7. hét, 2020. március 31.

Analízis I. Előadás

Tartalom

Tétel (Cauchy–féle gyökkritérium)

Legyen $a : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ olyan sorozat, amelyre $\exists \lim \left(\sqrt[n]{|a_n|}\right) \in \overline{R}$.
Ha

i) $\lim \left(\sqrt[n]{|a_n|}\right) < 1$, akkor a $\sum(a_n)$ sor abszolút konvergens,

ii) $\lim \left(\sqrt[n]{|a_n|}\right) > 1$, akkor a $\sum(a_n)$ sor divergens.

Megjegyzés

1. A fenti tételből hiányzik a $\lim \left(\sqrt[n]{|a_n|}\right) = 1$ eset. Nem véletlenül:

a) $a_n = \dfrac{1}{n}$ $(n \in \mathbb{N},\ n \geq 1)$ esetén $\lim \left(\sqrt[n]{n}\right) = 1$ (ld. Gyakorlat) $\Longrightarrow$
$\lim \left(\sqrt[n]{|a_n|}\right) = 1$, és a $\sum \left(\dfrac{1}{n}\right)$ harmonikus sor divergens (ld. előző előadás);

b) $a_n = \dfrac{1}{n^2}$ $(n \in \mathbb{N},\ n \geq 1)$ esetén szintén $\lim \left(\sqrt[n]{n^2}\right) = 1 \Longrightarrow \lim \left(\sqrt[n]{|a_n|}\right) = 1$, de
a $\sum \left(\dfrac{1}{n^2}\right)$ szuperharmonikus sor konvergens (ld. előző előadás).

Úgynevezett "határozatlan eset".

2. A tétel általánosabb formában is igaz a sorozatok vonatkozó limesz szuperior (Jel: limsup) fogalom bevezetésével.

Bizonyítás

i) Legyen $\lim\left(\sqrt[n]{|a_n|}\right) = A < 1$.
A módszer: felső becslés konvergens geometriai sorral, majd az összehasonlító kritérium alkalmazása.

Mivel $A < 1$, ezért $A < \dfrac{A+1}{2} < 1$, tehát $\lim\left(\sqrt[n]{|a_n|}\right) = A < \dfrac{A+1}{2}$.

A konvergencia definícióját $\epsilon = \dfrac{A+1}{2} - A = \dfrac{1-A}{2} > 0$ választással alkalmazva van olyan $N \in \mathbb{N}$, hogy $n > N$ esetén $0 \leq \sqrt[n]{|a_n|} < \dfrac{A+1}{2}$.

Legyen $q := \dfrac{A+1}{2} < 1$.

Ekkor $|a_n| < q^n$ m.m. $n \in \mathbb{N}$ esetén, és a $\sum(q^n)$ geometriai sor konvergens.
Innen a pozitív tagú sorokra vonatkozó összehasonlíto kritérium szerint következik, hogy a $\sum(|a_n|)$ sor konvergens, azaz a $\sum(a_n)$ sor abszolút konvergens.

ii) Legyen $\lim\left(\sqrt[n]{|a_n|}\right) > 1$. A határérték és a rendezés kapcsolatára vonatkozó tétel miatt ekkor $\exists\ N \in \mathbb{N}$, hogy $\forall\ n > N$ esetén $\sqrt[n]{|a_n|} > 1$, ami egyben azt is jelenti, hogy $|a_n| > 1$. Következésképpen (a_n) nem nullsorozat, és így $\sum(a_n)$ nem lehet konvergens (ld. sorok konvergenciájára vonatkozó szükséges feltétel).

Példák

1) A $\sum\left(\left(\frac{n+3}{2n+7}\right)^n\right)$ sor konvergenciája: $a_n = |a_n| = \left(\frac{n+3}{2n+7}\right)^n$,
$\sqrt[n]{|a_n|} = \frac{n+3}{2n+7}$, $\lim\left(\sqrt[n]{|a_n|}\right) = \lim_{n\to\infty}\frac{n+3}{2n+7} = \frac{1}{2} < 1 \quad\Longrightarrow\quad$ a $\sum\left(\left(\frac{n+3}{2n+7}\right)^n\right)$ sor abszolút konvergens.

2) A $\sum\left(\frac{9^n}{n^2+3\cdot 3^n}\right)$ sor konvergenciája: $a_n = |a_n| = \frac{9^n}{n^2+3\cdot 3^n}$,

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|} = \lim_{n\to\infty}\frac{9}{\sqrt[n]{n^2+3\cdot 3^n}} \geq \lim_{n\to\infty}\frac{9}{\sqrt[n]{3^n+3\cdot 3^n}} =$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{9}{\sqrt[n]{4\cdot 3^n}} = \lim_{n\to\infty}\frac{9}{\sqrt[n]{4}\cdot 3} = 3 > 1 \quad\Longrightarrow\quad$$ a $\sum\left(\frac{9^n}{n^2+3\cdot 3^n}\right)$ sor divergens. Mivel pozitív tagú sor, ezért $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{9^n}{n^2+3\cdot 3^n} = \infty$.

A D'Alembert–féle hányados kritérium

Legyen $a:\mathbb{N}\to\mathbb{R}$ olyan sorozat, amelyre $a_n \neq 0$ $(n\in\mathbb{N})$, és $\exists \lim\left(\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|\right) \in \overline{R}$.
Ha

i) $\lim\left(\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|\right) < 1$, akkor a $\sum(a_n)$ sor abszolút konvergens,

ii) $\lim\left(\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|\right) > 1$, akkor a $\sum(a_n)$ sor divergens.

Megjegyzés

1. A fenti tételből most is hiányzik egy eset: $\lim \left(\left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| \right) = 1$. Most sem véletlenül:

a) $a_n = \frac{1}{n}$ $(n \in \mathbb{N},\ n \geq 1)$ esetén

$\lim \left(\left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| \right) = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{n+1}}{\frac{1}{n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{n+1} = 1$, és a $\sum \left(\frac{1}{n}\right)$ harmonikus sor divergens (ld. előző előadás);

b) $a_n = \frac{1}{n^2}$ $(n \in \mathbb{N},\ n \geq 1)$ esetén szintén $\lim \left(\left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| \right) = \lim_{n\to\infty} \frac{n^2}{(n+1)^2} = 1$, de a $\sum \left(\frac{1}{n^2}\right)$ szuperharmonikus sor konvergens (ld. előző előadás).

Úgynevezett "határozatlan eset".

2. Tanulság: van olyan sor, aminek a konvergenciáját egyik kritériummal sem lehet eldönteni.

3. A példák nem jelentik azt, hogy ha az egyik kritérium nem működik, akkor a másik sem. Melyik a hatékonyabb?

2. Ennek a tételnek is van általánosabb formája, limesz szuperior, inferior.

Bizonyítás

i) Legyen $\lim_{n\to\infty} \dfrac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = A < 1$.

Most is egy alkalmas geometriai sorral való összehasonlításon alapul a bizonyítás.
A Cauchy–féle gyökkritérium i) részének igazolásánál alkalmazott gondolatmenettel kapjuk, hogy mivel $A < 1$, ezért $A < \dfrac{A+1}{2} < 1$, tehát $\lim_{n\to\infty} \dfrac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = A < \dfrac{A+1}{2}$.
A konvergencia definícióját $\epsilon = \dfrac{A+1}{2} - A = \dfrac{1-A}{2} > 0$ választással alkalmazva van olyan $N \in \mathbb{N}$, hogy $n > N$ esetén $0 \leq \dfrac{|a_{n+1}|}{|a_n|} < \dfrac{A+1}{2}$.
Legyen $q := \dfrac{A+1}{2}$, ahol $0 < q < 1$.
Ekkor $n > N$ esetén

$$|a_{n+1}| < q \cdot |a_n| \quad \Longrightarrow \quad |a_{N+2}| < q \cdot |a_{N+1}|, |a_{N+3}| < q \cdot |a_{N+2}| < q^2 \cdot |a_{N+1}|.$$

Indukcióval kapjuk, hogy

$$|a_{N+k}| < q^{k-1} \cdot |a_{N+1}| = \frac{|a_{N+1}|}{q^{N+1}} q^{N+k} \quad (k \in \mathbb{N},\, k \geq 1),$$

azaz

$$|a_n| < \frac{|a_{N+1}|}{q^{N+1}} q^n \ \ (n \in \mathbb{N},\, n \geq N+1).$$

Vegyük észre, hogy a $C := \dfrac{|a_{N+1}|}{q^{N+1}}$ tényező konstans, nem függ n-től, tehát $|a_n| < C \cdot q^n$ m.m. $n \in \mathbb{N}$ esetén. A $\sum(C \cdot q^n)$ sor konvergens. Innen a $\sum(a_n)$ sor abszolút konvergenciája az összehasonlító kritérium alkalmazásával adódik.

Bizonyítás folytatás

ii) Legyen $\lim_{n\to\infty} \dfrac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = A > 1$.

Ekkor van olyan $N \in \mathbb{N}$, hogy $n > N$ esetén $\dfrac{|a_{n+1}|}{|a_n|} > 1$, azaz $|a_{n+1}| > |a_n|$.

Indukcióval adódik, hogy $|a_{N+k}| > |a_{N+k-1}| > |a_{N+k-2}| > \cdots > |a_{N+1}|$ $(k \in \mathbb{N},\ k \geq 2)$.

Következésképpen, $|a_n| > |a_{N+1}| \neq 0$ $(n \in \mathbb{N},\ n \geq N+2)$, azaz (a_n) nem nullsorozat, tehát $\sum(a_n)$ divergens.

Példák

1) A $\sum\left(\dfrac{n^3}{n!}\right)$ sor konvergenciája: $a_n = |a_n| = \dfrac{n^3}{n!}$, $\dfrac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \dfrac{\frac{(n+1)^3}{(n+1)!}}{\frac{n^3}{n!}}$,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)^3}{(n+1)!} \cdot \frac{n!}{n^3} = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{n+1}{n}\right)^3 \cdot \frac{1}{n+1} = 0 < 1$$

$\Longrightarrow$ a $\sum\left(\dfrac{n^3}{n!}\right)$ sor abszolút konvergens.

2) A $\sum\left(\dfrac{2^{n^2}}{n!}\right)$ sor konvergenciája: $|a_n| = \dfrac{2^{n^2}}{n!}$, $\dfrac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \dfrac{\frac{2^{(n+1)^2}}{(n+1)!}}{\frac{2^{n^2}}{n!}} = \dfrac{2^{(n+1)^2}}{(n+1)!} \cdot \dfrac{n!}{2^{n^2}}$,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \lim_{n\to\infty} \frac{2^{2n+1}}{n+1} = \lim_{n\to\infty} 2 \cdot \frac{4^n}{n+1} = +\infty > 1$$

$\Longrightarrow$ a $\sum\left(\dfrac{2^{n^2}}{n!}\right)$ sor divergens. Mivel pozitív tagú sor, ezért $\sum_{n=0}^{\infty} \dfrac{2^{n^2}}{n!} = +\infty$.

Alternáló sorok

Definíció: Legyen $a : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$, $a_n \geq 0$ $(n \in \mathbb{N})$. Ekkor a $\sum \left((-1)^n a_n\right)$ sort váltakozó előjelű vagy alternáló sornak nevezzük.

Definíció: Legyen $a : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$, $a_n \geq 0$ $(n \in \mathbb{N})$. Ha az (a_n) sorozat monoton csökkenő, akkor a $\sum \left((-1)^n a_n\right)$ váltakozó előjelű sort Leibniz–sornak nevezzük.

Példa

a) Legyen $a_n = 2 + (-1)^n$. Ekkor a $\sum \left((-1)^n a_n\right)$ sor váltakozó előjelű sor, de nem Leibniz–sor.

b) $a_n = \dfrac{1}{n+1}$, $\sum \left((-1)^n \cdot \dfrac{1}{n+1}\right)$ sor Leibniz–sor.

Tétel (Leibniz–kritérium)

Egy Leibniz–sor akkor és csak akkor konvergens, ha az azt generáló sorozat nullsorozat.

Megjegyzés

Igazoltuk, hogy egy sor konvergenciájának szükséges feltétele, hogy a generáló sorozat nullsorozat legyen. A tétel azt jelenti, hogy Leibniz–sorok esetén ez egyben elégséges feltétel is.

Bizonyítás

A fenti megjegyzés alapján csak azt kell igazolnunk, hogy $a : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$, $a_n \geq 0$, $(a_n) \searrow$, $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ esetén a $\sum \big((-1)^n a_n\big)$ sor konvergens.
Legyen $S_n = \sum_{k=0}^{n}(-1)^k a_k$. Mivel $a_n \geq 0$, és $(a_n) \searrow$, ezért $0 \leq a_{n+1} \leq a_n$ $(n \in \mathbb{N})$.
Ezt felhasználva adódik, hogy

$$S_{2n+2} = a_0 - a_1 + \cdots + a_{2n} - a_{2n+1} + a_{2n+2} = S_{2n} - (a_{2n+1} - a_{2n+2}) \leq S_{2n} \quad \Longrightarrow \quad (S_{2n+1}) \searrow .$$

Hasonlóan adódik, hogy

$$\begin{aligned} S_{2n+3} &= a_0 - a_1 + \cdots + a_{2n} - a_{2n+1} + a_{2n+2} - a_{2n+3} \\ &= S_{2n+1} + (a_{2n+2} - a_{2n+3}) \geq S_{2n+1} \quad \Longrightarrow \quad (S_{2n}) \nearrow . \end{aligned}$$

Ezt felhasználva kapjuk, hogy

$$S_0 \geq S_{2n} = S_{2n} - a_{2n+1} + a_{2n+1} = S_{2n+1} + a_{2n+1} \geq S_{2n+1} \geq S_1 .$$

Következésképpen

- **a)** az $(S_{2n}) \searrow$ sorozatnak S_1 egy alsó korlátja,
- **b)** az $(S_{2n+1}) \nearrow$ sorozatnak S_0 egy felső korlátja.

Ezzel igazoltuk, hogy mindkét sorozat monoton és korlátos, tehát konvergens is.
Legyen $A := \lim_{n\to\infty} S_{2n}$, $B := \lim_{n\to\infty} S_{2n+1}$.
Mivel (a_n) nullsorozat, ezért $A - B = \lim_{n\to\infty}(S_{2n} - S_{2n+1}) = \lim_{n\to\infty} a_{2n+1} = 0$, azaz a páros indexű (S_{2n}) részletösszegek sorozatának, és a páratlan indexű (S_{2n+1}) részletösszegek sorozatának ugyanaz a határértéke.

A bizonyítás folytatása

Egy hibabecslés igazolásával egyben azt is megmutatjuk, hogy (S_n) is konvergens. A monotonitás miatt $S_{2n+1} \leq A \leq S_{2n}$.

Innen az alábbi hibabecslés adódik

$$|S_{2n+1} - A| \leq S_{2n} - S_{2n+1} = a_{2n+1}\ , \qquad |S_{2n} - A| \leq S_{2n} - S_{2n+1} = a_{2n+1} \leq a_{2n}.$$

Összefoglalva: $|S_n - A| \leq a_n \ (n \in \mathbb{N})$.

A feltétel szerint (a_n) nullsorozat, ezért a nullsorozatokra vonatkozó majoráns kritérium miatt $(S_n - A)$ is nullsorozat. Így az (S_n) részletösszeg sorozat konvergens, vagyis a $\sum \left((-1)^n a_n\right)$ Leibniz–sor konvergens.

Megjegyzés

Ha egy $\sum \left((-1)^n a_n\right)$ alakú sor konvergenciáját a Leibniz–kritérium segítségével akarjuk eldönteni, akkor először ellenőrizni kell, hogy i) $a_n \geq 0$, ii) $a_{n+1} \leq a_n$. Ezek után a konvergenciát az dönti el, hogy $\lim_{n\to\infty} a_n =$ vagy nem.

Példa

a) $\sum\left((-1)^n\dfrac{1}{n+1}\right)$: $a_n = \dfrac{1}{n+1} > 0$, $\left(\dfrac{1}{n+1}\right)\searrow \implies \sum\left((-1)^n\dfrac{1}{n+1}\right)$ Leibniz–sor. Mivel $\lim_{n\to\infty}\dfrac{1}{n+1} = 0$, ezért a sor konvergens.

$\sum\left((-1)^n\dfrac{1}{n+1}\right)$ nem abszolút konvergens (harmonikus sor).

Példa olyan sorra, ami konvergens, de nem abszolút konvergens.

b) $\sum\left((-1)^n\dfrac{2n+3}{n+1}\right)$: $a_n = \dfrac{2n+3}{n+1} = 2 + \dfrac{1}{n+1} > 0$, $\left(2+\dfrac{1}{n+1}\right)\searrow \implies$ $\sum\left((-1)^n\dfrac{2n+3}{n+1}\right)$ Leibniz–sor. Mivel $\lim_{n\to\infty}\dfrac{2n+3}{n+1} = 2 \neq 0$, ezért a sor divergens.

c) $\sum\left((-1)^n\dfrac{n}{n+1}\right)$: $a_n = \dfrac{n}{n+1} = 1 - \dfrac{1}{n+1} > 0$, $\left(1-\dfrac{1}{n+1}\right)\uparrow \implies$ $\sum\left((-1)^n\dfrac{n}{n+1}\right)$ nem Leibniz–sor.

Feltételesen konvergens sorok

Definíció: Ha a $\sum(a_n)$ konvergens, de nem abszolút konvergens, akkor feltételesen konvergens sornak nevezzük.