13. gyakorlat
Többváltozós analízis 4.

7. Az inverzfüggvény- és az egyváltozós implicitfüggvény-tétel

1. feladat. *Legyen*

$$f(x,y) := \begin{bmatrix} e^x \cos y \\ e^x \sin y \end{bmatrix} \qquad \big((x,y) \in \mathbb{R}^2\big).$$

(a) *Mi az f értékkészlete?*

(b) *Mutassuk meg, hogy f globálisan nem invertálható, de $\mathbb{R}^2$ minden pontjában lokálisan invertálható.*

(c) *Legyen $a := (0, \pi/3)$ és $b := f(a)$. Keressünk explicit képletet f-nek a b pont valamely környezetében értelmezett f^{-1} lokális inverzére, és azt deriválva határozzuk meg $\big(f^{-1}\big)'(b)$-t. Számítsuk ki a deriváltat a tanult képletel is.*

Megoldás.

(a) $\mathcal{R}_f = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$

A függvény értékkészletét az u tengely és a v tengely által meghatározott derékszögű koordináta-rendszerben tekintjük.
Világos, hogy $\mathcal{R}_f \subset \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$, mivel a sin és a cos függvény zérushelyei különbözők.
A fordított állítás igazolásához vegyünk egy tetszőleges $P(u,v) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ pontot. Ekkor egyértelműen létezik olyan $x \in \mathbb{R}$, amelyre $e^x = \overline{OP} = \sqrt{u^2+v^2}$. Ha y jelöli az OP félegyenes irányszögét, akkor

$$u = \overline{OP} \cdot \cos y = e^x \cos y \quad \text{és} \quad v = \overline{OP} \cdot \sin y = e^x \sin y.$$

Így $f(x,y) = (u,v)$, ezért $(u,v) \in \mathcal{R}_f$, azaz $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} \subset \mathcal{R}_f$ is igaz.
Következésképpen $\mathcal{R}_f = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$.

(b) Az $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ függvény globálisan nem invertálható, mert például

$$f\big(0, \tfrac{\pi}{2}\big) = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = f\big(0, \tfrac{5\pi}{2}\big).$$

A lokális invertálhatóságot az inverzfüggvény-tétel alapján vizsgáljuk.

Világos, hogy $f \in C^1\big(\mathbb{R}^2\big)$. Az $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ függvény Jacoci-mátrixa egy tetszőleges $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ pontban

$$(*) \qquad f'(x,y) = \begin{bmatrix} e^x \cos y & -e^x \sin y \\ e^x \sin y & e^x \cos y \end{bmatrix}.$$

Mivel

$$\det f'(x,y) = e^{2x} \cdot \cos^2 y + e^{2x} \cdot \sin^2 y = e^{2x} \neq 0 \quad \big(\forall\, (x,y) \in \mathbb{R}^2\big),$$

ezért az f függvény *minden* $(x,y)\in\mathbb{R}^2$ pontban lokálisan invertálható. Ez azt jelenti, hogy $\exists\, K(x,y) =: U$ és $\exists\, K\big(f(x,y)\big) =: V$, hogy az $f_{|U} : U \to V$ függvény bijekció, következésképpen invertálható.

(c) Legyen

$$a := \big(0, \tfrac{\pi}{3}\big) \quad \text{és} \quad b := f(a) = f\big(0,\tfrac{\pi}{3}\big) = \begin{bmatrix} \dfrac{1}{2} \\ \dfrac{\sqrt{3}}{2} \end{bmatrix}.$$

Explicit képlet az f^{-1} inverz függvényre.

$$\begin{cases} e^x \,\cos y = u \\ e^x \,\sin y = v \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} e^{2x} = u^2+v^2 \\ \operatorname{tg} y = \dfrac{v}{u} \end{cases} (u\neq 0) \Longrightarrow \begin{cases} x = \dfrac{1}{2}\ln(u^2+v^2) \\ y = \operatorname{arc\,tg} \dfrac{v}{u} \end{cases} (u\neq 0).$$

Legyen $U := K(a)$ és $V := K(b)$. Válasszuk meg a V környezetet úgy, hogy $u \neq 0$ teljesüljön (legyen a környezet sugara $< \sqrt{3}/2$. A fentiek alapján az f^{-1} inverz függvény explicit alakja:

$$f^{-1}(u,v) = \begin{bmatrix} \dfrac{1}{2}\,\ln\big(u^2+v^2\big) \\ \operatorname{arc\,tg} \dfrac{v}{u} \end{bmatrix} \qquad \big((u,v)\in V\big).$$

Ez a függvény nyilván deriválható V-n és

$$\big(f^{-1}\big)'(u,v) = \begin{bmatrix} \dfrac{u}{u^2+v^2} & \dfrac{v}{u^2+v^2} \\ -\dfrac{v}{u^2+v^2} & \dfrac{u}{u^2+v^2} \end{bmatrix} \qquad \big((u,v)\in V\big),$$

így

$$(**) \qquad \big(f^{-1}\big)'\big(\tfrac{1}{2},\tfrac{\sqrt{3}}{2}\big) = \begin{bmatrix} \dfrac{1}{2} & \dfrac{\sqrt{3}}{2} \\ -\dfrac{\sqrt{3}}{2} & \dfrac{1}{2} \end{bmatrix}.$$

Az inverz függvény deriváltja az inverzfüggvény-tétel alapján. Mivel $b=f(a)$ és így $a = f^{-1}(b)$, ezért

$$\big(f^{-1}\big)'(b) = \big[f'\big(f^{-1}(b)\big)\big]^{-1} = [f'(a)]^{-1}.$$

A $(*)$ képletből következik, hogy

$$f'(a) = f'\big(0,\tfrac{\pi}{3}\big) = \begin{bmatrix} \dfrac{1}{2} & -\dfrac{\sqrt{3}}{2} \\ \dfrac{\sqrt{3}}{2} & \dfrac{1}{2} \end{bmatrix},$$

ezért

$$\left(f^{-1}\right)'(b) = \left(f^{-1}\right)'\left(\tfrac{1}{2}, \tfrac{\sqrt{3}}{2}\right) = \begin{bmatrix} \dfrac{1}{2} & -\dfrac{\sqrt{3}}{2} \\ \dfrac{\sqrt{3}}{2} & \dfrac{1}{2} \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} \dfrac{1}{2} & \dfrac{\sqrt{3}}{2} \\ -\dfrac{\sqrt{3}}{2} & \dfrac{1}{2} \end{bmatrix}.$$

Ez az eredmény megegyezik az explicit képlettel számolt $(**)$ deriválttal. $\blacksquare$

Megjegyzés. Érdemes megjegyezni (2×2)-es mátrix inverzére vonatkozó alábbi képletet: ha $ad - bc \neq 0$, akkor

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{ad - cb} \cdot \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}.$$

2. feladat. *Mutassuk meg, hogy az*

$$f(x, y) := \begin{bmatrix} -x + \sqrt{x^2 + y^2} \\ -x - \sqrt{x^2 + y^2} \end{bmatrix} \qquad \left((x, y) \in \mathbb{R}^2\right)$$

függvény lokálisan invertálható az $a := (4, 3)$ *pont egy környezetében, és határozzuk meg a lokális inverz deriváltját a* $b := f(a)$ *pontban.*

Megoldás. Az inverzfüggvény-tételt alkalmazzuk.

Az inverz függvény létezése. Az $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ függvény folytonosan deriválható az a pont egy $K(a)$ környezetében. Mivel minden $(x, y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ pontban

$$f'(x, y) = \begin{bmatrix} -1 + \dfrac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} & \dfrac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} \\ -1 - \dfrac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} & -\dfrac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} \end{bmatrix},$$

ezért

$$\det f'(4, 3) = \det \begin{bmatrix} -\dfrac{1}{5} & \dfrac{3}{5} \\ -\dfrac{9}{5} & -\dfrac{3}{5} \end{bmatrix} = \frac{6}{5} \neq 0,$$

így az f függvény valóban lokálisan invertálható az a pont egy környezetében.

Az inverz függvény deriváltja. A szóban forgó tétel szerint az f^{-1} lokális inverz függvény folytonosan deriválható a $b := f(a) = f(4, 3) = (1, -9)$ pontban (tehát $f^{-1}(b) = a = (4, 3)$), és a deriváltja

$$\left(f^{-1}\right)'(b) = \left[f'\left(f^{-1}(b)\right)\right]^{-1} = \left[f'(a)\right]^{-1} = \left[f'(4, 3)\right]^{-1} = \frac{5}{6} \cdot \begin{bmatrix} -\dfrac{3}{5} & -\dfrac{3}{5} \\ \dfrac{9}{5} & -\dfrac{1}{5} \end{bmatrix}. \quad \blacksquare$$

3. feladat. *Lássuk be, hogy az*

$$f(x,y,z) := \begin{bmatrix} 2x+y-z \\ 3x+4z \\ x-y+2z \end{bmatrix} \qquad \big((x,y,z)\in\mathbb{R}^3\big)$$

függvény lokálisan invertálható az $a := (1,1,1)$ *pont egy környezetében, és számoljuk ki a lokális inverz deriváltját a* $b := f(a)$ *pontban.*

Megoldás. Az inverzfüggvény-tételt alkalmazzuk.

Az inverz függvény létezése. Az $f:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$ függvény folytonosan deriválható az a pont egy $K(a)$ környezetében. Mivel minden $(x,y,z)\in\mathbb{R}^3$ pontban

$$f'(x,y,z) = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 3 & 0 & 4 \\ 1 & -1 & 2 \end{bmatrix},$$

ezért

$$\det f'(x,y,z) = (-1)\cdot(3\cdot2-1\cdot4)+(-1)\cdot(-1)\cdot(2\cdot4-3\cdot(-1)) = 9 \neq 0 \quad \big(\forall\,(x,y,z)\in\mathbb{R}^3\big).$$

Így az f függvény *minden* $(x,y,z)\in\mathbb{R}^3$ pont egy környezetében lokálisan invertálható.

Az inverz függvény deriváltja. A szóban forgó tétel szerint az f^{-1} lokális inverz függvény folytonosan deriválható a $b := f(a) = f(1,1,1) = \begin{bmatrix} 2 \\ 7 \\ 2 \end{bmatrix}$ pontban (tehát $f^{-1}(b) = a = (1,1,1)$), és a deriváltja

$$\big(f^{-1}\big)'(b) = \big[f'\big(f^{-1}(b)\big)\big]^{-1} = \big[f'(a)\big]^{-1} = \big[f'(1,1,1)\big]^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{4}{9} & -\frac{1}{9} & \frac{4}{9} \\ -\frac{2}{9} & \frac{5}{9} & -\frac{11}{9} \\ -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \end{bmatrix}. \quad \blacksquare$$

Megjegyzés. Vegyük észre, hogy a feladat állításánál *több* is igaz. Nevezetesen az, hogy ebben az esetben az $f:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$ függvény *globálisan* is invertálható; sőt a globális inverzet explicit képlettel is meg tudjuk adni.

Ez azért igaz, mert az

$$A := \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 3 & 0 & 4 \\ 1 & -1 & 2 \end{bmatrix}$$

jelöléssel

$$f(x,y,z) = A\cdot\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \qquad \big((x,y,z)\in\mathbb{R}^3\big)$$

egy *lineáris* függvény. Mivel $\det A = 9 \neq 0$, ezért az

$$A \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u \\ v \\ w \end{bmatrix}$$

lineáris egyenletrendszernek az (x, y, z) megoldása egyértelmű minden $\begin{bmatrix} u \\ v \\ w \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^3$ esetén. Az f^{-1} inverz függvény helyettesítési értékeit tetszőleges $(u, v, w) \in \mathbb{R}^3$ pontban ezek az (x, y, z) megoldások adják.

4. feladat. *Tekintsük az*

$$\begin{aligned} e^{x-1} + x \sin y &= u \\ e^{x-1} - x \cos y &= v \end{aligned}$$

egyenletrendszert, ahol $u, v \in \mathbb{R}$ *adott paraméterek és* x, y *az ismeretlenek. Ha* $\big(u_0, v_0\big) = \big(1 + \frac{\sqrt{2}}{2}, 1 - \frac{\sqrt{2}}{2}\big)$, *akkor* $\big(x_0, y_0\big) = \big(1, \frac{\pi}{4}\big)$ *megoldása az egyenletrendszernek.*

(a) *Mutassuk meg, hogy* $\big(u_0, v_0\big)$ *egy környezetében az egyenletrendszernek az* $\big(x_0, y_0\big)$ *pont egy alkalmas környezetében a megoldás egyértelmű és az* (u, v) *változó folytonosan deriválható függvénye.*

(b) *Számítsuk ki a szóban forgó függvény deriváltját az* $\big(u_0, v_0\big)$ *pontban.*

Megoldás. Az inverzfüggvény-tételt alkalmazzuk az

$$f(x, y) := \begin{bmatrix} e^{x-1} + x\ \sin y \\ e^{x-1} - x\ \cos y \end{bmatrix} \qquad \big((x, y) \in \mathbb{R}^2\big),$$

$$a := \big(1, \pi/4\big) = \big(x_0, y_0\big) \quad \text{és} \quad b := f(a) = f\big(1, \pi/4\big) = \begin{bmatrix} 1 + \frac{\sqrt{2}}{2} \\ 1 - \frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_0 \\ v_0 \end{bmatrix}$$

szereposztással.

(a) Mivel $f \in C^1\big(\mathbb{R}^2\big)$ és

$$f'(x, y) = \begin{bmatrix} e^{x-1} + \sin y & x\ \cos y \\ e^{x-1} - \cos y & x\ \sin y \end{bmatrix} \qquad \big((x, y) \in \mathbb{R}^2\big)$$

miatt

$$\det f'(a) = \det f'\big(1, \pi/4\big) = \det \begin{bmatrix} 1 + \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ 1 - \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix} = 1 \neq 0,$$

ezért az inverzfüggvény-tételből következik, hogy az f függvény lokálisan invertálható. Ez azt jelenti, hogy

$$\exists\, K(a) =: U \quad \text{és} \quad \exists\, K\big(f(a)\big) = K(b) =: V,$$

hogy az $f_{|U} : U \to V$ függvény bijekció, következésképpen invertálható; továbbá az $F := \big(f_{|U}\big)^{-1}$ lokális inverz függvény folytonosan deriválható V-n.

Ennek az egyenletrendszer megoldásával kapcsolatos értelmezése a következő. Tetszőleges $(u,v) \in V$ esetén az egyenletrendszernek az $(1,\pi/4)$ pont U környezetében pontosan egy megoldása van. A megoldások a lokális inverz helyettesítési értékei:

$$f^{-1}(u,v) = F(u,v) = \begin{bmatrix} F_1(u,v) \\ F_2(u,v) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \in U \quad \big((u,v) \in V\big).$$

Az $x = F_1(u,v)$ és az $y = F_2(u,v)$ $\big((u,v) \in V\big)$ megoldások u és v folytonosan deriválható függvényei.

(b) Az inverzfüggvény tétel azt is állítja, hogy az f^{-1} inverz függvény folytonosan deriválható V-n és

$$\big(f^{-1}\big)'(z) = \Big[f'\big(f^{-1}(z)\big)\Big]^{-1} \quad \big(z = (u,v) \in V\big).$$

A lokális inverz deriváltja az $(u_0, v_0) = b = f(a) = f(x_0, y_0) = f(1, \pi/4)$ pontban (most $f^{-1}(b) = a$)

$$\big(f^{-1}\big)'(b) = \Big[f'\big(f^{-1}(b)\big)\Big]^{-1} = \big[f'(a)\big]^{-1} = \big[f'\big(1,\pi/4\big)\big]^{-1} =$$
$$= \begin{bmatrix} 1 + \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ 1 - \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ -1 + \frac{\sqrt{2}}{2} & 1 + \frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix}. \blacksquare$$

Megjegyzés. Mivel $F \in C^1(V)$, azért az F függvény (u_0, v_0) ponthoz közeli $(u,v) = (u_0 + h_1, v_0 + h_2)$ pontjaiban a helyettesítési értékeire (vagyis az egyenletrendszer megoldásaira) az alábbi közelítő képlet érvényes:

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = F(u,v) \approx F(u_0, v_0) + F'(u_0, v_0) \cdot \begin{bmatrix} h_1 \\ h_2 \end{bmatrix}.$$

5. feladat. *Legyen*

$$f(x,y) := \ln x + y\, e^{y^2} + 1 \quad \big((x,y) \in \mathbb{R}^2\big).$$

Mutassuk meg, hogy az $a = 1/e$ pontnak van olyan $U = K(a)$ környezete és létezik olyan $\varphi : U \to \mathbb{R}$ folytonosan deriválható függvény, amelyre az

$$f\big(x, \varphi(x)\big) = 0 \quad \big(\forall\, x \in U\big)$$

egyenlőség teljesül. Számítsuk ki $\varphi'\big(1/e\big)$-t.

Megoldás. Az egyváltozós implicitfüggvény-tételt alkalmazzuk.

Először a feltételeket ellenőrizzük. Világos, hogy $f \in C^1\big(\mathbb{R}^2\big)$. Mivel

$$f(a,y) = f\big(\tfrac{1}{e}, y\big) = \ln\tfrac{1}{e} + y\,e^{y^2} + 1 = y\,e^{y^2} = 0 \quad\Longleftrightarrow\quad y = 0,$$

ezért a $b := 0$ választással $f(a,b) = 0$. A $\partial_2 f(a,b) \neq 0$ is igaz, mert

$$\partial_2 f(x,y) = e^{y^2} + y \cdot 2y\,e^{y^2} = \big(2y^2+1\big)e^{y^2} \quad \big(\forall\,(x,y) \in \mathbb{R}^2\big)$$

miatt $\partial_2 f(a,b) = \partial_2 f(1/e, 0) = 1 \neq 0$. Így a szóban forgó tétel mindegyik feltétele teljesül.

Következésképpen $\exists\, U := K\big(1/e\big)$ környezet és $\exists\,\varphi : U \to \mathbb{R}$ folytonosan deriválható függvény, amelyre az

$$f\big(x, \varphi(x)\big) = 0 \quad \big(\forall\, x \in U\big)$$

egyenlőség teljesül. A φ függvény folytonosan deriválható és

$$\varphi'(x) = -\,\frac{\partial_1 f\big(x,\varphi(x)\big)}{\partial_2 f\big(x,\varphi(x)\big)} = -\,\frac{\frac{1}{x}}{\big(2\,\varphi^2(x)+1\big)e^{\varphi^2(x)}} \quad \big(\forall\, x \in U\big).$$

Így $\varphi(1/e) = b = 0$ miatt

$$\varphi'\big(\tfrac{1}{e}\big) = -\,e. \ \blacksquare$$

Megjegyzés. A φ' deriváltat könnyen megkaphatjuk az összetett függvény deriválási szabályából. Ui. az $U \ni x \mapsto f\big(x,\varphi(x)\big)$ függvény azonosan 0, ezért a deriváltja is nulla. Így

$$\partial_1 f\big(x,\varphi(x)\big)\cdot 1 + \partial_2 f\big(x,\varphi(x)\big)\cdot\varphi'(x) = 0 \quad \big(x \in U\big),$$

amiből

$$\varphi'(x) = -\,\frac{\partial_1 f\big(x,\varphi(x)\big)}{\partial_2 f\big(x,\varphi(x)\big)} \quad \big(x \in U\big).$$

(Mivel az $f' = \big(\partial_1 f, \partial_2 f\big)$ függvény folytonos és $\partial_2 f(a,b) \neq 0$, ezért a nevező nem nulla.)

6. feladat. *Legyen*

$$f(x,y) := \ln\sqrt{x^2+y^2} - \operatorname{arc\,tg}\frac{y}{x} \quad \big((x,y) \in \mathbb{R}^2,\ x \neq 0\big).$$

Mutassuk meg, hogy az $(a,b) = (1,0)$ pont egy környezetében az $f(x,y) = 0$ egyenlettel megadott síkbeli halmaz egy folytonosan deriválható $\varphi : K(a) \to \mathbb{R}$ függvény grafikonja. Számítsuk ki $\varphi'(1)$-et, és írjuk fel a szóban forgó görbe $(1,0)$ pontbeli érintő egyenesének az egyenletét.

Megoldás. Jelölje

$$H := \big\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ \big|\ f(x,y) = 0\big\}$$

az $f(x,y) = 0$ egyenlettel megadott síkbeli halmazt.

Az egyváltozós implicitfüggvény-tételt alkalmazzuk.

Először a feltételeket ellenőrizzük. A $P(1,0)$ pont valóban eleme H-nak, mert

$$f(1,0) = \ln\sqrt{1^2+0^2} - \operatorname{arc\,tg}\frac{0}{1} = \ln 1 - \operatorname{arc\,tg} 0 = 0.$$

Világos, hogy $f \in C^1\big(\mathcal{D}_f\big)$. Mivel minden $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, $x \neq 0$ pontban

$$\begin{aligned}\partial_2 f(x,y) &= \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} \cdot \frac{2y}{2\sqrt{x^2+y^2}} - \frac{1}{1+\left(\frac{y}{x}\right)^2} \cdot \frac{1}{x} = \\ &= \frac{y}{x^2+y^2} - \frac{x}{x^2+y^2} = \frac{y-x}{x^2+y^2},\end{aligned}$$

ezért $\partial_2 f(1,0) = -1 \neq 0$ is igaz. Így a szóban forgó tétel mindegyik feltétele teljesül.

Következésképpen $\exists\, U := K(1)$ és $\exists\, \varphi : U \to \mathbb{R}$ folytonosan deriválható függvény, amelyre az

$$f\big(x,\varphi(x)\big) = 0 \quad \big(\forall\, x \in U\big)$$

egyenlőség teljesül. A H halmaz tehát a $P(1,0)$ pont egy környezetében a φ függvény grafikonja. A tétel állítása szerint a φ függvény folytonosan deriválható. Mivel minden $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, $x \neq 0$ pontban

$$\begin{aligned}\partial_1 f(x,y) &= \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} \cdot \frac{2x}{2\sqrt{x^2+y^2}} - \frac{1}{1+\left(\frac{y}{x}\right)^2} \cdot \left(-\frac{y}{x^2}\right) = \\ &= \frac{x}{x^2+y^2} + \frac{y}{x^2+y^2} = \frac{x+y}{x^2+y^2},\end{aligned}$$

ezért

$$\varphi'(x) = -\frac{\partial_1 f\big(x,\varphi(x)\big)}{\partial_2 f\big(x,\varphi(x)\big)} = -\frac{x+\varphi(x)}{\varphi(x)-x} \quad \big(\forall\, x \in U\big).$$

Így $\varphi(1) = b = 0$ miatt

$$\varphi'(1) = 1.$$

Az (x_0,y_0) ponton átmenő, m meredekségű egyenes egyenlete

$$y - y_0 = m\,(x - x_0).$$

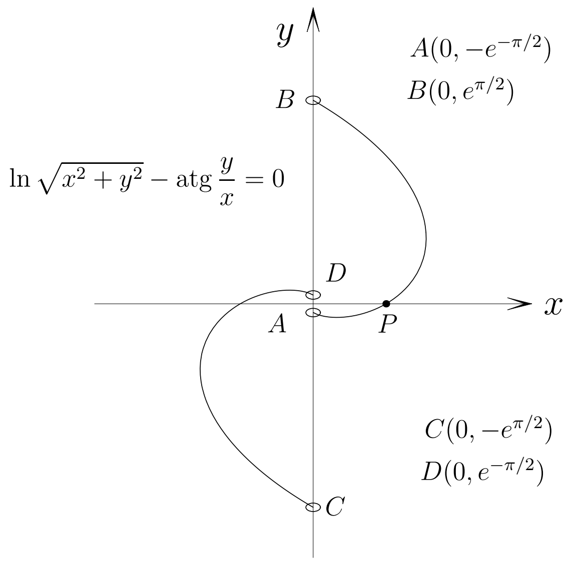
Mivel $\big(x_0,y_0\big) = \big(1,0\big)$ és $m = \varphi'(1) = 1$, ezért a kérdezett érintő egyenes egyenlete

$$y = x - 1. \ \blacksquare$$

Megjegyzés. Az alábbi ábra szemlélteti a

$$H := \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; f(x,y) := \ln\sqrt{x^2+y^2} - \operatorname{arc\,tg}\frac{y}{x} = 0\right\}$$

halmazt.



Ha $(x,y) \in H$, akkor $(-x,-y)$, is eleme H-nak, ezért H az origóra szimmetrikus.

Az $x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$ felhasználásával kapjuk pl. azt, hogy az A pont koordinátái $\left(0, -e^{-\pi/2}\right)$.

7. feladat. *Tekintsük az*

$$y^2 + 5x = x\,e^{x\,(y-2)}$$

egyenletet. Ennek egy megoldása $x = -1$ és $y = 2$.

(a) *Bizonyítsuk be, hogy az egyenletből y kifejezhető az x változó implicit függvényeként a $(-1,2)$ pont egy környezetében.*

(b) *Határozzuk meg a függvény deriváltját az $x = -1$ pontban.*

Megoldás.

(a) Legyen

$$f(x,y) := y^2 + 5x - x\,e^{x\,(y-2)} \quad \left((x,y) \in \mathbb{R}^2\right)$$

és $(a,b) := (-1,2)$.

Az egyváltozós implicitfüggvény-tételt alkalmazzuk.

Először a feltételeket ellenőrizzük. Világos, hogy $f \in C^1\left(\mathbb{R}^2\right)$ és

$$f(a,b) = f(-1,2) = 2^2 + 5\cdot(-1) - (-1)\cdot e^{(-1)\cdot 0} = 0.$$

Mivel minden $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ pontban

$$\partial_2 f(x,y) = 2y - x\cdot x\,e^{x\,(y-2)} = 2y - x^2 e^{x(y-2)}, \quad \left((x,y) \in \mathbb{R}^2\right)$$

ezért $\partial_2 f(-1,2) = 2\cdot 2 - (-1)^2 \cdot e^0 = 3 \neq 0$ is igaz. Így a szóban forgó tétel mindegyik feltétele teljesül.

Következésképpen $\exists\, U := K(-1)$ és $\exists\, \varphi : U \to \mathbb{R}$ folytonosan deriválható függvény, amelyre az

$$f\big(x, \varphi(x)\big) = 0 \quad \big(\forall\, x \in U\big)$$

egyenlőség teljesül. Ez pedig azt jelenti, hogy $\forall\, y \in V := \mathcal{R}_\varphi = K(2)$ (paraméter) esetén az $f(x,y) = 0$ az $f(x,y) = 0$ egyenletből y kifejezhető az x változó implicit alakban negadott φ függvényeként.

(b) Az implicitfüggvény-tétel állítása szerint a φ függvény folytonosan deriválható. Mivel minden $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ pontban

$$\partial_1 f(x,y) = 5 - e^{x\,(y-2)} - x \cdot (y-2)\, e^{x\,(y-2)} = 5 - \big(xy - 2x + 1\big) e^{x\,(y-2)},$$

ezért

$$\varphi'(x) = -\,\frac{\partial_1 f\big(x, \varphi(x)\big)}{\partial_2 f\big(x, \varphi(x)\big)} = -\,\frac{5 - \big(x \cdot \varphi(x) - 2x + 1\big) e^{x\,(\varphi(x)-2)}}{2\varphi(x) - x^2 e^{x\,(\varphi(x)-2)}} \quad \big(\forall\, x \in U\big).$$

Így $\varphi(-1) = b = 2$ miatt

$$\varphi'(-1) = -\,\frac{5 - (-2 + 2 + 1) \cdot e^0}{4 - 1^2 \cdot e^0} = -\,\frac{4}{3}. \blacksquare$$

Megjegyzés. Az alábbi ábra szemlélteti a

$$H := \Big\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \;\Big|\; y^2 + 5x - x\, e^{x\,(y-2)} = 0\Big\}$$

halmazt.