Analízis-1, 6. gyakorlat
2020. tavasz

① <u>Áll.:</u> $\lim (n^2+3) = +\infty$

<u>Biz.:</u> <u>a definíció alapján</u> Azt kell igazolni, hogy

$$\forall P>0 \ \exists N \in \mathbb{N} \ \forall n \geq N: \ a_n > P,$$

ahol $a_n = n^2+3 \qquad (n \in \mathbb{N})$.

Legyen $P>0$, és vizsgáljuk: $n^2+3 > P$

$n^2 > P-3$

$P \geq 3$ feltehető: $n > \sqrt{P-3}$

N megadása: Legyen $N \in \mathbb{N}$ olyan, hogy $N > \sqrt{P-3}$.
(az archimédeszi tul. miatt $\exists N$)

Ekkor $\forall n \geq N$ esetén: ...

analízis-1/6. gyak (2020 tavasz)

(2a) áll.: $\lim\left(\frac{n^2+3n+1}{n+3}\right) = +\infty$

biz. a def. alapján:
ezt kell igazolni, hogy

$$\forall P>0\ \exists N\in\mathbb{N}\ \forall n\geq N:\quad \frac{n^2+3n+1}{n+3} > P.$$

Legyen tehát $P>0$, és vizsg.: $\frac{n^2+3n+1}{n+3} > P$

A bal oldalt csökkentjük (NRA):

$$\frac{n^2+3n+1}{n+3} \geq \frac{n^2}{n+3n} = \frac{n^2}{4n} = \frac{n}{4}, \text{ ha } n\geq 1.$$

$$\frac{n^2+3n+1}{n+3} > P$$
$$\Uparrow$$
$$\frac{n}{4} > P$$
$$n > 4P$$

N megadása: legyen $N\in\mathbb{N}$ olyan, hogy $N>4P$
($\exists N$ az arkhimédeszi tul. miatt).

Ekkor $\forall n\geq N$ esetén ...

analízis – 1/6. gyak (2020 tavasz)

(2b) áll.: $\lim \left(\frac{2-3n^2}{n+1}\right) = -\infty$

biz. a def. alapján:

ezt kell igazolni, hogy

$$\forall P<0\ \exists N\in\mathbb{N}\ \forall n\geq N:\quad \frac{2-3n^2}{n+1} < P$$

Legyen tehát $P<0$, és vizsg.: $\frac{2-3n^2}{n+1} < P$

Ha beszorzunk (-1)-gyel, akkor a folytatás hasonló lesz (2a)-hoz:

$$\frac{3n^2-2}{n+1} > -P$$

A bal oldalt csökkentjük (NRA):

$$\frac{3n^2-2}{n+1} = \frac{2n^2+(n^2-2)}{n+1} \geq \frac{2n^2}{n+n} = \frac{2n^2}{2n} = n \quad , \text{ha } n\geq 2.$$

$$\frac{3n^2-2}{n+1} > -P$$
$$\Uparrow \quad \leftarrow \text{tfh. } n\geq 2$$
$$n > -P$$

N megadása: Legyen $N\in\mathbb{N}$ olyan, hogy $N>-P$ és $N\geq 2$ ($\exists N$ az arkhimédeszi tul. miatt).

Ekkor $\forall n\geq N$ esetén ...

(3) áll.: Legyen $x_n > 0$ $(n \in \mathbb{N})$, $\lim(x_n) = 0$.
Ekkor: $\lim\left(\frac{1}{x_n}\right) = +\infty$

biz. a def. alapján:

Azt kell igazolni, hogy

$$\forall P > 0 \ \exists N \in \mathbb{N} \ \forall n \geq N: \quad \frac{1}{x_n} > P.$$

Legyen tehát $P > 0$. Ekkor $\varepsilon := \frac{1}{P} > 0$, tehát

$$\exists N \in \mathbb{N} \ \forall n \geq N: \quad |x_n - 0| < \frac{1}{P}$$

Mivel $x_n > 0$, $\Rightarrow$ $|x_n - 0| = x_n$, tehát

$$0 < x_n < \frac{1}{P}$$

Reciprokot véve: $\frac{1}{x_n} > P \qquad (\forall n \geq N).$

(4) A feladat jelöléseit használjuk:

$$P(n) = a_r \cdot n^r + a_{r-1} \cdot n^{r-1} + \ldots + a_1 \cdot n + a_0 =$$

$$= n^r \cdot \left(a_r + \frac{a_{r-1}}{n} + \ldots + \frac{a_1}{n^{r-1}} + \frac{a_0}{n^r} \right) \longrightarrow$$

$$\xrightarrow{(n \to \infty)} (+\infty)^r \cdot \left(a_r + 0 + \ldots + 0 + 0 \right) =$$

$$= (+\infty) \cdot \operatorname{sign} a_r = \begin{cases} +\infty & \text{ha } a_r > 0 \\ -\infty & \text{ha } a_r < 0 \end{cases}$$

analízis-1/6. gyak (2020 tavasz)

5a

$$\frac{n^7+n-12}{1-n^2+3n} = \frac{\frac{n^7+n-12}{n^2}}{\frac{1-n^2+3n}{n^2}} =$$

$$= \frac{n^5+\frac{1}{n}-\frac{12}{n^2}}{\frac{1}{n^2}-1+\frac{3}{n}} \xrightarrow{(n\to\infty)} \frac{(+\infty)+0-0}{0-1+0} = \underline{\underline{-\infty}}$$

5b

$$\frac{n^4+n^2+n+1}{2n^5+n-4} = \frac{\frac{n^4+n^2+n+1}{n^5}}{\frac{2n^5+n-4}{n^5}} =$$

$$= \frac{\frac{1}{n}+\frac{1}{n^3}+\frac{1}{n^4}+\frac{1}{n^5}}{2+\frac{1}{n^4}-\frac{4}{n^5}} \xrightarrow{(n\to\infty)}$$

$$\xrightarrow{(n\to\infty)} \frac{0+0+0+0}{2+0-0} = \underline{\underline{0}}$$

5c $n^2 \cdot \left(n - \sqrt{n^2+1}\right) =$

$$= n^2 \cdot \frac{\left(n-\sqrt{n^2+1}\right)\cdot\left(n+\sqrt{n^2+1}\right)}{n+\sqrt{n^2+1}} =$$

$$= n^2 \cdot \frac{\cancel{n^2}-\cancel{n^2}-1}{n+\sqrt{n^2+1}} = \frac{-n^2}{n+\sqrt{n^2+1}} =$$

$$= \frac{\frac{-n^2}{n}}{\frac{n+\sqrt{n^2+1}}{n}} = \frac{-n}{1+\sqrt{1+\frac{1}{n^2}}} \xrightarrow{(n\to\infty)}$$

$$\xrightarrow{(n\to\infty)} \frac{-\infty}{1+\sqrt{1+0}} = \frac{-\infty}{2} = \underline{\underline{-\infty}}$$

(6) $x_n = \sqrt{n^2+n+1} - \alpha \cdot n$ $\left(\begin{array}{c}\alpha \in \mathbb{R} \\ \text{paraméter}\end{array}\right)$

$\alpha < 0$ eset: $\lim(x_n) = (+\infty) \underbrace{-\alpha \cdot (+\infty)}_{-\infty} = (+\infty) - (-\infty) = \underline{\underline{+\infty}}$

$\alpha = 0$ eset: $\lim(x_n) = \lim\left(\sqrt{n^2+n+1}\right) = \underline{\underline{+\infty}}$

$\alpha > 0$ eset: (ekkor $(+\infty) - (+\infty)$ típusú)

$$x_n = \frac{\left(\sqrt{n^2+n+1} - \alpha n\right) \cdot \left(\sqrt{n^2+n+1} + \alpha n\right)}{\sqrt{n^2+n+1} + \alpha n} =$$

$$= \frac{n^2+n+1-\alpha^2 n^2}{\sqrt{n^2+n+1} + \alpha n} = \frac{(1-\alpha^2)n^2+n+1}{\sqrt{n^2+n+1} + \alpha n} =$$

$$= \frac{\frac{(1-\alpha^2)n^2+n+1}{n}}{\frac{\sqrt{n^2+n+1} + \alpha n}{n}} = \frac{(1-\alpha^2)n + 1 + \frac{1}{n}}{\sqrt{1+\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}} + \alpha}$$

ha $0 < \alpha < 1$: $\lim(x_n) = \frac{(+\infty)+1+0}{\sqrt{1+0+0} + \alpha} = \underline{\underline{+\infty}}$

ha $\alpha > 1$: $\lim(x_n) = \frac{(-\infty)+1+0}{\sqrt{1+0+0} + \alpha} = \underline{\underline{-\infty}}$

ha $\alpha = 1$: $\lim(x_n) = \lim\left(\frac{1+\frac{1}{n}}{\sqrt{1+\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}} + 1}\right) =$

$$= \frac{1+0}{\sqrt{1+0+0} + 1} = \underline{\underline{\frac{1}{2}}}$$