

A kiegyensúlyozott bináris keresőfa – AVL fák

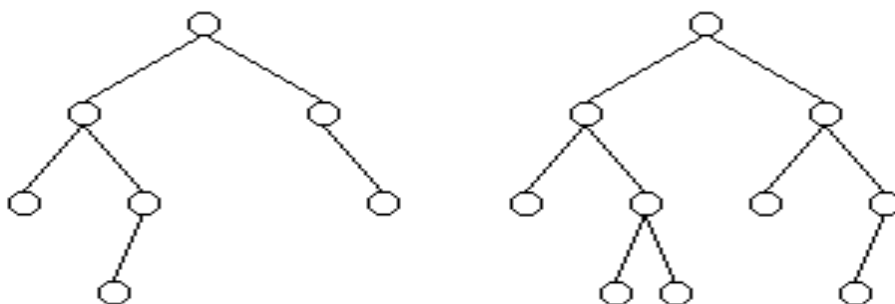
(Avl-fa; Adelson-Velskij és Landisz, 1962)

Definíció: Az AVL fák magasság szerint kiegyensúlyozott bináris keresőfák.

Definíció: t kiegyensúlyozott (AVL-tulajdonságú) $\Leftrightarrow t$ minden $(*p)$ csúcsára:

$$|h(p \rightarrow \text{right}) - h(p \rightarrow \text{left})| \leq 1$$

Feladat: Döntsük el, hogy az alábbi bináris fák AVL tulajdonságúak-e!



Tétel: Tetszőleges n csúcsú AVL fa h magasságára igaz, hogy

$$\lfloor \log n \rfloor \leq h \leq 1,45 \log n$$

Megjegyzések:

- Az AVL-fára, mint speciális alakú keresőfára, változatlanul érvényesek a keresőfákra bevezetett műveletek.
- Minden művelet (beszúrás és törlés) után ellenőrizzük, és ha kell, helyreállítjuk az AVL-tulajdonságot.
- Az AVL fát láncoltan reprezentáljuk és a csúcsban tároljuk az egyensúlyát (balance), ahol $p \rightarrow b := h(p \rightarrow \text{right}) - h(p \rightarrow \text{left})$ és $p \rightarrow b \in \{-1, 0, +1\}$

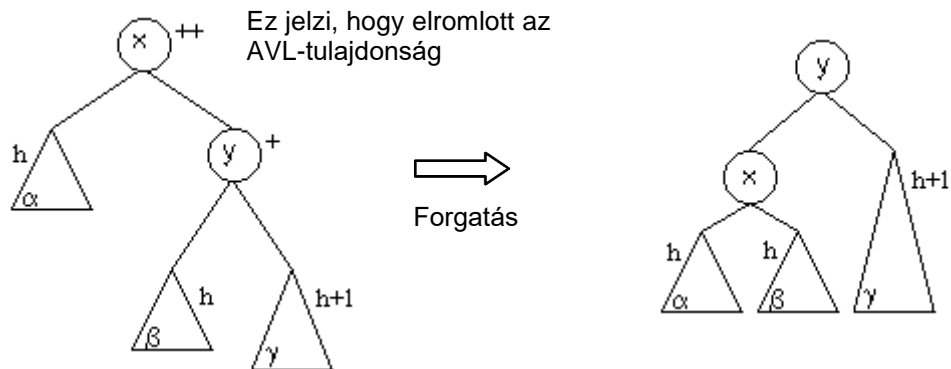
Jelölések:

- A csúcs jelzője (indikátora) az '=', ha a csúcs két részfájának magassága egyenlő.
- A csúcs jelzője a '-', ha a csúcs baloldali részfájának magassága eggyel nagyobb, mint a jobboldali részfáé.
- A csúcs jelzője a '+', ha a csúcs jobboldali részfájának magassága eggyel nagyobb, mint a baloldali részfáé.

Megjegyzések:

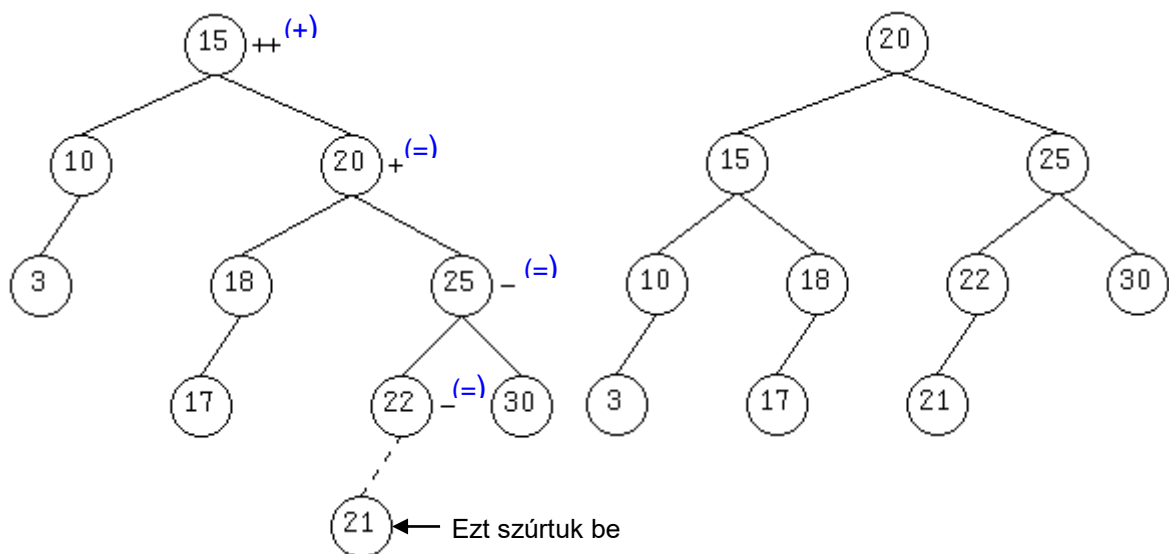
- A levelek jelzője mindig az '='.
- Ha egy csúcs jelzője beszúrás vagy törlés miatt '++', vagy '--' lesz (ez jelzi, hogy elromlott az AVL-tulajdonság), javítanunk kell!

1. A (++, +) szabály (tükörképe a (- -, -) szabály)



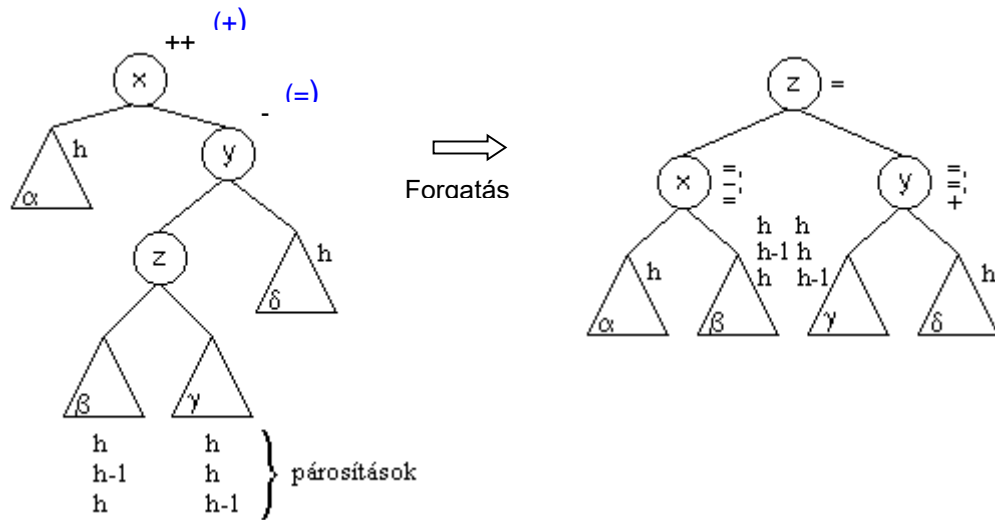
$\alpha < x < \beta < y < \gamma$ (a reláció az α , β és γ részfa minden csúcsára igaz)

Példa:



- Induljunk el a beszúrt csúcs szülőjétől a gyökér felé
- Addig menjünk, amíg (a jelzők korrekcióját elvégezve) '=' vagy '++' ('- -') nem alakul ki, illetve a gyökérig nem érünk
- A '++' ('- -') esetében javítunk (forgatunk), és tovább már nem kell nézni

2. A (++, -) szabály (tükörképe a (- -, +) szabály)

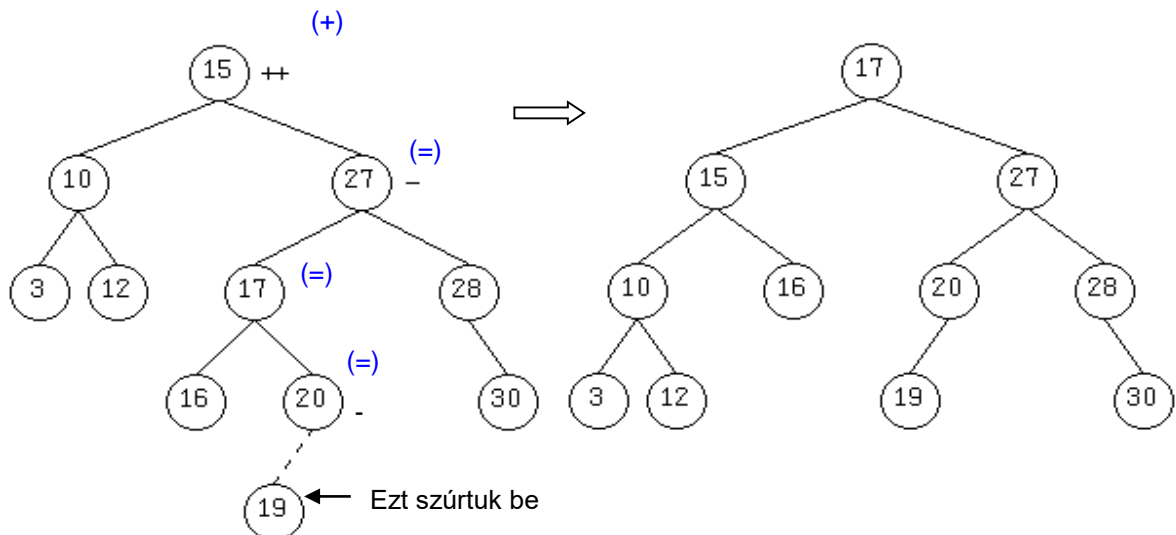


$\alpha < x < \beta < z < \gamma < y < \delta$ (a reláció az α , β , γ és δ részfák minden csúcsára igaz)

Megjegyzés: A (++, -) eset háromféleképpen állhat elő:

- A 'z' az új elem, részfák nincsenek (h , h) ⁺
- Az új elem a γ rész fába került (h-1 , h)
- Az új elem a β rész fába került (h , h-1)

Példa:



Megjegyzések:

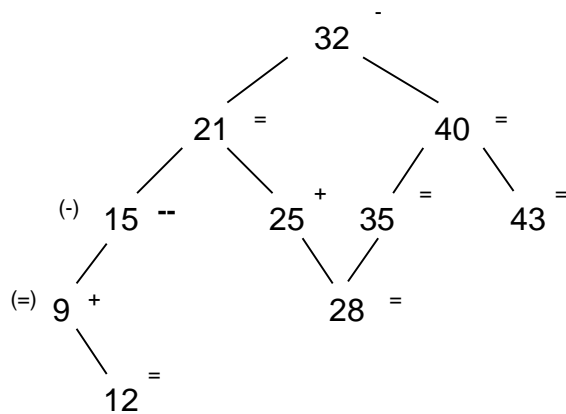
- A beszúrás műveletigénye:
 - Beszúrás helyének megkeresése: $\log_2 n$ -nel arányos
 - AVL tulajdonság ellenőrzése: $\log_2 n$ -nel arányos (max. a gyökérig)
 - Pointer állítás '++', '+' esetén: 6 (konstans)
 - Pointer állítás '++', '-' esetén: 10 (konstans)

⇒ A teljes műveletigény: $\log_2 n + \log_2 n + \text{konstans} \approx \log_2 n$

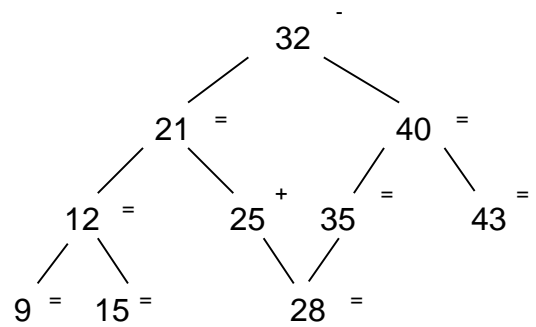
Feladatok:

1. Építsünk AVL-fát a következő adatokból: 32, 40, 21, 15, 43, 25, 9, 28, 35, 12, 14!
Ha elromlott a fa kiegyensúlyozása, lássuk el címkékkel a csúcsokat és állítsuk helyre az AVL-tulajdonságot a megfelelő forgatással!

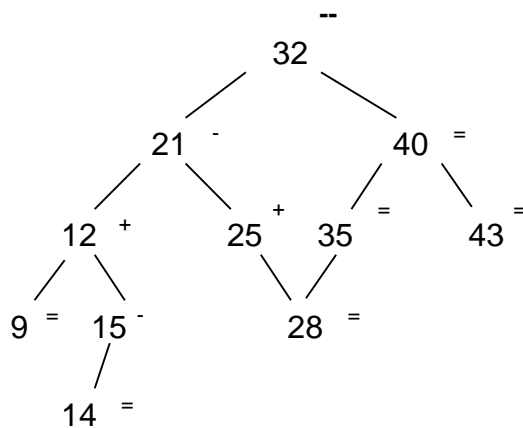
Építés:



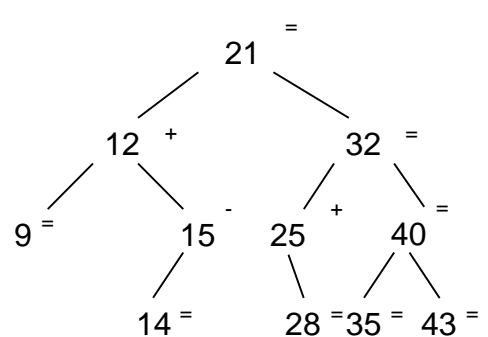
Forgatás (- -; +):



Építés:

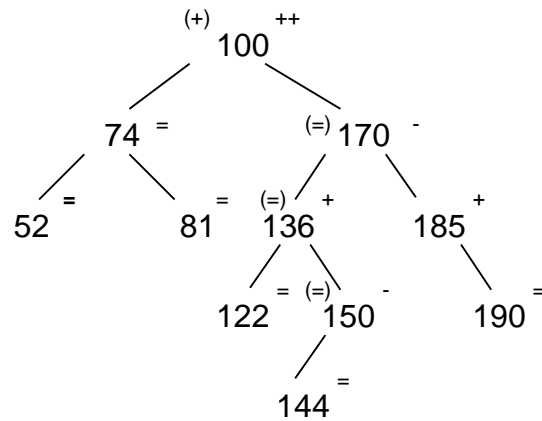


Forgatás (- -; -):

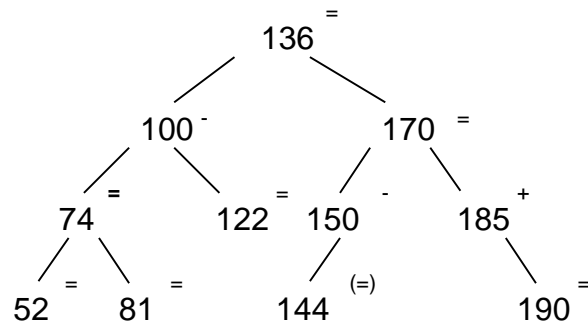


2. Építsünk AVL-fát a következő adatokból: 100, 170, 74, 81, 136, 185, 150, 122, 52, 190, 144! Ha elromlott a fa kiegyensúlyozása, lássuk el címkékkel a csúcsokat és állítsuk helyre az AVL-tulajdonságot a megfelelő forgatással!

Építés (++, -):



Forgatás:

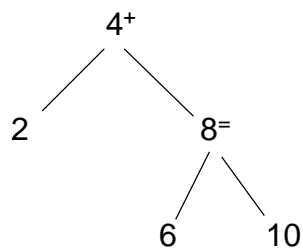


Jelölések:

- A továbbiakban a (*bal_részfa gyökér jobb_részfa*) jelölést használjuk, ahol az üresrészfákat elhagyjuk és a könnyebb olvashatóság kedvéért [] és { } zárójeleket is alkalmazunk.
- A belső csúcsok egyensúlyait az értékek mellett tüntetjük fel.
- A levelek súlya mindig '=', ezért azt nem tüntetjük fel.

Példa:

A következő { [2] 4+ [(6) 8= (10)] } AVL fa ábrája az alábbi:



Feladat:

1. Szúrjuk be a fenti fába a 3-as értéket! Írjuk le a kapott fát a fenti jelöléssel is!
2. Szúrjuk be a fenti fába a 15-ös értéket! Írjuk le a kapott fát a fenti jelöléssel is!
3. Szúrjuk be a fenti fába a 7-es értéket! Írjuk le a kapott fát a fenti jelöléssel is!