1. gyakorlat

Valós-valós függvény határértéke

<u>**Emlékeztető**</u>. Az Analízis I. tárgyban megismertük valós-valós függvény **pontbeli határértékének a definícióját.** Ezzel a fogalommal egy függvénynek azt a – szemléletünk alapján eléggé világos – tulajdonságát fogalmaztuk meg matematikai szempontból *pontos* formában, hogy egy *adott ponthoz „közeli" helyeken a függvényértékek „közel" vannak valamely* (*valós*, $+\infty$ *vagy akár* $-\infty$, *vagyis* $\overline{\mathbb{R}} := \mathbb{R} \cup \{-\infty\} \cup \{+\infty\}$ *halmazbeli*) *értékhez.* Idézzük fel az `általános definíciót.`

Azt a tényt, hogy egy $f \in \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvénynek valamely $a \in \mathcal{D}_f'$ pontban a határértéke $A \in \overline{\mathbb{R}}$ a következő szimbólumok valamelyikével jelöljük:

$$\lim_a f = A, \qquad \lim_{x \to a} f(x) = A, \qquad f(x) \to A, \text{ ha } x \to a. \ \square$$

Néhány nevezetes határérték. A definícó alapján egyszerűen igazolhatók a szemléletesen „szinte nyilvánvaló" alábbi állítások:

- minden $a \in \mathbb{R}$ esetén $\lim\limits_{x \to a} x^n = a^n$, ahol $n = 1, 2, 3, \ldots$;
- $\lim\limits_{x \to +\infty} x^n = +\infty$, ha $n = 1, 2, 3, \ldots$;
- $\lim\limits_{x \to -\infty} x^n = \begin{cases} +\infty, & \text{ha } n = 2, 4, 6, \ldots \\ -\infty & \text{ha } n = 1, 3, 5, \ldots; \end{cases}$
- minden $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ esetén $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{1}{x^n} = \dfrac{1}{a^n}$, ahol $n = 1, 2, 3, \ldots$;
- $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{1}{x^n} = 0 = \lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{1}{x^n}$, ha $n = 1, 2, 3, \ldots$;
- $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{1}{x^n} \begin{cases} \nexists, & \text{ha } n = 1, 3, 5, \ldots \\ = +\infty & \text{ha } n = 2, 4, 6, \ldots \ , \end{cases}$
- minden $a > 0$ esetén $\lim\limits_{x \to a} \sqrt{x} = \sqrt{a}$.

<u>**Emlékeztető**</u>. **A határérték és a műveletek** közötti kapcsolatokra vonatkoznak az alábbi állítások:

Tegyük fel, hogy $f, g \in \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $a \in \left(\mathcal{D}_f \cap \mathcal{D}_g\right)'$ *és* $\exists\, A := \lim_a f \in \overline{\mathbb{R}}$, $\quad B := \lim_a g \in \overline{\mathbb{R}}$. *Ekkor*

(a) $\exists \ \lim_a (f+g)$ *és* $\lim_a (f+g) = A + B$, *feltéve, hogy* $A + B \in \overline{\mathbb{R}}$ *értelmezve van;*

(b) $\exists \ \lim_a (f \cdot g)$ *és* $\lim_a (f \cdot g) = A \cdot B$, *feltéve, hogy* $A \cdot B \in \overline{\mathbb{R}}$ *értelmezve van;*

(c) $\exists \ \lim_a \dfrac{f}{g}$ *és* $\lim_a \dfrac{f}{g} = \dfrac{A}{B}$, *feltéve, hogy* $\dfrac{A}{B} \in \overline{\mathbb{R}}$ *értelmezve van.*

Megjegyezzük, hogy ezek az állítások *egyoldali határértékekre* is érvényesek.

<u>**Megjegyzés**</u>. **Kritikus határértékek vizsgálata.** Ha az előző tételben szereplő műveletek valamelyike nincs értelmezve, akkor az $f+g$, $f \cdot g$, f/g függvények határértékéről általában semmit sem tudunk mondani (vö. a sorozatokra ismert eredményekkel). Ezeket **kritikus határértékeknek** nevezzük, és így jelöljük:

$$(+\infty)+(-\infty) \ \big(\text{vagy } (+\infty)-(+\infty)\big), \ (-\infty)+(+\infty) \ \big(\text{vagy } (-\infty)-(-\infty)\big), \ 0 \cdot (\pm\infty), \ \frac{\pm\infty}{\pm\infty}, \ \frac{0}{0}, \ \frac{1}{0}.$$

Ezekben az esetekben a sorozatoknál már megismert „módszert" követhetjük: a kritikus határértéket „valamilyen módon" (alkalmas azonosságok felhasználásával) megpróbáljuk nem kritikus határértékké átalakítani. $\square$

1. feladat. *Határozzuk meg az alábbi határértékeket:*

(a) $\lim\limits_{x\to+\infty}\big(-3x^2+2x+7\big)$, (b) $\lim\limits_{x\to-\infty}\big(x^3-x+2\big)$.

Általánosítsuk a feladatot tetszőleges polinomra.

Megoldás. (a) $(-\infty)+(+\infty)$ típusú kritikus határértékről van szó, mert

$$\lim_{x\to+\infty}\big(-3x^2\big)=-\infty \text{ és } \lim_{x\to+\infty}\big(2x+7\big)=+\infty.$$

Az x^2 kiemelése után kapott

$$x^2\cdot\left(-3+\frac{2}{x}+\frac{7}{x^2}\right)$$

szorzat mindkét tényezőjének van határértéke $(+\infty)$-ben, mert

$$\lim_{x\to+\infty}x^2=+\infty \quad \text{és} \quad \lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x}=0.$$

Így a határérték és a műveletek közötti kapcsolatokra vonatkozó állítások szerint

$$\lim_{x\to+\infty}\big(-3x^2+2x+7\big)=\lim_{x\to+\infty}x^2\cdot\left(-3+\frac{2}{x}+\frac{7}{x^2}\right)=$$

$$=\lim_{x\to+\infty}x^2\cdot\lim_{x\to+\infty}\left(-3+\frac{2}{x}+\frac{7}{x^2}\right)=(+\infty)\cdot(-3)=-\infty.$$

(b) Most is $(-\infty)+(+\infty)$ típusú kritikus határértékről van szó, mert

$$x^3\to-\infty \quad \text{és} \quad \big(-x+2\big)\to+\infty, \quad \text{ha} \quad x\to-\infty.$$

Mivel $\frac{1}{x}\to 0$, ha $x\to-\infty$ ezért az előzőekhez hasonlóan az adódik, hogy

$$x^3-x+2=x^3\cdot\left(1-\frac{1}{x^2}+\frac{2}{x^3}\right)\to(-\infty)\cdot 1=-\infty, \quad \text{ha} \quad x\to-\infty.$$

A kérdezett határérték tehát létezik, és $(-\infty)$-vel egyenlő.

Általánosítás. Tekintsünk egy tetszőleges P polinomot, azaz legyen valamilyen $n\in\mathbb{N}$ esetén

$$P(x):=\alpha_nx^n+\alpha_{n-1}x^{n-1}+\dots+\alpha_1x+\alpha_0 \quad (x\in\mathbb{R}),$$

ahol $\alpha_0,\dots,\alpha_n\in\mathbb{R}$ és $\alpha_n\neq 0$. Ekkor

$$P(x)=x^n\cdot\left(\alpha_n+\frac{\alpha_{n-1}}{x}+\frac{\alpha_{n-2}}{x^2}+\dots+\frac{\alpha_0}{x^n}\right) \quad (x\in\mathbb{R}\setminus\{0\}).$$

$(+\infty)$-ben a határérték

$$\lim_{x\to+\infty}P(x)=\lim_{x\to+\infty}x^n\cdot\lim_{x\to+\infty}\left(\alpha_n+\frac{\alpha_{n-1}}{x}+\frac{\alpha_{n-2}}{x^2}+\dots+\frac{\alpha_0}{x^n}\right)=(+\infty)\cdot\alpha_n=$$

$$=\operatorname{sign}\alpha_n\cdot(+\infty).$$

$(-\infty)$-ben a határérték pedig

$$\lim_{x\to-\infty} P(x) = \lim_{x\to-\infty} x^n \cdot \lim_{x\to-\infty}\left(\alpha_n + \frac{\alpha_{n-1}}{x} + \frac{\alpha_{n-2}}{x^2} + \cdots + \frac{\alpha_0}{x^n}\right) =$$

$$= (-1)^n \cdot (+\infty) \cdot \alpha_n = (-1)^n \cdot \operatorname{sign}\alpha_n \cdot (+\infty). \ \blacksquare$$

Megjegyzés. Az előző állítások tehát azt jelentik, hogy polinomok „viselkedését” a plusz/mínusz végtelen környezetében a polinom főtagja (az $\alpha_n x^n$ tag, illetve még pontosabban az α_n főegyüttható előjele és n paritása) határozza meg, azaz polinom határértéke a $\pm$ végtelenben megegyezik a főtag $\pm$ végtelenben vett határértékével.

2. feladat. *Számítsuk ki a következő határértékeket:*

(a) $\displaystyle\lim_{x\to1}\frac{x^3+x+1}{x^3+x+2}$, (b) $\displaystyle\lim_{x\to-1}\frac{x^2+x-3}{x^2+2x+1}$,

(c) $\displaystyle\lim_{x\to2+0}\frac{x^2+2x-7}{x^2-5x+6}$, (d) $\displaystyle\lim_{x\to2-0}\frac{x^2+2x-7}{x^2-5x+6}$.

Megoldás. Racionális törtfüggvényekről, vagyis két polinom hányadosairól van szó. Polinomnak bármely véges helyen van határértéke, és az a helyettesítési értékkel egyenlő.

(a) A számláló, illetve a nevező határértéke 1-ben 3, illetve 4, ezért a hányadosfüggvény határértékére vonatkozó tétel alapján a tört határértéke 1-ben 3/4.

(b) A számláló, illetve a nevező határértéke (-1)-ben -3, illetve 0, ezért most $1/0$ típusú kritikus határértékről van szó. Vegyük figyelembe, hogy $x^2+2x+1=(x+1)^2$, és tekintsük a következő átalakítást:

$$\frac{x^2+x-3}{x^2+2x+1} = \left(x^2+x-3\right)\cdot\frac{1}{(x+1)^2}.$$

Mivel

$$\lim_{x\to-1}\frac{1}{(x+1)^2} = +\infty,$$

ezért a szorzatfüggvény határértékére vonatkozó tétel szerint

$$\lim_{x\to-1}\frac{x^2+x-3}{x^2+2x+1} = \lim_{x\to-1}\left(x^2+x-3\right)\cdot\lim_{x\to-1}\frac{1}{(x+1)^2} = (-3)\cdot(+\infty) = -\infty.$$

(c) A számláló, illetve a nevező határértéke 2-ben 1, illetve 0, ezért ugyanezek a 2-ben vett jobb oldali határértékek is. Most $1/0$ típusú határértékről van szó. *Vegyük észre* azt, hogy $x^2-5x+6=(x-3)(x-2)$, és tekintsük a következő átalakítást:

$$\frac{x^2+2x-7}{x^2-5x+6} = \frac{x^2+2x-7}{(x-3)(x-2)} = \frac{x^2+2x-7}{x-3}\cdot\frac{1}{x-2}.$$

Mivel

$$\lim_{x\to2+0}\frac{1}{x-2} = +\infty,$$

ezért a szorzatfüggvény határértékére vonatkozó tétel szerint

$$\lim_{x\to 2+0} \frac{x^2+2x-7}{x^2-5x+6} = \lim_{x\to 2+0} \frac{x^2+2x-7}{x-3} \cdot \lim_{x\to 2+0} \frac{1}{x-2} = \frac{1}{-1} \cdot (+\infty) = -\infty.$$

(d) Az előző gondolatmenetet követve most azt használjuk fel, hogy

$$\lim_{x\to 2-0} \frac{1}{x-2} = -\infty,$$

ezért

$$\lim_{x\to 2-0} \frac{x^2+2x-7}{x^2-5x+6} = \lim_{x\to 2-0} \frac{x^2+2x-7}{x-3} \cdot \lim_{x\to 2-0} \frac{1}{x-2} = \frac{1}{-1} \cdot (-\infty) = +\infty. \quad \blacksquare$$

Megjegyzés. A feladatban alkalmazott gondolatmeneteket követve vizsgálhatjuk tetszőleges racionális törtfüggvény *véges helyen* vett határértékét (l. a „További feladatok” 2. feladatát). $\square$

3. feladat. *A „kiemelés technikájával” határozzuk meg az alábbi határértékeket:*

(a) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{2x^3+3x^2+23}{-3x^3-5x^2+31x+1}$, (b) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{x^2-3x+2}{x^3-7x^2+5x-1}$,

(c) $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} \frac{x^3+2x^2+11x+2}{x^2+3x+2}$.

Megoldás. Mindegyik esetben kritikus határértékről van szó. Azt a közös *ötletet* használjuk, hogy a számlálóból és a nevezőből kiemeljük a legmagasabb fokú hatványt. Egyszerűsítés után már nem kritikus határértékeket fogunk kapni.

(a) $\frac{+\infty}{-\infty}$ típusú kritikus határértékről van szó, mert a számlálóban, illetve a nevezőben levő polinom határértéke $(+\infty)$-ben $+\infty$, illetve $-\infty$.

Feltehető, hogy $x > 0$. Ekkor a fenti ötletet alkalmazva azt kapjuk, hogy

$$\frac{2x^3+3x^2+23}{-3x^3-5x^2+31x+1} = \frac{x^3 \cdot \left(2+\frac{3}{x}+\frac{23}{x^3}\right)}{x^3 \cdot \left(-3-\frac{5}{x}+\frac{31}{x^2}+\frac{1}{x^3}\right)} = \frac{2+\frac{3}{x}+\frac{23}{x^3}}{-3-\frac{5}{x}+\frac{31}{x^2}+\frac{1}{x^3}}.$$

Mivel $\frac{1}{x} \to 0$, ha $x \to +\infty$, ezért a határérték és a műveletekre vonatkozó tételből következik, hogy a számláló 2-höz, a nevező pedig (-3)-hoz, a tört pedig $(-2/3)$-hoz tart, ha $x \to +\infty$. A kérdezett határérték tehát létezik, és

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{2x^3+3x^2+23}{-3x^3-5x^2+31x+1} = \lim_{x\to+\infty} \frac{2+\frac{3}{x}+\frac{23}{x^3}}{-3-\frac{5}{x}+\frac{31}{x^2}+\frac{1}{x^3}} = -\frac{2}{3}.$$

(b) $\frac{+\infty}{+\infty}$ típusú kritikus határértékről van szó, mert a számláló és a nevező is $(+\infty)$-hez tart, ha $x \to +\infty$.

Legyen $x > 0$. Ekkor az (a)-beli gondolatmenetet követve azt kapjuk, hogy

$$\frac{x^2-3x+2}{x^3-7x^2+5x-1} = \frac{x^2 \cdot \left(1-\frac{3}{x}+\frac{2}{x^2}\right)}{x^3 \cdot \left(1-\frac{7}{x}+\frac{5}{x^2}-\frac{1}{x^3}\right)} = \frac{1}{x} \cdot \frac{1-\frac{3}{x}+\frac{2}{x^2}}{1-\frac{7}{x}+\frac{5}{x^2}-\frac{1}{x^3}} \to 0, \text{ ha } x \to +\infty.$$

A kérdezett határérték tehát létezik, és 0-val egyenlő.

(c) $\frac{-\infty}{+\infty}$ típusú kritikus határértékről van szó, mert a számlálónak, illetve a nevezőnek a határértéke $(-\infty)$-ben $-\infty$, illetve $+\infty$.

Legyen $x < 0$. Ekkor az (a)-beli gondolatmenetet követve azt kapjuk, hogy

$$\frac{x^3+2x^2+11x+2}{x^2+3x+2} = \frac{x^3 \cdot \left(1+\frac{2}{x}+\frac{11}{x^2}+\frac{2}{x^3}\right)}{x^2 \cdot \left(1+\frac{3}{x}+\frac{2}{x^2}\right)} =$$

$$= x \cdot \frac{1+\frac{2}{x}+\frac{11}{x^2}+\frac{2}{x^3}}{1+\frac{3}{x}+\frac{2}{x^2}} \to (-\infty) \cdot \frac{1}{1} = -\infty, \quad \text{ha } \ x \to -\infty,$$

mert $\lim\limits_{x\to-\infty} x = -\infty$ és $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{1}{x} = 0$.
A kérdezett határérték tehát létezik, és $(-\infty)$-nel egyenlő. ■

Megjegyzés. A fenti egyszerű gondolatmenet alkalmazható *tetszőleges* racionális törtfüggvény $(\pm\infty)$-ben vett határértéknek a vizsgálatánál (l. a „További feladatok" 3. feladatát). □

4. feladat. *A „szorzatra bontás technikájával" vizsgáljuk meg a következő határértékeket:*

(a) $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{x^2-5x+6}{x^2-7x+10}$, (b) $\lim\limits_{x\to 5} \dfrac{x^2-5x+6}{x^2-7x+10}$.

Megoldás. (a) $\frac{0}{0}$ típusú kritikus határértékről van szó, mert a számlálónak és a nevezőnek is 0 a határértéke a 2 pontban.

Vegyük észre, hogy a számláló és a nevező is *szorzatra bontható*. Ugyanis

$$x^2-5x+6 = (x-2)\cdot(x-3) \quad \text{és} \quad x^2-7x+10 = (x-2)\cdot(x-5).$$

(Ha „ránézésre" nem sikerül rögtön felírni a gyöktényezős alakot, akkor a másodfokú egyenlet megoldóképletét is használhatjuk.)

Így

$$(*) \qquad \frac{x^2-5x+6}{x^2-7x+10} = \frac{(x-2)(x-3)}{(x-2)(x-5)} = \frac{x-3}{x-5} \qquad \big(x \in \mathbb{R} \setminus \{2,5\}\big).$$

A jobb oldalon levő függvénynek van határértéke a 2 pontban, és az 1/3-dal egyenlő, ezért a kérdezett határérték létezik. A határérték és a műveletek kapcsolatára vonatkozó tételt alkalmazva azt kapjuk, hogy

$$\lim_{x\to 2} \frac{x^2-5x+6}{x^2-7x+10} = \lim_{x\to 2} \frac{x-3}{x-5} = \frac{-1}{-3} = \frac{1}{3}.$$

(b) Most $\frac{1}{0}$ típusú kritikus határértékről van szó, mert az 5 pontban a számláló, illetve a nevező határértéke 6, illetve 0.

A $(*)$ átalakítás után is kritikus határértéket ($\frac{1}{0}$ típusút) kapunk. Vegyük észre azonban azt, hogy az *egyoldali* határértékek léteznek. Ugyanis

$$\lim_{x\to 5+0} \frac{x-3}{x-5} = +\infty \quad \text{és} \quad \lim_{x\to 5-0} \frac{x-3}{x-5} = -\infty.$$

A két határérték különböző, ezért a kérdezett határérték nem létezik. ■

5. feladat. *A „gyöktelenítés technikájával” számítsuk ki az alábbi határértékeket:*

(a) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{1+x}-1}{x}$,

(b) $\lim\limits_{x\to -\infty} \big(\sqrt{x^2-x+1}-\sqrt{x^2-1}\big)$.

Megoldás. (a) $\frac{0}{0}$ típusú kritikus határértékről van szó, mert a számlálónak és a nevezőnek is 0 a határértéke a 0 pontban.

Most „gyöktelenítsük” a számlálót, vagyis szorozzuk meg a törtet az $1 \equiv \frac{\sqrt{1+x}+1}{\sqrt{1+x}+1}$ kifejezéssel. Ekkor azt kapjuk, hogy

$$\frac{\sqrt{1+x}-1}{x}\cdot\frac{\sqrt{1+x}+1}{\sqrt{1+x}+1} = \frac{x}{x\cdot\big(\sqrt{1+x}+1\big)} = \frac{1}{\sqrt{1+x}+1} \qquad \big(x\in\mathbb{R}\setminus\{0\}\big).$$

Világos, hogy ezzel az átalakítással már nem kritikus határértéket kapunk. A határérték és a műveletek kapcsolatára vonatkozó tétel szerint

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+x}-1}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{1}{\sqrt{1+x}+1} = \frac{1}{\sqrt{1+0}+1} = \frac{1}{2}\,.$$

(b) $(+\infty)-(+\infty)$ típusú kritikus határértékről van szó. A következő átalakítások lesznek célravezetők: Ha $x<0$, akkor

$$\Big(\sqrt{x^2-x+1}-\sqrt{x^2-1}\Big)\cdot\frac{\sqrt{x^2-x+1}+\sqrt{x^2-1}}{\sqrt{x^2-x+1}+\sqrt{x^2-1}} = \frac{-x+2}{\sqrt{x^2-x+1}+\sqrt{x^2-1}} =$$

$$= \frac{-1+\frac{2}{x}}{\dfrac{\sqrt{x^2-x+1}}{x}+\dfrac{\sqrt{x^2-1}}{x}} = \text{(Vigyázni! Mivel } x<0\text{, ezért } \sqrt{x^2}=-x.\text{)} =$$

$$= \frac{-1+\frac{2}{x}}{\dfrac{\sqrt{x^2-x+1}}{-\sqrt{x^2}}+\dfrac{\sqrt{x^2-1}}{-\sqrt{x^2}}} = \frac{-1+\dfrac{2}{x}}{-\sqrt{1-\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{x^2}}-\sqrt{1-\dfrac{1}{x^2}}}\,.$$

Mivel $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{1}{x}=0$, ezért a határérték és a műveletek kapcsolatára vonatkozó tétel szerint

$$\lim_{x\to-\infty}\big(\sqrt{x^2-x+1}-\sqrt{x^2-1}\big) = \lim_{x\to-\infty}\frac{-1+\frac{2}{x}}{-\sqrt{1-\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{x^2}}-\sqrt{1-\dfrac{1}{x^2}}}$$

$$= \frac{-1}{-1-1} = \frac{1}{2}\,. \ \blacksquare$$

6. feladat. *A hatványsor összegfüggvényének a határértékére vonatkozó tétel alapján lássuk be, hogy*

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1.$$

Megoldás. Tetszőleges $x \in \mathbb{R}$ esetén a definíció szerint

$$\sin x := x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \cdots .$$

(A hányadoskritériumból következik, hogy a fenti hatványsor minden $x \in \mathbb{R}$ pontban konvergens.) Ha $x \neq 0$ valós szám, akkor

$$\frac{\sin x}{x} = 1 - \frac{x^2}{3!} + \frac{x^4}{5!} - \frac{x^6}{7!} + \cdots .$$

A jobb oldalt 0 középpontú hatványsornak tekintjük. A hányadoskritérium felhasználásával könnyű megmutatni, hogy ez a hatványsor minden $x \in \mathbb{R}$ pontban konvergens. A hatványsor összegfüggvényének a határértékére vonatkozó tétel szerint a hatványsor összegfüggvényének van határértéke a 0 pontban, és az egyenlő az összegfüggvény 0-ban felvett helyettesítési értékével, vagyis 1-gyel. Ezzel beláttuk azt, hogy

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = \lim_{x\to 0} \left(1 - \frac{x^2}{3!} + \frac{x^4}{5!} - \frac{x^6}{7!} + \cdots \right) = 1 . \blacksquare$$

7. feladat. *A* $\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$ *felhasználásával számítsuk ki az alábbi határértékeket:*

(a) $\lim_{x\to 0} \frac{\sin a\,x}{\sin b\,x}$ $(a, b \in \mathbb{R} \setminus \{0\})$, (b) $\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x^2}$.

Megoldás. (a) $\frac{0}{0}$ típusú határértékről van szó, mert a sin függvény definíciója szerint a számláló és a nevező határértéke a 0 pontban 0-val egyenlő.

Először vegyük észre azt, hogy a $\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$ egyenlőségből következik, hogy minden $c \neq 0$ valós számra $\lim_{x\to 0} \frac{\sin c\,x}{c\,x} = 1$ is igaz.

A feltétel szerint $a \neq 0$ és $b \neq 0$ valós számok. A következő átalakítások lesznek célravezetők:

$$\frac{\sin a\,x}{\sin b\,x} = \frac{\frac{\sin a\,x}{a\,x} \cdot a\,x}{\frac{\sin b\,x}{b\,x} \cdot b\,x} = \frac{a}{b} \cdot \frac{\frac{\sin a\,x}{a\,x}}{\frac{\sin b\,x}{b\,x}} .$$

Az előzőek alapján azt kapjuk, hogy

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin a\,x}{\sin b\,x} = \lim_{x\to 0} \left(\frac{a}{b} \cdot \frac{\frac{\sin a\,x}{a\,x}}{\frac{\sin b\,x}{b\,x}} \right) = \frac{a}{b} \cdot \frac{\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin a\,x}{a\,x}}{\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin b\,x}{b\,x}} = \frac{a}{b} \cdot \frac{1}{1} = \frac{a}{b} .$$

(b) Először emlékeztetünk a cos függvény definíciójára:

$$\cos x := 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \cdots \qquad (x \in \mathbb{R}).$$

(Most is a hányadoskritériummal lehet egyszerűen igazolni azt, hogy a fenti sor minden x valós számra konvergens.)

$\frac{0}{0}$ típusú kritikus határértékről van szó, mert $\lim\limits_{x\to 0} \cos x = 1$.

1. megoldás. Világos, hogy

$$\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{1-\cos(2x)}{(2\,x)^2}.$$

A tört átalakításához használjuk fel az alábbi fontos trigonometrikus azonosságokat:

$$\cos(2x) = \cos^2 x - \sin^2 x, \qquad \sin^2 x + \cos^2 x = 1 \qquad (x \in \mathbb{R}).$$

Ha $x \neq 0$ valós szám, akkor

$$\frac{1-\cos(2x)}{(2\,x)^2} = \frac{\left(\sin^2 x + \cos^2 x\right) - \left(\cos^2 x - \sin^2 x\right)}{4\,x^2} = \frac{2\,\sin^2 x}{4\,x^2} = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{\sin x}{x}\right)^2,$$

ezért

$$\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{1-\cos(2x)}{(2\,x)^2} = \frac{1}{2} \cdot \lim_{x\to 0} \left(\frac{\sin x}{x}\right)^2 =$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \left(\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x}\right)^2 = \frac{1}{2} \cdot 1^2 = \frac{1}{2}. \quad \blacksquare$$

2. megoldás. Kiindulhatunk a cos függvény definíciójából is:

$$\frac{1-\cos x}{x^2} = \frac{1 - \left(1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \cdots\right)}{x^2} = \frac{1}{2!} - \frac{x^2}{4!} + \frac{x^4}{6!} - \cdots \qquad \big(x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}\big).$$

Az utolsó egyenlőség jobb oldala egy 0 középpontú, az egész $\mathbb{R}$ halmazon konvergens hatványsor összegfüggvénye. Ennek a függvénynek a 0 pontban van határértéke, és az egyenlő a függvény 0 pontban felvett helyettesítési értékével, vagyis 1/2-del. Ezzel ismét beláttuk azt, hogy

$$\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x^2} = \frac{1}{2}. \quad \blacksquare$$

3. megoldás. Alkalmazhatjuk a következő ötletet is: szorozzuk meg a kiindulási törtet az $1 \equiv \frac{1+\cos x}{1+\cos x}$ kifejezéssel. Ekkor azt kapjuk, hogy

$$\frac{1-\cos x}{x^2} \cdot \frac{1+\cos x}{1+\cos x} = \frac{1-\cos^2 x}{x^2 \cdot (1+\cos x)} = \frac{\sin^2 x}{x^2} \cdot \frac{1}{1+\cos x}$$

Így

$$\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x^2} = \left(\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x}\right)^2 \cdot \frac{1}{1 + \lim\limits_{x\to 0} \cos x} = 1^2 \cdot \frac{1}{1+1} = \frac{1}{2}. \quad \blacksquare$$