4. előadás

2020. szeptember 28.

SPECIÁLIS FÜGGVÉNYEK 2.

Trigonometrikus függvények

• Előzetes megjegyzések a trigonometrikus függvényekről

A középiskolában már megismerkedtünk tetszőleges $x \in \mathbb{R}$ esetén a $\sin x$, a $\cos x$, valamint alkalmas $x \in \mathbb{R}$ esetén a $\operatorname{tg} x$ és a $\operatorname{ctg} x$ számok szemléletes definícióival, amiket `érdemes felidézni` és megjegyezni. Ezekből kiindulva értelmeztük a trigonometrikus függvényeket, és megállapítottuk számos érdekes és fontos tulajdonságaikat. A szóban forgó értelmezésekhez a következő megjegyzéseket fűzzük: Egyrészt ezek a definíciók még utalást sem adnak a függvényértékek (akárcsak közelítő) kiszámolására. Másrészt az egyszerű geometriai fogalmakon túl szerepelnek viszonylag bonyolult és definiálatlan fogalmak is, így a valós számoknak a kör kerületére való „felmérése” vagy a *körív hossza.* A π **számot** az egységsugarú kör kerületének a felével definiáltuk, amelyről megtudtuk, hogy az egy *irracionális szám*, század pontossággal $3,14$.

Az Analízis 1-ben a **szinusz-** és a **koszinuszfüggvényt** hatványsor összegfüggvényeként értelmeztük. Egyáltalán nem nyilvánvaló, hogy ezek ekvivalensek a középiskolai definíciókkal. Néhány már megismert összefüggés azonban jelzi a hasonlóságot. A kétféle bevezetés ekvivalenciájának az igazolását majd az integrálszámítás alkalmazásainak a tárgyalásánál fejezzük be, amikor is értelmezzük a körív hosszát, és meghatározzuk a kör kerületét. A hatványsoros definíció alapján kapott szinusz- és koszinuszfüggvény jelölésére a jelzett ekvivalencia miatt használtuk a „szokásos” sin és cos szimbólumokat.

A trigonometrikus függvényekkel kapcsolatos alapvető fogalom a következő: Az f valós-valós függvény **periodikus**, ha van olyan $p > 0$ valós szám, hogy minden $x \in \mathcal{D}_f$ elemre $x \pm p \in \mathcal{D}_f$ és

$$f(x+p) = f(x).$$

A p számot f **periódusának**, az f függvényt pedig p **szerint priodikus** függvénynek nevezzük.

Ha az f függvény p szerint periodikus, akkor bármely $x \in \mathcal{D}_f$, $k \in \mathbb{Z}$ esetén $x \pm kp \in \mathcal{D}_f$ és

$$f(x+kp) = f(x).$$

Vagyis, ha p az f függvénynek periódusa, akkor minden $k = 1, 2, \dots$ esetén kp is periódusa f-nek. Egy függvény periódusának megadásán általában a legkisebb (pozitív) periódus megadását értjük, amennyiben ilyen létezik.

Nem minden periodikus függvénynek van legkisebb periódusa. Az

$$f(x) := \begin{cases} 0, & \text{ha } x \in \mathbb{Q} \\ 1, & \text{ha } x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \end{cases}$$

Dirichlet-függvénynek minden *racionális* szám periódusa, és ezek között nyilván nincs legkisebb pozitív szám.

• A sin és a cos függvény

A **szinusz-** és a **koszinuszfüggvénnyt** az egész $\mathbb{R}$-en konvergens hatványsor összegfüggvényeként értelmeztük:

$$\sin x := \sin(x) := x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \cdots = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} x^{2k+1} \qquad (x \in \mathbb{R}),$$

$$\cos x := \cos(x) := 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \cdots = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{(2k)!} x^{2k} \qquad (x \in \mathbb{R}).$$

Most összefoglaljuk azokat az állításokat, amelyeket korábban már megismertünk:

$\boxed{\mathbf{1^o}}$ A sin függvény páratlan, azaz $\sin(-x) = -\sin x \quad (x \in \mathbb{R})$,
a cos függvény páros, vagyis $\cos(-x) = \cos x \quad (x \in \mathbb{R})$.

$\boxed{\mathbf{2^o}}$ *Addíciós képletek*: minden $x, y \in \mathbb{R}$ esetén

$$\sin(x+y) = \sin x \cos y + \cos x \sin y,$$
$$\cos(x+y) = \cos x \cos y - \sin x \sin y.$$

$\boxed{\mathbf{3^o}}$ Érdemes megjegyezni azt a tényt, hogy *két szinusz, illetve koszinusz összege és különbsége szorzattá alakítható.* A következő azonosságok az addíciós képletek egyszerű következményei. Tetszőleges $x, y \in \mathbb{R}$ esetén

$$\text{(1)} \quad \begin{aligned} \sin x + \sin y &= 2 \cdot \sin\frac{x+y}{2} \cdot \cos\frac{x-y}{2}, & \sin x - \sin y &= 2 \cdot \sin\frac{x-y}{2} \cdot \cos\frac{x+y}{2}, \\ \cos x + \cos y &= 2 \cdot \cos\frac{x+y}{2} \cdot \cos\frac{x-y}{2}, & \cos x - \cos y &= -2 \cdot \sin\frac{x+y}{2} \cdot \sin\frac{x-y}{2}. \end{aligned}$$

Az igazolásukhoz legyen $\alpha := \dfrac{x+y}{2}$ és $\beta := \dfrac{x-y}{2}$. Ekkor $x = \alpha + \beta$ és $y = \alpha - \beta$.
Az első esetben azt kapjuk, hogy

$$\sin x + \sin y = \sin(\alpha + \beta) + \sin(\alpha - \beta) = 2\,\sin\alpha \cdot \cos\beta = 2 \cdot \sin\frac{x+y}{2} \cdot \cos\frac{x-y}{2}.$$

A többi azonosság hasonlóan látható be.

$\boxed{\mathbf{4^o}}$ *Négyzetes összefüggés*:

$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1 \quad (x \in \mathbb{R}).$$

$\boxed{\mathbf{5^o}}$ A sin és a cos függvény differenciálható (tehát folytonos is) $\mathbb{R}$-en, és

$$\sin'(x) = \cos(x), \quad \cos'(x) = -\sin(x) \quad \big(x \in \mathbb{R}\big).$$

Most a sin és a cos függvények hatványsoros definícióiból kiindulva, a differenciálszámítás eszköztárát felhasználva bevezetjük az egész matematika egyik fontos állandóját, a π **számot.**

Tétel. *A* cos *függvénynek a* $[0, 2]$ *intervallumban pontosan egy zérushelye van, azaz* $[0, 2]$*-nek pontosan egy* ξ *pontjában áll fenn a* $\cos\xi = 0$ *egyenlőség. Ennek a* ξ *számnak a kétszereseként* ***értelmezzük a*** π ***számot:***

$$\pi := 2\xi.$$

Bizonyítás. A Bolzano-tételt alkalmazzuk. Világos, hogy $\cos \in C[0,2]$ és $\cos 0 = 1$. Másrészt

$$\begin{aligned}\cos 2 &= 1 - \frac{2^2}{2!} + \frac{2^4}{4!} - \frac{2^6}{6!} + \frac{2^8}{8!} - \frac{2^{10}}{10!} + \frac{2^{12}}{12!} - \cdots = \\ &= 1 - 2 + \frac{2}{3} - \frac{2^6}{6!}\left(1 - \frac{2^2}{7\cdot 8}\right) - \frac{2^{10}}{10!}\left(1 - \frac{2^2}{11\cdot 12}\right) - \cdots < \\ &< (\text{a zárójeleken belüli számok nyilván pozitívak}) < -\frac{1}{3} < 0.\end{aligned}$$

A Bolzano-tétel feltételei tehát teljesülnek, ezért $\exists\, \xi \in [0,2]$: $\cos\xi = 0$.

A ξ pont egyértelműsége következik abból, hogy $\cos \downarrow$ a $[0,2]$ intervallumban. Ez az állítás a szigorú monoton csökkenésre vonatkozó elégséges feltétel, a $\cos' = -\sin$ képlet, valamint a

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \cdots = x\left(1 - \frac{x^2}{2\cdot 3}\right) + \frac{x^5}{5!}\left(1 - \frac{x^2}{6\cdot 7}\right) + \cdots > 0 \quad \big(x \in (0,2)\big)$$

egyenlőtlenség következménye. ■

Megjegyzések.

1^o A Bolzano-tétel bizonyításánal alkalmazott *Bolzano-féle felezési eljárással* π közelítő értékei meghatározhatók. Világos, hogy $0 < \pi < 4$. Az is megmutatható, hogy

$$3,141 < \pi < 3,142,$$

ezért használhatjuk a $\boxed{\pi \approx 3.14}$ közelítést.

2^o Igazolható, hogy π **irracionális** és **transzcendens** szám, továbbá $\pi = 3,14159265\ldots$.

3^o Az addíciós képletek, valamint a négyzetes összefüggés felhasználásával a sin és a cos függvény számos helyen vett helyettesítési értékeit pontosan ki tudjuk számolni. Például: $\sin\frac{\pi}{2} = 1$, $\cos\pi = -1$, $\sin\frac{\pi}{4} = \cos\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

4^o Az integrálszámítás alkalmazásainál értelmezni fogjuk a körív hosszát, és megmutatjuk, hogy az egységsugarú kör kerülete 2π. Ez azt jelenti, hogy az előző tételben definiált π szám valóban megegyezik a korábbi tanulmányainkban megismert π számmal.

Az addíciós képletekből adódik, hogy a sin és a cos függvények között a következő kapcsolat áll fenn:

$$(2)\quad \sin x = \cos\left(x - \frac{\pi}{2}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right), \qquad \cos x = \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right) \quad (x \in \mathbb{R}).$$

Tétel. *A* sin *és a* cos *függvény* 2π *szerint periodikus, azaz*

$$\sin(x + 2\pi) = \sin x, \qquad \cos(x + 2\pi) = \cos x \qquad (x \in \mathbb{R}),$$

és 2π *mindegyik függvénynek a legkisebb periódusa. Így*

$$\sin x = \sin(x + 2k\pi), \qquad \cos x = \cos(x + 2k\pi) \quad (x \in \mathbb{R},\ k \in \mathbb{Z}).$$

Bizonyítás. Meggondolható. ■

Most a sin és a cos függvény „alaki” tulajdonságait tanulmányozzuk. A periodicitást, valamint a paritást figyelembe véve, a vizsgálatokat elég egy π hosszú intervallumon elvégezni. Legyen ez az intervallum $[0, \pi]$.

Az (2) azonosságok alapján egyszerűen igazolható

$$\cos x > 0 \ \left(x \in (0, \tfrac{\pi}{2})\right), \quad \cos x < 0 \ \left(x \in \left(\tfrac{\pi}{2}, \pi\right)\right) \quad \text{és} \quad \sin x > 0 \ (x \in (0, \pi))$$

egyenlőtlenségeket, a deriváltakra vonatkozó már ismert

$$\sin' x = \cos x, \ \cos' x = -\sin x, \ \sin'' x = -\sin x, \ \cos'' x = -\cos x \qquad (x \in \mathbb{R})$$

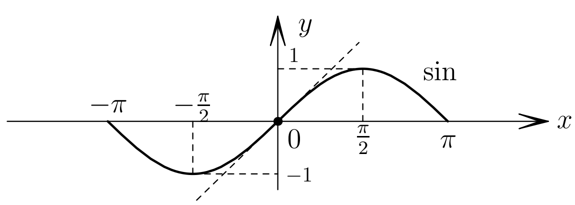
képleteket, továbbá a monotonitás, illetve a konvexitás-konkávitás és a derivált kapcsolatára vonatkozó eredményeket felhasználva kapjuk a következő állításokat.

Tétel.

1^o sin $\uparrow$ $[0, \frac{\pi}{2}]$*-en,* $\downarrow$ $[\frac{\pi}{2}, \pi]$*-n és szigorúan konkáv* $[0, \pi]$*-n.*

2^o cos $\downarrow$ $[0, \pi]$*-n, szigorúan konkáv* $[0, \frac{\pi}{2}]$*-en és szigorúan konvex* $[\frac{\pi}{2}, \pi]$*-n.*

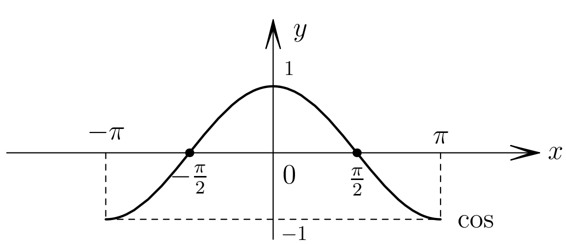
A sin függvény *páratlan*, ezért a grafikonja szimmetrikus az origóra. A következő ábrán szemléltetjük a sin függvény grafikonját a $[-\pi, \pi]$ intervallumon, majd felsoroljuk a függvény néhány fontos tulajdonságát:



A sin **függvény**

- $\downarrow$ $[-\pi, -\frac{\pi}{2}]$-en, $\uparrow$ $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$-en és $\downarrow$ $[\frac{\pi}{2}, \pi]$-n;
- szigorúan konvex $[-\pi, 0]$-n és szigorúan konkáv $[0, \pi]$-n,
- 0 inflexiós pont.

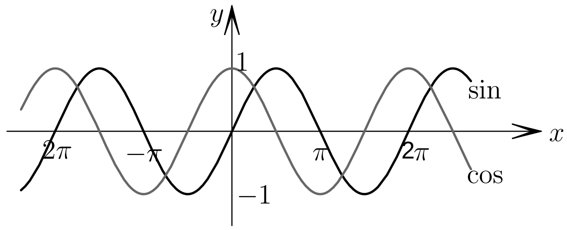
A cos függvény *páros*, ezért a grafikonja szimmetrikus az y-tengelyre. A következő ábrán a cos függvény grafikonját szemléltetjük a $[-\pi, \pi]$ intervallumon, majd felsoroljuk a függvény néhány fontos tulajdonságát:



A cos **függvény**

- $\uparrow$ $[-\pi, 0]$-n és $\downarrow$ $[0, \pi]$-n;
- szigorúan konvex $[-\pi, -\frac{\pi}{2}]$-en, szigorúan konkáv $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$-en, szigorúan konvex $[\frac{\pi}{2}, \pi]$-n,
- $\pm\frac{\pi}{2}$ inflexiós pontok.

Az alábbi ábrán a sin és a cos függvény grafikonjait szemléltetjük:



A sin és a cos függvények grafikonjai a

$$\cos x = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right), \quad \text{illetve a} \quad \sin x = \cos\left(x - \frac{\pi}{2}\right) \quad (x \in \mathbb{R})$$

azonosságok alapján egymásból eltolással származtathatók.

Megjegyzés. Emlékeztetünk arra, hogy ha $f, g \in \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $a \in \mathbb{R}$ és $f(x) := g(x+a)$ $(x \in \mathcal{D}_g)$, akkor az f függvény grafikonját g grafikonjának x tengely irányú eltolásával kapjuk meg úgy, hogy $a > 0$ esetén az eltolást a egységgel „balra”, $a < 0$ esetén pedig a egységgel „jobbra” végezzük. □

Az előzőekből már következnek a sin és a cos függvény **zérushelyeire** vonatkozó alábbi állítások:

$$\boxed{\begin{aligned} \sin x = 0 \quad &\Longleftrightarrow \quad x = k\pi \quad (k \in \mathbb{Z}), \\ \cos x = 0 \quad &\Longleftrightarrow \quad x = \tfrac{\pi}{2} + k\pi \quad (k \in \mathbb{Z}). \end{aligned}}$$

Az (1) azonosságokat és a fent egyenlőségeket felhasználva egyszerűen bebizonyíthatjuk, hogy

$$\boxed{\begin{aligned} \sin x = \sin y \quad &\Longleftrightarrow \quad x - y = 2k\pi \ \text{ vagy } \ x + y = (2l+1)\pi \quad (k, l \in \mathbb{Z}), \\ \cos x = \cos y \quad &\Longleftrightarrow \quad x - y = 2k\pi \ \text{ vagy } \ x + y = 2l\pi \quad (k, l \in \mathbb{Z}). \end{aligned}}$$

• A tg és a ctg függvény

A **tangensfüggvényt** így értelmezzük:

$$\operatorname{tg} x := \operatorname{tg}(x) := \frac{\sin x}{\cos x} \qquad \left(x \in \mathbb{R} \setminus \{\tfrac{\pi}{2} + k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}\right).$$

A sin és a cos függvények tulajdonságait felhasználva adódnak a következő állítások:

(a) a tg *páratlan* függvény, azaz $\operatorname{tg}(-x) = -\operatorname{tg} x$ $(x \in \mathcal{D}_{\operatorname{tg}})$;

(b) a tg függvény π *szerint periodikus*, azaz $\operatorname{tg}(x + k\pi) = \operatorname{tg} x$ $(x \in \mathcal{D}_{\operatorname{tg}},\ k \in \mathbb{Z})$;

(c) tg függvény *zérushelyei*:

$$\boxed{\operatorname{tg} x = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad \sin x = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad x = k\pi \quad (k \in \mathbb{Z});}$$

(d) Mivel

$$\operatorname{tg} x - \operatorname{tg} y = \frac{\sin x}{\cos x} - \frac{\sin y}{\cos y} = \frac{\sin x \cdot \cos y - \cos x \cdot \sin y}{\cos x \cdot \cos y} = \frac{\sin(x-y)}{\cos x \cdot \cos y},$$

ezért

$$\boxed{\operatorname{tg} x = \operatorname{tg} y \quad \Longleftrightarrow \quad \sin(x-y) = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad x = y + k\pi \ \ (k \in \mathbb{Z}).}$$

Ezek alapján a tg függvény „alaki tulajdonságait” elég egy π hosszú intervallumon, mondjuk $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$-en megállapítani. Mivel tg $\in D^\infty\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$, és például

$$\operatorname{tg}' x = \frac{1}{\cos^2 x}, \qquad \operatorname{tg}'' x = 2\frac{\sin x}{\cos^3 x} \qquad \left(x \in \left(-\tfrac{\pi}{2}, \tfrac{\pi}{2}\right)\right),$$

ezért a monotonitási, illetve a konvexitási tulajdonságok egyszerűen megállapíthatók.

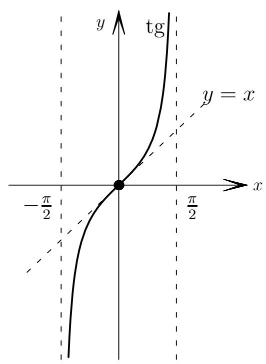
Meg kell azonban vizsgálnunk a tg függvény $\pm\frac{\pi}{2}$ pont körüli viselkedését. Mivel

$$\lim_{x \to \pm\frac{\pi}{2}} \sin x = \sin\left(\pm\tfrac{\pi}{2}\right) = \pm 1, \quad \text{és}$$
$$\lim_{x \to \pm\frac{\pi}{2}} \cos x = \cos\left(\pm\tfrac{\pi}{2}\right) = 0, \quad \text{továbbá} \quad \cos x > 0, \text{ ha } x \in \left(-\tfrac{\pi}{2}, \tfrac{\pi}{2}\right),$$

ezért

$$\lim_{x \to -\frac{\pi}{2}+0} \operatorname{tg} x = -\infty \quad \text{és} \quad \lim_{x \to \frac{\pi}{2}-0} \operatorname{tg} x = +\infty.$$

A tg függvény grafikonja a $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ intervallumon, és alapvető tulajdonságai:



A tg függvény

- páratlan,
- π szerint periodikus,
- $\uparrow \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$-en,
- szigorúan konkáv $\left(-\frac{\pi}{2}, 0\right)$-n,
  szigorúan konvex $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$-en,
- 0 inflexiós pont,
- $\lim_{x \to -\frac{\pi}{2}+0} \operatorname{tg} x = -\infty$ és $\lim_{x \to \frac{\pi}{2}-0} \operatorname{tg} x = +\infty$.

A **kotangensfüggvényt** így értelmezzük:

$$\operatorname{ctg} x := \operatorname{ctg}(x) := \frac{\cos x}{\sin x} \qquad (x \in \mathbb{R} \setminus \{k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}).$$

A ctg függvény *páratlan* és π *szerint periodikus*, továbbá

$$\boxed{\operatorname{ctg} x = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad \cos x = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad x = \tfrac{\pi}{2} + k\pi \ \ (k \in \mathbb{Z}),}$$

$$\boxed{\operatorname{ctg} x = \operatorname{ctg} y \quad \Longleftrightarrow \quad \sin(x-y) = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad x = y + k\pi \ \ (k \in \mathbb{Z}).}$$

A tg és a ctg függvények között a következő kapcsolat áll fenn:

$$\operatorname{ctg} x = \frac{1}{\operatorname{tg} x}, \quad \operatorname{ctg} x = -\operatorname{tg}\left(x - \frac{\pi}{2}\right), \quad \operatorname{tg} x = -\operatorname{ctg}\left(x - \frac{\pi}{2}\right) \tag{3}$$
$$\left(x \in \mathcal{D}_{\operatorname{tg}} \cap \mathcal{D}_{\operatorname{ctg}} = \mathbb{R} \setminus \left\{k\,\tfrac{\pi}{2} \mid k \in \mathbb{Z}\right\}\right).$$

A ctg függvény tulajdonságait elég egy π hosszú intervallumon, mondjuk $(0,\pi)$-n megvizsgálni. Mivel $\operatorname{ctg} \in D^\infty(0,\pi)$, és

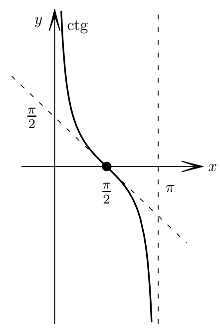
$$\operatorname{ctg}' x = -\frac{1}{\sin^2 x}, \qquad \operatorname{ctg}'' x = 2\cdot\frac{\cos x}{\sin^3 x} \qquad \big(x\in(0,\pi)\big),$$

ezért a monotonitási, illetve a konvexitási tulajdonságok egyszerűen megállapíthatók.

A ctg függvény 0 és π pont körüli viselkedésére a következők teljesülnek:

$$\lim_{x\to 0+0}\operatorname{ctg} x = +\infty, \qquad \lim_{x\to \pi-0}\operatorname{ctg} x = -\infty\,.$$

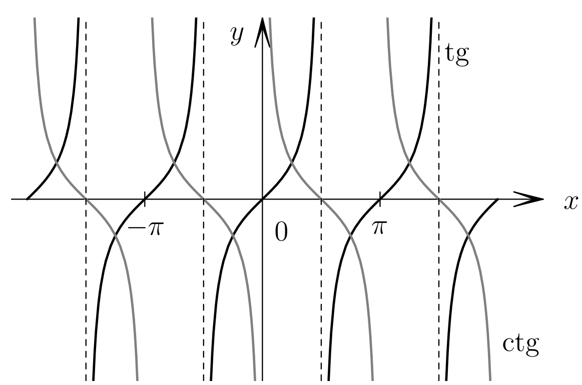
A ctg függvény grafikonja a $(0,\pi)$ intervallumon, és néhány tulajdonsága:



A ctg függvény

- páratlan,
- π szerint periodikus,
- $\downarrow$ $(0,\pi)$-n,
- szigorúan konvex $\big(0,\frac{\pi}{2}\big)$-en,
  szigorúan konkáv $\big(\frac{\pi}{2},\pi\big)$-n,
- $\frac{\pi}{2}$ inflexiós pont,
- $\lim\limits_{x\to 0+0}\operatorname{ctg} x = +\infty$ és $\lim\limits_{x\to \pi-0}\operatorname{ctg} x = -\infty$.

Az alábbi ábrán a tg és a ctg függvények grafikonjait szemléltetjük:



A tg és a ctg függvények grafikonjai a egymásból az x tengelyre vonatkozó tükrözéssel és eltolással származtathatók.

Trigonometrikus függvények inverzei (arkuszfüggvények)

Megjegyzés. A trigonometrikus függvények mindegyike periodikus, ezért egyikük sem invertálható. Mind a négy függvénynek vannak azonban olyan alkalmas intervallumra vonatkozó leszűkítéseik, amelyeken a függvények szigorúan monotonok, ezért invertálhatók. Ki fogunk választani egy-egy ilyen intervallumot, és ezekre vonatkozó leszűkítéseket invertáljuk. Az így kapott függvényeket **arkuszfüggvényeknek** nevezzük. (Az *arcus* szó — latinul ívet jelent — azt jelzi, hogy a függvények helyettesítési értékei bizonyos körív hosszával hozható kapcsolatba.)

Definíció. *A szigorúan monoton*

$$\sin_{|\,[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]}, \quad \cos_{|\,[0,\pi]}, \quad \operatorname{tg}_{\,|\,(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})}, \quad \operatorname{ctg}_{\,|\,(0,\pi)}$$

függvények inverzeit rendre ***arkuszszinusz-, arkuszkoszinusz, arkusztangens-, arkusz-kotangens-függvényeknek*** *nevezzük és így jelöljük:*

$$\operatorname{arc\,sin} := \left(\sin_{|\,[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]}\right)^{-1}, \qquad \operatorname{arc\,cos} := \left(\cos_{|\,[0,\pi]}\right)^{-1},$$
$$\operatorname{arc\,tg} := \left(\operatorname{tg}_{\,|\,(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})}\right)^{-1}, \qquad \operatorname{arc\,ctg} := \left(\operatorname{ctg}_{\,|\,(0,\pi)}\right)^{-1}.$$

Emlékeztetünk arra, hogy ha egy invertálható függvényt és annak inverzét egy koordinátarendszerben ábrázoljuk (feltéve azt, hogy a tengelyeken az egységek egyenlő hosszúak), akkor a szóban forgó függvények grafikonjai egymás tükörképei az $y = x$ egyenletű szögfelező egyenesre vonatkozóan. Következésképpen mindegyik arkuszfüggvény grafikonját a neki megfelelő trigonometrikus függvény (már ismert) grafikonjából kapjuk meg.

Az $\operatorname{arc\,sin}$ **függvény** definíciójából következik, hogy tetszőleges $x \in [-1, 1]$ esetén $\operatorname{arc\,sin} x$ az a $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ intervallumba eső y szög, amelynek a szinusza x-szel egyenlő, azaz

$$\boxed{\begin{array}{ccccc} \operatorname{arc\,sin} x & = & y & \Longleftrightarrow & \sin y = x. \\ \big(x \in [-1,1]\big) & & \big(y \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]\big) & & \end{array}}$$

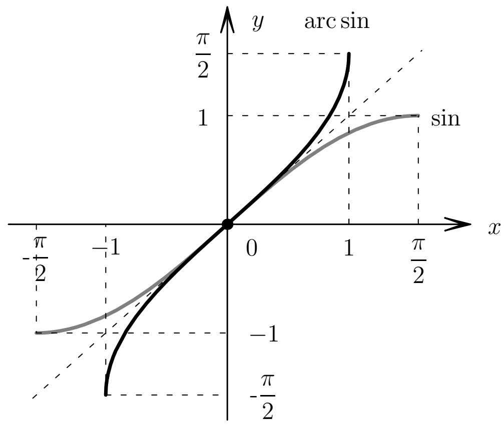
Az $\operatorname{arc\,sin}$ függvény *folytonos* $[-1, 1]$*-en* (l. az „inverz függvény folytonosságára” vonatkozó tételt), a függvény *deriválhatósága* pedig egyszerűen adódik az inverz függvény deriválási szabályából: Legyen $y \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ és $\sin y = x \in [-1, 1]$, azaz $y = \operatorname{arc\,sin} x$. Mivel $\sin' y = \cos y > 0$, ha $y \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$, ezért minden $x \in (-1, 1)$ esetén $\operatorname{arc\,sin} \in D\{x\}$ és

$$\operatorname{arc\,sin}' x = \frac{1}{\sin' y} = \frac{1}{\cos y} = \frac{1}{\sqrt{1 - \sin^2 y}} = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}},$$

azaz

$$\boxed{\operatorname{arc\,sin}' x = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}} \quad \big(x \in (-1, 1)\big)}. \tag{4}$$

A következő ábrán szemléltetjük az $\operatorname{arc\,sin}$ függvény grafikonját, és felsoroljuk néhány fontos tulajdonságát:



Az arc sin **függvény**

- $\mathcal{D}_{\text{arc sin}} = [-1,1]$, $\mathcal{R}_{\text{arc sin}} = \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$,
- folytonos $[-1,1]$-en,
- deriválható $(-1,1)$-en, és
  $$\text{arc sin}' x = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \quad \big(x \in (-1,1)\big),$$
- $\uparrow$ $[-1,1]$-en,
- szigorúan konkáv $[-1,0]$-n, szigorúan konvex $[0,1]$-en,
- 0 inflexiós pont.

Az arc cos **függvény** definíciójából következik, hogy

$$\boxed{\begin{array}{ccccc} \text{arc cos}\, x & = & y & \iff & \cos y = x. \\ \big(x \in [-1,1]\big) & & \big(y \in [0,\pi]\big) & & \end{array}}$$

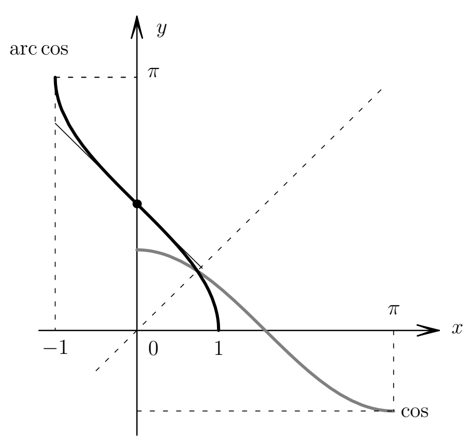
Az (2) azonosságok felhasználásával igazolható, hogy

$$\boxed{\text{arc sin}\, x + \text{arc cos}\, x = \frac{\pi}{2} \quad \big(x \in [-1,1]\big)}. \tag{5}$$

Az inverz függvény folytonosságára vonatkozó tétel alapján az arc cos függvény *folytonos* $[-1,1]$-*en.* A (5) és a (4) képletekből pedig az következik, hogy minden $x \in (-1,1)$ esetén arc cos $\in D\{x\}$ és

$$\boxed{\text{arc cos}' x = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \quad \big(x \in (-1,1)\big)}.$$

A következő ábrán szemléltetjük az arc cos függvény grafikonját, és felsoroljuk néhány fontos tulajdonságát:



Az arc cos **függvény**

- $\mathcal{D}_{\text{arc cos}} = [-1,1]$, $\mathcal{R}_{\text{arc cos}} = [0,\pi]$,
- folytonos $[-1,1]$-en,
- deriválható $(-1,1)$-en, és
  $$\text{arc cos}' x = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \quad \big(x \in (-1,1)\big),$$
- $\downarrow$ $[-1,1]$-en,
- szigorúan konvex $[-1,0]$-n, szigorúan konkáv $[0,1]$-en,
- 0 inflexiós pont.

Az arc tg **függvény** definíciójából és a korábbi eredményeinkből azonnal következik, hogy

$$\mathcal{D}_{\text{arc tg}} = \mathbb{R}, \quad \mathcal{R}_{\text{arc tg}} = \left(-\tfrac{\pi}{2}, \tfrac{\pi}{2}\right), \quad \text{arc tg} \uparrow \text{ és folytonos } \mathbb{R}\text{-en},$$

$$\boxed{\begin{array}{lccc} \operatorname{arc\,tg} x & = & y & \iff \quad \operatorname{tg} y = x, \\ \big(x \in \mathbb{R}\big) & & \big(y \in \left(-\tfrac{\pi}{2}, \tfrac{\pi}{2}\right)\big) & \end{array}}$$

továbbá

$$\lim_{x \to -\infty} \operatorname{arc\,tg} x = -\frac{\pi}{2} \quad \text{és} \quad \lim_{x \to +\infty} \operatorname{arc\,tg} x = +\frac{\pi}{2}.$$

Az utóbbi két állítás azt jelenti, hogy az $y = -\frac{\pi}{2}$ (illetve az $y = \frac{\pi}{2}$) egyenletű egyenes az arc tg függvény aszimptotája a $(-\infty)$-ben (illetve a $(+\infty)$-ben).

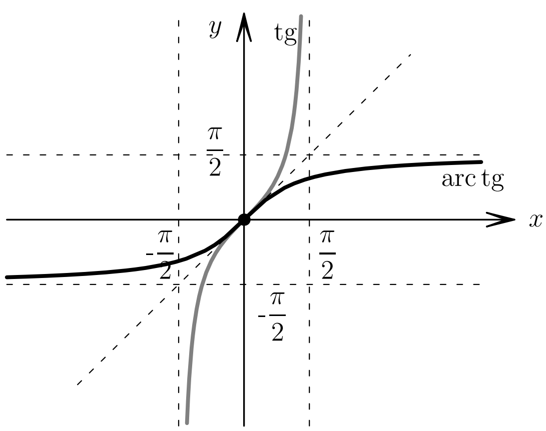
Mivel minden $y \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ esetén $\operatorname{tg}' y = \frac{1}{\cos^2 y} > 0$, ezért minden $x = \operatorname{tg} y \in \mathbb{R}$ pontban az arc tg függvény deriválható és az inverz függvény deriválási szabálya alapján

$$\operatorname{arc\,tg}' x = \frac{1}{\operatorname{tg}' y} = \cos^2 y = \frac{1}{1 + \operatorname{tg}^2 y} = \frac{1}{1 + x^2},$$

azaz

$$\boxed{\operatorname{arc\,tg}' x = \frac{1}{1 + x^2} \quad (x \in \mathbb{R})}.$$

A következő ábrán szemléltetjük az arc tg függvény grafikonját, és felsoroljuk néhány fontos tulajdonságát:



Az arc tg **függvény**

- $\mathcal{D}_{\text{arc tg}} = \mathbb{R}$, $\mathcal{R}_{\text{arc tg}} = \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$,
- folytonos $\mathbb{R}$-en,
- deriválható $\mathbb{R}$-en, és
  $$\operatorname{arc\,tg}' x = \frac{1}{1 + x^2} \quad \big(x \in \mathbb{R}\big),$$
- $\uparrow$ $\mathbb{R}$-en,
- szigorúan konvex $(-\infty, 0]$-n,
  szigorúan konkáv $[0, +\infty)$-en,
- 0 inflexiós pont,
- $y = \pm\frac{\pi}{2}$ aszimptota a $(\pm\infty)$-ben.

Az arc ctg **függvény** definíciójából és a korábbi eredményeinkből azonnal következik, hogy

$$\mathcal{D}_{\text{arc ctg}} = \mathbb{R}, \quad \mathcal{R}_{\text{arc ctg}} = (0, \pi), \quad \text{arc ctg} \downarrow \text{ és folytonos } \mathbb{R}\text{-en},$$

$$\boxed{\begin{array}{lccc} \operatorname{arc\,ctg} x & = & y & \iff \quad \operatorname{ctg} y = x, \\ \big(x \in \mathbb{R}\big) & & (y \in (0, \pi)) & \end{array}}$$

továbbá

$$\lim_{x \to -\infty} \operatorname{arc\,ctg} x = \pi \quad \text{és} \quad \lim_{x \to +\infty} \operatorname{arc\,ctg} x = 0.$$

Az utóbbi két állítás azt jelenti, hogy az $y = \pi$ (illetve az $y = 0$) egyenletű egyenes az arc ctg függvény aszimptotája $(-\infty)$-ben (illetve $(+\infty)$-ben).

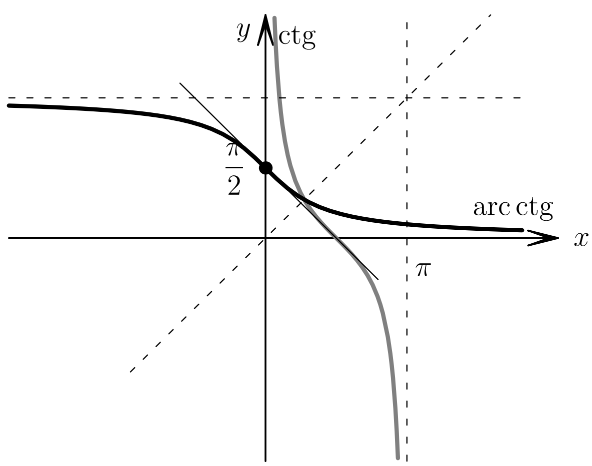
A (3) azonosságokból következik, hogy az arc tg és az arc ctg függvény között a következő összefüggés áll fenn:

$$\boxed{\operatorname{arc\,tg} x + \operatorname{arc\,ctg} x = \frac{\pi}{2} \quad (x \in \mathbb{R})},$$

ezért arc ctg $\in D(\mathbb{R})$, és

$$\boxed{\operatorname{arc\,ctg}' x = -\frac{1}{1+x^2} \quad (x \in \mathbb{R})}.$$

Most szemléltetjük az arc ctg függvény grafikonját, és felsoroljuk néhány fontos tulajdonságát:



Az arc ctg **függvény**

- $\mathcal{D}_{\text{arc ctg}} = \mathbb{R}$, $\mathcal{R}_{\text{arc ctg}} = (0, \pi)$,
- folytonos $\mathbb{R}$-en,
- deriválható $\mathbb{R}$-en, és

  $\operatorname{arc\,ctg}' x = -\dfrac{1}{1+x^2} \quad \big(x \in \mathbb{R}\big)$,
- $\downarrow$ $\mathbb{R}$-en,
- szigorúan konkáv $(-\infty, 0]$-n,

  szigorúan konvex $[0, +\infty)$-en,
- 0 inflexiós pont,
- $y = \pi$ aszimptota a $(-\infty)$-ben,
- $y = 0$ aszimptota a $(+\infty)$-ben.

Hiperbolikus függvények és inverzeik

• Hiperbolikus függvények

Emlékeztetünk arra, hogy a **szinuszhiberbolikusz-** és a **koszinuszhiberbolikusz-függvényt** az egész $\mathbb{R}$-en konvergens hatványsor összegfüggvényeként értelmeztük:

$$\operatorname{sh} x := \operatorname{sh}(x) := x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \cdots = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} \quad (x \in \mathbb{R}),$$

$$\operatorname{ch} x := \operatorname{ch}(x) := 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{x^{2k}}{(2k)!} \quad (x \in \mathbb{R}).$$

Az exp függvény

$$e^x := \exp(x) := 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{x^k}{k!} \quad (x \in \mathbb{R})$$

definíciójából közvetlenül következnek az alábbi fontos formulák:

$$\operatorname{sh} x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}, \qquad \operatorname{ch} x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}, \qquad (x \in \mathbb{R}). \tag{6}$$

A hiperbolikus függvények sok rokon vonást mutatnak a trigonometrikus függvényekkel, ezekre utalnak az elnevezések. Az (6) formulák, valamint az

$$e^{x+y} = e^x \cdot e^y \qquad (x, y \in \mathbb{R})$$

alapvető képlet felhasználásával egyszerűen bizonyíthatók a trigonometrikus függvényekhez hasonló alábbi állítások:

1^o A sh *páratlan*, a ch pedig *páros* függvény.

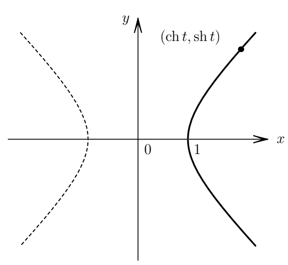
2^o *Addíciós képletek*:

$$\begin{aligned} \operatorname{sh}(x+y) &= \operatorname{sh} x \operatorname{ch} y + \operatorname{ch} x \operatorname{sh} y \qquad (x, y \in \mathbb{R}), \\ \operatorname{ch}(x+y) &= \operatorname{ch} x \operatorname{ch} y + \operatorname{sh} x \operatorname{sh} y \qquad (x, y \in \mathbb{R}). \end{aligned}$$

3^o *Négyzetes összefüggés*:

$$\operatorname{ch}^2 x - \operatorname{sh}^2 x = 1 \qquad (x \in \mathbb{R}).$$

Megjegyzés. A négyzetes összefüggés geometriai tartalma a következő:



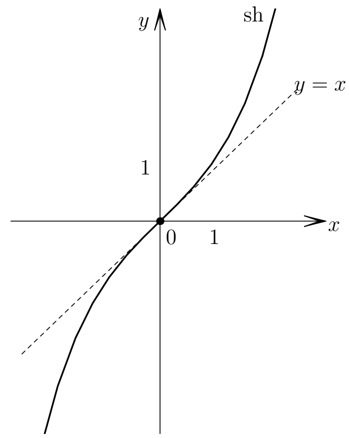
Minden $t \in \mathbb{R}$ valós szám esetén az $(x, y) = (\operatorname{ch} t, \operatorname{sh} t)$ síkbeli pont rajta van az $x^2 - y^2 = 1$ $(x > 0)$ egyenletű hiperbolaágon (innen származik a szóban forgó függvények nevében szereplő „hiperbolikus” jelző).

4^o A sh és a ch függvény differenciálható (tehát folytonos is) $\mathbb{R}$-en, és $\operatorname{sh}' = \operatorname{ch}$, $\operatorname{ch}' = \operatorname{sh}$.

A differenciálszámítás eszköztárának a felhasználásával vizsgálhatjuk a sh és a ch függvény analitikus és „alaki” tulajdonságait. Most a részletek mellőzésével felsoroljuk ezeknek a függvényeknek a tulajdonságait, majd azok felhasználásával ábrázoljuk a grafikonjaikat.

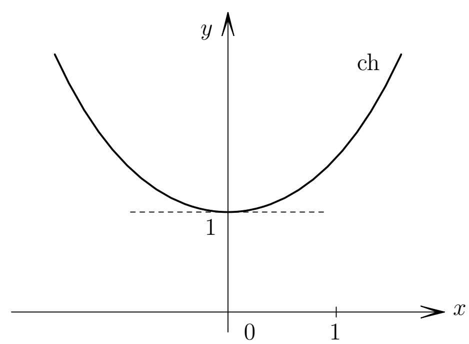
A sh **függvény**

- $\mathcal{D}_{\operatorname{sh}} = \mathbb{R}$, $\mathcal{R}_{\operatorname{sh}} = \mathbb{R}$,
- páratlan függvény,
- deriválható $\mathbb{R}$-en, és $\operatorname{sh}' x = \operatorname{ch} x \geq 1 > 0$ $\big(x \in \mathbb{R}\big)$, $\operatorname{sh}' 0 = \operatorname{ch} 0 = 1$,
- $\uparrow$ $\mathbb{R}$-en,
- szigorúan konkáv $(-\infty, 0]$-n, szigorúan konvex $[0, +\infty)$-en,
- 0 inflexiós pont.



A ch **függvény**

- $\mathcal{D}_{\operatorname{ch}} = \mathbb{R}$, $\mathcal{R}_{\operatorname{ch}} = [1, +\infty)$,
- páros függvény,
- deriválható $\mathbb{R}$-en, és $\operatorname{ch}' x = \operatorname{sh} x$ $\big(x \in \mathbb{R}\big)$, $\operatorname{ch}' 0 = \operatorname{sh} 0 = 0$,
- $\downarrow$ $(-\infty, 0)$-n, $\uparrow$ $(0, +\infty)$-en,
- szigorúan konvex $\mathbb{R}$-en,
- 0 abszolút minimumhely.



Megjegyzés. A ch függvény képét **láncgörbének** is nevezik, mert egy homogén, hajlékony, nyúlásmentes, két végén felfüggesztett fonal (lánc) ilyen alakot vesz fel.

A **tangenshiperbolikusz-** és a **kotengenshiperbolikusz-függvényeket** a tg és a ctg függvények mintájára értelmezzük:

$$\operatorname{th} x := \operatorname{th}(x) := \frac{\operatorname{sh} x}{\operatorname{ch} x} \ \big(x \in \mathbb{R}\big), \qquad \operatorname{cth} x := \operatorname{cth}(x) := \frac{\operatorname{ch} x}{\operatorname{sh} x} \ \big(x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}\big).$$

(A definícióknál figyelembe vettük azt, hogy minden $x \in \mathbb{R}$-re $\operatorname{ch} x \neq 0$, és $\operatorname{sh} x = 0 \iff x = 0$.)

Mindkét függvény páratlan, ezért a tulajdonságaikat elég a $(0, +\infty)$ intervallumon megállapítani. Meg kell még vizsgálni a $\lim\limits_{+\infty} \operatorname{th}$, a $\lim\limits_{+\infty} \operatorname{cth}$ és a $\lim\limits_{0+0} \operatorname{cth}$ határértékeket. Mivel

$$\operatorname{th} x = \frac{\operatorname{sh} x}{\operatorname{ch} x} \overset{(6)}{=} \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} = \frac{1 - e^{-2x}}{1 + e^{-2x}}, \quad \lim_{x \to +\infty} e^{-2x} = 0, \quad \operatorname{cth} x = \frac{1}{\operatorname{th} x} \quad \text{és} \quad \lim_{x \to 0+0} \operatorname{sh} x = 0,$$

ezért

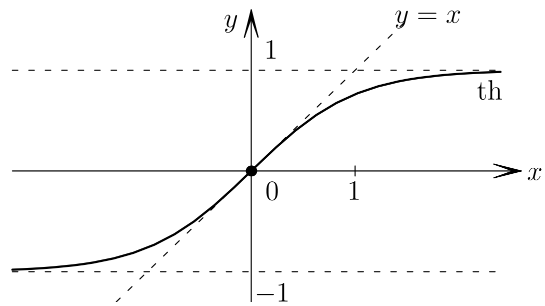
$$\lim_{x \to +\infty} \operatorname{th} x = 1, \quad \lim_{x \to +\infty} \operatorname{cth} x = 1 \quad \text{és} \quad \lim_{x \to 0+0} \operatorname{cth} x = +\infty.$$

A th függvény

- $\mathcal{D}_{\mathrm{th}} = \mathbb{R}$, $\mathcal{R}_{\mathrm{th}} = (-1,1)$,
- páratlan függvény,
- deriválható $\mathbb{R}$-en, és

  $\mathrm{th}'x = \dfrac{1}{\mathrm{ch}^2 x} \quad \big(x \in \mathbb{R}\big)$, $\mathrm{th}'0 = 1$,
- $\uparrow$ $\mathbb{R}$-en,
- szigorúan konvex $(-\infty, 0]$-n,

  szigorúan konkáv $[0, +\infty)$-en,
- 0 inflexiós pont,
- $y = \pm 1$ aszimptota $(\pm\infty)$-ben.



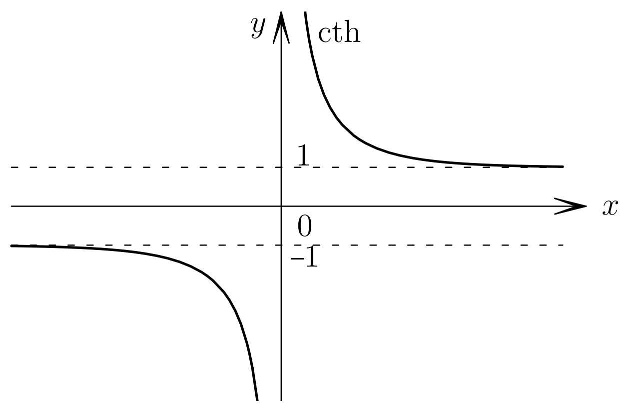
A cth függvény

- $\mathcal{D}_{\mathrm{cth}} = \mathbb{R} \setminus \{0\}$,

  $\mathcal{R}_{\mathrm{cth}} = (-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$,
- páratlan függvény,
- deriválható, és

  $\mathrm{cth}'x = -\dfrac{1}{\mathrm{sh}^2 x} \quad \big(x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}\big)$,
- $\downarrow$ $(-\infty, 0)$-n és $\downarrow$ $(0, +\infty)$-en,
- szigorúan konkáv $(-\infty, 0]$-n,

  szigorúan konvex $[0, +\infty)$-en,
- $y = \pm 1$ aszimptota $(\pm\infty)$-ben.

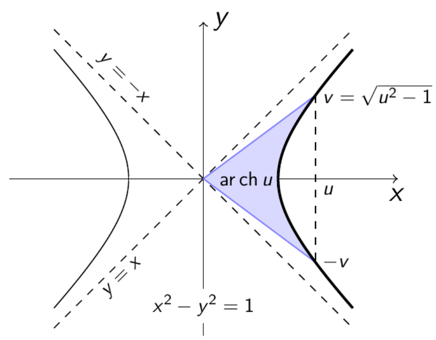


• Hiperbolikus függvények inverzei (areafüggvények)

Definíció. *A* $\mathrm{sh}, \mathrm{ch}_{|[0,+\infty)}, \mathrm{th}, \mathrm{cth}$ *függvények invertálhatók. Az inverzeiket rendre* ***areaszinuszhiperbolikusz-, areakoszinuszhiperbolikusz-, areatangenshiperbolikusz-, areakotangenshiperbolikusz-függvényeknek*** *nevezzük és így jelöljük:*

$$\mathrm{ar\,sh} := \mathrm{sh}^{-1}, \quad \mathrm{ar\,ch} := \Big(\mathrm{ch}_{|[0,+\infty)}\Big)^{-1}, \quad \mathrm{ar\,th} := \mathrm{th}^{-1}, \quad \mathrm{ar\,cth} := \mathrm{cth}^{-1}.$$

Megjegyzés. Az inverz hiperbolikus függvények nevében megjelenő *area*=terület szó azt jelzi, hogy az $\mathrm{ar\,ch}\, u$ mennyiség egy bizonyos síkidom területével egyenlő. Pontosabban: Legyen $u \ge 1$ és $v = \sqrt{u^2 - 1}$. Jelölje A_u azt a tartományt, amelyet az origót az (u, v) és $(u, -v)$ pontokkal összekötő két szakasz, valamint az $x^2 - y^2 = 1$ hiperbolának az (u, v) és $(u, -v)$ pontok közötti íve határol. Meg lehet mutatni, hogy az A_u tartomány területe éppen $\mathrm{ar\,ch}\, u$-val egyenlő. Ezt szemlélteti a következő ábra

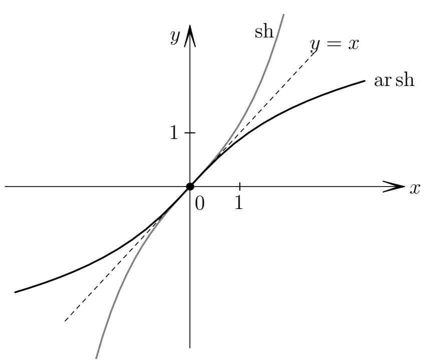


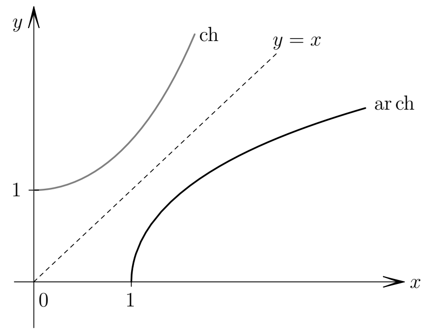
Az inverz függvény deriválási szabályából következik, hogy mindegyik areafüggvény az értelmezési tartományának minden belső pontjában deriválható, és

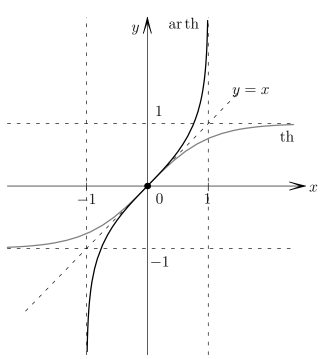
$$\mathrm{ar\,sh}' x = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}} \quad (x \in \mathbb{R}), \qquad \mathrm{ar\,ch}' x = \frac{1}{\sqrt{x^2-1}} \quad \big(x \in (1, +\infty)\big),$$

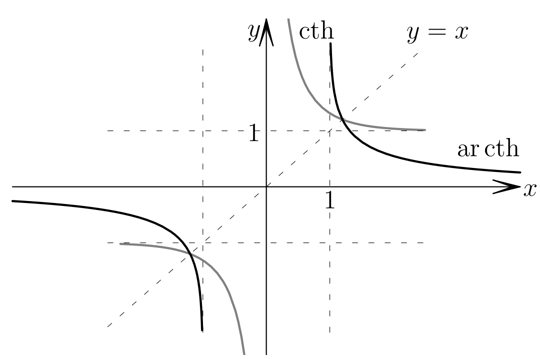
$$\mathrm{ar\,th}' x = \frac{1}{1-x^2} \quad \big(x \in (-1, 1)\big), \qquad \mathrm{ar\,cth}' x = \frac{1}{1-x^2} \quad \big(|x| > 1\big).$$

Az areafüggvények alábbi ábrákon szemléltetett analitikus és geometriai tulajdonságai a korábbiakhoz hasonlóan állapíthatók meg.









A hiperbolikus függvényeket ki lehet fejezni az exp függvénnyel. Az exp függvény inverze az ln függvény, ezért nem meglepő, hogy az areafüggvényeket az ln segítségével is fel tudjuk írni.

Tétel. *A következő azonosságok teljesülnek:*

$$\begin{aligned} \operatorname{ar\,sh} x &= \ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right) \qquad && (x\in\mathbb{R})\,, \\ \operatorname{ar\,ch} x &= \ln\left(x+\sqrt{x^2-1}\right) \qquad && (x\in[1,+\infty))\,, \\ \operatorname{ar\,th} x &= \tfrac{1}{2}\cdot\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right) \qquad && (x\in(-1,1))\,, \\ \operatorname{ar\,cth} x &= \tfrac{1}{2}\cdot\ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right) \qquad && (|x|>1)\,. \end{aligned}$$

Bizonyítás. A bizonyítások hasonlók, ezért csak az első azonosság igazolását részletezzük.

Legyen $x\in\mathbb{R}$ és $y := \operatorname{ar\,sh} x$, azaz $x = \operatorname{sh} y = \dfrac{e^y-e^{-y}}{2}$. Bevezetve a $t := e^y$ jelölést, t-re a $t^2-2tx-1=0$ másodfokú egyenletet kapjuk. Mivel $t>0$, ezért $t=e^y=x+\sqrt{x^2+1}$, azaz

$$y = \operatorname{ar\,sh} x = \ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right) \qquad (x\in\mathbb{R}).\ \blacksquare$$

Megjegyzés. A fenti képletek jelentősége a következő: Ha az ln függvény helyettesítési értékeit ki tudjuk számolni, akkor az areafüggvények helyettesítési értékei is számolhatók.