8. gyakorlat

Primitív függvények meghatározására vonatkozó módszerek 2.

Az előző gyakorlaton a következő integrálási szabályokra oldottunk meg feladatokat:

1. alapintegrálok, a határozatlan integrál linearitása;

2. az első helyettesítési szabály;

3. a parciális integrálás.

Ezen a gyakorlaton további módszerekkel foglalkozunk.

4. A második helyettesítési szabály.

Emlékeztető. Az előadáson volt arról szó, hogy az összetett függvény deriválására vonatkozó tételnek a „megfordításával” kapcsolatban két állítást fogalmazunk meg. Az egyik *az első helyettesítési szabály*. Ennek alkalmazására az előző gyakorlaton láttunk számos példát.

Az összetett függvény deriválására vonatkozó tétel egy másik „megfordításával” kapjuk a nagyon sokszor alkalmazható (és tegyük hozzá, hogy egyben a „legbonyolultabb”) másik állítást.

A második helyettesítési szabály. *Legyenek $I, J \subset \mathbb{R}$ nyílt intervallumok. Tegyük fel, hogy $f : I \to \mathbb{R}$, $g : J \to I$ bijekció, $g \in D(J)$ és az $f \circ g \cdot g' : J \to \mathbb{R}$ függvénynek van primitív függvénye. Ekkor az f függvénynek is van primitív függvénye és*

$$(*) \qquad \int f(x)\,dx \underset{x=g(t)}{=} \int f\big(g(t)\big) \cdot g'(t)\,dt_{\big|t=g^{-1}(x)} \qquad (x \in I).$$

Figyeljük meg, hogy mit jelent ez a képlet és mikor tudjuk alkalmazni. Először azt jegyezzük meg, hogy $(*)$ **minden** olyan g függvényre igaz, amelyik kielégíti a tétel feltételeit. Tegyük fel, hogy egy $\int f(x)\,dx$ határozatlan integrált, vagyis f egyelőre ismeretlen primitív függvényét akarjuk kiszámítani. Ekkor a „régi” x változó helyett vezessük be az $x = g(t)$ egyenlőségből adódó $t = g^{-1}(x)$ „új” változót. Ha **sikerül (!)** a g függvényt úgy megválasztani, hogy $f \circ g \cdot g'$ primitív függvényét (vagyis az $\int f \circ g \cdot g'$ határozatlan integrált) már ki tudjuk számítani, akkor a fenti képlettel megkapjuk f primitív függvényeit.

A szóban forgó g helyettesítés „megtalálása” általában nem egyszerű feladat. Az előadáson láttuk például azt, hogy az

$$\int \sqrt{1-x^2}\,dx \quad \big(x \in (-1,1)\big)$$

integrál kiszámításához az $x = \sin t = g(t)$ $\big(t \in (-\pi/2, \pi/2)\big)$ helyettesítés célravezető választás. $\square$

1. feladat. *A $t = \sqrt{e^x - 1}$ helyettesítéssel számítsuk ki a*

$$\int \sqrt{e^x - 1}\,dx \quad \big(x \in (0,+\infty)\big)$$

határozatlan integrált.

Megoldás. Legyen tehát

$$t = \sqrt{e^x - 1} \quad \big(\text{mivel } x > 0,\ \text{ezért } t > 0\big).$$

A g helyettesítő függvény megadásához először ebből az egyenletből ki kell fejezni x-et:

$$t = \sqrt{e^x - 1} \quad \Longrightarrow \quad t^2 + 1 = e^x \quad \Longrightarrow \quad x = \ln\left(1 + t^2\right) =: g(t).$$

Mivel $x \in (0,+\infty)$, azaz $\mathcal{R}_g = (0,+\infty)$, ezért $\mathcal{D}_g = (0,+\infty)$.

A g függvény deriválható, $g'(t) = \dfrac{2t}{1+t^2} > 0 \ \big(t \in (0,+\infty)\big)$, ezért g szigorúan monoton növekedő, következésképpen invertálható és

$$g^{-1}(x) = t = \sqrt{e^x - 1} \quad \big(x > 0\big).$$

A határozatlan integrálokra vonatkozó második helyettesítési szabály tehát alkalmazható:

$$\underbrace{\int \sqrt{e^x-1}\,dx} = \int t \cdot \frac{2t}{1+t^2}\,dt = 2\int \frac{t^2+1-1}{1+t^2}\,dt = 2\int \Big(1 - \frac{1}{1+t^2}\Big)\,dt =$$

$$= \Big(2t - 2\operatorname{arctg} t + c\Big)\Big|_{t=\sqrt{e^x-1}} = \underbrace{2\sqrt{e^x-1} - 2\operatorname{arctg}\sqrt{e^x-1} + c \quad \big(x \in (0,+\infty)\big)}\,. \ \blacksquare$$

$\boxed{5.}$ Racionális törtfüggvények integrálása. (Elméleti összefoglaló.)

Racionális törtfüggvénynek nevezzük két polinom hányadosát, azaz a $\dfrac{P}{Q}$ alakú függvényeket, ahol P és $Q \not\equiv 0$ algebrai polinomok. Azt is feltesszük, hogy P-nek és Q-nak nincsenek közös gyökeik.

Látni fogjuk, hogy bármely racionális törtfüggvény primitív függvényét ki lehet számítani (legalább is elvben). A továbbiakban csupán **vázolni** fogjuk az alkalmazható **módszert**.

Először arról lesz szó, hogy bizonyos egyszerű alakú törtek integrálját hogyan lehet meghatározni.

• Alaptípusok (elemi törtek)

1. alaptípus: Legyenek $\alpha \in \mathbb{R}$ és $1 \le n \in \mathbb{N}$ adott számok. Tekintsük a következő határozatlan integrálokat:

$$\int \frac{1}{(x-\alpha)^n}\,dx \quad \big(x \in (\alpha,+\infty) \ \text{ vagy } \ x \in (-\infty,\alpha)\big).$$

Az integrandus mindegyik intervallumon folytonos, ezért van primitív függvénye. A képletek alkalmazásánál azonban arra figyelni kell, hogy csak pozitív szám logaritmusát értelmeztük. Ezt figyelembe véve kapjuk, hogy

$$\int \frac{1}{(x-\alpha)^n}\,dx = \begin{cases} \ln(x-\alpha) + c, & \text{ha } n = 1 \\ \dfrac{(x-\alpha)^{-n+1}}{-n+1} + c, & \text{ha } n = 2,3,\ldots \end{cases}, \quad \text{ha } \ x \in (\alpha,+\infty);$$

$$\int \frac{1}{(x-\alpha)^n}\,dx = \begin{cases} \ln\big(-(x-\alpha)\big) + c, & \text{ha } n = 1 \\ \dfrac{(x-\alpha)^{-n+1}}{-n+1} + c, & \text{ha } n = 2,3,\ldots \end{cases}, \quad \text{ha } \ x \in (-\infty,\alpha).$$

2. alaptípus:

$$\int \frac{2ax+b}{ax^2+bx+c}\,dx \quad (x \in I),$$

ahol I egy olyan intervallum, amelyen $ax^2+bx+c > 0$.

Itt *a számlálóban a nevező deriváltja szerepel*, ezért a megadott I intervallumon az integrandus $\dfrac{f'}{f}$ alakú. Így

$$\int \frac{2ax+b}{ax^2+bx+c}\,dx = \ln\left(ax^2+bx+c\right)+C \quad (x\in I,\ C\in\mathbb{R}).$$

Például

$$\int \frac{2x}{x^2-1}\,dx = \ln\left(x^2-1\right)+c \quad \text{ha} \quad x\in(1,+\infty) \quad \text{vagy} \quad x\in(-\infty,-1)$$
$$\int \frac{2x}{x^2-1}\,dx = \ln\left(1-x^2\right)+c \quad \text{ha} \quad x\in(-1,1).$$

3. alaptípus:

$$\int \frac{Ax+B}{ax^2+bx+c}\,dx \quad (x\in\mathbb{R}),$$
$$\text{ahol } A,B\in\mathbb{R} \quad \text{és} \quad b^2-4ac<0.$$

A számláló tehát elsőfokú, a nevező pedig másodfokú polinom, és az utóbbinak nincs valós gyöke (a $b^2-4ac<0$ feltétel miatt a polinom diszkriminánsa negatív). Az integrandus tehát valóban értelmezhető az egész $\mathbb{R}$-en; itt folytonos, ezért van primitív függvénye. A meghatározása már nehezebb feladat. A mindig alkalmazható eljárást a **2. (d)** feladatban mutatjuk be.

4. alaptípus:

$$\int \frac{Ax+B}{(ax^2+bx+c)^n}\,dx \quad (x\in\mathbb{R}),$$
$$\text{ahol } A,B\in\mathbb{R},\ n=2,3,\ldots \quad \text{és} \quad b^2-4ac<0.$$

Erre az integrálra egy rekurzív képlet igazolható. A formulát itt nem írjuk fel (az érdeklődő hallgatók ezt ebben a segédanyagban megtalálják), csupán annak a megjegyzését javasoljuk, hogy ezeket az integrálokat is ki lehet számítani.

- **Az általános eset (a parciális törtekre bontás módszere)**

Tetszőleges $\dfrac{P}{Q}$ racionális törtfüggvény integrálását az teszi lehetővé, hogy *minden ilyen tört felírható egy polinomnak és elemi törteknek (az ún.* ***parciális törteknek****) az összegeként.*

Az eljárás egyes lépései a következők:

1. lépés: A polinom „leválasztása" (maradékos osztás).

Legyenek P és $Q\not\equiv 0$ polinomok. Ekkor egyértelműen léteznek olyan T és P^* polinomok, amelyekre

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = T(x)+\frac{P^*(x)}{Q(x)} \quad \left(x\in\mathcal{D}_{P/Q} \quad \textit{és} \quad \deg P^* < \deg Q\right),$$

ahol $\deg P^*$ *jelöli a* P^* *polinom fokszámát.*

A felbontást sok esetben egyszerű átalakításokkal kaphatjuk meg. Például

$$\frac{2x^4+x^2+2x+1}{x^3+1}=2x+\frac{x^2+1}{x^3+1}.$$

Az általános esetben a *polinomosztás* módszerét alkalmazhatjuk.

2. lépés: A nevező szorzatra bontása.

A nevezőben levő Q polinomot (ameddig csak tudjuk) valós együtthatós polinomok szorzatára bontjuk. Például:

$$\begin{aligned}
&Q(x)=x^2-5x+4=(x-1)(x-4),\\
&Q(x)=x^3-1=(x-1)(x^2+x+1),\\
&Q(x)=x^3+6x^2+12x+8=(x+2)^3,\\
&Q(x)=1-x^4=1-(x^2)^2=(1-x^2)(1+x^2)=(1-x)(1+x)(1+x^2).
\end{aligned}$$

Figyeljük meg, hogy a felbontásban elsőfokú tényezők, illetve olyan másodfokú tényezők szerepelnek, amelyeknek nincsenek valós gyökei.

Bebizonyítható, hogy minden Q valós együtthatós polinom felírható **valós együtthatós** első- és másodfokú tényezők szorzataként, ahol a másodfokú tényezőknek már nincsenek valós gyökeik.

A szorzatra bontást az általános esetben csak akkor tudjuk elvégezni, ha ismerjük a polinom (általában komplex) gyökeit.

3. lépés: Elemi törtek összegére bontásának a módszere.

Itt már csak olyan $\dfrac{P}{Q}$ alakú törteket tekintünk, amelyeknél a számláló fokszáma **kisebb**, mint a nevező fokszáma, vagyis $\deg P<\deg Q$. Az ilyen törtek a nevezőtől függően elemi törtek összegére bonthatók. A felbontást *határozatlan együtthatókkal* keressük. Például:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{(x-1)(x-4)}&=\frac{A_1}{x-1}+\frac{A_2}{x-4},\\
\frac{x^2+3}{(x-1)(x^2+x+1)}&=\frac{A_1}{x-1}+\frac{B_1x+C_1}{x^2+x+1},\\
\frac{4x^2-8x}{(x-1)^2(x^2+1)^2}&=\frac{A_1}{x-1}+\frac{A_2}{(x-1)^2}+\frac{B_1x+C_1}{x^2+1}+\frac{B_2x+C_2}{(x^2+1)^2}.
\end{aligned}$$

Figyeljük meg, hogy az elsőfokú tényezők esetén a számlálóban egy *állandót*, a másodfokú tényezők esetén pedig a számlálóban egy *elsőfokú polinomot* kell venni. Azt is vegyük észre, hogy ha a nevezőben az elsőfokú tényező egynél nagyobb kitevővel szerepel, akkor *minden* alacsonyabb kitevőjű tagot is „be kell vennünk". Ugyanez a helyzet a másodfokú tényezők esetében is.

Az A_i, B_i, C_i együtthatók meghatározására egy „természetes" módszer kínálkozik: a jobb oldalon hozzunk közös nevezőre, majd a számlálót x hatványai szerint rendezzük. Az így adódó tört számlálója egyenlő a bal oldalon levő tört számlálójával. Két polinom akkor és csak akkor egyenlő, ha a megfelelő együtthatói megegyeznek. A két oldal számlálójában az együtthatók egyenlőségéből a határozatlan együtthatókra egy lineáris egyenletrenszert kapunk. Ennek megoldásai a keresett A_i, B_i, C_i együtthatók. □

2. feladat. *Számítsuk ki az alábbi integrálokat:*

(a) $\displaystyle\int \frac{1}{(x-2)(x-4)}\,dx \quad \big(x \in (2,4)\big),$

(b) $\displaystyle\int \frac{3x-5}{x^2+2x+1}\,dx \quad \big(x \in (-1,+\infty)\big),$

(c) $\displaystyle\int \frac{x^3+x^2-x+3}{x^2-1}\,dx \quad \big(x \in (-1,1)\big),$

(d) $\displaystyle\int \frac{x+3}{x^2+2x+3}\,dx \quad \big(x \in \mathbb{R}\big),$

(e) $\displaystyle\int \frac{1}{x(x^2+4)}\,dx \quad \big(x \in (0,+\infty)\big).$

Megoldás. Racionális törtfüggvények integrálásáról van szó. Mindegyik integrandus folytonos a megadott intervallumon, ezért van primitív függvénye. A parciális törtekre bontás módszere alapján minden ilyen tört felírható egy polinomnak és elemi törteknek az összegeként.

Az első lépésben ezt a felbontást kell meghatároznunk. Ezután számítjuk ki az elemi törtek primitív függvényeit.

(a) A számláló fokszáma kisebb, mint a nevező fokszáma, továbbá a nevező elsőfokú tényezők szorzata. A parciális törtekre bontás módszerét alkalmazzuk. Az integrandusnak van

$$\frac{1}{(x-2)(x-4)} = \frac{A}{x-2} + \frac{B}{x-4}$$

alakú felbontása. Az A és B együtthatókat kell meghatározni. Közös nevezőre hozás, valamint a számláló rendezése után azt kapjuk, hogy

$$\frac{1}{(x-2)(x-4)} = \frac{(A+B)x-4A-2B}{(x-2)(x-4)}.$$

A jobb oldali tört számlálója tehát az 1 (konstans) polinom. Két polinom pontosan akkor egyenlő, ha a megfelelő együtthatóik megegyeznek, azaz

$$\begin{cases} A+B=0 \\ -4A-2B=1 \end{cases} \qquad \Longrightarrow \qquad -2A=1, \quad \underline{A=-\tfrac{1}{2}} \ \text{ és } \ \underline{B=\tfrac{1}{2}}.$$

Következésképpen

$$(*) \qquad \frac{1}{(x-2)(x-4)} = -\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{x-2} + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{x-4}.$$

Így

$$\int \frac{1}{(x-2)(x-4)}\,dx = -\frac{1}{2}\int \frac{1}{x-2}\,dx + \frac{1}{2}\int \frac{1}{x-4}\,dx =$$

(itt vegyük figyelembe, hogy $2 < x < 4$, és figyeljük a nevezők előjeleit!!)

$$= -\frac{1}{2}\ln(x-2) - \frac{1}{2}\int \frac{1}{4-x}\,dx = -\frac{1}{2}\ln(x-2) - \frac{1}{2}\cdot\big((-1)\cdot\ln(4-x)\big) + c =$$

$$= \frac{1}{2}\cdot(\ln(4-x) - \ln(x-2)) = \frac{1}{2}\ln\frac{4-x}{x-2} + c, \quad \text{azaz}$$

$$\int \frac{1}{(x-2)(x-4)}\,dx = \ln\sqrt{\frac{4-x}{x-2}} + c, \quad \text{ha } \ x \in (2,4).$$

Megjegyzés. Az integrandus folytonos a $(-\infty, 2)$ és a $(4, +\infty)$ intervallumon is, ezért ezeken is van primitív függvénye. Nézzük meg hogyan változik a megoldás, ha az integrálokat ezeken az intervallumokon kérdezzük. Világos, hogy a $(*)$ alatti felbontás mindegyik intervallumon érvényes.

Ha $x > 4$, akkor $(*)$-ban mindegyik nevező pozitív, ezért

$$\int \frac{1}{(x-2)(x-4)}\,dx = -\frac{1}{2}\int \frac{1}{x-2}\,dx + \frac{1}{2}\int \frac{1}{x-4}\,dx =$$

$$= -\frac{1}{2}\ln(x-2) + \frac{1}{2}\ln(x-4) + c, \quad \text{így}$$

$$\int \frac{1}{(x-2)(x-4)}\,dx = \ln\sqrt{\frac{x-4}{x-2}} + c, \quad \text{ha } \ x \in (4,+\infty).$$

Ha $x < 2$, akkor $(*)$-ban mindegyik nevező negatív, ezért

$$\int \frac{1}{(x-2)(x-4)}\,dx = -\frac{1}{2}\int \frac{1}{x-2}\,dx + \frac{1}{2}\int \frac{1}{x-4}\,dx =$$

$$= \frac{1}{2}\int \frac{1}{2-x}\,dx - \frac{1}{2}\int \frac{1}{4-x}\,dx = -\frac{1}{2}\ln(2-x) + \frac{1}{2}\ln(4-x) + c, \quad \text{így}$$

$$\int \frac{1}{(x-2)(x-4)}\,dx = \ln\sqrt{\frac{4-x}{2-x}} + c, \quad \text{ha } \ x \in (-\infty,2).$$

(b) Vegyük észre, hogy $x^2 + 2x + 1 = (x+1)^2$, ezért a nevezőben elsőfokú polinom négyzete szerepel. Ekkor a parciális törtekre bontást a

$$\frac{3x-5}{x^2+2x+1} = \frac{3x-5}{(x+1)^2} = \frac{A}{x+1} + \frac{B}{(x+1)^2}$$

alakban kell keresni. Az adódik, hogy

$$\frac{3x-5}{(x+1)^2} = \frac{Ax+A+B}{(x+1)^2} \implies A = 3 \ \text{ és } \ A+B = -5 \implies A = 3 \ \text{ és } \ B = -8, \text{ azaz}$$

$$\frac{3x-5}{(x+1)^2} = 3\cdot\frac{1}{x+1} - 8\cdot\frac{1}{(x+1)^2}, \quad \text{ezért}$$

$$\int \frac{3x-5}{(x+1)^2} = 3\ln(x+1) + \frac{8}{x+1} + c, \quad \text{ha } \ x \in (-1,+\infty).$$

(c) A számláló fokszáma most **nagyobb**, mint a nevező fokszáma, ezért először maradékos osztást kell végeznünk:

$$(*) \qquad \frac{x^3+x^2-x+3}{x^2-1} = \frac{x\big(x^2-1\big) + \big(x^2-1\big) + 4}{x^2-1} = x + 1 + \frac{4}{x^2-1}.$$

A jobb oldalon szereplő tört számlálójának a fokszáma már **kisebb**, mint a nevező fokszáma, továbbá a nevező elsőfokú tényezők szorzatára bontható. A törtet elemi törtek összegére bontjuk:

$$\frac{4}{x^2-1} = \frac{4}{(x-1)(x+1)} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+1} = \frac{(A+B)x + A - B}{(x-1)(x+1)} \quad \Longrightarrow$$
$$\Longrightarrow \begin{cases} A+B=0 \\ A-B=4 \end{cases} \quad \Longrightarrow \quad \underset{\sim\sim\sim}{A=2} \text{ és } \underset{\sim\sim\sim}{B=-2} \quad \Longrightarrow$$

$$(**) \qquad \frac{4}{x^2-1} = 2\cdot\frac{1}{x-1} - 2\cdot\frac{1}{x+1}$$

$(*)$ és $(**)$ alapján azt kapjuk, hogy

$$\int \frac{x^3+x^2-x+3}{x^2-1}\,dx = \int (x+1)\,dx + \int \frac{4}{x^2-1}\,dx =$$
$$= \frac{x^2}{2} + x + 2\int \frac{1}{x-1}\,dx - 2\int \frac{1}{1+x}\,dx = \text{ (mivel } -1<x<1) =$$
$$= \frac{x^2}{2} + x - 2\int \frac{1}{1-x}\,dx - 2\ln(x+1) =$$
$$= \frac{x^2}{2} + x + 2\ln(1-x) - 2\ln(1+x) + c, \quad \text{így}$$
$$\underline{\int \frac{x^3+x^2-x+3}{x^2-1}\,dx = \frac{x^2}{2} + x + 2\ln\frac{1-x}{1+x} + c, \text{ ha } x\in(-1,1).}$$

Megjegyzés. Gyakorlásképpen érdemes kiszámítani az integrandus primitív függvényeit a $(-\infty,-1)$, valamint az $(1,+\infty)$ intervallumon. $\square$

(d) Ez a feladat az elméleti összefoglalóban szereplő 3. alaptípus speciális esete, vagyis a számláló elsőfokú, a nevező pedig másodfokú polinom, és az utóbbinak nincs valós gyöke (ui. a $2^2-4\cdot 3$ diszkriminánsa negatív). Az integrandus tehát valóban értelmezhető és folytonos is az egész $\mathbb{R}$-en.

A primitív függvényt most több lépésben határozzuk meg. Az alábbiakban leírt eljárás **minden** hasonló típusú integrandus esetén alkalmazható.

$$\int \frac{x+3}{x^2+2x+3}\,dx = \text{ (először a számlálóban „kialakítjuk” a nevező deriváltját) } =$$
$$= \int \frac{\frac{1}{2}\cdot(2x+2)+2}{x^2+2x+3}\,dx = \frac{1}{2}\int \frac{2x+2}{x^2+2x+3}\,dx + 2\int \frac{1}{x^2+2x+3}\,dx =$$
$$= \text{ (az első tagban az integrandus } \tfrac{f'}{f} \text{ alakú) } =$$
$$= \frac{1}{2}\ln(x^2+2x+3) + 2\int \frac{1}{x^2+2x+3}\,dx =$$
$$= \text{ (a második tagban az inregrandust teljes négyzetté alakítással az } \int \frac{1}{1+x^2}\,dx$$
$$\text{alapintegrálra vezetjük vissza)}$$

$$= \frac{1}{2}\ln\left(x^2+2x+3\right) + 2\int \frac{1}{(x+1)^2+2}\,dx =$$

$$= \frac{1}{2}\ln\left(x^2+2x+3\right) + 2\cdot\frac{1}{2}\int \frac{1}{1+\left(\frac{x+1}{\sqrt{2}}\right)^2}\,dx =$$

$$= \frac{1}{2}\ln\left(x^2+2x+3\right) + \sqrt{2}\cdot \operatorname{arc\,tg}\frac{x+1}{\sqrt{2}} + c. \quad \text{Így}$$

$$\int \frac{x+3}{x^2+2x+3}\,dx = \frac{1}{2}\ln\left(x^2+2x+3\right) + \sqrt{2}\cdot \operatorname{arc\,tg}\frac{x+1}{\sqrt{2}} + c \quad (x\in\mathbb{R}).$$

(e) A számláló fokszáma kisebb, mint a nevező fokszáma, és a nevező már nem bontható tovább valós együtthatós polinomok szorzatára. A parciális törtekre bontást most az

$$\frac{1}{x(x^2+4)} = \frac{A}{x} + \frac{Bx+C}{x^2+4}$$

alakban kell keresni. Az A, B, C együtthatókra azt kapjuk, hogy

$$\frac{1}{x(x^2+4)} = \frac{(A+B)x^2+Cx+4A}{x(x^2+1)} \implies C=0,\ A=\tfrac{1}{4} \text{ és } B=-\tfrac{1}{4}, \text{ ezért}$$

$$\frac{1}{x(x^2+4)} = \frac{1}{4}\cdot\frac{1}{x} - \frac{1}{4}\cdot\frac{x}{x^2+4}. \quad \text{Így}$$

$$\int \frac{1}{x(x^2+4)}\,dx = \frac{1}{4}\int\frac{1}{x}\,dx - \frac{1}{4}\int\frac{x}{x^2+4}\,dx = \ (x>0 \text{ miatt}) \ =$$

$$= \frac{1}{4}\ln x - \frac{1}{8}\int\frac{2x}{x^2+4}\,dx =$$

$$= \frac{1}{4}\ln x - \frac{1}{8}\ln\left(x^2+4\right) + c, \text{ ha } x\in(0,+\infty).$$