4. gyakorlat

Differenciálszámítás 2. (Függvénytulajdonságok kapcsolata a deriválttal)

Monotonitás

Emlékeztető. A monotonitás és a derivált kapcsolatára a következő állításokat ismertük meg:

Tétel. *Legyen $(a,b) \subset \mathbb{R}$ nyílt intervallum. Tegyük fel, hogy $f \in D(a,b)$. Ekkor*

1^o $f \nearrow$ *[illetve* $\searrow$ *]* (a,b)*-n* $\iff f' \geq 0$ *[illetve* $f' \leq 0$ *]* (a,b)*-n;*

2^o *ha* $f' > 0$ *[illetve* $f' < 0$ *]* (a,b)*-n* $\Longrightarrow f \uparrow$ *[illetve* $\downarrow$ *]* (a,b)*-n.*

Fontos megjegyezni, hogy a tételben **lényeges** feltétel, hogy **intervallumon értelmezett** a függvény. Például, ha $f(x) := 1/x$ $\big(x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}\big)$, akkor $f'(x) = -\frac{1}{x^2} < 0$ $\big(\forall x \in \mathcal{D}_f\big)$, de az f függvény nem szigorúan csökkenő a $\mathcal{D}_f = \mathbb{R} \setminus \{0\}$ halmazon, ami *nem intervallum.* $\square$

1. feladat. *Határozzuk meg azokat a legbővebb intervallumokat, amelyeken az f függvény monoton, ha*

(a) $f(x) := 3x^4 - 4x^3 - 12x^2 + 2 \quad (x \in \mathbb{R}),$

(b) $f(x) := \dfrac{x}{x^2 - 10x + 16} \quad (x \in \mathbb{R} \setminus \{2, 8\}).$

Megoldás. (a) Az elemi függvények deriváltjai, valamint a deriválási szabályok alapján azt kapjuk, hogy $f \in D(\mathbb{R})$ és

$$f'(x) = 12\,x^3 - 12\,x^2 - 24\,x = 12\,x\,(x^2 - x - 2) = 12\,x\,(x-2)\,(x+1) \quad (x \in \mathbb{R}).$$

A monotonitás és a derivált kapcsolatára vonatkozó tételt alkalmazzuk, tehát $f'(x)$ előjelét kell meghatároznunk. Világos, hogy

$$f'(x) \gtreqless 0 \qquad \iff \qquad x\,(x-2)\,(x+1) \gtreqless 0.$$

Ennek a háromtényezős szorzatnak az előjele a $(-\infty, -1)$, a $(-1, 0)$, a $(0, 2)$, illetve a $(2, +\infty)$ intervallumokon könnyen áttekinthető:

- ha $x \in (-\infty, -1) \implies \big((-)\cdot(-)\cdot(-) = -\big) \implies f'(x) < 0 \implies$
  $\implies$ $f \downarrow$ a $(-\infty, -1)$ intervallumon,

- ha $x \in (-1, 0) \implies \big((-)\cdot(-)\cdot(+) = +\big) \implies f'(x) > 0 \implies$
  $\implies$ $f \uparrow$ a $(-1, 0)$ intervallumon,

- ha $x \in (0, 2) \implies \big((+)\cdot(-)\cdot(+) = -\big) \implies f'(x) < 0 \implies$
  $\implies$ $f \downarrow$ a $(0, 2)$ intervallumon,

- ha $x \in (2, +\infty) \implies \big((+)\cdot(+)\cdot(+) = +\big) \implies f'(x) > 0 \implies$
  $\implies$ $f \uparrow$ a $(2, +\infty)$ intervallumon

(b) Mivel $x^2-10x+16=(x-2)(x-8)$, ezért a tört valóban értelmezhető a megadott halmazon.

Az elemi függvények deriváltjai, valamint a deriválási szabályok alapján azt kapjuk, hogy $f \in D(\mathbb{R} \setminus \{2,8\})$ és

$$f'(x)=\frac{1\cdot(x^2-10x+16)-x(2x-10)}{\big(x^2-10x+16\big)^2}=\frac{16-x^2}{\big(x^2-10x+16\big)^2} \qquad (x \in \mathbb{R}\setminus\{2,8\}).$$

A monotonitás és a derivált kapcsolatára vonatkozó tételt alkalmazzuk, tehát $f'(x)$ előjelét kell meghatároznunk. Világos, hogy

$$f'(x) \gtreqless 0 \qquad \Longleftrightarrow \qquad 16-x^2=(4-x)\,(4+x) \gtreqless 0 \ \text{ és } \ x \in \mathbb{R}\setminus\{2,8\}.$$

A monotonitási intervallumok meghatározásánál vegyük figyelembe azt, hogy a függvény a 2 és a 8 pontokban nincs értelmezve, ezért $f'(x)$ előjelét most a $(-\infty,-4)$, a $(-4,2)$, a $(2,4)$, a $(4,8)$, továbbá a $(8,+\infty)$ intervallumokon fogjuk megvizsgálni:

- ha $x \in (-\infty,-4) \implies f'(x)<0 \implies f \downarrow$ a $(-\infty,-4)$ intervallumon,
- ha $x \in (-4,2) \implies f'(x)>0 \implies f \uparrow$ a $(-4,2)$ intervallumon,
- ha $x \in (2,4) \implies f'(x)>0 \implies f \uparrow$ a $(2,4)$ intervallumon,
- ha $x \in (4,8) \implies f'(x)<0 \implies f \downarrow$ a $(4,8)$ intervallumon,
- ha $x \in (8,+\infty) \implies f'(x)<0 \implies f \downarrow$ a $(8,\infty)$ intervallumon. ■

Szélsőértékek

Emlékeztető. **A lokális szélsőértékek** definícióit illetően az előadásra utalunk. Például: *azt mondjuk, hogy az f függvénynek az $a \in \operatorname{int}\mathcal{D}_f$ pontban* ***lokális maximuma van****, ha $\exists\, K(a) \subset \mathcal{D}_f$, hogy $\forall\, x \in K(a) \subset \mathcal{D}_f$ esetén $f(x) \le f(a)$. Ekkor $a \in \operatorname{int}\mathcal{D}_f$ az f* ***lokális maximumhelye****, az $f(a)$ függvényérték pedig a függvény* ***lokális maximuma****.*

A lokális szélsőértékek meghatározásához az alábbi eredményeket ismertük meg:

Tétel. (Elsőrendű szükséges feltétel.) *Tegyük fel, hogy az $f \in \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvénynek az $a \in \operatorname{int}\mathcal{D}_f$ pontban lokális szélsőértéke van és $f \in D\{a\}$. Ekkor $f'(a)=0$.*

Jegyezzük meg, hogy az $f'(a)=0$ csak **szükséges**, de **nem elégséges** feltétele annak, hogy az f függvénynek a-ban lokális szélsőértéke legyen (tekintsük például az $f(x):=x^3$ $(x \in \mathbb{R})$ függvényt és az $a=0$ pontot).

A tétel azt állítja, hogy lokális szélsőértékhelyek csak olyan a pontokban lehetnek, ahol $f'(a)=0$. Ezek az f függvény **stacionárius pontjai**. Fontos feladat tehát annak eldöntése, hogy egy stacionárius pont vajon lokális szélsőértékhely-e. A következő **elégséges** feltételeket ismertük meg:

Tétel. (Elsőrendű elégséges feltétel.) *Tegyük fel, hogy $f \in D(a,b)$ és egy $c \in (a,b)$ pontban $f'(c)=0$, továbbá az f' deriváltfüggvény előjelet vált c-ben. Ekkor c egy lokális szélsőértékhely.*

Ha f'-nek c-ben $(-,+)$, illetve $(+,-)$ előjelváltása van, akkor c az f függvény lokális minimumhelye, illetve lokális maximumhelye.

Tétel. (Másodrendű elégséges feltétel.) *Tegyük fel, hogy egy $c \in \operatorname{int}\mathcal{D}_f$ pontban $f \in D^2\{c\}$, $f'(c)=0$ és $f''(c) \ne 0$. Ekkor c egy lokális szélsőértékhely.*

Ha $f''(c)>0$, illetve $f''(c)<0$, akkor c az f függvény lokális minimumhelye, illetve lokális maximumhelye. □

2. feladat. *Számítsuk ki az*

$$f(x) := x^5 - 5x^4 + 5x^3 + 1 \quad (x \in \mathbb{R})$$

függvény lokális szélsőértékhelyeit és lokális szélsőértékeit.

Megoldás. Az f polinomfüggvény, ezért $f \in D(\mathbb{R})$.

Elsőrendű szükséges feltétel: Mivel

$$\begin{aligned} f'(x) &= \left(x^5 - 5x^4 + 5x^3 + 1\right)' = 5x^4 - 20x^3 + 15x^2 = 5x^2\left(x^2 - 4x + 3\right) = \\ &= 5x^2(x-3)(x-1) \quad (x \in \mathbb{R}), \end{aligned}$$

ezért f stacionárius pontjai, vagyis a lehetséges szélsőértékhelyek: $x_1 = 0$, $x_2 = 1$, $x_3 = 3$.

Elégséges feltétel:

Legyen $x_2 = 1$. Mivel $5x^2(x-3) < 0$, ha $x \in K_{1/2}(1)$ és $x - 1$ az 1 pontban negatívból pozitívba megy át, ezért f'-nek 1-ben $(+,-)$ jelváltása van. Az elsőrendű elégséges feltétel szerint az f függvénynek az $x_2 = 1$ pont lokális maximumhelye. A lokális maximum $f(1) = 2$.

Legyen $x_3 = 3$. Mivel $5x^2(x-1) > 0$, ha $x \in K_{1/2}(3)$ és $x - 3$ a 3 pontban negatívból pozitívba megy át, ezért f'-nek 3-ban $(-,+)$ jelváltása van. Az elsőrendű elégséges feltétel szerint az f függvénynek az $x_3 = 3$ pont lokális minimumhelye. A lokális minimum $f(1) = -26$.

Legyen $x_1 = 0$. Mivel $f'(x) > 0$, ha $0 < x < 1/2$, vagy $-1/2 < x < 0$, ezért az f függvény $\uparrow$ a $(-1/2, 1/2)$ intervallumon. Így a 0 pont nem lokális szélsőértékhely. $\blacksquare$

Emlékeztető. **Az abszolút szélsőértékek** definícióit illetően az előadásra utalunk. Például: *azt mondjuk, hogy az $f \in \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvénynek **van abszolút maximuma**, ha van olyan $\alpha \in \mathcal{D}_f$, hogy minden $x \in \mathcal{D}_f$ pontban $f(x) \le f(\alpha)$. Ekkor α az f-nek **abszolút maximumhelye**, az $f(\alpha)$ pedig f **abszolút maximuma**.*

Az abszolút szélsőértékek **létezésére** a következő alapvető eredményt ismertük meg.

Weierstrass-tétel. *Korlátos és zárt $[a,b] \subset \mathbb{R}$ intervallumon folytonos f függvénynek léteznek abszolút szélsőértékei, azaz $\exists\, \alpha, \beta \in [a,b]$, hogy $f(\beta) \le f(x) \le f(\alpha)$ $\big(\forall\, x \in [a,b]\big)$.*

Abszolút szélsőértékhelyek keresése. Ha f folytonos egy korlátos és zárt $[a,b]$ intervallumban, akkor a Weierstrass-tétel szerint f-nek van legnagyobb és legkisebb értéke. Ha f ezek valamelyikét egy c pontban veszi fel, akkor vagy $c = a$, vagy $c = b$, vagy pedig $c \in (a,b)$. Ez utóbbi esetben lokális szélsőértékről van szó. Ha feltesszük még azt is, hogy $f \in D(a,b)$, akkor $f'(c) = 0$. Ha tehát megkeressük az összes olyan $c \in (a,b)$ pontot, amelyben f' eltűnik, akkor biztos, hogy az abszolút szélsőértékhelyek ezek közül, valamint az a és a b végpontok közül kerülnek ki. Például az abszolút maximumhelyet úgy határozzuk meg, hogy kiszámítjuk f értékeit ezekben a pontokban (nem feledkezve meg az a és b végpontokról sem), és kiválasztjuk azokat, amelyekben f értéke a legnagyobb. $\square$

3. feladat. *Határozzuk meg az*

$$f(x) := \frac{x}{x^2 + 1} \quad \left(x \in \left[-\tfrac{1}{2}, 2\right]\right)$$

függvény abszolút szélsőértékhelyeit és abszolút szélsőértékeit.

Megoldás. Mivel $f \in C[-1/2, 2]$, ezért *Weierstrass tétele* szerint f-nek léteznek abszolút szélsőértékei.

A lokális szélsőértékhelyek meghatározása . A $g(x) := \dfrac{x}{x^2+1}$ $(x \in \mathbb{R})$ függvény deriválható, és

$$g'(x) = \left(\frac{x}{x^2+1}\right)' = \frac{1 \cdot \left(x^2+1\right) - x \cdot 2\,x}{\left(x^2+1\right)^2} = \frac{1-x^2}{\left(x^2+1\right)^2} \quad (x \in \mathbb{R}),$$

így

$$g'(x) = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad 1 - x^2 = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad x_1 = 1 \ \text{ vagy } \ x_2 = -1.$$

A g függvény stacionárius pontjai, vagyis a lehetséges lokális szélsőértékhelyei $x_1 = 1$ vagy $x_2 = -1$. Mivel $-1 \notin [-1/2, 2]$, ezért csak az x_1 pontot tekintjük. A g' függvénynek 1-ben $(+, -)$ előjelváltása van, ezért $x_1 = 1$ a g, következésképpen az f függvénynek is lokális maximumhelye.

A függvényértékek összehasonlítása. Mivel

$$f(1) = \frac{1}{2}, \quad f\left(-\frac{1}{2}\right) = -\frac{2}{5}, \quad f(2) = \frac{2}{5},$$

ezért f abszolút minimumhelye $-1/2$, abszolút maximumhelye pedig 1 és $-2/5$ az abszolút minimum, $1/2$ pedig az abszolút maximum. ■

Konvex és konkáv függvények

Emlékeztető. A definíciókat illetően az előadásra utalunk. Itt csak azt emeljük ki, hogy a konvexitás-konkávitás a második derivált előjelével jellemezhető.

Tétel. *Tegyük fel, hogy $f \in D^2(a, b)$. Ekkor*

1^o *f konvex [illetve konkáv] (a, b)-n $\Longleftrightarrow$ $f''(x) \geq 0$ [illetve $f''(x) \leq 0$] $\big(\forall\, x \in (a, b)\big)$,*

2^o *ha $f''(x) > 0$ [illetve $f''(x) < 0$] $\big(\forall\, x \in (a, b)\big) \Longrightarrow f$ szigorúan konvex [illetve szigorúan konkáv] (a, b)-n.*

Inflexiós pont: *Tegyük fel, hogy $f \in D(a, b)$. Azt mondjuk, hogy $c \in (a, b)$ az f függvénynek **inflexiós pontja**, ha $\exists\, \delta > 0$, hogy f konvex $(c - \delta, c]$-n és konkáv $[c, c + \delta)$-n, vagy fordítva.* □

4. feladat. *Vizsgáljuk meg konvexitás és konkávitás szempontjából a következő függvényeket:*

(a) exp,
(b) ln,
(c) $f(x) := x^\alpha$ $\big(x \in (0, +\infty)\big)$, $\alpha \in \mathbb{R}$.

Megoldás. A konvexitás-konkávitás jellemzésére vonatkozó tételt alkalmazzuk. Mindegyik függvény kétszer deiválható.

(a) Mivel

$$\big(\exp x\big)'' = \big((\exp x)'\big)' = (\exp x)' = \exp x > 0 \quad \big(\forall\, x \in \mathbb{R}\big),$$

ezért az exp függvény szigorúan konvex $\mathbb{R}$-en.

(b) Mivel

$$\big(\ln x\big)'' = \big((\ln x)'\big)' = \left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2} < 0 \quad \big(\forall\, x \in (0,+\infty\big),$$

ezért az ln függvény szigorúan konkáv a $(0,+\infty)$ intervallumon.

(c) Tetszőleges $\alpha \in \mathbb{R}$ paraméter esetén

$$f''(x) = \big(x^\alpha\big)'' = \Big(\big(x^\alpha\big)'\Big)' = \big(\alpha\, x^{\alpha-1}\big)' = \alpha\,(\alpha-1)x^{\alpha-2} \quad \big(x \in (0,+\infty)\big).$$

• Ha $\alpha < 0$, akkor $f''(x) > 0$ $\big(\forall\, x \in (0,+\infty)\big)$, ezért f szigorúan konvex a $(0,+\infty)$ intervallumon.

• Ha $\alpha = 0$, akkor $f''(x) = 0$ $\big(\forall\, x \in (0,+\infty)\big)$, ezért f konvex is és konkáv is a $(0,+\infty)$ intervallumon.

• Ha $0 < \alpha < 1$, akkor $f''(x) < 0$ $\big(\forall\, x \in (0,+\infty)\big)$, ezért f szigorúan konkáv a $(0,+\infty)$ intervallumon.

• Ha $\alpha = 1$, akkor $f''(x) = 0$ $\big(\forall\, x \in (0,+\infty)\big)$, ezért f konvex is és konkáv is a $(0,+\infty)$ intervallumon.

• Ha $\alpha > 1$, akkor $f''(x) > 0$ $\big(\forall\, x \in (0,+\infty)\big)$, ezért f szigorúan konvex a $(0,+\infty)$ intervallumon. ■

5. feladat. *Adjuk meg azokat a legbővebb intervallumokat, amelyeken f konvex, illetve konkáv. Van-e a függvénynek inflexiós pontja?*

(a) $f(x) := 2x^3 - 21x^2 + 36x \quad (x \in \mathbb{R})$,

(b) $f(x) := \ln\big(x^2 + 2x + 2\big) \quad (x \in \mathbb{R})$.

Megoldás. A konvexitás-konkávitás jellemzésére vonatkozó tétel szerint azokat a legbővebb intervallumokat kell megkeresni, amelyeken az f'' függvény állandó előjelű. Mindegyik függvény kétszer deriválható. (Mivel $2^2 - 4 \cdot 2 < 0$, ezért a (b) alatti függvényt megadó kifejezés valóban értelmezhető minden x valós számra.)

(a) Tetszőleges $x \in \mathbb{R}$ pontban

$$\begin{aligned} f''(x) &= \big(f'(x)\big)'(x) = \Big(\big(2x^3 - 21x^2 + 36x\big)'\Big)' = \\ &= \big(6x^2 - 42x + 36\big)' = 12x - 42 = 6(2x-7)\,. \end{aligned}$$

• Ha $x > 7/2$, akkor $f''(x) > 0$, ezért f szigorúan konvex a $(7/2, +\infty)$ intervallumon.

• Ha $x < 7/2$, akkor $f''(x) < 0$, ezért f szigorúan konkáv a $(-\infty, 7/2)$ intervallumon.

• $7/2$ az f inflexiós pontja.

(b) Az elemi függvények deriváltjait és a deriválási szabályokat felhasználva az adódik, hogy

$$\big(\ln\,(x^2 + 2x + 2)\big)' = 2 \cdot \frac{x+1}{x^2+2x+2} \quad (x \in \mathbb{R}),$$

$$f''(x) = 2 \cdot \left(\frac{x+1}{x^2+2x+2}\right)' = 2 \cdot \frac{1 \cdot (x^2+2x+2) - (x+1) \cdot (2x+2)}{\left(x^2+2x+2\right)^2} =$$
$$= -2 \cdot \frac{x(x+2)}{\left(x^2+2x+2\right)^2} \quad (x \in \mathbb{R}).$$

Az $\mathbb{R} \ni x \mapsto -x(x+2)$ függvény grafikonja alapján tehát azt kapjuk, hogy

- ha $x < -2$, akkor $f''(x) < 0$, ezért f szigorúan konkáv a $(-\infty, -2)$-n;
- ha $-2 < x < 0$, akkor $f''(x) > 0$, ezért f szigorúan konvex a $(-2, 0)$-n;
- ha $x > 0$, akkor $f''(x) < 0$, ezért f szigorúan konkáv a $(0, +\infty)$-en.
- -2 és 0 az f inflexiós pontjai. ■

Aszimptoták

Emlékeztető. **Definíció.** *Legyen $a \in \mathbb{R}$ és $f : (a, +\infty) \to \mathbb{R}$. Azt mondjuk, hogy az f függvénynek **van aszimptotája** $(+\infty)$**-ben**, ha van olyan $l(x) = Ax + B \quad (x \in \mathbb{R})$ elsőfokú függvény, amelyre $\lim_{x\to+\infty}\big(f(x) - l(x)\big) = 0$. Ebben az esetben az $y = Ax + B$ egyenletű egyenes az f függvény **aszimptotája** $(+\infty)$**-ben**.*

Hasonló módon értelmezzük a $(-\infty)$**-beli aszimptotát.**

Az aszimptoták meghatározására a következő állítást ismertük meg:

Tétel. *Legyen $a \in \mathbb{R}$. Az $f : (a, +\infty) \to \mathbb{R}$ függvénynek akkor és csak akkor van aszimptotája $(+\infty)$-ben, ha léteznek és végesek a következő határértékek:*

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} =: A \in \mathbb{R} \qquad \lim_{x\to+\infty}\big(f(x) - Ax\big) =: B \in \mathbb{R}.$$

Ekkor az $y = Ax + B$ egyenletű egyenes az f függvény aszimptotája $(+\infty)$-ben.

Hasonló állítás érvényes a $(-\infty)$-beli aszimptoták meghatározására. □

6. feladat. *Van-e az f függvénynek aszimptotája $(+\infty)$-ben, illetve $(-\infty)$-ben? Ha igen, akkor határozza meg az aszimptotákat.*

(a) $f(x) := x^4 + x^3 \quad (x \in \mathbb{R})$,

(b) $f(x) := \dfrac{x^2}{(x-1)^2} \quad (x \in \mathbb{R} \setminus \{1\})$.

Megoldás. Az aszimptoták létezésére és meghatározására vonatkozó állításokat alkalmazzuk.

(a) Mivel a

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^4+x^3}{x} = \lim_{x\to+\infty}\left(x^3 + x^2\right) = +\infty,$$

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to-\infty} \frac{x^4+x^3}{x} = \lim_{x\to-\infty}\left(x^3 + x^2\right) = -\infty$$

határértékek léteznek, de nem végesek, ezért f-nek sem $(+\infty)$-ben sem $(-\infty)$-ben nincs aszimptotája.

(b) A $(+\infty)$-beli aszimptota: Mivel

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{x^2}{(x-1)^2}}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x}{(x-1)^2}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{1}{x}}{\left(1-\frac{1}{x}\right)^2}=\frac{0}{1}=0=:A\in\mathbb{R}$$

és

$$\lim_{x\to+\infty}\bigl(f(x)-Ax\bigr)=\lim_{x\to+\infty}f(x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2}{(x-1)^2}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{\left(1-\frac{1}{x}\right)^2}=1=:B\in\mathbb{R},$$

ezért f-nek $(+\infty)$-ben van aszimptotája, és ez az $y=1$ egyenletű egyenes.

$(-\infty)$-ben is ugyanazeket a határértékeket kapjuk, ezért f-nek $(-\infty)$-ben is van aszimptotája, és ez is az $y=1$ egyenletű egyenes. ■