Terminale

Plans de leçons

Document intégralement écrit par Ismaila Mbodji.
Visitez `IsmailaMbodji` pour plus de ressources et d'informations.

Une coquille ? Une correction à apporter ? Rendez-vous sur le dépôt Github "`Ismaila/Ismaila`" ou contactez-moi via mon site web personnel `skyost.eu`.

Table des matières

1 Fonctions numériques. Rappels et compléments

I - Limites

Lorsque nous écrivons ∞ *cela signifie que c'est valable pour* $+\infty$ *comme pour* $-\infty$ Il existe quatre cas d'indétermination dans les opérations sur les limites :

$$<< +\infty - \infty >>; \quad << \frac{\infty}{\infty} >>; \quad << \frac{0}{0} >>; \quad << 0 \times \infty >>$$

Limites usuelles

$n \in \mathbb{N}^*$

- $\lim\limits_{x \to +\infty} x^n = +\infty$
- $\lim\limits_{x \to -\infty} x^n = \begin{cases} +\infty & \text{si n pair} \\ -\infty & \text{si n impair} \end{cases}$
- $\lim\limits_{x \to +\infty} \sqrt{x} = +\infty$
- $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{1}{x^n} = 0$
- $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin x}{x} = 1 \qquad \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\tan x}{x} = 1$
- $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{1 - \cos x}{x^2} = \dfrac{1}{2} \qquad \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{1 - \cos x}{x} = 0$

Remarque 1. Les fonctions cosinus et sinus n'ont pas de limites à l'infini.

Limite de la composée de deux fonctions

Propriété 2. Soient f et g deux fonctions, a, b et c trois réels pouvant éventuellement être $+\infty$ ou $-\infty$.

$$\text{Si} \lim_{x \to a} f(x) = b \quad \text{et} \quad \lim_{x \to b} g(x) = c \quad \text{alors} \quad \lim_{x \to a} g[f(x)] = c$$

Exemple 3. Calculons $\lim\limits_{x \to +\infty} \cos\left(\dfrac{x+1}{x^2-2}\right)$On a : $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x+1}{x^2-2} = 0$ et $\lim\limits_{x \to 0} \cos x = \cos 0 = 1$ donc par composée $\lim\limits_{x \to +\infty} \cos\left(\dfrac{x+1}{x^2-2}\right) = 1$

Comparaisons de limites

Soient f, g et h trois fonctions et $l \in \mathbb{R}$ et $a = +\infty$ ou $a = -\infty$.

Hypothèse 1	**Hypothèse 2**
$f \leq g$	$\lim\limits_{x \to a} f(x) = +\infty$
$f \leq g$	$\lim\limits_{x \to a} g(x) = -\infty$
$\lvert f(x) - l \rvert \leq g(x)$	$\lim\limits_{x \to a} g(x) = 0$
$g \leq f \leq h$	$\lim\limits_{x \to a} g(x) = l$ et l

Remarque 4. La dernière propriété est parfois appelée « le théorème des gendarmes ».

Exemple 5. — Soit $f(x) = x + 3\cos x$.

Pour tout $x \in \mathbb{R}$: $x - 3 \leq f(x) \leq x + 3$

· On a : $x - 3 \leq f(x)$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} x - 3 = +\infty$ donc $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$

· On a : $f(x) \leq x + 3$ et $\lim\limits_{x \to -\infty} x - 3 = -\infty$ donc $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$

— Calculons $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\sin x}{x}$.

Pour tout $x \geq 1$: $-1 \leq \sin x \leq 1$

En multipliant par $\frac{1}{x}$: on a $-\frac{1}{x} \leq \frac{\sin x}{x} \leq \frac{1}{x}$

Or $\lim\limits_{x \to +\infty} (-\dfrac{1}{x}) = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{1}{x} = 0$ donc $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\sin x}{x} = 0$

Limites et nombre dérivé

Théorème 6. Soit f une fonction dérivable.Si $\lim\limits_{x \to a} f'(x) = l$, (l réel fini ou pas) alors $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{f(x) - f(a)}{x - a} = l$

Exemple 7. Calculons $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin x}{x}$Posons $f(x) = \sin x$

On a $f(0) = 0$ et $f'(x) = \cos x$

$\lim\limits_{x \to 0} f'(x) = \lim\limits_{x \to 0} \cos x = 1$ donc $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin x}{x} = 1$

II - Branches infinies d'une courbe

Soit une fonction numérique f et $\mathscr{C}$ sa courbe représentative dans un repère orthogonal du plan.

1. Asymptotes

Asymptote verticale

Elle traduit, graphiquement, le fait que la fonction f admet une limite infinie en un réel a.

Définition 8. Si $\lim\limits_{x \to a^+} f(x) = \infty$ ou $\lim\limits_{x \to a^-} f(x) = \infty$ ou$\lim\limits_{x \to a} f(x) = \infty$ alors la droite d'équation $x = a$ est une asymptote verticale à la courbe $\mathscr{C}$.

Asymptote horizontale

Elle traduit, graphiquement, le fait que la fonction f admet une limite finie à l'infini.

Définition 9. Si si $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = b$ (réel) alors la droite $y = b$ est une asymptote horizontale à la courbe $\mathscr{C}$ en ∞.

Exemple 10. Pour la fonction $f : x \mapsto 3 + \frac{5}{x-1}$
- la droite d'équation $y = 3$ est asymptote horizontale
- la droite d'équation $x = 1$ est asymptote verticale à la courbe de f.

Asymptote oblique

Définition 11. Soit f une fonction et Δ la droite d'équation $y = ax + b$.Si $\lim\limits_{x \to \infty} (f(x) - (ax + b)) = 0$ alors la droite d'équation $y = ax + b$ est une asymptote oblique à la courbe de f en ∞.

Exemple 12. Pour la fonction $f : x \mapsto x + \frac{2}{x-1}$ dont la courbe est représentée ci dessous,la droite d'équation $y = x$ est asymptote oblique à la courbe de f.

Remarque 13. Si f s'écrit sous la forme $f(x) = ax + b + g(x)$ et si $\lim\limits_{x \to \infty} g(x) = l$ (réel) alors la droite $y = ax + b + l$ est une asymptote à $\mathscr{C}$ en ∞.

Exemple 14. Pour la fonction $f : x \mapsto 2x+5-\frac{2x}{x-1}$la droite d'équation $y = 2x+3$ est asymptote oblique à sa courbe en ∞ car $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{2x}{x-1} = 2$.

Position relative d'une courbe et son asymptote

Pour étudier la position relative de la courbe $\mathscr{C}$ d'une fonction f par rapport à son asymptote $\Delta : y = ax + b$, on étudie le signe de la différence $f(x) - ax - b$.

— Si $f(x) - ax - b > 0$ alors $\mathscr{C}$ est située au-dessus de la courbe de Δ

— Si $f(x) - ax - b < 0$ alors la courbe de $\mathscr{C}$ est située en-dessous de la courbe de Δ

— Si $f(x) - ax - b = 0$ alors la courbe de $\mathscr{C}$ et Δ sont sécantes.

On tiendra compte de l'ensemble sur lequel on doit étudier la position relative des deux courbes.

2. Recherche de branches infinies

Lorsque $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = \infty$, la courbe $\mathscr{C}$ présente une branche infinie qu'il faut étudier.

— Si $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{f(x)}{x} = 0$ alors la courbe $\mathscr{C}$ présente une branche parabolique dans la direction de l'axe des abscisses.

— Si $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{f(x)}{x} = \infty$ alors la courbe $\mathscr{C}$ présente une branche parabolique dans la direction de l'axe des ordonnées.

— Si $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{f(x)}{x} = a$ réel non nul alors on calcule $\lim_{x\to\infty}(f(x) - ax)$• Si $\lim\limits_{x\to\infty}(f(x) - ax) = b$ (réel) alors la droite (D) d'équation : $y = ax + b$ est asymptote à la courbe $\mathscr{C}$.• Si $\lim\limits_{x\to\infty}(f(x) - ax) = \infty$ alors la courbe admet une branche parabolique de direction asymptotique la droite d'équation $y = ax$.

Exercice 15. On considère la fonction f définie par :$f(x) = \begin{cases} \sqrt{x+4} & \text{si} \quad x \geq 2 \\ x + 3 - \dfrac{2}{x-1} & \text{si} \quad x < 2 \end{cases}$

1. Déterminer les limites aux bornes de D_f.
2. Etudier la nature des branches infinies de la courbe $\mathscr{C}$.
3. Etudier la position relative de $\mathscr{C}$ par rapport à son asymptote oblique.

Démonstration. 1. $f(x)$ existe ssi $\begin{cases} x+4 \geq 0 \\ x \geq 2 \end{cases}$ ou $\begin{cases} x-1 \neq 0 \\ x < 2 \end{cases}$ $f(x)$ existe ssi $\begin{cases} x \geq -4 \\ x \geq 2 \end{cases}$ ou $\begin{cases} x \neq -1 \\ x < 2 \end{cases}$ $f(x)$ existe ssi $x \geq 2$ ou $x \in \left]-\infty\,,\,-1\right[\cup \left]-1\,,\,2\right[$

donc $f(x)$ existe ssi $x \in \left]-\infty\,,\,-1\right[\cup \left]-1\,,\,2\right[\cup \left[2\,,\,+\infty\right[$D'où $D_f = \left]-\infty\,,\,-1\right[\cup \left]-1\,,\,+\infty\right[$Limites aux bornes de D_f $\lim\limits_{x\to+\infty} x+4 = +\infty$ par composée $\lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt{x+4} = +\infty$ d'où $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$

$\lim\limits_{x\to-\infty} x + 3 - \dfrac{2}{x-1} = \lim\limits_{x\to-\infty} x + 3 - \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{2}{x-1} = -\infty$ d'où $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$

L'étude de la limite en 1 se fait uniquement sur la restriction $x \mapsto x + 3 - \frac{2}{x-1}$

$\begin{cases} \lim_{x\to1^+} x+3 = 4 \\ \lim\limits_{x\to1^+} -\dfrac{2}{x-1} = -\infty \end{cases}$ donc $\lim\limits_{x\to1^+} f(x) = -\infty$

$$\begin{cases} \lim\limits_{x \to 1^-} x+3 = 4 \\ \lim\limits_{x \to 1^-} -\dfrac{2}{x-1} = +\infty \end{cases} \quad \text{donc } \lim\limits_{x \to 1^-} f(x) = +\infty$$

2. Puisque $\lim\limits_{x \to 1^+} f(x) = -\infty$ et $\lim\limits_{x \to 1^-} f(x) = +\infty$ donc la droite d'équation $x = 1$ est une asymptote verticale à la courbe de f.
   Puisque la restriction de f sur $]-\infty\,,\,2[$ s'écrit sous la forme $x \mapsto x+3-\frac{2}{x-1}$ et que $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{2}{x-1} = 0$ donc la droite Δ d'équation $y = x+3$ est une asymptote oblique à la courbe de f.
   D'autre part $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$ doc $\mathscr{C}_f$ présente une branche infinie en $+\infty$.
   Calculons $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{f(x)}{x}$
   $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\sqrt{x+3}}{x} = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x+3}{x\sqrt{x+3}} = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x+3}{x} \times \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{1}{\sqrt{x+3}} = 1 \times 0 = 0$ d'où $\mathscr{C}_f$ admet un branche parabolique d'axe (Ox).
3. Etudions la position relative de Δ et $\mathscr{C}_f$.
   Pour cela étudions le signe de $f(x) - (x+3) = -\frac{2}{x-1}$ pour $x < 2$

x	$-\infty$		1		2
signe de $-\frac{2}{x-1}$		+	|	−	

   Sur $]-\infty\,,\,1[$ $-\frac{2}{x-1} > 0$ donc $\mathscr{C}_f$ est au dessus de Δ.
   Sur $]-\infty\,,\,1[$ $-\frac{2}{x-1} < 0$ donc $\mathscr{C}_f$ est au dessous de Δ.

□

III - Continuité

Continuité en un réel

Définition 16. Une fonction f est continue en un réel a ssi $a \in D_f$ et $\lim\limits_{x \to a} f(x) = f(a)$.

Exemple 17. Soit $f(x) = \begin{cases} \frac{\sqrt{x}-1}{x-1} & \text{si } x \neq 1 \\ \frac{1}{2} & \text{si } x = 1 \end{cases}$ Etudions la continuité de f en 1.
Pour $x \neq 1$, $f(x)$ existe si et seulement, si $x \geq 0$ et $x - 1 \neq 0$si et seulement, si $x \geq 0$ et $x \neq 1$si et seulement, si $x \in [0\,,\,1[\cup]1\,,\,+\infty[$Or $f(1) = \frac{1}{2}$ d'où $f(x)$ existe si et seulement, si $x \in [0\,,\,+\infty[$

$\lim\limits_{x \to 1} f(x) = \lim\limits_{x \to 1} \dfrac{\sqrt{x}-1}{x-1} = \lim\limits_{x \to 1} \dfrac{1}{\sqrt{x}+1} = \dfrac{1}{2}$

donc $\lim\limits_{x \to 1} f(x) = f(1) = \dfrac{1}{2}$ d'où f est continue en 1.

Continuité à droite = continuité à gauche

Propriété 18. f est continue en a si et seulement, si $\lim_{x \to a^+} f(x) = \lim_{x \to a^-} f(x) = f(a)$.

Prolongement par continuité

Définition 19. Soit f une fonction **non** définie en a et l un nombre réel tel que $\lim_{x \to a} f(x) = l$.
On appelle **prolongement par continuité** de f en a, la fonction g définie par :

$$g(x) = \begin{cases} f(x) & \text{si} \quad x \neq a \\ l & \text{si} \quad x = a \end{cases}$$

NB : La fonction g est définie et continue en a.

Exemple 20. Montrons que la fonction $f : x \mapsto \frac{x^2-x-2}{x-2}$ est prolongeable par continuité en 2 et trouvons son prolongement par continuité.

Réponse :
$f(x)$ existe si et seulement, si $x \neq 2$.
$\lim_{x \to 2} \dfrac{x^2 - x - 2}{x-2} = \lim_{x \to 2} \dfrac{(x-2)(x+1)}{x-2} = \lim_{x \to 2}(x+1) = 3$ finie donc f est prolongeable par continuité en 2.
Son prolongement par continuité en 2 est la fonction g définie par :

$$g(x) = \begin{cases} \frac{x^2-x-2}{x-2} & \text{si} \quad x \neq 2 \\ 3 & \text{si} \quad x = 2 \end{cases}$$

IV - Dérivabilité

Dérivabilité en un réel

Définition 21. Soit f une fonction définie sur un intervalle I et $a \in I$.
f est dérivable en a s'il existe un nombre réel l tel que $\lim_{x \to a} \dfrac{f(x) - f(a)}{x - a} = l$
l est le **nombre dérivé** de f en a. On le note $f'(a)$.

Autre formulation de la définition
On fait le changement de variable suivant $h = x - a$
f est dérivable en a s'il existe un nombre réel l tel que $\lim_{h \to 0} \dfrac{f(a+h) - f(a)}{h} = l$

Exemple 22. Soit $f(x) = \begin{cases} \frac{\sqrt{x}-1}{x-1} & \text{si} \quad x \neq 1 \\ \frac{1}{2} \quad \text{si} & x = 1 \end{cases}$
Etudions la dérivabilité de f en 1.

Réponse :
On avait trouvé que $D_f = [0\,,\ +\infty[$

$$\lim_{x\to 1} \frac{f(x)-f(1)}{x-1} = \lim_{x\to 1} \frac{\frac{\sqrt{x}-1}{x-1} - \frac{1}{2}}{x-1} = \lim_{x\to 1} \frac{2\sqrt{x}-(x+1)}{2(x-1)^2} = \lim_{x\to 1} \frac{-x^2+2x-1}{2(x-1)^2(2\sqrt{x}+x+1)} = \lim_{x\to 1} \frac{-1}{2(2\sqrt{x}+x+1} = -\frac{1}{8}$$

Donc f est dérivable en 1 et de nombre dérivé $f'(1) = -\frac{1}{8}$.

Propriété

Propriété 23. Si f est dérivable en a, alors f est continue en a.
Attention : La réciproque de cette propriété est fausse.
La fonction $x \mapsto |x|$ est continue en 0 mais elle n'est pas dérivable en 0.

Propriété : Dérivabilité à droite - dérivabilité à gauche

Propriété 24. f est dérivable en a si et seulement, si :

$$\lim_{x\to a^+} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} = \lim_{x\to a^-} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} = l \quad \text{réel}$$

$$f'_d(a) = f'_g(a)$$

Le nombre dérivé de f à droite en a = Le nombre dérivé de f à gauche en a

Notation 25. Les notations $f'_d(a)$ et $f'_g(a)$ s'utilisent que lorsque la limite du taux de variation est un réel.

Cas de non dérivabilité

· Si $\lim_{x\to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} = +\infty$ ou $-\infty$ alors f n'est pas dérivable en a.
· Si $f'_d(a) \neq f'_g(a)$ alors f n'est pas dérivable en a.

Interprétation graphique de la dérivabilité

1. Si f est dérivable en a alors sa courbe $\mathscr{C}$ admet au point d'abscisse a c-à-d le point $A(a, f(a))$ une **tangente** de coefficient directeur (ou pente) $f^{'}(a)$ d'équation :$y = f^{'}(a)(x-a)+f(a)$.**NB**$f'(a) = 0$ si et seulement si $\mathscr{C}$ admet au point d'abscisse a une tangente horizontale d'équation $y = f(a)$.
   Dans ce cas, le point $A(a, f(a))$ est soit un **extremum** (maximum ou minimum) soit un **point d'inflexion**.
2. Si f est dérivable à droite et à gauche de a telle que $f_d^{'}(a) \neq f_g'(a)$ alors $\mathscr{C}$ admet au point $A(a, f(a))$ deux demi-tangentes de pentes respectives $f_d'(a)$ et $f_g'(a)$: le point A est un point **anguleux**.
3. Détaillons les cas de l'infini.

Si $\lim\limits_{x\to a^+} \dfrac{f(x)-f(a)}{x-a} = +\infty$ alorsla courbe de f admet au point$A(a, f(a))$ une demi-tangenteverticale dirigée vers le haut.	Si $\lim\limits_{x\to a^-} \dfrac{f(x)-f(a)}{x-a} =$ de f admet au point$A($ tangenteverticale dirigée
Si $\lim\limits_{x\to a^+} \dfrac{f(x)-f(a)}{x-a} = -\infty$ alorsla courbe de f admet au point$A(a, f(a))$ une demi-tangenteverticale dirigée vers le bas.	Si $\lim_{x\to a^-} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} =$ de f admet au point$A($ tangenteverticale dirigée

4. Si $\lim\limits_{x\to a^+} \dfrac{f(x)-f(a)}{x-a} = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to a^-} \dfrac{f(x)-f(a)}{x-a} = -\infty$ alors la courbe de f admet au point $A(a, f(a))$ deux demi-tangentes verticales dirigées vers le haut d'équation $x = a$. A est un **point de rebroussement**.
5. Si $\lim\limits_{x\to a^+} \dfrac{f(x)-f(a)}{x-a} = -\infty$ et $\lim\limits_{x\to a^-} \dfrac{f(x)-f(a)}{x-a} = +\infty$ alors la courbe de f admet au point $A(a, f(a))$ deux demi-tangentes verticales dirigées vers le bas d'équation $x = a$. A est un point de rebroussement.
6. Si $\lim\limits_{x\to a^+} \dfrac{f(x)-f(a)}{x-a} = +\infty$ et $\lim_{x\to a^-} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} = +\infty$ alors la courbe de f admet au point $A(a, f(a))$ deux demi-tangentes verticales de même équation $x = a$ l'une dirigée vers le haut et l'autre vers le bas. A est un point d'inflexion.
7. Si $\lim\limits_{x\to a^-} \dfrac{f(x)-f(a)}{x-a} = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to a^-} \dfrac{f(x)-f(a)}{x-a} = -\infty$ alors la courbe de f admet au point $A(a, f(a))$ deux demi-tangentes verticales de même équation $x = a$ l'une dirigée vers le haut et l'autre vers le bas. A est un point d'inflexion à tangente verticale.

V - Continuité et dérivabilité sur un intervalle

Définition 26. — f est continue (resp. dérivable) sur l'intervalle I si elle est continue (resp. dérivable) en tout réel $x \in I$.

— La fonction qui à tout réel x de I associe le nombre dérivé de f en x s'appelle **fonction dérivée ou dérivée** de f et est notée $f' : x \mapsto f'(x)$.
L'ensemble des réels x pour lesquels $f'(x)$ existe est appelé **ensemble ou domaine de dérivabilité de** f : c'est le domaine de définition de f'.

Rappelons ci-dessous les fonctions dérivées de certaines fonctions usuelles.

Fonction f définie par :	**I**
$f(x) = k$, avec k réel	
$f(x) = x^n$ avec $n \in \mathbb{Q}$	
$f(x) = \frac{1}{x}$	
$f(x) = \sqrt{x}$	
$f(x) = \cos x$	
$f(x) = \sin x$	
$f(x) = \tan x$	]

Propriété 27. Soient f et g deux fonctions continues (resp. dérivables) sur un intervalle I.

- les fonctions $f + g$ et fg sont continues (resp. dérivables) sur I.
- Si de plus $g \neq 0$ sur I alors les fonctions $\frac{1}{g}$ et $\frac{f}{g}$ sont continues (resp. dérivables) sur I.

Cas particuliers

- Les fonctions polynômes sont continues et dérivables sur $\mathbb{R}$.
- Les fonctions rationnelles sont continues et dérivables sur tout intervalle de leur ensemble de définition.
- Les fonctions $x \mapsto \cos x$ et $x \mapsto \sin x$ sont continues et dérivables sur $\mathbb{R}$.
- La fonction $x \mapsto \tan x$ est continue et dérivable sur tout intervalle du type $\left](2k-1)\frac{\pi}{2}\,,\,(2k+1)\frac{\pi}{2}\right[$, $k \in \mathbb{Z}$.

Image d'un intervalle par une fonction continue

Nous admettons le théorème suivant.

Théorème 28. Si f est une fonction *continue* sur un intervalle I alors $f(I)$ est un intervalle .

Cas particuliers
Le tableau suivant donne les images de quelques intervalles simples par une fonction **continue et strictement monotone** . a et b peuvent être éventuellement $+\infty$ ou $-\infty$.

I intervalle	f continue et stricter sur I
$[a\,,\,b]$	$[f(a)\,,\,f($
$[a\,,\,b[$	$[f(a)\,,\,\lim_{x\to}$
$]a\,,\,b]$	$]\lim_{x\to a^+} f(x)$
$]a\,,\,b[$	$]\lim_{x\to a^+} f(x)\,,\,\lim$

Continuité et dérivabilité de la composée de deux fonctions

Propriété 29. · Si f est continue sur l'intervalle I et g continue sur l'intervalle $f(I)$ alors la fonction $g \circ f$ est continue sur I.
· Si f est dérivable sur l'intervalle I et g dérivable sur l'intervalle $f(I)$ alors la fonction $g \circ f$ est dérivable sur I et pour tout $x \in I$, on a :

$$(g \circ f(x))' = f'(x) \times g'[f(x)]$$

Exemple 30. Soit $h(x) = \cos \frac{1}{x}$. Calculons $h'(x)$.On a $D_h =]-\infty\,,\,0[\cup]0\,,\,+\infty[$**Attention** : Avant de dériver une fonction, il est recommandé de justifier sa dérivabilité même si la question ne le précise pas.
La fonction rationnelle $x \longmapsto \frac{1}{x}$ est définie sur $\mathbb{R}^*$ donc dérivable sur chacun des intervalles $]-\infty\,,\,0[$ et $]0\,,\,+\infty[$.
La fonction $x \longmapsto \cos x$ est dérivable sur $\mathbb{R}$; en particulier sur chacun des intervalles $]-\infty\,,\,0[$ et $]0\,,\,+\infty[$
D' où par composée h est dérivable sur chacun des intervalles $]-\infty\,,\,0[$ et $]0\,,\,+\infty[$.
Pour tout $x \neq 0$: $h'(x) = \frac{1}{x^2}\sin\frac{1}{x}$

Conséquence 31. · Si f est dérivable (resp. continue) sur I et g dérivable sur $\mathbb{R}$ alors $g \circ f$ est dérivable (resp. continue) sur I.
· Si f est **continue et positive** sur I alors $\sqrt{f}$ est continue sur I.
· Si f est **dérivable et strictement positive** sur I alors $\sqrt{f}$ est dérivable sur I.

Formules de dérivations

Soient u et v deux fonctions dérivables, $r \in \mathbb{Z}^*$ et $k \in \mathbb{R}$

Fonction	ku	$u+v$	uv	$\frac{u}{v}$	$\frac{1}{v}$	$\sqrt{u}$	u^r	$v \circ u$
Dérivée	ku'	$u'+v'$	$u'v+v'u$	$\frac{u'v-v'u}{v^2}$	$-\frac{v'}{v^2}$	$\frac{u'}{2\sqrt{u}}$	$ru'u^{r-1}$	$u' \times (v' \circ u$

Exercice 32. Soit $f(x) = \frac{(x+1)\sqrt{x-2}}{x-1}$.

1. Etudier la continuité de f sur son D_f.
2. Etudier la dérivabilité de f sur son D_f.
3. Calculer $f'(x)$.

Démonstration. 1. $f(x)$ existe si et seulement, si $x \geq 2$ et $x \neq 1$ donc $D_f = [2\,,\,+\infty[$
1^re^ méthode
La fonction $x \longmapsto \frac{x+1}{x-1}$ est une fonction rationnelle définie sur $[2\,,\,+\infty[$ donc continue sur $[2\,,\,+\infty[$
La fonction $x \longmapsto x-2$ est continue et positive sur $[2\,,\,+\infty[$ donc la fonction $x \longmapsto \sqrt{x-2}$ est

continue sur $[2\,,\,+\infty[$ par composée.
On en déduit que f est continue sur D_f comme produit et composée de fonctions continues.
2re méthode
La fonction $x \mapsto x+1$ est continue sur $[2\,,\,+\infty[$,
La fonction $x \mapsto x-1$ est continue et non nulle sur $[2\,,\,+\infty[$,
La fonction $x \mapsto x-2$ est continue et positive sur $[2\,,\,+\infty[$ donc la fonction $x \mapsto \sqrt{x-2}$ est continue sur $[2\,,\,+\infty[$ par composée.
On en déduit que f est continue sur D_f comme produit, quotient et composée de fonctions continues.

2. **1re méthode**
La fonction $x \mapsto \frac{x+1}{x-1}$ est une fonction rationnelle définie sur $[2\,,\,+\infty[$ donc dérivable sur $[2\,,\,+\infty[$
La fonction $x \mapsto x-2$ est dérivable et strictement positive sur $]2\,,\,+\infty[$ donc la fonction $x \mapsto \sqrt{x-2}$ est dérivable sur $]2\,,\,+\infty[$. par composée.
On en déduit que f est dérivable sur $]2\,,\,+\infty[$ comme produit et composée de fonctions dérivables.
2re méthode
La fonction $x \mapsto x+1$ est dérivable sur $[2\,,\,+\infty[$
La fonction $x \mapsto x-1$ est dérivable et non nulle sur sur $]2\,,\,+\infty[$
La fonction $x \mapsto x-2$ est dérivable et strictement positive sur $]2\,,\,+\infty[$ donc la fonction $x \mapsto \sqrt{x-2}$ est dérivable sur $]2\,,\,+\infty[$ par composée.
On en déduit que f est dérivable sur $]2\,,\,+\infty[$ comme produit, quotient et composée de fonctions dérivables.
3. $\forall x > 2,\ f'(x) = \frac{-2}{(x-1)^2} \times \sqrt{x-2} + \frac{1}{2\sqrt{x-2}} \times \dfrac{x+1}{x-1}$
Soit $f'(x) = \frac{x^2-4x+7}{2(x-1)^2\sqrt{x-2}}$

□

Dérivée et sens de variations

Théorème 33. Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I.

- f est strictement croissante sur I si et seulement si : $\forall x \in I,\ f'(x) \geq 0$ et f' ne s'annule qu'en un nombre fini de points de I.
- f est strictement décroissante sur I si et seulement si : $\forall x \in I,\ f'(x) \leq 0$ et f' ne s'annule qu'en un nombre fini de points de I.
- f est croissante sur I si et seulement si : $\forall x \in I,\ f'(x) \geq 0$.
- f est décroissante sur I si et seulement si : $\forall x \in I,\ f'(x) \leq 0$.

Signe d'une fonction à partir de ses variations

Les cas classiques :

x			
$f'(x)$	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\searrow$	$+\text{min}$	$\nearrow$

Si $f(x)$ admet un minimum positifsur I alors f est positive sur I.

x			
$f'(x)$	$+$	0	$-$
$f(x)$	$\nearrow$	max	$\searrow$

Si $f(x)$ admet un maximum négatifsur I alors f est négative sur I.

x		α	
$f'(x)$	$-$		$-$
$f(x)$	$\searrow$	0	$\searrow$

$f(x)$ est positif si $x \leq \alpha$. $f(x)$ est négatif si $x \geq \alpha$.

x		α	
$f'(x)$	$+$		$+$
$f(x)$	$\nearrow$	0	$\nearrow$

$f(x)$ est négatif si $x \leq \alpha$. $f(x)$ est positif si $x \geq \alpha$.

Dérivées successives

Définition 34. Soit f une fonction dérivable sur I, sa fonction dérivée f' est appelée*fonction dérivée première* et est notée $f^{(1)}$.
Si f' est dérivable sur I, on dit que f est deux fois dérivable alors dans ce cas la fonction dérivée de f' c'est à dire $(f')'$ est appelée *fonction dérivée seconde* de f et est notée f'' ou $f^{(2)}$.
Si f'' est à son tour dérivable sur I, alors sa fonction dérivée est appelée *fonction dérivée troisième* de f et est notée f''' ou $f^{(3)}$.
Par itération si la dérivée n-ième de f existe, on la note $f^{(n)}$.

Exemple 35. $f(x) = x \sin x$
$f'(x) = \sin x + x\cos x$, $f''(x) = 2\cos x + x \sin x$, $f^{(3)}(x) = -3\sin x + x\cos x$, etc.

Remarque 36. · $f^{(n)}$ est aussi appelée *dérivée d'ordre n de f*.
· En **Physique** $f', f'', \cdots, f^{(n)}$ sont notées respectivement $\frac{df}{dx}, \frac{d^2f}{dx^2}, \cdots, \frac{d^nf}{dv^n}$.

Notion de différentielle

Une petite variation Δx de la variable x provoque une petite variation $\Delta y = f(x+\Delta x) - f(x)$ des images.
Lorsque Δx est voisin de 0, on assimile $dx = \Delta x$ et on peut écrire : $\frac{dy}{dx} = f'(x)$ ou $dy = f'(x)dx$ ou $dy = f'(x)\Delta x$.

Exemple 37. Pour la fonction $y = 2x^2 - x$ avec $x = 1$ et $\Delta x = 0,01$
Vérifier que la différentielle $dy = 0,03$ et l'accroissement $\Delta y = 0,0302$

Position d'une courbe par rapport à sa tangente

Nous admettons le résultat suivant :
Si f est une fonction deux fois dérivable sur I et si f'' est négative sur I, alors la courbe $\mathscr{C}$ de f est en dessous de toutes ses tangentes. On dit que $\mathscr{C}$ est **concave.**
Si f est une fonction deux fois dérivable sur I et si f'' est positive sur I, alors la courbe $\mathscr{C}$ de f est en dessus de toutes ses tangentes. On dit que $\mathscr{C}$ est **convexe.**

Point d'inflexion

Définition 38. On dit que la courbe de f admet un point d'inflexion d'abscisse x_0 si la courbe y traverse sa tangente.

Théorème 39. Si f est deux fois dérivable sur un intervalle ouvert I contenant x_0 et si f'' *s'annule en changeant de signe en* x_0 alors le point de la courbe d'abscisse x_0 est un **un point d'inflexion**.

Exemple 40. Reprenons l'exemple précédent $f : x \mapsto x^3 - 3x^2$
f est dérivable sur $\mathbb{R}$ car fonction polynôme.
On a $f'(x) = 6x^2 - 6x$ et $f''(x) = 6x - 6$
$f''(x) = 0 \Longleftrightarrow x = 1$

x	$-\infty$		1		$+\infty$
signe de $f''(x)$		$+$	0	$-$	

D'après le tableau de signes, f'' s'annule en 1 en changeant de signe ; donc le point $(1, -2)$ est un point d'inflexion de la courbe.

Inégalité des accroissements finis

Nous admettons le théorème de l'inégalité des accroissements finis et nous donnons ici les deux formes.

Première forme

Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I. On suppose qu'il existe deux réels m et M tels que : $m \leq f'(x) \leq M$ pour tout $x \in I$.
Alors pour tous a et b de I $(b < a)$ on a : $m(b-a) \leq f(b) - f(a) \leq M(b-a)$

Deuxième forme

Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I. On suppose qu'il existe un réel M tel que : $|f'(x)| \leq M$ pour tout $x \in I$.
Alors pour tous a et b de I on a : $|f(b) - f(a)| \leq M|b-a|$

Exercice 41. Soit f la fonction définie sur $\left[0\,,\,\frac{\pi}{4}\right]$ par $f(x) = \sin x$
Démontrer que $\forall x \in \left[0\,,\,\frac{\pi}{4}\right]$ on a : $\frac{\sqrt{2}}{2}x \leq \sin x \leq x$

Démonstration. La fonction f est dérivable sur $I = \left[0\,,\,\frac{\pi}{4}\right]$ et $\forall \in I$ on a : $f'(x) = \cos x$
Or $\forall x \in \left[0\,,\,\frac{\pi}{4}\right]$ on a $\frac{\sqrt{2}}{2} \leq \cos x \leq 1$ donc pour $a = 0$ et $b = x \in I$,
le T.I.A.F donne : $-1 \times \frac{\sqrt{2}}{2}(x-0) \leq \sin x - \sin 0 \leq 1 \times (x-0)$
d'où $\frac{\sqrt{2}}{2}x \leq \sin x \leq x$. □

VI - Théorème des valeurs intermédiaires

Théorème 42 (T.V.I)**.** Soit f une fonction **continue** sur un intervalle $[a\,,\,b]$.
Pour tout nombre réel β compris entre $f(a)$ et $f(b)$, il existe **au moins** un réel $\alpha \in [a\,,\,b]$ tel que $f(\alpha) = \beta$.

Conséquence 1

Si f une fonction **continue et strictement monotone** sur l'intervalle $[a\,,\,b]$ alors pour tout nombre réel β compris entre $f(a)$ et $f(b)$, il existe **un unique** un réel $\alpha \in [a\,,\,b]$ tel que $f(\alpha) = \beta$.

Conséquence 2

a, b, c et d désignent soit des réels, soit $+\infty$, soit $-\infty$.
Soit f une fonction **continue et strictement monotone** sur l'intervalle $]a\,,\,b[$ telle que :

$$\lim_{x\to a} f(x) = c \quad \text{et} \quad \lim_{x\to b} f(x) = d$$

Alors pour tout nombre réel β compris entre c et d, l'équation $f(x) = \beta$ admet une solution unique $\alpha \in]a\,,\,b[$.

Exercice 43. Soit f la fonction définie par $f(x) = x^3 + x + 1$.

1. Etudier les variations de f.
2. Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une seule solution α dans $\mathbb{R}$.
   En déduire que $\alpha \in]-1\,,\,0[$
3. Déterminer un encadrement de α d'amplitude $0,01$.

Démonstration. 1. f est définie, continue et dérivable sur $\mathbb{R}$.
$f'(x) = 3x^2 + 1 > 0\ \forall x \in \mathbb{R}$ Donc f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$
$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} x^3 + x + 1 = \lim\limits_{x\to+\infty} x^3 = +\infty$
$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} x^3 + x + 1 = \lim\limits_{x\to-\infty} x^3 = -\infty$

x	$-\infty$		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$+\infty$

2. f est continue et strictement croissante sur $\mathbb{R}$ à valeurs dans sur $\mathbb{R}$. Or $0 \in \mathbb{R}$ donc d'après la conséquence du T.V.I il existe un unique réel α tel que $f(\alpha) = 0$.
   De plus $f(-1)f(0) = -1 \times 1 < 0$ donc

$$f(-1) < 0 < f(0)$$

$$\Leftrightarrow f(-1) < f(\alpha) < f(0)$$

$$\Leftrightarrow -1 < \alpha < 0 \quad \text{car } f \text{ est strictement croissante.}$$

3. Encadrement de α d'amplitude $0,01$ par **la méthode du balayage** .
   · Recherchons d''abord un encadrement de α par deux décimaux consécutifs d'ordre 1.
   Calculons de proche en proche les images par f des nombres décimaux d'ordre 1 de l'intervalle $[-1\,,\,0[$ jusqu'à ce qu'on observe un changement de signe.

x	-0,9	-0,8	-0,7	- 0,6	-0,5	-
f(x)	-	-	-	+		

   On obtient $-0,7 < \alpha < -0,6$· Recherchons ensuite un encadrement de α par deux décimaux consécutifs d'ordre 2.
   Calculons de proche en proche les images par f des nombres décimaux d'ordre 2 de l'intervalle $]-0,7\,,\,-0,6[$ jusqu'à ce qu'on observe un changement de signe.

x	-0,69	-0,68	-0,67	- 0,66	-0,65	-0,64	-0,63	-0,62	-0,61
f(x)	-	+							

On obtient $-0,69 < \alpha < -0,68$

□

Conséquence 3

Si f est **continue et strictement monotone** sur l'intervalle $[a\,,\,b]$ et si $f(a)f(b)<0$
Alors l'équation $f(x)=0$ admet une unique solution $\alpha \in [a\,,\,b]$.

Remarque 44. Pour montrer que l'équation $f(x)=x$ admet une unique solution dans l'intervalle I; on pose $g(x)=f(x)-x$ et on applique le T.V.I à la fonction g sur l'intervalle I.

Exemple 45. Montrons que l'équation $\cos x = x$ admet une unique solution α telle que $\frac{\pi}{6} \leq \alpha \leq \frac{\pi}{4}$.
Réponse
Remarquons que $\cos x = x \Leftrightarrow \cos x - x = 0$
Posons la fonction $f(x)=\cos x - x$ pour $x \in \left[\frac{\pi}{6}\,,\,\frac{\pi}{4}\right]$.
f est dérivable sur $\left[\frac{\pi}{6}\,,\,\frac{\pi}{4}\right]$ comme somme de deux fonctions dérivables.
Pour $x \in \left[\frac{\pi}{6}\,,\,\frac{\pi}{4}\right]$, $f'(x)=-\sin x - 1 < 0$; donc f est strictement décroissante.
De plus $f(\frac{\pi}{6})=\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{\pi}{6}>0$ et $f(\frac{\pi}{4})=\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{\pi}{4}<0$.
Donc f est continue et strictement décroissante sur l'intervalle $\left[\frac{\pi}{6}\,,\,\frac{\pi}{4}\right]$
et $f(\frac{\pi}{6})f(\frac{\pi}{4})<0$d'où l'équation $f(x)=0$ admet une unique solution $\alpha \in \left[\frac{\pi}{6}\,,\,\frac{\pi}{4}\right]$.

Fonction réciproque d'une fonction continue et strictement monotone

Théorème 46 (Théorème de la bijection)**.** Soit f une fonction continue et strictement monotone sur l'intervalle I; alors f réalise une bijection de I vers l'intervalle $f(I)$.
En plus sa bijection réciproque f^{-1} est continue et strictement monotone sur l'intervalle $f(I)$ et a le même sens de variation que f.
Les courbes représentatives de f et f^{-1}, dans un repère orthonormé sont symétriques par rapport à la droite d'équation $y=x$ (la première bissectrice du repère).

· Si de plus f est dérivable sur I et f' **ne s'annule pas** sur I alors f^{-1} dérivable sur $f(I)$ et

$$(f^{-1})'(y)=\frac{1}{f'(f^{-1}(y))} \qquad \forall y \in f(I)$$

Remarque 47. Posons $f(a)=b$
Si f est dérivable en a et $f'(a)\neq 0$ alors f^{-1} est dérivable en b et $(f^{-1})'(b)=\frac{1}{f'(a)}$.
Attention
Si f est dérivable en a et $f'(a)=0$ ou n'existe pas alors f^{-1} n'est pas dérivable en b.

Exercice 48. Soit f la fonction définie par $f(x)=4x^2+4x+2$.

1. Etablir le tableau de variations de f.
2. (a) Soit g la restriction de f à l'intervalle $\left[-\frac{1}{2}\,,\,+\infty\right[$.Montrer que g réalise une bijec-

tion de $\left[-\frac{1}{2}\ ,\ +\infty\right[$ vers un intervalle J à préciser.

(b) Justifier que g^{-1} est dérivable en 2 puis calculer $(g^{-1})'(2)$.

Démonstration. 1. f est définie, continue et dérivable sur $\mathbb{R}$.

$f'(x) = 8x + 4\ \forall x \in \mathbb{R}$

$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} 4x^2 + 4x + 2 = \lim_{x\to+\infty} 4x^2 = +\infty$

$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} 4x^2 + 4x + 2 = \lim_{x\to-\infty} 4x^2 = +\infty$

x	$-\infty$		$-\frac{1}{2}$		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	1	$\nearrow$	$+\infty$

2. (a) g est continue et strictement croissante sur $\left[-\frac{1}{2}\ ,\ +\infty\right[$ donc réalise une bijection $\left[-\frac{1}{2}\ ,\ +\infty\right[$ de vers $g\left(\left[-\frac{1}{2}\ ,\ +\infty\right[\right)$

   Or $g\left(\left[-\frac{1}{2}\ ,\ +\infty\right[\right) = \left[g(-\frac{1}{2})\ ,\ \lim_{x\to+\infty} g(x)\right[= [1\ ,\ +\infty[$

   D'où $\underline{J = [1\ ,\ +\infty[}$.

   (b) Pour répondre à cette question, il faut calculer l' antécédent de 2 par g.

   $g(x) = 2 \Leftrightarrow 4x^2 + 4x + 2 = 2 \Leftrightarrow 4x^2 + 4x = 0 \Leftrightarrow x = 0\ ou\ x = -1$

   Le seul antécédent dans $\left[-\frac{1}{2}\ ,\ +\infty\right[$ est 0.

   Or g est dérivable en 0 et $g'(0) = f'(0) = 4 \neq 0$ donc g^{-1} est dérivable en 2.

   On a $(g^{-1})'(2) = \frac{1}{g'(0)} = \frac{1}{4}$.

□

2 Dénombrement (TS2)

I - Ensemble fini - Cardinal

Définition 1. Soit $n \in \mathbb{N}$.
Lorsqu'un ensemble E a n éléments, on dit que E est un ensemble fini et son cardinal est n.
On note alors cardE $= n$.

Exemple 2.
— $E = \{a, b, c\}$ est un ensemble fini et cardE $= 3$.
— Si $E = \emptyset$, il comporte zéro élément et card$\emptyset = 0$
— certains ensembles ne sont pas finis tels que $\mathbb{N}$, $\mathbb{R}$, $[0\,,\,1]$

Remarque 3. Résoudre un problème de dénombrement consiste généralement à déterminer le cardinal d'un ensemble fini.

Parties d'un ensemble fini

— A est une partie ou sous-ensemble de E si tout élément de A est élément de E.
On note $A \subset E$ (lire A inclus dans E). Donc cardA$\leq$ cardE.
— L'ensemble constitué par toutes les parties de E se note $\mathscr{P}(E)$

Remarque 4. L'ensemble E est une partie de lui-même et l'ensemble vide $\emptyset$ est une partie de tout ensemble (c'est une convention !)
E est la partie pleine et $\emptyset$ la partie vide.

Théorème 5. AdmisLe nombre de parties d'un ensemble à n éléments est 2^n.

Exemple 6. $E = \{a, b, c\}$
$\mathscr{P}(E) = \{\{a, b\}; \{a, c\}; \{b, c\}; \{a\}; \{b\}; \{c\}; E; \emptyset\}$
Donc nous avons recensé (dénombré) 8 éléments pour $\mathscr{P}(E)$.
La formule du théorème est vérifiée car $8 = 2^3$, d'où card$\mathscr{P}(E) = 8$

Exercice 7. On dispose de quatre pièces de monnaie : une de 100F, une de 200F, une de 250F et une de 500F.

Réponse
Soit E l'ensemble des quatre pièces ;
$E = \{250; 100; 500; 200\}$
A chaque partie de E correspond une somme d'argent égale à la somme des éléments de cette

partie. Il y a donc autant de sommes que de parties de E.
Or card$\mathscr{P}(E) = 2^4 = 16$
Donc il y a en tout 16 sommes (théoriques) possibles.

Intersection et réunion

Soient A et B deux parties de E.

- L'ensemble des éléments communs à A et B est appelé intersection de A et B; noté $A \cap B$ (lire A inter B).
- L'ensemble des éléments qui appartiennent à A ou à B est appelé réunion de A et B; noté $A \cup B$ (lire A union B).

Remarque 8. · $A \cup B$ est l'ensemble des éléments qui appartiennent au moins à A ou B.
· Lorsque A ou B n'ont aucun élément en commun, on dit qu'ils sont disjoints. Dans cas $A \cup B$ est l'ensemble des éléments qui appartiennent à A ou bien à B.

Théorème 9.
$$\text{card}(A \cup B) = \text{card}A + \text{card}B - \text{card}(A \cap B)$$
$$\text{Si} A \cap B = \emptyset \text{alors} \quad \text{card}(A \cup B) = \text{card}A + \text{card}B$$

Exercice 10. Dans une classe de 30 élèves, 19 font espagnol, 18 font arabe comme deuxième langue facultative. Sachant que tous les élèves étudient au moins l'une deux langues. Déterminer le nombre d'élèves qui étudient les deux langues à la fois.

Réponse
Soit A l'ensemble des élèves qui étudient l'espagnol et B celui de ceux qui font arabe. l'ensemble des élèves qui étudient les deux langues à la fois est $A \cap B$ soit x son cardinal.

$$\text{card}(A \cup B) = 19 + 18 - x = 30$$

Donc on trouve $x = 7$

Complémentaire

Soit A une partie de E
Le complémentaire de A dans E, noté $\overline{A}$, est l'ensemble des éléments de E qui ne sont pas dans A.

Exemple 11.
$$E = \{0; 1; 2; \cdots; 2014\}$$
Si $A = \{n \in E \,/\, n \geq 4\}$ alors $\overline{A} = \{n \in E \,/\, n \leq 3\}$

Remarque 12. — Soit A l'ensemble « $\cdots$ obtenir au moins k éléments $\cdots$ » alors $\overline{A}$ est l'ensemble « $\cdots$ obtenir au plus $k-1$ éléments $\cdots$ »

— Si A l'ensemble « $\cdots$ avoir au moins un $\cdots$ » alors $\overline{A}$ est l'ensemble « n'avoir aucun »

Cardinal du complémentaire

$$\text{card}\overline{A} = \text{card}E - \text{card}A$$

Soient A et B deux parties non disjointes de E.
On note $\overline{A}$ et $\overline{B}$ respectivement les complémentaires de A et B.

	A	$\overline{A}$	Totaux
B	$\text{card}(A \cap B)$	$\text{card}(\overline{A} \cap B)$	$\text{card}B$
$\overline{B}$	$\text{card}(A \cap \overline{B})$	$\text{card}(\overline{A} \cap \overline{B})$	$\text{card}\overline{B}$
Totaux	$\text{card}A$	$\text{card}\overline{A}$	$\text{card}E$

Exercice 13. Dans un camp de vacances hébergeant 80 personnes. 50 font la natation, 33 pratiquent le tennis, 14 pratiquent les deux sports à la fois. Calculer :

1. Le nombre de personnes qui pratiquent uniquement la natation ;
2. Le nombre de personnes qui ne pratiquent aucun sport.
3. Le nombre de personnes qui pratiquent au moins l'un des deux sports.
4. Le nombre de personnes qui pratiquent la natation ou bien le tennis.

Réponse

N et T sont respectivement ensembles de ceux qui font natation et tennis.

	N
T	14
$\overline{T}$	36
Totaux	50

fois le tableau réussi, on obtient les réponses suivantes :

1. $\text{card}N \cap \overline{T} = 36$
2. $\text{card}\overline{N} \cap \overline{T} = 11$
3. $\text{card}N \cup T = \text{card}N + \text{card}T - \text{card}N \cap T = 50 + 13 - 14 = 49$
4. $\text{card}N \cap \overline{T} + \text{card}\overline{N} \cap T = 36 + 19 = 55$

Propriétés classiques

Soient A, B et C trois parties d'un ensemble finis E.

$$A \cup B = B \cup A \quad \text{et} \quad A \cap B = B \cap A$$

$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$$

$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$$

$$\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B} \quad \text{et} \quad \overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B} \quad \text{Lois de Morgan}$$

$$A = (A \cap B) \cup (A \cap \overline{B})$$

$$A \cup \overline{A} = E \quad \text{et} \quad A \cap \overline{A} = \emptyset$$

Produit cartésien

Définition 14 (Cas de deux ensembles)**.** Soient A et B deux ensembles finis non vides.
On appelle produit cartésien A par B, noté $A \times B$, l'ensemble des couples (x, y) où $x \in A$ et $y \in B$.

Exemple 15. Prenons $A = \{a, b\}$ et $B = \{1;2;3\}$
$A \times B = \{(a,1);(a,2);(a,3);(b,1);(b,2);(b,3)\}$

Cardinal du produit cartésien

Il y a 2 choix possibles a ou b pour écrire le premier terme du couple.Maintenant pour chacun de ces choix, il y a 3 choix possibles pour écrire le deuxième terme du couple.On en conclut qu'il y a 2×3 couples possibles; c'est à dire card$A$. card$B$ soit 8.

Théorème 16.

$$\text{card} A \times B = \text{card} A \cdot \text{card} B$$

Remarque 17. $A \times B \neq B \times A$ mais card $A \times B =$ card $B \times A$

Généralisation

- Cette définition s'étend à un nombre quelconque d'ensembles finis : le produit cartésien des ensembles $E_1, E_2, E_3, \cdots, E_p$ est l'ensemble noté
$E_1 \times E_2 \times E_3 \times \cdots \times E_p$.
- Le produit cartésien $\underbrace{E \times E \times \cdots \times E}_{pfois}$ est noté E^p.
- Les éléments du produit cartésien de deux ensembles sont appelés couples ; les éléments du produit cartésien de trois ensembles sont appelés triplets ; les éléments du produit cartésien $E_1 \times E_2 \times E_3 \times \cdots \times E_p$ sont appelés p-uplets.
- $\text{card}E_1 \times E_2 \times E_3 \times \cdots \times E_p = \text{card}E_1 \cdot \text{card}E_2 \cdot \text{card}E_3 \cdot \cdots \cdot \text{card}E_p$
- Pour tout ensemble E a n éléments $\text{card}E^p = n^p$.

Exercice 18. 1. On lance simultanément un jeton de 10F (ses faces sont notées Pile et Face) et un dé à quatre faces numérotées de 1 à 4. Quels sont les résultats possibles ? Combien sont-ils ?

2. Combien de mots de quatre lettres distinctes ou non peut-on constituer avec l'alphabet ?

Réponse

1. Posons $A = \{P, F\}$ et $B = \{1; 2; 3; 4\}$
A l'apparition de la face Pile (P) il y aura 4 numéros possibles à lui associer et à l' apparition de la face Face (F) il y aura 4 numéros possibles à lui associerLes résultats possibles sont : $(P, 1); (P, 2)(P, 3); (P, 4); (F, 1); (F, 2)(F, 3); (F, 4)$ ce sont donc les éléments du produit cartésien $A \times B$.
D'où il y a $\text{card}A \times B = 2 \times 4 = 8$ résultats possibles.
2. Notons E l'ensemble des 26 lettres de l'alphabet.
La $1^{\text{ière}}$ lettre est un élément de E ; la $2^{\text{ième}}$ lettre est un élément de E ; la $3^{\text{ième}}$ lettre est un élément de E et la $4^{\text{ième}}$ lettre est un élément de E donc un mot est un 4-uplet d'éléments de E : donc il y a $\text{card}E^4 = 26^4$mots possibles.

Conséquence 19. le principe multiplicatifSi une situation comporte p étapes successives offrant chacune n_i possibilité(ou choix) alors le nombre total de possibilités est :

$$n_1 \times n_2 \times \cdots \times n_p$$

Exemple 20. Un homme pour se rendre à un mariage doit choisir une chemise, un pantalon et une veste. Sachant qu'il possède 5 chemises, 2 vestes et 4 pantalons, de combien de façons peut-il effectuer son choix ?

Réponse
Il a 5 possibilités pour choisir la chemise, 2 possibilités pour choisir la veste et 4 possibilités pour choisir le pantalon.D'après le principe multiplicatif il a $5 \times 2 \times 4 = 40$ choix .

Partition d'un ensemble

Définition 21. Soient $B_1, B_2, \cdots, B_p$ des parties non vides de E. On dit qu'elles forment une partition de E si :

— ils sont deux à deux disjointes

— et $B_1 \cup B_2 \cup \cdots \cup B_p = E$

Exemple 22. Soit E l'ensemble tel que $E = \{a, b, c, d, e, f\}$

- les ensembles $\{a\}; \{b, c, f\}; \{d, e\}$ forment une partition de E.
- les ensembles $\{a\}; \{b, c, f\}; \{a, b, d, e\}$ ne forment pas une partition de E car ils ne sont pas disjoints deux à deux.

Propriété 23. Soit E un ensemble fini et $E_1, E_2, \cdots, E_p$ des ensembles formant une partition de E.
On a $\text{card}E = \text{card}E_1 + \text{card}E_2 + \text{card}E_3 + \cdots + \text{card}E_p$

Exercice 24. Combien de nombres peut-on former avec des chiffres distincts choisis parmi les éléments de $E = \{1; 2; 3; 4; 5\}$?

Réponse
On peut écrire des nombres de 1, 2, 3, 4, 5 chiffres.
On désignent respectivement par A_1, A_2, A_3, A_4, A_5 les ensembles ' distincts deux à deux) de ces nombres et par A la réunion de ces cinq ensembles.
On a $\text{card}A_1 = 5$ $\quad \text{card}A_2 = 5\times4$ $\quad \text{card}A_3 = 5\times4\times3$ $\quad \text{card}A_4 = 5\times4\times3\times2$ $\quad \text{card}A_5 = 5\times4\times3\times2\times1$
Donc $\text{card}A = 5 + 20 + 60 + 120 + 120 = 325$

Remarque 25. Pour résoudre un problème de dénombrement, il peut-être utile d'effectuer une partition de l'ensemble à dénombrer. Le cardinal de cet ensemble est alors la somme des cardinaux des en sembles de la partition.

Propriété 26. Nous retrouvons la formule suivante, déjà rencontrée.

$$\text{card}A + \text{card}\overline{A} = E$$

Car A et $\overline{A}$ forment une partition de E.

Conséquence 27. le principe additifSi une situation offre p choix comportant chacun n_i

possibilités alors le nombre de choix possibles est :

$$n_1 + n_2 + \cdots + n_p$$

Exemple 28. On veut choisir deux personnes de nationalités différentes parmi 5 camerounais, 10 malgaches et 6 sénégalais. Combien y a t-il de possibilité ?

Réponse
Les deux personnes peuvent être choisies :

— l'une camerounaise et l'autre malgache : le nombre de choix est égal à 5×10

— ou l'une camerounaise et l'autre sénégalaise : le principe additif égal à 5×6

— ou l'une malgache et l'autre sénégalaise : le nombre de choix est égal à 10×6

D'après le principe additif, le nombre de choix possibles est
$5 \times 10 + 5 \times 6 + 10 \times 6 = 140$

II - p-listes

Définition 29. Soit E un ensemble à n éléments et p un entier naturel non nul.
On appelle $p - liste$ ou $p - uplet$ de E, tout élément de E^p.

Exemple 30. · $(1,1,1)$; $(0,0,1)$; $(0,0,0)$; sont des 3-listes de l'ensemble $\{0;1\}$.
· (P,P,F,F,F,P,F,P,F,F) est une 10-liste de l'ensemble $\{P;F\}$: il correspond, par exemple, à un résultat de 10 lancers consécutifs d'une pièce de monnaie(pile ou face).

Autre formulation de la définition

Une $p - liste$, est liste de p éléments choisis parmi les n éléments de E **ordonnés et non nécessairement distincts**.
Dans une $p - liste$, on tient compte de l'ordre des éléments de la liste et un élément choisi peut être répété plusieurs fois dans la liste.

Théorème 31. Le nombre de $p - listes$ d'un ensemble à n éléments est n^p.

Démonstration
Il y a n choix possibles pour le 1^{ier} élément de la liste.
Il y a n choix possibles pour le $2^{\text{ième}}$ élément de la liste.
Il y a n choix pour le $3^{\text{ième}}$ élément de la liste.
....
Il y a n choix possibles pour le $\text{p}^{\text{ième}}$ élément de la liste.
D'après le principe multiplicatif, on a $\underbrace{n \times n \times n \times \cdots \times n}_{p fois} \quad p - listes.$

Exercice 32. Une urne contient 15 boules numérotées de 1 à 15. On en tire trois successivement en remettant à chaque fois la boule tirée. Combien y a t-il de tirages possibles ?

Réponse
Un résultat d'un tirage peut se représenter par un triplet (x_1, x_2, x_3) où x_1 désigne le numéro de la $1^{\text{ière}}$ boule, x_2 celui de la $2^{\text{ième}}$ boule, x_3 celui de la $3^{\text{ième}}$.
Donc un résultat est une $3-liste$ de l'ensemble des 15 numéros, le nombr de tirages possibles est 15^3

Conseil
Dans toute situation où on l'on choisit successivement avec remise p éléments parmi n éléments, on applique la formule des $p-listes$ pour déterminer le nombre de choix possibles.

Remarque 33 (Nombre d'applications). n^p est le nombre d'applications d'un ensemble de départ à p éléments vers un ensemble d'arrivée à n éléments.

$$(\text{cardinal ensemble d'arrivée})^{\text{cardinal ensemble de départ}}$$

Exemple 34. On veut ranger 15 livres dans un bibliothèque comportant 3 étagères.
C'est le nombre d'"applications de l'ensemble des livres vers l'ensemble d'arrivée des étagères ; donc il y a $3^{15} = 14348907$

III - Arrangements

Définition 35. Soit E un ensemble à n éléments et p un entier naturel non nul tel que $p \leq n$
.
On appelle arrangement de p éléments de E, toute $p-liste$ d'éléments de E deux à deux distincts.

Autre formulation de la définition

Un arrangement de p éléments de E, est liste de p éléments choisis parmi les n éléments de E ordonnés et deux à deux distincts.
Donc dans un arrangement, on tient compte de l'ordre des éléments de la liste et chaque élément de la liste est écrit une et une seule fois.

Théorème 36. Le nombre d'arrangements de p éléments d'un ensemble E à $n$éléments, noté A_n^p est tel que :

$$A_n^p = n(n-1)(n-2)\cdots(n-p+1)$$

Démonstration
Pour déterminer le nombre d'arrangements de p éléments d'un ensemble à n éléments, on peut utiliser un arbre de choix à p niveaux.

Il y a n choix possibles pour le 1^{e} élément.
Il y a $n-1$ choix possibles pour le 2^{e} élément.
Il y a $n-2$ choix possibles pour le 3^{e} élément.
....
Il y a $n-(p-1)$ choix possibles pour le p^{e} élément .
D'après le principe multiplicatif, il y a $n \times (n-1) \times (n-2) \times \cdots \times (n-(p-1))$ arrangements de p éléments de E.

Exemple 37. · Dix athlètes participent à une course. On appelle podium l'arrivée des trois premiers.
On se propose de déterminer le nombre le nombre de podium possibles, en supposant qu'il n'y a pas d'ex æquo.
Il y a autant de podiums que d'arrangements de trois athlètes pris parmi 10, c'est à dire A_{10}^{3} .
On a :
$A_{10}^{3} = 10 \times 9 \times 8 = 720.$
· Une urne contient 10 boules numérotées de 1 à 10. On en tire quatre successivement sans remettre les boules tirées. Combien y a t-il de tirages possibles ?
Chaque tirage correspond à un arrangement de 4 éléments de l'ensemble des 10 boules.
Il y a donc $A_{10}^{4} = 10 \times 9 \times 8 \times 7 = 5040.$

Remarque 38. Si $p > n$, il est impossible de faire des arrangements.

Conseil : Dans toute situation où l'on effectue un choix de manière successive sans remise (élection de bureau avec postes, course et ordre d'arrivée...), on applique la formule des arrangements.

Notation factorielle

— Pour un nombre entier naturel n non nul, le produit $1 \rtimes 2 \rtimes 3 \rtimes \cdots \rtimes (n-1) \rtimes n$ est appelé **factorielle n** et est noté $n!$

— Par convention $0! = 1$

Exemple 39. $1! = 1$
$6! = 1 \times 2 \times 3 \times 4 \times 5 \times 6 = 720$

Propriété 40. — Soit n et p deux nombres entiers naturels non nuls tels que :$p < n$. on a $A_n^p = \frac{n!}{(n-p)!}$

— Par convention $A_n^0 = 1$

IV - Permutations

Définition 41. Soit E un ensemble à n éléments.
On appelle permutation de E un arrangement des n éléments de E.
Une permutation est un arrangement particulier; donc c'est un choix successif sans remise de n éléments parmi les n éléments de E.

Propriété 42. Le nombre de permutations d'un ensemble à n éléments est $n!$

Exemple 43. Un parieur a sélectionné trois chevaux avec lesquels il veut composer son tiercé. De combien de façons dispose-t-il pour les classer dans l'ordre ?

Réponse : le nombre de façons est $3! = 6$

Propriété 44. Le nombre de bijections d'un ensemble à n éléments vers un ensemble à n éléments est égal à $n!$

Exemple 45. Il existe $6!$ façons de placer 6 personnes autour d'une table ronde dont les places sont numérotées de 1 a 6.

Anagramme

Définition 46. On appelle une anagramme d'un mot (resp. d'un nombre), tout mot (resp. tout nombre) obtenu à partir de toutes les lettres (resp. tous les chiffres) de ce mot(resp. de ce nombre).

Exemple 47.

— Les anagrammes du mot BAC sont : CAB, BCA, BAC, CBA, ABC, ACB.
Il y en a $3! = 6$ C'est le nombres de permutations des lettres du mot.

— Les anagrammes du nombre 123 sont : 123, 321, 213, 132, 231, 312.
Il y en a $3! = 6$ C'est le nombres de permutations des chiffres du nombre.

— Les anagrammes du mot EVE sont : VEE, EVE, EEV .
Il y en a $\frac{3!}{2!} = \frac{6}{2} = 3$. La lettre E se répète 2 fois, donc on a divisé par $2!$

— Les anagrammes du mot DENOMBREMENT sont au nombre de $\frac{12!}{3!2!2!}$
La lettre E se répète 3 fois, les lettres M et N se répètent 2 fois

— Les anagrammes du nombre 12322 sont au nombre de $\frac{5!}{3!}$

Régle

$$\frac{\text{nombre de lettres (ou mot)!}}{\text{nombres de répétition!}}$$

NB Les anagrammes sont très importantes pour déterminer le nombre de positions des objets dans les tirages successifs.

V - Combinaisons

Définition 48. E étant un ensemble non vide de n éléments, p un nombre entier naturel tel que $p \leq n$.
On appelle combinaison de p éléments de E toute partie de E ayant p éléments.

Exemple 49. Considérons l'ensemble $E = \{a; e; i; o; u\}$
Donnons toutes les combinaisons à trois éléments de de E
Comptage : $\{a; e; o\}$, $\{a; i; o\}$, $\{a; u; o\}$,$\{e; u; o\}$, $\{e; u; i\}$, $\{i; u; o\}$, $\{i; u; e\}$, $\{u; i; a\}$, $\{a; i; e\}$, $\{a; u; e\}$.
Il y a 10 combinaisons de 3 éléments de E. On note par C_{10}^3 ce nombre.

Remarque 50. Dans une combinaison, on ne tient pas compte de l'ordre des éléments et il n'y a pas de répétition.

Nombre de combinaisons

Désignons par C_n^p le nombre de toutes les combinaisons à p éléments de E. et calculons C_n^p
Chaque partie à p éléments de E permet de réaliser $p!$ permutations.
Or chaque permutation obtenue est un arrangement à p éléments de E.
Le nombre d'arrangements à p éléments de E est donc égal au nombre de combinaisons à p éléments de E. multiplié par $p!$
Par conséquent : $A_n^p = p! \times C_n^p$

Propriété 51. n et p sont des nombre entiers naturels tels que : $p \leq n$.
E est un ensemble à n éléments.
Le nombre de combinaisons à p éléments de E. est : $\frac{A_n^p}{p!}$

Notation 52. $C_n^p = \dfrac{A_n^p}{p!}$

$$\text{d'où} \quad C_n^p = \frac{n!}{p!(n-p)!}$$

On montre de même que :

$$C_n^n = 1 \qquad C_n^1 = 1 \qquad C_n^{n-p} = C_n^p$$

Exercice 53. On tire simultanément cinq jetons dans un sac contenant huit jetons. Combien y a t-il de tirages possibles ?

Réponse
Les jetons étant tirés en même temps donc il n' y a ni d'ordre ni répétition des jetons.Un tirage peut être donc modélisé par une combinaison 5 éléments dans un ensemble contenant 8 éléments.
Donc il y a C_8^5 tirages possibles.
Calculons $C_8^5 = \frac{8\times7\times6\times5\times4}{5\times4\times3\times2\times1} = 56$
Autre façons $C_8^5 = \dfrac{8!}{5!(8-5)!} = \dfrac{8!}{5!3!} = \dfrac{8\times7\times6\times5\times4\times3\times2\times1}{5\times4\times3\times2\times1\times3\times2\times1} = 56$
Conseil
Dans une situation où l'on effectue un choix sans ordre ni répétition (cas d'un tirage simultané), on utilise la formule des combinaisons.

VI - Principes du dénombrement

Pour calculer le cardinal d'un ensemble on peut utiliser : le comptage, les diagrammes, les arbres. On peut aussi utiliser trois outils fondamentaux : p-listes, arrangements, combinaisons. Comme on le verra, chacune de ces notions peut être **modélisée** par une situation fréquemment rencontrée dans les problèmes de dénombrement : le tirage de p éléments dans un ensemble contenant n éléments.
Dans tous les cas devant un problème de dénombrement, on doit se poser les questions suivantes :$n =$ nombre d'objets dans lesquels on tire, on choisit etc...
$p =$ le nombre d'objets à choisir ou quelques fois le nombre de tirages.
Pour dénombrer un ensemble , on peut utiliser : le comptage, un diagramme, un arbre de choix, un tableau à double entrée.
On peut aussi utiliser les trois outils fondamentaux : p-listes, arrangements, combinaisons.
Chacun de ces outils modélise une situation fréquente dans les problèmes de dénombrement : le tirage (ou choix) de p éléments dans un ensemble contenant n éléments.$n =$ nombre d'objets dans lesquels on tire, on choisit etc...
$p =$ le nombre d'objets à choisir ou quelques fois le nombre de tirages.
Les A_n^p et C_n^p sont des entiers naturels qu'on peut calculer à l'aide de la calculatrice.
Pour calculer A_n^p, on saisit n $\boxed{\text{n Pr}}$ p $\boxed{=}$
Pour calculer C_n^p, on saisit n $\boxed{\text{n Cr}}$ p $\boxed{=}$
Dans tous les cas devant un problème de dénombrement, on utiliser le tableau suivants :
Tirage de p éléments dans un ensemble à n éléments.

Type	les p éléments sont ordonnés	les p éléments sont distincts	outil	nombre de tirages
tirages successifs avec remise	oui	non	p-liste	n^p
tirages successifs sans remise	oui	oui	arrangement	A_{n^p}
tirages simultanés	non	oui	combinaison	C_n^p

20 Composition de deux applications.

Activité d'introduction 1. On considère les deux applications suivantes : $f(x) = 2x + 1$ et $g(x) = \sqrt{x}$.

— Précise leurs ensembles de définitions.

— Calcule $f(4)$ puis $g(9)$.

— Calcule $f(40)$ puis $g(f(40))$.

— Calcule $f(0)$ puis $g(f(0))$.

— Calcule $g(f(3))$.

— Calcule $f(a)$ puis donne l'expression de $g(f(a))$ en fonction du un nombre positif a.

Définition - Notation - Exemples

Définition 2. Soit f et g deux applications.On appelle composée de g par f , l'application notée $g \circ f$ définie par :

$$(g \circ f)(x) = g[f(x)]$$

Exemple 3. Soit $f(x) = 2x + 1$ et $g(x) = \sqrt{x}$On a $(g \circ f)(x) = g[f(x)] = g(2x+1) = \sqrt{2x+1}$On a aussi $(f \circ g)(x) = f[g(x)] = f\left[\sqrt{x}\right] = 2\sqrt{x} + 1$

Exemple 4. Soit $f(x) = x - 5$ et $g(x) = x^2$On a $(g \circ f)(x) = g[f(x)] = g(x-5) = (x-5)^2$On a aussi $(f \circ g)(x) = f[g(x)] = f\left[x^2\right] = x^2 - 5$

Exemple 5. Soit $f(x) = \dfrac{x+4}{x}$ et $g(x) = \sqrt{x}$Alors $(g \circ f)(x) = g[f(x)] = \sqrt{\dfrac{x+4}{x}}$

Remarque 6. En général $(g \circ f) \neq (f \circ g)$

21 Factorisation des polynômes.

I - Rappels sur le trinôme du second degré

Equations du second degré

Définition 1. On appelle équation du second degré toute équation pouvant se ramener sous la forme : $ax^2 + bx + c = 0 \quad$ avec $a \neq 0$.

Nous rappelons la méthode de résolution vue en classe de seconde.Soit l'équation (E) suivante : $ax^2 + bx + c = 0$.On utilise le discriminant $\Delta = b^2 - 4ac$.

1. Si $\Delta < 0$ alors l'équation (E) n'a pas de solutions et $ax^2 + bx + c$ n'est pas factorisable.
2. Si $\Delta = 0$ alors l'équation (E) a une seule solution $x_0 = -\dfrac{b}{2a}$ et $ax^2 + bx + c = a(x - x_0)^2$
3. Si $\Delta > 0$ alors l'équation (E) a deux solutions (ou racines) distinctes :$x_1 = \dfrac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$; $x_2 = \dfrac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$ et $ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$

Remarque 2. Si l'équation du second degré est incomplète du type $ax^2 + bx = 0$ ou $ax^2 + c = 0$ alors il est inutile de calculer Δ : on peut faire une factorisation pour trouver les racines.

Exemple 3. Résolvons dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes puis factoriser le trinôme figurant au 1er membre.

1. $3x^2 - 2x - 16 = 0$
2. $-5x^2 + x - 1 = 0$
3. $-4x^2 + 20x - 25 = 0$
4. $2x^2 + 3x - 1 = 0$
5. $7x^2 + 3x = 0$

1. $3x^2 - 2x - 16 = 0$On a : $\Delta = (-2)^2 - 4 \times 3(-16) = 4 - 4(-48) = 4 + 192 = 196$.Donc $\Delta > 0$ et $\sqrt{\Delta} = 14$.$x_1 = \dfrac{2 - 14}{6} = \dfrac{-12}{6} = -2$ et $x_2 = \dfrac{2 + 14}{6} = \dfrac{16}{6} = \dfrac{8}{3}$ ainsi : $S = \left\{-2, \dfrac{8}{3}\right\}$Factorisation : $3x^2 - 2x - 16 = 3\left(x - \dfrac{8}{3}\right)(x + 2) = (3x - 8)(x + 2)$
2. $-5x^2 + x - 1 = 0$On a : $\Delta = (1)^2 - 4 \times (-5)(-1) = 1 - 20 = -19$Donc $\Delta < 0$ ainsi $S = \emptyset$ et on ne peut pas factoriser $-5x^2 + x - 1$
3. $-4x^2 + 20x - 25 = 0$On a : $\Delta = (20)^2 - 4 \times (-4)(-25) = 400 - 400 = 0$Donc $\Delta = 0$: il y a une seule solution $x_0 = \dfrac{-20}{-8} = \dfrac{5}{2}$ ainsi $S = \left\{\dfrac{5}{2}\right\}$Factorisation : $-4x^2 + 20x - 25 = -4\left(x - \dfrac{5}{2}\right)^2$
4. $7x^2 + 3x = 0$.Ici, il est inutile de calculer Δ.On a : $7x^2 + 3x = x(7x + 3) = 0$Donc $x = 0$ ou $7x + 3 = 0$ (produit de facteurs nul)soit $x = 0$ ou $x = -\dfrac{3}{7}$ et $S = \left\{0, -\dfrac{3}{7}\right\}$Factorisation : déjà faite $7x^2 + 3x = x(7x + 3)$.

Somme et produit des racines

Propriété 4. — Si l'équation $ax^2+bx+c=0$ a deux racines distinctes ou confondues (c'est-à-dire $\Delta \geq 0$), alors leur somme : $x_1+x_2=-\dfrac{b}{a}$ et leur produit : $x_1 \times x_2 = \dfrac{c}{a}$.

— Réciproquement, si deux nombres ont pour somme S et pour produit P, alors ils sont les solutions de l'équation du second degré : $X^2-SX+P=0$ ou du système $\begin{cases} x+y=S \\ xy=P \end{cases}$.

Exemple 5. Résolvons dans $\mathbb{R}^2$ le système suivant : $\begin{cases} x+y=5 \\ xy=6 \end{cases}$.

On a : $S=5$ et $P=6$Résoudre un tel système, revient à résoudre l'équation $X^2-5X+6=0$.On trouve $\Delta=25-24=1$ et $x_1=3$, $x_2=2$. (faire les calculs).Les solutions du système sont les couples $(2,3)$ et $(3,2)$.

Equations bicarrées

Définition 6. On appelle équation bicarrée, toute équation (E) pouvant se ramener sous la forme : $ax^4+bx^2+c=0$.

Pour résoudre une telle équation, on procède par un changement d'inconnue en posant $X=x^2$ qui mène à l'équation du second degré (E') : $aX^2+bX+c=0$, ensuite on résout si possible les équations d'inconnue x suivantes; $x^2=X_1$ et $x^2=X_2$ où X_1 et X_2 sont les solutions possibles (E').

Exemple 7. Soit à résoudre l'équation : $x^4-4x^2+3=0$

En posant $X=x^2$, l'équation devient $X^2-4X+3=0$.
Après calcul, on trouve comme solutions : $X_1=1$ et $X_2=3$.On a $x^2=1$ soit $x=1$ ou $x=-1$On a $x^2=3$ soit $x=\sqrt{3}$ ou $x=-\sqrt{3}$D'où $S=\left\{-\sqrt{3},\ \sqrt{3},\ -1,\ 1\right\}$

Signe du trinôme ax^2+bx+c

Propriété 8. Soit ax^2+bx+c un trinôme du second degré.

- Si $\Delta<0$ alors ax^2+bx+c est du signe de a pour tout $x \in \mathbb{R}$.

x	$-\infty$ $\qquad$ $+\infty$
ax^2+bx+c	signe de a

- Si $\Delta = 0$ alors $ax^2 + bx + c$ est du signe de a pour tout $x \neq -\dfrac{b}{2a}$ et s'annule en $-\dfrac{b}{2a}$.

x	$-\infty$	$-\frac{b}{2a}$	$+\infty$
ax^2+bx+c	signe de a	0	signe de a

- Si $\Delta > 0$ alors $ax^2 + bx + c$ est :
  - — du signe de a quand $x \in]-\infty; x_1[\cup]x_2; +\infty[$ (on suppose $x_1 < x_2$) ;
  - — du signe opposé de a quand $x \in]x_1; x_2[$;
  - — s'annule en x_1 et en x_2.

x	$-\infty$	x_1		x_2	$+\infty$
ax^2+bx+c	signe de a	0	signe de $(-a)$	0	signe de a

Exemple 9. Résolvons dans $\mathbb{R}$ les inéquations suivantes.

1. $4x^2 - x + 2 \leq 0$ **2.** $-x^2 + x + 2 > 0$ **3.** $x^2 - \sqrt{28}x + 7 > 0$

1. $4x^2 - x + 2 \leq 0$ On a : $\Delta = (-1)^2 - 4 \times 4 \times 2 = 1 - 32 = -31$

x	$-\infty$ $+\infty$
$4x^2 - x + 2$	$+$

$S = \emptyset$**2.** $-x^2 + x + 2 > 0$ On a : $\Delta = 1^2 - 4 \times (-1) \times 2 = 1 + 8 = 9$

On trouve $x_1 = \dfrac{-1-3}{-2} = 2$ et $x_2 = \dfrac{-1+3}{-2} = -1$

x	$-\infty$	-1		2	$+\infty$
$-x^2 + x + 2$	$-$	0	$+$	0	$-$

$S =]-1\,,\,2[$**3.** $x^2 - \sqrt{28}x + 7 > 0$ On a : $\Delta = (-\sqrt{28})^2 - 4 \times 1 \times 7 = 28 - 28 = 0$

Donc $x_0 = \dfrac{\sqrt{28}}{2} = \dfrac{2\sqrt{7}}{2} = \sqrt{7}$

x	$-\infty$	$\sqrt{7}$	$+\infty$
$x^2 - \sqrt{28}x + 7$	$+$	0	$+$

$S = \left]-\infty\,,\ \sqrt{7}\right[\cup \left]\sqrt{7}\,,\ +\infty\right[$

II - Factorisation d'un polynôme

Définition 10. Dire que le réel α est une **racine** ou un **zéro** d'un polynôme $P(x)$, signifie que : $P(\alpha) = 0$.

Remarque 11. Déterminer les racines d'un polynôme $P(x)$, c'est résoudre l'équation $P(x) = 0$.

Nous admettons le théorème suivant.

Théorème 12. Soit $P(x)$ un polynôme et α un réel.α est une racine de $P(x)$ si et seulement si $P(x)$ est factorisable par $(x-\alpha)$.
Dans ce cas il existe un polynôme $Q(x)$ tel que : $P(x) = (x-\alpha)\,Q(x)$.$Q(x)$ est le quotient de $P(x)$ par $(x-\alpha)$ et $d^\circ Q = d^\circ P - 1$.

Remarque 13. Si α et β sont deux racines de $P(x)$ alors $P(x)$ est factorisable par $(x-\alpha)(x-\beta)$ et dans ce cas il existe un polynôme $Q(x)$ tel que $P(x) = (x-\alpha)(x-\beta)\,Q(x)$ et $d^\circ Q = d^\circ P - 2$.

Exemple 14. Considérons le polynôme suivant : $P(x) = 2x^3 - 5x^2 - 6x + 9$Montrons que $P(x)$ est factorisable par $(x-3)$.Ensuite déterminons le polynôme quotient $Q(x)$ tel que : $P(x) = (x-3)\,Q(x)$ puis factorisons $P(x)$.

- On a $P(3) = 2\times 3^3 - 5\times 3^2 - 6\times 3 + 9 = 54 - 45 - 18 + 9 = 9 - 9 = 0$Donc 3 est une racine de $P(x)$ c'est-à-dire que $P(x)$ est factorisable par $(x-3)$.
  D'après le théorème précédent, il existe un polynôme $Q(x)$ tel que : $P(x) = (x-3)\,Q(x)$.
- Or $P(x)$ est de degré trois donc $Q(x)$ sera de degré deux. Par conséquent nous devons déterminer trois réels a, b et c tels que$P(x) = (x-3)\left(ax^2 + bx + c\right)$

Nous proposons ici la méthode Hörner[1] pour déterminer de $Q(x)$.▶ **Méthode de Hörner**On utilise la disposition suivante appelée méthode de Hörner :

	2	-5	-6	9
3	⊠	6	3	-9
	2	1	-3	0

Les valeurs 2, 1 et -3 figurant dans la dernière ligne, correspondent respectivement à celles des coefficients a, b et c de $Q(x)$. Soit $Q(x) = 2x^2 + x - 3$.$P(\alpha)$ correspond à la valeur 0 figurant dans la dernière case de la dernière ligne du tableau de Hörner. Cette valeur n'est pas nécessairement nulle.
Ce tableau permet donc de calculer $P(\alpha)$ et de trouver en même temps les coefficients du polynôme$Q(x)$.**Factorisation de** $P(x)$ Maintenant factorisons au mieux $P(x)$.On a : $P(x) = (x-3)\left(2x^2+x-3\right)$ (attention ceci n'est pas la factorisation demandée!)On va continuer la factorisation **si possible** dans $2x^2 + x - 3$.$\Delta = 1 - 4 \times 2(-3) = 25$ et $x_1 = \dfrac{-1-5}{4} = -\dfrac{3}{2}$, $x_2 = \dfrac{-1+5}{4} = 1$.
Donc $2x^2 + x - 3 = 2\left(x + \dfrac{3}{2}\right)(x-1) = (2x+3)(x-1)$. (attention ceci n'est pas la factorisation demandée!)
On remplace $\left(2x^2 + x - 3\right)$ par $(2x+3)(x-1)$ dans $P(x)$.
Finalement $P(x) = (x-3)(2x+3)(x-1)$ cette expression est la factorisation de $P(x)$.

Remarque 15. Dans la démarche précédente, on a trouvé toutes les racines du polynôme $P(x)$. C'est-à-dire : 3, $-\dfrac{3}{2}$ et 1.On pourrait aussi vous demander d'étudier le signe $P(x)$ à l'aide d'un tableau de signes puis de résoudre une inéquation comme nous le verrons dans les exercices.

Remarque 16. On pourrait aussi utiliser les méthodes vues en classe de première : la division ou l'identification des coefficients.

1. William George Hörner mathématicien allemand(1819-1845

22 Limites et continuité.

NB : Lorsque nous écrivons ∞ cela peut désigner aussi bien $+\infty$ que $-\infty$.

I - Fonction continue

Définition 1. Soit f une fonction numérique d'ensemble de définition Df et a un réel.

1. On dit que la fonction f est continue en a si :
   - $a \in$Df
   - $\lim\limits_{x \to a} f(x) = f(a)$
2. On dit que la fonction f est continue sur un intervalle I si f est continue en tout réel de I.

Graphiquement, cela signifie que la courbe de f ne présente aucun point de rupture : onpeut la tracer sans lever le crayon.

Conséquence 2.
- Les fonctions monômes du type $x \longrightarrow x^n$, $n \in \mathbb{N}$ sont continues sur $\mathbb{R}$.
- La fonction racine carrée $x \longrightarrow \sqrt{x}$ est continue sur $[0\ ,\ +\infty]$.
- La fonction valeur absolue $x \longrightarrow |x|$ est continue sur $\mathbb{R}$.
- Les fonctions construites à partir de ces fonctions par somme, produit ou composition sont continues sur tout intervalle où elles sont définies.

Exemple 3.
- Les fonctions polynômes sont continues sur $\mathbb{R}$.
- Les fonctions rationnelles sont continues sur tout intervalle inclus dans leur ensemble de définition.

Exercice 4. Calculons les limites suivantes.
- $\lim\limits_{x \to 1} (-3x^2 + 4x + 7)$
- $\lim\limits_{x \to -2} \dfrac{2x+1}{x-3}$
- $\lim\limits_{x \to 0} \sqrt{x} + |x|$

Démonstration.
- La fonction $x \longrightarrow -3x^2 + 4x + 7$ est un polynôme donc continue en 1. D'où $\lim\limits_{x \to 1} (-3x^2 + 4x + 7) = -3 + 4 + 7 = 8$.
- La fonction rationnelle $x \longrightarrow \frac{2x+1}{x-3}$ est définie sur $\mathbb{R} \setminus \{3\}$ or $-2 \in \mathbb{R} \setminus \{3\}$ donc f est continue en -2 d'où $\lim\limits_{x \to -2} \dfrac{2x+1}{x-3} = \dfrac{2(-2)+1}{-2-3} = \dfrac{3}{5}$.

- $\lim\limits_{x\to 0} \sqrt{x} + |x| = \sqrt{0} + |0| = 0 + 0 = 0$

$\square$

Remarque 5. $\lim\limits_{x\to a} k = k$ pour tout réel k.

Propriété 6. L'image d'un intervalle I par une fonction continue est unintervalle f(I).

Limites de fonctions élémentaires

Soit $n \in \mathbb{N}^*$

- $\lim\limits_{x\to +\infty} x^n = +\infty$
- $\lim\limits_{x\to -\infty} x^n = \begin{cases} +\infty & \text{si n pair} \\ -\infty & \text{si n impair} \end{cases}$
- $\lim\limits_{x\to +\infty} \sqrt{x} = +\infty$
- $\lim\limits_{x\to \infty} \dfrac{1}{x^n} = 0$

II - Opérations sur les limites

Dans tout ce qui suit, la notation "FI" désigne une Forme Indéterminée, c'est à dire qu'on ne sait pas calculer par une opération élémentaire.

Limite d'une somme

Limite de f	Limite de g	Limite de $f+g$
l	l'	$l+l'$
l	$+\infty$	$+\infty$
l	$-\infty$	$-\infty$
$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$
$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$
$+\infty$	$-\infty$	FI

Exemple 7. • $\lim\limits_{x\to -\infty} x^4 + \dfrac{1}{x} = +\infty$

- $\lim\limits_{x\to 0} \sqrt{x} + x - 4 = -4$
- $\lim\limits_{x\to +\infty} x^2 - x$ est une forme indéterminée.

Limite d'un produit

Limite de f	Limite de g	Limite de $f.g$
l	l'	$l \times l'$
l	∞	∞ on applique la règle de signes.
$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$
$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$
$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$
0	∞	FI

Exemple 8.
- $\lim\limits_{x\to+\infty} x^2 - x = \lim\limits_{x\to+\infty} x(x-1) = +\infty$
- $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(x^2+3\right)\left(\frac{1}{x}-4\right) = -\infty$
- $\lim\limits_{x\to 0} \frac{2}{x}\left(x^2+5x\right)$ =FI

Limite d'un quotient

Limite de f	Limite de g	Limite de f/g
l	$l' \neq 0$	$\frac{l}{l'}$
l	$+\infty$ ou $-\infty$	0
∞	l'	∞ on applique la règle de signes.
∞	∞	FI
l positif	0^+	$+\infty$
l positif	0^-	$-\infty$
l négatif	0^+	$-\infty$
l négatif	0^-	$+\infty$
∞	0	∞
0	0	FI

Exemple 9.
- $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{-3}{x^2} = 0.$
- $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{x^3+5}{\frac{1}{x}-3} = -\infty.$
- $\lim\limits_{x\to 0} \frac{x^2-x}{x} = FI.$
- $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{x+2}{x-2} =$ FI.

Limite d'une fonction composée

Propriété 10. Soit a, b et c trois réels ou $+\infty$ ou $-\infty$. Soit f et g deux fonctions numériques.Si $\lim_{x\to a} f(x) = b$ et $\lim_{x\to b} g(x) = c$ alors $\lim_{x\to a} g\circ f(x) = c$

Exemple 11. Calculons $\lim_{x\to 0} \sqrt{x^3-2x+4}$ et $\lim_{x\to-\infty} \sqrt{x^2+3}$• Posons $f(x) = x^3 - 2x+4$ et $g(x) = \sqrt{x}$. On a $g\circ f(x) = \sqrt{x^3-2x+4}$Or $\lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0} x^3-2x+4 = 4$ et $\lim_{x\to 4} g(x) = \lim_{x\to 4} \sqrt{x} = 2$ donc $\lim_{x\to 0} \sqrt{x^3-2x+4} = 2$.
• $\lim_{x\to-\infty} x^2+3 = +\infty$ et $\lim_{x\to+\infty} \sqrt{x} = +\infty$ donc par composée $\lim_{x\to+\infty} \sqrt{x^2+3} = +\infty$

III - Méthodes de calcul de limites

Les opérations sur les limites ne permettent pas toujours de déterminer la limite d'une fonction. Il faut alors changer de chemin et modifier l'écriture de cette fonction... afin de pouvoir les appliquer!

Limite d'un polynôme à l'infini

Propriété 12. La limite en $+\infty$ ou en $-\infty$ d'une fonction polynôme est la limite en $+\infty$ ou en $-\infty$ du terme de plus haut degré.

Exemple 13. Déterminons la limite en $+\infty$ de la fonction polynôme f définie pour tout réel x par :
$f(x) = 3x^3 - 2x^2 + 1$.

Au premier abord, lorsque x tend vers $+\infty$: $\begin{cases} 3x^3 \text{ tend vers } +\infty \\ -2x^2 \text{ tend vers } -\infty \\ 1 \text{ tend vers } 1 \end{cases}$ donc $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = FI$ L'actuelle écriture de f ne permet pas de conclure. Il nous allons donc appliquer la propriété précédente.
On a : $\lim\limits_{x\to+\infty} 3x^3 - 2x^2 + 1 = \lim\limits_{x\to+\infty} 3x^3 = +\infty$

Limite d'une fonction rationnelle à l'infini

Propriété 14. La limite en $+\infty$ ou en $-\infty$ d'une fonction rationnelle est la limite en $+\infty$ ou en $-\infty$ du quotient des termes de plus haut degré du numérateur et du dénominateur.

Exemple 15. On considère la fonction f définie par : $f(x) = \frac{3x^3+2x+1}{5x^4-4x^3+4}$. Déterminons sa limite en $+\infty$.

Le numérateur $3x^3 + 2x + 1$ tend vers $+\infty$.
Le dénominateur $x^4 - 4x^3 + 4$ tend vers $+\infty$.
Ainsi la limite de f est une forme indéterminée.
La présente écriture de f ne permet pas de conclure. Il nous allons donc appliquer la propriété présidente.
On a : $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{3x^3+2x+1}{5x^4-4x^3+4} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{3x^3}{5x^4} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{3}{5x} = 0$

Calcul de limite en a d'une fonction non définie en a.

Règle 1
Lorsque l'on cherche la limite d'une fonction f en un réel a qui annule enmême temps le numérateur et le dénominateur d'une fonction rationnelle (numérateur et dénominateur polynômes) on factorise le numérateur et ledénominateur par $(x - a)$, on simplifie la fonction puis on calcule la limite en a (lorsque c'est possible) de la fonction simplifiée.

Exemple 16. Calculons $\lim\limits_{x\to3} \dfrac{x^2-9}{x-3}$.
On a $\lim\limits_{x\to3} x^2 - 9 = 0$ et $\lim\limits_{x\to3} x - 3 = 0$.
Nous pouvons donc factoriser le numérateur et le dénominateur chacun par $(x - 3)$.
On obtient $\frac{x^2-9}{x-3} = \frac{(x-3)(x+3)}{x-3} = x + 3$ donc $\lim\limits_{x\to3} \dfrac{x^2-9}{x-3} = \lim\limits_{x\to3} x + 3 = 6$

Règle 2
Lorsque l'on cherche la limite d'une fonction f en un réel a qui annule en mêmetemps le numérateur et le dénominateur d'une fonction irrationnelle (expressionavec radical au dénominateur comme au numérateur), on factorise toujours par$(x - a)$ mais cette fois ci en utilisant la ou les expressions conjuguées dunumérateur et du dénominateur.

Exemple 17. Calculons la limite en 1 de la fonction f définie par : $f(x) = \frac{\sqrt{x}-1}{x-1}$
On a $\lim\limits_{x\to1} \sqrt{x} - 1 = 0$ et $\lim\limits_{x\to1} x - 1 = 0$.
Transformons l'écriture de $\frac{\sqrt{x}-1}{x-1}$ en utilisant l'expression conjuguée dunumérateur, il vient :
$\frac{\sqrt{x}-1}{x-1} = \frac{\left(\sqrt{x}-1\right)\left(\sqrt{x}+1\right)}{(x-1)\left(\sqrt{x}+1\right)} = \frac{x-1}{(x-1)\left(\sqrt{x}+1\right)} = \frac{1}{\sqrt{x}+1}$.

$$\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt{x}-1}{x-1}=\lim_{x\to 1}\frac{1}{\sqrt{x}+1}=\frac{1}{2}.$$

Règle 3

Lorsque l'on cherche la limite d'une fonction f en un réel a qui annule uniquementle dénominateur, on étudie le signe du dénominateur et l'on obtient une limite à droite et une limite à gauche en a de f.

Exemple 18. Calculons la limite en 4 de la fonction f définie par : $f(x)=\frac{x^2-5x+6}{x-4}$
On a $\lim\limits_{x\to 4} x^2-5x+6=2$ et $\lim\limits_{x\to 4} x-4=0$
Etudions le signe du dénominateur (celui du numérateur étant connu).

x	$-\infty$ 4 $+\infty$
$x-4$	$-$ | $+$

A gauche de 4, nous pouvons écrire :$\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x<4}} x-4=\lim\limits_{x\to 4^-} x-4=0^-$« Lire limite de $x-4$ quand x tend vers 4 à gauche.» les deux notations sont valables mais ilfaut savoir qu'il n'y a aucun lien entre le signe $-$ sur le 4 et celui sur 0. Il n'en est pastoujours ainsi.
Le signe $-$ sur 4 traduit le fait que x est inférieur à 4 donc il est positif, celuisur 0 traduit aussi que la valeur de $(x-4)$ est inférieure à 0 mais un nombreinférieur à 0 est négatif.
En conclusion :
$\lim\limits_{x\to 4} x^2-5x+6=2$
$\lim_{\substack{x\to 4\\ x<4}} x-4=\lim\limits_{x\to 4^-} x-4=0^-$ donc par quotient de limites $\lim\limits_{\substack{x\to 4\\ x<4}} f(x)=-\infty$.
Nous procédons de même pour la limite à droite et nous obtenons :
$\lim\limits_{x\to 4} x^2-5x+6=2$
$\lim\limits_{\substack{x\to 4\\ x>4}} x-4=\lim\limits_{x\to 4^+} x-4=0^+$
$\lim\limits_{\substack{x\to 4\\ x>4}} f(x)=+\infty.$

La fonction f n'admet pas de limite en 4 car la limite àdroite est différente de celle à gauche.

Remarque 19. Lorsque $\lim\limits_{\substack{x\to a\\ x>a}} f(x)=\lim\limits_{\substack{x\to a\\ x<a}} f(x)$ alors f admet une limite en a.

3 Suites numériques (TS2)

I - Généralités

Définition 1. On appelle **suite numérique** toute fonction u de $\mathbb{N}$ vers $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

$$\begin{array}{rccc} u: & \mathbb{N} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & n & \longmapsto & u(n) \end{array}$$

Notation et vocabulaire

- $u(n)$ est notée u_n (lire u indice n) est appelé le terme d'indice n ou le terme de rang n ou terme général de la suite u.
- La suite u est notée $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ou (u_n).
- La suite est dite **positive** (respectivement **négative**) lorsque tous ses termes sont positifs (respectivement négatifs).
- Lorsque la suite est à valeurs dans l'ensemble $\mathbb{C}$; elle est appelée suite numérique complexe .
  Sauf mention contraire, nous entendons par « suite » dans ce cours une suite réelle.

Attention :
(u_n) désigne la suite alors que u_n désigne la valeur du terme de rang n.

Remarque 2. Si les indices de la suite commencent à partir d'un entier naturel k alors on dit que la suite est définie à partir du rang k ou que le domaine de définition de la suite est l'ensemble I des entiers naturels n tels que $n \geq k$.
Dans ce cas on notera la suite par $(u_n)_{n\geq k}$ ou par $(u_n)_{n\in I}$.

Modes de définition d'une suite

On distingue deux modes de définition usuels :

1. **Suite définie par une formule explicite**
   Une suite explicite est une suite dont le terme général s'exprime en fonction de n. Elle est du type $u_n = f(n)$ où f est une fonction définie sur $\mathbb{R}_+$.

   Exemple 3. Soit (u_n) la suite définie par : $u_n = 2n+4$
   Calculons les quatre premiers termes de la suite ainsi que u_{10} .

   Réponse :$u_0 = 4$, $u_1 = 6$, $u_2 = 8$, $u_3 = 10$ et $u_{10} = 44$

2. **Suite définie par une relation de récurrence**
   Une suite récurrente est définie par la donnée des premiers termes et la relation liant des

termes consécutifs de la suite en général du type :
$u_{n+1} = f(u_n)$ ou $u_n = f(u_{n-1})$

Exemple 4. Soit la suite (u_n) définie par $u_1 = -2$ et $u_{n+1} = 2u_n + 4$
Calculons les quatre premiers termes de la suite ainsi que u_{10} .

Réponse :
$u_1 = -2, \quad u_2 = 2u_1 + 4 = -4 + 4 = 0, \quad u_3 = 0 + 4 = 4 \quad u_4 = 12$
Pour calculer u_{10} cette fois-ci , il faut connaître u_9 car $u_{10} = 2u_9 + 4$ puis pour calculer u_9 ,il faut connaître u_8 ... ainsi de suite pour calculer un terme il faut connaître le précédent : on dit que la suite (u_n) est définie par récurrence ou qu'elle est héréditaire. On ne peut calculer directement la valeur de u_{10} contrairement à l'exemple précédent.

Remarque 5. $*$ Une suite récurrente peut aussi être définie par la donnée de u_0 et u_1 et une relation de récurrence du type $u_{n+2} = f(u_{n+1}; u_n)$ ou $u_n = f(u_{n-1}; u_{n-2})$.

Exemple 6. La suite (u_n) définie par :
$u_0 = 3$, $u_1 = -1$ et $u_{n+2} = 2u_{n+1} - 5u_n$

$*$ L'objet de certains exercices est de transformer une suite donnée par une relation de récurrence en une suite écrite par une formule explicite pour pouvoir calculer directement la valeur d'un terme de rang donné. Pour cela on utilise une autre suite appelée suite auxiliaire qui soit arithmétique ou géométrique (qu'on verra ultérieurement).

Représentation graphique d'une suite récurrente

Méthode
On représente les premiers termes sur un axe (celui des abscisses par exemple) en s'appuyant sur la courbe représentative de la fonction f définissant la relation de récurrence.
On procède alors ainsi :

— On trace les représentations graphiques de f et de la première bissectrice d'équation $y = x$;
— On place le premier terme u_0 sur l'axe des abscisses;
— On utilise $\mathscr{C}_f$ pour construire $u_1 = f(u_0)$ sur l'axe des ordonnées;
— On reporte u_1 sur l'axe des abscisses à l'aide de la première bissectrice,
— On utilise $\mathscr{C}_f$ pour construire $u_2 = f(u_1)$ sur l'axe des ordonnées;
— etc.

On obtient un diagramme en « escalier» ou en « escargot ». On peut alors faire des conjectures en termes de variation, de convergence , etc.

Exemple 7. Prenons comme exemple la suite (u_n) définie par :
$u_0 = -1$ et $u_{n+1} = \sqrt{3u_n + 4}$ pour tout n de $\mathbb{N}^*$.
Le terme général de cette suite est définie par la relation de récurrence $u_{n+1} = f(u_n)$ où $f : x \mapsto \sqrt{3x+4}$.Plaçons sur l'axe des abscisses les quatre premiers termes de la suite sans les calculer.Ici la suite semble être croissante et, plus n devient grand, plus ses termes semblent se rapprocher de 4.

Suites monotones

Une suite est une fonction particulière, on retrouve donc naturellement la notion de sens de variation pour une suite.

Définition 8. Soit (u_n) une suite, k un entier naturel. On dit que :

- la suite (u_n) est **croissante** à partir du rang k si, pour tout entier $n \geq k$: $u_{n+1} \geq u_n$;
- la suite (u_n) est **décroissante** à partir du rang k si, pour tout entier $n \geq k$: $u_{n+1} \leq u_n$;
- la suite (u_n) est **constante** à partir du rang k si, pour tout entier $n \geq k$: $u_{n+1} = u_n$.

Remarque 9. $*$ On dit que (u_n) est **monotone** si son sensde variation ne change pas (elle reste croissante ou décroissante à partir d'un rang).
Étudier la monotonie d'une suite c'est donc étudier ses variations.
$*$ On obtient les définitions de strictement croissante, décroissante ou monotone en remplaçant les inégalités larges par des inégalités strictes.

Méthodes

Signe de la différence de $u_{n+1} - u_n$

Pour étudier le sens de variation d'une suite, on peut étudier le signe de la différence $u_{n+1} - u_n$.Si $u_{n+1} - u_n \geq 0$ alors (u_n) est croissante.Si $u_{n+1} - u_n \leq 0$ alors (u_n) est décroissante.Si $u_{n+1} - u_n = 0$ alors (u_n) est constante.

Exemple 10. Soit (u_n) la suite définie, pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $u_n = n^2 - n$.
On a, pour tout $n \in \mathbb{N}$:$u_{n+1} - u_n = (n+1)^2 - (n+1) - n^2 + n = n^2 + 2n + 1 - n - 1 - n^2 + n = 2n$.Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $2n \geq 0$ donc $u_{n+1} - u_n \geq 0$ donc $u_{n+1} \geq u_n$.La suite (u_n) est croissante.

Comparaison de $\dfrac{u_{n+1}}{u_n}$ à 1

Pour étudier le sens de variation d'une suite à *termes strictement positifs* , on peut comparer $\dfrac{u_{n+1}}{u_n}$ à 1.Si $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} > 1$ alors (u_n) est croissante.Si $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} < 1$ alors (u_n) est décroissante.Si $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} = 1$ alors (u_n) est constante.

Exemple 11. Soit (u_n) la suite définie, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, par $u_n = 2^{-n}$.
La suite (u_n) est à termes strictement positifs .

On a : $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} = \dfrac{2^{-n-1}}{2^{-n}} = 2^{-1} = \dfrac{1}{2} < 1$.La suite (u_n) est donc décroissante.

Cas d'une suite en mode explicite
Soit (u_n) une suite définie par $u_n = f(n)$ où f est une fonction définie sur $\mathbb{R}_+$.

- Si f est croissante alors (u_n) est croissante.
- Si f est décroissante alors (u_n) est décroissante.

Cas d'une suite définie par récurrence
On démontre par récurrence que $u_{n+1} \leq u_n$ (suite croissante) ou $u_n \geq u_{n+1}$ (suite décroissante).

Suites bornées

Définition 12. Une suite (u_n) est dite :

- **majorée** s'il existe un réel M tel que pour tout entier naturel n, $u_n \leq M$.
  M est dit majorant de la suite.
- **minorée** s'il existe un réel m tel que pour tout entier naturel n, $u_n \geq m$.
  m est dit minorant de la suite.
- **bornée** si elle est majorée et minorée.

Remarque 13. $*$ Une suite (u_n) est bornée si et seulement si il existe un réel k positif tel que $|u_n| \leq k$.
$*$ Une suite positive est minorée par 0 et une suite négative est majorée par 0.
$*$ Une suite croissante est minorée par son premier terme et une suite décroissante est majorée par son premier terme .

Suites périodiques

Définition 14. Une suite (u_n) est dite **périodique** s'il existe un entier naturel non nul p tel pour tout entier naturel n :

$$u_{n+p} = u_n$$

On dit p est une période de la suite (u_n).

Exemple 15. $u_n = \cos\frac{2n\pi}{5}$, $n \geq 0$.
On a : $u_{n+5} = \cos(\frac{2(n+5)\pi}{5}) = \cos(\frac{2n\pi}{5} + 2\pi)$ donc$u_{n+5} = u_n$
Il en résulte que (u_n) est périodique et 5 est une période.

II - Le raisonnement par récurrence

Pour montrer qu'une propriété P_n est vraie pour tout entier n supérieure ou égal à un entier naturel n_0 donné , on utilise un raisonnement de type particulier, appelé raisonnement par récurrence .

Principe

1. Montrer que P_{n_0} est vraie.
2. Montrer que si P_n est vraie alors P_{n+1} l'est aussi .

Exemple 16. Montrons que pour tout entier $n \geq 1$

$$1+2+...+n = \frac{n(n+1)}{2}$$

Réponse

$$\text{Posons} \quad P_n : 1+2+...+n = \frac{n(n+1)}{2}$$

1°) P_1 s'écrit $1 = \frac{1(1+1)}{2}$ égalité qui est vérifiée, donc P_1 est vraie .
2°) Supposons la propriété vérifiée pour un certain $n \geq 1$ c'est à dire :

$$P_n : 1+2+...+n = \frac{n(n+1)}{2} \quad \text{(H)}$$

Montrons que P_{n+1} est vérifiée c'est à dire :

$$1+2+...+(n+1) = \frac{(n+1)(n+2)}{2}$$

$$1+2+...+n+(n+1) = (1+2+...+n)+(n+1)$$

$$1+2+...+n+(n+1) = \frac{n(n+1)}{2}+(n+1) \quad \text{en utilisant (H)}$$

$$1+2+...+n+(n+1) = \frac{n(n+1)+2(n+1)}{2}$$

donc

$$1+2+...+(n+1) = \frac{(n+1)(n+2)}{2}$$

ce qui prouve P_{n+1} que est vraie .

Le principe du raisonnement par récurrence permet d'affirmer que P_n est vérifiée pour tout $n \geq 1$, c'est à dire :$1+2+...+n = \frac{n(n+1)}{2}$.

Remarque 17. ∗ Pour comprendre le mécanisme de ce raisonnement, il suffit de se rappeler que d'après 1°) P_1 est vérifiée et que d'après 2°) puisque P_1 est vraie, alors P_2 est vraie.
Toujours d'après 2°) puisque P_2 est vraie alors P_3 est vraie, etc.
On comprend ainsi que P_n puisse être vérifiée quel que soit l'entier $n \geq 1$.
Dans ce cas la propriété P_n est **héréditaire** .
∗ Lorsqu'on vérifie que P_{n_0} est vraie ; on **initialise** la récurrence .

La supposition (H) est appelée hypothèse de récurrence.

Exercice 18. Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = 0$ et $u_{n+1} = \frac{u_n+1}{u_n+2}$.
Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \in [0\ ,\ 1]$

Solution :
Nous allons procéder à un raisonnement par récurrence
$u_0 = 0 \in [0\ ,\ 1]$ donc la propriété est vraie pour $n = 0$.
Supposons que pour un certain entier n , $u_n \in [0\ ,\ 1]$.
Or pour tout réel $x \in [0\ ,\ 1]$, $\frac{x+1}{x+2} \in [0\ ,\ 1]$ et puisque $u_n \in [0\ ,\ 1]$ par hypothèse donc $\frac{u_n+1}{u_n+2} \in [0\ ,\ 1]$ c'est à dire $u_{n+1} \in [0\ ,\ 1]$.
Conclusion : Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \in [-1\ ,\ 1]$

Exercice 19. On considère la suite (u_n), définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par : $\begin{cases} u_0 = 0 \\ u_{n+1} = 2u_n + 1 \end{cases}$
Prouver que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = 2^n - 1$

Solution :
$2^0 - 1 = 1 - 1 = 0 = u_0$ donc la propriété est vérifiée pour $n = 0$.
Supposons que pour un certain entier n c'est à dire $u_n = 2^n - 1$.
Alors, on a $u_{n+1} = 2u_n + 1 = 2(2^n - 1) + 1$
Conclusion : Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = 2^n - 1$

III - Suites arithmétiques

Définition 20. Définition par récurrenceUne suite (u_n) est dite **suite arithmétique** s'il existe un réel r tel que pour tout entier naturel n on ait :

$$u_{n+1} = u_n + r$$

r est appelé **la raison** de la suite arithmétique.

Remarque 21. La raison d'une suite arithmétique est un réel indépendant de n. On passe d'un terme au terme de rang suivant en ajoutant toujours r.

Exemple 22. $*$ La suite des entiers naturels est une suite arithmétique de premier terme 0 et de raison 1.
$*$ La suite des entiers naturels pairs est une suite arithmétique de premier terme 0 et de raison 2.

Méthode

- Pour montrer qu'une suite est arithmétique, on peut montrer que la différence $u_{n+1} - u_n$ (ou $u_n - u_{n-1}$) est constante.

> **Exemple 23.** Soit la suite (u_n) définie, pour tout $n \in \mathbb{N}$, par $u_n = -6n + 1$. Montrons que cette suite est arithmétique :
> $u_{n+1} - u_n = -6(n+1) + 6n - 1 = -6n - 6 + 6n + 1 = -6$. De plus $u_0 = -6 \times 0 + 1 = 1$
> La suite (u_n) est arithmétique de premier terme 1 et de raison -6.

- Pour montrer qu'une suite est arithmétique, on peut aussi exprimer u_{n+1} en fonction de u_n et vérifier que u_{n+1} se met sous la forme $u_{n+1} = u_n + r$.
  (C'est la même chose d'exprimer u_n en fonction de u_{n-1} et vérifier que u_n se met sous la forme $u_n = u_{n-1} + r$).

Expression du terme général en fonction de n

> **Théorème 24.** Soit (u_n) une suite est arithmétique de premier terme u_0 et de raison r. Alors pour tout $n \in \mathbb{N}$,
> $$u_n = u_0 + nr$$

Démonstration On a :

$$\begin{aligned} u_1 &= u_0 + r \\ u_2 &= u_1 + r \\ \vdots \quad & \quad \vdots \\ u_{n-1} &= u_{n-2} + r \\ u_n &= u_{n-1} + r \end{aligned}$$

En additionnant membre à membre ces n égalités, on obtient :

$$u_1 + u_2 + \cdots + u_{n-1} + u_n = u_0 + u_1 + \cdots + u_{n-1} + nr$$

après simplification on obtient : $u_n = u_0 + nr$.

> **Exemple 25.** Soit (u_n) la suite arithmétique de premier terme $u_0 = 2$ et de raison $r = 3$, d'après le théorème 1.1 pour tout n de $\mathbb{N}$, $u_n = u_0 + nr = 2 - 3nr$. On peut alors directement calculer n'importe quel terme à partir de son rang.
> Par exemple $u_5 = 2 - 3 \times 5 = -13$.

> *Remarque* 26. Toute suite (u_n) de terme général $u_n = an + b$ où a et b sont deux réels, est une suite arithmétique de premier terme $u_0 = b$ et de raison a.

Théorème 27. Soit (u_n) une suite est arithmétique de premier terme u_0 et de raison r. Alors pour tous p et n de $\mathbb{N}$,
$$u_n = u_P + (n-p)r$$

Démonstration
Pour tous p et n de $\mathbb{N}$, $u_n = u_0 + nr$ et $u_p = u_0 + pr$.
On en tire $u_n - u_p = u_0 + nr - (u_0 + pr) = (n-p)r$ d'où $u_n = u_P + (n-p)r$

Exemple 28. Soit (u_n) une suite est arithmétique telle que $u_{27} = 6$ et $u_{39} = 10$, on se propose de calculer u_{27}. Pour cela, on commence par calculer la raison r de la suite .
On a $u_{27} = u_{39} + (27-39)r$, soit $u_{27} - u_{39} = (27-39)r$ d'où :
$$-4 = -12r \quad \text{soit} \quad r = \frac{1}{3}$$
On en tire : $u_{75} = u_{39} + (75-39)r = 10 + 36 \times \frac{1}{3} = 22$

Sens de variation

Théorème 29. Soit (u_n) une suite est arithmétique de raison r.

— si $r > 0$ alors la suite (u_n) est strictement croissante;

— si $r = 0$ alors la suite (u_n) est strictement constante;

— si $r < 0$ alors la suite (u_n) est strictement décroissante.

Moyenne arithmétique

Trois réels a, b et c sont les terme consécutifs d'une suite arithmétique si, et seulement si $b = \frac{a+b}{2}$.
On dit que a, b , c sont en progression arithmétique et que, b est la moyenne arithmétique de a et c.

Somme de termes consécutifs

1. Nombre de termes d'une somme

Soit (u_n) une suite. $p \in \mathbb{N}$, $q \in \mathbb{N}$ tels que $p \leq q$. On retiendra le résultat suivant :
La somme $u_p + u_{p+1} + \cdots + u_q$ comporte $q - p + 1$ termes .

Exemple 30. La somme $u_0 + u_1 + \cdots + u_{10}$ contient $10 - 0 + 1 = 11$ termes.

Somme de termes consécutifs d'une suite est arithmétique

Théorème 31. Soit S la somme de N termes consécutifs d'une suite arithmétique de raison r, a le premier terme de cette somme et b le dernier terme. On a :

$$S = N\frac{a+b}{2}$$

Démonstration

Ecrivons S de deux façons différentes :

$$S = a + (a+r) + (a+2r) + (a+3r) + \cdots + [a + (N-1)r]$$

$$S = b + (b-r) + (b-2r) + (b-3r) + \cdots + [b - (N-1)r]$$

En additionnant membre à membre ces deux égalités ,on obtient :

$$2S = \underbrace{(a+b) + (a+b) + (a+b) + \cdots + (a+b)}_{N\text{fois}}$$

$$2S = N(a+b)$$

On en déduit que :

$$S = \frac{a+b}{2}N$$

A retenir

Cette formule peut se retenir de la façon suivante :
La somme de termes consécutifs d'une suite arithmétique est égale au produit du nombre de termes par la demi somme des termes extrêmes.

$$S = \text{nombre de termes} \times \frac{\text{premier terme} + \text{dernier terme}}{2}$$

Cas particulier

La somme des n premiers nombres entiers naturels non nuls est : $\frac{n(n+1)}{2}$.
En d'autres termes :

$$1 + 2 + 3 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{n}$$

Exemple 32.

$$1 + 2 + 3 + \cdots + 10 = \frac{10 \times 11}{2} = 55$$

IV - Suites géométriques

Définition 33. *(Définition par récurrence)*
Une suite (u_n) est dite **suite géométrique** s'il existe un réel q tel que pour tout entier naturel n on ait :

$$u_{n+1} = qu_n$$

q est appelé **la raison** de la suite géométrique.

Remarque 34. La raison d'une suite géométrique est un réel indépendant de n. On passe d'un terme au terme de rang suivant en multipliant toujours par q.

Exemple 35. $*$ La suite des puissances entières de 3 $(1;3;9;27;81...etc)$ est la suite géométrique de premier terme 1 et de raison 3 .
$*$ La suite définie par $u_0 = 0,5$ et $u_n = -3u_{n-1}$ est la suite géométrique de premier terme $0,5$ et de raison -3 .

La suite de terme général $v_n = 10^{-n}$ est une suite géométrique de premier terme 1 et de raison 10^{-1} .
$*$ La suite v_n définie par $v_n = n3^n$ n'est pas une suite géométrique car $v_0 = 0$, $v_1 = 3$, $v_2 = 18$, $v_3 = 81$.
On ne passe pas d'un terme au terme de rang suivant en multipliant toujours par une même constante.

Méthode

- Pour montrer qu'une suite de termes non nuls est géométrique, on peut montrer que le quotient $\dfrac{u_{n+1}}{u_n}$ (ou $\dfrac{u_n}{u_{n-1}}$) est constant.

  Exemple 36. Soit la suite (u_n) définie, pour tout $n \in \mathbb{N}$, par $u_n = \dfrac{3}{5^n}$. Montrons que cette suite est géométrique .
  $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} = \dfrac{\frac{3}{5^{n+1}}}{\frac{3}{5^n}} = \dfrac{5^n}{5^{n+1}} = \dfrac{1}{5}$.   De plus $u_0 = \dfrac{3}{5^0} = 3$
  La suite (u_n) est géométrique de premier terme 3 et de raison $\dfrac{1}{5}$.

- Pour montrer qu'une suite est géométrique, on peut exprimer u_{n+1} en fonction de u_n et vérifier que u_{n+1} se met sous la forme $u_{n+1} = qu_n$.
  (C'est la même chose d'exprimer u_n en fonction de u_{n-1} et vérifier que u_n se met sous la forme $u_n = qu_{n-1}$).

Expression du terme général en fonction de n

Théorème 37. Soit (u_n) une suite est géométrique de premier terme u_0 et de raison $q \neq 0$. Alors pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$u_n = u_0 q^n$$

Démonstration

$$u_1 = u_0 q$$
$$u_2 = u_1 q$$
$$\vdots \qquad \vdots$$
$$u_{n-1} = u_{n-2} q$$
$$u_n = u_{n-1} q$$

En multipliant membre à membre ces n égalités, on obtient :

$$u_1 \times u_2 \times \cdots \times u_{n-1} \times u_n = u_0 q \times u_1 q \times \cdots \times u_{n-1} q$$

après simplification on obtient :

$$u_n = u_0 q^n$$

Exemple 38. Soit (u_n) la suite est géométrique de premier terme $u_0 = -1$ et de raison $q = 2$, d'après le théorème 1.5 pour tout n de $\mathbb{N}$, $u_n = u_0 q^n = -1 \times 2^n$. On peut alors directement calculer n'importe quel terme à partir de son rang.
Par exemple $u_5 = -1 \times 2^5 = -32$.

Remarque 39. Toute suite (u_n) dont le terme général est de la forme $u_n = aq^n$ où a et q sont deux réels, est une suite géométrique de premier terme $u_0 = a$ et de raison q.

Théorème 40. Soit (u_n) une suite géométrique de premier terme u_0 et de raison q.
Alors pour tous p et n de $\mathbb{N}$,

$$u_n = u_p q^{n-p}$$

Démonstration

Pour tous p et n de $\mathbb{N}$, $u_n = u_0 q^n$ et $u_p = u_0 q^p$.
On en tire $\quad u_n = u_0 q^{n-p+p} = u_0 q^p q^{n-p} \quad$ d'où $\quad u_n = u_P q^{n-p}$.

Exemple 41. Soit (u_n) la suite géométrique telle que $q = 3$ et $u_{11} = 729$.
On se propose de calculer u_1.
On a $u_1 = u_{11} q^{1-11} = 729 \times 3^{-10} = \frac{1}{81}$

Sens de variation

Théorème 42. Soit (u_n) une suite est géométrique de raison q et de premier terme u_0 strictement positif.

— si $q > 0$ alors la suite (u_n) est strictement croissante;

— si $q = 1$ alors la suite (u_n) est strictement constante;

— si $0 < q < 1$ alors la suite (u_n) est strictement décroissante.

Moyenne géométrique

Trois réels a, b et c sont les termes consécutifs d'une suite géométrique si, et seulement si $b^2 = ac$. On dit que a, b , c sont en progression géométrique et que, b est la moyenne géométrique de a et c.

Somme de termes consécutifs d'une suite géométrique

Théorème 43. Soit S la somme de N termes consécutifs d'une suite géométrique de raison q et a le premier terme de cette somme. On a :

$$S = a\frac{1-q^N}{1-q} \quad \text{si} \quad q \neq 1$$

Démonstration

$$\text{On a} : S = a + aq + aq^2 + aq^3 + \cdots + aq^{N-2} + aq^{N-1}$$

Multiplions les deux membres de cette égalité par q; on obtient

$$qS = aq + aq^2 + aq^3 + \cdots + aq^{N-1} + aq^N$$

En soustrayant membre à membre ces deux égalités ,on obtient :

$$S(1-q) = a - aq^N = a(1-q^N)$$

On en déduit que :

$$\text{si} \quad q \neq 1 \quad \text{on a} \quad S = a\frac{1-q^N}{1-q}$$

Remarque 44. $*$ si $q = 1$ alors $S = Na *$ $S = a\frac{1-q^N}{1-q} = a\frac{q^N-1}{q-1}$

A retenir

Somme S de termes consécutifs d'une suite géométrique :

$$S = \text{premier terme} \times \frac{1 - \text{raison}^{\text{nombre de termes}}}{1 - \text{raison}}$$

Exemple 45. Soit (u_n) la suite est géométrique de premier terme $u_4 = 2$ et de raison $q = \frac{1}{2}$.
On se propose de calculer la somme $S = u_4 + u_5 + \cdots + u_{14}$.
Elle comporte $14 - 4 + 1 = 11$ termes . D'après le théorème 1.8 on a :

$$S = u_4 \frac{1 - q^{11}}{1 - q} = u_4 \frac{1 - (\frac{1}{2})^{11}}{1 - \frac{1}{2}} = 4[1 - (\frac{1}{2})^{11}] = -8188$$

Cas particulier

Pour tout réel $q \neq 1$ on a :

$$1 + q + q^2 + \cdots + q^{n-1} = \frac{1 - q^n}{1 - q}$$

V - Convergence d'une suite

Définition 46. Une suite (u_n) est dite **convergente** si elle admet une limite finie l lorsque n tend vers $+\infty$.
On dit la suite (u_n) converge vers l.
Dans le cas contraire, la suite est dite divergente.

Exemple 47. Soit $u_n = 5 + \frac{1}{n} \quad n \in \mathbb{N}^*$
$\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 5$ donc la suite (u_n) converge vers 5.

Remarque 48. Dire qu'une suite est divergente peut signifier qu'elle n'a pas de limite, par exemple $u_n = (-1)^n$ou que sa limite est $+\infty$ ou $-\infty$ par exemple $u_n = 3^n$

Cas d'une suite géométrique

Soit (u_n) suite est géométrique de raison q.

- si $q \in]-1\,,\,1[$ alors la suite (u_n) est convergente et converge vers 0.
- si $q < -1$, u_n n'a pas de limite , alors la suite (u_n) est divergente.
- si $q > 1$ on a $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = \pm\infty$, alors la suite (u_n) est divergente.
- si $q = 1$ alors (u_n) est une suite constante et converge vers u_0.

Exercice 49. Soit (u_n) est la définie par : $u_n = 3 + (-\frac{1}{2})^n$, $\forall n \in \mathbb{N}$

1. Etudier la convergence de la suite (u_n).

2. Soit (v_n) la suite définie par $v_n = u_n - u_{n-1}$.
   (a) Exprimer v_{n+1} en fonction de v_n. En déduire la nature de la suite (v_n).
   (b) La suite (v_n) est -elle convergents ?

Démonstration. 1. Calculons $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$.
On a $-1 < -\frac{1}{2} < 1$, donc $\lim\limits_{n\to+\infty} (-\dfrac{1}{2})^n = 0$ d'où $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 3$, la suite (u_n) converge vers 3.

2. (a) $v_n = 3-(-\frac{1}{2})^n - 3 - (-\frac{1}{2})^{n-1} = (-\frac{1}{2})^n - (-\frac{1}{2})^{n-1} = (-\frac{1}{2})^{n-1}(-\frac{1}{2}-1) = 3\times(-\frac{1}{2})^n$la suite (v_n) est donc une suite géométrique de raison $q = -\frac{1}{2}$.
   (b) Or $-1 < -\frac{1}{2} < 1$ on a donc $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = 0$
   Donc la suite (v_n) converge vers 0.

□

Remarque 50. — Si $|q| < 1$ alors $\lim\limits_{n\to+\infty} q^n = 0$
— Si $q > 1$ alors $\lim\limits_{n\to+\infty} q^n = +\infty$
— Soient (u_n) et (v_n) deux suites telles que : $|u_n - \alpha| < v_n$ si $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = 0$ alors $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \alpha$.

Théorèmes de convergence

On admettra les théorèmes suivants :

Théorème 51. — Toute suite croissante majorée est convergente
— Toute suite décroissante minorée est convergente

Remarque 52. ∗ Ce théorème particulièrement important, permet de savoir si une suite converge ou pas. Mais s'il donne l'existence de la limite de la suite, il ne donne pas la valeur de la limite.
∗ Il ne faut pas confondre majorant (ou minorant) et limite : une suite peut être croissante et majorée par 2 sans que sa limite soit égale à 2.
∗ Si une suite positive converge alors sa limite est positive.

Théorème 53. Si (u_n) converge vers l et si f est une fonction continue en l alors la suite $(f(u_n))$ converge vers $f(l)$.

Théorème 54. Soit (u_n) une suite définie par la relation $u_{n+1} = f(u_n)$.
Si (u_n) converge vers l et si f est une fonction continue en l alors l est solution de l'équation $f(x) = x$.

Remarque 55. On commence donc par montrer que la suite (u_n) converge, puis on résout l'équation $f(x) = x$.

Exercice 56. Soit la suite (u_n) définie par :
$u_0 = 1 \quad$ et $\quad u_{n+1} = \sqrt{u_n + 2} \quad$ pour tout $\quad n \in \mathbb{N}$.

1. Démontrer que la suite est croissante .
2. Démontrer que la suite est majorée par 2.
   En déduire la convergence de la suite .
3. On se propose de calculer la limite de cette suite par deux méthodes .
   (a) En utilisant le théorème 53, calculer la limite l de la suite .
   (b) Montrer que pour tout n de $\mathbb{N}$ on a :
   $$|u_{n+1} - 2| \leq \frac{1}{2}|u_n - 2| \qquad \text{puis que } |u_n - 2| \leq \frac{1}{2^n}$$
   En déduire la limite l de la suite .

Solution

1. Pour étudier la monotonie de cette suite, au lieu d'étudier le rapport $\frac{u_{n+1}}{u_n}$, étudions la différence $u_{n+1} - u_n$.
   Démontrons par récurrence que : $\forall n \in \mathbb{N} \quad u_{n+1} - u_n > 0$.
   $$\text{On a :} \quad u_1 - u_0 > 0$$
   Supposons que pour un certain entier naturel n, $u_{n+1} - u_n > 0$ alors :
   $$u_{n+2} - u_{n-1} = \sqrt{2 + u_{n+1}} - u_{n+1} = \sqrt{2 + u_{n+1}} - \sqrt{2 + u_n} = \frac{u_{n+1} - u_n}{\sqrt{2 + u_{n+1}} - \sqrt{2 + u_n}}$$
   Donc $\forall n \in \mathbb{N} : \quad u_{n+1} - u_n > 0$. La suite est croissante.
2. Démontrons par récurrence que la suite est majorée par 2.
   On a $u_0 = 1 < 2$
   Supposons que pour un certain entier naturel n, $u_n < 2$ alors :
   $u_n + 2 < 4$ puis $\sqrt{u_n + 2} < \sqrt{4}$ donc $\sqrt{u_n + 2} < 2$ c'est à dire $u_{n+1} < 2$
   Donc $\forall n \in \mathbb{N} : \quad u_n < 2$. La suite est majorée par 2.
   La suite (u_n) étant croissante et majorée par 2 donc converge.
3. (a) La suite (u_n) étant croissante et majorée par 2, admet une limite l qui est positive car la suite est à termes positifs.
   La fonction $x \mapsto \sqrt{x + 2}$ est continue sur $]-2\,,\,+\infty[$ donc au point l
   D'où d'après le théorème 1.11 on a; $l = \sqrt{l + 2}$ c'est à dire $l^2 - l - 2 = 0$
   On trouve $l = 2$, la limite de la suite est 2.

(b) On peut écrire pour tout n de $\mathbb{N}$:

$$u_{n+1}-2=\sqrt{u_n+2}-2=\frac{(\sqrt{u_n+2}-2)(\sqrt{u_n+2}+2)}{\sqrt{u_n+2}+2}=\frac{u_n-2}{\sqrt{u_n+2}+2}$$

$$|u_{n+1}-2|=\frac{|u_n-2|}{\sqrt{u_n+2}+2}$$

$$\text{Or}\quad \sqrt{u_n+2}+2\geq 2$$

$$\text{Donc}\quad |u_{n+1}-2|\leq\frac{|u_n-2|}{2}$$

Ecrivons l'inégalité précédente pour l'indice variant de n à 1

$$|u_n-2|\leq\frac{1}{2}|u_{n-1}-2|$$

$$|u_{n-1}-2|\leq\frac{1}{2}|u_{n-2}-2|$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$|u_2-2|\leq\frac{1}{2}|u_1-2|$$

$$|u_1-2|\leq\frac{1}{2}|u_0-2|$$

Par produit membre à membre et après simplification , on obtient :

$$|u_n-2|\leq\frac{1}{2^n}|u_0-2|$$

Or $|u_0-2|=1$ donc $|u_n-2|\leq\frac{1}{2^n}$
Et puisque $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{1}{2^n}=0$ on en déduit que $\lim\limits_{n\to+\infty}|u_n-2|=0$
d'où $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n=2$.