7. Newton-módszer

7.1. Feladat

Az $f(x) = e^{2x} + 4x$ függvény gyökének közelítésére írjuk fel a Newton-módszert! Igazoljuk a módszer konvergenciáját a gyök valamely környezetében!

A Newton-módszert az

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

képlet segítségével írhatjuk fel. Mivel jelen esetben $f'(x) = 2e^{2x} + 4$, ezért a függvényre felírt iteráció az

$$x_{n+1} = x_n - \frac{e^{2x_n} + 4x_n}{2e^{2x_n} + 4}$$

alakot ölti. Most a Bolzano-tétel segítségével keressünk egy intervallumot amely tartalmazza a gyököt. A $[-1, 0]$ jó választás, ugyanis

$$\begin{aligned} f(-1) &= e^{-2} - 4 < 0 \\ f(0) &= e^0 + 4 \cdot 0 = 1 > 0. \end{aligned}$$

Hátra van még a módszer konvergenciájának igazolása. Ehhez használjuk a Newton-módszerre vonatkozó monoton konvergencia tételt. Vizsgáljuk meg f első, és második deriváltjainak viselkedését a $[-1, 0]$ intervallumon:

$$\begin{aligned} f'(x) &= 2e^{2x} + 4 > 0 \qquad && (x \in [-1, 0]) \\ f''(x) &= 4e^{2x} > 0 \qquad && (x \in [-1, 0]) \end{aligned}$$

Az első és második derivált tehát állandó előjelű. Ellenőriznünk kell még a tételben szereplő kezdőpontra vonatkozó feltételt. Felhasználva, hogy $f''(x) > 0$ bármely $x \in [-1, 0]$ esetén:

$$f(x_0) \cdot f''(x_0) > 0 \iff f(x_0) > 0$$

Mivel azonban $f'(x) > 0$, azaz f szigorúan monoton növekvő

$$f(x_0) > 0 \iff x_0 > x^*$$

vagyis $x_0 > x^*$ esetén a Newton-módszer által generált (x_n) sorozat monoton fogyóan konvergál az x^* gyökhöz.

7.2. Feladat

Az $f(x) = \cos x - 4x + 2$ függvény gyökének közelítésére írjuk fel a Newton-módszert! Igazoljuk a módszer konvergenciáját valamely intervallumon!

A képlet alapján írjuk fel a Newton-módszert. Mivel $f'(x) = -\sin(x) - 4$, ezért az iterációt az

$$x_{n+1} = x_n - \frac{\cos x_n - 4x_n + 2}{-\sin x_n - 4}$$

alakban kapjuk. A Bolzano-tétel segítségével adjunk meg egy intervallumot, amely tartalmazza f gyökét. A $[0, \frac{\pi}{2}]$ jó választás, ugyanis

$$\begin{aligned} f(0) &= 1 + 2 = 3 > 0, \\ f\left(\frac{\pi}{2}\right) &= 0 - 2 \cdot \pi + 2 < 0. \end{aligned}$$

Most igazoljuk a konvergenciát, a monoton konvergencia tétel segítségével. Először is ellenőrizzük, hogy a deriváltak nem tűnnek el a $[0, \frac{\pi}{2}]$ intervallumon.

$$\begin{aligned} f'(x) &= -\sin x - 4 < 0 & \qquad (x \in [0, \pi/2]) \\ f''(x) &= -\cos x \leq 0 & \qquad (x \in [0, \pi/2]) \end{aligned}$$

Mivel $f''\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$, ezért kénytelenek vagyunk szűkíteni az intervallumot. Tekintsük a $[0, \frac{\pi}{2}]$ intervallum helyett a $[0, \frac{\pi}{2} - 0.1]$ intervallumot. Ez továbbra is tartalmazza a gyököt, ugyanis $f\left(\frac{\pi}{2} - 0.1\right) \approx -0.84176 < 0$. Ekkor azonban

$$\begin{aligned} f'(x) &= -\sin x - 4 < 0 & \qquad \left(x \in \left[0, \frac{\pi}{2} - 0.1\right]\right) \\ f''(x) &= -\cos x < 0 & \qquad \left(x \in \left[0, \frac{\pi}{2} - 0.1\right]\right) \end{aligned}$$

azaz a deriváltak a kijelölt intervallumon állandó előjelűek. Hátra van még az x_0-ra vonatkozó feltétel. Itt felhasználva, hogy $f''(x) < 0$ és $f'(x) < 0$, azaz f monoton csökken:

$$f(x_0) \cdot f''(x_0) > 0 \iff f(x_0) < 0 \iff x_0 > x^*.$$

Tehát $x_0 > x^*$ esetén a Newton-módszer által generált (x_n) sorozat monoton fogyóan konvergál az x^* gyökhöz.