学院________ 姓名________ 学号________

密……封……线……以……内……答……题……无……效

电子科技大学研究生试卷

（考试时间：____至_____，共_____小时）

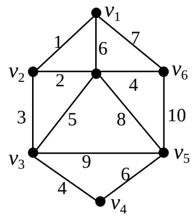
课程名称__图论及其应用__ 教师_______ 学时_60_ 学分____

教学方式__讲授_ 考核日期_2007__年___月____日 成绩______

考核方式：__________（学生填写）

一．填空题(每题 2 分，共 12 分)

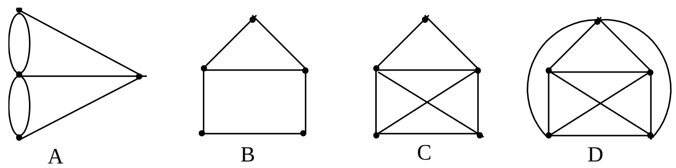
1. 简单图 G=(n,m)中所有不同的生成子图(包括 G 和空图)的个数是__2^m__个；
2. 设无向图 G=(n,m)中各顶点度数均为 3，且 2n=m+3，则 n=__6__；m=_9__；
3. 一棵树有 n_i 个度数为 i 的结点，i=2,3,…,k，则它有 $2+(i-2)\sum_i n_i$ 个度数为 1 的结点；
4. 下边赋权图中，最小生成树的权值之和为__20___；



5、某年级学生共选修 9 门课。期末考试时，必须提前将这 9 门课先考完，每天每人只在下午考一门课，则至少需要__9__天才能考完这 9 门课。

二．单项选择(每题 2 分，共 10 分)

1. 下面给出的序列中，不是某简单图的度序列的是(D)
(A) (11123)；(B) (22222)；(C) (3333)；(D) (1333).
2. 下列图中，是欧拉图的是（ D ）



批注 [xjia1]: 教材 P6,定理 6

批注 [xjia2]: 3n=2m

批注 [xjia3]: m=n-1，握手定理

批注 [xjia4]: 1+2+3+4+6+4

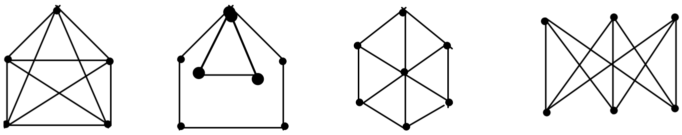
批注 [xjia5]: 一天一门呗！？？？

批注 [xjia6]: D→(3331)→(220)

批注 [xjia7]: G 的每个点的度是偶数；区别：一个连通图有 Euler 迹当且仅当最多有两个奇点

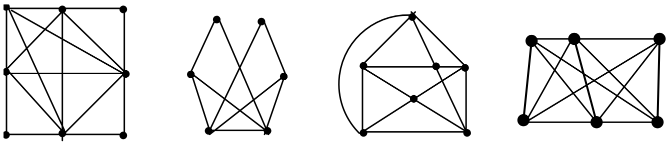
3. 下列图中，不是哈密尔顿图的是（ B ）

批注 [xjia8]: n≥3 的简单图，$\delta \geq n/2$



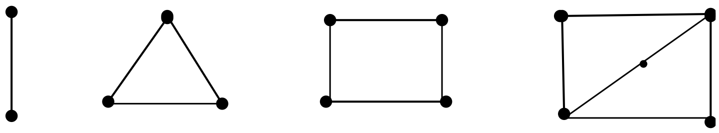
A B C D

4. 下列图中，是可平面图的图的是（ B ）



A B C D

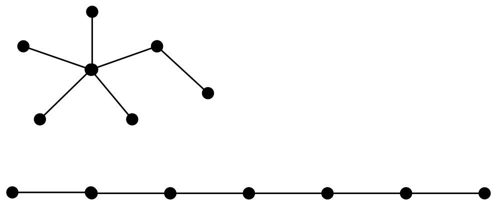
5. 下列图中，不是偶图的是（B）



A B C D

三、 (8 分)画出具有 7 个顶点的所有非同构的树

解： $m = n - 1 = 6$



……

四， 用图论的方法证明：任何一个人群中至少有两个人认识的朋友数相同(10 分)

证明： 此题转换为证明任何一个没有孤立点的简单图至少有两个点的度数相同。

参考教材 P5。

五.（10 分） 设 G 为 n 阶简单无向图，n>2 且 n 为奇数，G 与 G 的补图 $\overline{G}$ 中度数为奇数的顶点个数是否相等？证明你的结论

证明： 根据补图定义 $d_G(v_i) + d_{\bar{G}}(v_i) = n - 1$。相等。

由频序列相同证明有同样奇数的顶点个数。

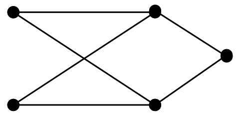
参考教材 P5。

六.（10 分）设 G 是具有 n 个顶点的无向简单图，其边数 $m=\frac{1}{2}(n-1)(n-2)+2$，证明

(1) 证明 G 中任何两个不相邻顶点的度数之和大于等于 n。(2)给出一个图，使它具有 n 个顶点，$m=\frac{1}{2}(n-1)(n-2)+1$ 条边，但不是哈密尔顿图。

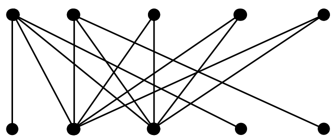
证明：(1) 参考教材 P79 定理 6 的证明

(2)n=4 时，m=4。



七、(10 分)今有赵、钱、孙、李、周五位教师，要承担语文、数学、物理、化学、英语五门课程。已知赵熟悉数学、物理、化学三门课程，钱熟悉语文、数学、物理、英语四门课程，孙、李、周都只熟悉数学和物理两门课程。问能否安排他们 5 人每人只上一门自己所熟悉的课程，使得每门课程都有人教，说明理由

解：建立图论模型，设 A, B, C, D, E 分别代表赵、钱、孙、李、周五位教师。
a, b, c, d, e 分别代表语文、数学、物理、化学、英语五门课程。得模型图如下：



问题转化为是否存在饱和 A, B, C, D, E 的匹配存在。
取顶点子集合$S=\{B, C, D, E\}$，因$N(S)=\{b, c, e\}$，所以$|N(S)|<|S|$
由霍尔定理知：不存在饱和 A, B, C, D, E,的匹配。
故不能安排他们 5 人每人只上一门自己所熟悉的课程。

八、(10 分)设 G 是具有 n 个顶点，m 条边，p($P\geq 2$)个连通分支的平面图，G 的每个面至少由 k（$k\geq 3$）条边所围成，则

$$m\leq\frac{k(n-p-1)}{k-2}$$

证明：(1)$n-m+\phi=p+1$

(2)$\phi k\leq\sum_{f\in\psi}\deg(f)=2m$

将(2)带入(1)即可得证。

九．(10分)求下图G的色多项式$P_k(G)$.

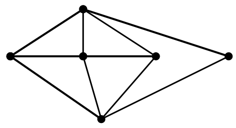
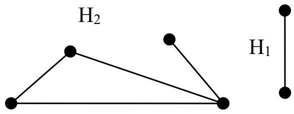


图 G

解：参考教材P189习题28

该图的补图$\bar{G}$如下图所示：



它有两个分支，对于$h(K_1, x) = x + x^2$

对于H2：$N_4(G) = 1$，$N_3(G) = 4$，$N_2(G) = 2$，$N_1(G) = 0$，

$$h(K_2, x) = 2x^2 + 4x^3 + x^4$$

所以

$$h(\bar{G}, x) = (2x^2 + 4x^3 + x^4)(x + x^2)$$
$$= 2x^3 + 6x^4 + 5x^5 + x^6$$

于是G的色多项式

$$P_k(G) = 2[k]_3 + 6[k]_4 + 5[k]_5 + [k]_6$$
$$= k(k-1)(k-2)^2(k^2 - 5k + 8)$$

十、(10分) (1)、在一个只有2个奇度点的边赋权图中，如何构造一个最优欧拉环游？说明理由；

(2)、在一个边赋权的哈密尔顿图中，如何估计其最优哈密尔顿圈的权值之和的下界？

解：(1)参考教材P70推论

(2) 参考教材P88