Név: ...., *NEPTUN-kód* ....

Csoport, gyak.vez.: ....

Pontszám: ....

Programtervező informatikus szak I. évfolyam
Matematikai alapok javító zárthelyi *az 1. zh anyagából*
2020. január 3.

Minden feladathoz indoklást, levezetést kérünk.

1. *(6 pont)* Hozzuk a legegyszerűbb alakra:

$$\left(a+b-\frac{4ab}{a+b}\right) : \left(\frac{a}{a+b}-\frac{2ab}{a^2-b^2}+\frac{b}{a-b}\right)$$

2. *(8 pont)* A $p \in \mathbb{R}$ paraméter mely értékei esetén teljesül minden $x \in \mathbb{R}$ számra, hogy

$$(p-2)x^2 - px + 2p - 6 > 0 \ \ ?$$

3. *(8 pont)* Oldjuk meg az alábbi egyenletet a valós számok halmazán:

$$\sqrt{6-x} = \sqrt{2x+6} - \sqrt{x+4}$$

4. *(6 pont)* Oldjuk meg az alábbi egyenletet a valós számok halmazán:

$$\log_2(x^2-10) = 2\log_4(x-2) + 4\log_{16} 9$$

5. *(7 pont)* Oldjuk meg az alábbi egyenletet a valós számok halmazán:

$$\cos(2x) - 2\cos^2 x = 4\sin^2 x + 8\sin x + 2$$

6. *(8 pont)*

   a) Egy megfelelő $N \in \mathbb{N}$ szám meghatározásával igazoljuk az alábbi állítást:

$$\exists\, N \in \mathbb{N} \quad \forall\, n \in \mathbb{N},\, n \geq N : \quad \frac{6n^3 - 2n^2 + n + 2}{3n^5 - 15n^4 + 6n^2 - n - 15} < 0{,}02$$

   b) Írjuk fel "pozitív" kijelentés formájában az állítás tagadását.

7. *(7 pont)* Igazoljuk teljes indukcióval:

$$\forall\, n \in \mathbb{N},\ n \geq 2 : \qquad \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} < 2 - \frac{1}{n}$$