8. hét, 2020. április 6.

Analízis I. Előadás

Tartalom

a) Torlódási pont

b) Függvény határértéke

Torlódási pont

Definíció: Azt mondjuk, hogy $a \in \overline{\mathbb{R}}$ az $A \subset \mathbb{R}$ halmaz torlódási pontja, ha az a minden környezetében az A halmaznak végtelen sok pontja van:

$$\forall\, \epsilon > 0 \quad \text{esetén} \quad K_\epsilon(a) \bigcap A \quad \text{végtelen halmaz.}$$

Az A halmaz torlódási pontjainak halmazát A'-vel jelöljük, és az A derivált hamazának nevezzük.

Példák

a) $A = (a, b)\ \ (a,\ b \in \mathbb{R})\ :\ A' = [a, b]$.

b) $A = \mathbb{N}\ :\ A' = \{+\infty\}$.

c) $A = \mathbb{Q}\ :\ A' = \overline{\mathbb{R}}$.

d) $A = \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}\ :\ A' = \overline{\mathbb{R}}$.

e) $A = \left\{ \dfrac{1}{n}\ :\ n \in \mathbb{N},\ n \geq 1 \right\}\ :\ A' = \{0\}$.

Átfogalmazás

$$A \subset \mathbb{R},\ a \in A' \quad \Longleftrightarrow \quad \forall\, \epsilon > 0 \quad \text{esetén} \quad \Big(K_\epsilon(a) \bigcap A\Big) \setminus \{a\} \neq \emptyset\,.$$

Bizonyítás:
A $\Longrightarrow$ irány triviális.

$\Longleftarrow$ Indirekt tegyük fel, hogy $\exists\ \ \epsilon > 0,$ amelyre $\Big(K_\epsilon(a) \bigcap A\Big) \setminus \{a\} \neq \emptyset$ véges halmaz. Legyen $\epsilon^* = \min\left\{ |x - a|\ :\ x \in \Big(K_\epsilon(a) \bigcap A\Big) \setminus \{a\} \right\} > 0.$

Ekkor $\Big(K_{\epsilon^*}(a) \bigcap A\Big) \setminus \{a\} = \emptyset\,.$

Megjegyés

a) Véges halmaznak nincs torlódási pontja.

b) Ha $a \in A \setminus A'$, akkor a-t az A halmaz izolált pontjának nevezzük.

Állítás

Minden végtelen halmaznak van torlódási pontja.

Bizonyítás

i) Ha A nem korlátos, akkor felülről nem korlátos esetben $+\infty \in A'$. Ha alulról nem korlátos, akkor $-\infty \in A'$.

ii) Legyen $A \subset \mathbb{R}$ olyan korlátos halmaz, amelynek végtelen sok eleme van.
Ekkor van olyan $a : \mathbb{N} \to A$ sorozat, amelyiknek minden tagja különböző, azaz
$a_k \neq a_n$ $(k \neq n,\ k, n \in \mathbb{N})$.
A Bolzano–Weierstrass-tétel miatt a korlátos a sorozatnak van konvergens részsorozata. $\exists$ tehát olyan $\nu : \mathbb{N} \to \mathbb{N} \uparrow$ indexsorozat, hogy $a \circ \nu$ konvergens.
Legyen $b := \lim a \circ \nu \in \mathbb{R}$.
A határérték definíciója szerint ekkor $\forall\ \epsilon > 0$ esetén van olyan $N \in \mathbb{N}$, hogy
$a_{\nu_n} \in K_\epsilon(b)\ \forall\ n > N$. Ha tehát $n > N$, akkor $a_{\nu_n} \in A \bigcap K_\epsilon(b)$.
Mivel a sorozat tagjai mind különbözők, ezért ez egyben azt is jelenti, hogy $A \bigcap K_\epsilon(b)$ végtelen halmaz. Következésképpen b az A torlódási pontja.

Függvény határértéke

Függvény határértékének definíciója

Azt mondjuk, hogy az $f \in \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvénynek az $a \in \mathcal{D}_f'$ pontban van határértéke és ez $A \in \overline{\mathbb{R}}$, ha $\forall\ \epsilon > 0$ esetén van olyan $\delta > 0$, hogy ha $x \in (K_\delta(a) \bigcap \mathcal{D}_f) \setminus \{a\}$, akkor $f(x) \in K_\epsilon(A)$.

Emlékeztető
$f \in \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ jelölés jelentése: f valós-valós függvény, azaz $\mathcal{D}_f \subset \mathbb{R}$ és $\mathcal{R}_f \subset \mathbb{R}$.

A határérték szempontjából érdektelen, hogy f értelmezve van-e a-ban, és ha igen, akkor ott mi a függvény értéke.

A határérték egyértelműsége

Tegyük fel, hogy a fenti definíció feltételeinek két különböző $A_1, A_2 \in \overline{\mathbb{R}}$ is eleget tesz.
Mivel a két elem különböző, ezért nyilvánvalóan olyan $\exists\ \epsilon > 0$, amelyre
$K_\epsilon(A_1) \bigcup K_\epsilon(A_2) = \emptyset$.
A hatérérték definíciója szerint:
$\exists\ \ \delta_1 > 0$ olyan, hogy $x \in (K_{\delta_1}(a) \bigcap \mathcal{D}_f) \setminus \{a\}$ esetén $f(x) \in K_\epsilon(A_1)$,
$\exists\ \ \delta_2 > 0$ olyan, hogy $x \in (K_{\delta_2}(a) \bigcap \mathcal{D}_f) \setminus \{a\}$ esetén $f(x) \in K_\epsilon(A_2)$.
Legyen $\delta := \min\{\delta_1, \delta_2\}$.
Ekkor $x \in (K_\delta(a) \bigcap \mathcal{D}_f) \setminus \{a\}$ esetén $f(x) \in K_\epsilon(A_1) \bigcap K_\epsilon(A_2) = \emptyset$.
Ellentmondáshoz jutottunk, amivel igazoltuk a határérték egyértelműségét. $\square$

Jelölés

$$\lim_a f = A\,, \qquad \lim_{x \to a} f(x) = A\,, \qquad f(x) \longrightarrow A \quad (x \longrightarrow a)$$

Esetek

$\lim_a f = A$

- **a)** Végesben vett véges határérték: $a \in \mathbb{R}$, $A \in \mathbb{R}$.
- **b)** Végesben vett végtelen határérték: $a \in \mathbb{R}$, $A = \pm\infty$.
- **c)** Végtelenben vett véges határérték: $a = \pm\infty$, $A \in \mathbb{R}$.
- **d)** Végtelenben vett végtelen határérték: $a = \pm\infty$, $A = \pm\infty$.

Végesben vett véges határérték

Azt mondjuk, hogy az $f \in \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvénynek az $a \in \mathcal{D}'_f \bigcap \mathbb{R}$ pontban van határértéke és ez $A \in \mathbb{R}$, ha $\forall\ \epsilon > 0$ számhoz van olyan $\delta > 0$, hogy ha $0 < |x - a| < \delta$ és $x \in \mathcal{D}_f$, akkor $|f(x) - A| < \epsilon$.

Példák:

- **a)** $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = x$. $\lim_a f = a\ (a \in \mathbb{R})$.

  $|f(x) - a| = |x - a|$ miatt a definícióban egy adott $\epsilon > 0$ számhoz a $\delta = \epsilon$ jó választás.

- **b)** Legyen $c \in \mathbb{R}$, és $f(x) = c\ \forall x \in \mathbb{R}$. Ekkor $\lim_a f = c\ (a \in \mathbb{R})$.

  $|f(x) - c| = 0$ miatt a definícióban egy adott $\epsilon > 0$ számhoz tetszőleges $\delta > 0$ jó választás.

- **c)** $t_0 \in \mathbb{R}$. $f : \mathbb{R} \setminus \{t_0\} \to \mathbb{R}$, $f(t) = \frac{1}{2} g \frac{t^2 - t_0^2}{t - t_0}$. $t_0 \in \mathcal{D}'_f$.

  $$\lim_{t_0} f = \lim_{t \to t_0} \frac{1}{2} g \frac{t^2 - t_0^2}{t - t_0} = \lim_{t \to t_0} \frac{1}{2} g(t + t_0) = g \cdot t_0. \ \left(\epsilon > 0,\ \delta = \frac{\epsilon}{(1/2)g}\right)$$

Végesben vett végtelen határérték

Azt mondjuk, hogy az $f \in \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvénynek az $a \in \mathcal{D}_f' \bigcap \mathbb{R}$ pontban van határértéke és ez $+\infty$, ha $\forall\ K > 0$ számhoz van olyan $\delta > 0$, hogy ha $0 < |x - a| < \delta$ és $x \in \mathcal{D}_f$, akkor $f(x) > K$.

Jelölés: $\lim\limits_a f = +\infty$

A $\lim\limits_a f = -\infty$ eset megfogalmazása értelemszerű módosítással.

Példa:

$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \setminus \{0\},\ f(x) = \dfrac{1}{x^2}$, $0 \in \mathcal{D}_f'$, $\lim\limits_0 f = +\infty$.

Legyen $K > 0$. Ekkor $\dfrac{1}{x^2} > K \iff x^2 < \dfrac{1}{K} \iff |x| < \sqrt{\dfrac{1}{K}}$.

$\delta := \sqrt{\dfrac{1}{K}}$ esetén ha $|x - 0| < \delta$, akkor $f(x) = \dfrac{1}{x^2} > K$.

Példák: nem létezik határérték

a) $f(x) = \operatorname{sign} x = \begin{cases} 1, & ha \quad x > 0 \\ 0, & ha \quad x = 0 \\ -1, & ha \quad x < 0 \end{cases} \qquad \nexists \lim\limits_0 f$.

b) $f(x) = \dfrac{1}{x}\ \ (x \in \mathbb{R} \setminus \{0\})$. $\nexists \lim\limits_0 f$.

Végtelenben vett véges határérték

Azt mondjuk, hogy az $f \in \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvénynek a $+\infty$-ben van határértéke és ez $A \in \mathbb{R}$, ha $\forall\ \epsilon > 0$ számhoz van olyan $K > 0$, hogy ha $x > K$ és $x \in \mathcal{D}_f$, akkor $|f(x) - A| < \epsilon$.

Jelölés: $\lim\limits_{+\infty} f = A$

A $\lim\limits_{-\infty} = A$ eset megfogalmazása értelemszerű módosítással.

Megjegyzések

a) A $+\infty$-ben akkor lehet vizsgálni a haárértéket, ha $+\infty \in \mathcal{D}_f'$, azaz $\mathcal{D}_f$ felülről nem korlátos.
Hasonlóan, a $-\infty$-ben akkor lehet vizsgálni a haárértéket, ha $-\infty \in \mathcal{D}_f'$, azaz $\mathcal{D}_f$ alulról nem korlátos.

b) Speciális eset $\mathcal{D}_f = \mathbb{N}$.
A végtelenben vett véges határérték fogalma egybeesik a sorozatok konvergenciájának fogalmával.

Példa:

$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \setminus \{0\},\ f(x) = \dfrac{1}{x}$, $+\infty \in \mathcal{D}_f'$, $\lim\limits_{+\infty} f = 0$.

Legyen $\epsilon > 0$. Ekkor $\left|\dfrac{1}{x} - 0\right| < \epsilon \iff |x| > \dfrac{1}{\epsilon}$. Ha tehát $x > K := \dfrac{1}{\epsilon}$, akkor $|f(x) - 0| < \epsilon$.

Végtelenben vett végtelen határérték

Azt mondjuk, hogy az $f \in \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvénynek a $+\infty$-ben van határértéke és ez $+\infty$, ha $\forall\ L > 0$ számhoz van olyan $K > 0$, hogy ha $x > K$ és $x \in \mathcal{D}_f$, akkor $f(x) > L$.

Jelölés: $\lim\limits_{+\infty} f = +\infty$

A $\lim\limits_{+\infty} f = -\infty$, $\lim\limits_{-\infty} f = +\infty$, $\lim\limits_{-\infty} f = -\infty$, esetek megfogalmazása értelemszerű módosítással.

Megjegyzés

Speciális eset $\mathcal{D}_f = \mathbb{N}$.
A végtelenben vett végtelen határérték fogalma egybeesik a sorozatok kibővített értelemben vett határértékének a fogalmával.

Példa:

$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = x$, $+\infty \in \mathcal{D}_f'$, $\lim\limits_{+\infty} f = +\infty$.

Legyen $L > 0$. Ekkor $K = L$ választással, ha $x > K$, akkor $f(x) = x > K = L$.

Egyoldali határérték

Egyoldali torlódási pont

Definíció. Azt mondjuk, hogy $a \in \overline{\mathbb{R}}$ az $A \subset \mathbb{R}$ halmaz jobb oldali torlódási pontja, ha az a torlódási pontja az $A \bigcap (a, +\infty)$ halmaznak, azaz $a \in \big(A \bigcap (a, +\infty)\big)'$.

Jelölés: $a \in A'_+$.

A bal oldali torlódási pont fogalma értelemszerű módosítással adódik:

$$a \in A'_- \quad :\Longleftrightarrow \quad a \in \big(A \bigcap (-\infty, a)\big)' .$$

Megjegyzés

a) $a \in A'$-ből nem következik, sem az hogy $a \in A'_+$, sem pedig az, hogy $a \in A'_-$.
Példa: $1 \in (0,1)'$, de $1 \notin (0,1)'_+$ és $0 \in (0,1)'$, de $0 \notin (0,1)'_-$.

b) Az a) pontban mondottal kapcsolatban viszont könnyen megmutatható, hogy ha $a \in A'$, akkor az $a \in A'_+$, $a \in A'_-$ állítások közül legalább az egyik igaz.

c) Ha $a \in A'_+$ és $a \in A'_-$, akkor $a \in A'$.

Egyoldali határérték definíciója

Legyen $f \in \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Tegyük fel, hogy $a \in (D_f)'_+$. Tekintsük a $J_a = \mathcal{D}_f \bigcap (a, +\infty)$ halmazt, és az f függvénynek az erre való $f_{|J_a}$ leszűkítését.
Ha az $f_{|J_a}$ függvénynek létezik az a pontban határértéke, akkor azt az f függvény a pontbeli jobb oldali határértékének nevezzük.

Jelölés: $\lim\limits_{a+0} f := \lim\limits_{a} f_{|J_a}$.

Megjegyzés

a) Bal oldali határérték: $f \in \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $a \in (D_f)'_-$, $B_a = \mathcal{D}_f \bigcap (-\infty, a)$, $f_{|B_a}$.

$\lim\limits_{a-0} f := \lim\limits_{a} f_{|B_a}$.

b) Ha $\exists \lim\limits_{a} f$ és $\lim\limits_{a+0} f$, akkor $\lim\limits_{a} f = \lim\limits_{a+0} f$. Hasonlóan $\lim\limits_{a-0} f$ esetén.

Példák

a) $f(x) = \operatorname{sign} x \ (x \in \mathbb{R})$. $\nexists \lim\limits_{0} f$, $\lim\limits_{0+0} f = 1$, $\lim\limits_{0-0} f = -1$.

b) $\nexists \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{1}{x}$, $\lim\limits_{x \to 0+0} \dfrac{1}{x} = +\infty$, $\lim\limits_{x \to 0-0} \dfrac{1}{x} = -\infty$.

Tétel

Legyen $f \in \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $a \in \left(\mathcal{D}_f \bigcap (a, +\infty)\right)'$ és $a \in \left(\mathcal{D}_f \bigcap (-\infty, a)\right)$.

Ebben az esetben akkor és csak akkor van határértéke az f függvénynek az a pontban, ha mindkét egyoldali hatérérték létezik az a-ban, és azok egyenlők. Ekkor a három határérték egyenlő.

$$\exists \lim_{a} f \qquad \Longleftrightarrow \qquad \exists \lim_{a+0} f, \ \lim_{a-0} f \ \text{ és } \lim_{a+0} f = \lim_{a-0} f \left(= \lim_{a} f\right).$$

Bizonyítás

Triviális

$\Longrightarrow$ $\lim\limits_{a} f$ esetén $\forall\epsilon > 0 \;\; \exists \;\; \delta > 0$ (ld. def.). Ugyanaz a δ megfelel mindkét egyoldali határértéknél.

$\Longleftarrow$ $\epsilon > 0$ számhoz $\exists \;\; \delta_1 > 0$ $\lim\limits_{a+0} f$ esetén, $\exists \;\; \delta_2 > 0$ $\lim\limits_{a-0} f$ esetén. Ekkor $\delta = \min\{\delta_1, \, \delta_2\}$ megfelel a $\lim\limits_{a} f$ határértéknél.