# 10. Általánosított inverz

## 10.1. Feladat

Számítsuk ki a következő mátrixok általánosított inverzét!

a) $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -1 & 0 & 2 \end{bmatrix}$ b) $B = \begin{bmatrix} 3 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$

## 10.1. Megjegyzés

Az $A \in \mathbb{R}^{n\times m}$ mátrixhoz és $b \in \mathbb{R}^n$ vektorhoz tartozó $Ax = b$ lineáris egyenletrendszer megoldásával idáig csak az $n = m$ és $\det(A) \neq 0$ esetben foglalkoztunk. Sok esetben viszont hasznos a lehet általánosítani a megoldás fogalmát, az általánosítás segítségével ugyanis megoldást rendelhetünk a

- a nem egyértelműen megoldható vagy inkonzisztens ($n = m, \det(A) = 0$),
- a túlhatározott ($n > m$),
- és az alulhatározott ($n < m$)

lineáris egyenletrendszerekhez. Az általánosított megoldást az inverzfogalom általánosítása segítségével nyerhetjük. Tetszőleges $A \in \mathbb{R}^{n\times m}$ mátrixhoz egyértelműen létezik úgynevezett általánosított inverz mátrix, melyet $A^+$-szal fogunk jelölni, és amely az $n = m$ és $\det(A) \neq 0$ esetben éppen $A^{-1}$-zel esik egybe (azaz tényleg a szokásos inverz mátrix általánosítása). Az $A^+ \in \mathbb{R}^{m\times n}$ mátrix meghatározása általában nem egyszerű feladat, azonban ha $A$ teljes rangú, akkor az általánosított inverzre explicit képlet létezik:

- $A \in \mathbb{R}^{n\times m}, \quad n < m, \quad \mathrm{rang}(A) = n \quad \Longrightarrow \quad A^+ = A^T(AA^T)^{-1} \in \mathbb{R}^{m\times n}$,
- $B \in \mathbb{R}^{n\times m}, \quad n > m, \quad \mathrm{rang}(B) = m \quad \Longrightarrow \quad B^+ = (B^TB)^{-1}B^T \in \mathbb{R}^{m\times n}$ .

Érdemes észrevenni, hogy a fenti általánosított inverzek hasonlóan viselkednek a szokásos inverz mátrixhoz abban az értelemben, hogy az $A$, illetve $B$ mátrixokat *egyik oldalról* megszorozva az általánosított inverzükkel, az egységmátrixot kapjuk:

- $AA^+ = I \in \mathbb{R}^{n\times n}$,
- $B^+B = I \in \mathbb{R}^{m\times m}$.

(a) Az $A$ mátrix sorrangja 2, hiszen sorai lineárisan függetlenek. Két nemnulla vektor ugyanis akkor és csak akkor lineárisan összefüggő, ha egymás skalárszorosai. Tehát $A$ teljes rangú mátrix, melynek kevesebb sora van, mint oszlopa, ezért az általánosított inverz a következő mátrix:

$$A^+ = A^T(AA^T)^{-1}.$$

Számítsuk ki a kifejezésben szereplő mátrixokat:

$$AA^T = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -1 & 0 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 0 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & 3 \\ 3 & 5 \end{bmatrix},$$

ezért $\det(A) = 6 \cdot 5 - 3 \cdot 3 = 30 - 9 = 21$, vagyis

$$(AA^T)^{-1} = \frac{1}{21} \begin{bmatrix} 5 & -3 \\ -3 & 6 \end{bmatrix},$$

ebből pedig

$$A^+ = A^T(AA^T)^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 0 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} \cdot \frac{1}{21} \begin{bmatrix} 5 & -3 \\ -3 & 6 \end{bmatrix} = \frac{1}{21} \cdot \begin{bmatrix} 8 & -9 \\ -5 & 3 \\ 4 & 6 \end{bmatrix}.$$

Ellenőrizhetjük is az eredményt, felhasználva, hogy $AA^+ = I$:

$$AA^+ = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -1 & 0 & 2 \end{bmatrix} \cdot \frac{1}{21} \cdot \begin{bmatrix} 8 & -9 \\ -5 & 3 \\ 4 & 6 \end{bmatrix} = \frac{1}{21} \cdot \begin{bmatrix} 21 & 0 \\ 0 & 21 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

(b) A $B$ mátrixnak több sora van, mint oszlopa, vizsgáljuk meg az oszlopokat. Könnyű meggondolni, hogy az oszlopvektorok lineárisan függetlenek (vizsgáljuk a nullák elhelyezkedését), ezért a mátrix teljes rangú. Az általánosított inverz ez alapján a következő alakban írható fel:

$$B^+ = (B^TB)^{-1}B^T.$$

Számítsuk ki a kifejezésben szereplő mátrixokat:

$$B^TB = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & 1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 3 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 11 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 7 \end{bmatrix}.$$

Mivel a $B^TB$ diagonális, az inverz kiszámítása nem okoz problémát:

$$(B^TB)^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{11} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{7} \end{bmatrix}.$$

Érdemes megemlíteni, hogy ha $B^TB$ diagonális, az azt jelenti, hogy $B$ oszlopvektorai merőlegesek egymásra, ebből pedig természetesen következik a korábban említett lineáris függetlenség. Ezután számítsuk ki az általánosított inverz mátrixot:

$$B^+ = (B^TB)^{-1}B^T = \begin{bmatrix} \frac{1}{11} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{7} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{3}{11} & \frac{1}{11} & 0 & \frac{1}{11} \\ 0 & -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ -\frac{1}{7} & \frac{2}{7} & \frac{1}{7} & \frac{1}{7} \end{bmatrix}.$$

Ez esetben is ellenőrizhetjük, hogy számításaink helyesek:

$$B^+B = \begin{bmatrix} \frac{3}{11} & \frac{1}{11} & 0 & \frac{1}{11} \\ 0 & -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ -\frac{1}{7} & \frac{2}{7} & \frac{1}{7} & \frac{1}{7} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 3 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

**10.2. Feladat**

(a) Határozzuk meg a $(0,1),(1,3),(2,4),(3,6)$ pontokat négyzetesen legjobban közelítő egyenest!

(b) Igaz-e, hogy az illesztett egyenes átmegy a $\left(-\frac{1}{2},\ \frac{3}{10}\right)$ ponton?

**10.2. Megjegyzés**

Az $Ax = b$ túlhatározott teljes rangú LER általánosított megoldását előállíthatjuk az $A^+$ általánosított inverz segítségével: $x := A^+b = (A^TA)^{-1}A^Tb$. Megszorozva az egyenlet mindkét oldalát $(A^TA)$-val nyerjük az ezzel ekvivalens

$$A^TAx = A^Tb$$

úgynevezett Gauss-féle normálegyenletet. Az általánosított megoldás kiszámításához általában ezt (a négyzetes mátrixú, egyértelműen megoldható) LER-t oldjuk meg. A Gauss-normálegyenlet megoldásának talán legfontosabb tulajdonsága az alábbi:

$$\|Ax - b\|_2 \ \text{minimális} \quad \Longleftrightarrow \quad A^TAx = A^Tb.$$

Gondoljuk meg, mit jelent a fenti kijelentés. Numerikus alkalmazásokban sok esetben hasznos vizsgálnunk a $b - Ax$ úgynevezett reziduumvektort, ha LER-ek közelítő megoldásával foglalkozunk. Ekkor, ha $x$ megoldása a LER-nek, akkor a $b - Ax$ nullvektor, informálisan pedig úgy fogalmazhatunk, hogy „$x$ minél közelebb van a megoldásvektorhoz, $b - Ax$ annál közelebb van a nullvektorhoz". A fentiek szerint pedig a reziduum vektor szokásos euklideszi hosszúsága akkor és csak akkor minimális, ha $x$ a Gauss-féle normálegyenlet megoldása.

(a) Azt a $p_1(x) = a_1x + a_0$ elsőfokú polinomot (egyenest) keressük, amelyre a

$$\sum_{i=0}^{3}(y_i - p_1(x_i))^2 = \sum_{i=0}^{3}(y_i - a_1x_i - a_0)^2$$

kifejezés minimális. Átfogalmazva, azt az egyenest keressük amelyre a függvényértékek hibáinak négyzetösszege minimális. A megadott pontok ismeretében írjuk fel az $a_0, a_1$ együtthatókra a $p_1(x_i) = y_i$ túlhatározott teljes rangú LER-t:

$$Xa = y \iff \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 4 \\ 6 \end{bmatrix}$$

Felírva az ehhez tartozó $X^T X a = X^T y$ Gauss-féle normálegyenletet kapjuk, hogy:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 4 \\ 6 \end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix} 4 & 6 \\ 6 & 14 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 14 \\ 29 \end{bmatrix}.$$

Az első egyenlet $\frac{3}{2}$-szeresét vonjuk ki a második egyenletből, így a második egyenletből kifejezhető $a_1$:

$$5a_1 = 8 \implies a_1 = \frac{8}{5}.$$

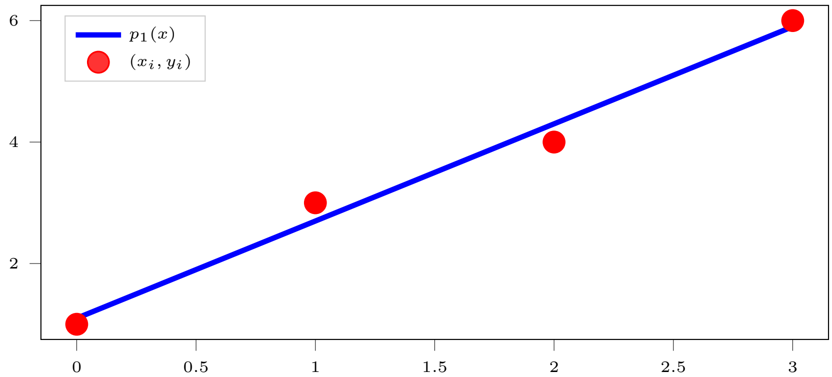
Továbbá az első egyenletből

$$4a_0 = 14 - 6 \cdot \frac{8}{5} = \frac{70 - 48}{5} = \frac{22}{5} \implies a_0 = \frac{11}{10},$$

vagyis a keresett egyenes:

$$p_1(x) = \frac{8}{5} \cdot x + \frac{11}{10}.$$

Az illesztett egyenes megtekinthető a következő ábrán.



(b) Ellenőrizzük, hogy az egyenes átmegy-e a megadott ponton. Ehhez elegendő megvizsgálnunk az egyenes egyenletét, hiszen a $p_1$ által meghatározott egyenes pontosan akkor megy át az $(x, y)$ ponton, ha $p_1(x) = y$. Eszerint

$$p_1\left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{8}{5} \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) + \frac{11}{10} = -\frac{8}{10} + \frac{11}{10} = \frac{3}{10},$$

tehát az egyenes átmegy a $\left(-\frac{1}{2}, \frac{3}{10}\right)$ ponton.

**10.3. Megjegyzés**

Az $X^TX$ mátrix és az $X^Ty$ vektorok könnyen meghatározható általános esetben is, ehhez vizsgáljuk az eredeti egyenletrendszert $m, n \in \mathbb{N}^+$):

$$\begin{bmatrix} 1 & x_0 & x_0^2 & \dots & x_0^m \\ 1 & x_1 & x_1^2 & \dots & x_1^m \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \dots & x_n^m \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \vdots \\ a_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_0 \\ y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix}.$$

Látható, hogy

$$X^TX = \begin{bmatrix} \sum 1 & \sum x_i & \sum x_i^2 & \dots & \sum x_i^m \\ \sum x_i & \sum x_i^2 & \sum x_i^3 & \dots & \sum x_i^{m+1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \sum x_i^m & \sum x_i^{m+1} & \sum x_i^{m+2} & \dots & \sum x_i^{2m} \end{bmatrix}, \qquad X^Ty = \begin{bmatrix} \sum y_i \\ \sum x_i y_i \\ \vdots \\ \sum x_i^m y_i \end{bmatrix},$$

ahol $\sum \equiv \sum_{i=0}^n$, tehát a fenti formulákban a szummák mindegyike 0-tól $n$-ig értendő.

Az előző megjegyzés szerint jelen feladat esetében használhattuk volna a következő összefüggést a $p_1$ polinom együtthatóinak meghatározására:

$$\begin{bmatrix} \sum 1 & \sum x_i \\ \sum x_i & \sum x_i^2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum y_i \\ \sum x_i y_i \end{bmatrix},$$

ahol

$$\sum 1 = \sum_{i=0}^{3} 1 = 4, \qquad \sum y_i = 1 + 3 + 4 + 6 = 14,$$

$$\sum x_i = 0 + 1 + 2 + 3 = 6, \qquad \sum x_i y_i = 0 \cdot 1 + 1 \cdot 3 + 2 \cdot 4 + 3 \cdot 6 = 29,$$

$$\sum x_i^2 = 0^2 + 1^2 + 2^2 + 3^2 = 14.$$

**10.3. Feladat**

Írjuk fel a következő pontokra

| $x_i$ | -2 | -1 | 1 | 2 |
|---|---|---|---|---|
| $y_i$ | 3 | 1 | 0 | 2 |

négyzetesen legjobban illeszkedő

(a) egyenest és

(b) parabolát!

(a) Először határozzuk meg az előzőek alapján a legjobban illeszkedő egyenest. Tudjuk, hogy az egyenes együtthatóira felírt egyenlet

$$\begin{bmatrix} \sum 1 & \sum x_i \\ \sum x_i & \sum x_i^2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum y_i \\ \sum x_i y_i \end{bmatrix}$$

alakú, ahol jelen esetben

$$\sum 1 = 4, \quad \sum x_i = 0, \quad \sum x_i^2 = 10, \quad \sum y_i = 6, \quad \sum x_i y_i = -3.$$

Behelyettesítve ezeket az értékeket kapjuk, hogy:

$$\begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 10 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 \\ -3 \end{bmatrix},$$

melyből $a_0 = \frac{3}{2}$, és $a_1 = -\frac{3}{10}$. Így a keresett egyenes:

$$p_1(x) = -\frac{3}{10} \cdot x + \frac{3}{2}.$$

(b) Most egy parabolát, azaz egy másodfokú polinomot szeretnénk a megadott pontokra illeszteni. Felírva az együtthatókhoz tartozó egyenletrendszert kapjuk, hogy:

$$\begin{bmatrix} \sum 1 & \sum x_i & \sum x_i^2 \\ \sum x_i & \sum x_i^2 & \sum x_i^3 \\ \sum x_i^2 & \sum x_i^3 & \sum x_i^4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum y_i \\ \sum x_i y_i \\ \sum x_i^2 y_i \end{bmatrix}.$$

Mivel a kitűzött feladatban

$$\sum x_i^3 = 0, \quad \sum x_i^4 = 34, \quad \sum x_i^2 y_i = 21,$$

ezért a következő LER-t kell megoldanunk:

$$\begin{bmatrix} 4 & 0 & 10 \\ 0 & 10 & 0 \\ 10 & 0 & 34 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 \\ -3 \\ 21 \end{bmatrix}.$$

A 2. egyenletből

$$a_1 = -\frac{3}{10}.$$

A megmaradó egyenletek pedig:

$$\begin{aligned} (1) &\quad 2a_0 + 5a_2 = 3 \\ (3) &\quad 10a_0 + 34a_2 = 21 \end{aligned}$$

Az (1) egyenlet ötszörösét kivonva a (3) egyenletből, majd visszahelyettesítve az (1) egyenletbe kapjuk a maradék két paramétert:

$$\begin{aligned} 9a_2 = 6 &\quad \Longrightarrow \quad a_2 = \frac{6}{9} = \frac{2}{3} \\ 2a_0 = 3 - \frac{10}{3} &\quad \Longrightarrow \quad a_0 = -\frac{1}{6} \end{aligned}$$

A keresett parabola tehát:

$$p_2(x) = \frac{2}{3}x^2 - \frac{3}{10}x - \frac{1}{6}$$

Az illesztett egyenes és parabola megtekinthető a következő ábrán.