# 11. előadás

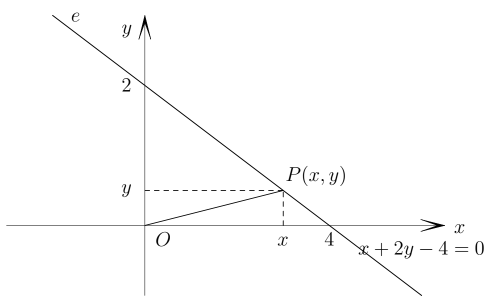
## 2020. november 23.

## $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ típusú függvények feltételes szélsőértékei

### Motiváló példák

**1. példa.** *Pont és egyenes távolsága.*

A probléma így is felfogható:




$$\overline{OP} = \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$\min_{P \in e} \overline{OP} = ?$$

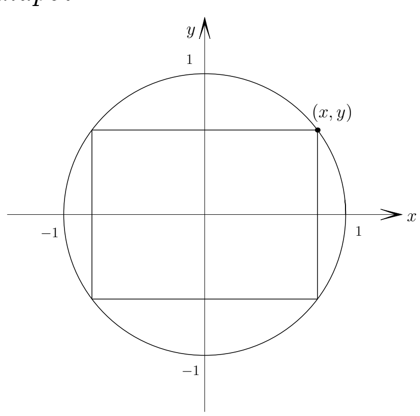
**Feladat:** Adott: $f(x,y) := x^2 + y^2 \quad \big((x,y) \in \mathbb{R}^2\big)$

$$g(x,y) := x + 2y - 4 \quad \big((x,y) \in \mathbb{R}^2\big)$$

$$H_g := \big\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \;\big|\; g(x,y) = 0\big\} \quad \text{(az egyenes pontjai)}$$

Keressük az $f$ függvény minimumát a $H_g$ halmazon.

**2. példa.** *Határozzuk meg az egységsugarú körbe írt téglalapok között a maximális területű téglalapot.*




$$H_g := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 1\}$$

**Feladat:** Adott: $f(x,y) := 4xy \; \big((x,y) \in \mathbb{R}^2\big)$

$$g(x,y) := x^2 + y^2 - 1 \quad \big((x,y) \in \mathbb{R}^2\big)$$

$$H_g := \big\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \;\big|\; g(x,y) = 0\big\} \quad \text{(a körvonal pontjai)}$$

Keressük az $f$ függvény maximumát a $H_g$ halmazon.

Elemi megoldás: $xy \le \dfrac{x^2 + y^2}{2} \Longrightarrow$ négyzet.

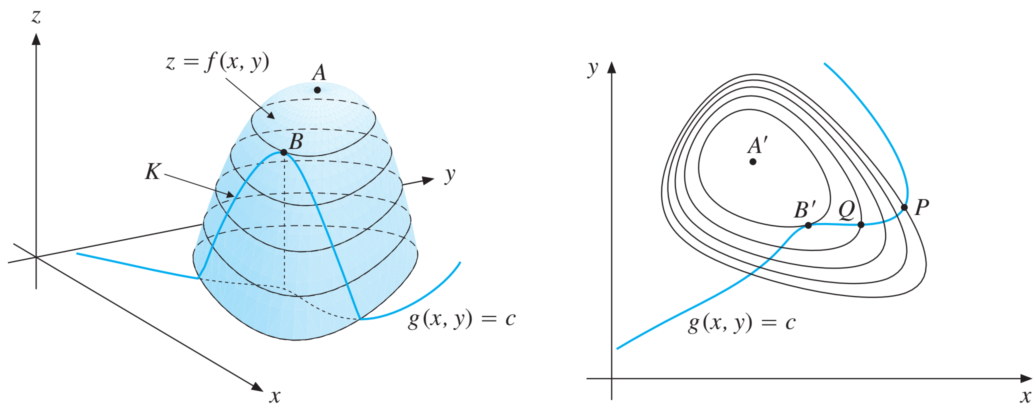
Általánosan

**Feladat:** Adott:
- $U \subset \mathbb{R}^2$ nyílt halmaz,
- $f : U \to \mathbb{R}$ (célfüggvény),
- $g : U \to \mathbb{R}$ (feltételfüggvény),

$$H_g := \big\{(x, y) \in U \;\big|\; g(x, y) = 0\big\} \neq \emptyset.$$

Keressük az $f$ függvény szélsőértékeit a $H_g$ halmazon, azaz határozzuk meg az $f_{|H_g}$ függvény szélsőértékeit.

A problémát az alábbi ábrákon szemléltetjük:




**Megjegyzés.** „Jó esetben” a $H_g \subset \mathbb{R}^2$ halmaz egy síkbeli „görbe”.

Például, ha

$$g(x, y) := x^2 + y^2 - 1 \quad \big((x, y) \in \mathbb{R}^2\big),$$

akkor a $H_g$ halmaz az origó középpntú 1 sugarú körvonal.

Ha

$$g(x, y) := \big(x^2 + y^2\big)^2 - x\big(x^2 + y^2\big) - y^2 \quad \big((x, y) \in \mathbb{R}^2\big),$$

akkor $H_g$ a korábban már megemlített *kardioid*. □

**Definíciók:** Legyen $U \subset \mathbb{R}^2$ nyílt halmaz. Tegyük fel, hogy $f, g : U \to \mathbb{R}$ adott függvények és

$$a \in H_g := \big\{z \in U \;\big|\; g(z) = 0\big\} \neq \emptyset.$$

Azt mondjuk, hogy az $f$ függvénynek a $g = 0$ feltétel mellett az $a$ pontban

- **feltételes abszolút maximuma van**, ha

$$f(x) \leq f(a), \quad \forall\, a \in U \cap H_g;$$

- **feltételes lokális maximuma van**, ha

$$\exists\, K(a) \subset U : \; f(x) \leq f(a), \qquad \forall\, x \in K(a) \cap H_g.$$

A **minimum**mal kapcsolatban hasonló fogalmakat kapunk, ha a fentiekben a $\leq$ egyenlőtlenség helyett $\geq$-t írunk.

A korábbiakkal összhangban használjuk $f(a)$-ra a *feltételes abszolút* (*lokális*) *maximum* (*minimum*), illetve *szélsőérték*, továbbá $a$-ra a *feltételes abszolút* (*lokális*) *maximumhely* (*minimumhely*), illetve *szélsőértékhely* elnevezést is.

A továbbiakban csak **lokális** szélsőértékekre fogalmazunk meg eredményeket.

**1. megjegyzés.** Az $f_{|H_g} \in \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ függvény szélsőértékeire *nem alkalmazhatók* az előző előadáson megfogalmazott tételek. Azokban ui. mindig feltettük, hogy a vizsgált pont az értelmezési tartomány *belső pontja*. Könnyen látható azonban, hogy a $H_g$ halmaznak egyetlen pontja *sem belső pont*.

**2. megjegyzés.** A feltételes szélsőértékek vizsgálatára alkalmazható módszer kitalálója *Joseph Louis Lagrange* (1736–1813) francia matematikus. Ezért a szóban forgó módszert **Lagrange-szorzók** (vagy **Lagrange-féle multiplikátorok**) **módszerének** nevezzük.

**Szükséges feltétel a feltételes lokális szélsőértékre.** *Tegyük fel, hogy*

(a) $U \subset \mathbb{R}^2$ *nyílt halmaz és az* $f, g : U \to \mathbb{R}$ *függvényeknek léteznek a parciális deriváltjaik és ezek folytonosak az* $U$ *halmazon;*

(b) *az* $(x_0, y_0) \in U$ *pontban az* $f$ *függvénynek a* $g = 0$ *feltételre vonatkozóan feltételes lokális szélsőértéke van;*

(c) $g'(x_0, y_0) = \big(\partial_1 g(x_0, y_0), \partial_2 g(x_0, y_0)\big) \neq \big(0, 0\big)$.

*Ekkor van olyan* $\lambda \in \mathbb{R}$ *valós szám* (*ezt* ***Lagrange-szorzónak*** *szokás nevezni*), *hogy az*

$$\mathcal{L}(x, y) := f(x, y) + \lambda g(x, y) \qquad \big((x, y) \in U\big)$$

***Lagrange-függvénynek*** $(x_0, y_0)$ *stacionárius pontja, azaz*

$$\mathcal{L}'(x_0, y_0) = \big(\partial_x \mathcal{L}(x_0, y_0), \partial_y \mathcal{L}(x_0, y_0)\big) = (0, 0).$$

**A tétel alkalmazása:**

$1^o$ Képezzük az

$$\mathcal{L}(x, y) := f(x, y) + \lambda g(x, y) \qquad \big((x, y) \in U\big)$$

Lagrange függvényt.

$2^o$ Az $x, y, \lambda$ ismeretlenekre megoldjuk a következő egyenletrendszert:

$$\begin{aligned} \partial_x \mathcal{L}(x, y) &= \partial_x f(x, y) + \lambda \partial_x g(x, y) = 0, \\ \partial_y \mathcal{L}(x, y) &= \partial_y f(x, y) + \lambda \partial_y g(x, y) = 0, \\ g(x, y) &= 0. \end{aligned}$$

Az így kapott $(x_0, y_0)$ pont(ok)ban *lehet(nek)* a feltételes lokális szélsőértékhelyek.

**Megjegyzés.** Az $\mathcal{L}'(x_0, y_0) = (0, 0)$ csak *szükséges*, de *nem elégséges* feltétel a feltételes lokális szélsőértékre.

**Másodrendű elégséges feltétel a feltételes lokális szélsőértékre.** *Tegyük fel, hogy*

(a) *$U \subset \mathbb{R}^2$ nyílt halmaz és az $f, g : U \to \mathbb{R}$ függvényeknek léteznek a másodrendű parciális deriváltjaik és ezek folytonosak az $U$ halmazon;*

(b) *az $(x_0, y_0) \in U$ pontban a $\lambda_0 \in \mathbb{R}$ számmal teljesül a szükséges feltétel.*

*Tekintsük ezzel a $\lambda_0$ számmal az*

$$\mathcal{L}(x, y) := f(x, y) + \lambda_0 g(x, y) \qquad \big((x, y) \in U\big)$$

*Lagrange-függvényt. Legyen*

$$D(x_0, y_0; \lambda_0) := \det \begin{bmatrix} 0 & \partial_1 g(x_0, y_0) & \partial_2 g(x_0, y_0) \\ \partial_1 g(x_0, y_0) & \partial_{11}\mathcal{L}(x_0, y_0) & \partial_{12}\mathcal{L}(x_0, y_0) \\ \partial_2 g(x_0, y_0) & \partial_{21}\mathcal{L}(x_0, y_0) & \partial_{22}\mathcal{L}(x_0, y_0) \end{bmatrix}$$

(*a mátrixot **kibővített Hesse-mátrixnak** szokás nevezni*).

*Ekkor,*

$1^o$ *ha $D(x_0, y_0; \lambda_0) > 0 \Longrightarrow (x_0, y_0)$ feltételes lokális **maximumhely**,*

$2^o$ *ha $D(x_0, y_0; \lambda_0) < 0 \Longrightarrow (x_0, y_0)$ feltételes lokális **minimumhely**.*

**1. megjegyzés.** A fentiekben két változó és egy egyenlőségi feltétel mellett vizsgáltuk a feltételes szélsőérték-problémát. Az eredmények **kiterjeszthetők** arra az esetre is, amikor az $f$ célfüggvény $n$-változós ($2 < n \in \mathbb{N}$), és ekkor az egyetlen $g = 0$ feltétel helyett több egyenlőségi feltételt is előírhatunk. $\square$

**2. megjegyzés.** A gyakorlat felvet számos olyan szélsőérték-problámát, amelyekben a változókra tett korlátozó feltételek *nem egyenlőségekkel*, hanem *egyenlőtlenségekkel* adottak. Az ilyen típusú feladatokat **(lineáris) programozási problémák**nak hívják. Vizsgálatukhoz nem az *analízis*, hanem a *lineáris algebra* eszköztárát lehet felhasználni. $\square$

**3. megjegyzés.** Tekintsük **a** $g(x, y) = 0$ **egyenletet**et. Tegyük fel, hogy ebből (például) az $y$ változó kifejezhető az $x$ változó *függvényeként*, azaz létezik olyan $\varphi \in \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvény, amelyre $g\big(x, \varphi(x)\big) = 0$ teljesül. A $H_g = \big\{(x, y) \bigm| g(x, y) = 0\big\} \subset \mathbb{R}^2$ halmaz tehát a $\varphi$ függvény garfikonja, ami „jó" esetben egy síkbeli „görbe". Az $f$ függvénynek a $H_g$ halmaz pontjaiban felvett értékeit a $h(x) := f\big(x, \varphi(x)\big)$ valós-valós függvénnyel lehet kifejezni. A kétváltozós függvényekre vonatkozó feltételes szélsőérték-problémát a szóban forgó esetben a $h$ **egyváltozós függvény** szélsőérték-problémájára lehet visszavezetni.

Az esetek „többségében" a $g(x, y) = 0$ egyenletből nem lehet (például) az $y$ változót kifejezni az $x$ változó explicit függvényeként (vagy lehet, de csak nagyon bonyolult módon).

Vannak és fontosak azonban azok az eredmények (az ún. **implicitfüggvény-tételek**), amelyek az egyenlet *megoldhatóságára*, vagyis a fentiekben megemlített $\varphi$ függvénynek a *létezésére* adnak feltételeket, és $\varphi$ explicit alakjáról semmit sem állítanak.

**Példa.** *Tekintsük az*

$$f(x,y) := x^2 + y^2, \quad g(x,y) := x^2 + xy + y^2 - 3 \qquad \big((x,y)^2 \in \mathbb{R}^2\big)$$

*függvényeket, és határozzuk meg az $f$ feltételes lokális szélsőértékeit a $g = 0$ feltétel mellett.*

**Megoldás.**

A szükséges feltételre vonatkozó tétel feltételei teljesülnek, mert $f, g \in C^1\big(\mathbb{R}^2\big)$ és

$$g'(x,y) = \big(\partial_1 g(x,y), \partial_2 g(x,y)\big) = (2x+y, x+2y) \neq \big(0,0\big)$$

$\forall\, (x,y) \in \big\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \;\big|\; g(x,y) = 0\big\}$ pontban.

A feladat Lagrange-függvénye:

$$\mathcal{L}(x,y) := f(x,y) + \lambda g(x,y) = x^2 + y^2 + \lambda(x^2 + xy + y^2 - 3) \qquad \big((x,y) \in \mathbb{R}^2\big).$$

A feltételes lokális szélsőértékre vonatkozó *szükséges* feltétel az $x, y, \lambda$ ismeretlenekre az alábbi egyenletrendszert adja:

$$\begin{aligned} \partial_1 \mathcal{L}(x,y) &= 2x + 2\lambda x + \lambda y \quad = 0, \\ \partial_2 \mathcal{L}(x,y) &= 2y + \lambda x + 2\lambda y \quad = 0, \\ g(x,y) &= x^2 + xy + y^2 - 3 = 0. \end{aligned}$$

Az első- és a második egyenlet összegéből azt kapjuk, hogy

$$2(x+y) + 3\lambda(x+y) = (x+y)(2+3\lambda) = 0.$$

Ez két esetben teljesülhet:

(i) Ha $\lambda = -\frac{2}{3}$. Ekkor az első egyenletből $x = y$, ezt felhasználva a harmadikból $x = \pm 1$ adódik. A $P_1(1,1)$ és a $P_2(-1,-1)$ pontok tehát lehetséges lokális szélsőértékhelyek.

(ii) Ha $x + y = 0$, akkor a harmadik egyenlet alapján $x = \pm\sqrt{3}$. Tehát a $P_3(\sqrt{3}, -\sqrt{3})$ és a $P_4(-\sqrt{3}, \sqrt{3})$ pontok is lehetséges szélsőértékhelyek. Ebben az esetben $\lambda = -2$.

Az elégséges feltétel. Minden $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ pontban

$$\partial_1 g(x,y) = 2x + y, \qquad \partial_2 g(x,y) = x + 2y;$$
$$\partial_{11}\mathcal{L}(x,y) = 2 + 2\lambda, \quad \partial_{12}\mathcal{L}(x,y) = \lambda = \partial_{21}\mathcal{L}(x,y), \quad \partial_{22}\mathcal{L}(x,y) = 2 + 2\lambda,$$

ezért

$$D(x,y;\lambda) = \det \begin{bmatrix} 0 & 2x+y & x+2y \\ 2x+y & 2+2\lambda & \lambda \\ x+2y & \lambda & 2+2\lambda \end{bmatrix}.$$

$P_1(1,1)$, $\lambda = -\frac{2}{3}$:

$$D\big(1,1;-\tfrac{2}{3}\big) = \det \begin{bmatrix} 0 & 3 & 3 \\ 3 & \dfrac{2}{3} & -\dfrac{2}{3} \\ 3 & -\dfrac{2}{3} & \dfrac{2}{3} \end{bmatrix} = (-3)\cdot(2+2) + 3\cdot(-2-2) = -24 < 0,$$

ezért a $P_1(1,1)$ pont *feltételes lokális minimumhely.*

$\underline{P_2(-1,-1),\ \lambda=-\tfrac{2}{3}}$:

$$D\left(-1,-1;-\tfrac{2}{3}\right)=\det\begin{bmatrix}0 & -3 & -3\\ -3 & \dfrac{2}{3} & -\dfrac{2}{3}\\ -3 & -\dfrac{2}{3} & \dfrac{2}{3}\end{bmatrix}=D\left(1,1;-\tfrac{2}{3}\right)=-24<0,$$

ezért a $P_2(-1,-1)$ pont is *feltételes lokális minimumhely.*

$\underline{P_3(\sqrt{3},-\sqrt{3}),\ \lambda=-2}$: Mivel $D(\sqrt{3},-\sqrt{3};-2)=24>0$, ezért a $P_3(\sqrt{3},-\sqrt{3})$ pont *feltételes lokális maximumhely.*

$\underline{P_4(-\sqrt{3},\sqrt{3}),\ \lambda=-2}$: Mivel $D(-\sqrt{3},\sqrt{3};-2)=24>0$, ezért a $P_4(-\sqrt{3},\sqrt{3})$ pont *feltételes lokális maximumhely.*

**Összefoglalva**:

$$P_1(1,1)\ \text{ és }\ P_2(-1,-1)$$

feltételes lokális minimumhelyek és $f(1,1)=f(-1,-1)=2$ a feltételes lokális minimum,

$$P_3(\sqrt{3},-\sqrt{3})\ \text{ és }\ P_4(-\sqrt{3},\sqrt{3})$$

pedig feltételes lokális maximumhelyek és $f\left(\sqrt{3},-\sqrt{3}\right)=f\left(-\sqrt{3},\sqrt{3}\right)=6$ a feltételes lokális maximum. ■

**1. megjegyzés.** A feltételes lokális szélsőértékre vonatkozó **elégséges** feltételt bizonyos esetekben **egyszerűen** is ellenőrizhetjük. Tegyük fel, hogy az $(x_0,y_0)$ pontban a $\lambda_0$ Lagrange-szorzóval teljesül a szükséges feltétel, és tekintsük az

$$\mathcal{L}(x,y):=f(x,y)+\lambda_0 g(x,y)\qquad \big((x,y)\in U\big)$$

Lagrange-függvényt.

Ha sikerül *egyszerűen* belátnunk azt, hogy ennek a függvénynek az $(x_0,y_0)\in \operatorname{int} U$ pont lokális (feltétel nélküli) szélsőértékhelye, akkor ez nyilván egyúttal $f$-nek a $g=0$ feltétel melletti feltételes lokális szélsőértékhelye is.

Ez a helyzet az előbbi feladatnál is.

Vegyük először a $\lambda_0=-2$ Lagrange-szorzóval képzett Lagrange-függvényt:

$$\mathcal{L}(x,y)=x^2+y^2-2(x^2+xy+y^2-3)=-(x+y)^2+6\qquad \big((x,y)\in\mathbb{R}^2\big).$$

Nyilvánvaló, hogy $\mathcal{L}$-nek az $y=-x$ egyenletű egyenes minden pontja *abszoút* maximumhely. A $g(x,y)=x^2+xy+y^2-3=0$ egyenletű halmaznak a szóban forgó egyeneshez tartozó pontjai $P_3(\sqrt{3},-\sqrt{3})$ és $P_4(-\sqrt{3},\sqrt{3})$. Így $\mathcal{L}$-nek ezek a pontok is *abszolút* maximumhelyei, következésképpen $P_3$ és $P_4$ az $f$ függvény $g=0$ fetétel melletti *abszolút* (egyúttal *lokális*) feltételes maximumhelyei.

Ha $\lambda_0=-2/3$, akkor

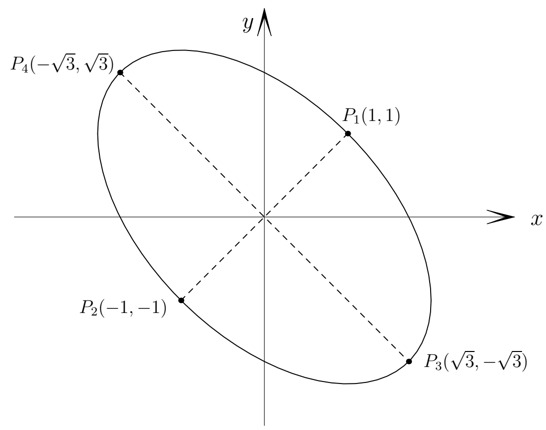
$$\mathcal{L}(x,y)=x^2+y^2-\tfrac{2}{3}(x^2+xy+y^2-3)=\tfrac{2}{3}(x-y)^2+2\qquad \big((x,y)\in\mathbb{R}^2\big).$$

Az előzőekhez hasonlóan azt kapjuk, hogy a $P_1(1,1)$ és a $P_2(-1,-1)$ pont az $f$ függvény $g=0$ fetétel melletti *abszolút* (egyúttal *lokális*) feltételes minimumhelyei. $\square$

**2. megjegyzés.** Rajzoltassuk fel egy programmal a korlátozó feltétel által meghatározott

$$H := \left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \;\middle|\; x^2+xy+y^2-3=0\right\}$$

síkbeli alakzatot. Ez egy ellipszis amelynek a „nevezetes” pontjai éppen az előzőekben megkapott pontok. Ezt szemlélteti a az alábbi ábra:




A feladat geometriailag azt jelenti, hogy keressük a korlátozó feltétel által leírt ellipszis pontjai és az origó közötti távolságok közül lokálisan a legkisebbet, illetve a legnagyobbat.

A $H\subset\mathbb{R}^2$ halmaz korlátos és zárt, az $f$ függvény folytonos $H$-n, ezért Weierstrass tétele szerint $f$-nek $H$-n léteznek **abszolút** szélsőértékei, amelyek egyúttal az $f$ függvénynek a $g=0$ feltétel mellett **lokális** szélsőértékei is. A példában ezek a $P_1,P_2,P_3,P_4$ pontok, így az **abszolút** feltételes szélsőértékek:

$$f(P_1)=f(1,1)=f(P_2)=f(-1,-1)=2,$$
$$f(P_3)=f(\sqrt{3},-\sqrt{3})=f(P_4)=f(-\sqrt{3},\sqrt{3})=6.\ \square$$

## Implicit függvények (egyenletek megoldása)

**Probléma.** <u>Adott:</u> $f\in\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ olyan függvény, amelyre $H:=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \;\middle|\; f(x,y)=0\right\}\neq\emptyset$.

<u>Kérdés:</u>

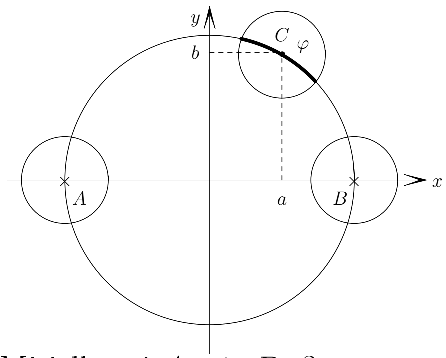
$$\left\{\begin{matrix}\text{Megoldható-e az}\\ f(x,y)=0\\ \text{egyenlet } y\text{-ra?}\end{matrix}\right\} \iff \left\{\begin{matrix}\text{Van-e olyan } \varphi\in\mathbb{R}\to\mathbb{R}\text{:}\\ f(x,\varphi(x))=0?\end{matrix}\right\}$$

Ha létezik olyan $I\subset\mathbb{R}$ nyílt intervallum és $\varphi: I\to\mathbb{R}$ függvény, hogy

$$f\big(x,\varphi(x)\big)=0 \qquad (\forall\ x\in I),$$

akkor azt mondjuk, hogy a $\varphi$ függvény az $f(x,y)=0$ **implicit alakban van megadva**; másképpen fogalmazva: $\varphi$ **megoldása** az $f(x,y)=0$ implicit egyenletnek.

**A probléma vizsgálata:** Legyen $f(x,y) := x^2 + y^2 - 1 \ \big((x,y) \in \mathbb{R}^2\big)$.




- Csak lokális tétel várható.
- $C$ környezetében $\exists\,\varphi$.
- $A(-1,0)$ és $B(1,0)$ környezetében $\nexists\,\varphi$.

Mi jellemzi $A$-t és $B$-t?
Észrevétel: $\partial_2 f(x,y) = 2y \Longrightarrow \partial_2 f(A) = \partial_2 f(B) = 0$.
A többi $C$ pontban (ahol $\exists\,\varphi$) $\partial_2 f(C) \neq 0$.

Szerencse: az általános esetben is ezen múlik a $\varphi$ függvény létezése.

**Egyváltozós implicitfüggvény-tétel.** *Legyen $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ nyílt halmaz és $f : \Omega \to \mathbb{R}$. Tegyük fel, hogy*

(a) *$f$ folytonosan deriválható $\Omega$-n,*

(b) *az $(a,b) \in \Omega$ pontban $f(a,b) = 0$ és $\partial_2 f(a,b) \neq 0$.*

*Ekkor*

$1^o$ *van olyan $K(a) =: U$ és $K(b) =: V$ nyílt halmaz $\mathbb{R}$-ben, hogy minden $x \in U$ ponthoz létezik egyetlen $\varphi(x) \in V$, amelyre $f(x,\varphi(x)) = 0$;*

$2^o$ *az így definiált $\varphi : U \to V$ függvény folytonosan deriválható $U$-n és*

$$\varphi'(x) = -\frac{\partial_1 f(x,\varphi(x))}{\partial_2 f(x,\varphi(x))} \qquad (x \in U).$$

**1. megjegyzés.** Világos, hogy $\varphi(a) = b$. A $\varphi$ függvényt az $f(x,\varphi(x)) = 0$ $(x \in U)$ egyenlőség „implicit” (= nem kifejtett, burkolt, rejtett) módon definiálja. Innen származik a tétel neve.

**2. megjegyzés.** Másként fogalmazva: Ha $f \in C^1\big(\mathbb{R}^2\big)$, akkor az $f(x,y) = 0$ egyenlet megoldható $y$-ra $x$ függvényében minden olyan $(a,b)$ pont valamely környezetében, amelyben $f(a,b) = 0$ és $\partial_2 f(a,b) \neq 0$.

**Implicitfüggvény-tétel az általános esetben.** *Legyenek $\Omega_1 \subset \mathbb{R}^{n_1}$, $\Omega_2 \subset \mathbb{R}^{n_2}$ nyílt halmazok $(n_1, n_2 \in \mathbb{N})$ és $f : \Omega_1 \times \Omega_2 \to \mathbb{R}^{n_2}$. Tegyük fel, hogy,*

(a) *$f$ folytonosan deriválható az $\Omega_1 \times \Omega_2$ halmazon,*

(b) *az $(a,b) \in \Omega_1 \times \Omega_2$ pontban $f(a,b) = 0$ és $\det \partial_2 f(a,b) \neq 0$.*

*Ekkor*

$1^o$ *létezik $a$-nak olyan $K(a) =: U_1 \subset \Omega_1$ és $b$-nek olyan $K(b) =: U_2 \subset \Omega_2$ környezete, hogy minden $x \in U_1$ ponthoz létezik egyetlen $\varphi(x) \in U_2$, amelyre $f(x,\varphi(x)) = 0 \in \mathbb{R}^{n_2}$;*

$2^o$ *az így definiált $\varphi : U_1 \to U_2$ függvény folytonosan deriválható $U_1$-en és*

$$\varphi'(x) = -\left[\partial_2 f(x,\varphi(x))\right]^{-1} \cdot \partial_1 f(x,\varphi(x)) \qquad (x \in U_1).$$

**1. megjegyzés.** A tételben $\partial_2 f(a,b)$ jelöli az $f$ függvény *második változócsoport szerinti parciális deriváltját* az $(a,b)$ pontban. Ez az alábbi módon definiált $n_2 \times n_2$-típusú mátrix:

$$\partial_2 f(a,b) := \left(\mathbb{R}^{n_2} \supset \Omega_2 \ni y \mapsto f(a,y) \in \mathbb{R}^{n_2}\right)'_{y=b} \in \mathbb{R}^{n_2 \times n_2}$$

A $\partial_1 f(a,b)$ derivált definíciója hasonló. $\square$

**2. megjegyzés.** A tételnek egyenletrendszerek *megoldhatóságával* kapcsolatos értelmezés is adható. Legyen $n_1, n_2 \in \mathbb{N}$, $x = (x_1, x_2, \ldots, x_{n_1}) \in \mathbb{R}^{n_1}$, $y = (y_1, y_2, \ldots, y_{n_2}) \in \mathbb{R}^{n_2}$ és $f = (f_1, f_2, \ldots, f_{n_2}) \in \mathbb{R}^{n_1} \times \mathbb{R}^{n_2} \to \mathbb{R}^{n_2}$.

Tekintsük az $f(x,y) = 0$ egyenletrendszert, amelyet komponensekre bontott alakban így írhatunk fel:

$$\begin{aligned} f_1(x_1, x_2, \ldots, x_{n_1}; y_1, y_2, \ldots, y_{n_2}) &= 0, \\ f_2(x_1, x_2, \ldots, x_{n_1}; y_1, y_2, \ldots, y_{n_2}) &= 0, \\ &\vdots \\ f_{n_2}(x_1, x_2, \ldots, x_{n_1}; y_1, y_2, \ldots, y_{n_2}) &= 0. \end{aligned}$$

Itt az $y_1, y_2, \ldots, y_{n_2}$ számok az ismeretlenek és $x_1, x_2, \ldots, x_{n_1}$ a paraméterek. Feltesszük, hogy *ismerjük* ennek egy megoldását, azaz tudjuk, hogy az $a = (a_1, a_2, \ldots, a_{n_1})$ paraméter esetén $b = (b_1, b_2, \ldots, b_{n_2})$ egy megoldás, vagyis $f(a,b) = 0$. A fenti egyenletrendszerből szeretnénk kifejezni az $y_1, y_2, \ldots, y_{n_2}$ ismeretleneket az $x_1, x_2, \ldots, x_{n_1}$ paraméterek függvényében. A 2. tétel szerint ez minden $a$-hoz közeli $x$ esetén megtehető, ha $f$ folytonosan deriválható és $\partial_2 f(a,b) \neq 0$; a megoldások egyértelműek és $x$-nek folytonosan deriválható függvényei. $\square$

## Inverz függvények ($\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ függvények)

**<u>Emlékeztető</u>**. Valós-valós függvények invertálhatóságára és az inverz függvény deriválhatóságára egy **globális** tételt ismertünk meg. A bizonyításhoz a monotonitás és a derivált kapcsolatára vonatkozó eredményeket kell felhasználni. Többváltozós függvények monotonitását nem lehet értelmezni, ezért ezen az úton az invertálhatóságot nem lehet vizsgálni. Sőt: úgy tűnik, hogy nincs olyan természetes, könnyen ellenőrizhető feltétel, amely többváltozós függvény invertálhatóságát biztosítaná.

Az imént jelzett globális tételből azonban egyszerűen következik az alábbi **lokális** jellegű tétel (ez már kiterjeszthető a többváltozós esetre is):

*Tegyük fel, hogy az $f : I \to \mathbb{R}$ ($I \subset \mathbb{R}$ nyílt intervallum) függvény folytonosan deriválható $I$-n és egy $a \in I$ pontban $f'(a) \neq 0$. Ekkor*

$1^o$ *$f$ lokálisan invertálható, azaz $\exists\, K(a) =: U$ és $\exists\, K(f(a)) =: V$, $f_{|U} : U \to V$ függvény bijekció (következésképpen invertálható),*

$2^o$ *az $f^{-1}$ inverz függvény folytonosan deriválható $V$-n és*

$$(*) \qquad \left(f^{-1}\right)'(y) = \frac{1}{f'\left(f^{-1}(y)\right)} \quad (y \in V). \ \square$$

A többváltozós esetben az értelemszerű módosításokkal hasonló állítás igazolható.

**Inverzfüggvény-tétel.** *Legyen* $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ *nyílt halmaz és* $f : \Omega \to \mathbb{R}^n$. *Tegyük fel, hogy,*

(a) $f$ *folytonosan deriválható* $\Omega$*-n,*

(b) *az* $a \in \Omega$ *pontban* $\det f'(a) \neq 0$.

*Ekkor*

$1^o$ $f$ *lokálisan invertálható, azaz van olyan* $K(a) =: U$ *és* $K(f(a)) =: V$*, hogy az* $f_{|U} : U \to V$ *bijekció (következésképpen invertálható),*

$2^o$ *az* $f^{-1}$ *inverz függvény folytonosan deriválható* $V$*-n és*

$$(**) \qquad \big(f^{-1}\big)'(y) = \big[f'(f^{-1}(y))\big]^{-1} \qquad (y \in V).$$

**1. megjegyzés.** Az inverz függvény létezésének és a deriválhatóságának a bizonyítása a többváltozós esetben minőségileg bonyolultabb az egyváltozós esetnél; ez tehát egy olyan pont, ahol az egyváltozós analógia létezik ugyan, az immár nem elegendő. □

**2. megjegyzés.** Az $f$ függvény explicit alakjának az ismeretében $f^{-1}$ helyettesítési értékeire általában nincs explicit képlet; viszont $(**)$ alapján a derivált helyettesítési értékei az $f'$ helyettesítési értékeinek felhasználásával már kiszámíthatók. □

**3. megjegyzés.** A tételnek egyenletrendszerek megoldásával kapcsolatos értelmezés is adható. Legyen $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ és $y = (y_1, y_2, \ldots, y_n) \in \mathbb{R}^n$. Jelölje $f_i \in \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$ az $f$ függvény koordinátafüggvényeit: $f = (f_1, f_2, \ldots, f_n) \in \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$. Tekintsük az

$$f(x) = y$$

egyenletet. A komponensekre bontott alakba írva kapjuk az $n$ egyenletből álló

$$\begin{aligned} f_1(x_1, x_2, \ldots, x_n) &= y_1, \\ f_2(x_1, x_2, \ldots, x_n) &= y_2, \\ &\vdots \\ f_n(x_1, x_2, \ldots, x_n) &= y_n \end{aligned}$$

egyenletrendszert, amelyben az $y_1, \ldots, y_n$ számokat paramétereknek tekintjük, és $x_1, \ldots, x_n$ az ismeretlenek.

Legyen $a = (a_1, a_2, \ldots, a_n) \in \mathcal{D}_f$ és $b = (b_1, b_2, \ldots, b_n) := f(a)$. Tegyük fel, hogy $f$ folytonosan deriválható az $a$ pont egy $K(a) \subset \mathcal{D}_f$ környezetében, továbbá teljesül (a könnyen ellenőrizhető) $\det f'(a) \neq 0$ feltétel. Ekkor a fenti tétel azt állítja, hogy az egyenletrendszer megoldható az $x_1, x_2, \ldots, x_n$ ismeretlenekre az $y_1, y_2, \ldots, y_n$ paraméterek függvényében, ha az $x$ és az $y$ pontokat $a$ és $b$ elegendően kicsiny környezetére korlátozzuk; a megoldás egyértelmű és folytonosan differenciálható. □