

Szekvent kalkulus

Gyakorlat

Logika

2020/2021 2. félév

Szekvent kalkulus alapjai

Hogy néz ki egy szekvent?

$$\{A_1, A_2, \dots, A_n\} \longrightarrow \{B_1, B_2, \dots, B_m\}$$

Szekvent kalkulus alapjai

Hogy néz ki egy szekvent?

$$\{A_1, A_2, \dots, A_n\} \longrightarrow \{B_1, B_2, \dots, B_m\}$$

Mi egy szekvent szemantikája?

$$\top \wedge A_1 \wedge A_2 \wedge \dots \wedge A_n \supset \perp \vee B_1 \vee B_2 \vee \dots \vee B_m$$

Példa: szekvent vizsgálata jelentés alapján.

Helyes-e a következő szekvent: $\neg(A \vee C), A \longrightarrow B$

Példa: szekvent vizsgálata jelentés alapján.

Helyes-e a következő szekvent: $\neg(A \vee C), A \longrightarrow B$

Írjuk fel a jelentését:

Példa: szekvent vizsgálata jelentés alapján.

Helyes-e a következő szekvent: $\neg(A \vee C), A \longrightarrow B$

Írjuk fel a jelentését: $\neg(A \vee C) \wedge A \supset B$

Példa: szekvent vizsgálata jelentés alapján.

Helyes-e a következő szekvent: $\neg(A \vee C), A \longrightarrow B$

Írjuk fel a jelentését: $\neg(A \vee C) \wedge A \supset B$

A de Morgan-azonosság alapján ez a következővel ekvivalens:

$$\neg A \wedge \neg C \wedge A \supset B$$

Példa: szekvent vizsgálata jelentés alapján.

Helyes-e a következő szekvent: $\neg(A \vee C), A \longrightarrow B$

Írjuk fel a jelentését: $\neg(A \vee C) \wedge A \supset B$

A de Morgan-azonosság alapján ez a következővel ekvivalens:

$$\neg A \wedge \neg C \wedge A \supset B$$

Az implikáció bal oldala mindig hamis, így az implikációs formula helyettesítési értéke minden interpretációban igaz, vagyis a formula tautológia, tehát a szekvent teljesül.

Példa: szekvent vizsgálata jelentés alapján

Helyes-e a következő szekvent: $\longrightarrow A \supset A$

Példa: szekvent vizsgálata jelentés alapján

Helyes-e a következő szekvent: $\longrightarrow A \supset A$

Írjuk fel a jelentését:

Példa: szekvent vizsgálata jelentés alapján

Helyes-e a következő szekvent: $\longrightarrow A \supset A$

Írjuk fel a jelentését: $\top \supset (A \supset A)$

Példa: szekvent vizsgálata jelentés alapján

Helyes-e a következő szekvent: $\longrightarrow A \supset A$

Írjuk fel a jelentését: $\top \supset (A \supset A)$

Az implikáció bal- és jobb oldalán is azonosan igaz állítás szerepel, így az formula helyettesítési értéke mindig igaz, vagyis a formula tautológia, tehát a szekvent teljesül.

Példa: szekvent vizsgálata jelentés alapján

Helyes-e a következő szekvent: $(\neg A \vee \neg B), \neg A \supset B \longrightarrow A \wedge B, \neg A \wedge \neg B$

Példa: szekvent vizsgálata jelentés alapján

Helyes-e a következő szekvent: $(\neg A \vee \neg B), \neg A \supset B \longrightarrow A \wedge B, \neg A \wedge \neg B$

Írjuk fel a jelentését:

Példa: szekvent vizsgálata jelentés alapján

Helyes-e a következő szekvent: $(\neg A \vee \neg B), \neg A \supset B \longrightarrow A \wedge B, \neg A \wedge \neg B$

Írjuk fel a jelentését: $(\neg A \vee \neg B) \wedge (\neg A \supset B) \supset A \wedge B \vee \neg A \wedge \neg B$

Példa: szekvent vizsgálata jelentés alapján

Helyes-e a következő szekvent: $(\neg A \vee \neg B), \neg A \supset B \longrightarrow A \wedge B, \neg A \wedge \neg B$

Írjuk fel a jelentését: $(\neg A \vee \neg B) \wedge (\neg A \supset B) \supset A \wedge B \vee \neg A \wedge \neg B$

A	B	$(\neg A \vee \neg B) \wedge (\neg A \supset B) \supset A \wedge B \vee \neg A \wedge \neg B$
i	i	i
i	h	i
h	i	h
h	h	i

Példa: szekvent vizsgálata jelentés alapján

Helyes-e a következő szekvent: $(\neg A \vee \neg B), \neg A \supset B \longrightarrow A \wedge B, \neg A \wedge \neg B$

Írjuk fel a jelentését: $(\neg A \vee \neg B) \wedge (\neg A \supset B) \supset A \wedge B \vee \neg A \wedge \neg B$

A	B	$(\neg A \vee \neg B) \wedge (\neg A \supset B) \supset A \wedge B \vee \neg A \wedge \neg B$
i	i	i
i	h	i
h	i	h
h	h	i

A szekventből képzett formula nem tautológia, így a szekvent nem helyes.

Szekvent kalkulus alapjai

- A szekvent kalkulus a természetes technikához hasonlóan szintaktikus módszer: a vizsgált szekvent tényleges jelentésével nem foglalkozunk, csak a levezetési szabályokat használhatjuk.
- Levezetési szabályok a természetes levezetéshez hasonlóan: ha a felső levezetés(ek) megkonstruálható(k), akkor az alsó is.
- A szabályokat lentről felfelé fogjuk alkalmazni.
- A cél a kitüntetett szekvent (axióma) elérése.
- Minden logikai összekötő jelhez két szabály tartozik: $\circ \rightarrow$ és $\rightarrow \circ$, aszerint, hogy a \circ művelet az alsó szekventben a nyíl bal- vagy jobboldalán található.

A C-kalkulus szabályrendszere

C-kalkulus

axiómaséma

$$X, \Gamma \rightarrow \Delta, X$$

levezetési szabályok

$$(\rightarrow \supset) \quad \frac{X, \Gamma \rightarrow \Delta, Y}{\Gamma \rightarrow \Delta, (X \supset Y)}$$

$$(\supset \rightarrow) \quad \frac{\Gamma \rightarrow \Delta, X \quad Y, \Gamma \rightarrow \Delta}{(X \supset Y), \Gamma \rightarrow \Delta}$$

$$(\rightarrow \wedge) \quad \frac{\Gamma \rightarrow \Delta, X \quad \Gamma \rightarrow \Delta, Y}{\Gamma \rightarrow \Delta, (X \wedge Y)}$$

$$(\wedge \rightarrow) \quad \frac{X, Y, \Gamma \rightarrow \Delta}{(X \wedge Y), \Gamma \rightarrow \Delta}$$

$$(\rightarrow \vee) \quad \frac{\Gamma \rightarrow \Delta, X, Y}{\Gamma \rightarrow \Delta, (X \vee Y)}$$

$$(\vee \rightarrow) \quad \frac{X, \Gamma \rightarrow \Delta \quad Y, \Gamma \rightarrow \Delta}{(X \vee Y), \Gamma \rightarrow \Delta}$$

$$(\rightarrow \neg) \quad \frac{X, \Gamma \rightarrow \Delta}{\Gamma \rightarrow \Delta, \neg X}$$

$$(\neg \rightarrow) \quad \frac{\Gamma \rightarrow \Delta, X}{\neg X, \Gamma \rightarrow \Delta}$$

$$(\forall \rightarrow) \quad \frac{[A(x \parallel t)], \forall x A, \Gamma \rightarrow \Delta}{\forall x A, \Gamma \rightarrow \Delta}$$

$$(\exists \rightarrow) \quad \frac{A, \Gamma \rightarrow \Delta}{\exists x A, \Gamma \rightarrow \Delta} \quad (x \notin \text{Par}(\Gamma, \Delta))$$

$$(\rightarrow \forall) \quad \frac{\Gamma \rightarrow \Delta, A}{\Gamma \rightarrow \Delta, \forall x A} \quad (x \notin \text{Par}(\Gamma, \Delta))$$

$$(\rightarrow \exists) \quad \frac{\Gamma \rightarrow \Delta, [A(x \parallel t)], \exists x A}{\Gamma \rightarrow \Delta, \exists x A}$$

Egyszerű levezetések

Bizonyítsuk a következő szekvent helyességét: $\longrightarrow A \supset A$

Egyszerű levezetések

Bizonyítsuk a következő szekvent helyességét: $\longrightarrow A \supset A$

$$\longrightarrow A \supset A$$

Egyszerű levezetések

Bizonyítsuk a következő szekvent helyességét: $\rightarrow A \supset A$

$$(\rightarrow \supset) \frac{}{\rightarrow A \supset A}$$

Egyszerű levezetések

Bizonyítsuk a következő szekvent helyességét: $\longrightarrow A \supset A$

$$(\rightarrow \supset) \frac{A \longrightarrow A}{\longrightarrow A \supset A}$$

Egyszerű levezetések

Bizonyítsuk a következő szekvent helyességét: $\longrightarrow A \supset A$

$$(\rightarrow \supset) \frac{\frac{\checkmark}{A \longrightarrow A}}{\longrightarrow A \supset A}$$

Egyszerű levezetések

Bizonyítsuk a következő szekvent helyességét: $A \longrightarrow \neg\neg A$

Bizonyítsuk a következő szekvent helyességét: $\neg\neg A \longrightarrow A$

Egyszerű levezetések

Bizonyítsuk a következő szekvent helyességét: $A \longrightarrow \neg\neg A$

$$A \longrightarrow \neg\neg A$$

Bizonyítsuk a következő szekvent helyességét: $\neg\neg A \longrightarrow A$

Egyszerű levezetések

Bizonyítsuk a következő szekvent helyességét: $A \longrightarrow \neg\neg A$

$$(\rightarrow \neg) \frac{}{A \longrightarrow \neg\neg A}$$

Bizonyítsuk a következő szekvent helyességét: $\neg\neg A \longrightarrow A$

Egyszerű levezetések

Bizonyítsuk a következő szekvent helyességét: $A \longrightarrow \neg\neg A$

$$(\rightarrow \neg) \frac{A, \neg A \longrightarrow}{A \longrightarrow \neg\neg A}$$

Bizonyítsuk a következő szekvent helyességét: $\neg\neg A \longrightarrow A$

Egyszerű levezetések

Bizonyítsuk a következő szekvent helyességét: $A \longrightarrow \neg\neg A$

$$\begin{array}{c} (\neg \rightarrow) \frac{}{A, \neg A \longrightarrow} \\ (\rightarrow \neg) \frac{}{A \longrightarrow \neg\neg A} \end{array}$$

Bizonyítsuk a következő szekvent helyességét: $\neg\neg A \longrightarrow A$

Egyszerű levezetések

Bizonyítsuk a következő szekvent helyességét: $A \longrightarrow \neg\neg A$

$$\begin{array}{c} (\neg \rightarrow) \frac{A \longrightarrow A}{A, \neg A \longrightarrow} \\ (\rightarrow \neg) \frac{A, \neg A \longrightarrow}{A \longrightarrow \neg\neg A} \end{array}$$

Bizonyítsuk a következő szekvent helyességét: $\neg\neg A \longrightarrow A$

Egyszerű levezetések

Bizonyítsuk a következő szekvent helyességét: $A \longrightarrow \neg\neg A$

$$\begin{array}{c} \frac{\checkmark}{A \longrightarrow A} \\ (\neg \rightarrow) \frac{A \longrightarrow A}{A, \neg A \longrightarrow} \\ (\rightarrow \neg) \frac{A, \neg A \longrightarrow}{A \longrightarrow \neg\neg A} \end{array}$$

Bizonyítsuk a következő szekvent helyességét: $\neg\neg A \longrightarrow A$

Egyszerű levezetések

Bizonyítsuk a következő szekvent helyességét: $A \longrightarrow \neg\neg A$

$$\begin{array}{c} \frac{\checkmark}{A \longrightarrow A} \\ (\neg \rightarrow) \frac{A \longrightarrow A}{A, \neg A \longrightarrow} \\ (\rightarrow \neg) \frac{A, \neg A \longrightarrow}{A \longrightarrow \neg\neg A} \end{array}$$

Bizonyítsuk a következő szekvent helyességét: $\neg\neg A \longrightarrow A$

$$\neg\neg A \longrightarrow A$$

Egyszerű levezetések

Bizonyítsuk a következő szekvent helyességét: $A \longrightarrow \neg\neg A$

$$\begin{array}{c} \frac{\checkmark}{A \longrightarrow A} \\ (\neg \rightarrow) \frac{A, \neg A \longrightarrow}{A \longrightarrow \neg\neg A} \end{array}$$

Bizonyítsuk a következő szekvent helyességét: $\neg\neg A \longrightarrow A$

$$(\neg \rightarrow) \frac{}{\neg\neg A \longrightarrow A}$$

Egyszerű levezetések

Bizonyítsuk a következő szekvent helyességét: $A \longrightarrow \neg\neg A$

$$\begin{array}{c} \frac{\checkmark}{A \longrightarrow A} \\ (\neg \rightarrow) \frac{A, \neg A \longrightarrow}{A \longrightarrow \neg\neg A} \end{array}$$

Bizonyítsuk a következő szekvent helyességét: $\neg\neg A \longrightarrow A$

$$(\neg \rightarrow) \frac{\longrightarrow A, \neg A}{\neg\neg A \longrightarrow A}$$

Egyszerű levezetések

Bizonyítsuk a következő szekvent helyességét: $A \longrightarrow \neg\neg A$

$$\begin{array}{c} \frac{\checkmark}{A \longrightarrow A} \\ (\neg \rightarrow) \frac{A \longrightarrow A}{A, \neg A \longrightarrow} \\ (\rightarrow \neg) \frac{A, \neg A \longrightarrow}{A \longrightarrow \neg\neg A} \end{array}$$

Bizonyítsuk a következő szekvent helyességét: $\neg\neg A \longrightarrow A$

$$\begin{array}{c} (\rightarrow \neg) \frac{}{\longrightarrow A, \neg A} \\ (\neg \rightarrow) \frac{\longrightarrow A, \neg A}{\neg\neg A \longrightarrow A} \end{array}$$

Egyszerű levezetések

Bizonyítsuk a következő szekvent helyességét: $A \longrightarrow \neg\neg A$

$$\begin{array}{c} \frac{\checkmark}{A \longrightarrow A} \\ (\neg \rightarrow) \frac{A \longrightarrow A}{A, \neg A \longrightarrow} \\ (\rightarrow \neg) \frac{A, \neg A \longrightarrow}{A \longrightarrow \neg\neg A} \end{array}$$

Bizonyítsuk a következő szekvent helyességét: $\neg\neg A \longrightarrow A$

$$\begin{array}{c} (\rightarrow \neg) \frac{A \longrightarrow A}{\longrightarrow A, \neg A} \\ (\neg \rightarrow) \frac{\longrightarrow A, \neg A}{\neg\neg A \longrightarrow A} \end{array}$$

Egyszerű levezetések

Bizonyítsuk a következő szekvent helyességét: $A \longrightarrow \neg\neg A$

$$\begin{array}{c} \frac{\checkmark}{A \longrightarrow A} \\ (\neg \rightarrow) \frac{}{A, \neg A \longrightarrow} \\ (\rightarrow \neg) \frac{}{A \longrightarrow \neg\neg A} \end{array}$$

Bizonyítsuk a következő szekvent helyességét: $\neg\neg A \longrightarrow A$

$$\begin{array}{c} \frac{\checkmark}{A \longrightarrow A} \\ (\rightarrow \neg) \frac{}{\longrightarrow A, \neg A} \\ (\neg \rightarrow) \frac{}{\neg\neg A \longrightarrow A} \end{array}$$

1.feladat

Bizonyítsuk a következő szekvent helyességét: $\neg(A \supset B) \longrightarrow \neg A \vee \neg B$

$$\neg(A \supset B) \longrightarrow \neg A \vee \neg B$$

1.feladat

Bizonyítsuk a következő szekvent helyességét: $\neg(A \supset B) \longrightarrow \neg A \vee \neg B$

$$(\rightarrow \vee) \frac{}{\neg(A \supset B) \longrightarrow \neg A \vee \neg B}$$

1.feladat

Bizonyítsuk a következő szekvent helyességét: $\neg(A \supset B) \longrightarrow \neg A \vee \neg B$

$$(\rightarrow \vee) \frac{\neg(A \supset B) \longrightarrow \neg A, \neg B}{\neg(A \supset B) \longrightarrow \neg A \vee \neg B}$$

1.feladat

Bizonyítsuk a következő szekvent helyességét: $\neg(A \supset B) \longrightarrow \neg A \vee \neg B$

$$\begin{array}{c} (\neg \rightarrow) \frac{}{\neg(A \supset B) \longrightarrow \neg A, \neg B} \\ (\rightarrow \vee) \frac{}{\neg(A \supset B) \longrightarrow \neg A \vee \neg B} \end{array}$$

1.feladat

Bizonyítsuk a következő szekvent helyességét: $\neg(A \supset B) \longrightarrow \neg A \vee \neg B$

$$\begin{array}{c} (\neg \rightarrow) \frac{\longrightarrow \neg A, \neg B, A \supset B}{\neg(A \supset B) \longrightarrow \neg A, \neg B} \\ (\rightarrow \vee) \frac{(\neg \rightarrow) \frac{\longrightarrow \neg A, \neg B, A \supset B}{\neg(A \supset B) \longrightarrow \neg A, \neg B}}{\neg(A \supset B) \longrightarrow \neg A \vee \neg B} \end{array}$$

1.feladat

Bizonyítsuk a következő szekvent helyességét: $\neg(A \supset B) \longrightarrow \neg A \vee \neg B$

$$\begin{array}{c} (\rightarrow \supset) \frac{}{\longrightarrow \neg A, \neg B, A \supset B} \\ (\neg \rightarrow) \frac{}{\neg(A \supset B) \longrightarrow \neg A, \neg B} \\ (\rightarrow \vee) \frac{}{\neg(A \supset B) \longrightarrow \neg A \vee \neg B} \end{array}$$

1.feladat

Bizonyítsuk a következő szekvent helyességét: $\neg(A \supset B) \longrightarrow \neg A \vee \neg B$

$$\begin{array}{c} (\rightarrow \supset) \frac{A \longrightarrow \neg A, \neg B, B}{\longrightarrow \neg A, \neg B, A \supset B} \\ (\neg \rightarrow) \frac{\longrightarrow \neg A, \neg B, A \supset B}{\neg(A \supset B) \longrightarrow \neg A, \neg B} \\ (\rightarrow \vee) \frac{\neg(A \supset B) \longrightarrow \neg A, \neg B}{\neg(A \supset B) \longrightarrow \neg A \vee \neg B} \end{array}$$

1.feladat

Bizonyítsuk a következő szekvent helyességét: $\neg(A \supset B) \longrightarrow \neg A \vee \neg B$

$$\begin{array}{c} (\rightarrow \neg) \frac{}{A \longrightarrow \neg A, \neg B, B} \\ (\rightarrow \supset) \frac{}{\longrightarrow \neg A, \neg B, A \supset B} \\ (\neg \rightarrow) \frac{}{\neg(A \supset B) \longrightarrow \neg A, \neg B} \\ (\rightarrow \vee) \frac{}{\neg(A \supset B) \longrightarrow \neg A \vee \neg B} \end{array}$$

1.feladat

Bizonyítsuk a következő szekvent helyességét: $\neg(A \supset B) \longrightarrow \neg A \vee \neg B$

$$\begin{array}{c} (\rightarrow \neg) \frac{A, B \longrightarrow \neg A, B}{A \longrightarrow \neg A, \neg B, B} \\ (\rightarrow \supset) \frac{A \longrightarrow \neg A, \neg B, B}{\longrightarrow \neg A, \neg B, A \supset B} \\ (\neg \rightarrow) \frac{\longrightarrow \neg A, \neg B, A \supset B}{\neg(A \supset B) \longrightarrow \neg A, \neg B} \\ (\rightarrow \vee) \frac{\neg(A \supset B) \longrightarrow \neg A, \neg B}{\neg(A \supset B) \longrightarrow \neg A \vee \neg B} \end{array}$$

1.feladat

Bizonyítsuk a következő szekvent helyességét: $\neg(A \supset B) \longrightarrow \neg A \vee \neg B$

$$\begin{array}{c} \checkmark \\ \hline A, B \longrightarrow \neg A, B \\ (\rightarrow \neg) \frac{}{A \longrightarrow \neg A, \neg B, B} \\ (\rightarrow \supset) \frac{}{\longrightarrow \neg A, \neg B, A \supset B} \\ (\neg \rightarrow) \frac{}{\neg(A \supset B) \longrightarrow \neg A, \neg B} \\ (\rightarrow \vee) \frac{}{\neg(A \supset B) \longrightarrow \neg A \vee \neg B} \end{array}$$

2. feladat

Bizonyítsuk a következő szekventet: $(A \vee B) \supset C \longrightarrow (A \supset C) \wedge (\neg B \vee C)$

Levezetés C-kalkulusban:

2. feladat

Bizonyítsuk a következő szekventet: $(A \vee B) \supset C \longrightarrow (A \supset C) \wedge (\neg B \vee C)$

Levezetés C-kalkulusban:

$$(A \vee B) \supset C \longrightarrow (A \supset C) \wedge (\neg B \vee C)$$

2. feladat

Bizonyítsuk a következő szekventet: $(A \vee B) \supset C \longrightarrow (A \supset C) \wedge (\neg B \vee C)$

Levezetés C-kalkulusban:

$$(\rightarrow \wedge) \frac{}{(A \vee B) \supset C \longrightarrow (A \supset C) \wedge (\neg B \vee C)}$$

2. feladat

Bizonyítsuk a következő szekventet: $(A \vee B) \supset C \longrightarrow (A \supset C) \wedge (\neg B \vee C)$

Levezetés C-kalkulusban:

$$(\rightarrow \wedge) \frac{(A \vee B) \supset C \longrightarrow A \supset C}{(A \vee B) \supset C \longrightarrow (A \supset C) \wedge (\neg B \vee C)}$$

2. feladat

Bizonyítsuk a következő szekventet: $(A \vee B) \supset C \longrightarrow (A \supset C) \wedge (\neg B \vee C)$

Levezetés C-kalkulusban:

$$(\rightarrow \wedge) \frac{(A \vee B) \supset C \longrightarrow A \supset C \qquad (A \vee B) \supset C \longrightarrow \neg B \vee C}{(A \vee B) \supset C \longrightarrow (A \supset C) \wedge (\neg B \vee C)}$$

2. feladat

Bizonyítsuk a következő szekventet: $(A \vee B) \supset C \longrightarrow (A \supset C) \wedge (\neg B \vee C)$

Levezetés C-kalkulusban:

$$(\rightarrow \wedge) \frac{(A \vee B) \supset C \longrightarrow A \supset C \qquad \frac{\dots}{(A \vee B) \supset C \longrightarrow \neg B \vee C}}{(A \vee B) \supset C \longrightarrow (A \supset C) \wedge (\neg B \vee C)}$$

2. feladat

Bizonyítsuk a következő szekventet: $(A \vee B) \supset C \longrightarrow (A \supset C) \wedge (\neg B \vee C)$

Levezetés C-kalkulusban:

$$\begin{array}{c} (\supset \rightarrow) \frac{\frac{(\rightarrow \wedge) \frac{(A \vee B) \supset C \longrightarrow A \supset C}{(A \vee B) \supset C \longrightarrow (A \supset C) \wedge (\neg B \vee C)}}{(A \vee B) \supset C \longrightarrow \neg B \vee C}}{(A \vee B) \supset C \longrightarrow (A \supset C) \wedge (\neg B \vee C)} \end{array}$$

2. feladat

Bizonyítsuk a következő szekventet: $(A \vee B) \supset C \longrightarrow (A \supset C) \wedge (\neg B \vee C)$

Levezetés C-kalkulusban:

$$\begin{array}{c} (\supset \rightarrow) \frac{\longrightarrow A \vee B, A \supset C}{(\rightarrow \wedge) \frac{(A \vee B) \supset C \longrightarrow A \supset C \quad \frac{\dots}{(A \vee B) \supset C \longrightarrow \neg B \vee C}}{(A \vee B) \supset C \longrightarrow (A \supset C) \wedge (\neg B \vee C)}} \end{array}$$

2. feladat

Bizonyítsuk a következő szekventet: $(A \vee B) \supset C \longrightarrow (A \supset C) \wedge (\neg B \vee C)$

Levezetés C-kalkulusban:

$$\begin{array}{c} (\supset \rightarrow) \frac{\frac{\longrightarrow A \vee B, A \supset C \quad C \longrightarrow A \supset C}{(A \vee B) \supset C \longrightarrow A \supset C} \quad \frac{\dots}{(A \vee B) \supset C \longrightarrow \neg B \vee C}}{(\rightarrow \wedge) \frac{(A \vee B) \supset C \longrightarrow A \supset C \quad (A \vee B) \supset C \longrightarrow \neg B \vee C}{(A \vee B) \supset C \longrightarrow (A \supset C) \wedge (\neg B \vee C)}} \end{array}$$

2. feladat

Bizonyítsuk a következő szekventet: $(A \vee B) \supset C \longrightarrow (A \supset C) \wedge (\neg B \vee C)$

Levezetés C-kalkulusban:

$$\begin{array}{c} (\rightarrow \vee) \frac{}{\longrightarrow A \vee B, A \supset C} \quad C \longrightarrow A \supset C \quad \dots \\ (\supset \rightarrow) \frac{}{\longrightarrow A \vee B, A \supset C} \quad \frac{}{C \longrightarrow A \supset C} \quad \frac{}{\dots} \\ (\rightarrow \wedge) \frac{(A \vee B) \supset C \longrightarrow A \supset C \quad (A \vee B) \supset C \longrightarrow \neg B \vee C}{(A \vee B) \supset C \longrightarrow (A \supset C) \wedge (\neg B \vee C)} \end{array}$$

2. feladat

Bizonyítsuk a következő szekventet: $(A \vee B) \supset C \longrightarrow (A \supset C) \wedge (\neg B \vee C)$

Levezetés C-kalkulusban:

$$\begin{array}{c} \begin{array}{c} (\rightarrow \vee) \frac{\longrightarrow A, B, A \supset C}{\longrightarrow A \vee B, A \supset C} \\ (\supset \rightarrow) \frac{\quad C \longrightarrow A \supset C}{(A \vee B) \supset C \longrightarrow A \supset C} \end{array} \quad \frac{\dots}{(A \vee B) \supset C \longrightarrow \neg B \vee C} \\ (\rightarrow \wedge) \frac{\quad}{(A \vee B) \supset C \longrightarrow (A \supset C) \wedge (\neg B \vee C)} \end{array}$$

2. feladat

Bizonyítsuk a következő szekventet: $(A \vee B) \supset C \longrightarrow (A \supset C) \wedge (\neg B \vee C)$

Levezetés C-kalkulusban:

$$\begin{array}{c} (\rightarrow \supset) \frac{}{\longrightarrow A, B, A \supset C} \\ (\rightarrow \vee) \frac{}{\longrightarrow A \vee B, A \supset C} \\ (\supset \rightarrow) \frac{}{(A \vee B) \supset C \longrightarrow A \supset C} \quad \frac{}{(A \vee B) \supset C \longrightarrow \neg B \vee C} \quad \dots \\ (\rightarrow \wedge) \frac{(A \vee B) \supset C \longrightarrow A \supset C \quad (A \vee B) \supset C \longrightarrow \neg B \vee C}{(A \vee B) \supset C \longrightarrow (A \supset C) \wedge (\neg B \vee C)} \end{array}$$

2. feladat

Bizonyítsuk a következő szekventet: $(A \vee B) \supset C \longrightarrow (A \supset C) \wedge (\neg B \vee C)$

Levezetés C-kalkulusban:

$$\begin{array}{c} (\rightarrow \supset) \frac{A \longrightarrow A, B, C}{\longrightarrow A, B, A \supset C} \\ (\rightarrow \vee) \frac{\longrightarrow A, B, A \supset C}{\longrightarrow A \vee B, A \supset C} \\ (\supset \rightarrow) \frac{\quad C \longrightarrow A \supset C \quad \quad \quad \dots}{(A \vee B) \supset C \longrightarrow \neg B \vee C} \\ (\rightarrow \wedge) \frac{(A \vee B) \supset C \longrightarrow A \supset C \quad (A \vee B) \supset C \longrightarrow \neg B \vee C}{(A \vee B) \supset C \longrightarrow (A \supset C) \wedge (\neg B \vee C)} \end{array}$$

2. feladat

Bizonyítsuk a következő szekventet: $(A \vee B) \supset C \longrightarrow (A \supset C) \wedge (\neg B \vee C)$

Levezetés C-kalkulusban:

$$\begin{array}{c} \frac{\frac{\frac{\checkmark}{A \longrightarrow A, B, C}}{(\rightarrow \supset) \longrightarrow A, B, A \supset C}}{(\rightarrow \vee) \longrightarrow A \vee B, A \supset C} \quad \frac{C \longrightarrow A \supset C}{(\rightarrow \wedge) \frac{(A \vee B) \supset C \longrightarrow A \supset C}{(A \vee B) \supset C \longrightarrow (A \supset C) \wedge (\neg B \vee C)}} \quad \frac{\dots}{(A \vee B) \supset C \longrightarrow \neg B \vee C} \end{array}$$

2. feladat

Bizonyítsuk a következő szekventet: $(A \vee B) \supset C \longrightarrow (A \supset C) \wedge (\neg B \vee C)$

Levezetés C-kalkulusban:

$$\begin{array}{c} \frac{\frac{\frac{\checkmark}{A \longrightarrow A, B, C}}{(\rightarrow \supset) \longrightarrow A, B, A \supset C}}{(\rightarrow \vee) \longrightarrow A \vee B, A \supset C} \quad (\rightarrow \supset) \frac{}{C \longrightarrow A \supset C} \quad \frac{}{\dots} \\ (\rightarrow \supset) \frac{(\rightarrow \vee) \longrightarrow A \vee B, A \supset C \quad (\rightarrow \supset) C \longrightarrow A \supset C}{(A \vee B) \supset C \longrightarrow A \supset C} \quad \frac{}{(A \vee B) \supset C \longrightarrow \neg B \vee C} \\ (\rightarrow \wedge) \frac{(A \vee B) \supset C \longrightarrow A \supset C \quad (A \vee B) \supset C \longrightarrow \neg B \vee C}{(A \vee B) \supset C \longrightarrow (A \supset C) \wedge (\neg B \vee C)} \end{array}$$

2. feladat

Bizonyítsuk a következő szekventet: $(A \vee B) \supset C \longrightarrow (A \supset C) \wedge (\neg B \vee C)$

Levezetés C-kalkulusban:

$$\begin{array}{c} \frac{\frac{\frac{\checkmark}{A \longrightarrow A, B, C}}{(\rightarrow \supset) \frac{\longrightarrow A, B, A \supset C}}{(\rightarrow \vee) \frac{\longrightarrow A \vee B, A \supset C}}{(\rightarrow \supset) \frac{(A \vee B) \supset C \longrightarrow A \supset C}}{(\rightarrow \wedge) \frac{(A \vee B) \supset C \longrightarrow (A \supset C) \wedge (\neg B \vee C)}{(\rightarrow \supset) \frac{A, C \longrightarrow C}{C \longrightarrow A \supset C}} \quad \frac{\dots}{(A \vee B) \supset C \longrightarrow \neg B \vee C} \end{array}$$

2. feladat

Bizonyítsuk a következő szekventet: $(A \vee B) \supset C \longrightarrow (A \supset C) \wedge (\neg B \vee C)$

Levezetés C-kalkulusban:

$$\begin{array}{c} \frac{\frac{\frac{\checkmark}{A \longrightarrow A, B, C}}{(\rightarrow \supset) \longrightarrow A, B, A \supset C}}{(\rightarrow \vee) \longrightarrow A \vee B, A \supset C} \quad \frac{\frac{\frac{\checkmark}{A, C \longrightarrow C}}{(\rightarrow \supset) C \longrightarrow A \supset C}}{\dots} \\ (\rightarrow \wedge) \frac{(A \vee B) \supset C \longrightarrow A \supset C \quad (A \vee B) \supset C \longrightarrow \neg B \vee C}{(A \vee B) \supset C \longrightarrow (A \supset C) \wedge (\neg B \vee C)} \end{array}$$

2. feladat

Bizonyítsuk a következő szekventet: $(A \vee B) \supset C \longrightarrow (A \supset C) \wedge (\neg B \vee C)$

Levezetés C-kalkulusban:

$$(\rightarrow \wedge) \frac{\frac{\dots}{(A \vee B) \supset C \longrightarrow A \supset C} \quad (A \vee B) \supset C \longrightarrow \neg B \vee C}{(A \vee B) \supset C \longrightarrow (A \supset C) \wedge (\neg B \vee C)}$$

2. feladat

Bizonyítsuk a következő szekventet: $(A \vee B) \supset C \longrightarrow (A \supset C) \wedge (\neg B \vee C)$

Levezetés C-kalkulusban:

$$\frac{(\rightarrow \wedge) \frac{\overline{\overline{\overline{(A \vee B) \supset C} \longrightarrow A \supset C}}}{(A \vee B) \supset C \longrightarrow A \supset C} \quad (\rightarrow \vee) \frac{\overline{(A \vee B) \supset C \longrightarrow \neg B \vee C}}{(A \vee B) \supset C \longrightarrow (A \supset C) \wedge (\neg B \vee C)}}{(A \vee B) \supset C \longrightarrow (A \supset C) \wedge (\neg B \vee C)}$$

2. feladat

Bizonyítsuk a következő szekventet: $(A \vee B) \supset C \longrightarrow (A \supset C) \wedge (\neg B \vee C)$

Levezetés C-kalkulusban:

$$\begin{array}{c} \frac{\dots}{(A \vee B) \supset C \longrightarrow A \supset C} \quad (\rightarrow \vee) \frac{(A \vee B) \supset C \longrightarrow \neg B, C}{(A \vee B) \supset C \longrightarrow \neg B \vee C} \\ (\rightarrow \wedge) \frac{}{(A \vee B) \supset C \longrightarrow (A \supset C) \wedge (\neg B \vee C)} \end{array}$$

2. feladat

Bizonyítsuk a következő szekventet: $(A \vee B) \supset C \longrightarrow (A \supset C) \wedge (\neg B \vee C)$

Levezetés C-kalkulusban:

$$\frac{(\rightarrow \wedge) \frac{\overline{\dots} \quad \overline{(A \vee B) \supset C \longrightarrow A \supset C}}{\overline{(A \vee B) \supset C \longrightarrow A \supset C}} \quad (\rightarrow \vee) \frac{(\rightarrow \neg) \overline{(A \vee B) \supset C \longrightarrow \neg B, C}}{(\rightarrow \vee) \overline{(A \vee B) \supset C \longrightarrow \neg B \vee C}}}{(\rightarrow \wedge) \overline{(A \vee B) \supset C \longrightarrow (A \supset C) \wedge (\neg B \vee C)}}$$

2. feladat

Bizonyítsuk a következő szekventet: $(A \vee B) \supset C \longrightarrow (A \supset C) \wedge (\neg B \vee C)$

Levezetés C-kalkulusban:

$$\begin{array}{c} \frac{\dots}{(A \vee B) \supset C \longrightarrow A \supset C} \quad \frac{(\rightarrow \neg) \frac{(A \vee B) \supset C, B \longrightarrow C}{(A \vee B) \supset C \longrightarrow \neg B, C}}{(\rightarrow \vee) \frac{(A \vee B) \supset C \longrightarrow \neg B \vee C}{(A \vee B) \supset C \longrightarrow (A \supset C) \wedge (\neg B \vee C)}} \\ (\rightarrow \wedge) \frac{}{(A \vee B) \supset C \longrightarrow (A \supset C) \wedge (\neg B \vee C)} \end{array}$$

2. feladat

Bizonyítsuk a következő szekventet: $(A \vee B) \supset C \longrightarrow (A \supset C) \wedge (\neg B \vee C)$

Levezetés C-kalkulusban:

$$\begin{array}{c} \begin{array}{c} \dots \\ \hline (\rightarrow \wedge) \frac{(A \vee B) \supset C \longrightarrow A \supset C}{(A \vee B) \supset C \longrightarrow (A \supset C) \wedge (\neg B \vee C)} \end{array} \quad \begin{array}{c} (\supset \rightarrow) \frac{}{(A \vee B) \supset C, B \longrightarrow C} \\ (\rightarrow \neg) \frac{}{(A \vee B) \supset C \longrightarrow \neg B, C} \\ (\rightarrow \vee) \frac{}{(A \vee B) \supset C \longrightarrow \neg B \vee C} \end{array} \end{array}$$

2. feladat

Bizonyítsuk a következő szekventet: $(A \vee B) \supset C \longrightarrow (A \supset C) \wedge (\neg B \vee C)$

Levezetés C-kalkulusban:

$$\begin{array}{c} \begin{array}{c} \dots \\ (A \vee B) \supset C \longrightarrow A \supset C \end{array} \\ (\rightarrow \wedge) \frac{\quad}{(A \vee B) \supset C \longrightarrow (A \supset C) \wedge (\neg B \vee C)} \end{array} \quad \begin{array}{c} \frac{B \longrightarrow C, A \vee B}{(\supset \rightarrow)} \\ \frac{(\supset \rightarrow) \quad (A \vee B) \supset C, B \longrightarrow C}{(\rightarrow \neg)} \\ \frac{(\rightarrow \neg) \quad (A \vee B) \supset C \longrightarrow \neg B, C}{(\rightarrow \vee)} \\ \frac{(\rightarrow \vee) \quad (A \vee B) \supset C \longrightarrow \neg B \vee C}{(A \vee B) \supset C \longrightarrow (A \supset C) \wedge (\neg B \vee C)} \end{array}$$

2. feladat

Bizonyítsuk a következő szekventet: $(A \vee B) \supset C \longrightarrow (A \supset C) \wedge (\neg B \vee C)$

Levezetés C-kalkulusban:

$$\begin{array}{c} \begin{array}{c} \dots \\ \hline (\rightarrow \wedge) \frac{(A \vee B) \supset C \longrightarrow A \supset C}{(A \vee B) \supset C \longrightarrow (A \supset C) \wedge (\neg B \vee C)} \end{array} \quad \begin{array}{c} \frac{B \longrightarrow C, A \vee B \quad C, B \longrightarrow C}{(\rightarrow \rightarrow) \frac{(A \vee B) \supset C, B \longrightarrow C}{(\rightarrow \neg) \frac{(A \vee B) \supset C \longrightarrow \neg B, C}{(\rightarrow \vee) \frac{(A \vee B) \supset C \longrightarrow \neg B \vee C}{(A \vee B) \supset C \longrightarrow (A \supset C) \wedge (\neg B \vee C)}}} \end{array} \end{array}$$

2. feladat

Bizonyítsuk a következő szekventet: $(A \vee B) \supset C \longrightarrow (A \supset C) \wedge (\neg B \vee C)$

Levezetés C-kalkulusban:

$$\begin{array}{c} \begin{array}{c} \dots \\ \hline (\rightarrow \wedge) \frac{(A \vee B) \supset C \longrightarrow A \supset C}{(A \vee B) \supset C \longrightarrow (A \supset C) \wedge (\neg B \vee C)} \end{array} \quad \begin{array}{c} \begin{array}{c} \hline \frac{B \longrightarrow C, A \vee B}{(A \vee B) \supset C, B \longrightarrow C} \\ (\rightarrow \neg) \frac{(A \vee B) \supset C, B \longrightarrow C}{(A \vee B) \supset C \longrightarrow \neg B, C} \\ (\rightarrow \vee) \frac{(A \vee B) \supset C \longrightarrow \neg B, C}{(A \vee B) \supset C \longrightarrow \neg B \vee C} \end{array} \\ \hline \frac{\begin{array}{c} \frac{B \longrightarrow C, A \vee B}{(A \vee B) \supset C, B \longrightarrow C} \quad \frac{\checkmark}{C, B \longrightarrow C}}{(A \vee B) \supset C, B \longrightarrow C} \end{array}}{(A \vee B) \supset C \longrightarrow (A \supset C) \wedge (\neg B \vee C)} \end{array}$$

2. feladat

Bizonyítsuk a következő szekventet: $(A \vee B) \supset C \longrightarrow (A \supset C) \wedge (\neg B \vee C)$

Levezetés C-kalkulusban:

$$\begin{array}{c} \begin{array}{c} \dots \\ (\rightarrow \wedge) \frac{(A \vee B) \supset C \longrightarrow A \supset C}{(A \vee B) \supset C \longrightarrow (A \supset C) \wedge (\neg B \vee C)} \end{array} \quad \begin{array}{c} (\rightarrow \vee) \frac{B \longrightarrow C, A \vee B}{(A \vee B) \supset C, B \longrightarrow C} \quad \frac{C, B \longrightarrow C}{(A \vee B) \supset C \longrightarrow \neg B, C} \quad \checkmark \\ (\supset \rightarrow) \frac{(\rightarrow \neg) \frac{(A \vee B) \supset C, B \longrightarrow C}{(A \vee B) \supset C \longrightarrow \neg B, C}}{(\rightarrow \vee) \frac{(A \vee B) \supset C \longrightarrow \neg B \vee C}{(A \vee B) \supset C \longrightarrow (A \supset C) \wedge (\neg B \vee C)}} \end{array} \end{array}$$

2. feladat

Bizonyítsuk a következő szekventet: $(A \vee B) \supset C \longrightarrow (A \supset C) \wedge (\neg B \vee C)$

Levezetés C-kalkulusban:

$$\begin{array}{c} \begin{array}{c} \dots \\ \hline (\rightarrow \wedge) \frac{(A \vee B) \supset C \longrightarrow A \supset C}{(A \vee B) \supset C \longrightarrow (A \supset C) \wedge (\neg B \vee C)} \end{array} \quad \begin{array}{c} (\rightarrow \vee) \frac{B \longrightarrow C, A, B}{B \longrightarrow C, A \vee B} \quad \frac{\checkmark}{C, B \longrightarrow C} \\ (\supset \rightarrow) \frac{}{(A \vee B) \supset C, B \longrightarrow C} \\ (\rightarrow \neg) \frac{}{(A \vee B) \supset C \longrightarrow \neg B, C} \\ (\rightarrow \vee) \frac{}{(A \vee B) \supset C \longrightarrow \neg B \vee C} \end{array} \end{array}$$

2. feladat

Bizonyítsuk a következő szekvenetet: $(A \vee B) \supset C \longrightarrow (A \supset C) \wedge (\neg B \vee C)$

Levezetés C-kalkulusban:

$$\begin{array}{c}
 \begin{array}{c}
 \text{...} \\
 \hline
 (\rightarrow \wedge) \quad (A \vee B) \supset \bar{C} \rightarrow A \supset C
 \end{array}
 \quad
 \begin{array}{c}
 \checkmark \\
 \hline
 (\rightarrow \vee) \quad \frac{B \rightarrow C, A, B}{B \rightarrow C, A \vee B}
 \end{array}
 \quad
 \begin{array}{c}
 \checkmark \\
 \hline
 (\supset \rightarrow) \quad \frac{C, B \rightarrow C}{(A \vee B) \supset C, B \rightarrow C}
 \end{array}
 \quad
 \begin{array}{c}
 (\rightarrow \neg) \quad \frac{(A \vee B) \supset C, B \rightarrow C}{(A \vee B) \supset C \rightarrow \neg B, C}
 \end{array}
 \quad
 \begin{array}{c}
 (\rightarrow \vee) \quad \frac{(A \vee B) \supset C \rightarrow \neg B, C}{(A \vee B) \supset C \rightarrow \neg B \vee C}
 \end{array}
 \\
 \hline
 (A \vee B) \supset C \rightarrow (A \supset C) \wedge (\neg B \vee C)
 \end{array}$$

3. feladat

Bizonyítsuk a következő szekventet: $\neg \forall x P(x) \vee R(y) \longrightarrow \exists x (P(x) \supset R(y))$

3. feladat

Bizonyítsuk a következő szekventet: $\neg\forall x P(x) \vee R(y) \longrightarrow \exists x (P(x) \supset R(y))$

Levezetés C-kalkulusban:

3. feladat

Bizonyítsuk a következő szekventet: $\neg\forall x P(x) \vee R(y) \longrightarrow \exists x (P(x) \supset R(y))$

Levezetés C-kalkulusban:

$$\neg\forall x P(x) \vee R(y) \longrightarrow \exists x (P(x) \supset R(y))$$

3. feladat

Bizonyítsuk a következő szekventet: $\neg\forall x P(x) \vee R(y) \longrightarrow \exists x(P(x) \supset R(y))$

Levezetés C-kalkulusban:

$$(\vee \rightarrow) \frac{}{\neg\forall x P(x) \vee R(y) \longrightarrow \exists x(P(x) \supset R(y))}$$

3. feladat

Bizonyítsuk a következő szekventet: $\neg\forall x P(x) \vee R(y) \longrightarrow \exists x(P(x) \supset R(y))$

Levezetés C-kalkulusban:

$$(\vee \rightarrow) \frac{\neg\forall x P(x) \longrightarrow \exists x(P(x) \supset R(y)) \qquad R(y) \longrightarrow \exists x(P(x) \supset R(y))}{\neg\forall x P(x) \vee R(y) \longrightarrow \exists x(P(x) \supset R(y))}$$

3. feladat

Bizonyítsuk a következő szekventet: $\neg\forall x P(x) \vee R(y) \longrightarrow \exists x(P(x) \supset R(y))$

Levezetés C-kalkulusban:

$$\begin{array}{c} \frac{}{(\vee \rightarrow) \frac{\overline{\neg\forall x P(x) \longrightarrow \exists x(P(x) \supset R(y))} \quad (\rightarrow \exists) \frac{}{\overline{R(y) \longrightarrow \exists x(P(x) \supset R(y))}}}{\neg\forall x P(x) \vee R(y) \longrightarrow \exists x(P(x) \supset R(y))}} \end{array}$$

3. feladat

Bizonyítsuk a következő szekventet: $\neg\forall x P(x) \vee R(y) \longrightarrow \exists x(P(x) \supset R(y))$

Levezetés C-kalkulusban:

$$\begin{array}{c} \frac{}{\neg\forall x P(x) \longrightarrow \exists x(P(x) \supset R(y))} \quad (\rightarrow \exists) \frac{R(y) \longrightarrow P(x) \supset R(y), \exists x(P(x) \supset R(y))}{R(y) \longrightarrow \exists x(P(x) \supset R(y))} \\ \hline (\vee \rightarrow) \frac{}{\neg\forall x P(x) \vee R(y) \longrightarrow \exists x(P(x) \supset R(y))} \end{array}$$

3. feladat

Bizonyítsuk a következő szekventet: $\neg\forall x P(x) \vee R(y) \longrightarrow \exists x(P(x) \supset R(y))$

Levezetés C-kalkulusban:

$$\begin{array}{c} \frac{}{(\neg\rightarrow\supset) \frac{R(y) \longrightarrow P(x) \supset R(y), \exists x(P(x) \supset R(y))}{R(y) \longrightarrow \exists x(P(x) \supset R(y))}} \\ \frac{}{(\neg\rightarrow\exists) \frac{R(y) \longrightarrow \exists x(P(x) \supset R(y))}{R(y) \longrightarrow \exists x(P(x) \supset R(y))}} \\ \frac{}{(\vee\rightarrow) \frac{\neg\forall x P(x) \longrightarrow \exists x(P(x) \supset R(y))}{\neg\forall x P(x) \vee R(y) \longrightarrow \exists x(P(x) \supset R(y))}} \end{array}$$

3. feladat

Bizonyítsuk a következő szekventet: $\neg\forall xP(x) \vee R(y) \longrightarrow \exists x(P(x) \supset R(y))$

Levezetés C-kalkulusban:

$$\begin{array}{c} \frac{}{(\neg\forall x) \frac{}{\neg\forall xP(x) \longrightarrow \exists x(P(x) \supset R(y))}} \quad \frac{(\rightarrow\supset) \frac{R(y), P(x) \longrightarrow R(y), \exists x(P(x) \supset R(y))}{R(y) \longrightarrow P(x) \supset R(y), \exists x(P(x) \supset R(y))}}{(\rightarrow\exists) \frac{R(y) \longrightarrow P(x) \supset R(y), \exists x(P(x) \supset R(y))}{R(y) \longrightarrow \exists x(P(x) \supset R(y))}} \\ \hline (\vee\rightarrow) \frac{}{\neg\forall xP(x) \vee R(y) \longrightarrow \exists x(P(x) \supset R(y))} \end{array}$$

3. feladat

Bizonyítsuk a következő szekventet: $\neg\forall x P(x) \vee R(y) \longrightarrow \exists x(P(x) \supset R(y))$

Levezetés C-kalkulusban:

$$\begin{array}{c} \begin{array}{c} (\neg \rightarrow) \frac{}{\neg\forall x P(x) \longrightarrow \exists x(P(x) \supset R(y))} \\ (\vee \rightarrow) \frac{}{\neg\forall x P(x) \vee R(y) \longrightarrow \exists x(P(x) \supset R(y))} \end{array} \qquad \begin{array}{c} \checkmark \\ \frac{R(y), P(x) \longrightarrow R(y), \exists x(P(x) \supset R(y))}{(\rightarrow \supset) \frac{R(y) \longrightarrow P(x) \supset R(y), \exists x(P(x) \supset R(y))}{(\rightarrow \exists) \frac{R(y) \longrightarrow \exists x(P(x) \supset R(y))}} \end{array} \end{array}$$

3. feladat

Bizonyítsuk a következő szekventet: $\neg\forall x P(x) \vee R(y) \longrightarrow \exists x(P(x) \supset R(y))$

Levezetés C-kalkulusban:

$$\begin{array}{c} \begin{array}{c} \frac{(\neg \rightarrow) \frac{\longrightarrow \exists x(P(x) \supset R(y)), \forall x P(x)}{\neg \forall x P(x) \longrightarrow \exists x(P(x) \supset R(y))}}{(\vee \rightarrow) \frac{\neg \forall x P(x) \longrightarrow \exists x(P(x) \supset R(y))}{\neg \forall x P(x) \vee R(y) \longrightarrow \exists x(P(x) \supset R(y))}} \end{array} \qquad \begin{array}{c} \frac{\frac{\frac{\checkmark}{R(y), P(x) \longrightarrow R(y), \exists x(P(x) \supset R(y))}}{(\rightarrow \supset) \frac{R(y), P(x) \longrightarrow R(y), \exists x(P(x) \supset R(y))}{R(y) \longrightarrow P(x) \supset R(y), \exists x(P(x) \supset R(y))}}}{(\rightarrow \exists) \frac{R(y) \longrightarrow P(x) \supset R(y), \exists x(P(x) \supset R(y))}{R(y) \longrightarrow \exists x(P(x) \supset R(y))}} \end{array} \end{array}$$

3. feladat

Bizonyítsuk a következő szekventet: $\neg\forall xP(x) \vee R(y) \longrightarrow \exists x(P(x) \supset R(y))$

Levezetés C-kalkulusban:

$$\begin{array}{c} \begin{array}{l} (\rightarrow \forall) \frac{\longrightarrow \exists x(P(x) \supset R(y)), \forall xP(x)}{\longrightarrow \exists x(P(x) \supset R(y))} \\ (\neg \rightarrow) \frac{\neg\forall xP(x) \longrightarrow \exists x(P(x) \supset R(y))}{\neg\forall xP(x) \longrightarrow \exists x(P(x) \supset R(y))} \\ (\vee \rightarrow) \frac{\neg\forall xP(x) \longrightarrow \exists x(P(x) \supset R(y))}{\neg\forall xP(x) \vee R(y) \longrightarrow \exists x(P(x) \supset R(y))} \end{array} \quad \begin{array}{l} \checkmark \\ \frac{R(y), P(x) \longrightarrow R(y), \exists x(P(x) \supset R(y))}{R(y) \longrightarrow P(x) \supset R(y), \exists x(P(x) \supset R(y))} \\ (\rightarrow \supset) \frac{R(y) \longrightarrow P(x) \supset R(y), \exists x(P(x) \supset R(y))}{R(y) \longrightarrow \exists x(P(x) \supset R(y))} \end{array} \end{array}$$

3. feladat

Bizonyítsuk a következő szekventet: $\neg\forall xP(x) \vee R(y) \longrightarrow \exists x(P(x) \supset R(y))$

Levezetés C-kalkulusban:

$$\begin{array}{c} \begin{array}{l} (\rightarrow \forall) \frac{\longrightarrow \exists x(P(x) \supset R(y)), P(x)}{\longrightarrow \exists x(P(x) \supset R(y)), \forall xP(x)} \\ (\neg \rightarrow) \frac{\neg\forall xP(x) \longrightarrow \exists x(P(x) \supset R(y))}{\neg\forall xP(x) \longrightarrow \exists x(P(x) \supset R(y))} \\ (\vee \rightarrow) \frac{\neg\forall xP(x) \longrightarrow \exists x(P(x) \supset R(y))}{\neg\forall xP(x) \vee R(y) \longrightarrow \exists x(P(x) \supset R(y))} \end{array} \quad \begin{array}{l} \checkmark \\ (\rightarrow \supset) \frac{R(y), P(x) \longrightarrow R(y), \exists x(P(x) \supset R(y))}{R(y) \longrightarrow P(x) \supset R(y), \exists x(P(x) \supset R(y))} \\ (\rightarrow \exists) \frac{R(y) \longrightarrow P(x) \supset R(y), \exists x(P(x) \supset R(y))}{R(y) \longrightarrow \exists x(P(x) \supset R(y))} \end{array} \end{array}$$

3. feladat

Bizonyítsuk a következő szekventet: $\neg\forall xP(x) \vee R(y) \longrightarrow \exists x(P(x) \supset R(y))$

Levezetés C-kalkulusban:

$$\begin{array}{c} (\rightarrow \exists) \frac{}{\longrightarrow \exists x(P(x) \supset R(y)), P(x)} \\ (\rightarrow \forall) \frac{}{\longrightarrow \exists x(P(x) \supset R(y)), \forall xP(x)} \\ (\neg \rightarrow) \frac{}{\neg\forall xP(x) \longrightarrow \exists x(P(x) \supset R(y))} \\ (\vee \rightarrow) \frac{}{\neg\forall xP(x) \vee R(y) \longrightarrow \exists x(P(x) \supset R(y))} \end{array} \quad \begin{array}{c} \checkmark \\ (\rightarrow \supset) \frac{R(y), P(x) \longrightarrow R(y), \exists x(P(x) \supset R(y))}{R(y) \longrightarrow P(x) \supset R(y), \exists x(P(x) \supset R(y))} \\ (\rightarrow \exists) \frac{R(y) \longrightarrow P(x) \supset R(y), \exists x(P(x) \supset R(y))}{R(y) \longrightarrow \exists x(P(x) \supset R(y))} \end{array}$$

3. feladat

Bizonyítsuk a következő szekventet: $\neg\forall xP(x) \vee R(y) \longrightarrow \exists x(P(x) \supset R(y))$

Levezetés C-kalkulusban:

$$\begin{array}{c} (\rightarrow \exists) \frac{\longrightarrow \exists x(P(x) \supset R(y)), P(x) \supset R(y), P(x)}{(\rightarrow \forall) \frac{\longrightarrow \exists x(P(x) \supset R(y)), P(x)}{\longrightarrow \exists x(P(x) \supset R(y)), \forall xP(x)}} \\ (\neg \rightarrow) \frac{\longrightarrow \exists x(P(x) \supset R(y)), \forall xP(x)}{\neg\forall xP(x) \longrightarrow \exists x(P(x) \supset R(y))} \\ (\vee \rightarrow) \frac{\neg\forall xP(x) \longrightarrow \exists x(P(x) \supset R(y))}{\neg\forall xP(x) \vee R(y) \longrightarrow \exists x(P(x) \supset R(y))} \end{array} \quad \begin{array}{c} \checkmark \\ (\rightarrow \supset) \frac{R(y), P(x) \longrightarrow R(y), \exists x(P(x) \supset R(y))}{R(y) \longrightarrow P(x) \supset R(y), \exists x(P(x) \supset R(y))} \\ (\rightarrow \exists) \frac{R(y) \longrightarrow P(x) \supset R(y), \exists x(P(x) \supset R(y))}{R(y) \longrightarrow \exists x(P(x) \supset R(y))} \end{array}$$

3. feladat

Bizonyítsuk a következő szekventet: $\neg\forall xP(x) \vee R(y) \longrightarrow \exists x(P(x) \supset R(y))$

Levezetés C-kalkulusban:

$$\begin{array}{c}
 (\rightarrow \supset) \frac{}{\longrightarrow \exists x(P(x) \supset R(y)), P(x) \supset R(y), P(x)} \\
 (\rightarrow \exists) \frac{}{\longrightarrow \exists x(P(x) \supset R(y)), P(x)} \\
 (\rightarrow \forall) \frac{}{\longrightarrow \exists x(P(x) \supset R(y)), P(x)} \\
 (\neg \rightarrow) \frac{}{\neg\forall xP(x) \longrightarrow \exists x(P(x) \supset R(y))} \\
 (\vee \rightarrow) \frac{}{\neg\forall xP(x) \vee R(y) \longrightarrow \exists x(P(x) \supset R(y))}
 \end{array}
 \quad
 \begin{array}{c}
 \checkmark \\
 \frac{}{R(y), P(x) \longrightarrow R(y), \exists x(P(x) \supset R(y))} \\
 (\rightarrow \supset) \frac{}{R(y) \longrightarrow P(x) \supset R(y), \exists x(P(x) \supset R(y))} \\
 (\rightarrow \exists) \frac{}{R(y) \longrightarrow \exists x(P(x) \supset R(y))}
 \end{array}$$

3. feladat

Bizonyítsuk a következő szekventet: $\neg\forall xP(x) \vee R(y) \longrightarrow \exists x(P(x) \supset R(y))$

Levezetés C-kalkulusban:

$$\begin{array}{c}
 (\rightarrow \supset) \frac{P(x) \longrightarrow \exists x(P(x) \supset R(y)), R(y), P(x)}{\longrightarrow \exists x(P(x) \supset R(y)), P(x) \supset R(y), P(x)} \\
 (\rightarrow \exists) \frac{\longrightarrow \exists x(P(x) \supset R(y)), P(x)}{\longrightarrow \exists x(P(x) \supset R(y)), \forall x P(x)} \\
 (\rightarrow \forall) \frac{\longrightarrow \exists x(P(x) \supset R(y)), \forall x P(x)}{\neg\forall x P(x) \longrightarrow \exists x(P(x) \supset R(y))} \\
 (\neg \rightarrow) \frac{\neg\forall x P(x) \longrightarrow \exists x(P(x) \supset R(y))}{\neg\forall x P(x) \vee R(y) \longrightarrow \exists x(P(x) \supset R(y))} \\
 (\vee \rightarrow) \frac{\neg\forall x P(x) \vee R(y) \longrightarrow \exists x(P(x) \supset R(y))}{\neg\forall x P(x) \vee R(y) \longrightarrow \exists x(P(x) \supset R(y))}
 \end{array}$$

3. feladat

Bizonyítsuk a következő szekventet: $\neg\forall xP(x) \vee R(y) \longrightarrow \exists x(P(x) \supset R(y))$

Levezetés C-kalkulusban:

$$\begin{array}{c}
 \begin{array}{c}
 \checkmark \\
 \hline
 P(x) \longrightarrow \exists x(P(x) \supset R(y)), R(y), P(x) \\
 \hline
 (\rightarrow \supset) \longrightarrow \exists x(P(x) \supset R(y)), P(x) \supset R(y), P(x) \\
 \hline
 (\rightarrow \exists) \longrightarrow \exists x(P(x) \supset R(y)), P(x) \\
 \hline
 (\rightarrow \forall) \longrightarrow \exists x(P(x) \supset R(y)), \forall xP(x) \\
 \hline
 (\neg \rightarrow) \neg\forall xP(x) \longrightarrow \exists x(P(x) \supset R(y)) \\
 \hline
 (\vee \rightarrow) \neg\forall xP(x) \vee R(y) \longrightarrow \exists x(P(x) \supset R(y))
 \end{array}
 \qquad
 \begin{array}{c}
 \checkmark \\
 \hline
 R(y), P(x) \longrightarrow R(y), \exists x(P(x) \supset R(y)) \\
 \hline
 (\rightarrow \supset) R(y) \longrightarrow P(x) \supset R(y), \exists x(P(x) \supset R(y)) \\
 \hline
 (\rightarrow \exists) R(y) \longrightarrow \exists x(P(x) \supset R(y))
 \end{array}
 \end{array}$$

Példa elakadásra + megoldása

Bizonyítsuk a következő szekventet: $\exists x(P(x) \wedge R(x)) \longrightarrow \exists xP(x) \wedge \exists xR(x)$

Példa elakadásra + megoldása

Bizonyítsuk a következő szekventet: $\exists x(P(x) \wedge R(x)) \longrightarrow \exists xP(x) \wedge \exists xR(x)$

$$\exists x(P(x) \wedge R(x)) \longrightarrow \exists xP(x) \wedge \exists xR(x)$$

Példa elakadásra + megoldása

Bizonyítsuk a következő szekventet: $\exists x(P(x) \wedge R(x)) \longrightarrow \exists xP(x) \wedge \exists xR(x)$

$$(\rightarrow \wedge) \frac{}{\exists x(P(x) \wedge R(x)) \longrightarrow \exists xP(x) \wedge \exists xR(x)}$$

Példa elakadásra + megoldása

Bizonyítsuk a következő szekventet: $\exists x(P(x) \wedge R(x)) \longrightarrow \exists xP(x) \wedge \exists xR(x)$

$$(\rightarrow \wedge) \frac{\exists x(P(x) \wedge R(x)) \longrightarrow \exists xP(x)}{\exists x(P(x) \wedge R(x)) \longrightarrow \exists xP(x) \wedge \exists xR(x)}$$

Példa elakadásra + megoldása

Bizonyítsuk a következő szekventet: $\exists x(P(x) \wedge R(x)) \longrightarrow \exists xP(x) \wedge \exists xR(x)$

$$(\rightarrow \wedge) \frac{\exists x(P(x) \wedge R(x)) \longrightarrow \exists xP(x) \qquad \exists x(P(x) \wedge R(x)) \longrightarrow \exists xR(x)}{\exists x(P(x) \wedge R(x)) \longrightarrow \exists xP(x) \wedge \exists xR(x)}$$

Példa elakadásra + megoldása

Bizonyítsuk a következő szekventet: $\exists x(P(x) \wedge R(x)) \longrightarrow \exists xP(x) \wedge \exists xR(x)$

$$\begin{array}{c} (\rightarrow \exists) \frac{\quad}{\exists x(P(x) \wedge R(x)) \longrightarrow \exists xP(x)} \qquad \exists x(P(x) \wedge R(x)) \longrightarrow \exists xR(x) \\ (\rightarrow \wedge) \frac{\quad}{\exists x(P(x) \wedge R(x)) \longrightarrow \exists xP(x) \wedge \exists xR(x)} \end{array}$$

Példa elakadásra + megoldása

Bizonyítsuk a következő szekventet: $\exists x(P(x) \wedge R(x)) \longrightarrow \exists xP(x) \wedge \exists xR(x)$

$$\begin{array}{l} (\rightarrow \exists) \frac{\exists x(P(x) \wedge R(x)) \longrightarrow \exists xP(x), P(x)}{\exists x(P(x) \wedge R(x)) \longrightarrow \exists xP(x)} \qquad \exists x(P(x) \wedge R(x)) \longrightarrow \exists xR(x) \\ (\rightarrow \wedge) \frac{\exists x(P(x) \wedge R(x)) \longrightarrow \exists xP(x) \qquad \exists x(P(x) \wedge R(x)) \longrightarrow \exists xR(x)}{\exists x(P(x) \wedge R(x)) \longrightarrow \exists xP(x) \wedge \exists xR(x)} \end{array}$$

Példa elakadásra + megoldása

Bizonyítsuk a következő szekventet: $\exists x(P(x) \wedge R(x)) \longrightarrow \exists xP(x) \wedge \exists xR(x)$

$$\begin{array}{c} \text{?} \\ \hline (\rightarrow \exists) \frac{\exists x(P(x) \wedge R(x)) \longrightarrow \exists xP(x), P(x)}{\exists x(P(x) \wedge R(x)) \longrightarrow \exists xP(x)} \quad \exists x(P(x) \wedge R(x)) \longrightarrow \exists xR(x) \\ (\rightarrow \wedge) \frac{\exists x(P(x) \wedge R(x)) \longrightarrow \exists xP(x) \quad \exists x(P(x) \wedge R(x)) \longrightarrow \exists xR(x)}{\exists x(P(x) \wedge R(x)) \longrightarrow \exists xP(x) \wedge \exists xR(x)} \end{array}$$

Példa elakadásra + megoldása

Bizonyítsuk a következő szekventet: $\exists x(P(x) \wedge R(x)) \longrightarrow \exists xP(x) \wedge \exists xR(x)$

$$\begin{array}{c} \text{?} \\ \hline \begin{array}{c} \exists x(P(x) \wedge R(x)) \longrightarrow \exists xP(x), P(x) \\ (\rightarrow \exists) \frac{\exists x(P(x) \wedge R(x)) \longrightarrow \exists xP(x)}{(\rightarrow \wedge) \frac{\exists x(P(x) \wedge R(x)) \longrightarrow \exists xP(x) \quad \exists x(P(x) \wedge R(x)) \longrightarrow \exists xR(x)}{\exists x(P(x) \wedge R(x)) \longrightarrow \exists xP(x) \wedge \exists xR(x)}} \end{array} \end{array}$$

Példa elakadásra + megoldása

Bizonyítsuk a következő szekventet: $\exists x(P(x) \wedge R(x)) \longrightarrow \exists xP(x) \wedge \exists xR(x)$

$$\begin{array}{c} \text{?} \\ \hline (\rightarrow \exists) \frac{\exists x(P(x) \wedge R(x)) \longrightarrow \exists xP(x), P(x)}{\exists x(P(x) \wedge R(x)) \longrightarrow \exists xP(x)} \quad (\rightarrow \exists) \frac{\exists x(P(x) \wedge R(x)) \longrightarrow \exists xR(x), R(y)}{\exists x(P(x) \wedge R(x)) \longrightarrow \exists xR(x)} \\ (\rightarrow \wedge) \frac{\exists x(P(x) \wedge R(x)) \longrightarrow \exists xP(x) \quad \exists x(P(x) \wedge R(x)) \longrightarrow \exists xR(x)}{\exists x(P(x) \wedge R(x)) \longrightarrow \exists xP(x) \wedge \exists xR(x)} \end{array}$$

Példa elakadásra + megoldása

Bizonyítsuk a következő szekventet: $\exists x(P(x) \wedge R(x)) \longrightarrow \exists xP(x) \wedge \exists xR(x)$

$$\begin{array}{c} \frac{\frac{(\rightarrow \exists) \frac{\frac{?}{\exists x(P(x) \wedge R(x)) \longrightarrow \exists xP(x), P(x)}}{\exists x(P(x) \wedge R(x)) \longrightarrow \exists xP(x)}}{(\rightarrow \wedge) \frac{\quad}{\exists x(P(x) \wedge R(x)) \longrightarrow \exists xP(x) \wedge \exists xR(x)}} \quad \frac{\frac{(\rightarrow \exists) \frac{\frac{...}{\exists x(P(x) \wedge R(x)) \longrightarrow \exists xR(x), R(y)}}{\exists x(P(x) \wedge R(x)) \longrightarrow \exists xR(x)}}{\quad} \end{array}$$

Példa elakadásra + megoldása

Bizonyítsuk a következő szekventet: $\exists x(P(x) \wedge R(x)) \longrightarrow \exists xP(x) \wedge \exists xR(x)$

$$\begin{array}{c} \text{?} \\ \hline (\rightarrow \exists) \frac{\exists x(P(x) \wedge R(x)) \longrightarrow \exists xP(x), P(x)}{\exists x(P(x) \wedge R(x)) \longrightarrow \exists xP(x)} \quad (\rightarrow \exists) \frac{\exists x(P(x) \wedge R(x)) \longrightarrow \exists xR(x), R(y)}{\exists x(P(x) \wedge R(x)) \longrightarrow \exists xR(x)} \\ \hline (\rightarrow \wedge) \frac{\exists x(P(x) \wedge R(x)) \longrightarrow \exists xP(x) \quad \exists x(P(x) \wedge R(x)) \longrightarrow \exists xR(x)}{\exists x(P(x) \wedge R(x)) \longrightarrow \exists xP(x) \wedge \exists xR(x)} \end{array}$$

Rosszul helyettesítettünk a $(\rightarrow \exists)$ szabály alkalmazásakor: x -nek lett szabad előfordulása, emiatt nem alkalmazható a $(\exists \rightarrow)$ szabály. Helyes sorrend, ha a $(\exists \rightarrow)$ szabályt előbb alkalmazzuk mint a $(\rightarrow \exists)$ szabályt, így a feltételét nem rontjuk el.

Példa elakadásra + megoldása

Bizonyítsuk a következő szekventet: $\exists x(P(x) \wedge R(x)) \longrightarrow \exists xP(x) \wedge \exists xR(x)$

$$\begin{array}{c} \text{?} \\ \hline (\rightarrow \exists) \frac{\exists x(P(x) \wedge R(x)) \longrightarrow \exists xP(x), P(x)}{\exists x(P(x) \wedge R(x)) \longrightarrow \exists xP(x)} \quad (\rightarrow \exists) \frac{\exists x(P(x) \wedge R(x)) \longrightarrow \exists xR(x), R(y)}{\exists x(P(x) \wedge R(x)) \longrightarrow \exists xR(x)} \\ \hline (\rightarrow \wedge) \frac{\exists x(P(x) \wedge R(x)) \longrightarrow \exists xP(x) \quad \exists x(P(x) \wedge R(x)) \longrightarrow \exists xR(x)}{\exists x(P(x) \wedge R(x)) \longrightarrow \exists xP(x) \wedge \exists xR(x)} \end{array}$$

Rosszul helyettesítettünk a $(\rightarrow \exists)$ szabály alkalmazásakor: x -nek lett szabad előfordulása, emiatt nem alkalmazható a $(\exists \rightarrow)$ szabály. Helyes sorrend, ha a $(\exists \rightarrow)$ szabályt előbb alkalmazzuk mint a $(\rightarrow \exists)$ szabályt, így a feltételét nem rontjuk el.

$$\begin{array}{c} (\rightarrow \wedge) \frac{\exists x(P(x) \wedge R(x)) \longrightarrow \exists xP(x) \quad \exists x(P(x) \wedge R(x)) \longrightarrow \exists xR(x)}{\exists x(P(x) \wedge R(x)) \longrightarrow \exists xP(x) \wedge \exists xR(x)} \end{array}$$

Példa elakadásra + megoldása

Bizonyítsuk a következő szekventet: $\exists x(P(x) \wedge R(x)) \longrightarrow \exists xP(x) \wedge \exists xR(x)$

$$\begin{array}{c} \text{?} \\ \hline (\rightarrow \exists) \frac{\exists x(P(x) \wedge R(x)) \longrightarrow \exists xP(x), P(x)}{\exists x(P(x) \wedge R(x)) \longrightarrow \exists xP(x)} \quad (\rightarrow \exists) \frac{\exists x(P(x) \wedge R(x)) \longrightarrow \exists xR(x), R(y)}{\exists x(P(x) \wedge R(x)) \longrightarrow \exists xR(x)} \\ \hline (\rightarrow \wedge) \frac{\exists x(P(x) \wedge R(x)) \longrightarrow \exists xP(x) \quad \exists x(P(x) \wedge R(x)) \longrightarrow \exists xR(x)}{\exists x(P(x) \wedge R(x)) \longrightarrow \exists xP(x) \wedge \exists xR(x)} \end{array}$$

Rosszul helyettesítettünk a $(\rightarrow \exists)$ szabály alkalmazásakor: x -nek lett szabad előfordulása, emiatt nem alkalmazható a $(\exists \rightarrow)$ szabály. Helyes sorrend, ha a $(\exists \rightarrow)$ szabályt előbb alkalmazzuk mint a $(\rightarrow \exists)$ szabályt, így a feltételét nem rontjuk el.

$$\begin{array}{c} (\exists \rightarrow) \frac{\exists x(P(x) \wedge R(x)) \longrightarrow \exists xP(x)}{\exists x(P(x) \wedge R(x)) \longrightarrow \exists xP(x)} \quad \exists x(P(x) \wedge R(x)) \longrightarrow \exists xR(x) \\ \hline (\rightarrow \wedge) \frac{\exists x(P(x) \wedge R(x)) \longrightarrow \exists xP(x) \quad \exists x(P(x) \wedge R(x)) \longrightarrow \exists xR(x)}{\exists x(P(x) \wedge R(x)) \longrightarrow \exists xP(x) \wedge \exists xR(x)} \end{array}$$

Példa elakadásra + megoldása

Bizonyítsuk a következő szekventet: $\exists x(P(x) \wedge R(x)) \longrightarrow \exists xP(x) \wedge \exists xR(x)$

$$\begin{array}{c}
 \text{?} \\
 \hline
 (\rightarrow \exists) \frac{\exists x(P(x) \wedge R(x)) \longrightarrow \exists xP(x), P(x)}{\exists x(P(x) \wedge R(x)) \longrightarrow \exists xP(x)} \quad (\rightarrow \exists) \frac{\exists x(P(x) \wedge R(x)) \longrightarrow \exists xR(x), R(y)}{\exists x(P(x) \wedge R(x)) \longrightarrow \exists xR(x)} \\
 \hline
 (\rightarrow \wedge) \frac{\exists x(P(x) \wedge R(x)) \longrightarrow \exists xP(x) \quad \exists x(P(x) \wedge R(x)) \longrightarrow \exists xR(x)}{\exists x(P(x) \wedge R(x)) \longrightarrow \exists xP(x) \wedge \exists xR(x)}
 \end{array}$$

Rosszul helyettesítettünk a $(\rightarrow \exists)$ szabály alkalmazásakor: x -nek lett szabad előfordulása, emiatt nem alkalmazható a $(\exists \rightarrow)$ szabály. Helyes sorrend, ha a $(\exists \rightarrow)$ szabályt előbb alkalmazzuk mint a $(\rightarrow \exists)$ szabályt, így a feltételét nem rontjuk el.

$$\begin{array}{c}
 P(x) \wedge R(x) \longrightarrow \exists xP(x) \\
 (\exists \rightarrow) \frac{\quad}{\exists x(P(x) \wedge R(x)) \longrightarrow \exists xP(x)} \quad \exists x(P(x) \wedge R(x)) \longrightarrow \exists xR(x) \\
 \hline
 (\rightarrow \wedge) \frac{\exists x(P(x) \wedge R(x)) \longrightarrow \exists xP(x) \quad \exists x(P(x) \wedge R(x)) \longrightarrow \exists xR(x)}{\exists x(P(x) \wedge R(x)) \longrightarrow \exists xP(x) \wedge \exists xR(x)}
 \end{array}$$

Példa elakadásra + megoldása

Bizonyítsuk a következő szekventet: $\exists x(P(x) \wedge R(x)) \longrightarrow \exists xP(x) \wedge \exists xR(x)$

$$\begin{array}{c} \text{?} \\ \hline (\rightarrow \exists) \frac{\exists x(P(x) \wedge R(x)) \longrightarrow \exists xP(x), P(x)}{\exists x(P(x) \wedge R(x)) \longrightarrow \exists xP(x)} \quad (\rightarrow \exists) \frac{\exists x(P(x) \wedge R(x)) \longrightarrow \exists xR(x), R(y)}{\exists x(P(x) \wedge R(x)) \longrightarrow \exists xR(x)} \\ \hline (\rightarrow \wedge) \frac{\exists x(P(x) \wedge R(x)) \longrightarrow \exists xP(x) \quad \exists x(P(x) \wedge R(x)) \longrightarrow \exists xR(x)}{\exists x(P(x) \wedge R(x)) \longrightarrow \exists xP(x) \wedge \exists xR(x)} \end{array}$$

Rosszul helyettesítettünk a $(\rightarrow \exists)$ szabály alkalmazásakor: x -nek lett szabad előfordulása, emiatt nem alkalmazható a $(\exists \rightarrow)$ szabály. Helyes sorrend, ha a $(\exists \rightarrow)$ szabályt előbb alkalmazzuk mint a $(\rightarrow \exists)$ szabályt, így a feltételét nem rontjuk el.

$$\begin{array}{c} (\rightarrow \exists) \frac{P(x) \wedge R(x) \longrightarrow \exists xP(x)}{\exists x(P(x) \wedge R(x)) \longrightarrow \exists xP(x)} \quad \exists x(P(x) \wedge R(x)) \longrightarrow \exists xR(x) \\ \hline (\rightarrow \wedge) \frac{\exists x(P(x) \wedge R(x)) \longrightarrow \exists xP(x) \quad \exists x(P(x) \wedge R(x)) \longrightarrow \exists xR(x)}{\exists x(P(x) \wedge R(x)) \longrightarrow \exists xP(x) \wedge \exists xR(x)} \end{array}$$

Példa elakadásra + megoldása

Bizonyítsuk a következő szekventet: $\exists x(P(x) \wedge R(x)) \longrightarrow \exists xP(x) \wedge \exists xR(x)$

$$\begin{array}{c} \text{?} \\ \hline (\rightarrow \exists) \frac{\exists x(P(x) \wedge R(x)) \longrightarrow \exists xP(x), P(x)}{\exists x(P(x) \wedge R(x)) \longrightarrow \exists xP(x)} \quad (\rightarrow \exists) \frac{\exists x(P(x) \wedge R(x)) \longrightarrow \exists xR(x), R(y)}{\exists x(P(x) \wedge R(x)) \longrightarrow \exists xR(x)} \\ \hline (\rightarrow \wedge) \frac{\exists x(P(x) \wedge R(x)) \longrightarrow \exists xP(x) \quad \exists x(P(x) \wedge R(x)) \longrightarrow \exists xR(x)}{\exists x(P(x) \wedge R(x)) \longrightarrow \exists xP(x) \wedge \exists xR(x)} \end{array}$$

Rosszul helyettesítettünk a $(\rightarrow \exists)$ szabály alkalmazásakor: x -nek lett szabad előfordulása, emiatt nem alkalmazható a $(\exists \rightarrow)$ szabály. Helyes sorrend, ha a $(\exists \rightarrow)$ szabályt előbb alkalmazzuk mint a $(\rightarrow \exists)$ szabályt, így a feltételét nem rontjuk el.

$$\begin{array}{c} (\rightarrow \exists) \frac{P(x) \wedge R(x) \longrightarrow \exists xP(x), P(x)}{P(x) \wedge R(x) \longrightarrow \exists xP(x)} \\ (\exists \rightarrow) \frac{P(x) \wedge R(x) \longrightarrow \exists xP(x)}{\exists x(P(x) \wedge R(x)) \longrightarrow \exists xP(x)} \quad \exists x(P(x) \wedge R(x)) \longrightarrow \exists xR(x) \\ \hline (\rightarrow \wedge) \frac{\exists x(P(x) \wedge R(x)) \longrightarrow \exists xP(x) \quad \exists x(P(x) \wedge R(x)) \longrightarrow \exists xR(x)}{\exists x(P(x) \wedge R(x)) \longrightarrow \exists xP(x) \wedge \exists xR(x)} \end{array}$$

Példa elakadásra + megoldása

Bizonyítsuk a következő szekventet: $\exists x(P(x) \wedge R(x)) \longrightarrow \exists xP(x) \wedge \exists xR(x)$

$$\begin{array}{c}
 \text{?} \\
 \hline
 (\rightarrow \exists) \frac{\exists x(P(x) \wedge R(x)) \longrightarrow \exists xP(x), P(x)}{\exists x(P(x) \wedge R(x)) \longrightarrow \exists xP(x)} \quad (\rightarrow \exists) \frac{\exists x(P(x) \wedge R(x)) \longrightarrow \exists xR(x), R(y)}{\exists x(P(x) \wedge R(x)) \longrightarrow \exists xR(x)} \\
 \hline
 (\rightarrow \wedge) \frac{\exists x(P(x) \wedge R(x)) \longrightarrow \exists xP(x) \quad \exists x(P(x) \wedge R(x)) \longrightarrow \exists xR(x)}{\exists x(P(x) \wedge R(x)) \longrightarrow \exists xP(x) \wedge \exists xR(x)}
 \end{array}$$

Rosszul helyettesítettünk a $(\rightarrow \exists)$ szabály alkalmazásakor: x -nek lett szabad előfordulása, emiatt nem alkalmazható a $(\exists \rightarrow)$ szabály. Helyes sorrend, ha a $(\exists \rightarrow)$ szabályt előbb alkalmazzuk mint a $(\rightarrow \exists)$ szabályt, így a feltételét nem rontjuk el.

$$\begin{array}{c}
 (\wedge \rightarrow) \frac{P(x) \wedge R(x) \longrightarrow \exists xP(x), P(x)}{P(x) \wedge R(x) \longrightarrow \exists xP(x)} \\
 (\rightarrow \exists) \frac{P(x) \wedge R(x) \longrightarrow \exists xP(x)}{\exists x(P(x) \wedge R(x)) \longrightarrow \exists xP(x)} \quad \exists x(P(x) \wedge R(x)) \longrightarrow \exists xR(x) \\
 \hline
 (\rightarrow \wedge) \frac{\exists x(P(x) \wedge R(x)) \longrightarrow \exists xP(x) \quad \exists x(P(x) \wedge R(x)) \longrightarrow \exists xR(x)}{\exists x(P(x) \wedge R(x)) \longrightarrow \exists xP(x) \wedge \exists xR(x)}
 \end{array}$$

Példa elakadásra + megoldása

Bizonyítsuk a következő szekventet: $\exists x(P(x) \wedge R(x)) \longrightarrow \exists xP(x) \wedge \exists xR(x)$

$$\begin{array}{c} \text{?} \\ \hline (\rightarrow \exists) \frac{\exists x(P(x) \wedge R(x)) \longrightarrow \exists xP(x), P(x)}{\exists x(P(x) \wedge R(x)) \longrightarrow \exists xP(x)} \quad (\rightarrow \exists) \frac{\exists x(P(x) \wedge R(x)) \longrightarrow \exists xR(x), R(y)}{\exists x(P(x) \wedge R(x)) \longrightarrow \exists xR(x)} \\ \hline (\rightarrow \wedge) \frac{\exists x(P(x) \wedge R(x)) \longrightarrow \exists xP(x) \quad \exists x(P(x) \wedge R(x)) \longrightarrow \exists xR(x)}{\exists x(P(x) \wedge R(x)) \longrightarrow \exists xP(x) \wedge \exists xR(x)} \end{array}$$

Rosszul helyettesítettünk a $(\rightarrow \exists)$ szabály alkalmazásakor: x -nek lett szabad előfordulása, emiatt nem alkalmazható a $(\exists \rightarrow)$ szabály. Helyes sorrend, ha a $(\exists \rightarrow)$ szabályt előbb alkalmazzuk mint a $(\rightarrow \exists)$ szabályt, így a feltételét nem rontjuk el.

$$\begin{array}{c} (\wedge \rightarrow) \frac{P(x), R(x) \longrightarrow \exists xP(x), P(x)}{P(x) \wedge R(x) \longrightarrow \exists xP(x), P(x)} \\ (\rightarrow \exists) \frac{P(x) \wedge R(x) \longrightarrow \exists xP(x), P(x)}{P(x) \wedge R(x) \longrightarrow \exists xP(x)} \\ (\exists \rightarrow) \frac{P(x) \wedge R(x) \longrightarrow \exists xP(x)}{\exists x(P(x) \wedge R(x)) \longrightarrow \exists xP(x)} \quad \exists x(P(x) \wedge R(x)) \longrightarrow \exists xR(x) \\ \hline (\rightarrow \wedge) \frac{\exists x(P(x) \wedge R(x)) \longrightarrow \exists xP(x) \quad \exists x(P(x) \wedge R(x)) \longrightarrow \exists xR(x)}{\exists x(P(x) \wedge R(x)) \longrightarrow \exists xP(x) \wedge \exists xR(x)} \end{array}$$

Példa elakadásra + megoldása

Bizonyítsuk a következő szekventet: $\exists x(P(x) \wedge R(x)) \longrightarrow \exists xP(x) \wedge \exists xR(x)$

$$\begin{array}{c}
 \text{?} \\
 \hline
 (\rightarrow \exists) \frac{\exists x(P(x) \wedge R(x)) \longrightarrow \exists xP(x), P(x)}{\exists x(P(x) \wedge R(x)) \longrightarrow \exists xP(x)} \quad (\rightarrow \exists) \frac{\exists x(P(x) \wedge R(x)) \longrightarrow \exists xR(x), R(y)}{\exists x(P(x) \wedge R(x)) \longrightarrow \exists xR(x)} \\
 \hline
 (\rightarrow \wedge) \frac{\exists x(P(x) \wedge R(x)) \longrightarrow \exists xP(x) \quad \exists x(P(x) \wedge R(x)) \longrightarrow \exists xR(x)}{\exists x(P(x) \wedge R(x)) \longrightarrow \exists xP(x) \wedge \exists xR(x)}
 \end{array}$$

Rosszul helyettesítettünk a $(\rightarrow \exists)$ szabály alkalmazásakor: x -nek lett szabad előfordulása, emiatt nem alkalmazható a $(\exists \rightarrow)$ szabály. Helyes sorrend, ha a $(\exists \rightarrow)$ szabályt előbb alkalmazzuk mint a $(\rightarrow \exists)$ szabályt, így a feltételét nem rontjuk el.

$$\begin{array}{c}
 \checkmark \\
 \hline
 (\wedge \rightarrow) \frac{P(x), R(x) \longrightarrow \exists xP(x), P(x)}{P(x) \wedge R(x) \longrightarrow \exists xP(x), P(x)} \\
 (\rightarrow \exists) \frac{P(x) \wedge R(x) \longrightarrow \exists xP(x), P(x)}{P(x) \wedge R(x) \longrightarrow \exists xP(x)} \\
 (\exists \rightarrow) \frac{P(x) \wedge R(x) \longrightarrow \exists xP(x)}{\exists x(P(x) \wedge R(x)) \longrightarrow \exists xP(x)} \quad \exists x(P(x) \wedge R(x)) \longrightarrow \exists xR(x) \\
 \hline
 (\rightarrow \wedge) \frac{\exists x(P(x) \wedge R(x)) \longrightarrow \exists xP(x) \quad \exists x(P(x) \wedge R(x)) \longrightarrow \exists xR(x)}{\exists x(P(x) \wedge R(x)) \longrightarrow \exists xP(x) \wedge \exists xR(x)}
 \end{array}$$

Példa elakadásra + megoldása

Bizonyítsuk a következő szekventet: $\exists x(P(x) \wedge R(x)) \longrightarrow \exists xP(x) \wedge \exists xR(x)$

$$\begin{array}{c} \text{?} \\ \frac{(\rightarrow \exists) \frac{\exists x(P(x) \wedge R(x)) \longrightarrow \exists xP(x), P(x)}{\exists x(P(x) \wedge R(x)) \longrightarrow \exists xP(x)}} \quad (\rightarrow \exists) \frac{\frac{\dots}{\exists x(P(x) \wedge R(x)) \longrightarrow \exists xR(x)}, R(y)}{\exists x(P(x) \wedge R(x)) \longrightarrow \exists xR(x)}} \\ (\rightarrow \wedge) \frac{\quad}{\exists x(P(x) \wedge R(x)) \longrightarrow \exists xP(x) \wedge \exists xR(x)} \end{array}$$

Rosszul helyettesítettünk a $(\rightarrow \exists)$ szabály alkalmazásakor: x -nek lett szabad előfordulása, emiatt nem alkalmazható a $(\exists \rightarrow)$ szabály. Helyes sorrend, ha a $(\exists \rightarrow)$ szabályt előbb alkalmazzuk mint a $(\rightarrow \exists)$ szabályt, így a feltételét nem rontjuk el.

$$\begin{array}{c} \checkmark \\ (\wedge \rightarrow) \frac{P(x), R(x) \longrightarrow \exists xP(x), P(x)}{P(x) \wedge R(x) \longrightarrow \exists xP(x), P(x)} \\ (\rightarrow \exists) \frac{P(x) \wedge R(x) \longrightarrow \exists xP(x)}{\exists x(P(x) \wedge R(x)) \longrightarrow \exists xP(x)} \quad (\exists \rightarrow) \frac{\quad}{\exists x(P(x) \wedge R(x)) \longrightarrow \exists xR(x)} \\ (\rightarrow \wedge) \frac{\quad}{\exists x(P(x) \wedge R(x)) \longrightarrow \exists xP(x) \wedge \exists xR(x)} \end{array}$$

Példa elakadásra + megoldása

Bizonyítsuk a következő szekventet: $\exists x(P(x) \wedge R(x)) \longrightarrow \exists xP(x) \wedge \exists xR(x)$

$$\begin{array}{c} \text{?} \\ \frac{(\rightarrow \exists) \frac{\exists x(P(x) \wedge R(x)) \longrightarrow \exists xP(x), P(x)}{\exists x(P(x) \wedge R(x)) \longrightarrow \exists xP(x)}} \quad \frac{\dots}{(\rightarrow \exists) \frac{\exists x(P(x) \wedge R(x)) \longrightarrow \exists xR(x), R(y)}{\exists x(P(x) \wedge R(x)) \longrightarrow \exists xR(x)}} \\ (\rightarrow \wedge) \frac{\quad}{\exists x(P(x) \wedge R(x)) \longrightarrow \exists xP(x) \wedge \exists xR(x)} \end{array}$$

Rosszul helyettesítettünk a $(\rightarrow \exists)$ szabály alkalmazásakor: x -nek lett szabad előfordulása, emiatt nem alkalmazható a $(\exists \rightarrow)$ szabály. Helyes sorrend, ha a $(\exists \rightarrow)$ szabályt előbb alkalmazzuk mint a $(\rightarrow \exists)$ szabályt, így a feltételét nem rontjuk el.

$$\begin{array}{c} \checkmark \\ \frac{(\wedge \rightarrow) \frac{P(x), R(x) \longrightarrow \exists xP(x), P(x)}{P(x) \wedge R(x) \longrightarrow \exists xP(x), P(x)}}{(\rightarrow \exists) \frac{P(x) \wedge R(x) \longrightarrow \exists xP(x)}{\exists x(P(x) \wedge R(x)) \longrightarrow \exists xP(x)}} \quad \frac{(\exists \rightarrow) \frac{P(x) \wedge R(x) \longrightarrow \exists xR(x)}{\exists x(P(x) \wedge R(x)) \longrightarrow \exists xR(x)}}{(\rightarrow \wedge) \frac{\quad}{\exists x(P(x) \wedge R(x)) \longrightarrow \exists xP(x) \wedge \exists xR(x)}} \end{array}$$

Példa elakadásra + megoldása

Bizonyítsuk a következő szekventet: $\exists x(P(x) \wedge R(x)) \longrightarrow \exists xP(x) \wedge \exists xR(x)$

$$\begin{array}{c}
 \text{?} \\
 \hline
 (\rightarrow \exists) \frac{\exists x(P(x) \wedge R(x)) \longrightarrow \exists xP(x), P(x)}{\exists x(P(x) \wedge R(x)) \longrightarrow \exists xP(x)} \quad (\rightarrow \exists) \frac{\exists x(P(x) \wedge R(x)) \longrightarrow \exists xR(x), R(y)}{\exists x(P(x) \wedge R(x)) \longrightarrow \exists xR(x)} \\
 \hline
 (\rightarrow \wedge) \frac{\exists x(P(x) \wedge R(x)) \longrightarrow \exists xP(x) \quad \exists x(P(x) \wedge R(x)) \longrightarrow \exists xR(x)}{\exists x(P(x) \wedge R(x)) \longrightarrow \exists xP(x) \wedge \exists xR(x)}
 \end{array}$$

Rosszul helyettesítettünk a $(\rightarrow \exists)$ szabály alkalmazásakor: x -nek lett szabad előfordulása, emiatt nem alkalmazható a $(\exists \rightarrow)$ szabály. Helyes sorrend, ha a $(\exists \rightarrow)$ szabályt előbb alkalmazzuk mint a $(\rightarrow \exists)$ szabályt, így a feltételét nem rontjuk el.

$$\begin{array}{c}
 \checkmark \\
 \hline
 (\wedge \rightarrow) \frac{P(x), R(x) \longrightarrow \exists xP(x), P(x)}{P(x) \wedge R(x) \longrightarrow \exists xP(x), P(x)} \quad (\wedge \rightarrow) \frac{P(x) \wedge R(x) \longrightarrow \exists xR(x)}{P(x) \wedge R(x) \longrightarrow \exists xR(x)} \\
 (\rightarrow \exists) \frac{P(x) \wedge R(x) \longrightarrow \exists xP(x)}{\exists x(P(x) \wedge R(x)) \longrightarrow \exists xP(x)} \quad (\rightarrow \exists) \frac{P(x) \wedge R(x) \longrightarrow \exists xR(x)}{\exists x(P(x) \wedge R(x)) \longrightarrow \exists xR(x)} \\
 \hline
 (\rightarrow \wedge) \frac{\exists x(P(x) \wedge R(x)) \longrightarrow \exists xP(x) \quad \exists x(P(x) \wedge R(x)) \longrightarrow \exists xR(x)}{\exists x(P(x) \wedge R(x)) \longrightarrow \exists xP(x) \wedge \exists xR(x)}
 \end{array}$$

Példa elakadásra + megoldása

Bizonyítsuk a következő szekventet: $\exists x(P(x) \wedge R(x)) \longrightarrow \exists xP(x) \wedge \exists xR(x)$

$$\begin{array}{c}
 \text{?} \\
 \hline
 (\rightarrow \exists) \frac{\exists x(P(x) \wedge R(x)) \longrightarrow \exists xP(x), P(x)}{\exists x(P(x) \wedge R(x)) \longrightarrow \exists xP(x)} \quad (\rightarrow \exists) \frac{\exists x(P(x) \wedge R(x)) \longrightarrow \exists xR(x), R(y)}{\exists x(P(x) \wedge R(x)) \longrightarrow \exists xR(x)} \\
 \hline
 (\rightarrow \wedge) \frac{\exists x(P(x) \wedge R(x)) \longrightarrow \exists xP(x) \quad \exists x(P(x) \wedge R(x)) \longrightarrow \exists xR(x)}{\exists x(P(x) \wedge R(x)) \longrightarrow \exists xP(x) \wedge \exists xR(x)}
 \end{array}$$

Rosszul helyettesítettünk a $(\rightarrow \exists)$ szabály alkalmazásakor: x -nek lett szabad előfordulása, emiatt nem alkalmazható a $(\exists \rightarrow)$ szabály. Helyes sorrend, ha a $(\exists \rightarrow)$ szabályt előbb alkalmazzuk mint a $(\rightarrow \exists)$ szabályt, így a feltételét nem rontjuk el.

$$\begin{array}{c}
 \checkmark \\
 \hline
 (\wedge \rightarrow) \frac{P(x), R(x) \longrightarrow \exists xP(x), P(x)}{P(x) \wedge R(x) \longrightarrow \exists xP(x), P(x)} \quad (\wedge \rightarrow) \frac{P(x), R(x) \longrightarrow \exists xR(x)}{P(x) \wedge R(x) \longrightarrow \exists xR(x)} \\
 (\rightarrow \exists) \frac{P(x) \wedge R(x) \longrightarrow \exists xP(x)}{\exists x(P(x) \wedge R(x)) \longrightarrow \exists xP(x)} \quad (\rightarrow \exists) \frac{P(x) \wedge R(x) \longrightarrow \exists xR(x)}{\exists x(P(x) \wedge R(x)) \longrightarrow \exists xR(x)} \\
 \hline
 (\rightarrow \wedge) \frac{\exists x(P(x) \wedge R(x)) \longrightarrow \exists xP(x) \quad \exists x(P(x) \wedge R(x)) \longrightarrow \exists xR(x)}{\exists x(P(x) \wedge R(x)) \longrightarrow \exists xP(x) \wedge \exists xR(x)}
 \end{array}$$

Példa elakadásra + megoldása

Bizonyítsuk a következő szekventet: $\exists x(P(x) \wedge R(x)) \longrightarrow \exists xP(x) \wedge \exists xR(x)$

$$\begin{array}{c}
 \text{?} \\
 \hline
 (\rightarrow \exists) \frac{\exists x(P(x) \wedge R(x)) \longrightarrow \exists xP(x), P(x)}{\exists x(P(x) \wedge R(x)) \longrightarrow \exists xP(x)} \quad (\rightarrow \exists) \frac{\exists x(P(x) \wedge R(x)) \longrightarrow \exists xR(x), R(y)}{\exists x(P(x) \wedge R(x)) \longrightarrow \exists xR(x)} \\
 \hline
 (\rightarrow \wedge) \frac{\exists x(P(x) \wedge R(x)) \longrightarrow \exists xP(x) \quad \exists x(P(x) \wedge R(x)) \longrightarrow \exists xR(x)}{\exists x(P(x) \wedge R(x)) \longrightarrow \exists xP(x) \wedge \exists xR(x)}
 \end{array}$$

Rosszul helyettesítettünk a $(\rightarrow \exists)$ szabály alkalmazásakor: x -nek lett szabad előfordulása, emiatt nem alkalmazható a $(\exists \rightarrow)$ szabály. Helyes sorrend, ha a $(\exists \rightarrow)$ szabályt előbb alkalmazzuk mint a $(\rightarrow \exists)$ szabályt, így a feltételét nem rontjuk el.

$$\begin{array}{c}
 \checkmark \\
 \hline
 (\wedge \rightarrow) \frac{P(x), R(x) \longrightarrow \exists xP(x), P(x)}{P(x) \wedge R(x) \longrightarrow \exists xP(x), P(x)} \quad (\rightarrow \exists) \frac{P(x), R(x) \longrightarrow \exists xR(x)}{P(x) \wedge R(x) \longrightarrow \exists xR(x)} \\
 \hline
 (\rightarrow \exists) \frac{P(x) \wedge R(x) \longrightarrow \exists xP(x)}{\exists x(P(x) \wedge R(x)) \longrightarrow \exists xP(x)} \quad (\rightarrow \exists) \frac{P(x) \wedge R(x) \longrightarrow \exists xR(x)}{\exists x(P(x) \wedge R(x)) \longrightarrow \exists xR(x)} \\
 \hline
 (\rightarrow \wedge) \frac{\exists x(P(x) \wedge R(x)) \longrightarrow \exists xP(x) \quad \exists x(P(x) \wedge R(x)) \longrightarrow \exists xR(x)}{\exists x(P(x) \wedge R(x)) \longrightarrow \exists xP(x) \wedge \exists xR(x)}
 \end{array}$$

Példa elakadásra + megoldása

Bizonyítsuk a következő szekventet: $\exists x(P(x) \wedge R(x)) \longrightarrow \exists xP(x) \wedge \exists xR(x)$

$$\begin{array}{c}
 \text{?} \\
 \hline
 (\rightarrow \exists) \frac{\exists x(P(x) \wedge R(x)) \longrightarrow \exists xP(x), P(x)}{\exists x(P(x) \wedge R(x)) \longrightarrow \exists xP(x)} \quad (\rightarrow \exists) \frac{\exists x(P(x) \wedge R(x)) \longrightarrow \exists xR(x), R(y)}{\exists x(P(x) \wedge R(x)) \longrightarrow \exists xR(x)} \\
 \hline
 (\rightarrow \wedge) \frac{\exists x(P(x) \wedge R(x)) \longrightarrow \exists xP(x) \quad \exists x(P(x) \wedge R(x)) \longrightarrow \exists xR(x)}{\exists x(P(x) \wedge R(x)) \longrightarrow \exists xP(x) \wedge \exists xR(x)}
 \end{array}$$

Rosszul helyettesítettünk a $(\rightarrow \exists)$ szabály alkalmazásakor: x -nek lett szabad előfordulása, emiatt nem alkalmazható a $(\exists \rightarrow)$ szabály. Helyes sorrend, ha a $(\exists \rightarrow)$ szabályt előbb alkalmazzuk mint a $(\rightarrow \exists)$ szabályt, így a feltételét nem rontjuk el.

$$\begin{array}{c}
 \checkmark \\
 \hline
 (\wedge \rightarrow) \frac{P(x), R(x) \longrightarrow \exists xP(x), P(x)}{P(x) \wedge R(x) \longrightarrow \exists xP(x), P(x)} \quad (\rightarrow \exists) \frac{P(x), R(x) \longrightarrow \exists xR(x), R(x)}{P(x), R(x) \longrightarrow \exists xR(x)} \\
 \hline
 (\rightarrow \exists) \frac{P(x) \wedge R(x) \longrightarrow \exists xP(x)}{\exists x(P(x) \wedge R(x)) \longrightarrow \exists xP(x)} \quad (\wedge \rightarrow) \frac{P(x) \wedge R(x) \longrightarrow \exists xR(x)}{\exists x(P(x) \wedge R(x)) \longrightarrow \exists xR(x)} \\
 \hline
 (\rightarrow \wedge) \frac{\exists x(P(x) \wedge R(x)) \longrightarrow \exists xP(x) \quad \exists x(P(x) \wedge R(x)) \longrightarrow \exists xR(x)}{\exists x(P(x) \wedge R(x)) \longrightarrow \exists xP(x) \wedge \exists xR(x)}
 \end{array}$$

Példa elakadásra + megoldása

Bizonyítsuk a következő szekventet: $\exists x(P(x) \wedge R(x)) \longrightarrow \exists xP(x) \wedge \exists xR(x)$

$$\begin{array}{c}
 \text{?} \\
 \hline
 (\rightarrow \exists) \frac{\exists x(P(x) \wedge R(x)) \longrightarrow \exists xP(x), P(x)}{\exists x(P(x) \wedge R(x)) \longrightarrow \exists xP(x)} \quad (\rightarrow \exists) \frac{\exists x(P(x) \wedge R(x)) \longrightarrow \exists xR(x), R(y)}{\exists x(P(x) \wedge R(x)) \longrightarrow \exists xR(x)} \\
 \hline
 (\rightarrow \wedge) \frac{\exists x(P(x) \wedge R(x)) \longrightarrow \exists xP(x) \quad \exists x(P(x) \wedge R(x)) \longrightarrow \exists xR(x)}{\exists x(P(x) \wedge R(x)) \longrightarrow \exists xP(x) \wedge \exists xR(x)}
 \end{array}$$

Rosszul helyettesítettünk a $(\rightarrow \exists)$ szabály alkalmazásakor: x -nek lett szabad előfordulása, emiatt nem alkalmazható a $(\exists \rightarrow)$ szabály. Helyes sorrend, ha a $(\exists \rightarrow)$ szabályt előbb alkalmazzuk mint a $(\rightarrow \exists)$ szabályt, így a feltételét nem rontjuk el.

$$\begin{array}{c}
 \checkmark \\
 \hline
 (\wedge \rightarrow) \frac{P(x), R(x) \longrightarrow \exists xP(x), P(x)}{P(x) \wedge R(x) \longrightarrow \exists xP(x), P(x)} \quad (\rightarrow \exists) \frac{P(x), R(x) \longrightarrow \exists xR(x), R(x)}{P(x), R(x) \longrightarrow \exists xR(x)} \\
 \hline
 (\rightarrow \exists) \frac{P(x) \wedge R(x) \longrightarrow \exists xP(x)}{\exists x(P(x) \wedge R(x)) \longrightarrow \exists xP(x)} \quad (\wedge \rightarrow) \frac{P(x), R(x) \longrightarrow \exists xR(x)}{P(x) \wedge R(x) \longrightarrow \exists xR(x)} \\
 \hline
 (\exists \rightarrow) \frac{\exists x(P(x) \wedge R(x)) \longrightarrow \exists xP(x)}{\exists x(P(x) \wedge R(x)) \longrightarrow \exists xP(x) \wedge \exists xR(x)} \quad (\exists \rightarrow) \frac{\exists x(P(x) \wedge R(x)) \longrightarrow \exists xR(x)}{\exists x(P(x) \wedge R(x)) \longrightarrow \exists xR(x)} \\
 \hline
 (\rightarrow \wedge) \frac{\exists x(P(x) \wedge R(x)) \longrightarrow \exists xP(x) \quad \exists x(P(x) \wedge R(x)) \longrightarrow \exists xR(x)}{\exists x(P(x) \wedge R(x)) \longrightarrow \exists xP(x) \wedge \exists xR(x)}
 \end{array}$$

Rövidebb levezetés

Egy másik megoldás: $\exists x(P(x) \wedge R(x)) \longrightarrow \exists xP(x) \wedge \exists xR(x)$

Ha az egyenes ágú bontásokat preferáljuk, akkor rövidebb megoldást kaphatunk.

Rövidebb levezetés

Egy másik megoldás: $\exists x(P(x) \wedge R(x)) \longrightarrow \exists xP(x) \wedge \exists xR(x)$

Ha az egyenes ágú bontásokat preferáljuk, akkor rövidebb megoldást kaphatunk.

$$\exists x(P(x) \wedge R(x)) \longrightarrow \exists xP(x) \wedge \exists xR(x)$$

Rövidebb levezetés

Egy másik megoldás: $\exists x(P(x) \wedge R(x)) \longrightarrow \exists xP(x) \wedge \exists xR(x)$

Ha az egyenes ágú bontásokat preferáljuk, akkor rövidebb megoldást kaphatunk.

$$(\exists \rightarrow) \frac{}{\exists x(P(x) \wedge R(x)) \longrightarrow \exists xP(x) \wedge \exists xR(x)}$$

Rövidebb levezetés

Egy másik megoldás: $\exists x(P(x) \wedge R(x)) \longrightarrow \exists xP(x) \wedge \exists xR(x)$

Ha az egyenes ágú bontásokat preferáljuk, akkor rövidebb megoldást kaphatunk.

$$(\exists \rightarrow) \frac{P(x) \wedge R(x) \longrightarrow \exists xP(x) \wedge \exists xR(x)}{\exists x(P(x) \wedge R(x)) \longrightarrow \exists xP(x) \wedge \exists xR(x)}$$

Rövidebb levezetés

Egy másik megoldás: $\exists x(P(x) \wedge R(x)) \longrightarrow \exists xP(x) \wedge \exists xR(x)$

Ha az egyenes ágú bontásokat preferáljuk, akkor rövidebb megoldást kaphatunk.

$$\begin{array}{c} (\wedge \rightarrow) \frac{}{P(x) \wedge R(x) \longrightarrow \exists xP(x) \wedge \exists xR(x)} \\ (\exists \rightarrow) \frac{}{\exists x(P(x) \wedge R(x)) \longrightarrow \exists xP(x) \wedge \exists xR(x)} \end{array}$$

Rövidebb levezetés

Egy másik megoldás: $\exists x(P(x) \wedge R(x)) \longrightarrow \exists xP(x) \wedge \exists xR(x)$

Ha az egyenes ágú bontásokat preferáljuk, akkor rövidebb megoldást kaphatunk.

$$\begin{array}{c} (\wedge \rightarrow) \frac{P(x), R(x) \longrightarrow \exists xP(x) \wedge \exists xR(x)}{P(x) \wedge R(x) \longrightarrow \exists xP(x) \wedge \exists xR(x)} \\ (\exists \rightarrow) \frac{\quad}{\exists x(P(x) \wedge R(x)) \longrightarrow \exists xP(x) \wedge \exists xR(x)} \end{array}$$

Rövidebb levezetés

Egy másik megoldás: $\exists x(P(x) \wedge R(x)) \longrightarrow \exists xP(x) \wedge \exists xR(x)$

Ha az egyenes ágú bontásokat preferáljuk, akkor rövidebb megoldást kaphatunk.

$$\begin{array}{c} (\rightarrow \wedge) \text{ ————— } \\ (\wedge \rightarrow) \frac{P(x), R(x) \longrightarrow \exists xP(x) \wedge \exists xR(x)}{P(x) \wedge R(x) \longrightarrow \exists xP(x) \wedge \exists xR(x)} \\ (\exists \rightarrow) \frac{P(x) \wedge R(x) \longrightarrow \exists xP(x) \wedge \exists xR(x)}{\exists x(P(x) \wedge R(x)) \longrightarrow \exists xP(x) \wedge \exists xR(x)} \end{array}$$

Rövidebb levezetés

Egy másik megoldás: $\exists x(P(x) \wedge R(x)) \longrightarrow \exists xP(x) \wedge \exists xR(x)$

Ha az egyenes ágú bontásokat preferáljuk, akkor rövidebb megoldást kaphatunk.

$$\begin{array}{c} (\rightarrow \wedge) \frac{P(x), R(x) \longrightarrow \exists xP(x)}{\quad} \\ \quad (\wedge \rightarrow) \frac{P(x), R(x) \longrightarrow \exists xP(x) \wedge \exists xR(x)}{P(x) \wedge R(x) \longrightarrow \exists xP(x) \wedge \exists xR(x)} \\ \quad (\exists \rightarrow) \frac{\quad}{\exists x(P(x) \wedge R(x)) \longrightarrow \exists xP(x) \wedge \exists xR(x)} \end{array}$$

Rövidebb levezetés

Egy másik megoldás: $\exists x(P(x) \wedge R(x)) \longrightarrow \exists xP(x) \wedge \exists xR(x)$

Ha az egyenes ágú bontásokat preferáljuk, akkor rövidebb megoldást kaphatunk.

$$\begin{array}{c} (\rightarrow \wedge) \frac{P(x), R(x) \longrightarrow \exists xP(x) \qquad P(x), R(x) \longrightarrow \exists xR(x)}{(\wedge \rightarrow) \frac{P(x), R(x) \longrightarrow \exists xP(x) \wedge \exists xR(x)}{P(x) \wedge R(x) \longrightarrow \exists xP(x) \wedge \exists xR(x)}} \\ (\exists \rightarrow) \frac{\quad}{\exists x(P(x) \wedge R(x)) \longrightarrow \exists xP(x) \wedge \exists xR(x)} \end{array}$$

Rövidebb levezetés

Egy másik megoldás: $\exists x(P(x) \wedge R(x)) \longrightarrow \exists xP(x) \wedge \exists xR(x)$

Ha az egyenes ágú bontásokat preferáljuk, akkor rövidebb megoldást kaphatunk.

$$\begin{array}{c} (\rightarrow \exists) \frac{\quad}{P(x), R(x) \longrightarrow \exists xP(x)} \qquad P(x), R(x) \longrightarrow \exists xR(x) \\ (\rightarrow \wedge) \frac{\quad}{P(x), R(x) \longrightarrow \exists xP(x) \wedge \exists xR(x)} \\ (\wedge \rightarrow) \frac{\quad}{P(x) \wedge R(x) \longrightarrow \exists xP(x) \wedge \exists xR(x)} \\ (\exists \rightarrow) \frac{\quad}{\exists x(P(x) \wedge R(x)) \longrightarrow \exists xP(x) \wedge \exists xR(x)} \end{array}$$

Rövidebb levezetés

Egy másik megoldás: $\exists x(P(x) \wedge R(x)) \longrightarrow \exists xP(x) \wedge \exists xR(x)$

Ha az egyenes ágú bontásokat preferáljuk, akkor rövidebb megoldást kaphatunk.

$$\begin{array}{c} (\rightarrow \exists) \frac{P(x), R(x) \longrightarrow \exists xP(x), P(x)}{P(x), R(x) \longrightarrow \exists xP(x)} \qquad P(x), R(x) \longrightarrow \exists xR(x) \\ (\rightarrow \wedge) \frac{P(x), R(x) \longrightarrow \exists xP(x) \qquad P(x), R(x) \longrightarrow \exists xR(x)}{P(x), R(x) \longrightarrow \exists xP(x) \wedge \exists xR(x)} \\ (\wedge \rightarrow) \frac{P(x), R(x) \longrightarrow \exists xP(x) \wedge \exists xR(x)}{P(x) \wedge R(x) \longrightarrow \exists xP(x) \wedge \exists xR(x)} \\ (\exists \rightarrow) \frac{P(x) \wedge R(x) \longrightarrow \exists xP(x) \wedge \exists xR(x)}{\exists x(P(x) \wedge R(x)) \longrightarrow \exists xP(x) \wedge \exists xR(x)} \end{array}$$

Rövidebb levezetés

Egy másik megoldás: $\exists x(P(x) \wedge R(x)) \longrightarrow \exists xP(x) \wedge \exists xR(x)$

Ha az egyenes ágú bontásokat preferáljuk, akkor rövidebb megoldást kaphatunk.

$$\begin{array}{c} \checkmark \\ \hline (\rightarrow \exists) \frac{P(x), R(x) \longrightarrow \exists xP(x), P(x)}{P(x), R(x) \longrightarrow \exists xP(x)} \qquad P(x), R(x) \longrightarrow \exists xR(x) \\ (\rightarrow \wedge) \frac{P(x), R(x) \longrightarrow \exists xP(x) \qquad P(x), R(x) \longrightarrow \exists xR(x)}{P(x), R(x) \longrightarrow \exists xP(x) \wedge \exists xR(x)} \\ (\wedge \rightarrow) \frac{P(x), R(x) \longrightarrow \exists xP(x) \wedge \exists xR(x)}{P(x) \wedge R(x) \longrightarrow \exists xP(x) \wedge \exists xR(x)} \\ (\exists \rightarrow) \frac{P(x) \wedge R(x) \longrightarrow \exists xP(x) \wedge \exists xR(x)}{\exists x(P(x) \wedge R(x)) \longrightarrow \exists xP(x) \wedge \exists xR(x)} \end{array}$$

Rövidebb levezetés

Egy másik megoldás: $\exists x(P(x) \wedge R(x)) \longrightarrow \exists xP(x) \wedge \exists xR(x)$

Ha az egyenes ágú bontásokat preferáljuk, akkor rövidebb megoldást kaphatunk.

$$\begin{array}{c} \checkmark \\ \hline (\rightarrow \exists) \frac{P(x), R(x) \longrightarrow \exists xP(x), P(x)}{P(x), R(x) \longrightarrow \exists xP(x)} \quad (\rightarrow \exists) \frac{P(x), R(x) \longrightarrow \exists xR(x)}{P(x), R(x) \longrightarrow \exists xR(x)} \\ \hline (\rightarrow \wedge) \frac{P(x), R(x) \longrightarrow \exists xP(x) \quad P(x), R(x) \longrightarrow \exists xR(x)}{P(x), R(x) \longrightarrow \exists xP(x) \wedge \exists xR(x)} \\ \hline (\wedge \rightarrow) \frac{P(x) \wedge R(x) \longrightarrow \exists xP(x) \wedge \exists xR(x)}{P(x) \wedge R(x) \longrightarrow \exists xP(x) \wedge \exists xR(x)} \\ \hline (\exists \rightarrow) \frac{\exists x(P(x) \wedge R(x)) \longrightarrow \exists xP(x) \wedge \exists xR(x)}{\exists x(P(x) \wedge R(x)) \longrightarrow \exists xP(x) \wedge \exists xR(x)} \end{array}$$

Rövidebb levezetés

Egy másik megoldás: $\exists x(P(x) \wedge R(x)) \longrightarrow \exists xP(x) \wedge \exists xR(x)$

Ha az egyenes ágú bontásokat preferáljuk, akkor rövidebb megoldást kaphatunk.

$$\begin{array}{c} \checkmark \\ \hline (\rightarrow \exists) \frac{P(x), R(x) \longrightarrow \exists xP(x), P(x)}{P(x), R(x) \longrightarrow \exists xP(x)} \quad (\rightarrow \exists) \frac{P(x), R(x) \longrightarrow \exists xR(x), R(x)}{P(x), R(x) \longrightarrow \exists xR(x)} \\ \hline (\rightarrow \wedge) \frac{P(x), R(x) \longrightarrow \exists xP(x) \quad P(x), R(x) \longrightarrow \exists xR(x)}{P(x), R(x) \longrightarrow \exists xP(x) \wedge \exists xR(x)} \\ \hline (\wedge \rightarrow) \frac{P(x) \wedge R(x) \longrightarrow \exists xP(x) \wedge \exists xR(x)}{P(x) \wedge R(x) \longrightarrow \exists xP(x) \wedge \exists xR(x)} \\ \hline (\exists \rightarrow) \frac{\exists x(P(x) \wedge R(x)) \longrightarrow \exists xP(x) \wedge \exists xR(x)}{\exists x(P(x) \wedge R(x)) \longrightarrow \exists xP(x) \wedge \exists xR(x)} \end{array}$$

Rövidebb levezetés

Egy másik megoldás: $\exists x(P(x) \wedge R(x)) \longrightarrow \exists xP(x) \wedge \exists xR(x)$

Ha az egyenes ágú bontásokat preferáljuk, akkor rövidebb megoldást kaphatunk.

$$\begin{array}{c} \frac{\frac{\frac{\checkmark}{P(x), R(x) \longrightarrow \exists xP(x), P(x)}}{(\rightarrow \exists) \frac{P(x), R(x) \longrightarrow \exists xP(x)}}}{(\rightarrow \wedge) \frac{P(x), R(x) \longrightarrow \exists xP(x)}} \quad \frac{\frac{\frac{\checkmark}{P(x), R(x) \longrightarrow \exists xR(x), R(x)}}{(\rightarrow \exists) \frac{P(x), R(x) \longrightarrow \exists xR(x)}}}{(\wedge \rightarrow) \frac{P(x), R(x) \longrightarrow \exists xP(x) \wedge \exists xR(x)}} \\ (\exists \rightarrow) \frac{P(x) \wedge R(x) \longrightarrow \exists xP(x) \wedge \exists xR(x)}{\exists x(P(x) \wedge R(x)) \longrightarrow \exists xP(x) \wedge \exists xR(x)} \end{array}$$