Végezze el az alábbi függvények teljes vizsgálatát, majd vázolja a grafikonjukat!

(1) $f(x) := \dfrac{x^3}{4} - 3x \quad (x \in \mathbb{R})$,

(2) $f(x) := -4x^5 + 15x^3 \quad (x \in \mathbb{R})$,

(3) $f(x) := 2 - 2x^2 - x^3 \quad (x \in \mathbb{R})$,

(4) $f(x) := 3x^4 - 4x^3 - 12x^2 + 2 \quad (x \in \mathbb{R})$,

(5) $f(x) := \dfrac{x^2 - 9}{x^3} \quad (0 \neq x \in \mathbb{R})$,

(6) $f(x) := \dfrac{2x + 1}{(x+1)^2} \quad (-1 \neq x \in \mathbb{R})$,

(7) $f(x) := \dfrac{x^3 + 2x^2}{x^2 + 2x + 1} \quad (-1 \neq x \in \mathbb{R})$,

(8) $f(x) := \dfrac{x^3 - 2x^2}{x^2 - 4} \quad (x \in \mathbb{R}\backslash\{\pm 2\})$,

(9) $f(x) := \dfrac{(x-1)^2}{x^2} \quad (0 \neq x \in \mathbb{R})$,

(10) $f(x) := \dfrac{x^2}{(x-1)^2} \quad (1 \neq x \in \mathbb{R})$,

(11) $f(x) := \dfrac{x^2 - 3}{2 - x} \quad (2 \neq x \in \mathbb{R})$,

(12) $f(x) := \dfrac{x^2 - 8}{3 - x} \quad (3 \neq x \in \mathbb{R})$,

(13) $f(x) := \dfrac{x - 2}{\sqrt{x^2 + 1}} \quad (x \in \mathbb{R})$,

(14) $f(x) := -\dfrac{x + 2}{\sqrt{x^2 + 1}} \quad (x \in \mathbb{R})$,

(15) $f(x) := x^2 \ln(x^2) \quad (0 \neq x \in \mathbb{R})$,

(16) $f(x) := \dfrac{\ln(x^2)}{x} \quad (0 \neq x \in \mathbb{R})$,

(17) $f(x) := \dfrac{x}{e} - \ln(|x|) + 2 \quad (0 \neq x \in \mathbb{R})$,

(18) $f(x) := x \cdot \sqrt{8 - x^2} \ \left(x \in \left[-2\sqrt{2}, 2\sqrt{2}\right]\right)$.

$\boxed{\textbf{Megoldás}}$

(1) 1. lépés. (Kezdeti vizsgálatok) : A függvény páratlan, ui. tetszőleges $x \in \mathbb{R}$ esetén

$$f(-x) = \frac{(-x)^3}{4} - 3(-x) = \frac{-x^3}{4} + 3x = -f(x).$$

Zérushely: $f(x) = 0 \iff x\left(\frac{x^2}{4} - 3\right) = 0 \iff x \in \left\{-2\sqrt{3}, 0, 2\sqrt{3}\right\}$.

	$\left(-\infty, -2\sqrt{3}\right)$	$-2\sqrt{3}$	$(-2\sqrt{3}, 0)$	0	$(0, 2\sqrt{3})$	$2\sqrt{3}$	$(2\sqrt{3}, +\infty)$
f	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$

2. lépés. (Monotonitás, lokális szélsőérték) : $f'(x) = \frac{3x^2}{4} - 3 = 0 \iff x \in \{-2; 2\}$. Tehát

	$(-\infty, -2)$	-2	$(-2, 2)$	2	$(2, +\infty)$
f'	$+$	0	$-$	0	$+$
f	$\uparrow$	lok. max	$\downarrow$	lok. min	$\uparrow$

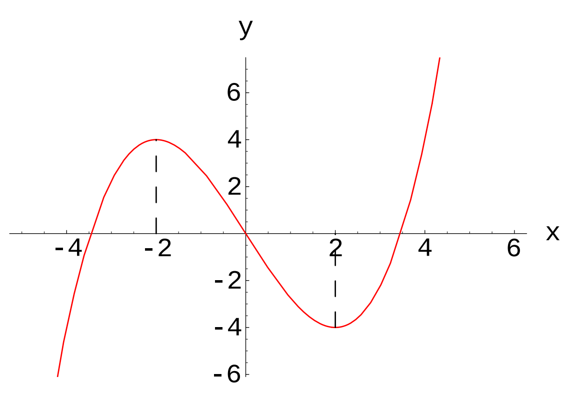
3. lépés. (Görbületi viszonyok, inflexió) : $f''(x) = \frac{6x}{4} = 0 \iff x = 0$. Tehát

	$(-\infty, 0)$	0	$(0, +\infty)$
f''	$-$	0	$+$
f	$\frown$	infl.	$\smile$

4. lépés. (Határérték, aszimptota) : $\lim\limits_{\pm\infty} f = \pm\infty$

$\frac{f(x)}{x} = \frac{x^2}{4} - 3 \to +\infty$ $(x \to \pm\infty)$, tehát nincs aszimptota.

5. lépés. (Grafikon) :



(2) 1. lépés. (Kezdeti vizsgálatok) : A függvény páratlan, ui. tetszőleges $x \in \mathbb{R}$ esetén

$$f(-x) = -4(-x)^5 + 15(-x)^3 = 4x^5 - 15x^3 = -f(x).$$

Zérushely: $f(x) = x^3(15 - 4x^2) = 0 \iff x \in \left\{ -\frac{\sqrt{15}}{2}, 0, \frac{\sqrt{15}}{2} \right\}$.

	$\left(-\infty, -\frac{\sqrt{15}}{2}\right)$	$-\frac{\sqrt{15}}{2}$	$(-\frac{\sqrt{15}}{2}, 0)$	0	$(0, \frac{\sqrt{15}}{2})$	$\frac{\sqrt{15}}{2}$	$(\frac{\sqrt{15}}{2}, +\infty)$
f	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$

2. lépés. (Monotonitás, lokális szélsőérték) :

$f'(x) = -20x^4 + 45x^2 = 5x^2(9 - 4x^2) = 0 \iff x \in \left\{ -\frac{3}{2}, 0, \frac{3}{2} \right\}$. Tehát

	$\left(-\infty, -\frac{3}{2}\right)$	$-\frac{3}{2}$	$\left(-\frac{3}{2}, 0\right)$	0	$\left(0, \frac{3}{2}\right)$	$\frac{3}{2}$	$\left(\frac{3}{2}, +\infty\right)$
f'	$-$	0	$+$	0	$+$	0	$-$
f	$\downarrow$	lok. min	$\uparrow$		$\uparrow$	lok. max	$\downarrow$

3. lépés. (Görbületi viszonyok, inflexió) :

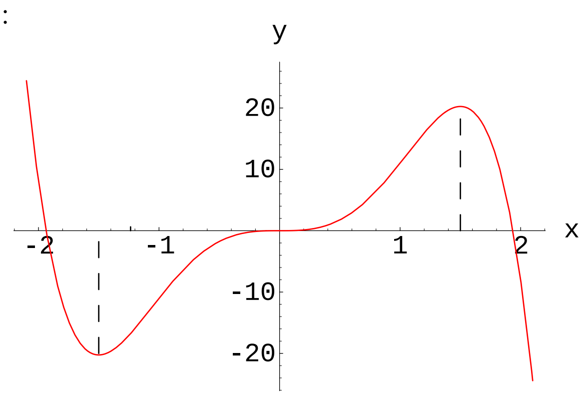
$f''(x) = -80x^3 + 90x = 10x(9 - 8x^2) = 0 \iff x \left\{ -\frac{3}{\sqrt{8}}, 0, \frac{3}{\sqrt{8}} \right\}$. Tehát

	$\left(-\infty, -\frac{3}{\sqrt{8}}\right)$	$-\frac{3}{\sqrt{8}}$	$\left(-\frac{3}{\sqrt{8}}, 0\right)$	0	$\left(0, \frac{3}{\sqrt{8}}\right)$	$\frac{3}{\sqrt{8}}$	$\left(\frac{3}{\sqrt{8}}, +\infty\right)$
f''	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$
f	$\smile$	infl.	$\frown$	infl.	$\smile$	infl.	$\frown$

4. lépés. (Határérték, aszimptota) :

$\lim\limits_{\pm\infty} f = \mp\infty$, $\frac{f(x)}{x} = -4x^4 + 14x^2 \to +\infty$ $(x \to \pm\infty)$, tehát nincs aszimptota.

5. lépés. (Grafikon) :



(3) 1. lépés. (Kezdeti vizsgálatok) : f nem páros, nem páratlan, és nem is periodikus. A $[0,1]$ intervallumban zérushelye $/\xi/$ van, ui. $f \in \mathfrak{C}$ és $f(0) = 2 > 0$, $f(1) = -1 < 0$.

	$(-\infty, \xi)$	ξ	$(\xi, +\infty)$
f	$+$	0	$-$

2. lépés. (Monotonitás, lokális szélsőérték) :

$f'(x) = -4x - 3x^2 = (-x)(3x+4) = 0 \iff x \in \left\{-\frac{4}{3}, 0\right\}$. Tehát

	$\left(-\infty, -\frac{4}{3}\right)$	$-\frac{4}{3}$	$\left(-\frac{4}{3}, 0\right)$	0	$(0, +\infty)$
f'	$-$	0	$+$	0	$-$
f	$\downarrow$	lok. min	$\uparrow$	lok. max	$\downarrow$

3. lépés. (Görbületi viszonyok, inflexió) :

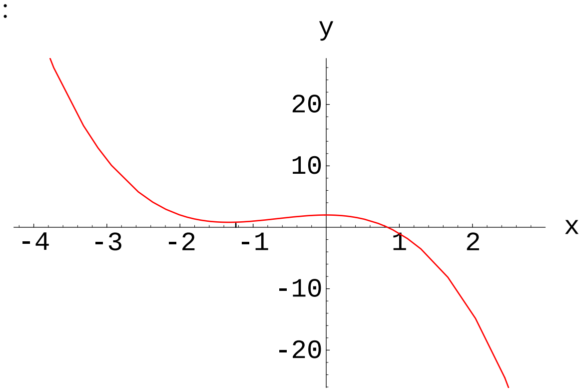
$f''(x) = -4 - 6x = 0 \iff x = -\frac{2}{3}$. Tehát

	$\left(-\infty, -\frac{2}{3}\right)$	$-\frac{2}{3}$	$\left(-\frac{2}{3}, +\infty\right)$
f''	$+$	0	$-$
f	$\smile$	infl.	$\frown$

4. lépés. (Határérték, aszimptota) :

$\lim\limits_{\pm\infty} f = \mp\infty$, $\frac{f(x)}{x} = \frac{2}{x} - 2x - x^2 \to +\infty$ $(x \to \pm\infty)$, tehát nincs aszimptota.

5. lépés. (Grafikon) :



(4) 1. lépés. (Kezdeti vizsgálatok) : f nem páros, nem páratlan, és nem is periodikus. A $[-2,-1]$, $[-1,0]$, $[0,1]$ és a $[2,3]$ intervallumban zérushelye $/\xi_1, \xi_2, \xi_3, \xi_4/$ van, ui. $f \in \mathfrak{C}$ és $f(-2) = 34$, $f(-1) = -3$, $f(0) = 2$, $f(1) = -11$, $f(2) = -30$, $f(3) = 29$.

	$(-\infty, \xi_1)$	ξ_1	(ξ_1, ξ_2)	ξ_2	(ξ_2, ξ_3)	ξ_3	(ξ_3, ξ_4)	ξ_4	$(\xi_4, +\infty)$
f	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$

2. lépés. (Monotonitás, lokális szélsőérték) :
$f'(x) = 12x^3 - 12x^2 - 24x = 12x(x^2 - x - 2) = 12x(x+1)(x-2) = 0 \iff$
$x \in \{-1, 0, 2\}$. Tehát

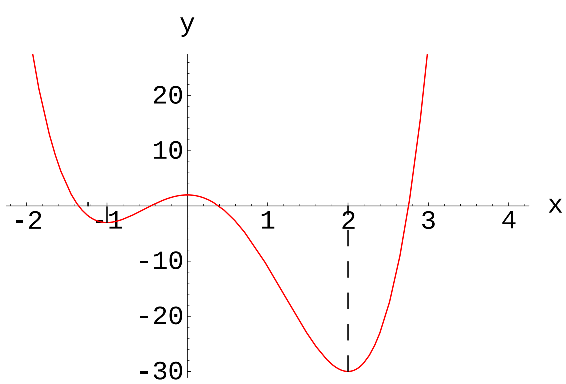
	$(-\infty, -1)$	-1	$(-1, 0)$	0	$(0, 2)$	2	$(2, +\infty)$
f'	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$
f	$\downarrow$	lok. min	$\uparrow$	lok. max	$\downarrow$	lok. min	$\uparrow$

3. lépés. (Görbületi viszonyok, inflexió) : $f''(x) = 36x^2 - 24x - 24 = 12(3x^2 - 2x - 2) = 0 \iff$
$x = \dfrac{1 \pm \sqrt{7}}{3}$. Tehát

	$\left(-\infty, \frac{1-\sqrt{7}}{3}\right)$	$\frac{1-\sqrt{7}}{3}$	$\left(\frac{1-\sqrt{7}}{3}, \frac{1+\sqrt{7}}{3}\right)$	$\frac{1+\sqrt{7}}{3}$	$\left(\frac{1+\sqrt{7}}{3}, +\infty\right)$
f''	$+$	0	$-$	0	$+$
f	$\smile$	infl.	$\frown$	infl.	$\smile$

4. lépés. (Határérték, aszimptota) :
$\lim\limits_{\pm\infty} f = +\infty$, $\dfrac{f(x)}{x} = 3x^3 - 4x^2 - 12x + \dfrac{2}{x} \to +\infty$ $(x \to \pm\infty)$, tehát nincs aszimptota.

5. lépés. (Grafikon) :



(5) 1. lépés. (Kezdeti vizsgálatok) : $f(x) = 0 \iff x = \pm 3$

	$(-\infty, -3)$	-3	$(-3, 0)$	$(0, 3)$	3	$(3, +\infty)$
f	$-$	0	$+$	$-$	0	$+$

2. lépés. (Monotonitás, lokális szélsőérték) :

$$f'(x) = \frac{2x^4 - 3x^2(x^2-9)}{x^6} = \frac{27x^2 - x^4}{x^6} = \frac{27 - x^2}{x^4} = 0 \iff x = \pm\sqrt{27}.$$ Tehát

	$\left(-\infty, -\sqrt{27}\right)$	$-\sqrt{27}$	$(-\sqrt{27}, 0)$	$(0, \sqrt{27})$	$\sqrt{27}$	$(\sqrt{27}, +\infty)$
f'	$-$	0	$+$	0	$+$	$-$
f	$\downarrow$	lok. min	$\uparrow$	$\uparrow$	lok. max.	$\downarrow$

3. lépés. (Görbületi viszonyok, inflexió) :

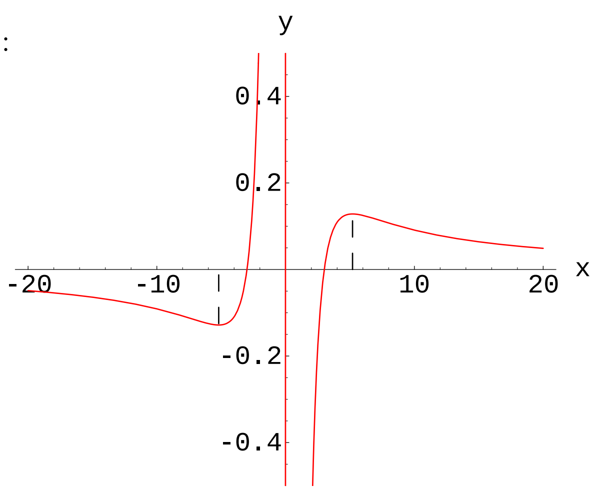
$$f''(x) = \frac{-2x^5 - 4x^3(27 - x^2)}{x^8} = \frac{-2x^2 - 4(27 - x^2)}{x^5} = \frac{2x^2 - 108}{x^5} = 0 \iff x = \pm\sqrt{54}.$$ Tehát

	$\left(-\infty, -\sqrt{54}\right)$	$-\sqrt{54}$	$(-\sqrt{54}, 0)$	$(0, \sqrt{54})$	$\sqrt{54}$	$(\sqrt{54}, +\infty)$
f''	$-$	0	$+$	$-$	0	$+$
f	$\frown$	infl.	$\smile$	$\frown$	infl.	$\smile$

4. lépés. (Határérték, aszimptota) :

$$\lim_{0\pm0} f = \pm\infty, \lim_{\pm\infty} f = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{1 + \frac{9}{x^2}}{x} = 0,$$ tehát a $\varphi(x) := 0$ $(x \in \mathbb{R})$ függvény aszimptota a $\pm\infty$-ben.

5. lépés. (Grafikon) :



(6) **1. lépés. (Kezdeti vizsgálatok)** : $f(x) = 0 \iff x = -\dfrac{1}{2}$

	$(-\infty, -1)$	$\left(-1, -\frac{1}{2}\right)$	$-\frac{1}{2}$	$\left(-\frac{1}{2}, +\infty\right)$
f	$-$	$-$	0	$+$

2. lépés. (Monotonitás, lokális szélsőérték) :

$f'(x) = \dfrac{2(x+1)^2 - (2x+1)2(x+1)}{(x+1)^4} = \dfrac{2(x+1) - 2(2x+1)}{(x+1)^3} = \dfrac{-2x}{(x+1)^3} = 0 \iff x = 0$. Tehát

	$(-\infty, -1)$	$(-1, 0)$	0	$(0, +\infty)$
f'	$-$	$+$	0	$-$
f	$\downarrow$	$\uparrow$	lok. max	$\downarrow$

3. lépés. (Görbületi viszonyok, inflexió) :

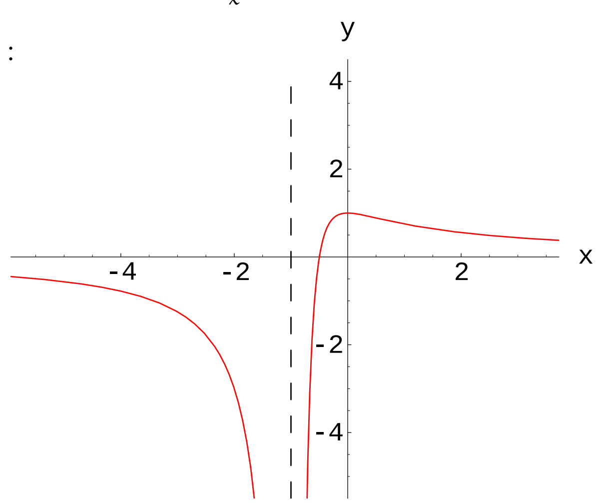
$f''(x) = \dfrac{-2(x+1)^3 + 2x \cdot 3(x+1)^2}{(x+1)^6} = \dfrac{-2(x+1) + 6x}{(x+1)^4} = \dfrac{4x-2}{(x+1)^4} = 0 \iff x = \dfrac{1}{2}$. Tehát

	$(-\infty, -1)$	$\left(-1, \frac{1}{2}\right)$	$\frac{1}{2}$	$\left(\frac{1}{2}, +\infty\right)$
f''	$-$	$-$	0	$+$
f	$\frown$	$\frown$	infl.	$\smile$

4. lépés. (Határérték, aszimptota) :

$\lim\limits_{-1} f = -\infty$, $\lim\limits_{\pm\infty} f = \lim\limits_{x \to \pm\infty} \dfrac{2 + \frac{1}{x}}{x + 2 + \frac{1}{x}} = 0$. Tehát $\varphi(x) := 0$ $(x \in \mathbb{R})$ aszimptota $\pm\infty$-ben.

5. lépés. (Grafikon) :



(7) 1. lépés. (Kezdeti vizsgálatok) :

$$f(x) = \frac{x^2(x+2)}{(x+1)^2} = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad x \in \{-2, 0\}.$$

	$(-\infty, -2)$	$(-2, -2)$	$(-1, 0)$	0	$(0, +\infty)$
f	$-$	$+$	$+$	0	$+$

2. lépés. (Monotonitás, lokális szélsőérték) :

$$f'(x) = \frac{(3x^2+4x)(x+1)^2 - 2(x+1)(x^3+2x^2)}{(x+1)^4} = \frac{x(x^2+3x+4)}{(x+1)^3} = 0 \qquad \Leftrightarrow \qquad x = 0.$$

Tehát

	$(-\infty, -1)$	$(-1, 0)$	0	$(0, +\infty)$
f'	$+$	$-$	0	$+$
f	$\uparrow$	$\downarrow$	lok. min	$\uparrow$

3. lépés. (Görbületi viszonyok, inflexió) :

$$f''(x) = \frac{2(2-x)}{(x+1)^4} = 0 \qquad \Leftrightarrow \qquad x = 2.$$

Tehát

	$(-\infty, -1)$	$(-1, 2)$	2	$(2, +\infty)$
f''	$+$	$+$	0	$(2, +\infty)$
f	$\smile$	$\smile$	infl.	$\frown$

4. lépés. (Határérték, aszimptota) : Mivel

$$f(x) = \frac{x^2(x+2)}{(x+1)^2} \qquad (x \in \mathcal{D}_f),$$

ezért $f(x) \to +\infty \quad (x \to -1)$. Könnyen belátható, hogy $f(x) \to \pm\infty \quad (x \to \pm\infty)$.

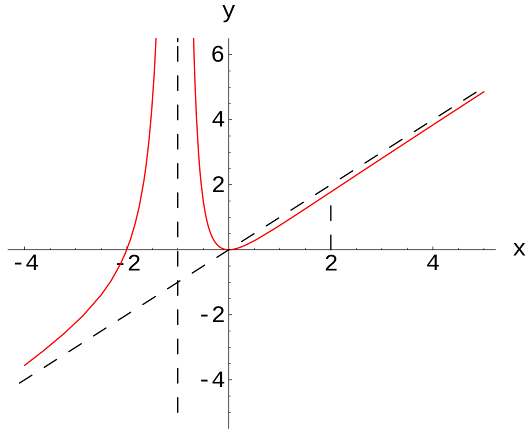
$$\frac{f(x)}{x} = \frac{1 + \frac{2}{x}}{1 + \frac{2}{x} + \frac{1}{x^2}} \to 1 \quad (x \to \pm\infty)$$

és

$$f(x) - x = \frac{x^3 + 2x^2 - x^3 - 2x^2 - x}{x^2 + 2x + 1} = \frac{-x}{x^2 + 2x + 1} = \frac{-\frac{1}{x}}{1 + \frac{2}{x} + \frac{1}{x^2}} \to 0 \quad (x \to \pm\infty).$$

Tehát $\varphi(x) := x \ (x \in \mathbb{R})$ aszimptota $\pm\infty$-ben.

5. lépés. (Grafikon) :



(8) **1. lépés. (Kezdeti vizsgálatok)** :

$$f(x) = \frac{x^2(x-2)}{(x-2)(x+2)} = \frac{x^2}{x+2} \ (x \in \mathbb{R}\setminus\{0;2\}). \text{ Így } f(x) = 0 \iff x = 0.$$

	$(-\infty,-2)$	$(-2,0)$	0	$(0,2)$	$(2,+\infty)$
f	$-$	$+$	0	$+$	$+$

2. lépés. (Monotonitás, lokális szélsőérték) :

$$f'(x) = \frac{2x(x+2)-x^2}{(x+2)^2} = \frac{x^2+4x}{(x+2)^2} = 0 \iff x \in \{-4,0\}. \text{ Tehát}$$

	$(-\infty,-4)$	-4	$(-4,-2)$	$(-2,0)$	0	$(0,2)$	$(2,+\infty)$
f'	$+$	0	$-$	$-$	0	$-$	$+$
f	$\uparrow$	lok. max.	$\downarrow$	$\downarrow$	lok. min.	$\downarrow$	$\uparrow$

3. lépés. (Görbületi viszonyok, inflexió) :

$$f''(x) = \frac{(2x+4)(x+2)^2 - 2(x^2+4x)(x+2)}{(x+2)^4} = \frac{(2x+4)(x+2) - 2(x^2+4x)}{(x+2)^3} = \frac{8}{(x+2)^3}. \text{ Tehát}$$

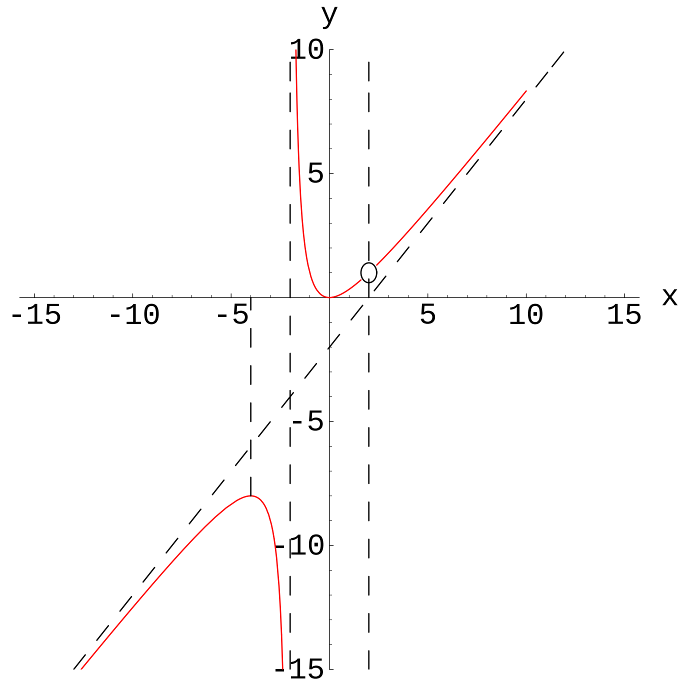
	$(-\infty,-2)$	$(-2,2)$	$(2,+\infty)$
f''	$-$	$-$	$+$
f	$\frown$	$\frown$	$\smile$

4. lépés. (Határérték, aszimptota) : $\lim\limits_{\pm\infty} f = +\infty$, $\lim\limits_{-2\pm0} f = \pm\infty$ és $\lim\limits_{2} f = 1$;

$$\frac{f(x)}{x} = \frac{x}{x+2} \to 1 \ (x \to \pm\infty), \ f(x) - x = \frac{x^2}{x+2} - x = \frac{-2x}{x+2} \to -2 \ (x \to \pm\infty).$$

Tehát $\varphi(x) := x - 2 \ (x \in \mathbb{R})$ aszimptota $\pm\infty$-ben.

5. lépés. (Grafikon) :



(9) 1. lépés. (Kezdeti vizsgálatok) :

$f(x) = 0 \iff x = 1.$

	$(-\infty, 0)$	$(0, 1)$	1	$(1, +\infty)$
f	$+$	$+$	0	$+$

2. lépés. (Monotonitás, lokális szélsőérték) :

$$f'(x) = \frac{2(x-1)x^2 - 2x(x-1)^2}{x^4} = \frac{2x-2}{x^4} = 0 \iff x = 1.\text{ Tehát}$$

	$(-\infty, 0)$	$(0, 1)$	1	$(1, +\infty)$
f'	$+$	$-$	0	$+$
f	$\uparrow$	$\downarrow$	lok. min.	$\uparrow$

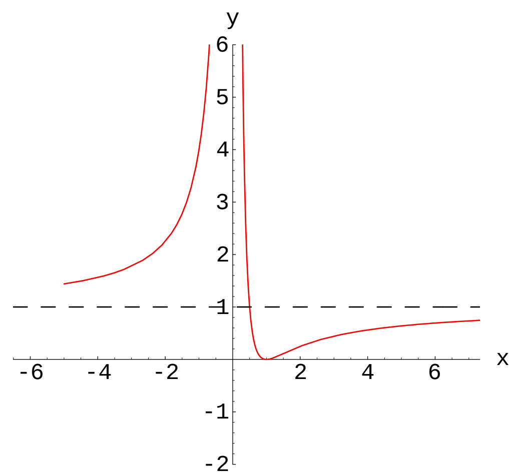
3. lépés. (Görbületi viszonyok, inflexió) :

$$f''(x) = 2 \cdot \frac{x^3 - 3x^2(x-1)}{x^6} = \frac{6-4x}{x^4} = 0 \iff x = \frac{3}{2}.\text{ Tehát}$$

	$(-\infty, 0)$	$\left(0, \frac{3}{2}\right)$	$\frac{3}{2}$	$\left(\frac{3}{2}, +\infty\right)$
f''	$+$	$+$	0	$-$
f	$\smile$	$\smile$	infl.	$\frown$

4. lépés. (Határérték, aszimptota) : $\lim\limits_{0} f = +\infty$, $\lim\limits_{\pm\infty} f = 1$. Tehát $\varphi(x) := 1$ $(x \in \mathbb{R})$ aszimptota $\pm\infty$-ben.

5. lépés. (Grafikon) :



(10) 1. lépés. (Kezdeti vizsgálatok) :

$f(x) = 0 \iff x = 0.$

	$(-\infty,0)$	0	$(0,1)$	$(1,+\infty)$
f	$+$	0	$+$	$+$

2. lépés. (Monotonitás, lokális szélsőérték) :

$f'(x) = \dfrac{2x(x-1)^2 - 2x^2(x-1)}{(x-1)^4} = -\dfrac{2x}{(x-1)^3} = 0 \iff x = 0.$ Tehát

	$(-\infty,0)$	0	$(0,1)$	$(1,+\infty)$
f'	$-$	0	$+$	$-$
f	$\downarrow$	lok. min.	$\uparrow$	$\downarrow$

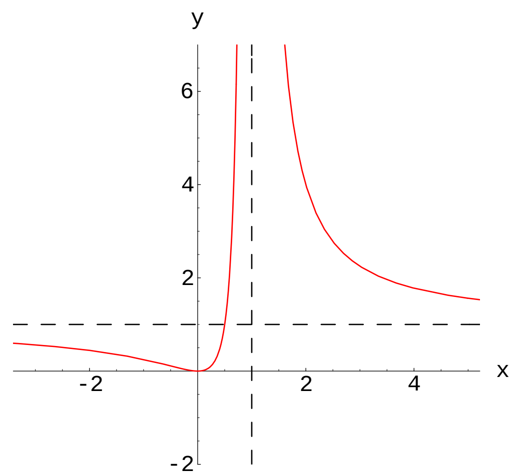
3. lépés. (Görbületi viszonyok, inflexió) :

$f''(x) = (-2) \cdot \dfrac{(x-1)^3 - 3x(x-1)^2}{(x-1)^6} = (-2) \cdot \dfrac{x-1-3x}{(x-1)^4} = \dfrac{2+4x}{(x-1)^4} = 0 \iff x = -\dfrac{1}{2}.$ Tehát

	$\left(-\infty,-\frac{1}{2}\right)$	$-\frac{1}{2}$	$\left(-\frac{1}{2},1\right)$	$(1,+\infty)$
f''	$-$	0	$+$	$+$
f	$\frown$	infl.	$\smile$	$\smile$

4. lépés. (Határérték, aszimptota) : $\lim\limits_{1} f = +\infty$, $\lim\limits_{\pm\infty} f = 1$. Tehát $\varphi(x) := 1$ $(x \in \mathbb{R})$ aszimptota $\pm\infty$-ben.

5. lépés. (Grafikon) :



(11) 1. lépés. (Kezdeti vizsgálatok) :
$f(x) = 0 \iff x = \pm\sqrt{3}$.

	$\left(-\infty, -\sqrt{3}\right)$	$-\sqrt{3}$	$(-\sqrt{3}, \sqrt{3})$	$\sqrt{3}$	$(\sqrt{3}, 2)$	$(2, +\infty)$
f	$+$	0	$-$	0	$+$	$-$

2. lépés. (Monotonitás, lokális szélsőérték) :

$$f'(x) = \frac{2x(2-x) - (x^2-3)(-1)}{(2-x)^2} = \frac{-x^2+4x-3}{(2-x)^2} = \frac{(3-x)(x-1)}{(2-x)^2} = 0 \iff x \in \{1; 3\}.$$ Tehát

	$(-\infty, 1)$	1	$(1, 2)$	$(2, 3)$	3	$(3, +\infty)$
f'	$-$	0	$+$	$+$	0	$-$
f	$\downarrow$	lok. min.	$\uparrow$	$\uparrow$	lok. max	$\downarrow$

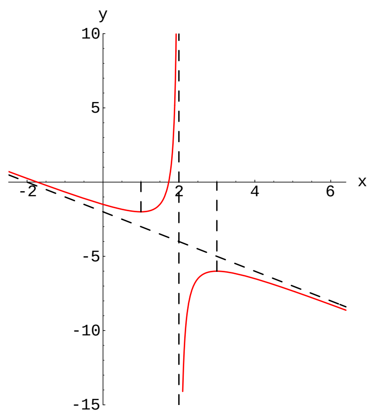
3. lépés. (Görbületi viszonyok, inflexió) :

$$f''(x) = \frac{(-2x+4)(2-x)^2 - (-x^2+4x-3)\cdot 2(2-x)(-1)}{(2-x)^4} = \frac{2}{(2-x)^3}.$$ Tehát

	$(-\infty, 2)$	$(2, +\infty)$
f''	$+$	$-$
f	$\smile$	$\frown$

4. lépés. (Határérték, aszimptota) : $\lim\limits_{2\pm 0} f = \mp\infty$; $\lim\limits_{\pm\infty} f = \mp\infty$, ui. $\dfrac{x^2-3}{2-x} \sim \dfrac{2x}{-1} \to \mp\infty$. Mivel $\dfrac{f(x)}{x} = \dfrac{1}{x} \cdot \dfrac{x^2-3}{2-x} \to -1$ $(x \to \pm\infty)$ és $f(x)+\cdot x = \dfrac{-3+2x}{2-x} \to -2$ $(x \to \pm\infty)$, ezért $\varphi(x) := -x-2$ $(x \in \mathbb{R})$ aszimptota $\pm\infty$-ben.

5. lépés. (Grafikon) :



(12) 1. lépés. (Kezdeti vizsgálatok) :
$f(x) = 0 \iff x = \pm\sqrt{8}$.

	$\left(-\infty, -\sqrt{8}\right)$	$-\sqrt{8}$	$(-\sqrt{8}, \sqrt{8})$	$\sqrt{8}$	$(\sqrt{8}, 3)$	$(3, +\infty)$
f	$+$	0	$-$	0	$+$	$-$

2. lépés. (Monotonitás, lokális szélsőérték) :
$f'(x) = \dfrac{2x(3-x)-(x^2-8)(-1)}{(3-x)^2} = \dfrac{-x^2-6x+8}{(3-x)^2} = \dfrac{(2-x)(x-4)}{(3-x)^2} = 0 \iff x \in \{2;4\}$. Tehát

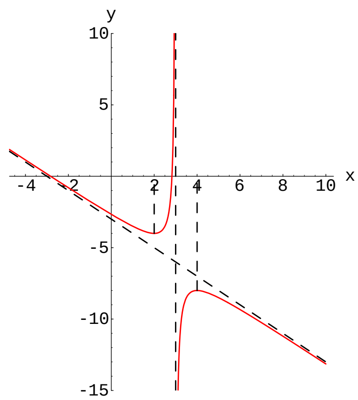
	$(-\infty, 2)$	2	$(2, 3)$	$(3, 4)$	4	$(4, +\infty)$
f'	$-$	0	$+$	$+$	0	$-$
f	$\downarrow$	lok. min.	$\uparrow$	$\uparrow$	lok. max	$\downarrow$

3. lépés. (Görbületi viszonyok, inflexió) :
$f''(x) = \dfrac{(-2x+6)(3-x)^2-(-x^2+6x-8)\cdot 2(3-x)(-1)}{(3-x)^4} = \dfrac{2}{(3-x)^3}$. Tehát

	$(-\infty, 3)$	$(3, +\infty)$
f''	$+$	$-$
f	$\smile$	$\frown$

4. lépés. (Határérték, aszimptota) : $\lim\limits_{3\pm 0} f = \mp\infty$; $\lim\limits_{\pm\infty} f = \mp\infty$, ui. $\dfrac{x^2-8}{2-x} \sim \dfrac{2x}{-1} \to \mp\infty$. Mivel $\dfrac{f(x)}{x} = \dfrac{1}{x}\cdot\dfrac{x^8-3}{3-x} \to -1$ $(x \to \pm\infty)$ és $f(x)+\cdot x = \dfrac{-8+3x}{3-x} \to -3$ $(x \to \pm\infty)$, ezért $\varphi(x) := -x-3$ $(x \in \mathbb{R})$ aszimptota $\pm\infty$-ben.

5. lépés. (Grafikon) :



(13) 1. lépés. (Kezdeti vizsgálatok) :

$f(x) = 0 \iff x = 2.$

	$(-\infty, 2)$	2	$(2, +\infty)$
f	$-$	0	$+$

2. lépés. (Monotonitás, lokális szélsőérték) :

$$f'(x) = \frac{\sqrt{x^2+1} - (x-2)\dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}}}{x^2+1} = \frac{x^2+1-(x-2)x}{\sqrt{(x^2+1)^3}} = \frac{1+2x}{\sqrt{(x^2+1)^3}} = 0 \iff x = -\frac{1}{2}.$$ Tehát

	$(-\infty, -1/2)$	$-1/2$	$(-1/2, +\infty)$
f'	$-$	0	$+$
f	$\downarrow$	lok. min.	$\uparrow$

3. lépés. (Görbületi viszonyok, inflexió) :

$$f''(x) = \frac{2\sqrt{(x^2+1)^3} - (1+2x)\cdot\dfrac{3(x^2+1)^2\cdot x}{\sqrt{(x^2+1)^3}}}{(x^2+1)^3} = \frac{2(x^2+1)-3x(1+2x)}{\sqrt{(x^2+1)^5}} = \frac{2-3x-4x^2}{\sqrt{(x^2+1)^5}} = 0$$

$\iff 8x = -3 \pm \sqrt{41}$. Tehát

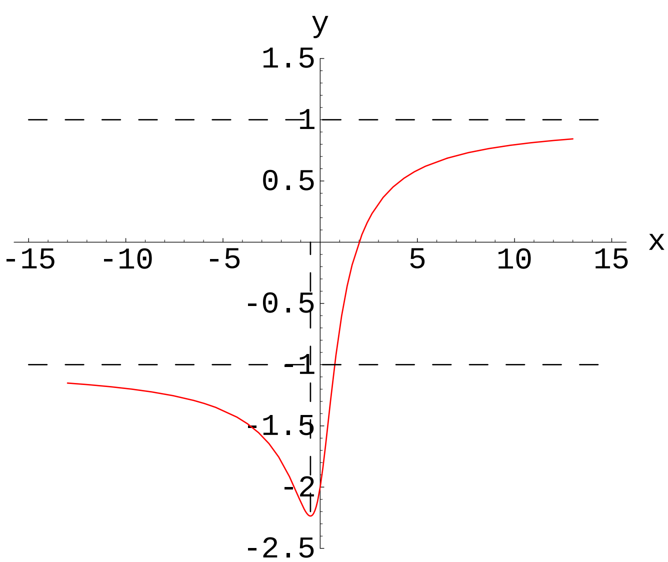
	$\left(-\infty, \frac{-3-\sqrt{41}}{8}\right)$	$\frac{-3-\sqrt{41}}{8}$	$\left(\frac{-3-\sqrt{41}}{8}, \frac{-3+\sqrt{41}}{8}\right)$	$\frac{-3+\sqrt{41}}{8}$	$\left(\frac{-3+\sqrt{41}}{8}, +\infty\right)$
f''	$-$	0	$+$	0	$-$
f	$\frown$	infl.	$\smile$	infl.	$\frown$

4. lépés. (Határérték, aszimptota) : Mivel tetszőleges $0 \neq x \in \mathbb{R}$ esetén

$$\sqrt{1+1/x^2} \cdot f(x) = \begin{cases} 1 - 2/x & (x > 0) \\ 2/x - 1 & (x < 0) \end{cases},$$

ezért $\lim\limits_{\pm\infty} f = \pm 1$. Tehát $\varphi(x) := 1$ $(x \in \mathbb{R})$ aszimptota $+\infty$-ben és $\psi(x) := -1$ $(x \in \mathbb{R})$ aszimptota $-\infty$-ben.

5. lépés. (Grafikon) :



(14) 1. lépés. (Kezdeti vizsgálatok) :

$f(x) = 0 \iff x = -2.$

	$(-\infty, -2)$	-2	$(-2, +\infty)$
f	$+$	0	$-$

2. lépés. (Monotonitás, lokális szélsőérték) :

$$f'(x) = -\frac{\sqrt{x^2+1} - (x+2)\dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}}}{x^2+1} = -\frac{x^2+1-(x+2)x}{\sqrt{(x^2+1)^3}} = \frac{2x-1}{\sqrt{(x^2+1)^3}} = 0 \iff x = \frac{1}{2}.$$

Tehát

	$\left(-\infty, \frac{1}{2}\right)$	$\frac{1}{2}$	$\left(\frac{1}{2}, +\infty\right)$
f'	$-$	0	$+$
f	$\downarrow$	lok. min.	$\uparrow$

3. lépés. (Görbületi viszonyok, inflexió) :

$$f''(x) = \frac{2\sqrt{(x^2+1)^3} - (2x-1)\frac{3(x^2+1)^2\cdot x}{\sqrt{(x^2+1)^3}}}{(x^2+1)^3} = \frac{2(x^2+1) - 3x(2x-1)}{\sqrt{(x^2+1)^5}} = 0 \iff 8x = 3 \pm \sqrt{41}.$$

Tehát

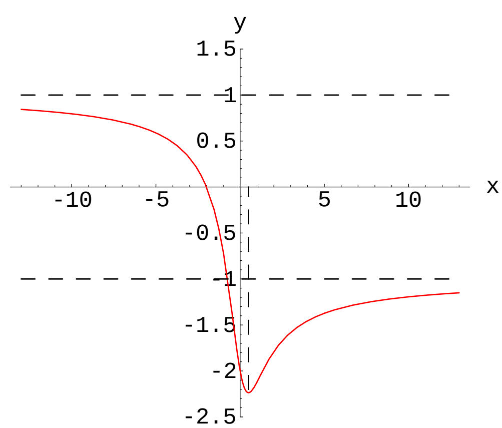
	$\left(-\infty, \frac{3-\sqrt{41}}{8}\right)$	$\frac{3-\sqrt{41}}{8}$	$\left(\frac{3-\sqrt{41}}{8}, \frac{3+\sqrt{41}}{8}\right)$	$\frac{3+\sqrt{41}}{8}$	$\left(\frac{3+\sqrt{41}}{8}, +\infty\right)$
f''	$-$	0	$+$	0	$-$
f	$\frown$	infl.	$\smile$	infl.	$\frown$

4. lépés. (Határérték, aszimptota) : Mivel tetszőleges $0 \neq x \in \mathbb{R}$ esetén

$$\sqrt{1+1/x^2}\cdot f(x) = \begin{cases} -1-2/x & (x>0) \\ 1+2/x & (x<0) \end{cases},$$

ezért $\lim\limits_{\pm\infty} f = \mp 1$. Tehát $\varphi(x) := -1$ $(x \in \mathbb{R})$ aszimptota $+\infty$-ben és $\psi(x) := 1$ $(x \in \mathbb{R})$ aszimptota $-\infty$-ben.

5. lépés. (Grafikon) :



(15) 1. lépés. (Kezdeti vizsgálatok) :

$f(x) = 0 \iff x^2 = 1 \iff x = \pm 1.$

	$(-\infty, -1)$	-1	$(1, 0)$	$(0, 1)$	1	$(1, +\infty)$
f	$+$	0	$-$	$-$	0	$+$

2. lépés. (Monotonitás, lokális szélsőérték) :

$f'(x) = 2x\ln(x^2) + x^2 \cdot \dfrac{2x}{x^2} = 2x(\ln(x^2) + 1) = 0 \iff x = \pm\dfrac{1}{\sqrt{e}}$. Tehát

	$\left(-\infty, -\dfrac{1}{\sqrt{e}}\right)$	$-\dfrac{1}{\sqrt{e}}$	$\left(-\dfrac{1}{\sqrt{e}}, 0\right)$	$\left(0, \dfrac{1}{\sqrt{e}}\right)$	$\dfrac{1}{\sqrt{e}}$	$\left(\dfrac{1}{\sqrt{e}}, +\infty\right)$
f'	$-$	0	$+$	$-$	0	$+$
f	$\downarrow$	lok. min.	$\uparrow$	$\downarrow$	lok. min.	$\uparrow$

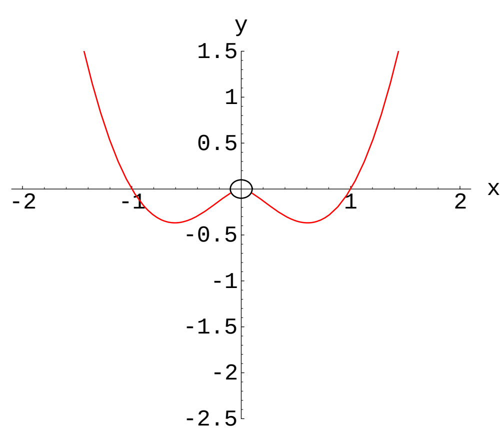
3. lépés. (Görbületi viszonyok, inflexió) :

$f''(x) = 2(\ln(x^2) + 1) + 2x \cdot \dfrac{2x}{x^2} = 2\ln(x^2) + 6 = 0 \iff x = \pm\dfrac{1}{\sqrt{e^3}}$. Tehát

	$\left(-\infty, -\dfrac{1}{\sqrt{e^3}}\right)$	$-\dfrac{1}{\sqrt{e^3}}$	$\left(-\dfrac{1}{\sqrt{e^3}}, 0\right)$	$\left(0, \dfrac{1}{\sqrt{e^3}}\right)$	$\dfrac{1}{\sqrt{e^3}}$	$\left(\dfrac{1}{\sqrt{e^3}}, +\infty\right)$
f''	$+$	0	$-$	$-$	0	$+$
f	$\smile$	infl.	$\frown$	$\frown$	infl.	$\smile$

4. lépés. (Határérték, aszimptota) : $\lim\limits_{\pm\infty} f = +\infty$, mivel tetszőleges $0 \neq x \in \mathbb{R}$ esetén $\ln(x^2)/(1/x^2) \sim (2x/x^2)/(-2/x^3) = -x^2 \to 0$ $(x \to 0)$, ezért $\lim\limits_{0} f = 0$ és mivel $\dfrac{f(x)}{x} \to \pm\infty$ $(x \to \pm\infty)$, ezért nincsen aszimptota.

5. lépés. (Grafikon) :



(16) **1. lépés. (Kezdeti vizsgálatok)** :

$f(x) = 0 \iff x = \pm 1.$

	$(-\infty,-1)$	-1	$(-1,0)$	$(0,1)$	1	$(1,+\infty)$
f	$-$	0	$+$	$-$	0	$+$

2. lépés. (Monotonitás, lokális szélsőérték) :

$f'(x) = \dfrac{2-\ln(x^2)}{x^2} = 0 \iff x = \pm e.$ Tehát

	$(-\infty,-e)$	$-e$	$(-e,0)$	$(0,e)$	e	$(e,+\infty)$
f'	$-$	0	$+$	$+$	0	$-$
f	$\downarrow$	lok. min.	$\uparrow$	$\uparrow$	lok. max.	$\downarrow$

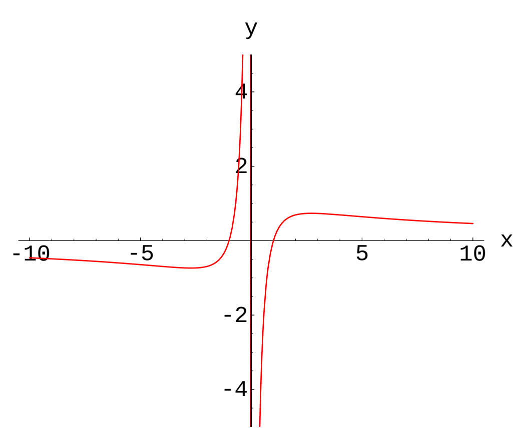
3. lépés. (Görbületi viszonyok, inflexió) :

$f''(x) = 2\cdot\dfrac{\ln(x^2)-3}{x^3} = 0 \iff x = \pm\sqrt{e^3}.$ Tehát

	$(-\infty,-\sqrt{e^3})$	$-\sqrt{e^3}$	$(-\sqrt{e^3},0)$	$(0,\sqrt{e^3})$	$\sqrt{e^3}$	$(\sqrt{e^3},+\infty)$
f''	$-$	0	$+$	$-$	0	$+$
f	$\frown$	infl.	$\smile$	$\frown$	infl.	$\smile$

4. lépés. (Határérték, aszimptota) : $\lim\limits_{0\pm 0} f = \mp 0$ és $\lim\limits_{\pm\infty} f = 0$, ui. $\ln(x^2)/(1/x) \sim -2x \to 0$ $(x\to\pm\infty)$, ezért $\varphi(x) := 0$ $(x\in\mathbb{R})$ aszimptota $\pm\infty$-ben.

5. lépés. (Grafikon) :



(17) 1. lépés. (Kezdeti vizsgálatok) :

$f(x) = 0 \iff x = -e.$

	$(-\infty, -e)$	$-e$	$(-e, 0)$	$(0, +\infty)$
f	$-$	0	$+$	$+$

2. lépés. (Monotonitás, lokális szélsőérték) :

$f'(x) = \frac{1}{e} - \frac{1}{x} = 0 \iff x = e.$ Tehát

	$(-\infty, 0)$	$(0, e)$	e	$(e, +\infty)$
f'	$+$	$-$	0	$+$
f	$\uparrow$	$\downarrow$	lok min.	$\uparrow$

3. lépés. (Görbületi viszonyok, inflexió) :

$f''(x) = \frac{1}{x^2}.$ Tehát

	$(-\infty, 0)$	$(0, +\infty)$
f''	$+$	$+$
f	$\smile$	$\smile$

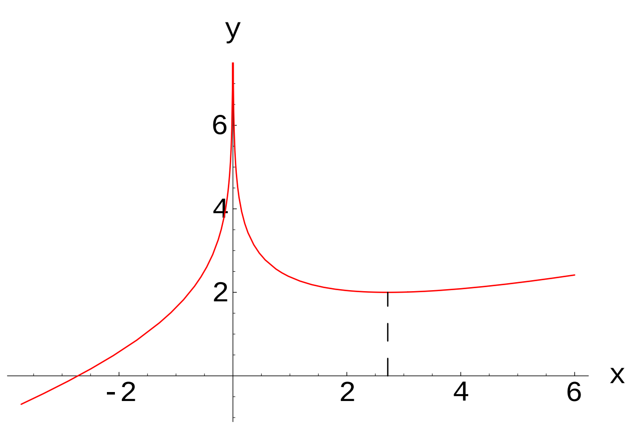
4. lépés. (Határérték, aszimptota) :

Mivel $\ln(x)/x \sim 1 = x \to 0$ $(x \to +\infty)$ ezért $\frac{1}{e} - \frac{\ln(|x|)}{x} + \frac{2}{x} \to \frac{1}{e}$ $(x \to \pm\infty)$. Így $f(x) = x\left(\frac{1}{e} - \frac{\ln(|x|)}{x} + \frac{2}{x}\right) \to \pm\infty \quad (x \to \pm\infty)$.

$\lim_{0\pm 0} f = +\infty.$

Mivel $\frac{f(x)}{x} = \frac{1}{e} - \frac{\ln(|x|)}{x} + \frac{2}{x} \to \frac{1}{e} \quad (x \to \pm\infty)$, de $f(x) - \frac{1}{e}x = -\ln(|x|) + 2 \to -\infty \quad (x \to \pm\infty)$, így nincs aszimptota.

5. lépés. (Grafikon) :



(18) 1. lépés. (Kezdeti vizsgálatok) :

$f(x) = 0 \iff x =\in \left\{-2\sqrt{2}, 0, 2\sqrt{2}\right\}.$

	$-2\sqrt{2}$	$\left(-2\sqrt{2}, 0\right)$	0	$\left(0, 2\sqrt{2}\right)$	$2\sqrt{2}$
f	0	$+$	0	$-$	0

2. lépés. (Monotonitás, lokális szélsőérték) :

Teszőleges $x \in \left(-2\sqrt{2}, 2\sqrt{2}\right)$ esetén $f'(x) = \sqrt{8-x^2} + x \cdot \dfrac{-x}{\sqrt{8-x^2}}$ $\left(-2\sqrt{2}, 2\sqrt{2}\right)$, $f'(x) = 0 \iff$ $x = \pm 2$. Tehát

	$(-2\sqrt{2}, -2)$	-2	$(-2, 2)$	2	$(2, 2\sqrt{2})$
f'	$-$	0	$+$	0	$-$
f	$\uparrow$	lok. min.	$\uparrow$	lok. max.	$\downarrow$

3. lépés. (Görbületi viszonyok, inflexió) :

Teszőleges $x \in \left(-2\sqrt{2}, 2\sqrt{2}\right)$ esetén

$$f''(x) = \frac{-x}{\sqrt{8-x^2}} - \frac{2x\sqrt{8-x^2} - x^2 \cdot \dfrac{-x}{\sqrt{8-x^2}}}{8-x^2} = \ldots = \frac{2x^3 - 24}{\sqrt{(8-x^2)^3}} = 0 \iff x = 0.$$ Tehát

	$\left(-2\sqrt{2}, 0\right)$	0	$(0, 2\sqrt{2})$
f''	$+$	0	$-$
f	$\smile$	infl.	$\frown$

5. lépés. (Grafikon) :