Fonction racine n-ième

Théorème 1 (et définition). $n \in \mathbb{N}^*$
La fonction $x \mapsto x^n$ est continue et strictement croissante sur $\mathbb{R}_+$ donc elle est bijective de $\mathbb{R}_+$ vers $\mathbb{R}_+$ et admet une bijection réciproque appelée *fonction racine n-ième* et notée $x \mapsto x^{\frac{1}{n}}$ ou $x \mapsto \sqrt[n]{x}$.

Exemple 2.
- $\sqrt[1]{x} = x$,
- $\sqrt[2]{x} = \sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}}$ (racine carrée) ,
- $\sqrt[3]{x} = x^{\frac{1}{3}}$ appelée la racine cubique de x.

Notation 3.

$$\sqrt[n]{x^p} = (x^p)^{\frac{1}{n}} = x^{\frac{p}{n}}$$

Résolution de l'équation $x^n = a$

- si n est pair et $a \geq 0$ alors $x = \sqrt[n]{a}$ ou $x = -\sqrt[n]{a}$
- si n est impair et $a \geq 0$ alors $x = \sqrt[n]{a}$
- si n est pair et $a < 0$ alors pas de solution.
- si n est impair et $a \leq 0$ alors $x = -\sqrt[n]{-a}$

Exemple 4.
1. $x^3 = 8 \Longleftrightarrow x = \sqrt[3]{8} = 8^{\frac{1}{3}} = (2^3)^{\frac{1}{3}} = 2$
2. $x^3 + 1 = 0 \Longleftrightarrow x^3 = -1 \Longleftrightarrow x = -\sqrt[3]{1} = -1$
3. $x^4 = 3 \Longleftrightarrow x = \sqrt[4]{3}$ ou $x = -\sqrt[4]{3}$

Fonction puissance d'exposant rationnel

Définition 5. r étant un nombre rationnel non nul, on appelle *fonction puissance d'exposant r*, la fonction :

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R}_+ & \longrightarrow & \mathbb{R}_+ \\ x & \longmapsto & x^r \end{array}$$

Propriété 6.
1. r et r' étant des nombres rationnels non nuls, x et y des réels strictement positifs.
   - $x^r \times y^r = (xy)^r$
   - $(x^r)^{r'} = x^{rr'}$

- $\dfrac{x^r}{y^r} = (\dfrac{x}{y})^r$
- $x^r \times x^{r'} = x^{r+r'}$
- La fonction $x \longmapsto x^r$ est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et $(x^r)' = rx^{r-1}$.
- La fonction u^r est définie ssi $u \geq 0$.
- Si u est dérivable et strictement positive sur I alors la fonction u^r est dérivable sur I et $(u^r)' = ru'u^{r-1}$.

Exemple 7. $f(x) = \sqrt[3]{2x+1}$
$f(x)$ existe $\Leftrightarrow 2x+1 \Leftrightarrow x \geq -\dfrac{1}{2}$ donc f est dérivable sur $\left]-\dfrac{1}{2}\,,\,+\infty\right[$
$f(x) = \sqrt[3]{2x+1} = (2x+1)^{\frac{1}{3}} \Longrightarrow f'(x) = \dfrac{2}{3}(2x+1)^{-\frac{2}{3}} = \dfrac{2}{3\sqrt[3]{(2x+1)^2}}$