Analízis I. Előadás

Tartalom

a) Határérték: átviteli elv, műveleti tulajdonságok, speciális függvények

b) Folytonosság, kapcsolat a határértékkel

Tétel (Átviteli elv)

Legyen $f \in \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $a \in \mathcal{D}_f'$.

Az f függvénynek az a pontban $\exists$ létezik határértéke, és $\lim_a f = A \in \overline{\mathbb{R}}$

akkor és csak akkor, ha

$\forall\ x : \mathbb{N} \to \mathcal{D}_f \setminus \{a\}$, $\lim x = a$ esetén az $\big(f(x_n)\big)$ sorozatnak $\exists$ határértéke, és $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = A$.

Megjegyzés

a) Láttuk, hogy sorozat határértékének fogalam a függvény határérték fogalmának speciális esete $(\mathcal{D}_f = \mathbb{N})$. A tétel azt mutatja, hogy ezzel a speciális esettel jellemezhető az általános eset.

b) A tétel lehetőséget biztosít arra, hogy a sorozat határtértékére igazolt tulajdonságokat, eredményeket "átvigyük" a függvény határértékére.

c) Értelemszerű módosítással az átviteli elv érvényes az egyoldali határértékekre is.

Bizonyítás

$\Longrightarrow$ Tegyük fel, hogy $\exists\ \lim_a f \in \overline{\mathbb{R}}$.
Legyen $x : \mathbb{N} \to \mathcal{D}_f \setminus \{a\}$ tetszőleges olyan sorozat, amelyre $\lim x = a$.
A függvény határérték definíciója alapján

$$\forall\ \epsilon > \text{ esetén } \exists \text{ olyan } \delta > 0, \text{ hogy } f(x) \in K_\epsilon(A) \quad \forall \quad x \in K_\delta(a) \bigcap \mathcal{D}_f,\ x \neq a.$$

Mivel $\lim x = a$, ezért $\exists\ N \in \mathbb{N}$, hogy $\forall\ n > N$ esetén $x_n \in K_\delta(a)$.
Ebből következik, hogy $\forall\ n > N$ esetén $f(x_n) \in K_\epsilon(A)$.
Következésképpen $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = A$.

Bizonyítás (folytatás)

$\Longleftarrow$ Tegyük fel, hogy $\forall\ x : \mathbb{N} \to \mathcal{D}_f \setminus \{a\},\ \lim x = a$ esetén az $\big(f(x_n)\big)$ sorozatnak $\exists$ határértéke és $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = A \in \overline{\mathbb{R}}$.

Megmutatjuk, hogy ekkor $\exists\ \lim_a f$ és $\lim_a f = A$
Indirekt tegyÜk fel, hogy $\lim_a f = A$ nem teljesül.
Ez azt jelenti, hogy
$\exists\ \epsilon > 0$, hogy $\forall\ \delta > 0$ esetén $\exists\ x \in K_\delta(a),\ x \in \mathcal{D}_f,\ x \neq a$, amelyre $f(x) \notin K_\epsilon(A)$.

$\delta = 1/n$ választással ez azt jelenti, hogy
$\forall\ n \in \mathbb{N},\ n \neq 0$ esetén $\exists\ x_n \in K_\delta(a),\ x_n \in \mathcal{D}_f,\ x_n \neq a$, amelyre $f(x_n) \notin K_\epsilon(A)$.

Erre az $(x_n)\mathbb{N} \to \mathcal{D}_f \setminus \{a\}\ \lim(x_n) = a$ sorozatra tehát nem tejesül, hogy $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = A$. Ez ellentmond a feltételünknek. $\square$

Tétel (Műveletek határértékekkel)

Legyen $f \in \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g \in \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

a) Ha $a \in \left(\mathcal{D}_f \bigcap \mathcal{D}_g\right)'$ és $\exists \lim\limits_a f = A \in \overline{\mathbb{R}}$, $\lim\limits_a g = B \in \overline{\mathbb{R}}$, akkor

$$\exists \lim_a (f+g) \quad \text{és} \quad \lim_a (f+g) = A + B\,,$$

feltéve, hogy a jobb oldali művelet értelmezve van.

b) Ha $a \in \left(\mathcal{D}_f \bigcap \mathcal{D}_g\right)'$ és $\exists \lim\limits_a f = A \in \overline{\mathbb{R}}$, $\lim\limits_a g = B \in \overline{\mathbb{R}}$, akkor

$$\exists \lim_a f \cdot g \quad \text{és} \quad \lim_a f \cdot g = A \cdot B\,,$$

feltéve, hogy a jobb oldali művelet értelmezve van.

c) Ha $a \in \left(\mathcal{D}_f \bigcap \{x \in \mathcal{D}_g \;:\; g(x) \neq 0\}\right)'$ és $\exists \lim\limits_a f = A \in \overline{\mathbb{R}}$, $\lim\limits_a g = B \in \overline{\mathbb{R}}$, akkor

$$\exists \lim_a \frac{f}{g} \quad \text{és} \quad \lim_a \frac{f}{g} = \frac{A}{B}\,,$$

feltéve, hogy a jobb oldali művelet értelmezve van.

Bizonyítás

Legyen $x : \mathbb{N} \to \left(\mathcal{D}_f \bigcap \mathcal{D}_g\right) \setminus \{a\}$ az a), b) esetekben,
$x : \mathbb{N} \to \left(\mathcal{D}_f \bigcap \{x \in \mathcal{D}_g \;:\; g(x) \neq 0\}\right) \setminus \{a\}$ a c) esetben.

Tegyük fel, hogy $\lim x = a$.

Az átviteli elv miatt ekkor $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = A$ és $\lim\limits_{n\to\infty} g(x_n) = B$.

Bizonyítás (folytatás)

Következésképpen

$$\lim_{n\to\infty}\left(f(x_n)+g(x_n)\right)=A+B \quad \text{a) eset,}$$

$$\lim_{n\to\infty}\left(f(x_n)\cdot g(x_n)\right)=A\cdot B \quad \text{b) eset,}$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{f(x_n)}{g(x_n)}=\frac{A}{B} \quad \text{c) eset, feltéve, hogy a jobb oldali műveletek értelmezve vannak.}$$

Innen ismét az átviteli elvet alkalmazva következik, hogy

$$\lim_a (f+g)=A+B\,,\quad \lim_a f\cdot g=A\cdot B\,,\quad \lim_a \frac{f}{g}=\frac{A}{B}. \qquad \square$$

Megjegyzés

A fenti műveleti szabályok az egyoldali határértékekre is érvényesek.

Polinomok és racionális törtfüggvények határértéke

a) Legyen $P(x)=\sum_{k=0}^{n} a_k x^k$ $(n\in\mathbb{N},\ a_k\in\mathbb{R},\ k=0,\ldots,n)$ polinom.
Emlékeztető: $\lim_a c=c$ $(a,\ c\in\mathbb{R})$, $\lim_{x\to a} x=a$ $(a\in\mathbb{R})$.
Innen a az összeadásra és a szorzásra vonatkozó szabályok alapján adódik, hogy minden P polinom esetén $\exists\ \lim_a P=P(a)$ $(a\in\mathbb{R})$ (beheyettesítéssel).

b) Racionális törtfüggvények: $R=\dfrac{p}{Q}$, ahol P és Q polinomok.
A hányadosra vonatkozó szabály alkalmazásával hasomlóan adódik, hogy minden R racionális törtfüggvény esetén, ha $a\in\mathcal{D}_R$, akkor $\exists\ \lim_a R=R(a)$.
Vigyázat: az $a\in\mathbb{R},\ Q(a)=0$ pontokra a fenti állítás nem vonatkozik.
Ld. $\lim_{x\to 0}\dfrac{1}{x^2}=+\infty$.

Tétel (Monoton függvény határértéke)

Legyen $f \in \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ és $a \in \left(\mathcal{D}_f\right)'_+$ (, azaz a az értelmezési tartomány jobb oldali torlódási pontja).

Ha $f \nearrow$, akkor $\exists \lim\limits_{a+0} f \in \overline{\mathbb{R}}$ és $\lim\limits_{a+0} f = \inf\left\{f(x) \ : \ x \in \mathcal{D}_f \bigcap (a, +\infty)\right\}$.

Megjegyzés

a) Ha $a \in \left(\mathcal{D}_f\right)'_-$ és $f \nearrow$, akkor $\exists \lim\limits_{a-0} f \in \overline{\mathbb{R}}$ és

$\lim\limits_{a-0} f = \sup\left\{f(x) \ : \ x \in \mathcal{D}_f \bigcap (-\infty, a)\right\}$.

b) $a \in \left(\mathcal{D}_f\right)'_+$, $f \searrow \quad \Longrightarrow \quad \exists \lim\limits_{a+0} f = \sup\left\{f(x) \ : \ x \in \mathcal{D}_f \bigcap (a, +\infty)\right\}$.

c) $a \in \left(\mathcal{D}_f\right)'_-$, $f \searrow \quad \Longrightarrow \quad \exists \lim\limits_{a+0} f = \inf\left\{f(x) \ : \ x \in \mathcal{D}_f \bigcap (-\infty, a)\right\}$.

Példa

Legyen $a > 0$, és $f(x) : \mathbb{Q} \to \mathbb{R}$, $f(x) = a^x$. Könnyű megmutatni, hogy $f \nearrow$.
Következékésképpen $\forall \ b \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \ \exists \ \lim_{b+0} f$ és $\lim_{b-0} f$.
Nem nehéz belátni, hogy $\lim_{b+0} f = \lim_{b-0} f \quad \Longrightarrow \quad \exists \ \lim_b f$.
Függvény kiterjesztés: $f(b) := \lim_b f \ \ (b \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q})$.

Bizonyítás

A hárérték definíciója alapján.

Legyen $\inf\left\{f(x)\ :\ x \in \mathcal{D}_f \bigcap (a,+\infty)\right\} =: A \in \overline{\mathbb{R}}$ és $\epsilon > 0$.

Ha $A < B \in K_\epsilon A$, akkor az infímum tulajdonságai miatt $\exists\ t \in \mathcal{D}_f \bigcap (a,+\infty)$, amelyre $A \leq f(t) < B$.

A függvény monotonitása miatt $\forall\ x \in (a,t)$ esetén $A \leq f(x) \leq f(t) = B$, azaz $f(x) \in [A,B] \subset K_\epsilon(A)$.

Következésképpen, ha $\delta := t - a > 0$ és $x \in K_\delta(a) \bigcap (a,+\infty)$, akkor $f(x) \in K_\epsilon A$.

Ezzel igazoltuk az állítást. □

Tétel (Analitikus függvények határértéke)

Tegyük fel, hogy a $\sum \left(a_k(x-x_0)^k\right)$ hatványsor konvergencia sugara $R > 0$.

Jelölje $f : (x_0 - R, x_0 + R) \to \mathbb{R}$ a hatványsor összegfüggvényét.

Ekkor $\forall\ \ a \in (x_0 - R, x_0 + R)$ pontban $\exists\ \lim\limits_a f$, és $\lim\limits_a f = f(a)$.

Bizonyítás

A bizonyítást először az $a = x_0$ esetre, azaz a hatványsor középpontjára igazoljuk.

Legyen $r < R$. Ekkor a hatványsor abszolút konvergens az $x \in [x_0 - r, x_0 + r]$ pontban: $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} |a_k| \cdot |x - x_0|^k \leq \sum_{k=0}^{\infty} |a_k| \cdot r^k = A \in \mathbb{R}$.

Ekkor $|f(x) - f(x_0)| = \left|\sum_{k=1}^{\infty} a_k(x-x_0)^k\right| = |x - x_0| \cdot \left|\sum_{k=1}^{\infty} a_k(x-x_0)^{k-1}\right|$ miatt

Bizonyítás (folytatás)

$$\begin{aligned}|f(x)-f(x_0)| &\le |x-x_0|\cdot\sum_{k=1}^{\infty}|a_k|\cdot r^{k-1} = |x-x_0|\cdot\frac{1}{r}\Big(\sum_{k=0}^{\infty}|a_k|\cdot r^k - a_0\Big)\\ &= C\cdot|x-x_0|\,,\end{aligned}$$

ahol $C=\dfrac{A-a_0}{r}$.

Összefoglalva: $\exists\ C>0$ olyan, hogy $|f(x)-f(x_0)|\le C\cdot|x-x_0|\ \ (x\in K_r(x_0)$.

Ha tehát $\epsilon>0$ és $\delta=\dfrac{\epsilon}{C}$, akkor $x\in K_\delta(x_0)$ esetén $f(x)\in K_\epsilon(f(x_0))$.

Következésképpen $\lim_{x_0} f = f(x_0)$.

Legyen most $a\in K_R(x_0)$.

Ekkor az eredeti hatványsor az a pont $\rho=R-|a-x_0|$ sugarú környezetében átrendezhető a középpontú hatványsorrá úgy, hogy ott az eredeti és az új sor összege megegyezik. (ld. 9. előadás – 2020.04.20 – vége)

Ez utóbbira viszont nyilván igaz a tétel az a pontban, hiszen az nem más, mint a sor középpontja. $\square$

Folytonosság

Megjegyzés

Köznapi naív folytonosság, folyamatosság.

Folytonos vs. diszkrét.

Folytonos függvények

Legyen $f \in \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ és $a \in \mathcal{D}_f$.

Azt mondjuk, hogy az f függvény az a pontban folytonos, ha

$\forall\ \epsilon > 0$ számhoz van olyan $\delta > 0$, hogy $\forall\ \ x \in K_\delta(a) \bigcap \mathcal{D}_f$ esetén $f(x) \in K_\epsilon)f(a))$.

Jelölés: $f \in C\{a\}$.

Azt mondjuk, hogy az f függvény folytonos, ha azértelmezési tartományának minden pontjában folytonos.

Jelölés: $f \in C$.

Megjegyzés

a) Pontbeli folytonosság: lokális fogalom.

b) Hasonlóság a határérték definíciójával, de

i) folytonosság esetén $a \in \mathcal{D}_f$, határérték esetén pedig $a \in \left(\mathcal{D}_f\right)'$;
ii) folytonosság esetén $f(a)$ szerepe lényeges, határérték esetén érdektelen.

c) A definíció szerint egy függvény az értelmezési tartományának minden izolált pontjában folytonos.
Például minden valós sorozat, mint valós függvény folytonos.
(Hétköznapi folytonosság fogalma???)

Tétel (A határérték és a folytonosság kapcsolata)
Legyen $f \in \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ és $a \in \mathcal{D}_f \bigcap \left(\mathcal{D}_f\right)'$.
Ekkor
$$f \in C\{a\} \quad \Longleftrightarrow \quad \exists \lim_a f \;\text{ és }\; \lim_a f = (f(a)\,.$$

Bizonyítás
A definíciók összehasonlításával.

Példa
i) Láttuk, hogy minden P polinom és $a \in \mathbb{R}$ esetén $\lim_a P = P(a) \quad \Longrightarrow \quad P \in C$.
ii) Legyen R racionális törtfüggvény és $a \in \mathcal{D}_R$. Ekkor $a \in \left(\mathcal{D}_R\right)'$. Megmutattuk, hogy $\lim_a f = R(a) \quad \Longrightarrow \quad R \in C$.
iii) Legyen a $\sum \left(a_k(x - x_0)^k\right)$ hatványsor konvergencia sugara $R > 0$, összegfüggvénye f.
Láttuk, hogy $\lim_x f = f(x)\ \forall\ x \in (x_0 - R, x_0 + R) \quad \Longrightarrow \quad f$ folytonos az $(x_0 - R, x_0 + R)$ konvergencia tartomány minden pontjában.

Megjegyzés
- **a)** A fenti tétel azt mutatja, hogy olyan értelmezési tartománybeli pontban, ami egyben torlódási pont is a folytonosság azt jelenti, hogy a függvénynek abban a pontban van határértéke, mégpedig maga a függvényérték. A határértékre vonatkozó technikák tehát ezekben a pontokban alkalmazhatók.
- **b)** Ha $a \in \mathcal{D}_f$, de $a \notin \left(\mathcal{D}_f\right)'$, akkor a az értelmezési tartomány izolált pontja. Ott a függvény a definíció szerint folytonos.

Tétel (A folytonosságra vonatkozó átviteli elv)

Legyen $f \in \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ és $a \in \mathcal{D}_f$.

Ekkor

$$f \in C\{a\} \iff \forall\, x : \mathbb{N} \to \mathcal{D}_f\,,\ \lim x = a \quad \text{esetén} \ \lim_{n\to\infty} f(x_n) = f(a)\,.$$

Bizonyítás

A tétel a határértékre vonatkozó átviteli elv bizonyításához hasonlóan igazolható.