analízis-1/7. gyakorlat (2020 tavasz)

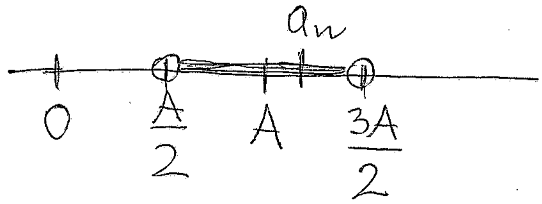
(1) ——

(2) <u>áll.</u>: Legyen $a_n \geq 0$ $(n \in \mathbb{N})$, $0 < \lim(a_n) < +\infty$.

Ekkor: $\lim\left(\sqrt[n]{a_n}\right) = 1$.

<u>biz.</u>: $A := \lim(a_n)$. Ekkor $\varepsilon = \frac{A}{2}$-höz

$$\exists N \in \mathbb{N}\ \forall n \geq N: \quad |a_n - A| < \frac{A}{2}$$



$$\Updownarrow$$

$$0 < \frac{A}{2} < a_n < \frac{3A}{2}$$

n-edik gyököt vonunk: $\sqrt[n]{\frac{A}{2}} < \sqrt[n]{a_n} < \sqrt[n]{\frac{3A}{2}}$

Mivel $\lim\left(\sqrt[n]{\frac{A}{2}}\right) = \lim\left(\sqrt[n]{\frac{3A}{2}}\right) = 1$, ezért

a közrefogási elv alapján:

$$\lim\left(\sqrt[n]{a_n}\right) = 1.$$

3a 1. MO. (NRA és NRF becslése a gyök alatt):

$$\sqrt[n]{3n^5} \le \sqrt[n]{3n^5+2n+1} \le \sqrt[n]{3n^5+2n^5+n^5} = \sqrt[n]{6n^5}$$

$$\sqrt[n]{3n^5} = \sqrt[n]{3}\cdot\left(\sqrt[n]{n}\right)^5 \xrightarrow{(n\to\infty)} 1\cdot 1^5 = 1 \qquad \Big| \qquad 1 = 1\cdot 1^5 \xleftarrow{(n\to\infty)} \sqrt[n]{6}\cdot\left(\sqrt[n]{n}\right)^5 = \sqrt[n]{6n^5}$$

A közrefogási elv alapján: $\lim\left(\sqrt[n]{3n^5+2n+1}\right) = \underline{\underline{1}}$

2. MO. (a 2 feladat eredményét használva):

$$\sqrt[n]{3n^5+2n+1} = \sqrt[n]{n^5\cdot\left(3+\frac{2}{n^4}+\frac{1}{n^5}\right)} =$$

$$= \left(\sqrt[n]{n}\right)^5\cdot \underbrace{\sqrt[n]{3+\frac{2}{n^4}+\frac{1}{n^5}}}_{} \xrightarrow{(n\to\infty)} 1^5\cdot 1 = \underline{\underline{1}}$$

a gyök alatti sorozat határértéke 3, így 2 eredménye alkalmazható

(3b) 1. MO. (NRA és NRF becslés a gyök alatt):

felső becslés: $\sqrt[n]{\frac{n+1}{2n+3}} \leq \sqrt[n]{\frac{n+n}{2n}} = \sqrt[n]{\frac{2n}{2n}} = 1 \xrightarrow{(n\to\infty)} 1$

alsó becslés: $\sqrt[n]{\frac{n+1}{2n+3}} \geq \sqrt[n]{\frac{n}{2n+3n}} = \sqrt[n]{\frac{n}{5n}} = \sqrt[n]{\frac{1}{5}} \xrightarrow{(n\to\infty)} 1$

A közrefogási elv alapján a keresett határérték: $\underline{\underline{1}}$

2. MO. (a (2) feladat eredményét használva):

A gyök alatti sorozat határértéke:

$$\lim\left(\frac{n+1}{2n+3}\right) = \frac{1}{2},$$

így (2) eredménye alapján

$$\lim\sqrt[n]{\frac{n+1}{2n+3}} = 1$$

(3c) 1. MO. (közvetlen becslés):

felső becslés: $\lim\left(\frac{3^n}{n!}\right)=0$ miatt $\exists N\ \forall n\geq N$: $\frac{3^n}{n!}<1$.

$$\sqrt[n]{\frac{3^n}{n!}+2^n}<\sqrt[n]{1+2^n}<\sqrt[n]{2^n+2^n}=\sqrt[n]{2\cdot 2^n}=$$

$$=\sqrt[n]{2}\cdot\sqrt[n]{2^n}=2\cdot\sqrt[n]{2}\xrightarrow{(n\to\infty)}2\cdot 1=2$$

alsó becslés: $\sqrt[n]{\frac{3^n}{n!}+2^n}>\sqrt[n]{2^n}=2\xrightarrow{(n\to\infty)}2$

A közrefogási elv alapján a keresett határérték: $\underline{\underline{2}}$

2. MO. (a (2) feladat eredményét használva):

$$\sqrt[n]{\frac{3^n}{n!}+2^n}=\sqrt[n]{2^n\cdot\left(\frac{3^n}{2^n\cdot n!}+1\right)}=2\cdot\sqrt[n]{\underbrace{\frac{(3/2)^n}{n!}+1}}\to$$

$$\xrightarrow{(n\to\infty)}2\cdot 1=\underline{\underline{2}}$$

a gyök alatti sorozat határértéke: $0+1=1$, így (2) eredménye alkalmazható

analízis-1/7. gyak (2020 tavasz)

4a $$\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}=\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}\cdot\left(1+\frac{1}{n}\right)\xrightarrow{(n\to\infty)} e\cdot 1=\underline{\underline{e}}$$

4b $$\left(1-\frac{1}{n}\right)^{n}=\left(\frac{n-1}{n}\right)^{n}=\frac{1}{\left(\frac{n}{n-1}\right)^{n}}=\frac{1}{\left(\frac{n-1+1}{n-1}\right)^{n}}=$$

$$=\frac{1}{\left(1+\frac{1}{n-1}\right)^{n}}=\frac{1}{\left(1+\frac{1}{n-1}\right)^{n-1}}\cdot\frac{1}{1+\frac{1}{n-1}}\xrightarrow{(n\to\infty)}$$

$$\xrightarrow{(n\to\infty)}\frac{1}{e}\cdot\frac{1}{1}=\underline{\underline{\frac{1}{e}}}$$

4.c $$\left(1+\frac{1}{n^2}\right)^{n}=\sqrt[n]{\left(\left(1+\frac{1}{n^2}\right)^{n}\right)^{n}}=\sqrt[n]{\underbrace{\left(1+\frac{1}{n^2}\right)^{n^2}}}\xrightarrow{(n\to\infty)}$$

$$\xrightarrow{(n\to\infty)} 1$$

a gyök alatti sorozat az $\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}$ részsorozata, ezért e-hez tart, így 2 eredménye alkalmazható

(5) **áll.:** Legyen $x_n > 0$ $(n \in \mathbb{N})$, $\lim(x_n) = +\infty$.

Ekkor: $\lim \left(1 + \frac{1}{x_n}\right)^{x_n} = e$

biz.: vázlatos bizonyítás

Jelölje $[x]$ az $x \in \mathbb{R}$ szám egészrészét:

$$[x] \in \mathbb{Z} \,; \quad [x] \leq x < [x] + 1.$$

alsó becslés: $\left(1+\frac{1}{x_n}\right)^{x_n} \geq \left(1 + \frac{1}{[x_n]+1}\right)^{[x_n]} =$

$$= \underbrace{\left(1 + \frac{1}{[x_n]+1}\right)^{[x_n]+1}}_{\downarrow \atop e} \cdot \underbrace{\left(1+\frac{1}{[x_n]+1}\right)^{-1}}_{\downarrow \atop 1} \xrightarrow{(n\to\infty)} e \cdot 1 = e$$

felső becslés:

$$\left(1+\frac{1}{x_n}\right)^{x_n} \leq \left(1 + \frac{1}{[x_n]}\right)^{[x_n]+1} = \underbrace{\left(1+\frac{1}{[x_n]}\right)^{[x_n]}}_{\downarrow \atop e} \cdot \underbrace{\left(1+\frac{1}{[x_n]}\right)}_{\downarrow \atop 1},$$

és alkalmazzuk a közrefogási elvet.

Megj.: Hasonlóan igazolható, hogy $\lim\left(1-\frac{1}{x_n}\right)^{x_n} = \frac{1}{e}$, amiből pedig az alábbi állítás adódik:

$$\left.\begin{array}{l} x_n < 0 \ (n \in \mathbb{N}) \\ \lim(x_n) = -\infty \end{array}\right\} \Longrightarrow \lim\left(1+\frac{1}{x_n}\right)^{x_n} = e$$

analízis-1/7. gyak (2020 tavasz)

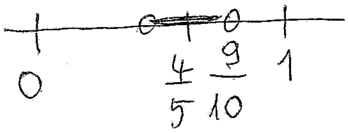
6a

$$\left(\frac{6n-7}{6n+4}\right)^{3n+2}=\left(\frac{6n+4-11}{6n+4}\right)^{3n+2}=\left(1-\frac{11}{6n+4}\right)^{3n+2}=$$

$$=\left(1+\frac{1}{-\frac{6n+4}{11}}\right)^{3n+2}=\left(1+\frac{1}{-\frac{6n+4}{11}}\right)^{-\frac{6n+4}{11}\cdot\left(-\frac{11}{6n+4}\right)\cdot(3n+2)}$$

$$=\Bigg[\underbrace{\left(1+\frac{1}{-\frac{6n+4}{11}}\right)^{-\frac{6n+4}{11}}}_{\downarrow \atop e}\Bigg]^{-\frac{11(3n+2)}{6n+4}}\xrightarrow{(n\to\infty)} e^{-\frac{33}{6}}=\underline{\underline{\frac{1}{e^{11/2}}}}$$

6b $\lim\left(\frac{4n+3}{5n}\right)=\frac{4}{5}$, ezért $\varepsilon=\frac{1}{10}$-hez $\exists N\in\mathbb{N}\ \forall n\geq N$:

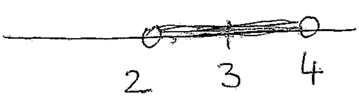


$$0<\frac{4n+3}{5n}<\frac{4}{5}+\frac{1}{10}=\frac{9}{10}$$

$$0<\left(\frac{4n+3}{5n}\right)^{5n}<\left(\frac{9}{10}\right)^{n}\xrightarrow{(n\to\infty)}0$$

Tehát a keresett limesz: $\underline{0}$.

6c $\lim\left(\frac{3n+1}{n+2}\right)=3$, ezért $\varepsilon=1$-hez $\exists N\in\mathbb{N}\ \forall n\geq N$:



$$\frac{3n+1}{n+2}>2$$

$$\left(\frac{3n+1}{n+2}\right)^{2n+3}>2^{2n+3}\xrightarrow{(n\to\infty)}+\infty$$

Tehát a keresett limesz: $\underline{\underline{+\infty}}$