A számításelmélet alapjai 2.
4. gyakorlat

Cél: Predikátum logika nyelvének megismerése. Mondatok formalizálása.

Fogalmak: univerzum (alaphalmaz, individuum halmaz), individuum konstansok, - változók, függvények, term, predikátum, atomi formula, kvantorok, predikátum formula, prímformula, közvetlen részformula, prímkomponens, zárt és nyílt formulák, interpretáció, változókiértékelés, formula kiértékelés, elsőrendű értéktábla, formalizálás

---

Szorgalmi feladat megoldása

Gyakorlat: Formalizálja ítéletkalkulusban az alábbi szöveget és bizonyítsa, hogy az A1,A2 tautologikus következménye B!

A1: ***Ha elég ennivalót csomagoltam az útra, akkor nem leszek éhes***.
A2: ***Ha nem leszek éhes, akkor jól érzem magam***.
B: ***Tehát, ha nem érzem jól magam, akkor nem csomagoltam elég ennivalót az útra***.

Ítéletváltozók:
P: elég ennivalót csomagoltam az útra; Q: éhes leszek; R: jól érzem magam;
A1: $P \to \neg Q$
A2: $\neg Q \to R$
B: $\neg R \to \neg P$

Igazság táblával: Minden esetben, amikor igazak a feltételek, akkor igaz az állítás is.

P	Q	R	$P \to \neg Q$	$\neg Q \to R$	$\neg R \to \neg P$
i	i	i	h	i	i
i	i	h	h	i	h
i	h	i	**i**	**i**	**i**
i	h	h	i	h	h
h	i	i	**i**	**i**	**i**
h	i	h	**i**	**i**	**i**
h	h	i	**i**	**i**	**i**
h	h	h	i	h	i

Feladat: Válasszuk ki, hogy melyik formula nyílt, illetve melyik zárt! Jelölje, hogy melyik kvantor melyik változót köti! Karikázza be a szabad változókat!

1. $\forall y \exists x\, (Q(x,y) \to \exists x \forall y \exists z \forall v(R(x,y,z,v) \wedge \neg \forall x Q(x,y)))$ — **zárt** / nyílt
2. $\exists x \forall y Q(x,y) \to \exists x \neg \exists z \forall v R(x,\mathbf{y},z,v)$ — zárt / **nyílt**
3. $\neg \exists z \forall y Q(\mathbf{x},y) \to \exists x(\forall y \exists z \forall v R(x,y,z,v) \wedge P(x))$ — zárt / **nyílt**
4. $\exists x \forall y \neg (Q(x,y) \to \exists x \neg \exists z \forall v R(x,y,z,v))$ — **zárt** / nyílt
5. $\neg \exists x \forall y Q(x,y) \to \exists x \exists z(\forall v R(x,\mathbf{y},z,v) \wedge P(\mathbf{v}))$ — zárt / **nyílt**

Feladat: Adott az alábbi formula egy L(P;f,a) formalizált nyelven, melynek (2;2,0) a típusa(szignatúrája).

$\exists x \forall y(\neg P(y,x) \vee P(f(x,y),a))$

a)Hány lehetséges interpretációja lehet ennek a nyelvnek az **{1,2} individuum** halmazon?

b)Az alábbi lehetséges interpretációban számítsuk ki a formula értékét!

P : < (kisebb reláció) , f : minimum függvény, a = 1

$\exists x \forall y((y \geq x) \vee (\min(x,y)<1))$

x=1 estén $\forall y(y \geq 1)$ igaz, így ebben az interpretációban a formula igaz.

Gyakorlat: $L(P_1,P_2,P_3;f,a)$ egy elsőrendű nyelv. A típusa (2,1,2;1,0). Egy interpretációja pedig a következő:

D = {1,2} az alaphalmaz;
P_1 predikátumnak az *egyenlőség*,
P_2 predikátumnak a következő definíció:
$P_2(1) = h$ és $P_2(2) = i$
P_3 predikátum pedig a $\leq$ reláció;
az *f* függvény legyen az *identitás* függvény, az *a* konstans legyen 1.

Írjuk fel az alábbi formulákat a fenti interpretációban, és értékeljük ki őket szabad változóik összes lehetséges behelyettesítésével. /A kiértékeléseket táblázatba is foglalhatjuk./

a) $P_2(f(f(x))$
b) $P_1(x,a) \rightarrow P_3(f(x),y) \wedge P_2(a)$
c) $\forall x\ (P_2(x)) \rightarrow P_3(a,y)$

Formalizálás

Feladat: Formalizálja predikátum kalkulusban az alábbi szöveget!

Minden egyetemista becsületes.
János nem becsületes.
Tehát János nem egyetemista.

Alaphalmaz: emberek
Predikátumok:
B(x) : igaz, ha x becsületes ember.
E(x): igaz, ha x egyetemista.
Konstans: Jánost jelöljük *a*-val.
Feltételek formalizálása:
A1: $\forall x\ (E(x) \rightarrow B(x))$
A2: $\neg B(a)$
Állítás: $\neg E(a)$

Bizonyítás okoskodással:
A1-ből következik, hogy $E(a) \rightarrow B(a)$. Ha az utófeltétel hamis és az implikáció igaz, akkor az előfeltételnek hamisnak kell lenni, azaz $\neg E(a)$ igaz.

<u>Gyakorlat:</u> Formalizálja predikátum kalkulusban az alábbi szöveget!

Minden atléta erős.
Mindenki, aki erős és okos, az karrierre számíthat.
Péter atléta.
Péter okos.
Tehát Péter karrierre számíthat.

Elsőrendű logikai törvények:

(a) ha x nem szabad változója A-nak
$\forall xA \sim A$ és $\exists xA \sim A$,

(b) $\forall x \forall yA \sim \forall y \forall xA$ és $\exists x \exists yA \sim \exists y \exists xA$,

(c) $\neg\exists xA \sim \forall x\neg A$ és $\neg\forall xA \sim \exists x\neg A$,

(d) ha x nem szabad változója A-nak
$A \wedge \forall xB \sim \forall x(A \wedge B)$ és $A \wedge \exists xB \sim \exists x(A \wedge B)$,
$A \vee \forall xB \sim \forall x(A \vee B)$ és $A \wedge \exists xB \sim \exists x(A \vee B)$,
$A \rightarrow \forall xB \sim \forall x(A \rightarrow B)$ és $A \rightarrow \exists xB \sim \exists x(A \rightarrow B)$,
$\forall xB \rightarrow A \sim \exists x(B \rightarrow A)$ és $\exists xB \rightarrow A \sim \forall x(B \rightarrow A)$,

(e) $\forall xA \wedge \forall xB \sim \forall x(A \wedge B)$ és $\exists xA \vee \exists xB \sim \exists x(A \vee B)$.