课程学习综述：图论及其应用

学号：202122280534　　姓名：陈 玉 熙

这学期，通过杨老师和吕老师深入浅出式的教学，我们系统学习了《图论及其应用》这门课程，对图论的概念提出、历史发展和实际应用都有了一定的认识。本文作为结课综述，结合课程教学内容，以及本人对该课程的理解，对课堂学习内容进行总结。

一、学科背景简介

图论是数学的一个分支。它以图为研究对象。图论中的图是由若干给定的点及连接两点的线所构成的图形，这种图形通常用来描述某些事物之间的某种特定关系，用点代表事物，用连接两点的线表示相应两个事物间具有这种关系。

图论本身是应用数学的一部份，因此，历史上图论曾经被好多位数学家各自独立地建立过。关于图论的文字记载最早出现在欧拉 1736 年的论著中，他所考虑的原始问题有很强的实际背景。目前，图论的应用已经涵盖了人类学、计算机科学、化学、环境保护、非线性物理、心理学、社会学、交通管理、电信以及数学本身等，在各个领域都有广泛的应用。

二、课程学习概述

第一章：图的基本概念

课程的导入是从哥尼斯堡七桥问题开始的。早在二百多年以前，当时德国东普鲁士的哥尼斯堡（现俄罗斯加里宁格勒）有一条叫做普雷格尔的河流贯穿全城。河中有两个小岛，河的两岸和河中两岛之间架设了七座桥，把两岸及两个小岛连接起来，如图所示：

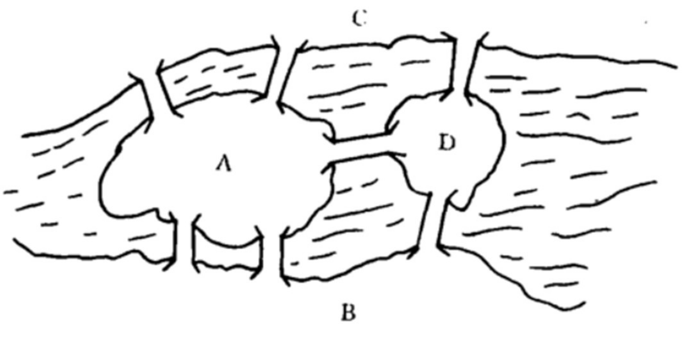

图 1. 哥尼斯堡七桥问题

当时在当地流行着这样一个有趣的问题："一个人能否从某地点（河岸或岛）出发，通过每座桥一次且仅一次，最后回到出发点？"这个问题后来被称为"七桥问题"流传至今。许多人对它产生了浓厚的兴趣。但是，在经历了很长一段时间后，问题依然没有得到解决。显然，解决这个问题时，两岸与岛的距离以及大小、形状都是无关的。如果把两岸和两个岛都看成顶点，把桥当作连接顶点的边，那么图 1 便可以用图 2 来表示，其中四个顶点分别表示两岸与两岛 A、B、C、D，图中的边表示桥，也因此问题转化为：从四个顶点中任一点出发，经过每一条边一次且仅一次，最后回到出发点，这事实上就是"图论"中的一笔画问题：

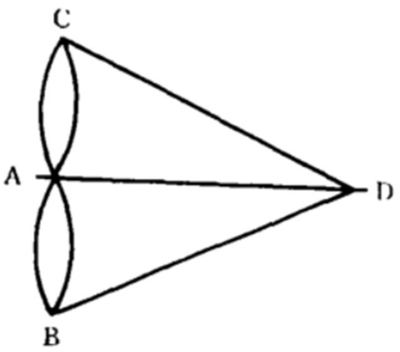

图 2.哥尼斯堡七桥问题建模图

从哥尼斯堡七桥问题出发，经过 19 世纪到 20 世纪中叶的缓慢发展，图论学科已经初具规模。尤其是 20 世纪中叶至今的快速发展阶段，不仅使图论形成了一门独立的学科，还形成了：结构图论，代数图论，拓扑图论，网络图论，随机图论和极值图论等分支。

然后我们学习了图论的基本定义及概念。

在图论中,用来描述事物或对象之间联系或相互作用状态的一个概念,我们把它称为"图"。一个图是一个序偶<V,E>，记为 G=(V,E),其中：

1. V 是一个有限的非空集合，称为顶点集合,其元素称为顶点或点。用|V|表示顶点数；
2. E 是由 V 中的点组成的无序对构成的集合，称为边集，其元素称为边，且同一点对在 E 中可以重复出现多次。用|E|表示边数。

而从图出发，我们有很多基本概念，如：顶点集和边集都有限的图称为有限图；只有一个顶点的图称为平凡图；只有点没有边的图称为空图；n 阶图、(n，m) 图；重边、环；简单图；邻接、关联、同构等，这些基本概念都让我们对图论的建模有了最基本的认识。接着我们学了完全图、偶图与补图，并了解了什么是图的度以及度序列和图序列，知道如何判断一个图序列是可图的。然后我们学了几种子图的概念，联、积、合成等八种基本图运算，还有图中的路与连通性。最后我们学习了图的邻接谱与邻接代数，理解了 l 部图和托兰定理。

第二章：树

说到图论就不得不提其中一个重要的种类——树。早在 19 世纪，图论还没有引起人们关注的时候，物理学家克希荷夫就已经注意到电路中的独立回路与该电路中的所谓生成树的关系。即：如果电路是(n，m)图，则独立回路的个数为 m-n+1。并且，生成树添上生成树外的 G 的一条边，就可以得到一独立回路。足可以见树在应用中的重要作用。

这一章，我们首先从树的基本概念出发：不含圈的图称为无圈图，森林是无圈图，树是连通的无圈图。然后我们了解了一些树的基本概念和性质，了解到了求解生成树棵数的几种典型方法及优缺点。最后我们了解到了本章的重点：最小生成树的求解，包括 Kruskal 的避圈算法，中国数学家管梅谷的破圈算法和 Prim 算法，最后了解了包括根树、有向树以及计算机学科用到最多的二元树的相关概念和性质。

第三章：图的连通度

研究图的连通性，主要研究图的连通程度的刻画。图的连通程度的高低，是图结构性质的重要表征，在实际中也拥有重要的意义。例如图的连通程度的高低，就对应于通信网络“可靠性程度”的高低。

在这一章里，我们首先了解了割边、割点和块的基本概念：当 $\omega(G-e)>\omega(G)$ 时，e 就是图 G 的一条割边，如图 3 所示；G 无环且非平凡，则 v 是 G 的割点，当且仅当 $\omega(G-v)>\omega(G)$，如图 4 所示。

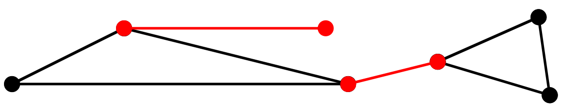

图 3. 图的割边

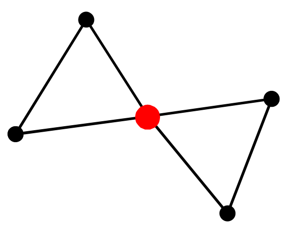

图 4. 图的割点

然后我们介绍了连通度的概念与性质，包括点连通度与边连通度的概念，以及 k 点联通和 k 边联通等。然后介绍了惠特尼定理在内的连通度的一系列性质。最后介绍了敏格尔定理以及图的宽直径等相关概念。

第四章：Euler 图与 Hamilton 图

在第一章引入时，提到了哥尼斯堡七桥问题。正是从该问题出发，发展产生了图论这一学科，也正是因为此产生了著名的欧拉图定理。七桥问题本质上即为求一条欧拉环游。

而哈密尔顿图则是基于 1857 年哈密尔顿发明的一个游戏(Icosian Game)。它是由一个木制的正十二面体构成，在它的每个棱角处标有当时很有名的城市。游戏目的是“环球旅行”，为了容易记住被旅游过的城市，在每个棱角上放上一个钉子，再用一根线绕在那些旅游过的城市上(钉子)，由此可以获得旅程的直观表示。

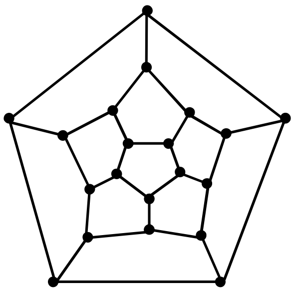

图 5. 十二面体

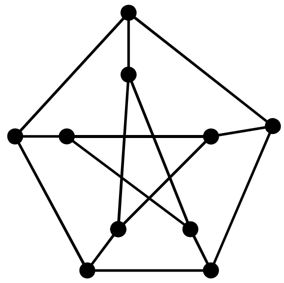

图 6. Peterson 图

该游戏促使人们思考点线连接的图的结构特征，这就是图论历史上著名的哈密尔顿问题。而哈密尔顿问题本质上也就是求一个哈密尔顿圈。

在这一章我们首先学习了欧拉图的概念及其性质，学习了基于 Fleury(弗勒里)算法的避割边形式寻找欧拉环游的方法。接着了解了管梅谷提出的中国邮路问题，和边赋权图情况下寻找最优欧拉环游的方法。

接着我们学习了哈密尔顿图的概念和基本性质，了解到图的 H 性判定是 NP-困难问题。到目前为止依然没有一个理想的定理来判断 H 性，只有一定约束条件下的的 H 图的判定方式：

1. （必要）若 G 为 H 图，则对 V(G)的任一非空顶点子集 S，有：$\omega(G-S)\le|S|$
2. （充分）对于 n≧3 的单图 G，如果 G 中有：$\delta(G)\ge\frac{n}{2}$ ，那么 G 是 H 图。
3. （充分）对于 n≧3 的单图 G，如果 G 任意不相邻 u,v：$d(u)+d(v)\ge n$，那么 G 是 H 图。
4. （充要）图 G 是 H 图当且仅当它的闭包是 H 图。
5. 简单图 G 的度序列是$(d_1, d_2, \cdots, d_n)$，这里，$d_1 \leqq d_2 \leqq \cdots \leqq d_n$，并且 n≧3。若对任意的$m<\frac{n}{2}$，或有 $d_m>m$，或有$d_{n-m}\geqq n-m$，则 G 是 H 图。

利用上述定理我们检验了正十二体是 H 图（图 5），而著名的彼得森图却是非 H 图（图 6）。

最后我们学习了度极大非哈密尔顿图，并了解了使用边交换技术解决 TSP 旅行商问题。了解了超 H 图与超可迹图以及 E 图和 H 图的关系。

第五章：匹配与因子分解

在第五章的学习里，主要介绍了一个实际生活中非常有意义的图的匹配问题，如在化学分子计算稳定性，统计物理，人员分配，网络鲁棒性等方面均存在很强的实用性。

本章首先学习了图的匹配、极大匹配、最大匹配、完美匹配以及饱和等概念的定义，并介绍了最大匹配的 Berge 定理，介绍了二部图的匹配与覆盖，联系实际介绍相关知识点的应用。然后我们学习了图的 k 因子分解，尤其是针对 1 因子与 2 因子分解进行了具体的介绍，知道了该分解的实际价值：例如 K_{2n} 的 1 因子分解可以解释为一种赛程安排。

最后，我们学习了最重要的匈牙利算法及最优匹配算法。匈牙利算法是二部图中寻找完美匹配的通用算法，通过寻找 M 增广路，结合前述定理判定图中是否有完美匹配并求出完美匹配。而最优匹配算法则是基于匈牙利算法，针对边赋权完全二部图求解完美匹配的算法。算法由 Kuhn 与 Munkres 提出。

第六章：平面图

第六章主要介绍了图的平面性。图的平面性问题是图论典型问题之一.生活中许多应用问题都与该问题有关。例如在电路板设计时， 需要考虑的问题之一是连接电路元件间的导线间不能交叉(导线未绝缘)。显然，电路板可以模型为一个图，“要求电路元件间连接导线互不交叉”，对应于“要求图中的边不能相互交叉”，这就是一个典型的平面性问题。

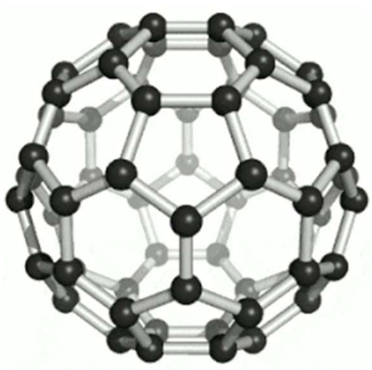

图 7. 富勒烯图

在这一章，我们首先学习了平面图的概念与性质，学习了平面图最重要的欧拉公式：$n-m+\phi=2$，以及欧拉公式的相关推论。然后我们学习了图的嵌入性相关问题，包括 Möbius 带，Klein 瓶以及相关凸多面体的平面性质。最后我们了解了富勒烯图（图 7）为代表的，特

殊的所有面为五边形和六边形的平面 3 正则图。

然后我们学习了一些特殊平面图，包括极大平面图和极大外平面图的相关性质，还有对偶图的构造以及其相关性质。

接着我们学习了图的平面性判定，包括不含K_5和$K_{3,3}$同胚的子图为判据的 Kuratowski 定理；以及不包含K_5或$K_{3,3}$的 minor 为判据的 Wanger 定理。最后我们了解了涉及平面性的不变量，包括图的亏格、厚度、交叉数等。

最后我们学习了图的平面性算法：DMP 算法。

第七章：图的着色

现实生活中很多问题，可以模型为所谓的图(边)着色问题来处理。例如排课表问题，光纤网络中的频率分配，寄存器资源分配，任务指派，会期安排问题等。所以，图的着色问题有很强的现实意义，而这其中最有名的当属世界近代三大数学难题之一的四色问题。

1852 年，刚毕业于 University College London 的 Francis Guthrie 发现：给一张英国地图(平面的)正常着色，仅需要 4 种颜色。后来该问题被推广为任何一张地图只用四种颜色就能使具有共同边界的国家着上不同的颜色，这就是著名的四色问题。

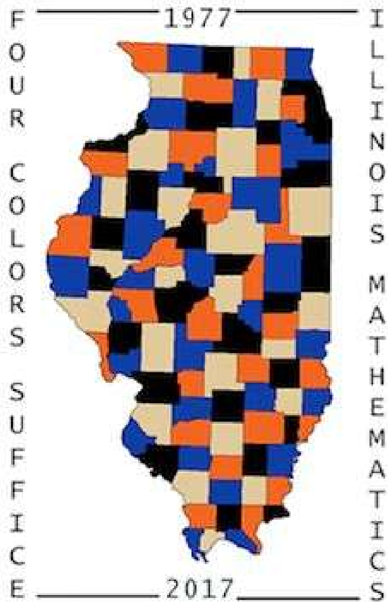

图 8. 四色问题

在 1890 年,英国数学家 Heawood 在反驳 Kempe 证明四色定理中的缺陷时又提出并应用 Kempe 的色交换的方法证明了五色定理。而在 100 余年后的 1976 年 6 月，Haken 和他的学生 Appel 才使用计算机的方法最终证明了四色定理。直到现在，人们依然没有不依赖计算机的四

色定理证明方式。这些足以证明该猜想证明的难度。

在这一章里，我们首先学习了图的边着色相关概念及性质，了解了边色数的定义以及一般简单图的边色数为$\chi'(G)=\Delta$或$\chi'(G)=\Delta+1$，学习了三种特殊简单图的边色数以及推广的边色数性质，基于排课表问题了解了图的边着色问题的实际应用。

接着，我们学习了图的点着色及相关概念及性质，了解了图的点色数的相关结论，然后学习了四色定理和五色定理的意义，并且基于课程安排规避冲突的实例解了顶点着色的实际应用。

最后，我们学习了色多项式，学习了基于递推计数法和理想子图计数法的色多项式求解方法，并且了解了色多项式的相关特性。

第八章：Ramsey 定理

第八章我们学习了 Ramsey 定理，该理论的核心可以概括成：完全的无序是不可能的。一个集合只要元素数量达到某个临界值(极值)后，一定会出现我们预先定义好的某种性质或结构。

在这一章的学习里，我们首先了解了独立集和覆盖、边独立集与边覆盖，并最终学习了 Ramsey 定理及 Ramsey 数。老师上课基于《美丽心灵》里纳什画出任意形状星星的浪漫场景给我们留下了深刻的印象。

第九章：有向图

在前面我们学习的都是无向图，第九章我们学习了有向图。作为对无向图的补充，有向图模型也有很多实际的意义，比如在处理运输问题时所建立的运输网络图，若网络中涉及单行道，也应在相应的边上表明方向。又如由自来水的管网系统抽象出来的图论模型，若要考虑水的流向，则图的边还应表明方向。对这些每条边都标有方向的图称之为有向图。

在第九章里，我们首先学习了有向图的概念与性质，包括其与无向图相关性质的对比。然后我们学习了有向图的连通性，包括强连通、弱连通、单向连通、双向连通等。最后我们学习了图的定向问题，了解了有向路与有向圈的性质。

三、学习感想与总结

通过一学期的课程，我深刻的意识到图论模型能直观和定量地描述具体问题中各环节之间的关系，使问题皆可得到简化，这为我们在以后研究解决实际问题的过程中提供了一种更直观更简单的新方法。从哥尼斯堡七桥问题到中国邮路问题；从富勒烯图到四色定理，从课堂上学到的种种猜想与实例可以看出图论的应用范围非常广泛。

图论方法在实际生活中的广泛应用，不仅能实现高效、高质解决问题，而且能加强对事件过程的全面控制和管理，降低成本，并进行有效的管理和决策分析。另外只需确定结点和边各代表什么，建立图的模型,运用图论的理论和方法，许多离散的问题都可以得到解决。这也告诉我们，图论的应用十分广泛，如果我们在学习的过程中能打下坚实的基础，就有能力将图论的思想应用到纷乱复杂的现实问题中去。作为行之有效的工具，图论可以让我们在面对实际问题时更加的从容，更加的科学。

这门课程虽然已经结束，但我们的研究生生涯才刚刚开始。我对图论的理解某些方面还不够透彻，还需要在未来的学术生涯里进一步运用与加深。感谢杨老师和吕老师坚持不远千里来到深圳为我们进行线下面授，能够遇到两位这么优秀的老师让我感到无比幸运，谢谢老师们的悉心教学！我以后也一定会继续努力，不辜负老师们的期待！