# Diszkrét modellek alkalmazásai 10. és 12. gyakorlat

2020. 11. 16.; 2020. 11. 30.

## 1 A gyakorlatok anyaga

Ezen a két gyakorlaton - különböző példákon keresztül - a polinomokkal fogunk foglalkozni. Osztunk polinomot maradékosan. racionális gyököket keresünk, valamint megoldunk paraméteres feladatot is, végül egy-két maradékosztással kapcsolatos példára is sort kerítünk.

### 1.1 polinom

Legyen $a_0, a_1, ..., a_n \in$ A és $x \in$ B (ahol A és B olyan tetszőleges számhalmaz, amelyen az összeadás és a szorzás - a megszokott tulajdonságokkal együtt - értelmezett)! Ekkor az A feletti egyváltozós polinom a p $= a_n * x^n + a_{n-1} * x^{n-1} + ... + a_1 * x^1 + a_0 * x^0$, ahol $a_n \neq 0$.
Az $a_i$-t i-edik együtthatónak, az $x_i$-t a polinom i-edik változójának, az $a_0$-t szabad tagnak, míg az $a_n$-t főegyütthatónak nevezzük. Ennek a $p$ polinomnak a foka: $deg(p) = n$. Az A[x] jelölés az A feletti x-változós polinomok halmazára utal.
Pl.: $p \in$ Z[x], p(x) $= x^3 - 15x^2 + 84x - 170$.

### 1.2 helyettesítési érték, gyök

Egy $p \in$ A[x], $c \in$ B helyen vett helyettesítési értéke: p(c) $= a_n * c^n + a_{n-1} * c^{n-1} + ... + a_1 * c^1 + a_0 * c^0$.
Ekkor a $c$ szám gyöke a p-nek, ha p(c) $= 0$.
Pl.: p(x) $= x^3 - 15x^2 + 84x - 170$; deg(p) $= 3$, p(2) $= 2^3 - 15 * 2^2 + 84 * 2 - 170 \neq 0$;
p(25 $= 5^3 - 15 * 5^2 + 84 * 5 - 170 = 0 =>$ $x_1$=5 gyöke p-nek.

### 1.3 algebra alaptétele

Legyen $p \in$ C[x] és deg(p) = n! Ekkor p-nek pontosan n darab gyöke van a komplex számok halmazán.
Pl.: $x^2 - 4x - 12 = (x - 6) * (x + 2)$; a gyökök: 6 és -2; a polinom foka 2 (mert a főegyütthatós ismeretlen kitevője 2).

### 1.4 gyöktényezős alak

A $p \in$ C[x] gyöktényezős alakja: $a_n * (x - x_1) * (x - x_2) * ... * (x - x_n)$, ahol $x_1, x_2, ..., x_n$ a polinom összes gyöke.

### 1.5 polinom-maradék tétel

Legyen $f, g \in$ C[x]! Ekkor egyértelműen létezik (pontosan egy) olyan $q, r \in$ C[x], amelyre:
$f = g * q + r$, ahol deg(r) < deg(q).

### 1.6 többszörös gyök

Legyen $f \in$ C[x] és $(x-\alpha)^k$ | f(x) (ahol k $\geq$ 2)! Ekkor $\alpha$ többszörös gyök.
Ha $\alpha$ k-szoros gyöke f-nek, akkor f(x) = $(x-\alpha)^k * f_1(x)$, ahol $f_1$(x) $\neq$ 0.

### 1.7 racionális gyökteszt

Legyen $u/v$ hányados, ahol $lnko(u,v) = 1$ és $f(u/v) = 0$! Ekkor $v|a_n$ és $u|a_0$.

### 1.8 többszörös gyök meghatározása deriválás segítségével (tétel)

Az $f \in$ C[x] polinom $\alpha$ gyökének multiplicitása egyenértékű a legkisebb olyan k nemnegatív egész számmal, amelyre $f^{(k)}(\alpha) \neq 0$, azaz $\alpha$ akkor és csak akkor k-szoros gyök, ha $f(\alpha) = f^1(\alpha) = ...$
$= f^{(k-1)}(\alpha) = 0$, de $f^k(\alpha) \neq 0$.

### 1.9 Horner-elrendezés

A Horner-elrendezés a matematikában egy módszer, ami leegyszerűsíti a behelyettesítést a polinomokba. Használható a polinom értékének meghatározására vagy gyökök közelítésére.

### 1.10 a Lagrange-interpoláció tétele és a Lagrange-interpolációs alappolinom

Legyen $R$ egy test, $c_0, c_1, ..., c_n \in R$ különbözőek, továbbá $d_0, d_1, ..., d_n \in R$ tetszőlegesek. Ekkor létezik egy olyan legfeljebb $n$-ed fokú polinom, amelyre $f(c_j) = d_j$, ha $j = 0, 1, ..., n$.
A $j$-edik Lagrange-interpolációs alappolinom: $l_j(x) = \dfrac{\prod_{i\neq j}(x-c_i)}{\prod_{i\neq j}(c_j-c_i)}$, és legyen $f(x) = \sum_{j=0}^{n} d_j * l_j(x)$.

## 2 Feladatok és megoldásaik - Polinomok

### 2.1 Ossza maradékosan az alábbi $x^5 + x^4 - 15x^3 + 25x^2 + 2x - 3 \in$ Z[x] polinomot az $x^2 + 4x - 5 \in$ Z[x] polinommal!

$(x^5 + x^4 - 15x^3 + 25x^2 + 2x - 3) \div (x^2 + 4x - 5) =$
–1. kör–
Vegyük az osztó polinóm legnagyobb tagját, és nézzük meg, milyen szorzószám kell az egész osztópolinomhoz, hogy a szorzatpolinom legnagyobb kitevőjű tagjából az osztandó polinom legnagyobb tagja legyen! Láthatjuk, hogy az $x^2$ taghoz egy $x^3$ szorzó kéne az $x^5$ tag megszerzéséhez. Szorozzuk be így $x^3$-nal az osztópolinomot: $x^3$ * $(x^2 + 4x - 5) = x^5 + 4x^4 - 5x^3$
Így most már tudjuk, hogy a megoldáspolinom egyik tagja az $x^3$:
$(x^5 + x^4 - 15x^3 + 25x^2 + 2x - 3) \div (x^2 + 4x - 5) = x^3 + ...$
Vonjuk most ki az osztandó polinomból a fent kapott szorzatpolinomot:
$(x^5 + x^4 - 15x^3 + 25x^2 + 2x - 3)$ - $(x^5 + 4x^4 - 5x^3) = -3x^4 - 10x^3 + 25x^2 + 2x - 3 =:$ t
A következőekben a fenti lépések ismétlődnek, de most már ehhez a t polinomhoz viszonítjuk az első tagokat, nem pedig az osztandó polinomhoz.
–2. kör–
Vegyük az osztó polinóm legnagyobb tagját, és nézzük meg, milyen szorzószám kell az egész osztópolinomhoz, hogy a t polinom legnagyobb kitevőjű tagjából az osztandó polinom legnagyobb tagja legyen! Láthatjuk, hogy az $x^2$ taghoz egy $-3x^2$ szorzó kéne az $-3x^4$ tag megszerzéséhez. Szorozzuk be így $-3x^2$-nel az osztópolinomot: $-3x^2$ * $(x^2 + 4x - 5) = -3x^4 - 12x^3 + 15x^2$

Így most már tudjuk, hogy a megoldáspolinom egyik újabb tagja az $-3x^2$:
$(x^5 + x^4 - 15x^3 + 25x^2 + 2x - 3) \div (x^2 + 4x - 5) = x^3 - 3x^2 + ...$
Vonjuk most ki a t polinomból a fent kapott szorzatpolinomot:
$(-3x^4 - 10x^3 + 25x^2 + 2x - 3)$ - $(-3x^4 - 12x^3 + 15x^2) = 2x^3 + 10x^2 + 2x - 3 =:$ t
A következőekben a fenti lépések ismétlődnek, de most már ehhez a t polinomhoz viszonítjuk az első tagokat.
–3. kör–
Vegyük az osztó polinóm legnagyobb tagját, és nézzük meg, milyen szorzószám kell az egész osztópolinomhoz, hogy a t polinom legnagyobb kitevőjű tagjából az osztandó polinom legnagyobb tagja legyen! Láthatjuk, hogy az $x^2$ taghoz egy $2x$ szorzó kéne az $2x^3$ tag megszerzéséhez. Szorozzuk be így $2x$-szel az osztópolinomot: $2x * (x^2 + 4x - 5) = 2x^3 + 8x^2 - 10x$
Így most már tudjuk, hogy a megoldáspolinom egyik újabb tagja az $2x$:
$(x^5 + x^4 - 15x^3 + 25x^2 + 2x - 3) \div (x^2 + 4x - 5) = x^3 - 3x^2 + 2x + ...$
Vonjuk most ki a t polinomból a fent kapott szorzatpolinomot:
$(2x^3 + 10x^2 + 2x - 3)$ - $(2x^3 + 8x^2 - 10x) = 2x^2 + 12x - 3 =:$ t
A következőekben a fenti lépések ismétlődnek, de most már ehhez a t polinomhoz viszonítjuk az első tagokat, nem pedig az osztandó polinomhoz.
–4. kör–
Vegyük az osztó polinóm legnagyobb tagját, és nézzük meg, milyen szorzószám kell az egész osztópolinomhoz, hogy a t polinom legnagyobb kitevőjű tagjából az osztandó polinom legnagyobb tagja legyen! Láthatjuk, hogy az $x^2$ taghoz egy 2 szorzó kéne az $2x^2$ tag megszerzéséhez. Szorozzuk be így 2-vel az osztópolinomot: $2 * (x^2 + 4x - 5) = 2x^2 + 8x - 10$
Így most már tudjuk, hogy a megoldáspolinom egyik újabb tagja az 2:
$(x^5 + x^4 - 15x^3 + 25x^2 + 2x - 3) \div (x^2 + 4x - 5) = x^3 - 3x^2 + 2x + 2 + ...$
Vonjuk most ki a t polinomból a fent kapott szorzatpolinomot:
$(2x^2 + 12x - 3)$ - $(2x^2 + 8x - 10) = 4x + 7 =:$ t
Most folytatódna az ötödik körrel az eljárás, de azt vesszük észre, hogy a t polinom legnagyobb ismeretlenjének kitevője kisebb, mint az osztópolinom legnagyobb ismeretlenjének a kitevője, így az eljárás leáll.
Amit kaptunk most t-ra, esetünkben a $4x + 7$, az lesz a maradék r polinom, a maradékosztás eredménye pedig a q polinom:
$(x^5 + x^4 - 15x^3 + 25x^2 + 2x - 3) \div (x^2 + 4x - 5) = x^3 - 3x^2 + 2x + 2 =:$ q

## 2.2 Határozza meg a $p$ paraméter értékét úgy, hogy $x-2 \mid x^3+4x^2+3x+p$ teljesüljön!

–1. kör–
Vegyük az osztó polinóm legnagyobb tagját, és nézzük meg, milyen szorzószám kell az egész osztópolinomhoz, hogy a szorzatpolinom legnagyobb kitevőjű tagjából az osztandó polinom legnagyobb tagja legyen! Láthatjuk, hogy az $x$ taghoz egy $x^2$ szorzó kéne az $x^3$ tag megszerzéséhez. Szorozzuk be így $x^2$-tel az osztópolinomot: $x^2 * (x - 2) = x^3 - 2x^2$
Így most már tudjuk, hogy a megoldáspolinom egyik tagja az $x^2$:
$(x^3 + 4x^2 + 3x + p) \div (x - 2) = x^2 + ...$
Vonjuk most ki az osztandó polinomból a fent kapott szorzatpolinomot:
$(x^3 + 4x^2 + 3x + p)$ - $(x^3 - 2x^2) = 6x^2 + 3x + p =:$ t
A következőekben a fenti lépések ismétlődnek, de most már ehhez a t polinomhoz viszonítjuk az első tagokat, nem pedig az osztandó polinomhoz.
–2. kör–
Vegyük az osztó polinóm legnagyobb tagját, és nézzük meg, milyen szorzószám kell az egész osztópolinomhoz, hogy a t polinom legnagyobb kitevőjű tagjából az osztandó polinom legnagyobb tagja legyen!

Láthatjuk, hogy az $x$ taghoz egy $6x$ szorzó kéne az $-3x^4$ tag megszerzéséhez. Szorozzuk be így $6x^2$-nel az osztópolinomot: $6x$ * $(x-2) = 6x^2 - 12x$
Így most már tudjuk, hogy a megoldáspolinom egyik újabb tagja a $6x$:
$(x^3 + 4x^2 + 3x + p) \div (x-2) = x^2 + 6x + ...$
Vonjuk most ki a t polinomból a fent kapott szorzatpolinomot:
$(6x^2 + 3x + p)$ - $(6x^2 - 12x) = 15x + p =:$ t
A következőekben a fenti lépések ismétlődnek, de most már ehhez a t polinomhoz viszonítjuk az első tagokat.
–3. kör–
Vegyük az osztó polinóm legnagyobb tagját, és nézzük meg, milyen szorzószám kell az egész osztópolinomhoz, hogy a t polinom legnagyobb kitevőjű tagjából az osztandó polinom legnagyobb tagja legyen!
Láthatjuk, hogy az $x$ taghoz egy 15 szorzó kéne az $15x$ tag megszerzéséhez. Szorozzuk be így 15-tel az osztópolinomot: 15 * $(x-2) = 15x - 30$
Így most már tudjuk, hogy a megoldáspolinom egyik újabb tagja a 15:
$(x^3 + 4x^2 + 3x + p) \div (x-2) = x^2 + 6x + 15 + ...$
Vonjuk most ki a t polinomból a fent kapott szorzatpolinomot:
$(15x + p)$ - $(15x - 30) = p + 30 =:$ t
Most folytatódna az ötödik körrel az eljárás, de azt vesszük észre, hogy a t polinom legnagyobb ismeretlenjének kitevője kisebb, mint az osztópolinom legnagyobb ismeretlenjének a kitevője, így az eljárás leáll.
Amit kaptunk most t-ra, esetünkben a $p + 30$, az lesz a maradék r polinom, a maradékosztás eredménye pedig a q polinom:
$(x^3 + 4x^2 + 3x + p) \div (x-2) = x^2 + 6x + 15 =:$ q
Mivel tudjuk, hogy az $x-2$ maradék nélkül osztja az $x^3+4x^2+3x+p$ polinomot, így a maradékpolinom értéke 0 kell, hogy legyen, azaz $p + 30 = 0$. Ebből pedig az következik, hogy $p = -30$.
Ellenőrzésképp, nézzük meg, hogy jól emeltünk-e ki! Ha az $x^3 + 4x^2 + 3x + p$ polinomot osztja az $x-2$, akkor $x = 2$ gyöke az $x^3 + 4x^2 + 3x + p$ polinomnak. Behelyettesítéssel látható, hogy $x^3 + 4x^2 + 3x + p$ $= 2^3 + 4 * 2^2 + 3 * 2 + p = 8 + 16 + 6 + p = 30 + p = 0$ akkor és csak akkor, ha $p = -30$.

## 2.3 Legyen $f(x) = x^4 - 3x^3 + x + 6 \in$ R[x]! Határozza meg a $f(3)$, $f(1)$, $f(2)$, $f(2)$ helyettesítési értékeket!

Ezt a feladatot kétféleképpen lehet megoldani: hagyományos úton és Horner-elrendezéssel. Hagyományos úton azt értjük, hogy egyszerűen behelyettesítjük az $x$ helyére a megfelelő számokat:
$f(3) = 3^4 - 3 * 3^3 + 3 + 6 = 81 - 3 * 27 + 9 = 81 - 81 + 9 = 9$
$f(-1) = (-1)^4 - 3 * (-1)x^3 + (-1) + 6 = 1 + 3 - 1 + 6 = 10 - 1 = 9$
$f(2) = 2^4 - 3 * 2^3 + 2 + 6 = 16 - 24 + 2 + 6 = 24 - 24 = 0$
$f(-2) = (-2)^4 - 3 * (-2)^3 + (-2) + 6 = 16 + 24 - 2 + 6 = 40 + 4 = 44$
Ez alapján látható, hogy az $x = 2$ gyöke az $f$ polinomnak. Most a Horner-táblázat segítségével fogjuk meghatározni ugyanezen számok helyettesítési értékét:

Table 1: $f(x) = x^4 - 3x^3 + x + 6$

| | **1** | **-3** | **0** | **1** | **6** |
|---|---|---|---|---|---|
| | | | | | |

A táblázat legelső sora az egyes ismeretlenek előtti szorzószám. A legelső 1-es az $x^4$ előtti szorzószámot jelöli, a -3-as az $x^3$ együtthatója, a 0-as jelzi, hogy nincs a polinomban $x^2$ tag, az utána levő 1-es az $x^1$ szorzószáma, míg a 6-os az $x^0$ együtthatóját hivatott képviselni.

Table 2: $f(x) = x^4 - 3x^3 + x + 6$

| | **1** | **-3** | **0** | **1** | **6** |
|---|---|---|---|---|---|
| 3 | | | | | |
| -1 | | | | | |
| 2 | | | | | |
| -2 | | | | | |

A táblázat első oszlopaiba kerülnek az egyes helyettesítési értékek - esetünkben a 3, -1, 2 és a -2. Ideje, hogy az első sorral megkezdjük a számítást:

Table 3: $f(x) = x^4 - 3x^3 + x + 6$

| | **1** | **-3** | **0** | **1** | **6** |
|---|---|---|---|---|---|
| 3 | 1 | | | | |
| -1 | 1 | | | | |
| 2 | 1 | | | | |
| -2 | 1 | | | | |

A táblázat 2. oszlopába lemásoljuk a főegyütthatót, ami nálunk az 1-es. Innentől válik egy univerzális eljárássá a számítás: az aktuális (-3-as) oszlopbeli értékeket úgy kapjuk meg, hogy összeszorozzuk a soreleji helyettesítési értéket (3) az aktuális (-3-as) oszlop előtti oszlop aktuális sorával (1) és hozzáadjuk az aktuális (-3-as) oszlop legelső sorát: 3 1 + (-3) = 0. Ezután az aktuális (0-ás) oszlopbeli értékeket úgy kapjuk meg, hogy összeszorozzuk a soreleji helyettesítési értéket (3) az aktuális (0-ás) oszlop előtti oszlop aktuális sorával (0) és hozzáadjuk az aktuális (0-ás) oszlop legelső sorát: 3 0 + 0 = 0. Ezt követően az aktuális (1-es) oszlopbeli értékeket úgy kapjuk meg, hogy összeszorozzuk a soreleji helyettesítési értéket (3) az aktuális (1-es) oszlop előtti oszlop aktuális sorával (0) és hozzáadjuk az aktuális (1-es) oszlop legelső sorát: 3 0 + 1 = 1. Végül az aktuális (6-os) oszlopbeli értékeket úgy kapjuk meg, hogy összeszorozzuk a soreleji helyettesítési értéket (3) az aktuális (6-os) oszlop előtti oszlop aktuális sorával (1) és hozzáadjuk az aktuális (6-os) oszlop legelső sorát: 3 1 + 6 = 9. Ha ez az utolsó oszlopbeli cella értéke pontosan 0, akkor az adott helyettesítési érték gyöke a polinomnak, egyébként nem. Így, ebben az esetben a 3 nem gyöke az f polinomnak:

Table 4: $f(x) = x^4 - 3x^3 + x + 6$

| | **1** | **-3** | **0** | **1** | **6** |
|---|---|---|---|---|---|
| 3 | 1 | 0 | 0 | 1 | 9 |
| -1 | 1 | | | | |
| 2 | 1 | | | | |
| -2 | 1 | | | | |

A fent taglalt módon végezzük el a többi sorra is a számítást:
Látható, hogy az $x = 2$ gyöke az $f$ polinomnak, ahogy azt a hagyományos módon is megállapítottuk.

Table 5: $f(x) = x^4 - 3x^3 + x + 6$

| | **1** | **-3** | **0** | **1** | **6** |
|---|---|---|---|---|---|
| 3 | 1 | 0 | 0 | 1 | 9 |
| -1 | 1 | -4 | 4 | -3 | 9 |
| 2 | 1 | -1 | -2 | -3 | 0 |
| -2 | 1 | -5 | 10 | -19 | 44 |

## 2.4 Határozza meg az $f(x) = 4x^3 + 3x^2 + 3x + 4 \in$ Z[x] racionális gyökeit!

Mivel a polinomunk egy másodfokú polinomhoz képest összetettebb, így racionális gyökteszt segítségével keresünk potenciális gyököket, amelyekről Horner-elrendezéssel eldöntjük, hogy tényleges gyökök-e. A racionális gyökteszthez tartozó ismereteink értelmében, az $u/v$ hányados lesz majd a gyökünk formája. $v$ egy olyan számot jelöl, ami a polinom főegyütthatójának osztója, azaz $v|4$, így $v =$ {-1, +1, -2, +2, -4, +4}. $u$ pedig egy olyan számot jelöl, amely a szabad tagnak osztója, azaz $u|4$, így $u =$ {-1, +1, -2, +2, -4, +4}. Ezek alapján az $u/v$ hányados lehetséges értékei: {-1, +1, -2, +2, -4, +4, -0.5, +0.5, -0.25, +0.25}, azaz a lehetséges x gyökök is ezek. Most pedig vizsgáljuk meg ezeket a lehetséges gyököket:

Table 6: $f(x) = 4x^3 + 3x^2 + 3x + 4$

| | **4** | **3** | **3** | **4** |
|---|---|---|---|---|
| -1 | 4 | | | |
| 11 | 4 | | | |
| -2 | 4 | | | |
| 2 | 4 | | | |
| -4 | 4 | | | |
| 4 | 4 | | | |
| -0.5 | 4 | | | |
| 0.5 | 4 | | | |
| -0.25 | 4 | | | |
| 0.25 | 4 | | | |

A megszokott módon a legelső oszlop a helyettesítési értékeké, az első sor a polinom egyes ismeretleneinek együtthatói, a második oszlop pedig a főegyüttható alkotta cellák oszlopa. Ezután kezdődik meg az ismert eljárás: az aktuális oszlopbeli értékeket úgy kapjuk meg, hogy összeszorozzuk a soreleji helyettesítési értéket az aktuális oszlop előtti oszlop aktuális sorával és hozzáadjuk az aktuális oszlop legelső sorát:

Table 7: $f(x) = 4x^3 + 3x^2 + 3x + 4$

| | **4** | **3** | **3** | **4** |
|---|---|---|---|---|
| -1 | 4 | -1 | 4 | 0 |
| 1 | 4 | 7 | 10 | 14 |
| -2 | 4 | -5 | 13 | -22 |
| 2 | 4 | 11 | 25 | 54 |
| -4 | 4 | -13 | 55 | -216 |
| 4 | 4 | 19 | 79 | 320 |
| -0.5 | 4 | 1 | 2.5 | 2.75 |
| 0.5 | 4 | 5 | 5.5 | 6.75 |
| -0.25 | 4 | 2 | 2.5 | 3.375 |
| 0.25 | 4 | 4 | 4 | 5 |

Látható, hogy az $x = -1$ az egyetlen racionális gyöke a polinomnak.

## 2.5 Az $f(x) = ax^4 + bx^3 + 1 \in$ R[x] polinomnak az egyik többszörös gyöke 2. Mennyi lehet az $a$, $b$ paraméterek értéke?

Ha az $ax^4 + bx^3 + 1$ polinomnak többszörös gyöke 2, akkor a 2 legalább kétszeres gyök. Így, ha lederiválnánk $f$-et, akkor a deriváltpolinomnak is gyöke lenne legalább egyszer a 2:
$f'(x) = (ax^4 + bx^3 + 1)' = (ax^4)' + (bx^3)' + (1)' = 4ax^3 + 3bx^2 + 0 = 4ax^3 + 3bx^2$
Mivel $f(x)$-nek és $f'(x)$-nek is gyöke a 2, így igaz az, hogy $f(2) = 0$ és $f'(2) = 0$, azaz:
$a * 2^4 + b * 2^3 + 1 = 0$ és $4 * a * 2^3 + 3 * b * 2^2 = 0 => a * 16 + b * 8 + 1 = 0$ és $32 * a + 12 * b = 0$
Az egyenletrendszer megoldásához a második egyenletből kifejezem $b$-t: $b = (-32/12)*a$. Ezután az első egyenletbe helyettesítem ezt vissza: $a*16+(-32/12)*a*8+1 = 0 => a*16+(-64/3)*a+1 = 0 =>$ $(-16/3)*a+1 = 0 => (16/3)*a = 1 => a = 3/16$. Így $b = (-32/12)*(3/16) = (-96/192) = -(1/2)$
Vagyis, ha $a = 3/16$ és $b = -(1/2)$, akkor az $f(x) = ax^4 + bx^3 + 1$-nek a 2 lehet egy többszörös gyöke.

## 2.6 Határozza meg az $a$ paraméter értékét úgy, hogy az $f(x) = x^5 - ax^2 - ax + 1 \in$ R[x] polinomnak az $x = -1$ legalább kétszeres gyöke legyen!

Ha az $x^5-ax^2-ax+1$ polinomnak legalább kétszeres gyöke a -1, akkor ha a polinomot lederiváljuk, akkor az eredeti polinomnak és a deriváltpolinomnak is gyöke lesz -1, azaz $f(-1) = 0$ és $f'(-1) = 0$. Deriváljuk le a polinomot: $f'(x) = (x^5-ax^2-ax+1)' = (x^5)'-(ax^2)'-(ax)'+(1)' = 5x^4-2ax-a+0 = 5x^4-2ax-a$. Most pedig végezzük el az alábbi egyenletekből álló egyenletrendszert: $((-1)^5-a*(-1)^2-a*(-1)+1 = 0$ és $5*(-1)^4 - 2*a*(-1) - a = 0$, azaz $((-1) - a - (-a) + 1 = 0$ és $5 - (-2a) - a = 0$, azaz $0 = 0$ és $a = -5$.
Vagyis, ha $a = -5$, akkor az $x^5 - ax^2 - ax + 1$-nek a -1 lehet legalább kétszeres gyöke.

## 2.7 Hogyan válasszuk meg az $a$, $b$ együtthatók értékét, hogy $1+i \in$ C gyöke legyen az $f(x) = x^3 + 2x^2 + ax + b \in$ C[x] polinomnak?

Mivel annyit tudunk, hogy az $1+i$ egy gyök, így az lehet csupán egyszeres gyök, ezért most praktikusabb a Horner-elrendezéssel megvizsgálni, hogy milyen $a, b$ együtthatókra lesz a fenti kifejezés gyök:

Table 8: $f(x) = x^3 + 2x^2 + ax + b$

| | **1** | **2** | **a** | **b** |
|---|---|---|---|---|
| (1+i) | 1 | | | |

Hagyományosan felírtuk a Horner-táblázat egyes celláit és most lépésről-lépésre vizsgáljuk meg a kifejezést! A soron következő üres cella értékét úgy számoljuk ki, hogy az (1+i)-t megszorozzuk 1-gyel (helyettesítési érték * aktuális cellát megelőző cella értéke) és hozzáadunk 2-t (aktuális cella feletti cella értéke): $((1+i)*1)+2 = (1+i)+2 = (1+i)+(2+0*i) = (3+i)$.

Table 9: $f(x) = x^3 + 2x^2 + ax + b$

| | **1** | **2** | **a** | **b** |
|---|---|---|---|---|
| (1+i) | 1 | (3+i) | | |

A soron következő üres cella értékét úgy számoljuk ki, hogy az (1+i)-t megszorozzuk (3+i)-vel (helyettesítési érték * aktuális cellát megelőző cella értéke) és hozzáadunk a-t (aktuális cella feletti cella értéke): $((1+i)*(3+i))+a = (3+i+3i+i^2)+a = (3+4i+i^2)+a = (2+a)+4i$.

Table 10: $f(x) = x^3 + 2x^2 + ax + b$

| | **1** | **2** | **a** | **b** |
|---|---|---|---|---|
| (1+i) | 1 | (3+i) | ((2+a)+4i) | |

A soron következő üres cella értékét úgy számoljuk ki, hogy az (1+i)-t megszorozzuk ((2+a)+4i)-vel (helyettesítési érték * aktuális cellát megelőző cella értéke) és hozzáadunk b-t (aktuális cella feletti cella értéke): $((1+i)*((2+a)+4i))+b = (2+a+4i+2i+ai+4i^2)+b = (i*(4+2+a)+2+a-4)+b = i*(6+a)+(2a-2+b) = 0$.
Kaptunk egy 2 egyenletből álló egyenletrendszert. Tudjuk, hogy 1+i gyöke a polinomnak, így 0-nak kell lennie a helyettesítési értéknek, azaz:
$1 = 2a+b-2$ és $1 = 6+a$ => $2a+b = 3$ és $a = -5$ => $-10+b = 3$ => $b = 13$.

Table 11: $f(x) = x^3 + 2x^2 + ax + b$

| | **1** | **2** | **a** | **b** |
|---|---|---|---|---|
| (1+i) | 1 | (3+i) | ((2+a)+4i) | 0 |

**2.8 Adjunk meg olyan $f \in$ R[x] polinomot, amelyre $f(0) = 3$, $f(1) = 3$, $f(4) = 7$ és $f(-1) = 0$!**

A definíciók és a feladat szövege alapján:
$c_0 = 0, c_1 = 1, c_2 = 4, c_3 = -1$; $d_0 = 3, d_1 = 3, d_2 = 7, d_3 = 0$.
Ezekkel az értékekkel alkalmazzuk a Lagrange-interpolációt:

$$l_0(x) = \frac{(x-1)(x-4)(x+1)}{(0-1)(0-4)(0+1)} = \frac{1}{4}x^3 - x^2 - \frac{1}{4}x + 1$$

$$l_1(x) = \frac{(x-0)(x-4)(x+1)}{(1-0)(1-4)(1+1)} = -\frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{2}x^2 + \frac{2}{3}x$$

$$l_2(x) = \frac{(x-0)(x-1)(x+1)}{(4-0)(4-1)(4+1)} = \frac{1}{60}x^3 - \frac{1}{60}x$$

$$l_3(x) = \frac{(x-0)(x-1)(x-4)}{(-1-0)(-1-1)(-1-4)} = -\frac{1}{10}x^3 + \frac{1}{2}x^2 - \frac{2}{5}x$$

$$f(x) = d_0 * l_0(x) + d_1 * l_1(x) + d_2 * l_2(x) + d_3 * l_3(x) = 3 * (\frac{1}{4}x^3 - x^2 - \frac{1}{4}x + 1) + 3 * (-\frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{2}x^2 + \frac{2}{3}x) + 7 * (\frac{1}{60}x^3 - \frac{1}{60}x) + 0 * (-\frac{1}{10}x^3 + \frac{1}{2}x^2 - \frac{2}{5}x) = \frac{22}{60}x^3 - \frac{3}{2}x^2 + \frac{68}{60}x + 3$$

| | $\frac{22}{60}$ | $-\frac{3}{2}$ | $\frac{68}{60}$ | **3** |
|---|---|---|---|---|
| 0 | $\frac{22}{60}$ | $-\frac{3}{2}$ | $\frac{68}{60}$ | 3 |
| 1 | $\frac{22}{60}$ | $-\frac{68}{60}$ | 0 | 3 |
| 4 | $\frac{22}{60}$ | $-\frac{2}{60}$ | 1 | 7 |
| -1 | $\frac{22}{60}$ | $-\frac{112}{60}$ | 3 | 0 |

# 3 Feladatok és megoldásaik - Maradékosztás

## 3.1 Oldja meg a következő kongruenciarendszereket!

**3.1.1** $2x \equiv 6 \quad (8)$
$-x \equiv 2 \quad (7)$
$x \equiv -10 \quad (11)$

**3.1.2** $-x \equiv 2 \quad (4)$
$2x \equiv 11 \quad (5)$
$7x \equiv 4 \quad (9)$
$-2x \equiv -5 \quad (7)$

## 3.2 Legyen adott egy olyan számítógép-architektúra, ahol a gépi szó 4 bites, tehát a számítógépünk az $I_1 = [0; 24 - 1] = [0; 15]$ intervallum egészeivel képes gyors egész aritmetikát végezni! Erre az aritmetikára építve valósítsunk meg az architektúránkon olyan egész aritmetikát (összeadás, kivonás, szorzás), amellyel az $I_2 = [0; 1100]$ intervallumban is tudunk számolni! Abrázoljuk ebben az aritmetikában az egészeket $I_1$-beli modulo 7, 11 és 15 maradékainak rendszereként, majd végezzük el ebben az aritmetikában a 16 + 52, 52 - 16, 16 · 52 műveleteket!