

Programtervező informatikus BSc, B szakirány

Valószínűesszámitás és statisztika gyakorlat, feladatok megoldása

1. (1-2 hét) Valószínűségek kiszámítása; feltételes valószínűség és Bayes-tétel

1.1. Feladat. Hányféleképpen lehet 8 bástyát letenni egy sakktáblára, hogy ne üssék egymást?

Megoldás

Az első bástya 64 helyre kerülhet. Ekkor a lefedett mező sorába és oszlopába már nem kerülhet újabb bástya, így a következőt már csak 7 sor és 7 oszlop valamelyikébe tehetjük le, ami 49 lehetőség. Minden újabb bástya letételével még egy újabb sor és oszlop kerül lefedésre. Tehát ezután sorra 36, 25, 16, 9, 4, és 1 lehetőség van a következő bástyák letételére. Tehát összesen $64 \cdot 49 \cdot 36 \cdot 25 \cdot 16 \cdot 9 \cdot 4 \cdot 1 = (8!)^2$ féleképp tehetjük le a bástyákat. Viszont a bástyák letevésének sorrendjét így figyelembe vettük. Amennyiben ezt a sorrendet nem vesszük figyelembe úgy le kell osztanunk a lerakott bástyák permutációinak számával, azaz $8!$ -sal. Ekkor $8!$ féleképp tehetjük le a bástyákat. A végeredményt közvetlenül is megkaphatjuk, ha oszloponként (ill. soronként) nézzük a bástyák helyét.

1.2. Feladat. Mi a valószínűsége, hogy egy véletlenszerűen kiválasztott 6 jegyű szám jegyei mind különbözőek?

Megoldás

Az első számjegyet az 1, 2, ..., 9 számjegyek közül, a többi számjegyet a 0, 1, 2, ..., 9 számjegyek közül választhatjuk. Így az összes esetek száma $9 \cdot 10^5$. Kedvező esetek száma: $9 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5$, mert itt visszatevés nélkül választunk, a sorrend számít, illetve arra figyelünk, hogy az első számjegy ne lehessen 0. Tehát a keresett valószínűség $\frac{9 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5}{9 \cdot 10^5} = \frac{136080}{900000} = 0,1512$.

1.3. Feladat. Ha egy magyarkártya-csomagból (32 lap: piros, zöld, makk, tők) visszatevéssel húzunk három lapot, akkor mi annak a valószínűsége, hogy

- a) pontosan egy piros színű lapot húztunk?
- b) legalább egy piros színű lapot húztunk?

Megoldás

- a) Az összes lehetőségek száma 32^3 . A 3 kihúzott lap közül $\binom{3}{1} = 3$ féleképp dönthetjük el, hogy melyik legyen a piros színű. 8-féle piros és 24 nem piros lap közül választhatunk.

Tehát a keresett valószínűség: $\frac{3 \cdot 8 \cdot 24^2}{32^3} = \frac{27}{64} = 0,4219$.

- b) Kényelmesebb most a komplementer esemény valószínűségét kivonni 1-ből. A komplementer esemény: nincsen piros a húzott lapok között. Ennek valószínűsége $\frac{24^3}{32^3} = \frac{27}{64}$. Tehát a keresett valószínűség $1 - \frac{27}{64} = \frac{37}{64} = 0,5781$.

1.4. Feladat. Egy zsákban 10 pár cipő van. 4 db-ot kiválasztva, mi a valószínűsége, hogy van közöttük pár, ha

- a) egyformák a párok?
- b) különbözőek a párok?

Megoldás

- a) 10 balos és 10 jobbos cipő van. Mi a valószínűsége, hogy a 4 kihúzott között van balos és jobbos is? Célszerű most is a komplementer esemény valószínűségét kivonni 1-ből. A komplementer esemény: vagy 4 balosat húztunk, vagy 4 jobbosat. Ennek valószínűsége: $2 \cdot \frac{10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7}{20 \cdot 19 \cdot 18 \cdot 17} = \frac{28}{323}$ vagy $\binom{10}{4} + \binom{10}{4} = \frac{28}{323}$. Tehát a keresett valószínűség $1 - \frac{28}{323} = 0,9133$.

- b) Most is érdemes a komplementer esemény valószínűségét kiszámítani. Komplementer esemény: nincs pár a 4 cipő között. Ha így akarom a cipőket kiválasztani, akkor az elsőt 20-féleképp választhatom ki, a másodikat 18-féleképp (az első és párja kiesik), a harmadikat 16-féleképp és a negyediket 14-féleképp. Összes eset: $20 \cdot 19 \cdot 18 \cdot 17$. Tehát a komplementer esemény valószínűsége $\frac{20 \cdot 18 \cdot 16 \cdot 14}{20 \cdot 19 \cdot 18 \cdot 17} = \frac{224}{323}$ vagy kiválasztunk 10 párból a 4 párat először, majd ezek balosát ill. jobbosát $\frac{\binom{10}{4} \binom{2}{1} \binom{2}{1} \binom{2}{1} \binom{2}{1}}{\binom{20}{4}} = \frac{224}{323}$. Tehát a keresett valószínűség $1 - \frac{224}{323} = 0,3065$.

1.5. Feladat. \star n dobozba véletlenszerűen helyezünk el n golyót úgy, hogy bármennyi golyó kerülhet az egyes dobozokba.

- a) Mi a valószínűsége, hogy minden dobozba kerül golyó?
- b) Annak mi a valószínűsége, hogy pontosan egy doboz marad üresen?

Megoldás

Vegyük észre hogy a probléma kitűzése nem határozza meg teljesen egyértelműen hogy milyen valószínűségi modellt kell használni, ugyanis nem írja elő hogy milyen módon helyezzük a golyókat a dobozokba, s azt sem rögzíti hogy megkülönböztetett vagy azonos golyókról van szó. Mindenesetre feltesszük hogy a dobozok meg vannak különböztetve (habár a feladat kitűzése ezt sem rögzíti).

- a) 1. Értelmezés: A golyókat megkülönböztetjük (ez nem feltétlenül jelenti, hogy a golyók fizikailag különbözőek, már az is megkülönböztetés, hogy ha egymás után rakjuk őket a dobozokba, s így első, második stb., golyóról lehet beszélni). Ilyenkor, ha csak a feladat explicite nem ír elő mást, a “véletlenszerűen” szó értelmezése az, hogy minden golyót egymástól függetlenül, azonos $(1/n)$ valószínűséggel helyezünk a dobozokba.

Tekintsük az $n = 2$ esetet, egyszerűség kedvéért. A valószínűségi tér természetes módon egy szorzattér, $\Omega = \{1, 2\} \times \{1, 2\}$, ahol a Descartes szorzat első komponense azt kódolja el, hogy az első golyó az 1-es vagy a 2-es dobozba kerül, a második komponens ugyanezt teszi a második golyóval. Például $\omega = (2, 1)$ azt jelenti, hogy az első golyó a 2-es, a második golyó az 1-es dobozba került. Összesen $2 \cdot 2 = 4$ kimeneti lehetőség van, és a függetlenségi feltevés miatt mindegyik $1/2 \cdot 1/2 = 1/4$ valószínűségű.

Általánosan: n megkülönböztetett golyót n dobozba n^n féleképpen tudjuk betenni (ismétléses variáció). A kedvező esetek száma $n!$, azaz a lehetséges permutációk száma. Így a keresett valószínűség

$$\mathbb{P}(\text{minden dobozban van egy golyó}) = \frac{n!}{n^n}.$$

2. Értelmezés: Ha a golyók nincsenek megkülönböztetve, és a berakási folyamat sem utal rá, akkor úgy is okoskodhatunk, hogy csupán a végeredményt látjuk és a valószínűségi terünket az összes lehetséges kimenet halmazaként definiáljuk. Vegyük észre, hogy az 1. Értelmezéssel ellentétben most $n = 2$ -nél mindössze 3 lehetőségünk van:

- (a) az első dobozban két golyó, a másodikban semmi;
- (b) mindkét dobozban egy golyó;
- (c) első dobozban semmi, a másodikban kettő.

Struktúrájában ez a valószínűségi tér nagyon más mint az előző, nemcsak az elemek száma különbözik, de nincs Descartes szorzat struktúrája sem. A “véletlenszerűen” szó elvileg értelmezhető úgy is, hogy a három lehetséges kimenet egyenlő valószínűségű. Így például $1/3$ annak a valószínűsége hogy mindkét dobozba egy-egy golyó került, míg az első értelmezés szerint ugyanez a valószínűség $1/2$.

Általánosan: n nem megkülönböztetett n dobozba $\binom{2n-1}{n}$ féleképpen tudjuk betenni (ismétléses kombináció). [Rendezzük az n dobozt sorba, ekkor $n - 1$ válaszfal keletkezik közöttük. Az összes esetek száma az n golyó és az $n - 1$ válaszfal sorrendjeinek száma, ami egy ismétléses permutáció: $\frac{(n+(n-1))!}{n! \cdot (n-1)!} = \binom{2n-1}{n}$.] A kedvező esetek száma 1, azaz minden dobozba egy golyó kerül. Így a keresett valószínűség

$$\mathbb{P}(\text{minden dobozban van egy golyó}) = \frac{1}{\binom{2n-1}{n}}.$$

A két értelmezés közötti döntés nem matematikai hanem modellezési probléma; sokszor azonban a matematikusnak kell rámutatni a felhasználónál arra, ha esetleg a probléma nincs kellő pontossággal megfogalmazva. Esetünkben az első megközelítés jól jól írja le a gázmolekulák viselkedését, a második pedig a fotonokét. A félév folyamán – ha külön nem jellezzük – az első megközelítést alkalmazzuk a feladatoknál.

- b) Ha a golyókat megkülönböztetjük, akkor - mint előbb - az n golyót n dobozba n^n féleképpen tudjuk letenni (ismétléses variáció). A kedvező esetek számát a következőképpen kaphatjuk: az üres dobozt n féleképpen, a dobozt melyben 2 golyó lesz pedig $n - 1$ féleképpen választhatjuk ki. Az n golyót $n!$ féleképpen tehetjük le, viszont kétféleképpen is eljuthatunk ugyanahhoz az elrendezéshez, hiszen a 2 golyós dobozban bármelyik jöhetett a most üres dobozból. Így a keresett valószínűség

$$\mathbb{P}(\text{pontosan egy doboz marad üresen}) = \frac{n(n-1)\frac{n!}{2}}{n^n} = \frac{\binom{n}{2}n!}{n^n}.$$

Ha a golyókat nem különböztetjük meg, akkor az n golyót n dobozba $\binom{2n-1}{n}$ féleképpen tudjuk betenni (ismétléses kombináció). A kedvező esetek számát a következőképpen kaphatjuk: az üres dobozt n féleképpen, a dobozt melyben 2 golyó lesz pedig $n - 1$ féleképpen választhatjuk ki. Így a keresett valószínűség

$$\mathbb{P}(\text{pontosan egy doboz marad üresen}) = \frac{n(n-1)}{\binom{2n-1}{n}}.$$

1.6. Feladat. Egy boltban 10 látszólag egyforma számítógép közül 3 felújított, a többi új. Mi a valószínűsége, hogy ha veszünk 5 gépet a laborba, akkor pontosan 2 felújított lesz közöttük?

Megoldás

A 10 gépből 3 felújított, 7 új. Tehát a 3 felújított gép közül kell 2-t kiválasztani, illetve a 7 új gép közül kell a maradék 3-at kiválasztani. A kiválasztás sorrendje nem számít, ez visszatevés nélküli mintavétel. A kedvező esetek száma: $\binom{3}{2} \cdot \binom{7}{3} = 3 \cdot 35 = 105$. Összes esetek száma: $\binom{10}{5} = 252$. Tehát a keresett valószínűség $\frac{105}{252} = 0,4167$. (ez megfelel a későbbiekben definiált hipergeometriai eloszlásnak $N = 10, M = 3, n = 5$ paraméterekkel.)

1.7. Feladat. Ha a 6 karakteres jelszavunkat véletlenszerűen választjuk a 10 számjegy és a 26 karakter közül, akkor mi a valószínűsége, hogy pontosan 3 szám lesz benne?

Megoldás

$\binom{6}{3} = 20$ -féleképp lehet a 6 karakterből a 3 szám helyét kiválasztani. Ezután feltehető, hogy az első 3 karakter szám, az utolsó 3 karakter betű. Számjegy választásának valószínűsége $\frac{10}{36}$, betűé $\frac{26}{36}$. A keresett valószínűség tehát $\binom{6}{3} \cdot \left(\frac{10}{36}\right)^3 \cdot \left(\frac{26}{36}\right)^3 = 0,1615$. Itt feltettük, hogy a választások függetlenek. (ez megfelel a későbbiekben definiált binomiális eloszlásnak $n = 6, p = \frac{10}{36}$ paraméterekkel.)

1.8. Feladat. Az ötöslottónál adjuk meg annak a valószínűségét, hogy egy szelvénnel játszva ötölálatosunk lesz, illetve hogy legalább négyesünk lesz. Mi a valószínűsége, hogy minden kihúzott szám páros? (Hogy viszonylik ez a visszatevéses esethez?)

Megoldás

Annak a valószínűsége, hogy ötösünk lesz: $\frac{\binom{5}{5}}{\binom{90}{5}} = \frac{1}{\binom{90}{5}}$.

Annak a valószínűsége, hogy legalább négyesünk lesz: $\frac{\binom{5}{5}}{\binom{90}{5}} + \frac{\binom{5}{4} \binom{85}{1}}{\binom{90}{5}}$.

Annak a valószínűsége, hogy minden kihúzott szám páros: $\frac{\binom{45}{5}}{\binom{90}{5}} \approx 0,028$.

A visszatevéses esetben (tehát, mikor egy számot többször is kihúzhatunk) annak a valószínűsége, hogy párosakat húzunk: $\left(\frac{45}{90}\right)^5 = \left(\frac{1}{2}\right)^5 \approx 0,031$. Bár a két érték közel van egymáshoz, a visszatevés nélküli esetben kisebb a valószínűség, mert ott fogynak a páros számok a választás során.

1.9. Feladat. Mennyi a valószínűsége, hogy két kockadobásnál mind a két dobás 6-os, feltéve, hogy tudjuk, hogy legalább az egyik dobás 6-os?

Megoldás

Legyen A esemény az, hogy mindkét dobás hatos, B pedig, hogy legalább az egyik hatos. Ekkor

$$P(A|B) = \frac{P(AB)}{P(B)} = \frac{\frac{1}{36}}{\frac{11}{36}} = \frac{1}{11}$$

1.10. Feladat. 41 millió ötöslottó-szelvényt töltenek ki egymástól függetlenül. Mennyi a valószínűsége, hogy lesz legalább egy 5-ös találat?

Megoldás

$$\begin{aligned} P(\text{legalább egy ötös találat lesz a 41M-ből}) &= 1 - P(\text{nem lesz ötös találat a 41M-ből}) \stackrel{\text{függetlenség}}{=} \\ &= 1 - P(\text{egy embernek nem lesz ötös találata})^{41 \cdot 10^6} = 1 - \left(1 - \frac{\binom{5}{5}}{\binom{90}{5}}\right)^{41 \cdot 10^6} \approx 0,6066. \end{aligned}$$

1.11. Feladat. 100 érme közül az egyik hamis (ennek mindkét oldalán fej található). Egy érmét véletlenszerűen kiválasztva és azzal 10-szer dobva, 10 fejet kaptunk. Ezen feltétellel mi a valószínűsége, hogy a hamis érmével dobtunk?

Megoldás

Jelölje A azt az eseményt, hogy 10 dobásból 10 fej, B_1 azt, hogy jó érmével dobtunk, illetve B_2 azt, hogy hamis érmével dobtunk. Ekkor:

$$\begin{aligned} P(B_1) &= \frac{99}{100}; & P(A|B_1) &= \binom{10}{10} \left(\frac{1}{2}\right)^{10} \left(\frac{1}{2}\right)^0 = \frac{1}{2^{10}} \\ P(B_2) &= \frac{1}{100}; & P(A|B_2) &= 1 \end{aligned}$$

Alkalmazva a Bayes-tételt:

$$P(B_2|A) = \frac{P(A|B_2)P(B_2)}{P(A|B_1)P(B_1) + P(A|B_2)P(B_2)} = \frac{1 \cdot \frac{1}{100}}{\frac{1}{1024} \cdot \frac{99}{100} + 1 \cdot \frac{1}{100}} \approx 0.9118.$$

1.12. Feladat. Egy diák a vizsgán p valószínűséggel tudja a helyes választ. Amennyiben nem tudja, akkor tippel (az esélye, hogy eltalálja a helyes választ, ekkor $\frac{1}{3}$). Ha helyesen válaszolt, mennyi a valószínűsége, hogy tudta a helyes választ?

Megoldás

Jelölje A azt az eseményt, hogy helyesen válaszolt, B_1 azt, hogy tudta a választ, illetve B_2 , hogy nem tudta a választ. Ekkor:

$$\begin{aligned} P(B_1) &= p; & P(A|B_1) &= 1 \\ P(B_2) &= 1 - p; & P(A|B_2) &= \frac{1}{3} \end{aligned}$$

Alkalmazva a Bayes-tételt:

$$P(B_1|A) = \frac{P(A|B_1)P(B_1)}{P(A|B_1)P(B_1) + P(A|B_2)P(B_2)} = \frac{1 \cdot p}{1 \cdot p + \frac{1}{3} \cdot (1 - p)} = \frac{3p}{2p + 1}$$

1.13. Feladat. Egy számítógépes program két független részből áll. Az egyikben 0, 2, a másikban 0, 3 a hiba valószínűsége. Ha a program hibát jelez, akkor mi a valószínűsége, hogy mindkét rész hibás?

Megoldás

Vezessük be a következő jelöléseket:

- A - a program hibát jelez;
- B_1 - egyik rész sem hibás;
- B_2 - pontosan az egyik rész hibás;
- B_3 - mindkét rész hibás.

Ekkor

$$\begin{aligned} P(B_1) &= P(\text{sem az első, sem a második}) = (1 - 0,2)(1 - 0,3) = 0,56 & P(A|B_1) &= 0 \\ P(B_2) &= P(\text{pontosan az egyik}) = 0,2(1 - 0,3) + 0,3(1 - 0,2) = 0,14 + 0,24 = 0,38; & P(A|B_2) &= 1 \\ P(B_3) &= 0,06; & P(A|B_3) &= 1 \end{aligned}$$

Alkalmazva a Bayes-tételt:

$$P(B_3|A) = \frac{P(A|B_3)P(B_3)}{P(A|B_1)P(B_1) + P(A|B_2)P(B_2) + P(A|B_3)P(B_3)} = \frac{1 \cdot 0,06}{0 \cdot 0,56 + 1 \cdot 0,38 + 1 \cdot 0,06} = \frac{0,06}{0,44} \approx 0,1364.$$

1.14. Feladat. Egy számítógép processzorát 3 üzemben készítik. 20% eséllyel az elsőben, 30% eséllyel a másodikban és 50% eséllyel a harmadikban. A garanciális hibák valószínűsége az egyes üzemekben rendre 10%, 4%, illetve 1%. Ha a gépünk processzora elromlott, akkor mi a valószínűsége, hogy az első üzemben készült?

Megoldás

Vezessük be a következő jelöléseket:

- A - a processzorunk elromlott;
- B_1 - a processzorunk az első üzemben készült;
- B_2 - a processzorunk a második üzemben készült;
- B_3 - a processzorunk a harmadik üzemben készült.

Ekkor

$$\begin{aligned} P(B_1) &= 0,2; & P(A|B_1) &= 0,10 \\ P(B_2) &= 0,3; & P(A|B_2) &= 0,04 \\ P(B_3) &= 0,5; & P(A|B_3) &= 0,01 \end{aligned}$$

Alkalmazva a Bayes-tételt:

$$P(B_1|A) = \frac{P(A|B_1)P(B_1)}{P(A|B_1)P(B_1) + P(A|B_2)P(B_2) + P(A|B_3)P(B_3)} = \frac{0,1 \cdot 0,2}{0,1 \cdot 0,2 + 0,04 \cdot 0,3 + 0,01 \cdot 0,5} \approx 0,5405$$