est factorisable par $(x-\alpha)$.
Dans ce cas il existe un polynôme $Q(x)$ tel que : $P(x) = (x-\alpha)\,Q(x)$.
$Q(x)$ est le quotient de $P(x)$ par $(x-\alpha)$ et $d^\circ Q = d^\circ P - 1$.

Remarque 13. Si α et β sont deux racines de $P(x)$ alors $P(x)$ est factorisable par $(x-\alpha)(x-\beta)$ et dans ce cas il existe un polynôme $Q(x)$ tel que $P(x) = (x-\alpha)(x-\beta)\,Q(x)$ et $d^\circ Q = d^\circ P - 2$.

Exemple 14. Considérons le polynôme suivant : $P(x) = 2x^3 - 5x^2 - 6x + 9$
Montrons que $P(x)$ est factorisable par $(x-3)$.
Ensuite déterminons le polynôme quotient $Q(x)$ tel que : $P(x) = (x-3)\,Q(x)$ puis factorisons $P(x)$.

— On a $P(3) = 2 \times 3^3 - 5 \times 3^2 - 6 \times 3 + 9 = 54 - 45 - 18 + 9 = 9 - 9 = 0$
  Donc 3 est une racine de $P(x)$ c'est-à-dire que $P(x)$ est factorisable par $(x-3)$.
  D'après le théorème précédent, il existe un polynôme $Q(x)$ tel que : $P(x) = (x-3)\,Q(x)$.

— Or $P(x)$ est de degré trois donc $Q(x)$ sera de degré deux. Par conséquent nous devons déterminer trois réels a, b et c tels que $P(x) = (x-3)\left(ax^2 + bx + c\right)$

Nous proposons ici la méthode Hörner[1] pour déterminer de $Q(x)$.

▶ Méthode de Hörner

On utilise la disposition suivante appelée méthode de Hörner :

	2	-5	-6	9
3	⊠	6	3	-9
	2	1	-3	0

Les valeurs 2, 1 et -3 figurant dans la dernière ligne, correspondent respectivement à celles des coefficients a, b et c de $Q(x)$. Soit $Q(x) = 2x^2 + x - 3$.
$P(\alpha)$ correspond à la valeur 0 figurant dans la dernière case de la dernière ligne du tableau de Hörner. Cette valeur n'est pas nécessairement nulle.
Ce tableau permet donc de calculer $P(\alpha)$ et de trouver en même temps les coefficients du polynôme $Q(x)$.

Factorisation de $P(x)$

Maintenant factorisons au mieux $P(x)$.
On a : $P(x) = (x-3)\left(2x^2 + x - 3\right)$ (attention ceci n'est pas la factorisation demandée !)
On va continuer la factorisation **si possible** dans $2x^2 + x - 3$.
$\Delta = 1 - 4 \times 2(-3) = 25$ et $x_1 = \dfrac{-1-5}{4} = -\dfrac{3}{2}$, $x_2 = \dfrac{-1+5}{4} = 1$.
Donc $2x^2 + x - 3 = 2\left(x + \dfrac{3}{2}\right)(x-1) = (2x+3)(x-1)$. (attention ceci n'est pas la factorisation demandée !)

On remplace $\left(2x^2 + x - 3\right)$ par $(2x+3)(x-1)$ dans $P(x)$.
Finalement $P(x) = (x-3)(2x+3)(x-1)$ cette expression est la factorisation de $P(x)$.

Remarque 15. Dans la démarche précédente, on a trouvé toutes les racines du polynôme $P(x)$. C'est-à-dire : $3, -\dfrac{3}{2}$ et 1.
On pourrait aussi vous demander d'étudier le signe $P(x)$ à l'aide d'un tableau de signes puis de résoudre une inéquation comme nous le verrons dans les exercices.

Remarque 16. On pourrait aussi utiliser les méthodes vues en classe de première : la division ou l'identification des coefficients.

1. William George Hörner mathématicien allemand(1819-1845