Terminale

Exercices

Table des matières

1 Composition des applications 1
2 Exercices sur les Limites 3
3 Exercices : Limites de fonctions composées 5
4 Exercices sur les limites (TL) 7
5 Exercices sur les polynômes 9

1 Composition des applications

Exercice 1. Recopier et compléter les pointillés :

1. Soient $f(x) = x + 2$ et $g(x) = x^2$ deux applications définies sur $\mathbb{R}$.
   — $(f \circ g)(3) = \cdots$
   — $(g \circ f)(3) = \cdots$
   — $(f \circ g)(x) = \cdots$
2. Si $h(x) = (2x+1)^3$ tel que $h = f \circ g$ alors $g(x) = \cdots$ et $f(x) =$

Exercice 2. Dans chacun des cas suivants, déterminer l'application $g \circ f$.

1. $f(x) = 3x$ et $g(x) = x + 5$
2. $f(x) = 2x$ et $g(x) = -7x$
3. $f(x) = 2x^2$ et $g(x) = -7x$
4. $f(x) = 2x + 3$ et $g(x) = 2x^2 + 5x + 1$
5. $f(x) = 1 - x$ et $g(x) = \dfrac{1}{x}$

Exercice 3. Dans chacun des cas suivants , déterminer l'application $g \circ f$.

1. $f(x) = 3x$ et $g(x) = \sqrt{x}$
2. $f(x) = 2\sqrt{x+1}$ et $g(x) = 5x^2$
3. $f(x) = \sqrt{x}$ et $g(x) = 5x^2 + 1$
4. $f(x) = x + 1$ et $g(x) = 2x^2 + 3x + 4$

Exercice 4. Dans chacun des cas suivants , déterminer une expression de $g \circ f$ en fonction de x. (*on simplifiera si possible l'expression de $g \circ f$ obtenue.*)

1. $f(x) = \dfrac{x+1}{x-1}$ et $g(x) = \sqrt{x}$
2. $f(x) = \sqrt{x}$ et $g(x) = \dfrac{x+1}{x-1}$
3. $f(x) = 3x + 1$ et $g(x) = x^3$
4. $f(x) = x + 1$ et $g(x) = \dfrac{x+1}{x-1}$

Exercice 5 (Décomposition)**.** Dans chacun des cas suivants, déterminer deux applications f et g telles que l'application h soit la composée de g par f : c'est à dire $h = g \circ f$.

1. $h(x) = \sqrt{7x+1}$
2. $f(x) = (5x+6)^2$

3. $h(x) = (x-2)^2 - 4$
4. $h(x) = \dfrac{\sqrt{x}+1}{1-2\sqrt{x}}$

Exercice 6. 1. Soit deux applications f et g définies par : $f(x) = 1 - x$ et $g(x) = \dfrac{8x-4}{3x+3}$.

   (a) Calculer $(f \circ g)(0)$ et $(g \circ f)(2)$.

   (b) Déterminer une expression de $(g \circ f)(x)$.

2. On considère l'application h définie par : $h(x) = 2(5x-2)^2$.Déterminer deux applications u et v telles que : $h(x) = (v \circ u)(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

Exercice 7. Pour chaque item, indiquer le résultat exact parmi les trois proposés.

n°	**Items**	**Résultat A**	**Résultat B**	**Résultat C**
1.	Si $f(x) = -x^2 + 1$ et$g(x) = (x-1)^2$ Alors la valeur de $g \circ f(-1)$ est	1	0	4
2.	Soit $f(x) = 3x + 4$. Une expression de $f(2x)$ en fonction de x est	$6x + 8$	10	$6x + 4$
3.	L'application définie par $f(x) = (x+3)^4$ est la composée de $u \circ v$ avec :	$u(x) = x + 3$ et $v(x) = x^4$	$u(x) = x^4$ et $v(x) = x + 3$	$u(x) = x$ et $v(x) = 3 + x^4$

2 Exercices sur les Limites

Exercice 1. Étudier les limites suivantes.

1. $\lim\limits_{x\to+\infty} \sin\dfrac{\pi}{x}$
2. $\lim\limits_{x\to\infty} x\sin\dfrac{\pi}{x}$
3. $\lim\limits_{x\to-\infty} \sqrt{\dfrac{2x^2}{1-x}}$
4. $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(x-\sqrt{x}+\dfrac{1}{x}\right)^3$
5. $\lim\limits_{x\to+\infty} x\left(\sqrt{\dfrac{x}{x+1}}-1\right)$

Exercice 2. Calculer la limite suivante.$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sqrt{x+4}-2}{x}$En déduire :

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{\sqrt{4+\cos x}-2}{\cos x}$$

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{\sqrt{4+\sin x}-2}{x}$$

Exercice 3. On considère la fonction f définie sur $[2,\ +\infty[$ par $f(x)=\dfrac{3x+\sin x}{x-1}$Montrer que , pour tout $x\geq 2$, $|f(x)-3|\leq\dfrac{4}{x-1}$.En déduire la limite de f en $+\infty$?.

Exercice 4. Soit la fonction f définie par : $f : x\mapsto x^2\sin\left(\dfrac{1}{x}\right)+1\quad\forall x\in\mathbb{R}^*$

1. Montrer que $\forall x\in\mathbb{R}^*\quad 1-x^2\leq f(x)\leq 1+x^2$
2. En déduire :
   (a) $\lim\limits_{x\to0} f(x)$
   (b) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{x^3}$
   (c) $\lim\limits_{x\to0} \dfrac{f(x)-1}{x}$.

Exercice 5. Soi f une fonction définie sur $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$ telle que : $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = 0$, $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 1$, $\lim\limits_{x \to -1^-} f(x) = +\infty$ et $\lim\limits_{x \to -1^+} f(x) = -\infty$.

1. Interpréter graphiquement ces limites.
2. En déduire les limites suivantes.
   (a) $\lim\limits_{x \to +\infty} f\left(\sqrt{x}\right)$
   (b) $\lim\limits_{x \to +\infty} f\left(-1 + \dfrac{1}{x}\right)$
   (c) $\lim\limits_{x \to 0^-} f\left(\dfrac{1}{x}\right)$
   (d) $\lim\limits_{x \to -\infty} \left(\dfrac{f(x) - 1}{2f(x) + 1}\right)^2$

Exercice 6. Étudier les limites suivantes.

1. $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x^{10} - 1}{x - 1}$
2. $\lim\limits_{x \to -1} \dfrac{x\sqrt{x+2} + 1}{x + 1}$
3. $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{6}} \dfrac{2\sin x - 1}{6x - \pi}$
4. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\cos^5 x + \sin 2x - 1}{x}$

3 Exercices : Limites de fonctions composées

a, b et c désignent soit un réel soit $\pm\infty$.Rappel : $\boxed{\text{Si } \lim\limits_{x\to a} f(x) = b \text{ et } \lim\limits_{x\to b} g(x) = c \text{ alors par composée } \lim\limits_{x\to a} g}$

Exercice 1. Justifier les limites suivantes.

1. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{3x-1}{x^2}\right)^4 = +\infty$
2. $\lim\limits_{x\to -\infty}\sqrt{4+\dfrac{1}{x}} = 2$
3. $\lim\limits_{x\to +\infty}\cos\left(\dfrac{\pi x-2}{x-4}\right) = -1$

Exercice 2. Etudier les limites suivantes.

1. $\lim\limits_{x\to +\infty}\sqrt{x^2-x-3}$
2. $\lim\limits_{x\to -2^-}\sqrt{\dfrac{1+x}{4-x^2}}$
3. $\lim\limits_{x\to -\infty}\sin\left(\dfrac{\pi x-2}{6x-4}\right)$
4. $\lim\limits_{x\to +\infty}\left(\sqrt{x}-x\right)^5$

Exercice 3. Une fonction f définie sur $\mathbb{R}\setminus\{-1\}$ tel que : $\lim\limits_{x\to -\infty} f(x) = 0$, $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x) = 1$, $\lim\limits_{x\to -1^-} f(x) = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to -1^+} f(x) = -\infty$.

1. Interpréter graphiquement ces limites.
2. Déterminer les limites suivantes.
   — $\lim\limits_{x\to +\infty} f\left(\sqrt{x}\right)$
   — $\lim\limits_{x\to +\infty} f\left(-1+\dfrac{1}{x}\right)$
   — $\lim\limits_{x\to -\infty} f\left(-1+\dfrac{1}{x}\right)$
   — $\lim\limits_{x\to 0^-} f\left(\dfrac{1}{x}\right)$
   — $\lim\limits_{x\to +\infty} f\left(\dfrac{x^2+1}{2x-1}\right)$
   — $\lim\limits_{x\to -\infty} f\left(\dfrac{2-x^2}{2+x^2}\right)$

Exercice 4. Une fonction f a pour tableau de variations celui donné ci-dessous.

x	$-\infty$			-1			2		$+\infty$
$f(x)$	0	$\searrow$	$-\infty$	$\|\|$	$+\infty$	$\searrow$	0	$\nearrow$	1

Donner en utilisant ce tableau les limites suivantes.

1. $\lim\limits_{x\to+\infty} f(-x+1)$
2. $\lim\limits_{x\to+\infty} f\left(2+\dfrac{2}{x}\right)$
3. $\lim\limits_{x\to-1^-} \dfrac{x-2}{f(x)}$
4. $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{f(x)+x}{f(|x|)-1}$

Exercice 5. Soit f une fonction définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ tel que $f(1)=0$ et $f'(1)=-1$.$\mathscr{C}_f$ admet une asymptote d'équation $y=3$ en $-\infty$ et une asymptote d'équation $y=x+4$ en $+\infty$.

1. Calculer les limites suivantes.
   — $\lim\limits_{x\to 0} f\left(\dfrac{x-1}{x^2}\right)$
   — $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{x+f(x)}$
   — $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{f(x)-x+3}$
2. On considère la limite suivante $\lim\limits_{x\to+\infty} xf\left(1+\dfrac{1}{x}\right)$.
   (a) Justifier qu'il y a une présence de forme indéterminée.
   (b) En posant $X=1+\frac{1}{x}$, calculer cette limite.

4 Exercices sur les limites (TL)

Exercice 1. Reproduire et compléter le tableau suivant.

$\lim\limits_{x\to 0} f(x)$	$+\infty$	-5	2
$\lim\limits_{x\to 0} g(x)$	-3	0^-	
$\lim\limits_{x\to 0} (f(x)+g(x))$			
$\lim\limits_{x\to 0} f(x)\times g(x)$			
$\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{f(x)}{g(x)}$			0^-

Exercice 2. Calculer les limites suivantes en utilisant la somme, le produit ou le quotient de limites :

1. $\lim\limits_{x\to -\infty} 2x+1+\dfrac{3}{x-1}$
2. $\lim\limits_{x\to 0^+} \left(\dfrac{2}{x}+3\right)\left(x-\dfrac{1}{x}\right)$
3. $\lim\limits_{x\to -\infty} (-x+1)(3x-2)$
4. $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{\frac{2}{x}+3}{2-\frac{1}{x}}$

Exercice 3. Calculer les limites de la fonction f en $+\infty$ et en $-\infty$ si elles existent.

1. $f(x) = -8x^3+x-2$
2. $f(x) = -x^2+x-2$
3. $f(x) = (2x-5)(-5x+1)$
4. $f(x) = -2(3-2x)^3$
5. $f(x) = \sqrt{2x-3}$
6. $f(x) = \sqrt{3-x}$

Exercice 4. Etudier les limites de la fonction f aux bornes de son domaine de définition en précisant les asymptotes éventuelles de la courbe de f.

1. $f(x) = \dfrac{3x-1}{x-6}$
2. $f(x) = \dfrac{-8x+3}{2x-4}$
3. $f(x) = 2+\dfrac{3}{x+2}$

4. $f(x) = 1 - \dfrac{6}{1-x}$

Exercice 5. Même question qu'à l'exercice précédent.

1. $f(x) = \dfrac{2x^2-7}{x^2-9}$
2. $f(x) = \dfrac{5x}{x^2-4}$
3. $f(x) = \dfrac{3x^2-3}{x^2}$
4. $f(x) = 2 + \dfrac{x+1}{x^2+2}$

Exercice 6. Pour chacun des cas suivants, montrer que la droite Δ est une asymptote à la courbe de la fonction f puisétudier la positive relative de $\mathscr{C}$ par rapport à Δ.

1. $f(x) = 2x+1+\dfrac{2}{x-3}$ $\quad\Delta : \; y = 2x+1$
2. $f(x) = -x+4-\dfrac{5}{x-1}$ $\quad\Delta : \; y = -x+4$
3. $f(x) = 4-x-\dfrac{5x}{x^2+2}$ $\quad\Delta : \; y = 4-x$

Exercice 7. Déterminer une équation de l'asymptote oblique de la courbe de f dans chacun des cas suivants.

1. $f(x) = \dfrac{x^2+3x-1}{x-1}$
2. $f(x) = \dfrac{2x^2+x+1}{x+1}$
3. $f(x) = \dfrac{x^2-x+3}{2x-4}$
4. $f(x) = \dfrac{3x^2+4x}{x+3}$

Exercice 8. Étudier les limites de la fonction f aux bornes de son D_f.

1. $f(x) = -x^4-3x^2+4$
2. $f(x) = \dfrac{x^2-10x+24}{x^2-3x-4}$
3. $f(x) = \dfrac{x^2-6x-7}{-x+1}$
4. $f(x) = \sqrt{8-4x}$

5 Exercices sur les polynômes

Exercice 1. Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes :

1. $-x^2-2x+3=0$
2. $x^2-2x=15$
3. $x(x+3)=x+1$
4. $4x^2-3x=0$
5. $(2x-1)\left(-3x^2+12x-8\right)=0$
6. $\left(x^2-2\right)\left(x^2+1\right)=0$
7. $\dfrac{30}{x}+\dfrac{18}{x+3}=7$

Exercice 2. Résoudre dans $\mathbb{R}$ les inéquations suivantes :

1. $x^2-13x-48\leq 0$
2. $-x^2+13x+48\leq 0$
3. $-x^2+13x+48>0$
4. $2x^2+2\sqrt{2}x+1>0$
5. $x^2+2\sqrt{3}x+2<0$
6. $x^2+x-2\geq 1$
7. $(x+1)(-x^2+x+6)>0$
8. $(1-4x)(x^2+5x+4)>0$
9. $\dfrac{x^2-3x-4}{x-3}\geq 0$
10. $\dfrac{x-1}{x+1}>2x$

Exercice 3. On considère le polynôme suivant : $P(x)=-2x^3+9x^2-7x-6$.

1. (a) Montrer que 2 est une racine de $P(x)$.
   (b) En déduire que $P(x)$ peut s'écrire sous la forme $P(x)=(x-2)(ax^2+bx+c)$ où a , b et c sont des réels à préciser.
   (c) Factoriser $P(x)$ en produit de facteurs de polynômes de premier degré.
2. On suppose maintenant que : $P(x)=(-2x-1)(x-2)(x-3)$.
   (a) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $P(x)=0$.
   (b) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation $P(x)<0$.

Exercice 4. On considère le polynôme suivant : $P(x) = 3x^3 + 17x^2 + 9x - 5$.

1. Montrer que $P(x)$ est factorisable par $x+1$ puis l'écrire sous la forme : $P(x) = (x+1)Q(x)$ où $Q(x)$ est un polynôme à préciser.
2. Factoriser $Q(x)$.
3. En déduire que $P(x) = (3x-1)(x+5)(x+1)$.
4. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation $P(x) \leq 0$.
5. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $P(x) = 0$ puis $3(2x-5)^3 + 17(2x-5)^2 + 9(2x-5) - 5 = 0$.

Exercice 5. Soit le polynôme $P(x) = 2x^4 + 5x^3 - 5x^2 - 5x + 3$.

1. Calculer $P(1)$ et $P(-3)$. Que peut-on en déduire?
2. Montrer que : $P(x) = (x-1)(2x^3 + 7x^2 + 2x - 3)$.
3. On pose $\mathrm{Q}(x) = 2x^3 + 7x^2 + 2x - 3$.
   (a) Trouver trois réels a, b et c tels que : $\mathrm{Q}(x) = (x+3)(ax^2 + bx + c)$.
   (b) En déduire une factorisation de $P(x)$.
4. Étudier dans $\mathbb{R}$, le signe de $P(x)$.

Exercice 6. On considère le polynôme suivant : $h(x) = 4x^3 + x^2 - 4x - 1$.

1. Vérifier que 1 est une racine de $h(x)$.
2. En déduire une factorisation de $h(x)$ par la méthode de HORNER.
3. Soit $R(x) = \dfrac{(4x+1)(x+1)(x-1)}{4x^2 - 7x - 2}$
   (a) Montrer que $(4x+1)(x-2) = 4x^2 - 7x - 2$.
   (b) Simplifier $R(x)$.
   (c) Étudier, suivant les valeurs du réel x ,le signe de $R(x)$.

Exercice 7. On considère le polynôme suivant : $P(x) = 3x^4 + 14x^3 - 8x^2 - 14x + 5$.

1. Vérifier que 1 et -5 sont des racines de $P(x)$.
2. En utilisant la méthode de HORNER, trouver le quotient $Q(x)$ de la division de $P(x)$ par $(x-1)$.
3. Puis en utilisant de nouveau la méthode de HORNER, trouver le quotient $Q'(x)$ de la division de $Q(x)$ par $(x+5)$.
4. Factoriser $Q'(x)$ puis $P(x)$.
5. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation $P(x) \geq 0$.
6. Soit $F(x) = \dfrac{(3x-1)(x^2-1)(x+5)}{x^2 + x - 2}$.
   (a) Montrer que $x^2 + x - 2 = (x-1)(x+2)$.

(b) Simplifier $F(x)$.

(c) Étudier, suivant les valeurs du réel x ,le signe de $F(x)$.

Exercice 8. 1. Soit $P(x) = x^3 + bx^2 + cx + d$ où b, c et d sont des réels.Sachant que $P(1) = 4$, $P(-1) = -16$ et $P(3) = 0$, déterminer les réels b, c et d.

2. On pose $P(x) = x^3 - 6x^2 + 9x$

   (a) Factoriser $P(x)$.

   (b) Etudier suivant les valeurs de x , le signe de $P(x)$.

3. Une entreprise vend un produit, et le profit réalisé en fonction du nombre de produits vendus$x$ est donné par la fonction de profit suivante : $P(x) = x^3 - 6x^2 + 9x$Combien de produits l''entreprise doit-elle produire au moins pour réaliser un bénéfice ?