Analízis1–ABC, 1. zárthelyi dolgozat, 2019.03.29.

I. Feladatok

1. Bizonyítsuk be, hogy minden $2 \leq n \in \mathbb{N}$ természetes szám esetén :

$$\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}\right)^n > \frac{n^{n-1}}{(n-1)!}.$$

2. Adott az $A := \left\{ \frac{2+\sqrt{x}}{3\sqrt{x}+1} \in \mathbb{R} \;\middle|\; x \in [1/9; +\infty) \right\}$ halmaz. Határozza meg $supA$, $infA$, $minA$, $maxA$–t ha léteznek és állításait bizonyítsa is be.

3. Adottak az $f(x) := \frac{2+x}{1-x}$ $\quad (x \in (1; +\infty))$ és a $g(x) := \frac{1}{x}$ $\quad (x \in \mathbb{R} \setminus \{0\})$ függvények.

1. Határozzuk meg az $f \circ g$ függvényt.
2. Invertálható-e az $f \circ g$ függvény és ha igen akkor adjuk meg az $(f \circ g)^{-1}$ inverzfüggvényt ($D_{(f\circ g)^{-1}}$–et , $R_{(f\circ g)^{-1}}$–et és az $(f \circ g)^{-1}(x)$–et).

4. Sorozatok :

1. A definíció segítségével lássa be, hogy az alábbi sorozat konvergens és adja meg a határértékét :

$$x_n = \frac{n^2-2n+4}{5n^2+n+1} \quad (n \in \mathbb{N}).$$

2. Számítsa ki a következő határértékeket :
   (a) $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\sqrt{4n^2+2n+1}-2n\right)$;
   (b) $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\frac{(n-2^n)(n+2^n)+3n}{(n+2^{n+1})^2+1}\right)$.

II. Bizonyítással kért tétel :

1. A Cauchy–féle konvergencia kritérium sorozatokra.

Munkavezetny Frill

Analízis1ABC, 1. zárthelyi dolgozat, 2019.03.29.

Megoldások pontozással

1. Bizonyítsuk be, hogy minden $2 \leq n \in \mathbb{N}$ természetes szám esetén :

$$\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}\right)^n > \frac{n^{n-1}}{(n-1)!}. \quad \textbf{(5 pont)}$$

Megoldás :

Alkalmazzuk a számtani–mértani közepekre vonatkozó egyenlőtlenséget az $1; \frac{1}{2}; \frac{1}{3}; \ldots; \frac{1}{n}$ nem mind azonos (n darab) pozitív valós számra :

$$\left(\frac{1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}}{n}\right)^n > 1 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} \cdot \ldots \cdot \frac{1}{n} = \frac{1}{n!}.$$

------------------------------(**3 pont**)------------------------------

Átrendezve és egyszerűsítve kapjuk, hogy :

$$\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}\right)^n > \frac{n^n}{(n)!} = \frac{n^n}{(n-1)! \cdot n} = \frac{n^{n-1}}{(n-1)!}.$$

------------------------------(**2 pont**)------------------------------

2. Adott az $A := \left\{ \frac{2+\sqrt{x}}{3\sqrt{x}+1} \in \mathbb{R} \;\middle|\; x \in [1/9; +\infty) \right\}$ halmaz. Határozza meg $supA$, $infA$, $minA$, $maxA$–t, ha léteznek és állításait bizonyítsa is be. **10 pont**

$\inf A = \frac{1}{3}$ $\min A$ $\not\exists$

$\max A = \frac{7}{6} = \sup A$

Megoldás :

Az A halmaz elemei a következő alakra hozhatóak :

$$\frac{2+\sqrt{x}}{3\sqrt{x}+1} = \frac{1}{3} + \frac{5}{9\sqrt{x}+3}.$$

------------------------------(**1 pont**)------------------------------

A fenti alakból leolvasható, hogy ha $x \in [1/9; +\infty)$, akkor $\frac{5}{9\sqrt{x}+3} > 0$, így a halmaz minden elemére igaz, hogy :

$$\frac{1}{3} + \frac{5}{9\sqrt{x}+3} > \frac{1}{3} \quad (\forall x \in [1/9; +\infty)) \quad (1)$$

vagyis $\frac{1}{3}$ az A-nak egy alsó korlátja.

------------------------------(**1 pont**)------------------------------

Belátjuk, hogy ez egyben a legnagyobb alsó korlát is. Ehhez elég már csak azt megmutatnunk, hogy :

$$\forall \varepsilon > 0 \;\; \exists\, a \in A : \;\; a < \frac{1}{3} + \varepsilon.$$

------------------------------(**1 pont**)------------------------------

Rögzítsünk egy pozitív ε-t és keressünk olyan alkalmas $x_0 \in [1/9; +\infty)$ valós számot, amelyre :

$$a := \frac{1}{3} + \frac{5}{9\sqrt{x_0}+3} < \frac{1}{3} + \varepsilon \iff 9\sqrt{x_0}+3 > \frac{5}{\varepsilon} \iff \sqrt{x_0} > \frac{5}{9\varepsilon} - \frac{1}{3}.$$

------------------------------(**2 pont**)------------------------------

Elég a keresett $x_0 \geq 1/9$ számot úgy megadni, hogy :

$$\sqrt{x_0} > \frac{5}{9\varepsilon} > \frac{5}{9\varepsilon} - \frac{1}{3}.$$

Ilyen például $x_0 := \frac{25}{81\varepsilon^2} + \frac{1}{9} \in [1/9; +\infty)$. Ezzel beláttuk, hogy $infA = \frac{1}{3}$.

------------------------------(**2 pont**)------------------------------

A fenti (1) egyenlőtlenség alapján világos, hogy a kapott alsó határ $\frac{1}{3} \notin A$, ezért nincs a halmazban legkisebb elem.

-------------------------------(1 pont)-------------------------------

Az A elemei közül az lesz a legnagyobb, amelyiknek a felbontott alakjában a második tört a legnagyobb, azaz ennek nevezője a legkisebb. Ez pontosan akkor teljesül, ha $x = \frac{1}{9}$. Formálisan :

$$\forall\, x \in [1/9; +\infty) \Rightarrow \ 9\sqrt{x} + 3 \geq 6 \Rightarrow \ \frac{1}{3} + \frac{5}{9\sqrt{x}+3} \leq \frac{1}{3} + \frac{5}{6} = \frac{7}{6} \in A.$$

-------------------------------(1 pont)-------------------------------

Ezzel beláttuk, hogy $maxA = \frac{7}{6}$ és ez egyben a legkisebb felső korlát is. Tehát $supA = \frac{7}{6}$.

-------------------------------(1 pont)-------------------------------

3. Adottak az $f(x) := \frac{2+x}{1-x}$ $\quad (x \in (1; +\infty))$ és a $g(x) := \frac{1}{x}$ $\quad (x \in \mathbb{R} \setminus \{0\})$ függvények.

1. Határozzuk meg az $f \circ g$ függvényt. **(4 pont)**
2. Invertálható-e az $f \circ g$ függvény és ha igen akkor adjuk meg az $(f \circ g)^{-1}$ inverzfüggvényt ($D_{(f\circ g)^{-1}}$–et , $R_{(f\circ g)^{-1}}$–et és az $(f \circ g)^{-1}(x)$–et). **(6 pont)**

Megoldás :

1.

$$D_{f\circ g} = \{x \in D_g \;\big|\; g(x) \in D_f\} = \Big\{x \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \;\Big|\; \frac{1}{x} > 1\Big\} = (0; 1),$$

-------------------------------(2 pont)-------------------------------

és

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = \frac{2+g(x)}{1-g(x)} = \frac{2+\frac{1}{x}}{1-\frac{1}{x}} = \frac{2x+1}{x-1} = 2 + \frac{3}{x-1} \quad (x \in (0; 1)).$$

-------------------------------(2 pont)-------------------------------

2. i) Legyen a most meghatározott függvény $F := f \circ g$ és $x \neq t \in (0; 1)$. Ekkor

$$F(x) - F(t) = \frac{3}{x-1} - \frac{3}{t-1} = 3 \cdot \frac{t-x}{(x-1)(t-1)} \neq 0,$$

ami azt jelenti, hogy F injektív/invertálható.

-------------------------------(1 pont)-------------------------------

ii) Az F^{-1} értelmezési tartománya R_F, tehát :

$$D_{F^{-1}} = R_F = \Big\{y \in \mathbb{R} \;\Big|\; \exists\, x \in (0; 1)\ :\ y = F(x)\Big\} = \Big\{y \in \mathbb{R} \;\Big|\; \exists\, x \in (0; 1)\ :\ y = 2 + \frac{3}{x-1}\Big\}.$$

-------------------------------(1 pont)-------------------------------

Vizsgáljuk az alábbi egyenlet megoldhatóságát (x–re) a $(0; 1)$ intervallumon, valamely rögzített $y \in \mathbb{R}$ mellett.

$$y = 2 + \frac{3}{x-1} \Longleftrightarrow y - 2 = \frac{3}{x-1}.$$

Mivel

$$0 < x < 1 \Longrightarrow -1 < x - 1 < 0 \Longrightarrow \frac{3}{x-1} < -3 \Longrightarrow y = 2 + \frac{3}{x-1} < -1.$$

Ennek megfelelően, ha $y < -1$ (így persze $y \neq 2$), akkor :

$$x = 1 + \frac{3}{y-2}.$$

Az előzőkhöz hasonlóan könnyű meggondolni, hogy $y \in (-\infty; -1)$ mellett a fenti $1 + \dfrac{3}{y-2} \in (0; 1)$, azaz

$$x = F^{-1}(y) = 1 + \frac{3}{y-2} \in (0; 1).$$

------------------------------(**3 pont**)------------------------------

Ezzel beláttuk, hogy

$$R_F = (-\infty; -1),$$

így a keresett inverzfüggvény az alábbi :

$$D_{(f \circ g)^{-1}} = (-\infty; -1); \quad R_{(f \circ g)^{-1}} = (0; 1);$$

$$(f \circ g)^{-1}(x) = 1 + \frac{3}{x-2} \quad (x \in (-\infty; -1)).$$

------------------------------(**1 pont**)------------------------------

4. Sorozatok :

1. A definíció segítségével lássa be, hogy az alábbi sorozat konvergens és adja meg a határértékét :

$$x_n = \frac{n^2 - 2n + 4}{5n^2 + n + 1} \quad (n \in \mathbb{N}). \qquad (\textbf{ 5 pont })$$

Megoldás :

Ez így $\dfrac{+\infty}{+\infty}$ típus, ezért emeljük ki a domináns tagokat (a számlálóban is és a nevezőben is n^2), majd egyszerűsítsünk velük :

$$\frac{n^2 - 2n + 4}{5n^2 + n + 1} = \frac{1 - \frac{2}{n} + \frac{4}{n^2}}{5 + \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2}} \longrightarrow \frac{1}{5} \quad (n \to \infty).$$

------------------------------(**1 pont**)------------------------------

A definíció szerinti bizonyításhoz legyen $A := \dfrac{1}{5}$ a határérték és rögzítsünk egy tetszőleges $\varepsilon > 0$ számot. Becsüljük a sorozat valamely tagjának eltérését a határértéktől az alábbi módon :

$$|x_n - A| = \left| \frac{n^2 - 2n + 4}{5n^2 + n + 1} - \frac{1}{5} \right| = \frac{|-11n + 19|}{5 \cdot (5n^2 + n + 1)} \leq (\triangle) \leq$$

------------------------------(**1 pont**)------------------------------

$$\leq \frac{|-11n| + |19|}{5 \cdot (5n^2 + n + 1)} = \frac{11n + 19}{25n^2 + 5n + 5} \leq (NRF) \leq \frac{11n + 19n}{25n^2} = \frac{30n}{25n^2} = \frac{6}{5n} < \varepsilon.$$

A fenti becslések teljesülnek minden olyan $n \in \mathbb{N}$−re, amelyre $n \geq 1$ és $n > \dfrac{6}{5\varepsilon}$. Itt $(\triangle)$ a háromszög egyenlőtlenséget jelenti, (NRF) pedig a törtekre vonatkozó nagyságrendőrző felső becslést.

------------------------------(**2 pont**)------------------------------

Összefoglalva a fentieket :

$$\exists\, A = \frac{1}{5} \in \mathbb{R} \;\; \forall\, \varepsilon > 0 \;\; \exists\, n_0 := \left[\frac{6}{5\varepsilon}\right] + 1 \in \mathbb{N} : \forall\, n > n_0, n \in \mathbb{N} : |x_n - A| = \left| x_n - \frac{1}{5} \right| < \frac{6}{5n} < \frac{6}{5n_0} < \varepsilon$$

tehát a sorozat konvergens és határértéke $\dfrac{1}{5}$.

------------------------------(**1 pont**)------------------------------

2. Számítsa ki a következő határértékeket :

(a) $\lim_{n\to+\infty}\left(\sqrt{4n^2+2n+1}-2n\right)$. (**5 pont**)

Megoldás :

$$\lim_{n\to+\infty}\left(\sqrt{4n^2+2n+1}-2n\right)=+\infty-\infty=\lim_{n\to+\infty}\frac{(\sqrt{4n^2+2n+1}-2n)\cdot(\sqrt{4n^2+2n+1}+2n)}{\sqrt{4n^2+2n+1}+2n}=$$

$$=\lim_{n\to+\infty}\frac{2n+1}{\sqrt{4n^2+2n+1}+2n}=\frac{+\infty}{+\infty}=$$

------------------------------(**2 pont**)------------------------------

$$=\lim_{n\to+\infty}\frac{2+1/n}{\sqrt{4+2/n+1/n^2}+2}=\frac{2}{\sqrt{4}+2}=\frac{1}{2}.$$

Itt használtuk a határértékek és a műveletek kapcsolatára vonatkozó tételeket (összeg, szorzat, hányados határérétéke a határértékek összege, szorzata, hányadosa ha a műveletek "értelmezhetőek", illetve a gyöksorozat határértéke a határérték gyöke).

------------------------------(**3 pont**)------------------------------

(b) $\lim_{n\to+\infty}\frac{(n-2^n)(n+2^n)+3n}{(n+2^{n+1})^2+1}$. (**5 pont**)

Megoldás :

$$L:=\lim_{n\to+\infty}\frac{(n-2^n)(n+2^n)+3n}{(n+2^{n+1})^2+1}=\lim_{n\to+\infty}\frac{n^2-4^n+3n}{(n+2\cdot2^n)^2+1}=\frac{-\infty}{+\infty}=$$

------------------------------(**1 pont**)------------------------------

$$=\lim_{n\to+\infty}\frac{n^2\cdot(1/4)^n-1+3n\cdot(1/4)^n}{(n\cdot(1/2)^n+2)^2+(1/4)^n}=-\frac{1}{4}.$$

Itt is használtuk a határértékek és a műveletek kapcsolatára vonatkozó tételeket (összeg, szorzat, hányados határérétéke a határértékek összege, szorzata, hányadosa, ha a műveletek "értelmezhetőek"), továbbá felhasználtuk, hogy $\lim(1/4)^n=\lim(q^n)=0$, mivel geometriai sorozat, melynek a hányadosa $q=\frac{1}{4}\in(-1;1)$, illetve

$$\lim\left(n\cdot\left(\frac{1}{4}\right)^n\right)=\lim\left(n\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^n\right)=\lim\left(n^2\cdot\left(\frac{1}{4}\right)^n\right)=\lim(n^k\cdot q^n)=0,$$

mert $q=1/4;1/2\in(-1;1)$ és $k=1;2$.

------------------------------(**4 pont**)------------------------------