Név: ...., *NEPTUN-kód* ....

Csoport, gyak.vez.: ....

Pontszám: ....

Programtervező informatikus szak I. évfolyam
Matematikai alapok 1. zárthelyi
2019. október 18.

Minden feladathoz indoklást, levezetést kérünk.

1. *(6 pont)* Igazoljuk a következő azonosságot (a, b olyan valós számokat jelöl, melyekkel egyik nevező sem 0):

$$\left(\frac{a+b}{ab-b^2}-\frac{2a+3b}{a^2-b^2}\right)\cdot\frac{a^4b-a^2b^3}{a^4-4b^4}=\frac{a^2}{a^2+2b^2}$$

2. *(5 pont)* Az alábbi P polinomnak a -2 gyöke. Emeljük ki P-ből a -2-höz tartozó gyöktényezőt!

$$P(x)=2x^4-3x^3-11x^2+2x-8$$

3. *(9 pont)* Oldjuk meg az alábbi egyenletet a valós számok halmazán:

$$2\cdot\sqrt{x-1}-\sqrt{2-x}=\sqrt{2x-1}$$

4. *(7 pont)* Oldjuk meg az alábbi egyenletet a valós számok halmazán:

$$\cos^4 x-\sin^4 x=3\cdot\sin x+2$$

5. *(8 pont)* Oldjuk meg az alábbi egyenlőtlenséget a valós számok halmazán:

$$\log_2\left(25^{\log_5\sqrt{5}}+3\cdot\log_{1/2}(x-3)\right)>3$$

6. *(8 pont)*

   a) Egy megfelelő $N\in\mathbb{N}$ szám meghatározásával igazoljuk az alábbi állítást:

$$\exists\, N\in\mathbb{N}\quad \forall\, n\in\mathbb{N},\, n\geq N:\quad \frac{3n^5-2n^4+n^3-7n^2+10n+1}{4n^4-2n^3+n^2-n+1}>1000.$$

   b) Írjuk fel "pozitív" kijelentés formájában az állítás tagadását.

7. *(7 pont)* Igazoljuk teljes indukcióval:

$$\forall\, 1\leq n\in\mathbb{N}\ :\ \sum_{k=1}^{n}\frac{k^2}{(2k-1)(2k+1)}=\frac{n\cdot(n+1)}{2\cdot(2n+1)}$$