3. előadás

2020. szeptember 21.

Függvénytulajdonságok kapcsolata a deriválttal

1. Lokális szélsőérték

Korábban már értelmeztük az **abszolút szélsőértékek** fogalmát. Célszerű bevezetni ezek **lokális** változatait.

Definíció. *Az $f \in \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvénynek az $a \in \operatorname{int} \mathcal{D}_f$ pontban* ***lokális maximuma van****, ha*

$$\exists\, K(a) \subset \mathcal{D}_f : \quad \forall\, x \in K(a) \subset \mathcal{D}_f \ \text{ esetén } \ f(x) \le f(a).$$

Ekkor az $a \in \operatorname{int} \mathcal{D}_f$ pontot f ***lokális maximumhelyének*** *nevezzük, az $f(a)$ függvényérték pedig a függvény* ***lokális maximuma****.*

Hasonlóan értelmezzük a **lokális minimum** fogalmát. A lokális maximumot, illetve minimumot közösen **lokális szélsőértéknek**, a lokális maximumhelyet, illetve lokális minimumhelyet **lokális szélsőértékhelynek** nevezzük.

Megjegyzés. Az abszolút szélsőértékhely és a lokális szélsőértékhely fogalmai között a következő kapcsolat áll fenn. Egy abszolút szélsőértékhely nem szükségképpen lokális szélsőértékhely, mert a lokális szélsőértékhelynek feltétele, hogy a függvény értelmezve legyen a pont egy környezetében. Így például az x $(x \in [0,1])$ függvénynek a 0 pontban abszolút minimuma van, de ez nem lokális minimumhely. Azonban, ha az $f : A \to \mathbb{R}$ függvénynek az $a \in A$ pontban abszolút szélsőértéke van és A tartalmazza a egy környezetét, akkor a lokális szélsőértékhely.

Egy lokális szélsőértékhely nem szükségképpen abszolút szélsőértékhely, hiszen attól, hogy az f függvénynek az a pont egy környezetében nincs $f(a)$-nál nagyobb értéke, a környezeten kívül f felvehet $f(a)$-nál nagyobb értéket. □

Tétel. (A lokális szélsőértékre vonatkozó elsőrendű szükséges feltétel.)

$$\left.\begin{array}{l} \textit{Tegyük fel, hogy } f \in \mathbb{R} \to \mathbb{R} \ \textit{ és} \\ \bullet\ f \in D\{a\} \textit{ valamilyen } a \in \operatorname{int} \mathcal{D}_f\textit{-ben} \\ \bullet\ f\textit{-nek } a\textit{-ban lokális szélsőértéke van.} \end{array}\right\} \quad \Longrightarrow \quad f'(a) = 0.$$

Bizonyítás. Tegyük fel, hogy az $a \in \operatorname{int} \mathcal{D}_f$ pont *lokális maximumhelye* az $f \in D\{a\}$ függvénynek. Ekkor

$$\exists\, r > 0 : \quad \forall\, x \in (a - r, a + r) \ \text{ esetén } f(x) \le f(a).$$

Tekintsük az f függvény a-hoz tartozó különbségihányados-függvényét:

$$(*) \qquad \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \qquad \big(x \in \mathcal{D}_f \setminus \{a\}\big).$$

Ha $a < x < a + r$, azaz $x - a > 0$, akkor $f(x) \le f(a)$ (vagyis $f(x) - f(a) \le 0$) miatt a fenti tört nem pozitív:

$$\frac{f(x) - f(a)}{x - a} \le 0.$$

Mivel $f \in D\{a\}$, ezért

$$\lim_{x \to a+0} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = f'_+(a) = f'(a) \le 0.$$

Ha $a - r < x < a$, azaz $x - a < 0$, akkor $f(x) \le f(a)$ (vagyis $f(x) - f(a) \le 0$) miatt a $(*)$ alatti tört nem negatív:

$$\frac{f(x) - f(a)}{x - a} \ge 0,$$

ezért ismét az $f \in D\{a\}$ feltétel alapján

$$\lim_{x \to a-0} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = f'_-(a) = f'(a) \ge 0.$$

Azt kaptuk tehát, hogy $f'(a) \le 0$ és $f'(a) \ge 0$, ami csak úgy lehetséges, ha $f'(a) = 0$.

A bizonyítás hasonló akkor is, ha *a lokális minimumhelye* az f függvénynek. ■

Megjegyzések.

1^o Deriválható f függvénynek csak olyan pontban lehet lokális szélsőértéke, ahol a függvény deriváltja nulla. A lokális szélsőértékek meghatározásához tehát az $f'(x) = 0$ egyenletet kell megoldani.

2^o Abból, hogy $f'(a) = 0$, *nem következik*, hogy az f függvénynek az $a \in \operatorname{int} \mathcal{D}_f$ pont lokális szélsőértékhelye. Például az $f(x) := x^3$ $(x \in \mathbb{R})$ függvényre $f'(x) = 3x^2$ $(x \in \mathbb{R})$ miatt $f'(0) = 0$, de a függvénynek *nincs* 0-ban lokális szélsőértéke (hiszen a függvény az egész számegyenesen szigorúan monoton növekedő). Ezt úgy is megfogalmazhatjuk, hogy ha f differenciálható a-ban, akkor az $f'(a) = 0$ csak **szükséges**, de **nem elégséges** feltétele annak, hogy az f függvénynek a-ban lokális szélsőértéke legyen. □

A fenti példa motiválja a következő fogalom bevezetését.

Definíció. *Az $f \in \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvénynek az $a \in \operatorname{int} \mathcal{D}_f$* ***stacionárius pontja****, ha $f \in D\{a\}$ és $f'(a) = 0$.*

A lokális szélsőértékre vonatkozó elsőrendű szükséges feltétel azt állítja, hogy deriválható függvénynek lokális szélsőértékhelyei a függvény stacionárius pontjaiban lehetnek. A fenti példa azonban azt mutatja, hogy lehetnek olyan stacionárius pontok, amelyek nem lokális szélsőértékhelyek. Fontos feladat tehát annak eldöntése, hogy egy stacionárius pont vajon lokális szélsőértékhely-e. Erre hamarosan jól használható eredményeket fogunk mutatni.

2. Monotonitás

Az egyszerűség kedvéért csak **intervallumon** vizsgáljuk a monotonitást. Az $(a,b) \subset \mathbb{R}$ szimbólummal jelölünk egy korlátos vagy nem korlátos *nyílt intervallumot*, tehát $a = -\infty$ vagy $a \in \mathbb{R}$, $a < b$ és $b \in \mathbb{R}$ vagy $b = +\infty$.

Egy függvény esetén a „monoton növekedő”, a „monoton csökkenő”, a „szigorúan monoton növekedő”, illetve a „szigorúan monoton csökkenő” kifejezések helyett gyakran a „$\nearrow$”, a „$\searrow$”, a „$\uparrow$”, illetve a „$\downarrow$” jeleket használjuk.

Az első fontos észrevétel az, hogy *az első derivált előjeléből következtethetünk a függvény monotonitására.* Valóban, ha egy $f : (a,b) \to \mathbb{R}$ függvény (például) monoton növekedő (a,b)-n, akkor minden $x \in (a,b)$ pontban

$$\frac{f(t) - f(x)}{t - x} \geq 0 \quad \big(t \in (a,b) \setminus \{x\}\big),$$

következésképpen

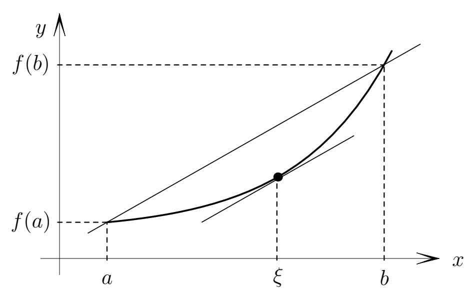
$$f'(x) = \lim_{t \to x} \frac{f(t) - f(x)}{t - x} \geq 0.$$

Az alkalmazások szempontjából fontos tény az, hogy ennek az állításnak a megfordítása is igaz. A bizonyításhoz a következő fontos állítást kell felhasználni.

Tétel. (A Lagrange-féle középértéktétel.)

$$\left.\begin{array}{l} \textit{Legyen } a,b \in \mathbb{R},\ a < b. \textit{ Tegyük fel,} \\ \textit{hogy } f : [a,b] \to \mathbb{R} \ \textit{ és} \\ \quad \bullet\ f \in C[a,b], \\ \quad \bullet\ f \in D(a,b). \end{array}\right\} \implies \begin{array}{c} \exists \xi \in (a,b), \quad \textit{hogy} \\ f'(\xi) = \dfrac{f(b) - f(a)}{b - a}. \end{array}$$

Megjegyzés. A Lagrange-féle középértéktétel szemléletes jelentése a következő: ha az f függvény folytonos $[a,b]$-n és deriválható (a,b)-n, akkor f grafikonjának van olyan pontja, amelyben húzott érintő párhuzamos az $\big(a, f(a)\big)$, $\big(b, f(b)\big)$ pontokon áthaladó szelővel:



A Lagrange-féle középértéktétel egyszerű, de fontos következményei a következő állítások:

Tétel. (A deriváltak egyenlősége.)

1^o *Legyen* $a,b \in \mathbb{R}$, $a < b$ *és* $f : (a,b) \to \mathbb{R}$. *Tegyük fel, hogy* $f \in D(a,b)$. *Ekkor*

$$f' \equiv 0 \ (a,b)\text{-}n \quad \Longleftrightarrow \quad f \equiv \textit{állandó} \ (a,b)\text{-}n.$$

2^o *Legyen $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$ és $f, g : (a, b) \to \mathbb{R}$. Tegyük fel, hogy $f, g \in D(a, b)$. Ekkor*

$$f' \equiv g' \ (a,b)\text{-}n \quad \iff \quad \exists\, c \in \mathbb{R}: \ f(x) = g(x) + c \ \big(\forall\, x \in (a,b)\big).$$

Bizonyítás. Az 1^o állítás $\boxed{\Longleftarrow}$ részét már tudjuk, ugyanis a konstansfüggvény deriváltja 0. Az $\boxed{\Longrightarrow}$ irány a Lagrange-féle középértéktétel egyszerű következménye.

A 2^o állítás igazolásához alkalmazzuk 1^o-et az $F := f - g$ függvényre. ■

Tétel. (A monotonitás és a derivált kapcsolata.) *Legyen $(a, b) \subset \mathbb{R}$ nyílt intervallum. Tegyük fel, hogy $f \in D(a, b)$. Ekkor*

1^o $f \ \nearrow$ [*illetve* $\searrow$] (a,b)-*n* $\iff$ $f' \geq 0$ [*illetve* $f' \leq 0$] (a,b)-*n;*

2^o *ha* $f' > 0$ [*illetve* $f' < 0$] (a,b)-*n* $\Longrightarrow$ $f \ \uparrow$ [*illetve* $\downarrow$] (a,b)-*n.*

Bizonyítás. Meggondolható. A definíciókat, valamint a Lagrange-féle középértéktételt kell csupán alkalmazni. ■

Megjegyzések. 1^o Fontos megjegyezni, hogy a tételben **lényeges** feltétel, hogy **intervallumon értelmezett** a függvény. Például, ha

$$f(x) := \frac{1}{x} \ \big(x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}\big), \quad \text{akkor} \quad f'(x) = -\frac{1}{x^2} < 0 \ \ \big(\forall\, x \in \mathcal{D}_f\big),$$

de az f függvény nem szigorúan csökkenő a $\mathcal{D}_f = \mathbb{R} \setminus \{0\}$ halmazon, ami *nem intervallum.*

2^o A *szigorú monotonitásra* vonatkozó elégséges feltételek *nem fordíthatók meg.* Például az $f(x) := x^3$ $(x \in \mathbb{R})$ függvény szigorúan monoton növekedő az egész $\mathbb{R}$-en, de a deriváltja 0 értéket is felvesz: $f'(0) = 0$. □

3. A lokális szélsőértékre vonatkozó elégséges feltételek

Az eddigiek alapján könnyen kaphatunk *elégséges* feltételeket arra, hogy egy függvénynek valamilyen pontban lokális szélsőértéke legyen.

Tétel. (A lokális szélsőértékre vonatkozó elsőrendű elégséges feltétel.)
Legyen $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$ és $f : (a, b) \to \mathbb{R}$. Tegyük fel, hogy

- *$f \in D(a, b)$,*
- *egy $c \in (a, b)$ pontban $f'(c) = 0$ és*
- *az f' deriváltfüggvény előjelet vált c-ben.*

Ekkor,

1^o *ha az f' függvény a c pontban negatív értékből pozitív értékbe megy át, akkor c az f függvénynek lokális minimumhelye;*

2^o *ha az f' függvény a c pontban pozitív értékből negatív értékbe megy át, akkor a c pont az f függvénynek lokális maximumhelye.*

Bizonyítás. Meggondolható. ■

Megjegyzés. Az előjelváltást formálisan így definiáljuk: Legyen $h \in \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ és $a \in \operatorname{int} \mathcal{D}_h$. Azt mondjuk, hogy a h függvény az a pontban *negatívból pozitívba megy át* (röviden: $(-,+)$ *előjelváltása* *van*), ha $h(a)$=0 és $\exists\,\delta > 0$ úgy, hogy $h(x) < 0$, ha $x \in (a-\delta, a)$ és $h(x) > 0$, ha $x \in (a, a+\delta)$. A $(+,-)$ *előjelváltást* hasonló módon értelmezzük. □

Tétel. (A lokális szélsőértékre vonatkozó másodrendű elégséges feltétel.)
Legyen $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$ és $f : (a,b) \to \mathbb{R}$. Tegyük fel, hogy
- *f kétszer deriválható egy $c \in (a,b)$ pontban, azaz $f \in D^2\{c\}$,*
- *$f'(c) = 0$,*
- *$f''(c) \neq 0$.*

Ekkor c lokális szélsőértékhelye az f függvénynek;
1^o ha $f''(c) > 0$, akkor f-nek c-ben lokális minimuma van,
2^o ha $f''(c) < 0$, akkor f-nek c-ben lokális maximuma van.

Bizonyítás. Az előző tétel közvetlen következménye. ■

Megjegyzés. Ha $f'(c) = 0$ és $f''(c) = 0$ akkor, sem arra nem következtethetünk, hogy f-nek van, sem arra, hogy f-nek nincs lokális szélsőértéke c-ben. A különböző lehetőségeket mutatják például az $f(x) := x^3$, $f(x) := x^4$ és az $f(x) := -x^4$ $(x \in \mathbb{R})$ függvények a $c = 0$ helyen. Ebben az esetben további vizsgálatok kellenek. □

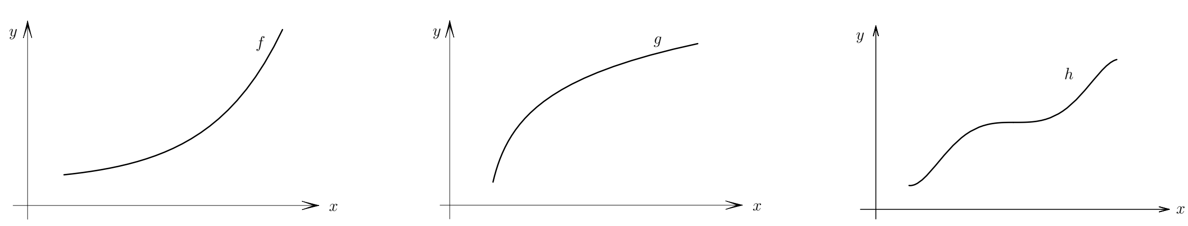
4. Konvex és konkáv függvények

Megjegyzés. Valós-valós függvények konvexitását és konkávitását **intervallumon** fogjuk értelmezni. A továbbiakban gyakran használt „$I \subset \mathbb{R}$ (tetszőleges) intervallum” kijelentésen (hacsak mást nem mondunk) azt értjük, hogy I korlátos vagy nem korlátos, nyílt, zárt, félig nyílt vagy félig zárt intervallum. A következő halmazok mindegyike intervallum: $(-1,1)$, $[-1,1]$, $[-1,0)$, $[0,+\infty)$, $(-\infty,0)$, $(-\infty,+\infty)$. □

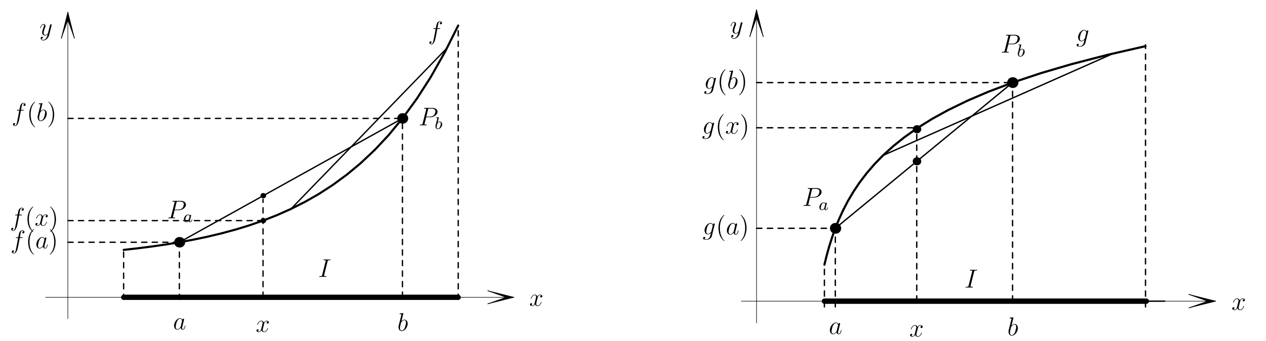
• A konvexitás és a konkávitás szemléletes jelentése

Célunk továbbra is függvények általános tulajdonságainak a leírása, jellemzése. Azt már láttuk, hogy a differenciálszámítás milyen hatékony eszközöket kínál a monotonitás és a szélsőértékek vizsgálatához.

Most tovább folytatjuk függvények „alaki” tulajdonságainak a tanulmányozását. Számos *konkrét* függvény grafikonját már jól ismerjük. Gondoljunk most a *monoton növekedésre*. Világos, hogy egy függvény többféleképpen is lehet monoton növekedő:



A jobb oldali grafikonnal ellentétben a másik kettő bizonyos jellegzetes „szabályosságot” mutat. Ezeket a tulajdonságokat célszerű definiálni. Az f függvényt (bal oldali ábra) **konvexnek**, g-t pedig (középső ábra) **konkávnak** fogjuk nevezni. A definíció megfogalmazásához használjuk fel a derivált definíciójánál már bevált *ötletet*: húzzunk be húrokat:



Szemléletesen világos, hogy az I intervallum tetszőleges $a < b$ pontjai esetén az f (a g) függvény grafikonjának az (a, b) intervallumhoz tartozó része a P_a és P_b pontokat összekötő húr alatt (felett) van. A szóban forgó húr egyenesének az egyenlete:

$$y = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a) + f(a), \quad \text{vagy} \quad y = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - b) + f(b).$$

A fentiek alapján eléggé természetesek a következő definíciók.

• A konvexitás és a konkávitás fogalma

Definíció. *Az $f \in \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvény* ***konvex az*** *$I \subset \mathbb{R}$* ***intervallumon****, ha*

$$\forall\, a, b \in I,\ a < b \quad \textit{esetén}$$

$$(*) \qquad f(x) \le \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a) + f(a) \quad \big(\forall\, x \in (a, b)\big).$$

Ha $(*)$-ban $\le$ helyett $<$ áll, akkor f-et I**-n szigorúan konvexnek**, ha $\ge$, illetve $>$ áll, akkor f-et I**-n konkávnak**, illetve **szigorúan konkávnak** nevezzük.

Megjegyzések.

1^o Ha az f függvény elsőfokú $\mathbb{R}$-en, azaz $f(x) = cx + d$ $(x \in \mathbb{R})$ valamely c és d állandóval, akkor $(*)$-ban egyenlőség áll minden x-re. Tehát egy elsőfokú függvény egyszerre konvex és konkáv is.

2^o Az abs függvény konvex, de nem szigorúan konvex $\mathbb{R}$-en. ■

A konvexitást jellemző egyenlőtlenséget érdemes más formában is megadni.

Tétel. *Az $I \subset \mathbb{R}$ intervallumon értelmezett $f : I \to \mathbb{R}$ függvény akkor és csak akkor konvex I-n, ha*

$$\forall\, a, b \in I,\ a < b \quad \textit{és} \quad \forall\, \lambda \in (0, 1) \quad \textit{esetén}$$
$$f\big(\lambda a + (1 - \lambda) b\big) \le \lambda f(a) + (1 - \lambda) f(b).$$

Bizonyítás. Nélkül. ■

Megjegyzés. Szigorúan konvex, konkáv, illetve szigorúan konkáv függvényekre hasonló állítások érvényesek.

• A konvexitás-konkávitás és a deriválhatóság kapcsolata

Tétel. *Legyen* $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $\alpha < \beta$, *és tegyük fel, hogy* $f \in D^2(\alpha, \beta)$. *Ekkor*

1^o f *konvex* (α, β)*-n* $\iff f''(x) \geq 0 \ \big(\forall\, x \in (\alpha, \beta)\big)$,

2^o f *konkáv* (α, β)*-n* $\iff f''(x) \leq 0 \ \big(\forall\, x \in (\alpha, \beta)\big)$,

3^o *ha* $f''(x) > 0 \ \big(\forall\, x \in (\alpha, \beta)\big) \implies f$ *szigorúan konvex* (α, β)*-n,*

4^o *ha* $f''(x) < 0 \ \big(\forall\, x \in (\alpha, \beta)\big) \implies f$ *szigorúan konkáv* (α, β)*-n.*

Bizonyítás. Nélkül. ■

• Inflexiós pont

Definíció. *Legyen* $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $\alpha < \beta$, *és tegyük fel, hogy* $f \in D(\alpha, \beta)$. *Azt mondjuk, hogy a* $c \in (\alpha, \beta)$ *pont az* f *függvénynek* ***inflexiós pontja****, ha*

$$\exists\, \delta > 0: \quad f \text{ konvex } (c-\delta, c]\text{-n és konkáv } [c, c+\delta)\text{-n} \quad \text{vagy} \quad \text{fordítva.}$$

5. Aszimptoták

Definíció. *Legyen* $a \in \mathbb{R}$ *és* $f : (a, +\infty) \to \mathbb{R}$. *Azt mondjuk, hogy az* f *függvénynek* ***van aszimptotája*** $(+\infty)$***-ben****, ha*

$$\exists\ l(x) = Ax + B \quad (x \in \mathbb{R})$$

elsőfokú függvény, amelyre

$$\lim_{x \to +\infty} \big(f(x) - l(x)\big) = 0.$$

Ebben az esetben az $y = Ax + B$ *egyenletű egyenes az* f *függvény* ***aszimptotája*** $(+\infty)$***-ben****.*

Megjegyzés. Hasonló módon értelmezzük a $(-\infty)$-beli aszimptotát.

Tétel. *Legyen* $a \in \mathbb{R}$. *Az* $f : (a, +\infty) \to \mathbb{R}$ *függvénynek akkor és csak akkor van aszimptotája* $(+\infty)$*-ben, ha léteznek és végesek a következő határértékek:*

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} =: A \in \mathbb{R} \qquad \lim_{x \to +\infty} \big(f(x) - Ax\big) =: B \in \mathbb{R}.$$

Ekkor az

$$l(x) = Ax + B \quad (x \in \mathbb{R})$$

egyenes az f *függvény aszimptotája* $(+\infty)$*-ben.*

Megjegyzés. Hasonló állítás érvényes a $(-\infty)$-beli aszimptoták meghatározására.

Teljes függvényvizsgálat

Adott f valós-valós függvény **teljes függvényvizsgálatán** f analitikus és geometriai tulajdonságainak a megállapítását értjük. Ennek során a következőket kell meghatározni:

1^o Kezdeti vizsgálatok. (Deriválhatóság, paritás, periodicitás megállapítása.)

2^o Monotonitási intervallumok.

3^o Lokális és abszolút szélsőértékek.

4^o Konvexitási, konkávitási intervallumok.

5^o A határértékek a $\mathcal{D}'_f \setminus \mathcal{D}_f$ pontokban.

6^o Aszimptota $(\pm\infty)$-ben.

7^o A függvény grafikonjának felrajzolása.

Példa. *Teljes függvényvizsgálat végzése után vázolja az*

$$f(x) := x + 2 - \frac{4x}{1+x^2} \qquad (x \in \mathbb{R})$$

függvény grafikonját.

Megoldás. Az f függvény minden $x \in \mathbb{R}$ pontban akárhányszor deriválható.

<u>**Monotonitás**</u>: Minden $x \in \mathbb{R}$ pontban

$$f'(x) = 1 - \frac{4}{1+x^2} + \frac{8x^2}{(1+x^2)^2} = \frac{x^4+6x^2-3}{(1+x^2)^2},$$

ezért

$$f'(x) \gtreqless 0 \iff x^4 + 6x^2 - 3 \gtreqless 0.$$

A további vizsgálatokhoz a számlálót (ami egy másodfokúra visszavezethető kifejezés) szorzatra bontjuk. Legyen $a := x^2$. Ekkor

$$x^4 + 6x^2 - 3 = a^2 + 6a - 3 = 0.$$

Ennek az egyenletnek a két gyöke:

$$a_1 = 2\sqrt{3} - 3 > 0 \qquad \text{és} \qquad a_2 = -(2\sqrt{3}+3) < 0,$$

ezért

$$a^2 + 6a - 3 = (a - a_1)(a - a_2),$$

tehát

$$x^4 + 6x^2 - 3 = \big(x^2 - (2\sqrt{3}-3)\big)\big(x^2 + (2\sqrt{3}+3)\big).$$

Így

$$x^4 + 6x^2 - 3 \gtreqless 0 \iff x^2 - (2\sqrt{3}-3) \gtreqless 0 \iff |x| \gtreqless \sqrt{2\sqrt{3}-3} := x_1.$$

Az eddigieket összefoglalva azt kapjuk, hogy

$$f'(x) \gtreqless 0 \quad \Longleftrightarrow \quad |x| \gtreqless x_1,$$

következésképpen

$f'(x) > 0$, ha $x \in (-\infty, -x_1)$, ezért $f \uparrow$ a $(-\infty, -x_1)$ intervallumon;

$f'(x) < 0$, ha $x \in (-x_1, x_1)$, ezért $f \downarrow$ a $(-x_1, x_1)$ intervallumon;

$f'(x) > 0$, ha $x \in (x_1, +\infty)$, ezért $f \uparrow$ az $(x_1, +\infty)$ intervallumon.

Lokális szélsőértékek:

Az elsőrendű szükséges feltétel. Mivel

$$f'(x) = 0 \qquad \Longleftrightarrow \qquad \text{ha} \quad x = -x_1 \quad \text{vagy} \quad x = x_1,$$

ezért az f függvénynek csak ezekben a pontokban lehetnek lokális szélsőértékei.

Az elsőrendű elégséges feltétel. A monotonitási intervallumok alapján az f függvénynek $(-x_1)$-ben *lokális maximuma*, x_1-ben pedig *lokális minimuma* van.

Konvexitás, inflexió:

$$\begin{aligned} f''(x) &= (-4) \cdot (-1) \cdot \frac{2x}{(1+x^2)^2} + \frac{16x}{(1+x^2)^2} + \frac{8x^2 \cdot (-2) \cdot 2x}{(1+x^2)^3} = \\ &= \frac{24x}{(1+x^2)^2} - \frac{32x^3}{(1+x^2)^3} = \\ &= \frac{8x(3-x^2)}{(1+x^2)^3}; \end{aligned}$$

$$f''(x) = 0 \iff x = 0,\ x = \sqrt{3} =: x_2,\ x = -\sqrt{3} = -x_2.$$

Világos, hogy $x_1 = \sqrt{2\sqrt{3} - 3} < \sqrt{3} = x_2$, továbbá

$$f''(x) \gtreqless 0 \quad \Longleftrightarrow \quad x(3 - x^2) \gtreqless 0,$$

ezért f'' előjelviszonyai:

$f''(x) > 0$, ha $x \in (-\infty, -x_2)$, ezért f konvex a $(-\infty, -x_2)$ intervallumon;

$f''(x) < 0$, ha $x \in (-x_2, 0)$, ezért f konkáv a $(-x_2, 0)$ intervallumon;

$f''(x) > 0$, ha $x \in (0, x_2)$, ezért f konvex a $(0, x_2)$ intervallumon;

$f''(x) < 0$, ha $x \in (x_2, +\infty)$, ezért f konkáv az (x_2, ∞) intervallumon.

A $-x_2 = -\sqrt{3}$, az $x_0 = 0$ és az $x_2 = \sqrt{3}$ pont tehát inflexiós pontja az f függvénynek.

A határértékeket most $(\pm\infty)$-ben kell megvizsgálni:

$$\lim_{x \to +\infty} \left(2 + x - \frac{4x}{1+x^2} \right) = +\infty \qquad \text{és} \qquad \lim_{x \to -\infty} \left(2 + x - \frac{4x}{1+x^2} \right) = -\infty.$$

Aszimptoták:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{2}{x}+1-\frac{4}{1+x^2}\right)=1=A$$

és

$$\lim_{x\to+\infty}(f(x)-1\cdot x)=\lim_{x\to+\infty}\left(2-\frac{4x}{1+x^2}\right)=\lim_{x\to+\infty}\left(2-\frac{4}{\frac{1}{x}+x}\right)=2=B$$

és ez azt jelenti, hogy az $y=1\cdot x+2=x+2$ egyenletű egyenes az f függvény aszimptotája $(+\infty)$-ben. Ez az egyenes $(-\infty)$-ben is aszimptotája az f függvénynek.

A függvény képe: