5. gyakorlat

Differenciálszámítás 3.

• Elemi függvények

1. feladat. *Számítsuk ki az alábbi függvényértékeket:*

$$\arcsin\frac{1}{2}, \quad \arcsin(\sin 10), \quad \arccos\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right), \quad \operatorname{arc\,tg} 1, \quad \operatorname{arc\,ctg}\sqrt{3}, \quad \log_{1/4}\frac{1}{1024}.$$

Megoldás.

• $\underset{\sim\sim\sim}{\arcsin\frac{1}{2}}$

Emlékeztetünk arra, hogy az $\arcsin := \left(\sin_{|\,[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]}\right)^{-1}$ definícióból és a sin függvény tulajdonságaiból következik, hogy

$$\underset{(x\in[-1,1])}{\arcsin x} = \underset{\left(y\in\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]\right)}{y} \iff \sin y = x, \quad \text{ezért}$$

$$\arcsin\frac{1}{2} = y \in \left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right] \iff \sin y = \frac{1}{2} \iff (y = 30^0)\ \ y = \frac{\pi}{6}.$$

Így $\arcsin\frac{1}{2} = \frac{\pi}{6}$.

• $\arcsin(\sin 10)$

Az előzőhöz hasonlóan az adódik, hogy

$$\arcsin(\sin 10) = y \in \left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right] \iff \sin y = \sin 10.$$

Arra is emlékeztetünk, hogy

$$\sin y = \sin z \iff y - z = 2k\pi \ \text{ vagy } \ y + z = (2l+1)\pi \quad (k,l\in\mathbb{Z}). \ \text{ Így}$$

$$\sin y = \sin 10 \iff y - 10 = 2k\pi \ \text{ vagy } \ y + 10 = (2l+1)\pi \quad (k,l\in\mathbb{Z}).$$

Mivel $y \in \left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$, ezért a $\pi \approx 3,14$ közelítést felhasználva azt kapjuk, hogy $y = 10 + 2k\pi \notin \left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$ $(\forall\, k \in \mathbb{Z})$. Az első eset tehát nem lehetséges. A második esetben $y \in \left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$ pontosan akkor teljesül, ha $l = 1$, azaz $y = -10 + 3\pi$ (≈ -0.58). Ezzel beláttuk, hogy $\arcsin(\sin 10) = -10 + 3\pi$.

• $\arccos\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$

Emlékeztetünk arra, hogy az $\arccos := \left(\cos_{|\,[0,\pi]}\right)^{-1}$ definícióból és a cos függvény tulajdonságaiból következik, hogy

$$\underset{(x\in[-1,1])}{\arccos x} = \underset{(y\in[0,\pi])}{y} \iff \cos y = x, \quad \text{ezért}$$

$$\arccos\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = y \in [0,\pi] \iff \cos y = -\frac{\sqrt{2}}{2} \iff (y = 135^0)\ \ y = 3\cdot\frac{\pi}{4}.$$

Így $\arccos\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{3\pi}{4}$.

• $\underset{\sim\sim\sim}{\text{arc tg}\,1}$

Emlékeztetünk arra, hogy az $\text{arc tg} := \left(\text{tg}_{\,|\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)}\right)^{-1}$ definícióból és a tg függvény tulajdonságaiból következik, hogy

$$\underset{(x\in\mathbb{R})}{\text{arc tg}\,x} = \underset{\left(y\in\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)\right)}{y} \iff \text{tg}\,y = x, \quad \text{ezért}$$

$$\text{arc tg}\,1 = y \in \left(-\tfrac{\pi}{2},\tfrac{\pi}{2}\right) \iff \text{tg}\,y = 1 \iff (y = 45^0)\ \ y = \tfrac{\pi}{4}.$$

Így $\text{arc tg}\,1 = \frac{\pi}{4}$.

• $\text{arc ctg}\,\sqrt{3}$

Emlékeztetünk arra, hogy az $\text{arc ctg} := \left(\text{ctg}_{\,|(0,\pi)}\right)^{-1}$ definícióból és a ctg függvény tulajdonságaiból következik, hogy

$$\underset{(x\in\mathbb{R})}{\text{arc ctg}\,x} = \underset{(y\in(0,\pi))}{y} \iff \text{ctg}\,y = x, \quad \text{ezért}$$

$$\text{arc ctg}\,\sqrt{3} = y \in (0,\pi) \iff \text{ctg}\,y = \sqrt{3} \iff (y = 30^0)\ \ y = \tfrac{\pi}{6}.$$

Így $\text{arc ctg}\,\sqrt{3} = \frac{\pi}{6}$.

• $\log_{1/4}\frac{1}{1024}$

Emlékeztetünk arra, hogy tetszőleges $0 < a \neq 1$ esetén a $\log_a := (\exp_a)^{-1}$ definícióból és az $\exp_a$ függvény tulajdonságaiból következik, hogy ha $x > 0$, akkor

$$\log_a x = y \in \mathbb{R} \iff \exp_a(y) = a^y = x. \ \text{Így}$$

$$\log_{1/4}\frac{1}{1024} = y \in \mathbb{R} \iff \left(\frac{1}{4}\right)^y = \frac{1}{1024} \iff \left(\frac{1}{2^2}\right)^y = \frac{1}{2^{10}} \iff$$

$$\iff \frac{1}{2^{2y}} = \frac{1}{2^{10}} \iff 2y = 10 \iff y = 5,$$

ezért $\log_{1/4}\frac{1}{1024} = 5$. ■

2. feladat. *Mutassuk meg, hogy*

$$\text{arc sin}\,x + \text{arc cos}\,x = \frac{\pi}{2} \quad \big(x \in [-1,1]\big).$$

Milyen kapcsolat van az arc sin *és az* arc cos *függvények garfikonjai között?*

1. megoldás. Legyen

$$f(x) := \text{arc sin}\,x + \text{arc cos}\,x \quad \big(x \in [-1,1]\big).$$

Ekkor $f \in D(-1,1)$. Ha $x \in (-1,1)$, akkor

$$f'(x) = \big(\text{arc sin}\,x + \text{arc cos}\,x\big)' = (\text{arc sin}\,x)' + (\text{arc cos}\,x)' =$$

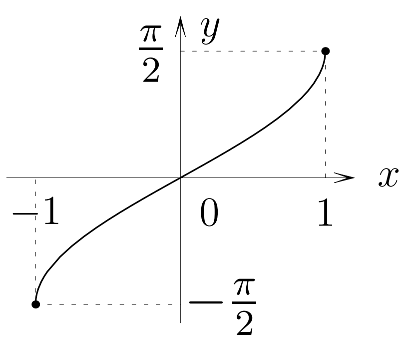
$$= \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} + \left(-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\right) = 0.$$

Így $f'(x) = 0$ $\big(\forall\, x \in (-1,1)\big)$. A deriváltak egyenlőségére vonatkozó tételből következik, hogy $\exists\, c \in \mathbb{R}$, hogy $f(x) = c$ $\big(\forall\, x \in (-1,1)\big)$. Mivel $f(0) = \operatorname{arc\,sin} 0 + \operatorname{arc\,cos} 0 = 0 + \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2}$, ezért $f(x) = \frac{\pi}{2}$, ha $x \in (-1,1)$. Ez az egyenlőség a ± 1 pontokban is igaz, mert

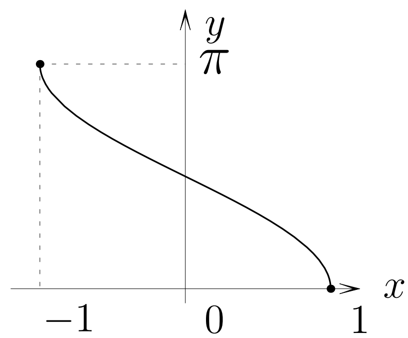
$$\begin{aligned} f(1) &= \operatorname{arc\,sin} 1 + \operatorname{arc\,cos} 1 = \frac{\pi}{2} + 0 = \frac{\pi}{2}, \\ f(-1) &= \operatorname{arc\,sin}(-1) + \operatorname{arc\,cos}(-1) = -\frac{\pi}{2} + \pi = \frac{\pi}{2}. \end{aligned}$$

A feladat állítását tehát bebizonyítottuk.

Az arc sin és az arc cos függvény grafikonjai:



az arc sin függvény



az arc cos függvény

A bebizonyított egyenlőségből következik, hogy az arc sin és az arc cos függvények grafikonjai egymásból elemi függvénytranszformációkkal származtathatók. Mivel

$$\operatorname{arc\,cos} x = \frac{\pi}{2} - \operatorname{arc\,sin} x \quad \big(x \in [-1,1]\big),$$

ezért az arc cos függvény grafikonját úgy kapjuk meg, hogy az arc sin függvény grafikonját először tükrözzük az x tengelyre, majd a y tengely irányában „felfele" toljuk $\frac{\pi}{2}$-vel. Az arc sin függvény képe az arc cos függvény képéből hasonló módon adódik. ■

2. megoldás. Legyen $x \in [-1,1]$ és

$$\alpha := \operatorname{arc\,sin} x \in \left[-\tfrac{\pi}{2}, \tfrac{\pi}{2}\right], \quad \text{illetve} \quad \beta := \operatorname{arc\,cos} x \in [0,\pi].$$

Ekkor

$$x = \sin\alpha = \cos\left(\tfrac{\pi}{2} - \alpha\right) \quad \text{és} \quad x = \cos\beta.$$

Mivel

$$-\frac{\pi}{2} \le \alpha \le \frac{\pi}{2} \quad \Longrightarrow \quad 0 \le \frac{\pi}{2} - \alpha \le \pi$$

és a cos függvény szigorúan monoton csökkenő a $[0,\pi]$ intervallumon, ezért az $x = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \cos\beta$ egyenlőség csak úgy állhat fenn, ha $\frac{\pi}{2} - \alpha = \beta$, azaz $\alpha + \beta = \frac{\pi}{2}$. A feladatban szereplő azonosságot tehát igazoltuk. ■

3. feladat. *Szemléltessük az*

$$f(x) := \operatorname{arc\,sin}(\sin x) \quad (x \in \mathbb{R})$$

függvény grafikonját.

Megoldás. A sin függvény, következésképpen az f is 2π szerint periodikus. Így f-et elég megvizsgálni egy 2π hosszúságú intervallumon, például $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right]$-n.

Az arc sin függvény definíciójából következik, hogy

$$\arcsin(\sin x) = y \in \left[-\tfrac{\pi}{2}, \tfrac{\pi}{2}\right] \quad \Longleftrightarrow \quad \sin x = \sin y \quad (\forall\, x \in \mathbb{R}).$$

Legyen $x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$. A $\sin_{|\,[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]}$ függvény $\uparrow$, ezért a $\sin x = \sin y$ egyenlőség csak $x = y$ esetén teljesül. Így

$$f(x) = x, \quad \text{ha} \ \ x \in \left[-\tfrac{\pi}{2}, \tfrac{\pi}{2}\right].$$

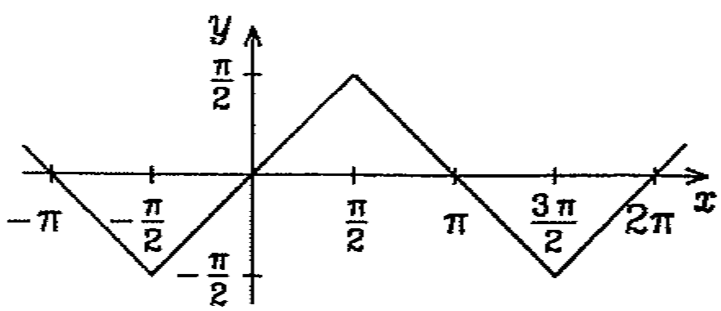
Tegyük fel, hogy $x \in \left[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right]$. Ekkor

$$\frac{\pi}{2} \le x \le \frac{3\pi}{2}, \quad \text{azaz} \quad -\frac{\pi}{2} \le \pi - x \le \frac{\pi}{2}.$$

A $\sin x = \sin(\pi - x) = \sin y$ egyenlőség csak akkor igaz, ha $\pi - x = y$. Így

$$f(x) = \pi - x, \quad \text{ha} \ \ x \in \left[\tfrac{\pi}{2}, \tfrac{3\pi}{2}\right].$$

A fentiek alapján az f függvény grafikonját az alábbi ábrán szemléltetjük:



■

4. feladat. *Bizonyítsuk be, hogy*

$$\arcsin x = \operatorname{arc\,tg} \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} \qquad \big(x \in (-1, 1)\big).$$

Megjegyzés. A feladat érdekessége a következő. Az előadáson megmutattuk, hogy az arc tg függvény 0 pont körüli Taylor-sora $[-1, 1]$-en előállítja arc tg-t, ezért a helyettesítési értékeit tetszőleges pontossággal ki lehet számolni. A bizonyítandó azonosság alapján tehát az $\arcsin x$ értékeket is ki lehet számítani tetszőleges pontossággal. □

Megoldás. Legyen

$$f(x) := \arcsin x - \operatorname{arc\,tg} \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} \qquad \big(x \in (-1, 1)\big).$$

Az elemi függvények deriválhatóságaiból és a deriválási szabályokból következik, hogy $f \in D(-1, 1)$.

Most kiszámoljuk $f'(x)$-et. Ha $x \in (-1,1)$, akkor

$$f'(x) = \left(\operatorname{arc\,sin} x - \operatorname{arc\,tg} \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\right)' = (\operatorname{arc\,sin} x)' - \left(\operatorname{arc\,tg} \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\right)' =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} - \frac{1}{1+\left(\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\right)^2} \cdot \left(\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\right)' =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} - \left(1-x^2\right) \cdot \frac{\sqrt{1-x^2} + \frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}}}{1-x^2} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} - \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = 0.$$

Így $f'(x) = 0$ $\big(\forall\, x \in (-1,1)\big)$. A deriváltak egyenlőségére vonatkozó tételből következik, hogy $\exists\, c \in \mathbb{R}$, hogy $f(x) = c$ $\big(\forall\, x \in (-1,1)\big)$. Mivel $f(0) = \operatorname{arc\,sin} 0 - \operatorname{arc\,tg} 0 = 0$, ezért $c = 0$. A feladat állítását tehát bebizonyítottuk. ■

• Teljes függvényvizsgálat

Emlékeztető. Adott f valós-valós függvény **teljes függvényvizsgálatán** f analitikus és geometriai tulajdonságainak a megállapítását értjük. Ennek során a következőket kell meghatározni:

1º Kezdeti vizsgálatok. (Deriválhatóság, paritás, periodicitás megállapítása, stb.)

2º Monotonitási intervallumok.

3º Lokális és abszolút szélsőértékek.

4º Konvexitási, konkávitási intervallumok.

5º A határértékek a $\mathcal{D}_f' \setminus \mathcal{D}_f$ pontokban.

6º Aszimptota $(\pm\infty)$-ben.

7º A függvény grafikonjának felrajzolása. □

5. feladat. *Teljes függvényvizsgálat végzése után vázoljuk az*

$$f(x) := x^4 - 4x^3 + 10 \quad (x \in \mathbb{R})$$

függvény grafikonját.

Megoldás.

Kezdeti vizsgálatok: f polinomfüggvény, ezért $f \in D^\infty(\mathbb{R})$.

Monotonitás: Minden $x \in \mathbb{R}$ pontban

$$f'(x) = 4x^3 - 12x^2 = 4x^2(x-3).$$

Azokat az intervallumokat kell meghatározni, amelyeken az f' függvény állandó előjelű. Mivel

$$f'(x) \gtreqless 0 \quad \Longleftrightarrow \quad x^2(x-3) \gtreqless 0,$$

ezért a következőket kapjuk:

Ha $x < 0$, akkor $f'(x) < 0$, ezért $f\ \downarrow$ a $(-\infty, 0)$ intervallumon;

Ha $0 < x < 3$, akkor $f'(x) < 0$, ezért $f\ \downarrow$ a $(0,3)$ intervallumon;

Ha $x > 3$, akkor $f'(x) > 0$, ezért $f\ \uparrow$ a $(3, +\infty)$ intervallumon.

Lokális szélsőértékek:
Az elsőrendű szükséges feltétel. Mivel

$$f'(x) = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad x = 0 \ \text{ vagy } \ x = 3,$$

ezért ezek a pontok lehetnek f-nek lokális szélsőértékhelyei.

Az elégséges feltétel. A fentiek alapján $f \downarrow$ a $(-\infty, 3)$ intervallumon, ezért az $x = 0$ pont nem lokális szélsőértékhelye f-nek. Szintén a monotonitást figyelembe véve adódik az, hogy az $x = 3$ pont az f függvény lokális minimumhelye és $f(3) = -17$ a lokális minimuma.

Konvexitás, inflexió: Mivel

$$f''(x) = 12x^2 - 24x = 12x(x-2) \quad (x \in \mathbb{R}), \quad \text{ezért}$$

$$f''(x) \gtreqless 0 \quad \Longleftrightarrow \quad x(x-2) \gtreqless 0.$$

Az előjeleket az $x(x-2)$ $(x \in \mathbb{R})$ másodfokú polinom grafikonjáról is leolvashatjuk. Azt kapjuk, hogy:

ha $x < 0$, akkor $f''(x) > 0$, ezért f szigorúan konvex $(-\infty, 0)$-n;

ha $0 < x < 2$, akkor $f''(x) < 0$, ezért f szigorúan konkáv $(0, 2)$-n;

ha $x > 2$, akkor $f''(x) > 0$, ezért f szigorúan konvex $(2, +\infty)$-en.

$x_1 = 0$ és $x_2 = 2$ az f függvény inflexiós pontjai.

A határértékeket most $(\pm\infty)$-ben kell megvizsgálni.

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} \left(x^4 - 4x^3 + 10\right) = \lim_{x \to +\infty} x^4 \cdot \left(1 - \tfrac{4}{x} + \tfrac{10}{x^4}\right) = +\infty,$$
$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{x \to -\infty} \left(x^4 - 4x^3 + 10\right) = \lim_{x \to -\infty} x^4 \cdot \left(1 - \tfrac{4}{x} + \tfrac{10}{x^4}\right) = +\infty\,.$$

Aszimptoták: Mivel a

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{x^4 - 4x^3 + 10}{x} = \lim_{x \to +\infty} x^3 \cdot \left(1 - \tfrac{4}{x} + \tfrac{10}{x^4}\right) = +\infty$$

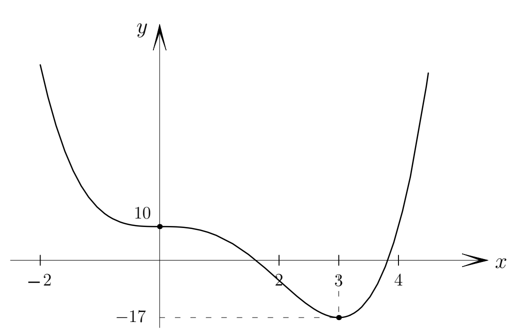
határérték létezik, de nem véges, ezért f-nek $(+\infty)$-ben nincs aszimptotája.

Mivel a

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to -\infty} \frac{x^4 - 4x^3 + 10}{x} = \lim_{x \to -\infty} x^3 \cdot \left(1 - \tfrac{4}{x} + \tfrac{10}{x^4}\right) = -\infty,$$

ezért az f függvénynek $(-\infty)$-ben sincs aszimptotája.

A függvény grafikonja:



6. feladat. *Teljes függvényvizsgálat végzése után szemléltessük az*

$$f(x) := \left(\frac{x+2}{x-3}\right)^2 \qquad (x \in \mathbb{R} \setminus \{3\})$$

függvény grafikonját.

Megoldás.

<u>**Kezdeti vizsgálatok**</u>: Mivel f racionális törtfüggvény, ezért a műveletekre vonatkozó tételekből következik, hogy f akárhányszor deriválható az értelmezési tartományának minden pontjában.

Világos, hogy $f(x) \geq 0$ $(x \in \mathbb{R} \setminus \{3\})$ és $f(x) = 0 \iff x = -2$

<u>**Monotonitás**</u>: Minden $x \in \mathbb{R} \setminus \{3\}$ pontban

$$f'(x) = 2 \cdot \left(\frac{x+2}{x-3}\right) \cdot \frac{1 \cdot (x-3) - (x+2) \cdot 1}{(x-3)^2} = \frac{-10(x+2)}{(x-3)^3}.$$

Azokat az *intervallumokat* kell meghatározni, amelyeken az f' függvény állandó előjelű. (Ne feledkezzünk meg arról, hogy a 3 pontban a függvény nincs értelmezve.)

Ha $x \in (-\infty, -2)$, akkor $f'(x)$ számlálója pozitív, a nevezője pedig negatív, ezért $f'(x) < 0$, következésképpen $f \downarrow$ a $(-\infty, -2)$ intervallumon.

Ha $x \in (-2, 3)$, akkor $f'(x)$ számlálója negatív, a nevezője is negatív, ezért $f'(x) > 0$, következésképpen $f \uparrow$ a $(-2, 3)$ intervallumon.

Ha $x \in (3, +\infty)$, akkor $f'(x)$ számlálója negatív, a nevezője pozitív, ezért $f'(x) < 0$, következésképpen $f \downarrow$ a $(3, +\infty)$ intervallumon.

<u>**Lokális szélsőértékek**</u>: *Az elsőrendű szükséges feltétel.* Mivel

$$f'(x) = 0 \qquad \iff \qquad \text{ha} \quad x = -2,$$

ezért az f függvénynek csak ebben a pontban lehet lokális szélsőértéke.

Az elsőrendű elégséges feltétel. A monotonitási intervallumok alapján az f függvénynek az $x_1 = -2$ pontban *lokális minimuma* van.

<u>**Konvexitás, inflexió**</u>:

$$f''(x) = -10\frac{1 \cdot (x-3)^3 - (x+2) \cdot 3(x-3)^2 \cdot 1}{(x-3)^6} = -10\frac{(x-3) - 3(x+2)}{(x-3)^4} = 10 \cdot \frac{2x+9}{(x-3)^4}.$$

Ha $x < -\frac{9}{2}$, akkor $f''(x) < 0$, ezért f *konkáv a* $(-\infty, -\frac{9}{2})$ *intervallumon.*

Ha $-\frac{9}{2} < x < 3$, akkor $f''(x) > 0$, ezért f *konvex a* $(-\frac{9}{2}, 3)$ *intervallumon.*

Ha $x > 3$, akkor $f''(x) > 0$, ezért f *konvex a* $(3, +\infty)$ *intervallumon.*

Az $x_2 = -\frac{9}{2}$ pont az f függvény *inflexiós pontja.*

<u>**A határértékeket**</u> most $(+\infty)$-ben, $(-\infty)$-ben, valamint a 3 pontban kell megvizsgálni:

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} \frac{(x+2)^2}{(x-3)^2} \overset{\frac{+\infty}{+\infty}}{=} (\text{L'Hospital}) =$$

$$= \lim_{x \to +\infty} \frac{2(x+2)}{2(x-3)} \overset{\frac{+\infty}{+\infty}}{=} (\text{L'Hospital}) = \lim_{x \to +\infty} \frac{1}{1} = 1.$$

A $(-\infty)$-ben vett határértéket az előzőhöz hasonlóan a L'Hospital-szabállyal kaphatjuk meg, de a következőképpen is kiszámolhatjuk:

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} \left(\frac{x+2}{x-3}\right)^2 = \lim_{x\to-\infty} \left(\frac{1+\frac{2}{x}}{1-\frac{3}{x}}\right)^2 = 1.$$

A 3 pontban $\frac{1}{0}$ típusú határértékről van szó, ezért külön vizsgáljuk a jobb, ill. a bal oldali határértéket:

$$\lim_{x\to3+0} f(x) = \lim_{x\to3+0} \frac{(x+2)^2}{(x-3)^2} = +\infty; \qquad \lim_{x\to3-0} f(x) = \lim_{x\to3-0} \frac{(x+2)^2}{(x-3)^2} = +\infty.$$

Aszimptoták: $(+\infty)$-ben és $(-\infty)$-ben: $(+\infty)$-ben: Mivel

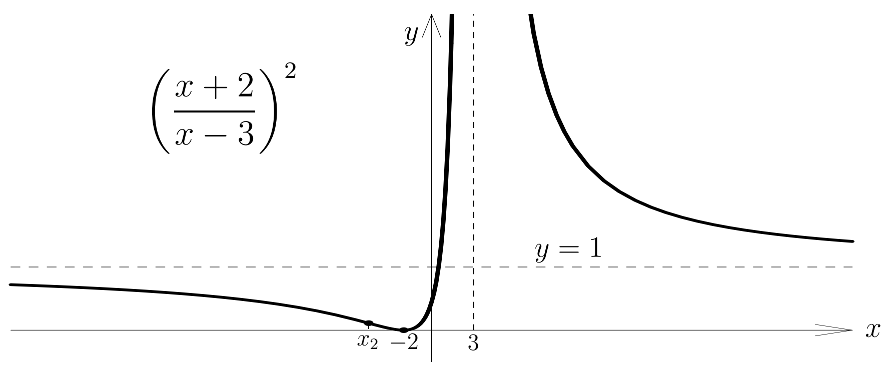
$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x} \cdot \frac{(x+2)^2}{(x-3)^2} = \left(\frac{1}{+\infty} \cdot 1\right) = 0,$$

$$\lim_{x\to+\infty} \big(f(x) - 0 \cdot x\big) = \lim_{x\to+\infty} f(x) = 1,$$

ezért az $y = 1$ *egyenletű egyenes* f *aszimptotája a* $(+\infty)$*-ben.*

$(-\infty)$-ben: A fenti határértékeket most $(-\infty)$-ben kell venni. Ugyanazok az értékek adódnak, ezért az $y = 1$ *egyenletű egyenes* f *aszimptotája a* $(-\infty)$*-ben* is.

A függvény képe:



7. feladat. *Teljes függvényvizsgálat végzése után ábrázoljuk az*

$$f(x) := e^{-x^2} \quad (x \in \mathbb{R})$$

függvény grafikonját (az ún. „Gauss-görbét”).

Megoldás.

Kezdeti vizsgálatok: f páros függvény, $f \in D^\infty(\mathbb{R})$ és mindenütt pozitív.

Monotonitás: Minden $x \in \mathbb{R}$ pontban

$$f'(x) = -2x \cdot e^{-x^2}, \quad \text{ezért}$$

ha $x < 0$, akkor $f'(x) > 0 \quad \Longrightarrow \quad f \ \uparrow \ (-\infty, 0)$-n;

ha $x > 0$, akkor $f'(x) < 0 \quad \Longrightarrow \quad f \ \downarrow \ (0, +\infty)$-en.

Lokális szélsőértékek: Világos, hogy $f'(x) = 0 \iff x = 0$, és ez a pont lokális maximumhely.

Konvexitás, inflexió:

$$f''(x) = -2e^{-x^2} + 4x^2 e^{-x^2} = 2(2x^2 - 1)e^{-x^2} \quad (x \in \mathbb{R}).$$

Egyszerűen adódik, hogy

ha $x < -\frac{1}{\sqrt{2}}$, akkor $f''(x) > 0$, ezért f szigorúan konvex $\left(-\infty, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$-n;

ha $-\frac{1}{\sqrt{2}} < x < \frac{1}{\sqrt{2}}$, akkor $f''(x) < 0$, ezért f szigorúan konkáv $\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$-n;

ha $x > \frac{1}{\sqrt{2}}$, akkor $f''(x) > 0$, ezért f szigorúan konvex $\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, +\infty\right)$-en.

$x_1 = -\frac{1}{\sqrt{2}}$ és $x_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}$ az f függvény inflexiós pontjai.

A határértékeket most $(\pm\infty)$-ben kell megvizsgálni.

$$\lim_{\pm\infty} f = \lim_{\pm\infty} e^{-x^2} = \lim_{\pm\infty} \frac{1}{e^{x^2}} = 0.$$

Aszimptoták: Mivel a

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{e^{-x^2}}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{xe^{x^2}} = 0 =: A,$$

$$\lim_{x\to+\infty} \big(f(x) - Ax\big) = \lim_{x\to+\infty} f(x) = 0 =: B,$$

ezért az $y = Ax + b = 0$ egyenletű egyenes (vagyis az x tengely) a függvény aszimptotája $(+\infty)$-ben.

f páros, ezért az $y = 0$ egyenletű egyenes $(-\infty)$-ben is aszimptotája f-nek.

A függvény grafikonja: