# 8. előadás

2020. november 2.

# TÖBBVÁLTOZÓS ANALÍZIS

## Előzetes megjegyzések

Az analízis feladata függvények általános tulajdonságainak a leírása.

Eddig az **egyváltozós analízissel**, vagyis $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ típusú (vagy másképpen fogalmazva valós-valós) függvényekkel foglalkoztunk. Láttuk, hogy az alapvető fogalmak a szóban forgó függvényeknek a *határértéke, folytonossága, deriváltja* és *integrálja*.

A továbbiakban a **többváltozós analízis** alapjaival fogunk megismerkedni. Az egyváltozós analízis alapvető fogalmainak és eredményeinek az $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ $(1 \leq n, m \in \mathbb{N})$ típusú (az ún. vektor-vektor) függvényekre való kiterjesztéséről lesz szó.

Mennyire „nehezebb" vagy komplikáltabb a többváltozós analízis az egyváltozósnál? Erre a kérdésre két választ adhatunk. Az első az, hogy semennyire, hiszen lényegében mindegy, hogy a hozzárendeléseket $\mathbb{R}$ részhalmazain vagy $\mathbb{R}^n$ részhalmazain értelmezzük. A másik válasz az, hogy sokkal komplikáltabb, mert a többdimenziós térben „több a hely", ezért a pontok egymáshoz viszonyított elrendezése jóval bonyolultabb lehet, mint a számegyenesen, ahol is egy pont a másiktól vagy jobbra vagy balra helyezkedhet el, és ezzel a lehetőségeket ki is merítettük.

Mind a két válaszban van igazság. Igaz ugyan, hogy a többdimenziós térben a pontok elhelyezkedése bonyolultabb lehet, de ez a komplikáció főleg a geometriát és a topológiát érinti. A többváltozós analízis elsajátítása során jó darabig hasznos az az irányelv, hogy lényegében ugyanarról van szó mint egy változóban, és hogy a több változó legfeljebb a jelöléseket komplikálja, a gondolatokat nem. A továbbiakban figyelmeztetni fogunk azokon a pontokon, amikor ez a hozzáállás már nem tartható.

Az egyváltozós analízis alapvető fogalmainak a vizsgálatát az $\mathbb{R}$ halmaz „topológiájára" alapoztuk. Megismerkedtünk a konvergens sorozatokkal, valamint ezek tulajdonságaival. Bevezettük a nyílt-, illetve zárt halmaz, a környezet, a torlódási pont, belső pont stb. fogalmakat.

A többváltozós analízis tárgyalásánál is ezt az utat követjük. Első lépésként az $\mathbb{R}^n$ tér topológiai tulajdonságaival ismerkedünk meg. Már itt hangsúlyozzuk, hogy $\mathbb{R}$-hez képest nem kell további nehézségekre számítani. Az egyes fogalmakhoz kapcsolódó $\mathbb{R}$-beli tételek (a bizonyításokkal együtt) „gond nélkül" kiterjeszthetők az $\mathbb{R}^n$ térre is.

# Az $\mathbb{R}^n$ tér topológiája

A `Matematikai alapok` tantárgyban az $\mathbb{R}^n$ tér számos tulajdonságáról volt szó. Most felsoroljuk azokat az ismerteket, amelyekre a továbbiakban szükségünk lesz.

Legyen $1 \le n \in \mathbb{N}$ egy adott természetes szám. Az $\mathbb{R}^n$ szimbólummal jelöljük a rendezett valós szám $n$-esek halmazát:

$$\mathbb{R}^n := \{x = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \mid x_k \in \mathbb{R},\ k = 1, 2, \ldots, n\}.$$

Az $x_1, x_2, \ldots, x_n$ számokat az $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ pont (vektor) *koordinátáinak* vagy *komponenseinek* nevezzük.

$\mathbb{R}^1$-et azonosítjuk $\mathbb{R}$-rel. A sík pontjai rendezett valós számpárokkal (vagyis az $\mathbb{R}^2$ halmaz elemeivel), a tér pontjai pedig rendezett valós számhármasokkal (vagyis $\mathbb{R}^3$ elemeivel) jellemezhetők/azonosíthatók. Az $\mathbb{R}^n$ halmaz tehát ezek „természetes” általánosításaként fogható fel. Az $n > 3$ esetben $\mathbb{R}^n$-nek nincs szemléletes jelentése, de a fogalom mégis nélkülönözhetetlen mind az elmélet, mind pedig az alkalmazások szempontjából.

A középiskolában a sík és tér vektoraival több műveletet is értelmeztünk. Vektorok **összeadásának**, valamint **vektor** (valós) **számmal való szorzásának** a mintájára vezetjük be az $\mathbb{R}^n$ halmazon az alábbi komponensenkénti műveleteket:

$$\begin{aligned}&\text{ha } x = (x_1, x_2, \ldots, x_n),\quad y = (y_1, y_2, \ldots, y_n) \in \mathbb{R}^n \quad \text{és} \quad \lambda \in \mathbb{R}, \quad \text{akkor}\\ &x + y := (x_1 + y_1, x_2 + y_2, \ldots, x_n + y_n), \quad \lambda \cdot x := (\lambda\, x_1, \lambda\, x_2, \ldots, \lambda\, x_n).\end{aligned}$$

Ezek az $\mathbb{R}^n$-beli műveletek rendelkeznek a sík és a tér vektorainak a középiskolában megismert 10 alapvető tulajdonságával. Röviden ezt úgy fejezzük ki, hogy $\mathbb{R}^n$ *ezekkel műveletekkel lineáris tér* (vagy *vektortér*) $\mathbb{R}$ *felett*. Ha a továbbiakban az **„$\mathbb{R}^n$ lineáris térről”** beszélünk, akkor mindig az $\mathbb{R}^n$ halmazra és az imént értelmezett két műveletre gondolunk.

(Kiemeljük azt fontos tényt is, hogy rögzített $1 \le n, m \in \mathbb{N}$ esetén az $n \times m$-es valós elemű mátrixok $\mathbb{R}^{n\times m}$ szimbólummal jelölt halmazában is értelmezzük az összeadás és a számmal való szorzás műveleteket, és $\mathbb{R}^{n\times m}$ ezekkel a műveletekkel $\mathbb{R}$ feletti lineáris tér.)

A középiskolában a sík és tér vektorainak az összeadásán és a számmal való szorzásán kívül megismerkedtünk még egy fontos művelettel, vektorok **skaláris szorzatával**.

Nyilván célszerű ezt a fogalmat az $\mathbb{R}^n$ lineáris térre is kiterjeszteni: Az $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$, $y = (y_1, y_2, \ldots, y_n) \in \mathbb{R}^n$ vektorok **skaláris szorzatát** az

$$\langle x, y\rangle := x_1y_1 + x_2y_2 + \cdots + x_ny_n$$

valós számmal definiáljuk.

A skaláris szorzat segítségével értelmezhetjük $\mathbb{R}^n$-beli vektorok szögét, merőlegességét, hosszát és távolságát. Ezekre a geometriában megszokott tulajdonságok jelentős része megmarad. Itt csak a középiskolában már megismert „vektor abszolút értéke” fogalom általánosítását fogalmazzuk meg.

Az $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ vektor **normáját** (**hosszát** vagy **abszolút értékét**) az

$$\|x\| := \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \cdot + x_n^2} \ \ \big(= \sqrt{\langle x, x\rangle}\big)$$

képlettel definiáljuk, és **euklideszi normának** nevezzük.

A norma „meghatározó tulajdonságai" a következők: bármely $x, y \in \mathbb{R}^n$ és bármely $\lambda \in \mathbb{R}$ esetén

(a) $\|x\| \geq 0$,

(b) $\|x\| = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad x = \mathbf{0}\ \big(:= (0, 0, \ldots, 0)\big)$,

(c) $\|\lambda \cdot x\| = |\lambda| \cdot \|x\|$,

(d) $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$ (háromszög-egyenlőtlenség).

Ha a továbbiakban az **„$\mathbb{R}^n$ normált térről"** beszélünk, akkor mindig az $\mathbb{R}^n$ lineáris térre és az azon értelmezett euklideszi normára gondolunk.

Az $x, y \in \mathbb{R}^n$ vektorok **távolságán** az $\|x - y\|$ számot értjük. Tetszőleges $x, y, z \in \mathbb{R}^n$ vektorokra fennáll az

$$\big|\|x\| - \|y\|\big| \leq \|x - y\|$$

egyenlőtlenség is. Ezt a háromszög-egyenlőtlenség egy változatának tekintjük.

Egy $a \in \mathbb{R}^n$ pont $r\ (> 0)$ sugarú **környezetén** a

$$K_r(a) := \big\{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x - a\| < r\big\}$$

halmazt értjük.

$n = 1$ esetén $K_r(a)$ az $a$ pontra szimmetrikus $(a - r, a + r)$ nyílt intervallum. Ha $n = 2$, akkor $K_r(a)$ az $a$ pont körüli $r$ sugarú nyílt körlap, $n = 3$ esetén pedig az $a$ pont körüli $r$ sugarú nyílt gömb. A „nyílt gömb" elnevezést használjuk akkor is, ha $n > 3$.

A $\emptyset \neq A \subset \mathbb{R}^n$ halmazt **korlátosnak** nevezzük, ha $\exists\, r > 0$ úgy, hogy $A \subset K_r(\mathbf{0})$, vagyis $A$ benne van egy $\mathbf{0}$ középpontú, alkalmas sugarú nyílt gömbben.

Környezetek segítségével (hasonlóan mint $\mathbb{R}$-ben) értelmezhetjük $\mathbb{R}^n$-ben is a következő „topológiai" fogalmakat. Tegyük fel, hogy $A$ az $\mathbb{R}^n$ normált tér egy nem üres részhalmaza. Ekkor

$1^o$ $a \in \mathbb{R}^n$ az $A$ halmaz **torlódási pontja** (jelben $a \in A'$), ha $\forall\, K(a) : K(a) \cap A$ végtelen halmaz, azaz az $a$ pont minden környezete végtelen sok $A$-beli pontot tartalmaz;

$2^o$ $a \in A$ az $A$ halmaz **belső pontja** (jelben $a \in \operatorname{int} A$), ha $\exists\, K(a)$, hogy $K(a) \subset A$;

$3^o$ az $A$ halmaz **nyílt halmaz**, ha minden pontja belső pont;

$4^o$ az $A$ halmaz **zárt halmaz**, ha $\mathbb{R}^n \setminus A$ nyílt halmaz.

# Konvergencia az $\mathbb{R}^n$ normált térben

Emlékeztetünk arra, hogy az $(x_k) : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ valós sorozatot akkor neveztük **konvergensnek**, ha

$$\exists\, A \in \mathbb{R} \text{ úgy, hogy } \forall\, \varepsilon > 0 \text{ számhoz } \exists\, k_0 \in \mathbb{N},\ \forall\, k \geq k_0 \text{ indexre } \big|x_k - A\big| < \varepsilon.$$

Ha van ilyen $A$ szám, akkor az egyértelmű és azt az $(x_k)$ sorozat **határértékének** neveztük, és az alábbi szimbólumok valamelyikével jelöltük:

$$\lim\,(x_k) = A, \quad \lim_{k \to +\infty} x_k = A, \quad x_k \to A, \text{ ha } k \to +\infty.$$

Az $(x_k)$ sorozat **divergens**, ha nem konvergens.

Figyeljük meg, hogy az $|x_k - A| < \varepsilon$ egyenlőtlenséget felfoghatjuk úgy is, hogy az $x_k$ pont $\varepsilon$-nál közelebb van $A$-hoz, vagyis $x_k$ és $A$ távolsága $\varepsilon$-nál kisebb. A konvergencia definíciója tehát csupán azon múlik, hogy $\mathbb{R}$-ben értelmezve van két pont távolsága. Mivel az $\mathbb{R}^n$ normált térben is definiáltuk a **távolságfogalmat**, ezért kézenfekvő $\mathbb{R}^n$-beli (vektor)sorozat konvergenciájának alábbi értelmezése:

**<u>Definíció.</u>** *Legyen $1 \leq n \in \mathbb{N}$. Az $\mathbb{R}^n$ normált tér $(x_k) : \mathbb{N} \to \mathbb{R}^n$ sorozata* ***konvergens****, ha*

$$\exists\, A \in \mathbb{R}^n \text{ úgy, hogy } \forall\, \varepsilon > 0 \text{ számhoz } \exists\, k_0 \in \mathbb{N},\ \forall\, k \geq k_0 \text{ indexre } \big\|x_k - A\big\| < \varepsilon.$$

*Ha $A$ létezik, akkor az egyértelmű, és $A$-t az $(x_k)$ sorozat* ***határértékének*** *nevezzük, és az alábbi szimbólumok valamelyikével jelöljük:*

$$\lim\,(x_k) = A, \qquad \lim_{k \to +\infty} x_k = A, \qquad x_k \to A, \text{ ha } k \to +\infty.$$

*Az $(x_k)$ sorozat* ***divergens****, ha nem konvergens.*

Figyeljük meg, hogy az $(x_k)$ vektorsorozat pontosan akkor tart az $A$ vektorhoz (vagyis $\lim\limits_{k\to+\infty} x_k = A$), ha az $\|x_k - A\|$ $(k \in \mathbb{N})$ normák sorozata $\mathbb{R}$-beli nullasorozat, azaz

$$\lim_{k\to+\infty} x_k = A \quad \Longleftrightarrow \quad \lim_{k\to+\infty} \|x_k - A\| = 0.$$

A következő tétel szerint egy vektorsorozat konvergenciája ekvivalens a koordináták sorozatainak a konvergenciájával.

**<u>Tétel.</u>** *Legyen $1 \leq n \in \mathbb{N}$. Egy $\mathbb{R}^n$ normált térbeli (vektor)sorozat akkor és csak akkor konvergens, ha a sorozat minden koordinátasorozata konvergens és a határértéke a határvektor megfelelő koordinátája, azaz*

$$\mathbb{R}^n \ni x_k = \left(x_k^{(1)}, x_k^{(2)}, \ldots, x_k^{(n)}\right) \to A = \left(A^{(1)}, A^{(2)}, \ldots, A^{(n)}\right), \text{ ha } k \to +\infty$$

*pontosan akkor igaz, ha minden $i = 1, 2, \ldots, n$ koordinátára*

$$x_k^{(i)} \to A^{(i)}, \text{ ha } k \to +\infty.$$

**Bizonyítás.** $\boxed{\Rightarrow}$ Tegyük fel, hogy $\lim\limits_{k\to+\infty} x_k = A$, azaz $\lim\limits_{k\to+\infty} \|x_k - A\| = 0$. Rögzítsük az $i = 1, 2, \ldots, n$ indexet. Mivel

$$0 \leq \left|x_k^{(i)} - A^{(i)}\right| \leq \sqrt{\sum_{j=1}^{n} \left|x_k^{(j)} - A^{(j)}\right|^2} = \|x_k - A\| \to 0, \text{ ha } k \to +\infty,$$

ezért a közrefogási elv szerint $\lim\limits_{k\to+\infty} \left|x_k^{(i)} - A^{(i)}\right| = 0$, azaz $\lim\limits_{k\to+\infty} x_k^{(i)} = A^{(i)}$.

$\boxed{\Leftarrow}$ Tegyük fel, hogy minden $i = 1, 2, \ldots, n$ indexre $\lim\limits_{k\to+\infty} x_k^{(i)} = A^{(i)}$. Ekkor az

$$\|x_k - A\| = \sqrt{\sum_{j=1}^{n} \left|x_k^{(j)} - A^{(j)}\right|^2} \leq \sum_{i=1}^{n} \left|x_k^{(i)} - A^{(i)}\right|$$

egyenlőtlenség és ismét a közrefogási elv alkalmazásával azt kapjuk, hogy $\|x_k - A\| \to 0$, ha $k \to +\infty$, azaz $\lim\limits_{k\to+\infty} x_k = A$. ■

Ennek a tételnek a segítségével a legtöbb számsorozatokra vonatkozó állítást általánosíthatjuk $\mathbb{R}^n$-beli sorozatokra. A bizonyítás többnyire abból áll, hogy a koordináták sorozataira alkalmazzuk a megfelelő számsorozatokra vonatkozó tételt.

Ezért $\mathbb{R}^n$-beli sorozatokra is igaz a határérték egyértelműségére vonatkozó tétel, az összegsorozat és a számszoros sorozat határértékére vonatkozó tétel, illetve a konvergens sorozat részsorozataira vonatkozó tétel. Mivel $n > 1$ esetén $\mathbb{R}^n$-ben nincs rendezési reláció, ezért a monotonitás fogalma nem értelmezhető. Vektorsorozatok szorzata, illetve hányadosa $n > 1$ esetén szintén nem értelemzett.

A következő két állításban azt fogalmazzuk meg, hogy az $\mathbb{R}$-beli sorozatok konvergenciájára vonatkozó alapvető jelentőségű tételek az $\mathbb{R}^n$ normált térben is érvényesek.

**A Cauchy-féle konvergenciakritérium.** *Legyen $1 \leq n \in \mathbb{N}$. Az $\mathbb{R}^n$ normált tér $(x_k)$ sorozata akkor és csak akkor konvergens, ha $(x_k)$ Cauchy-sorozat, azaz*

$$\forall\,\varepsilon > 0 \;\; \textit{számhoz} \;\; \exists\, k_0 \in \mathbb{N}, \;\; \textit{hogy} \;\; \forall\, k, l \geq k_0 \;\; \textit{indexre} \;\; \|x_k - x_l\| < \varepsilon.$$

**A Bolzano–Weierstrass-féle kiválasztási tétel.** *Az $\mathbb{R}^n$ $(1 \leq n \in \mathbb{N})$ normált térben minden korlátos sorozatnak van konvergens részsorozata.*

# $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ függvények

## Speciális esetek

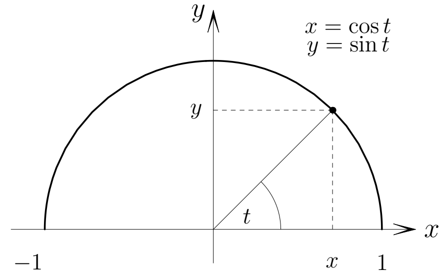
**1.** $f \in \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ✓

**2.** $f \in \mathbb{R} \to \mathbb{R}^m$, $1 < m \in \mathbb{N}$ **(görbék)**

**Példák:**

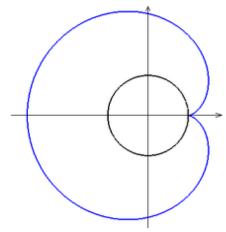
**(a) félkörív**

$$f(t) := \begin{bmatrix} \cos t \\ \sin t \end{bmatrix} \quad \big(t \in [0, \pi]\big)$$



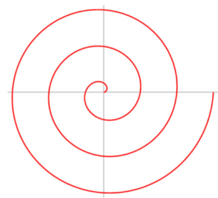
### (b) kardiodid (epiciklois speciális esete)

$$f(t) := \begin{bmatrix} 2\cos t - \cos 2t \\ 2\sin t - \sin 2t \end{bmatrix} \quad \big(t \in [0, 2\pi]\big)$$



### (c) archimédészi spirális

$$f(t) := \begin{bmatrix} t\cos t \\ t\sin t \end{bmatrix} \quad \big(t \in \mathbb{R}\big)$$



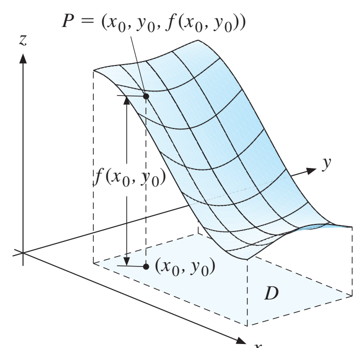
**Megjegyzés**. Itt hívjuk fel ismét a figyelmüket a MacTutor honlapra. Ezen – többek között – matematikusok (Archimédésztől napjainkig) életrajzairól és munkásságaikról találhatnak részletes információkat.

Ugyanezen az oldalon a „CURVES" menüpont alatt számos klasszikus görbe leírását találhatják meg.

A Néhány nevezetes síkgörbe című segédanyagban pedig bizonyos görbék származtatásáról olvashatak. □

## $\boxed{\textbf{3.}}$ $f \in \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $1 < n \in \mathbb{N}$, $n$ változós valós értékű függvények (felületek)

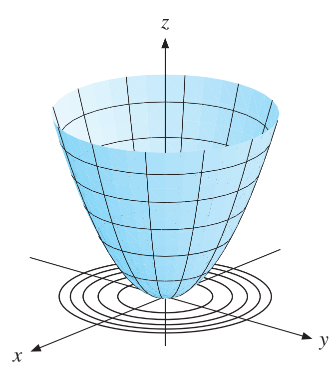
$$f \in \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$$




### Példák (síkmetszetekkel)

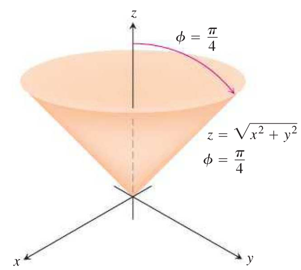
### (a) forgásparaboloid

$$f(x, y) := x^2 + y^2 \quad \big((x, y) \in \mathbb{R}^2\big)$$



**(b) forgáskúp**

$$f(x,y) := \sqrt{x^2+y^2} \ \big((x,y) \in \mathbb{R}^2\big)$$




$\boxed{4.}$ $f \in \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, $n, m > 1$ ($n$ **változós** $m$ **dimenziós vektor értékű függvény**, röviden **vektor-vektor függvény**)

Ha $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathcal{D}_f \subset \mathbb{R}^n$, akkor $f(x) = \big(f_1(x), f_2(x), \ldots, f_m(x)\big) \in \mathbb{R}^m$. Az így értelmezett $f_i \in \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ $(i = 1, 2, \ldots, m)$ függvényt az $f$ függvény $i$-edik **koordinátafüggvényének** nevezzük, és az

$$f = \begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ \vdots \\ f_m \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$$

alakban is megadhatjuk.

Ha $n = 2$, illetve $n = 3$, akkor a koordináták $(x_1, x_2)$, illetve $(x_1, x_2, x_3)$ jelölése mellett használni fogjuk a hagyományos $(x, y)$, illetve $(x, y, x)$ jelölést is.

# Folytonosság és határérték

A folytonosság és a határérték szempontjából a többváltozós függvények kevés újdonsággal szolgálnak.

## • Folytonosság

Idézzük fel, hogy mit is értettünk egy $f \in \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvény valamely $a \in \mathcal{D}_f$ pontbeli folytonosságán. Azt mondtuk, hogy $f$ folytonos az $a$ pontban (jelben $f \in C\{a\}$), ha

$$\forall\, \varepsilon > 0 \text{ számhoz } \exists\, \delta > 0 \text{ úgy, hogy } \forall\, x \in \mathcal{D}_f,\ |x - a| < \delta \text{ pontban } |f(x) - f(a)| < \varepsilon.$$

Ez a fogalom az $f$ függvénynek azt a szemléletes tulajdonságát fejezi ki, hogy „ha $x$ közel van az $a$ ponthoz, akkor az $f(x)$ függvényérték közel van $f(a)$-hoz”.

Kézenfekvőnek látszik a folytonosság fogalmának alábbi kiterjesztése vektor-vektor függvényekre.

**Definíció.** *Azt mondjuk, hogy az $f \in \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ $(1 \le n, m \in \mathbb{N})$ függvény* ***folytonos az $a \in \mathcal{D}_f$ pontban****, (jelben $f \in C\{a\}$), ha*

$$\forall\, \varepsilon > 0 \text{ számhoz } \exists\, \delta > 0 \text{ úgy, hogy } \forall\, x \in \mathcal{D}_f,\ \|x - a\|^{(n)} < \delta \text{ pontban } \|f(x) - f(a)\|^{(m)} < \varepsilon,$$

*ahol $\|\cdot\|^{(n)}$, illetve $\|\cdot\|^{(m)}$ az $\mathbb{R}^n$, illetve az $\mathbb{R}^m$ normált térbeli euklideszi normát jelöli.*

**A folytonosságra vonatkozó átviteli elv.** *Legyen* $f \in \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ $(1 \le n, m \in \mathbb{N})$ *és* $a \in \mathcal{D}_f$. *Ekkor*

$1^o$ $f \in C\{a\} \iff \forall\, (x_k) : \mathbb{N} \to \mathcal{D}_f,\ \lim_{k\to+\infty} x_k = a$ *esetén* $\lim_{k\to+\infty} f(x_k) = f(a)$.

$2^o$ *Tegyük fel, hogy a* $\mathcal{D}_f$*-beli* $(x_k)$ *sorozat az* $a \in \mathcal{D}_f$ *ponthoz konvergál és*

$$\lim_{k\to+\infty} f\big(x_k\big) \ne f(a).$$

*Ekkor az* $f$ *függvény* ***nem folytonos*** $a$***-ban***.

**Műveleti tételek:**

$1^o$ Ha $f, g \in \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ $(1 \le n, m \in \mathbb{N})$ és $f, g \in C\{a\}$, akkor

(a) $f + g \in C\{a\}$ és $\lambda f \in C\{a\}$ $(\lambda \in \mathbb{R})$;

(b) az $m = 1$ esetben $f \cdot g \in C\{a\}$ és $g(a) \ne 0$ esetén $\dfrac{f}{g} \in C\{a\}$.

$2^o$ Ha $g \in \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ $(1 \le n, m \in \mathbb{N})$, $g \in C\{a\}$ és $f \in \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^p$ $(1 \le m, p \in \mathbb{N})$, $f \in C\{g(a)\}$, akkor $f \circ g \in C\{a\}$.

**Weierstrass tétele.** *Legyen* $1 \le n \in \mathbb{N}$ *és tegyük fel, hogy*

(a) $f \in \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$,

(b) $\mathcal{D}_f$ *korlátos és zárt halmaz az* $\mathbb{R}^n$ *normált térben,*

(c) $f$ *folytonos* $\mathcal{D}_f$*-en.*

*Ekkor az* $f$ *függvénynek vannak abszolút szélsőértékhelyei, azaz*

$$\exists\, x_1 \in \mathcal{D}_f:\quad f(x) \le f(x_1) \quad (\forall\, x \in \mathcal{D}_f) \quad (x_1 \textit{ abszolút maximumhely}),$$
$$\exists\, x_2 \in \mathcal{D}_f:\quad f(x_2) \le f(x) \quad (\forall\, x \in \mathcal{D}_f) \quad (x_2 \textit{ abszolút minimumhely}).$$

**Határérték**

Valós-valós függvény határértékének `általános definíciója` 9 speciális esetet tartalmaz. Itt csak a **végesben vett véges határérték** általánosításával foglalkozunk. Idézzük fel ezt a definíciót: Azt mondtuk, hogy az $f \in \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvénynek az $a \in \mathcal{D}_f' \cap \mathbb{R}$ (véges) helyen van (véges) határértéke, ha

$$\exists\, A \in \mathbb{R} \text{ úgy, hogy } \forall\, \varepsilon > 0 \text{ számhoz } \exists\, \delta > 0 \text{ úgy, hogy}$$
$$\forall\, x \in \mathcal{D}_f \setminus \{a\},\ |x - a| < \delta \text{ pontban } |f(x) - A| < \varepsilon.$$

Ha van ilyen $A$ szám, akkor az egyértelmű, és azt az $f$ függvény $a$ pontban vett határértékének neveztük, és az alábbi szimbólumok valamelyikével jelöltük:

$$\lim_a f = A, \quad \lim_{x\to a} f(x) = A, \quad f(x) \to A, \text{ ha } x \to a.$$

Jegyezzük meg, hogy ez a fogalom az $f$ függvénynek azt a szemléletes tulajdonságát fejezi ki, hogy „ha $x$ közel van az $a$ ponthoz, akkor az $f(x)$ függvényérték közel van $A$-hoz”.

Az eddigiek alapján kézenfekvő a határérték fogalmának alábbi kiterjesztése vektor-vektor függvényekre.

**Definíció.** *Az $f \in \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ $(1 \le n, m \in \mathbb{N})$ függvénynek az $a \in \mathcal{D}'_f$ pontban **van határértéke**, ha*

$$\exists\, A \in \mathbb{R}^m \text{ úgy, hogy } \forall\, \varepsilon > 0 \text{ számhoz } \exists\, \delta > 0 \text{ úgy, hogy}$$

$$\forall\, x \in \mathcal{D}_f,\ 0 < \|x - a\|^{(n)} < \delta \text{ pontban } \|f(x) - A\|^{(m)} < \varepsilon,$$

*ahol $\|\cdot\|^{(n)}$, illetve $\|\cdot\|^{(m)}$ az euklideszi norma az $\mathbb{R}^n$, illetve az $\mathbb{R}^m$ limeáris téren.*

A folytonosság és a határérték kapcsolatát fejezi ki a következő állítás.

**Tétel.** *Tegyük fel, hogy $f \in \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ $(1 \le n, m \in \mathbb{N})$ és $a \in \mathcal{D}_f \cap \mathcal{D}'_f$. Ekkor*

$$f \in C\{a\} \quad \Longleftrightarrow \quad \exists \lim_a f \text{ és } \lim_a f = f(a).$$

**A határértékre vonatkozó átviteli elv.** *Legyen $f \in \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ $(1 \le n, m \in \mathbb{N})$ és $a \in \mathcal{D}'_f$. Ekkor:*

$1^o$ $\lim_a f = A \in \mathbb{R}^m \Longleftrightarrow \forall\, (x_k) : \mathbb{N} \to \mathcal{D}_f \setminus \{a\},\ \lim_{k \to +\infty} (x_k) = a$ *esetén* $\lim_{k \to +\infty} f(x_k) = A$.

$2^o$ *Tegyük fel, hogy a $\mathcal{D}_f \setminus \{a\}$ halmazbeli $(x_k)$ és $(u_k)$ sorozatok mindegyike az $a \in \mathcal{D}'_f$ ponthoz konvergál és*

$$\lim_{k \to +\infty} f(x_k) \neq \lim_{k \to +\infty} f(u_k).$$

*Ekkor az $f$ függvénynek **nincs határértéke** $a$-**ban**.*