2. előadás

2020. szeptember 14.

DIFFERENCIÁLSZÁMÍTÁS

Előzetes megjegyzések

Korábban megismertük a matematikai analízis két alapvető fogalmának, nevezetesen: valós-valós függvény **pontbeli határértékének**, illetve a **folytonosságának** a definícióját. Emlékeztetünk arra, hogy ezzekkel a fogalmakkal egy függvénynek azt a – szemléletünk alapján eléggé világos – tulajdonságát fogalmaztuk meg matematikai szempontból pontos formában, hogy egy *adott ponthoz „közeli" helyeken a függvényértékek „közel" vannak valamely* (*valós*, $+\infty$ *vagy akár* $-\infty$) *értékhez, illetve az adott pontban felvett függvényértékhez.*

A további néhány előadáson a **differenciálszámítás** legfontosabb eredményeivel és eszköztárával ismerkedünk meg. Ez a témakör a matematikai analízisnek, sőt az egész matematikának és az alkalmazásoknak is egyik igen fontos fejezete. *A differenciálszámítás jól használható általános módszert ad többek között függvények tulajdonságainak a leírásához.*

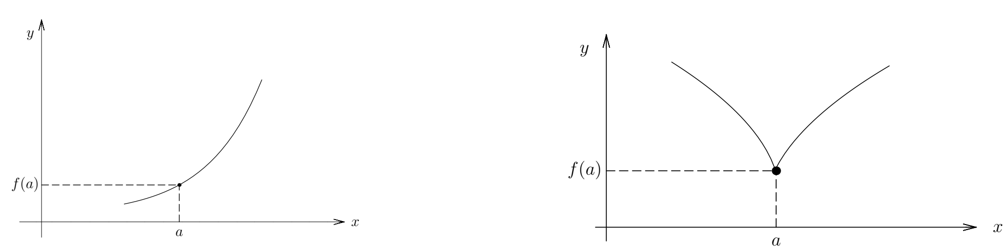
Több elemi függvényt hatványsor összegfüggvényeként értelmeztünk. Például az exp függvény szigorú monotonitása a definícióból kiindulva viszonylag könnyen igazolható. Más a helyzet a sin vagy a cos függvényekkel. Megemlítettük, hogy ezek a függvények a középiskolai tanulmányainkban megismert függvényekkel azonosak. A megszokott tulajdonságok igazolása (például a monotonitási intervallumok) a „hatványsoros" definícióból kiindulva azonban nem egyszerű feladat; ehhez (is) szükségünk lesz a differenciálszámítás eszköztárához.

A kiindulópontunk a **pontbeli derivált** fogalmának az értelmezése.

A derivált motivációja, szemléletes jelentése

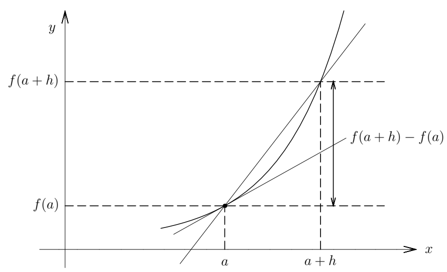
A derivált definíciójának értelmezése előtt két olyan problémát vázolunk, amelyek jól megvilágítják a derivált értelmezésének szükségességét, sőt a definíció célszerű módját is sugallják.

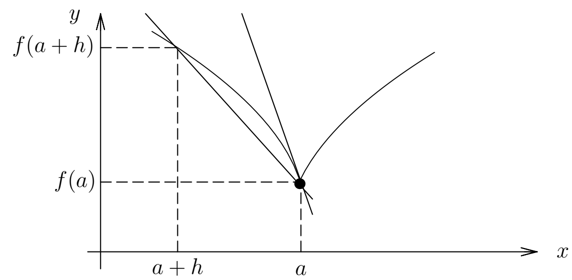
1. Függvény grafikonjának töréspontja, az érintő értelmezése. Valós-valós függvény grafikonjának egyik „jellegzetes" tulajdonsága az, hogy annak vajon van-e „töréspontja" vagy nincsen. Vegyünk két egyszerű példát:



A jobb oldali függvény grafikonjának az $\big(a, f(a)\big)$ pont egy „töréspontja". A bal oldali függvény grafikonjának nincs „töréspontja".

A különbség pontos leírásához induljunk ki abból az *ötletből*, hogy húzzunk szelőt a grafikon $\big(a, f(a)\big)$ pontjában:





A szelő meredeksége:

$$m_h = \frac{f(a+h)-f(a)}{h}.$$

A bal oldali függvénynél a szelőknek van „határhelyzete”, ha $h \to 0$, a jobb oldali függvénynél nincs. A határérték precíz fogalmának birtokában ezt „geometriamentesen” úgy fogalmazhatjuk meg, hogy a bal oldali függvénynél

$$\exists \lim_{h\to 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h} \ \text{ határérték és az véges,}$$

a jobb oldali függvénynél a szóban forgó határérték nem létezik. Ezt úgy fejezzük ki, hogy a bal oldali függvény „deriválható az a pontban”, a jobb oldali függvény pedig „nem deriválható az a pontban”.

A görbe *érintőjének* azt az egyenest célszerű nevezni, amelyhez a húrok egyenesei tartanak, ha $h \to 0$.

2. Pillanatnyi sebesség. A másik motiváció egy fizikai probléma. Tegyük fel, hogy egy pont mozgását a $t \mapsto s(t)$ út-idő függvény írja le. A $[t_0, t]$ időintervallumban az átlagsebesség a megtett $s(t) - s(t_0)$ út és a megtételéhez szükséges $t - t_0$ idő hányadosa, azaz

$$\frac{s(t)-s(t_0)}{t-t_0}.$$

Ha

$$\exists \lim_{t\to t_0} \frac{s(t)-s(t_0)}{t-t_0} \ \text{ határérték és az véges,}$$

akkor az átlagsebesség a fenti határértékhez lesz „közel”, ha „minden határon túl” rövidítjük a $[t_0, t]$ időintervallumot. A pillanatnyi sebességet a fenti határértékkel *definiáljuk.*

A derivált fogalma

Egy adott függvény pontbeli deriváltját a függvény értelmezési tartományának olyan pontjaiban értelmezzük, amelyek valamely környezete is az értelmezési tartományhoz tartozik. Az ilyen pontokat **belső pontoknak** fogjuk nevezni.

Definíció. *Tegyük fel, hogy $\emptyset \neq A \subset \mathbb{R}$. Az $a \in A$ pont az A* ***halmaz belső pontja****, ha*

$$\exists\ K(a), \quad \textit{hogy} \quad K(a) \subset A.$$

Az $\boxed{\operatorname{int} A}$ szimbólummal jelöljük az A halmaz ***belső pontjainak a halmazát.***

Példák:

(a) Ha $A = [0,1]$, akkor $\operatorname{int} A = (0,1)$.

(b) Ha $A = (5,6]$, akkor $\operatorname{int} A = (5,6)$.

(c) Ha $A = \{2;\,3;\,4\}$, akkor $\operatorname{int} A = \emptyset$.

Definíció. *Az $f \in \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvény az $a \in \operatorname{int} \mathcal{D}_f$ pontban* ***differenciálható*** *(vagy* ***deriválható****), ha*

$$\exists \quad \textit{és véges a} \quad \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} \quad \textit{határérték.}$$

Ezt a határértéket az $f'(a)$ szimbólummal jelöljük, és az f függvény a ***pontbeli deriváltjának*** *(vagy* ***differenciálhányadosának****) nevezzük, azaz*

$$f'(a) := \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} \in \mathbb{R}.$$

Ezt a tényt a következőképpen fogjuk jelölni: $f \in D\{a\}$.

Megjegyzések.

1^o A fenti definícióban szereplő határértéket az $x = a + h$ helyettesítéssel gyakran így írjuk fel:

$$f'(a) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} = \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}.$$

2^o Ha $f \in \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ és $a \in \operatorname{int} \mathcal{D}_f$, akkor a

$$\triangle_a f(x) := \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \qquad \big(x \in \mathcal{D}_f \setminus \{a\}\big)$$

függvényt az f függvény a ponthoz tartozó **különbségihányados-függvényének** vagy **differenciahányados-függvényének** nevezzük.

3^o A derivált definíciójában $0/0$-típusú kritikus határértékről van szó. $\square$

A differenciálhatóság erősebb megkötés, mint a folytonosság.

Tétel. (A folytonosság és a deriválhatóság kapcsolata.) *Tegyük fel, hogy $f \in \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ és $a \in \operatorname{int} \mathcal{D}_f$. Ekkor*

1^o $\; f \in D\{a\} \implies f \in C\{a\}$,

2^o *Az állítás megfordítása nem igaz.*

Bizonyítás. 1^o $f \in D\{a\} \implies$

$$\lim_{x \to a} \big(f(x) - f(a)\big) = \lim_{x \to a} \left(\frac{f(x) - f(a)}{x - a} \cdot (x - a)\right) = \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \cdot \lim_{x \to a} (x - a) = f'(a) \cdot 0 = 0.$$

Ez éppen azt jelenti, hogy $f \in C\{a\}$.

2^o Van olyan folytonos függvény, amelyik egy pontban folytonos, de ott nem deriválható. Például

$$\mathrm{abs} \in C\{0\}, \quad \text{de} \quad \mathrm{abs} \notin D\{0\},$$

mert az

$$\mathbb{R} \setminus \{0\} \ni x \mapsto \frac{\mathrm{abs}\,(x) - \mathrm{abs}\,(0)}{x - 0} = \frac{|x| - |0|}{x} = \begin{cases} 1, & \text{ha } x > 0 \\ -1, & \text{ha } x < 0 \end{cases}$$

függvénynek a 0 pontban nincs határértéke. ■

Deriválási szabályok

Megjegyzés. A definíció alapján annak eldöntése, hogy egy adott függvény deriválható-e valamilyen pontban, esetenként szinte reménytelen feladat. Éppen ezért különös jelentőséggel bírnak azok az állítások, amelyek ezt megkönnyítik. Ezek az ún. **deriválási szabályok**, amelyek segítségével bizonyos függvények differenciálhatóságából és deriváltjának ismeretéből következtetni tudunk további függvények differenciálhatóságára és deriváltjára.

• Algebrai műveletek

Tétel. *Tegyük fel, hogy $f, g \in \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ és $f, g \in D\{a\}$ valamilyen $a \in \operatorname{int} \big(\mathcal{D}_f \cap \mathcal{D}_g\big)$ pontban. Ekkor*

$1^o \quad cf \in D\{a\} \qquad$ *és* $\qquad \big(cf\big)'(a) = cf'(a) \quad (c \in \mathbb{R}),$

$2^o \quad f + g \in D\{a\} \qquad$ *és* $\qquad \big(f + g\big)'(a) = f'(a) + g'(a),$

$3^o \quad f \cdot g \in D\{a\} \qquad$ *és* $\qquad \big(f \cdot g\big)'(a) = f'(a)g(a) + f(a)g'(a),$

4^o *ha még a $g(a) \neq 0$ feltétel is teljesül, akkor*

$$\frac{f}{g} \in D\{a\} \qquad \text{és} \qquad \left(\frac{f}{g}\right)'(a) = \frac{f'(a)g(a) - f(a)g'(a)}{g^2(a)}.$$

Bizonyítás. A bizonyítások közös **ötlete** az, hogy az egyes függvények differenciahányadosait az $\dfrac{f(x) - f(a)}{x - a}$ és $\dfrac{g(x) - g(a)}{x - a}$ differenciahányadosok segítségével fejezzük ki.

3^o **A szorzatfüggvény deriválása.** Az $f \cdot g$ szorzatfüggvény különbségihányados-függvénye az a pontban

$$\frac{(fg)(x) - (fg)(a)}{x - a} = \frac{f(x) \cdot g(x) - f(a) \cdot g(a)}{x - a} \overset{!}{=}$$

$$\overset{!}{=} \frac{f(x) \cdot g(x) - f(a) \cdot g(x) - f(a) \cdot g(a) + f(a) \cdot g(x)}{x - a} =$$

$$= \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \cdot g(x) + f(a) \cdot \frac{g(x) - g(a)}{x - a} \quad \big(x \in \mathcal{D}_{f \cdot g} \setminus \{a\}\big).$$

Mivel $g \in D\{a\}$, ezért $g \in C\{a\}$, tehát $\lim_{x\to a} g(x) = g(a)$. Így

$$\lim_{x\to a} \frac{(fg)(x) - (fg)(a)}{x-a} = \lim_{x\to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} \cdot \lim_{x\to a} g(x) + f(a) \cdot \lim_{x\to a} \frac{g(x)-g(a)}{x-a} =$$
$$= f'(a) \cdot g(a) + f(a) \cdot g'(a).$$

Ez azt jelenti, hogy $f \cdot g \in D\{a\}$ és

$$(f \cdot g)'(a) = f'(a) \cdot g(a) + f(a) \cdot g'(a). \blacksquare$$

4^o **A hányadosfüggvény deriválása.**
Először azt igazoljuk, hogy $a \in \operatorname{int} \mathcal{D}_{\frac{f}{g}}$.
Valóban: $g \in D\{a\} \implies g \in C\{a\}$, ezért a $g(a) \neq 0$ feltétel miatt

$$\exists\, K(a) \subset \mathcal{D}_f : \quad g(x) \neq 0 \quad \big(\forall\, x \in K(a)\big) \quad \implies \quad a \in \operatorname{int} \mathcal{D}_{\frac{f}{g}}.$$

Az $\dfrac{f}{g}$ hányadosfüggvény különbségihányados-függvénye az a pontban

$$\frac{\left(\dfrac{f}{g}\right)(x) - \left(\dfrac{f}{g}\right)(a)}{x-a} = \frac{\dfrac{f(x)}{g(x)} - \dfrac{f(a)}{g(a)}}{x-a} = \frac{1}{g(a)g(x)} \cdot \frac{f(x)\cdot g(a) - f(a)\cdot g(x)}{x-a} =$$

$$\big(\text{a számlálóhoz } -f(a)\cdot g(a) + f(a)\cdot g(a) = 0\text{-t hozzáadunk}\big)$$

$$= \frac{1}{g(a)g(x)} \left(\frac{f(x)-f(a)}{x-a} \cdot g(a) - f(a) \cdot \frac{g(x)-g(a)}{x-a} \right) \qquad \Big(x \in \mathcal{D}_{\frac{f}{g}} \setminus \{a\}\Big).$$

Vegyük figyelembe azt, hogy $g \in C\{a\} \implies \lim_{x\to a} g(x) = g(a)$, és a feltételünk miatt $g(a) \neq 0$. Ezért

$$\lim_{x\to a} \frac{\left(\dfrac{f}{g}\right)(x) - \left(\dfrac{f}{g}\right)(a)}{x-a} =$$
$$= \frac{1}{g(a) \lim_{x\to a} g(x)} \left(\lim_{x\to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} \cdot g(a) - f(a) \cdot \lim_{x\to a} \frac{g(x)-g(a)}{x-a} \right) =$$
$$= \frac{1}{g^2(a)} \left(f'(a)g(a) - f(a)g'(a) \right).$$

Ez azt jelenti, hogy $\dfrac{f}{g} \in D\{a\}$ és

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(a) = \frac{f'(a)g(a) - f(a)g'(a)}{g^2(a)}. \blacksquare$$

• Összetett függvény

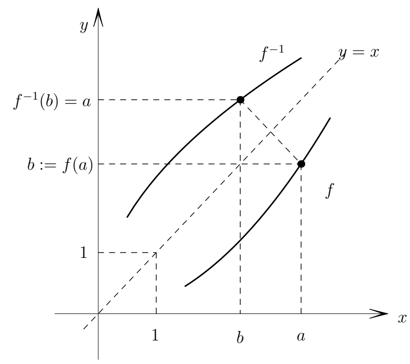
Tétel. *Tegyük fel, hogy $f, g \in \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ és valamilyen $a \in \operatorname{int} \mathcal{D}_g$ pontban $g \in D\{a\}$, továbbá $f \in D\{g(a)\}$. Ekkor $f \circ g \in D\{a\}$, és*

$$\big(f \circ g\big)'(a) = f'\big(g(a)\big) \cdot g'(a)\,.$$

Bizonyítás. Nélkül. ■

• Inverz függvény

Szemléletesen. Tegyük fel, hogy az f függvény invertálható. Emlékeztetünk arra, hogy az f és az f^{-1} függvények grafikonjai egymásnak az $y = x$ egyenletű egyenesre vonatkozó tükörképei:



Tekintsük az f függvény grafikonjának egy $\big(a, f(a)\big) =: (a, b)$ pontját. Ennek tükörképe az $y = x$ egyenletű szögfelező egyenesre a (b, a) pont. Mivel $a = f^{-1}(b)$, ezért a (b, a) pont rajta van az f^{-1} függvény grafikonján.

Az f függvény grafikonjának $\big(a, f(a)\big) = (a, b)$ pontbeli érintőegyenesének tükörképe az f^{-1} függvény grafikonjának az $\big(f(a), a\big) = (b, a)$ pontbeli érintője. Ha az f-hez húzott érintő nem párhuzamos az x-tengellyel (vagyis $f'(a) \neq 0$), akkor a tükörképe nem párhuzamos az y-tengellyel. Ekkor a meredekségeik egymás reciprokai, vagyis

$$\left(f^{-1}\right)'(b) = \frac{1}{f'(a)}.$$

Tétel. *Tegyük fel, hogy az $f : (\alpha, \beta) \to \mathbb{R}$ függvény*

(a) *szigorúan monoton és folytonos az (α, β) intervallumon,*

(b) *valamilyen $a \in (\alpha, \beta)$ pontban $f \in D\{a\}$ és $f'(a) \neq 0$.*

Ekkor az f^{-1} függvény deriválható a $b := f(a)$ pontban és

$$\left(f^{-1}\right)'(b) = \frac{1}{f'(a)} = \frac{1}{f'\left(f^{-1}(b)\right)}.$$

Bizonyítás. Nélkül. ■

• Hatványsor összegfüggvénye

Tétel. *Legyen $a \in \mathbb{R}$ és $\alpha_n \in \mathbb{R}$ $(n = 0, 1, \ldots)$. Tegyük fel, hogy a*

$$\sum_{n=0} \alpha_n (x-a)^n \qquad (x \in \mathbb{R})$$

hatványsor R konvergenciasugara pozitív, és jelölje f az összegfüggvényét:

$$f(x) := \sum_{n=0}^{+\infty} \alpha_n (x-a)^n \qquad \big(x \in K_R(a)\big).$$

Ekkor minden $x \in K_R(a)$ pontban $f \in D\{x\}$ és

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} n\alpha_n (x-a)^{n-1} \qquad \big(\forall\, x \in K_R(a)\big).$$

Röviden fogalmazva: Hatványsor összegfüggvénye a konvergenciaintervallum belsejében differenciálható és a hatványsor deriválását szabad tagonként végezni.

Bizonyítás. Nélkül. ■

A deriválhatóság ekvivalens átfogalmazása: lineáris közelítés

Megjegyzés. Gyakori jelenség, hogy valamely problémánál fellépő függvénnyel dolgozva egyszerűbb és áttekinthetőbb eredményhez juthatunk, ha a függvény helyett egy másik, az eredetit „jól közelítő”, de egyszerűbb típusú függvényt tekintünk. Az egyik legegyszerűbb függvénytípus az elsőfokú polinom (vagyis az $mx + b$ $(x \in \mathbb{R})$ függvény). Megmutatjuk, hogy *egy f függvény deriválhatósága az $a \in \operatorname{int} \mathcal{D}_f$ pontban éppen azt jelenti, hogy a függvény bizonyos értelemben „jól közelíthető” elsőfokú polinommal.*

Tétel. (Lineáris közelítés.) *Legyen $f \in \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ és $a \in \operatorname{int} \mathcal{D}_f$. Ekkor*

$$f \in D\{a\} \quad \Longleftrightarrow \quad \begin{cases} \exists\, A \in \mathbb{R} \;\; \text{és} \;\; \exists\, \varepsilon : \mathcal{D}_f \to \mathbb{R},\; \lim\limits_a \varepsilon = 0 : \\ f(x) - f(a) = A \cdot (x-a) + \varepsilon(x)(x-a) \;\; \big(x \in \mathcal{D}_f\big). \end{cases}$$

Az A szám az f függvény $a \in \operatorname{int} \mathcal{D}_f$ pontbeli deriváltja, vagyis $A = f'(a)$.

Bizonyítás.

$\boxed{\Longrightarrow}$ $f \in D\{a\} \Longrightarrow \lim\limits_{x \to a} \dfrac{f(x) - f(a)}{x - a} = f'(a) \in \mathbb{R} \iff \lim\limits_{x \to a} \left(\dfrac{f(x) - f(a)}{x - a} - f'(a) \right) = 0.$

Ha

$$\varepsilon(x) := \frac{f(x) - f(a)}{x - a} - f'(a) \quad \big(x \in \mathcal{D}_f \setminus \{a\}\big),$$

akkor $\lim\limits_a \varepsilon = 0$ és

$$f(x) - f(a) = f'(a) \cdot (x-a) + \varepsilon(x)(x-a) \quad \big(x \in \mathcal{D}_f\big),$$

ezért a feltétel az $A = f'(a)$ választással teljesül.

$\boxed{\Longleftarrow}$ Most tegyük fel, hogy $\exists\, A \in \mathbb{R}$ és $\exists\, \varepsilon : \mathcal{D}_f \to \mathbb{R}$, $\lim\limits_a \varepsilon = 0$, hogy

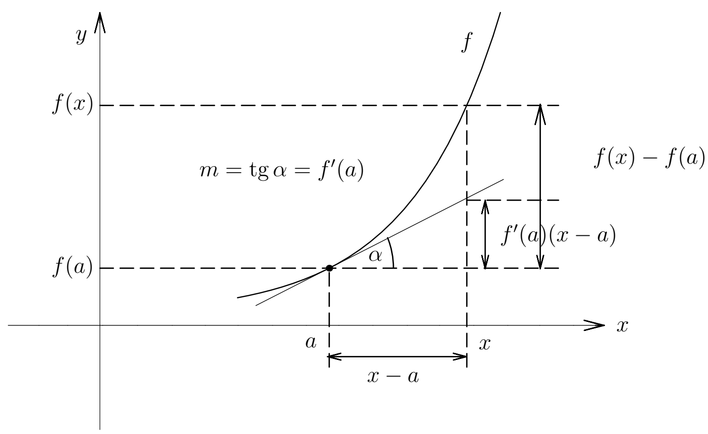
$$f(x) - f(a) = A \cdot (x-a) + \varepsilon(x)(x-a) \quad \big(x \in \mathcal{D}_f\big).$$

Ebből

$$\frac{f(x)-f(a)}{x-a} = A + \varepsilon(x) \longrightarrow A, \quad \text{ha} \quad x \longrightarrow a$$

adódik, ami azt jelenti, hogy $f \in D\{a\}$ és $f'(a) = A$. ■

Szemléletes jelentés:



Megjegyzés. A függvényértékek megváltozása

$$f(x) - f(a) = f'(a) \cdot (x-a) + \varepsilon(x)(x-a) \quad \big(x \in \mathcal{D}_f\big).$$

A jobb oldalon álló első tag egy lineáris függvény, a második tag pedig a $\lim\limits_a \varepsilon = 0$ feltétel miatt az elsőhöz képest „kicsi”. Az f függvény a **pontbeli deriválhatósága tehát azt jelenti, hogy a függvény megváltozása az a pont környezetében „jól” közelíthető lineáris függvénnyel.** Ezt a tényt gyakran az

$$f(x) - f(a) \sim f'(a)(x-a) \quad (\text{ha } x \sim a)$$

jelöléssel fejezzük ki.

Érintő

Megjegyzés. A középiskolai tanulmányaink során megismerkedtünk néhány síkbeli görbe (kör, parabola) érintőjének a fogalmával.

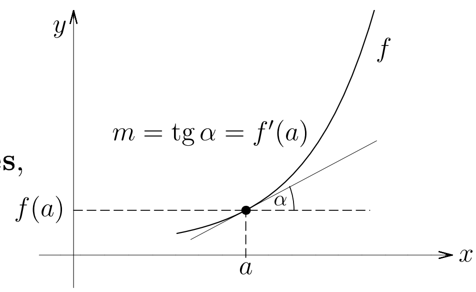
Az előzőek alapján, ha $f \in D\{a\}$, akkor az $\big(a, f(a)\big)$ és az $\big(x, f(x)\big)$ pontokon átmenő szelőknek van „határegyenese”, ha $x \to a$. Függvény grafikonjának (mint síkbeli halmaznak) az érintőjén éppen ezt az egyenest célszerű érteni. Az $f \in D\{a\}$ függvény esetén a szóban forgó egyenes átmegy az $\big(a, f(a)\big)$ ponton és a meredeksége $f'(a)$.

Definíció. *Az $f \in \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvény grafikonjának az $\big(a, f(a)\big)$ pontban* ***van érintője***, *ha $f \in D\{a\}$. Az f függvény grafikonjának $\big(a, f(a)\big)$ pontbeli* ***érintőjén*** *az*

$$y = f'(a) \cdot (x - a) + f(a)$$

egyenletű egyenest értjük.

- $f'(a)$ szemléletes jelentése: a grafikon $\big(a, f(a)\big)$ pontbeli érintőjének a meredeksége,
- $f'(a)$ definíciójában szereplő határérték **véges**, ezért az érintő **nem** párhuzamos az y-tengellyel.



Megjegyzés. Érdemes meggondolni, hogy a kör és a parabola érintőjének a fenti definíciója *ekvivalens* a középiskolában geometriai úton megadott definícióval.

Deriváltfüggvény

Megjegyzés. Látni fogjuk, hogy a derivált a leghatékonyabb segédeszköz egy függvény tulajdonságainak vizsgálatára. Ez lokálisan és globálisan is igaz. Az $f'(a)$ derivált létezése és értéke az f függvény a-beli (lokális) viselkedésére jellemző: $f'(a)$ értékéből az f függvény a pont körüli viselkedésére vonhatunk le következtetéseket. (Egy ilyen kapcsolatot már találtunk, amikor beláttuk, hogy a differenciálhatóságból következik a folytonosság.)

Ha viszont f egy halmaz (például intervallum) minden pontjában deriválható, akkor az $f'(x)$ értékekből az f függvény globális viselkedésére következtethetünk. Az alkalmazásokban legtöbbször olyan függvények szerepelnek, amelyek valamely halmazon (például intervallumon) deriválhatók. Célszerű tehát a deriválást olyan operációként felfogni, amely függvényekhez rendel függvényeket.

Definíció. *Ha $f \in \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ és $\big\{x \in \operatorname{int} \mathcal{D}_f \mid f \in D\{x\}\big\} \neq \emptyset$, akkor az*

$$\big\{x \in \operatorname{int} \mathcal{D}_f \mid f \in D\{x\}\big\} \ni x \mapsto f'(x)$$

függvényt az f ***deriváltfüggvényének*** *(vagy* ***differenciálhányados-függvényének****) nevezzük, és az f' szimbólummal jelöljük.*

Magasabb rendű deriváltak

Ha valamely valós-valós függvénynek létezik a deriváltfüggvénye, akkor természetes módon felvethetjük annak újbóli deriválhatóságát, és így eljuthatunk a *többször deriválható függvények* és a *magasabb rendű deriváltak* fogalmához. A *rekurzió módszerét* alkalmazzuk. Először a *kétszer deriválhatóság* fogalmát definiáljuk.

Definíció. *Legyen $f \in \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ és $a \in \operatorname{int} \mathcal{D}_f$. Azt mondjuk, hogy f* ***kétszer deriválható az*** *$a \in \operatorname{int} \mathcal{D}_f$* ***pontban*** *(jelölése: $f \in D^2\{a\}$), ha*

- *$\exists\, r > 0: \ f \in D\big(K_r(a)\big)$, és*
- *az f' deriváltfüggvény deriválható a-ban, azaz $f' \in D\{a\}$.*

Legyen ekkor

$$f''(a) := \big(f'\big)'(a)$$

*az f függvény a-**beli második deriváltja.***

Ha $H := \big\{x \in \operatorname{int} \mathcal{D}_f \mid f \in D^2\{x\}\big\} \neq \emptyset$, akkor

$$H \ni x \mapsto f''(x)$$

az f függvény **második deriváltfüggvénye**, amit röviden az f'' szimbólummal jelölünk.

Jelölések. A deriváltakra és a deriváltfüggvényekre a következő jelöléseket is fogjuk használni:

$$f^{(1)}(a) := f'(a) \ \text{ és } \ f^{(1)} := f',$$
$$f^{(2)}(a) := f''(a) \ \text{ és } \ f^{(2)} := f''.$$

Megállapodunk abban is, hogy

$$f^{(0)}(a) := f(a) \ \text{ és } \ f^{(0)} := f.$$

Indukcióval értelmezzük az *n-szeri deriválhatóságot* és az *n-edik deriváltat.* Tegyük fel, hogy valamely $n \in \mathbb{N}$ esetében már értelmeztük azt, hogy valamely $f \in \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvény mikor deriválható $(n-1)$-szer egy $a \in \operatorname{int} \mathcal{D}_f$ pontban (jelölése: $f \in D^{n-1}\{a\}$), továbbá azt is, hogy mikor létezik és mi az $(n-1)$-edik deriváltfüggvénye. Ha ez utóbbi létezik, akkor jelöljük azt az $f^{(n-1)}$ szimbólummal.

Definíció. *Legyen $f \in \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $a \in \operatorname{int} \mathcal{D}_f$, és tegyük fel, hogy valamely $n = 2, 3, \ldots$ esetén létezik az $f^{(n-1)}$-gyel jelölt $(n-1)$-edik deriváltfüggvény. Azt mondjuk, hogy f* ***n-szer deriválható az*** *$a \in \operatorname{int} \mathcal{D}_f$* ***pontban*** *(jelölése: $f \in D^n\{a\}$), ha*

- *$\exists\, r > 0: \ f \in D^{n-1}\big(K_r(a)\big)$, és*
- *az $f^{(n-1)}$ deriváltfüggvény deriválható a-ban, azaz $f^{(n-1)} \in D\{a\}$.*

Legyen ekkor

$$f^{(n)}(a) := \big(f^{(n-1)}\big)'(a)$$

*az f függvény a-**beli n-edik deriváltja.***

Ha $H := \big\{x \in \operatorname{int} \mathcal{D}_f \mid f \in D^n\{x\}\big\} \neq \emptyset$, akkor $H \ni x \mapsto f^{(n)}(x)$ az f függvény **n-edik deriváltfüggvénye**, amit röviden az $f^{(n)}$ szimbólummal jelölünk.

Ha egy f függvényre valamilyen $a \in \operatorname{int} \mathcal{D}_f$ pontban minden $n \in \mathbb{N}$ mellett teljesül, hogy $f \in D^n\{a\}$, akkor azt mondjuk, hogy az f függvény **a-ban végtelen sokszor** (vagy **akárhányszor**) deriválható. Ennek jelölésére az $f \in D^\infty\{a\}$ szimbólumot használjuk. Ha ez minden

$a \in \operatorname{int} \mathcal{D}_f$ pontban igaz, akkor az f **függvény végtelen sokszor** (vagy **akárhányszor**) deriválható, amit röviden így jelölünk: $f \in D^\infty$.

A deriválási szabályok némelyike magasabb rendű deriváltakra is átvihető.

Tétel. *Ha valamilyen $n \in \mathbb{N}$ esetén $f, g \in D^n\{a\}$, akkor*

1^o $f + g \in D^n\{a\}$ *és* $\big(f+g\big)^{(n)}(a) = f^{(n)}(a) + g^{(n)}(a)$,

2^o $f \cdot g \in D^n\{a\}$ *és* $\big(f \cdot g\big)^{(n)}(a) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(k)}(a) g^{(n-k)}(a)$.

(*Ez a **Leibniz-szabály**.*)

Bizonyítás. Mindkét állítás teljes indukcióval igazolható. 1^o bizonyítása szinte triviális, 2^o belátása némi számolgatást igényel. ■

Néhány speciális függvény deriváltja

Ebben a táblázatban felsoroltuk azokat a speciális függvényeket, amelyek deriváltjait meg kell jegyezni. Ezek közül néhánynak a bizonyítását most megmutatjuk.

1. **Konstans függvények.** Tetszőleges $c \in \mathbb{R}$ esetén az

$$f(x) := c \qquad (x \in \mathbb{R})$$

konstans függvény minden $x \in \mathbb{R}\,(= \operatorname{int} \mathcal{D}_f)$ pontban deriválható és a deriváltja 0, azaz

$$\boxed{f'(x) = 0 \quad (x \in \mathbb{R})} \qquad \text{vagy} \qquad \boxed{\big(c\big)' = 0 \quad (x \in \mathbb{R})}.$$

Bizonyítás.

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{c - c}{h} = 0. \;\blacksquare$$

2. **Hatványfüggvények.** Tetszőleges n természetes szám esetén az

$$f(x) := x^n \qquad (x \in \mathbb{R})$$

hatványfüggvény minden $x \in \mathbb{R}\,(= \operatorname{int} \mathcal{D}_f)$ pontban deriválható, és a deriváltja nx^{n-1}, azaz

$$\boxed{\big(x^n\big)' = nx^{n-1} \quad (x \in \mathbb{R})}.$$

Bizonyítás. Ha $x \in \mathbb{R}$, akkor

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{(x+h)^n - x^n}{h} =$$

$$\text{(az } a^n - b^n = (a-b)\big(a^{n-1} + a^{n-2}b + \cdots + ab^{n-2} + b^{n-1}\big) \text{ azonosság miatt)}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{h\big[(x+h)^{n-1} + (x+h)^{n-2}x + \cdots + (x+h)x^{n-2} + x^{n-1}\big]}{h} = nx^{n-1}$$

a hatványfüggvény folytonossága alapján. ■

$\boxed{3.}$ **A természetes alapú exponenciális függvény** $\forall\, x \in \mathbb{R}\, (= \mathcal{D}_{\exp})$ pontban deriválható, és

$$\boxed{\exp'(x) = (e^x)' = e^x \qquad \big(x \in \mathbb{R}\big)}\,.$$

Bizonyítás. Az exp függvényt az egész $\mathbb{R}$-en konvergens hatványsor összegfüggvényeként értelmeztük:

$$\exp x := \exp(x) := e^x := \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!}\, x^n \qquad (x \in \mathbb{R}).$$

A hatványsor összegfüggvényének deriválására vonatkozó tételt alkalmazva azt kapjuk, hogy minden $x \in \mathbb{R}$ pontban $\exp \in D\{x\}$, és

$$\exp'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} n \cdot \frac{1}{n!}\, x^{n-1} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(n-1)!}\, x^{n-1} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!}\, x^n = \exp(x) = e^x. \ \blacksquare$$

Megjegyzés. Az állítás úgy is megfogalmazható, hogy az exp **függvény deriváltfüggvénye önmaga**. Tulajdonképpen ez az összefüggés indokolja, hogy az e számot tekintjük az analízis (és általában a matematika) egyik legfontosabb állandójának. $\blacksquare$

$\boxed{4.}$ **A természetes alapú logaritmusfüggvény** $\forall\, x \in (0, +\infty)\, (= \mathcal{D}_{\ln})$ pontban deriválható, és

$$\boxed{\ln' x = \big(\ln x\big)' = \frac{1}{x} \qquad \big(x \in (0, +\infty)\big)}\,.$$

Bizonyítás. Emlékeztetünk arra, hogy az ln függvényt az exp függvény inverzeként értelmeztük:

$$\ln := \exp^{-1}.$$

Az exp függvényre az inverz függvény deriválására vonatkozó tétel valamennyi feltétele teljesül. Ezért minden $x \in (0, +\infty)\, (= \mathcal{D}_{\ln})$ pontban $\ln \in D\{x\}$, és

$$\ln' x = \big(\ln x\big)' = \frac{1}{\exp'\big(\ln x\big)} = \frac{1}{\exp\big(\ln x\big)} = \frac{1}{x}. \ \blacksquare$$

$\boxed{5.}$ **Exponenciális függvények.** Ha $a > 0$ valós szám, akkor $\forall\, x \in \mathbb{R}\, (= \mathcal{D}_{\exp_a})$ pontban $\exp_a \in D\{x\}$, és

$$\boxed{\exp_a'(x) = (a^x)' = a^x \ln a \qquad \big(x \in \mathbb{R}\big)}\,.$$

Bizonyítás. Emlékeztetünk arra, hogy $a > 0$ valós szám esetén az a alapú exponenciális függvényt így értelmeztük:

$$a^x := \exp_a(x) := \exp(x \cdot \ln a) \quad (\forall\, x \in \mathbb{R}).$$

Ha $f := \exp$ és $g(x) := x \ln a$ $(x \in \mathbb{R})$, akkor

$$\exp_a = f \circ g.$$

Az exp és az összetett függvény deriválására vonatkozó állítások alapján azt kapjuk, hogy az $\exp_a$ függvény minden $x \in \mathbb{R} = \mathcal{D}_{\exp_a}$ pontban deriválható, és

$$\exp_a'(x) = f'\big(g(x)\big) \cdot g'(x) = \exp\left(x \ln a\right) \cdot \ln a = a^x \ln a. \ \blacksquare$$

$\boxed{6.}$ **Logaritmusfüggvények.** Ha $a > 0$ valós szám és $a \neq 1$, akkor $\forall\, x \in (0, +\infty)\, (= \mathcal{D}_{\log_a})$ pontban $\log_a \in D\{x\}$, és

$$\boxed{\log_a' x = \big(\log_a x\big)' = \frac{1}{x \ln a} \qquad \big(x \in (0, +\infty)\big)}.$$

Bizonyítás. Emlékeztetünk arra, hogy $a \in (0, +\infty) \setminus \{1\}$ esetén az a alapú logaritmusfüggvényt így értelmeztük:

$$\log_a := \big(\exp_a\big)^{-1}.$$

Az $\exp_a$ függvényre az inverz függvény deriválására vonatkozó tétel valamennyi feltétele teljesül. Ezért minden $x \in (0, +\infty)\, (= \mathcal{D}_{\log_a})$ pontban $\log_a \in D\{x\}$, és

$$\log_a' x = \big(\log_a x\big)' = \frac{1}{\exp_a'\big(\log_a x\big)} = \frac{1}{(\ln a) \cdot \exp_a\big(\log_a x\big)} = \frac{1}{x \ln a}. \ \blacksquare$$

$\boxed{7.}$ **Általánosított hatványfüggvények.** Ha α tetszőleges valós szám, akkor a

$$h_\alpha : (0, +\infty) \ni x \mapsto x^\alpha$$

általánosított hatványfüggvény minden $x \in (0, +\infty)\, (= \mathcal{D}_{h_\alpha})$ pontban deriválható, és

$$\boxed{(x^\alpha)' = \alpha x^{\alpha - 1} \qquad \big(x \in (0, +\infty)\big)}.$$

Bizonyítás. Rögzítsük az $\alpha \in \mathbb{R}$ számot. Írjuk fel az $x > 0$ alapot e-hatványként: $x = e^{\ln x}$. Ekkor

$$x^\alpha = \big(e^{\ln x}\big)^\alpha = e^{\alpha \ln x} \qquad \big(x > 0\big),$$

majd alkalmazzuk az összetett függvény deriválására vonatkozó állításunkat. Azt kapjuk, hogy minden $x > 0$ esetén $h_\alpha \in D\{x\}$ és

$$h_\alpha'(x) = (x^\alpha)' = \big(e^{\alpha \ln x}\big)' = e^{\alpha \ln x} \cdot \alpha \cdot \frac{1}{x} = x^\alpha \cdot \alpha \cdot \frac{1}{x} = \alpha\, x^{\alpha - 1}. \quad \blacksquare$$

$\boxed{8.}$ **A** sin **függvény** $\forall\, x \in \mathbb{R}\, (= \mathcal{D}_{\sin})$ pontban deriválható, és

$$\boxed{\sin' x = \cos x \qquad \big(x \in \mathbb{R}\big)}.$$

Bizonyítás. A sin függvényt az egész $\mathbb{R}$-en konvergens hatványsor összegfüggvényeként értelmeztük:

$$\sin x := \sin(x) := \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} \qquad (x \in \mathbb{R}).$$

A hatványsor összegfüggvényének deriválására vonatkozó tételt alkalmazva azt kapjuk, hogy minden $x \in \mathbb{R}$ pontban $\sin \in D\{x\}$, és

$$\sin'(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \cdot (2n+1)\, \frac{x^{2n}}{(2n+1)!} = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n\, \frac{x^{2n}}{(2n)!} = \cos(x). \ \blacksquare$$