习 题 2

1. 证明：非平凡树的最长路的起点和终点均是 1 度的。

证明：设T为非平凡树且P是T的最长路。若P的一个端点u不是一度点，即$d(u)\geq 2$，则除了P上的邻点外，u还有一个邻点v。若$v\notin V(P)$，则P加上点v后到一条更长的路，这与P是最长路矛盾；若$v\in V(P)$，则得到一个圈，这与T是树矛盾！证毕。

2. 证明：每棵恰有两个 1 度顶点的树均是路。

证明：设T为恰有两个 1 度点的树。若T不是路，则T至少存在一个度不小于 3 的点，其余顶点的度均不小于 2。由握手引理有，$2m=\sum_{u\in V(T)}d(u)\geq 3+2+2(n-3)=2n-1>2(n-1)$，矛盾。因此$T$是路。证毕。

3. 若G是树且$\Delta\geq k$，则G至少有k个 1 度顶点。

证明：若不然，设G至多有$k-1$个 1 度顶点。由于$\Delta\geq k$，于是，由握手定理得：$2m(G)=\sum_{v\in V(G)}d(v)\geq k-1+k+2(n-k)=2n-1>2n-2$。即$m>n-1$，这与树的定义矛盾。证毕。

4. 证明：若G是森林且恰有$2k$个奇度点，则在G中有k条边不重的路$P_1,P_2,\cdots,P_k$使得

$$E(G)=E(P_1)\cup E(P_2)\cup\cdots\cup E(P_k)$$

证明：对k进行归纳。当$k=1$时，G恰有两个奇度点，此时，由练习 2 可知，G是一条路。假设当$k=t$时，结论成立。令$k=t+1$。在G的一个分支中取两个 1 度顶点u与v，令P是连接u与v的唯一路，则$G-E(P)$是有$2t$个奇度点的森林，由归纳假设，它可以分解为t条边不重合路之并，所以G可以分解为$t+1$条边不重合路之并。证毕。

5. 证明：正整数序列$(d_1,d_2,\cdots,d_k)$是一棵树的度序列当且仅当$\sum_{i=1}^{n}d_1=2(n-1)$。

证明：必要性显然，故仅证明充分性。对n作数学归纳。当$n=1$和 2 时，结论显然成立。假设当$n=k$时，结论成立。令$n=k+1$。首先, 序列中至少有一个数为 1，否则，序列的和大于$2k$，与条件矛盾！所以，$d_{k+1}=1$。我们从序列中删去d_1和d_{k+1}，增加数$d^*=d_1-1$并将其放在它应该在的位置（按从大到小排列）。得到新序列S_1。该序列含k个数，且序列和为$2(k-1)$，由归纳假设，存在树T_1，它的度序列为S_1。现在，增加点v，把它和T_1的点d^*连一条边后得到树T。树T即为所求。证毕。

6. 设T是有$k+1$个顶点的任意一棵树。证明：若G是简单图且$\delta\geq k$，则G有一个子图同构于T。

证明：对k进行归纳。当$k=1$时，结论显然成立。假设当$k=n-1$($n>2$)时结论成

立。现考虑$k=n$。此时T是有$n+1$个点的树。则存在$u,v\in V(T)$使$d(v)=1$，$uv\in E(T)$。考虑$T_1=T-v$。T_1仍然是树且$|V(T_1)|=n$，由归纳假设G中存在一个子图$G_1\cong T_1$。不妨设在此同构映射下G_1中的点s与T_1中的u对应。那么，$d_G(s)\geq k=n$。另一方面，$d_{G_1}(s)=d_{T_1}(u)\leq n-1$。从而$G-V(G_1)$中存在不同于$s$的点$t$，令$\tilde{T}=G_1+st$。则$\tilde{T}$是一棵树且$\tilde{T}\cong T$。由归纳假设命题成立。

7. 设G连通且$e\in E(G)$。证明：

(1) e在G的每棵生成树中当且仅当e是G的割边；

(2) e不在G的任一生成树中当且仅当e是G的自环。

证明：

(1) 必要性。若e不是G的割边，则e在G的某个圈C中。应用破圈法，将e从C中删除，继续应用破圈法得到G的一棵生成树不包含e，这与题设矛盾。因此e是G的割边。

充分性。若e不在G的某棵生成树T中。因e是G的割边，故$G-e$不连通，所以$G-e$没有连通的生成树。另一方面，T是$G-e$的生成树，矛盾。因此e在G的每棵生成树中。

(2) 充分性显然，故仅证明必要性。若e不是G的自环，则e是G的割边或e在G的某个圈中。若e是G的割边，由(1)的充分性知，e在G的每棵生成树中，矛盾。若e在G的某个圈中，(1)的必要性知，存在G的一棵生成树包含e，矛盾。所以e是G的自环。

8. 证明定理 4。

证明：略。

9. 证明：顶点度数为偶数的连通图本身可构成一个包含所有边的回路。

证明：设G为满足条件的图。对G的边数作归纳。由G连通且每个点的度都为偶数，因此G包含一个圈C。若C包含G的所有边，那么C即为所求回路。若不是，从G中删去C中的所有边，得到一个图H。注意到$|E(H)|<|E(G)|$且H可能不连通。由归纳假设，H的每个连通分支都存在一条包含其所有边的回路。因为H的每个连通分支都与C至少有一个公共顶点，从C的一个顶点w出发沿C的边遍历，当碰到与一个与H的公共顶点v时则先遍历H的这个分支，完成H的遍历后回到v继续遍历C直到再碰到另一个与H的公共顶点u，如此下去直到回到w，则得到G的一个回路。证毕。

10. 证明：

(1) 若G的每个顶点均为偶度点，则G没有割边；

(2) 若G是k正则二部图且$k\geq 2$，则G没有割边。

证明：(1) 若G有割边$e=uv$，则$G-e$不连通。不妨设G_1为$G-e$的一个连通分支，则有$u\in V(G_1)$，$v\notin V(G_1)$。注意到$d_{G_1}(u)$为奇数，而G_1中其余顶点的度均为偶数，这与握

手定理矛盾。因此 G 没有割边。证毕。

(2) 若 G 有割边 $e=uv$，则 $G-e$ 不连通。不妨设 G_1 为 $G-e$ 的一个连通分支，则有 $u\in V(G_1)$。注意到 $d_{G_1}(u)=k-1$，而 G_1 中其余顶点的度均为 k。显然，G_1 为二部图。设 U 和 V 是 G_1 的二部划分且有 $|U|=a$ 和 $|V|=b$。不妨设 $u\in U$。由握手定理得，$ka-1=kb$。另一方面，当 $k\geq 2$ 时，$ka-1\neq kb$，矛盾。因此 G 没有割边。证毕。

11． 设 G 连通且 $n\geq 3$，证明：

(1) 若 G 有割边，则 G 有顶点 v 使 $\omega(G-v)>\omega(G)$；

(2) (1)的逆命题不一定正确。

证明：(1) 若 G 的点 w 关联自环，则自环对 $\omega(G-w)$ 没有影响。故仅考虑无环图。设 G 有割边 $e=uv$。下证 u 和 v 中必有一个割点。因 $n\geq 3$，$G-e$ 中存在一个连通分支 G_1 包含至少两个顶点且 $v\in V(G_1)$。那么，$G-v$ 不连通且至少包含两个连通分支。所以 $\omega(G-v)>\omega(G)$。证毕。

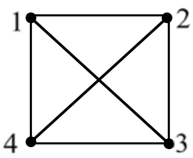
(2) 考虑图 $G=K_1\vee 2K_3$，K_1 是 G 的割点，删除 K_1 后图不连通。但 G 无割边。

12． 计算 $K_{3,3}$ 的生成树的棵数。

解：易知 $K_{3,3}$ 为 3 正则图。则 $K_{3,3}$ 的度矩阵 D 为 $\begin{pmatrix}3 & \cdots & 0\\ \vdots & \ddots & \vdots\\ 0 & \cdots & 3\end{pmatrix}_{6\times 6}$，邻接矩阵 A 为 $\begin{pmatrix}0 & J\\ J & 0\end{pmatrix}$，其中 J 为 3×3 全 1 矩阵，0 为 3×3 全 0 矩阵。计算矩阵 $D-A$ 的第 1 行第 1 列的代数余子式得 $\tau(K_{3,3})=81$。

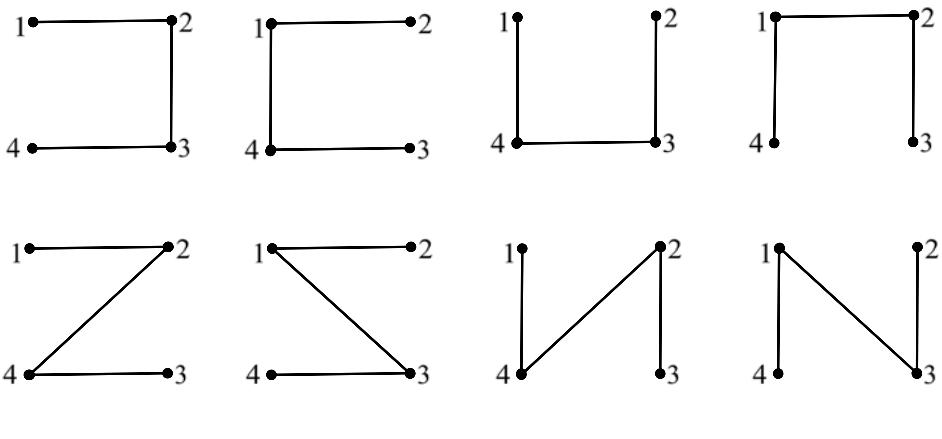
13． 画出 K_4 的所有 16 棵生成树。

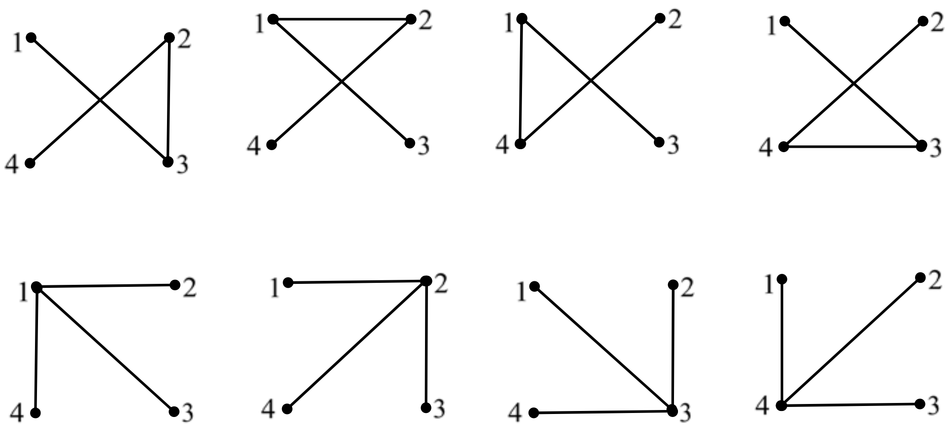
解：为了方便将 K_4 的顶点标号为 1，2，3，4。



K_4

给出 K_4 的所有生成树如下：





14． 证明：若 e 是 K_n 的边，则 $\tau(K_n-e)=(n-2)n^{n-3}$ 。

证明：若 e 为 K_n 的一条边，由 K_n 中边的对称性以及每棵生成树的边数为 $n-1$ 知，K_n 的所有生成树的总边数为：$(n-1)n^{n-2}$ 。所以，每条边(e 这条边)出现在生成树的次数为：

$$\frac{(n-1)n^{n-2}}{\frac{1}{2}n(n-1)}=2n^{n-3}$$

所以，K_n-e 对应的生成树的棵数为(把包含 e 的生成树减掉)：

$\tau(K_n-e)=n^{n-2}-2n^{n-3}=(n-2)n^{n-3}$ 。证毕。

15．(1) 设 H 是每两个相邻顶点都用 k 条边连接的图，而 G 是 H 的**基础简单图**，(即将 G 中所有重边均用一条边代替后所得到的图)。证明：

$$\tau(H)=k^{n-1}\tau(G)\text{；}$$

(2) 若图 G 的每条边用长为 k 的一条路来代替，所得的新图用 H 表示。证明：

$$\tau(H)=k^{m-n+1}\tau(G)\text{；}$$

(3) 从(2)推出 $\tau(K_{2,n})=n2^{n-1}$ 。

证明：(1) G 是 H 的基础简单图，因此 G 无自环和重边。另一方面 H 的自环不会出现在 H 的任何生成树中。因此设 H 为多重图(仅包含重边)。若 G 的一条边 $e=uv$ 包含在某棵生成树中，对应于 H 中连接 u 和 v 的边为 k 条，因此，若 u 和 v 出现在生成树 H 中，保留一条边 uv 方式有 k 条。而 G 的生成树有 $n-1$ 条边，所以 H 中重边的选取方式就有 k^{n-1} 种。因此 $\tau(H)=k^{n-1}\tau(G)$ 。证毕。

(2) 为了方便，用破圈法求 G 的生成树。若 G 的一条边 $e=uv$ 不包含在某棵生成树中，对应于 H 中连接 u 和 v 的路需删除一条边。而此 u,v -路长为 k ，故从此路上删去一条

边有 k 种方式。另一方面，删除 G 的 $m-n+1$ 条边后才能得到其生成树，那么对应删除 H 的边的方式有 k^{m-n+1} 种。因此 $\tau(H)=k^{m-n+1}\tau(G)$ 。证毕。

(3) 不妨设 $K_{2,n}$ 中“2”所对应的部集中的顶点为 u 和 v 。那么 $K_{2,n}$ 可以认为用 n 条点不交的 2 长路连接 u 和 v 。那么可将 $K_{2,n}$ 理解为(2)中的图 H ，将 $K_{2,n}$ 中连接 u 和 v 的 n 条点不交的 2 长路用 n 条重边代表，得到图 G 。为得到 G 的生成树，需删除任意 $n-1$ 条重边，这有 n 种取法。因此由(2)得 $\tau(K_{2,n})=n2^{n-1}$ 。

16. Kruskal 算法能否用来求：

(1) 赋权连通图中的最大权的树？

(2) 赋权图中的最小权的最大森林？如果可以，怎样实现？

解：(1) 在 Kruskal 算法将求最小生成树替换为最大生成树即可。

(2) 用 Kruskal 算法对森林的每一个连通分支(即是树)求解即可。

17. 证明：在赋权完全图中，下述 Kruskal 算法并不一定产生有最小权的生成路：

(1) 选一边 e_1，使得 $w(e_1)$ 尽可能小。

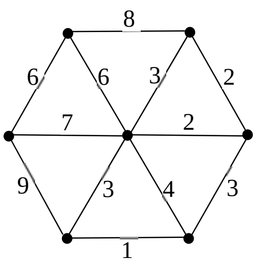
(2) 若边 $e_1,e_2,\cdots e_i$ 已选定，则用下述方法在 $E\setminus\{e_1,e_2,\cdots e_i\}$ 中选一条边 e_{i+1}：

(i) $G[\{e_1,e_2,\cdots e_{i+1}\}]$ 是不相交路的并；

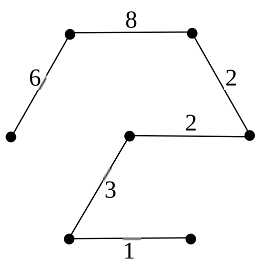
(ii) $w(e_{i+1})$ 是满足 (i) 的尽可能小的权。

(3) 第(2)步不能继续执行时停止。

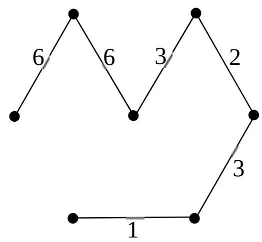
解：该算法不能得到最小权值的生成路。事实上，生成路的问题是求图的最长路，此算法是求图的最小权值哈密尔顿路。如下图 G ，用算法找到的最小生成路为 P ，其总权值为 22，而不按算法可得到一条最小权值的生成路为 Q ，其总权值为 21。



G



P



Q

18. 连通图 G 的**树图**是指这样的一个图，它的顶点是 G 的生成树 $T_1,T_2,\cdots T_\tau$ ，T_i 和 T_j ，$i\neq j$ ，相连当且仅当它们恰有 $n-2$ 条公共边。证明：任何连通图的树图是连通的。

证明：设 G 的任意两棵生成树 T_i 和 T_j 有 k 条公共边。若 $k=n-2$，由定义，则 T_i 与 T_j 有边相连。下设 $0\le k<n-2$ ，那么 T_i 和 T_j 有 $n-1-k$ 边不同。此时一定存在 $e'_{k+1}\in E(T_i)$ 但 $e'_{k+1}\notin E(T_j)$，从而 $T_j+e'_{k+1}$ 有唯一的圈 C 。C 中一定存在一条边 $e_{k+1}\in E(T_j)$ 且 $e_{k+1}\notin E(T_i)$ 。那么 $T_{i+1}=T_i-e'_{k+1}+e_{k+1}$ 仍然是 G 的生成树。此时 T_i 与 T_{i+1} 有 $n-2$ 条公共边，并且 T_{i+1} 与 T_j 有

$k+1$ 公共边。如此进行下去，我们可以得到一个生成树的序列(序列中相邻的两个生成树在树图中相邻) $T_i,T_{i+1},\cdots T_{i+n-2-k}$。注意到$T_{i+n-2-k}$与$T_j$相邻。那么从$T_i$沿生成树序列到达$T_j$是树图的一条路。证毕。