Analízis 1. (BSc)

1. zárthelyi

Programtervező informatikus szak

2015-2016. tanév tavaszi félév

1. feladat. *Legyen*

$$A := \left\{ \frac{2x+13}{3x+15} \in \mathbb{R} \ : \ x \in [1,+\infty) \right\}.$$

Határozza meg $\sup A$*-t és* $\inf A$*-t. Van-e az* A *halmaznak legnagyobb, illetve legkisebb eleme?*

Megoldás. Mivel minden $x \in [1,+\infty)$ számra

$$\frac{2x+13}{3x+15} = \frac{\frac{2}{3}(3x+15)+3}{3x+15} = \frac{2}{3} + \frac{1}{x+5},$$

ezért

$$(*) \qquad \frac{2}{3} < \frac{2}{3} + \frac{1}{x+5} \leq \frac{2}{3} + \frac{1}{1+5} = \frac{5}{6}.$$

A halmaznak **van legnagyobb eleme**, ez az $x = 1$ értékhez tartozó $\frac{5}{6} \in A$ szám, tehát

$$\boxed{\max A = \frac{5}{6}} \qquad \Longrightarrow \qquad \boxed{\sup A = \frac{5}{6}}.$$

$(*)$-ból **sejthető**, hogy $\inf A = \frac{2}{3}$.

Bizonyítás:

(i) $\frac{2}{3}$ egy alsó korlát, l. $(*)$-ot.

(ii) Megmutatjuk, hogy $\frac{2}{3}$ a legnagyobb alsó korlát, azaz

$$(**) \qquad \forall\, \varepsilon > 0\text{-hoz } \exists\, x \in [1,+\infty): \ \frac{2}{3} + \frac{1}{x+5} < \frac{2}{3} + \varepsilon.$$

Legyn $\varepsilon > 0$. Ha $x \in [1,+\infty)$, akkor

$$\frac{2}{3} + \frac{1}{x+5} < \frac{2}{3} + \varepsilon \iff \frac{1}{\varepsilon} < x+5 \iff x > \frac{1}{\varepsilon} - 5.$$

Ilyen $x \geq 1$ van, például $x := \frac{1}{\varepsilon} + 1 \in [1,+\infty)$; ezzel $(**)$ teljesül, tehát $\boxed{\inf A = \frac{2}{3}}$.

Mivel $\inf A \notin A$, ezért a halmaznak **nincs legkisebb eleme**. ■

2. feladat. *Igazolja, hogy az*

$$f(x) := \frac{\sqrt{x}}{1-\sqrt{x}} \qquad \big(x \in (1,+\infty)\big)$$

függvény invertálható. Határozza meg a $\mathcal{D}_{f^{-1}}$ *és az* $\mathcal{R}_{f^{-1}}$ *halmazokat, illetve* $x \in \mathcal{D}_{f^{-1}}$ *esetén* $f^{-1}(x)$*-et.*

Megoldás. Célszerű először elvégezni a következő átalakítást:

$$(\#) \qquad f(x) = \frac{\sqrt{x}}{1-\sqrt{x}} = \frac{\sqrt{x}-1+1}{1-\sqrt{x}} = -1 + \frac{1}{1-\sqrt{x}} = -1 - \frac{1}{\sqrt{x}-1} \qquad \big(x \in (1,+\infty)\big).$$

Az invertálhatóság igazolása: Legyen $x, t \in \mathcal{D}_f$. Ekkor

$$f(x) = f(t) \Longrightarrow -1 - \frac{1}{\sqrt{x}-1} = -1 - \frac{1}{\sqrt{t}-1} \Longrightarrow x = t,$$

és ez azt jelenti, hogy f invertálható.

Az inverz előállítása: (#) alapján *sejthető*, hogy

$$\mathcal{R}_f = (-\infty, -1).$$

Ennek igazolása:

(i) $\mathcal{R}_f \subset (-\infty, -1)$ nyilvánvaló, mert (#) alapján $\forall\, x \in \mathcal{D}_f$ esetén $f(x) < -1$.

(ii) Fordítva:

$$(-\infty, -1) \subset \mathcal{R}_f \iff \forall\, y \in (-\infty, -1) \text{ elemhez } \exists\, x \in \mathcal{D}_f : \ f(x) = y.$$

Ez azonban igaz, mert

$$f(x) = y \iff -1 - \frac{1}{\sqrt{x}-1} = y \iff \sqrt{x} = 1 - \frac{1}{y+1} = \frac{y}{1+y} \iff x = \left(\frac{y}{1+y}\right)^2.$$

Mivel $y+1 < 0$, ezért $x > 1$, vagyis $x \in \mathcal{D}_f$, tehát $(-\infty, -1) \subset \mathcal{D}_f$.

(i) és (ii)-ből következik, hogy $\mathcal{R}_f = (-\infty, -1)$.

A fentiek alapján f inverze az

$$f^{-1}(y) = \left(\frac{y}{1+y}\right)^2 \qquad \big(y \in (-\infty, -1)\big). \ \blacksquare$$

függvény.

3. feladat. *Legyen*

$$f(x) := 2x - 1 \quad (x \in \mathbb{R}) \quad \text{és} \quad g(x) := \sqrt{1-x^2} \quad \big(x \in [-1, 1]\big).$$

Határozza meg az $f \circ g$ és a $g \circ f$ függvényeket.

Megoldás. $f \circ g$:

$$\mathcal{D}_{f\circ g} = \{x \in \mathcal{D}_g \ : \ g(x) \in \mathcal{D}_f\} = \{x \in [-1,1] \ : \ \sqrt{1-x^2} \in \mathbb{R}\} = [-1, 1],$$

$$\big(f \circ g\big)(x) = f\big(g(x)\big) = f(\sqrt{1-x^2}) = 2\sqrt{1-x^2} - 1 \qquad \big(x \in [-1, 1]\big).$$

$g \circ f$:

$$\mathcal{D}_{g\circ f} = \{x \in \mathcal{D}_f \ : \ f(x) \in \mathcal{D}_g\} = \{x \in \mathbb{R} \ : \ 2x-1 \in [-1,1]\} =$$

$$= \{x \in \mathbb{R} \ : \ -1 \le 2x - 1 \le 1\} = [0, 1],$$

$$\big(g \circ f\big)(x) = g\big(f(x)\big) = g(2x-1) = \sqrt{1-(2x-1)^2} = 2\sqrt{x(1-x)} \qquad \big(x \in [0, 1]\big). \ \blacksquare$$

4. feladat. *Sejtse meg az*

$$a_n := \frac{3n^2-2n-3}{2n^2+3n+5} \quad (n \in \mathbb{N})$$

sorozat határértékét, majd a definíció alapján bizonyítsa be a sejtését.

Megoldás. Az

$$a_n := \frac{3n^2-2n-3}{2n^2+3n+5} = \frac{3-\frac{2}{n}-\frac{3}{n^2}}{2+\frac{3}{n}+\frac{5}{n^2}}$$

átalakítás alapján a

sejtés: $\lim(a_n) = \frac{3}{2}$.

Bizonyítás: Azt kell megmutatni, hogy

$$\forall\, \varepsilon > 0\text{-hoz} \ \ \exists\, n_0 \in \mathbb{N}, \ \ \forall\, n \geq n_0,\ n \in \mathbb{N}\text{-re}: \quad \left|\frac{3n^2-2n-3}{2n^2+3n+5} - \frac{3}{2}\right| < \varepsilon.$$

Rögzítsük az $\varepsilon > 0$ számot. Ekkor minden $1 \leq n \in \mathbb{N}$ számra

$$\left|\frac{3n^2-2n-3}{2n^2+3n+5} - \frac{3}{2}\right| = \frac{|-13n-21|}{2(2n^2+3n+5)} = \frac{13n+21}{2(2n^2+3n+5)} \leq \frac{13n+21n}{4n^2} \leq \frac{36n}{4n^2} = \frac{9}{n} < \varepsilon.$$

Az utolsó egyenlőtlenség teljesül, ha $n > \frac{9}{\varepsilon}$, ezért az

$$\left|\frac{3n^2-2n-3}{2n^2+3n+5} - \frac{3}{2}\right| < \varepsilon$$

egyenlőtlenség fennáll, ha $n \geq n_0 := \left[\frac{9}{\varepsilon}\right] + 1$. (Az $\varepsilon > 0$ számhoz tehát $\left[\frac{9}{\varepsilon}\right] + 1$ egy „jó” küszöbindex). ■

5. feladat. *Számítsa ki a következő sorozatok határértékét:*

(a) $a_n := \sqrt{n^2+3n+1} - \sqrt{n^2+3} \quad (n = 1, 2, \ldots)$,

(b) $b_n := \dfrac{4^{n+1} - (-3)^{n-1}}{n^2 + 2^{2n-1}} \quad (n = 1, 2, \ldots)$.

Megoldás. (a)

$$a_n = \left(\sqrt{n^2+3n+1} - \sqrt{n^2+3}\right) \cdot \frac{\sqrt{n^2+3n+1} + \sqrt{n^2+3}}{\sqrt{n^2+3n+1} + \sqrt{n^2+3}} = \frac{3n-2}{\sqrt{n^2+3n+1} + \sqrt{n^2+3}} =$$

$$= \frac{3-\frac{2}{n}}{\sqrt{1+\frac{3}{n}+\frac{1}{n^2}} + \sqrt{1+\frac{3}{n^2}}}$$

Mivel

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n^k} = 0 \ (k = 1, 2) \quad \text{és} \quad \lim_{n\to+\infty} \sqrt{x_n} = \sqrt{A}, \ \text{ha} \ \lim(x_n) = A,$$

ezért a számlálóban levő sorozat 3-hoz, a nevezőben levő sorozat 2-höz tart. A hányadosuk határértéke tehát 3/2, azaz

$$\lim(a_n) = \frac{3}{2}.$$

(b) A következő átalakításokat végezzük el:

$$b_n := \frac{4^{n+1} - (-3)^{n-1}}{n^2 + 2^{2n-1}} = \frac{4 \cdot 4^n - \dfrac{(-3)^n}{-3}}{n^2 + \dfrac{4^n}{2}} = \frac{4 + \dfrac{1}{3} \cdot \left(-\dfrac{3}{4}\right)^n}{\dfrac{n^2}{4^n} + \dfrac{1}{2}}.$$

Mivel $\lim(q^n) = 0$ és $\lim(n^2\, q^n) = 0$, ha $|q| < 1$, ezért a számlálóban levő sorozat 4-hez, a nevezőben levő pedig 1/2-hez tart, ezért a hányadosuk határértéke 8, azaz

$$\lim(b_n) = 8. \quad \blacksquare$$