6. előadás

2020. október 12.

INTEGRÁLSZÁMÍTÁS

A differenciálszámításhoz hasonlóan az integrálszámítás is a matematikai analízisnek, sőt az egész matematikának és az alkalmazásoknak is egyik igen fontos fejezete. A témakör tárgyalását a **határozott integrállal** kezdjük, és utána foglalkozunk a **határozatlan integrállal**.

A határozott integrál

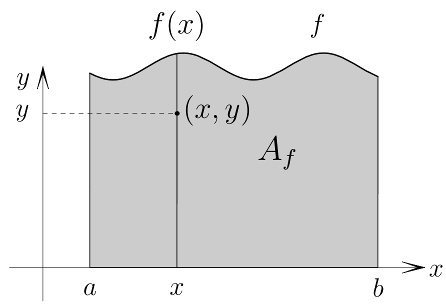
A határozott integrál fogalma számos, a matematikában, a fizikában és a természettudományok egyéb területein alkalmazott gondolatmenet általánosításaként született meg. A terület, a térfogat, az ívhossz, a felszín fogalma a határozott integrál segítségével értelmezhető. A fizikában többek között a munka, a nyomóerő, a tehetetlenségi nyomaték értelmezéséhez használják a határozott integrált. A címben jelzett fogalom szükségességére itt csak egy geometriai példát mutatunk.

A határozott integrál motivációja

Görbe vonallal határolt síkidom területének a problémája. Legyen f nemnegatív korlátos függvény a korlátos és zárt $[a,b]$ intervallumon, és tekintsük az f grafikonja alatti

$$A_f := \big\{(x,y) \mid x \in [a,b],\ 0 \le y \le f(x)\big\}$$

síkidomot:



A következő kérdéseket vetjük fel:

*Hogyan lehet A_f területét **értelmezni**, milyen f esetén beszélhetünk az A_f halmaz területéről, hogyan lehet a $T(A_f)$-fel jelölt területet **kiszámolni**?*

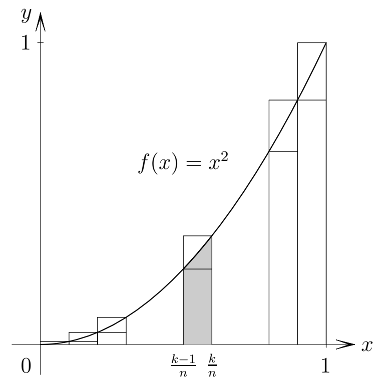
Abból, a görög matematikusok által már alkalmazott elég „természetes” ötletből indulunk ki, hogy a szóban forgó síkidom területét téglalapok területeinek az összegével közelítjük. Lássuk, hogyan határozta meg Arkhimédész a parabola alatti területet! A modern jelöléseket és a már megismert fogalmakat fogjuk használni.

1. példa. Tekintsük az

$$f(x) := x^2 \quad \big(x \in [-1,1]\big)$$

függvényt.

Rögzítsünk egy $1 \leq n \in \mathbb{N}$ számot, és osszuk fel a $[0,1]$ intervallumot az $x_k := \frac{k}{n}$ $(k = 0, 1, 2, \ldots, n)$ osztópontokkal. Közelítsük az A_f halmazt az alábbi ábrán szemléltetett „beírt” és „körülírt” téglalapokkal:



Jelölje s_n, illetve S_n a szóban forgó téglalapok területeinek az összegét. Az

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + m^2 = \frac{m(m+1)(2m+1)}{6} \quad (1 \leq m \in \mathbb{N})$$

képletből következik, hogy

$$s_n = \frac{1}{n}\left(\left(\frac{1}{n}\right)^2 + \left(\frac{2}{n}\right)^2 + \cdots \left(\frac{n-1}{n}\right)^2\right) = \frac{(n-1)n(2n-1)}{6n^3} \quad \text{és}$$

$$S_n = \frac{1}{n}\left(\left(\frac{1}{n}\right)^2 + \left(\frac{2}{n}\right)^2 + \cdots \left(\frac{n}{n}\right)^2\right) = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6n^3}.$$

Ha növeljük az osztópontok n számát, akkor a „lépcsősidomok” egyre jobban közelítenek az A_f halmazhoz. Világos, hogy minden $1 \leq n \in \mathbb{N}$ esetén

$$s_n \leq T(A_f) \leq S_n.$$

Mivel

$$\lim_{n\to+\infty} s_n = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{6} \cdot \left(1 - \frac{1}{n}\right) \cdot \left(2 - \frac{1}{n}\right) = \frac{1}{3} \quad \text{és}$$

$$\lim_{n\to+\infty} S_n = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{6} \cdot \left(1 + \frac{1}{n}\right) \cdot \left(2 + \frac{1}{n}\right) = \frac{1}{3},$$

ezért a fenti egyenlőtlenségeket csak az $\frac{1}{3}$ szám elégíti ki. Kézenfekvő tehát azt mondani, hogy az A_f halmaznak van területe, és az legyen $1/3$.

Megjegyzés. **Történeti utalások.** A matematikai analízis alapgondolatának a felfedezése – vagyis hogy a keresett mennyiséget tetszőleges pontossággal való megközelítések segítségével határozzuk meg – *Eudoxos* (i.e. 408–355) nevéhez fűződik, aki megalkotta a *kimerítés módszerét*.

Arkhimédész (i.e. 287–212) minden idők egyik legnagyobb, de az ókornak minden bizonnyal legnagyobb matematikusa volt. A kimerítés módszerét továbbfejlesztve kiszámította különböző görbevonalú idomok (pl.

parabolaszelet) területét, meghatározta a gömb térfogatát és felszínét, bizonyos spirálok ívhosszúságát, vizsgálta a forgási paraboloidokat és hiperboloidokat. Munkásságának nagyobb része elveszett, de így is hatalmas művet hagyott hátra. Meg kell jegyezni azonban azt is, hogy gondolatai nagyon sokáig nem találtak méltó folytatásra.

Az analízis mint széles körben alkalmazható általános módszer, mint tudományág csak akkor született meg, amikor XVII. századi európai matematikusok kidolgoztak egy elméletet, az ún. *kalkulust* vagy a mai szóval *differenciálszámítást*. Ezt nagy matematikusok sora (*Barrow, Cavalieri, Fermat, Kepler* és sokan mások) fejlesztették ki, majd *Isaac Newton* (1643–1727) és *Gottfried Wilhelm Leibniz* (1646–1716) foglalták össze. Így a század végére már megérett az idő egy nagyszabású monográfia megírására. Ez *L'Hospital* (1661–1704) *Infinitézimálszámítás* (azaz végtelen kicsiny mennyiségekkel való számolás) című műve volt (1696), amely csaknem 100 évig a téma legfontosabb tankönyve maradt.

A kalkulust kezdettől fogva sok kritika és támadás érte – tegyük hozzá teljes joggal. A módszer logikai tisztasága nagyon is vitatható volt, mert homályos fogalmakkal dolgozott, és a gondolatmenetei néha zavarosak voltak. Mert pl. mit jelent az, hogy végtelenül kicsiny mennyiség? A kalkulus körüli vita egészen a XIX. század végéig zajlott, és nemegyszer filozófiai síkra terelődött (Berkeley, Hegel).

Ezeket a belső problémákat végül mégis a matematikusok oldották meg a XIX. században, amennyiben a kalkulus intuitív, de homályos és ellentmondásos fogalmait precízen definiált matematikai fogalmakkal helyettesítették. A változó mennyiség fogalmát a függvény fogalmával, a differenciált a határértékkel, a differenciálhányadost pedig a deriválttal váltották fel. Ennek a tisztázási folyamatnak az eredményeképpen – amelyben *Augustin Cauchy* (1789–1857), *Karl Weierstrass* (1815–1897) és *Richard Dedekind* (1831–1916) vállaltak úttörő szerepet – a XIX. század végére a **differeciál- és integrálszámítás** (röviden **analízis**) elérte a logikai tisztaságnak azt a fokát, amelyet a matematika megkövetel.

Az analízis precíz elméletének kidolgozása az újkori nyugati kultúra egyik legnagyobb szellemi teljesítménye volt. Ne csodálkozzunk hát, ha ezt az elméletet – főleg az alapjait, mindenekelőtt pedig annak centrális fogalmát, a határértéket – nehéznek találjuk. □

A határozott integrál értelmezése

A határozott integrált egyelőre a korlátos és zárt $[a,b] \subset \mathbb{R}$ intervallumon értelmezett korlátos függvények körében értelmezzük. A $K[a,b]$ szimbólummal fogjuk jelölni az ilyen függvények halmazát:

$$\boxed{\text{K[a,b]}} := \big\{ f : [a,b] \to \mathbb{R} \mid f \text{ korlátos } [a,b]\text{-n} \big\}.$$

Legyen $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$ és $n \in \mathbb{N}$. Az $[a,b]$ intervallum egy **felosztásán** a

$$\tau := \big\{ a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_n = b \big\}$$

halmazt értjük. $\mathcal{F}[a,b]$ jelöli az $[a,b]$ intervallum felosztásainak a halmazát. A

$$\|\tau\| := \max\big\{ x_{k+1} - x_k \mid k = 0, 1, \ldots, n-1 \big\}$$

számot a τ felosztás **finomságának** nevezzük.

Legyen $f \in K[a,b]$, $\tau \in \mathcal{F}[a,b]$, továbbá

$$m_k := \inf\{ f(x) \mid x_k \le x \le x_{k+1} \}, \text{ illetve } M_k := \sup\{ f(x) \mid x_k \le x \le x_{k+1} \}$$

minden $k = 0, ..., n-1$ indexre. A

$$s(f,\tau) := \sum_{k=0}^{n-1} m_k (x_{k+1} - x_k), \text{ illetve a } S(f,\tau) := \sum_{k=0}^{n-1} M_k (x_{k+1} - x_k)$$

összegeket az f függvény τ felosztáshoz tartozó **alsó**, illetve **felső közelítő összegének** nevezzük.

Mivel tetszőleges $f \in K[a,b]$ függvény és $\tau \in \mathcal{F}[a,b]$ felosztás esetén

$$-\infty < \inf_{x\in[a,b]} f(x)\cdot(b-a) \le s(f,\tau) \le S(f,\tau) \le \sup_{x\in[a,b]} f(x)\cdot(b-a) < +\infty,$$

ezért az

$$\{s(f,\tau) \mid \tau \in \mathcal{F}[a,b]\} \quad \text{és az} \quad \{S(f,\tau) \mid \tau \in \mathcal{F}[a,b]\}$$

halmazok korlátosak. Következésképpen mindegyik halmaz infimuma és szuprémuma véges. Az

$$I_*(f) := \sup\{s(f,\tau) \bigm| \tau \in \mathcal{F}[a,b]\}, \quad \text{illetve az} \quad I^*(f) := \inf\{S(f,\tau) \bigm| \tau \in \mathcal{F}[a,b]\}$$

valós számot az f függvény **Darboux-féle alsó integráljának**, illetve **Darboux-féle felső integráljának** nevezzük. Világos, hogy

$$I_*(f) \le I^*(f) \quad \big(f \in K[a,b]\big).$$

Definíció. *Tegyük fel, hogy $-\infty < a < b < +\infty$ és $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ egy korlátos függvény. Azt mondjuk, hogy f **Riemann-integrálható** az $[a,b]$ intervallumon (röviden **integrálható** $[a,b]$**-n**), ha $I_*(f) = I^*(f)$. Ekkor az*

$$\int_a^b f := \int_a^b f(x)\,dx := I_*(f) = I^*(f)$$

*számot az f függvény $[a,b]$ intervallumon vett **Riemann-integráljának** (vagy más szóval **határozott integráljának**) nevezzük. Az $[a,b]$ intervallumon Riemann-integrálható függvények halmazát az $\boxed{R[a,b]}$ szimbólummal fogjuk jelölni.*

Az előzőekből következik, hogy bizonyos síkidomok területét a következőképpen célszerű *értelmezni.*

Definíció. *Ha a korlátos $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ függvény Riemann-integrálható az $[a,b]$ intervallumon és $f(x) \ge 0$ $(x \in [a,b])$, akkor az f grafikonja alatti*

$$A_f := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid a \le x \le b,\ 0 \le y \le f(x)\}$$

síkidomnak van területe, és a területét így értelmezzük:

$$T(A_f) := \int_a^b f(x)\,dx.$$

Kérdések:

1^o Milyen függvények integrálhatók?

2^o Hogyan lehet az integrált kiszámítani?

Egyszerű példát lehet megadni olyan korlátos f függvényre, amelyre $I_*(f) < I^*(f)$, ami azt jelenti, hogy a függvény *nem integrálható*. Például legyen

$$f(x) := \begin{cases} 0, & \text{ha } x \in [0,1] \cap \mathbb{Q} \\ 1, & \text{ha } x \in [0,1] \cap (\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}). \end{cases}$$

Ekkor $I_*(f) = 0$ és $I^*(f) = 1$, ezért $f \notin R[0,1]$.

A határozott integrál tulajdonságai

Először azt fogalmazzuk meg, hogy a Riemann-integrál „érzéketlen" a függvény *véges* halmazon való „viselkedésére". Más szóval, ha egy Riemann-integrálható függvényt egy véges halmazon (tetszőlegesen) megváltoztatunk, akkor az így kapott „új" függvény is Riemann-integrálható lesz, és a (Riemann-)integrálja ugyanaz marad, mint a kiindulási függvényé. Tehát, ha egy intervallumon értelmezett két (valós) értékű függvény legfeljebb véges sok helyen különbözik egymástól, akkor vagy mindkettő integrálható (és ekkor az integráljuk megegyezik), vagy egyikük sem integrálható.

1. tétel. *Legyen $f, g \in K[a,b]$ és tegyük fel, hogy az $A := \big\{x \in [a,b] \;\big|\; f(x) \neq g(x)\big\}$ halmaz véges. Ekkor*

(a) $f \in R[a,b] \iff g \in R[a,b]$,

(b) *ha $f \in R[a,b]$, akkor* $\int\limits_a^b f = \int\limits_a^b g$.

A következő tételben kiderül, hogy a folytonosság „erősebb" tulajdonság a Riemann-integrálhatóságnál.

2. tétel. *Legyen $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$. Tegyük fel, hogy az $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ függvény folytonos. Ekkor $f \in R[a,b]$, azaz* ***minden folytonos függvény integrálható*** *(jelekkel $C[a,b] \subset R[a,b]$).*

Az állítás megfordítása nem igaz. Legyen például

$$f(x) := \begin{cases} 1, & \text{ha } 0 < x \le 1 \\ 0, & \text{ha } x = 0. \end{cases}$$

Ekkor $f \in R[0,1]$, de $f \notin C[0,1]$.

Megjegyzés. Ez a példa azt mutatja, hogy egy integrálható függvény „bőven" lehet nem folytonos. Az 1. tételt is figyelembe véve az is igaz, hogy egy folytonos függvényt véges sok helyen megváltoztatunk, akkor az így kapott (már nem folytonos) függvény integrálható. Másként fogalmazva: véges sok szakadási hellyel rendelkező, az egyes szakaszokon integrálható függvények integrálhatók. Kérdés, hogy a szakadási helyek számát valamilyen értelemben lehet-e növelni úgy, hogy a függvény továbbra is integrálható maradjon.

Egy függvény Riemann-integrálhatósága lényegében azon múlik, hogy a függvény szakadási helyeinek a halmaza mennyire „kicsi". Ezt az állítást önti precíz formába a Riemann-integrálhatóságra vonatkozó *Lebesgue-féle kritérium*, amely szerint a Riemann-integrálhatóság azzal ekvivalens, hogy a függvény bizonyos értelemben „majdnem" folytonos.

Azt mondjuk, hogy az $A \subset \mathbb{R}$ halmaz *nullamértékű*, ha tetszőleges $\varepsilon > 0$ számhoz megadható $I_k \subset \mathbb{R}$ $(k \in \mathbb{N})$ intervallumoknak egy olyan sorozata, hogy

$$A \subset \bigcup_{k=1}^{+\infty} I_k \quad \text{és} \quad \sum_{k=1}^{+\infty} |I_k| < \varepsilon.$$

Például egyszerűen belátható, hogy $\mathbb{R}$ minden, legfeljebb megszámlálható részhalmaza nullamértékű. Sőt, ha $X_k \subset \mathbb{R}$ $(k \in \mathbb{N})$ nullamértékű, akkor az $\cup_{k\in\mathbb{N}} X_k$ is nullamértékű. Világos továbbá, hogy egy nullamértékű halmaz minden részhalmaza is nullamértékű.

A Riemann-integrálhatóság *Lebesgue-kritériuma*. *Tegyük fel, hogy $f \in K[a,b]$ és legyen az f szakadási helyeinek a halmaza $\mathcal{A}_f := \left\{x \in [a,b] \;\middle|\; f \notin C\{x\}\right\}$. Ekkor $f \in R[a,b]$ azzal ekvivalens, hogy az $\mathcal{A}_f$ halmaz nullamértékű.* $\square$

3. tétel. *Legyen $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$. Tegyük fel, hogy az $f : [a,b] \to \mathbb{R}$* ***szakaszonként folytonos****, azaz $\exists\, m \in \mathbb{N}$ és $\tau = \{a = x_0 < x_1 < \cdots < x_m = b\} \in \mathcal{F}[a,b]$ úgy, hogy minden $k = 0, 1, \ldots, m-1$ index esetén*

- *az $f\big|_{(x_k, x_{k+1})}$ függvény folytonos,*
- *léteznek és végesek a $\lim_{x_k - 0} f$, $\lim_{x_k + 0} f$ határértékek.*

Ekkor $f \in R[a,b]$ és

$$\int_a^b f = \sum_{k=0}^{m-1} \int_{x_k}^{x_{k+1}} f.$$

Az integrálás és a függvényműveletek kapcsolatára vonatkoznak az alábbi állítások.

4. tétel. *Tegyük fel, hogy $f, g \in R[a,b]$. Ekkor*

1^o *minden $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ esetén*

$$\alpha f + \beta g \in R[a,b] \quad \text{és} \quad \int_a^b (\alpha f + \beta g) = \alpha \int_a^b f + \beta \int_a^b g,$$

2^o *$f \cdot g \in R[a,b]$,*

3^o *ha valamilyen $m > 0$ állandóval fennáll az*

$$|g(x)| \geq m > 0 \quad (x \in [a,b])$$

egyenlőtlenség, akkor az $\dfrac{f}{g}$ függvény is integrálható az $[a,b]$ intervallumon.

A Riemann-integrál monotonitását fejezi ki az alábbi állítás.

5. tétel. *Tegyük fel, hogy $f \in R[a,b]$. Ekkor*

(a) *$|f| \in R[a,b]$, és $\left|\int_a^b f\right| \leq \int_a^b |f|$;*

(b) *ha $g \in R[a,b]$, és $f(x) \leq g(x)$ $(x \in [a,b])$, akkor $\int_a^b f \leq \int_a^b g$.*

Az $\int_a^b f$ jelölés használatánál eddig feltettük, hogy $a < b$. Az $\int_a^b f$ szimbólumnak $a = b$ és $a > b$ esetén is célszerű értelmet tulajdonítani. Megállapodunk abban, hogy

$$\int_a^a f := 0, \qquad \text{és} \qquad \int_a^b f := -\int_b^a f, \quad \text{ha} \quad a > b.$$

A Riemann-integrál egy további fontos tulajdonságát fejezi ki a következő állítás.

6. tétel. (Intervallum szerinti additivitás.) *Ha $f \in R[A, B]$, akkor minden $a, b, c \in [A, B]$ esetén*

$$\int_a^b f = \int_a^c f + \int_c^b f.$$

A határozott integrál kiszámítása

A határozott integrál kiszámítása közvetlenül a definícióból – a legegyszerűbb függvények esetén is – hosszadalmas és bonyolult feladat (vö. 1. példa).

Most egy olyan alapvető tétellel ismerkedünk meg, amely ezt a feladatot lényegesen megkönnyíti.

Az eredmény motiválásához az egyszerűség kedvéért tegyük fel, hogy $[a, b] \subset \mathbb{R}$ korlátos és zárt intervallum és az $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ függvény nemnegatív, monoton növekedő és folytonos. Legyen

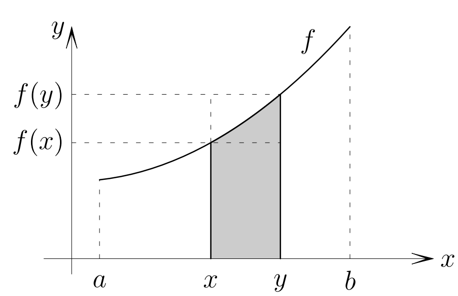
$$T(x) := \int_a^x f(t)\, dt \quad \big(x \in [a, b]\big),$$

vagyis $T(x)$ az $[a, x]$ intervallum feletti síkrész területe.

Tegyük fel, hogy $a \le x < y \le b$. Ekkor $T(y) - T(x)$ egy olyan síkidom területe, amely tartalmaz egy $y - x$ szélességű és $f(x)$ magasságú téglalapot, és amely lefedhető egy $y - x$ szélességű és $f(y)$ magasságú téglalappal, ezért

$$f(x)(y - x) \le T(y) - T(x) \le f(y)(y - x).$$

Ezt szemlélteti a következő ábra:



A fenti egyenlőtlenségből azt kapjuk, hogy

$$f(x) \le \frac{T(y) - T(x)}{y - x} \le f(y).$$

Rögzítsük x-et és vegyük az $y \to x$ határátmenetet. Ekkor

$$f(x) \le \lim_{y\to x} \frac{T(y)-T(x)}{y-x} = T'(x) \le \lim_{y\to x} f(y) = f(x),$$

azaz

$$(*) \qquad T'(x) = f(x) \quad \big(x \in [a,b]\big).$$

Sok esetben adott f függvény ismeretében a fenti egyenlőséget kielégítő T függvényt könnyen meg tudjuk határozni.

Tekintsük például az $f(x) = x^2$ $\big(x \in [0,1]\big)$ függvényt. Ekkor $T'(x) = x^2$ $\big(x \in [0,1]\big)$. A deriváltak egyenlőségére vonatkozó tételből következik, hogy $T(x) = \frac{1}{3}x^3 + c$ $\big(x \in [0,1]\big)$ és $c \in \mathbb{R}$ tetszőleges. Azonban $T(0) = 0$, tehát $T(x) = \frac{1}{3}x^3$ minden $x \in [0,1]$-re. Speciálisan $T(1) = 1/3$, amivel magkaptuk a parabola alatti területet, vagyis a $\int_0^1 x^2\,dx$ határozott integrált (vö. 1. példa).

Az előzőek tehát a **differenciálás és az integrálás kapcsolatát jelzik** abban az esetben, ha az f-re tett feltételek teljesülnek. A (*) egyenlőségnek eleget tevő T függvényekre érdemes külön elnevezést bevezetni.

Definíció. *Legyen $[a,b] \subset \mathbb{R}$ korlátos és zárt intervallum. A $F : [a,b] \to \mathbb{R}$ függvény a $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ függvény egy primitív függvénye az $[a,b]$ intervallumon, ha*
- $F \in C[a,b]$,
- $F \in D(a,b)$ *és* $F'(x) = f(x)$ $\big(x \in (a,b)\big)$.

Világos, hogy ha a F függvény primitív függvénye f-nek, akkor $\forall\, c \in \mathbb{R}$ esetén $F + c$ is primitív függvénye f-nek.

A következő rendkívül fontos tételben megmutatjuk, hogy az f-re tett feltételek lényegesen „gyengíthetők”.

Newton–Leibniz-tétel. *Tegyük fel, hogy*
- $f \in R[a,b]$ *és*
- *az f függvénynek van primitív függvénye az $[a,b]$ intervallumon.*

Ekkor

$$\int_a^b f = F(b) - F(a) =: \big[F(x)\big]_a^b,$$

ahol F a f függvény egy primitív függvénye.

Bizonyítás. Legyen $n \in \mathbb{N}$, és tekintsük az $[a,b]$ intervallum egy tetszőlegesen megválasztott $\tau = \big\{a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b\big\}$ felosztását. A Lagrange-féle középértéktétel szerint minden i-re $(i = 0, 1, \ldots, n-1)$ van olyan $\xi_i \in (x_i, x_{i+1})$ pont, amelyre

$$F(x_{i+1}) - F(x_i) = F'(\xi_i)\,(x_{i+1} - x_i) = f(\xi_i)\,(x_{i+1} - x_i)$$

teljesül. Ha ezeket az egyenlőtlenségeket összeadjuk minden $i = 0, 1, \ldots, n-1$ indexre, akkor a bal oldalon minden tag kiseik, kivéve az $F(x_n) = F(b)$ és az $F(0) = F(a)$ tagokat. Így azt kapjuk, hogy

$$F(b) - F(a) = \sum_{i=0}^{n-1} f(\xi_i)\,(x_{i+1} - x_i).$$

Mivel $\inf\limits_{x\in(x_i,x_{i+1})} f(x) \le f(\xi_i) \le \sup\limits_{x\in(x_i,x_{i+1})} f(x)$ $(i = 0, 1, \ldots, n-1)$, ezért a

$$s(f,\tau) \le F(b) - F(a) \le S(f,\tau)$$

egyenlőtlenség minden $\tau \in \mathcal{F}[a,b]$ felosztásra teljesül. Következésképpen

$$I_*(f) \le \sup_{\tau\in\mathcal{F}[a,b]} s(f,\tau) \le F(b) - F(a) \le \inf_{\tau\in\mathcal{F}[a,b]} S(f,\tau) = I^*(f).$$

Az $f \in R[a,b]$ (azaz az $I_*(f) = I^*(f)$) feltételünkből így az következik, hogy

$$F(b) - F(a) = I_*(f) = I^*(f) = \int_a^b f. \blacksquare$$

2. példa. Számítsuk ki a

$$\int_0^\pi \sin x\,dx$$

határozott integrált.

Világos, hogy a $\sin x$ $\big(x \in [0,\pi]\big)$ függvényre teljesülnek a Newton–Leibniz-tétel feltételei és $F(x) = -\cos x$ $\big(x \in [0,\pi]\big)$ a sin függvény egy primitív függvénye $[0,\pi]$-n. Így

$$\int_0^\pi \sin x\,dx = \big[-\cos x\big]_0^\pi = \big(-\cos\pi\big) - \big(-\cos 0\big) = 2.$$

Ezzel megkaptuk a $\sin_{|\,[0,\pi]}$, függvény garfikonja alatti síkidom területét. $\blacksquare$

Megjegyzés. A Newton–Leinbiz-tétel feltételei közül egyik sem hagyható el. Belátható, hogy a tételben szereplő két feltétel egymástól független (egyikből sem következik a másik): Létezik ui. olyan integrálható függvény, amelynek nincs primitív függvénye (hamarosan látni fogjuk, hogy pl. a $\operatorname{sign} x$ $\big(x \in [-1,1]\big)$ egy ilyen függvény). Jóval nehezebb annak a megmutatása, hogy van olyan nem integrálható függvény, amelynek van primitív függvénye. $\square$

A határozatlan integrál (primitív függvények)

A deriválás egy differenciálható függvényhez hozzárendeli a deriváltfüggvényét. Az előző pont eredményei azt mutatják, hogy célszerű közelebbről megvizsgálni ennek a műveletnek a „megfordítását": egy adott függvényhez keresni olyan differenciálható függvényt, hogy ez utóbbinak a deriváltja a kiindulási függvény legyen. A keresendő függvényre érdemes külön elnevezést bevezetni. A következő fontos fogalmat csak az $\mathbb{R}$ egy adott $I \subset \mathbb{R}$ **nyílt intervallumán** (ez lehet korlátos és nem korlátos is) értelmezett függvényekre fogjuk bevezetni.

Definíció. *Legyen adott az $I \subset \mathbb{R}$ nyílt intervallumon értelmezett $f : I \to \mathbb{R}$ függvény. Azt mondjuk, hogy a $F : I \to \mathbb{R}$ függvény f **primitív függvénye**, ha $F \in D(I)$ és $F'(x) = f(x)$ $(x \in I)$.*

Világos, hogy ha a F függvény primitív függvénye f-nek, akkor $\forall\, c \in \mathbb{R}$ esetén $F + c$ is primitív függvénye f-nek.

Az `elemi függvények deriváltjaira` gondolva számos függvény `primitív függvényeit` meg tudjuk már határozni. Például az

$$f(x) = \frac{1}{1+x^2} \quad (x \in \mathbb{R})$$

függvény egy primitív függvénye

$$F(x) = \operatorname{arc\,tg} x \quad (x \in \mathbb{R}),$$

mert

$$F'(x) = \big(\operatorname{arc\,tg} x\big)' = \frac{1}{1+x^2} = f(x) \quad (x \in \mathbb{R}).$$

Kérdések:

1^o Milyen f függvénynek **van** primitív függvénye?

2^o Ha f-nek van primitív függvénye, akkor hogyan lehet azt meghatározni?

Az 1^o problémára az alábbi fontos állítások érvényesek:

Elégséges feltétel primitív függvény létezésére. *Ha $I \subset \mathbb{R}$ nyílt intervallum és $f : I \to \mathbb{R}$ **folytonos** függvény, akkor f-nek **van** primitív függvénye.*

Szükséges feltétel primitív függvény létezésére. *Ha $I \subset \mathbb{R}$ nyílt intervallum és a $f : I \to \mathbb{R}$ függvénynek van primitív függvénye, akkor f Darboux-tulajdonságú az I intervallumon, azaz tetszőleges $a, b \in I$, $a < b$, $f(a) \neq f(b)$ esetén az f függvény minden $f(a)$ és $f(b)$ közötti értéket felvesz $[a, b]$-ben.*

$\boxed{\textbf{3. példa.}}$ Az előjelfüggvény (vagyis a sign függvény) a $(-1, 1)$ intervallumon nem Darboux-tulajdonságú, ezért ezen az intervallumon **nincs primitív függvénye**.

Primitív függvények száma. *Legyen $I \subset \mathbb{R}$ nyílt intervallum és $f : I \to \mathbb{R}$ adott függvény.*

1^o Ha $F : I \to \mathbb{R}$ a f függvény egy primitív függvénye, akkor minden $c \in \mathbb{R}$ esetén az $F + c$ függvény is primitív függvénye f-nek.

2^o Ha $F_1, F_2 : I \to \mathbb{R}$ primitív függvényei a f függvénynek, akkor

$$\exists\, c \in \mathbb{R} : \quad F_1(x) = F_2(x) + c \qquad (x \in I),$$

azaz a primitív függvények csak konstansban különböznek egymástól.

Megjegyzés. 2^o-ben lényeges, hogy f **intervallumon** értelmezett függvény. Tekintsük például az

$$f(x) := \begin{cases} 2x, & \text{ha } x \in (0,1) \\ 0, & \text{ha } x \in (2,3) \end{cases}$$

függvényt. Legyen

$$F_1(x) := \begin{cases} x^2, & \text{ha } x \in (0,1) \\ 1, & \text{ha } x \in (2,3) \end{cases} \qquad \text{és} \qquad F_2(x) := \begin{cases} x^2, & \text{ha } x \in (0,1) \\ 0, & \text{ha } x \in (2,3). \end{cases}$$

Ekkor $F_1' = f = F_2'$, de F_1 és F_2 nem csak egy konstansban különböznek egymástól, mert

$$F_1(x) - F_2(x) := \begin{cases} 0, & \text{ha } x \in (0,1) \\ 1, & \text{ha } x \in (2,3). \end{cases}$$

Definíció. *Az $I \subset \mathbb{R}$ nyílt intervallumon értelmezett f függvény primitív függvényeinek a halmazát f **határozatlan integráljának** nevezzük, és így jelöljük:*

$$\int f := \int f(x)\,dx := \big\{F : I \to \mathbb{R} \mid F \in D \text{ és } F' = f\big\}.$$

*Ilyenkor f-re az **integrandus**, illetve az **integrálandó függvény** elnevezéseket is használjuk.*

Ha $F \in \int f$, akkor az előző tétel 2^o állításából következő $\int f = \big\{F + c \mid c \in \mathbb{R}\big\}$ egyenlőséget rövidebben (és kevésbé precízen) az alábbi formában fogjuk jelölni:

$$\int f(x)\,dx = F(x) + c \quad \big(x \in I,\ c \in \mathbb{R}\big) \quad \text{vagy} \quad \int f(x)\,dx = F(x) + c \quad \big(x \in I\big).$$

(Az adott f függvény értelmezési tartományát – vagyis az I intervallumot – mindig feltüntetjük, és időnként a $c \in \mathbb{R}$ feltételt a képletbe „beleértjük”, de azt nem írjuk ki.)

Így például

$$\int \frac{1}{1+x^2}\,dx = \operatorname{arc\,tg} x + c \quad \big(x \in \mathbb{R}\big),$$

vagy

$$\int \frac{1}{\cos^2 x}\,dx = \operatorname{tg} x + c \quad \big(x \in \big(-\tfrac{\pi}{2}, \tfrac{\pi}{2}\big)\big).$$

Primitív függvények meghatározásának módszerei

Primitív függvény keresése tehát a deriválás műveletének a „megfordítása” (inverze). Mondhatjuk azt is, hogy deriválni „könnyű”, mert ehhez elég ismerni néhány alapfüggvény deriváltját, valamint a deriválási szabályokat. Talán nem meglepő, hogy az inverz művelet (a primitív függvény keresése) már jóval bonyolultabb feladat (gondoljunk például az inverz függvény kiszámításának a problémájára).

Amikor egy függvény primitív függvényeit keressük, akkor ugyanazt a módszert kell követnünk, amelyet a határérték és a deriváltak kiszámításánál alkalmaztunk. Először is szükségünk van egy listára, amely megadja a legegyszerűbb függvények primitív függvényeit. Ezek az ún. **alapintegrálok**. Ezen kívül ismernünk kell a deriválási szabályok „megfordításaiból” adódó **integrálási szabályokat**.

A továbbiakban felsoroljuk a primitív függvények meghatározásához használható **alapvető** módszereket.

1. Alapintegrálok, a határozatlan integrál linearitása

Az alapintegrálokat ebben a táblázatban soroltuk fel. Például

- $\displaystyle\int \frac{1}{x}\,dx = \ln x + c \quad \big(x \in (0,+\infty)\big),$
- $\displaystyle\int \frac{1}{x}\,dx = \ln(-x) + c \quad \big(x \in (-\infty,0)\big),$
- $\displaystyle\int x^\alpha\,dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + c \quad \big(x \in (0,+\infty,0),\ \alpha \in \mathbb{R}\setminus\{-1\}\big).$

Itt hívjuk fel a figyelmet arra, hogy a „határozzuk meg az $\int f$-et” feladatokban természetesen elengedhetetlen az f függvény, és így (többek között) az $I = \mathcal{D}_f$ értelmezési tartomány ismerete. Ez utóbbi időnként „elsikkad” a feladat kitűzésekor, mondván, hogy az „magától értetendő”. Ez gyakran vezethet félreértésekre, ezért kerülni kell ezt a pongyolaságot. A továbbiakban még a $(*)$ rövid jelölés alkalmazása esetén is mindig megadjuk, hogy melyik $I = \mathcal{D}_f$ *intervallumon* tekintjük az f függvény primitív függvényeit.

A határozatlan integrál linearitása. *Legyen $I \subset \mathbb{R}$ nyílt intervallum. Ha az $f, g : I \to \mathbb{R}$ függvényeknek létezik primitív függvénye, akkor tetszőleges $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ mellett $(\alpha f + \beta g)$-nek is létezik primitív függvénye és*

$$\int \big(\alpha f(x) + \beta g(x)\big)\,dx = \alpha \int f(x)\,dx + \beta \int g(x)\,dx \quad (x \in I).$$

Például $\displaystyle\int \big(6x^2 - 8x + 3\big)\,dx = 6\cdot\frac{x^3}{3} - 8\cdot\frac{x^2}{2} + 3x + c \quad (x \in \mathbb{R}).$

2. Az első helyettesítési szabály

Az összetett függvény deriválására vonatkozó tételnek a „megfordításával” kapcsolatban két állítást fogunk megmutatni. Az egyiket most, a másikat pedig a következő órán ismertetjük.

Az első helyettesítési szabály. *Legyenek adottak az $I, J \subset \mathbb{R}$ nyílt intervallumok és a $g : I \to \mathbb{R}$, $f : J \to \mathbb{R}$ függvények. Tegyük fel, hogy $g \in D(I)$, $\mathcal{R}_g \subset J$ és a f függvénynek van primitív függvénye. Ekkor az $(f \circ g) \cdot g'$ függvénynek is van primitív függvénye és*

$$\int f\big(g(x)\big) \cdot g'(x)\,dx = F\big(g(x)\big) + c \qquad (x \in I),$$

ahol F a f függvény egy primitív függvénye.

Bizonyítás. Legyen $F \in \int f$. Ekkor $F \in D(J)$ és $F' = f$. Az összetett függvény deriválására vonatkozó tétel szerint ekkor $F \circ g \in D(I)$ és $(F \circ g)' = \big(F' \circ g\big) \cdot g' = f \circ g \cdot g'$, és ez azt jelenti, hogy $F \circ g \in \int f \circ g \cdot g'$. ■

Ez a tétel akkor használható, ha az $\int f \circ g \cdot g'$ integrált kell kiszámítanunk, és ismerjük f egy primitív függvényét. A gyakorlaton fogunk példákat mutatni a tétel alkalmazására.

3. A parciális integrálás

A szorzatfüggvény deriválására vonatkozó tétel „megfordítását” fejezi ki a következő állítás.

A parciális integrálás szabálya. *Legyen $I \subset \mathbb{R}$ nyílt intervallum. Tegyük fel, hogy $f, g \in D(I)$ és az $f'g$ függvénynek létezik primitív függvénye I-n. Ekkor az fg' függvénynek is van primitív függvénye és*

$$\int f(x)g'(x)\,dx = f(x)g(x) - \int f'(x)g(x)\,dx \quad (x \in I).$$

Bizonyítás. Ha $F \in \int f'g$, akkor $F \in D(I)$ és $F' = f'g$. Mivel $fg \in D(I)$ és $(fg)' = f'g + fg'$, ezért $(fg - F) \in D(I)$ és $(fg - F)' = f'g + fg' - f'g = fg'$. Így $(fg - F) \in \int fg'$ valóban fennáll. ■

A parciális integrálás tételét akkor célszerű használni az fg' primitív függvényének a meghatározására, ha $f'g$ egy primitív függvényét már ismerjük. A gyakorlaton fogunk példákat mutatni a tétel alkalmazására.