13. előadás

2020. december 7.

Kettős integrálok kiszámítása 2.

3. Kettős integrálok kiszámítása egyéb halmazokon (integráltranszformációval)

A helyettesítéssel való integrálást illetően idézzük fel a valós-valós függvényekre vonatkozó állításokat. Először a határozatlan integrálokkal kapcsolatos **második helyettesítési szabályra** emlékeztetünk:

Legyenek $I, J \subset \mathbb{R}$ nyílt intervallumok. Tegyük fel, hogy $f : I \to \mathbb{R}$, $g : J \to I$ bijekció, $g \in D(J)$ és az $f \circ g \cdot g' : J \to \mathbb{R}$ függvénynek van primitív függvénye. Ekkor az f függvénynek is van primitív függvénye és

$$\int f(x)\,dx \underset{x=g(t)}{=} \int f\big(g(t)\big) \cdot g'(t)\,dt_{\big|t=g^{-1}(x)} \qquad (x \in I).$$

Tegyük fel, hogy egy $\int f(x)\,dx$ alakú határozatlan integrált akarunk kiszámítani. Olyan g-t keresünk, amelyre az $\int f\big(g(t)\big) \cdot g'(t)\,dt$ integrált ki tudjuk számítani. E cél érdekében általában olyan g függvényt próbálunk választani, amelyre $f \circ g \cdot g'$ egyszerűbb, mint f.

A Newton–Leibniz-tételből egyszerűen következik a helyettesítéssel való integrálás (vagyis az integráltranszformációs formula) határozott integrálokra vonatkozó alábbi változata: Tegyük fel, hogy $f \in R[a,b]$, $g : [\alpha,\beta] \to [a,b]$ folytonosan deriválható bijekció és $g'(t) \neq 0$ $\big(t \in [\alpha,\beta]\big)$. Ekkor

$$(*) \qquad \int_{\alpha}^{\beta} f \circ g \cdot g' = \int_{g(\alpha)}^{g(\beta)} f.$$

Ha $g' > 0$ az $[\alpha,\beta]$ intervallumon, akkor $g \uparrow [\alpha,\beta]$-n, így $g(\alpha) = a$ és $g(\beta) = b$, ezért $(*)$-ból következik, hogy

$$\int_a^b f = \int_{\alpha}^{\beta} f \circ g \cdot g'.$$

Ha viszont $g' < 0$ az $[\alpha,\beta]$ intervallumon, akkor $g \downarrow [\alpha,\beta]$-n, így $g(\alpha) = b$ és $g(\beta) = a$, ezért $(*)$-ból azt kapjuk, hogy

$$\int_{\alpha}^{\beta} f \circ g \cdot g' = \int_b^a f = -\int_a^b f, \quad \Longrightarrow \quad \int_a^b f = \int_{\alpha}^{\beta} f \circ g \cdot \big(-g'\big).$$

Összefoglalva a következő állítás igaz:

Tegyük fel, hogy $f \in R[a,b]$, $g : [\alpha,\beta] \to [a,b]$ folytonosan deriválható bijekció és $g'(t) \neq 0$ $\big(t \in [\alpha,\beta]\big)$. Ekkor

$$\int_a^b f = \int_\alpha^\beta f \circ g \cdot |g'|.$$

Most azzal a kérdéssel foglalkozunk, hogyan lehet új változók bevezetésével („helyettesítéssel") kettős integrálokat egyszerűbb alakra transzformálni (átalakítani). Az új változókban vagy az integrálandó *függvény*, vagy pedig az *integrációs tartomány* egyszerűbb lehet, és így könnyebbé válhat az integrál kiszámítása.

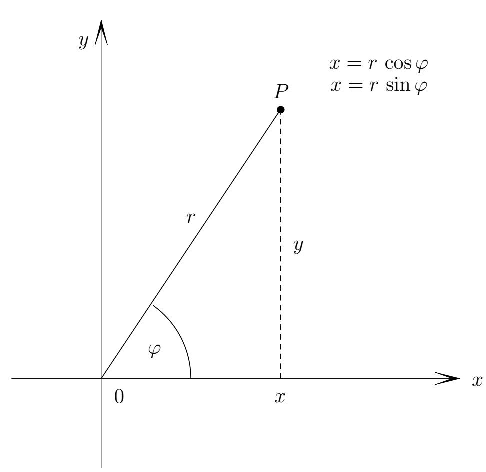
Motivációként induljunk ki abból, hogy egy $f \in \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ függvény integrálját pl. egy körgyűrűcikken szeretnénk kiszámítani. Ez a halmaz nem normáltartomány, de *polárkoordináták* bevezetésével téglalapra transzformálhatjuk, és azon az integrálját már ki tudjuk számítani.

1. megjegyzés. A polárkoordináta-rendszer. Sok esetben a Descates-féle derékszögű koordinátarendszer helyett/mellett célszerű *polárkoordináta-rendszert* bevezetni a következő módon. Kiválasztunk a síkon egy rögzített O pontot (pólus) és egy ebből kiinduló félegyenest (polártengely). A pólustól különböző P pont *polárkoordinátáin* az (r,φ) számpárt értjük, ahol $r = \overline{OP}$ és φ az $\overrightarrow{OP}$ félegyenesnek a polártengellyel bezárt szöge.

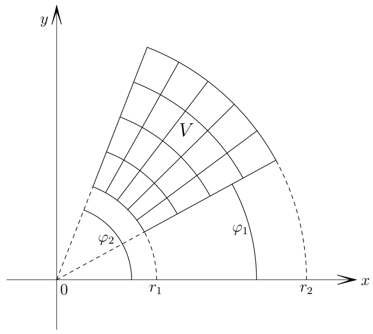
Világos, hogy r és φ egyértelműen meghatározza a P pont helyzetét, ezzel szemben a P pont csak r-et határozza meg egyértelműen, a φ szöget csak 2π egész számú többszörösétől eltekintve. Az O pont polárszöge határozatlan.

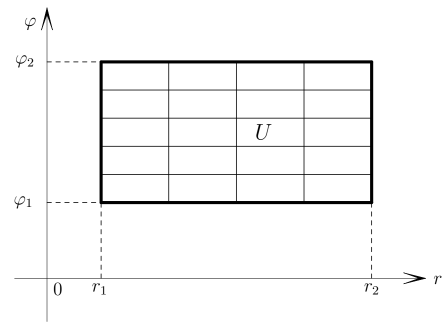
A vizsgálataink során gyakran egymás mellett használjuk a Descates-féle derékszögű és a polárkoordináta-rendszert. Ha a kétféle koordinátarendszer kezdőpontja, valamint a polártengely és az x tengely pozitív fele egybeesik, akkor a következő összefüggések állnak fenn az (x,y) derékszögű és az (r,φ) polárkoordináták között:

$$x = r\cos\varphi, \quad y = r\sin\varphi$$
$$r = \sqrt{x^2+y^2}, \quad \varphi = \arccos\frac{x}{r}, \quad \varphi = \arcsin\frac{y}{r}.$$



Polárkoordináta-transzformációval egy körgyűrűcikket téglalapba képezhetünk. Ezt szemlélteti az alábbi ábra:





A szóban forgó leképezést tehát a következőképpen adhatjuk meg. Legyen

$$g = \begin{bmatrix} g_1 \\ g_2 \end{bmatrix} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2,$$

$$g(r, \varphi) := \begin{bmatrix} g_1(r, \varphi) \\ g_2(r, \varphi) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r \cos\varphi \\ r \sin\varphi \end{bmatrix} \qquad \big((r, \varphi) \in \mathbb{R}^2\big).$$

Adott $0 < r_1 < r_2$, valamint $0 < \varphi_1 < \varphi_2 < 2\pi$ esetén tekintsük az

$$U := \big\{(r, \varphi) \;\big|\; r_1 < r < r_2,\ \varphi_1 < \varphi < \varphi_2\big\}$$

téglalapot az (r, φ) síkon és a $V := g(U)$ körgyűrűcikket az (x, y) síkon. Világos, hogy a $g : U \to V$ függvény folytonosan deriváható U-n és

$$(**) \qquad \begin{aligned} \det g'(r, \varphi) &= \det \begin{bmatrix} \partial_1 g_1(r, \varphi) & \partial_2 g_1(r, \varphi) \\ \partial_1 g_2(r, \varphi) & \partial_2 g_2(r, \varphi) \end{bmatrix} = \\ &= \det \begin{bmatrix} \cos\varphi & -r \sin\varphi \\ \sin\varphi & r \cos\varphi \end{bmatrix} = r \neq 0 \quad \big(\forall\, (r, \varphi) \in U\big). \end{aligned}$$

Az inverzfüggvény-tétel szerint tehát a $g : U \to V$ függvény folytonosan deriválható bijekció, következésképpen g invertálható. Az (x, y) síkbeli V körgyűrűcikknek a g^{-1} inverz függvény által létesített képe az (r, φ) síkon az U téglalap.

Kérdés. Hogyan változik az $\iint_V f(x, y)\, dx\, dy$ kettős integrál, ha abban a „régi” (x, y) változók helyett az „új” (r, φ) változókat vezetjük be az $(x, y) := (r \cos\varphi, r \sin\varphi)$ képletekkel?

A következő tételben kettős integrálok *általános* transzformációjára vonatkozó alapvető eredményt fogalmazzuk meg.

Integráltranszformáció. *Tegyük fel, hogy a valós értékű* $f(\mathbf{x})$ $(\mathbf{x} \in V)$ *függvény Riemann-integrálható a korlátos* $V \subset \mathbb{R}^2$ *halmazon, azaz* $f \in R(V)$.

Legyen $U \subset \mathbb{R}^2$ *egy adott korlátos és nyílt halmaz,* $g : U \to \mathbb{R}^2$ *egy adott függvény és* $V := g(U) \subset \mathbb{R}^2$. *Tegyük fel, hogy a* $g(\mathbf{t})$ $(\mathbf{t} \in U)$ *függvény folytonosan deriválható* U*-n és* $\det g'(\mathbf{t}) \neq 0$ $(\forall\, \mathbf{t} \in U)$, *így* $g : U \to V$ *egy folytonosan deriválható bijekció, következésképpen invertálható.*

Ekkor az $\mathbf{x} = g(\mathbf{t})$ *helyettesítéssel a következő állítás teljesül:*

$$(IT) \qquad \iint\limits_V f(\mathbf{x})\, d\mathbf{x} = \iint\limits_U f\big(g(\mathbf{t})\big) \cdot \big|\det g'(\mathbf{t})\big|\, d\mathbf{t}.$$

2. megjegyzés. Ez a képlet a feltételeknek eleget tevő *tetszőleges* g függvényre igaz. Az alkalmazásására két okból is szükség lehet. Egyrészt, ha V olyan tartomány, amelyen az integrált csak „körülményesen" lehet kiszámolni, akkor *kereshetünk* olyan g-t, amely már egy „egyszerűbb" halmazon van értelmezve, ezért a jobb oldali integrált könnyebb kiszámolni. Másrészt előfordulhat az is, hogy sikerül olyan g függvényt *találni*, amelyre $f \circ g \cdot |\det g'|$ egyszerűbb, mint f.

3. megjegyzés. Az (IT) képletet részletesebben a következő alakban írhatjuk fel. Az $f \in \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ függvény értelmezési tartományát, vagyis a V halmazt, az (x, y) koordinátákkal jelölt derékszögű koordináta-rendszerben tekintjük, és a helyettesítési értékeit így jelöljük:

$$f(\mathbf{x}) = f(x, y) \quad (\mathbf{x} = (x, y) \in V).$$

A $g = (g_1, g_2) \in \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ függvény értelmezési tartományát, vagyis az U halmazt, az (u, v) koordinátákkal jelölt derékszögű koordináta-rendszerben tekintjük, és a helyettesítési értékeit így jelöljük:

$$g(\mathbf{t}) = g\big(g_1(\mathbf{t}), g_2(\mathbf{t})\big), \quad \text{illetve} \quad g(u, v) = \big(g_1(u, v), g_2(u, v)\big) \quad (\mathbf{t} = (u, v) \in U).$$

Mivel $g \in C^1(U)$, ezért g Jacobi-mátrixa:

$$g'(\mathbf{t}) = g'(u, v) = \begin{bmatrix} \partial_1 g_1(u, v) & \partial_2 g_1(u, v) \\ \partial_1 g_2(u, v) & \partial_2 g_2(u, v) \end{bmatrix}.$$

Ezekkel a jelölésekkel az (IT) képletre azt kapjuk, hogy:

$$(ITR) \qquad \begin{aligned} &\iint\limits_V f(x, y)\, dx\, dy = \\ &= \iint\limits_U f\big(g_1(u, v), g_2(u, v)\big) \cdot \left|\det \begin{bmatrix} \partial_1 g_1(u, v) & \partial_2 g_1(u, v) \\ \partial_1 g_2(u, v) & \partial_2 g_2(u, v) \end{bmatrix}\right| du\, dv. \end{aligned}$$

Érdemes megjegyezni a fenti tétel polárkoordináta-transzformációra vonatkozó speciális esetét.

Polárkoordinátás helyettesítés. *Legyen* $U \subset [0, +\infty) \times [0, 2\pi]$ *egy adott korlátos és nyílt halmaz,*

$$g(r, \varphi) := \begin{bmatrix} r\,\cos\varphi \\ r\,\sin\varphi \end{bmatrix} \qquad \big((r, \varphi) \in U\big).$$

Ekkor $g(U) =: V \subset \mathbb{R}^2$ *korlátos és nyílt halmaz.*

Ha a korlátos $f : V \to \mathbb{R}$ *függvény Riemann-integrálható* V*-n (azaz* $f \in R(V)$*), akkor*

$$(P) \qquad \iint\limits_V f(x, y)\,dx\,dy = \iint\limits_U f\big(r\,\cos\varphi, r\,\sin\varphi\big) \cdot r\,dr\,d\varphi.$$

Valóban, a $g : U \to V$ függvény folytonosan deriválható bijekció, mert $\det g'(r, \varphi) = = r \neq 0$ $\big(\forall\,(u, v) \in U\big)$ (l. a $(**)$ képletet). Így a (P) állítás (ITR) közvetlen következménye.

4. megjegyzés. Vegyük észre, hogy a fenti tételben az U halmaz valamelyik tengelyre vonatkozó *normáltartomány* is lehet, és ezeken a halmazokon a jobb oldalon szereplő kettős integrált már ki tudjuk számolni.

1. példa. *Számítsuk ki a*

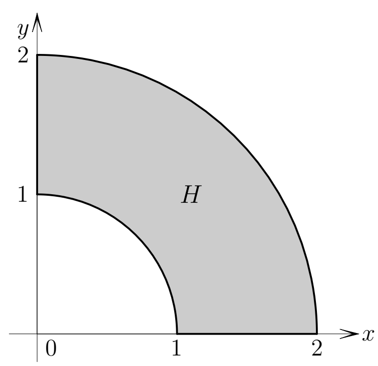
$$\iint\limits_H x^2\,y\,dx\,dy$$

kettős integrált, ahol H *az*

$$1 \leq x^2 + y^2 \leq 4, \quad y \geq 0, \quad x \geq 0$$

egyenlőtlenségekkel meghatározott korlátos síkrész.

Megoldás. Az alábbi ábra a H-val jelölt integrálási tartományt szemlélteti:



Az integrandus folytonos, következésképpen integrálható a H halmazon. Az integrál kiszámításához az

$$x = r\cos\varphi, \quad y = r\sin\varphi$$
$$\big(1 \leq r \leq 2,\ 0 \leq \varphi \leq \pi/2\big)$$

polárkoordinátás helyettesítést alkalmazzuk. A megismert képlet alapján

$$\underline{\underline{\iint\limits_H x^2\, y\, dx\, dy}} = \int\limits_1^2 \int\limits_0^{\pi/2} (r\ \cos\varphi)^2 \cdot (r\ \sin\varphi) \cdot r\, dr\, d\varphi = \int\limits_1^2 \int\limits_0^{\pi/2} r^4 \cdot (\sin\varphi) \cdot \cos^2\varphi\, dr\, d\varphi =$$

$$= \int\limits_0^{\pi/2} \left((\sin\varphi) \cdot \left(\cos^2\varphi\right) \cdot \int\limits_1^2 r^4\, dr \right) d\varphi = \int\limits_0^{\pi/2} \left((\sin\varphi) \cdot \cos^2\varphi \cdot \left[\frac{r^5}{5}\right]_{r=1}^{r=2} \right) d\varphi =$$

$$= \frac{2^5 - 1}{5} \cdot \int\limits_0^{\pi/2} (\sin\varphi) \cdot \cos^2\varphi\, d\varphi = \frac{31}{5} \cdot \left[-\frac{\cos^3\varphi}{3}\right]_{\varphi=0}^{\varphi=\pi/2} =$$

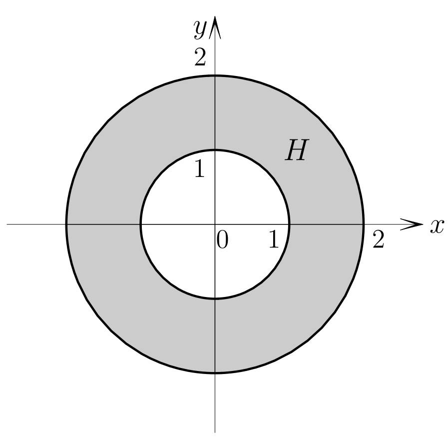
$$= \frac{31}{5} \cdot \left(-\frac{1}{3}\right) \cdot \left(\cos^3\frac{\pi}{2} - \cos^3 0\right) = \underline{\underline{\frac{31}{15}}}. \ \blacksquare$$

2. példa. *Számítsuk ki az*

$$\iint\limits_{1 \le x^2 + y^2 \le 4} \ln\left(x^2 + y^2\right) dx\, dy$$

kettős integrált.

Megoldás. Az alábbi ábra a H-val jelölt integrálási tartományt szemlélteti:



Az integrandus folytonos, következésképpen integrálható a H halmazon. Az integrál kiszámításához az

$$x = r\cos\varphi, \quad y = r\sin\varphi$$
$$\left(1 \le r \le 2,\ 0 \le \varphi \le 2\pi\right)$$

polárkoordinátás helyettesítést alkalmazzuk. A megismert képlet alapján

$$\underline{\underline{\iint\limits_H \ln\left(x^2+y^2\right)dx\,dy}} = \int\limits_1^2 \int\limits_0^{2\pi} \ln\left(r^2\cos^2\varphi + r^2\sin^2\varphi\right)\cdot r\,dr\,d\varphi =$$

$$= \int\limits_1^2 \left(\int\limits_0^{2\pi} \ln r^2 \cdot r\,d\varphi\right)dr = 2\pi\cdot 2\int\limits_1^2 r\cdot\ln r\,dr =$$

$$= 4\pi\left(\left[\frac{r^2}{2}\cdot\ln r\right]_1^2 - \int\limits_1^2 \frac{r^2}{2}\cdot\frac{1}{r}\,dr\right) = 4\pi\left(\left(2\ln 2 - 0\right) - \left[\frac{r^2}{4}\right]_1^2\right) =$$

$$= \underline{\underline{8\pi\ln 2 - 3\pi}}. \ \blacksquare$$

3. példa. *Kettős integrállal határozzuk meg az R sugarú kör területét.*

Megoldás. Jelölje H_R az origó középpontú R sugarú zárt körlapot. Legyen

$$f(x,y) := 1 \quad \left((x,y)\in H_R\right).$$

Mivel $f\in R\left(H_R\right)$, ezért a H_R halmaznak van területe, és az egyenlő a

$$\iint\limits_{H_R} 1\,dx\,dy$$

kettős integrállal. Ezt az

$$x = r\cos\varphi, \quad y = r\sin\varphi$$
$$\left(0\le r\le R,\ 0\le\varphi\le 2\pi\right)$$

polárkoordinátás helyettesítéssel számoljuk ki. A megismert képlet alapján

$$\iint\limits_{H_R} 1\,dx\,dy = \iint\limits_{[0,R]\times[0,2\pi]} r\,dr\,d\varphi,$$

és ez utóbbi integrált szukcesszív integrálással könnyű kiszámítani:

$$\iint\limits_{[0,R]\times[0,2\pi]} r\,dr\,d\varphi = \int\limits_0^{2\pi}\left(\int\limits_0^R r\,dr\right)d\varphi = \int\limits_0^{2\pi}\frac{R^2}{2}\,d\varphi = R^2\pi.$$

Az R sugarú kör területére tehát így is megkaphatjuk a jól ismert $R^2\pi$ képletet. $\blacksquare$

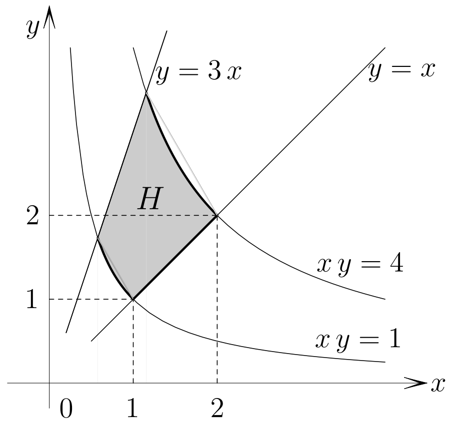
Megjegyzés. Emlékeztetünk arra, hogy az egyváltozós analízisben a félkör területét a

$$\int\limits_{-R}^{R}\sqrt{R^2-x^2}\,dx$$

határozott integrállal számoltuk ki.

4. példa. *Számítsuk ki az $x\,y=1$, $x\,y=4$, valamint az $y=x$ és az $y=3\,x$ egyenletű görbék által meghatározott és az első síknegyedben fekvő zárt síkrész területét.*

Megoldás. Jelöljük H-val a szóban forgó síkidomot, és ábrázoljuk a H halmazt.



Legyen

$$f(x,y) := 1 \quad \big((x,y)\in\mathbb{R}^2\big).$$

Mivel $f\in R(H)$, ezért H-nak van területe, és azt a

$$t(H) = \iint\limits_H 1\,dx\,dy$$

kettős integrállal számítjuk ki az integráltranszformációra vonatkozó képlet alapján.

Most a feladathoz „illeszkedően” az (u,v) „új” változókat a következőképpen vezetjük be:

$$x\,y = u \;\; (1\le u\le 4) \quad \text{és} \quad y = v\,x \;\; (1\le v\le 3),$$

azaz az

$$\left.\begin{aligned} x &= g_1(u,v) = \sqrt{\frac{u}{v}} \\ y &= g_2(u,v) = \sqrt{u\,v} \end{aligned}\right. \quad \big((u,v)\in(1,4)\times(1,3) := U\big)$$

helyettesítést alkalmazzuk. Ekkor a $g=(g_1,g_2) : U \to \operatorname{int} H$ függvény folytonosan deriválható bijekció és

$$\det g'(u,v) = \det \begin{bmatrix} \dfrac{1}{2\sqrt{uv}} & -\dfrac{1}{2}\sqrt{\dfrac{u}{v^3}} \\ \dfrac{1}{2}\sqrt{\dfrac{v}{u}} & \dfrac{1}{2}\sqrt{\dfrac{u}{v}} \end{bmatrix} = \frac{1}{2v}.$$

Így

$$\underline{\underline{t(H)}} = \iint_H 1\,dx\,dy = \iint_U 1 \cdot \left|\det g'(u,v)\right| du\,dv = \int_1^4 \int_1^3 \frac{1}{2v}\,du\,dv =$$

$$4 \cdot \frac{1}{2} \cdot \int_1^3 \frac{1}{v}\,dv = 2 \cdot \big[\ln v\big]_{v=1}^{v=3} = 2 \cdot \big(\ln 3 - \ln 1\big) = \underline{\underline{2\ln 3}}. \ \blacksquare$$

5. példa. *Határozzuk meg a $z = 1 - x^2 - y^2$ egyenletű felület (forgásparaboloid) és az (x,y) sík által határolt korlátos térrész térfogatát.*

Megoldás. Legyen

$$f(x,y) := 1 - x^2 - y^2 \qquad \Big(H := \big\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \;\big|\; x^2 + y^2 \le 1\big\}\Big).$$

A

$$T := \big\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \;\big|\; (x,y) \in H,\ 0 \le z \le f(x,y)\big\} \subset \mathbb{R}^3$$

térrészről van szó.

Mivel $f \in C(H)$, ezért $f \in R(H)$, következésképpen T-nek van térfogata, és az a

$$V(T) = \iint_H f(x,y)\,dx\,dy$$

kettős integrállal egyenlő.

$V(T)$-t polárkoordinátás helyettesítéssel számoljuk ki. A megismert képletek alapján

$$x = r\cos\varphi, \quad y = r\sin\varphi$$
$$\big(0 \le r \le 1,\ 0 \le \varphi \le 2\pi\big),$$

$$V(T) = \iint_H f(x,y)\,dx\,dy = \iint_{[0,1]\times[0,2\pi]} f\big(r\,\cos\varphi,\, r\,\sin\varphi\big) \cdot r\,dr\,d\varphi.$$

Így

$$V(T) = \int_0^1 \int_0^{2\pi} (1 - r^2) \cdot r\,dr\,d\varphi = \int_0^{2\pi} \left(\int_0^1 (r - r^3)\,dr \right) d\varphi = 2\pi \cdot \left[\frac{r^2}{2} - \frac{r^4}{4}\right]_0^1 = \frac{\pi}{2}.$$

A kérdezett térfogat tehát $\underline{\underline{V(T) = \pi/2}}$. $\blacksquare$

6. példa. *Kettős integrállal határozzuk meg az R sugarú gömb térfogatát.*

Megoldás. Legyen $R > 0$ adott valós szám és

$$f(x,y) := \sqrt{R^2 - x^2 - y^2} \qquad \Big(H_R := \big\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \;\big|\; \sqrt{x^2 + y^2} \le R\big\}\Big).$$

Az f függvény grafikonja az origó középpontú R sugarú gömb felső féltérbe eső felülete; az ez alatti térrész pedig a félgömb. Mivel $f \in C\big(H_R\big)$, ezért $f \in R\big(H_R\big)$. Így a félgömbnek van térfogata, és az egyenlő az alábbi kettős integrállal:

$$\iint\limits_{H_R} f = \iint\limits_{H_R} f(x,y)\,dx\,dy = \iint\limits_{H_R} \sqrt{R^2-x^2-y^2}\,dx\,dy.$$

Ezt az

$$x = r\cos\varphi, \quad y = r\sin\varphi$$
$$\big(0 \le r \le R,\ 0 \le \varphi \le 2\pi\big)$$

polárkoordinátás helyettesítéssel számoljuk ki. A megismert képlet alapján

$$\iint\limits_{H_R} f(x,y)\,dx\,dy = \iint\limits_{[0,R]\times[0,2\pi]} f\big(r\,\cos\varphi,\ r\,\sin\varphi\big)\cdot r\,dr\,d\varphi,$$

és ez utóbbi integrált szukcesszív integrálással könnyű kiszámítani:

$$\iint\limits_{[0,R]\times[0,2\pi]} f\big(r\,\cos\varphi,\ r\,\sin\varphi\big)\cdot r\,dr\,d\varphi = \int\limits_0^R\int\limits_0^{2\pi} \sqrt{R^2-r^2}\cdot r\,dr\,d\varphi =$$

$$\int\limits_0^R \left(\int\limits_0^{2\pi} \sqrt{R^2-r^2}\cdot r\,d\varphi\right) dr = 2\pi\int\limits_0^R r\cdot\sqrt{R^2-r^2}\,dr = 2\pi\cdot\left[-\frac{1}{3}(R^2-r^2)^{3/2}\right]_0^R = \frac{2R^3\pi}{3}.$$

Az R sugarú gömb térfogata tehát $\underline{\underline{4R^3\pi/3}}$. ■

Megjegyzés. Emlékeztetünk arra, hogy az egyváltozós analízisben a gömb (forgástest) térfogatát a

$$\pi\cdot\int\limits_{-R}^{R}\left(\sqrt{R^2-x^2}\right)^2 dx$$

határozott integrállal számoltuk ki.

7. példa. *Legyenek a, b és c pozitív valós paraméterek. Határozzuk meg az*

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$$

egyenletű ellipszoiddal határolt térrész térfogatát.

Megoldás. Szimmetria okok miatt elég a test (pl.) első térnyolcadba eső részének a térfogatát kiszámolni.

Az ellipszoid egyenletéből $z > 0$ esetén azt kapjuk, hogy

$$z = c\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}}.$$

Legyen

$$f(x,y) := c\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}}$$

$$\Big((x,y)\in H := \Big\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \;\Big|\; 0\le x\le a,\ 0\le y\le \frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}\Big\}\Big).$$

Mivel $f\in R(H)$, ezért a szóban forgó testnek van térfogata, és az egyenlő az

$$\iint\limits_H f(x,y)\,dx\,dy$$

számmal.

Ennek a kettős integrálnak a kiszámolásához (u,v) „új" változókat vezetünk be az alábbi módon:

$$\begin{aligned} x &= g_1(u,v) = a\ u\cos v \\ y &= g_2(u,v) = b\ u\sin v \end{aligned} \qquad \big((u,v)\in(0,1)\times(0,\tfrac{\pi}{2}) =: U\big).$$

Ekkor a $g := (g_1,g_2) : U\to \operatorname{int} H$ függvény folytonosan deriválható bijekció és

$$\det g'(u,v) = \det\begin{bmatrix} a\ \cos v & -a\ u\ \sin v \\ b\ \sin v & b\,u\ \cos v\end{bmatrix} = a\,b\,u.$$

Így

$$\iint\limits_H f(x,y)\,dx\,dy = c\iint\limits_U \sqrt{1-u^2}\cdot a\,b\,u\,dx\,dy = a\,b\,c\cdot\int_0^1\int_0^{\pi/2} u\cdot\sqrt{1-u^2}\,du\,dv =$$

$$= a\,b\,c\cdot\frac{\pi}{2}\cdot\Big(-\frac{1}{2}\Big)\int_0^1(-2\,u)\cdot\sqrt{1-u^2}\,du = -a\,b\,c\cdot\frac{\pi}{4}\cdot\Big[\frac{(1-u^2)^{3/2}}{3/2}\Big]_0^1 =$$

$$= a\,b\,c\cdot\frac{\pi}{4}\cdot\frac{2}{3} = \frac{a\,b\,c}{3}\cdot\frac{\pi}{2}.$$

Az ellipszoid térfogata tehát $V = 8\cdot\dfrac{a\,b\,c}{3}\cdot\dfrac{\pi}{2} = \underline{\underline{\dfrac{4\,a\,b\,c}{3}}}\cdot\pi.$ ■

8. példa. *Jelöljük H_R-rel az origó középpontú R sugarú zárt körlapot. Számítsuk ki az*

$$I_R := \iint\limits_{H_R} e^{-x^2-y^2}\,dx\,dy$$

kettős integrált.

Megoldás. Legyen $R>0$ adott valós szám és

$$f(x,y) := e^{-x^2-y^2} \qquad \Big(H_R := \big\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \;\big|\; \sqrt{x^2+y^2}\le R\big\}\Big).$$

Mivel $f \in C\big(H_R\big)$, ezért $f \in R\big(H_R\big)$.

Az integrál kiszámításához az

$$x = r\cos\varphi, \quad y = r\sin\varphi$$
$$\big(0 \le r \le R,\ 0 \le \varphi \le 2\pi\big)$$

polárkoordinátás helyettesítést alkalmazzuk. Azt kapjuk, hogy

$$I_R = \iint\limits_{[0,R]\times[0,2\pi]} f\big(r\ \cos\varphi,\ r\ \sin\varphi\big)\cdot r\,dr\,d\varphi = \int\limits_0^R \int\limits_0^{2\pi} e^{-r^2}\cdot r\,dr\,d\varphi =$$

$$= \int\limits_0^R \left(\int\limits_0^{2\pi} e^{-r^2}\cdot r\,d\varphi\right) dr = 2\pi\int\limits_0^R r\cdot e^{-r^2}\,dr = 2\pi\cdot\left[-\frac{1}{2}e^{-r^2}\right]_0^R = \pi\cdot\left(1-e^{-R^2}\right).$$

Így

$$\underline{\underline{\iint\limits_{H_R} e^{-x^2-y^2}\,dx\,dy = \pi\cdot\left(1-e^{-R^2}\right).}}\ \blacksquare$$

Megjegyzés. Vegyük észre, hogy H_R (pl.) az x tengelyre nézve normáltartomány. Az integrál kiszámolásához azonban a megismert képletet most nem tudjuk használni, mert az e^{-y^2} $(y \in \mathbb{R})$ függvény primitív függvénye (ez létezik, mert a függvény folytonos) nem elemi függvény, következésképpen a „belső” integrál kiszámolásához a Newton–Leibniz-tételt nem lehet alkalmazni.

9. példa. *Mutassuk meg, hogy létezik és véges a következő határérték:*

$$\lim_{R\to+\infty}\int\limits_{-R}^{R} e^{-x^2}\,dx.$$

Másképp fogalmazva: A

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2}\,dx$$

improprius integrál konvergens.

Megoldás. A szóban forgó határérték *létezik*, mert a

$$(0,+\infty)\ni R\mapsto \int\limits_{-R}^{R} e^{-x^2}\,dx = 2\int\limits_0^R e^{-x^2}\,dx$$

függvény monoton növekedő.

Legyen $R > 1$. Ekkor

$$\int\limits_0^R e^{-x^2}\,dx = \int\limits_0^1 e^{-x^2}\,dx + \int\limits_1^R e^{-x^2}\,dx.$$

Mivel

$$\int_1^R e^{-x^2}\,dx = \int_1^R \frac{1}{e^{x^2}}\,dx \leq \left(\frac{1}{e^{x^2}} \leq \frac{1}{e^x}, \quad \text{ha} \quad x \geq 1\right) \leq \int_1^R \frac{1}{e^x}\,dx = \Big[-e^{-x}\Big]_1^R = \frac{1}{e} - \frac{1}{e^R},$$

ezért

$$\lim_{R\to+\infty} \int_{-R}^{R} e^{-x^2}\,dx \leq 2\cdot\int_0^1 e^{-x^2}\,dx + \frac{2}{e} \approx 1,49 + 0,74 = 2,23. \ \blacksquare$$

10. példa. *Bizonyítsuk be, hogy*

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2}\,dx = \sqrt{\pi} \quad (\approx 1,77).$$

Megoldás. Az előző példa jelöléseit és eredményét használjuk. Mivel $[-R/2, R/2]^2 \subset H_R \subset [-R, R]^2$ és az f függvény mindenütt pozitív, ezért

$$\iint\limits_{[-R/2,R/2]^2} e^{-x^2-y^2}\,dx\,dy \leq \iint\limits_{H_R} e^{-x^2-y^2}\,dx\,dy \leq \iint\limits_{[-R,R]^2} e^{-x^2-y^2}\,dx\,dy.$$

Mivel

$$\iint\limits_{[-R,R]^2} e^{-x^2-y^2}\,dx\,dy = \left(\int_{-R}^{R} e^{-x^2}\,dx\right)^2 \quad \text{és} \quad \iint\limits_{[-R/2,R/2]^2} e^{-x^2-y^2}\,dx\,dy = \left(\int_{-R/2}^{R/2} e^{-x^2}\,dx\right)^2,$$

ezért

$$(*) \qquad \begin{aligned} \iint\limits_{[-R/2,R/2]^2} e^{-x^2-y^2}\,dx\,dy = \left(\int_{-R/2}^{R/2} e^{-x^2}\,dx\right)^2 &\leq \\ \leq \pi\cdot\left(1 - e^{-R^2}\right) &\leq \\ \leq \iint\limits_{[-R,R]^2} e^{-x^2-y^2}\,dx\,dy = \left(\int_{-R}^{R} e^{-x^2}\,dx\right)^2 & \end{aligned}$$

adódik minden $R > 0$-ra. Tudjuk, hogy az $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2}\,dx$ improprius integrál konvergens. Ezért $(*)$-ban R-rel végtelenhez tartva azt kapjuk, hogy

$$\left(\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2}\,dx\right)^2 \leq \pi \leq \left(\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2}\,dx\right)^2,$$

tehát $\underline{\underline{\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2}\,dx = \sqrt{\pi}}}$. $\blacksquare$