A számításelmélet alapjai II.
1. gyakorlat

Cél: A logika tárgyának ismertetetése. Ítéletlogika nyelvének megismerése.

Fogalmak: következtetési forma, állítás, logikai műveletek, ítéletlogika szintaxisa, formula, részformula, formula összetettsége, prioritás, zárójelezés, interpretáció, igazságtábla, szemantikus fa

---

Logika (és a matematikai logika) **tárgya** az emberi gondolkodás vizsgálata.
A gondolkodás fontos része a mindennapi életnek.
A gondolkodás fontos része bármely (humán- vagy természet-) tudománynak
A logika tárgya, célkitűzése.
Gondolkodási folyamatok vizsgálata
A helyes következtetés törvényeinek feltárása.

KÖVETKEZTETÉS - (ekvivalens megfogalmazások)
Adott ismeretek $\Rightarrow$ új ismeret
premisszák $\Rightarrow$ konklúzió
feltételek $\Rightarrow$ következmény
állítások $\Rightarrow$ állítás
A $\Rightarrow$ jel a gondolkodási folyamatot jelöli, amelynek eredménye a következmény.
Definíció: *Gondolkodásforma vagy következtetésforma egy* $\boldsymbol{F} = \{A_1, A_2, \ldots, A_n\}$ *állításhalmaz és egy A állításból álló (**F**,A) pár.*

Definíció:
*Helyes következtetésforma egy(**F**,A) pár, ha minden olyan esetben, amikor az **F**-ben minden állítás igaz, akkor a következmény állítás (az A állítás) is igaz.*

Logika (és a matematikai logika) feladata, helyes gondolkodásformák kiválasztása és új helyes következtetési formák keresése.

Példa (csak a logikai összekötő jelek értelmén alapuló következtetésre)
Ha nálam van a kapukulcs, akkor ki tudom nyitni a kaput.
Nálam van a kapukulcs. (tehát)
Ki tudom nyitni a kaput.

A következtetés sémája:
Ha A, akkor B.
A. (tehát)
B.

Egy másik következtetés:
Erika Sándor felesége.
Anna Sándor édesanyja. (tehát)
Anna Erika anyósa.

Kérdés, itt mi a séma?

Az állítás és az állítások közötti kapcsolatok a logika alapját képezik.

<u>Feladat:</u> Helyes-e az alábbi okoskodás? Mi az okoskodás sémája?

Ha a benzin elfogyott az autóból, akkor az autó megáll. Nem fogyott el a benzin. Tehát az autó nem áll meg.

Ha A, akkor B.
<u>Nem A. (tehát??)</u>
Nem B.

Az állítás fogalma, igazságértéke. Hogyan lehet az állítás igazságértékét megállapítani?
Az **állítás** egy olyan kijelentés, amelyről el lehet dönteni, hogy igaz-e vagy nem.
Azt, hogy egy állítás **igaz (i)** vagy **hamis (h)** az állítás **igazságérték**ének nevezzük.
Klasszikus kétértékű logikában két igazságértéket használunk.
Ellentmondástalanság elve: egyetlen állítás sem lehet igaz is és hamis is.
Kizárt harmadik elve: nincs olyan állítás, amely sem nem igaz, sem nem hamis.
Az állítás igazságértékét vagy tapasztalati tények, vagy a tudományos eredmények ismeretében állapítjuk meg.
Nem állítás egy mondat, ha

- nem kijelentő mondat,
- **nem létező individuumról** állít valamit,
- az állítás **nem egyértelmű;**
- az állítás **jövőidejű;**
- **nem dönthető el, hogy igaz-e vagy nem**.

<u>Feladat:</u> Döntsük el, hogy az alábbi mondatok közül melyek állítások!

1. Piros a hó.
2. Anna tud úszni.
3. Amelyik kutya ugat az nem harap.
4. Holnap megírom a leckém.
5. Ha nem tanulok, akkor rossz eredményt érek el.
6. A magyar államfő férje tanár.
7. Iskolánk igazgatója 50 éves.
8. Iskolánk tanára 50 éves.
9. Péter nem túl öreg.
10. Az 5 nagyobb, mint 3.
11. x nagyobb, mint 3, ahol x eleme a természetes számoknak.
12. „Minden krétai hazudik.” Mondta az általam ismert egyetlen krétai.

Megoldás: 1., 2., 3., 5., 7., 10.

<u>Gyakorlat (vagy házi feladat):</u>
Döntsük el, hogy az alábbi mondatok közül melyek állítások!

1. Budapesten 2007. szeptember 7-én sütött a nap.
2. Egynél több páros törzsszámnak kell lennie.
3. Ádám, hol voltál?
4. A világháborúban.

5. Ami nem azonos önmagával, az különbözik minden mástól is.
6. Van-e ennek valami értelme?
7. Minden szám osztható vagy kettővel vagy hárommal.
8. Semmi nem ugyanaz többé.
9. A Vénusz azonos az Esthajnalcsillaggal.
10. Vedd tudomásul, ami elromolhat, az el is romlik!

Függvényosztályozás, D: értelmezési tartomány, R: értékkészlet

1. **logikai függvény**

   D tetszőleges, R = {i,h}

2. **matematikai függvény – művelet**.

   $D=R^n$.

Logikai műveletek

A lehetséges kétváltozós logikai műveletek közös igazságtáblája.

		1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
X	Y	X∧Y	X∨Y	X→Y	X↔Y	¬↔	¬∧	¬∨	¬→	¬←	X← Y	¬X	¬Y	X	Y	i	h
i	i	i	i	i	i	h	h	h	h	h	i	h	h	i	i	i	h
i	h	h	i	h	h	i	i	h	i	h	i	h	i	i	h	i	h
h	i	h	i	i	h	i	i	h	h	i	h	i	h	h	i	i	h
h	h	h	h	i	i	h	i	i	h	h	i	i	i	h	h	i	h

A táblázat tartalmazza a16 db. 2-változós műveletet (köztük található a 4.db.1- és a 2.db. 0-változós művelet).

Az ítéletlogika leíró nyelve

ábécé= ítéletváltozók X, Y, X_i,...együttesen V_v-vel jelöljük

unér és binér logikai műveleti jelek ¬,∧,∨,→

elválasztójelek ( )

a teljes ábécé V_0

Szintaxis (L_0 ítéletlogika)

1. (alaplépés) minden ítéletváltozó ítéletlogikai formula. (prímformula)
2. (rekurzív lépés)

   Ha A ítéletlogikai formula, akkor ¬A is az.

   Ha A és B ítéletlogikai formulák, akkor (A°B) is ítéletlogikai formula (°) a három binér művelet bármelyike.

3. Minden ítéletlogikai formula az 1, 2 szabályok véges sokszori alkalmazásával áll elő.

<u>**Definició:**</u> *Formula logikai összetettsége* ***l*****(A)** (rekurzív definíció)

1. Ha A ítéletváltozó, akkor *l*(A)=0
2. *l*(¬A)= *l*(A)+1
3. *l*(A°B)= *l*(A)+ *l*(B)+1

Annak érdekében, hogy a formulákat kevesebb zárójellel írhassuk fel bevezetjük a műveletek **prioritását** csökkenő sorrendben: ¬, ∧, ∨, →

<u>**Feladat:**</u> a) Adjuk meg, hogy mennyire összetettek az alábbi formulák!

b) Hagyjuk el a lehető legtöbb zárójelet az alábbi formulákból!

1. $(((X \to Y) \wedge (Y \to Z)) \to (\neg X \vee Z))$
2. $((P \to Q) \to (Q \to P))$
3. $(((X \to (\neg Y \wedge Z)) \vee (X \wedge Y)) \wedge Z)$
4. $((Q \to (P \wedge R)) \wedge \neg((P \vee R) \to Q))$

Feladat: Döntsük el, hogy mi igaz az alábbi karakter sorozatokra!

a) $P \to Q \to R \wedge \neg(P) \to P$ nem formula/ konjunkciós/ diszjunkciós/ implikációs
b) $(P \vee Q) \vee R \wedge (\neg P \to P)$ nem formula/ konjunkciós/ diszjunkciós/ implikációs
c) $P \wedge Q \neg (Q \vee R) \wedge \neg(P \to P)$ nem formula/ konjunkciós/ diszjunkciós/ implikációs
d) $(P \to R) \to ((Q \to R) \to (P \vee Q \to R)$ nem formula/ konjunkciós/ diszjunkciós/ implikációs
e) $Q \to (P \wedge R) \wedge \neg(P \vee R) \vee Q$ nem formula/ konjunkciós/ diszjunkciós/ implikációs

---

Definició: *Interpretáció*: I: $V_v \to \{i,h\}$

Egy formula véges sok ítéletváltozót tartalmaz és így a formula vizsgálatához csak ezeknek az interpretációja szükséges. Szerepeljenek egy formulában az {X,Y,Z} ítéletváltozók. E változók egy sorrendjét bázisnak nevezzük. Legyen most a bázis X,Y,Z. Ekkor az összes interpretációt megadhatjuk ***táblázattal*** vagy *szemantikus fával*.

Definíció: *Egy **n-változós formula igazságtáblája** egy olyan n+1 oszlopból és 2^n+1 sorból álló táblázat, ahol a fejlécben a bázis (a formula változói rögzített sorrendben) és a formula szerepel. A sorokban a változók alatt az **interpretációk** (a **változók igazságkiértékelései**), a formula alatt a formula **helyettesítési értéke**i találhatók.*

Definíció: Egy *n-változós szemantikus fa* egy **n-szintű bináris fa**, ahol a szintek a bázisbeli változóknak vannak megfeleltetve. Egy X változó szintjén a csúcsokból kiinduló élpárokhoz X, ¬X. cimkéket rendelünk. **X** jelentése **X igaz**, **¬X** jelentése **X hamis**, így egy n-szintű szemantikus fa ágain az összes (2^n) lehetséges igazságkiértékelés (***I interpretáció***) megjelenik.

Feladat: Készítsük el az alábbi formula igazságtábláját!

$$P \to Q \to R \wedge \neg(R \to P)$$

Feladat: Bizonyítsuk be igazságtáblával, hogy ({A→B, ¬A }, ¬B) következtetési forma nem helyes!