

Exercices sur les Limites

Exercice 1. Étudier les limites suivantes.

1. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sin \frac{\pi}{x}$
2. $\lim_{x \rightarrow \infty} x \sin \frac{\pi}{x}$
3. $\lim_{x \rightarrow -\infty} \sqrt{\frac{2x^2}{1-x}}$
4. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(x - \sqrt{x} + \frac{1}{x} \right)^3$
5. $\lim_{x \rightarrow +\infty} x \left(\sqrt{\frac{x}{x+1}} - 1 \right)$

Exercice 2. Calculer la limite suivante. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x+4} - 2}{x}$

En déduire :

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\sqrt{4 + \cos x} - 2}{\cos x}$$

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\sqrt{4 + \sin x} - 2}{x}$$

Exercice 3. On considère la fonction f définie sur $[2, +\infty[$ par $f(x) = \frac{3x + \sin x}{x - 1}$

Montrer que , pour tout $x \geq 2$, $|f(x) - 3| \leq \frac{4}{x - 1}$.

En déduire la limite de f en $+\infty$?

Exercice 4. Soit la fonction f définie par : $f : x \mapsto x^2 \sin \left(\frac{1}{x} \right) + 1 \quad \forall x \in \mathbb{R}^*$

1. Montrer que $\forall x \in \mathbb{R}^* \quad 1 - x^2 \leq f(x) \leq 1 + x^2$
2. En déduire :

- (a) $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$
- (b) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x^3}$
- (c) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - 1}{x}$.

Exercice 5. Soit f une fonction définie sur $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$ telle que : $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 1$, $\lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) = +\infty$ et $\lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = -\infty$.

1. Interpréter graphiquement ces limites.

2. En déduire les limites suivantes.

(a) $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(\sqrt{x})$

(b) $\lim_{x \rightarrow +\infty} f\left(-1 + \frac{1}{x}\right)$

(c) $\lim_{x \rightarrow 0^-} f\left(\frac{1}{x}\right)$

(d) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{f(x) - 1}{2f(x) + 1} \right)^2$

Exercice 6. Étudier les limites suivantes.

1. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^{10} - 1}{x - 1}$

2. $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x\sqrt{x+2} + 1}{x + 1}$

3. $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{6}} \frac{2\sin x - 1}{6x - \pi}$

4. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos^5 x + \sin 2x - 1}{x}$