7. előadás

2020. október 19.

Az előző előadáson már elkezdtük a primitív függvények meghatározására vonatkozó (a deriválási szabályok „megfordításaiból" adódó) alapvető módszerek felsorolását. Emlékeztetünk arra, hogy a következő integrálási szabályokat már ismertettük:

1. Alapintegrálok, a határozatlan integrál linearitása.

2. Az első helyettesítési szabály.

3. A parciális integrálás.

Most folytatjuk a szóban forgó felsorolást.

4. A második helyettesítési szabály

Megemlítettük már azt, hogy az összetett függvény deriválására vonatkozó tételnek a „megfordításával" kapcsolatban két állítást fogalmazunk meg. Az elsőt már megismertük:

Az első helyettesítési szabály. *Legyenek adottak az $I, J \subset \mathbb{R}$ nyílt intervallumok és a $g : I \to \mathbb{R}$, $f : J \to \mathbb{R}$ függvények. Tegyük fel, hogy $g \in D(I)$, $\mathcal{R}_g \subset J$ és a f függvénynek van primitív függvénye. Ekkor az $(f \circ g) \cdot g'$ függvénynek is van primitív függvénye és*

$$(*) \qquad \int f\big(g(x)\big) \cdot g'(x)\, dx = F\big(g(x)\big) + c \qquad (x \in I),$$

ahol F a f függvény egy primitív függvénye.

Az összetett függvény deriválására vonatkozó tétel egy másik „megfordításával" kapjuk a nagyon sokszor alkalmazható (és tegyük hozzá, hogy egyben a „legbonyolultabb") integrálási szabályt.

Induljunk ki abból, hogy a $(*)$ képletet az

$$\int f \circ g \cdot g' = \Big(\int f \Big) \circ g$$

alakban írjuk fel. Ha most feltesszük még azt is, hogy g **invertálható**, akkor azt kapjuk, hogy

$$\Big(\int f \circ g \cdot g' \Big) \circ g^{-1} = \int f.$$

Ezt a határozatlan integrálok jelölésére bevezetett másik szimbólummal a következő alakban is felírhatjuk:

$$(**) \qquad \int f(x)\, dx = \int f\big(g(t)\big) \cdot g'(t)\, dt_{\big|t=g^{-1}(x)}.$$

Figyeljük meg, hogy mit jelent és mikor érdemes használni ezt a képletet. Tegyük fel, hogy egy $\int f(x)\, dx$ határozatlan integrált, vagyis f egyelőre ismeretlen primitív függvényét akarjuk kiszámítani. Ekkor a „régi" x változó helyett vezessük be az $x = g(t)$ egyenlőségből adódó

$t = g^{-1}(x)$ „új” változót. Ha **sikerül (!)** a g függvényt úgy megválasztani, hogy $f \circ g \cdot g'$ primitív függvényét (vagyis az $\int f \circ g \cdot g'$ határozatlan integrált) már ki tudjuk számítani, akkor a $(**)$ képlettel megkapjuk f primitív függvényeit.

Az előzőeket a következő állításban foglaljuk össze:

A második helyettesítési szabály. *Legyenek $I, J \subset \mathbb{R}$ nyílt intervallumok. Tegyük fel, hogy $f : I \to \mathbb{R}$, $g : J \to I$ bijekció, $g \in D(J)$ és az $f \circ g \cdot g' : J \to \mathbb{R}$ függvénynek van primitív függvénye. Ekkor az f függvénynek is van primitív függvénye és*

$$\int f(x)\,dx \underset{x=g(t)}{=} \int f\big(g(t)\big) \cdot g'(t)\,dt\Big|_{t=g^{-1}(x)} \qquad (x \in I).$$

1. példa. Az

$$\int \sqrt{1-x^2}\,dx \quad \big(x \in (-1,1)\big)$$

határozatlan integrál kiszámításához azt az **ötletet** használjuk, hogy az

$$x = \sin t =: g(t) \quad \Big(t \in \big(-\tfrac{\pi}{2}, \tfrac{\pi}{2}\big)\Big)$$

helyettesítést alkalmazzuk. Mivel $g'(t) = \cos t > 0$ $\Big(t \in \big(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\big)\Big)$, ezért a g függvény szigorúan monoton növekedő a $\big(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\big)$ intervallumon, következésképpen invertálható és $t = g^{-1}(x) = \arcsin x$ $\big(x \in (-1,1)\big)$. A második helyettesítési szabályra vonatkozó tétel tehát alkalmazható. Így

$$\int \sqrt{1-x^2}\,dx = \int \sqrt{1-\sin^2 t} \cdot \cos t\,dt =$$
$$= \Big(\cos t > 0 \text{ miatt } \sqrt{1-\sin^2 t} = \cos t\Big) = \int \cos^2 t\,dt = \int \frac{1+\cos 2t}{2}\,dt =$$
$$= \frac{t}{2} + \frac{\sin 2t}{4} + c\,\Big|_{t=\arcsin x} = \frac{\arcsin x}{2} + \frac{\sin(2\arcsin x)}{4} + c.$$

Itt a második tag egyszerűbb alakra hozható. Mivel $\sin 2t = 2\sin t \cdot \cos t$ és $t \in \big(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\big)$, ezért

$$\sin(2\arcsin x) = 2\sin(\arcsin x) \cdot \cos(\arcsin x) =$$
$$= 2x\sqrt{1-(\sin(\arcsin x))^2} = 2x\sqrt{1-x^2}.$$

Végül azt kapjuk, hogy

$$\int \sqrt{1-x^2}\,dx = \frac{1}{2} \cdot \arcsin x + \frac{1}{2} \cdot x\sqrt{1-x^2} + c \quad \big(x \in (-1,1),\ c \in \mathbb{R}\big). \blacksquare$$

Ezt az eredményt parciális integrálással is megkaphatjuk. (Hogyan?)

A gyakorlatokon fogunk **vázolni** olyan további módszereket, amelyek segítségével lényegesen lehet bővíteni a kiszámítható primitív függvények körét.

$\boxed{5.}$ Racionális törtfüggvények primitív függvényei.

$\boxed{6.}$ Racionális törtfüggvények integrálására vonatkozó helyettesítések.

Megjegyzések a primitív függvényekről

1^o Primitív függvény létezésének a folytonosság *elégséges*, a Darboux-tulajdonság pedig *szükséges* feltétele. Jelenleg nem ismeretes olyan egyszerűen megfogalmazható, a függvény belső tulajdonságain alapuló feltétel, amelyik *szükséges és elégséges* feltételt ad arra, hogy az adott függvénynek legyen primitív függvénye.

2^o Sok esetben primitív függvényeket **különböző módszerekkel** is meghatározhatunk, és esetenként kaphatunk (formai szempontból) különböző képleteket is. Az egyenlőségük igazolásához vegyük két különböző alakú primitív függvény különbségét, és lássuk be, hogy ennek a deriváltja a megadott intervallumon azonosan nulla.

3^o Elemi függvények primitív függvényei. Könnyű meggondolni azt, hogy egy elemi függvény deriváltja mindig elemi függvény. Talán első hallásra meglepőnek tűnhet, de *vannak olyan elemi függvények, amelyeknek a primitív függvénye nem elemi függvény.* Úgy is fogalmazhatunk, hogy a deriválás inverz művelete (az integrálás) kivezet az elemi függvények köréből. Ez jelentős különbség a deriválás és az integrálás között. A szóban forgó állítás precíz bizonyítása meglehetősen nehéz. *Joseph Liouville* (1809–1882) francia matematikus volt az első, aki megmutatta, hogy léteznek ilyen elemi függvények. Bebizonyítható, hogy pl. az alábbi (folytonos) elemi függvények primitív függvényei nem elemi függvények:

$$e^{\pm x^2}\ \ (x\in\mathbb{R}),\quad \sin x^2\ \ (x\in\mathbb{R}),\quad \cos x^2\ \ (x\in\mathbb{R}),$$
$$\frac{\sin x}{x}\ \ \big(x\in(0,+\infty)\big),\quad \frac{\cos x}{x}\ \ \big(x\in(0,+\infty)\big),\quad \frac{e^x}{x}\ \ \big(x\in(0,+\infty)\big),$$
$$\frac{1}{\ln x}\ \ \big(x\in(0,+\infty)\big),\quad \sqrt{x^3+1}\ \ \big(x\in(0,+\infty)\big).$$

Ha egy határozott integrál kiszámolásánál ilyen függvények adódnak, akkor a Newton–Leibniz-tétel nem alkalmazható.

4^o Az „ügyeskedésekről”. A gyakorlatokon látni fogjuk, hogy sok integrandustípus esetén vannak olyan általános módszerek, amelyekkel a primitív függvényeket meg tudjuk határozni. Ezek alkalmazásai azonban időnként meglehetősen sok számolást igényelnek. Bizonyos esetekben az integrálandó függvény alkalmas („ügyes”) átalakításával jóval egyszerűbben is célhoz érhetünk. A gyakorlatokon mutatunk majd ilyen példákat is.

5^o Szimbolikus programcsomagok (kompteralgebrai renszerek).
Mathematica (Wolfram Research), Maple (University of Waterloo), Matlab (Symbolic Math Toolbox), Maxima (MIT Project MAC), SageMath.

Ezen általános célú programcsomagok mellett vannak olyan programok, amelyek segítségével a matematika egy adott részterületén felvetődő, már speciális igényeket kielégítő számolások is elvégezhetők (pl. CAYLEY, GAP, LiE, CoCoA, R).

Online elérhető pl. a „WolframAlpha” és a „MathWorld” (matematkai enciklopédia).

A határozott integrál néhány alkalmazása

Ebben a pontban a határozott integrál néhány geometriai alkalmazását mutatjuk be.

Síkidom területe

Emlékeztetünk arra, hogy ha a korlátos $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ függvény Riemann-integrálható az $[a,b]$ intervallumon és $f(x) \geq 0$ $(x \in [a,b])$, akkor az f grafikonja alatti

$$A := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid a \leq x \leq b,\ 0 \leq y \leq f(x)\}$$

síkidom területét így *értelmeztük:*

$$T(A) := \int_a^b f(x)\,dx.$$

Ha $f \leq 0$ az $[a,b]$ intervallumon, akkor a

$$B := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid a \leq x \leq b, f(x) \leq y \leq 0\}$$

síkidom területe

$$T(B) := -\int_a^b f(x)\,dx.$$

2. példa. **A kör területe**. Helyezzük el az $R > 0$ sugarú körlapot a koordináta-rendszerben úgy, hogy az origó legyen a körlap középpontja. Ekkor a körvonal egyenlete $x^2 + y^2 = R^2$. Világos, hogy elég a felső félsíkba eső félkörlap területét meghatározni. A körvonal felső félsíkba eső része az

$$f(x) := \sqrt{R^2 - x^2} \quad \big(x \in [-R, R]\big)$$

függvény grafikonja.

Mivel az f függvény folytonos, ezért Riemann-integrálható az $[a,b]$ intervallumon, következésképpen a szóban forgó félkörlapnak *van* területe, és az egyenlő a következő határozott integrállal:

$$\int_{-R}^{R} \sqrt{R^2 - x^2}\,dx.$$

A Newton–Leibniz-tétel szerint először az integrandus egy primitív függvényét kell meghatározni. Ez létezik, mert a szóban forgó függvény folytonos.

Mivel

$$\int \sqrt{1 - x^2}\,dx = \frac{1}{2} \cdot \arcsin x + \frac{1}{2} \cdot x\sqrt{1 - x^2} + c \quad \big(x \in (-1,1)\big), \quad \text{ezért}$$

$$\int \sqrt{R^2 - x^2}\, dx = R \int \sqrt{1 - \left(\frac{x}{R}\right)^2}\, dx =$$

$$= R \cdot \frac{1}{\frac{1}{R}} \left(\frac{1}{2} \operatorname{arc\,sin} \frac{x}{R} + \frac{1}{2} \cdot \frac{x}{R} \sqrt{1 - \left(\frac{x}{R}\right)^2} \right) + c =$$

$$= \frac{R^2}{2} \cdot \operatorname{arc\,sin} \frac{x}{R} + \frac{R\,x}{2} \sqrt{1 - \left(\frac{x}{R}\right)^2} + c \quad \big(x \in (-R, R)\big).$$

Így a Newton–Leibniz-tétel szerint

$$\int_{-R}^{R} \sqrt{R^2 - x^2}\, dx = \left[\frac{R^2}{2} \cdot \operatorname{arc\,sin} \frac{x}{R} + \frac{R\,x}{2} \sqrt{1 - \left(\frac{x}{R}\right)^2} \right]_{-R}^{R} =$$

$$= \frac{R^2}{2} \cdot \operatorname{arc\,sin} 1 - \frac{R^2}{2} \cdot \operatorname{arc\,sin}(-1) = \frac{R^2}{2} \cdot \frac{\pi}{2} - \frac{R^2}{2} \cdot \left(-\frac{\pi}{2}\right) = \frac{R^2 \pi}{2},$$

vagyis az R sugarú félkörlap területe $R^2\pi/2$. Ezzel megkaptuk az R sugarú körlap területének ismert képletét: $R^2\pi$.

Síkbeli görbe ívhossza

Az ívhossz problémájánál a terület definíciója során megismert gondolatmenetet követjük. A görbét egy felosztáshoz tartozó töröttvonallal közelítjük. A szemléletre hivatkozva azt várjuk, hogy egy „elég finom” beírt töröttvonal annyira megközelíti a görbét, hogy a hosszúsága is közel lesz a görbe hosszához. Mindezekből azt szűrhetjük le, hogy a görbe ívhossza egyenlő a beírt töröttvonal hosszainak a szuprémumával. Ezt a megállapítást fogjuk definícióként elfogadni.

A definíciót csak függvénygrafikonokra fogalmazzuk meg. Legyen valamilyen korlátos és zárt $[a, b]$ intervallum esetén adott az $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ függvény. Emlékeztetünk arra, hogy a

$$\Gamma_f := \big\{ \big(x, f(x)\big) \mid x \in [a, b] \big\}$$

síkbeli halmazt (görbét) neveztük f grafikonjának.

Tetszőleges $\tau = \{a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b\} \in \mathcal{F}[a, b]$ felosztás esetén (alkalmas $n \in \mathbb{N}$ mellett) tekintsük az

$$\big(x_0, f(x_0)\big),\ \big(x_1, f(x_1)\big),\ \ldots,\ \big(x_n, f(x_n)\big)$$

pontokat összekötő szakaszokat; ezt nevezzük az f függvénygrafikon τ felosztáshoz tartozó *beírt töröttvonalának*. Világos, hogy ennek hossza a következő összeg:

$$\ell_f(\tau) = \sum_{i=0}^{n-1} \sqrt{\big(x_{i+1} - x_i\big)^2 + \big(f(x_{i+1}) - f(x_i)\big)^2}.$$

Az előzőek alapján elég természetes a következő definíció.

Definíció. *Legyen $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$ és $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ adott függvény. Azt mondjuk, hogy a*

$$\Gamma_f := \big\{\big(x, f(x)\big) \mid x \in [a, b]\big\}$$

függvénygrafikon ***rektifikálható*** *(vagy más szóval* ***van ívhossza****), ha*

$$\ell\big(\Gamma_f\big) := \sup\big\{\ell_f(\tau) \mid \tau \in \mathcal{F}[a, b]\big\} < +\infty.$$

Ezt a valós számot a szóban forgó függvénygrafikon ***ívhosszának*** *nevezzük.*

A terület problémájához hasonlóan is felvetjük a következő kérdéseket: 1^o Milyen Γ_f görbének van ívhossza? 2^o Hogyan lehet ℓ_f-et kiszámolni?

A válaszok motiválásához az egyszerűség végett tegyük fel azt, hogy az f *függvény folytonosan deriválható* az $[a, b]$ intervallumon (röviden $f \in C^1[a, b]$), és tekintsük az $\ell_f(\tau)$ összeg i-edik tagját:

$$\ell_i = \sqrt{\big(x_{i+1} - x_i\big)^2 + \big(f(x_{i+1}) - f(x_i)\big)^2} = \\ = (x_{i+1} - x_i)\sqrt{1 + \left(\frac{f(x_{i+1}) - f(x_i)}{x_{i+1} - x_i}\right)^2}.$$

A Lagrange-féle középértéktétel szerint van olyan $\xi_i \in (x_i, x_{i+1})$ pont, amelyre $f(x_{i+1}) - f(x_i) = f'(\xi_i)(x_{i+1} - x_i)$ teljesül, ezért

$$\ell_i = (x_{i+1} - x_i)\sqrt{1 + [f'(\xi_i)]^2}.$$

Így az f függvény grafikonjához közel eső töröttvonal hossza

$$\sum_{i=0}^{n-1} \ell_i = \sum_{i=0}^{n-1} \sqrt{1 + [f'(\xi_i)]^2} \cdot (x_{i+1} - x_i).$$

Vegyük észre, hogy a jobb oldal a $\varphi(x) := \sqrt{1 + [f'(x)]^2}$ $(x \in [a, b])$ függvény egy integrálközelítő összege. Várható tehát az, hogy a szóban forgó görbének van ívhossza, és az egyenlő az $\int_a^b \sqrt{1 + [f'(x)]^2}\, dx$ határozott integrállal.

A részletek mellőzésével itt csak azt jegyezzük meg, az imént vázolt gondolatmenet precíz formában is „végigvihető”, ezért igaz a következő állítás.

Tétel. *Legyen $a, b \in \mathbb{R}$ $a < b$ és tegyük fel, hogy $f \in C^1[a, b]$. Ekkor az f függvény*

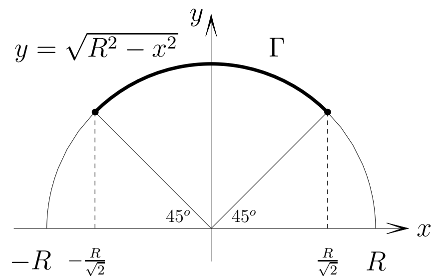
$$\Gamma_f := \big\{\big(x, f(x)\big) \mid x \in [a, b]\big\}$$

grafikonjának van ívhossza, és az egyenlő az

$$\ell\big(\Gamma_f\big) = \int_a^b \sqrt{1 + \big[f'(x)\big]^2}\, dx$$

határozott integrállal.

3. példa. **A kör kerülete.** Az alábbi ábrán jelzett negyedkör ívhosszát fogjuk kiszámolni. Legyen $f(x) := \sqrt{R^2 - x^2}\ \big(|x| \le R/\sqrt{2}\big)$.



Világos, hogy $f \in C^1[-R/\sqrt{2}, R/\sqrt{2}]$ és

$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{R^2 - x^2}} \cdot (-2x) \quad \big(|x| < R\big), \quad \text{így}$$

$$\sqrt{1 + \big[f'(x)\big]^2} = \sqrt{1 + \frac{x^2}{R^2 - x^2}} = \frac{R}{\sqrt{R^2 - x^2}} = \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{x}{R}\right)^2}}.$$

Az előző tétel szerint a Γ görbének van ívhossza és

$$\ell(\Gamma) = \int_{-R/\sqrt{2}}^{R/\sqrt{2}} \sqrt{1 + \big[f'(x)\big]^2}\, dx = \int_{-R/\sqrt{2}}^{R/\sqrt{2}} \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{x}{R}\right)^2}} =$$

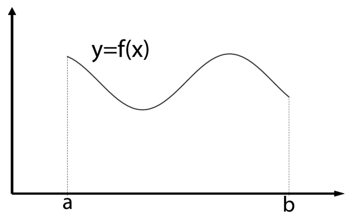
$$= \Big[R \arcsin \frac{x}{R}\Big]_{-R/\sqrt{2}}^{R/\sqrt{2}} = R\left(\arcsin \frac{1}{\sqrt{2}} - \arcsin\Big(-\frac{1}{\sqrt{2}}\Big)\right) = R\left(\frac{\pi}{4} - \Big(-\frac{\pi}{4}\Big)\right) = R \cdot \frac{\pi}{2}.$$

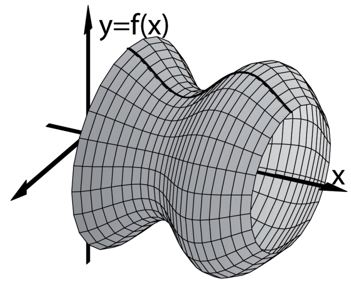
Az R sugarú kör kerülete tehát $4 \cdot R \cdot \dfrac{\pi}{2} = 2R\pi$. ■

Megjegyzés. A középiskolában a π számot az egységsugarú kör kerületének a felével értelmeztük. A 4. előadáson a (hatványsor összegfüggvényeként bevezetett) cos függvény első pozitív zérushelyének a kétszeresével definiáltuk a π számot. A fentiek alapján a két definíció ekvivalens. Ebből az is következik, hogy a középiskolában bevezetett sin, illetve cos függvény valóban egyenlő az Analízis I. tantárgyban definiált sin, illetve cos függvénnyel.

Forgástest térfogata

A Riemann-integrál eszköztárát a térfogat problémájának a vizsgálatánál is felhasználhatjuk. A továbbiakban csak **forgástesteket** (vagyis olyan térrészt amelyet egy függvénygrafikon alatti tartomány x tengely körüli megforgatásával kapunk) fogunk csak vizsgálni. A terület és az ívhossz problémájánál alkalmazott gondolatmenetet követjük: a forgástestet beírt és körülírt hengerekkel (ezek térfogatát ismertnek tekintjük) közelítjük.





Tekintsünk egy nemnegatív f függvényt a korlátos és zárt $[a,b]$ intervallumon. Ekkor az

$$A_f := \big\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid a \le x \le b,\ y^2+z^2 \le f^2(x)\ (y,z \in \mathbb{R})\big\}$$

halmazt az f függvény által meghatározott **forgástestnek** nevezzük.

Ha $n \in \mathbb{N}$ és $\tau = \big\{a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b\big\}$ az $[a,b]$ intervallum egy felosztása, akkor legyen

$$m_i := \inf_{x \in [x_i, x_{i+1}]} f(x) \quad \text{és} \quad M_i := \sup_{x \in [x_i, x_{i+1}]} f(x) \qquad (i = 0, 1, \ldots, n-1).$$

A

$$h_i = \big\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x_i \le x \le x_{i+1},\ y^2+z^2 \le m_i^2\ (y,z \in \mathbb{R})\big\}$$

beírt hengerekre, illetve a

$$H_i = \big\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x_i \le x \le x_{i+1},\ y^2+z^2 \le M_i^2\ (y,z \in \mathbb{R})\big\}$$

körülírt hengerekre nyilvánvalóan fennáll, hogy

$$\bigcup_{i=0}^{n-1} h_i \subset A_f \subset \bigcup_{i=0}^{n-1} H_i.$$

Jelöljük $V(B)$-vel a $B \subset \mathbb{R}^3$ test térfogatát. Az r alapsugarú és m magasságú henger térfogata $r^2\pi \cdot m$, ezért

$$V\left(\bigcup_{i=0}^{n-1} h_i\right) = \pi \sum_{i=0}^{n-1} m_i^2 \cdot (x_{i+1} - x_i) = \pi s\big(f^2, \tau\big),$$

illetve

$$V\left(\bigcup_{i=0}^{n-1} H_i\right) = \pi \sum_{i=0}^{n-1} M_i^2 \cdot (x_{i+1} - x_i) = \pi S\big(f^2, \tau\big).$$

Ha tehát az A_f forgástestnek is akarunk a $V(A_f)$-fel jelölt térfogatot tulajdonítani, akkor fenn kell állnia az alábbi egyenlőtlenségeknek:

$$\pi \cdot s\big(f^2, \tau\big) \le V(A_f) \le \pi \cdot S\big(f^2, \tau\big) \quad (\tau \in \mathcal{F}[a,b])$$

Abban az esetben, ha f Riemann-integrálható az $[a,b]$ intervallumon, akkor $f^2 \in R[a,b]$ is teljesül, azaz

$$I_*(f^2) = \sup_{\tau \in \mathcal{F}[a,b]} s\big(f^2, \tau\big) = \inf_{\tau \in \mathcal{F}[a,b]} S\big(f^2, \tau\big) = \int_a^b f^2.$$

Az előzőek alapján kézenfekvő az alábbi értelmezés.

Definíció. *Legyen $0 \leq f \in R[a,b]$. Ekkor f grafikonjának az x tengely körüli megforgatásával adódó*

$$A_f := \big\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid a \leq x \leq b,\ y^2+z^2 \leq f^2(x)\ (y,z \in \mathbb{R})\big\}$$

forgástestnek van térfogata, és az egyenlő a

$$\pi \int_a^b f^2(x)\,dx$$

intergrállal.

4. példa. **A gömb térfogata.** Tekintsük valamilyen $R > 0$ mellett az

$$f(x) := \sqrt{R^2-x^2} \quad \big(x \in [-R,R]\big)$$

függvényt. Mivel f folytonos, ezért Riemann-integrálható $[-R,R]$-en. Az A_f forgástest egy R sugarú gömb. A fenti definíció szerint ennek van térfogata, és a Newton–Leibniz-tétel felhasználásával a térfogata

$$\pi \int_a^b f^2(x)\,dx = \pi \int_{-R}^{R} \big(R^2-x^2\big)\,dx = \pi \left[R^2x - \frac{x^3}{3}\right]_{-R}^{R} =$$

$$= \pi \left(\left(R^2 \cdot R - \frac{R^3}{3}\right) - \left(R^2 \cdot (-R) - \frac{(-R)^3}{3}\right)\right) = \pi \left(\frac{2R^3}{3} - \left(-\frac{2R^3}{3}\right)\right) = \frac{4R^3\pi}{3}.$$

Az R sugarú gömb térfogata tehát $4R^3\pi/3$, és ez megegyezik a korábbi tanulmányokban gyakran használt képlettel.

Forgástest felszíne

Felületek felszínének a problémája (még forgásfelület esetén is) jóval bonyolultabb, mint a terület vagy a térfogat problémája. A továbbiakban azonban az alkalmazások szempontjából jól használható eredményt fogunk ismertetni.

Legyen f a korlátos és zárt $[a,b]$ intervallumon értelmezett nemnegatív függvény. Jelöljük $\mathcal{A}_f$-fel f grafikonjának az x tengely körüli megfogatásával kapott halmazt:

$$\mathcal{A}_f := \big\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid a \leq x \leq b,\ y^2+z^2 = f^2(x)\ (y,z \in \mathbb{R})\big\},$$

amit az f függvény által meghatározott **forgásfelületnek** nevezünk.

Kézenfekvő az a feltételezés, hogy $\mathcal{A}_f$ felszínét megközelítik az f grafikonjába beírt töröttvonalak megforgatásával kapott halmazok (ezek *csonkakúp palástok* egyesítései) felszínei.

Tekintsük az $[a,b]$ intervallum egy τ felosztását, és jelöljük Φ_τ-val a szóban forgó csonkakúp palástok felszíneinek (ezt ismertnek tekintjük) az összegét. Mivel f grafikonjának ívhossza (ha létezik) egyenlő kell hogy legyen a beírt töröttvonalak ívhosszai halmazának a szuprémumával, ezért első gondolatunk az lehetne, hogy az $\mathcal{A}_f$ halmaz felszíne egyenlő kell hogy legyen a Φ_τ értékek ($\tau \in \mathcal{F}[a,b]$) szuprémumával. Ez azonban már egészen egyszerű függvények esetében sem igaz. Tekintsük például az $|x|$ függvényt a $[-1,1]$ intervallumon. Ekkor $\mathcal{A}_f$ két egybevágó kúppalást egyesítése, ezért a felszíne $2\cdot(2\,\pi\cdot\sqrt{2}/2) = 2\sqrt{2}\,\pi$. Ha azonban a τ felosztás csupán a -1 és 1 osztópontokból áll, akkor $\Phi_\tau = 2\,\pi\cdot 2 = 4\,\pi$, ami nagyobb, mint $\mathcal{A}_f$ felszíne.

Ez a példa a helyes definíciót is sugallja. A technikai nehézségeket elkerülendő azt az egyszerűbb utat választjuk, hogy az imént jelzett okoskodás végeredményeképpen kapott integrállal definiáljuk a felszínt.

Definíció. *Legyen $a,b\in\mathbb{R}$, $a<b$ és tegyük fel, hogy $0\le f\in C^1[a,b]$. Ekkor f grafikonjának az x-tengely körüli forgatásával adódó*

$$\mathcal{A}_f = \big\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \mid a\le x\le b,\quad y^2+z^2=f^2(x)\ \ (y,z\in\mathbb{R})\big\}$$

forgásfelületnek van felszíne, és értéke

$$2\,\pi\int_a^b f(x)\cdot\sqrt{1+\big[f'(x)\big]^2}\,dx.$$

5. példa. **A gömb felszíne.** Az origó középpontú és R sugarú gömbfelületet az

$$f(x)=\sqrt{R^2-x^2}\quad \big(x\in[-R,R]\big)$$

függvény grafikonjának az x tengely körüli megforgatásával kapjuk. Legyen $0<r<R$ és tekintsük az

$$f_r(x)=\sqrt{R^2-x^2}\quad \big(x\in[-r,r]\big).$$

Ekkor $f_r\in C^1[-r,r]$ és

$$f_r'(x) = -\frac{x}{\sqrt{R^2-x^2}}\quad \big(x\in[-r,r]\big),$$

továbbá

$$1+\big[f'(x)\big]^2 = 1+\frac{x^2}{R^2-x^2} = \frac{R^2}{R^2-x^2}\quad \big(x\in[-r,r]\big).$$

Ezért az f_r által a fentiekben meghatározott és $\mathcal{A}_r$-rel jelölt forgásfelület felszíne

$$F_r := 2\,\pi\int_{-r}^{r}\sqrt{R^2-x^2}\cdot\sqrt{\frac{R^2}{R^2-x^2}}\,dx = 2\,\pi\,R\int_{-r}^{r}1\,dx = 4\,R\,r\,\pi.$$

A „szemlélet alapján” könnyen elfogadható (az egzakt meggondolásokat nem részletezve), hogy az $r\to R$ határátmenettel $\mathcal{A}_r\to\mathcal{A}_R$, ahol $\mathcal{A}_R$ az R sugarú gömb felszíne. Ugyanakkor

$$\lim_{r\to R}F_r = \lim_{r\to R}4\,R\,r\,\pi = 4\,R^2\,\pi,$$

ami valóban nem más, mint az R sugarú gömb felszíne.

Improprius integrálok

A Riemann-integrál értelmezésénél a kiindulópontunk az volt, hogy csak olyan f függvényeket tekintettünk, amelyekre a következő két feltétel teljesül:

(a) f értelmezési tartománya egy **korlátos és zárt** $[a, b]$ intervallum,

(b) az f függvény **korlátos** $[a, b]$-n.

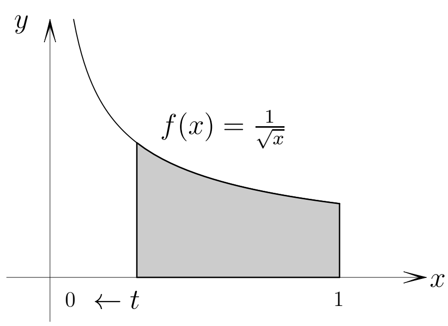
Röviden ezt úgy fejeztük ki, hogy $f \in K[a, b]$. Az eddigiekben bizonyos $K[a, b]$-beli f függvényekhez hozzárendeltünk egy, az $\int_a^b f$ szimbólummal jelölt valós számot, amit az f függvény $[a, b]$-vett *Riemann-integráljának* vagy *határozott integráljának* neveztünk.

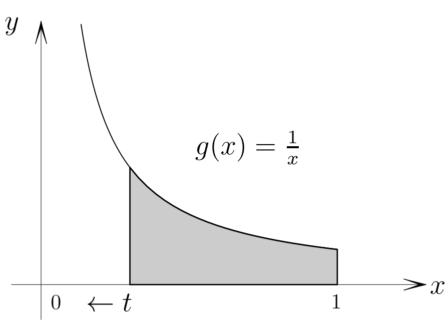
Az (a) és (b) megszorítások néha túl szigorúnak bizonyulnak. Felvethető tehát az a **probléma**, hogy ezeket a feltételeket nem kielégítő függvényekre vajon értelmezhető-e az integrál fogalma. Egyfajta kiterjesztést teszik lehetővé az ún. **improprius integrálok**. A következő példán „érzékeltetjük", hogy ezt „elég természetes" módon meg tudjuk tenni.

Példa. Legyen

$$f(x) := \frac{1}{\sqrt{x}} \quad \big(x \in (0, 1]\big) \qquad \text{és} \qquad g(x) := \frac{1}{x} \quad \big(x \in (0, 1]\big)$$

Tekintsük a következő ábrákat:





Ekkor

$$\lim_{t \to 0+0} \int_t^1 \frac{1}{\sqrt{x}} = \lim_{t \to 0+0} \big(2 - 2\sqrt{t}\big) = 2, \qquad \lim_{t \to 0+0} \int_t^1 \frac{1}{x} = \lim_{t \to 0+0} \big(\ln 1 - \ln t\big) = +\infty.$$

Azt fogjuk mondnai, hogy az $\int_0^1 f$ improprius integrál **konvergens**, az $\int_0^1 g$ pedig **divergens**.

Megjegyzés. Így bizonyos nem korátos síkidomok területét is értelmezhetjük. $\square$

Az egyik legfontosabb eredmény az improprius integrálok körében az, hogy

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2}\, dx = \sqrt{\pi},$$

ami a valószínűségszámításban játszik fontos szerepet. Egy későbbi előadáson megmutatjuk ennek az állításnak a bizonyítását.

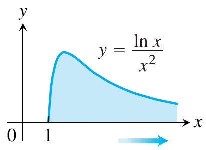
Az (a) és (b) feltételek sokféleképpen nem teljesülhetnek. A következő táblázatban néhány „tipikus” esetet mutatunk be.

Types of Improper Integrals Discussed in This Section

INFINITE LIMITS OF INTEGRATION: TYPE I

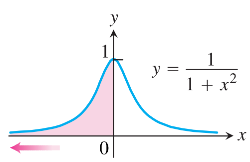
1. Upper limit

$$\int_1^{\infty} \frac{\ln x}{x^2}\,dx = \lim_{b\to\infty}\int_1^{b} \frac{\ln x}{x^2}\,dx$$



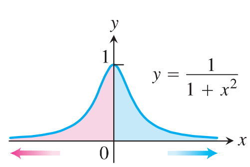
2. Lower limit

$$\int_{-\infty}^{0} \frac{dx}{1+x^2} = \lim_{a\to-\infty}\int_a^{0} \frac{dx}{1+x^2}$$



3. Both limits

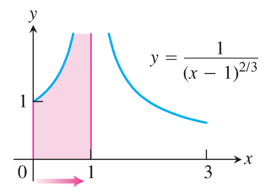
$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{1+x^2} = \lim_{b\to-\infty}\int_b^{0} \frac{dx}{1+x^2} + \lim_{c\to\infty}\int_0^{c} \frac{dx}{1+x^2}$$



INTEGRAND BECOMES INFINITE: TYPE II

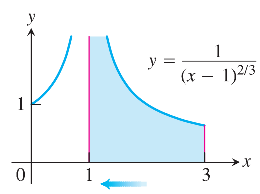
4. Upper endpoint

$$\int_0^{1} \frac{dx}{(x-1)^{2/3}} = \lim_{b\to1^-}\int_0^{b} \frac{dx}{(x-1)^{2/3}}$$



5. Lower endpoint

$$\int_1^{3} \frac{dx}{(x-1)^{2/3}} = \lim_{d\to1^+}\int_d^{3} \frac{dx}{(x-1)^{2/3}}$$



6. Interior point

$$\int_0^{3} \frac{dx}{(x-1)^{2/3}} = \int_0^{1} \frac{dx}{(x-1)^{2/3}} + \int_1^{3} \frac{dx}{(x-1)^{2/3}}$$