

Név:, NEPTUN-kód

Csoport, gyak.vez.:

Pontszám:

*Programtervező informatikus szak I. évfolyam
Matematikai alapok 3. zárthelyi
2019. december 16.*

<i>Minden feladathoz indoklást, levezetést kérünk.</i>
--

<i>Az 5. feladat (tételkimondás és bizonyítás) megoldását csak e feladatlap hátoldalára írva fogadjuk el.</i>

1. (11 pont) Határozzuk meg az alábbi mátrix sajátértékeit és sajátvektorait, majd vizsgáljuk meg a mátrixot diagonalizálhatóság szempontjából (diagonalizáló mátrix, diagonális alak):

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$$

2. Adott az alábbi lineárisan független vektorrendszer az \mathbb{R}^4 vektortérben:

$$b_1 = (1, 0, -1, 1), \quad b_2 = (2, 1, 0, 1), \quad b_3 = (-1, 1, 1, 0),$$

továbbá legyen $W = \text{Span}(b_1, b_2, b_3)$.

a) (8 pont) Adjunk meg ortogonális és ortonormált bázist a W altérben.

b) (6 pont) Bontsuk fel az $x = (2, -1, 0, 1)$ vektort a W altér szerint párhuzamos és merőleges komponensekre.

3. (8 pont) Adott az alábbi $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ típusú függvény:

$$f(x) = \frac{2x + 5}{x - 1} \quad (x \in (1; +\infty))$$

Igazoljuk, hogy f invertálható, továbbá adjuk meg a $D_{f^{-1}}$, $R_{f^{-1}}$ halmazokat és $y \in D_{f^{-1}}$ esetén az $f^{-1}(y)$ függvényértéket.

4. (8 pont) A definíció alapján igazoljuk, hogy

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x^3 - 3x^2 + x + 10}{x^3 + x^2 + x + 7} = 2$$

5. (9 pont) Tételkimondás és bizonyítás (a megoldást kérjük e feladatlap hátoldalára írni):
A felbontási tétel (euklideszi terekben).