Exercices sur les polynômes

Exercice 1. Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes :

1. $-x^2-2x+3=0$
2. $x^2-2x=15$
3. $x(x+3)=x+1$
4. $4x^2-3x=0$
5. $(2x-1)\left(-3x^2+12x-8\right)=0$
6. $\left(x^2-2\right)\left(x^2+1\right)=0$
7. $\dfrac{30}{x}+\dfrac{18}{x+3}=7$

Exercice 2. Résoudre dans $\mathbb{R}$ les inéquations suivantes :

1. $x^2-13x-48\leq 0$
2. $-x^2+13x+48\leq 0$
3. $-x^2+13x+48>0$
4. $2x^2+2\sqrt{2}x+1>0$
5. $x^2+2\sqrt{3}x+2<0$
6. $x^2+x-2\geq 1$
7. $(x+1)(-x^2+x+6)>0$
8. $(1-4x)(x^2+5x+4)>0$
9. $\dfrac{x^2-3x-4}{x-3}\geq 0$
10. $\dfrac{x-1}{x+1}>2x$

Exercice 3. On considère le polynôme suivant : $P(x)=-2x^3+9x^2-7x-6$.

1. (a) Montrer que 2 est une racine de $P(x)$.
   (b) En déduire que $P(x)$ peut s'écrire sous la forme $P(x)=(x-2)(ax^2+bx+c)$ où a , b et c sont des réels à préciser.
   (c) Factoriser $P(x)$ en produit de facteurs de polynômes de premier degré.
2. On suppose maintenant que : $P(x)=(-2x-1)(x-2)(x-3)$.
   (a) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $P(x)=0$.
   (b) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation $P(x)<0$.

Exercice 4. On considère le polynôme suivant : $P(x) = 3x^3 + 17x^2 + 9x - 5$.

1. Montrer que $P(x)$ est factorisable par $x + 1$ puis l'écrire sous la forme : $P(x) = (x + 1)Q(x)$ où $Q(x)$ est un polynôme à préciser.
2. Factoriser $Q(x)$.
3. En déduire que $P(x) = (3x - 1)(x + 5)(x + 1)$.
4. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation $P(x) \leq 0$.
5. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $P(x) = 0$ puis $3(2x-5)^3 + 17(2x-5)^2 + 9(2x-5) - 5 = 0$.

Exercice 5. Soit le polynôme $P(x) = 2x^4 + 5x^3 - 5x^2 - 5x + 3$.

1. Calculer $P(1)$ et $P(-3)$. Que peut-on en déduire?
2. Montrer que : $P(x) = (x - 1)(2x^3 + 7x^2 + 2x - 3)$.
3. On pose $\mathrm{Q}(x) = 2x^3 + 7x^2 + 2x - 3$.
   (a) Trouver trois réels a, b et c tels que : $\mathrm{Q}(x) = (x + 3)(ax^2 + bx + c)$.
   (b) En déduire une factorisation de $P(x)$.
4. Étudier dans $\mathbb{R}$, le signe de $P(x)$.

Exercice 6. On considère le polynôme suivant : $h(x) = 4x^3 + x^2 - 4x - 1$.

1. Vérifier que 1 est une racine de $h(x)$.
2. En déduire une factorisation de $h(x)$ par la méthode de HORNER.
3. Soit $R(x) = \dfrac{(4x + 1)(x + 1)(x - 1)}{4x^2 - 7x - 2}$
   (a) Montrer que $(4x + 1)(x - 2) = 4x^2 - 7x - 2$.
   (b) Simplifier $R(x)$.
   (c) Étudier, suivant les valeurs du réel x ,le signe de $R(x)$.

Exercice 7. On considère le polynôme suivant : $P(x) = 3x^4 + 14x^3 - 8x^2 - 14x + 5$.

1. Vérifier que 1 et -5 sont des racines de $P(x)$.
2. En utilisant la méthode de HORNER, trouver le quotient $Q(x)$ de la division de $P(x)$ par $(x - 1)$.
3. Puis en utilisant de nouveau la méthode de HORNER, trouver le quotient $Q'(x)$ de la division de $Q(x)$ par $(x + 5)$.
4. Factoriser $Q'(x)$ puis $P(x)$.
5. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation $P(x) \geq 0$.
6. Soit $F(x) = \dfrac{(3x - 1)(x^2 - 1)(x + 5)}{x^2 + x - 2}$.
   (a) Montrer que $x^2 + x - 2 = (x - 1)(x + 2)$.

(b) Simplifier $F(x)$.

(c) Étudier, suivant les valeurs du réel x ,le signe de $F(x)$.

Exercice 8.

1. Soit $P(x) = x^3 + bx^2 + cx + d$ où b, c et d sont des réels.
   Sachant que $P(1) = 4$, $P(-1) = -16$ et $P(3) = 0$, déterminer les réels b, c et d.
2. On pose $P(x) = x^3 - 6x^2 + 9x$
   (a) Factoriser $P(x)$.
   (b) Etudier suivant les valeurs de x , le signe de $P(x)$.
3. Une entreprise vend un produit, et le profit réalisé en fonction du nombre de produits vendus x est donné par la fonction de profit suivante : $P(x) = x^3 - 6x^2 + 9x$
   Combien de produits l''entreprise doit-elle produire au moins pour réaliser un bénéfice ?