# Terminale

Fiches

# Table des matières

# 1 Calcul de probabilité

**Propriété 1.** — Soient $A$ et $B$ deux événements :

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

— Soient $A$ un événement et $\overline{A}$ son événement contraire :

$$P\left(\overline{A}\right) = 1 - P(A)$$

**Définition 2.** Lorsque tous les événements élémentaires de l'univers $\Omega$ ont la même probabilité ; on dit qu'il y a **équiprobabilité**.

**Propriété 3.** Dans un cas d'équiprobabilité, la probabilité d'un événement $A$ est :

$$P(A) = \frac{\text{card}A}{\text{card}\Omega}$$

# 2 Conseils généraux

*Dans cette fiche un peu différente, je liste quelques conseils de préparation pour réussir l'épreuve de Mathématiques au Baccalauréat Sénégalais.*

# Conseils aux Professeurs

## 1. Clarifier les attentes de l'épreuve

– Étudier les annales des 5 dernières années pour cerner les types d'exercices.
– Mettre en évidence les exercices de type 1 (techniques), 2 (guidés) et 3 (ouvert ou contextualisé).
– Rappeler la structure de l'épreuve : durée, barème, exigences de présentation.

## 2. Former aux méthodes, pas seulement au contenu

– Exiger une rédaction rigoureuse, surtout en géométrie et analyse.
– Insister sur les justifications des résultats, même obtenus à la calculatrice.
– Travailler la lecture fine et l'interprétation des énoncés.

## 3. Développer l'autonomie

– Proposer des devoirs blancs en temps réel.
– Encourager l'auto-évaluation et l'analyse d'erreurs.
– Introduire une progression des difficultés dans les exercices donnés.

## 4. Mettre en place des rituels pédagogiques

– Commencer chaque cours par un rappel de méthode ou une mini-question.
– Encourager l'usage du brouillon structuré.
– Distribuer des fiches de méthodes par thème.

## 5. Accompagner jusqu'au jour J

– Fournir une fiche de révision finale synthétique.
– Corriger les erreurs récurrentes de manière collective.
– Simuler des épreuves orales pour les séries concernées.

# Conseils aux Élèves

## 1. Maîtriser les bases

- Apprendre par cœur les formules essentielles : trigonométrie, dérivées, primitives, identités remarquables.
- Bien comprendre les concepts : fonction, variation, vecteurs, probabilités.

## 2. Travailler régulièrement et efficacement

- Réviser 1h de maths par jour au minimum en période de révision.
- Alterner entre cours, fiches personnelles et exercices corrigés.

## 3. Résoudre intelligemment

- Lire chaque énoncé deux fois.
- Identifier ce qui est donné, ce qui est demandé.
- Passer les questions trop difficiles, y revenir après.

## 4. Rédiger proprement

- Écrire lisiblement, aérer la copie.
- Justifier chaque réponse importante.
- Employer un vocabulaire mathématique précis.

## 5. Gérer son temps le jour de l'examen

- Ne pas passer plus de 45 minutes sur un seul exercice.
- Garder 10 à 15 minutes pour se relire.
- Commencer par l'exercice le mieux maîtrisé.

## 6. Être mentalement prêt

- Apprendre à gérer le stress par la respiration ou des rituels positifs.
- Se projeter en situation de réussite : visualisation mentale.

# □ Matériel recommandé pour le jour J

- Stylos (bleu/noir), crayon, gomme, règle, compas.
- Calculatrice autorisée (mode examen activé).
- Une montre ou repère d'horloge visible.

*« Le succès au Bac ne dépend pas seulement du talent, mais surtout du travail, de la méthode, et de la persévérance. »*

# 3 Éléments de symétrie d'une courbe

Soit $f$ une fonction numérique et $\mathscr{C}$ sa courbe représentative dans un repère orthogonal.

## I - Axe de symétrie

Pour montrer que la droite $\Delta$ d'équation $x = a$ est un axe de symétrie de la courbe $\mathscr{C}$, on peut utiliser l'une des méthodes suivantes :

- Démontrer que : $\forall x \in D_f$ on a $2a - x \in D_f$ et $f(a-x) = f(x)$
- Démontrer que : $\forall x \in D_f$ on a $a - x \in D_f$, $a + x \in D_f$ et $f(2a-x) = f(a+x)$
- Démontrer que : la fonction $g(x) = f(a-x)$ est paire.

Dans ce cas on peut restreindre l'étude de $f$ à $[a\,,\,+\infty[\cap D_f$ et on obtient la courbe complète par symétrie par rapport à la droite $\Delta$.

## II - Centre de symétrie

Pour montrer que le point $I(a,b)$ est un axe de symétrie de la courbe $\mathscr{C}$, on peut utiliser l'une des méthodes suivantes :

- Démontrer que : $\forall x \in D_f$ on a $2a - x \in D_f$ et $f(2a-x) + f(x) = 2b$
- Démontrer que : $\forall x \in D_f$ on a $a - x \in D_f$, $a + x \in D_f$ et $f(a-x) + f(a+x) = 2b$
- Démontrer que : la fonction $g(x) = f(a-x) + b$ est impaire.

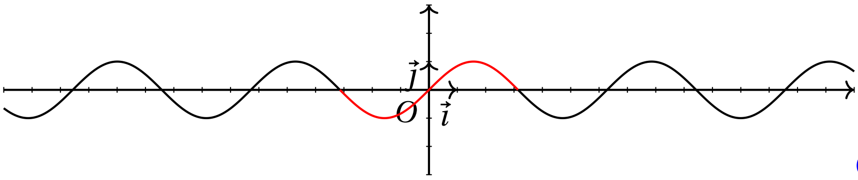
Dans ce cas on peut restreindre l'étude de $f$ à $[a\,,\,+\infty[\cap D_f$ et on obtient la courbe complète par symétrie par rapport à $I$.

## III - Fonction périodique

**Définition 1.** Une fonction $f$ est dite**périodique de période** $t$ (ou t- périodique) ssi :
· t est non nul,
· pour tout $x \in D_f$, $x + t$ et $x - t$ sont dans $D_f$ et $f(x+t) = f(x)$.
On dit que $t$ **est une période de** $f$, et la plus petite période strictement positive est **la période de** $f$. En général la période est notée $T$.
Pour tout $x$ de $D_f$ et tout **entier relatif** $k$, $f(x+kT) = f(x)$.

**Conséquences**Pour représenter graphiquement une fonction $f$ de période $T$, il suffit de :

- choisir un intervalle $I$ de longueur $T$ inclus dans $D_f$ ;
- tracer (en rouge )la partie $\mathscr{C}$ de la courbe de $f$ restreinte à cet intervalle $I$ :
- translater la partie $\mathscr{C}$ par les translations de vecteurs $(kT)\vec{i}$ avec $k$ entier relatif.




### Cas des fonctions trigonométriques

– Les fonctions $x \longmapsto \cos x$ et $x \longmapsto \sin x$ sont périodiques de période $2\pi$ c'est à dire : $\cos(x+2\pi) = \cos x$ et $\sin(x$

– La fonction $x \longmapsto \tan x$ est périodique de période $\pi$ c'est à dire : $\tan(x+\pi) = \tan x$

Cas général :

Les fonctions $x \longmapsto \cos(ax+b)$ et $x \longmapsto \sin(ax+b)$ ont pour période $T = \dfrac{2\pi}{|a|}$

La fonction $x \longmapsto \tan(ax+b)$ a pour période $T = \dfrac{\pi}{|a|}$

## Réduction de domaine d'étude

- Si $f$ est T-périodique alors on peut restreindre le domaine d'étude à tout domaine du type $[a\,,\,a+T] \cap D_f$ pour tout réel $a$, ainsi on obtient la courbe complète de $f$ sur ce domaine.
- Si $f$ est T-périodique et paire ( resp. impaire ) alors on peut restreindre le domaine d'étude au domaine $\left[0\,,\,\frac{T}{2}\right] \cap D_f$ ainsi on obtient la courbe complète sur $\left[-\frac{T}{2}\,,\,\frac{T}{2}\right] \cap D_f$ par symétrie par rapport à l'axe des ordonnées (resp. par symétrie par rapport à O origine du repère ).
- Si $f$ est T-périodique et $\mathscr{C}$ admet un axe de symétrie $\Delta$ ( resp. un centre de symétrie $I$ ) alors on peut restreindre le domaine d'étude au domaine $\left[a\,,\,a+\frac{T}{2}\right] \cap D_f$ ou au domaine $\left[a-\frac{T}{2}\,,\,a\right] \cap D_f$ ainsi on obtient la courbe complète sur $\left[a-\frac{T}{2}\,,\,a+\frac{T}{2}\right] \cap D_f$ par symétrie par rapport à l'axe $\Delta$ (resp. par symétrie par rapport un point $I$ ).

**Exercice 2.** On considère la fonction $f$ définie par : $f(x) = \dfrac{\sin x}{\sin x + \cos x}$

1. Déterminer $D_f$ et puis montrer que $f$ est de période $\pi$.
2. Montrer que le point $A(-\frac{\pi}{4}; \frac{1}{2})$ est un centre de symétrie de $\mathscr{C}_f$. En déduire un domaine simple pour l'étude de $f$

*Démonstration.* 1. $f(x)$ existe $\Leftrightarrow \sin x + \cos x \neq 0$
$\Leftrightarrow \sin x \neq -\cos x$
$\Leftrightarrow \sin x \neq \sin(x - \frac{\pi}{2})$
$\Leftrightarrow x \neq \frac{3\pi}{4} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$
Montrons que $\pi$ est la période de $f$.
$x \in D_f \Leftrightarrow x \neq \frac{3\pi}{4} + k\pi \Leftrightarrow x+\pi \neq \frac{7\pi}{4} + k\pi \Leftrightarrow x+\pi \in D_f$.
$x \in D_f \Leftrightarrow x \neq \frac{3\pi}{4} + k\pi \Leftrightarrow x-\pi \neq -\frac{\pi}{4} + k\pi \Leftrightarrow x-\pi \in D_f$.
$f(x+\pi) = \frac{\sin(x+\pi)}{\sin(x+\pi)+\cos(x+\pi)} = \frac{-\sin x}{-\sin x - \cos x} = \frac{\sin x}{\sin x + \cos x} = f(x)$

2. $2a - x = -\frac{\pi}{2} - x$
$x \in D_f \Leftrightarrow x \neq \frac{3\pi}{4} + k\pi \Leftrightarrow -\frac{\pi}{2} - x \neq -\frac{7\pi}{4} + k\pi \Leftrightarrow -\frac{\pi}{2} - x \in D_f$

$\Leftrightarrow 2a - x \in D_f$

$$f(2a-x)+f(x) = \frac{\sin(-\frac{\pi}{2}-x)}{\sin(-\frac{\pi}{2}-x)+\cos(-\frac{\pi}{2}-x)} + \frac{\sin x}{\sin x + \cos x}$$

$$f(2a-x)+f(x) = \frac{\cos x}{\cos x + \sin x} + \frac{\sin x}{\sin x + \cos x} = 1$$

Donc le point $A$ est bien un centre de symétrie de $\mathscr{C}_f$.
Proposons un d'étude de $f$.
$f$ est de période $T = \pi$ et l'abscisse du centre de symétrie est $a = -\frac{\pi}{4}$ , on peut appliquer la formule $\left[a\ ,\ a+\frac{T}{2}\right] \cap D_f$
$\left[-\frac{\pi}{4}\ ,\ -\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{2}\right] \cap D_f = \left[-\frac{\pi}{4}\ ,\ \frac{\pi}{4}\right] \cap D_f = \left]-\frac{\pi}{4}\ ,\ \frac{\pi}{4}\right]$
Conclusion : on peut étudier $f$ sur $\left]-\frac{\pi}{4}\ ,\ \frac{\pi}{4}\right]$ puis obtenir la courbe complète par symétrie par rapport à $A$ sur $\left[-\frac{3\pi}{4}\ ,\ -\frac{\pi}{4}\right[ \cup \left]-\frac{\pi}{4}\ ,\ \frac{\pi}{4}\right]$.

□

# 4 Fonction racine n-ième

**Théorème 1** (et définition). $n \in \mathbb{N}^*$
La fonction $x \mapsto x^n$ est continue et strictement croissante sur $\mathbb{R}_+$ donc elle est bijective de $\mathbb{R}_+$ vers $\mathbb{R}_+$ et admet une bijection réciproque appelée *fonction racine n-ième* et notée $x \mapsto x^{\frac{1}{n}}$ ou $x \mapsto \sqrt[n]{x}$.

**Exemple 2.**
— $\sqrt[1]{x} = x$,
— $\sqrt[2]{x} = \sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}}$ (racine carrée) ,
— $\sqrt[3]{x} = x^{\frac{1}{3}}$ appelée la racine cubique de $x$.

**Notation 3.**

$$\sqrt[n]{x^p} = (x^p)^{\frac{1}{n}} = x^{\frac{p}{n}}$$

Résolution de l'équation $x^n = a$

- si $n$ est pair et $a \geq 0$ alors $x = \sqrt[n]{a}$ ou $x = -\sqrt[n]{a}$
- si $n$ est impair et $a \geq 0$ alors $x = \sqrt[n]{a}$
- si $n$ est pair et $a < 0$ alors pas de solution.
- si $n$ est impair et $a \leq 0$ alors $x = -\sqrt[n]{-a}$

**Exemple 4.**
1. $x^3 = 8 \iff x = \sqrt[3]{8} = 8^{\frac{1}{3}} = (2^3)^{\frac{1}{3}} = 2$
2. $x^3 + 1 = 0 \iff x^3 = -1 \iff x = -\sqrt[3]{1} = -1$
3. $x^4 = 3 \iff x = \sqrt[4]{3}$ ou $x = -\sqrt[4]{3}$

### Fonction puissance d'exposant rationnel

**Définition 5.** $r$ étant un nombre rationnel non nul, on appelle *fonction puissance d'exposant r*, la fonction :

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R}_+ & \longrightarrow & \mathbb{R}_+ \\ x & \longmapsto & x^r \end{array}$$

**Propriété 6.**
1. $r$ et $r'$ étant des nombres rationnels non nuls, $x$ et $y$ des réels strictement positifs.
   — $x^r \times y^r = (xy)^r$
   — $(x^r)^{r'} = x^{rr'}$
   — $\frac{x^r}{y^r} = (\frac{x}{y})^r$

— $x^r \times x^{r'} = x^{r+r'}$
— La fonction $x \longmapsto x^r$ est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et $(x^r)' = rx^{r-1}$.
— La fonction $u^r$ est définie ssi $u \geq 0$.
— Si $u$ est dérivable et strictement positive sur $I$ alors la fonction $u^r$ est dérivable sur $I$ et $(u^r)' = ru'u^{r-1}$.

**Exemple 7.** $f(x) = \sqrt[3]{2x+1}$
$f(x)$ existe $\Leftrightarrow 2x+1 \Leftrightarrow x \geq -\frac{1}{2}$ donc $f$ est dérivable sur $\left]-\frac{1}{2}\,,\,+\infty\right[$
$f(x) = \sqrt[3]{2x+1} = (2x+1)^{\frac{1}{3}} \Longrightarrow f'(x) = \frac{2}{3}(2x+1)^{-\frac{2}{3}} = \frac{2}{3\sqrt[3]{(2x+1)^2}}$

# 5 Limites

## I - Limite d'une fonction composée

Soient $a$ , $b$et $c$ des réels ou $+\infty$ ou $-\infty$.

**Propriété 1.** Si $\lim\limits_{x\to a} f(x)=b$ et $\lim\limits_{x\to b} g(x)=c$ alors $\lim\limits_{x\to a} g(f(x))=c$

**Exemple 2.** Calculons $\lim\limits_{x\to+\infty}\cos\left(\dfrac{\pi x}{2x+1}\right)$La fonction $x\mapsto\cos\left(\dfrac{\pi x}{2x+1}\right)$ est la composée $g\circ f$ où $f: x\mapsto\dfrac{\pi x}{2x+1}$ et $g: x\mapsto\cos x$ $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\pi x}{2x+1}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\pi x}{2x}=\dfrac{\pi}{2}$ et $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\cos x=0$Donc $\lim\limits_{x\to+\infty}\cos\left(\dfrac{\pi x}{2x+1}\right)=0$

*Remarque* 3. En pratique pour calculer $\lim\limits_{x\to a} g(f(x))$ on peut faire un changement de variable en posant par exemple $X=f(x)$ et la limite devient $\lim\limits_{X\to b} g(X)$.L'objectif du changement de variable dans un calcul de limites lorsqu'on est en présence d'une forme indéterminée(FI), est de se ramener à une limite connue (limite usuelle ou limite déjà calculée)

**Exemple 4.** Pour calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} x\sin\left(\dfrac{\pi}{x}\right)$On peut poser $X=\dfrac{\pi}{x}$ et la limite devient :$\lim\limits_{X\to0}\pi\dfrac{\sin X}{X}=\pi$Donc $\lim\limits_{x\to+\infty} x\sin\left(\dfrac{\pi}{x}\right)=\pi$

## II - Théorèmes de comparaison

### Théorème 1 ( Minoration et majoration)

**Théorème 5.** Soit $f$ et $g$ deux fonctions telles que $f(x)\le g(x)$.

— Si $\lim\limits_{x\to a} f(x)=+\infty$ alors $\lim\limits_{x\to a} g(x)=+\infty$

— Si $\lim\limits_{x\to a} g(x)=-\infty$ alors $\lim\limits_{x\to a} f(x)=-\infty$

## Théorème 2 (ou théorème des gendarmes

**Théorème 6.** Soient $f$, $g$ et $h$ trois fonctions et $l$ un réel tels que $h(x) \leq f(x) \leq g(x)$.Si $\lim_{x\to a} h(x) = \lim_{x\to a} g(x) = l$ alors $\lim_{x\to a} f(x) = l$

## Théorème 3

**Théorème 7.** Soit $f$ et $g$ deux fonctions et $l$ un réel telles que $|f(x)-l| \leq g(x)$.Si $\lim_{x\to a} g(x) = 0$ alors $\lim_{x\to a} f(x) = l$

## Utilisation de la dérivée

**Théorème 8.** Si $\lim_{x\to a} f'(x) = l$ (fini ou infini) alors $\lim_{x\to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} = l$

**Exemple 9.** Pour calculer $\lim_{x\to 1} \frac{x^5+\cos(2\pi x)-2}{x-1}$, on peut procéder comme suit :

$$\lim_{x\to 1} \frac{x^5+\cos(2\pi x)-2}{x-1} = \lim_{x\to 1}\left(x^5+\cos(2\pi x)\right)' = \lim_{x\to 1} 5x^4 - 2\pi\sin(2\pi x) = 5$$