Valószínűségszámítás zh.

2021. november 3.

1) Az alligerongia betegség magyarországi gyakorisága 1 ezrelék. Vérvizsgálat alapján egy alligerong beteg esetében 99 % valószínűséggel mutatják ki a betegséget, egy egészséges ember esetében viszont 5 %-os hibaaránnyal dolgoznak. Mennyi a valószínűsége, hogy egy vérvizsgálat alapján betegnek talált ember alligerong? /10 pont/

Mo.:

Az adatok:

Legyen A: egy ember alligerong beteg, B: egy embert vérvizsgálata alapján betegnek találtak. $P(A) = 0{,}001$; $P(B|A) = 0{,}99$; $P(B|\bar{A}) = 0{,}05$.

Kérdés: $P(A|B) =?$

Alkalmazzuk a Bayes-formulát!

$$P(A|B) = \frac{P(B|A)P(A)}{P(B|A)P(A) + P(B|\bar{A})P(\bar{A})} = \frac{0{,}99 \cdot 0{,}001}{0{,}99 \cdot 0{,}001 + 0{,}05 \cdot 0{,}999} = \frac{99}{99 + 4995} = \frac{99}{5094} = \frac{11}{566} = 1{,}9435\%$$

2) X_1 és X_2 független, azonos eloszlású valószínűségi változók. Tudjuk, hogy

$$P(X_1 = -1) = 0{,}4;\ P(X_1 = 0) = 0{,}1;\ P(X_1 = 2) = 0{,}5$$

a) Milyen értéket vesz fel X_1 eloszlásfüggvénye az 1 helyen? /2 pont/

b) Mennyi $X_1 + X_2$ várható értéke? /4 pont/

c) Mennyi $X_1 - X_2$ szórásnégyzete? /6 pont/

Mo.:

a) $F_{X_1}(1) = P(X_1 < 1) = P(X_1 = -1) + P(X_1 = 0) = 0{,}5$

b) $EX_1 = -1 \cdot P(X_1 = -1) + 0 \cdot P(X_1 = 0) + 2 \cdot P(X_1 = 2) = -0{,}4 + 0 + 1 = 0{,}6 \Rightarrow E(X_1 + X_2) = EX_1 + EX_2 = 2EX_1 = 1{,}2$

c) $EX_1^2 = 1 \cdot P(X_1 = -1) + 0 \cdot P(X_1 = 0) + 4 \cdot P(X_1 = 2) = 0{,}4 + 0 + 2 = 2{,}4 \Rightarrow D^2X_1 = EX_1^2 - (EX_1)^2 = 2{,}4 - 0{,}6^2 = 2{,}04 \Rightarrow D^2(X_1 - X_2) = D^2X_1 + D^2X_2 = 2D^2X_1 = 4{,}08$ (mivel függetlenek)

3) Mennyi a valószínűsége, hogy 3 független kockadobásnál mind a 3 dobás 6-os, feltéve, hogy tudjuk, hogy legalább az egyik dobás 6-os? /10 pont/

Mo.:

Legyen A: 3 független kockadobásnál mind a 3 dobás 6-os, B: 3 független kockadobásnál legalább az egyik dobás 6-os.

Kérdés: $P(A|B) =?$

Függetlenség miatt $P(A) = \left(\frac{1}{6}\right)^3$, $P(A) = 1 - P(\bar{A}) = 1 - \left(\frac{5}{6}\right)^3$.

Mivel $A \subset B$, ezért $P(A|B) = \frac{P(AB)}{P(B)} = \frac{P(A)}{P(B)} = \frac{\left(\frac{1}{6}\right)^3}{1-\left(\frac{5}{6}\right)^3} = \frac{1}{6^3-5^3} = \frac{1}{91} = 1{,}0989\%$

4) Az X valószínűségi változó a $(0,c)$ intervallumon veszi fel értékeit. Sűrűségfüggvénye ott *f(t)=6t* alakú. Adjuk meg c értékét és annak valószínűségét, hogy $0{,}1 < X < 3$! /10 pont/

Mo.:

A sűrűségfüggvény itt csak a $(0,c)$ intervallumon nem 0, ezért a sűrűségfüggvény tulajdonsága miatt $1 = \int_0^c 6t dt = [3t^2]_0^c = 3c^2 \Rightarrow c = \frac{1}{\sqrt{3}} = 0{,}57735.$ És valóban sűrűségfüggvényt kaptunk (nemnegatív és integrálja 1). Mivel $c < 3$, ezért

$$P(0{,}1 < X < 3) = P(0{,}1 < X) = \int_{0,1}^{c} 6t dt = [3t^2]_{0,1}^{c} = 1 - 3 \cdot 0{,}1^2 = 0{,}97.$$

5) Az X valószínűségi változó Poisson-eloszlású 2 várható értékkel. Adjuk meg c értékét és annak valószínűségét, hogy $0{,}1 < X < 3$! /6 pont/

Mo.:

Helyesen a kérdés „Adjuk meg annak valószínűségét, hogy $0{,}1 < X < 3$!”

Mivel *X* nemnegatív egész értékeket vehet fel és paramétere 2, ezért

$$P(0{,}1 < X < 3) = P(X = 1) + P(X = 2) = 2 \cdot e^{-2} + \frac{2^2 \cdot e^{-2}}{2} = 4 \cdot e^{-2} = 0{,}541341$$

6) Legyenek X, Y független, $N(3,2^2)$ illetve $N(5,1)$ eloszlású valószínűségi változók.
   a) Fejezze ki a $P(X + 2Y < 12)$ valószínűséget a standard normális eloszlás eloszlásfüggvényének segítségével! /4 pont/
   b) Mennyi $X + Y$ várható értéke? /3 pont/
   c) Mennyi $2X - 3Y + 8$ szórásnégyzete? /5 pont/

Mo.:

A normális eloszlás két paramétere a várható érték és a szórásnégyzet, ezért $EX = 3, D^2X = 4, EY = 5, D^2Y = 1$. Így

a) mivel független normálisak összege is normális eloszlású $P(X + 2Y < 12) = P\left(\frac{X+2Y-13}{\sqrt{4+4\cdot 1}} < \frac{12-13}{\sqrt{4+4\cdot 1}}\right) = \Phi\left(\frac{-1}{\sqrt{8}}\right) = 1 - \Phi\left(\frac{1}{\sqrt{8}}\right)$,

b) $E(X + Y) = 3 + 5 = 8$,

c) *A* függetlenség miatt $D^2(2X - 3Y + 8) = 4 \cdot D^2X + 9 \cdot D^2Y = 4 \cdot 4 + 9 \cdot 1 = 25.$