Analízis1 ABC szakirányok, 2. zárthelyi dolgozat , 2019.05.17.

1. **Gyakorlati rész :**

1. Adott az $x_0 := 1$ és $x_{n+1} := \dfrac{x_n^2 + 15}{8}$ $(n \in \mathbb{N})$ sorozat. Konvergens–e és ha igen, mi a határértéke?

2. a) Számítsa ki az alábbi sorösszeget :

$$\sum_{k=8}^{+\infty} \frac{\sqrt[3]{k+1} - \sqrt[3]{k}}{\sqrt[3]{k^2+k}}.$$

b) Döntse el, hogy az alábbi sor konvergens vagy divergens (a válaszát indokolja) :

$$\sum_{n=1} \frac{(n+1)^{2n}}{(2n)!}.$$

3. Milyen $x \in \mathbb{R}$ számok mellett abszolút konvergens, konvergens illetve divergens az alábbi hatványsor :

$$\sum_{n=0} \frac{1}{3^n \cdot (2n+1)} \cdot (x-5)^n \ ?$$

4. Adjon meg olyan $R > 0$ számot és (a_n) sorozatot, amelyekkel :

$$\frac{x+1}{(x-1)\cdot(x+2)} = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n \cdot x^n \quad (x \in (-R; R)).$$

2. **Bizonyítással kért tétel :** Ilyen feladat idén nem lesz!!!

A Cauchy–féle gyökkritérium.

Muzsnay Zoltán

Analízis1 ABC szakirányok, 2. zárthelyi dolgozat , 2019.05.17.
Megoldások

1. *Adott az* $x_0 := 1$ *és* $x_{n+1} := \dfrac{x_n^2+15}{8}$ $(n \in \mathbb{N})$ *sorozat. Konvergens–e és ha igen, mi a határértéke?* **(10 pont)**

Megoldás :

i) A definíció alapján világos (ld. indukció), hogy a sorozat minden tagja pozitív.

Tegyük fel először, hogy a sorozat konvergens és $\lim(x_n) =: A \in \mathbb{R}$. Ekkor $\lim(x_{n+1}) = A$ és a fentiek alapján $A \in [0;+\infty)$ is igaz. A rekurzió és a konvergens sorozatokkal végzett műveleti szabályok értelmében :

$$\lim(x_{n+1}) = \frac{1}{8}\cdot(\lim(x_n^2)+15) \Longleftrightarrow A = \frac{1}{8}\cdot(A^2+15) \Longrightarrow A^2-8A+15=0 \Longleftrightarrow A_1 = 3 \in [0;+\infty);\, A_2 = 5 \in [0;+\infty).$$

Tehát ha (x_n) konvergens, akkor a határértéke csak 3 vagy 5 *lehet* .

-------------------------------3 pont-------------------------------

ii) Vizsgáljuk meg a sorozatot monotonitás szempontjából :

$$x_0 = 1 < x_1 = \frac{16}{8} = 2.$$

Igazoljuk indukcióval, hogy a sorozat szigorúan monoton nő. Az első lépés megvan, ezért tegyük fel, hogy *valamely* $n \in \mathbb{N}$ indexre teljesül, hogy

$$x_n < x_{n+1}.$$

Kell, hogy :

$$x_{n+1} < x_{n+2}$$

is igaz. Felhasználva, hogy

$$0 < x_n < x_{n+1},$$

ezért a négyzetre emeléssel igaz marad az is, hogy :

$$x_n^2 < x_{n+1}^2 \quad (\star).$$

Ezek alapján a rekurzió felhasználásával :

$$x_{n+1} = \frac{1}{8}\cdot(x_n^2+15) < (\star) < \frac{1}{8}\cdot(x_{n+1}^2+15) = x_{n+2}.$$

Tehát a sorozat szigorúan monoton nő.

-------------------------------3 pont-------------------------------

iii) Mivel a sorozat szigorúan monoton nő, ezért az első tag 1 egy alsó korlát. Van-e felső korlát? Az eddigieket figyelembe véve ismét indukcióval belátjuk, hogy 3 a sorozatnak egy felső korlátja, tehát :

$$x_n < 3 \quad (\forall n \in \mathbb{N}).$$

Ha $n = 0$, akkor $x_0 = 1 < 3$, ami igaz.

Tegyük fel, hogy *valamely* $n \in \mathbb{N}$-re :

$$x_n < 3.$$

Be kell látni, hogy :

$$x_{n+1} < 3$$

is igaz. Mivel a sorozat tagjai pozitívak, a feltevésünk alapján

$$x_n^2 < 9$$

is teljesül, ezért a rekurziót használva :

$$x_{n+1} = \frac{1}{8}\cdot(x_n^2+15) < \frac{1}{8}\cdot(9+15) = 3.$$

-------------------------------3 pont-------------------------------

Tehát a sorozat korlátos, monoton $\Longrightarrow (x_n)$ konvergens és $\lim(x_n) = 3$.

-------------------------------1 pont-------------------------------

a) Számítsa ki az alábbi sorösszeget :

$$\sum_{k=8}^{+\infty} \frac{\sqrt[3]{k+1}-\sqrt[3]{k}}{\sqrt[3]{k^2+k}}. \quad \textbf{(5 pont)}$$

b) Döntse el, hogy az alábbi sor konvergens vagy divergens (a válaszát indokolja) :

$$\sum_{n=1} \frac{(n+1)^{2n}}{(2n)!}. \quad \textbf{(5 pont)}$$

Megoldás :

a) Legyen $8 \leq n \in \mathbb{N}$ és :

$$s_n = \sum_{k=8}^{+\infty} \frac{\sqrt[3]{k+1}-\sqrt[3]{k}}{\sqrt[3]{k^2+k}} = \sum_{k=8}^{n} \frac{\sqrt[3]{k+1}-\sqrt[3]{k}}{\sqrt[3]{k\cdot(k+1)}} = \sum_{k=8}^{n}\left(\frac{1}{\sqrt[3]{k}} - \frac{1}{\sqrt[3]{k+1}}\right) =$$

− **1 pont** −

$$= \left(\frac{1}{\sqrt[3]{8}} - \frac{1}{\sqrt[3]{9}}\right) + \left(\frac{1}{\sqrt[3]{9}} - \frac{1}{\sqrt[3]{10}}\right) + \left(\frac{1}{\sqrt[3]{10}} - \frac{1}{\sqrt[3]{11}}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{\sqrt[3]{n}} - \frac{1}{\sqrt[3]{n+1}}\right) =$$

$$= \frac{1}{\sqrt[3]{8}} - \frac{1}{\sqrt[3]{n+1}} = \frac{1}{2} - \frac{1}{\sqrt[3]{n+1}}.$$

− **2 pont** −

A fentiek alapján :

$$\lim_{n\to+\infty}(s_n) = \lim_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{\sqrt[3]{n+1}}\right) = \frac{1}{2} - \lim_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{\sqrt[3]{n+1}}\right) = \frac{1}{2} - 0 = \frac{1}{2}.$$

− **1 pont** −

Tehát a részletösszegek (s_n) sorozata konvergens és határértéke $\frac{1}{2}$, ezért a definíció értelmében a feladatbeli teleszkópikus sor konvergens és összege :

$$\sum_{k=8}^{+\infty} \frac{\sqrt[3]{k+1}-\sqrt[3]{k}}{\sqrt[3]{k^2+k}} = \lim_{n\to+\infty}(s_n) = \frac{1}{2}.$$

− **1 pont** −

b) Alkalmazzuk a hányados−kritériumot :

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{|x_{n+1}|}{|x_n|} = \lim_{n\to+\infty} \frac{(n+2)^{2n+2}}{(2n+2)!} \cdot \frac{(2n)!}{(n+1)^{2n}} = \lim_{n\to+\infty} \left(\frac{n+2}{n+1}\right)^{2n} \cdot \frac{(n+2)^2}{(2n+1)\cdot(2n+2)} =$$

− **2 pont** −

$$= \frac{1}{4} \cdot \lim_{n\to+\infty}\left(\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}\right)^2 \cdot \lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{-2} = \frac{1}{4}\cdot e^2 \cdot 1^{-2} = \frac{e^2}{4}.$$

− **2 pont** −

Mivel a kapott határérték $\frac{e^2}{4} > 1$ ($\Longleftrightarrow e > 2$), ezért a hányadoskritérium értelmében a megadott sor **divergens**.

− **1 pont** −

3. *Milyen $x \in \mathbb{R}$ számok mellett abszolút konvergens, konvergens illetve divergens az alábbi hatványsor :*

$$\sum_{n=0} \frac{1}{3^n\cdot(2n+1)} \cdot (x-5)^n \ ? \quad \textbf{(10 pont)}$$

Megoldás :

i) A hatványsorok definícióját figyelembe véve leolvasható az a középpont és az (a_n) együtthatósorozat :

$$a = 5 \quad \wedge \quad a_n := \frac{1}{3^n\cdot(2n+1)} \quad (n \in \mathbb{N}).$$

---------------------------------1 pont---------------------------------

ii) Alkalmazva a Cauchy–Hadamard tételt a konvergencia sugárra kapjuk, hogy :

$$R = \frac{1}{\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt[n]{|a_n|}} = \frac{1}{\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt[n]{\left|\frac{1}{3^n\cdot(2n+1)}\right|}} = \frac{3}{\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{2n+1}}} = 3.$$

A fenti határértéknél felhasználtuk, hogy (ld. közrefogás) :

$$1 = \sqrt[n]{1} \leq \sqrt[n]{2n+1} \leq \sqrt[n]{2n+n} = \sqrt[n]{3n} \quad (1 \leq n \in \mathbb{N}).$$

A közrefogó sorozatokra : $\lim\limits_{n\to+\infty}(1) = 1 = \lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt[n]{3} \cdot \lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt[n]{n}.$

---------------------------------3 pont---------------------------------

Azt kaptuk tehát, hogy $R = 3$ és $a = 5$, ezért a Cauchy–Hadamard tétel szerint :

1. Ha
$$|x-5| < 3 \iff x \in (a-R; a+R) = (2;8),$$
akkor a hatványsor **abszolút konvergens** (így **konvergens** is).

---------------------------------1 pont---------------------------------

2. Azt is tudjuk a tételből, hogy
$$|x-5| > 3 \iff x \in (-\infty; 2) \cup (8; +\infty)$$
esetén a hatványsor **divergens** .

---------------------------------1 pont---------------------------------

3. Ha $x = 8$, akkor kapjuk a $\sum\limits_{n=0} \frac{1}{2n+1}$ sort. Mivel ebben az esetben
$$\frac{1}{2n+1} \geq (NRA) \geq \frac{1}{2n+n} = \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{n} > 0 \quad (1 \leq n \in \mathbb{N})$$
és az $\frac{1}{3}\cdot\sum\limits_{n=1}\frac{1}{n}$ sor divergens, ezért az összehasonlító kritérium értelmében a vizsgált sor is **divergens.**

---------------------------------2 pont---------------------------------

4. Ha pedig $x = 2$, akkor kapjuk a $\sum\limits_{n=0} \frac{(-1)^n}{2n+1}$ **konvergens Leibniz** sort, ugyanis a Leibniz sorokra vonatkozó definíció és tétel értelmében :
$$0 < \frac{1}{2\cdot(n+1)+1} < \frac{1}{2n+1} \quad (\forall\, n \in \mathbb{N}), \text{ illetve } \lim\left(\frac{1}{2n+1}\right) = 0.$$

Összefoglalva tehát, a hatványsor konvergenciahalmaza a $[2;8)$ intervallum.

---------------------------------2 pont---------------------------------

4. *Adjon meg olyan $R > 0$ számot és (a_n) sorozatot, amelyekkel :*

$$\frac{x+1}{(x-1)\cdot(x+2)} = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n \cdot x^n \quad (x \in (-R;R)). \quad \textbf{(10 pont)}$$

Megoldás :

Legyen
$$f(x) := \frac{x+1}{(x-1)\cdot(x+2)} \quad (x \in \mathbb{R}\setminus\{-2;1\}).$$

Bontsuk fel az itteni törtet parciális törtek összegére az alábbiak szerint :

$$f(x) = \frac{x+1}{(x-1)\cdot(x+2)} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+2} = \frac{A\cdot(x+2)+B\cdot(x-1)}{(x-1)\cdot(x+2)}.$$

---1 pont---

A számlálók egyenlősége alapján az együtthatókat összehasonlítva kapjuk, hogy :

$$A + B = 1;\ 2A - B = 1 \iff A = \frac{2}{3},\ B = \frac{1}{3} \Longrightarrow$$

$$f(x) = \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{x-1} + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{x+2} \quad (x \in \mathbb{R} \setminus \{-2; 1\}).$$

---2 pont---

A kapott két törtet tagonként hatványsorba fejtve (ld. geometriai sor összegzése) :

$$\frac{1}{x-1} = -\frac{1}{1-x} = \Big(\text{ha } |x| < 1\Big) = -\sum_{n=0}^{+\infty} x^n = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1) \cdot x^n, \quad \text{ha } x \in (-1; 1),$$

---2 pont---

illetve

$$\frac{1}{x+2} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1 + x/2} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1 - (-x/2)} = \Big(\text{ha } |-x/2| < 1 \iff |x| < 2\Big) = \frac{1}{2} \cdot \sum_{n=0}^{+\infty} (-x/2)^n = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2^{n+1}} \cdot x^n, \quad \text{ha } x \in (-2; 2).$$

---2 pont---

A konvergencia tartományok közös pontjaiban, ha

$$x \in (-1; 1) \cap (-2; 2) = (-1; 1),$$

akkor felhasználva a konvergens sorokra vonatkozó műveleteket kapjuk, hogy :

---1 pont---

$$f(x) = \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{x-1} + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{x+2} = \frac{2}{3} \cdot \sum_{n=0}^{+\infty} (-1) \cdot x^n + \frac{1}{3} \cdot \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2^{n+1}} \cdot x^n = \sum_{n=0}^{+\infty} \Big(\frac{(-1)^n}{3 \cdot 2^{n+1}} - \frac{2}{3}\Big) \cdot x^n.$$

Tehát a keresett konvergencia sugár $R = 1$ és $a_n = \dfrac{(-1)^n}{3 \cdot 2^{n+1}} - \dfrac{2}{3}$ $(n \in \mathbb{N})$.

---2 pont---