8. hét, 2020. április 6.

Analízis I. Előadás

Tartalom

a) Műveletek sorokkal

b) A valós számok p-adikus tört alakban való előállítása

c) Sorok zárójelezése

Műveletek sorokkal

Sorok összeadása és konstanssal való szorzása

Emlékeztető: a sorok speciálisan generált sorozatok.
Nem a definíció a kérdés, hanem a "sor terminológiában" a jelentése, értelmezése.

a) Konstanssal való szorzás: Legyen $a : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ és $c \in \mathbb{R}$.
Ekkor $\sum a = (s_n)$, ahol $s_n = \sum_{k=0}^{n} a_k$.
Következésképpen $c \cdot \sum a = c \cdot (s_n) = (c \cdot s_n)$.
Mivel $c \cdot s_n = \sum_{k=0}^{n} c \cdot a_k$, ezért $\sum(c \cdot a_k) = c \cdot \sum(a_k)$ és
$\sum_{k=0}^{\infty} c \cdot a_k = c \cdot \sum_{k=0}^{\infty} a_k$
Azt kaptuk, hogy egy sor konstans szorosa a generáló sorozat konstanszoroza álta generált sor.

b) Sorok összege: Legyen $a : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ és $b : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$, továbbá $s_n = \sum_{k=0}^{n} a_k$ és $\sigma_n = \sum_{k=0}^{n} b_k$.
Ekkor $\sum a + \sum b = (s_n) + (\sigma_n) = (s_n + \sigma_n)$.
Mivel $s_n + \sigma_n = \sum_{k=0}^{n}(a_k + b + k)$, ezért $\sum a + \sum b = \sum(a + b)$ és
$\sum_{k=0}^{\infty}(a_k + b_k) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k + \sum_{k=0}^{\infty} b_k$.
Sorok összege a generáló sorozatok összege által által generált sor.

c) Szorzás: KÉSŐBB!!!

p-adikus törtek

Legyen $p \in \mathbb{N}$, $p \geq 2$. Egy $a : \mathbb{N} \to \{0, \ldots, p-1\}$ sorozat esetén tekintsük az általa indukált $\sum \left(\dfrac{a_k}{p^{k+1}} \right)$ sort.

A sor konvergenciájának igazolásához vegyük először a $\sum \left(\dfrac{p-1}{p^{k+1}} \right)$ sort.

Mivel $s_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{p-1}{p^{k+1}} = \frac{p-1}{p} \cdot \sum_{k=0}^{n} \left(\frac{1}{p} \right)^k$, ezért

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{p-1}{p^{k+1}} = \lim_{n\to\infty} s_n = \frac{p-1}{p} \cdot \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{1}{p} \right)^k = \frac{p-1}{p} \frac{1}{1-\dfrac{1}{p}} = \frac{p-1}{p} \cdot \frac{p}{p-1} = 1.$$

Innen $0 \leq a_k \leq p-1$ miatt a pozitív sorokra vonatkozó összehasonlító kritériumból következik, hogy a $\sum \left(\dfrac{a_k}{p^{k+1}} \right)$ sor konvergens, és $0 \leq \displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \frac{a_k}{p^{k+1}} \leq 1$.

Legyen $x = \displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \frac{a_k}{p^{k+1}}$. Ekkor a $\sum \left(\dfrac{a_k}{p^{k+1}} \right)$ sort az x szám p-adikus tört alakjának nevezzük.

Az x szám p-adikus tört előállításának szokásos jelölése

$$x = 0, a_0\, a_1\, a_2\, \cdots =: \sum_{k=0}^{\infty} \frac{a_k}{p^{k+1}}$$

Az alábbi állítást igazoltuk

Állítás

Legyen $p \in \mathbb{N}$, $p \geq 2$. Ekkor minden

$$0, a_0 \, a_1 \ldots \qquad (a_k \in \{0, \ldots, p-1\},\ k \in \mathbb{N})$$

p-adikus tört esetén esetén $\exists \displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \frac{a_k}{p^{k+1}} = x \in [0, 1]$.

Példák

1) $p = 10$. $a_0 = 5,\ a_1 = 3,\ a_k = 0\ (k \geq 2)$. $x = \dfrac{5}{10} + \dfrac{3}{10^2}$.

Tizedes tört alak: $\dfrac{53}{100} = 0,530\ldots$.

2) $p = 10$. $a_k = 1\ (k \geq 1)$.

$$x = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{10^{k+1}} = \frac{1}{10} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{10^k} = \frac{1}{10} \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{10}} = \frac{1}{9}.$$

Tizedes tört alak: $\dfrac{1}{9} = 0,1\ldots$.

Példák, folytatás

3) $p = 2$. $a_0 = 0$, $a_k = 1$ $(k \geq 1)$.

$$x = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^{k+1}} = \frac{1}{4} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2^k} = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{2}} = \frac{1}{2}.$$

2-edes tört alak, diadikus tört alak: $\dfrac{1}{2} = 0,1\dots$.

4) Hasonlóan. $p = 10$. $a_0 = 0$, $a_k = 9$ $(k \geq 1)$.

$$x = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{9}{10^{k+1}} = \frac{9}{100} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{10^k} = \frac{9}{100} \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{10}} = \frac{1}{10}.$$

Tizedes tört alak: $\dfrac{1}{10} = 0,0\,9\dots$.

Felmerülő kérdések

i) Előllítható-e minden $x \in [0,1]$ szám p-adikus tört alakban?

ii) Ha egy $x \in [0,1]$ szám előállítható p-adikus tört alakban, akkor ez hányféleképpen tehető meg?
Egyértelmű-e? Ez utóbbi nyilván nem igaz, mert pl.
$0,1\,0\ldots = \dfrac{1}{10} = 0,0\,9\ldots$, $p = 10$.

Tétel

Legyen $p \in \mathbb{N}$, $p \geq 2$. Minden $x \in [0,1]$ szám előállítható p-adikus tört alakban, azaz $\exists\ a : \mathbb{N} \to \{0, \ldots, p-1\}$, amelyre $x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{a_k}{p^{k+1}}$.

Bizonyítás

Legyen $p \in \mathbb{N}$, $p \geq 2$, és $x \in [0,1)$.
Ekkor

$$x \in [0,1) = \bigcup_{k=0}^{p-1} \left[\frac{k}{p}, \frac{k+1}{p}\right) \quad \Longrightarrow \quad \exists|\ a_0 \in \{0, \ldots, p-1\},\ x \in \left[\frac{a_0}{p}, \frac{a_0+1}{p}\right),$$

azaz $\frac{a_0}{p} \leq x < \frac{a_0+1}{p}$. Ezt folytatva

$$x \in \left[\frac{a_0}{p}, \frac{a_0+1}{p}\right) = \bigcup_{k=0}^{p-1} \left[\frac{a_0}{p} + \frac{k}{p^2}, \frac{a_0}{p} + \frac{k+1}{p^2}\right)$$

$$\Downarrow$$

$$\exists|\ a_1 \in \{0, \ldots, p-1\},\ x \in \left[\frac{a_0}{p} + \frac{a_1}{p^2}, \frac{a_0}{p} + \frac{a_1+1}{p^2}\right),$$

azaz $\frac{a_0}{p} + \frac{a_1}{p^2} \leq x < \frac{a_0}{p} + \frac{a_1+1}{p^2}$.

Folytatás

Indukcióval: Ha valamely $k \in \mathbb{N}$, $k \geq 1$-re $\sum_{j=0}^{k} \frac{a_j}{p^{j+1}} \leq x < \sum_{j=0}^{k-1} \frac{a_j}{p^{k+1}} + \frac{a_k + 1}{p^{k+1}}$ akkor

$$x \in \Big[\sum_{j=0}^{k} \frac{a_j}{p^{j+1}}, \sum_{j=0}^{k-1} \frac{a_j}{p^{j+1}} + \frac{a_k + 1}{p^{k+1}} \Big) = \bigcup_{j=0}^{k-1} \Big[\sum_{j=0}^{n} \frac{a_j}{p^{k+1}} + \frac{j}{p^{k+2}}, \sum_{j=0}^{n} \frac{a_j}{p^{j+1}} + \frac{j+1}{p^{k+2}} \Big)$$

$$\Downarrow$$

$$\exists |\, a_{k+1} \in \{0, \ldots, p-1\},\ x \in \Big[\sum_{j=0}^{k} \frac{a_j}{p^{j+1}} + \frac{a_{k+1}}{p^{k+2}}, \sum_{j=0}^{k} \frac{a_j}{p^{j+1}} + \frac{a_{k+1} + 1}{p^{k+2}} \Big),$$

azaz $\sum_{j=0}^{k+1} \frac{a_j}{p^{j+1}} \leq x < \sum_{j=0}^{k+1} \frac{a_j}{p^{j+1}} + \frac{1}{p^{k+2}}$.

Ha az (a_k) sorozat tagjait így definiáljuk, akkor egy olyan sorozatot kapunk, amelyre

$$s_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{a_k}{p^{k+1}} \leq x < \sum_{k=0}^{n} \frac{a_k}{p^{k+1}} + \frac{1}{p^{n+1}}, .$$

Mivel $0 \leq x - s_n < \frac{1}{p^{n+1}}$, és $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{p^{n+1}} = \frac{1}{+\infty} = 0$, ezért $(x - s_n)$ nullsorozat, azaz $x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{a_k}{p^{k+1}}$.

Ezzel igazoltuk, hogy $\forall\ x \in [0, 1)$ szám felírható p-adikus tört alakban. $\square$

Egyértelműség

Láttuk, hogy vannak olyan számok amelyekne több különböző p-adikus tört előállításuk is van.

a) Melyek ezek a számok?

b) Hány különböző p-adikus tört alakjuk van?

c) Mi a kapcsolat a különböző alakok között?

Tétel

Legyen $p \in \mathbb{N}$, $p \geq 2$. Két különböző $a : \mathbb{N} \to \{0, \ldots, p-1\}$, $b : \mathbb{N} \to \{0, \ldots, p-1\}$ sorozat esetén $\sum_{k=0}^{\infty} \dfrac{a_n}{p^{k+1}} = \sum_{k=0}^{\infty} \dfrac{b_n}{p^{k+1}}$ akkor és csak akkor, ha $\exists\, N \in \mathbb{N}$, amelyre

i) $a_N \neq 0$, $a_n = 0$ ($n \in \mathbb{N}$, $n > N$),

ii) $a_k = b_k$ $(k < N)$, $b_N = a_N - 1$, $b_n = p - 1$ $(n \in \mathbb{N},\ n > N)$,

vagy fordítva.

Más jelölésekkel

Két p-adikus összeg akkor és csak akkor egyenlő, ha

$$a = a_0, \ldots, a_{N-1}, a_N, 0, \ldots, \qquad b = a_0, \ldots, a_{N-1}, a_N - 1, p-1, \ldots$$

alakú, vagy fordítva.

$$\frac{a_0}{p} + \ldots + \frac{a_{N-1}}{p^N} + \frac{a_N}{p^{N+1}} = \frac{a_0}{p} + \ldots + \frac{a_{N-1}}{p^N} + \frac{a_N - 1}{p^{N+1}} + \frac{p-1}{p^{N+2}} + \frac{p-1}{p^{N+3}} + \frac{p-1}{p^{N+4}} + \ldots$$

Példák

a) $p = 10$. $0,2654 = 0,2653999\ldots$.

b) $p = 10$. $0,9 = 0,8999\ldots$.

c) $p = 2$. $0,001011 = 0,001010111\ldots$.

Megjegyzés

a) Ha $x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{a_k}{p^{k+1}}$, akkor az (a_k) sorozat tagjait az x szám p-adikus számjegyeinek nevezzük.

b) Azokat a számokat, amelyeknek van olyan p-adikus tört alakja, amiben a számjegyek sorozata egy index után csupa 0 számjegyből áll, p-adikusan racionális számoknak nevezzük.

c) Megszámlálatóan végtelen sok p-adikusan racionális szám van.

Összefoglalás

a) A p-adikusan irracionális számoknak egy és csak egy p-adikus tört alakjuk van.

b) A megszámlálhatóan sok p-adikusan racionális számoknak pontosan két p-adikus tört alakjuk van. Az egyikben a számjegyek egy index után mind 0-val, a másikban pedig $p - 1$-gyel egyenlőek.

A tétel bizonyítása

Legyen $p \in \mathbb{N}$, $p \geq 2$, $a : \mathbb{N} \to \{0, \ldots, p-1\}$, $b : \mathbb{N} \to \{0, \ldots, p-1\}$, $a \neq b$.
Jelölje $N \in \mathbb{N}$ azt a legkisebb indexet, amelyre $a_N \neq b_N$. Feltehetjük, hogy $a_N > b_N$.
Ekkor

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{a_k}{p^{k+1}} = \sum_{k=0}^{N-1} \frac{a_k}{p^{k+1}} + \frac{a_N}{p^{N+1}} + \sum_{k=N+1}^{\infty} \frac{a_k}{p^{k+1}} \geq \sum_{k=0}^{N-1} \frac{a_k}{p^{k+1}} + \frac{a_N}{p^{N+1}} \,.$$

Egyenlőség akkor és csak akkor van, $a_k = 0 \ (k > N)$.

Másrészt

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{\infty} \frac{b_k}{p^{k+1}} &= \sum_{k=0}^{N-1} \frac{b_k}{p^{k+1}} + \frac{b_N}{p^{N+1}} + \sum_{k=N}^{\infty} \frac{b_k}{p^{k+1}} \leq \sum_{k=0}^{N-1} \frac{a_k}{p^{k+1}} + \frac{a_N - 1}{p^{N+1}} + \sum_{k=N+1}^{\infty} \frac{p-1}{p^{k+1}} \\ &= \sum_{k=0}^{N-1} \frac{a_k}{p^{k+1}} + \frac{a_N - 1}{p^{N+1}} + (p-1)\frac{1}{p^{N+2}} \frac{1}{1 - \frac{1}{p}} \\ &= \sum_{k=0}^{N-1} \frac{a_k}{p^{k+1}} + \frac{a_N - 1}{p^{N+1}} + \frac{1}{p^{N+1}} = \sum_{k=0}^{N-1} \frac{a_k}{p^{k+1}} + \frac{a_N}{p^{N+1}} \,.\end{aligned}$$

Egyenlőség akkor és csak akkor van, ha $b_N = a_N - 1$ és $b_k = p - 1 \ (k > N)$.

Azt kaptuk, hogy $a \geq \sum_{k=0}^{N-1} \frac{a_k}{p^{k+1}} + \frac{a_N}{p^{N+1}} \geq b$, és egyenlőség akkor csak akkor van, ha

$$a_k = 0 \quad (k > N)\,, \qquad b_N = a_N - 1\,, \qquad b_k = p - 1 \quad (k > N)\,. \quad \square$$

Műveleti tulajdonságok: kommutativitás, asszociativitás

Asszociativitás

Sorok zárójelezése

Az asszociativitás kérdése végtelen sorokra.

Átvihetők-e a véges összegekre ismert műveleti tulajdonságok végtelen összegekre?

$$a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 + a_6 + \ldots + a_9 = (a_1 + a_2) + (a_3 + a_4 + a_5) + (a_6 + \ldots + a_9)$$

Sorok zárójelezése

Legyen $m : \mathbb{N} \to \mathbb{N} \uparrow$, valamint $a : \mathbb{R} \to \mathbb{N}$.
Képezzük az $\alpha : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ sorozatot a következőképpen

$$\alpha_0 = a_0 + \ldots + a_{m_0}\,, \quad \alpha_k = a_{m_{k-1}+1} + \ldots + a_{m_k} \quad (k \in \mathbb{N},\ k \geq 1)\,.$$

Ekkor a $\sum(\alpha_k)$ sort a $\sum(a_k)$ sor egy zárójelezésének nevezzük.
Az (m_k) sorozatot a $\sum(\alpha_k)$ sor zárójel sorozatának nevezzük.

Tétel

Ha egy sor konvergens, akkor bármely zárójelezése is konvergens, és a zárójelezett sor összege megegyezik az eredeti sor összegével.

Bizonyítás

Legyen a $\sum(a_k)$ egy konvergens sor, $\sum(\alpha_k)$ sor egy zárójelezése, aminek a zárójel sorozata (m_k).
A definíció alapján

$$\begin{aligned}\sigma_n &= \sum_{k=0}^{n} \alpha_k \\ &= (a_0 + \ldots + a_{m_0}) + (a_{m_0+1} + \ldots + a_{m_1}) + \ldots + (a_{m_{n-1}+1} + \ldots + a_{m_n}) \\ &= a_0 + \ldots + a_{m_n} \\ &= s_{m_n} \,.\end{aligned}$$

Ez azt jelenti, hogy a zárójelezett sor (σ_n) részletösszegsorozata az eredeti sor (s_n) sorozatának az (s_{m_n}) részsorozata.
Következésképpen $\exists\ \lim_{n\to\infty} \sigma_n = \lim_{n\to\infty} s_{m_n} = \lim_{n\to\infty} s_n$, azaz

$$\sum_{k=0}^{\infty} \alpha_k = \sum_{n=0}^{\infty} a_k \,. \qquad \square$$

Igaz-e az előző tétel megfordítása

Következik-e a zárójelezett sor konvergenciájából az eredeti sor konvergenciája?

Válasz: általában nem.

Példa: $a_k = (-1)^k$, $m_k = 2k$, $\alpha_0 = 1$, $\alpha_k = a_{2(k-1)+1} + a_{2k} = -1 + 1 = 0 \ \ (k \in \mathbb{N})$.
Ekkor $\sum \left((-1)^k\right)$ divergens, de $\sum(\alpha_k)$ konvergens, $\sum_{k=0}^{\infty} \alpha_k = 1$.

Tétel

Legyen $a : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$, $m : \mathbb{N} \to \mathbb{N} \uparrow$.
Ha az m zárójelezéssel definiált zárójelezett sor konvergens, és

- **i)** $(m_{k+1} - m_k)$ korlátos sorozat, valamint
- **ii)** $\exists \lim_{k\to\infty} a_k = 0$,

akkor a $\sum(a_k)$ sor konvergens.

Megjegyzés

Az i) feltétel azt jelenti, hogy a zárójelek hossza közös korlát alatt marad.
Az ii) feltételről tudjuk, hogy az a sor konvergencájának szükséges feltétele. A fenti példa mutatja, hogy ezt a zárójelezett sor konvergencája önmagában nem garantálja.
Az előző tételbő következík, hogy az eredeti sor összege megegyezik a zárójelezett sor összegével.

Bizonyítás

Jelölje $\sum(\alpha_k)$ a konvergens zárojelezett sort (Emlékeztető: $\alpha_0 = a_0 + \ldots + a_{m_0}$, $\alpha_k = a_{m_{n-1}+1} + \ldots + a_{m_n}$), A a sor összegét, σ_n pedig ez n-edik részletösszegét.
Legyen $\epsilon > 0$.
$*$ Ekkor $\exists\ N \in \mathbb{N}_1$, hogy $\forall\ n > N_1$ esetén $|\sigma_n - A| < \epsilon$.
$**$ Az i) feltétel szerint van olyan $K \in \mathbb{N}$ szám, hogy $m_{k+1} - m_k < K\ \forall\ k \in \mathbb{N}$.
$***$ Másrészt az ii) feltétel szerint (a_k) nullsorozat, azaz $\exists\ N_2 \in \mathbb{N}$, hogy $\forall\ k > M$ $|a_k| < \epsilon$.
Ezek után legyen $N := \max\{m_{N_1}, N_2\}$. Világos, hogy $\forall\ \in \mathbb{N}$ esetén van olyan $\ell \in \mathbb{N}$, hogy $m_{\ell-1} + 1 \leq n \leq m_\ell$.
Ha $n > N$, akkor az n-et tartalmazó $m_{\ell-1} + 1 \leq k \leq m_\ell$ intervallum jobb végpontjára is igaz, hogy $m_\ell > N$, amiből az N definíciója szerint következik, hogy $\ell > N_1$.
Ekkor

$$|A - s_n| \leq |A - \sigma_\ell| + |\sigma_\ell - s_n|\,.$$

Mivel $\ell > N_1$, ezért $*$ szerint $|, |A - \sigma_\ell| < \epsilon$. Mivel $\ell > N_1$, ezért $*$ szerint $||A - \sigma_\ell| < \epsilon$.
Mivel $n > N_2$, ezért $**$ és $***$ alapján

$$\begin{aligned}|\sigma_\ell - s_n| = |a_{n+1} + \ldots + a_{m_\ell}| &\leq |a_{n+1}| + \ldots + |a_{m_\ell}| \\ &< (m_\ell - n + 1)\epsilon \leq (m_\ell - m_{\ell-1})\epsilon \leq K\epsilon\,.\end{aligned}$$

Összefoglalva: $|A - s_n| < (K + 1)\epsilon$.
Ezzel az állítást bebizonyítottuk. $\square$