

# Logika - Bizonyításelmélet

### Alapvető axiomasémák

$$(A1) \quad A \supset (B \supset A)$$

$$(A2) \quad (A \supset (B \supset C)) \supset ((A \supset B) \supset (A \supset C))$$

$$(A3) \quad (\neg A \supset B) \supset ((\neg A \supset \neg B) \supset A)$$

### Levezetési szabály (modus ponens)

$$(MP) \quad \frac{A ; (A \supset B)}{B}$$

$$\text{vagy}$$
$$\{A, A \supset B\} \vdash B$$

### Alapvető axiomasémák

- (A1)  $A \supset (B \supset A)$
- (A2)  $(A \supset (B \supset C)) \supset ((A \supset B) \supset (A \supset C))$
- (A3)  $(\neg A \supset B) \supset ((\neg A \supset \neg B) \supset A)$

### Levezetési szabály (modus ponens)

$\{A \supset B, A\} \vdash B$

### Egy egyszerű levezetés

$\{A\} \vdash B \supset A$

- 1.  $A \supset (B \supset A)$  [A1]
- 2.  $A$  [hip]
- 3.  $B \supset A$  [MP(1,2)]

## Helyesség (Soundness)

Tetszőleges  $A$  esetén,

$\text{Ha } \vdash A, \text{ akkor } \models A.$

## Teljesség (Completeness)

Tetszőleges  $A$  esetén,

$\text{Ha } \models A, \text{ akkor } \vdash A.$

### Alapvető axiomasémák

$$(A1) \quad A \supset (B \supset A)$$

$$(A2) \quad (A \supset (B \supset C)) \supset ((A \supset B) \supset (A \supset C))$$

$$(A3) \quad (\neg A \supset B) \supset ((\neg A \supset \neg B) \supset A)$$

### Levezetési szabály (modus ponens)

$$\{A \supset B, A\} \vdash B$$

## 0. Feladat

Mutassuk meg, hogy:

$$1. \quad A \supset B$$

$$2. \quad B \supset C$$

---

$$\text{K. } A \supset C$$

### Alapvető axiomasémák

$$(A1) \quad A \supset (B \supset A)$$

$$(A2) \quad (A \supset (B \supset C)) \supset ((A \supset B) \supset (A \supset C))$$

$$(A3) \quad (\neg A \supset B) \supset ((\neg A \supset \neg B) \supset A)$$

### Levezetési szabály (modus ponens)

$$\{A \supset B, A\} \vdash B$$

## 0. Feladat

Mutassuk meg, hogy:

$$1. A \supset B$$

$$2. B \supset C$$

---

$$K. A \supset C$$

másképp:

$$\{A \supset B, B \supset C\} \models A \supset C$$

### Alapvető axiomasémák

$$(A1) \quad A \supset (B \supset A)$$

$$(A2) \quad (A \supset (B \supset C)) \supset ((A \supset B) \supset (A \supset C))$$

$$(A3) \quad (\neg A \supset B) \supset ((\neg A \supset \neg B) \supset A)$$

### Levezetési szabály (modus ponens)

$$\{A \supset B, A\} \vdash B$$

## 0. Feladat

Mutassuk meg, hogy:

$$1. A \supset B$$

$$2. B \supset C$$

---

$$K. A \supset C$$

másképp:

$$\{A \supset B, B \supset C\} \models A \supset C$$

A teljesség miatt, tehát:

$$\{A \supset B, B \supset C\} \vdash A \supset C$$

### Alapvető axiomasémák

- (A1)  $A \supset (B \supset A)$
- (A2)  $(A \supset (B \supset C)) \supset ((A \supset B) \supset (A \supset C))$
- (A3)  $(\neg A \supset B) \supset ((\neg A \supset \neg B) \supset A)$

### Levezetési szabály (modus ponens)

$\{A \supset B, A\} \vdash B$

## 0. Feladat

Mutassuk meg, hogy:



### Alapvető axiomasémák

- (A1)  $A \supset (B \supset A)$
- (A2)  $(A \supset (B \supset C)) \supset ((A \supset B) \supset (A \supset C))$
- (A3)  $(\neg A \supset B) \supset ((\neg A \supset \neg B) \supset A)$

### Levezetési szabály (modus ponens)

$\{A \supset B, A\} \vdash B$

## 0. Feladat

Mutassuk meg, hogy:

$$\{A \supset B, B \supset C\} \vdash A \supset C$$

#### Alapvető axiomasémák

- (A1)  $A \supset (B \supset A)$
- (A2)  $(A \supset (B \supset C)) \supset ((A \supset B) \supset (A \supset C))$
- (A3)  $(\neg A \supset B) \supset ((\neg A \supset \neg B) \supset A)$

#### Levezetési szabály (modus ponens)

$\{A \supset B, A\} \vdash B$

## 0. Feladat

Mutassuk meg, hogy:

$$\{A \supset B, B \supset C\} \vdash A \supset C$$

1.  $(A \supset (B \supset C)) \supset ((A \supset B) \supset (A \supset C))$
2.  $(B \supset C) \supset (A \supset (B \supset C))$
3.  $B \supset C$
4.  $(A \supset (B \supset C))$
5.  $(A \supset B) \supset (A \supset C)$
6.  $A \supset B$
7.  $A \supset C$

### Alapvető axiomasémák

- (A1)  $A \supset (B \supset A)$
- (A2)  $(A \supset (B \supset C)) \supset ((A \supset B) \supset (A \supset C))$
- (A3)  $(\neg A \supset B) \supset ((\neg A \supset \neg B) \supset A)$

### Levezetési szabály (modus ponens)

$\{A \supset B, A\} \vdash B$

## 0. Feladat

Mutassuk meg, hogy:

$$\{A \supset B, B \supset C\} \vdash A \supset C$$

1.  $(A \supset (B \supset C)) \supset ((A \supset B) \supset (A \supset C))$  [A2]
2.  $(B \supset C) \supset (A \supset (B \supset C))$
3.  $B \supset C$
4.  $(A \supset (B \supset C))$
5.  $(A \supset B) \supset (A \supset C)$
6.  $A \supset B$
7.  $A \supset C$

### Alapvető axiomasémák

- (A1)  $A \supset (B \supset A)$
- (A2)  $(A \supset (B \supset C)) \supset ((A \supset B) \supset (A \supset C))$
- (A3)  $(\neg A \supset B) \supset ((\neg A \supset \neg B) \supset A)$

### Levezetési szabály (modus ponens)

$\{A \supset B, A\} \vdash B$

## 0. Feladat

Mutassuk meg, hogy:

$$\{A \supset B, B \supset C\} \vdash A \supset C$$

1.  $(A \supset (B \supset C)) \supset ((A \supset B) \supset (A \supset C))$  [A2]
2.  $(B \supset C) \supset (A \supset (B \supset C))$  [A1, ahol  $A \parallel B \supset C$ ,  $B \parallel A$ ]
3.  $B \supset C$
4.  $(A \supset (B \supset C))$
5.  $(A \supset B) \supset (A \supset C)$
6.  $A \supset B$
7.  $A \supset C$

### Alapvető axiomasémák

- (A1)  $A \supset (B \supset A)$
- (A2)  $(A \supset (B \supset C)) \supset ((A \supset B) \supset (A \supset C))$
- (A3)  $(\neg A \supset B) \supset ((\neg A \supset \neg B) \supset A)$

### Levezetési szabály (modus ponens)

$\{A \supset B, A\} \vdash B$

## 0. Feladat

Mutassuk meg, hogy:

$$\{A \supset B, B \supset C\} \vdash A \supset C$$

1.  $(A \supset (B \supset C)) \supset ((A \supset B) \supset (A \supset C))$  [A2]
2.  $(B \supset C) \supset (A \supset (B \supset C))$  [A1, ahol  $A \parallel B \supset C$ ,  $B \parallel A$ ]
3.  $B \supset C$  [hip]
4.  $(A \supset (B \supset C))$
5.  $(A \supset B) \supset (A \supset C)$
6.  $A \supset B$
7.  $A \supset C$

### Alapvető axiomasémák

- (A1)  $A \supset (B \supset A)$
- (A2)  $(A \supset (B \supset C)) \supset ((A \supset B) \supset (A \supset C))$
- (A3)  $(\neg A \supset B) \supset ((\neg A \supset \neg B) \supset A)$

### Levezetési szabály (modus ponens)

$\{A \supset B, A\} \vdash B$

## 0. Feladat

Mutassuk meg, hogy:

$$\{A \supset B, B \supset C\} \vdash A \supset C$$

1.  $(A \supset (B \supset C)) \supset ((A \supset B) \supset (A \supset C))$  [A2]
2.  $(B \supset C) \supset (A \supset (B \supset C))$  [A1, ahol  $A \parallel B \supset C, B \parallel A$ ]
3.  $B \supset C$  [hip]
4.  $(A \supset (B \supset C))$  [MP(2,3)]
5.  $(A \supset B) \supset (A \supset C)$
6.  $A \supset B$
7.  $A \supset C$

### Alapvető axiomasémák

- (A1)  $A \supset (B \supset A)$
- (A2)  $(A \supset (B \supset C)) \supset ((A \supset B) \supset (A \supset C))$
- (A3)  $(\neg A \supset B) \supset ((\neg A \supset \neg B) \supset A)$

### Levezetési szabály (modus ponens)

$\{A \supset B, A\} \vdash B$

## 0. Feladat

Mutassuk meg, hogy:

$$\{A \supset B, B \supset C\} \vdash A \supset C$$

1.  $(A \supset (B \supset C)) \supset ((A \supset B) \supset (A \supset C))$  [A2]
2.  $(B \supset C) \supset (A \supset (B \supset C))$  [A1, ahol  $A \parallel B \supset C, B \parallel A$ ]
3.  $B \supset C$  [hip]
4.  $(A \supset (B \supset C))$  [MP(2,3)]
5.  $(A \supset B) \supset (A \supset C)$  [MP(1,4)]
6.  $A \supset B$
7.  $A \supset C$

### Alapvető axiomasémák

- (A1)  $A \supset (B \supset A)$
- (A2)  $(A \supset (B \supset C)) \supset ((A \supset B) \supset (A \supset C))$
- (A3)  $(\neg A \supset B) \supset ((\neg A \supset \neg B) \supset A)$

### Levezetési szabály (modus ponens)

$\{A \supset B, A\} \vdash B$

## 0. Feladat

Mutassuk meg, hogy:

$$\{A \supset B, B \supset C\} \vdash A \supset C$$

1.  $(A \supset (B \supset C)) \supset ((A \supset B) \supset (A \supset C))$  [A2]
2.  $(B \supset C) \supset (A \supset (B \supset C))$  [A1, ahol  $A \parallel B \supset C, B \parallel A$ ]
3.  $B \supset C$  [hip]
4.  $(A \supset (B \supset C))$  [MP(2,3)]
5.  $(A \supset B) \supset (A \supset C)$  [MP(1,4)]
6.  $A \supset B$  [hip]
7.  $A \supset C$



### Alapvető axiomasémák

- (A1)  $A \supset (B \supset A)$   
(A2)  $(A \supset (B \supset C)) \supset ((A \supset B) \supset (A \supset C))$   
(A3)  $(\neg A \supset B) \supset ((\neg A \supset \neg B) \supset A)$

### Levezetési szabály (modus ponens)

$\{A \supset B, A\} \vdash B$

## 0. Feladat

Mutassuk meg, hogy:

$$\{A \supset B, B \supset C\} \vdash A \supset C$$

1.  $(A \supset (B \supset C)) \supset ((A \supset B) \supset (A \supset C))$  [A2]
2.  $(B \supset C) \supset (A \supset (B \supset C))$  [A1, ahol  $A \parallel B \supset C, B \parallel A$ ]
3.  $B \supset C$  [hip]
4.  $(A \supset (B \supset C))$  [MP(2,3)]
5.  $(A \supset B) \supset (A \supset C)$  [MP(1,4)]
6.  $A \supset B$  [hip]
7.  $A \supset C$  [MP(5,6)]

#### Alapvető axiomasémák

- (A1)  $A \supset (B \supset A)$
- (A2)  $(A \supset (B \supset C)) \supset ((A \supset B) \supset (A \supset C))$
- (A3)  $(\neg A \supset B) \supset ((\neg A \supset \neg B) \supset A)$

#### Levezetési szabály (modus ponens)

$\{A \supset B, A\} \vdash B$

## 1. Feladat

Mutassuk meg, hogy:

$$\{A \supset (B \supset C), B\} \vdash A \supset C$$

#### Alapvető axiomasémák

- (A1)  $A \supset (B \supset A)$
- (A2)  $(A \supset (B \supset C)) \supset ((A \supset B) \supset (A \supset C))$
- (A3)  $(\neg A \supset B) \supset ((\neg A \supset \neg B) \supset A)$

#### Levezetési szabály (modus ponens)

$\{A \supset B, A\} \vdash B$

## 1. Feladat

Mutassuk meg, hogy:

$$\{A \supset (B \supset C), B\} \vdash A \supset C$$

1.  $(A \supset (B \supset C)) \supset ((A \supset B) \supset (A \supset C))$
2.  $A \supset (B \supset C)$
3.  $(A \supset B) \supset (A \supset C)$
4.  $B \supset (A \supset B)$
5.  $B$
6.  $(A \supset B)$
7.  $A \supset C$

#### Alapvető axiomasémák

- (A1)  $A \supset (B \supset A)$
- (A2)  $(A \supset (B \supset C)) \supset ((A \supset B) \supset (A \supset C))$
- (A3)  $(\neg A \supset B) \supset ((\neg A \supset \neg B) \supset A)$

#### Levezetési szabály (modus ponens)

$\{A \supset B, A\} \vdash B$

## 1. Feladat

Mutassuk meg, hogy:

$$\{A \supset (B \supset C), B\} \vdash A \supset C$$

1.  $(A \supset (B \supset C)) \supset ((A \supset B) \supset (A \supset C))$  [A2]
2.  $A \supset (B \supset C)$
3.  $(A \supset B) \supset (A \supset C)$
4.  $B \supset (A \supset B)$
5.  $B$
6.  $(A \supset B)$
7.  $A \supset C$

### Alapvető axiomasémák

- (A1)  $A \supset (B \supset A)$
- (A2)  $(A \supset (B \supset C)) \supset ((A \supset B) \supset (A \supset C))$
- (A3)  $(\neg A \supset B) \supset ((\neg A \supset \neg B) \supset A)$

### Levezetési szabály (modus ponens)

$\{A \supset B, A\} \vdash B$

## 1. Feladat

Mutassuk meg, hogy:

$$\{A \supset (B \supset C), B\} \vdash A \supset C$$

1.  $(A \supset (B \supset C)) \supset ((A \supset B) \supset (A \supset C))$  [A2]
2.  $A \supset (B \supset C)$  [hip]
3.  $(A \supset B) \supset (A \supset C)$
4.  $B \supset (A \supset B)$
5.  $B$
6.  $(A \supset B)$
7.  $A \supset C$

### Alapvető axiomasémák

- (A1)  $A \supset (B \supset A)$
- (A2)  $(A \supset (B \supset C)) \supset ((A \supset B) \supset (A \supset C))$
- (A3)  $(\neg A \supset B) \supset ((\neg A \supset \neg B) \supset A)$

### Levezetési szabály (modus ponens)

$\{A \supset B, A\} \vdash B$

## 1. Feladat

Mutassuk meg, hogy:

$$\{A \supset (B \supset C), B\} \vdash A \supset C$$

1.  $(A \supset (B \supset C)) \supset ((A \supset B) \supset (A \supset C))$  [A2]
2.  $A \supset (B \supset C)$  [hip]
3.  $(A \supset B) \supset (A \supset C)$  [MP(1,2)]
4.  $B \supset (A \supset B)$
5.  $B$
6.  $(A \supset B)$
7.  $A \supset C$

#### Alapvető axiomasémák

- (A1)  $A \supset (B \supset A)$   
(A2)  $(A \supset (B \supset C)) \supset ((A \supset B) \supset (A \supset C))$   
(A3)  $(\neg A \supset B) \supset ((\neg A \supset \neg B) \supset A)$

#### Levezetési szabály (modus ponens)

$\{A \supset B, A\} \vdash B$

## 1. Feladat

Mutassuk meg, hogy:

$$\{A \supset (B \supset C), B\} \vdash A \supset C$$

1.  $(A \supset (B \supset C)) \supset ((A \supset B) \supset (A \supset C))$  [A2]
2.  $A \supset (B \supset C)$  [hip]
3.  $(A \supset B) \supset (A \supset C)$  [MP(1,2)]
4.  $B \supset (A \supset B)$  [A1, ahol  $A||B, B||A$ ]
5.  $B$
6.  $(A \supset B)$
7.  $A \supset C$

#### Alapvető axiomasémák

- (A1)  $A \supset (B \supset A)$
- (A2)  $(A \supset (B \supset C)) \supset ((A \supset B) \supset (A \supset C))$
- (A3)  $(\neg A \supset B) \supset ((\neg A \supset \neg B) \supset A)$

#### Levezetési szabály (modus ponens)

$\{A \supset B, A\} \vdash B$

## 1. Feladat

Mutassuk meg, hogy:

$$\{A \supset (B \supset C), B\} \vdash A \supset C$$

- 1.  $(A \supset (B \supset C)) \supset ((A \supset B) \supset (A \supset C))$  [A2]
- 2.  $A \supset (B \supset C)$  [hip]
- 3.  $(A \supset B) \supset (A \supset C)$  [MP(1,2)]
- 4.  $B \supset (A \supset B)$  [A1, ahol  $A||B, B||A$ ]
- 5.  $B$  [hip]
- 6.  $(A \supset B)$
- 7.  $A \supset C$



#### Alapvető axiomasémák

- (A1)  $A \supset (B \supset A)$
- (A2)  $(A \supset (B \supset C)) \supset ((A \supset B) \supset (A \supset C))$
- (A3)  $(\neg A \supset B) \supset ((\neg A \supset \neg B) \supset A)$

#### Levezetési szabály (modus ponens)

$\{A \supset B, A\} \vdash B$

## 1. Feladat

Mutassuk meg, hogy:

$$\{A \supset (B \supset C), B\} \vdash A \supset C$$

- 1.  $(A \supset (B \supset C)) \supset ((A \supset B) \supset (A \supset C))$  [A2]
- 2.  $A \supset (B \supset C)$  [hip]
- 3.  $(A \supset B) \supset (A \supset C)$  [MP(1,2)]
- 4.  $B \supset (A \supset B)$  [A1, ahol  $A||B, B||A$ ]
- 5.  $B$  [hip]
- 6.  $(A \supset B)$  [MP(4,5)]
- 7.  $A \supset C$

#### Alapvető axiomasémák

- (A1)  $A \supset (B \supset A)$
- (A2)  $(A \supset (B \supset C)) \supset ((A \supset B) \supset (A \supset C))$
- (A3)  $(\neg A \supset B) \supset ((\neg A \supset \neg B) \supset A)$

#### Levezetési szabály (modus ponens)

$\{A \supset B, A\} \vdash B$

## 1. Feladat

Mutassuk meg, hogy:

$$\{A \supset (B \supset C), B\} \vdash A \supset C$$

- 1.  $(A \supset (B \supset C)) \supset ((A \supset B) \supset (A \supset C))$  [A2]
- 2.  $A \supset (B \supset C)$  [hip]
- 3.  $(A \supset B) \supset (A \supset C)$  [MP(1,2)]
- 4.  $B \supset (A \supset B)$  [A1, ahol  $A||B, B||A$ ]
- 5.  $B$  [hip]
- 6.  $(A \supset B)$  [MP(4,5)]
- 7.  $A \supset C$  [MP(3,6)]

#### Alapvető axiomasémák

- (A1)  $A \supset (B \supset A)$
- (A2)  $(A \supset (B \supset C)) \supset ((A \supset B) \supset (A \supset C))$
- (A3)  $(\neg A \supset B) \supset ((\neg A \supset \neg B) \supset A)$

#### Levezetési szabály (modus ponens)

$\{A \supset B, A\} \vdash B$

## Dedukciós tétel

$\{A_1, A_2, \dots, A_n\} \vdash B$  akkor és csak akkor, ha  $\{A_1, A_2, \dots, A_{n-1}\} \vdash A_n \supset B$

#### Alapvető axiomasémák

- (A1)  $A \supset (B \supset A)$
- (A2)  $(A \supset (B \supset C)) \supset ((A \supset B) \supset (A \supset C))$
- (A3)  $(\neg A \supset B) \supset ((\neg A \supset \neg B) \supset A)$

#### Levezetési szabály (modus ponens)

$\{A \supset B, A\} \vdash B$

## Dedukciós tétel

$\{A_1, A_2, \dots, A_n\} \vdash B$  akkor és csak akkor, ha  $\{A_1, A_2, \dots, A_{n-1}\} \vdash A_n \supset B$

## 2. Feladat

$$\begin{array}{c} \{A \supset B, B \supset C\} \vdash A \supset C \\ \Downarrow \text{D} \\ \{A \supset B, B \supset C, A\} \vdash C \end{array}$$

#### Alapvető axiomasémák

- (A1)  $A \supset (B \supset A)$
- (A2)  $(A \supset (B \supset C)) \supset ((A \supset B) \supset (A \supset C))$
- (A3)  $(\neg A \supset B) \supset ((\neg A \supset \neg B) \supset A)$

#### Levezetési szabály (modus ponens)

$\{A \supset B, A\} \vdash B$

## Dedukciós tétel

$\{A_1, A_2, \dots, A_n\} \vdash B$  akkor és csak akkor, ha  $\{A_1, A_2, \dots, A_{n-1}\} \vdash A_n \supset B$

## 2. Feladat

$$\begin{array}{c} \{A \supset B, B \supset C\} \vdash A \supset C \\ \Downarrow \text{D} \\ \{A \supset B, B \supset C, A\} \vdash C \end{array}$$

1.  $A \supset B$  [hip]

### Alapvető axiomasémák

- (A1)  $A \supset (B \supset A)$
- (A2)  $(A \supset (B \supset C)) \supset ((A \supset B) \supset (A \supset C))$
- (A3)  $(\neg A \supset B) \supset ((\neg A \supset \neg B) \supset A)$

### Levezetési szabály (modus ponens)

$\{A \supset B, A\} \vdash B$

## Dedukciós tétel

$\{A_1, A_2, \dots, A_n\} \vdash B$  akkor és csak akkor, ha  $\{A_1, A_2, \dots, A_{n-1}\} \vdash A_n \supset B$

### 2. Feladat

$$\begin{array}{c} \{A \supset B, B \supset C\} \vdash A \supset C \\ \Downarrow \text{D} \\ \{A \supset B, B \supset C, A\} \vdash C \end{array}$$

1.  $A \supset B$  [hip]
2.  $B \supset C$  [hip]

### Alapvető axiomasémák

- (A1)  $A \supset (B \supset A)$
- (A2)  $(A \supset (B \supset C)) \supset ((A \supset B) \supset (A \supset C))$
- (A3)  $(\neg A \supset B) \supset ((\neg A \supset \neg B) \supset A)$

### Levezetési szabály (modus ponens)

$\{A \supset B, A\} \vdash B$

## Dedukciós tétel

$\{A_1, A_2, \dots, A_n\} \vdash B$  akkor és csak akkor, ha  $\{A_1, A_2, \dots, A_{n-1}\} \vdash A_n \supset B$

### 2. Feladat

$$\begin{array}{c} \{A \supset B, B \supset C\} \vdash A \supset C \\ \Downarrow \text{D} \\ \{A \supset B, B \supset C, A\} \vdash C \end{array}$$

1.  $A \supset B$  [hip]
2.  $B \supset C$  [hip]
3.  $A$  [hip]

### Alapvető axiomasémák

- (A1)  $A \supset (B \supset A)$
- (A2)  $(A \supset (B \supset C)) \supset ((A \supset B) \supset (A \supset C))$
- (A3)  $(\neg A \supset B) \supset ((\neg A \supset \neg B) \supset A)$

### Levezetési szabály (modus ponens)

$\{A \supset B, A\} \vdash B$

## Dedukciós tétel

$\{A_1, A_2, \dots, A_n\} \vdash B$  akkor és csak akkor, ha  $\{A_1, A_2, \dots, A_{n-1}\} \vdash A_n \supset B$

### 2. Feladat

$$\begin{array}{c} \{A \supset B, B \supset C\} \vdash A \supset C \\ \Downarrow \text{D} \\ \{A \supset B, B \supset C, A\} \vdash C \end{array}$$

- 1.  $A \supset B$  [hip]
- 2.  $B \supset C$  [hip]
- 3.  $A$  [hip]
- 4.  $B$  [MP(1,3)]



### Alapvető axiomasémák

- (A1)  $A \supset (B \supset A)$
- (A2)  $(A \supset (B \supset C)) \supset ((A \supset B) \supset (A \supset C))$
- (A3)  $(\neg A \supset B) \supset ((\neg A \supset \neg B) \supset A)$

### Levezetési szabály (modus ponens)

$\{A \supset B, A\} \vdash B$

## Dedukciós tétel

$\{A_1, A_2, \dots, A_n\} \vdash B$  akkor és csak akkor, ha  $\{A_1, A_2, \dots, A_{n-1}\} \vdash A_n \supset B$

### 2. Feladat

$$\begin{array}{c} \{A \supset B, B \supset C\} \vdash A \supset C \\ \Downarrow \text{D} \\ \{A \supset B, B \supset C, A\} \vdash C \end{array}$$

- 1.  $A \supset B$  [hip]
- 2.  $B \supset C$  [hip]
- 3.  $A$  [hip]
- 4.  $B$  [MP(1,3)]
- 5.  $C$  [MP(2,4)]

### Használható axiomasémák

- (A1)  $A \supset (B \supset A)$
- (A2)  $(A \supset (B \supset C)) \supset ((A \supset B) \supset (A \supset C))$
- (A3)  $(\neg A \supset B) \supset ((\neg A \supset \neg B) \supset A)$
  
- (B1)  $A \supset A$

### Levezetési szabály (modus ponens)

$\{A \supset B, A\} \vdash_0 B$

## 3. Feladat

Mutassuk meg, hogy  $\vdash \neg\neg A \supset A$  bizonyítható.

$$\vdash \neg\neg A \supset A$$

### Használható axiomasémák

- (A1)  $A \supset (B \supset A)$   
(A2)  $(A \supset (B \supset C)) \supset ((A \supset B) \supset (A \supset C))$   
(A3)  $(\neg A \supset B) \supset ((\neg A \supset \neg B) \supset A)$

(B1)  $A \supset A$

### Levezetési szabály (modus ponens)

$$\{A \supset B, A\} \vdash_0 B$$

## 3. Feladat

Mutassuk meg, hogy  $\vdash \neg\neg A \supset A$  bizonyítható.

$$\begin{array}{c} \vdash \neg\neg A \supset A \\ \Downarrow \text{D} \\ \{\neg\neg A\} \vdash A \end{array}$$

1.  $(\neg A \supset \neg A) \supset ((\neg A \supset \neg\neg A) \supset A)$
2.  $\neg A \supset \neg A$
3.  $(\neg A \supset \neg\neg A) \supset A$
4.  $\neg\neg A \supset (\neg A \supset \neg\neg A)$
5.  $\neg\neg A$
6.  $\neg A \supset \neg\neg A$
7.  $A$

### Használható axiomasémák

- (A1)  $A \supset (B \supset A)$   
(A2)  $(A \supset (B \supset C)) \supset ((A \supset B) \supset (A \supset C))$   
(A3)  $(\neg A \supset B) \supset ((\neg A \supset \neg B) \supset A)$

- (B1)  $A \supset A$

### Levezetési szabály (modus ponens)

$\{A \supset B, A\} \vdash_0 B$

## 3. Feladat

Mutassuk meg, hogy  $\vdash \neg\neg A \supset A$  bizonyítható.

$$\begin{array}{c} \vdash \neg\neg A \supset A \\ \Downarrow \text{D} \\ \{\neg\neg A\} \vdash A \end{array}$$

1.  $(\neg A \supset \neg A) \supset ((\neg A \supset \neg\neg A) \supset A)$  [A3; A||A; B|| $\neg A$ ]
2.  $\neg A \supset \neg A$
3.  $(\neg A \supset \neg\neg A) \supset A$
4.  $\neg\neg A \supset (\neg A \supset \neg\neg A)$
5.  $\neg\neg A$
6.  $\neg A \supset \neg\neg A$
7.  $A$

### Használható axiomasémák

- (A1)  $A \supset (B \supset A)$   
(A2)  $(A \supset (B \supset C)) \supset ((A \supset B) \supset (A \supset C))$   
(A3)  $(\neg A \supset B) \supset ((\neg A \supset \neg B) \supset A)$

- (B1)  $A \supset A$

### Levezetési szabály (modus ponens)

$\{A \supset B, A\} \vdash_0 B$

## 3. Feladat

Mutassuk meg, hogy  $\vdash \neg\neg A \supset A$  bizonyítható.

$\vdash \neg\neg A \supset A$

$\Downarrow D$

$\{\neg\neg A\} \vdash A$

- |    |   |                         |
|----|---|-------------------------|
| 1. | $(\neg A \supset \neg A) \supset ((\neg A \supset \neg\neg A) \supset A)$ | $[A3; A  A; B  \neg A]$ |
| 2. | $\neg A \supset \neg A$   | $[B1; A  \neg A]$       |
| 3. | $(\neg A \supset \neg\neg A) \supset A$                                   |                         |
| 4. | $\neg\neg A \supset (\neg A \supset \neg\neg A)$                          |                         |
| 5. | $\neg\neg A$  |                         |
| 6. | $\neg A \supset \neg\neg A$   |                         |
| 7. | $A$   |                         |

### Használható axiomasémák

- (A1)  $A \supset (B \supset A)$   
(A2)  $(A \supset (B \supset C)) \supset ((A \supset B) \supset (A \supset C))$   
(A3)  $(\neg A \supset B) \supset ((\neg A \supset \neg B) \supset A)$

- (B1)  $A \supset A$

### Levezetési szabály (modus ponens)

$\{A \supset B, A\} \vdash_0 B$

## 3. Feladat

Mutassuk meg, hogy  $\vdash \neg\neg A \supset A$  bizonyítható.

$\vdash \neg\neg A \supset A$

$\Downarrow D$

$\{\neg\neg A\} \vdash A$

- |    |   |                         |
|----|---|-------------------------|
| 1. | $(\neg A \supset \neg A) \supset ((\neg A \supset \neg\neg A) \supset A)$ | $[A3; A  A; B  \neg A]$ |
| 2. | $\neg A \supset \neg A$   | $[B1; A  \neg A]$       |
| 3. | $(\neg A \supset \neg\neg A) \supset A$                                   | $[MP(1,2)]$             |
| 4. | $\neg\neg A \supset (\neg A \supset \neg\neg A)$                          |                         |
| 5. | $\neg\neg A$  |                         |
| 6. | $\neg A \supset \neg\neg A$   |                         |
| 7. | $A$   |                         |

### Használható axiomasémák

- (A1)  $A \supset (B \supset A)$   
(A2)  $(A \supset (B \supset C)) \supset ((A \supset B) \supset (A \supset C))$   
(A3)  $(\neg A \supset B) \supset ((\neg A \supset \neg B) \supset A)$

(B1)  $A \supset A$

### Levezetési szabály (modus ponens)

$\{A \supset B, A\} \vdash_0 B$

## 3. Feladat

Mutassuk meg, hogy  $\vdash \neg\neg A \supset A$  bizonyítható.

$$\vdash \neg\neg A \supset A$$

$$\Downarrow D$$

$$\{\neg\neg A\} \vdash A$$

- |    |   |                                  |
|----|---|----------------------------------|
| 1. | $(\neg A \supset \neg A) \supset ((\neg A \supset \neg\neg A) \supset A)$ | $[A3; A  A; B  \neg A]$          |
| 2. | $\neg A \supset \neg A$   | $[B1; A  \neg A]$                |
| 3. | $(\neg A \supset \neg\neg A) \supset A$                                   | $[MP(1,2)]$                      |
| 4. | $\neg\neg A \supset (\neg A \supset \neg\neg A)$                          | $[A1; A  \neg\neg A; B  \neg A]$ |
| 5. | $\neg\neg A$  |                                  |
| 6. | $\neg A \supset \neg\neg A$   |                                  |
| 7. | $A$   |                                  |

### Használható axiomasémák

- (A1)  $A \supset (B \supset A)$   
(A2)  $(A \supset (B \supset C)) \supset ((A \supset B) \supset (A \supset C))$   
(A3)  $(\neg A \supset B) \supset ((\neg A \supset \neg B) \supset A)$

(B1)  $A \supset A$

### Levezetési szabály (modus ponens)

$\{A \supset B, A\} \vdash_0 B$

## 3. Feladat

Mutassuk meg, hogy  $\vdash \neg\neg A \supset A$  bizonyítható.

$$\vdash \neg\neg A \supset A$$

$$\Downarrow D$$

$$\{\neg\neg A\} \vdash A$$

- |    |   |                                  |
|----|---|----------------------------------|
| 1. | $(\neg A \supset \neg A) \supset ((\neg A \supset \neg\neg A) \supset A)$ | $[A3; A  A; B  \neg A]$          |
| 2. | $\neg A \supset \neg A$   | $[B1; A  \neg A]$                |
| 3. | $(\neg A \supset \neg\neg A) \supset A$                                   | $[MP(1,2)]$                      |
| 4. | $\neg\neg A \supset (\neg A \supset \neg\neg A)$                          | $[A1; A  \neg\neg A; B  \neg A]$ |
| 5. | $\neg\neg A$  | $[hip]$                          |
| 6. | $\neg A \supset \neg\neg A$   |                                  |
| 7. | $A$   |                                  |



### Használható axiomasémák

- (A1)  $A \supset (B \supset A)$   
(A2)  $(A \supset (B \supset C)) \supset ((A \supset B) \supset (A \supset C))$   
(A3)  $(\neg A \supset B) \supset ((\neg A \supset \neg B) \supset A)$

- (B1)  $A \supset A$

### Levezetési szabály (modus ponens)

$\{A \supset B, A\} \vdash_0 B$

## 3. Feladat

Mutassuk meg, hogy  $\vdash \neg\neg A \supset A$  bizonyítható.

$\vdash \neg\neg A \supset A$

$\Downarrow D$

$\{\neg\neg A\} \vdash A$

- |    |   |                                  |
|----|---|----------------------------------|
| 1. | $(\neg A \supset \neg A) \supset ((\neg A \supset \neg\neg A) \supset A)$ | $[A3; A  A; B  \neg A]$          |
| 2. | $\neg A \supset \neg A$   | $[B1; A  \neg A]$                |
| 3. | $(\neg A \supset \neg\neg A) \supset A$                                   | $[MP(1,2)]$                      |
| 4. | $\neg\neg A \supset (\neg A \supset \neg\neg A)$                          | $[A1; A  \neg\neg A; B  \neg A]$ |
| 5. | $\neg\neg A$  | $[hip]$                          |
| 6. | $\neg A \supset \neg\neg A$   | $[MP(4,5)]$                      |
| 7. | $A$   |                                  |

### Használható axiomasémák

- (A1)  $A \supset (B \supset A)$   
(A2)  $(A \supset (B \supset C)) \supset ((A \supset B) \supset (A \supset C))$   
(A3)  $(\neg A \supset B) \supset ((\neg A \supset \neg B) \supset A)$

(B1)  $A \supset A$

### Levezetési szabály (modus ponens)

$\{A \supset B, A\} \vdash_0 B$

## 3. Feladat

Mutassuk meg, hogy  $\vdash \neg\neg A \supset A$  bizonyítható.

$$\vdash \neg\neg A \supset A$$

$$\Downarrow D$$

$$\{\neg\neg A\} \vdash A$$

- |    |   |                                  |
|----|---|----------------------------------|
| 1. | $(\neg A \supset \neg A) \supset ((\neg A \supset \neg\neg A) \supset A)$ | $[A3; A  A; B  \neg A]$          |
| 2. | $\neg A \supset \neg A$   | $[B1; A  \neg A]$                |
| 3. | $(\neg A \supset \neg\neg A) \supset A$                                   | $[MP(1,2)]$                      |
| 4. | $\neg\neg A \supset (\neg A \supset \neg\neg A)$                          | $[A1; A  \neg\neg A; B  \neg A]$ |
| 5. | $\neg\neg A$  | $[hip]$                          |
| 6. | $\neg A \supset \neg\neg A$   | $[MP(4,5)]$                      |
| 7. | $A$   | $[MP(3,6)]$                      |

### Használható axiomasémák

- (A1)  $A \supset (B \supset A)$   
(A2)  $(A \supset (B \supset C)) \supset ((A \supset B) \supset (A \supset C))$   
(A3)  $(\neg A \supset B) \supset ((\neg A \supset \neg B) \supset A)$

(B1)  $A \supset A$

### Levezetési szabály (modus ponens)

$\{A \supset B, A\} \vdash_0 B$

## 3. Feladat

Mutassuk meg, hogy  $\vdash \neg\neg A \supset A$  bizonyítható.

$$\vdash \neg\neg A \supset A$$

$$\Downarrow \text{D}$$

$$\{\neg\neg A\} \vdash A$$

- |    |   |  |
|----|---|--|
| 1. | $(\neg A \supset \neg A) \supset ((\neg A \supset \neg\neg A) \supset A)$ | [A3; A  A; B   $\neg A$ ]              |
| 2. | $\neg A \supset \neg A$   | [B1; A   $\neg A$ ]                    |
| 3. | $(\neg A \supset \neg\neg A) \supset A$                                   | [MP(1,2)]                              |
| 4. | $\neg\neg A \supset (\neg A \supset \neg\neg A)$                          | [A1; A   $\neg\neg A$ ; B   $\neg A$ ] |
| 5. | $\neg\neg A$  | [hip]                                  |
| 6. | $\neg A \supset \neg\neg A$   | [MP(4,5)]                              |
| 7. | $A$   | [MP(3,6)]                              |

Ez után használható axiómaséma: B4 -  $\neg\neg A \supset A$

### Használható axiomasémák

- (A1)  $A \supset (B \supset A)$
- (A2)  $(A \supset (B \supset C)) \supset ((A \supset B) \supset (A \supset C))$
- (A3)  $(\neg A \supset B) \supset ((\neg A \supset \neg B) \supset A)$

- (B1)  $A \supset A$
- (B3)  $A \supset \neg\neg A$
- (B4)  $\neg\neg A \supset A$

### Levezetési szabály (modus ponens)

$\{A \supset B, A\} \vdash_0 B$

## 4. Feladat

Készítsük el a következő levezetést:  $\{A \supset B\} \vdash_0 \neg\neg A \supset \neg\neg B$

### Használható axiomasémák

- (A1)  $A \supset (B \supset A)$
- (A2)  $(A \supset (B \supset C)) \supset ((A \supset B) \supset (A \supset C))$
- (A3)  $(\neg A \supset B) \supset ((\neg A \supset \neg B) \supset A)$

- (B1)  $A \supset A$
- (B3)  $A \supset \neg\neg A$
- (B4)  $\neg\neg A \supset A$

### Levezetési szabály (modus ponens)

$\{A \supset B, A\} \vdash_0 B$

## 4. Feladat

Készítsük el a következő levezetést:  $\{A \supset B\} \vdash_0 \neg\neg A \supset \neg\neg B$

Dedukciós tétel használata után a következő levezetés kell:  $\{A \supset B, \neg\neg A\} \vdash_0 \neg\neg B$

#### Használható axiomasémák

- (A1)  $A \supset (B \supset A)$
- (A2)  $(A \supset (B \supset C)) \supset ((A \supset B) \supset (A \supset C))$
- (A3)  $(\neg A \supset B) \supset ((\neg A \supset \neg B) \supset A)$
  
- (B1)  $A \supset A$
- (B3)  $A \supset \neg\neg A$
- (B4)  $\neg\neg A \supset A$

#### Levezetési szabály (modus ponens)

$\{A \supset B, A\} \vdash_0 B$

## 4. Feladat

Készítsük el a következő levezetést:  $\{A \supset B\} \vdash_0 \neg\neg A \supset \neg\neg B$

Dedukciós tétel használata után a következő levezetés kell:  $\{A \supset B, \neg\neg A\} \vdash_0 \neg\neg B$

1.  $B \supset \neg\neg B$  [B3; A||B]

#### Használható axiomasémák

- (A1)  $A \supset (B \supset A)$
- (A2)  $(A \supset (B \supset C)) \supset ((A \supset B) \supset (A \supset C))$
- (A3)  $(\neg A \supset B) \supset ((\neg A \supset \neg B) \supset A)$
  
- (B1)  $A \supset A$
- (B3)  $A \supset \neg\neg A$
- (B4)  $\neg\neg A \supset A$

#### Levezetési szabály (modus ponens)

$\{A \supset B, A\} \vdash_0 B$

## 4. Feladat

Készítsük el a következő levezetést:  $\{A \supset B\} \vdash_0 \neg\neg A \supset \neg\neg B$

Dedukciós tétel használata után a következő levezetés kell:  $\{A \supset B, \neg\neg A\} \vdash_0 \neg\neg B$

- 1.  $B \supset \neg\neg B$  [B3; A||B]
- 2.  $A \supset B$  [hip]

#### Használható axiomasémák

- (A1)  $A \supset (B \supset A)$
- (A2)  $(A \supset (B \supset C)) \supset ((A \supset B) \supset (A \supset C))$
- (A3)  $(\neg A \supset B) \supset ((\neg A \supset \neg B) \supset A)$
  
- (B1)  $A \supset A$
- (B3)  $A \supset \neg\neg A$
- (B4)  $\neg\neg A \supset A$

#### Levezetési szabály (modus ponens)

$\{A \supset B, A\} \vdash_0 B$

## 4. Feladat

Készítsük el a következő levezetést:  $\{A \supset B\} \vdash_0 \neg\neg A \supset \neg\neg B$

Dedukciós tétel használata után a következő levezetés kell:  $\{A \supset B, \neg\neg A\} \vdash_0 \neg\neg B$

- 1.  $B \supset \neg\neg B$  [B3; A||B]
- 2.  $A \supset B$  [hip]
- 3.  $\neg\neg A \supset A$  [B4; A||A]



#### Használható axiomasémák

- (A1)  $A \supset (B \supset A)$
- (A2)  $(A \supset (B \supset C)) \supset ((A \supset B) \supset (A \supset C))$
- (A3)  $(\neg A \supset B) \supset ((\neg A \supset \neg B) \supset A)$
  
- (B1)  $A \supset A$
- (B3)  $A \supset \neg\neg A$
- (B4)  $\neg\neg A \supset A$

#### Levezetési szabály (modus ponens)

$\{A \supset B, A\} \vdash_0 B$

## 4. Feladat

Készítsük el a következő levezetést:  $\{A \supset B\} \vdash_0 \neg\neg A \supset \neg\neg B$

Dedukciós tétel használata után a következő levezetés kell:  $\{A \supset B, \neg\neg A\} \vdash_0 \neg\neg B$

- 1.  $B \supset \neg\neg B$  [B3; A||B]
- 2.  $A \supset B$  [hip]
- 3.  $\neg\neg A \supset A$  [B4; A||A]
- 4.  $\neg\neg A$  [hip]

#### Használható axiomasémák

- (A1)  $A \supset (B \supset A)$
- (A2)  $(A \supset (B \supset C)) \supset ((A \supset B) \supset (A \supset C))$
- (A3)  $(\neg A \supset B) \supset ((\neg A \supset \neg B) \supset A)$
  
- (B1)  $A \supset A$
- (B3)  $A \supset \neg\neg A$
- (B4)  $\neg\neg A \supset A$

#### Levezetési szabály (modus ponens)

$\{A \supset B, A\} \vdash_0 B$

## 4. Feladat

Készítsük el a következő levezetést:  $\{A \supset B\} \vdash_0 \neg\neg A \supset \neg\neg B$

Dedukciós tétel használata után a következő levezetés kell:  $\{A \supset B, \neg\neg A\} \vdash_0 \neg\neg B$

- 1.  $B \supset \neg\neg B$  [B3; A||B]
- 2.  $A \supset B$  [hip]
- 3.  $\neg\neg A \supset A$  [B4; A||A]
- 4.  $\neg\neg A$  [hip]
- 5.  $A$  [MP(3,4)]

#### Használható axiomasémák

- (A1)  $A \supset (B \supset A)$
- (A2)  $(A \supset (B \supset C)) \supset ((A \supset B) \supset (A \supset C))$
- (A3)  $(\neg A \supset B) \supset ((\neg A \supset \neg B) \supset A)$
  
- (B1)  $A \supset A$
- (B3)  $A \supset \neg\neg A$
- (B4)  $\neg\neg A \supset A$

#### Levezetési szabály (modus ponens)

$\{A \supset B, A\} \vdash_0 B$

## 4. Feladat

Készítsük el a következő levezetést:  $\{A \supset B\} \vdash_0 \neg\neg A \supset \neg\neg B$

Dedukciós tétel használata után a következő levezetés kell:  $\{A \supset B, \neg\neg A\} \vdash_0 \neg\neg B$

- 1.  $B \supset \neg\neg B$  [B3; A||B]
- 2.  $A \supset B$  [hip]
- 3.  $\neg\neg A \supset A$  [B4; A||A]
- 4.  $\neg\neg A$  [hip]
- 5.  $A$  [MP(3,4)]
- 6.  $B$  [MP(2,5)]

#### Használható axiomasémák

- (A1)  $A \supset (B \supset A)$
- (A2)  $(A \supset (B \supset C)) \supset ((A \supset B) \supset (A \supset C))$
- (A3)  $(\neg A \supset B) \supset ((\neg A \supset \neg B) \supset A)$
  
- (B1)  $A \supset A$
- (B3)  $A \supset \neg\neg A$
- (B4)  $\neg\neg A \supset A$

#### Levezetési szabály (modus ponens)

$\{A \supset B, A\} \vdash_0 B$

## 4. Feladat

Készítsük el a következő levezetést:  $\{A \supset B\} \vdash_0 \neg\neg A \supset \neg\neg B$

Dedukciós tétel használata után a következő levezetés kell:  $\{A \supset B, \neg\neg A\} \vdash_0 \neg\neg B$

- 1.  $B \supset \neg\neg B$  [B3; A||B]
- 2.  $A \supset B$  [hip]
- 3.  $\neg\neg A \supset A$  [B4; A||A]
- 4.  $\neg\neg A$  [hip]
- 5.  $A$  [MP(3,4)]
- 6.  $B$  [MP(2,5)]
- 7.  $\neg\neg B$  [MP(1,6)]

#### Használható axiomasémák

- (A1)  $A \supset (B \supset A)$
- (A2)  $(A \supset (B \supset C)) \supset ((A \supset B) \supset (A \supset C))$
- (A3)  $(\neg A \supset B) \supset ((\neg A \supset \neg B) \supset A)$
  
- (B1)  $A \supset A$
- (B3)  $A \supset \neg\neg A$
- (B4)  $\neg\neg A \supset A$

#### Levezetési szabály (modus ponens)

$\{A \supset B, A\} \vdash_0 B$

## 4. Feladat

Készítsük el a következő levezetést:  $\{A \supset B\} \vdash_0 \neg\neg A \supset \neg\neg B$

Dedukciós tétel használata után a következő levezetés kell:  $\{A \supset B, \neg\neg A\} \vdash_0 \neg\neg B$

- 1.  $B \supset \neg\neg B$  [B3; A||B]
- 2.  $A \supset B$  [hip]
- 3.  $\neg\neg A \supset A$  [B4; A||A]
- 4.  $\neg\neg A$  [hip]
- 5.  $A$  [MP(3,4)]
- 6.  $B$  [MP(2,5)]
- 7.  $\neg\neg B$  [MP(1,6)]

Ez után használható axiómaséma: B5 -  $(A \supset B) \supset (\neg\neg A \supset \neg\neg B)$

## 5. Feladat

Egy bál szervezése a feladatod. Mikor a bejáratot ellenőrzöd, két feliratot látsz kiírva. 1. Ha Ön időben érkezett, akkor az üdvözlő italokat a bejárat melletti asztalon találja. 2. Ha az üdvözlő italokat nem találja a bejárat melletti asztalon, akkor Ön nem érkezett időben.

Bár az információ, amit hordoznak nem túl egyértelmű, téged mégis a redundancia zavar, amit felismersz bennük. Hirtelen eszedbe jut, hogy az ítéletkalkulus segítségével egyszerűen el tudnád dönteni, hogy a két állítás ugyanaz-e. Neki is állsz az állítások formalizálásának, és kiszámolod a két levezetést, amely az ekvivalencia megállapításához szükséges. Kérlek írd le a folyamatot!

Bizonyítani kell:

## 5. Feladat

Egy bál szervezése a feladatod. Mikor a bejáratot ellenőrzöd, két feliratot látsz kiírva. 1. Ha Ön időben érkezett, akkor az üdvözlő italokat a bejárat melletti asztalon találja. 2. Ha az üdvözlő italokat nem találja a bejárat melletti asztalon, akkor Ön nem érkezett időben.

Bár az információ, amit hordoznak nem túl egyértelmű, téged mégis a redundancia zavar, amit felismersz bennük. Hirtelen eszedbe jut, hogy az ítéletkalkulus segítségével egyszerűen el tudnád dönteni, hogy a két állítás ugyanaz-e. Neki is állsz az állítások formalizálásának, és kiszámolod a két levezetést, amely az ekvivalencia megállapításához szükséges. Kérlek írd le a folyamatot!

Bizonyítani kell:

$\{X \supset Y\} \vdash_0 \neg Y \supset \neg X$ , illetve

## 5. Feladat

Egy bál szervezése a feladatod. Mikor a bejáratot ellenőrzöd, két feliratot látsz kiírva. 1. Ha Ön időben érkezett, akkor az üdvözlő italokat a bejárat melletti asztalon találja. 2. Ha az üdvözlő italokat nem találja a bejárat melletti asztalon, akkor Ön nem érkezett időben.

Bár az információ, amit hordoznak nem túl egyértelmű, téged mégis a redundancia zavar, amit felismersz bennük. Hirtelen eszedbe jut, hogy az ítéletkalkulus segítségével egyszerűen el tudnád dönteni, hogy a két állítás ugyanaz-e. Neki is állsz az állítások formalizálásának, és kiszámolod a két levezetést, amely az ekvivalencia megállapításához szükséges. Kérlek írd le a folyamatot!

Bizonyítani kell:

$\{X \supset Y\} \vdash_0 \neg Y \supset \neg X$ , illetve

$\{\neg Y \supset \neg X\} \vdash_0 X \supset Y$



### Használható axiomasémák

- (A1)  $A \supset (B \supset A)$
- (A2)  $(A \supset (B \supset C)) \supset ((A \supset B) \supset (A \supset C))$
- (A3)  $(\neg A \supset B) \supset ((\neg A \supset \neg B) \supset A)$
  
- (B1)  $A \supset A$
- (B3)  $A \supset \neg\neg A$
- (B4)  $\neg\neg A \supset A$
- (B5)  $(A \supset B) \supset (\neg\neg A \supset \neg\neg B)$

### Levezetési szabály (modus ponens)

$\{A \supset B, A\} \vdash_0 B$

$\{X \supset Y\} \vdash_0 \neg Y \supset \neg X$

### Használható axiomasémák

- (A1)  $A \supset (B \supset A)$
- (A2)  $(A \supset (B \supset C)) \supset ((A \supset B) \supset (A \supset C))$
- (A3)  $(\neg A \supset B) \supset ((\neg A \supset \neg B) \supset A)$
  
- (B1)  $A \supset A$
- (B3)  $A \supset \neg\neg A$
- (B4)  $\neg\neg A \supset A$
- (B5)  $(A \supset B) \supset (\neg\neg A \supset \neg\neg B)$

### Levezetési szabály (modus ponens)

$$\{A \supset B, A\} \vdash_0 B$$

$$\{X \supset Y\} \vdash_0 \neg Y \supset \neg X$$

Dedukciós tétel alkalmazása után:  $\{X \supset Y, \neg Y\} \vdash_0 \neg X$

### Használható axiomasémák

- (A1)  $A \supset (B \supset A)$
- (A2)  $(A \supset (B \supset C)) \supset ((A \supset B) \supset (A \supset C))$
- (A3)  $(\neg A \supset B) \supset ((\neg A \supset \neg B) \supset A)$
  
- (B1)  $A \supset A$
- (B3)  $A \supset \neg\neg A$
- (B4)  $\neg\neg A \supset A$
- (B5)  $(A \supset B) \supset (\neg\neg A \supset \neg\neg B)$

### Levezetési szabály (modus ponens)

$\{A \supset B, A\} \vdash_0 B$

$\{X \supset Y\} \vdash_0 \neg Y \supset \neg X$

Dedukciós tétel alkalmazása után:  $\{X \supset Y, \neg Y\} \vdash_0 \neg X$

1.  $(\neg\neg X \supset \neg Y) \supset ((\neg\neg X \supset \neg\neg Y) \supset \neg X) \quad [A3; A||\neg X; B||\neg Y]$

### Használható axiomasémák

- (A1)  $A \supset (B \supset A)$
- (A2)  $(A \supset (B \supset C)) \supset ((A \supset B) \supset (A \supset C))$
- (A3)  $(\neg A \supset B) \supset ((\neg A \supset \neg B) \supset A)$
  
- (B1)  $A \supset A$
- (B3)  $A \supset \neg\neg A$
- (B4)  $\neg\neg A \supset A$
- (B5)  $(A \supset B) \supset (\neg\neg A \supset \neg\neg B)$

### Levezetési szabály (modus ponens)

$\{A \supset B, A\} \vdash_0 B$

$\{X \supset Y\} \vdash_0 \neg Y \supset \neg X$

Dedukciós tétel alkalmazása után:  $\{X \supset Y, \neg Y\} \vdash_0 \neg X$

1.  $(\neg\neg X \supset \neg Y) \supset ((\neg\neg X \supset \neg\neg Y) \supset \neg X)$  [A3; A|| $\neg X$ ; B|| $\neg Y$ ]
2.  $\neg Y \supset (\neg\neg X \supset \neg Y)$  [A1; A|| $\neg Y$ ; B|| $\neg\neg X$ ]

### Használható axiomasémák

- (A1)  $A \supset (B \supset A)$
- (A2)  $(A \supset (B \supset C)) \supset ((A \supset B) \supset (A \supset C))$
- (A3)  $(\neg A \supset B) \supset ((\neg A \supset \neg B) \supset A)$
  
- (B1)  $A \supset A$
- (B3)  $A \supset \neg\neg A$
- (B4)  $\neg\neg A \supset A$
- (B5)  $(A \supset B) \supset (\neg\neg A \supset \neg\neg B)$

### Levezetési szabály (modus ponens)

$\{A \supset B, A\} \vdash_0 B$

$\{X \supset Y\} \vdash_0 \neg Y \supset \neg X$

Dedukciós tétel alkalmazása után:  $\{X \supset Y, \neg Y\} \vdash_0 \neg X$

- |    |  |                                  |
|----|--|----------------------------------|
| 1. | $(\neg\neg X \supset \neg Y) \supset ((\neg\neg X \supset \neg\neg Y) \supset \neg X)$ | $[A3; A  \neg X; B  \neg Y]$     |
| 2. | $\neg Y \supset (\neg\neg X \supset \neg Y)$   | $[A1; A  \neg Y; B  \neg\neg X]$ |
| 3. | $\neg Y$   | $[\text{hip}]$                   |

### Használható axiomasémák

- (A1)  $A \supset (B \supset A)$
- (A2)  $(A \supset (B \supset C)) \supset ((A \supset B) \supset (A \supset C))$
- (A3)  $(\neg A \supset B) \supset ((\neg A \supset \neg B) \supset A)$
  
- (B1)  $A \supset A$
- (B3)  $A \supset \neg\neg A$
- (B4)  $\neg\neg A \supset A$
- (B5)  $(A \supset B) \supset (\neg\neg A \supset \neg\neg B)$

### Levezetési szabály (modus ponens)

$\{A \supset B, A\} \vdash_0 B$

$\{X \supset Y\} \vdash_0 \neg Y \supset \neg X$

Dedukciós tétel alkalmazása után:  $\{X \supset Y, \neg Y\} \vdash_0 \neg X$

- |    |  |                                  |
|----|--|----------------------------------|
| 1. | $(\neg\neg X \supset \neg Y) \supset ((\neg\neg X \supset \neg\neg Y) \supset \neg X)$ | $[A3; A  \neg X; B  \neg Y]$     |
| 2. | $\neg Y \supset (\neg\neg X \supset \neg Y)$   | $[A1; A  \neg Y; B  \neg\neg X]$ |
| 3. | $\neg Y$   | $[\text{hip}]$                   |
| 4. | $\neg\neg X \supset \neg Y$  | $[\text{MP}(2,3)]$               |

### Használható axiomasémák

- (A1)  $A \supset (B \supset A)$
- (A2)  $(A \supset (B \supset C)) \supset ((A \supset B) \supset (A \supset C))$
- (A3)  $(\neg A \supset B) \supset ((\neg A \supset \neg B) \supset A)$
  
- (B1)  $A \supset A$
- (B3)  $A \supset \neg\neg A$
- (B4)  $\neg\neg A \supset A$
- (B5)  $(A \supset B) \supset (\neg\neg A \supset \neg\neg B)$

### Levezetési szabály (modus ponens)

$\{A \supset B, A\} \vdash_0 B$

$\{X \supset Y\} \vdash_0 \neg Y \supset \neg X$

Dedukciós tétel alkalmazása után:  $\{X \supset Y, \neg Y\} \vdash_0 \neg X$

- |    |  |  |
|----|--|--|
| 1. | $(\neg\neg X \supset \neg Y) \supset ((\neg\neg X \supset \neg\neg Y) \supset \neg X)$ | [A3; A   $\neg X$ ; B   $\neg Y$ ]     |
| 2. | $\neg Y \supset (\neg\neg X \supset \neg Y)$   | [A1; A   $\neg Y$ ; B   $\neg\neg X$ ] |
| 3. | $\neg Y$   | [hip]                                  |
| 4. | $\neg\neg X \supset \neg Y$  | [MP(2,3)]                              |
| 5. | $(\neg\neg X \supset \neg\neg Y) \supset \neg X$                                       | [MP(1,4)]                              |

### Használható axiomasémák

- (A1)  $A \supset (B \supset A)$
- (A2)  $(A \supset (B \supset C)) \supset ((A \supset B) \supset (A \supset C))$
- (A3)  $(\neg A \supset B) \supset ((\neg A \supset \neg B) \supset A)$
  
- (B1)  $A \supset A$
- (B3)  $A \supset \neg\neg A$
- (B4)  $\neg\neg A \supset A$
- (B5)  $(A \supset B) \supset (\neg\neg A \supset \neg\neg B)$

### Levezetési szabály (modus ponens)

$\{A \supset B, A\} \vdash_0 B$

$\{X \supset Y\} \vdash_0 \neg Y \supset \neg X$

Dedukciós tétel alkalmazása után:  $\{X \supset Y, \neg Y\} \vdash_0 \neg X$

- |    |  |                                  |
|----|--|----------------------------------|
| 1. | $(\neg\neg X \supset \neg Y) \supset ((\neg\neg X \supset \neg\neg Y) \supset \neg X)$ | [A3; $A  \neg X$ ; $B  \neg Y$ ] |
| 2. | $\neg Y \supset (\neg\neg X \supset \neg Y)$   | [A1; $A  \neg Y$ ; $B  \neg X$ ] |
| 3. | $\neg Y$   | [hip]                            |
| 4. | $\neg\neg X \supset \neg Y$  | [MP(2,3)]                        |
| 5. | $(\neg\neg X \supset \neg\neg Y) \supset \neg X$                                       | [MP(1,4)]                        |
| 6. | $(X \supset Y) \supset (\neg\neg X \supset \neg\neg Y)$                                | [B5; $A  X$ ; $B  Y$ ]           |



### Használható axiomasémák

- (A1)  $A \supset (B \supset A)$
- (A2)  $(A \supset (B \supset C)) \supset ((A \supset B) \supset (A \supset C))$
- (A3)  $(\neg A \supset B) \supset ((\neg A \supset \neg B) \supset A)$
  
- (B1)  $A \supset A$
- (B3)  $A \supset \neg\neg A$
- (B4)  $\neg\neg A \supset A$
- (B5)  $(A \supset B) \supset (\neg\neg A \supset \neg\neg B)$

### Levezetési szabály (modus ponens)

$\{A \supset B, A\} \vdash_0 B$

$\{X \supset Y\} \vdash_0 \neg Y \supset \neg X$

Dedukciós tétel alkalmazása után:  $\{X \supset Y, \neg Y\} \vdash_0 \neg X$

- |    |  |  |
|----|--|--|
| 1. | $(\neg\neg X \supset \neg Y) \supset ((\neg\neg X \supset \neg\neg Y) \supset \neg X)$ | [A3; A   $\neg X$ ; B   $\neg Y$ ]     |
| 2. | $\neg Y \supset (\neg\neg X \supset \neg Y)$   | [A1; A   $\neg Y$ ; B   $\neg\neg X$ ] |
| 3. | $\neg Y$   | [hip]                                  |
| 4. | $\neg\neg X \supset \neg Y$  | [MP(2,3)]                              |
| 5. | $(\neg\neg X \supset \neg\neg Y) \supset \neg X$                                       | [MP(1,4)]                              |
| 6. | $(X \supset Y) \supset (\neg\neg X \supset \neg\neg Y)$                                | [B5; A   $X$ ; B   $Y$ ]               |
| 7. | $X \supset Y$  | [hip]                                  |

### Használható axiomasémák

- (A1)  $A \supset (B \supset A)$
- (A2)  $(A \supset (B \supset C)) \supset ((A \supset B) \supset (A \supset C))$
- (A3)  $(\neg A \supset B) \supset ((\neg A \supset \neg B) \supset A)$
  
- (B1)  $A \supset A$
- (B3)  $A \supset \neg\neg A$
- (B4)  $\neg\neg A \supset A$
- (B5)  $(A \supset B) \supset (\neg\neg A \supset \neg\neg B)$

### Levezetési szabály (modus ponens)

$\{A \supset B, A\} \vdash_0 B$

$\{X \supset Y\} \vdash_0 \neg Y \supset \neg X$

Dedukciós tétel alkalmazása után:  $\{X \supset Y, \neg Y\} \vdash_0 \neg X$

- |    |  |  |
|----|--|--|
| 1. | $(\neg\neg X \supset \neg Y) \supset ((\neg\neg X \supset \neg\neg Y) \supset \neg X)$ | [A3; A   $\neg X$ ; B   $\neg Y$ ]     |
| 2. | $\neg Y \supset (\neg\neg X \supset \neg Y)$   | [A1; A   $\neg Y$ ; B   $\neg\neg X$ ] |
| 3. | $\neg Y$   | [hip]                                  |
| 4. | $\neg\neg X \supset \neg Y$  | [MP(2,3)]                              |
| 5. | $(\neg\neg X \supset \neg\neg Y) \supset \neg X$                                       | [MP(1,4)]                              |
| 6. | $(X \supset Y) \supset (\neg\neg X \supset \neg\neg Y)$                                | [B5; A   $X$ ; B   $Y$ ]               |
| 7. | $X \supset Y$  | [hip]                                  |
| 8. | $\neg\neg X \supset \neg\neg Y$  | [MP(6,7)]                              |

### Használható axiomasémák

- (A1)  $A \supset (B \supset A)$
- (A2)  $(A \supset (B \supset C)) \supset ((A \supset B) \supset (A \supset C))$
- (A3)  $(\neg A \supset B) \supset ((\neg A \supset \neg B) \supset A)$
  
- (B1)  $A \supset A$
- (B3)  $A \supset \neg\neg A$
- (B4)  $\neg\neg A \supset A$
- (B5)  $(A \supset B) \supset (\neg\neg A \supset \neg\neg B)$

### Levezetési szabály (modus ponens)

$\{A \supset B, A\} \vdash_0 B$

$\{X \supset Y\} \vdash_0 \neg Y \supset \neg X$

Dedukciós tétel alkalmazása után:  $\{X \supset Y, \neg Y\} \vdash_0 \neg X$

- |    |  |  |
|----|--|--|
| 1. | $(\neg\neg X \supset \neg Y) \supset ((\neg\neg X \supset \neg\neg Y) \supset \neg X)$ | [A3; A   $\neg X$ ; B   $\neg Y$ ]     |
| 2. | $\neg Y \supset (\neg\neg X \supset \neg Y)$   | [A1; A   $\neg Y$ ; B   $\neg\neg X$ ] |
| 3. | $\neg Y$   | [hip]                                  |
| 4. | $\neg\neg X \supset \neg Y$  | [MP(2,3)]                              |
| 5. | $(\neg\neg X \supset \neg\neg Y) \supset \neg X$                                       | [MP(1,4)]                              |
| 6. | $(X \supset Y) \supset (\neg\neg X \supset \neg\neg Y)$                                | [B5; A   $X$ ; B   $Y$ ]               |
| 7. | $X \supset Y$  | [hip]                                  |
| 8. | $\neg\neg X \supset \neg\neg Y$  | [MP(6,7)]                              |
| 9. | $\neg X$   | [MP(5,8)]                              |

### Használható axiomasémák

- (A1)  $A \supset (B \supset A)$
- (A2)  $(A \supset (B \supset C)) \supset ((A \supset B) \supset (A \supset C))$
- (A3)  $(\neg A \supset B) \supset ((\neg A \supset \neg B) \supset A)$
  
- (B1)  $A \supset A$
- (B3)  $A \supset \neg\neg A$
- (B4)  $\neg\neg A \supset A$
- (B5)  $(A \supset B) \supset (\neg\neg A \supset \neg\neg B)$

### Levezetési szabály (modus ponens)

$\{A \supset B, A\} \vdash_0 B$

$\{\neg Y \supset \neg X\} \vdash_0 X \supset Y$

### Használható axiomasémák

- (A1)  $A \supset (B \supset A)$
- (A2)  $(A \supset (B \supset C)) \supset ((A \supset B) \supset (A \supset C))$
- (A3)  $(\neg A \supset B) \supset ((\neg A \supset \neg B) \supset A)$
  
- (B1)  $A \supset A$
- (B3)  $A \supset \neg\neg A$
- (B4)  $\neg\neg A \supset A$
- (B5)  $(A \supset B) \supset (\neg\neg A \supset \neg\neg B)$

### Levezetési szabály (modus ponens)

$\{A \supset B, A\} \vdash_0 B$

$\{\neg Y \supset \neg X\} \vdash_0 X \supset Y$

Dedukciós tétel alkalmazása után:  $\{\neg Y \supset \neg X, X\} \vdash_0 Y$

### Használható axiomasémák

- (A1)  $A \supset (B \supset A)$
- (A2)  $(A \supset (B \supset C)) \supset ((A \supset B) \supset (A \supset C))$
- (A3)  $(\neg A \supset B) \supset ((\neg A \supset \neg B) \supset A)$
  
- (B1)  $A \supset A$
- (B3)  $A \supset \neg\neg A$
- (B4)  $\neg\neg A \supset A$
- (B5)  $(A \supset B) \supset (\neg\neg A \supset \neg\neg B)$

### Levezetési szabály (modus ponens)

$\{A \supset B, A\} \vdash_0 B$

$\{\neg Y \supset \neg X\} \vdash_0 X \supset Y$

Dedukciós tétel alkalmazása után:  $\{\neg Y \supset \neg X, X\} \vdash_0 Y$

1.  $(\neg Y \supset X) \supset ((\neg Y \supset \neg X) \supset Y) \quad [A3; A||Y; B||X]$

### Használható axiomasémák

- (A1)  $A \supset (B \supset A)$
- (A2)  $(A \supset (B \supset C)) \supset ((A \supset B) \supset (A \supset C))$
- (A3)  $(\neg A \supset B) \supset ((\neg A \supset \neg B) \supset A)$
  
- (B1)  $A \supset A$
- (B3)  $A \supset \neg\neg A$
- (B4)  $\neg\neg A \supset A$
- (B5)  $(A \supset B) \supset (\neg\neg A \supset \neg\neg B)$

### Levezetési szabály (modus ponens)

$\{A \supset B, A\} \vdash_0 B$

$\{\neg Y \supset \neg X\} \vdash_0 X \supset Y$

Dedukciós tétel alkalmazása után:  $\{\neg Y \supset \neg X, X\} \vdash_0 Y$

- 1.  $(\neg Y \supset X) \supset ((\neg Y \supset \neg X) \supset Y)$   $[A3; A||Y; B||X]$
- 2.  $X \supset (\neg Y \supset X)$   $[A1; A||X; B||\neg Y]$

### Használható axiomasémák

- (A1)  $A \supset (B \supset A)$
- (A2)  $(A \supset (B \supset C)) \supset ((A \supset B) \supset (A \supset C))$
- (A3)  $(\neg A \supset B) \supset ((\neg A \supset \neg B) \supset A)$
  
- (B1)  $A \supset A$
- (B3)  $A \supset \neg\neg A$
- (B4)  $\neg\neg A \supset A$
- (B5)  $(A \supset B) \supset (\neg\neg A \supset \neg\neg B)$

### Levezetési szabály (modus ponens)

$\{A \supset B, A\} \vdash_0 B$

$\{\neg Y \supset \neg X\} \vdash_0 X \supset Y$

Dedukciós tétel alkalmazása után:  $\{\neg Y \supset \neg X, X\} \vdash_0 Y$

- 1.  $(\neg Y \supset X) \supset ((\neg Y \supset \neg X) \supset Y)$  [A3; A||Y; B||X]
- 2.  $X \supset (\neg Y \supset X)$  [A1; A||X; B|| $\neg Y$ ]
- 3.  $X$  [hip]



### Használható axiomasémák

- (A1)  $A \supset (B \supset A)$   
(A2)  $(A \supset (B \supset C)) \supset ((A \supset B) \supset (A \supset C))$   
(A3)  $(\neg A \supset B) \supset ((\neg A \supset \neg B) \supset A)$

- (B1)  $A \supset A$   
(B3)  $A \supset \neg\neg A$   
(B4)  $\neg\neg A \supset A$   
(B5)  $(A \supset B) \supset (\neg\neg A \supset \neg\neg B)$

### Levezetési szabály (modus ponens)

$\{A \supset B, A\} \vdash_0 B$

$\{\neg Y \supset \neg X\} \vdash_0 X \supset Y$

Dedukciós tétel alkalmazása után:  $\{\neg Y \supset \neg X, X\} \vdash_0 Y$

- |    |  |                           |
|----|--|---------------------------|
| 1. | $(\neg Y \supset X) \supset ((\neg Y \supset \neg X) \supset Y)$ | [A3; A  Y; B  X]          |
| 2. | $X \supset (\neg Y \supset X)$                                   | [A1; A  X; B   $\neg Y$ ] |
| 3. | $X$  | [hip]                     |
| 4. | $\neg Y \supset X$   | [MP(2,3)]                 |

### Használható axiomasémák

- (A1)  $A \supset (B \supset A)$
- (A2)  $(A \supset (B \supset C)) \supset ((A \supset B) \supset (A \supset C))$
- (A3)  $(\neg A \supset B) \supset ((\neg A \supset \neg B) \supset A)$
  
- (B1)  $A \supset A$
- (B3)  $A \supset \neg\neg A$
- (B4)  $\neg\neg A \supset A$
- (B5)  $(A \supset B) \supset (\neg\neg A \supset \neg\neg B)$

### Levezetési szabály (modus ponens)

$\{A \supset B, A\} \vdash_0 B$

$\{\neg Y \supset \neg X\} \vdash_0 X \supset Y$

Dedukciós tétel alkalmazása után:  $\{\neg Y \supset \neg X, X\} \vdash_0 Y$

- |    |  |                   |
|----|--|-------------------|
| 1. | $(\neg Y \supset X) \supset ((\neg Y \supset \neg X) \supset Y)$ | [A3; A  Y; B  X]  |
| 2. | $X \supset (\neg Y \supset X)$                                   | [A1; A  X; B  ¬Y] |
| 3. | $X$  | [hip]             |
| 4. | $\neg Y \supset X$   | [MP(2,3)]         |
| 5. | $(\neg Y \supset \neg X) \supset Y$                              | [MP(1,4)]         |

### Használható axiomasémák

- (A1)  $A \supset (B \supset A)$
- (A2)  $(A \supset (B \supset C)) \supset ((A \supset B) \supset (A \supset C))$
- (A3)  $(\neg A \supset B) \supset ((\neg A \supset \neg B) \supset A)$
  
- (B1)  $A \supset A$
- (B3)  $A \supset \neg\neg A$
- (B4)  $\neg\neg A \supset A$
- (B5)  $(A \supset B) \supset (\neg\neg A \supset \neg\neg B)$

### Levezetési szabály (modus ponens)

$\{A \supset B, A\} \vdash_0 B$

$\{\neg Y \supset \neg X\} \vdash_0 X \supset Y$

Dedukciós tétel alkalmazása után:  $\{\neg Y \supset \neg X, X\} \vdash_0 Y$

- |    |  |                   |
|----|--|-------------------|
| 1. | $(\neg Y \supset X) \supset ((\neg Y \supset \neg X) \supset Y)$ | [A3; A  Y; B  X]  |
| 2. | $X \supset (\neg Y \supset X)$                                   | [A1; A  X; B  ¬Y] |
| 3. | $X$  | [hip]             |
| 4. | $\neg Y \supset X$   | [MP(2,3)]         |
| 5. | $(\neg Y \supset \neg X) \supset Y$                              | [MP(1,4)]         |
| 6. | $\neg Y \supset \neg X$  | [hip]             |

### Használható axiomasémák

- (A1)  $A \supset (B \supset A)$
- (A2)  $(A \supset (B \supset C)) \supset ((A \supset B) \supset (A \supset C))$
- (A3)  $(\neg A \supset B) \supset ((\neg A \supset \neg B) \supset A)$
  
- (B1)  $A \supset A$
- (B3)  $A \supset \neg\neg A$
- (B4)  $\neg\neg A \supset A$
- (B5)  $(A \supset B) \supset (\neg\neg A \supset \neg\neg B)$

### Levezetési szabály (modus ponens)

$\{A \supset B, A\} \vdash_0 B$

$\{\neg Y \supset \neg X\} \vdash_0 X \supset Y$

Dedukciós tétel alkalmazása után:  $\{\neg Y \supset \neg X, X\} \vdash_0 Y$

- |    |  |                           |
|----|--|---------------------------|
| 1. | $(\neg Y \supset X) \supset ((\neg Y \supset \neg X) \supset Y)$ | [A3; A  Y; B  X]          |
| 2. | $X \supset (\neg Y \supset X)$                                   | [A1; A  X; B   $\neg Y$ ] |
| 3. | $X$  | [hip]                     |
| 4. | $\neg Y \supset X$   | [MP(2,3)]                 |
| 5. | $(\neg Y \supset \neg X) \supset Y$                              | [MP(1,4)]                 |
| 6. | $\neg Y \supset \neg X$  | [hip]                     |
| 7. | $Y$  | [MP(5,6)]                 |

### Használható axiomasémák

- (A1)  $A \supset (B \supset A)$
- (A2)  $(A \supset (B \supset C)) \supset ((A \supset B) \supset (A \supset C))$
- (A3)  $(\neg A \supset B) \supset ((\neg A \supset \neg B) \supset A)$

- (B1)  $A \supset A$
- (B3)  $A \supset \neg\neg A$
- (B4)  $\neg\neg A \supset A$
- (B5)  $(A \supset B) \supset (\neg\neg A \supset \neg\neg B)$

### Levezetési szabály (modus ponens)

$$\{A \supset B, A\} \vdash_0 B$$

## 6. Feladat

Nyomozós példa (rövidített verzió):  $\{F \supset K, K \supset A, \neg A\} \vdash_0 \neg F$

**Használható axiómasémák**

- (A1)  $A \supset (B \supset A)$   
 (A2)  $(A \supset (B \supset C)) \supset ((A \supset B) \supset (A \supset C))$   
 (A3)  $(\neg A \supset B) \supset ((\neg A \supset \neg B) \supset A)$

- (B1)  $A \supset A$   
 (B3)  $A \supset \neg\neg A$   
 (B4)  $\neg\neg A \supset A$   
 (B5)  $(A \supset B) \supset (\neg\neg A \supset \neg\neg B)$

**Levezetési szabály (modus ponens)**

$$\{A \supset B, A\} \vdash_0 B$$

**6. Feladat**

Nyomozós példa (rövidített verzió):  $\{F \supset K, K \supset A, \neg A\} \vdash_0 \neg F$

$$1. \quad (\neg\neg F \supset \neg A) \supset ((\neg\neg F \supset \neg\neg A) \supset \neg F) \quad [A3; A||\neg F; B||\neg A]$$

**Használható axiómasémák**

- (A1)  $A \supset (B \supset A)$   
 (A2)  $(A \supset (B \supset C)) \supset ((A \supset B) \supset (A \supset C))$   
 (A3)  $(\neg A \supset B) \supset ((\neg A \supset \neg B) \supset A)$

- (B1)  $A \supset A$   
 (B3)  $A \supset \neg\neg A$   
 (B4)  $\neg\neg A \supset A$   
 (B5)  $(A \supset B) \supset (\neg\neg A \supset \neg\neg B)$

**Levezetési szabály (modus ponens)**

$\{A \supset B, A\} \vdash_0 B$

**6. Feladat**

Nyomozós példa (rövidített verzió):  $\{F \supset K, K \supset A, \neg A\} \vdash_0 \neg F$

1.  $(\neg\neg F \supset \neg A) \supset ((\neg\neg F \supset \neg\neg A) \supset \neg F)$  [A3; A|| $\neg F$ ; B|| $\neg A$ ]
2.  $\neg A \supset (\neg\neg F \supset \neg A)$  [A1; A|| $\neg A$ ; B|| $\neg\neg F$ ]

#### Használható axiómasémák

- (A1)  $A \supset (B \supset A)$
- (A2)  $(A \supset (B \supset C)) \supset ((A \supset B) \supset (A \supset C))$
- (A3)  $(\neg A \supset B) \supset ((\neg A \supset \neg B) \supset A)$

- (B1)  $A \supset A$
- (B3)  $A \supset \neg\neg A$
- (B4)  $\neg\neg A \supset A$
- (B5)  $(A \supset B) \supset (\neg\neg A \supset \neg\neg B)$

#### Levezetési szabály (modus ponens)

$$\{A \supset B, A\} \vdash_0 B$$

## 6. Feladat

Nyomozós példa (rövidített verzió):  $\{F \supset K, K \supset A, \neg A\} \vdash_0 \neg F$

- |    |  |  |
|----|--|--|
| 1. | $(\neg\neg F \supset \neg A) \supset ((\neg\neg F \supset \neg\neg A) \supset \neg F)$ | [A3; A   $\neg F$ ; B   $\neg A$ ]     |
| 2. | $\neg A \supset (\neg\neg F \supset \neg A)$   | [A1; A   $\neg A$ ; B   $\neg\neg F$ ] |
| 3. | $\neg A$   | [hip]                                  |



**Használható axiomasémák**

- (A1)  $A \supset (B \supset A)$   
 (A2)  $(A \supset (B \supset C)) \supset ((A \supset B) \supset (A \supset C))$   
 (A3)  $(\neg A \supset B) \supset ((\neg A \supset \neg B) \supset A)$

- (B1)  $A \supset A$   
 (B3)  $A \supset \neg\neg A$   
 (B4)  $\neg\neg A \supset A$   
 (B5)  $(A \supset B) \supset (\neg\neg A \supset \neg\neg B)$

**Levezetési szabály (modus ponens)**

$$\{A \supset B, A\} \vdash_0 B$$

**6. Feladat**

Nyomozós példa (rövidített verzió):  $\{F \supset K, K \supset A, \neg A\} \vdash_0 \neg F$

- |    |  |                                  |
|----|--|----------------------------------|
| 1. | $(\neg\neg F \supset \neg A) \supset ((\neg\neg F \supset \neg\neg A) \supset \neg F)$ | $[A3; A  \neg F; B  \neg A]$     |
| 2. | $\neg A \supset (\neg\neg F \supset \neg A)$   | $[A1; A  \neg A; B  \neg\neg F]$ |
| 3. | $\neg A$   | $[\text{hip}]$                   |
| 4. | $\neg\neg F \supset \neg A$  | $[\text{MP}(2,3)]$               |

#### Használható axiomasémák

- (A1)  $A \supset (B \supset A)$
- (A2)  $(A \supset (B \supset C)) \supset ((A \supset B) \supset (A \supset C))$
- (A3)  $(\neg A \supset B) \supset ((\neg A \supset \neg B) \supset A)$

- (B1)  $A \supset A$
- (B3)  $A \supset \neg\neg A$
- (B4)  $\neg\neg A \supset A$
- (B5)  $(A \supset B) \supset (\neg\neg A \supset \neg\neg B)$

#### Levezetési szabály (modus ponens)

$$\{A \supset B, A\} \vdash_0 B$$

## 6. Feladat

Nyomozós példa (rövidített verzió):  $\{F \supset K, K \supset A, \neg A\} \vdash_0 \neg F$

- |    |  |                                  |
|----|--|----------------------------------|
| 1. | $(\neg\neg F \supset \neg A) \supset ((\neg\neg F \supset \neg\neg A) \supset \neg F)$ | $[A3; A  \neg F; B  \neg A]$     |
| 2. | $\neg A \supset (\neg\neg F \supset \neg A)$   | $[A1; A  \neg A; B  \neg\neg F]$ |
| 3. | $\neg A$   | $[\text{hip}]$                   |
| 4. | $\neg\neg F \supset \neg A$  | $[\text{MP}(2,3)]$               |
| 5. | $(\neg\neg F \supset \neg\neg A) \supset \neg F$                                       | $[\text{MP}(1,4)]$               |

#### Használható axiomasémák

- (A1)  $A \supset (B \supset A)$
- (A2)  $(A \supset (B \supset C)) \supset ((A \supset B) \supset (A \supset C))$
- (A3)  $(\neg A \supset B) \supset ((\neg A \supset \neg B) \supset A)$

- (B1)  $A \supset A$
- (B3)  $A \supset \neg\neg A$
- (B4)  $\neg\neg A \supset A$
- (B5)  $(A \supset B) \supset (\neg\neg A \supset \neg\neg B)$

#### Levezetési szabály (modus ponens)

$\{A \supset B, A\} \vdash_0 B$

## 6. Feladat

Nyomozós példa (rövidített verzió):  $\{F \supset K, K \supset A, \neg A\} \vdash_0 \neg F$

- |    |  |                                  |
|----|--|----------------------------------|
| 1. | $(\neg\neg F \supset \neg A) \supset ((\neg\neg F \supset \neg\neg A) \supset \neg F)$ | $[A3; A  \neg F; B  \neg A]$     |
| 2. | $\neg A \supset (\neg\neg F \supset \neg A)$   | $[A1; A  \neg A; B  \neg\neg F]$ |
| 3. | $\neg A$   | $[\text{hip}]$                   |
| 4. | $\neg\neg F \supset \neg A$  | $[\text{MP}(2,3)]$               |
| 5. | $(\neg\neg F \supset \neg\neg A) \supset \neg F$                                       | $[\text{MP}(1,4)]$               |
| 6. | $(F \supset A) \supset (\neg\neg F \supset \neg\neg A)$                                | $[B5; A  F; B  A]$               |

#### Használható axiomasémák

- (A1)  $A \supset (B \supset A)$
- (A2)  $(A \supset (B \supset C)) \supset ((A \supset B) \supset (A \supset C))$
- (A3)  $(\neg A \supset B) \supset ((\neg A \supset \neg B) \supset A)$

- (B1)  $A \supset A$
- (B3)  $A \supset \neg\neg A$
- (B4)  $\neg\neg A \supset A$
- (B5)  $(A \supset B) \supset (\neg\neg A \supset \neg\neg B)$

#### Levezetési szabály (modus ponens)

$\{A \supset B, A\} \vdash_0 B$

## 6. Feladat

Nyomozós példa (rövidített verzió):  $\{F \supset K, K \supset A, \neg A\} \vdash_0 \neg F$

- |   |  |
|---|--|
| 1. $(\neg\neg F \supset \neg A) \supset ((\neg\neg F \supset \neg\neg A) \supset \neg F)$ | [A3; A   $\neg F$ ; B   $\neg A$ ]     |
| 2. $\neg A \supset (\neg\neg F \supset \neg A)$   | [A1; A   $\neg A$ ; B   $\neg\neg F$ ] |
| 3. $\neg A$   | [hip]                                  |
| 4. $\neg\neg F \supset \neg A$  | [MP(2,3)]                              |
| 5. $(\neg\neg F \supset \neg\neg A) \supset \neg F$                                       | [MP(1,4)]                              |
| 6. $(F \supset A) \supset (\neg\neg F \supset \neg\neg A)$                                | [B5; A   $F$ ; B   $A$ ]               |
| 7. $(F \supset (K \supset A)) \supset ((F \supset K) \supset (F \supset A))$              | [A2; A   $F$ ; B   $K$ ; C   $A$ ]     |

#### Használható axiomasémák

- (A1)  $A \supset (B \supset A)$
- (A2)  $(A \supset (B \supset C)) \supset ((A \supset B) \supset (A \supset C))$
- (A3)  $(\neg A \supset B) \supset ((\neg A \supset \neg B) \supset A)$

- (B1)  $A \supset A$
- (B3)  $A \supset \neg\neg A$
- (B4)  $\neg\neg A \supset A$
- (B5)  $(A \supset B) \supset (\neg\neg A \supset \neg\neg B)$

#### Levezetési szabály (modus ponens)

$\{A \supset B, A\} \vdash_0 B$

## 6. Feladat

Nyomozós példa (rövidített verzió):  $\{F \supset K, K \supset A, \neg A\} \vdash_0 \neg F$

- |    |  |                                  |
|----|--|----------------------------------|
| 1. | $(\neg\neg F \supset \neg A) \supset ((\neg\neg F \supset \neg\neg A) \supset \neg F)$ | $[A3; A  \neg F; B  \neg A]$     |
| 2. | $\neg A \supset (\neg\neg F \supset \neg A)$   | $[A1; A  \neg A; B  \neg\neg F]$ |
| 3. | $\neg A$   | $[\text{hip}]$                   |
| 4. | $\neg\neg F \supset \neg A$  | $[\text{MP}(2,3)]$               |
| 5. | $(\neg\neg F \supset \neg\neg A) \supset \neg F$                                       | $[\text{MP}(1,4)]$               |
| 6. | $(F \supset A) \supset (\neg\neg F \supset \neg\neg A)$                                | $[B5; A  F; B  A]$               |
| 7. | $(F \supset (K \supset A)) \supset ((F \supset K) \supset (F \supset A))$              | $[A2; A  F; B  K; C  A]$         |
| 8. | $(K \supset A) \supset (F \supset (K \supset A))$                                      | $[A1; A  K \supset A; B  F]$     |

#### Használható axiomasémák

- (A1)  $A \supset (B \supset A)$
- (A2)  $(A \supset (B \supset C)) \supset ((A \supset B) \supset (A \supset C))$
- (A3)  $(\neg A \supset B) \supset ((\neg A \supset \neg B) \supset A)$

- (B1)  $A \supset A$
- (B3)  $A \supset \neg\neg A$
- (B4)  $\neg\neg A \supset A$
- (B5)  $(A \supset B) \supset (\neg\neg A \supset \neg\neg B)$

#### Levezetési szabály (modus ponens)

$$\{A \supset B, A\} \vdash_0 B$$

## 6. Feladat

Nyomozós példa (rövidített verzió):  $\{F \supset K, K \supset A, \neg A\} \vdash_0 \neg F$

- |    |  |                                  |
|----|--|----------------------------------|
| 1. | $(\neg\neg F \supset \neg A) \supset ((\neg\neg F \supset \neg\neg A) \supset \neg F)$ | $[A3; A  \neg F; B  \neg A]$     |
| 2. | $\neg A \supset (\neg\neg F \supset \neg A)$   | $[A1; A  \neg A; B  \neg\neg F]$ |
| 3. | $\neg A$   | $[\text{hip}]$                   |
| 4. | $\neg\neg F \supset \neg A$  | $[\text{MP}(2,3)]$               |
| 5. | $(\neg\neg F \supset \neg\neg A) \supset \neg F$                                       | $[\text{MP}(1,4)]$               |
| 6. | $(F \supset A) \supset (\neg\neg F \supset \neg\neg A)$                                | $[B5; A  F; B  A]$               |
| 7. | $(F \supset (K \supset A)) \supset ((F \supset K) \supset (F \supset A))$              | $[A2; A  F; B  K; C  A]$         |
| 8. | $(K \supset A) \supset (F \supset (K \supset A))$                                      | $[A1; A  K \supset A; B  F]$     |
| 9. | $K \supset A$  | $[\text{hip}]$                   |

#### Használható axiomasémák

- (A1)  $A \supset (B \supset A)$
- (A2)  $(A \supset (B \supset C)) \supset ((A \supset B) \supset (A \supset C))$
- (A3)  $(\neg A \supset B) \supset ((\neg A \supset \neg B) \supset A)$

- (B1)  $A \supset A$
- (B3)  $A \supset \neg\neg A$
- (B4)  $\neg\neg A \supset A$
- (B5)  $(A \supset B) \supset (\neg\neg A \supset \neg\neg B)$

#### Levezetési szabály (modus ponens)

$$\{A \supset B, A\} \vdash_0 B$$

## 6. Feladat

Nyomozós példa (rövidített verzió):  $\{F \supset K, K \supset A, \neg A\} \vdash_0 \neg F$

- |     |  |                                  |
|-----|--|----------------------------------|
| 1.  | $(\neg\neg F \supset \neg A) \supset ((\neg\neg F \supset \neg\neg A) \supset \neg F)$ | $[A3; A  \neg F; B  \neg A]$     |
| 2.  | $\neg A \supset (\neg\neg F \supset \neg A)$   | $[A1; A  \neg A; B  \neg\neg F]$ |
| 3.  | $\neg A$   | $[\text{hip}]$                   |
| 4.  | $\neg\neg F \supset \neg A$  | $[\text{MP}(2,3)]$               |
| 5.  | $(\neg\neg F \supset \neg\neg A) \supset \neg F$                                       | $[\text{MP}(1,4)]$               |
| 6.  | $(F \supset A) \supset (\neg\neg F \supset \neg\neg A)$                                | $[B5; A  F; B  A]$               |
| 7.  | $(F \supset (K \supset A)) \supset ((F \supset K) \supset (F \supset A))$              | $[A2; A  F; B  K; C  A]$         |
| 8.  | $(K \supset A) \supset (F \supset (K \supset A))$                                      | $[A1; A  K \supset A; B  F]$     |
| 9.  | $K \supset A$  | $[\text{hip}]$                   |
| 10. | $F \supset (K \supset A)$  | $[\text{MP}(8,9)]$               |

### Használható axiomasémák

- (A1)  $A \supset (B \supset A)$   
 (A2)  $(A \supset (B \supset C)) \supset ((A \supset B) \supset (A \supset C))$   
 (A3)  $(\neg A \supset B) \supset ((\neg A \supset \neg B) \supset A)$

- (B1)  $A \supset A$   
 (B3)  $A \supset \neg\neg A$   
 (B4)  $\neg\neg A \supset A$   
 (B5)  $(A \supset B) \supset (\neg\neg A \supset \neg\neg B)$

### Levezetési szabály (modus ponens)

$\{A \supset B, A\} \vdash_0 B$

## 6. Feladat

Nyomozós példa (rövidített verzió):  $\{F \supset K, K \supset A, \neg A\} \vdash_0 \neg F$

- |     |  |                                  |
|-----|--|----------------------------------|
| 1.  | $(\neg\neg F \supset \neg A) \supset ((\neg\neg F \supset \neg\neg A) \supset \neg F)$ | $[A3; A  \neg F; B  \neg A]$     |
| 2.  | $\neg A \supset (\neg\neg F \supset \neg A)$   | $[A1; A  \neg A; B  \neg\neg F]$ |
| 3.  | $\neg A$   | $[\text{hip}]$                   |
| 4.  | $\neg\neg F \supset \neg A$  | $[\text{MP}(2,3)]$               |
| 5.  | $(\neg\neg F \supset \neg\neg A) \supset \neg F$                                       | $[\text{MP}(1,4)]$               |
| 6.  | $(F \supset A) \supset (\neg\neg F \supset \neg\neg A)$                                | $[B5; A  F; B  A]$               |
| 7.  | $(F \supset (K \supset A)) \supset ((F \supset K) \supset (F \supset A))$              | $[A2; A  F; B  K; C  A]$         |
| 8.  | $(K \supset A) \supset (F \supset (K \supset A))$                                      | $[A1; A  K \supset A; B  F]$     |
| 9.  | $K \supset A$  | $[\text{hip}]$                   |
| 10. | $F \supset (K \supset A)$  | $[\text{MP}(8,9)]$               |
| 11. | $(F \supset K) \supset (F \supset A)$  | $[\text{MP}(7,10)]$              |



### Használható axiomasémák

- (A1)  $A \supset (B \supset A)$   
 (A2)  $(A \supset (B \supset C)) \supset ((A \supset B) \supset (A \supset C))$   
 (A3)  $(\neg A \supset B) \supset ((\neg A \supset \neg B) \supset A)$

- (B1)  $A \supset A$   
 (B3)  $A \supset \neg\neg A$   
 (B4)  $\neg\neg A \supset A$   
 (B5)  $(A \supset B) \supset (\neg\neg A \supset \neg\neg B)$

### Levezetési szabály (modus ponens)

$\{A \supset B, A\} \vdash_0 B$

## 6. Feladat

Nyomozós példa (rövidített verzió):  $\{F \supset K, K \supset A, \neg A\} \vdash_0 \neg F$

- |     |  |                                      |
|-----|--|--------------------------------------|
| 1.  | $(\neg\neg F \supset \neg A) \supset ((\neg\neg F \supset \neg\neg A) \supset \neg F)$ | [A3; $A  \neg F$ ; $B  \neg A$ ]     |
| 2.  | $\neg A \supset (\neg\neg F \supset \neg A)$   | [A1; $A  \neg A$ ; $B  \neg\neg F$ ] |
| 3.  | $\neg A$   | [hip]                                |
| 4.  | $\neg\neg F \supset \neg A$  | [MP(2,3)]                            |
| 5.  | $(\neg\neg F \supset \neg\neg A) \supset \neg F$                                       | [MP(1,4)]                            |
| 6.  | $(F \supset A) \supset (\neg\neg F \supset \neg\neg A)$                                | [B5; $A  F$ ; $B  A$ ]               |
| 7.  | $(F \supset (K \supset A)) \supset ((F \supset K) \supset (F \supset A))$              | [A2; $A  F$ ; $B  K$ ; $C  A$ ]      |
| 8.  | $(K \supset A) \supset (F \supset (K \supset A))$                                      | [A1; $A  K \supset A$ ; $B  F$ ]     |
| 9.  | $K \supset A$  | [hip]                                |
| 10. | $F \supset (K \supset A)$  | [MP(8,9)]                            |
| 11. | $(F \supset K) \supset (F \supset A)$  | [MP(7,10)]                           |
| 12. | $F \supset K$  | [hip]                                |

### Használható axiomasémák

- (A1)  $A \supset (B \supset A)$   
 (A2)  $(A \supset (B \supset C)) \supset ((A \supset B) \supset (A \supset C))$   
 (A3)  $(\neg A \supset B) \supset ((\neg A \supset \neg B) \supset A)$

- (B1)  $A \supset A$   
 (B3)  $A \supset \neg\neg A$   
 (B4)  $\neg\neg A \supset A$   
 (B5)  $(A \supset B) \supset (\neg\neg A \supset \neg\neg B)$

### Levezetési szabály (modus ponens)

$\{A \supset B, A\} \vdash_0 B$

## 6. Feladat

Nyomozós példa (rövidített verzió):  $\{F \supset K, K \supset A, \neg A\} \vdash_0 \neg F$

- |     |  |                                      |
|-----|--|--------------------------------------|
| 1.  | $(\neg\neg F \supset \neg A) \supset ((\neg\neg F \supset \neg\neg A) \supset \neg F)$ | [A3; $A  \neg F$ ; $B  \neg A$ ]     |
| 2.  | $\neg A \supset (\neg\neg F \supset \neg A)$   | [A1; $A  \neg A$ ; $B  \neg\neg F$ ] |
| 3.  | $\neg A$   | [hip]                                |
| 4.  | $\neg\neg F \supset \neg A$  | [MP(2,3)]                            |
| 5.  | $(\neg\neg F \supset \neg\neg A) \supset \neg F$                                       | [MP(1,4)]                            |
| 6.  | $(F \supset A) \supset (\neg\neg F \supset \neg\neg A)$                                | [B5; $A  F$ ; $B  A$ ]               |
| 7.  | $(F \supset (K \supset A)) \supset ((F \supset K) \supset (F \supset A))$              | [A2; $A  F$ ; $B  K$ ; $C  A$ ]      |
| 8.  | $(K \supset A) \supset (F \supset (K \supset A))$                                      | [A1; $A  K \supset A$ ; $B  F$ ]     |
| 9.  | $K \supset A$  | [hip]                                |
| 10. | $F \supset (K \supset A)$  | [MP(8,9)]                            |
| 11. | $(F \supset K) \supset (F \supset A)$  | [MP(7,10)]                           |
| 12. | $F \supset K$  | [hip]                                |
| 13. | $F \supset A$  | [MP(11,12)]                          |

### Használható axiómasémák

- (A1)  $A \supset (B \supset A)$   
 (A2)  $(A \supset (B \supset C)) \supset ((A \supset B) \supset (A \supset C))$   
 (A3)  $(\neg A \supset B) \supset ((\neg A \supset \neg B) \supset A)$

- (B1)  $A \supset A$   
 (B3)  $A \supset \neg\neg A$   
 (B4)  $\neg\neg A \supset A$   
 (B5)  $(A \supset B) \supset (\neg\neg A \supset \neg\neg B)$

### Levezetési szabály (modus ponens)

$\{A \supset B, A\} \vdash_0 B$

## 6. Feladat

Nyomozós példa (rövidített verzió):  $\{F \supset K, K \supset A, \neg A\} \vdash_0 \neg F$

- |     |  |                                  |
|-----|--|----------------------------------|
| 1.  | $(\neg\neg F \supset \neg A) \supset ((\neg\neg F \supset \neg\neg A) \supset \neg F)$ | $[A3; A  \neg F; B  \neg A]$     |
| 2.  | $\neg A \supset (\neg\neg F \supset \neg A)$   | $[A1; A  \neg A; B  \neg\neg F]$ |
| 3.  | $\neg A$   | $[\text{hip}]$                   |
| 4.  | $\neg\neg F \supset \neg A$  | $[\text{MP}(2,3)]$               |
| 5.  | $(\neg\neg F \supset \neg\neg A) \supset \neg F$                                       | $[\text{MP}(1,4)]$               |
| 6.  | $(F \supset A) \supset (\neg\neg F \supset \neg\neg A)$                                | $[B5; A  F; B  A]$               |
| 7.  | $(F \supset (K \supset A)) \supset ((F \supset K) \supset (F \supset A))$              | $[A2; A  F; B  K; C  A]$         |
| 8.  | $(K \supset A) \supset (F \supset (K \supset A))$                                      | $[A1; A  K \supset A; B  F]$     |
| 9.  | $K \supset A$  | $[\text{hip}]$                   |
| 10. | $F \supset (K \supset A)$  | $[\text{MP}(8,9)]$               |
| 11. | $(F \supset K) \supset (F \supset A)$  | $[\text{MP}(7,10)]$              |
| 12. | $F \supset K$  | $[\text{hip}]$                   |
| 13. | $F \supset A$  | $[\text{MP}(11,12)]$             |
| 14. | $\neg\neg F \supset \neg\neg A$  | $[\text{MP}(6,13)]$              |

### Használható axiómasémák

- (A1)  $A \supset (B \supset A)$   
 (A2)  $(A \supset (B \supset C)) \supset ((A \supset B) \supset (A \supset C))$   
 (A3)  $(\neg A \supset B) \supset ((\neg A \supset \neg B) \supset A)$   
 (B1)  $A \supset A$   
 (B3)  $A \supset \neg\neg A$   
 (B4)  $\neg\neg A \supset A$   
 (B5)  $(A \supset B) \supset (\neg\neg A \supset \neg\neg B)$

### Levezetési szabály (modus ponens)

$$\{A \supset B, A\} \vdash_0 B$$

## 6. Feladat

Nyomozós példa (rövidített verzió):  $\{F \supset K, K \supset A, \neg A\} \vdash_0 \neg F$

- |     |  |  |
|-----|--|--|
| 1.  | $(\neg\neg F \supset \neg A) \supset ((\neg\neg F \supset \neg\neg A) \supset \neg F)$ | [A3; A   $\neg F$ ; B   $\neg A$ ]     |
| 2.  | $\neg A \supset (\neg\neg F \supset \neg A)$   | [A1; A   $\neg A$ ; B   $\neg\neg F$ ] |
| 3.  | $\neg A$   | [hip]                                  |
| 4.  | $\neg\neg F \supset \neg A$  | [MP(2,3)]                              |
| 5.  | $(\neg\neg F \supset \neg\neg A) \supset \neg F$                                       | [MP(1,4)]                              |
| 6.  | $(F \supset A) \supset (\neg\neg F \supset \neg\neg A)$                                | [B5; A   $F$ ; B   $A$ ]               |
| 7.  | $(F \supset (K \supset A)) \supset ((F \supset K) \supset (F \supset A))$              | [A2; A   $F$ ; B   $K$ ; C   $A$ ]     |
| 8.  | $(K \supset A) \supset (F \supset (K \supset A))$                                      | [A1; A   $K \supset A$ ; B   $F$ ]     |
| 9.  | $K \supset A$  | [hip]                                  |
| 10. | $F \supset (K \supset A)$  | [MP(8,9)]                              |
| 11. | $(F \supset K) \supset (F \supset A)$  | [MP(7,10)]                             |
| 12. | $F \supset K$  | [hip]                                  |
| 13. | $F \supset A$  | [MP(11,12)]                            |
| 14. | $\neg\neg F \supset \neg\neg A$  | [MP(6,13)]                             |
| 15. | $\neg F$   | [MP(5,14)]                             |