Programtervező informatikus BSc, C szakirány
Valószínűségszámítás és statisztika gyakorlat

1. (1-2 hét) Valószínűségek kiszámítása; feltételes valószínűség és Bayes-tétel

Elmélet

Definíció (Ismétlés nélküli permutáció). n (különböző) elem egy sorrendje.

$$n!.$$

Definíció (Ismétléses permutáció). n (nem feltétlen különböző) elem egy sorrendje, ahol az egyforma elemeket nem különböztetjük meg (tfh. az n elem közül $k_1, \ldots, k_r$ darab megegyezik).

$$\frac{n!}{k_1! \cdots k_r!} = \binom{n}{k_1, \ldots, k_r}.$$

Definíció (Ismétlés nélküli kombináció). n (különböző) elem közül k számú $(k \leq n)$ elem egyszerre történő kiválasztása (sorrend nem számít, nincs visszatevés).

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k! \cdot (n-k)!}.$$

Definíció (Ismétléses kombináció). n (különböző) elem visszatevéses eljárással kiválasztott valamely k számú $(k \leq n)$ elem kiválasztása (sorrend nem számít).

$$\binom{n+k-1}{k}.$$

Definíció (Ismétlés nélküli variáció). n (különböző) elem közül kiválasztott valamely k számú $(k \leq n)$ elem egy sorrendje (nincs visszatevés).

$$\frac{n!}{(n-k)!}.$$

Definíció (Ismétléses variáció). n (különböző) elem közül visszatevéses eljárással kiválasztott valamely k számú $(k \leq n)$ elem egy sorrendje.

$$n^k.$$

Definíció (Kolmogorov-féle valószínűségi mező). $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ Kolmogorov-féle valószínűségi mező, ha

- Ω : alaphalmaz, $\omega \in \Omega$: elemi esemény
- $\mathcal{A}$: Ω részhalmazaiból áll és teljesül rá, hogy
  - $\Omega \in \mathcal{A}$
  - $A \in \mathcal{A} \Rightarrow \overline{A} = \Omega - A \in \mathcal{A}$
  - $A_n \in \mathcal{A} \Rightarrow \cup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{A}$
- $A \in \mathcal{A}$: esemény
- P : valószínűség. Teljesül, hogy
  - $P : \mathcal{A} \to \mathbb{R}$
  - $P(\Omega) = 1$
  - páronként kizáró $A_1, A_2, ... \in \mathcal{A}$ eseményekre $P\left(\bigcup\limits_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum\limits_{i=1}^{\infty} P(A_i)$

A klasszikus valószínűségi mező egy nagyon speciális eset. Ekkor Ω véges és minden egyes lehetséges kimenetelhez ugyanakkora esély tartozik. Például, ha egy szabályos dobókockával dobunk, akkor ugyanakkora az esély arra, hogy 1, 2, 3, 4, 5, vagy 6-ost dobjunk. Ekkor egy tetszőleges esemény valószínűsége megadható a kedvező kimenetelek és az összes lehetséges kimenetelek számának hányadosával:

Klasszikus valószínűség: Az A esemény valószínűsége megadható úgy, mint $P(A) = \dfrac{\text{kedvező kimenetelek száma}}{\text{összes kimenetel száma}}$.

Természetesen a későbbiekben ennél bonyolultabb esetekkel is fogunk találkozni, de az alapfogalmak megértéséhez ez a véges sok lehetőséget tartalmazó egyszerű modell is elegendő.

Definícó (Feltételes valószínűség).

Ha B bekövetkezett, mi a valószínűsége, hogy A bekövetkezik? $\quad P(A|B) = \dfrac{P(A \cap B)}{P(B)}, \quad$ ha $P(B) \neq 0$

Definícó (Teljes eseményrendszer).

$B_1, B_2, ...$ események teljes eseményrendszert alkotnak, ha **1)** $B_i \cap B_j = \emptyset \quad \forall i \neq j-$re **2)** $\bigcup\limits_{i=1}^{\infty} B_i = \Omega$

Teljes valószínűség tétele:

Legyen $B_1, B_2, ...$ teljes eseményrendszer, A tetszőleges esemény, $P(B_j) > 0$ minden j-re. Ekkor

$$P(A) = \sum_{j=1}^{\infty} P(A|B_j)P(B_j).$$

Bayes-tétel:
Legyen $B_1, B_2, ...$ teljes eseményrendszer, A tetszőleges esemény, $P(B_j) > 0$ minden j-re. Ekkor

$$P(B_k|A) = \frac{P(A|B_k)P(B_k)}{\sum\limits_{j=1}^{\infty} P(A|B_j)P(B_j)}.$$

Definíció (Események függetlensége).
A és B események függetlenek, ha
$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$ (A esemény bekövetkezése nem befolyásolja B esemény bekövetkezését, és fordítva).

Feladatok

1.1. Feladat. Hányféleképpen lehet 8 bástyát letenni egy sakktáblára, hogy ne üssék egymást?

1.2. Feladat. Mi a valószínűsége, hogy egy véletlenszerűen kiválasztott 6 jegyű szám jegyei mind különbözőek?

1.3. Feladat. Ha egy magyarkártya-csomagból (32 lap: piros, zöld, makk, tök) visszatevéssel húzunk három lapot, akkor mi annak a valószínűsége, hogy

a) pontosan egy piros színű lapot húztunk?

b) legalább egy piros színű lapot húztunk?

1.4. Feladat. Egy zsákban 10 pár cipő van. 4 db-ot kiválasztva, mi a valószínűsége, hogy van közöttük pár, ha

a) egyformák a párok?

b) különbözőek a párok?

1.5. Feladat. $\star$ n dobozba véletlenszerűen helyezünk el n golyót úgy, hogy bármennyi golyó kerülhet az egyes dobozokba.

a) Mi a valószínűsége, hogy minden dobozba kerül golyó?

b) Annak mi a valószínűsége, hogy pontosan egy doboz marad üresen?

1.6. Feladat. Egy boltban 10 látszólag egyforma számítógép közül 3 felújított, a többi új. Mi a valószínűsége, hogy ha veszünk 5 gépet a laborba, akkor pontosan 2 felújított lesz közöttük?

1.7. Feladat. Ha a 6 karakteres jelszavunkat véletlenszerűen választjuk a 10 számjegy és a 26 karakter közül, akkor mi a valószínűsége, hogy pontosan 3 szám lesz benne?

1.8. Feladat. Az ötöslottónál adjuk meg annak a valószínűségét, hogy egy szelvénnyel játszva öttalálatosunk lesz, illetve hogy legalább négyesünk lesz. Mi a valószínűsége, hogy minden kihúzott szám páros? (Hogy viszonylik ez a visszatevéses esethez?)

1.9. Feladat. Mennyi a valószínűsége, hogy két kockadobásnál mind a két dobás 6-os, feltéve, hogy tudjuk, hogy legalább az egyik dobás 6-os?

1.10. Feladat. 41 millió ötöslottó-szelvényt töltenek ki egymástól függetlenül. Mennyi a valószínűsége, hogy lesz legalább egy 5-ös találat?

1.11. Feladat. 100 érme közül az egyik hamis (ennek mindkét oldalán fej található). Egy érmét véletlenszerűen kiválasztva és azzal 10-szer dobva, 10 fejet kaptunk. Ezen feltétellel mi a valószínűsége, hogy a hamis érmével dobtunk?

1.12. Feladat. Egy diák a vizsgán p valószínűséggel tudja a helyes választ. Amennyiben nem tudja, akkor tippel (az esélye, hogy eltalálja a helyes választ, ekkor $\frac{1}{3}$). Ha helyesen válaszolt, mennyi a valószínűsége, hogy tudta a helyes választ?

1.13. Feladat. Egy számítógépes program két független részből áll. Az egyikben $0,2$, a másikban $0,3$ a hiba valószínűsége. Ha a program hibát jelez, akkor mi a valószínűsége, hogy mindkét rész hibás?

1.14. Feladat. Egy számítógép processzorát 3 üzemben készítik. 20% eséllyel az elsőben, 30% eséllyel a másodikban és 50% eséllyel a harmadikban. A garanciális hibák valószínűsége az egyes üzemekben rendre 10%, 4%, illetve 1%. Ha a gépünk processzora elromlott, akkor mi a valószínűsége, hogy az első üzemben készült?