2. gyakorlat

Valós-valós függvény folytonossága. Elemi függvények

<u>**Emlékeztető**</u>.

• **A pontbeli folytonosság fogalma.** *Azt mondjuk, hogy az $f \in \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvény* ***folytonos az*** $a \in \mathcal{D}_f$ ***pontban*** *(jelben $f \in C\{a\}$), ha*

$$(*) \qquad \forall\, \varepsilon > 0 \text{ számhoz } \exists\, \delta > 0, \text{ hogy } \forall\, x \in \mathcal{D}_f,\ |x-a| < \delta \text{ pontban } |f(x) - f(a)| < \varepsilon.$$

Ez a fogalom a függvénynek azt a szemléletes tulajdonságát írja le, hogy „ha az x pont közel van a-hoz, akkor az $f(x)$ függvényértékek közel vannak $f(a)$-hoz.”

• **A határérték és a folytonosság kapcsolata.** *Ha $a \in \mathcal{D}_f \cap \mathcal{D}'_f$, akkor $f \in C\{a\} \iff \exists \lim\limits_{a} f$ és $\lim\limits_{a} f = f(a)$.* $\square$

1. feladat. *Legyen $f \in \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ és $a \in \mathcal{D}_f$. Tegyük fel, hogy*

$$(**) \qquad \exists\, \delta > 0, \text{ hogy } \forall\, \varepsilon > 0 \text{ és } \forall\, x \in \mathcal{D}_f,\ |x-a| < \delta \text{ esetén } |f(x) - f(a)| < \varepsilon.$$

Az f függvény milyen tulajdonságáról van szó?

Megoldás. A feladatban leírt függvénytulajdonság emlékeztet a pontbeli folytonosság $(*)$ alatti definíciójához. Annyi változás történt „csupán”, hogy az ε és a δ számokra vonatkozó feltételek *sorrendjét felcseréltük.*

<u>Vegyük észre</u>, hogy $(**)$-ban **minden** $\varepsilon > 0$ számra és **minden** alkalmas x-re előírtuk az $\big|f(x) - f(a)\big| < \varepsilon$ feltételt. Világos, hogy ez csak úgy teljesülhet, ha $\exists\, \delta > 0$, hogy $\forall\, x \in \mathcal{D}_f$, $|x-a| < \delta$ pontban $\big|f(x) - f(a)\big| = 0$, azaz $f(x) = f(a)$. A feladatban megfogalmazott feltétel tehát pontosan azt fejezi ki, hogy <u>az f függvény az a pont δ-sugarú környezetében állandó</u>. $\blacksquare$

2. feladat. *Tegyük fel, hogy az $f \in \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvény folytonos az $a \in \mathcal{D}_f$ pontban és $f(a) > 0$. Bizonyítsuk be, hogy*

$$\exists\, K(a), \text{ hogy } f(x) > 0 \quad \forall\, x \in \mathcal{D}_f \cap K(a) \text{ pontban.}$$

Másként fogalmazva: $f(a)$ előjelét egy alkalmas $K(a)$ környezetben felvett függvényértékek is megtartják.

Megoldás. Alkalmazzuk a folytonosság definícióját az $\varepsilon := f(a) > 0$ számmal. Ekkor $\exists\, \delta > 0$ szám, hogy

$$\forall\, x \in \mathcal{D}_f,\ |x-a| < \delta \quad \text{esetén} \quad \big|f(x) - f(a)\big| < f(a),$$

azaz

$$-f(a) < f(x) - f(a) < f(a).$$

Ezzel bebizonyítottuk azt, hogy

$$0 < f(x) \quad \big(< 2\,f(a)\big) \quad \text{ha} \quad x \in \mathcal{D}_f \quad \text{és} \quad |x-a| < \delta. \ \blacksquare$$

3. feladat. *Az $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ paraméterektől függően határozzuk meg az*

$$f(x) := \begin{cases} \dfrac{x^2+5x+4}{x^2+3x+2}, & ha\ x \in \mathbb{R} \setminus \{-1,-2\} \\ \alpha, & ha\ x = -1 \\ \beta, & ha\ x = -2 \end{cases}$$

függvény folytonossági, illetve szakadási helyeit, valamint a szakadási helyek típusait.

Megoldás.

Emlékeztető. **Szakadási helyek és osztályozásuk.** Ha $f \in \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $a \in \mathcal{D}_f$ és $f \notin C\{a\}$, akkor azt mondjuk, hogy az a pont az f függvény **szakadási helye.**

1^o **Megszüntethető szakadási helyről** beszélünk, ha

$$\exists \lim_a f \quad \text{véges határérték} \quad \text{és} \quad \lim_a f \neq f(a).$$

2^o Az **elsőfajú szakadási helyet** így értelmezzük:

$$\exists \lim_{a+0} f \quad \text{és} \quad \exists \lim_{a-0} f, \quad \text{ezek végesek,} \quad \text{de} \quad \lim_{a+0} f \neq \lim_{a-0} f.$$

3^o Minden más szakadási helyet **másodfajú szakadási helynek** nevezünk. □

Racionális törtfüggvényről van szó. Mivel $x^2+3x+2 = (x+1)(x+2)$, ezért -1 és -2 a nevező zérushelyei, így a megadott tört az $\mathbb{R}\setminus\{-2,-1\}$ halmazon értelmezhető. Racionális törtfüggvény az értelmezési tartományának minden pontjában folytonos, ezért f az $\mathbb{R} \setminus \{-2,-1\}$ halmaz minden pontjában folytonos.

Az $a = -1$ és az $a = -2$ pontokban a függvény határértékét kell megvizsgálni. Ehhez először a következő átalakítást célszerű elvégezni:

$$(*) \qquad \frac{x^2+5x+4}{x^2+3x+2} = \frac{(x+1)(x+4)}{(x+1)(x+2)} = \frac{x+4}{x+2} = 1 + \frac{2}{x+2} \qquad \big(x \in \mathbb{R} \setminus \{-2,-1\}\big).$$

Legyen $a = -1$. A fentiek alapján ebben a pontban az f függvénynek van határértéke:

$$\lim_{x\to -1} f(x) = \lim_{x \to -1} \frac{x+4}{x+2} = 3.$$

Ha $\alpha = 3$, akkor $\lim_{-1} f = f(-1) = 3$, ezért f a -1 pontban folytonos.

Ha $\alpha \neq 3$ valós szám, akkor $\lim_{-1} f = 3 \neq f(-1) = \alpha$, ezért -1 az f függvény megszüntethető szakadási helye.

Legyen $a = -2$. Most a $(*)$ átalakítás után is kritikus ($\frac{1}{0}$ típusú) határértéket kapunk. *Vegyük észre* azonban azt, hogy az *egyoldali határértékek* léteznek. Nevezetesen:

$$\lim_{x\to -2+0} f(x) = \lim_{x \to -2+0} \left(1 + \frac{2}{x+2}\right) = +\infty \text{ és}$$

$$\lim_{x\to -2-0} f(x) = \lim_{x \to -2-0} \left(1 + \frac{2}{x+2}\right) = -\infty.$$

Az egyoldali határértékek tehát léteznek, de különbözők. Mivel ezek nem végesek, ezért a -2 pont f másodfajú szakadási helye tetszőleges β paraméter esetén. ■

4. feladat. *Mutassuk meg, hogy az*

$$\ln x = e^x - 3$$

egyenletnek van megoldása az $(1, 2)$ *intervallumban.*

Megoldás. A Bolzano-tételt fogjuk alkalmazni.

Emlékeztető. **Bolzano-tétel.** *Legyen* $-\infty < a < b < +\infty$*. Tegyük fel, hogy az* $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ *függvény folytonos és* $f(a) \cdot f(b) < 0$*. Ekkor van olyan* $\xi \in (a, b)$*, hogy* $f(\xi) = 0$*.*

A tétel úgy is megfogalmazhatjuk, hogy a tett feltételek mellett az $f(x) = 0$ egyenletnek van megoldása az (a, b) intervallumban.

A bizonyításnál követett gondolatmenettel (az ún. *Bolzano-féle felezési eljárással*) az $f(x) = 0$ egyenlet közelítő megoldását „tetszőleges pontossággal” elő lehet állítani.

Jegyezzük meg a Bolzano-tétel alábbi kiterjesztését.

Bolzano–Darboux-tétel. *Legyen* $-\infty < a < b < +\infty$*, és tegyük fel, hogy az* $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ *függvény folytonos. Ekkor* f *minden* $f(a)$ *és* $f(b)$ *közötti értéket felvesz, azaz ha például* $f(a) < f(b)$*, akkor* $\forall\, c \in \big(f(a), f(b)\big)$ *számhoz* $\exists\, \xi \in (a, b)$*, hogy* $f(\xi) = c$*.*

A bizonyításhoz elég alkalmazni a Bolzano-tételt a $g(x) := f(x) - c$ $\big(x \in [a, b]\big)$ függvényre. □

Legyen

$$f(x) := \ln x - e^x + 3 \quad \big(x \in (0, +\infty)\big).$$

Világos, hogy $f \in C[1, 2]$.
$f(1) > 0$, mert

$$f(1) = \ln 1 - e^1 + 3 = 3 - e > 0.$$

(Azt már tudjuk, hogy $2 < e < 3$.)
$f(2) < 0$, mert

$$f(2) = \ln 2 - e^2 + 3 < \ln e - e^2 + 3 = 1 - e^2 + 3 = 2^2 - e^2 < e^2 - e^2 = 0.$$

A Bolzano-tétel szerint tehát $\exists\, \xi \in (1, 2)$, hogy $f(\xi) = 0$, azaz $\ln \xi = e^\xi - 3$. ■

5. feladat. *Lássuk be, hogy minden páratlan fokszámú, valós együtthatós polinomnak van valós gyöke. Lényeges-e a polinom fokszámára tett feltétel?*

Megoldás. A Bolzano-tételt fogjuk alkalmazni. Az általánosság megszorítása nélkül tekinthetünk 1 főegyütthatójú polinomokat. Rögzítsük az $n \in \mathbb{N}$ számot, és legyen

$$P(x) := x^{2n+1} + a_{2n}x^{2n} + \cdots + a_1 x + a_0 \quad (x \in \mathbb{R}),$$

ahol az $a_{2n}, a_{2n-1}, \ldots, a_1, a_0$ adott *valós* együtthatók.

Mivel

$$P(x) = x^{2n+1} \cdot \left(1 + \frac{a_{2n}}{x} + \cdots + \frac{a_0}{x^{2n+1}}\right) \quad \big(x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}\big),$$

továbbá

$$\lim_{x\to-\infty} x^{2n+1} = -\infty, \quad \lim_{x\to+\infty} x^{2n+1} = +\infty \quad \text{és} \quad \lim_{x\to\pm\infty} \frac{1}{x} = 0,$$

ezért
$$\lim_{x\to-\infty} P(x) = -\infty \quad \text{és} \quad \lim_{x\to+\infty} P(x) = +\infty.$$
A $(-\infty)$-ben vett $-\infty$ határérték definícióját (például) a $B = -1$ számmal alkalmazva azt kapjuk, hogy a
$$B = -1 \ \text{ számhoz } \ \exists\, x_1 < 0, \ \text{ hogy } \ \forall\, x < x_1 \ \text{ pontban } \ P(x) < -1,$$
ezért (például) $P(2x_1) < -1$.
A $(+\infty)$-ben vett $+\infty$ határérték definícióját (például) a $B = 1$ számmal alkalmazva azt kapjuk, hogy a
$$B = 1 \ \text{ számhoz } \ \exists\, x_2 > 0, \ \text{ hogy } \ \forall\, x > x_2 \ \text{ pontban } \ P(x) > 1,$$
ezért (például) $P(2x_2) > 1$.

Mivel $P \in C\big[2x_1, 2x_2\big]$, továbbá $P(2x_1) < 0$ és $P(2x_2) > 0$, ezért a Bolzano-tételből következik, hogy $\exists\, \xi \in \big(2x_1, 2x_2\big)$, amelyre $P(\xi) = 0$. Ezzel a feladat első állítását bebizonyítottuk.

A polinom fokszámára tett paritási feltétel *lényeges*, mert például az $x^4 + 1$ $(x \in \mathbb{R})$ polinomnak nincs valós gyöke. ■

6. feladat. *Tegyük fel, hogy az $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvény folytonos, $\lim\limits_{x\to-\infty} f = +\infty$ és $\lim\limits_{x\to+\infty} f = +\infty$. Mutassuk meg, hogy ekkor f-nek létezik abszolút minimuma.*

Megoldás. A Weierstrass-tételt fogjuk alkalmazni.

Emlékeztető. **Weierstrass tétele.** *Egy korlátos és zárt $[a, b]$ intervallumon értelmezett $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ folytonos függvénynek van abszolút minimuma és abszolút maximuma.*

Jegyezzük meg, hogy a tétel mindegyik feltétele **lényeges**; bármelyiket is elhagyjuk, a tétel állítása nem marad igaz.

A feladat azt illusztrálja, hogy a fenti feltételek mellett más esetekben is biztosíthatók az abszolút szélsőértékek (mindkettő nem feltétlenül). □

Az f függvény értelmezési tartománya a *nem korlátos* $\mathbb{R}$ intervallum, ezért a Weierstrass-tétel közvetlenül nem alkalmazható.

(i) Először azt látjuk be, hogy az f függvény alulról korlátos $\mathbb{R}$-en.
Az f folytonosságát, valamint a $\lim\limits_{-\infty} f = +\infty$ definícióját a $P = 1$ választással alkalmazva azt kapjuk, hogy $\exists\, x_1 < 0$ hely, hogy $\forall\, x \le x_1$ pontban $f(x) \ge 1$.
A $\lim\limits_{+\infty} f = +\infty$ definíciója szerint, a $P = 1$ számhoz $\exists\, x_2 > 0$, hogy $\forall\, x \ge x_2$ esetén $f(x) \ge 1$.
Így
$$f(x) \ge 1 \quad \big(x \in (-\infty, x_1] \cup [x_2, +\infty)\big).$$
Mivel f folytonos a korlátos ás zárt $\big[x_1, x_2\big]$ intervallumon, ezért itt alulról (felülről is) korlátos.
Megmutattuk tehát azt, hogy f alulról korlátos $\mathbb{R}$-en.

(ii) Legyen $m := \inf \mathcal{R}_f = \inf_{x\in\mathbb{R}} f(x)$. A fentiek szerint $-\infty < m$; az $m < +\infty$ pedig nyilvánvaló. Az (i)-ben követett gondolatmenetet a $P := m+1 \in \mathbb{R}$ számmal alkalmazva azt kapjuk, hogy $\exists\, u_1 < 0$ és $u_2 > 0$, hogy

$$f(x) \geq m+1 \quad \big(x \in (-\infty, u_1] \cup [u_2, +\infty)\big).$$

Mivel $f \in C\,[u_1, u_2]$, ezért a Weierstrass-tétel szerint $\exists\, \alpha \in [u_1, u_2]$, hogy

$$f(\alpha) = \min_{x\in[u_1,u_2]} f(x) = m \leq f(x) \quad \big(x \in [u_1, u_2]\big).$$

Így az $f(\alpha) \leq f(x)$ egyenlőtlenség minden $x \in \mathbb{R}$ pontban igaz, ezért az f függvénynek α abszolút minimumhelye és $f(\alpha)$ az abszolút minimuma. ■

7. feladat. *Bizonyítsuk be az* exp *függvény alábbi tulajdonságait:*
(a) exp *folytonos és* $\uparrow$ $\mathbb{R}$-*en,*
(b) $\lim_{+\infty} \exp = +\infty$ *és* $\lim_{-\infty} \exp = 0$,
(c) $\mathcal{R}_{\exp} = (0, +\infty)$.

Megoldás.
Emlékeztető. 1^o Az exp függvényt így értelmeztük:

$$\exp(x) := e^x := \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{x^k}{k!} = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots \quad (x \in \mathbb{R}).$$

Arról is volt szó, hogy az $e := \lim_{n\to+\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ képlettel definiált e szám valós kitevőjű hatványait miért célszerű az

$$e^x := \exp(x) \quad (x \in \mathbb{R})$$

módon definiálni.

2^o Az exp függvény **függvényegyenlete**:

$$e^{x+y} = e^x \cdot e^y \quad (x, y \in \mathbb{R}).$$

3^o Mivel $1 = e^0 = e^{x+(-x)} = e^x \cdot e^{-x}$, ezért

$$e^{-x} = \frac{1}{e^x} \quad (x \in \mathbb{R}).$$

4^o Ha $x > 0$, akkor $e^x > 1 + x > 1$. □

(a) Folytonosság. A hatványsor összegfüggvényének határértékére, valamint a határérték és a folytonosság kapcsolatára vonatkozó tételek közvetlen következménye.

Monotonitás. Azt kell megmutatni, hogy minden $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$, $x_1 < x_2$ esetén $e^{x_1} < e^{x_2}$. Mivel $x_2 - x_1 > 0$, ezért

$$e^{x_1} < e^{x_2} \quad \Longleftrightarrow \quad 1 < \frac{e^{x_2}}{e^{x_1}} = e^{x_2 - x_1},$$

így a fenti 4^o állítás alapján az exp függvény valóban szigorúan monoton növekedő $\mathbb{R}$-en.

(b) $\lim\limits_{+\infty} \exp = +\infty$. Mivel $x \geq 0$ esetén

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots \geq x$$

és $\lim\limits_{x\to+\infty} x = +\infty$, ezért $\lim\limits_{x\to+\infty} e^x = +\infty$.

$\lim\limits_{-\infty} \exp = 0$, mert

$$\lim_{x\to-\infty} e^x = \lim_{x\to-\infty} \frac{1}{e^{-x}} = \lim_{y\to+\infty} \frac{1}{e^y} = \frac{1}{+\infty} = 0.$$

(c) $\mathcal{R}_{\exp} = (0, +\infty)$.

Mivel az exp függvény szigorúan monoton növekedő $\mathbb{R}$-en, ezért

$$\inf \mathcal{R}_{\exp} = \lim_{-\infty} \exp = 0 \quad \text{és} \quad \sup \mathcal{R}_{\exp} = \lim_{+\infty} \exp = +\infty,$$

következésképpen $\mathcal{R}_{\exp} \subset (0, +\infty)$.

Fordítva: Ha $y \in \big(\inf \mathcal{R}_{\exp}, \sup \mathcal{R}_{\exp}\big) = (0, +\infty)$ tetszőleges, akkor az infimum, illetve a szuprémum definíciójából következik, hogy

$$\exists\, x_0 < x_1 \in \mathcal{D}_{\exp} = \mathbb{R}, \quad \text{hogy} \quad f(x_0) < y < f(x_1).$$

Az exp függvény folytonos, ezért a Bolzano–Darboux-tétel szerint $\exists\, \xi \in [x_0, x_1]$, hogy $f(\xi) = y$, tehát $y \in \mathcal{R}_{\exp}$, így $(0, +\infty) \subset \mathcal{R}_{\exp}$ is teljesül. Ezzel a (c) állítást bebizonyítottuk. ■

Megjegyzés. A fentiek alapján az exp függvény grafikonját pontosan még nem ismerjük. Gondoljuk meg ugyanis, hogy a függvénygrafikon tartalmazhat „hullámokat”. A konvexitás tárgyalása során fogjuk megmutatni, hogy ez nem lehetséges.