Valószínűségszámítás zh.

2021. november 11.

1) Az egyik áruház sajátmárkás pirospaprikáját 2 különböző gyár gyártja, egyforma arányban. A „Vöröske” gyár paprika csomagjában 10%-os valószínűséggel van egérszőr, a „Téglapor” gyár paprikájában pedig 50%-os valószínűséggel. 5 csomagot vettünk (feltételezhetjük, hogy mind ugyanabban a gyárban készültek) és egyikben sem volt egérszőr. Ezen feltétellel mennyi a valószínűsége, hogy a csomagokat a „Vöröske” gyárban készítették? /12 pont/

Mo.:

Az adatok alapján az egyik lehetséges modell:

Legyen A: a csomagokat a „Vöröske” gyárban készítették, B: Az 5 csomag egyikében sem volt egérszőr. $P(A) = 0{,}5$; $P(B|A) = 0{,}9^5$; $P(B|\bar{A}) = 0{,}5^5$. Az utolsó 2 egyenlőségnél feltettük, hogy az egérszőr megléte feltételesen független a csomagoknál.

Kérdés: $P(A|B) =?$

Alkalmazzuk a Bayes-formulát!

$$P(A|B) = \frac{P(B|A)P(A)}{P(B|A)P(A) + P(B|\bar{A})P(\bar{A})} = \frac{0{,}9^5 \cdot 0{,}5}{0{,}9^5 \cdot 0{,}5 + 0{,}5^5 \cdot 0{,}5} = \frac{9^5}{9^5 + 5^5} = \frac{59049}{59049 + 3125} = \frac{59049}{62174}$$
$$= 94{,}9738\%$$

Elfogadtuk a megoldást más kellően megindokolt modelleknél is.

2) A Lois nevű csiga napi futásteljesítménye 1 méter várható értékű exponenciális eloszlású.

a) Mennyi a valószínűsége, hogy egy adott napon 2 méternél többet tesz meg? /3 pont/

a) Hány méter az a futásmennyiség amit Lois 90%-os valószínűséggel nem halad meg egy napon? /5 pont/

Mo.:

a) Legyen X a napi futásteljesítmény. Felhasználva az eloszlásfüggvény folytonosságát kapjuk, hogy $P(X > 2) = 1 - P(X \leq 2) = 1 - P(X < 2) = 1 - (1 - e^{-2}) = e^{-2} = 13{,}53\%$

b) $P(X \leq x) = P(x < x) = 1 - e^{-x} = 90\% \Rightarrow e^{-x} = 0{,}1 \Rightarrow x = \ln 10 = 2{,}302585093$

3) Az $\{1;2;\ldots;10\}$ számok közül húzunk 6-szor visszatevéssel. Mennyi a valószínűsége, hogy nem húzunk 7-nél nagyobbat? /10 pont/

Mo.:

Legyen A: nem húzunk 7-nél nagyobbat.

Kérdés: $P(A)=?$

Kombinatorikus valószínűségi mezőt feltételezünk, ahol az esetek száma a visszatevéses mintavétel miatt 10^6. Így a valószínűség.

$$P(A)=P(\textit{első húzás}\leq 7, \textit{második húzás}\leq 7, \ldots, \textit{hatodik húzás}\leq 7)=\frac{7^6}{10^6}=\ 11{,}7649\%$$

Ugyanezt az eredményt kapjuk, ha felhasználjuk azt, hogy a visszatevéses mintavételnek a húzások függetlensége felel meg.

4) Az X valószínűségi változó a (c,∞) félegyenesen veszi fel értékeit $(c>0)$. Sűrűségfüggvénye ott $f(t)=\frac{1}{t^5}$ alakú. Adjuk meg c értékét és határozzuk meg X várható értékét! /12 pont/

Mo.:

A sűrűségfüggvény itt csak a (c, ∞) intervallumon nem 0, ezért a sűrűségfüggvény tulajdonsága miatt $1=\int_c^\infty \frac{1}{t^5}dt=\left[-\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{t^4}\right]_c^\infty=\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{c^4}\Rightarrow c=\frac{1}{\sqrt{2}}=0{,}707106781$. Természetesen itt felhasználtuk c pozitivitását. És valóban sűrűségfüggvényt kaptunk (nemnegatív és integrálja 1).

$$EX=\int_c^\infty t\frac{1}{t^5}dt=\left[-\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{t^3}\right]_c^\infty=\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{c^3}=\frac{2\sqrt{2}}{3}=0{,}942809042.$$

5) Az X valószínűségi változó Poisson-eloszlású 2 várható értékkel. Határozzuk meg $E((X+5)^2)$-t)! /10 pont/

Mo.:

$$E((X+5)^2)=EX^2+10EX+25=D^2X+(EX)^2+10EX+25=2+2^2+10\cdot 2+25=51$$

6) Legyenek X, Y független, $N(-6,2^2)$ illetve $N(5,1)$ eloszlású valószínűségi változók.

a) Fejezze ki a $P(X-2Y<12)$ valószínűséget a standard normális eloszlás eloszlásfüggvényének segítségével! /5 pont/

b) Mennyi $X+3Y$ várható értéke? /3 pont/

Mo.:

A normális eloszlás két paramétere a várható érték és a szórásnégyzet, ezért $EX=-6, D^2X=4, EY=5, D^2Y=1$. Így

a) mivel független normálisak összege normális eloszlású $P(X-2Y<12)=P\left(\frac{X-2Y+16}{\sqrt{4+4\cdot 1}}<\frac{12+16}{\sqrt{4+4\cdot 1}}\right)=\Phi\left(\frac{28}{\sqrt{8}}\right)=\Phi\left(\frac{14}{\sqrt{2}}\right)$,

b) $E(X+3Y)=\ -6+3\cdot 5=9$

Valószínűségszámítás zh.

2021. november 11.

1) Az $\{1;2;\ldots;10\}$ számok közül húzunk 7-szer visszatevéssel. Mennyi a valószínűsége, hogy nem húzunk 6-nál nagyobbat? /10 pont/

Mo.:

Legyen A: nem húzunk 6-nál nagyobbat.

Kérdés: $P(A) = ?$

Kombinatorikus valószínűségi mezőt feltételezünk, ahol az esetek száma a visszatevéses mintavétel miatt 10^7.

$$P(A) = P(\textit{első húzás} \leq 6, \textit{második húzás} \leq 6, \ldots, \textit{hetedik húzás} \leq 6) = \frac{6^7}{10^7} = 2{,}79936\%$$

Ugyanezt az eredményt kapjuk, ha felhasználjuk azt, hogy a visszatevéses mintavételnek a húzások függetlensége felel meg.

2) Az X valószínűségi változó a (c, ∞) félegyenesen veszi fel értékeit $(c > 0)$. Sűrűségfüggvénye ott $f(t) = \frac{1}{t^5}$ alakú. Adjuk meg c értékét és határozzuk meg X várható értékét! /12 pont/

Mo.:

A sűrűségfüggvény itt csak a (c, ∞) intervallumon nem 0, ezért a sűrűségfüggvény tulajdonsága miatt $1 = \int_c^\infty \frac{1}{t^5} dt = \left[-\frac{1}{4} \cdot \frac{1}{t^4}\right]_c^\infty = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{c^4} \Rightarrow c = \frac{1}{\sqrt{2}} = 0{,}707106781$. Természetesen itt felhasználtuk c pozitivitását. És valóban sűrűségfüggvényt kaptunk (nemnegatív és integrálja 1).

$$EX = \int_c^\infty t \frac{1}{t^5} dt = \left[-\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{t^3}\right]_c^\infty = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{c^3} = \frac{2\sqrt{2}}{3} = 0{,}942809042.$$

3) Az X valószínűségi változó Poisson-eloszlású 3 várható értékkel. Határozzuk meg $E((X+4)^2)$-t)! /10 pont/

Mo.:

$$E((X+4)^2) = EX^2 + 8EX + 16 = D^2X + (EX)^2 + 8EX + 16 = 3 + 3^2 + 8 \cdot 3 + 16 = 52$$

4) Legyenek X, Y független, $N(-6, 2^2)$ illetve $N(4,1)$ eloszlású valószínűségi változók.

a) Fejezze ki a $P(X - 2Y < 12)$ valószínűséget a standard normális eloszlás eloszlásfüggvényének segítségével! /5 pont/

c) Mennyi $X + 3Y$ várható értéke? /3 pont/

Mo.:

A normális eloszlás két paramétere a várható érték és a szórásnégyzet, ezért $EX = -6, D^2X = 4, EY = 4, D^2Y = 1$. Így

c) mivel független normálisak összege normális eloszlású $P(X - 2Y < 12) = P\left(\frac{X-2Y+14}{\sqrt{4+4\cdot 1}} < \frac{12+14}{\sqrt{4+4\cdot 1}}\right) = \Phi\left(\frac{26}{\sqrt{8}}\right) = \Phi\left(\frac{13}{\sqrt{2}}\right)$,

d) $E(X + 3Y) = -6 + 3 \cdot 4 = 6$

5) Az egyik áruház sajátmárkás pirospaprikáját 2 különböző gyár gyártja, egyforma arányban. A „Vöröske” gyár paprika csomagjában 20%-os valószínűséggel van egérszőr, a „Mínium” gyár paprikájában pedig 50%-os valószínűséggel. 5 csomagot vettünk (feltételezhetjük, hogy mind ugyanabban a gyárban készültek) és egyikben sem volt egérszőr. Ezen feltétellel mennyi a valószínűsége, hogy a csomagokat a „Mínium” gyárban készítették? /12 pont/

Mo.:

Az adatok alapján az egyik lehetséges modell:

Legyen A: a csomagokat a „Mínium” gyárban készítették, B: Az 5 csomag egyikében sem volt egérszőr. $P(A) = 0{,}5$; $P(B|A) = 0{,}5^5$; $P(B|\bar{A}) = 0{,}8^5$. Az utolsó 2 egyenlőségnél feltettük, hogy az egérszőr megléte feltételesen független a csomagoknál.

Kérdés: $P(A|B) =?$

Alkalmazzuk a Bayes-formulát!

$$P(A|B) = \frac{P(B|A)P(A)}{P(B|A)P(A) + P(B|\bar{A})P(\bar{A})} = \frac{0{,}5^5 \cdot 0{,}5}{0{,}5^5 \cdot 0{,}5 + 0{,}8^5 \cdot 0{,}5} = \frac{5^5}{5^5 + 8^5} = \frac{3125}{3125 + 32768} = \frac{3125}{35893} = 8{,}7064\%$$

Elfogadtuk a megoldást más kellően megindokolt modelleknél is.

6) Az Usain nevű csiga napi futásteljesítménye 1 méter várható értékű exponenciális eloszlású.

a) Mennyi a valószínűsége, hogy egy adott napon 2 méternél többet tesz meg? /3 pont/

b) Hány méter az a futásmennyiség amit Usain 80%-os valószínűséggel nem halad meg egy napon? /5 pont/

Mo.:

a) Legyen X a napi futásteljesítmény. Felhasználva az eloszlásfüggvény folytonosságát kapjuk, hogy $P(X > 2) = 1 - P(X \leq 2) = 1 - P(X < 2) = 1 - (1 - e^{-2}) = e^{-2} = 13{,}53\%$

b) $P(X \leq x) = P(x < x) = 1 - e^{-x} = 80\% \Rightarrow e^{-x} = 0{,}2 \Rightarrow x = \ln 5 = 1{,}609437912$