3. Beadandó

Az 1,2 és 3-mas feladatokban használható szabályrendszerek a beadandó alján találhatóak meg!

1 Klasszikus ítéletkalkulusbeli címkézés (2 pont)

Címkézzük fel a következő ítéletkalkulusbeli levezetést!

$$\{C, A, B, \neg\neg C \supset \neg A\} \vdash \neg B \vee \neg C$$

1. $(\neg\neg B \supset A) \supset ((\neg B \supset \neg A) \supset \neg B)$
2. C
3. $C \supset \neg\neg C$
4. $\neg\neg C$
5. $\neg\neg C \supset \neg A$
6. $\neg A$
7. A
8. $A \supset (\neg\neg B \supset A)$
9. $\neg\neg B \supset A$
10. $\neg A \supset (\neg B \supset \neg A)$
11. $\neg B \supset \neg A$
12. $(\neg B \supset \neg A) \supset \neg B$
13. $\neg B$
14. $\neg B \supset \neg B \vee \neg C$
15. $\neg B \vee \neg C$

2 Klasszikus ítéletkalkulusbeli levezetés (3 pont)

Készítsünk ítéletkalkulusbeli levezetést a következő szintaktikus eldöntésproblémához!

$$\{P \wedge \neg Q)\} \vdash \neg R \wedge Q \supset R \wedge \neg P$$

A beadandó a következő oldalon folytatódik!

3 Természetes levezetés (3 pont)

Készítsünk természetes levezetés fát a szintaktikus következmény problémához!

$$\neg\neg A \supset B, A \vee \neg(B \supset \neg C) \vdash B \vee C$$

4 EXTRA - Bizonyításelmélet (3 pont)

A következő feladat eméleti tudást igényel, érdemes előtte megnézni az előadást és megérteni azt!

Definiáljuk formálisan a saját **háromértékű** kiegészítő **M** szemantikánkat a következő $\mathcal{L}_{\{\neg,\mathbf{L},\vee,\supset\}}$ nyelvhez a következő módon:

1. Tegyük fel,hogy a harmadik érték, mely legyen **U** egy köztes igazságérték az **Igaz** és a **Hamis** között, úgy hogy:
   - F < U < T
   - A helyes, tautológikusan igaz formulák továbbra is **Igaz**-ak kell legyenek.

2. Tegyük fel, hogy **L** csak az **Igaz** értéket "kedveli". Tehát:

L	F	U	T
	F	F	T

3. Tegyük fel, hogy **U** negáltja hamis. Tehát:

¬	F	U	T
	T	F	F

Első feladat (1 pont)
Tetszőlegesen definiáld a saját $\supset, \vee$ logikai műveleti jeleidet, a fentihez hasonló módon, **de** úgy, hogy a következő állítás teljesüljön:

$$\models_{\mathbf{M}} (\mathbf{L}A \vee \neg\mathbf{L}A)$$

Bizonyítsd is hogy teljesül!

A feladat a következő oldalon folytatódik!

Legyen S a következő bizonyításelméleti rendszer S $= (\mathcal{L}_{\{\neg,\mathbf{L},\vee,\supset\}}, \mathcal{F}, \{\mathbf{A1}, \mathbf{A2}\}, \{r1, r2\})$ a következő axiómákra és levezetési szabályokra bármely A, B $\in \mathcal{F}$ esetén:

Logikai axiómák:

$(A1)$ $(\mathbf{L}A \vee \neg \mathbf{L}A)$
$(A2)$ $(A \supset \mathbf{L}A)$

Levezetési szabályok:

$$\text{(r1)}\ \frac{A\ ;\ B}{(A \vee B)}$$

$$\text{(r2)}\ \frac{A}{\mathbf{L}(A \supset B)}$$

Második feladat (1 pont)
Vizsgáld meg hogy a fentebb definiált **S** bizonyításelméleti rendszer axiómái tautológiák-e az első feladatban tetszőlegesen meghatározott **M** szemantikádban! Indokold miért igen vagy miért nem!

Harmadik feladat (1 pont)
Vizsgáld meg hogy a fentebb definiált **S** bizányításelméleti rendszer **helyes**-e az első feladatban tetszőlegesen meghatározott **M** szemantikádban! Indokold miért igen vagy miért nem!

Kis elméleti segítség a harmadik feladathoz:
1. **S** **M**-helyes, ha az **S**-ben bizonyítható formulák tautológiák **M**-ben.
2. **S** **M**-helyes, ha az **S**-ben definiált összes levezetési szabály **M**-helyes.
3. Egy levezetési szabály helyes, amennyiben csak helyes következtetés vonható le belőle.

Ítéletkalkulus és predikátumkalkulus

Az alap axiómasémák:

(A1)	$A \supset (B \supset A)$
(A2)	$(A \supset (B \supset C)) \supset ((A \supset B) \supset (A \supset C))$
(A3)	$(\neg A \supset B) \supset ((\neg A \supset \neg B) \supset A)$
(A4)	$\forall x A \supset A(t)$
(A5)	$\forall x(A \supset B) \supset (A \supset \forall x B)$, ahol $x \notin Par(A)$

A kalkulust kiegészítő axiómasémák:

(B1)	$A \supset A$	
(B2)	$(A \supset B) \supset ((B \supset C) \supset (A \supset C))$	
(B3)	$A \supset \neg\neg A$	
(B4)	$\neg\neg A \supset A$	
(B5)	$(A \supset B) \supset (\neg\neg A \supset \neg\neg B)$	
Konjunkció:		
(C1)	$A \supset (B \supset A \wedge B)$	bevezetés
(C2)	$A \wedge B \supset A$	balról elhagyás
(C3)	$A \wedge B \supset B$	jobbról elhagyás
Diszjunckió:		
(D1)	$B \supset A \vee B$	balról bevezetés
(D2)	$A \supset A \vee B$	jobbról bevezetés
(D3)	$(A \supset C) \supset ((B \supset C) \supset (A \vee B \supset C))$	elhagyás
Predikátumkalkulus:		
(E1)	$A(t) \supset \exists x A(x)$	
(E2)	$\forall x A(x) \supset \exists x A(x)$	
(E3)	$\forall x(A \supset B) \supset (\forall x A \supset \forall x B)$	

Alapvető tételek (Metatheorems):

(Dedukciós tétel)	$\Gamma; A \vdash B$ akkor és csak akkor, ha $\Gamma \vdash A \supset B$
(Kontrapozíció)	Ha $\Gamma; A \vdash B$, akkor $\Gamma; \neg B \vdash \neg A$

Levezetési szabályok (Rules of inference):

$$\text{(MP)}\ \frac{A\ ;\ (A \supset B)}{B}$$

$$\text{(G)}\ \frac{\Gamma \vdash A(t)}{\Gamma \vdash \forall x A(x)}\ \text{, ahol } t \notin Par(\Gamma) \text{ és } t \notin A(x)$$

Természetes levezetés

az azonosság törvénye

$$\Gamma, A \vdash_0 A$$

a bővítés szabálya

$$\frac{\Gamma \vdash_0 A}{\Gamma, B \vdash_0 A}$$

a szűkítés szabálya

$$\frac{\Gamma, B, B, \Delta \vdash_0 A}{\Gamma, B, \Delta \vdash_0 A}$$

a felcserélés szabálya

$$\frac{\Gamma, B, C, \Delta \vdash_0 A}{\Gamma, C, B, \Delta \vdash_0 A}$$

a vágás szabálya

$$\frac{\Gamma \vdash_0 A \qquad \Delta, A \vdash_0 B}{\Gamma, \Delta \vdash_0 B}$$

	bevezető szabályok		*alkalmazó szabályok*
$(\supset b)$	$\dfrac{\Gamma, A \vdash_0 B}{\Gamma \vdash_0 A \supset B}$	$(\supset a)$	$\dfrac{\Gamma \vdash_0 A \qquad \Gamma \vdash_0 A \supset B}{\Gamma \vdash_0 B}$
$(\wedge b)$	$\dfrac{\Gamma \vdash_0 A \qquad \Gamma \vdash_0 B}{\Gamma \vdash_0 A \wedge B}$	$(\wedge a)$	$\dfrac{\Gamma, A, B \vdash_0 C}{\Gamma, A \wedge B \vdash_0 C}$
$(\vee b)$	$\dfrac{\Gamma \vdash_0 A}{\Gamma \vdash_0 A \vee B} \qquad \dfrac{\Gamma \vdash_0 B}{\Gamma \vdash_0 A \vee B}$	$(\vee a)$	$\dfrac{\Gamma, A \vdash_0 C \qquad \Gamma, B \vdash_0 C}{\Gamma, A \vee B \vdash_0 C}$
$(\neg b)$	$\dfrac{\Gamma, A \vdash_0 B \qquad \Gamma, A \vdash_0 \neg B}{\Gamma \vdash_0 \neg A}$	$(\neg a)$	$\dfrac{\Gamma \vdash_0 \neg\neg A}{\Gamma \vdash_0 A}$

	bevezető szabályok		*alkalmazó szabályok*
$(\forall b)$	$\dfrac{\Gamma \vdash A}{\Gamma \vdash \forall x A} \quad (x \notin Par(\Gamma))$	$(\forall a)$	$\dfrac{\Gamma \vdash \forall x A}{\Gamma \vdash [A(x \parallel t)]}$
$(\exists b)$	$\dfrac{\Gamma \vdash [A(x \parallel t)]}{\Gamma \vdash \exists x A}$	$(\exists a)$	$\dfrac{\Gamma, A \vdash B}{\Gamma, \exists x A \vdash B} \quad (x \notin Par(\Gamma, B))$