9. gyakorlat

Primitív függvények meghatározására vonatkozó módszerek 3. A határozott integrál és alkalmazásai

Az előző gyakorlaton a következő integrálási szabályokra oldottunk meg feladatokat:

- **1.** alapintegrálok, a határozatlan integrál linearitása;
- **2.** az első helyettesítési szabály;
- **3.** a parciális integrálás,
- **4.** a második helyettesítési szabály,
- **5.** racionális törtfüggvények integrálása.

Ezen a gyakorlaton egy további módszerrel ismerkedünk meg.

6. Racionális törtfüggvények integrálására vonatkozó helyettesítések. (Elméleti összefoglaló.)

Számos olyan integrandus-típus van, amelyeket alkalmas helyettesítésekkel racionális törtfüggvények integrálására vezethetünk vissza. Itt ezek közül csak kettőt ismertetünk.

• $\int S\left(e^x\right)\,dx$ **alakú integrálok**, ahol $S(u)$ egyváltozós polinomok hányadosa. Ebben az esetben a

$$\boxed{t = e^x}$$

helyettesítés lesz célravezető.

Tegyük fel ugyanis, hogy $I \subset \mathbb{R}$ egy olyan nyílt intervallum, amelyben S nevezőjének nincs valós gyöke. Ekkor az integrandus folytonos, ezért van primitív függvénye. Tekintsük tehát a $t = e^x$ helyettesítést, azaz legyen

$$x = \ln t =: g(t)$$

a helyettesítő függvény. Mivel $x \in I$, ezért $\mathcal{R}_g = I$, így $\mathcal{D}_g$ az I intervallum ln függvény által létesített őse:

$$\mathcal{D}_g = \ln^{-1}[I] =: J.$$

Ekkor $J \subset \mathbb{R}$ is egy nyílt intervallum, ami a konkrét feladatokban egyszerűen meghatározható (meg is kell határozni!). A g függvény deriválható J-n és

$$g'(t) = \frac{1}{t} > 0, \quad \text{ha } t \in J,$$

ezért g szigorúan monoton növekedő J-n, következésképpen invertálható és

$$g^{-1}(x) = e^x = t \quad (x \in I).$$

A második helyettesítési szabály alapján

$$\int S \circ \exp = \int S\big(e^x\big)\,dx \underset{x=\ln t}{=} \int S(t)\cdot\frac{1}{t}\,dt \quad (t\in J).$$

Világos, hogy $\dfrac{S(t)}{t}$ $(t\in J)$ is racionális törtfüggvény, ezért az integráljának a meghatározása már történhet az $\boxed{\textbf{5.}}$ pont alapján.

- $\underline{\int R\Big(x, \sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}}\Big)\,dx}$ **alakú integrálok**, ahol $R(u,v)$ kétváltozós polinomok hányadosa.

Ezen azt értjük, hogy $R(u,v)$ az u és v változókból, valamint konstansokból állítható elő a négy alapművelet segítségével. Könnyen látható, hogy ez pontosan akkor áll, ha

$$R(u,v) = \frac{\sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{n} a_{ij}u^iv^j}{\sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{n} b_{ij}u^iv^j}$$

ahol $n\ge 0$ egész és a_{ij}, b_{ij} adott valós számok.

A feladatokban mindig olyan I intervallumokat fogunk megadni, amelyeken az integrandus folytonos. Ekkor a gyökös kifejezést egy új változóval helyettesítve racionális törtfüggvény integrálására jutunk. Legyen tehát

$$\boxed{t := \sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}}}$$

az „új" változó. A g helyettesítő függvényt úgy kapjuk meg, hogy ebből az egyenletből x-et kifejezzük:

$$t^n = \frac{ax+b}{cx+d} \quad\Longrightarrow\quad ax+b = ct^nx + dt^n \quad\Longrightarrow\quad g(t) := x = \frac{dt^n-b}{a-ct^n}.$$

Itt $x\in I$, így $\mathcal{R}_g = I$. A g függvény értelmezési tartománya egy J nyílt intervallum. Konkrét esetekben ez egyszerűen meghatározható (meg is kell határozni!). Világos, hogy g deriválható és g' (egyváltozós) racionális törtfüggvény. Ellenőriznünk kell azt is, hogy g invertálható (az adott feladatokban ez mindig igaz lesz). A második helyettesítési szabály alapján

$$\int R\left(x, \sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}}\right)dx = \int R\big(g(t),t\big)\cdot g'(t)\,dt \quad (t\in J).$$

Az integrandus tehát (egyváltozós) racionális törtfüggvény. Ennek az integrálját az $\boxed{\textbf{5.}}$ pont alapján számítjuk ki. $\square$

1. feladat. *Számítsuk ki az alábbi integrálokat:*

(a) $\displaystyle\int \frac{e^{3x}}{e^x+2}\,dx \quad (x\in\mathbb{R}),$

(b) $\displaystyle\int \frac{1}{x^2}\cdot\sqrt[3]{\frac{x+1}{x}}\,dx \quad \big(x\in(0,+\infty)\big).$

Megoldás. (a) Az integrandus folytonos $\mathbb{R}$-en, ezért van primitív függvénye. Alkalmazzuk a $t = e^x$ helyettesítést. Ebből az egyenletből x-et kifejezve kapjuk a g helyettesítő függvényt:

$$x = \ln t =: g(t).$$

Mivel $x \in \mathbb{R}$, ezért $\mathcal{R}_g = \mathbb{R}$, következésképpen $\mathcal{D}_g = (0, +\infty)$. A g függvény deriválható, és

$$g'(t) = \frac{1}{t} > 0 \quad \big(\forall\, t \in (0, +\infty)\big)$$

alapján g szigorúan monoton növekedő, következésképpen invertálható és

$$g^{-1}(x) = e^x = t \quad (x \in \mathbb{R}).$$

A második helyettesítési szabályt alkalmazva azt kapjuk, hogy

$$\int \frac{e^{3x}}{e^x + 2}\, dx = \int \frac{t^3}{t+2} \cdot \frac{1}{t}\, dt = \int \frac{t^2}{t+2}\, dt = \int \frac{t^2 - 4 + 4}{t+2}\, dt =$$

$$= \int \left(\frac{(t+2)(t-2)}{t+2} + \frac{4}{t+2} \right) dt = \int (t-2)\, dt + 4 \int \frac{1}{t+2}\, dt =$$

$$= \frac{t^2}{2} - 2t + 4\ln(t+2) + c_{\big|t=e^x} = \frac{e^{2x}}{2} - 2e^x + 4\ln(e^x + 2) + c \ \ (x \in \mathbb{R}).$$

(b) Az integrandus folytonos a $(0, +\infty)$ intervallumon, ezért van primitív függvénye. Alkalmazzuk a

$$t = \sqrt[3]{\frac{x+1}{x}}$$

helyettesítést. Ebből az egyenletből x-et kifejezve azt kapjuk, hogy

$$t^3 = \frac{x+1}{x} = 1 + \frac{1}{x} \implies t^3 - 1 = \frac{1}{x} \implies x = \frac{1}{t^3 - 1}.$$

Ha $x \in (0, +\infty)$, akkor $t \in (1, +\infty)$. A g helyettesítő függvény tehát

$$g(t) = \frac{1}{t^3 - 1} = x \quad \big(t \in (1, +\infty)\big).$$

Mivel g deriválható és

$$g'(t) = -\frac{1}{\big(t^3 - 1\big)^2} \cdot 3t^2 < 0, \quad \text{ha } t > 1,$$

ezért g szigorúan monoton csökkenő, következésképpen invertálható, és

$$g^{-1}(x) = t = \sqrt[3]{\frac{x+1}{x}} \quad \big(x \in (0, +\infty)\big).$$

A második helyettesítési szabály alapján azt kapjuk, hogy

$$\int \frac{1}{x^2} \cdot \sqrt[3]{\frac{x+1}{x}}\, dx = \int \frac{1}{\left(\frac{1}{t^3 - 1}\right)^2} \cdot t \cdot \left(\frac{-3t^2}{\big(t^3 - 1\big)^2} \right) dt = -3 \int t^3\, dt =$$

$$= -\frac{3}{4} t^4 + c_{\big|t = \sqrt[3]{\frac{x+1}{x}}} = -\frac{3}{4} \sqrt[3]{\left(\frac{x+1}{x}\right)^4} + c \quad \big(x \in (0, +\infty)\big). \ \blacksquare$$

Megjegyzés. A (b) feladatot a következőképpen is megoldhatjuk:

$$\int \frac{1}{x^2} \cdot \sqrt[3]{\frac{x+1}{x}}\, dx = \int \frac{1}{x^2} \sqrt[3]{1+\frac{1}{x}}\, dx = -\int \left(1+\frac{1}{x}\right)^{1/3} \cdot \left(\frac{1}{x}\right)' dx = \ (f^{1/3} \cdot f' \text{ típus}) =$$

$$= -\frac{\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^{4/3}}{4/3} + c = -\frac{3}{4} \sqrt[3]{\left(\frac{x+1}{x}\right)^4} + c \quad \big(x \in (0,+\infty)\big).$$

A Newton–Leibniz-tétel

Emlékeztető. **A Newton–Leibniz-tétel.** *Tegyük fel, hogy $f \in R[a,b]$ és az f függvénynek van primitív függvénye az $[a,b]$ intervallumon. Ekkor*

$$\int_a^b f(x)\, dx = F(b) - F(a) =: \big[F(x)\big]_a^b,$$

ahol F a f függvény egy primitív függvénye.

2. feladat. *Számítsuk ki az*

$$\int_{10}^{66} \frac{1}{x - \sqrt[3]{x-2} - 2}\, dx$$

határozott integrált.

Megoldás. Először az integrandus primitív függvényeit határozzuk meg. A $t = \sqrt[3]{x-2}$ helyettesítést alkalmazzuk:

$$\begin{aligned} t = \sqrt[3]{x-2},\quad x > 10,\ t > 2 \quad &\Longrightarrow \quad x = t^3 + 2 =: g(t)\ (t > 2) \quad \Longrightarrow \\ g'(t) = 3t^2 > 0 \quad (t > 2) \quad &\Longrightarrow \quad g \uparrow \quad (2,+\infty)\text{-en} \quad \Longrightarrow \quad \exists\, g^{-1}. \end{aligned}$$

A határozatlan integrálokra vonatkozó második helyettesítési szabály alapján: ha $x > 10$ és $t > 2$, akkor

$$\int \frac{1}{x - \sqrt[3]{x-2} - 2}\, dx = \int \frac{1}{t^3 + 2 - t - 2} \cdot 3t^2\, dt = \frac{3}{2} \cdot \int \frac{2t}{t^2 - 1}\, dt = (f'/f \quad \text{típus}) =$$

$$= \frac{3}{2} \cdot \ln\big(t^2 - 1\big) + c_{\big|t=\sqrt[3]{x-2}} = \frac{3}{2} \cdot \ln\big((x-2)^{2/3} - 1\big) + c.$$

A Newton–Leibniz-tételt alkalmazva azt kapjuk, hogy:

$$\underset{\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim}{\int_{10}^{66} \frac{1}{x - \sqrt[3]{x-2} - 2}\, dx} = \frac{3}{2} \cdot \Big[\ln\big((x-2)^{2/3} - 1\big)\Big]_{10}^{66} =$$

$$= \frac{3}{2} \cdot \Big(\ln\big(64^{2/3} - 1\big) - \ln\big(8^{2/3} - 1\big)\Big) = \frac{3}{2} \cdot \big(\ln 15 - \ln 3\big) = \underset{\sim\sim\sim\sim}{\frac{3}{2} \cdot \ln 5}. \quad \blacksquare$$

A határozott integrál alkalmazásai

• Síkidom területe

Emlékeztető. Egy $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ nemnegatív, korlátos és Riemann-integrálható függvény grafikonja alatti

$$A_f = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid a \le x \le b,\ 0 \le y \le f(x)\}$$

síkidom területét a

$$T(A_f) = \int_a^b f(x)\,dx$$

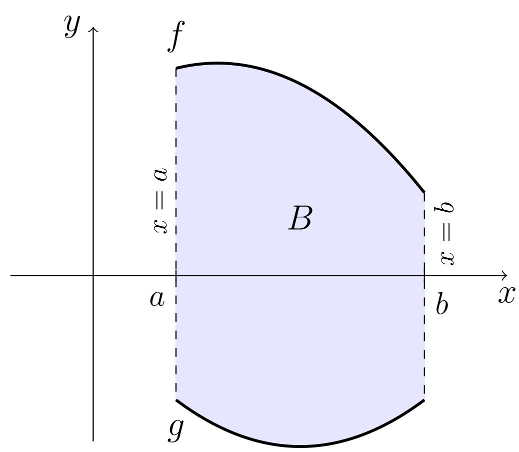
határozott integrállal értelmeztük. Két $f, g\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ korlátos és Riemann-integrálható függvény esetében, ha $g(x) \le f(x)$ minden $x \in [a,b]$ pontban, akkor a függvények az $x = a$ és $x = b$ egyenesekkel által közrezárt

$$B = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid a \le x \le b,\ g(x) \le y \le f(x)\}$$

síkidom területét a

$$T(B) = \int_a^b \big(f(x) - g(x)\big)\,dx$$

határozott integrállal célszerű értelmezni.



Ez könnyen látható, ha $g \ge 0$, hiszen ekkor az f függvény grafikonja alatti A_f síkidom tartalmazza a g függvény grafikonja alatti A_g síkidomot, azaz $A_g \subseteq A_f$, és így

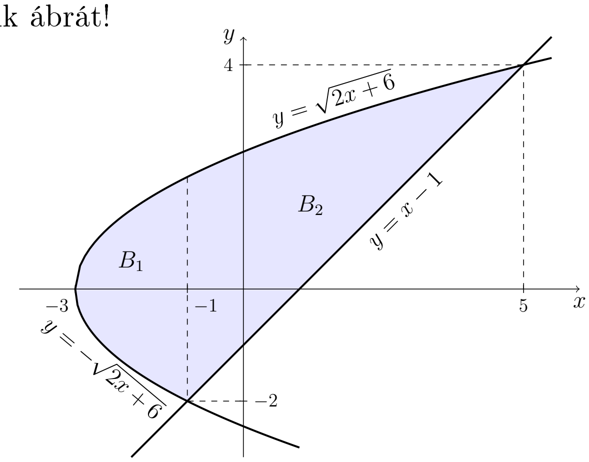
$$T(B) = T(A_f \setminus A_g) = T(A_f) - T(A_g) = \int_a^b f(x)\,dx - \int_a^b g(x)\,dx = \int_a^b \big(f(x) - g(x)\big)\,dx.$$

Ha a $g \ge 0$ feltétel nem teljesül, akkor a függvény korlátossága miatt $\exists c > 0$ szám, hogy $f(x) + c \ge$ $\ge g(x) + c \ge 0$ minden $x \in [a,b]$ esetén. Ezzel feltoltuk a B síkidomot az x tengely fölé, ezért a területe

$$T(B) = \int_a^b \big(f(x) + c\big)\,dx - \int_a^b \big(g(x) + c\big)\,dx = \int_a^b \big(f(x) + c\big) - \big(g(x) + c\big)\,dx = \int_a^b \big(f(x) - g(x)\big)\,dx. \quad \square$$

3. feladat. *Számoljuk ki az $y = x - 1$ egyenletű egyenes és az $y^2 = 2x + 6$ egyenletű parabola által közrezárt korlátos síkidom területét.*

Megoldás. Készítsünk ábrát!



A két görbe által közrezárt síkidom meghatározásához először meg kell keresnünk a metszéspontjukat. Ehhez meg kell oldanunk az

$$\begin{aligned} y^2 &= 2x+6 \\ y &= x-1 \end{aligned}$$

egyenletrendszert. Ez olyan x értékekre teljesül, amelyekre $(x-1)^2 = 2x+6$, azaz $x^2-4x-5=0$. Ennek két megoldása van: $x=-1$ és $x=5$.

Az $y^2 = 2x+6$ olyan parabolának egyenlete, amely szimmetriatengelye megegyezik az x tengellyel, és csúcsa a $(-3,0)$ koordinátájú pontban van. A felső parabolaág egyenlete $y = \sqrt{2x+6}$, míg az alsó parabolaág egyenlete $y = -\sqrt{2x+6}$. Látható tehát, hogy a keresett síkidomot nem csak két függvény fogja meghatározni, ezért ezt darabolni fogjuk az alábbiak szerint

$$\begin{aligned} B_1 &= \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid -3 \le x \le -1,\ -\sqrt{2x+6} \le y \le \sqrt{2x+6}\}, \\ B_2 &= \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid -1 \le x \le 5,\ x-1 \le y \le \sqrt{2x+6}\}. \end{aligned}$$

Az előző két síkidom területét már ki tudjuk számítani integrálszámítással:

$$\begin{aligned} T(B_1) &= \int\limits_{-3}^{-1} \sqrt{2x+6} - (-\sqrt{2x+6})\,dx = 2\int\limits_{-3}^{-1} \sqrt{2x+6}\,dx = 2\int\limits_{-3}^{-1} (2x+6)^{1/2}\,dx = \\ &= 2\left[\frac{(2x+6)^{3/2}}{3/2\cdot 2}\right]_{-3}^{-1} = \frac{2}{3}\left[\sqrt{(2x+6)^3}\right]_{-3}^{-1} = \frac{2}{3}\left(\sqrt{4^3}-\sqrt{0^3}\right) = \frac{16}{3}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} T(B_2) &= \int\limits_{-1}^{5} \sqrt{2x+6} - (x-1)\,dx = \int\limits_{-1}^{5} (2x+6)^{1/2} - x + 1\,dx = \\ &= \left[\frac{(2x+6)^{3/2}}{3/2\cdot 2} - \frac{x^2}{2} + x\right]_{-1}^{5} = \left[\frac{1}{3}\sqrt{(2x+6)^3} - \frac{x^2}{2} + x\right]_{-1}^{5} = \\ &= \left(\frac{1}{3}\sqrt{16^3} - \frac{25}{2} + 5\right) - \left(\frac{1}{3}\sqrt{4^3} - \frac{1}{2} - 1\right) = \frac{38}{3}. \end{aligned}$$

Az előző két terület összege adja az egyenes és a parabola által közrezárt síkidom területét:

$$T(B_1) + T(B_2) = 18. \ \blacksquare$$

Megjegyzés. Az előző számítások jelentősen lerövidülnek, ha az x és y változók szerepét felcseréljük. Így az $x = y - 1$, azaz az $y = x + 1$ egyenletű egyenes és az $x^2 = 2y + 6$, azaz $y = \frac{x^2}{2} - 3$ egyenletű parabola által közrezárt síkidom területétét kell kiszámítáni. Ekkor a metszéspontokat az

$$\begin{aligned} y &= \frac{x^2}{2} - 3 \\ y &= x + 1 \end{aligned}$$

egyenletrendszer megoldása után kapjuk, ahol csak $x = -2$ és $x = 4$ esetén kapunk megoldást. A „könnyebbség” ott jelenik meg, hogy a keletkezett síkidomot két függvénnyel lehet meghatározni az alábbi szerint

$$B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid -2 \le x \le 4,\ \frac{x^2}{2} - 3 \le y \le x + 1\}.$$

Így ennek területe

$$T(B) = \int_{-2}^{4} \left((x+1) - \left(\frac{x^2}{2} - 3 \right) \right) dx = \int_{-2}^{4} \left(-\frac{x^2}{2} + x + 4 \right) dx = \left[-\frac{x^3}{6} + \frac{x^2}{2} + 4x \right]_{-2}^{4} =$$

$$= \left(-\frac{4^3}{6} + \frac{4^2}{2} + 4 \cdot 4 \right) - \left(-\frac{(-2)^3}{6} + \frac{(-2)^2}{2} + 4 \cdot (-2) \right) = \frac{40}{3} - \left(-\frac{14}{3} \right) = 18. \blacksquare$$

• **Síkbeli görbe ívhossza**

4. feladat. *Határozzuk meg az*

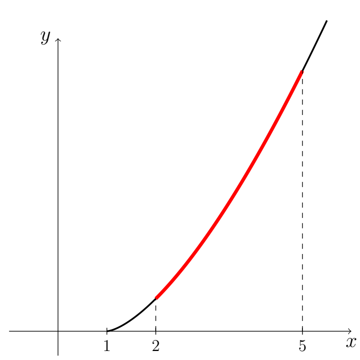
$$f(x) := \frac{2(x-1)^{3/2}}{3} \quad (2 \le x \le 5)$$

függvény grafikonjának a hosszát.

Megoldás. Tudjuk, hogy ha egy f függvény folytonosan differenciálható az $[a, b]$ intervallumon, akkor a grafikonjának ezen a szakaszon van ívhossza, és ez egyenlő az

$$\ell = \int_a^b \sqrt{1 + [f'(x)]^2}\, dx$$

határozott integrállal. A megadott f függvény grafikonja a következő ábrán látható.



Az $f(x) := \dfrac{2(x-1)^{3/2}}{3}$ függvény differenciálható, és deriváltja

$$f'(x) := (x-1)^{1/2} = \sqrt{x-1}$$

folytonos a $[2,5]$ intervallumon. Ezért létezik a keresett ívhossz, amelynek mértéke

$$\ell = \int_2^5 \sqrt{1+[\sqrt{x-1}]^2}\,dx = \int_2^5 \sqrt{1+x-1}\,dx = \int_2^5 \sqrt{x}\,dx = \int_2^5 x^{1/2}\,dx =$$

$$= \left[\frac{x^{3/2}}{3/2}\right]_2^5 = \frac{2}{3}\left[\sqrt{x^3}\right]_2^5 = \frac{2}{3}\left(\sqrt{5^3}-\sqrt{2^3}\right) \approx 5.568. \ \blacksquare$$

• **Forgástest térfogata**

5. feladat. *Számítsuk ki az*

$$f(x) := \sin x \qquad \big(x \in [0,\pi]\big)$$

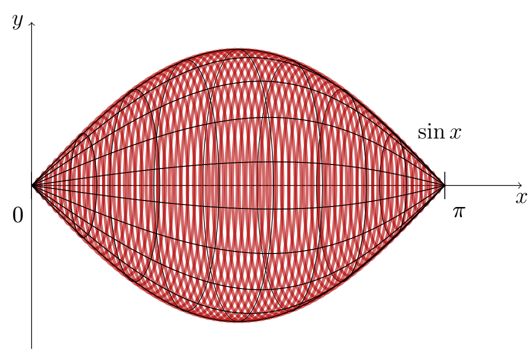
függvény grafikonjának az x-tengely körüli megforgatásával adódó forgástest térfogatát.

Megoldás. Ha az f függvény Riemann-integrálható egy $[a,b]$ intervallumom, akkor az x-tengely körüli megforgatásával keletkezett forgástestnek van térfogata, és ezt a

$$V = \pi \int_a^b f^2(x)\,dx$$

formulával tudjuk kiszámolni.

Az ábrán látható forgástest térfogatát keressük.



Az $f(x) = \sin x$ függvény folytonos, ezért Riemann-integrálható a $[0,\pi]$ intervallumom. Ekkor a forgástestnek van térfogata, amelynek mértéke

$$V = \pi \int_a^b f^2(x)\,dx = \pi \int_0^\pi \sin^2 x\,dx = \pi \int_0^\pi \frac{1-\cos 2x}{2}\,dx = \frac{\pi}{2}\left[x - \frac{\sin 2x}{2}\right]_0^\pi =$$

$$= \frac{\pi}{2}\left(\left(\pi - \frac{\sin 2\pi}{2}\right) - \left(0 - \frac{\sin(2\cdot 0)}{2}\right)\right) = \frac{\pi^2}{2}. \ \blacksquare$$

6. feladat. *Bizonyítsuk be, hogy*

$$\int_0^1 \operatorname{arc\,tg} x\,dx + \int_0^{\pi/4} \operatorname{tg} x\,dx = \frac{\pi}{4}.$$

1. megoldás. Az arc tg függvény határozatlan integrálja parciális integrálással határozható meg

$$\int \operatorname{arc\,tg} x\,dx = \int 1\cdot \operatorname{arc\,tg} x\,dx = \int (x)'\operatorname{arc\,tg} x\,dx = x\cdot \operatorname{arc\,tg} x - \int x\cdot\frac{1}{1+x^2}\,dx =$$

$$= x\cdot\operatorname{arc\,tg} x - \frac{1}{2}\int\frac{2x}{1+x^2}\,dx = x\cdot\operatorname{arc\,tg} x - \frac{1}{2}\ln(1+x^2) + c.$$

A tg függvény határozatlan integrálja

$$\int \operatorname{tg} x\,dx = \int\frac{\sin x}{\cos x}\,dx = -\int\frac{-\sin x}{\cos x}\,dx = -\ln(\cos x) + c.$$

Így a Newton–Leibniz-tétel szerint

$$\int_0^1 \operatorname{arc\,tg} x\,dx = \left[x\cdot\operatorname{arc\,tg} x - \frac{1}{2}\ln(1+x^2)\right]_0^1 = \left(\operatorname{arc\,tg} 1 - \frac{1}{2}\ln 2\right) - \left(0 - \frac{1}{2}\ln 1\right) =$$

$$= \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}\ln 2 = \frac{\pi}{4} - \ln\sqrt{2}$$

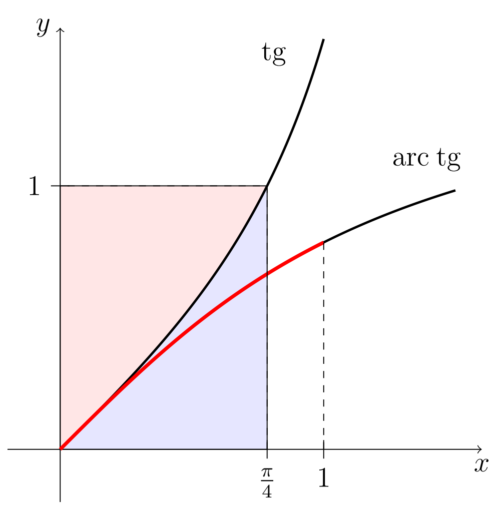
és

$$\int_0^{\pi/4} \operatorname{tg} x\,dx = [-\ln(\cos x)]_0^{\pi/4} = -\ln(\cos\pi/4) - (-\ln(\cos 0)) = -\ln(\sqrt{2}/2) + \ln 1 =$$

$$= -\ln(1/\sqrt{2}) = \ln\sqrt{2}$$

Ha összeadjuk a két eredményt megkapjuk az igazolandó állítást.

2. megoldás. Vegyük észre, hogy az arc tg a tg függvény inverze és készítsünk ábrát.



A tg függvény az ábrán látható $\pi/4$ és 1 oldalú téglalapot két részre bontja. A kék színű rész a tg függvény a $[0, \pi/4]$ intervallumra vonatkozó grafikon alatti síkidom, amelynek területe

$$\int_0^{\pi/4} \operatorname{tg} x \, dx.$$

Az arc tg függvény a tg függvény inverze, ezért grafikonja a tg függvény az $y = x$ egyenesre vett tükörképe. Így a piros színű rész területe megegyezik az arc tg függvény a $[0, 1]$ intervallumra vonatkozó piros színű grafikon alatti síkidom területével, amelynek mértéke

$$\int_0^{1} \operatorname{arc\,tg} x \, dx.$$

A kék és a piros színű részek területeinek összege a téglalap területét adja, amelynek mértéke $\pi/4$. Ez igazolja a feladat állítását. ■