8. hét, 2020. április 20.

Analízis I. Előadás

Tartalom

a) Sorok átrendezése

b) Sorok szorzása

c) Hatványsorok

Műveleti tulajdonságok: kommutativitás, asszociativitás

Kommutativitás

Motiváció: az összeadás műveleti tulajdonságai érvényben maradnak-e végtelen összegekre is?

A tagok sorrendjének felcserélése, átrendezés

Kommutativitás:

a) Alapeset: $a_1 + a_2 = a_2 + a_1 \ \ (a_1,\, a_2 \in \mathbb{R})$.

b) Véges tagú összegekre való általánosítás: $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 1$, $a_k \in \mathbb{R}$ $(k = 0, \ldots, n)$, $p : \{0, \ldots, n\} \to \{0, \ldots, n\}$ bijekció (permutáció) esetén

$$a_0 + a_1 + \ldots + a_n = a_{p_0} + a_{p_1} + \ldots + a_{p_n} \,.$$

Sorok átrendezése (A kommutativitáskérdése végtelen sorokra.)

Átvihetők-e a véges összegekre ismert műveleti tulajdonságok végtelen összegekre?

Definíció: Legyen $a : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ és $p : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ bijekció.
Ekkor a $\sum(a_{p_k})$ sort a $\sum(a_k)$ sor egy átrendezésének nevezzük.

A $p : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ bijekciót a természetes számok permutációjának nevezzük.

Tétel

Egy abszolút konvergens sor bármely átrendezése is abszolút konvergens, és a sorösszeg az átrendezés során nem változik meg.

Bizonyítás

Legyen $\sum(a_k)$ abszolút konvergens sor, p pedig $\mathbb{N}$ egy permutációja.
Jelölje s_n az eredeti, σ_n pedig az átrendezett sor n-edik részletösszegét.

a) Az állítást először pozitív tagú sorokra igazoljuk.

Emlékeztető: pozitív tagú sorok részletösszegeinek sorozata monoton növekedő.

Tegyük fel tehát, hogy $a_k \geq 0$ $(k \in \mathbb{N})$.

Legyen $n \in \mathbb{N}$ és $N = \max\{p_0, \ldots, p_n\}$. Ekkor

$$\sigma_n = \sum_{k=0}^{n} a_{p_k} \leq \sum_{\ell=0}^{N} a_\ell = s_N \leq \sum_{\ell=0}^{\infty} a_\ell \in \mathbb{R}.$$

A (σ_n) sorozat $\nearrow$ és korlátos, tehát konvergens, és

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_{p_k} = \lim_{n=\to\infty} \sigma_n \leq \sum_{\ell=0}^{\infty} a_\ell\,.$$

Mivel a p^{-1} inverz permutációt véve a $\sum(a_k)$ sor a $\sum(a_{p_k})$ egy átrendezéseként tekinthető, ezért a fenti gondolatmenetből a fordított egyenlőtlenség is adódik.

b) Teszőleges $\sum(a_k)$ abszolút konvergens sor esetén legyen

$$a_k^+ = \begin{cases} a_k, & \text{ha } a_k \geq 0 \\ 0, & \text{ha } a_k < 0 \end{cases}, \qquad a_k^- = \begin{cases} 0, & \text{ha } a_k \geq 0 \\ -a_k, & \text{ha } a_k < 0 \end{cases}.$$

Nyilván: $a_k = a_k^+ - a_k^-$ és $|a_k| = a_k^+ + a_k^-$.

Bizonyítás, folytatás

Mivel $a_k^{\pm} \leq |a_k|$, ezért mind a $\sum(a_k^+)$, mind pedig a $\sum(a_k^-)$ pozitív tagú sor konvergens.

Továbbá, ha $\sum_{k=0}^{\infty} a_k^+ = A \in \mathbb{R}$ és $\sum_{k=0}^{\infty} a_k^- = B \in \mathbb{R}$, akkor $\sum_{k=0}^{\infty} a_k = A - B$ és $\sum_{k=0}^{\infty} |a_k| = A + B$

Az a) részben igazoltak szerint $A = \sum_{k=0}^{\infty} a_{p_k}^+$ és $B = \sum_{k=0}^{\infty} a_{p_k}^-$, következésképpen
$\exists \ \sum_{k=0}^{\infty} a_{p_k} = \sum_{k=0}^{\infty} a_{p_k}^+ - \sum_{k=0}^{\infty} a_{p_k}^- = A - B = \sum_{k=0}^{\infty} a_k$.

Másrészt $|a_k| = a_k^+ + a_k^-$ miatt
$\sum_{k=0}^{\infty} |a_{p_k}| = \sum_{k=0}^{\infty} a_{p_k}^+ + \sum_{k=0}^{\infty} a_{p_k}^- = A + B = \sum_{k=0}^{\infty} |a_k|$, azaz az átrendezett sor is abszolút konvergens.

Megjegyzés

Komplex számsorozatokra is hasonlóan igazolható a tétel: valós és képzetes rész szétválasztása.

Kérdés: Mi van, ha nem abszolút konvergens a sor?

Tétel

Ha a $\sum(a_k)$ sor feltételesen konvergens, akkor

- **i)** $\forall C \in \overline{\mathbb{R}}$ esetén $\exists$ olyan $p : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ permutáció, hogy $\sum_{k=0}^{\infty} a_{p_k} = C$,
- **ii)** van olyan p permutáció, hogy $\nexists \ \sum_{k=0}^{\infty} a_{p_k}$.

Bizonyítás nélkül.

Műveletek sorokkal
Szorzás

Téglány szorzás

Sorok: részletösszegek sorozata $\Longrightarrow$ Sorok szorzása: részletösszeg sorozatok szorzása.

Sorok: $\sum(a_k)$, $\sum(b_k)$. Részletösszegek: (s_n), (σ_n).
Sorok szorzata: $\sum(a_k) \cdot \sum(b_k) = (s_n \cdot \sigma_n)$.
Kérdés: az $(s_n \cdot \sigma_n)$ sorozat értelmezhető-e sorként.

Mivel

$$s_n \cdot \sigma_n = \sum_{i=0}^{n} a_i \cdot \sum_{j=0}^{n} b_j = \sum_{\max\{i,j\} \le n} a_i \cdot b_j = \sum_{k=0}^{n} \Big(\sum_{\max\{i,j\}=k} a_i \cdot b_j \Big) ,$$

ezért ha $t_k := \sum_{\max\{i,j\}=k} a_i \cdot b_j$ akkor a $\sum(t_k)$ sor n-edik részletösszege $s_n \cdot \sigma_n$.

Sorok téglányszorzata

$a : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$, $b : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$.

Definíció. Legyen $t_k = \sum_{\max\{i,j\}=k} a_i \cdot b_j$ $(k \in \mathbb{N})$. Ekkor a $\sum(t_k)$ sort a $\sum(a_k)$, $\sum(b_k)$ sorok téglányszorzatának nevezzük.

Jelölés: $\sum(a_k) \cdot \sum(b_k) = \sum(t_k)$.

Tétel: A téglányszorzat konvergenciája

Ha $\sum(a_k)$ és $\sum(b_k)$ konvergens, akkor a $\sum(a_k) \cdot \sum(b_k) = \sum(t_k)$ téglányszorzat is konvergens, és $\sum_{k=0}^{\infty} a_k \cdot \sum_{k=0}^{\infty} b_k = \sum_{k=0}^{\infty} t_k$.

(A sorozatok szorzására vonatkozó konvergencia téle következménye.)
Hasonlóan: $\sum(a_k)$ és $\sum(b_k)$ konvergens $\Longrightarrow$ $\sum(a_k) \cdot \sum(b_k)$ is abszolút konvergens.

Cauchy–szorzás

$a : \mathbb{N} \to \mathbb{R}, \ b : \mathbb{N} \to \mathbb{R}.$

Definíció. Legyen $u_k = \sum_{i+j=k} a_i \cdot b_j \ (k \in \mathbb{N})$. Ekkor a $\sum(u_k)$ sort a $\sum(a_k)$, $\sum(b_k)$ sorok Cauchy–szorzatának nevezzük.

Jelölés: $\sum(a_k) \times \sum(b_k) = \sum \left(\sum_{i+j=k} a_i b_j \right) = \sum(u_k)\,.$

Motiváció: konvolúció, korreláció, polinomok szorzása … .

Tétel: A Cauchy–szorzat konvergenciája

Ha $\sum(a_k)$ és $\sum(b_k)$ abszolút konvergens, akkor a $\sum(a_k) \times \sum(b_k) = \sum(u_k)$ Cauchy–szorzat is abszolút konvergens, és $\sum_{k=0}^{\infty} a_k \cdot \sum_{k=0}^{\infty} b_k = \sum_{k=0}^{\infty} u_k\,.$

Bizonyítás

A bizonyításhoz felhasználjuk a téglányszorzat konvergenciájára vonatkozó tételt.

Vezessük be a

$$T_n = \sum_{k=0}^{n} t_k = \sum_{k=0}^{n} \left(\sum_{\max\{i,j\}=k} a_i \cdot b_j \right),$$

$$T_n^* = \sum_{k=0}^{n} t_k = \sum_{k=0}^{n} \left(\sum_{\max\{i,j\}=k} |a_i| \cdot |b_j| \right),$$

$$U_n = \sum_{k=0}^{n} u_k = \sum_{k=0}^{n} \left(\sum_{i+j=k} a_i \cdot b_j \right)$$

$$U_n^* = \sum_{k=0}^{n} u_k = \sum_{k=0}^{n} \left(\sum_{i+j=k} |a_i| \cdot |b_j| \right)$$

jelöléseket.

Bizonyítás, folytatás

A téglányszorzatra vonatkozó tételből tudjuk, hogy $\lim_{n\to\infty} T_n = \sum_{k=0}^{\infty} a_k \cdot \sum_{k=0}^{\infty} b_k$.
A sorok szorzásának definíciói alapján a bevezett jelöléseket alkalmazva kapjuk, hogy

$$|T_n - U_n| = \Bigg| \sum_{\max\{i,j\}\le n,\, i+j>n} a_i \cdot b_j \Bigg| \le \sum_{\max\{i,j\}\le n,\, i+j>n} |a_i| \cdot |b_j| \, .$$

Mivel $\{\max\{i,j\} \le n,\ i+j > n\} \subset \{[n/2] \le \max\{i,j\} \le n\}$, ezért

$$|T_n - U_n| \le |T_n^* - T_{[n/2]}^*| \, .$$

A téglányszorzat abszolút konvergens $\Longrightarrow$ (T_n^*) Cauchy-sorozat $\Longrightarrow$
$\lim_{n\to\infty} |T_n^* - T_{[n/2]}^*| = 0 \Longrightarrow \lim_{n\to\infty} |T_n - U_n| = 0$.
Következésképpen $\exists \lim_{n\to\infty} U_n = \lim_{n\to\infty} T_n = \sum_{k=0}^{\infty} a_k \cdot \sum_{k=0}^{\infty} b_k$. $\square$

Megjegyzés

a) A fenti tételben elég csak azt feltenni, hogy az egyik sor abszolút konvergens, a másik pedig konvergens (Mertens–tétel).

b) Vannak olyan konvergens sorok, amelyeknek a Cauchy–szorzata nem konvergens.

Hatványsorok

Hatványsorok

Definíció: Legyen $x_0,\ x \in \mathbb{R}$, $a : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$. Ekkor a $\sum \left(a_k(x-x_0)^k\right)$ sort hatványsornak nevezzük.

Elnevezések

a) x_0 : a hatványsor középpontja,

b) a_k'k a hatványsor együtthatói.

Hatványsor konvergencia halmaza

A

$$H = \left\{x \in \mathbb{R} \ : \ \sum \left(a_k(x-x_0)^k\right) \text{ konvergens}\right\}$$

halmazt a $\sum \left(a_k(x-x_0)^k\right)$ hatványsor konvergencia halmazának nevezzük.

Tétel

Egy hatványsor konvergencia halmaza intervallum.

Megjegyzés

a) A konvergencia halmaz nem üres. $\forall \sum \left(a_k(x-x_0)^k\right)$ hatványsor esetén $x_0 \in H$.

b) A H intervallum lehet egyelemű, lehet nyílt, zárt, de lehet pl. maga az $\mathbb{R}$ is.

Bizonyítás

Tegyük fel, hogy $\sum\left(a_k(x-x_0)^k\right)$ sor konvergens egy $x_0 \neq z \in \mathbb{R}$ pontban.
A sor konvergenciájából következik, hogy $\left(a_k(z-x_0)^k\right)$ nullsorozat, tehát korlátos is: $\exists\ K>0$ amelyre $\left|a_k(z-x_0)^k\right| < K$ $(k \in \mathbb{N})$.

Legyen x olyan valós szám, amire $|x-x_0| < |z-x_0| =: r$. Ekkor $q := \dfrac{|x-x_0|}{|z-x_0|} < 1$ és

$$\left|a_k(x-x_0)^k\right| = \left|a_k(z-x_0)^k\right| \cdot \frac{|x-x_0|^k}{|z-x_0|^k} < K \cdot q^k\,.$$

Mivel a $\sum\left(K \cdot q^k\right)$ geometriai sor konvergens, ezért a pozitív sorokra vonatkozó öszehasonlíto kritériumból követezik, hogy a $\sum\left(a_k(x-x_0)^k\right)$ sor abszolút konvergens minden olyan x-re, amire $|x-x_0| < |z-x_0|$ teljesül, azaz ami közelebb van x_0-hoz, mint z.
Ha tehát $r := |z-x_0|$, akkor $(x_0-r, x_0+r) \subset H$. $\square$

Hatványsor konvergencia sugara

Definíció: Jelölje H a $\sum\left(a_k(x-x_0)^k\right)$ hatványsor konvergencia halmazát. Az $R := \sup H - x_0 \in \overline{\mathbb{R}}$ számot a szóban forgó sor konvergencia sugarának nevezzük.

A definícióból nyilvánvaló, hogy $R \geq 0$, és hogy $\sup H = +\infty$ esetén $R = +\infty$.

A tétel következménye

a) Ha H nem korlátos, akkor $H = \mathbb{R}$.

b) Ha H korlátos, akkor $(x_0-R, x_0+R) \subset H \subset [x_0-R, x_0+R]$.

c) Ha $R = 0$, akkor $H = \{x_0\}$.

Tétel (Cauchy–Hadamard)

Tegyük fel, hogy $a : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ olyan sorozat, amelyre $\exists \lim_{k\to\infty} \sqrt[k]{|a_k|} \in \overline{\mathbb{R}}$.

Legyen

$$r := \begin{cases} +\infty, & \text{ha } \lim_{k\to\infty} \sqrt[k]{|a_k|} = 0 \\ \dfrac{1}{\lim_{k\to\infty} \sqrt[k]{|a_k|}}, & \text{ha } \lim_{k\to\infty} \sqrt[k]{|a_k|} > 0 \end{cases}$$

Ekkor a $\sum(a_k(x-x_0)^k)$ hatványsor konvergenciájával kapcsolatban az alábbi állítás igaz:

a) ha $r > 0$ (, azaz $\lim_{k\to\infty} \sqrt[k]{|a_k|} \neq \infty$), akkor $\forall\ x \in \mathbb{R},\ |x-x_0| < r$ esetén a $\sum(a_k(x-x_0)^k)$ hatványsor abszolút konvergens,

b) ha $r < +\infty$, akkor $\forall\ x \in \mathbb{R},\ |x-x_0| > r$ esetén a $\sum(a_k(x-x_0)^k)$ hatványsor divergens.

Megjegyzés

a) A tételben megfogalmazott állítás azt jelenti, hogy ha $\exists \lim_{k\to\infty} \sqrt[k]{|a_k|} \in \overline{\mathbb{R}}$, akkor a hatványsor konvergencia sugara a fenti r.

b) A tételnek a korábban említett $\lim\sup$ fogalom segítségével megfogalmazható egy általános, minden hatványsor esetére alkalmazható alakja.

Bizonyítás

A tétel bizonyítása a gyökkritériumnak a $\sum(a_k(x-x_0)^k)$ sorra való alkalmazásával a közvetlenül adódik.

a) Legyen $r > 0$ és $|x-x_0| < r$. Ekkor

$$\lim_{k\to\infty} \sqrt[k]{|a_k(x-x_0)^k|} = \lim_{k\to\infty} \sqrt[k]{|a_k|}\cdot|x-x_0| = |x-x_0| \lim_{k\to\infty} \sqrt[k]{|a_k|} = \frac{|x-x_0|}{r} < 1$$

Következésképpen a $\sum(a_k(x-x_0)^k)$ sor abszolút konvergens.

b) Legyen $r < \infty$ és $|x-x_0| > r$. Ekkor

$$\lim_{k\to\infty} \sqrt[k]{|a_k(x-x_0)^k|} = \lim_{k\to\infty} \sqrt[k]{|a_k|}\cdot|x-x_0| = |x-x_0| \lim_{k\to\infty} \sqrt[k]{|a_k|} = \frac{|x-x_0|}{r} > 1\,.$$

Következésképpen a $\sum(a_k(x-x_0)^k)$ sor divergens. $\square$

Példák

a) $\sum(k!\cdot x^k)$: $x_0 = 0$, $\lim_{k\to\infty} \sqrt[k]{k!} = +\infty$, tehát $r = 0$. A sor csak az $x = 0$ pontban konvergens.

b) $\sum\left(\frac{x^k}{k!}\right)$: $x_0 = 0$, $\lim_{k\to\infty} \sqrt[k]{\frac{1}{k!}} = 0$, tehát $r = +\infty$. A sor minden $x \in \mathbb{R}$ pontban konvergens.

c) $\sum\left(\frac{x^k}{2^k}\right)$: $x_0 = 0$, $\lim_{k\to\infty} \sqrt[k]{\frac{1}{2^k}} = \frac{1}{2}$, tehát $r = 2$. A sor a $(-2,2)$ intervallum minden pontjában konvergens, a $[-2,2]$ intervallumon kívül eső pontokban pedig divergens.

Analitikus függvények

Definíció: Egy $r > 0$ konvergencia sugarú $\sum(a_k(x-x_0)^k)$ hatványsor esetén a hatványsor összegfüggvényét az $(x_0 - r, x_0 + r)$ nyílt intervallumon, azaz az

$$f : (x_0 - r, x_0 + r) \to \mathbb{R}, \qquad f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k(x-x_0)^k$$

függvényt analitikus függvénynek nevezzük.

Példák

a) $\sum\left(\frac{x^k}{k!}\right) : r = +\infty,\ \exp : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ \exp x := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}$,

b) $\sum\left(\frac{(-1)^k}{(2k+1)!}x^{2k+1}\right) : r = +\infty,\ \sin : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ \sin x := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!}x^{2k+1}$,

c) $\sum\left(\frac{(-1)^k}{(2k)!}x^{2k}\right) : r = +\infty,\ \cos : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ \cos x := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k)!}x^{2k}$,

d) $\sum\left(x^k\right) : r = 1,\ f : (-1, 1) \to \mathbb{R},\ f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} x^k = \frac{1}{1-x}$.

Kérdések

a) Minden intervallumon értelmezett üggvény analitikus?

b) Kölönböző hatványsorok különböző analitikus függvény definiálnak?

Tétel (Hatványsor középpontjának megváltoztatása, bizonyítás nélkül)
Legyen $\sum \left(a_k(x-x_0)^k\right)$ amelynek hatványsugara $r>0$, továbbá legyen $x_0^* \in \mathbb{R}$, $|x_0^*-x_0|<r$ és $\rho := r-|x_0^*-x_0|>0$.
Ekkor
$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k(x-x_0)^k = \sum_{k=0}^{\infty} b_k(x-x_0^*)^k,$$
ahol $b_k = \sum_{j=k}^{\infty} \binom{j}{k} a_j(x_0^*-x_0)^j$ és $|x-x_0^*|<\rho$.