Logika - Bizonyításelmélet

$$(A1)$$
 $A\supset (B\supset A)$

$$(A2) (A \supset (B \supset C)) \supset ((A \supset B) \supset (A \supset C))$$

$$(A3) (\neg A \supset B) \supset ((\neg A \supset \neg B) \supset A)$$

$$(A3)$$
 $(\neg A \supset B) \supset ((\neg A \supset \neg B) \supset A)$

Levezetési szabály (modus ponens)

$$(MP) \frac{A ; (A \supset B)}{B}$$

$$vagy$$

$$\{A, A \supset B\} \vdash B$$

 $A\supset (B\supset A)$ (A1)

(A2) $(A\supset (B\supset C))\supset ((A\supset B)\supset (A\supset C))$

 $(\neg A \supset B) \supset ((\neg A \supset \neg B) \supset A)$ (A3)

Levezetési szabály (modus ponens)

 $\{A\supset B,A\}\vdash B$

Egy egyszerű levezetés

$$\{A\} \vdash B \supset A$$

- $\begin{array}{lll} 1. & A\supset (B\supset A) & \text{[A1]} \\ 2. & A & \text{[hip]} \\ 3. & B\supset A & \text{[MP(1,2)]} \end{array}$

Helyesség (Soundness)

Tetszőleges A esetén,

 $Ha \vdash A$, akkor $\models A$.

Teljesség (Completeness)

Tetszőleges A esetén,

$$\mathsf{Ha} \models A$$
, $\mathsf{akkor} \vdash A$.

- (A1)
- $A\supset (B\supset A)$ $(A \supset (B \supset C)) \supset ((A \supset B) \supset (A \supset C))$ $(\neg A \supset B) \supset ((\neg A \supset \neg B) \supset A)$ (A2)
- (A3)

Levezetési szabály (modus ponens)

$$\{A\supset B,A\}\vdash B$$

0. Feladat

- 1. $A \supset B$
- 2. *B* ⊃ *C*
- $K. A \supset C$

Alapvető axiomasémák $A\supset (B\supset A)$

- (A1)
- (A2) $(A\supset (B\supset C))\supset ((A\supset B)\supset (A\supset C))$
- (A3) $(\neg A \supset B) \supset ((\neg A \supset \neg B) \supset A)$

Levezetési szabály (modus ponens)

$$\{A\supset B,A\}\vdash B$$

0. Feladat

Mutassuk meg, hogy:

- 1. $A \supset B$
- 2. *B* ⊃ *C*
- $K. A \supset C$

másképp:

$$\{A\supset B, B\supset C\}\models A\supset C$$

- (A1)
- $A\supset (B\supset A)$ (A2) $(A\supset (B\supset C))\supset ((A\supset B)\supset (A\supset C))$
- $(\neg A \supset B) \supset ((\neg A \supset \neg B) \supset A)$ (A3)

Levezetési szabály (modus ponens)

$$\{A\supset B,A\}\vdash B$$

0. Feladat

Mutassuk meg, hogy:

- 1. $A \supset B$
- 2. $B \supset C$
- $K. A \supset C$

másképp:

$${A\supset B, B\supset C} \models A\supset C$$

A teljesség miatt, tehát:

$${A\supset B, B\supset C}\vdash A\supset C$$

- (A1)
- $A\supset (B\supset A)$ $(A\supset (B\supset C))\supset ((A\supset B)\supset (A\supset C))$ $(\neg A\supset B)\supset ((\neg A\supset \neg B)\supset A)$ (A2)
- (A3)

Levezetési szabály (modus ponens)

 $\{A\supset B,A\}\vdash B$

0. Feladat

- (A1)
- $\begin{array}{l} A\supset (B\supset A)\\ (A\supset (B\supset C))\supset ((A\supset B)\supset (A\supset C))\\ (\neg A\supset B)\supset ((\neg A\supset \neg B)\supset A) \end{array}$ (A2)
- (A3)

Levezetési szabály (modus ponens)

$$\{A\supset B,A\}\vdash B$$

0. Feladat

$$\{A\supset B, B\supset C\}\vdash A\supset C$$

- $(A1) \qquad A \supset (B \supset A)$ $(A2) \qquad (A \supset (B \supset C)$
- (A2) $(A\supset (B\supset C))\supset ((A\supset B)\supset (A\supset C))$
- $(A3) \qquad (\neg A \supset B) \supset ((\neg A \supset \neg B) \supset A)$

Levezetési szabály (modus ponens)

$$\{A\supset B,A\}\vdash B$$

0. Feladat

$${A\supset B, B\supset C}\vdash A\supset C$$

- 1. $(A\supset (B\supset C))\supset ((A\supset B)\supset (A\supset C))$
- 2. $(B\supset C)\supset (A\supset (B\supset C))$
- 3. $B\supset C$
- 4. $(A\supset (B\supset C))$
- 5. $(A \supset B) \supset (A \supset C)$
- 6. $A \supset B$
- 7. *A* ⊃ *C*

- $(A1) \qquad A \supset (B \supset A)$ $(A2) \qquad (A \supset (B \supset C)$
- (A2) $(A\supset (B\supset C))\supset ((A\supset B)\supset (A\supset C))$
- $(A3) \qquad (\neg A \supset B) \supset ((\neg A \supset \neg B) \supset A)$

Levezetési szabály (modus ponens)

$$\{A\supset B,A\}\vdash B$$

0. Feladat

$${A\supset B, B\supset C}\vdash A\supset C$$

- 1. $(A \supset (B \supset C)) \supset ((A \supset B) \supset (A \supset C))$ [A2]
- 2. $(B \supset C) \supset (A \supset (B \supset C))$
- 3. $B\supset C$
- 4. $(A\supset (B\supset C))$
- 5. $(A \supset B) \supset (A \supset C)$
- 6. $A \supset B$
- 7. *A* ⊃ *C*

- $(A1) \qquad A \supset (B \supset A)$
- $(A2) \qquad (A\supset (B\supset C))\supset ((A\supset B)\supset (A\supset C))$
- $(A3) \qquad (\neg A \supset B) \supset ((\neg A \supset \neg B) \supset A)$

Levezetési szabály (modus ponens)

$$\{A\supset B,A\}\vdash B$$

0. Feladat

$$\{A\supset B, B\supset C\}\vdash A\supset C$$

- 1. $(A \supset (B \supset C)) \supset ((A \supset B) \supset (A \supset C))$ [A2]
- 2. $(B \supset C) \supset (A \supset (B \supset C))$ [A1, ahol $A||B \supset C$, B||A]
- 3. $B \supset C$
- 4. $(A\supset (B\supset C))$
- 5. $(A \supset B) \supset (A \supset C)$
- 6. $A \supset B$
- 7. *A* ⊃ *C*

- (A1) $A\supset (B\supset A)$
- (A2) $(A\supset (B\supset C))\supset ((A\supset B)\supset (A\supset C))$
- (A3) $(\neg A \supset B) \supset ((\neg A) \supset \neg B) \supset A)$

Levezetési szabály (modus ponens)

$$\{A\supset B,A\}\vdash B$$

0. Feladat

$${A\supset B, B\supset C}\vdash A\supset C$$

- 1. $(A \supset (B \supset C)) \supset ((A \supset B) \supset (A \supset C))$ [A2]
- [A1, ahol $A||B \supset C$, B||A] 2. $(B\supset C)\supset (A\supset (B\supset C))$ [hip]
- 3. $B \supset C$
- 4. $(A\supset (B\supset C))$
- 5. $(A \supset B) \supset (A \supset C)$
- 6. $A \supset B$
- $7 A \supset C$

- (A1) $A\supset (B\supset A)$
- (A2) $(A\supset (B\supset C))\supset ((A\supset B)\supset (A\supset C))$
- (A3) $(\neg A \supset B) \supset ((\neg A) \supset \neg B) \supset A)$

Levezetési szabály (modus ponens)

$$\{A\supset B,A\}\vdash B$$

0. Feladat

$${A\supset B, B\supset C}\vdash A\supset C$$

- 1. $(A \supset (B \supset C)) \supset ((A \supset B) \supset (A \supset C))$ [A2]
- 2. $(B\supset C)\supset (A\supset (B\supset C))$ [A1, ahol $A||B\supset C$, B||A]
- 3. $B \supset C$ [hip]
- 4. $(A\supset (B\supset C))$ [MP(2,3)]
- 5. $(A \supset B) \supset (A \supset C)$
- 6. $A \supset B$
- $7 A \supset C$

- (A1) $A\supset (B\supset A)$
- (A2)
 - $(A\supset (B\supset C))\supset ((A\supset B)\supset (A\supset C))$
- $(\neg A \supset B) \supset ((\neg A \supset \neg B) \supset A)$ (A3)

Levezetési szabály (modus ponens)

$$\{A\supset B,A\}\vdash B$$

0. Feladat

$${A \supset B, B \supset C} \vdash A \supset C$$

 $(A \supset C)$ [A2]

- 1. $(A \supset (B \supset C)) \supset ((A \supset B) \supset (A \supset C))$
- 2. $(B\supset C)\supset (A\supset (B\supset C))$ [A1, ahol $A||B \supset C$, B||A] [hip]
- 3. $B \supset C$
- 4. $(A\supset (B\supset C))$ [MP(2,3)]
- 5. $(A \supset B) \supset (A \supset C)$
 - [MP(1,4)]

- 6. $A \supset B$
- $7 A \supset C$

- (A1) $A\supset (B\supset A)$
- (A2) $(A\supset (B\supset C))\supset ((A\supset B)\supset (A\supset C))$
- (A3) $(\neg A \supset B) \supset ((\neg A \supset \neg B) \supset A)$

Levezetési szabály (modus ponens)

$$\{A\supset B,A\}\vdash B$$

0. Feladat

$$\{A\supset B, B\supset C\}\vdash A\supset C$$

- 1. $(A \supset (B \supset C)) \supset ((A \supset B) \supset (A \supset C))$
- 2. $(B\supset C)\supset (A\supset (B\supset C))$
- 3. $B \supset C$
- 4. $(A\supset (B\supset C))$
- 5. $(A \supset B) \supset (A \supset C)$
- 6. $A \supset B$
- $7 A \supset C$

- [A2]
 - [A1, ahol $A||B \supset C$, B||A]
 - [hip]
 - [MP(2,3)]
 - [MP(1,4)]
 - [hip]

- (A1) $A\supset (B\supset A)$ (A2)
 - $(A\supset (B\supset C))\supset ((A\supset B)\supset (A\supset C))$
- $(\neg A \supset B) \supset ((\neg A \supset \neg B) \supset A)$ (A3)

Levezetési szabály (modus ponens)

$$\{A\supset B,A\}\vdash B$$

0. Feladat

$$\{A\supset B, B\supset C\}\vdash A\supset C$$

1.
$$(A\supset (B\supset C))\supset ((A\supset B)\supset (A\supset C))$$

- 2. $(B\supset C)\supset (A\supset (B\supset C))$
- 3. $B \supset C$
- 4. $(A\supset (B\supset C))$
- 5. $(A \supset B) \supset (A \supset C)$
- 6. $A \supset B$
- $7 A \supset C$

- - [A2]
 - [A1, ahol $A||B \supset C$, B||A]
 - [hip]
 - [MP(2,3)]
 - [MP(1,4)]
 - [hip]
 - [MP(5,6)]

- (A1)
- $\begin{array}{l} A\supset (B\supset A)\\ (A\supset (B\supset C))\supset ((A\supset B)\supset (A\supset C))\\ (\neg A\supset B)\supset ((\neg A\supset \neg B)\supset A) \end{array}$ (A2)
- (A3)

Levezetési szabály (modus ponens)

$$\{A\supset B,A\}\vdash B$$

1. Feladat

$$\{A\supset (B\supset C),B\}\vdash A\supset C$$

- (A1) $A\supset (B\supset A)$
- (A2) $(A\supset (B\supset C))\supset ((A\supset B)\supset (A\supset C))$
- (A3) $(\neg A \supset B) \supset ((\neg A \supset \neg B) \supset A)$

Levezetési szabály (modus ponens)

$$\{A\supset B,A\}\vdash B$$

1. Feladat

$${A\supset (B\supset C), B}\vdash A\supset C$$

- 1. $(A \supset (B \supset C)) \supset ((A \supset B) \supset (A \supset C))$
- 2. $A\supset (B\supset C)$
- 3. $(A \supset B) \supset (A \supset C)$
- 4. $B \supset (A \supset B)$
- 5. B
- 6. $(A \supset B)$
- 7. $A\supset C$

- $(A1) \qquad A \supset (B \supset A)$ $(A2) \qquad (A \supset (B \supset C)$
 - 2) $(A \supset (B \supset C)) \supset ((A \supset B) \supset (A \supset C))$
- $(A3) \qquad (\neg A \supset B) \supset ((\neg A \supset \neg B) \supset A)$

Levezetési szabály (modus ponens)

$$\{A\supset B,A\}\vdash B$$

1. Feladat

$${A\supset (B\supset C), B}\vdash A\supset C$$

- 1. $(A\supset (B\supset C))\supset ((A\supset B)\supset (A\supset C))$ [A2]
- 2. $A\supset (B\supset C)$
- 3. $(A \supset B) \supset (A \supset C)$
- 4. $B \supset (A \supset B)$
- 5. B
- 6. $(A \supset B)$
- 7. $A\supset C$

- (A1) $A\supset (B\supset A)$
- (A2)
 - $(A\supset (B\supset C))\supset ((A\supset B)\supset (A\supset C))$
- (A3) $(\neg A \supset B) \supset ((\neg A \supset \neg B) \supset A)$

Levezetési szabály (modus ponens)

$$\{A\supset B,A\}\vdash B$$

1. Feladat

$$\{A\supset (B\supset C), B\}\vdash A\supset C$$

- 1. $(A \supset (B \supset C)) \supset ((A \supset B) \supset (A \supset C))$ [A2]
 - [hip]

- 2. $A\supset (B\supset C)$ 3. $(A \supset B) \supset (A \supset C)$
- 4. $B \supset (A \supset B)$
- 5. B
- 6. $(A \supset B)$
- 7. $A\supset C$

- (A1) $A\supset (B\supset A)$
- (A2) $(A\supset (B\supset C))\supset ((A\supset B)\supset (A\supset C))$
- (A3) $(\neg A \supset B) \supset ((\neg A \supset \neg B) \supset A)$

Levezetési szabály (modus ponens)

$$\{A\supset B,A\}\vdash B$$

1. Feladat

Mutassuk meg, hogy:

$${A\supset (B\supset C), B}\vdash A\supset C$$

- 1. $(A \supset (B \supset C)) \supset ((A \supset B) \supset (A \supset C))$ [A2]
- 2. $A\supset (B\supset C)$

[hip]

3. $(A \supset B) \supset (A \supset C)$

[MP(1,2)

- 4. $B \supset (A \supset B)$
- 5. B
- 6. $(A \supset B)$
- 7. $A\supset C$

- (A1) $A\supset (B\supset A)$
- (A2)
 - $(A\supset (B\supset C))\supset ((A\supset B)\supset (A\supset C))$
- (A3) $(\neg A \supset B) \supset ((\neg A \supset \neg B) \supset A)$

Levezetési szabály (modus ponens)

$$\{A\supset B,A\}\vdash B$$

1. Feladat

Mutassuk meg, hogy:

$${A\supset (B\supset C), B}\vdash A\supset C$$

 ${A\supset C}$

[A1, ahol A||B, B||A]

- 1. $(A \supset (B \supset C)) \supset ((A \supset B) \supset (A \supset C))$
- 2. $A\supset (B\supset C)$
- [hip] 3. $(A \supset B) \supset (A \supset C)$ [MP(1,2)]
- 4. $B \supset (A \supset B)$
- 5. B
- 6. $(A \supset B)$
- $7 A \supset C$

- (A1) $A\supset (B\supset A)$
- (A2) $(A\supset (B\supset C))\supset ((A\supset B)\supset (A\supset C))$
- (A3) $(\neg A \supset B) \supset ((\neg A \supset \neg B) \supset A)$

Levezetési szabály (modus ponens)

$$\{A\supset B,A\}\vdash B$$

1. Feladat

$${A\supset (B\supset C), B}\vdash A\supset C$$

- 1. $(A \supset (B \supset C)) \supset ((A \supset B) \supset (A \supset C))$
- 2. $A\supset (B\supset C)$
- 3. $(A \supset B) \supset (A \supset C)$
- 4. $B \supset (A \supset B)$
- 5. B
- 6. $(A \supset B)$
- $7 A \supset C$

- - [A2] [hip]
 - [MP(1,2)]
 - [A1, ahol A||B, B||A]
 - [hip]

- (A1) $A\supset (B\supset A)$
- (A2)
 - $(A\supset (B\supset C))\supset ((A\supset B)\supset (A\supset C))$
- (A3) $(\neg A \supset B) \supset ((\neg A \supset \neg B) \supset A)$

Levezetési szabály (modus ponens)

$$\{A\supset B,A\}\vdash B$$

1. Feladat

$${A\supset (B\supset C), B}\vdash A\supset C$$

- 1. $(A \supset (B \supset C)) \supset ((A \supset B) \supset (A \supset C))$
- 2. $A\supset (B\supset C)$
- 3. $(A \supset B) \supset (A \supset C)$
- 4. $B \supset (A \supset B)$
- 5. B
- 6. $(A \supset B)$
- $7 A \supset C$

- - [A2]
 - [hip]
 - [MP(1,2)][A1, ahol A||B, B||A]
 - [hip]
 - [MP(4,5)]

- (A1) $A\supset (B\supset A)$
- (A2)
 - $(A\supset (B\supset C))\supset ((A\supset B)\supset (A\supset C))$
- (A3) $(\neg A \supset B) \supset ((\neg A \supset \neg B) \supset A)$

Levezetési szabály (modus ponens)

$$\{A\supset B,A\}\vdash B$$

1. Feladat

$${A\supset (B\supset C), B}\vdash A\supset C$$

- 1. $(A \supset (B \supset C)) \supset ((A \supset B) \supset (A \supset C))$
- 2. $A\supset (B\supset C)$
- 3. $(A \supset B) \supset (A \supset C)$
- 4. $B \supset (A \supset B)$
- 5. B
- 6. $(A \supset B)$
- $7 A \supset C$

- [A2] [hip]
 - [MP(1,2)
 - [A1, ahol A||B, B||A]
 - [hip]
 - [MP(4,5)]
 - [MP(3,6)]

- (A1) $A\supset (B\supset A)$
- $\begin{array}{ll} (A2) & (A\supset (B\supset C))\supset ((A\supset B)\supset (A\supset C))\\ (A3) & (\neg A\supset B)\supset ((\neg A\supset \neg B)\supset A) \end{array}$
- Levezetési szabály (modus ponens)

$$\{A\supset B,A\}\vdash B$$

Dedukciós tétel

 $\{A_1,A_2,...,A_n\} \vdash B$ akkor és csak akkor, ha $\{A_1,A_2,...,A_{n-1}\} \vdash A_n \supset B$

$$(A1) \qquad A\supset (B\supset A)$$

$$(A2) \qquad (A\supset (B\supset C))\supset ((A\supset B)\supset (A\supset C))$$

$$(A3) \qquad (\neg A\supset B)\supset ((\neg A\supset \neg B)\supset A)$$

Levezetési szabály (modus ponens)

$$\{A\supset B,A\}\vdash B$$

Dedukciós tétel

$$\{A_1,A_2,...,A_n\} \vdash B$$
 akkor és csak akkor, ha $\{A_1,A_2,...,A_{n-1}\} \vdash A_n \supset B$

$$\{A \supset B, B \supset C\} \vdash A \supset C$$

$$\downarrow D$$

$$\{A \supset B, B \supset C, A\} \vdash C$$



$$(A1) \qquad A \supset (B \supset A)$$

$$(A2) \qquad (A\supset (B\supset C))\supset ((A\supset B)\supset (A\supset C))$$

$$(A3) \qquad (\neg A\supset B)\supset ((\neg A\supset \neg B)\supset A)$$

Levezetési szabály (modus ponens)

$$\{A\supset B,A\}\vdash B$$

Dedukciós tétel

$$\{A_1,A_2,...,A_n\} \vdash B$$
 akkor és csak akkor, ha $\{A_1,A_2,...,A_{n-1}\} \vdash A_n \supset B$

$$\{A \supset B, B \supset C\} \vdash A \supset C$$

$$\downarrow \!\!\!\downarrow D$$

$$\{A \supset B, B \supset C, A\} \vdash C$$

1.
$$A \supset B$$
 [hip]

$$(A1) \qquad A \supset (B \supset A)$$

$$(A2) \qquad (A\supset (B\supset C))\supset ((A\supset B)\supset (A\supset C))$$

$$(A3) \qquad (\neg A\supset B)\supset ((\neg A\supset \neg B)\supset A)$$

Levezetési szabály (modus ponens)

$$\{A\supset B,A\}\vdash B$$

Dedukciós tétel

$$\{A_1,A_2,...,A_n\} \vdash B$$
 akkor és csak akkor, ha $\{A_1,A_2,...,A_{n-1}\} \vdash A_n \supset B$

$$\{A \supset B, B \supset C\} \vdash A \supset C \qquad \qquad \downarrow D \{A \supset B, B \supset C, A\} \vdash C$$

1.
$$A \supset B$$
 [hip]

2.
$$B \supset C$$
 [hip]

$$(A1) \qquad A \supset (B \supset A)$$

$$(A2) \qquad (A\supset (B\supset C))\supset ((A\supset B)\supset (A\supset C))$$

$$(A3) \qquad (\neg A\supset B)\supset ((\neg A\supset \neg B)\supset A)$$

Levezetési szabály (modus ponens)

$$\{A\supset B,A\}\vdash B$$

Dedukciós tétel

$$\{A_1,A_2,...,A_n\} \vdash B$$
 akkor és csak akkor, ha $\{A_1,A_2,...,A_{n-1}\} \vdash A_n \supset B$

$$\{A \supset B, B \supset C\} \vdash A \supset C \downarrow D \{A \supset B, B \supset C, A\} \vdash C$$

- 1. $A \supset B$ [hip]
- 2. $B \supset C$ [hip]
- 3. A [hip]

$$(A1) \qquad A \supset (B \supset A)$$

$$(A2) \qquad (A\supset (B\supset C))\supset ((A\supset B)\supset (A\supset C))$$

$$(A3) \qquad (\neg A\supset B)\supset ((\neg A\supset \neg B)\supset A)$$

Levezetési szabály (modus ponens)

$$\{A\supset B,A\}\vdash B$$

Dedukciós tétel

$$\{A_1,A_2,...,A_n\} \vdash B$$
 akkor és csak akkor, ha $\{A_1,A_2,...,A_{n-1}\} \vdash A_n \supset B$

$$\{A \supset B, B \supset C\} \vdash A \supset C \qquad \qquad \downarrow D \{A \supset B, B \supset C, A\} \vdash C$$

- 1. $A \supset B$ [hip] 2. *B* ⊃ *C* [hip] 3. A [hip] 4. *B* [MP(

- [MP(1,3)]

 $\begin{array}{ll} (A1) & A\supset (B\supset A) \\ (A2) & (A\supset (B\supset C))\supset ((A\supset B)\supset (A\supset C)) \\ (A3) & (\neg A\supset B)\supset ((\neg A\supset \neg B)\supset A) \end{array}$

Levezetési szabály (modus ponens)

$$\{A\supset B,A\}\vdash B$$

Dedukciós tétel

$$\{A_1,A_2,...,A_n\} \vdash B$$
 akkor és csak akkor, ha $\{A_1,A_2,...,A_{n-1}\} \vdash A_n \supset B$

2. Feladat

$$\{A \supset B, B \supset C\} \vdash A \supset C$$

$$\downarrow \!\!\!\downarrow D$$

$$\{A \supset B, B \supset C, A\} \vdash C$$

1. $A \supset B$ [hip] 2. $B \supset C$ [hip] 3. A [hip] 4. B [MP(1,3)] 5. C [MP(2,4)]

Használható axiomasémák

- $A\supset (B\supset A)$ (A1)
- (A2) $(A \supset (B \supset C)) \supset ((A \supset B) \supset (A \supset C))$
- $(\neg A \supset B) \supset ((\neg A \supset \neg B) \supset A)$ (A3)
- (B1) $A \supset A$

Levezetési szabály (modus ponens)

$$\{A\supset B,A\} \vdash_{\mathsf{0}} B$$

3. Feladat

Mutassuk meg, hogy $\vdash \neg \neg A \supset A$ bizonyítható.

$$\vdash \neg \neg A \supset A$$

Használható axiomasémák

- $A\supset (B\supset A)$ (A1)
- (A2)
- $(A\supset (B\supset C))\supset ((A\supset B)\supset (A\supset C))$ $(\neg A \supset B) \supset ((\neg A \supset \neg B) \supset A)$ (A3)
- (B1) $A \supset A$

Levezetési szabály (modus ponens)

$$\{A\supset B,A\} \,\vdash_0 B$$

3. Feladat

Mutassuk meg, hogy $\vdash \neg \neg A \supset A$ bizonyítható.

$$\vdash \neg \neg A \supset A$$

$$\downarrow D$$

$$\{\neg \neg A\} \vdash A$$

- 1. $(\neg A \supset \neg A) \supset ((\neg A \supset \neg \neg A) \supset A)$
- 2. $\neg A \supset \neg A$
- 3. $(\neg A \supset \neg \neg A) \supset A$
- 4. $\neg \neg A \supset (\neg A \supset \neg \neg A)$
- 5. ¬¬*A*
- 6. $\neg A \supset \neg \neg A$

Használható axiomasémák

- $(A1) \qquad A\supset (B\supset A)$
- $(A2) \qquad (A\supset (B\supset A)$ $(A2) \qquad (A\supset (B\supset C))\supset ((A\supset B)\supset (A\supset C))$
- $(A3) \qquad (\neg A \supset B) \supset ((\neg A \supset \neg B) \supset A)$
- (B1) $A \supset A$

Levezetési szabály (modus ponens)

$$\{A\supset B,A\} \, \vdash_0 B$$

3. Feladat

Mutassuk meg, hogy $\vdash \neg \neg A \supset A$ bizonyítható.

$$\vdash \neg \neg A \supset A$$

$$\downarrow D$$

$$\{\neg \neg A\} \vdash A$$

- 1. $(\neg A \supset \neg A) \supset ((\neg A \supset \neg \neg A) \supset A)$ [A3; $A||A; B||\neg A$]
- 2. $\neg A \supset \neg A$
- 3. $(\neg A \supset \neg \neg A) \supset A$
- 4. $\neg \neg A \supset (\neg A \supset \neg \neg A)$
- 5. ¬¬*A*
- 6. $\neg A \supset \neg \neg A$
- 7. A

- (A1) $A\supset (B\supset A)$
- (A2)
- $(A\supset (B\supset C))\supset ((A\supset B)\supset (A\supset C))$ $(\neg A \supset B) \supset ((\neg A \supset \neg B) \supset A)$ (A3)
- (B1) $A \supset A$

Levezetési szabály (modus ponens)

$$\{A\supset B,A\} \, \vdash_0 B$$

3. Feladat

Mutassuk meg, hogy $\vdash \neg \neg A \supset A$ bizonyítható.

$$\vdash \neg \neg A \supset A$$

$$\downarrow D$$

$$\{\neg \neg A\} \vdash A$$

[B1: $A | | \neg A|$

- 1. $(\neg A \supset \neg A) \supset ((\neg A \supset \neg \neg A) \supset A)$ [A3; $A||A; B||\neg A$]
- 2. $\neg A \supset \neg A$
- 3. $(\neg A \supset \neg \neg A) \supset A$
- 4. $\neg \neg A \supset (\neg A \supset \neg \neg A)$
- 5. ¬¬*A*
- 6. $\neg A \supset \neg \neg A$

- $(A1) \qquad A\supset (B\supset A)$
- $(A2) \qquad (A\supset (B\supset A)$ $(A2) \qquad (A\supset (B\supset C))\supset ((A\supset B)\supset (A\supset C))$
- $(A3) \qquad (\neg A \supset B) \supset ((\neg A \supset \neg B) \supset A)$
- (B1) $A \supset A$

Levezetési szabály (modus ponens)

$$\{A\supset B,A\} \, \vdash_0 B$$

3. Feladat

$$\vdash \neg \neg A \supset A$$

$$\downarrow D$$

$$\{\neg \neg A\} \vdash A$$

- 1. $(\neg A \supset \neg A) \supset ((\neg A \supset \neg \neg A) \supset A)$ [A3; $A||A; B||\neg A$]
- 2. $\neg A \supset \neg A$
- 3. $(\neg A \supset \neg \neg A) \supset A$
- 4. $\neg \neg A \supset (\neg A \supset \neg \neg A)$
- 5. ¬¬*A*
- 6. $\neg A \supset \neg \neg A$
- 7. *A*

- $[B1; A||\neg A]$
 - [B1; $A||\neg A|$ [MP(1,2)]

- $A\supset (B\supset A)$ (A1)
- (A2) $(A\supset (B\supset C))\supset ((A\supset B)\supset (A\supset C))$
- $(\neg A \rightarrow B) \rightarrow ((\neg A \rightarrow \neg B) \rightarrow A)$ (A3)
- (B1) $A \supset A$

Levezetési szabály (modus ponens)

$$\{A\supset B,A\} \, \vdash_0 B$$

3. Feladat

$$\vdash \neg \neg A \supset A$$

$$\downarrow D$$

$$\{\neg \neg A\} \vdash A$$

- 1. $(\neg A \supset \neg A) \supset ((\neg A \supset \neg \neg A) \supset A)$ [A3; $A || A; B || \neg A$]
- 2. $\neg A \supset \neg A$
- 3. $(\neg A \supset \neg \neg A) \supset A$
- 4. $\neg \neg A \supset (\neg A \supset \neg \neg A)$
- 5. ¬¬*A*
- 6. $\neg A \supset \neg \neg A$

- [B1; $A || \neg A$]
- [MP(1,2)]
 - [A1; $A||\neg\neg A; B||\neg A$]

- $A\supset (B\supset A)$ (A1)
- (A2) $(A\supset (B\supset C))\supset ((A\supset B)\supset (A\supset C))$
- $(\neg A \rightarrow B) \rightarrow ((\neg A \rightarrow \neg B) \rightarrow A)$ (A3)
- (B1) $A \supset A$

Levezetési szabály (modus ponens)

$$\{A\supset B,A\} \, \vdash_0 B$$

3. Feladat

$$\vdash \neg \neg A \supset A$$

$$\Downarrow D$$

$$\{\neg \neg A\} \vdash A$$

- 1. $(\neg A \supset \neg A) \supset ((\neg A \supset \neg \neg A) \supset A)$ [A3; $A || A; B || \neg A$]
- 2. $\neg A \supset \neg A$
- 3. $(\neg A \supset \neg \neg A) \supset A$
- 4. $\neg \neg A \supset (\neg A \supset \neg \neg A)$
- 5. ¬¬*A*
- 6. $\neg A \supset \neg \neg A$

- [B1; $A || \neg A$]
- [MP(1,2)]
 - [A1; $A||\neg\neg A; B||\neg A|$] [hip]

- $A\supset (B\supset A)$ (A1)
- (A2) $(A\supset (B\supset C))\supset ((A\supset B)\supset (A\supset C))$ $(\neg A \rightarrow B) \rightarrow ((\neg A \rightarrow \neg B) \rightarrow A)$ (A3)
- $A \supset A$

Levezetési szabály (modus ponens)

$$\{A\supset B,A\} \,\vdash_0 B$$

3. Feladat

(B1)

$$\vdash \neg \neg A \supset A$$

$$\downarrow D$$

$$\{\neg \neg A\} \vdash A$$

- 1. $(\neg A \supset \neg A) \supset ((\neg A \supset \neg \neg A) \supset A)$ [A3; $A || A; B || \neg A$]
- 2. $\neg A \supset \neg A$
- 3. $(\neg A \supset \neg \neg A) \supset A$
- 4. $\neg \neg A \supset (\neg A \supset \neg \neg A)$
- 5. ¬¬*A*
- 6. $\neg A \supset \neg \neg A$

- [B1; *A*||¬*A*]
- [MP(1,2)]
 - $[A1; A||\neg\neg A; B||\neg A]$
 - [hip]
 - [MP(4,5)]

- $A\supset (B\supset A)$ (A1)
- (A2) $(A\supset (B\supset C))\supset ((A\supset B)\supset (A\supset C))$ $(\neg A \rightarrow B) \rightarrow ((\neg A \rightarrow \neg B) \rightarrow A)$ (A3)
- (B1) $A \supset A$

Levezetési szabály (modus ponens)

$$\{A\supset B,A\} \,\vdash_0 B$$

3. Feladat

$$\vdash \neg \neg A \supset A$$

$$\Downarrow D$$

$$\{\neg \neg A\} \vdash A$$

- 1. $(\neg A \supset \neg A) \supset ((\neg A \supset \neg \neg A) \supset A)$ [A3; $A || A; B || \neg A$]
- 2. $\neg A \supset \neg A$
- 3. $(\neg A \supset \neg \neg A) \supset A$
- 4. $\neg \neg A \supset (\neg A \supset \neg \neg A)$
- 5. ¬¬*A*
- 6. $\neg A \supset \neg \neg A$

- [B1; $A || \neg A$]
- [MP(1,2)]
 - [A1; $A||\neg\neg A; B||\neg A$]
 - [hip]
 - [MP(4,5)]
 - [MP(3.6)]

- $A\supset (B\supset A)$ (A1)
- (A2) $(A\supset (B\supset C))\supset ((A\supset B)\supset (A\supset C))$
- $(\neg A \supset B) \supset ((\neg A \supset \neg B) \supset A)$ (A3)
- (B1) $A \supset A$

Levezetési szabály (modus ponens)

$$\{A\supset B,A\} \, \vdash_0 B$$

3. Feladat

Mutassuk meg, hogy $\vdash \neg \neg A \supset A$ bizonyítható.

$$\vdash \neg \neg A \supset A$$

$$\Downarrow D$$

$$\{\neg \neg A\} \vdash A$$

- 1. $(\neg A \supset \neg A) \supset ((\neg A \supset \neg \neg A) \supset A)$ [A3; $A||A; B||\neg A$]
 - [B1; *A*||¬*A*]
- 2. $\neg A \supset \neg A$
- 3. $(\neg A \supset \neg \neg A) \supset A$ [MP(1,2)]
- 4. $\neg \neg A \supset (\neg A \supset \neg \neg A)$ [A1; $A||\neg\neg A; B||\neg A$]
- 5. ¬¬*A* [hip]
- 6. $\neg A \supset \neg \neg A$ [MP(4.5)]
- [MP(3.6)]

Ez után használható axiómaséma: B4 - $\neg \neg A \supset A$



- (A1) $A\supset (B\supset A)$
- (A2)
- $(A\supset (B\supset C))\supset ((A\supset B)\supset (A\supset C))$ (A3) $(\neg A \supset B) \supset ((\neg A \supset \neg B) \supset A)$
- (B1) $A \supset A$
- (B3) $A \supset \neg \neg A$
- $\neg \neg A \supset A$ (B4)

Levezetési szabály (modus ponens)

$$\{A\supset B,A\} \, \vdash_0 B$$

4. Feladat

Készítsük el a következő levezetést: $\{A \supset B\} \vdash_0 \neg \neg A \supset \neg \neg B$

10 / 14

- $(A1) \qquad A\supset (B\supset A)$
- $(A2) \qquad (A\supset (B\supset C))\supset ((A\supset B)\supset (A\supset C))$ $(A3) \qquad (\neg A\supset B)\supset ((\neg A\supset \neg B)\supset A)$
- (B1) A ⊃ A
- (B1) A ⊃ A (B3) A ⊃ ¬¬A
- (B4) ¬¬A ⊃ A

Levezetési szabály (modus ponens)

$$\{A\supset B,A\} \, \vdash_0 B$$

4. Feladat

Készítsük el a következő levezetést: $\{A\supset B\}\vdash_0 \neg \neg A\supset \neg \neg B$

Dedukciós tétel használata után a következő levezetés kell: $\{A\supset B, \neg\neg A\}\vdash_0\neg\neg B$

Logika - Bizonyításelmélet

- (A1) $A\supset (B\supset A)$
- (A2)
- $(A\supset (B\supset C))\supset ((A\supset B)\supset (A\supset C))$ $(\neg A \supset B) \supset ((\neg A \supset \neg B) \supset A)$ (A3)
- (B1) $A \supset A$
- (B3) $A \supset \neg \neg A$ (B4) $\neg \neg A \supset A$

Levezetési szabály (modus ponens)

$$\{A\supset B,A\} \,\vdash_0 B$$

4. Feladat

Készítsük el a következő levezetést: $\{A \supset B\} \vdash_0 \neg \neg A \supset \neg \neg B$

1.
$$B \supset \neg \neg B$$
 [B3; $A||B$]

- (A1) $A\supset (B\supset A)$
- (A2)
- $(A\supset (B\supset C))\supset ((A\supset B)\supset (A\supset C))$ $(\neg A \supset B) \supset ((\neg A \supset \neg B) \supset A)$ (A3)
- (B1) $A \supset A$
- (B3) $A \supset \neg \neg A$
- (B4) $\neg \neg A \supset A$

Levezetési szabály (modus ponens)

$$\{A\supset B,A\} \, \vdash_0 B$$

4. Feladat

Készítsük el a következő levezetést: $\{A \supset B\} \vdash_0 \neg \neg A \supset \neg \neg B$

- 1. $B \supset \neg \neg B$ [B3; A || B]
- 2. $A \supset B$ [hip]

- (A1) $A\supset (B\supset A)$
- (A2)
- $(A\supset (B\supset C))\supset ((A\supset B)\supset (A\supset C))$ $(\neg A \supset B) \supset ((\neg A \supset \neg B) \supset A)$ (A3)
- (B1) $A \supset A$
- (B3) $A \supset \neg \neg A$
- (B4) $\neg \neg A \supset A$

Levezetési szabály (modus ponens)

$$\{A\supset B,A\} \, \vdash_0 B$$

4. Feladat

Készítsük el a következő levezetést: $\{A \supset B\} \vdash_0 \neg \neg A \supset \neg \neg B$

- 1. $B \supset \neg \neg B$ [B3; A || B]
- 2. $A \supset B$ [hip]
- 3. $\neg \neg A \supset A$ [B4; A || A]

- (A1) $A\supset (B\supset A)$
- (A2)
- $(A\supset (B\supset C))\supset ((A\supset B)\supset (A\supset C))$ $(\neg A \supset B) \supset ((\neg A \supset \neg B) \supset A)$ (A3)
- (B1) $A \supset A$
- (B3) $A \supset \neg \neg A$
- (B4) $\neg \neg A \supset A$

Levezetési szabály (modus ponens)

$$\{A\supset B,A\} \, \vdash_0 B$$

4. Feladat

Készítsük el a következő levezetést: $\{A \supset B\} \vdash_0 \neg \neg A \supset \neg \neg B$

- $B \supset \neg \neg B$ [B3; A||B|]
 - 2. $A \supset B$ [hip]
 - 3. $\neg \neg A \supset A$ [B4; A || A]
- 4. ¬¬*A* [hip]

- (A1) $A\supset (B\supset A)$
- (A2)
- $(A\supset (B\supset C))\supset ((A\supset B)\supset (A\supset C))$ $(\neg A \supset B) \supset ((\neg A \supset \neg B) \supset A)$ (A3)
- (B1) $A \supset A$
- (B3) $A \supset \neg \neg A$
- (B4) $\neg \neg A \supset A$

Levezetési szabály (modus ponens)

$$\{A\supset B,A\} \vdash_0 B$$

4. Feladat

Készítsük el a következő levezetést: $\{A \supset B\} \vdash_0 \neg \neg A \supset \neg \neg B$

- $B \supset \neg \neg B$ [B3; A || B]
 - 2. $A \supset B$ [hip]
 - 3. $\neg \neg A \supset A$ [B4; A || A] 4. $\neg \neg A$ [hip]
- [MP(3,4)] 5.

- (A1) $A\supset (B\supset A)$
- (A2)
- $(A\supset (B\supset C))\supset ((A\supset B)\supset (A\supset C))$ $(\neg A \supset B) \supset ((\neg A \supset \neg B) \supset A)$ (A3)
- (B1) $A \supset A$
- (B3) $A \supset \neg \neg A$
- (B4) $\neg \neg A \supset A$

Levezetési szabály (modus ponens)

$$\{A\supset B,A\} \, \vdash_0 B$$

4. Feladat

Készítsük el a következő levezetést: $\{A \supset B\} \vdash_0 \neg \neg A \supset \neg \neg B$

- $B \supset \neg \neg B$ [B3; A || B]
 - 2. $A \supset B$ [hip]
 - 3. $\neg \neg A \supset A$ [B4; A || A]
 - 4. ¬¬*A* [hip]
 - 5. Α [MP(3,4)]
 - 6. [MP(2.5)]

- (A1) $A\supset (B\supset A)$
- (A2)
- $(A\supset (B\supset C))\supset ((A\supset B)\supset (A\supset C))$ $(\neg A \supset B) \supset ((\neg A \supset \neg B) \supset A)$ (A3)
- (B1) $A \supset A$
- (B3) $A \supset \neg \neg A$
- (B4) $\neg \neg A \supset A$

Levezetési szabály (modus ponens)

$$\{A\supset B,A\} \vdash_0 B$$

4. Feladat

Készítsük el a következő levezetést: $\{A \supset B\} \vdash_0 \neg \neg A \supset \neg \neg B$

- $B \supset \neg \neg B$ [B3; A || B]
- 2. $A \supset B$ [hip]
- $\neg \neg A \supset A$ [B4; A || A]
- [hip] 4. ¬¬*A*
- [MP(3,4)] 5. Α
- 6. [MP(2,5)]
- 7. $\neg \neg B$ [MP(1,6)]

- (A1) $A\supset (B\supset A)$
- (A2)
- $(A\supset (B\supset C))\supset ((A\supset B)\supset (A\supset C))$ $(\neg A \supset B) \supset ((\neg A \supset \neg B) \supset A)$ (A3)
- $A \supset A$ (B1)
- (B3) $A \supset \neg \neg A$ (B4) $\neg \neg A \supset A$

Levezetési szabály (modus ponens)

$$\{A\supset B,A\} \, \vdash_0 B$$

4. Feladat

Készítsük el a következő levezetést: $\{A \supset B\} \vdash_0 \neg \neg A \supset \neg \neg B$

Dedukciós tétel használata után a következő levezetés kell: $\{A \supset B, \neg \neg A\} \vdash_0 \neg \neg B$

- $B \supset \neg \neg B$ [B3; A || B]
 - 2. $A \supset B$ [hip]
 - 3. $\neg \neg A \supset A$ [B4; A||A|4. $\neg \neg A$ [hip]

 - 5. $A \qquad [MP(3,4)]$
 - $B \qquad [MP(2,5)]$
 - $\neg \neg B$ [MP(1.6)]

Ez után használható axiómaséma: B5 - $(A \supset B) \supset (\neg \neg A \supset \neg \neg B)$



5. Feladat

Egy bál szervezése a feladatod. Mikor a bejáratot ellenőrzöd, két feliratot látsz kiírva. 1. Ha Ön időben érkezett, akkor az üdvözlő italokat a bejárat melletti asztalon találja. 2. Ha az üdvözlő italokat nem találja a bejárat melletti asztalon, akkor Ön nem érkezett időben.

Bár az információ, amit hordoznak nem túl egyértelmű, téged mégis a redundancia zavar, amit felismersz bennük. Hirtelen eszedbe jut, hogy az ítéletkalkulus segítségével egyszerűen el tudnád dönteni, hogy a két állítás ugyanaz-e. Neki is állsz az állítások formalizálásának, és kiszámolod a két levezetést, amely az ekvivalencia megállapításához szükséges. Kérlek írd le a folyamatot!

Bizonyítani kell:

5. Feladat

Egy bál szervezése a feladatod. Mikor a bejáratot ellenőrzöd, két feliratot látsz kiírva. 1. Ha Ön időben érkezett, akkor az üdvözlő italokat a bejárat melletti asztalon találja. 2. Ha az üdvözlő italokat nem találja a bejárat melletti asztalon, akkor Ön nem érkezett időben.

Bár az információ, amit hordoznak nem túl egyértelmű, téged mégis a redundancia zavar, amit felismersz bennük. Hirtelen eszedbe jut, hogy az ítéletkalkulus segítségével egyszerűen el tudnád dönteni, hogy a két állítás ugyanaz-e. Neki is állsz az állítások formalizálásának, és kiszámolod a két levezetést, amely az ekvivalencia megállapításához szükséges. Kérlek írd le a folyamatot!

Bizonyítani kell:

$$\{X\supset Y\}\vdash_0 \neg Y\supset \neg X$$
, illetve

5. Feladat

Egy bál szervezése a feladatod. Mikor a bejáratot ellenőrzöd, két feliratot látsz kiírva. 1. Ha Ön időben érkezett, akkor az üdvözlő italokat a bejárat melletti asztalon találja. 2. Ha az üdvözlő italokat nem találja a bejárat melletti asztalon, akkor Ön nem érkezett időben.

Bár az információ, amit hordoznak nem túl egyértelmű, téged mégis a redundancia zavar, amit felismersz bennük. Hirtelen eszedbe jut, hogy az ítéletkalkulus segítségével egyszerűen el tudnád dönteni, hogy a két állítás ugyanaz-e. Neki is állsz az állítások formalizálásának, és kiszámolod a két levezetést, amely az ekvivalencia megállapításához szükséges. Kérlek írd le a folyamatot!

Bizonyítani kell:

$${X\supset Y}\vdash_0 \neg Y\supset \neg X$$
, illetve ${\neg Y\supset \neg X}\vdash_0 X\supset Y$

- (A1) $A\supset (B\supset A)$
- $(A2) \qquad (A\supset (B\supset C))\supset ((A\supset B)\supset (A\supset C))$
- $(A3) \qquad (\neg A \supset B) \supset ((\neg A \supset \neg B) \supset A)$
- (B1) $A \supset A$
- (B3) A ⊃ ¬¬A (B4) ¬¬A ⊃ A
- $(B4) \qquad \neg \neg A \supset A$ $(B5) \qquad (A \supset B) \supset (\neg \neg A \supset A)$
- (B5) $(A\supset B)\supset (\neg\neg A\supset \neg\neg B)$

Levezetési szabály (modus ponens)

$$\{A\supset B,A\} \vdash_0 B$$

$$\{X\supset Y\}\vdash_0\neg Y\supset\neg X$$

Logika - Bizonyításelmélet

- (A1) $A \supset (B \supset A)$
- (A2) $(A\supset (B\supset C))\supset ((A\supset B)\supset (A\supset C))$ (A3) $(\neg A \supset B) \supset ((\neg A \supset \neg B) \supset A)$
- (B1) $A\supset A$
- (B3) A ⊃ ¬¬A
- (B4) ¬¬A ⊃ A
- (B5) $(A \supset B) \supset (\neg \neg A \supset \neg \neg B)$

Levezetési szabály (modus ponens)

$$\{A\supset B,A\} \vdash_0 B$$

$${X \supset Y} \vdash_0 \neg Y \supset \neg X$$

Dedukciós tétel alkalmazása után: $\{X \supset Y, \neg Y\} \vdash_0 \neg X$

12 / 14

- (A1) $A\supset (B\supset A)$
- $(A1) \qquad A \supset (B \supset A)$ $(A2) \qquad (A \supset (B \supset C)) \supset ((A \supset B) \supset (A \supset C))$
- $(A3) \qquad (\neg A \supset B) \supset ((\neg A \supset \neg B) \supset A)$
- (B1) $A \supset A$
- (B3) A ⊃ ¬¬A
- (B4) ¬¬A ⊃ A
- (B5) $(A \supset B) \supset (\neg \neg A \supset \neg \neg B)$

Levezetési szabály (modus ponens)

$$\{A\supset B,A\} \vdash_0 B$$

$$\{X\supset Y\}\vdash_0 \neg Y\supset \neg X$$

Dedukciós tétel alkalmazása után: $\{X \supset Y, \neg Y\} \vdash_0 \neg X$

1.
$$(\neg \neg X \supset \neg Y) \supset ((\neg \neg X \supset \neg \neg Y) \supset \neg X)$$
 [A3; $A||\neg X; B||\neg Y$]

- $(A1) \qquad A\supset (B\supset A)$
- $(A2) \qquad (A\supset (B\supset C))\supset ((A\supset B)\supset (A\supset C))$
- $(A3) \quad (\neg A \supset B) \supset ((\neg A \supset \neg B) \supset A)$
- (B1) A ⊃ A
- (B3) A ⊃ ¬¬A
- (B4) ¬¬A ⊃ A
- (B5) $(A \supset B) \supset (\neg \neg A \supset \neg \neg B)$

Levezetési szabály (modus ponens)

$$\{A\supset B,A\} \vdash_0 B$$

$${X \supset Y} \vdash_0 \neg Y \supset \neg X$$

Dedukciós tétel alkalmazása után: $\{X \supset Y, \neg Y\} \vdash_0 \neg X$

- 1. $(\neg \neg X \supset \neg Y) \supset ((\neg \neg X \supset \neg \neg Y) \supset \neg X)$ [A3; $A||\neg X$; $B||\neg Y$]
- 2. $\neg Y \supset (\neg \neg X \supset \neg Y)$

[A1; $A||\neg Y$; $B||\neg\neg X$]

- (A1) $A \supset (B \supset A)$
- (A2)
- $(A\supset (B\supset C))\supset ((A\supset B)\supset (A\supset C))$ (A3) $(\neg A \supset B) \supset ((\neg A \supset \neg B) \supset A)$
- $A \supset A$ (B1)
- (B3) A ¬¬¬A
- (B4) ¬¬A ⊃ A
- $(A \supset B) \supset (\neg \neg A \supset \neg \neg B)$ (B5)

Levezetési szabály (modus ponens)

$$\{A\supset B,A\} \vdash_0 B$$

$${X \supset Y} \vdash_0 \neg Y \supset \neg X$$

Dedukciós tétel alkalmazása után: $\{X \supset Y, \neg Y\} \vdash_0 \neg X$

- $(\neg \neg X \supset \neg Y) \supset ((\neg \neg X \supset \neg \neg Y) \supset \neg X) \quad [A3; A||\neg X; B||\neg Y]$
- 2. $\neg Y \supset (\neg \neg X \supset \neg Y)$
- $3 \neg V$

- [A1; $A||\neg Y; B||\neg \neg X$] [hip]

- (A1) $A \supset (B \supset A)$
- (A2) $(A\supset (B\supset C))\supset ((A\supset B)\supset (A\supset C))$
- (A3) $(\neg A \supset B) \supset ((\neg A \supset \neg B) \supset A)$
- $A \supset A$ (B1)
- (B3) A ¬¬¬A
- (B4) ¬¬A ⊃ A
- $(A \supset B) \supset (\neg \neg A \supset \neg \neg B)$ (B5)

Levezetési szabály (modus ponens)

$$\{A\supset B,A\} \vdash_0 B$$

$${X \supset Y} \vdash_0 \neg Y \supset \neg X$$

Dedukciós tétel alkalmazása után: $\{X \supset Y, \neg Y\} \vdash_0 \neg X$

- $(\neg \neg X \supset \neg Y) \supset ((\neg \neg X \supset \neg \neg Y) \supset \neg X)$ [A3; $A | | \neg X$; $B | | \neg Y$]
- 2. $\neg Y \supset (\neg \neg X \supset \neg Y)$
- $3 \neg Y$
- 4. $\neg \neg X \supset \neg Y$

- [A1; $A || \neg Y$; $B || \neg \neg X$]
- [hip]
- [MP(2,3)]

- (A1) $A \supset (B \supset A)$
- $(A\supset (B\supset C))\supset ((A\supset B)\supset (A\supset C))$ (A2)
- (A3) $(\neg A \supset B) \supset ((\neg A \supset \neg B) \supset A)$
- $A \supset A$ (B1)
- $A \supset \neg \neg A$ (B3) $\neg \neg A \supset A$ (B4)
- $(A \supset B) \supset (\neg \neg A \supset \neg \neg B)$ (B5)

Levezetési szabály (modus ponens)

$$\{A\supset B,A\} \vdash_0 B$$

$$\{X\supset Y\}\vdash_0 \neg Y\supset \neg X$$

Dedukciós tétel alkalmazása után: $\{X \supset Y, \neg Y\} \vdash_0 \neg X$

- $(\neg \neg X \supset \neg Y) \supset ((\neg \neg X \supset \neg \neg Y) \supset \neg X)$ [A3; A||\neg X; B||\neg Y]
- 2. $\neg Y \supset (\neg \neg X \supset \neg Y)$
- 4. $\neg \neg X \supset \neg Y$
- 5. $(\neg \neg X \supset \neg \neg Y) \supset \neg X$

[hip] [MP(2,3)]

[A1; $A||\neg Y$; $B||\neg \neg X$]

- [MP(1,4)]

- $(A1) \qquad A\supset (B\supset A)$
- $(A2) \qquad (A\supset (B\supset C))\supset ((A\supset B)\supset (A\supset C))$
- $(A3) \qquad (\neg A \supset B) \supset ((\neg A \supset \neg B) \supset A)$
- (B1) A ⊃ A
- (B3) A ⊃ ¬¬A (B4) ¬¬A ⊃ A
- (B5) $(A \supset B) \supset (\neg \neg A \supset \neg \neg B)$

Levezetési szabály (modus ponens)

$$\{A\supset B,A\} \vdash_0 B$$

$$\{X\supset Y\}\vdash_0 \neg Y\supset \neg X$$

Dedukciós tétel alkalmazása után: $\{X\supset Y, \neg Y\} \vdash_0 \neg X$

- 1. $(\neg \neg X \supset \neg Y) \supset ((\neg \neg X \supset \neg \neg Y) \supset \neg X)$ [A3; $A | | \neg X; B | | \neg Y$]
- 2. $\neg Y \supset (\neg \neg X \supset \neg Y)$
- 3. ¬*Y*
- 4. $\neg \neg X \supset \neg Y$
- 5. $(\neg \neg X \supset \neg \neg Y) \supset \neg X$
- 6. $(X \supset Y) \supset (\neg \neg X \supset \neg \neg Y)$

- [A3; $A||\neg X$; $B||\neg Y$] [A1; $A||\neg Y$; $B||\neg \neg X$]
- [hip]
- [MP(2,3)]
 - [MP(1,4)]
- [B5; A||X; B||Y]

- $A \supset (B \supset A)$ (A1)
- (A2) $(A\supset (B\supset C))\supset ((A\supset B)\supset (A\supset C))$
- $(\neg A \supset B) \supset ((\neg A \supset \neg B) \supset A)$ (A3)
- (B1) $A \supset A$
- $A \supset \neg \neg A$ (B3) (B4) $\neg \neg A \supset A$
- $(A \supset B) \supset (\neg \neg A \supset \neg \neg B)$ (B5)

Levezetési szabály (modus ponens)

$$\{A\supset B,A\} \,\vdash_0 B$$

$$\{X\supset Y\}\vdash_0 \neg Y\supset \neg X$$

Dedukciós tétel alkalmazása után: $\{X \supset Y, \neg Y\} \vdash_0 \neg X$

- $(\neg \neg X \supset \neg Y) \supset ((\neg \neg X \supset \neg \neg Y) \supset \neg X)$ [A3; A||\neg X; B||\neg Y]
- 2. $\neg Y \supset (\neg \neg X \supset \neg Y)$
- 4. $\neg \neg X \supset \neg Y$
- 5. $(\neg \neg X \supset \neg \neg Y) \supset \neg X$
- 6. $(X \supset Y) \supset (\neg \neg X \supset \neg \neg Y)$
- $X \supset Y$

- [A1; $A||\neg Y$; $B||\neg \neg X$] [hip]
- [MP(2,3)]
- [MP(1,4)]
- [B5; A||X; B||Y]
- [hip]

12 / 14

- (A1) $A\supset (B\supset A)$
- $(A2) \qquad (A\supset (B\supset C))\supset ((A\supset B)\supset (A\supset C))$
- $(A2) \quad (A \supset (B \supset C)) \supset ((A \supset B) \supset (A \supset A)$ $(A3) \quad (\neg A \supset B) \supset ((\neg A \supset \neg B) \supset A)$
- (B1) $A \supset A$
- (B3) A ⊃ ¬¬A (B4) ¬¬A ⊃ A
- (B5) $(A \supset B) \supset (\neg \neg A \supset \neg \neg B)$

Levezetési szabály (modus ponens)

$$\{A\supset B,A\} \, \vdash_0 B$$

$$\{X\supset Y\}\vdash_0 \neg Y\supset \neg X$$

Dedukciós tétel alkalmazása után: $\{X \supset Y, \neg Y\} \vdash_0 \neg X$

- 1. $(\neg \neg X \supset \neg Y) \supset ((\neg \neg X \supset \neg \neg Y) \supset \neg X)$ [A3; $A | |\neg X; B | |\neg Y$]
- 2. $\neg Y \supset (\neg \neg X \supset \neg Y)$
- $3 \neg Y$
- 4. $\neg \neg X \supset \neg Y$
- 5. $(\neg \neg X \supset \neg \neg Y) \supset \neg X$
- 6. $(X \supset Y) \supset (\neg \neg X \supset \neg \neg Y)$
- 7. $X \supset Y$
- 8. $\neg \neg X \supset \neg \neg Y$

- [A3; $A||\neg X$; $B||\neg Y$] [A1; $A||\neg Y$; $B||\neg \neg X$]
- [hip]
- [MP(2,3)]
- [MP(1,4)]
- [B5; A||X; B||Y]
- [hip]
- [MP(6,7)]

12 / 14

- $A \supset (B \supset A)$ (A1)
- (A2) $(A\supset (B\supset C))\supset ((A\supset B)\supset (A\supset C))$
- $(\neg A \supset B) \supset ((\neg A \supset \neg B) \supset A)$ (A3)
- (B1) $A \supset A$
- $A \supset \neg \neg A$ (B3) (B4) $\neg \neg A \supset A$
- $(A \supset B) \supset (\neg \neg A \supset \neg \neg B)$ (B5)

Levezetési szabály (modus ponens)

$$\{A\supset B,A\} \,\vdash_0 B$$

$$\{X\supset Y\}\vdash_0 \neg Y\supset \neg X$$

Dedukciós tétel alkalmazása után: $\{X \supset Y, \neg Y\} \vdash_0 \neg X$

- $(\neg \neg X \supset \neg Y) \supset ((\neg \neg X \supset \neg \neg Y) \supset \neg X)$ [A3; $A||\neg X$; $B||\neg Y$]
- 2. $\neg Y \supset (\neg \neg X \supset \neg Y)$
- $\neg Y$
- 4 $\neg \neg X \supset \neg Y$
- 5. $(\neg \neg X \supset \neg \neg Y) \supset \neg X$
- 6. $(X \supset Y) \supset (\neg \neg X \supset \neg \neg Y)$
- 7. $X \supset Y$
- $\neg\neg X \supset \neg\neg Y$
- $\neg X$ 9

- [A1; $A||\neg Y$; $B||\neg \neg X$]
- [hip]
- [MP(2.3)]
- [MP(1,4)]
- [B5; A||X; B||Y]
- [hip]
- [MP(6.7)]
- [MP(5,8)]

- (A1) $A\supset (B\supset A)$

 - $(A\supset (B\supset C))\supset ((A\supset B)\supset (A\supset C))$ (A2) $(\neg A \supset B) \supset ((\neg A \supset \neg B) \supset A)$ (A3)
- (B1) $A \supset A$
- $A \supset \neg \neg A$ (B3)
- $\neg \neg A \supset A$ (B4)
- $(A \supset B) \supset (\neg \neg A \supset \neg \neg B)$ (B5)

Levezetési szabály (modus ponens)

$$\{A\supset B,A\} \vdash_0 B$$

$$\{\neg Y\supset \neg X\}\vdash_0 X\supset Y$$

Logika - Bizonyításelmélet

- (A1) $A \supset (B \supset A)$
 - (A2)
 - $(A\supset (B\supset C))\supset ((A\supset B)\supset (A\supset C))$ $(\neg A \supset B) \supset ((\neg A \supset \neg B) \supset A)$ (A3)
- (B1) $A \supset A$
- (B3) A ⊃ ¬¬A
- (B4) ¬¬A ⊃ A
- $(A \supset B) \supset (\neg \neg A \supset \neg \neg B)$ (B5)

Levezetési szabály (modus ponens)

$$\{A\supset B,A\}\vdash_0 B$$

$$\{\neg Y \supset \neg X\} \vdash_0 X \supset Y$$

- (A1) $A \supset (B \supset A)$
 - (A2)
 - $(A\supset (B\supset C))\supset ((A\supset B)\supset (A\supset C))$ (A3) $(\neg A \supset B) \supset ((\neg A \supset \neg B) \supset A)$
- (B1) $A \supset A$
- (B3) A ⊃ ¬¬A
- (B4) ¬¬A ¬ A
- $(A \supset B) \supset (\neg \neg A \supset \neg \neg B)$ (B5)

Levezetési szabály (modus ponens)

$$\{A\supset B,A\}\vdash_0 B$$

$$\{\neg Y \supset \neg X\} \vdash_0 X \supset Y$$

1.
$$(\neg Y \supset X) \supset ((\neg Y \supset \neg X) \supset Y)$$
 [A3; $A||Y; B||X$]

- $A \supset (B \supset A)$ (A1)
 - (A2)
 - $(A\supset (B\supset C))\supset ((A\supset B)\supset (A\supset C))$ (A3) $(\neg A \supset B) \supset ((\neg A \supset \neg B) \supset A)$
 - $A\supset A$ (B1)
 - (B3) A ⊃ ¬¬A
 - (B4) ¬¬A ⊃ A
 - $(A \supset B) \supset (\neg \neg A \supset \neg \neg B)$ (B5)

Levezetési szabály (modus ponens)

$$\{A\supset B,A\}\vdash_0 B$$

$$\{\neg Y \supset \neg X\} \vdash_0 X \supset Y$$

- 1. $(\neg Y \supset X) \supset ((\neg Y \supset \neg X) \supset Y)$ [A3; A||Y; B||X]
 - 2. $X \supset (\neg Y \supset X)$ $[A1; A||X; B||\neg Y]$

(A1) $A\supset (B\supset A)$

 $(A2) \qquad (A\supset (B\supset C))\supset ((A\supset B)\supset (A\supset C))$

 $(A3) \qquad (\neg A \supset B) \supset ((\neg A \supset \neg B) \supset A)$

(B1) $A \supset A$

(B3) A ⊃ ¬¬A (B4) ¬¬A ⊃ A

 $(B5) \qquad (A\supset B)\supset (\neg\neg A\supset \neg\neg B)$

Levezetési szabály (modus ponens)

$$\{A\supset B,A\}\vdash_0 B$$

$$\{\neg Y \supset \neg X\} \vdash_0 X \supset Y$$

- 1. $(\neg Y \supset X) \supset ((\neg Y \supset \neg X) \supset Y)$ [A3; A||Y; B||X]
- 2. $X \supset (\neg Y \supset X)$ [A1; $A || X; B || \neg Y$]
 - B. X hip]

$$(A1) \qquad A\supset (B\supset A)$$

$$(A2) \qquad (A\supset (B\supset C))\supset ((A\supset B)\supset (A\supset C))$$

$$(A3) \qquad (\neg A \supset B) \supset ((\neg A \supset \neg B) \supset A)$$

- (B1) $A \supset A$
- (B3) A ⊃ ¬¬A (B4) ¬¬A ⊃ A
- $(B5) \qquad (A\supset B)\supset (\neg\neg A\supset \neg\neg B)$

Levezetési szabály (modus ponens)

$$\{A\supset B,A\} \vdash_0 B$$

$$\{\neg Y \supset \neg X\} \vdash_0 X \supset Y$$

Dedukciós tétel alkalmazása után: $\{\neg Y \supset \neg X, X\} \vdash_0 Y$

- 1. $(\neg Y \supset X) \supset ((\neg Y \supset \neg X) \supset Y)$ [A3; A||Y; B||X]
- $2. \quad X\supset (\neg Y\supset X)$

[hip]

4. $\neg Y \supset X$

[MP(2,3)]

[A1: $A||X:B||\neg Y$]

$$(A1) \qquad A\supset (B\supset A)$$

$$(A1) \qquad A \supset (B \supset A)$$

$$(A2) \qquad (A \supset (B \supset C)) \supset ((A \supset B) \supset (A \supset C))$$

$$(A3) \qquad (A \supset B) \supset (A \supset B) \supset (A \supset C)$$

- (B1) $A \supset A$
- (B3) $A \supset \neg \neg A$ (B4) ¬¬A ⊃ A
- $(A \supset B) \supset (\neg \neg A \supset \neg \neg B)$ (B5)

Levezetési szabály (modus ponens)

$$\{A\supset B,A\}\vdash_0 B$$

$$\{\neg Y \supset \neg X\} \vdash_0 X \supset Y$$

Dedukciós tétel alkalmazása után: $\{\neg Y \supset \neg X, X\} \vdash_0 Y$

- $(\neg Y \supset X) \supset ((\neg Y \supset \neg X) \supset Y)$ [A3; A||Y; B||X]
 - 2. $X \supset (\neg Y \supset X)$ [A1; $A||X; B||\neg Y$]
 - [hip]
 - 4. $\neg Y \supset X$ [MP(2,3)]
 - 5. $(\neg Y \supset \neg X) \supset Y$ [MP(1,4)]

$$(A1)$$
 $A\supset (B\supset A)$

$$(A1) \qquad A \supset (B \supset A) (A2) \qquad (A \supset (B \supset C)) \supset ((A \supset B) \supset (A \supset C))$$

(A3)
$$(\neg A \supset B) \supset ((\neg A \supset \neg B) \supset A)$$

- (B1) $A \supset A$
- (B3) $A \supset \neg \neg A$ (B4) $\neg \neg A \supset A$
- $(A \supset B) \supset (\neg \neg A \supset \neg \neg B)$ (B5)

Levezetési szabály (modus ponens)

$$\{A\supset B,A\}\vdash_0 B$$

$$\{\neg Y \supset \neg X\} \vdash_0 X \supset Y$$

Dedukciós tétel alkalmazása után: $\{\neg Y \supset \neg X, X\} \vdash_0 Y$

- $(\neg Y \supset X) \supset ((\neg Y \supset \neg X) \supset Y)$ [A3; A||Y; B||X]
- 2. $\hat{X} \supset (\neg Y \supset \hat{X})$ [A1; $A||X; B||\neg Y$]
 - [hip]
- 4. $\neg Y \supset X$ [MP(2,3)]
- 5. $(\neg Y \supset \neg X) \supset Y$ [MP(1,4)]6 $\neg Y \supset \neg X$ [hip]

$$(A1)$$
 $A\supset (B\supset A)$

$$(A1)$$
 $A \supset (B \supset A)$

$$(A2) \qquad (A\supset (B\supset C))\supset ((A\supset B)\supset (A\supset C))$$

$$(A3) \qquad (\neg A\supset B)\supset ((\neg A\supset \neg B)\supset A)$$

- (B1) $A \supset A$
- (B3) $A \supset \neg \neg A$ (B4) $\neg \neg A \supset A$
- $(A \supset B) \supset (\neg \neg A \supset \neg \neg B)$ (B5)

Levezetési szabály (modus ponens)

$$\{A\supset B,A\} \vdash_0 B$$

$$\{\neg Y \supset \neg X\} \vdash_0 X \supset Y$$

Dedukciós tétel alkalmazása után: $\{\neg Y \supset \neg X, X\} \vdash_0 Y$

- $(\neg Y \supset X) \supset ((\neg Y \supset \neg X) \supset Y)$ [A3; A||Y; B||X]
 - 2. $\hat{X} \supset (\neg Y \supset \hat{X})$ [A1; $A||X; B||\neg Y$]
 - [hip]
 - 4. $\neg Y \supset X$ [MP(2,3)]
 - 5. $(\neg Y \supset \neg X) \supset Y$ [MP(1,4)]

 - 6 $\neg Y \supset \neg X$ [hip]
 - [MP(5,6)]

Levezetési szabály (modus ponens)

$$\begin{array}{ll} (A1) & A\supset (B\supset A) \\ (A2) & (A\supset (B\supset C))\supset ((A\supset B)\supset (A\supset C)) \\ (A3) & (\neg A\supset B)\supset ((\neg A\supset \neg B)\supset A) \end{array}$$

$${A\supset B,A}\vdash_0 B$$

(B1)

 $A \supset A$

 $A \supset \neg \neg A$ (B3) (B4) $\neg \neg A \supset A$

 $(A \supset B) \supset (\neg \neg A \supset \neg \neg B)$ (B5)

6. Feladat

$$\begin{array}{ll} (A1) & A\supset (B\supset A) \\ (A2) & (A\supset (B\supset C))\supset ((A\supset B)\supset (A\supset C)) \end{array}$$

$$(A3) \qquad (\neg A \supset B) \supset ((\neg A \supset \neg B) \supset A)$$

$$(B5) \qquad (A\supset B)\supset (\neg\neg A\supset \neg\neg B)$$

6. Feladat

1.
$$(\neg \neg F \supset \neg A) \supset ((\neg \neg F \supset \neg \neg A) \supset \neg F)$$
 [A3; $A||\neg F$; $B||\neg A$]

 $\begin{array}{ll} (A2) & (A\supset (B\supset C))\supset ((A\supset B)\supset (A\supset C)) \\ (A3) & (\neg A\supset B)\supset ((\neg A\supset \neg B)\supset A) \end{array}$

(B1) A ⊃ A (B3) A ⊃ ¬¬A

(B4) $\neg \neg A \supset A$

(B5) $(A\supset B)\supset (\neg\neg A\supset \neg\neg B)$

6. Feladat

Nyomozós példa (rövidített verzió): $\{F\supset K, K\supset A, \neg A\}\vdash_0 \neg F$

1. $(\neg \neg F \supset \neg A) \supset ((\neg \neg F \supset \neg \neg A) \supset \neg F)$ [A3; $A || \neg F; B || \neg A$]

2. $\neg A \supset (\neg \neg F \supset \neg A)$

[A3;
$$A||\neg F$$
; $B||\neg A|$
[A1; $A||\neg A$; $B||\neg \neg F|$

$$\begin{array}{ll} (A1) & A\supset (B\supset A) \\ (A2) & (A\supset (B\supset C))\supset ((A\supset B)\supset (A\supset C)) \\ (A3) & (\neg A\supset B)\supset ((\neg A\supset \neg B)\supset A) \end{array}$$

$$(B5)$$
 $(A\supset B)\supset (\neg\neg A\supset \neg\neg B)$

6. Feladat

1.
$$(\neg \neg F \supset \neg A) \supset ((\neg \neg F \supset \neg \neg A) \supset \neg F)$$
 [A3; $A || \neg F; B || \neg A$]

2.
$$\neg A \supset (\neg \neg F \supset \neg A)$$

$$3. \quad \neg A \supset (\neg \neg F \supset \neg F)$$

$$[A3; A||\neg F; B||\neg A]$$

$$[A1; A||\neg A; B||\neg \neg F]$$

sználható axiomasémák
$$(A1) \qquad A \supset (B \supset A)$$

$$\begin{array}{ll} (A2) & (A\supset (B\supset C))\supset ((A\supset B)\supset (A\supset C)) \\ (A3) & (\neg A\supset B)\supset ((\neg A\supset \neg B)\supset A) \end{array}$$

$$(B5) \qquad (A\supset B)\supset (\neg\neg A\supset \neg\neg B)$$

6. Feladat

1.
$$(\neg \neg F \supset \neg A) \supset ((\neg \neg F \supset \neg \neg A) \supset \neg F)$$
 [A3; $A || \neg F; B || \neg A$]

$$2. \qquad \neg A \supset (\neg \neg F \supset \neg A)$$

4.
$$\neg \neg F \supset \neg A$$

[A3;
$$A||\neg F$$
; $B||\neg A$]
[A1; $A||\neg A$; $B||\neg \neg F$]

Levezetési szabály (modus ponens)

$$\begin{array}{ll} (A1) & A\supset (B\supset A) \\ (A2) & (A\supset (B\supset C))\supset ((A\supset B)\supset (A\supset C)) \end{array}$$

$$\begin{array}{ll} (A2) & (A\supset (B\supset C))\supset ((A\supset B)\supset (A\supset C))\\ (A3) & (\neg A\supset B)\supset ((\neg A\supset \neg B)\supset A) \end{array}$$

$$(B5)$$
 $(A \supset B) \supset (\neg \neg A \supset \neg \neg B)$

$\{A\supset B,A\}\vdash_{\mathsf{D}} B$

6. Feladat

1.
$$(\neg \neg F \supset \neg A) \supset ((\neg \neg F \supset \neg \neg A) \supset \neg F)$$
 [A3; $A | | \neg F; B | | \neg A$]

2.
$$\neg A \supset (\neg \neg F \supset \neg A)$$

4.
$$\neg \neg F \supset \neg A$$

5.
$$(\neg \neg F \supset \neg \neg A) \supset \neg F$$

[A3;
$$A||\neg F$$
; $B||\neg A$]
[A1; $A||\neg A$; $B||\neg \neg F$]

Levezetési szabály (modus ponens)

$$\begin{array}{ll} (A1) & A\supset (B\supset A)\\ (A2) & (A\supset (B\supset C))\supset ((A\supset B)\supset (A\supset C)) \end{array}$$

$$(A2) \qquad (A\supset (B\supset C))\supset ((A\supset B)\supset (A\supset C))$$

$$(A3) \qquad (\neg A\supset B)\supset ((\neg A\supset \neg B)\supset A)$$

$$(B5)$$
 $(A\supset B)\supset (\neg\neg A\supset \neg\neg B)$

$\{A\supset B,A\}\vdash_{\mathsf{D}} B$

6. Feladat

1.
$$(\neg \neg F \supset \neg A) \supset ((\neg \neg F \supset \neg \neg A) \supset \neg F)$$
 [A3; $A || \neg F; B || \neg A$]

2.
$$\neg A \supset (\neg \neg F \supset \neg A)$$

4.
$$\neg \neg F \supset \neg A$$

5.
$$(\neg \neg F \supset \neg \neg A) \supset \neg F$$

6.
$$(F\supset A)\supset (\neg\neg F\supset \neg\neg A)$$

[A3;
$$A||\neg F$$
; $B||\neg A$]
[A1; $A||\neg A$; $B||\neg \neg F$]
[hip]

$$[MP(2,3)]$$

 $[MP(1,4)]$

[B5;
$$A||F; B||A$$
]

$$(A1) \qquad A \supset (B \supset A)$$

$$(A2) \qquad (A \supset (B \supset C)) \supset ((A \supset B) \supset (A \supset C))$$

$$(A3) \qquad (\neg A \supset B) \supset ((\neg A \supset \neg B) \supset A)$$

(B1) $A \supset A$

 $A \supset \neg \neg A$ (B3) (B4) $\neg \neg A \supset A$

 $(A \supset B) \supset (\neg \neg A \supset \neg \neg B)$ (B5)

$\{A\supset B,A\}\vdash_{\mathsf{D}} B$

6. Feladat

Nyomozós példa (rövidített verzió): $\{F \supset K, K \supset A, \neg A\} \vdash_0 \neg F$

 $(\neg \neg F \supset \neg A) \supset ((\neg \neg F \supset \neg \neg A) \supset \neg F)$ [A3; A||¬F; B||¬A]

 $\neg A \supset (\neg \neg F \supset \neg A)$

3 $\neg A$

4 $\neg \neg F \supset \neg A$

5. $(\neg \neg F \supset \neg \neg A) \supset \neg F$

6. $(F \supset A) \supset (\neg \neg F \supset \neg \neg A)$

 $(F \supset (K \supset A)) \supset ((F \supset K) \supset (F \supset A))$ [A2; A||F; B||K; C||A]

[A1; $A||\neg A$; $B||\neg \neg F$]

[hip]

[MP(2,3)][MP(1,4)]

[B5; A||F; B||A]

$$(A1) \qquad A \supset (B \supset A)$$

$$(A2) \qquad (A \supset (B \supset C)) \supset ((A \supset B) \supset (A \supset C))$$

$$\begin{array}{ll} (A2) & (A\supset (B\supset C))\supset ((A\supset B)\supset (A\supset C) \\ (A3) & (\neg A\supset B)\supset ((\neg A\supset \neg B)\supset A) \end{array}$$

$$(B4)$$
 $\neg \neg A \supset A$

$$(B5)$$
 $(A\supset B)\supset (\neg\neg A\supset \neg\neg B)$

6. Feladat

1.
$$(\neg \neg F \supset \neg A) \supset ((\neg \neg F \supset \neg \neg A) \supset \neg F)$$
 [A3; $A || \neg F; B || \neg A$]

2.
$$\neg A \supset (\neg \neg F \supset \neg A)$$

4.
$$\neg \neg F \supset \neg A$$

5.
$$(\neg \neg F \supset \neg \neg A) \supset \neg F$$

6.
$$(F \supset A) \supset (\neg \neg F \supset \neg \neg A)$$

7.
$$(F \supset (K \supset A)) \supset ((F \supset K) \supset (F \supset A))$$
 [A2; A||F; B||K; C||A]

8.
$$(K \supset A) \supset (F \supset (K \supset A))$$

[A3;
$$A||\neg F$$
; $B||\neg A$]

[A1;
$$A||\neg A$$
; $B||\neg \neg F$] [hip]

[B5;
$$A||F; B||A$$
]

$$[A2; A||F; B||K; C||A$$

$$[A1; A||K\supset A; B||F]$$

(A1)
$$A \supset (B \supset A)$$

$$(A2) \qquad (A\supset (B\supset C))\supset ((A\supset B)\supset (A\supset C))$$

$$(A3) \qquad (\neg A\supset B)\supset ((\neg A\supset \neg B)\supset A)$$

- (B1) $A \supset A$
- $A \supset \neg \neg A$ (B3)
- (B5)
- (B4) $\neg \neg A \supset A$ $(A \supset B) \supset (\neg \neg A \supset \neg \neg B)$

6. Feladat

Nyomozós példa (rövidített verzió): $\{F \supset K, K \supset A, \neg A\} \vdash_0 \neg F$

1.
$$(\neg \neg F \supset \neg A) \supset ((\neg \neg F \supset \neg \neg A) \supset \neg F)$$
 [A3; A||¬F; B||¬A]

- $\neg A \supset (\neg \neg F \supset \neg A)$
- 3 $\neg A$
 - $\neg \neg F \supset \neg A$
- 5. $(\neg \neg F \supset \neg \neg A) \supset \neg F$
- 6. $(F \supset A) \supset (\neg \neg F \supset \neg \neg A)$
- $(F\supset (K\supset A))\supset ((F\supset K)\supset (F\supset A))$ [A2; A||F; B||K; C||A]
- 8. $(K\supset A)\supset (F\supset (K\supset A))$
- 9 $K \supset A$

[A1; $A||\neg A$; $B||\neg \neg F$] [hip]

- [MP(2.3)]
- [MP(1,4)]
- [B5; A||F; B||A]
 - [A1; $A||K \supset A$; B||F]
 - [hip]

$$\begin{array}{ll} (A1) & A\supset (B\supset A) \\ (A2) & (A\supset (B\supset C))\supset ((A\supset B)\supset (A\supset C)) \end{array}$$

$$\begin{array}{ll} (A2) & (A\supset (B\supset C))\supset ((A\supset B)\supset (A\supset C) \\ (A3) & (\neg A\supset B)\supset ((\neg A\supset \neg B)\supset A) \end{array}$$

$$(B5) \qquad (A\supset B)\supset (\neg\neg A\supset \neg\neg B)$$

6. Feladat

1.
$$(\neg \neg F \supset \neg A) \supset ((\neg \neg F \supset \neg \neg A) \supset \neg F)$$
 [A3; A||¬F; B||¬A]

2.
$$\neg A \supset (\neg \neg F \supset \neg A)$$

4.
$$\neg \neg F \supset \neg A$$

5.
$$(\neg \neg F \supset \neg \neg A) \supset \neg F$$

6.
$$(F \supset A) \supset (\neg \neg F \supset \neg \neg A)$$

7.
$$(F \supset (K \supset A)) \supset ((F \supset K) \supset (F \supset A))$$
 $[A2; A||F; B||K; C||A]$

8.
$$(K \supset A) \supset (F \supset (K \supset A))$$

9.
$$K \supset A$$

10.
$$F\supset (K\supset A)$$

[A3;
$$A||\neg F; B||\neg A$$
]
[A1; $A||\neg A; B||\neg \neg F$]

$$[A1; A||K \supset A; B||F]$$

$$\begin{array}{ll} (A2) & (A\supset (B\supset C))\supset ((A\supset B)\supset (A\supset C)) \\ (A3) & (\neg A\supset B)\supset ((\neg A\supset \neg B)\supset A) \end{array}$$

- (B1) $A \supset A$
- $A \supset \neg \neg A$ (B3) (B4) $\neg \neg A \supset A$
- $(A \supset B) \supset (\neg \neg A \supset \neg \neg B)$ (B5)

6. Feladat

1.
$$(\neg \neg F \supset \neg A) \supset ((\neg \neg F \supset \neg \neg A) \supset \neg F)$$
 [A3; $A || \neg F; B || \neg A$]

- $\neg A \supset (\neg \neg F \supset \neg A)$
- 3 $\neg A$
- 4 $\neg \neg F \supset \neg A$
- 5. $(\neg \neg F \supset \neg \neg A) \supset \neg F$
- 6. $(F \supset A) \supset (\neg \neg F \supset \neg \neg A)$
- $(F\supset (K\supset A))\supset ((F\supset K)\supset (F\supset A))$ [A2; A||F; B||K; C||A]
- 8. $(K\supset A)\supset (F\supset (K\supset A))$
- 9 $K \supset A$
- 10. $F\supset (K\supset A)$
- 11. $(F\supset K)\supset (F\supset A)$

- [A1; $A||\neg A$; $B||\neg \neg F$]
- [hip] [MP(2.3)]
- [MP(1,4)]
- [B5: A||F: B||A]

 - [A1; $A||K \supset A$; B||F]
 - [did]
 - [MP(8,9)]
 - [MP(7.10)]

$$\begin{array}{ll} (A1) & A \supset (B \supset A) \\ (A2) & (A \supset (B \supset C)) \supset ((A \supset B) \supset B) \end{array}$$

$$\begin{array}{ll} (A2) & (A\supset (B\supset C))\supset ((A\supset B)\supset (A\supset C)) \\ (A3) & (\neg A\supset B)\supset ((\neg A\supset \neg B)\supset A) \end{array}$$

- (B1) A ⊃ A (B3) A ⊃ ¬¬A
- $(B4) \qquad \neg \neg A \supset A$
- (B5) $(A\supset B)\supset (\neg\neg A\supset \neg\neg B)$

6. Feladat

- 1. $(\neg \neg F \supset \neg A) \supset ((\neg \neg F \supset \neg \neg A) \supset \neg F)$ [A3; A||¬F; B||¬A]
- 2. $\neg A \supset (\neg \neg F \supset \neg A)$
- 3. *¬A*
- 4. $\neg \neg F \supset \neg A$
- 5. $(\neg \neg F \supset \neg \neg A) \supset \neg F$
- 6. $(F \supset A) \supset (\neg \neg F \supset \neg \neg A)$
- 7. $(F \supset (K \supset A)) \supset ((F \supset K) \supset (F \supset A))$ [A2; A||F; B||K; C||A]
- 8. $(K \supset A) \supset (F \supset (K \supset A))$
- 9. $K \supset A$
- 10. $F\supset (K\supset A)$
- 11. $(F\supset K)\supset (F\supset A)$
- 12. $F \supset K$

- [A3; $A||\neg F; B||\neg A|$ [A1; $A||\neg A; B||\neg \neg F|$ [hip] [MP(2.3)]
- [MP(1,4)]
- [B5; A||F; B||A]
 - [A2; A||F; B||K; C||A] $[A1; A||K \supset A; B||F]$
 - [hip]
 - [MP(8,9)]
 - [MP(7,10)]
 - [hip]

$$(A1) \qquad A \supset (B \supset A)$$

$$\begin{array}{ll} (A2) & (A\supset (B\supset C))\supset ((A\supset B)\supset (A\supset C)) \\ (A3) & (\neg A\supset B)\supset ((\neg A\supset \neg B)\supset A) \end{array}$$

- (B1) A ⊃ A (B3) A ⊃ ¬¬A
- $(B4) \qquad \neg \neg A \supset A$
- (B5) $(A \supset B) \supset (\neg \neg A \supset \neg \neg B)$

6. Feladat

- 1. $(\neg \neg F \supset \neg A) \supset ((\neg \neg F \supset \neg \neg A) \supset \neg F)$ [A3; A||¬F; B||¬A]
- 2. $\neg A \supset (\neg \neg F \supset \neg A)$
- 3. *¬A*
- 4. $\neg \neg F \supset \neg A$
- 5. $(\neg \neg F \supset \neg \neg A) \supset \neg F$
- 6. $(F \supset A) \supset (\neg \neg F \supset \neg \neg A)$
- 7. $(F \supset (K \supset A)) \supset ((F \supset K) \supset (F \supset A))$ [A2; A||F; B||K; C||A]
- 8. $(K \supset A) \supset (F \supset (K \supset A))$
- 9. $K \supset A$
- 10. $F\supset (K\supset A)$
- 11. $(F\supset K)\supset (F\supset A)$
- 12. $F\supset K$
- 13. $F \supset A$

- [A3; $A||\neg F$; $B||\neg A$] [A1; $A||\neg A$; $B||\neg \neg F$]
- [hip] [MP(2,3)]
- [MP(1,4)]
- [B5; $A||\hat{F}; B||A$]
 - [A2; A||F; B||K; C||A[A1; $A||K \supset A; B||F$]
 - [hip]
 - [MP(8,9)]
 - [MP(7,10)]
 - [hip]
 - [MP(11,12)]

(A1)
$$A \supset (B \supset A)$$

$$(A2) \qquad (A\supset (B\supset C))\supset ((A\supset B)\supset (A\supset C))$$

$$(A3) \qquad (\neg A\supset B)\supset ((\neg A\supset \neg B)\supset A)$$

$$(B5) \qquad (A\supset B)\supset (\neg\neg A\supset \neg\neg B)$$

6. Feladat

1.
$$(\neg \neg F \supset \neg A) \supset ((\neg \neg F \supset \neg \neg A) \supset \neg F)$$
 [A3; $A || \neg F; B || \neg A$]

2.
$$\neg A \supset (\neg \neg F \supset \neg A)$$

4.
$$\neg \neg F \supset \neg A$$

5.
$$(\neg \neg F \supset \neg \neg A) \supset \neg F$$

6.
$$(F \supset A) \supset (\neg \neg F \supset \neg \neg A)$$

7.
$$(F \supset (K \supset A)) \supset ((F \supset K) \supset (F \supset A))$$
 [A2; A||F; B||K; C||A]

8.
$$(K \supset A) \supset (F \supset (K \supset A))$$

9.
$$K \supset A$$

10.
$$F\supset (K\supset A)$$

11.
$$(F\supset K)\supset (F\supset A)$$

12.
$$F\supset K$$

13.
$$F \supset A$$

14
$$\neg \neg F \supset \neg \neg A$$

[A3;
$$A||\neg F$$
; $B||\neg A$]
[A1; $A||\neg A$; $B||\neg \neg F$]

[B5;
$$A||F; B||A$$
]

[A2;
$$A||F; B||K; C||A|$$

[A1; $A||K \supset A; B||F|$

Levezetési szabály (modus ponens)

$$\begin{array}{ll} (A1) & A\supset (B\supset A) \\ (A2) & (A\supset (B\supset C))\supset ((A\supset B)\supset (A\supset C)) \end{array}$$

$$(A2) \qquad (A\supset (B\supset C))\supset ((A\supset B)\supset (A\supset C))$$

$$(A3) \qquad (\neg A\supset B)\supset ((\neg A\supset \neg B)\supset A)$$

$\{A\supset B,A\}\vdash_{\mathsf{D}} B$

6. Feladat

1.
$$(\neg \neg F \supset \neg A) \supset ((\neg \neg F \supset \neg \neg A) \supset \neg F)$$
 [A3; A||¬F; B||¬A]

2.
$$\neg A \supset (\neg \neg F \supset \neg A)$$

4.
$$\neg \neg F \supset \neg A$$

5.
$$(\neg \neg F \supset \neg \neg A) \supset \neg F$$

6.
$$(F \supset A) \supset (\neg \neg F \supset \neg \neg A)$$

7.
$$(F \supset (K \supset A)) \supset ((F \supset K) \supset (F \supset A))$$
 [A2; A||F; B||K; C||A|

8.
$$(K \supset A) \supset (F \supset (K \supset A))$$

9.
$$K \supset A$$

10.
$$F\supset (K\supset A)$$

11.
$$(F\supset K)\supset (F\supset A)$$

12.
$$F\supset K$$

13.
$$F \supset A$$

14.
$$\neg \neg F \supset \neg \neg A$$

[A3;
$$A||\neg F$$
; $B||\neg A$]
[A1; $A||\neg A$; $B||\neg \neg F$]
[hip]

[B5;
$$A||F; B||A$$
]

[A2;
$$A||F$$
; $B||K$; $C||F$]
[A1; $A||K \supset A$; $B||F$]