10. gyakorlat
Többváltozós analízis 1.

$\boxed{1.}$ $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ függvények folytonossága és határértéke

Folytonosság

Emlékeztető. Az $\mathbb{R}^2$ lineáris téren az $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ vektor euklideszi normáját így értelmezzük:

$$\|(x, y)\| := \sqrt{x^2 + y^2}.$$

Definíció. Az $f \in \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ függvény **folytonos az** $(a_1, a_2) \in \mathcal{D}_f$ **pontban**, ha

$$\forall\, \varepsilon > 0 \text{ számhoz } \exists\, \delta > 0 \text{ úgy, hogy}$$

$$\forall\, (x, y) \in \mathcal{D}_f,\ \|(x, y) - (a_1, a_2)\| < \delta \text{ pontban } |f(x, y) - f(a_1, a_2)| < \varepsilon.$$

A folytonosságra vonatkozó átviteli elv. Legyen $f \in \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ és $(a_1, a_2) \in \mathcal{D}_f$. Ekkor

1^o $\quad f \in C\{(a_1, a_2)\} \iff \begin{cases} \forall\ (x_k, y_k) : \mathbb{N} \to \mathcal{D}_f,\ \lim\limits_{k\to+\infty} (x_k, y_k) = (a_1, a_2) \text{ sorozatra} \\ \qquad \lim\limits_{k\to+\infty} f(x_k, y_k) = f(a_1, a_2). \end{cases}$

2^o Tegyük fel, hogy a $\mathcal{D}_f$-beli (x_k, y_k) sorozat az $(a_1, a_2) \in \mathcal{D}_f$ ponthoz konvergál és

$$\lim_{k\to+\infty} f\big(x_k, y_k\big) \neq f\big(a_1, a_2\big).$$

Ekkor az f függvény **nem folytonos** a**-ban**. $\square$

1. feladat. *A definíció alapján bizonyítsuk be, hogy az*

$$f(x, y) := \begin{cases} \dfrac{x^2 y^3}{2x^2 + y^2}, & \text{ha } (x, y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\} \\ 0, & \text{ha } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

függvény folytonos a $(0, 0)$ *pontban.*

Megoldás. A tört számlálója és a nevezője az origóhoz közeli pontokban 0-hoz közeli értékeket vesz fel. Két kicsi szám hányadosáról van szó. Azt már tudjuk, hogy az bármi lehet. A feladat állítás szerint a tört az origóhoz közeli pontokban 0-hoz közeli értékeket vesz fel.

A folytonosság definíciója alapján azt kell belátnunk, hogy

$(*)$ $\ \forall\, \varepsilon > 0\text{-hoz } \exists\, \delta > 0 :\ \forall\, x \in \mathcal{D}_f,\ \big\|(x, y) - (0, 0)\big\| < \delta \text{ pontban } \big|f(x, y) - f(0, 0)\big| < \varepsilon.$

Rögzítsünk egy $\varepsilon > 0$ valós számot. Ha $(0, 0) \neq (x, y) \in \mathbb{R}^2$, akkor

$$\big|f(x, y) - f(0, 0)\big| = \left|\frac{x^2 y^3}{2x^2 + y^2} - 0\right| = \frac{x^2 \cdot |y|^3}{2x^2 + y^2} \leq \frac{x^2}{x^2 + y^2} \cdot |y|^3 \leq$$

$$\leq \frac{x^2 + y^2}{x^2 + y^2} \cdot |y|^3 \leq \ (\text{ha } |y| < 1, \text{ ami feltehető}) \ \leq$$

$$\leq |y|^2 \leq x^2 + y^2 = \big\|(x, y)\big\|^2 < \varepsilon.$$

Így $(*)$ rögzített $\varepsilon > 0$ esetén tetszőleges $\delta \in \big(0, \min\{1, \sqrt{\varepsilon}\}\big)$ teljesül, és ez azt jelenti, hogy $f \in C\big\{(0, 0)\big\}$. $\blacksquare$

2. feladat. *Mutassuk meg, hogy az*

$$f(x,y) := \begin{cases} \dfrac{2xy}{x^2+y^2}, & \text{ha } (x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} \\ 0, & \text{ha } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

függvény nem folytonos a $(0,0)$ pontban.

Megoldás. Az előző feladathoz hasonlóan az f függvényértékek az origóhoz közeli pontokban két kicsi szám hányadosai. Most azt kell megmutatnunk, hogy nem igaz az, hogy ezek a hányadosok 0-hoz közel vannak.

A folytonosságra vonatkozó átviteli elv 2^o állítását célszerű alkalmazni. Elég tehát **egy** olyan, a $(0,0)$ ponthoz tartó (x_n, y_n) $(n \in \mathbb{N})$ pontsorozatot találni, amelyre a függvényértékek sorozatának a határértéke nem egyenlő a $(0,0)$ pontban felvett $f(0,0) = 0$ függvényértékkel.

Vegyük észre, hogy ha f értékeit például az $y = x$ egyenes pontjaiban tekintjük, akkor azt kapjuk, hogy

$$f(x,y) = f(x,x) = \frac{2x \cdot x}{x^2 + x^2} = 1, \quad \forall\, x \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \text{ esetén.}$$

Így, ha

$$(x_n, y_n) := \left(\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right) \qquad (1 \le n \in \mathbb{N}),$$

akkor a sorozat az origóhoz konvergál:

$$(x_n, y_n) = \left(\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right) \to (0,0), \quad \text{ha} \quad n \to +\infty,$$

és $f(x_n, y_n) = 1$ minden $1 \le n \in \mathbb{N}$ számra, tehát $f(x_n, y_n) \to 1$, ha $n \to +\infty$. Ez a határérték különbözik az $f(0,0) = 0$ függvényértéktől, ami azt jelenti, hogy az f függvény nem folytonos az origóban. ■

3. feladat. *Legyen*

$$f(x,y) := \begin{cases} \dfrac{x^2 y}{x^4+y^2}, & \text{ha } (x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} \\ 0, & \text{ha } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

Bizonyítsuk be, hogy f leszűkítése minden, az origón átmenő egyenesre egy folytonos egyváltozós függvény, de $f \notin C\{(0,0)\}$.

Megoldás. Legyen $m \in \mathbb{R}$ egy rögzített paraméter, és tekintsük a függvényértékeket az $y = mx$ egyenletű egyenes pontjaiban:

$$f(x,y) = f(x,mx) = \frac{x^2 \cdot (mx)}{x^4 + (mx)^2} = m \cdot \frac{x}{x^2 + m^2}, \text{ ha } x \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \text{ és } f(0,0) = 0.$$

Ezek a valós-valós függvények tetszőleges $m \in \mathbb{R}$ paraméter esetén folytonosak. (Ez azt is jelenti, hogy mindegyik egyenes origóhoz közeli pontjaiban a függvényértékek közel vannak a $(0,0)$ pontban felvett $f(0,0) = 0$ függvényértékhez.)

A feladat második állítása szerint nem igaz az, hogy az origóhoz közeli *tetszőleges* pontokban felvett függvényértékek is közel vannak a $(0,0)$ pontban felvett $f(0,0) = 0$ függvényértékhez. Ezt az állítást a folytonosságra vonatkozó átviteli elv 2^o részének a felhasználásával igazolhatjuk. Olyan origóhoz tartó pontsorozatot kell tehát keresnünk, amelyhez tartozó függvényértékek sorozata nem tart az $f(0,0) = 0$ számhoz.

Vegyük észre, hogy most az $y = mx^2$ parabolák mentén kaphatunk ilyen sorozatokat, mivel

$$f(x,y) = f(x, mx^2) = \frac{x^2 \cdot (mx^2)}{x^4 + (mx^2)^2} = \frac{m}{1+m^2}.$$

Legyen például $m = 1$, és vegyük például az

$$(x_n, y_n) = (x_n, x_n^2) := \left(\frac{1}{n}, \left(\frac{1}{n}\right)^2\right) \qquad (1 \le n \in \mathbb{N})$$

sorozatot. Világos, hogy ez a sorozat az origóhoz konvergál:

$$(x_n, y_n) = \left(\frac{1}{n}, \frac{1}{n^2}\right) \to (0,0), \quad \text{ha} \quad n \to +\infty,$$

és $f(x_n, y_n) = \frac{1}{2}$ minden $n \in \mathbb{N}$ számra, tehát $f(x_n, y_n) \to \frac{1}{2}$, ha $n \to +\infty$. Ez a határérték különbözik az $f(0,0) = 0$ függvényértéktől, ami azt jelenti, hogy az f függvény nem folytonos az origóban. ■

Határérték

Emlékeztető.

Definíció. Az $f \in \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ függvénynek az $(a_1, a_2) \in \mathcal{D}_f'$ pontban **van határértéke**, ha

$$\exists\, A \in \mathbb{R} \text{ úgy, hogy } \forall\, \varepsilon > 0 \text{ számhoz } \exists\, \delta > 0 \text{ úgy, hogy}$$
$$\forall\, (x,y) \in \mathcal{D}_f,\ 0 < \|(x,y) - (a_1,a_2)\| < \delta \text{ pontban } |f(x,y) - A| < \varepsilon.$$

A határértékre vonatkozó átviteli elv. Legyen $f \in \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ és $(a_1, a_2) \in \mathcal{D}_f'$. Ekkor:

1^o

$$\lim_{(x,y)\to(a_1,a_2)} f(x,y) = A \iff \begin{cases} \forall\ (x_k, y_k) : \mathbb{N} \to \mathcal{D}_f \setminus \{(a_1,a_2)\},\ \lim\limits_{k\to+\infty} (x_k, y_k) = (a_1, a_2) \text{ sorozatra} \\ \lim\limits_{k\to+\infty} f(x_k, y_k) = A \end{cases}$$

2^o Tegyük fel, hogy a $\mathcal{D}_f \setminus \{(a_1,a_2)\}$ halmazbeli (x_k, y_k) és (u_k, v_k) $(k \in \mathbb{N})$ sorozatok mindegyike az $(a_1, a_2) \in \mathcal{D}_f'$ ponthoz konvergál és

$$\lim_{k\to+\infty} f(x_k, y_k) \ne \lim_{k\to+\infty} f(u_k, v_k).$$

Ekkor az f függvénynek **nincs határértéke** a**-ban**.

4. feladat. *Lássuk be, hogy*

(a) $\displaystyle \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}} = 0,$

(b) $\displaystyle \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2+y^2}{\sqrt{x^2+y^2+1}-1} = 2.$

Megoldás. **(a)** A pontbeli határérték definíció alapján azt kell megmutatni, hogy

$$(*)\qquad \begin{gathered}\forall\,\varepsilon>0 \text{ számhoz } \exists\,\delta>0, \text{ hogy } \forall\,(x,y)\in\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\},\\ 0<\|(x,y)-(0,0)\|<\delta \text{ esetén } \left|\frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}-0\right|<\varepsilon,\end{gathered}$$

ahol $\|\cdot\|$ az euklideszi norma az $\mathbb{R}^2$ lineáris téren, azaz

$$\|(x,y)-(0,0)\|=\|(x,y)\|=\sqrt{x^2+y^2}.$$

Rögzítsük az $\varepsilon>0$ valós számot. Ekkor $\forall\,(x,y)\in\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}$ pontban

$$\left|\frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}-0\right|=\left|\frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}\right|=\frac{|xy|}{\sqrt{x^2+y^2}}\le$$

$$\text{(most alkalmazzuk az } |xy|\le\frac{x^2+y^2}{2} \text{ egyenlőtlenséget)}$$

$$\le\frac{x^2+y^2}{2\sqrt{x^2+y^2}}=\frac{1}{2}\sqrt{x^2+y^2}=\frac{1}{2}\|(x,y)\|<\varepsilon.$$

Így (*) rögzített $\varepsilon>0$ esetén tetszőleges $\delta\in(0,2\varepsilon)$ számmal teljesül, és ez az állítás bizonyítását jelenti.

(b) Mivel $\lim\limits_a f=A \iff \lim\limits_a(f-A)=0 \iff \lim\limits_a|f-A|=0$, ezért azt kell bebizonyítani, hogy

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}\left|\frac{x^2+y^2}{\sqrt{x^2+y^2+1}-1}-2\right|=0,$$

azaz

$$(**)\qquad \begin{gathered}\forall\,\varepsilon>0 \text{ számhoz } \exists\,\delta>0, \text{ hogy } \forall\,(x,y)\in\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\},\\ 0<\|(x,y)-(0,0)\|<\delta \text{ esetén } \left|\frac{x^2+y^2}{\sqrt{x^2+y^2+1}-1}-2\right|<\varepsilon.\end{gathered}$$

Rögzítsük az $\varepsilon>0$ valós számot. Ekkor $\forall\,(x,y)\in\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}$ pontban

$$\left|\frac{x^2+y^2}{\sqrt{x^2+y^2+1}-1}-2\right|=\frac{\left|(x^2+y^2+1)-2\sqrt{x^2+y^2+1}+1\right|}{\sqrt{x^2+y^2+1}-1}=$$

$$=\frac{\left(\sqrt{x^2+y^2+1}-1\right)^2}{\sqrt{x^2+y^2+1}-1}=\sqrt{x^2+y^2+1}-1=$$

$$=\left(\sqrt{x^2+y^2+1}-1\right)\cdot\frac{\sqrt{x^2+y^2+1}+1}{\sqrt{x^2+y^2+1}+1}=$$

$$=\frac{x^2+y^2}{\sqrt{x^2+y^2+1}+1}\le\frac{x^2+y^2}{\sqrt{x^2+y^2}}\le\sqrt{x^2+y^2}=\|(x,y)\|<\varepsilon.$$

Így (**) rögzített $\varepsilon>0$ esetén tetszőleges $\delta\in(0,\varepsilon)$ számmal teljesül, és ez az állítás bizonyítását jelenti. ■

5. feladat. (a) *Bizonyítsuk be, hogy az*

$$f(x,y) := \begin{cases} \dfrac{x^4y}{(x^2+y^2)^2}, & ha\ (x,y)\in\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\} \\ 0, & ha\ (x,y)=(0,0), \end{cases}$$

függvény folytonos a $(0,0)$ *pontban.*

(b) *Mutassuk meg, hogy a*

$$g(x,y) := \frac{x^4}{\big(x^2+y^2\big)^2} \qquad \big((x,y)\in\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}\big)$$

függvénynek nincs határértéke a $(0,0)$ *pontban.*

Megoldás. (a) A folytonosság definíciója alapján azt kell megmutatni, hogy

$$(*)\qquad \begin{gathered} \forall\,\varepsilon>0 \text{ számhoz } \exists\,\delta>0 : \forall\,(x,y)\in\mathcal{D}_f,\ \|(x,y)-(0,0)\|<\delta \text{ pontban} \\ \big|f(x,y)-f(0,0)\big|<\varepsilon. \end{gathered}$$

Rögzítsük az $\varepsilon>0$ valós számot. Ha $(x,y)\in\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}$, akkor

$$\big|f(x,y)-f(0,0)\big| = \left|\frac{x^4y}{\big(x^2+y^2\big)^2}-0\right| = |y|\cdot\frac{\big(x^2\big)^2}{\big(x^2+y^2\big)^2} \le$$

$$\le |y|\cdot\frac{\big(x^2+y^2\big)^2}{\big(x^2+y^2\big)^2} = |y| \le \sqrt{x^2+y^2} = \|(x,y)\| < \varepsilon.$$

Így $(*)$ rögzített $\varepsilon>0$ esetén teljesül, ha $\delta\in(0,\varepsilon)$, ezért $f\in C\{(0,0)\}$.

(b) A határértékre vonatkozó átviteli elv 2^o része szerint az állítás bizonyításához elegendő két olyan, a $(0,0)$ ponthoz tartó sorozatot találni, amelyekre a függvényértékek sorozatának a határértéke különböző.

Rögzített $m\in\mathbb{R}$ esetén tekintsük g értékeit az $y=mx$ egyenletű egyenes pontjaiban:

$$g(x,y)=g(x,mx)=\frac{x^4}{\big(x^2+(mx)^2\big)^2}=\frac{1}{\big(1+m^2\big)^2} \qquad \big(x\in\mathbb{R}\setminus\{0\}\big).$$

Ebből már láthatjuk, hogy különböző egyenesek mentén fogunk találni alkalmas sorozatokat.

Legyen $m=0$ és

$$(x_k,y_k) := \Big(\frac{1}{k},\,0\Big) \quad (1\le k\in\mathbb{N}).$$

Ekkor

$$\lim_{k\to+\infty}(x_k,y_k) = \Big(\lim_{k\to+\infty}\frac{1}{k},\ \lim_{k\to+\infty}0\Big) = (0,0)$$

(vagyis a sorozat az x tengely mentén tart az origóhoz), és

$$\lim_{k\to+\infty}g(x_k,y_k) = \lim_{k\to+\infty}\frac{\Big(\dfrac{1}{k}\Big)^4}{\Big(\Big(\dfrac{1}{k}\Big)^2+0^2\Big)^2} = 1.$$

Legyen $m = 1$ és

$$(u_k, v_k) := \left(\frac{1}{k}, \frac{1}{k}\right) \quad (1 \leq k \in \mathbb{N}).$$

Ekkor

$$\lim_{k\to+\infty}(u_k, v_k) = \left(\lim_{k\to+\infty}\frac{1}{k}, \lim_{k\to+\infty}\frac{1}{k}\right) = (0,0)$$

(vagyis a sorozat az $y = x$ tengely mentén tart az origóhoz), és

$$\lim_{k\to+\infty} g(u_k, v_k) = \lim_{k\to+\infty}\frac{\left(\frac{1}{k}\right)^4}{\left(\left(\frac{1}{k}\right)^2 + \left(\frac{1}{k}\right)^2\right)^2} = \frac{1}{4}.$$

Mivel

$$\lim_{k\to+\infty} g(x_k, y_k) = 1 \neq \frac{1}{4} = \lim_{k\to+\infty} g(u_k, v_k),$$

ezért a g függvénynek nincs határértéke a $(0,0)$ pontban. ■

$\boxed{2.}$ Parciális deriváltak

Emlékeztető. Egy $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ $(1 \leq n \in \mathbb{N})$ függvény i-edik $(i = 1, 2, \ldots, n)$ változója szerinti parciális deriváltját az $a = (a_1, a_2, \ldots, a_n) \in \operatorname{int}\mathcal{D}_f$ pontban úgy számítjuk ki, hogy az a pont koordinátáit az i-edik kivételével rögzítjük, és az így kapott valós-valós függvényt deriváljuk (ha az deriválható). □

6. feladat. *Számítsuk ki az*

$$f(x,y) := \frac{x^2 - y^3}{xy} \qquad (x, y > 0)$$

függvény x és y változók szerinti parciális deriváltjait.

Megoldás.
$\partial_1 f(x,y) = \partial_x f(x,y) =?$

Most y rögzített és x-et tekintjük változónak:

$$\partial_x f(x,y) = \frac{2x \cdot xy - (x^2 - y^3)\cdot y}{(xy)^2} = \frac{2x^2y - x^2y + y^4}{x^2y^2} = \\ = \frac{x^2y + y^4}{x^2y^2} = \frac{x^2 + y^3}{x^2y}.$$

$\partial_2 f(x,y) = \partial_y f(x,y) =?$

Most x rögzített és y-t tekintjük változónak:

$$\partial_y f(x,y) = \frac{-3y^2 \cdot xy - (x^2 - y^3)\cdot x}{(xy)^2} = \frac{-3xy^3 - x^3 + xy^3}{x^2y^2} = \\ = \frac{-2xy^3 - x^3}{x^2y^2} = -\frac{x^2 + 2y^3}{xy^2}. \quad ■$$

7. feladat. *Legyen*

$$f(x,y) := x^3y + x^2y^2 + x + y^2 \qquad \big((x,y)\in\mathbb{R}^2\big).$$

Számítsa ki a következő másodrendű parciális deriváltakat

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}, \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}, \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} := \frac{\partial^2 f}{\partial x\partial x}, \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} := \frac{\partial^2 f}{\partial y\partial y}$$

az $(x,y) = (1,0)$ *pontban.*

Megoldás. Az f függvény minden első- és másodrendű parciális deriváltja létezik minden $(x,y)\in\mathbb{R}^2$ pontban. Vegyünk egy tetszőleges $(x,y)\in\mathbb{R}^2$ pontot.

$\underline{\dfrac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}(x,y) = ?}$

Először az f függvény x változó szerinti parciális deriváltját számítjuk ki:

$$\partial_x f(x,y) = \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 3x^2y + 2xy^2 + 1.$$

Most a fenti függvényt deriváljuk az y változó szerint:

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)\right) = \frac{\partial}{\partial y}\big(3x^2y + 2xy^2 + 1\big) = 3x^2 + 4xy.$$

Így

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}(x,y) = 3x^2 + 4xy \quad \big((x,y)\in\mathbb{R}^2\big) \quad \Longrightarrow \quad \underset{\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim}{\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}(1,0) = 3.}$$

$\underline{\dfrac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(x,y) = ?}$

Először az f függvény y változó szerinti parciális deriváltját számítjuk ki:

$$\partial_y f(x,y) = \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = x^3 + 2x^2y + 2y.$$

Most a fenti függvényt deriváljuk az x változó szerint:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)\right) = \frac{\partial}{\partial x}\big(x^3 + 2x^2y + 2y\big) = 3x^2 + 4xy.$$

Így

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(x,y) = 3x^2 + 4xy \quad \big((x,y)\in\mathbb{R}^2\big) \quad \Longrightarrow \quad \underset{\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim}{\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(1,0) = 3.}$$

Megjegyzés. Vegyük észre, hogy a kétféle sorrendben vett parciális deriváltak megegyeznek. Ez következik a *Young-tételből* is, ti. ebben az esetben $f\in D^2\{(x,y)\}$ minden $(x,y)\in\mathbb{R}^2$ pontban. $\square$

$\underline{\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) =?}$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)\right) = \frac{\partial}{\partial x}\big(3x^2y + 2xy^2 + 1\big) = 6xy + 2y^2.$$

Így

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) = 6xy + 2y^2 \quad \big((x,y) \in \mathbb{R}^2\big) \quad \Longrightarrow \quad \underline{\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(1,0) = 0.}$$

$\underline{\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) =?}$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)\right) = \frac{\partial}{\partial y}\big(x^3 + 2x^2y + 2y\big) = 2x^2 + 2.$$

Így

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) = 2x^2 + 2 \quad \big((x,y) \in \mathbb{R}^2\big) \quad \Longrightarrow \quad \underline{\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(1,0) = 4.} \ \blacksquare$$

$\boxed{3.}$ Iránymenti deriváltak

8. feladat. *Legyen*

$$f(x,y) := x^2 - xy + y^2 \quad \big((x,y) \in \mathbb{R}^2\big),$$

$a = (a_1, a_2) = (1,1)$ *és* v *az* x*-tengely pozitív ágával* α *szöget bezáró euklideszi normában vett egységvektor.*

(a) *Határozzuk meg a definíció alapján a* $\partial_v f(a)$ *iránymenti deriváltat.*

(b) *Ellenőrizzük a kapott eredményt a tanult tétellel.*

Megoldás. (a) Az origóból kiinduló irányokat a

$$v := \big(v_1, v_2\big) = \big(\cos\alpha, \sin\alpha\big) \quad \big(\alpha \in [0, 2\pi)\big)$$

vektorokkal adjuk meg. Ezek egységvektorok, mert

$$\|v\| = \sqrt{v_1^2 + v_2^2} = \sqrt{\cos^2\alpha + \sin^2\alpha} = 1 \quad \big(\alpha \in [0, 2\pi)\big).$$

Tekintsünk egy rögzített $\alpha \in [0, 2\pi)$ paraméterrel megadott v vektort. Az iránymenti deriválhatósághoz a definíció szerint azt kell megmutatni, hogy a

$$\begin{aligned} F(t) : &= f(a + tv) = f(a_1 + tv_1, a_2 + tv_2) = f(1 + t\cos\alpha, 1 + t\sin\alpha) = \\ &= (1 + t\cos\alpha)^2 - (1 + t\cos\alpha)(1 + t\sin\alpha) + (1 + t\sin\alpha)^2 = \\ &= \big(1 - (\sin\alpha)(\cos\alpha)\big) \cdot t^2 + (\sin\alpha + \cos\alpha) \cdot t + 1 \quad (t \in \mathbb{R}) \end{aligned}$$

valós-valós függvény deriválható a $t = 0$ pontban.

Ez viszont nyilván igaz, és $F'(0) = \sin\alpha + \cos\alpha$. Ezért az f függvénynek létezik a v irányban vett iránymenti deriváltja. Az iránymenti derivált értéke $F'(0)$. Így minden rögzített $\alpha \in [0, 2\pi)$ esetén

$$\underset{\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim}{\partial_v f(1,1) = \sin\alpha + \cos\alpha}.$$

(b) Először az iránymenti derivált kiszámolására vonatkozó állítás feltételeit ellenőrizzük. Az f függvény parciális deriváltfüggvényei léteznek:

$$\partial_1 f(x,y) = 2x - y, \quad \partial_2 f(x,y) = -x + 2y \quad \big((x,y) \in \mathbb{R}^2\big)$$

és folytonosak minden $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ pontban. A szóban forgó tétel szerint a kérdezett iránymenti derivált létezik, és minden $\alpha \in [0, 2\pi)$ paraméter esetén

$$\partial_v f(1,1) = \left\langle \begin{bmatrix} \partial_1 f(1,1) \\ \partial_2 f(1,1) \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \cos\alpha \\ \sin\alpha \end{bmatrix} \right\rangle = \left\langle \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \cos\alpha \\ \sin\alpha \end{bmatrix} \right\rangle = \cos\alpha + \sin\alpha.$$

Ez megegyezik a definíció alapján kapott eredménnyel. ■

9. feladat. *Határozzuk meg az*

$$f(x,y) := \frac{y^3}{e^{2x+1}} \qquad \big((x,y) \in \mathbb{R}^2\big)$$

függvény iránymenti deriváltját a $P\left(-\frac{1}{2}, 1\right)$ *pontban a* $u = (1,2)$ *vektor által meghatározott irány mentén.*

Megoldás. Az iránymenti derivált kiszámítására vonatkozó tételt alkalmazzuk. Mindkét változó szerinti elsőrendű parciális deriváltak léteznek $\forall\,(x,y) \in \mathbb{R}^2$ pontban, és

$$\partial_x f(x,y) = -2\frac{y^3}{e^{2x+1}}, \qquad \partial_y f(x,y) = \frac{3y^2}{e^{2x+1}}.$$

Ezek a függvények minden $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ pontban folytonosak és

$$f'(x,y) = \big(\partial_x f(x,y), \partial_y f(x,y)\big) \quad \big((x,y) \in \mathbb{R}^2\big).$$

Az f függvénynek tehát a P pontban minden irányban létezik az iránymenti deriváltja és

$$\partial_v f(P) = \langle f'(P), v \rangle,$$

ahol

$$f'(P) = f'\left(-\tfrac{1}{2}, 1\right) = \left(\partial_x f\left(-\tfrac{1}{2}, 1\right), \partial_y f\left(-\tfrac{1}{2}, 1\right)\right) = (-2, 3)$$

és v az u irányú euklideszi normában vett egységvektor, azaz

$$v = \frac{u}{\|u\|} = \frac{(1,2)}{\sqrt{1^2 + 2^2}} = \left(\frac{1}{\sqrt{5}}, \frac{2}{\sqrt{5}}\right).$$

Így

$$\underset{\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim}{\partial_v f\left(-\frac{1}{2}, 1\right)} = \left\langle (-2,3), \left(\frac{1}{\sqrt{5}}, \frac{2}{\sqrt{5}}\right) \right\rangle = -\frac{2}{\sqrt{5}} + \frac{6}{\sqrt{5}} = \underset{\sim\sim}{\frac{4}{\sqrt{5}}}. \ ■$$