2005 年研究生期末试题(120 分钟)

《图论及其应用》

一、填空(15 分，每空 1 分)

1、 已知图 G 有 10 条边，4 个度数为 3 的顶点，其余顶点的度数均小于 2，则 G 中至少有 ___8___ 个顶点 .

2、 m 条边的简单图 G 中所有不同的生成子图(包括 G 和空图)的个数为 __2^m____.

3、 4 个顶点的非同构的简单图有 __11___ 个.

4、 图 G_1 的最小生成树各边权值之和为 __28___.

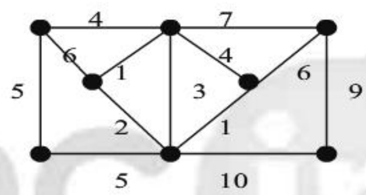


图 G_1

5、若 *W* 是图 *G* 中一条包含所有边的闭通道，则 *W* 在这样的闭通道中具有最短长度的充要条件是:

(1) 每一条边最多重复经过 _1__ 次;

(2) 在 *G* 的每一个圈上，重复经过的边的数目不超过圈的长度的 _一半___.

6、5 阶度极大非哈密尔顿图族有 __C_2^5, __C_1^5 ___.

7、在图 G_2 中，图的度序列为(44443322)，频序列为(422)，独立数为 3，团数为 4，点色数为 4，边色数为 4，直径为 3.

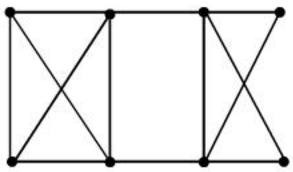


图 G_2

二、选择(15 分)

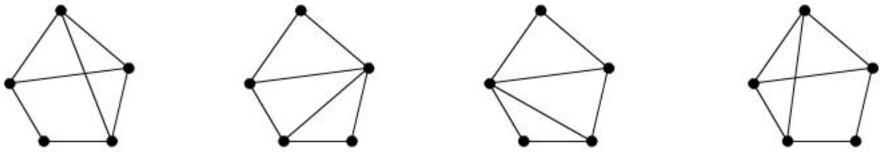
(1)下列序列中，能成为某简单图的度序列的是(C)

(A) (54221)　　(B) (6654332)　　(C) (332222)

（2）已知图 G 有 13 条边，2 个 5 度顶点，4 个 3 度顶点，其余顶点的的度数为 2，则图 G 有(A)个 2 度点。

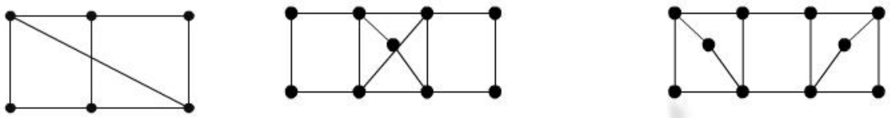
(A) 2　　　(B) 4　　　(C) 8

(3) 图 **G** 如**(a)**所示，与 **G** 同构的图是**(C)**



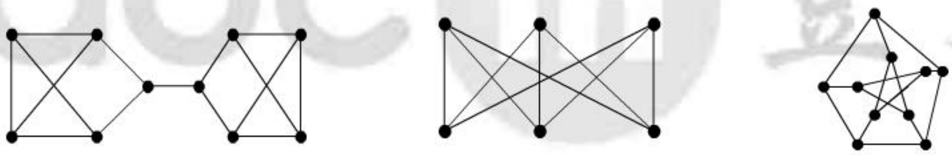
(a)　(A)　(B)　(C)

(4) 下列图中为欧拉图的是**(B),**为 **H** 图的是**(AB),**为偶图的是**(BC).**



(A)　(B)　(C)

5．下列图中可 **1-**因子分解的是**(B)**



(A)　(B)　(C)

三、设Δ和δ分别是(n,m)图 **G** 的最大度与最小度，求证：$\delta \le \frac{2m}{n} \le \Delta$ **(10** 分**).**

证明：$n\delta \le 2m = \sum_{v\in V(G)} d(v) \le n\Delta \Rightarrow \delta \le \frac{2m}{n} \le \Delta.$

四、正整数序列$(d_1,d_2,\cdots,d_n)$是一棵树的度序列的充分必要条件是$\sum_{i=1}^{n} d_i = 2(n-1)$

(10 分**).**

证明："$\Rightarrow$" 结论显然

"$\Leftarrow$"　设正整数序列$(d_1,d_2,\cdots,d_n)$满足$\sum_{i=1}^{n} d_i = 2(n-1)$，易知它是度序列。

设 **G** 是这个度序列的图族中连通分支最少的一个图，知 **m=**$|E(G)| = n-1$**.**

假设 **G** 不连通，则$\omega(G) \ge 2$，且至少有一个分支G_1含有圈 **C**，否则，**G** 是森林，

有 **m=**$|E(G)|=n-\omega<n-1$ 矛盾！从 **C** 中任意取出一条边 $e_1=u_1v_1$。并在另一分支 G_2 中任意取出一条边 $e_2=u_2v_2$，作图

$$G'=G-\{u_1v_1,u_2v_2\}+\{u_1v_2,u_2v_1\}$$

则 G' 的度序列仍然为 $(d_1,d_2,\cdots\ _{n}$ 且 $\omega(G')=\omega(G)-1$，这与 **G** 的选取矛盾！所以

G 是连通的，**G** 是树。即 $(d_1,d_2,\cdots\ _{n}$ 一棵树的度序列。

五、求证：在简单连通平面图 **G** 中，至少存在一个度数小于或等于 **5** 的顶点 **(10 分).**

证明：若不然，$2m=\sum_{v\in V(G)}d(v)\geq 6n>6n-12\Rightarrow m>3n-6,$ 这与 **G** 是简单连通平面图矛盾。

六、证明：**(1)** 若 **G** 恰有两个奇度点 **u** 与 **v**，则 **u** 与 **v** 必连通；

(2) 一棵树至多只有一个完美匹配 **(10 分).**

证明；**(1)** 因为任意一个图的奇度点个数必然为偶数个，若 **G** 恰有两个奇度点 **u** 与 **v**，且它们不连通，那么就会得出一个连通图只有一个奇度点的矛盾结论。所以若 **G** 恰有两个奇度点 **u** 与 **v**，则 **u** 与 **v** 必连通。

(2) 若树 T 有两个相异的完美匹配 M_1,M_2，则 $M_1\Delta M_2\neq\Phi$ 且 $T[M_1\Delta M_2]$ 中的每个顶点的度数为 **2**，则 T 中包含圈，这与 T 是数矛盾！

七、求图 **G** 的色多项式 $P_k(G)$ **(15 分).**

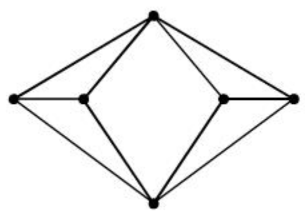
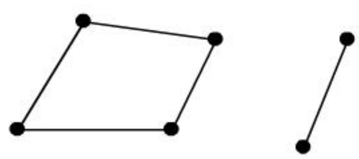


图 G



H_1 H_2

$\bar{G}$

解：图 **G** 的补图如图 $\bar{G}$，则

$h(H_1,x)=r_1x+r_2x^2+r_3x^3+r_4x^4$，其中，$r_1=N_1(H_1)=0$，$r_2=N_2(H_1)=2$

$r_3=N_3(H_1)=4$，$r_4=N_4(H_1)=1$；

$h(H_2,x)=r_1x+r_2x^2$，其中，$r_1=N_1(H_2)=1$，$r_2=N_2(H_2)=1$

$P_k(G)=(x+x^2)(2x^2+4x^3+x^4)=[k]_6+5[k]_5+6[k]_4+2[k]_3$。

八、求图 **G** 中 **a** 到 **b** 的最短路**(15 分).**

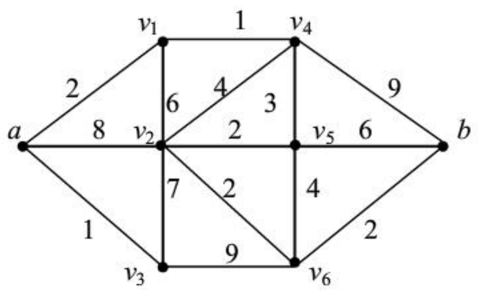


图 G

解 1. $A_1=\{a\}$，$t(a)=0$，$T_1=\Phi$

2. $b_1^{(1)}=v_3$

3. $m_1=1,\ a_2=v_3,\ t(v_3)=t(a)+l(av_3)=1$ (最小),

$T_2=\{av_3\}$

2. $A_2=\{a, v_3\}$, $b_1^{(2)}=v_1, b_2^{(2)}=v_2$

3. $m_2=1,\ a_3=v_1,\ t(v_1)=t(a)+l(av_1)=2$ (最小),

$T_3=\{av_3, av_1\}$

2. $A_3=\{a, v_3, v_1\}$, $b_1^{(3)}=v_2, b_2^{(3)}=v_2, b_3^{(3)}=v_4$

3. $m_3=3,\ a_4=v_4,\ t(v_4)=t(v_1)+l(v_1v_4)=3$ (最小),

$T_4=\{av_3, av_1, v_1v_4\}$

2. $A_4=\{a, v_3, v_1, v_4\}$， $b_1^{(4)}=v_2$， $b_2^{(4)}=v_2$， $b_3^{(4)}=v_2$, $b_4^{(4)}=v_5$

3. $m_4=4,\ a_5=v_5,\ t(v_5)=t(v_4)+l(v_4v_5)=6$ (最小),

$T_5=\{av_3, av_1, v_1v_4, v_4v_5\}$

2. $A_5=\{a, v_3, v_1, v_4, v_5\}$， $b_1^{(5)}=v_2$， $b_2^{(5)}=v_2$， $b_3^{(5)}=v_2$, $b_4^{(5)}=v_2$, $b_5^{(5)}=v_2$

3. $m_5=4,\ t(v_2)=t(v_4)+l(v_4v_2)=7$ (最小),

$T_6=\{av_3, av_1, v_1v_4, v_4v_5, v_4v_2\}$

2. $A_6=\{a, v_3, v_1, v_4, v_5, v_2\}$, $b_2^{(6)}=v_6$, $b_4^{(6)}=b$， $b_5^{(6)}=v_6$， $b_6^{(6)}=v_6$

3. $m_6=6,\ a_7=v_6,\ t(v_6)=t(v_2)+l(v_2v_6)=9$ (最小),

$T_7=\{av_3, av_1, v_1v_4, v_4v_5, v_4v_2, v_2v_6\}$

2. $A_7=\{a, v_3, v_1, v_4, v_5, v_2, v_6\}$, $b_4^{(7)}=b$， $b_5^{(7)}=b$， $b_7^{(7)}=b$

3. $m_7=7,\ a_8=b,\ t(b)=t(v_6)+l(v_6b)=11$ (最小),

$T_8=\{av_3, av_1, v_1v_4, v_4v_5, v_4v_2, v_2v_6, v_6b\}$

于是知 a 与 b 的距离

$$d(a, b)=t(b)=11$$

由 T_8 导出的树中 a 到 b 路 $av_1v_4v_2v_6b$ 就是最短路。