Éléments de symétrie d'une courbe

Soit f une fonction numérique et $\mathscr{C}$ sa courbe représentative dans un repère orthogonal.

I - Axe de symétrie

Pour montrer que la droite Δ d'équation $x = a$ est un axe de symétrie de la courbe $\mathscr{C}$, on peut utiliser l'une des méthodes suivantes :

— Démontrer que : $\forall x \in D_f$ on a $2a - x \in D_f$ et $f(a-x) = f(x)$

— Démontrer que : $\forall x \in D_f$ on a $a - x \in D_f$, $a + x \in D_f$ et $f(2a-x) = f(a+x)$

— Démontrer que : la fonction $g(x) = f(a-x)$ est paire.

Dans ce cas on peut restreindre l'étude de f à $[a\,,\ +\infty[\cap D_f$ et on obtient la courbe complète par symétrie par rapport à la droite Δ.

II - Centre de symétrie

Pour montrer que le point $I(a,b)$ est un axe de symétrie de la courbe $\mathscr{C}$, on peut utiliser l'une des méthodes suivantes :

— Démontrer que : $\forall x \in D_f$ on a $2a - x \in D_f$ et $f(2a-x) + f(x) = 2b$

— Démontrer que : $\forall x \in D_f$ on a $a - x \in D_f$, $a + x \in D_f$ et $f(a-x) + f(a+x) = 2b$

— Démontrer que : la fonction $g(x) = f(a-x) + b$ est impaire.

Dans ce cas on peut restreindre l'étude de f à $[a\,,\ +\infty[\cap D_f$ et on obtient la courbe complète par symétrie par rapport à I.

III - Fonction périodique

Définition 1. Une fonction f est dite **périodique de période t** (ou t- périodique) ssi :
· t est non nul,
· pour tout $x \in D_f$, $x + t$ et $x - t$ sont dans D_f et $f(x+t) = f(x)$.
On dit que **t est une période de f**, et la plus petite période strictement positive est **la période de f**. En général la période est notée T.
Pour tout x de D_f et tout **entier relatif** k, $f(x+kT) = f(x)$.

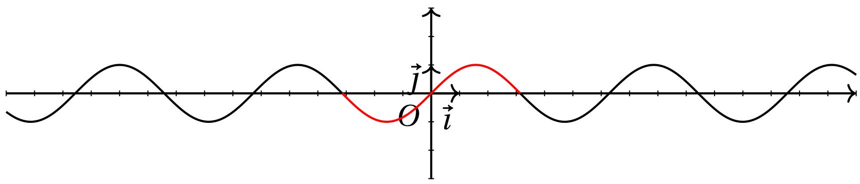
Conséquences

Pour représenter graphiquement une fonction f de période T, il suffit de :

— choisir un intervalle I de longueur T inclus dans D_f ;

— tracer (en rouge)la partie $\mathscr{C}$ de la courbe de f restreinte à cet intervalle I :

— translater la partie $\mathscr{C}$ par les translations de vecteurs $(kT)\vec{i}$ avec k entier relatif.



Cas des fonctions trigonométriques

– Les fonctions $x \mapsto \cos x$ et $x \mapsto \sin x$ sont périodiques de période 2π c'est à dire : $\cos(x+2\pi) = \cos x$ et $\sin(x$

– La fonction $x \mapsto \tan x$ est périodique de période π c'est à dire : $\tan(x+\pi) = \tan x$

Cas général :

Les fonctions $x \mapsto \cos(ax+b)$ et $x \mapsto \sin(ax+b)$ ont pour période $T = \dfrac{2\pi}{|a|}$

La fonction $x \mapsto \tan(ax+b)$ a pour période $T = \dfrac{\pi}{|a|}$

Réduction de domaine d'étude

- Si f est T-périodique alors on peut restreindre le domaine d'étude à tout domaine du type $[a\,,\,a+T] \cap D_f$ pour tout réel a, ainsi on obtient la courbe complète de f sur ce domaine.
- Si f est T-périodique et paire (resp. impaire) alors on peut restreindre le domaine d'étude au domaine $\left[0\,,\,\dfrac{T}{2}\right] \cap D_f$ ainsi on obtient la courbe complète sur $\left[-\dfrac{T}{2}\,,\,\dfrac{T}{2}\right] \cap D_f$ par symétrie par rapport à l'axe des ordonnées (resp. par symétrie par rapport à O origine du repère).
- Si f est T-périodique et $\mathscr{C}$ admet un axe de symétrie Δ (resp. un centre de symétrie I) alors on peut restreindre le domaine d'étude au domaine $\left[a\,,\,a+\dfrac{T}{2}\right] \cap D_f$ ou au domaine $\left[a-\dfrac{T}{2}\,,\,a\right] \cap D_f$ ainsi on obtient la courbe complète sur $\left[a-\dfrac{T}{2}\,,\,a+\dfrac{T}{2}\right] \cap D_f$ par symétrie par rapport à l'axe Δ (resp. par symétrie par rapport un point I).

Exercice 2. On considère la fonction f définie par : $f(x) = \dfrac{\sin x}{\sin x + \cos x}$

1. Déterminer D_f et puis montrer que f est de période π.
2. Montrer que le point $A(-\dfrac{\pi}{4}; \dfrac{1}{2})$ est un centre de symétrie de $\mathscr{C}_f$. En déduire un domaine simple pour l'étude de f

Démonstration. 1. $f(x)$ existe $\Leftrightarrow \sin x + \cos x \neq 0$

$\Leftrightarrow \sin x \neq -\cos x$

$\Leftrightarrow \sin x \neq \sin(x - \dfrac{\pi}{2})$

$\Leftrightarrow x \neq \dfrac{3\pi}{4} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$

Montrons que π est la période de f.

$x \in D_f \Leftrightarrow x \neq \dfrac{3\pi}{4} + k\pi \Leftrightarrow x + \pi \neq \dfrac{7\pi}{4} + k\pi \Leftrightarrow x + \pi \in D_f$.

$x \in D_f \Leftrightarrow x \neq \dfrac{3\pi}{4} + k\pi \Leftrightarrow x - \pi \neq -\dfrac{\pi}{4} + k\pi \Leftrightarrow x - \pi \in D_f$.

$f(x+\pi) = \dfrac{\sin(x+\pi)}{\sin(x+\pi)+\cos(x+\pi)} = \dfrac{-\sin x}{-\sin x - \cos x} = \dfrac{\sin x}{\sin x + \cos x} = f(x)$

2. $2a - x = -\dfrac{\pi}{2} - x$

   $x \in D_f \Leftrightarrow x \neq \dfrac{3\pi}{4} + k\pi \Leftrightarrow -\dfrac{\pi}{2} - x \neq -\dfrac{7\pi}{4} + k\pi \Leftrightarrow -\dfrac{\pi}{2} - x \in D_f$
   $\Leftrightarrow 2a - x \in D_f$

$$f(2a-x)+f(x) = \frac{\sin(-\frac{\pi}{2}-x)}{\sin(-\frac{\pi}{2}-x)+\cos(-\frac{\pi}{2}-x)} + \frac{\sin x}{\sin x + \cos x}$$

$$f(2a-x)+f(x) = \frac{\cos x}{\cos x + \sin x} + \frac{\sin x}{\sin x + \cos x} = 1$$

Donc le point A est bien un centre de symétrie de $\mathscr{C}_f$.
Proposons un d'étude de f.
f est de période $T = \pi$ et l'abscisse du centre de symétrie est $a = -\dfrac{\pi}{4}$, on peut appliquer la formule $\left[a\ ,\ a + \dfrac{T}{2}\right] \cap D_f$

$\left[-\dfrac{\pi}{4}\ ,\ -\dfrac{\pi}{4} + \dfrac{\pi}{2}\right] \cap D_f = \left[-\dfrac{\pi}{4}\ ,\ \dfrac{\pi}{4}\right] \cap D_f = \left]-\dfrac{\pi}{4}\ ,\ \dfrac{\pi}{4}\right]$

<u>Conclusion</u> : on peut étudier f sur $\left]-\dfrac{\pi}{4}\ ,\ \dfrac{\pi}{4}\right]$ puis obtenir la courbe complète par symétrie par rapport à A sur $\left[-\dfrac{3\pi}{4}\ ,\ -\dfrac{\pi}{4}\right[\cup \left]-\dfrac{\pi}{4}\ ,\ \dfrac{\pi}{4}\right]$.

□