

图论习题集

2020 年 4 月 23 日

习题 4

1. 判断图 4-43 所示的四个图是否可以一笔画。

解: (a) 不可以; (b) 可以; (c) 可以; (d) 可以。

2. 设 G 是具有 $2k$ 个奇度顶点的连通图, 则在 G 中至少添加多少条边才能使 G 具有 Euler 闭迹?

解: 至少需要添加 k 条边。

3. (1) 画一个有 Euler 闭迹和 Hamilton 圈的图;

(2) 画一个有 Euler 闭迹但没有 Hamilton 圈的图;

(3) 画一个有 Hamilton 圈但没有 Euler 闭迹的图;

(4) 画一个既没有 Euler 闭迹也没有 Hamilton 圈的图。

解: (1) 完全图 K_3 ;

(2) 两个恰好有 1 个公共顶点的圈;

(3) 完全图 K_4 ;

(4) Peterson 图。

4. 设 n 阶无向简单图 G 有 m 条边, $n \geq 3$ 且

$$m \geq \binom{n-1}{2} + 2,$$

则 G 是 Hamilton 图。

证明: 若 G 是完全图, 则 G 显然是 Hamilton 图。若 G 不是完全图, 设 u 和 v 是 G 中任意两个不相邻的顶点, 接下来我们证明 $d(u) + d(v) \geq n$ 。假设 $d(u) + d(v) < n$, 则

$$m = |E(G)| = |E(G - \{u, v\})| + d(u) + d(v) < \binom{n-2}{2} + n = \binom{n-1}{2} + 2.$$

这显然与已知条件矛盾。因此, 图 G 的闭包必然为完全图。由闭包定理知, 图 G 是 Hamilton 图。□

5. 证明图 4-44 所示的图是非 Hamilton 图。

证明: 删去顶点 b, d, f, g, i, k, p 得到 9 个连通分支, 不满足 Hamilton 图的必要条件。因此, 图 G 是非 Hamilton 图。□

6. 在图 4-45 中, 哪些图是 Hamilton 图? 哪些图中有 Hamilton 路?

解: (a) 非 Hamilton 图, 存在 Hamilton 路 $abcdej h f i g$;

(b) Hamilton 图, 存在 Hamilton 圈 $ag i f h j e d c b a$;

(c) Hamilton 图, 存在 Hamilton 圈 $ag k f e i c b h d j a$;

(d) Hamilton 图, 存在 Hamilton 圈 $a b e d c g f j h i a$;

(e) 非 Hamilton 图, 存在 Hamilton 路 $j a i b c e d k g f h$ 。

7. 证明: 若 G 没有奇点, 则存在边不重的圈 C_1, C_2, \dots, C_k 使得 $E(G) = E(C_1) \cup E(C_2) \cup \dots \cup E(C_k)$ 。

证明: 因为 G 没有奇点, 所以 G 的每个非平凡的连通分支是 Euler 图。从而, G 的每个连通分支的边集可以表示成边不重的圈的并。因此, 图 G 的边集可以表示成边不重的圈的并。□

8. 证明: 若 G 有 $2k > 0$ 个奇点, 则存在 k 条边不重的迹 Q_1, Q_2, \dots, Q_k 使得 $E(G) = E(Q_1) \cup E(Q_2) \cup \dots \cup E(Q_k)$ 。

证明: 不失一般性, 假设图 G 是连通图, 它的 $2k$ 个奇点为 v_1, v_2, \dots, v_{2k} 。在点 v_i 与 v_{i+k} 之间添加一条边 e_i , 其中 $1 \leq i \leq k$ 。所得的图记为 G' 。显然, G' 是 Euler 图, 它的边集是一条回路 Q 。从 Q 上面去掉添加的边 e_1, e_2, \dots, e_k , 得到 k 条边不重的迹 Q_1, Q_2, \dots, Q_k 。因此, $E(G) = E(Q_1) \cup E(Q_2) \cup \dots \cup E(Q_k)$ 。□

9. 设 G 是非平凡的 Euler 图, 并且 $v \in V(G)$ 。证明: G 的每条具有起点 v 的迹都能扩展成 G 的 Euler 回路当且仅当 $G - v$ 是森林。

证明: 若 $G - v$ 不是森林, 则 $G - v$ 包含圈 C 。假设 $G' = G - E(C)$ 且点 v 所在的连通分支为 H 。由于 G 是非平凡的 Euler 图且在圈上每个点恰好关联两条边, 从而 G' 中每个点的度数为偶数。因此, H 是 Euler 图。设 T 是 H 的 Euler 回路, 则 T 可以看成是图 G 的以 v 为起点和终点的一条迹。由于 T 和 C 边不重, 且图 G 的与 v 关联的边都在 T 中, 所以 T 无法扩展成 G 的一条 Euler 回路。这与已知条件矛盾。因此, $G - v$ 是森林。

若不然, 设 $Q = (v, w)$ 是 G 的一条以 v 为起点但不能扩展为 G 的 Euler 回路的最长的迹。首先, $v = w$, 即 Q 是一条闭迹。否则, v 和 w 是 $G - Q$ 仅有的两个奇点。从而, $G - Q$ 中存在以 w 为起点, v 为终点的迹 P 。因此, 迹 Q 通过 P 可以继续扩展。其次, Q 包含与 v 关联的所有边。否则, Q 还可以扩展。因此, $G - v$ 包含 $G - Q$ 的所有边, 且 $G - Q$ 的每个点的度数为偶数。于是, $G - Q$ 的非平凡的连通分支是 Euler 图, 从而存在圈。因此, $G - v$ 包含圈, 从而 $G - v$ 不是森林, 矛盾! □

10. 证明: 若

(1) G 不是 2 连通图, 或者

(2) G 是具有二分类 (X, Y) 的偶图, 其中 $|X| \neq |Y|$,

则 G 是非 Hamilton 图。

证明: (1) 因为 G 不是 2 连通图, 则 G 包含割点 v 。因此, $\omega(G - v) \geq 2$ 。从而, G 是非 Hamilton 图。

(2) 若 G 是 Hamilton 图, 则它的 Hamilton 圈一定是交替地经过 X 与 Y 中的顶点, 从而 $|X| = |Y|$, 矛盾! \square

11. 证明: 若 G 包含 Hamilton 路, 则对于 V 的每个真子集 S , 有 $\omega(G-S) \leq |S|+1$ 。

证明: 设 P 为图 G 的 Hamilton 路。显然, $\omega(G-S) \leq \omega(P-S) \leq |S|+1$ 。 \square

12. 设 G 是度序列为 (d_1, d_2, \dots, d_n) 的非平凡简单图, 其中 $d_1 \leq d_2 \leq \dots \leq d_n$, 证明: 若不存在小于 $(n+1)/2$ 的正整数 m , 使得 $d_m < m$ 且 $d_{n-m-1} < n-m$, 则 G 包含 Hamilton 路。

证明: 在 G 之外添加一个新点 v , 把它和 G 的所有点连接, 所得的图记为 G' 。显然, G' 的度序列为 $(d_1+1, d_2+1, \dots, d_n+1, n)$ 。由已知条件知: 不存在小于 $(n+1)/2$ 的正整数 m , 使得 $d_m+1 \leq m$ 且 $d_{n-m-1}+1 < n+1-m$ 。由度序列判定定理知: G' 是 Hamilton 图, 从而 G 包含 Hamilton 路。 \square

13. 设 G 是 n 阶简单图且满足 $n \geq 6\delta$ 。证明: 若 $|E(G)| > \binom{n-\delta}{2} + \delta^2$, 则 G 是 Hamilton 图。

证明: 设 G 的度序列为 (d_1, d_2, \dots, d_n) , 其中 $d_1 \leq d_2 \leq \dots \leq d_n$ 。若 G 是非 Hamilton 图, 则存在 $m < n/2$ 使得 $d_m \leq m$ 且 $d_{n-m} < n-m$ 。因此, 图 G 度弱于图 $C_{m,n}$, 其中 $\delta \leq m < n/2$ 。进一步,

$$\begin{aligned} |E(G)| &\leq |E(C_{m,n})| \\ &= \frac{1}{2} (m^2 + (n-2m)(n-m-1) + m(n-1)) \\ &= \binom{n-\delta}{2} + \delta^2 - \frac{1}{2}(m-\delta)(2n-3m-3\delta-1). \end{aligned}$$

显然, $m-\delta \geq 0$ 。因为 $m < n/2$, 所以 $2n-3m > n/2$ 。又因为 $n \geq 6\delta$, 所以 $n/2 \geq 3\delta$ 。从而, $(2n-3m-3\delta-1) > 0$ 。因此, $(m-\delta)(2n-3m-3\delta-1) \geq 0$ 。从而,

$$|E(G)| \leq \binom{n-\delta}{2} + \delta^2,$$

与已知条件矛盾! \square

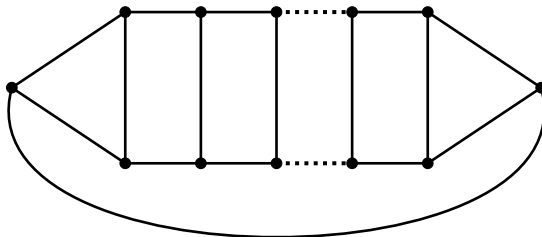
14. 对有 m 条边的 n 阶简单图, 若 G 的任意两个点都由 Hamilton 路连接着, 则称 G 是 Hamilton 连通图。

(1) 证明: 若 G 是 Hamilton 连通图且 $n \geq 4$, 则 $m \geq \lfloor (3n+1)/2 \rfloor$;

(2) 对于 $n \geq 4$, 构造一个 $m = \lfloor (3n+1)/2 \rfloor$ 的 Hamilton 连通图。

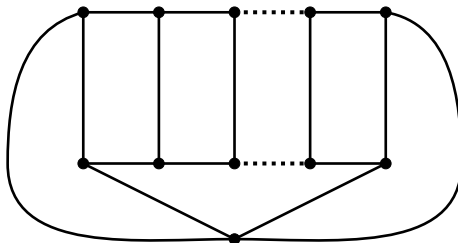
证明: (1) 假设 $n \geq 4$ 阶简单图 G 是有 m 条边的 Hamilton 连通图, 则 $\delta \geq 3$ 。若 G 中存在度数等于 2 的顶点 v , 设 v_1 与 v_2 是 v 的两个邻点, 则由 $n \geq 4$ 知, 不存在以 v_1 为起点, v_2 为终点的 Hamilton 路, 与条件矛盾。类似可证不存在度数为 1 的顶点。从而, $m \geq 3n$ 。因此, $m \geq \lceil 3n/2 \rceil = \lfloor (3n+1)/2 \rfloor$ 。

(2) 当 n 为偶数时, 构造



可以验证上图是满足 $m = \lfloor (3n+1)/2 \rfloor$ 的 Hamilton 连通图。

当 n 是奇数时, 构造



可以验证上图是满足 $m = \lfloor (3n+1)/2 \rfloor$ 的 Hamilton 连通图。

□

15. 对下列问题给出一个好算法:

(1) 构造一个图的闭包;

(2) 若某图的闭包是完全图，求该图的 Hamilton 圈。

解: (1) 根据图的闭包定义，构造一个图的闭包，可以通过不断在度数之和大于等于顶点数的非邻接顶点对间添边得到。据此设计算法如下：

第 1 步 令 $G_0 = G$, $k = 0$;

第 2 步 在 G_k 中求顶点 u 与 v ，使得

$$d_{G_k}(u) + d_{G_k}(v) = \max\{d_{G_k}(x) + d_{G_k}(y) | xy \notin E(G_k)\};$$

第 3 步 若 $d_{G_k}(u) + d_{G_k}(v)$ 大于等于 G 的顶点数，则转第 4 步；否则，停止，此时得到图 G 的闭包；

第 4 步 令 $G_{k+1} = G_k + uv$, $k = k + 1$ ，转第 2 步。

复杂性分析：假设图 G 具有 n 个点， m 条边。在第 k 次循环里，找到点 u 与 v ，要做如下运算：(a) 找出所有不邻接点对，需要 $n(n-1)/2$ 次比较运算；(b) 计算不邻接点对度和，需要做 $n(n-1)/2 - m$ 次加法运算；(c) 选出度和最大的不邻接点对，需要 $n(n-1)/2 - m$ 次比较运算。所以，总运算量为：

$$\frac{n(n-1)}{2} + 2 \left(\frac{n(n-1)}{2} - m \right) = O(n^2).$$

因此，上面的算法是好算法。

(2) 若图 G 的闭包是完全图，求 G 的 Hamilton 圈的方法如下：采用边交换技术把 G 的闭包中的一个 Hamilton 圈逐步转化为 G 的一个 Hamilton 圈。

该方法基于如下事实：在闭包算法中， $G_{k+1} = G_k + uv$ ， u 与 v 在 G_k 中不邻接且度数之和大于等于顶点数 n 。如果 G_{k+1} 包含 Hamilton 圈 $C_{k+1} = uvv_1v_2 \cdots v_{n-2}u$ ，则在 C_{k+1} 上存在点 v_i 和 v_{i+1} 使得 u 与 v_i 相邻， v 与 v_{i+1} 相邻。若不然，设 $d_{G_k}(u) = r$ ，那么在 G_k 中至少有 r 个顶点与 v 不邻接。从而， $d_{G_k}(v) \leq (n-1) - r < n - r$ 。因此， u 与 v 在 G_k 中度数之和小于 n ，矛盾！

上面结论表明：可以从 C_{k+1} 中通过去掉边 uv ，添加边 uv_i 和 $v_{i+1}v$ 而得到新的 Hamilton 圈，从而实现 Hamilton 圈的边交换。

假设 G 有 n 个点， m 条边。在构造 G 的闭包时，依次添加的边记为 e_i ($1 \leq i \leq N$)，这里， $N = n(n-1)/2 - m$ 。我们设计算法如下：

第 1 步 在 G_N 中任意取出一个 Hamilton 圈 C_N , 令 $k = N$;

第 2 步 若 e_k 不在 C_k 中, 令 $G_{k-1} = G_k - e_k$, $C_{k-1} = C_k$; 否则转第 3 步;

第 3 步 设 $e_k = uv \in C_k$, 令 $G_{k-1} = G_k - e_k$; 求 C_k 中两个相邻点 x 与 y 使得 u, v, x, y 依序排列在 C_k 上, 且 $ux, vy \in E(G_{k-1})$, 令

$$C_{k-1} = C_k - \{uv, xy\} + \{ux, vy\};$$

第 4 步 若 $k = 1$, 转第 5 步; 否则, 令 $k = k - 1$, 转第 2 步;

第 5 步 停止, C_0 为 G 的 Hamilton 圈。

复杂性分析: 一共进行 N 次循环, 每次循环运算量主要在第 3 步。寻找满足要求的邻接顶点 x 与 y , 至多需要 $n - 3$ 次判断。所以, 总运算量为 $N(n - 3)$, 属于好算法。

16. 画出 Fleury 算法的框图, 并证明它是好算法。

解: 略。

17. 设 G 是赋权完全图, 对所有的点 x, y, z 满足三角不等式: $w(xy) + w(yz) \geq w(xz)$ 。证明: G 的最优圈的权最多是 $2W(T)$, 其中 T 是 G 的一棵最小生成树。

证明: 设 T 是 G 的一棵最小生成树, 将 T 的每条边都复制一次, 所得的图记为 T' 。显然, T' 是 Euler 图。设 Q 是 T' 的一个 Euler 回路, 则 $W(Q) = W(T') = 2W(T)$ 。从 Q 的第三点开始, 删掉与前面重复的点, 得到 G 的顶点的一个排列 π 。由于 G 是完全图, 所以该排列对应 G 的一个 Hamilton 圈。在 π 中任意一条边 uv , 在 T 中有一条唯一的 (u, v) 路 P , 而该路正好是 Q 中的 u 与 v 之间的部分。由三角不等式知: $w(uv) \leq W(P)$ 。因此, $W(\pi) \leq W(Q) = 2W(T)$ 。所以, G 的最优圈 C 的权值满足: $W(C) \leq W(\pi) \leq 2W(T)$ 。□

习题 5

18. (1) 证明：每个 k 方体都有完美匹配；

(2) 求 K_{2n} 和 $K_{n,n}$ 中不同的完美匹配的个数。

解：(1) 对 k 进行归纳，可以证明 k 方体是 k 正则的二部图，因此 k 方体中存在完美匹配。

(2) 完全图 K_{2n} 的不同完美匹配的个数为 $(2n-1)!!$ ；完全二部图 $K_{n,n}$ 的不同完美匹配的个数为 $n!$ 。

19. 证明：一棵树最多只有一个完美匹配。

证明：若不然，设 M_1 与 M_2 是树 T 的两个不同的完美匹配，那么 $M_1 \Delta M_2 \neq \emptyset$ 。容易知道：在 $T[M_1 \Delta M_2]$ 中，每个顶点的度数为 2。因此， T 中存在圈，矛盾。 \square

20. 对每个 $k > 1$ ，找出一个没有完美匹配的 k 正则简单图的例子。

解：当 k 为偶数时，完全图 K_{k+1} 显然为没有完美匹配的 k 正则简单图。

当 k 为奇数时，构造图 H 使得 $V(H) = \{v_1, v_2, \dots, v_{2k-1}\}$ 且

$$E(H) = \{v_1v_2, v_1v_4, \dots, v_1v_{2k-2}, v_3v_2, v_3v_4, \dots, v_3v_{2k-2}, \dots, v_{2k-1}v_2, v_{2k-1}v_4, \dots, v_{2k-1}v_{2k-2}\} \cup \{v_1v_3, v_5v_7, \dots, v_{2k-5}v_{2k-3}\}.$$

在 H 中，除顶点 v_{2k-1} 的度数为 $k-1$ 外，其他顶点的度数均为 k 。先将 H 复制 k 次，再添加一个新的顶点 u ，并将顶点 u 与每个 H 中的顶点 v_{2k-1} 连一条边，所得图记为 G 。显然，图 G 是阶数为 $k(2k-1)+1$ 的 k 正则图。

假设图 G 包含完美匹配 M 。因为 H 包含 $2k-1$ 个点，每个 H 中至多有 $k-1$ 条边属于 M 。又因为顶点 u 不在任何 H 中，所以 $|M| \leq k(k-1)+1$ 。因此， M 中包含的顶点个数小于等于 $2k(k-1)+2$ 。当 $k > 1$ 时， $|V(G)| = k(2k-1)+1 > 2k(k-1)+2 \geq 2|M|$ 。因此， M 不是图 G 的生成子图，矛盾！所以，图 G 必不包含完美匹配。

21. 证明： K_4 有唯一的一个 1-因子分解。

证明: 因为 K_4 只有 3 个不同的完美匹配, 而 K_4 的每个 1-因子分解包含 3 个不同的完美匹配, 所以, 其 1-因子分解唯一。□

22. 求 $K_{3,3}$ 和 K_6 的 1-因子的个数。

解: 因为 1-因子的边集是完美匹配, 所以等价于求完美匹配的个数, 分别为 6 和 15。

23. 证明: K_{2n} 的不同的 1-因子的数目为 $\frac{(2n)!}{2^n n!}$ 。

解: 因为 1-因子的边集是完美匹配, 所以等价于求完美匹配的个数。 K_{2n} 的 1-因子的个数为

$$(2n-1)!! = \frac{(2n)!}{2^n n!}.$$

24. 将 K_9 表示为四个生成圈之和。

解: 设 K_9 的顶点分别为 $1, 2, \dots, 9$, 则 K_9 可以分解为以下四个哈密尔顿圈的并:

$$128374659, 231485769, 342516879, 453627189.$$

25. 证明: K_{6n-2} 有一个 3-因子分解。

证明: 首先 K_{6n-2} 可以分解为 $6n-3$ 个边不重的 1-因子的并。其次, 3 个边不重的 1-因子可以合成一个 3-因子。所以, K_{6n-2} 可以分解为 $2n-1$ 个边不重的 3-因子的并。□

26. 给出 $K_{4,4}$ 的一个最小森林分解。

解: 因为 $K_{4,4}$ 的荫度为 3, 所以 $K_{4,4}$ 可以分解为 3 个生成森林的并。设 $K_{4,4}$ 的顶点为 $x_1, x_2, x_3, x_4, y_1, y_2, y_3, y_4$ 且 x_i 与 y_j 相邻。一个具体的分解为

$$K_{4,4} = F_1 \cup F_2 \cup F_3,$$

其中生成子图 F_1 的边集为 $\{x_1y_1, x_1y_2, x_2y_2, x_2y_3, x_3y_3, x_3y_4, x_4y_4\}$, 生成子图 F_2 的边集为 $\{x_1y_3, x_2y_1, x_2y_4, x_3y_1, x_3y_2, x_4y_2, x_4y_3\}$, 生成子图 F_3 的边集为 $\{x_1y_4, x_4y_1\}$ 。

27. 证明: 若 n 是偶数且 $\delta(G) \geq n/2 + 1$, 则 n 阶简单图 G 有 3-因子。

证明: 因 $\delta(G) \geq n/2 + 1$, 由 Dirac 定理得: n 阶图 G 有哈密尔顿圈 C 。又因 n 为偶数, 所以 C 为偶圈。于是由 C 可得到 G 的两个 1 因子, 设其中一个为 F_1 。考虑 $G' = G - F_1$, 则 $\delta(G') \geq n/2$ 。于是 G' 中有哈密尔顿圈 C_1 。作 $H = C_1 \cup F_1$ 。显然 H 是 G 的一个 3-因子。□

28. 对 $k > 0$, 证明

(1) 每个 k 正则偶图是 1-可因子分解的;

(2) 每个 $2k$ 正则图是 2-可因子分解的。

证明: (1) 因 k 正则偶图存在完美匹配, 即 1-因子, 从不断减去完美匹配的方式就可得到 k 正则偶图的 1-因子分解。

(2) 设 G 是 $2k$ 正则连通图, $V(G) = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ 。显然, G 存在欧拉回路 C 。由 C 构造二部图 $H = (X, Y)$ 如下: $X = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$, $Y = \{y_1, y_2, \dots, y_n\}$, x_i 与 y_j 在 $H = (X, Y)$ 中连线当且仅当 v_i 与 v_j 在 C 中顺次相连接。显然, 二部图 $H = (X, Y)$ 是一个 k 正则偶图。所以, 图 H 可以 1-因子分解。二部图 H 的一个 1-因子对应于 G 中一个 2-因子。所以, G 可以 2-因子分解。□

29. 证明: 一棵树 T 有完美匹配当且仅当 $o(T - v) = 1$ 对所有的 $v \in V(T)$ 成立。

证明: 因为 T 有完美匹配, 由 Tutte 定理知 $o(T - v) \leq 1$ 。显然, T 是偶数阶的图, 于是 $o(T - v) \geq 1$ 。因此, $o(T - v) = 1$ 。

对于 T 的任意顶点 v , 假设 T_v 是 $T - v$ 的仅有的奇分支, 且 T_v 与 v 之间的边为 uv 。显然, $u \in T_v$ 。对于顶点 u , 连接 u 与 T_u 的边也是 uv 。因此, 对于任意的顶点 w , 按照上述方式可以找到唯一的一个顶点与之配对。因为 $o(T - v) = 1$, T 具有偶数个顶点。从而, T 的所有顶点都可以两两配对。□

30. 所谓 $n \times n$ 矩阵的一条对角线是指两两不同行不同列的 n 个矩阵元素组成的集。

对角线的权是指它的 n 个元素的和。找出下列矩阵具有最小权的对角线：

$$\begin{pmatrix} 4 & 5 & 8 & 10 & 11 \\ 7 & 6 & 5 & 7 & 4 \\ 8 & 5 & 12 & 9 & 6 \\ 6 & 6 & 13 & 10 & 7 \\ 4 & 5 & 7 & 9 & 8 \end{pmatrix}.$$

解：根据该矩阵构造新的矩阵

$$A = \begin{pmatrix} 9 & 8 & 5 & 3 & 2 \\ 6 & 7 & 8 & 6 & 9 \\ 5 & 8 & 1 & 4 & 7 \\ 7 & 7 & 0 & 3 & 6 \\ 9 & 8 & 6 & 4 & 5 \end{pmatrix}.$$

寻找原矩阵的最小权的对角线等价于寻找矩阵 A 的最大权的对角线。

将矩阵 A 的每行看作 X 中的顶点，将每列看作 Y 中的顶点，得到一个加权完全二部图 G ，其中边的权重为矩阵 A 中的元素。于是，矩阵 A 的对角线对应二部图 G 的完美匹配。问题转化为求图 G 的边权之和最大的完美匹配。

利用最优匹配算法，可以求出矩阵 A 的最大权的对角线为 $(1, 1), (2, 5), (3, 2), (4, 4), (5, 3)$ 。原矩阵的最小权的对角线亦为 $(1, 1), (2, 5), (3, 2), (4, 4), (5, 3)$ 。

31. 设 A_1, A_2, \dots, A_m 是某集 S 的子集。族 A_1, A_2, \dots, A_m 的一个相异代表系是指 S 的一个子集 (a_1, a_2, \dots, a_m) 适合：当 $1 \leq i \leq m$ 时，有 $a_i \in A_i$ ，并且当 $i \neq j$ 时有 $a_i \neq a_j$ 。证明： A_1, A_2, \dots, A_m 有相异代表系当且仅当对于 $\{1, 2, \dots, m\}$ 的所有子集 J ，有

$$\left| \bigcup_{i \in J} A_i \right| \geq |J|.$$

证明：构造二部图 $G = (X, Y)$ 如下： $X = \{A_1, A_2, \dots, A_m\}$ ， $Y = S$ ， A_i 与 a_j 连线当且仅当 $a_j \in A_i$ 。于是，相异代表系转换为饱和 X 的匹配。由 Hall 定理知，结论成立。 \square

32. 若 G 为具有二分类 (X, Y) 的简单偶图, 且 $|X| = |Y| = n$ 以及 $|E(G)| > (k-1)n$, 则 G 有边数为 k 的匹配。

证明: 假设 M 是图 G 的最大匹配, K 是 G 的最小覆盖, 则 $|M| = |K|$ 。对于 K 中每个顶点 v , 它最多覆盖住 G 的 n 条边。从而, $|K| \geq |E(G)|/n > k-1$ 。因此, 最小覆盖 K 中至少包含 k 个点。所以, 最大匹配 M 中至少包含 k 条边。 \square

33. 设 H 是有限群, K 是 H 的子群。证明: 存在元素 $h_1, h_2, \dots, h_n \in H$, 使得 h_1K, h_2K, \dots, h_nK 都是 K 的左陪集, Kh_1, Kh_2, \dots, Kh_n 是 K 的右陪集。

证明: 对于任意两个左陪集 aK 和 bK , 要么 $aK = bK$, 要么 $aK \cap bK = \emptyset$ 。右陪集也是如此。假设商群 H/K 的阶数为 n , 则 H 可以分成 n 个左陪集的并, 也可以分成 n 个右陪集的并, 且每个左陪集和右陪集的大小为 K 的阶数, 记为 k 。

我们构造偶图 $G = (X, Y)$ 如下: X 表示 H 关于 K 的左陪集族, Y 表示 H 关于 K 的右陪集族。对于 $x \in X, y \in Y$, x 与 y 间连接 l 条边当且仅当左陪集 x 和右陪集 y 有 l 个共同元素。显然, G 是 k 正则偶图, 于是存在完美匹配 M , 其中 $|M| = n$ 。在 M 中的边 e_i 的两端点的陪集中选取共同元素 h_i , 则这些元素为所求的 h_1, h_2, \dots, h_n 。 \square

34. 证明: Tutte 定理的下述推广: G 的最大匹配的边数是

$$\frac{n-d}{2},$$

其中 $d = \max_{S \subseteq V} \{o(G-S) - |S|\}$ 。

证明: 略。 \square

35. 证明: 对 $n \geq 1$, K_{4n+1} 是 4-可因子分解的。

证明: 首先 K_{4n+1} 可以分解为 $2n$ 个边不重的 2-因子的并。其次, 两个边不重的 2-因子的并是一个 4-因子。因此, K_{4n+1} 可以分解为 n 个边不重的 4-因子的并。 \square