图论习题集

2020 年 5 月 10 日

1　习题6

1. 判断图6-37所示的七个图是否可平面?为什么?

解: (a) 可平面。其平面嵌入见图1(a);

(b) 不可平面。将图1(b)中粗边收缩后得到的图包含子图K_5(下方5个顶点导出的子图);

(c) 可平面。其平面嵌入如图2(c);

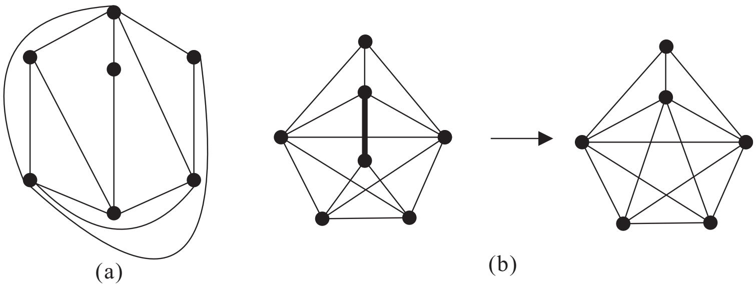


图 1: 第1题(a), (b)

(d) 不可平面。如图3(d),图中包含$K_{3,3}$的同胚子图;

(e) 可平面。其平面嵌入如图4(e);

(f) 可平面。其平面嵌入如图4(f);

(g) 不可平面。如图5(g),图中包含$K_{3,3}$的子图;

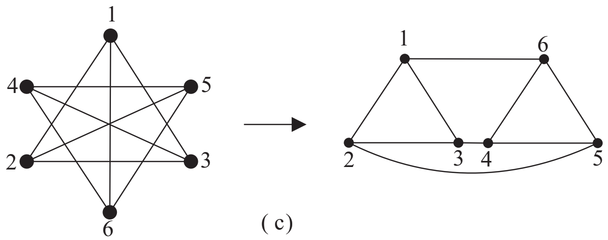


图 2: 第1题(c)

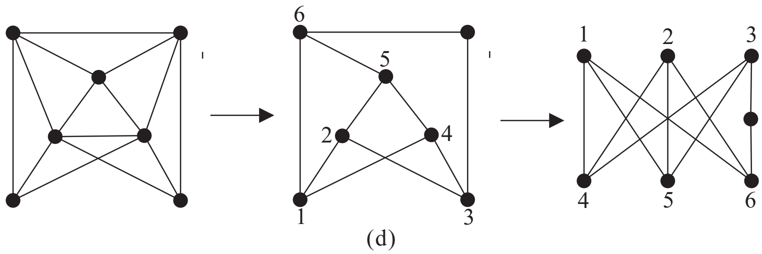


图 3: 第1题(d)

2. 设G是一个有n个点m条边的简单连通平面图，则
(1) 若每个面至少由四条边围成，则$m \leqslant 2n-4$；
(2) 若每个面至少由五条边围成，则$3m \leqslant 5n-10$；
(3) 若每个面至少由六条边围成，则$2m \leqslant 3n-6$。

证明: 设G中面的最小次数为l，则由次数公式得$2m \geqslant l\phi$。代入平面图的欧拉公式$n-m+\phi=2$，有

$$m \leqslant \frac{l}{l-2}(n-2)$$

分别将$l=4,5,6$代入上式即得(1),(2),(3)的结论。 □

3. 设G是一个有n个点ϕ个面的简单连通平面图，$n \geqslant 3$，证明$\phi \leqslant 2n-4$。

证明: 显然，对G的每个面，其次数均有$l \geqslant 3$，则由次数公式$2m \geqslant 3\phi$。代入平面图的欧拉公式$n-m+\phi=2$，即得$\phi \leqslant 2n-4$。 □

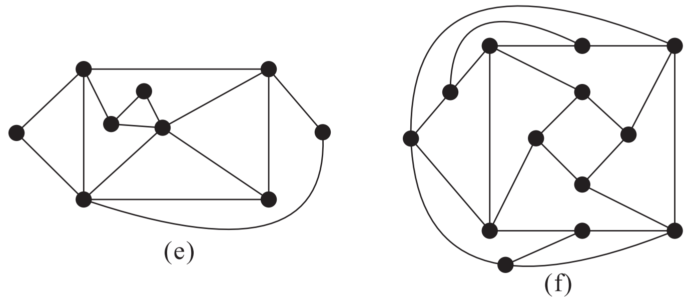


图 4: 第1题(e), (f)

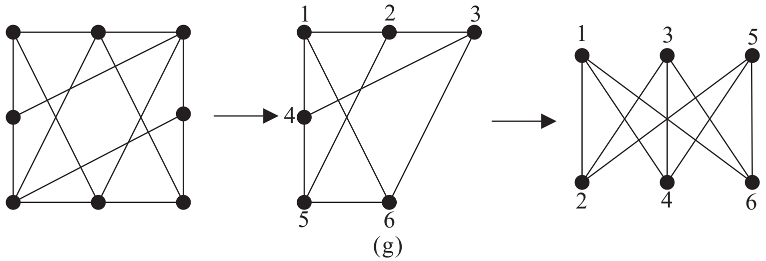


图 5: 第1题(g)

4. 设G是一个有n个点m条边ϕ个面的极大平面图，$n > 3$，则

(1) $m = 3n - 6$；

(2) $\phi = 2n - 4$；

(3) $\kappa(G) \geqslant 3$。

证明: (1)-(2) 显然，G的每个面的次数都是3。由次数公式得$2m = 3\phi$。将其代入欧拉公式即得$m = 3n - 6$和$\phi = 2n - 4$；

(3) 易知G是2-连通的。下证G是3-连通的。对n进行归纳。当$n = 4$ 时，$G = K_4$，显然命题成立。设$n < k$ $(k \leqslant 5)$时结论成立。现在考虑$n = k$。假设$\kappa(G) = 2$。那么存在V的两个子集$V_1 \cup V_2 \subseteq V$使得$G_1 = G[V_1], G_2 = G[V_2]$并且$G_1 \cap G_2 = S$，其中$S = \{x, y\}$。可以断言$xy \in E(G)$。否则，由$G$是极大平面图，则$G + xy$不可平面，由Kuratowski定理，$G + xy$包含$K_5$或者$K_{3,3}$ 的同胚子图。将xy用一条穿过G_2的x, y-路代替便得到了G的K_5或者$K_{3,3}$同胚子图。因此$xy \in E(G)$。易知G_1和G_2分别都是极大可平面的。由归纳假设那么G_1和G_2要么是三角形，要么是3-连通的。可以选择一种平

面嵌入使得xy是G_1和G_2的边界，并且存在两个点$z_1 \in V(G_1)$和$z_2 \in V(G_2)$分别在无界面上。显然有$G+z_1z_2$可平面。这与G是极大平面图矛盾。 □

5. 设G是一个有n个点m条边的简单连通平面图且满足，$m=3n-6$，则G是极大平面图。

证明: 将$m=3n-6$代入欧拉公式知$2m=3\phi$。此即说明G的每个面都是3 次的。因G是简单连通图，所有G是三角化的。所以G是极大平面图。 □

6. 对一个n阶极大平面图G，试证：
(1) 若$\delta(G)=4$，则$n \geqslant 6$，且G中至少有6个顶点的度不超过5；
(2) 若$\delta(G)=5$，则$n \geqslant 12$，且G中至少有12个顶点的度不超过5。

证明: 因为G是极大平面图，所以G是简单图。
(1) 若$n \leqslant 4$，则G不是简单图。若$n=5$，则$G \cong K_5$，矛盾。因此有$n \geqslant 6$。
若G中**至多有5个**顶点的度不超过5，则由握手定理$6(n-5)+4\times 4+5 \leqslant 2m$，即$m \geqslant 3n-4.5$。另一方面$G$是极大平面图，则$m=3n-6$，这与$m \geqslant 3n-4.5$矛盾。
(2) 若$n \leqslant 11$，则由握手定理$11\times 5 \leqslant 2m$，则$m \geqslant 27.5$。而$m=3n-6 \leqslant 3\times 11-6=27$，矛盾。因此$n \geqslant 12$。
若G中**至多有11个**顶点的度为5，则由握手定理$6(n-11)+11\times 5 \leqslant 2m$，即$m \geqslant 3n-5.5$，这与极大平面图的$m=3n-6$矛盾。 □

7. 试证：在有6个顶点、12条边的简单连通平面图中，每个面均由3条边围成。

证明: 由欧拉公式得$\phi = 8$. 设面的最小次数为l，又由面的次数公式有$2m \geqslant 8l$，即$l \leqslant 3$。另一方面，对简单图均有$l \leqslant 3$。故$l=3$。 □

8. (1) 证明：若G是极大平面图且$n \geqslant 4$，则$\delta(G) \geqslant 3$；
(2) 证明：若G是简单连通平面图且$n \geqslant 3$，则G中至少有3个度数小于等于5的点；
(3) 证明：若G是简单连通平面图且$n \geqslant 4$，则G中至少有4个度数小于等于5的点。

证明: (1) 由第4题的(3)知，$\kappa(G) \geqslant 3$，结合Whitney定理，有$\delta(G) \geqslant 3$；
(2) 若$n \leqslant 4$，则结论显然成立。若$n=5$且G是简单连通平面图，那么$G \subseteq K_5 - e$，结

论成立。下面考虑$n \geqslant 6$。

若G中**至多有2 个**度数小于等于5 的点，则由握手定理$6(n-2)+2\times 1 \leqslant 2m$，即$m \geqslant 3n-5$，这与$G$是平面图矛盾。

(3) 类似(2)，仅考虑$n \geqslant 6$。事实上可以假设G是极大平面图(即有$\delta(G) \geqslant 3$)。若G不是极大平面图，那么总可以通过给G加入一些边，使得得到的图是极大平面图(加边不会减小图的度)，那么其最小度不小于3。

若G中**至多有3个**度数小于等于5的点，则由握手定理$6(n-3)+3\times 3 \leqslant 2m$，即$m \geqslant 3n-4.5$，这与$G$是平面图矛盾。 □

9. (1) 证明：若G是围长$k \geqslant 3$的连通可平面图，则$m \leqslant \frac{k}{(k-2)}(n-2)$；

(2) 利用(1)证明：Petersen图不可平面。

证明: (1) 因G的围长$k \geqslant 3$，故G的每个面的次数$l \geqslant k \geqslant 3$。由第2题知，结论成立。

(2) 易知，Petersen图的围长$k=5$。将$k=5$代入(1)中得$m \leqslant \frac{40}{3} < 15$。所以，Petersen图不可平面。 □

10. (1) 设G是一个简单图，若$n<8$，则G与$\overline{G}$中至少有一个是可平面图；

(2) 找出一个8阶简单可平面图，使得$\overline{G}$也是可平面图。

证明: (1) 若$n \leqslant 5$，则结论显然成立。下面仅考虑$n=6,7$的情形。若G与$\overline{G}$均不可平面，则G与$\overline{G}$包含K_5或$K_{3,3}$的同胚子图。

当$n=6$时，则$|E(G)|+|E(\overline{G})| \geqslant 2\times 9=18$。另一方面，$|E(K_6)|=15$，矛盾。

当$n=7$时，不妨假设G包含K_5或$K_{3,3}$的同胚子图。容易验证$\overline{G}$可平面。

(2) 如图6所示的8阶图是平面的且是自补的。 □

11. (1) 设G是一个简单图，若$n \geqslant 11$，则G与$\overline{G}$中至少有一个是不可平面图；

(2) 证明：G是至少有12个点的简单平面图，则$\overline{G}$ 不可平面图。

证明: (1) 设G是n阶可平面图，则：$|E(G)| \leqslant 3n-6$。若G与$\overline{G}$均为平面图，则$|E(G)|+|E(\overline{G})| \leqslant 6n-12$。另一方面，$|E(G)|+|E(\overline{G})|=\frac{n(n-1)}{2}$。当$n \geqslant 11$时，显然有$\frac{n(n-1)}{2} > 6n-12$，矛盾。因此结论成立。

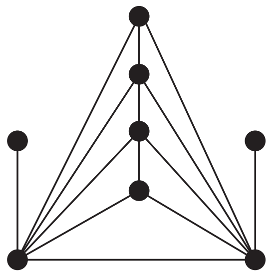


图 6: 第10题

(2) 若G是可平面图，则：$|E(G)| \leqslant 3n-6$。另一方面，$\frac{n(n-1)}{2} > 2\times(3n-6)$。因此结论成立。 □

12. 设G是一个有n个点m条边的图，$\theta(G)$为其厚度。
(1) 证明：$\theta(G) \geqslant \lceil \frac{m}{3n-6} \rceil$；
(2) 证明：$\theta(K_n) \geqslant \lceil \frac{n(n-1)}{6(n-2)} \rceil$，并利用习题10(2)证明当$n \leqslant 8$时，等式成立。

证明: (1) G的每一层都是平可图，所以可容纳的边数最多不超过$3n-6$。因此$\theta(G) \geqslant \lceil \frac{m}{3n-6} \rceil$。
(2) 因$|E(K_n)| = \frac{n(n-1)}{2}$。代入(1)即得，$\theta(K_n) \geqslant \lceil \frac{n(n-1)}{6(n-2)} \rceil$。对于$n \leqslant 5$，等式显然成立。事实上，$n \leqslant 6, 7$时，不难将$K_n$的边划分为两个可平面图的并。结合习题10(2)，当$n \leqslant 8$时有$\theta(K_n) = 2$。 □

13. 给出一个连通度为2的简单3正则非Hamiltonian可平面图的例子。

解: 如图7所示的图为3正则图。显然，$\{a, b\}$是一个2-点割。若该图存在Hamiltonian圈C，因$\{a, b\}$是一个2-点割，所以C要同时遍历图中两个$K_4 - e$结构，而这是不可能的。因此该图不是Hamiltonian 图。

14. 设G_i是一个有n_i个点m_i条边的图，$i = 1, 2$。证明：G_1和G_2同胚，则有$n_1 + m_2 = n_2 + m_1$。

证明: 若$G_1 \cong G_2$同构，则结论显然成立。故假设G_1与G_2不同构。设G_1经过p_1次剖分，p_2次2度顶点收缩得到H_1，G_2经过q_1次剖分，q_2次2度顶点收缩得到H_2，使得：

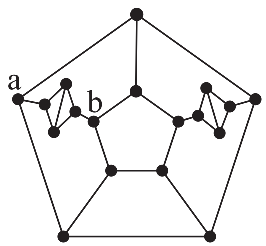


图 7: 第13题

$H_1 \cong H_2$。所以H_1和H_2具有相同的顶点数和边数。则有：

$$n_1 + p_1 - p_2 = n_2 + q_1 - q_2$$

$$m_1 + p_1 - p_2 = m_2 + q_1 - q_2$$

上式减下式即得结论。 □

15. 试证：每一个平面的Euler图含有一条不与自身交叉的Euler迹。

证明: 设G是一个平面的Euler图，因此G可以划分为边不交圈的并。令k是G的边不交圈的个数。对k进行归纳。当$k = 1$时结论显然成立。设小于$k(k > 1)$时结论成立。现在考虑有k个边不交圈的图G。令C是G的一个圈且$V(C) \cap V(G) = \{v\}$。由归纳假设$E(G) - E(C)$包含$k-1$个边不交圈，因此$E(G) - E(C)$存在一条不与自身交叉的Euler闭迹E_t。不妨设E_t的起点和终点均为v，那么再加入从v点开始遍历圈C后的边得到G的Euler迹E_G，该迹与自身不交叉，命题得证。 □

16. 试证：每一个5连通可平面图至少有12个点。构造一个12个点的这样的图。

证明: 易知，$\kappa(G) \geqslant \delta(G) \geqslant 5$。由握手定理得，$2m \geqslant 5n$。另一方面，$G$是可平面图。则，$m \leqslant 3n - 6$。那么$5n \leqslant 6n - 12$，即有$n \geqslant 12$。正二十面体是5正则，5连通恰好12个点的平面图。 □

17. 证明：没有6连通可平面图。

证明: $\kappa(G) \geqslant \delta(G) \geqslant 6$。由握手定理得，$2m \geqslant 6n$，即$m \geqslant 3n$。若$G$ 是可平面图，则$m \leqslant 3n-6$，矛盾。 □

18. 设G是一个有n个点m条边的图。证明：若G是外可平面图且没有三角形，则$m \leqslant \frac{3n-4}{2}$。

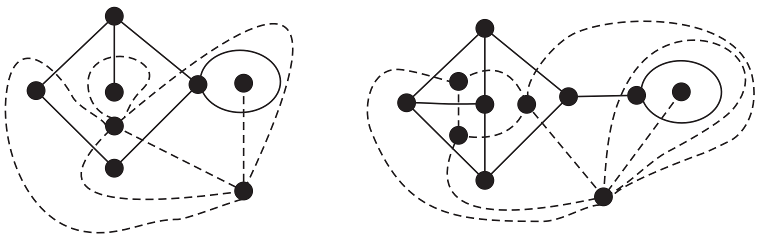
证明: 因为G是外可平面图，故外面的次数至少为n。而G不包含三角形，因此内部面的次数至少为4。由次数公式有$4(\phi-1)+n \leqslant 2m$。代入欧拉公式即得$m \leqslant \frac{3n-4}{2}$。 □

19. 试证：若G是连通平面图，且所有顶点的度不小于3，则G至少有一个面f，使得$deg(f) \leqslant 5$。

证明: 若对于G每个面f均有，$deg(f) \geqslant 6$。由次数公式有$6\phi \leqslant 2m$。另一方面，由握手定理$3n \leqslant 2m$。代入欧拉公式得$2 \leqslant 0$，矛盾。 □

20. 求图6-38中所示图的对偶图。

解: 见图8，所求对偶图用虚线表示。



(a) (b)

图 8: 第20题

21. 图6-39中G_1和G_2同构，G_3和G_4同构。试证它们的对偶图不同构，并判断它们的对偶图是否同胚。

证明: G_1的外面边界是5长圈，而G_2所有面的次数均不超过4，所以G_1^* 中存在5度点，而$\Delta(G_2^*) \leqslant 4$，所有$G_1^*$与$G_2^*$ 不同构。

G_3的外面边界是4长圈，而G_4所有面的次数均为3，所以G_3^*中存在4度点，而$\Delta(G_4^*) \leqslant 3$，所有$G_3^*$与$G_4^*$不同构。

在剖分或者2度点的内收缩操作下，两个图仅可能相差2度点，不会影响图的最大度。因此G_1^*与G_2^*不同胚，G_3^*与G_4^*不同胚。 □

22. 证明：一个平面图G的对偶图G^*是Euler图当且仅当G中每个面均由偶数条边围成。

证明: **必要性** 因G^*是Euler图，所以G^*中每个点的度均为偶数。由对偶图的定义知，G中每个面均由偶数条边围成。

充分性 因G中每个面均由偶数条边围成，故每个面的次数都是偶数。由对偶图的定义，G^*的每个顶点的度都是偶数。另一方面G^*连通，所以G^*是Euler图。 □

23. 一个平面图G和它的对偶图G^*同构，则称G是自对偶的。证明：
(1) 若G是自对偶图的平面图，则G中边数m和顶点数n有关系：$m = 2n - 2$；
(2) 对于每个$n \geqslant 4$，找出n个顶点的自对偶平面图。

证明: (1) 令G^*的顶点数，边数，面数分别为n^*，m^*和ϕ^*。由欧拉公式$n - m + \phi = 2$，$n^* - m^* + \phi^* = 2$。又因为G是自对偶的，所以$n = n^*$，$m = m^*$和$\phi = \phi^*$；$f = n^*$且$n = f^*$。代入欧拉公式即有$m = 2n - 2$。
(2) 容易验证**轮图**(wheel)$C_{n-1} \vee K_1$为n个点的自对偶图。 □

24. 试证：若G是无割边的3正则的连通平面图，则G的对偶图G^*的每个面都是三角形，且面数为$2(n-2)$，其中n为顶点数。

证明: 因G是无割边，则G的每条边恰好属于两个面的边界。因此G的任意一个顶点关联的3条边分割了3个面，而这3个面在对偶图中对应的顶点两两相邻，形成G^*的三角形。此即说明G^*是三角化的，也即G^*是极大平面图。由欧拉公式易得G^*的面数为$2(n-2)$。

注：若G有割边，则割边在G^*对应自环，显然与结论矛盾。故将题目条件加上G无割边的条件。 □

25. 证明：
(1) B是平面图G的**极小边割**(即B是边割且B的任何真子集均不是边割)当且仅当$\{c^* \in E(G^*)|c \in B\}$是$G^*$的圈；
(2) Euler平面图的对偶图是二部图。

证明: (1) **必要性** 对B的边数m进行归纳。当$m = 1$时，B是割边，则在G^* 中对应一个自环。故结论成立。设$m < k$时结论成立。现在考虑$m = k$的情形。任取一条边$e_1 \in B$，于是$B_1 = B - e_1$是$G_1 = G - e_1$ 的一个极小边割，由归纳假设$\{e^* \in E(G_1^*)|e \in B_1\} = C_1^*$是$G_1^*$的一个圈。由对偶图的定义知，$C_1^*$上的顶点$f^*$对应于$G_1$中的面$f$。$f$的边界上有极小边割$B_1$中的边。将$e_1$加入到$G_1$，其作用相当于区域$f$被$e_1$划分为两个以$e_1$为公共边界的区域$f_1$和$f_2$。对应$G_1^*$中，其作用相当于将顶点$f^*$分成两个顶点$f_1^*$ 和f_2^*，并在其间连上边e_1所对应的边e_1^*。因此B对应在G^*中的边集$\{e^* \in E(G^*)|e \in B\}$ 仍然是一个圈。由归纳法，结论成立。
充分性 显然，G^*中的一个圈对应于G中的边集B是G 的一个边割集。若B不是极小边割，则B是一些极小边割的和。由必要性知，每一个极小边割对应G^*的一个圈，从而B在G^*中对应的边集是圈的和，这与假设矛盾。因此B是G的极小边割。
(2) 由于Euler图的任一边割集均包含偶数条边，故在对应的对偶图中，由(1)知，不含奇圈。故Euler图的对偶图是二部图。 □

26. 设G是平面图，证明：$(G^*)^* \cong G$当且仅当G是连通图。

证明: **必要性** 由于G是平面图, 那么G^*是连通的。而由G^*是平面图，$(G^*)^*$是连通的。由$(G^*)^* \cong G$得，G是连通图。
充分性 由对偶图的定义知，平面图G与其对偶图G^*嵌入在同一平面上，当G连通时。容易知道: G^*的无界面f^*中仅包含G的唯一顶点v，而除v外，G中其它顶点v均与G^*的有界面形成一一对应。于是，G中顶点和$(G^*)^*$顶点在这种自然对应方式下一一对应，且对应顶点间邻接关系保持不变，故$(G^*)^* \cong G$。 □

27. 设T是连通平面图G的生成树，$E^* = \{c^* \in E(G^*)|c \notin E(T)\}$。证明：$G^*[E^*]$是$G^*$的生成树。

证明: 当$\phi=1$时，$G=T$，$E^*=\emptyset$，则T^*是平凡图，结论成立。当$\phi\geqslant 2$时，由于G的每一个面包含$e\notin E(T)$。即G^*的每一个点均与E^*的边关联，即T^*是G^*的一个生成子图。若T^*中含有G^*的圈，则T包含G的极小边割，故T^*不含G^* 的圈。又对G，删除$E(\overline{T})$中的一条边，G就减少一个面。当$E(\overline{T})$中边从G全部删除时，G变成树T，从而有$|E(T^*)|=|E(\overline{T})|=\phi(G)-1=|V(G^*)|-1$。所以$T^*$是$G^*$的生成树。 □

28. 验证图6-40是K_7的一个环面嵌入。

证明: 此图为环面的矩形表示。矩形的两组对边分别同向粘贴在一起，除4个顶角的顶点相粘后形成唯一的顶点外，上下两组边相粘后形成图的2 个不同顶点，同时左右两组边相粘后形成图的另2个不同顶点。容易验证此图即为K_7。 □

29. 令G是阶至少为3的简单平面图，其度序列为$(d_1,d_2,\cdots,d_n)$。
(1) 证明：$\sum\limits_{d_i\leqslant 6}(6-d_i)\geqslant\sum\limits_{t=1}^{n}(6-d_t)\geqslant 12$；
(2) 证明：若$\delta(G)\geqslant 5$，则G至少有12个5度点；若$\delta(G)\geqslant 4$，则G中度不超过5的点至少有6个。

证明: (1) 先证左边的不等式。$\sum\limits_{t=1}^{n}(6-d_t)=\sum\limits_{d_t\leqslant 6}(6-d_t)+\sum\limits_{d_t>6}(6-d_t)\leqslant\sum\limits_{d_i\leqslant 6}(6-d_i)$。再证右边的不等式。由握手定理得$\sum\limits_{i=1}^{n}d_i=2m$；由平面图的次数公式有$3\phi\leqslant 2m$。由欧拉公式显然有$6n-6m+6\phi=12$成立。联立上面三式即可解得需证结论。
(2) 由(1)中右边的不等式，代入$\delta(G)\geqslant 5$与$\delta(G)\geqslant 4$ 即得结论。 □

30. 设$(d_1,d_2,\cdots,d_n)$为一个阶$n\geqslant 3$的平面图的度序列。证明：当$k\geqslant 3$时，有$\sum\limits_{i=1}^{k}d_i\leqslant 2n+6k-16$。

证明: 略。 □

31. 用平面性算法判定图6-41中图G_1,G_2和G_3的平面性。

解: G_1，G_3可平面，用平面性算法得到它们的平面嵌入分别见图9。经算法判定G_2 不可平面。

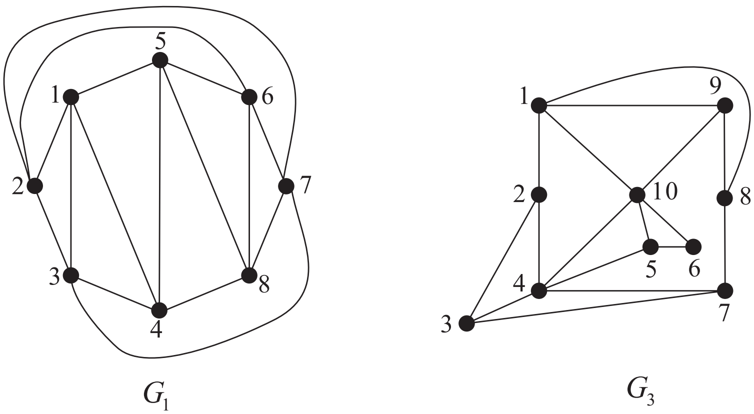


图 9: 第31题