

11. Numerikus integrálás

11.1. Feladat

Interpolációs típusú-e az alábbi kvadratura formula? Miért?

$$\int_0^1 f(x) dx \approx \frac{1}{2} \left[f\left(\frac{1}{3}\right) + f\left(\frac{2}{3}\right) \right]$$

Két lehetséges megoldás közül választhatunk.

- (i) Az interpolációs kvadratura formula definícióját felhasználva ellenőrizzük, hogy a formulában szereplő A_k együtthatókra teljesül-e bármely k esetén az

$$A_k = \int_0^1 \ell_k(x) dx$$

A feladat által megadott kvadratura formula

$$A_0 \cdot f(x_0) + A_1 \cdot f(x_1)$$

alakú, ahol

$$\begin{aligned} x_0 &= \frac{1}{3}, & A_0 &= \frac{1}{2}, \\ x_1 &= \frac{2}{3}, & A_1 &= \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Tehát az $k = 0, 1$ esetekben kell ellenőriznünk, hogy az A_k súlyok a megfelelő ℓ_k Lagrange-alappolinomok kijelölt intervallumon vett integráljai-e. A $k = 0$ eset ellenőrzéséhez először is írjuk fel ℓ_0 -t:

$$\ell_0(x) = \frac{x - \frac{2}{3}}{\frac{1}{3} - \frac{2}{3}} = (-3) \cdot \left(x - \frac{2}{3}\right),$$

melyből

$$\int_0^1 \ell_0(x) dx = (-3) \int_0^1 x - \frac{2}{3} dx = (-3) \left[\frac{x^2}{2} - \frac{2}{3}x \right]_0^1 = (-3) \cdot \left(-\frac{1}{6}\right) = \frac{1}{2} = A_0,$$

ezért egyelőre nem sérült az interpolációs kvadratura tulajdonság. Vizsgáljuk meg A_1 -et is. Most

$$\ell_1(x) = \frac{x - \frac{1}{3}}{\frac{2}{3} - \frac{1}{3}} = 3 \cdot \left(x - \frac{1}{3}\right),$$

melyből

$$\int_0^1 \ell_1(x) \, dx = 3 \cdot \int_0^1 \left(x - \frac{1}{3}\right) dx = 3 \cdot \left[\frac{x^2}{2} - \frac{1}{3}x\right]_0^1 = 3 \cdot \frac{1}{6} = \frac{1}{2} = A_1,$$

vagyis a megadott kvadratura formula interpolációs típusú.

- (ii) A pontossági tételt is alkalmazhatjuk annak eldöntésére, hogy egy kvadratura formula interpolációs típusú-e. Mivel a kvadraturaformulánk két alappontra támaszkodik, akkor és csak akkor interpolációs, ha az alappontok, súlyok és momentumok között fennáll a következő összefüggés:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ x_0 & x_1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} A_0 \\ A_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mu_0 \\ \mu_1 \end{bmatrix}.$$

Számítsuk ki a momentumokat:

$$\begin{aligned} \mu_0 &= \int_0^1 1 \, dx = [x]_0^1 = 1, \\ \mu_1 &= \int_0^1 x \, dx = \left[\frac{x^2}{2}\right]_0^1 = \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{3} + \frac{2}{3}\right) = \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Így könnyen ellenőrizhető, hogy a LER teljesül:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ \frac{1}{2} \end{bmatrix}. \quad \checkmark$$

Vagyis a megadott formula interpolációs típusú.

11.2. Feladat

Interpolációs típusú-e az alábbi kvadratúra formula? Miért?

$$\int_{-1}^1 f(x) dx \approx \frac{1}{4} [f(-1) + 2 \cdot f(0) + f(1)]$$

Ismét vizsgáljuk meg a megadott kvadratúra formulát mindkét módszerünk segítségével.

- (i) Először is nézzük meg, hogy a definíció alapján interpolációs típusú-e az adott kvadratúra formula. A formulát három alapontra írtuk fel, és

$$\frac{1}{4} [f(-1) + 2 \cdot f(0) + f(1)] = \frac{1}{4} \cdot f(-1) + \frac{1}{2} \cdot f(0) + \frac{1}{4} \cdot f(1)$$

alakú, melyből látszik, hogy

$$\begin{aligned} x_0 &= -1, & A_0 &= \frac{1}{4}, \\ x_1 &= 0, & A_1 &= \frac{1}{2}, \\ x_2 &= 1, & A_2 &= \frac{1}{4}. \end{aligned}$$

Le kell ellenőrnünk, hogy $A_k = \int_{-1}^1 \ell_k(x) dx$ teljesül-e. Kezdjük az ellenőrzést ℓ_0 -al:

$$\ell_0(x) = \frac{x-0}{-1-0} \cdot \frac{x-1}{-1-1} = -x \cdot \frac{x-1}{-2} = \frac{x^2}{2} - \frac{x}{2}.$$

Innen

$$\begin{aligned} \int_{-1}^1 \ell_0(x) dx &= \int_{-1}^1 \frac{x^2}{2} - \frac{x}{2} dx = \\ &= \frac{1}{2} \int_{-1}^1 x^2 - x dx = \frac{1}{2} \cdot \left[\frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} \right]_{-1}^1 = \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} = \frac{1}{3} \neq \frac{1}{4} = A_0, \end{aligned}$$

vagyis a kvadratúra formula nem interpolációs típusú.

- (ii) Most oldjuk meg a feladatot a pontossági tétel alkalmazásával. A kvadratúra formulában három alappont szerepel, így a pontosságot a legfeljebb másodfokú polinomokra, \mathcal{P}_2 -re kell ellenőriznünk. Ehhez elegendő az $1, x, x^2$ bázisra megmutatni a pontosságot, ehhez pedig elő kell állítanunk a momentumokat:

$$\mu_0 = \int_{-1}^1 1 \, dx = [x]_{-1}^1 = 2,$$

azonban

$$\sum_{k=0}^2 1 \cdot A_k = \frac{1}{4} + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} = 1 \neq 2 = \mu_0,$$

vagyis a pontosság már az 1 bázisfüggvényre sem teljesül, így a kvadratúra formula nem lehet interpolációs típusú, nem is érdemes tovább számolnunk.

11.1. Megjegyzés

Érdemes megjegyezni, hogy a nulladik momentumra vonatkozó összefüggés egy könnyen ellenőrizhető szükséges feltételt ad egy kvadratúraformula interpolációs tulajdonságára:

$$\sum_{k=0}^n A_k \cdot 1 = \int_a^b 1 \, dx = b - a \iff \sum_{k=0}^n A_k = b - a,$$

vagyis ha a formula interpolációs, akkor a súlyok összege éppen az intervallum hosszával egyenlő. Azonban felhívjuk a figyelmet arra, hogy ez a feltétel szükséges és nem elégséges.

11.2. Megjegyzés

Jelen fejezetben a kvadratúraformula alappontjait adottnak feltételezzük, csak a súlyok meghatározásával törődünk, tehát a $2n + 2$ szabad paraméterből csak $n + 1$ szabad paramétert használunk fel. A paraméterek optimális beállításával elérhető, hogy a szintén $n + 1$ szabad paraméter (együttható) által meghatározott legfeljebb n -edfokú polinomok mindegyikére pontos legyen egy formula. A pontosság ilyen módon tovább nem növelhető. Ha viszont egy kvadratúraformulában az alappontokat és a súlyokat is változóként kezeljük, akkor összesen $2n + 2$ szabadsági fokunk van, ezért elvileg akár $2n + 1$ fokú polinomokra pontos kvadratúrát is szerkeszthetünk $n+1$ alappont és súly használatával! Ez az állítás valóban igaz, az elméletileg elérhető legmagasabb $2n + 1$ foksámg pontos kvadratúraformulák az úgynevezett Gauss-kvadratúrák, melyeket ebben a félévben nem tárgyalunk. Például érdemes ellenőrizni, hogy az

$$\int_{-1}^1 f(x)dx \approx f\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right) + f\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$$

mindössze két alappontra támaszkodó kvadratúraformula pontos minden legfeljebb harmadfokú polinom esetén.

11.3. Feladat

Adjuk meg az

$$\int_1^2 \frac{1}{x} dx = \ln(2)$$

határozott integrál értékének (racionális) közelítését

(a) érintő-

(b) trapéz- és

(c) Simpson-

formula segítségével. Minden esetben adjunk hibabecslést!

(a) Az érintőformulát az

$$E(f) = (b - a)f\left(\frac{a + b}{2}\right)$$

alakban írhatjuk fel. Jelen esetben $f(x) = \frac{1}{x}$, illetve $a = 1$ és $b = 2$, így

$$E(f) = (2 - 1) \cdot \frac{1}{\frac{3}{2}} = \frac{2}{3}.$$

Az érintőformulára vonatkozó hibabecslést az

$$\left| \int_a^b f(x) dx - E(f) \right| \leq \frac{M_2}{24} \cdot (b - a)^3$$

formulával adhatjuk meg, ahol $M_2 := \max_{x \in [a, b]} |f''(x)|$. Az alkalmazásához szükségünk van M_2 értékére:

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{1}{x} = x^{-1}, \\ f'(x) &= -x^{-2}, \\ f''(x) &= 2x^{-3} = \frac{2}{x^3} \implies |f''(x)| \leq 2 =: M_2 \quad (x \in [1, 2]). \end{aligned}$$

Ez utóbbit és a feladatból kapott további paramétereket behelyettesítve a hibabecslésbe:

$$\left| \int_1^2 \frac{1}{x} dx - \frac{2}{3} \right| \leq \frac{2}{24} \cdot 1^3 = \frac{1}{12}.$$

(b) Vizsgáljuk most a trapézformula segítségével kapott közelítést. A trapézformulát a

$$T(f) = \frac{b-a}{2}(f(a) + f(b))$$

képlettel adjuk meg. A feladatra alkalmazva:

$$T(f) = \frac{2-1}{2} \left(\frac{1}{1} + \frac{1}{2} \right) = \frac{1}{2} \left(1 + \frac{1}{2} \right) = \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{2} = \frac{3}{4}.$$

A trapézformulára vonatkozó hibabecslés:

$$\left| \int_a^b f(x) dx - T(f) \right| \leq \frac{M_2}{12} \cdot (b-a)^3.$$

Az érintőformula hibabecslésénél már kiszámítottuk M_2 értékét, így fel tudjuk írni a konkrét hibabecslésünket:

$$\left| \int_1^2 \frac{1}{x} dx - \frac{3}{4} \right| \leq \frac{2}{12} \cdot 1^3 = \frac{1}{6}.$$

(c) Végül adjuk meg az integrál racionális közelítését Simpson-formula segítségével. A Simpson-formulát az

$$S(f) = \frac{b-a}{6} \left(f(a) + 4f\left(\frac{a+b}{2}\right) + f(b) \right)$$

összefüggéssel írhatjuk fel. A konkrét feladatra vonatkoztatva:

$$S(f) = \frac{2-1}{6} \left(\frac{1}{1} + 4 \cdot \frac{1}{\frac{3}{2}} + \frac{1}{2} \right) = \frac{1}{6} \left(1 + \frac{8}{3} + \frac{1}{2} \right) = \frac{25}{36}.$$

A Simpson-formulához tartozó hibabecslés a következő:

$$\left| \int_a^b f(x) dx - S(f) \right| \leq \frac{M_4}{4! \cdot 5!} (b-a)^5.$$

A hibabecslés felírásához számítsuk ki M_4 -et:

$$f'''(x) = -6x^{-4}$$
$$f^{(4)}(x) = 24x^{-5} = \frac{24}{x^5} \rightarrow \left| \frac{24}{x^5} \right| \leq 24 = M_4 \quad (x \in [1, 2]).$$

Ez alapján tehát

$$\left| \int_1^2 \frac{1}{x} \, dx - \frac{25}{36} \right| \leq \frac{24}{4! \cdot 5!} 1^5 = \frac{1}{5!} = \frac{1}{120}.$$

11.4. Feladat

Számítsuk ki az

$$\int_{-1}^1 2^{-x} dx$$

határozott integrál közelítését

(a) trapéz- és

(b) Simpson-formulával!

Hány függvénykiértékelést kell végeznünk, ha összetett formulák alkalmazásával szeretnénk elérni a 10^{-3} pontosságot?

(a) Először is közelítsük az integrál értékét trapézformulával:

$$T(f) = \frac{1 - (-1)}{2} (2^{-(-1)} + 2^{-1}) = 2 + \frac{1}{2} = \frac{5}{2}.$$

Írjuk fel a közelítéshez tartozó hibabecslést. Ehhez szükségünk lesz a hibaformulában szereplő M_2 értékére:

$$f(x) = 2^{-x},$$

$$f'(x) = -\ln(2) \cdot 2^{-x},$$

$$f''(x) = (\ln(2))^2 \cdot 2^{-x}, \implies |(\ln(2))^2 \cdot 2^{-x}| \leq (\ln(2))^2 \cdot 2^1 = M_2 \quad (x \in [-1, 1]).$$

Innen a hibabecslés

$$\left| \int_{-1}^1 2^{-x} dx - \frac{5}{2} \right| \leq \frac{(\ln(2))^2 \cdot 2}{12} \cdot 2^3 = \frac{4}{3} \cdot \ln^2(2) \approx 0.6406.$$

Mivel ez a kívánt 10^{-3} -os pontosságnál lényegesen rosszabb, alkamazzunk összetett trapézformulát. Az összetett trapézformulára vonatkozó hibabecslés:

$$\left| \int_{-1}^1 2^{-x} dx - T_m(f) \right| \leq \left(\frac{M_2}{12} \cdot (b-a)^3 \right) \cdot \frac{1}{m^2},$$

ahol

$$T_m(f) = \frac{b-a}{2m} [f(x_0) + 2f(x_1) + \dots + 2f(x_{m-1}) + f(x_m)]$$

az összetett trapézformula. Célunk most meghatározni azt a legkisebb pozitív egész m számot, melyre az előző egyenlőtlenség jobb oldala kisebb vagy egyenlő lesz, mint 10^{-3} . Vegyük észre azonban, hogy az összetett formula hibabecslésében felhasználhatjuk az egyetlen formulára adott hibabecslésünket, ennek segítségével:

$$\left(\frac{4}{3} \cdot \ln^2(2)\right) \cdot \frac{1}{m^2} \leq 10^{-3}.$$

Átrendezve az egyenlőtlenséget kapjuk, hogy

$$\begin{aligned} \frac{4}{3} \cdot \ln^2(2) \cdot 10^3 &\leq m^2 \\ \sqrt{\frac{4}{3} \cdot \ln^2(2) \cdot 10^3} &\approx 25,310 \leq m \implies m \geq 26. \end{aligned}$$

(b) Először írjuk fel az integrál közelítését Simpson-formula segítségével:

$$S(f) = \frac{1 - (-1)}{6} (2^1 + 4 \cdot 2^0 + 2^{-1}) = \frac{13}{6}.$$

Írjuk fel a közelítéshez tartozó hibabecslést is. Ehhez szükségünk van az M_4 értékekre.

$$\begin{aligned} f'''(x) &= -(\ln(2))^3 \cdot 2^{-x} \\ f^{(4)}(x) &= (\ln(2))^4 \cdot 2^{-x} \implies |(\ln(2))^4 \cdot 2^{-x}| \leq (\ln(2))^4 \cdot 2 =: M_4 \quad (x \in [-1, 1]). \end{aligned}$$

Innen a hibabecslés

$$\left| \int_{-1}^1 2^{-x} dx - \frac{13}{6} \right| \leq \frac{2 \ln^4(2)}{4! \cdot 5!} \cdot 2^5 = \frac{\ln^4(2)}{45} \approx 0.0051.$$

Ez rosszabb a kívánt pontosságnál, ezért alkalmazzunk összetett Simpson formulát. Ennek a hibaképlete:

$$\left| \int_a^b f(x) dx - S_m(f) \right| \leq \left(\frac{M_4}{4! \cdot 5!} \cdot (b-a)^5 \right) \cdot \left(\frac{2}{m} \right)^4$$

Vegyük figyelembe, hogy az összetett Simpson-formulát páratlan számú alappont, azaz páros m esetén értelmezzük, kiszámítási módja:

$$S_m(f) = \frac{b-a}{3m} \left(f(x_0) + 2 \cdot \sum_{k=1}^{\frac{m}{2}-1} f(x_{2k}) + 4 \cdot \sum_{k=1}^{\frac{m}{2}} f(x_{2k-1}) + f(x_m) \right)$$

Előző eredményeinket felhasználva az összetett formula hibabecslése:

$$\left| \int_{-1}^1 2^{-x} dx - S_m(f) \right| \leq \frac{\ln^4(2)}{45} \cdot \left(\frac{2}{m} \right)^4 = \frac{16 \cdot \ln^4(2)}{45 \cdot m^4}.$$

Feladatunk a továbbiakban annak a legkisebb pozitív páros m számnak a meghatározása, amelyre a fenti mennyiség 10^{-3} -nál kisebb lesz:

$$\begin{aligned} \frac{16 \cdot \ln^4(2)}{45 \cdot m^4} &\leq 10^{-3} \\ \frac{10^3 \cdot 16 \cdot \ln^4(2)}{45} &\leq m^4 \\ \sqrt[4]{\frac{10^3 \cdot 16 \cdot \ln^4(2)}{45}} &\approx 2,7464 \leq m \quad \implies \quad m \geq 4 \end{aligned}$$

Az összetett trapézformula esetén tehát $m = 26$ -ot kaptunk, ami azt jelenti, hogy a megadott 10^{-3} pontosság eléréséhez legalább 27 függvénykiértékelést kell végeznünk! Ha viszont összetett Simpson-formulát használunk, ugyanezen pontosság eléréséhez elegendő mindössze 5 függvénykiértékelés!