11. gyakorlat
Többváltozós analízis 2.

$\boxed{4.}$ $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ függvények totális deriváltja

Emlékeztető.

Definíció. Az $f \in \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ $(1 \le n, m \in \mathbb{N})$ függvény **totálisan deriválható** az $a \in \operatorname{int} \mathcal{D}_f$ pontban (jelben: $f \in D\{a\}$), ha

$$\exists\, A \in \mathbb{R}^{m\times n}: \quad \lim_{h\to\mathbf{0}} \frac{\|f(a+h) - f(a) - A\cdot h\|^{(m)}}{\|h\|^{(n)}} = 0,$$

ahol $\|\cdot\|^{(n)}$, illetve $\|\cdot\|^{(m)}$ az euklideszi norma az $\mathbb{R}^n$, illetve az $\mathbb{R}^m$ normált téren.
Ekkor A egyértelmű, és $f'(a) := A$ az f függvény **deriváltmátrixa** az a pontban.

A deriváltmátrix előállítása. Legyen $1 \le n, m \in \mathbb{N}$,

$$f = \begin{bmatrix} f_1 \\ \vdots \\ f_m \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m,$$

ahol $f_i \in \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ az f függvény i-edik $(i = 1, 2, \ldots, m)$ koordinátafüggvénye. Ha $f \in D\{a\}$, akkor

$$\exists\, \partial_j f_i(a) \quad (\forall\, i = 1, \ldots, m;\ j = 1, \ldots, n) \ \text{ és}$$

$$f'(a) = \begin{bmatrix} \partial_1 f_1(a) & \partial_2 f_1(a) & \cdots & \partial_n f_1(a) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \partial_1 f_m(a) & \partial_2 f_m(a) & \cdots & \partial_n f_m(a) \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{m\times n}$$

a **deriváltmátrix** vagy **Jacobi-mátrix**. □

1. feladat. *A definíció alapján bizonyítsuk be, hogy az*

$$f(x,y) := 2x^2 + 3xy - y^2 \quad \big((x,y) \in \mathbb{R}^2\big)$$

függvény totálisan deriválható az $a := (1,2)$ pontban, és adjuk meg az $f'(a)$ deriváltmátrixot. Az $f'(a)$-ra így kapott eredményt ellenőrizzük a Jacobi-mátrix kiszámításával.

Megoldás. A deriválhatóság igazolása:

Legyen $a = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$ és $h = \begin{bmatrix} h_1 \\ h_2 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^2$.

Az $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ típusú függvény $a \in \operatorname{int} \mathcal{D}_f$ pontbeli totális deriválhatóságának a definícióját az $f \in \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ függvényünkre alkalmazva azt kell tehát belátnunk, hogy $\exists\, A = \begin{bmatrix} A_1 & A_2 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{1\times 2}$ sorvektor, amellyel a

$$\lim_{h\to\mathbf{0}} \frac{\big|f(a+h) - f(a) - A\cdot h\big|}{\|h\|} =$$

$$= \lim_{(h_1,h_2)\to(0,0)} \frac{\left| f(a+h) - f(a) - \begin{bmatrix} A_1 & A_2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} h_1 \\ h_2 \end{bmatrix} \right|}{\sqrt{h_1^2 + h_2^2}} = 0$$

egyenlőség teljesül.

Ezzel a tulajdonsággal rendelkező A vektort így lehet meghatározni:

$$f(a+h)-f(a)=f(a_1+h_1,a_2+h_2)-f(a_1,a_2)=$$
$$=2(1+h_1)^2+3(1+h_1)(2+h_2)-(2+h_2)^2-\left[2\cdot 1^2+3\cdot 1\cdot 2-2^2\right]=$$
$$=10h_1-h_2+2h_1^2+3h_1h_2-h_2^2=\begin{bmatrix}10 & -1\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}h_1\\ h_2\end{bmatrix}+2h_1^2+3h_1h_2-h_2^2.$$

Legyen $A:=\begin{bmatrix}10 & -1\end{bmatrix}$. Az előző egyenletet rendezve azt kapjuk, hogy

$$\frac{f(a+h)-f(a)-\begin{bmatrix}10 & -1\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}h_1\\ h_2\end{bmatrix}}{\sqrt{h_1^2+h_2^2}}=\frac{2h_1^2+3h_1h_2-h_2^2}{\sqrt{h_1^2+h_2^2}}.$$

Most megmutatjuk azt, hogy a jobb oldalon álló függvénynek a határértéke a $(0,0)$ pontban 0-val egyenlő. Mivel

$$0\le\frac{\left|2h_1^2+3h_1h_2-h_2^2\right|}{\sqrt{h_1^2+h_2^2}}\le\frac{2(h_1^2+h_2^2)+3|h_1h_2|}{\sqrt{h_1^2+h_2^2}}\le$$
(alkalmazzuk most a $|h_1h_2|\le\frac{1}{2}(h_1^2+h_2^2)$ egyenlőtlenséget)
$$\le\frac{2(h_1^2+h_2^2)+\frac{3}{2}(h_1^2+h_2^2)}{\sqrt{h_1^2+h_2^2}}\le 4\sqrt{h_1^2+h_2^2},$$

és az utolsó tag határértéke az origóban 0, ezért a közrefogási elvből következik, hogy a

$$\lim_{(h_1,h_2)\to(0,0)}\frac{\left|2h_1^2+3h_1h_2-h_2^2\right|}{\sqrt{h_1^2+h_2^2}}=0$$

egyenlőség valóban teljesül.

A fentieket összefoglalva tehát azt láttuk be, hogy $f\in D\{(1,2)\}$ és a deriváltmátrix az $f'(1,2)=\begin{bmatrix}10 & -1\end{bmatrix}$ sorvektor.

Ellenőrzés. Mivel

$$\begin{aligned}\partial_1 f(x,y)&=4x+3y, & \partial_1 f(1,2)&=10,\\ \partial_2 f(x,y)&=3x-2y, & \partial_2 f(1,2)&=-1,\end{aligned}$$

ezért a Jacobi-mátrix:

$$\begin{bmatrix}\partial_1 f(1,2) & \partial_2 f(1,2)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}10 & -1\end{bmatrix},$$

és ez valóban megegyezik a definíció alapján kapott deriváltmátrixszal. ■

2. feladat. *Bizonyítsuk be, hogy az*

$$f(x,y):=\sqrt{|xy|}\qquad\big((x,y)\in\mathbb{R}^2\big)$$

függvény folytonos a $(0,0)$ *pontban, ott léteznek a parciális deriváltak, de* f *nem differenciálható a* $(0,0)$ *pontban.*

Megoldás.
A folytonosság igazolása. Az $a=(0,0)$ pontbeli folytonosság a definícó szerint azt jelenti, hogy

$$(*)\qquad \begin{gathered}\forall\,\varepsilon>0 \text{ számhoz } \exists\,\delta>0,\ \text{hogy } \forall\,(x,y)\in\mathcal{D}_f,\ \|(x,y)-(0,0)\|<\delta \text{ esetén}\\ \big|f(x,y)-f(0,0)\big|<\varepsilon.\end{gathered}$$

Rögzítsük az $\varepsilon>0$ számot és legyen $(x,y)\in\mathbb{R}^2$. Ekkor az

$$\big|f(x,y)-f(0,0)\big|=\big|f(x,y)\big|=\sqrt{|xy|}\le$$

$$\text{(alkalmazzuk most a } \sqrt{|xy|}\le\frac{\sqrt{x^2+y^2}}{\sqrt{2}} \text{ egyenlőtlenséget)}$$

$$\le\frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{x^2+y^2}=\frac{1}{\sqrt{2}}\cdot\big\|(x,y)\big\|<\varepsilon$$

egyenlőtlenség teljesül, ha $\delta\in(0,\sqrt{2}\varepsilon)$. Ez azt jelenti, hogy (*) rögzített $\varepsilon>0$ valós szám esetén tetszőleges $\delta\in(0,\sqrt{2}\varepsilon)$ számmal teljesül, ezért $f\in C\{(0,0)\}$.

Az $f\notin D\{(0,0)\}$ állítás igazolása.

Az állítással ellentétben tegyük fel azt, hogy $f\in D\{(0,0)\}$. Ekkor a deriváltmátrix előállítására vonatkozó tételünk alapján

$$f'(0,0)=\operatorname{grad}f(0,0)=\big(\partial_1 f(0,0),\partial_2 f(0,0)\big).$$

Könnyű ellenőrizni, hogy az f függvény parciális deriváltjai az origóban léteznek és

$$\partial_1 f(0,0)=0,\qquad \partial_2 f(0,0)=0.$$

Az $f\in D\{(0,0)\}$ indirekt feltételünk most azt jelenti, hogy

$$\lim_{(h_1,h_2)\to(0,0)}\frac{\left|f(a+h)-f(a)-\big[\,\partial_1 f(0,0)\quad \partial_2 f(0,0)\,\big]\cdot\begin{bmatrix}h_1\\h_2\end{bmatrix}\right|}{\sqrt{h_1^2+h_2^2}}=$$

$$(**)\qquad =\lim_{(h_1,h_2)\to(0,0)}\frac{\sqrt{|h_1h_2|}}{\sqrt{h_1^2+h_2^2}}=0.$$

Könnyű észrevenni, hogy ez az állítás nem igaz. A határértékre vonatkozó átviteli elv alapján elég egy olyan origóhoz tartó pontsorozatot találni, amely mentén a függvényértékek sorozata nem tart 0-hoz. Tekintsük például az $y=x$ egyenletű egyenes mentén az

$$(x_n,y_n):=\left(\frac{1}{n},\frac{1}{n}\right)\qquad(n=1,2,\ldots)$$

sorozatot. Ekkor $\lim\limits_{n\to+\infty}(x_n,y_n)=(0,0)$, és ezekben a pontokban a függvényértékek

$$\frac{\sqrt{\big|x_n\,y_n\big|}}{\sqrt{x_n^2+y_n^2}}=\frac{1}{\sqrt{2}}\qquad(\forall\,n=1,2,\ldots)$$

sorozata nem tart 0-hoz.

Az indirekt feltételből kiindulva tehát ellentmondásra jutottunk, és ez azt jelenti, hogy az f függvény *nem differenciálható* a $(0,0)$ pontban. ■

Megjegyzések.

1. A $(**)$ sorban szereplő függvénynek a $(0,0)$ pontban *nincs határértéke*. Ez a határértékre vonatkozó átviteli elv 2^o állításából következik, ha azt az (x_n, y_n) és az $(u_n, v_n) := (1/n, 0)$ $(1 \leq n \in \mathbb{N})$ sorozatokra alkalmazzuk.

2. A feladat elméleti szempontból is érdekes, mert egyrészt azt igazolja, hogy a pontbeli folytonosságból általában nem következik a pontbeli totális deriválhatóság; másrészt pedig a pontbeli parciális deriváltak létezéséből általában nem következik a pontbeli totális deriválhatóság. □

3. feladat. *Legyen*

$$f(x,y) := \begin{cases} \dfrac{xy^2}{x^2+y^2}, & \text{ha } (x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} \\ 0, & \text{ha } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

Mutassuk meg, hogy az f függvény a $(0,0)$ pontban

(a) *folytonos,*

(b) *minden irány mentén deriválható,*

(c) *totálisan nem deriválható.*

Megoldás.

(a) $f \in C\{(0,0)\}$

A pontbeli folytonosság definíciója alapján azt kell megmutatni, hogy

$$(*) \qquad \begin{cases} \forall\, \varepsilon > 0 \text{ számhoz } \exists\, \delta > 0, \text{ hogy } \forall\,(x,y) \in \mathbb{R}^2,\ \|(x,y)-(0,0)\| < \delta \text{ esetén} \\ \qquad\qquad |f(x,y) - f(0,0)| < \varepsilon. \end{cases}$$

Rögzítsük az $\varepsilon > 0$ valós számot. Ha $(x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$, akkor az

$$|f(x,y) - f(0,0)| = \left|\frac{xy^2}{x^2+y^2} - 0\right| = \frac{|x| \cdot y^2}{x^2+y^2} \leq \frac{|x| \cdot (x^2+y^2)}{x^2+y^2} =$$
$$= |x| \leq \sqrt{x^2+y^2} = \|(x,y)\| < \varepsilon$$

becslések alapján a $(*)$ egyenlőtlenség tetszőleges $\delta \in (0, \varepsilon)$ számmal fennáll, ezért az f függvény folytonos az origóban, azaz $f \in C\{(0,0)\}$.

(b) Iránymenti deriváltak.

A $\mathbf{0} = (0,0)$ origóból kiinduló irányokat az $v := \big(\cos\alpha, \sin\alpha\big)$ $\big(\alpha \in [0, 2\pi)\big)$ vektorokkal adjuk meg. Ezek egységvektorok, mert $\|v\| = \sqrt{\cos^2\alpha + \sin^2\alpha} = 1$ $\big(\alpha \in [0, 2\pi)\big)$.

Tekintsünk egy rögzített $\alpha \in [0, 2\pi)$ paraméterrel megadott v vektort. Az iránymenti deriválhatósághoz a definíció szerint azt kell megmutatni, hogy a

$$F(t) := f(\mathbf{0} + tv) = f(tv) = f(t\cos\alpha, t\sin\alpha) =$$
$$= \frac{t\cos\alpha \cdot (t\sin\alpha)^2}{(t\cos\alpha)^2 + (t\sin\alpha)^2} = (\cos\alpha)(\sin\alpha)^2 \cdot t \quad (t \in \mathbb{R})$$

valós-valós függvény deriválható a $t = 0$ pontban. Ez viszont nyilván igaz, és $F'(0) = (\cos\alpha)(\sin\alpha)^2$. Ezért az f függvénynek létezik a v irányban vett iránymenti deriváltja. Az iránymenti derivált értéke $F'(0)$. Így $\partial_v f(0,0) = (\cos\alpha)(\sin\alpha)^2$.

(c) $f \notin D\{(0,0)\}$

Az állítással ellentétben tegyük fel azt, hogy $f \in D\{(0,0)\}$. Ekkor a deriváltmátrix előállítására vonatkozó tételünk alapján

$$f'(0,0) = \operatorname{grad} f(0,0) = \big(\partial_1 f(0,0), \partial_2 f(0,0)\big).$$

Könnyű ellenőrizni, hogy az origóban az f függvénynek mindegyik változó szerinti parciális deriváltja létezik és $\partial_1 f(0,0) = 0$, $\partial_2 f(0,0) = 0$.

Az $f \in D\{(0,0)\}$ indirekt feltételből az következik, hogy

$$\lim_{(h_1,h_2)\to(0,0)} \frac{\left| f(h_1,h_2) - f(0,0) - \begin{bmatrix} \partial_1 f(0,0) & \partial_2 f(0,0) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} h_1 \\ h_2 \end{bmatrix} \right|}{\sqrt{h_1^2 + h_2^2}} =$$
$$= \lim_{(h_1,h_2)\to(0,0)} \frac{\dfrac{h_1 h_2^2}{h_1^2 + h_2^2} - 0}{\sqrt{h_1^2 + h_2^2}} = \lim_{(h_1,h_2)\to(0,0)} \frac{h_1 h_2^2}{(h_1^2 + h_2^2)^{3/2}} = 0.$$

Könnyű észrevenni, és az előző feladat megoldásában alkalmazott gondolatmenettel igazolni azt, hogy ez az állítás nem igaz. Az így kapott ellentmondásból következik, hogy *az f függvény nem differenciálható a $(0,0)$ pontban*. ■

5. $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ függvények (feltétel nélküli) szélsőértékei

Emlékeztető. Lokális szélsőértékek.

Elsőrendű szükséges feltétel a lokális szélsőértékre. Legyen $f \in \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ és $a \in \operatorname{int} \mathcal{D}_f$. Tegyük fel, hogy

- $f \in D\{a\}$ és
- az f függvénynek az a pontban lokális szélsőértéke van.

Ekkor $f'(a) = \mathbf{0}$, azaz $f'(a) = \big(\partial_1 f(a), \partial_2 f(a)\big) = (0,0)$.

Megjegyzés. A tétel tehát azt állítja, hogy lokális szélsőértékhelyek csak f stacionárius pontjaiban (vagyis olyan a pontokban, ahol $f'(a) = (0,0)$) lehetnek.

Másodrendű elégséges feltétel a lokális szélsőértékre. Tegyük fel, hogy $f \in \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $a \in \operatorname{int} \mathcal{D}_f$ és

(a) $f \in D^2\{a\}$,

(b) $f'(a) = \big(\partial_1 f(a), \partial_2 f(a)\big) = (0,0)$ (vagyis a az f függvény stacionárius pontja).

Tekintsük az

$$f''(a)=\begin{bmatrix}\partial_{11}f(a) & \partial_{12}f(a)\\ \partial_{21}f(a) & \partial_{22}f(a)\end{bmatrix}$$

Hesse-féle mátrixot.

Ekkor:

1^0 Ha $f''(a)$ pozitív definit (vagyis $\partial_{11}f(a)>0$ és $\det f''(a)>0$), akkor az f függvénynek a-ban lokális minimuma van.

2^0 Ha $f''(a)$ negatív definit (vagyis $\partial_{11}f(a)<0$ és $\det f''(a)>0$), akkor az f függvénynek a-ban lokális maximuma van.

3^0 Ha $f''(a)$ indefinit (vagyis $\det f''(a)<0$), akkor f-nek a-ban nincs lokális szélsőértéke (az a pont nyeregpont).

Megjegyzés. Ha a feltételek nem teljesülnek, akkor ez az elégséges feltétel *nem használható.* Ilyenkor *egyedi vizsgálatokkal* lehet eldönteni, hogy egy stacionárius pont vajon lokális szélsőértékhely-e vagy sem. □

4. feladat. *Határozzuk meg az*

$$f(x,y):=x^3-3x^2+2xy+y^2\quad \big((x,y)\in\mathbb{R}^2\big)$$

függvény lokális szélsőértékhelyeit.

Megoldás. Az f függvény kétszer deriválható $\mathbb{R}^2$-őn.

Elsőrendű szükséges feltétel: Mivel

$$\left.\begin{array}{rcccl}\partial_x f(x,y) & = & 3x^2-6x+2y & = & 0\\ \partial_y f(x,y) & = & 2x+2y & = & 0\end{array}\right\}\Longrightarrow y=-x,\ \Longrightarrow\ x=0 \text{ vagy } x=\frac{8}{3},$$

ezért az f függvény stacionárius pontjai, azaz a lehetséges lokális szélsőértékhelyek:

$$P_1(0,0),\quad P_2(\tfrac{8}{3},-\tfrac{8}{3}).$$

Másodrendű elégséges feltétel: Az $f''(x,y)$ Hesse-féle mátrix egy $(x,y)\in\mathbb{R}^2$ pontban: Mivel

$$\partial_{xx}f(x,y)=6x-6,\quad \partial_{xy}f(x,y)=2=\partial_{yx}f(x,y),\quad \partial_{yy}f(x,y)=2,$$

ezért

$$f''(x,y)=\begin{bmatrix}\partial_{xx}f(x,y) & \partial_{xy}f(x,y)\\ \partial_{yx}f(x,y) & \partial_{yy}f(x,y)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}6x-6 & 2\\ 2 & 2\end{bmatrix},$$

$$D_1=6x-6,\quad D_2=\det f''(x,y)=12x-16.$$

A $P_1(0,0)$ pontban $f''(0,0)=\begin{bmatrix}-6 & 2\\ 2 & 2\end{bmatrix}$, $D_2=-16<0$. Az $f''(0,0)$ mátrix indefinit, ezért a $P_1(0,0)$ pontban az f függvénynek *nincs lokális szélsőértéke.*

A $P_2(\frac{8}{3},-\frac{8}{3})$ pontban $f''\big(\frac{8}{3},-\frac{8}{3}\big)=\begin{bmatrix}10 & 2\\ 2 & 2\end{bmatrix}$, $D_1=10>0$, $D_2=16>0$. Az $f''\big(\frac{8}{3},-\frac{8}{3}\big)$ mátrix pozitív definit, ezért $P_2\big(\frac{8}{3},-\frac{8}{3}\big)$ *lokális minimumhely.* ■

5. feladat. *Határozzuk meg az*

$$f(x,y):=x^4+y^4-x^2-2xy-y^2\quad \big((x,y)\in\mathbb{R}^2\big)$$

függvény lokális szélsőértékhelyeit.

Megoldás. Az f függvény kétszer deriválható $\mathbb{R}^2$-őn.

Elsőrendű szükséges feltétel:

$$\left.\begin{array}{rcccl} \partial_x f(x,y) & = & 4x^3-2x-2y & = & 0 \\ \partial_y f(x,y) & = & 4y^3-2x-2y & = & 0 \end{array}\right\} \implies x^3=y^3 \implies x=y.$$

Ezt az első egyenletbe behelyettesítve azt kapjuk, hogy

$$4x^3-4x=4x(x^2-1)=0 \implies x=0, \quad x=1 \ \text{ vagy } \ x=-1.$$

Az f függvény stacionárius pontjai, vagyis a lehetséges lokális szélsőértékhelyek:

$$P_1(0,0), \quad P_2(1,1), \quad P_3(-1,-1).$$

Másodrendű elégséges feltétel: Az $f''(x,y)$ Hesse-féle mátrix egy $(x,y)\in\mathbb{R}^2$ pontban: Mivel

$$\begin{array}{ll} \partial_{xx} f(x,y)=12x^2-2, & \partial_{xy} f(x,y)=-2, \\ \partial_{yx} f(x,y)=-2, & \partial_{yy} f(x,y)=12y^2-2, \end{array}$$

ezért

$$f''(x,y)=\begin{bmatrix} \partial_{xx} f(x,y) & \partial_{xy} f(x,y) \\ \partial_{yx} f(x,y) & \partial_{yy} f(x,y) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 12x^2-2 & -2 \\ -2 & 12y^2-2 \end{bmatrix},$$

$$D_1=12x^2-2, \quad D_2=\det f''(x,y).$$

A $P_2(1,1)$ pontban $f''(1,1)=\begin{bmatrix} 10 & -2 \\ -2 & 10 \end{bmatrix}$, $D_1=10>0$, $D_2=10^2-4>0$. Az $f''(1,1)$ mátrix pozitív definit, ezért $P_2(1,1)$ *lokális minimumhely.*

A $P_3(-1,-1)$ pontban $f''(-1,-1)=\begin{bmatrix} 10 & -2 \\ -2 & 10 \end{bmatrix}=f''(1,1)$, ezért az f függvénynek $P_3(-1,-1)$ is *lokális minimumhelye.*

A $P_1(0,0)$ pontban $f''(0,0)=\begin{bmatrix} -2 & -2 \\ -2 & -2 \end{bmatrix}$ és $\det f''(0,0)=0$. Ebben a pontban a másodrendű elégséges feltétel nem alkalmazható. Egyedi vizsgálattal tudjuk csak eldönteni, hogy ez a pont vajon lokális szélsőértékhely-e.

Mivel $f(0,0)=0$, ezért f-nek a $(0,0)$ pontban pontosan akkor van lokális szélsőértéke, ha f az origó egy környezetében azonos előjelű. Megmutatjuk, hogy ez nem igaz. *Vegyük észre*, hogy

$$f(x,y):=x^4+y^4-x^2-2xy-y^2=x^4+y^4-(x+y)^2 \quad ((x,y)\in\mathbb{R}^2),$$

és tekintsük f értékeit először az $y=-x$ egyenes mentén: $f(x,y)=f(x,-x)=2x^4$, ami pozitív minden $x\neq 0$ valós számra. Nézzük most a függvény értékeit az $y=0$ egyenes (vagyis az x-tengely) mentén: $f(x,0)=x^4-x^2=x^2(x^2-1)$; ez pedig negatív, ha $|x|<1$ és $x\neq 0$. Az f függvény tehát az origó tetszőleges kicsi környezetében felvesz negatív és pozitív értéket is, ezért ebben a pontban *nincs lokális szélsőértéke.* ■

6. feladat. *Határozzuk meg az*

$$f(x,y) := x^3y^5 \qquad \big((x,y)\in\mathbb{R}^2\big)$$

függvény lokális szélsőértékhelyeit.

Megoldás. Az f függvény kétszer deriválható $\mathbb{R}^2$-őn.

Elsőrendű szükséges feltétel. Mivel

$$\left.\begin{array}{rcccl} \partial_x f(x,y) & = & 3x^2y^5 & = & 0 \\ \partial_y f(x,y) & = & 5x^3y^4 & = & 0 \end{array}\right\} \Longrightarrow x=0 \text{ és } y\in\mathbb{R} \quad \text{vagy} \quad y=0 \text{ és } x\in\mathbb{R},$$

ezért az f függvény stacionárius pontjai, vagyis a lehetséges lokális szélsőértékhelyek a

$P_y(0,y)$, $y\in\mathbb{R}$ pontok (az y-tengely pontjai),

illetve a

$P_x(x,0)$, $x\in\mathbb{R}$ pontok (az x-tengely pontjai).

Másodrendű elégséges feltétel. Az $f''(x,y)$ Hesse-féle mátrix egy $(x,y)\in\mathbb{R}^2$ pontban: Mivel

$$\partial_{xx}f(x,y) = 6xy^5, \quad \partial_{xy}f(x,y) = 15x^2y^4 = \partial_{yx}f(x,y), \quad \partial_{yy}f(x,y) = 20x^3y^3,$$

ezért

$$f''(x,y) = \begin{bmatrix} \partial_{xx}f(x,y) & \partial_{xy}f(x,y) \\ \partial_{yx}f(x,y) & \partial_{yy}f(x,y) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6xy^5 & 15x^2y^4 \\ 15x^2y^4 & 20x^3y^3 \end{bmatrix}.$$

Minden stacionárius pontban $\det f''(P_x) = \det f''(P_y) = \det \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = 0$, ezért a másodrendű elégséges feltétel nem használható. A lokális szélsőértékhelyek megállapításához további vizsgálatok kellenek.

Világos, hogy a tengelyek minden pontjában a függvényérték 0. Egyszerűen belátható, hogy a tengelyek bármely pontjának minden környezetében a függvény pozitív és negatív értéket is felvesz, ezért az f függvénynek *sehol sincs lokális szélsőértéke.* ■