20.7. Megjegyzés. Legyen $A \in \mathbb{K}^{n\times n}$ egy (alsó vagy felső) háromszögmátrix. Ekkor – pl. az alsó háromszögmátrix esetében – karakterisztikus polinomja a következő (háromszögmátrix determinánsa a főátlóbeli elemek szorzata):

$$P(\lambda) = \begin{vmatrix} a_{11}-\lambda & 0 & \dots & 0 \\ a_{21} & a_{22}-\lambda & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn}-\lambda \end{vmatrix} =$$

$$= (a_{11}-\lambda)\cdot(a_{22}-\lambda)\cdot\dots\cdot(a_{nn}-\lambda) \qquad (\lambda \in \mathbb{K}).$$

Ugyanez lesz a karakterisztikus polinom felső háromszögmátrix esetén is.

Innen pedig az következik, hogy a háromszögmátrix sajátértékei a főátló elemei, s mindegyik sajátérték algebrai multiplicitása annyi, ahányszor a főátlóban szerepel.

20.8. Tétel. *Legyen $A \in \mathbb{K}^{n\times n}$ és $\lambda \in \mathrm{Sp}\,(A)$. Ekkor a λ-hoz tartozó sajátvektorokból és a nullvektorból álló*

$$W_\lambda := W_\lambda(A) := \{x \in \mathbb{K}^n \mid Ax = \lambda x\}$$

halmaz altér $\mathbb{K}^n$-ben, melynek dimenziója $n - \mathrm{rang}\,(A-\lambda I)$. A λ sajátértékhez végtelen sok sajátvektor tartozik.

Bizonyítás.

$$W_\lambda = \{x \in \mathbb{K}^n \mid Ax = \lambda x\} = \{x \in \mathbb{K}^n \mid (A-\lambda I)x = 0\} = \mathcal{M}_h$$

A homogén lineáris egyenletrendszerekről tanultak értelmében tehát a fenti halmaz altér, melynek dimenziója:

$$\dim W_\lambda = \dim \mathcal{M}_h = n - \mathrm{rang}\,(A-\lambda I).$$

Mivel $\dim W_\lambda = n - \mathrm{rang}\,(A-\lambda I) \geq 1$, ezért a sajátvektorok halmaza ($W_\lambda \setminus \{0\}$) valóban végtelen. $\square$

Rögzített sajátérték esetén tehát nem az az igazi kérdés, hogy hány sajátvektor tartozik hozzá, hanem az, hogy maximálisan hány független sajátvektor tartozik hozzá, azaz mennyi a W_λ altér dimenziója.

21.3. Tétel. *Ha $A \sim B$, akkor $P_A = P_B$, vagyis karakterisztikus polinomjuk megegyezik. Következésképpen megegyeznek a sajátértékek (algebrai multiplicitással) és a determinánsok is.*

Bizonyítás. Legyenek $A, B, C \in \mathbb{K}^{n\times n}$, és tegyük fel, hogy $B = C^{-1}AC$. Ekkor minden $\lambda \in \mathbb{K}$ esetén:

$$\begin{aligned} P_B(\lambda) &= \det(B-\lambda I) = \det(C^{-1}AC - \lambda C^{-1}IC) = \det(C^{-1}(A-\lambda I)C) = \\ &= \det(C^{-1})\cdot\det(A-\lambda I)\cdot\det(C) = \det(C^{-1})\cdot\det(C)\cdot\det(A-\lambda I) = \\ &= \det(C^{-1}C)\cdot\det(A-\lambda I) = \det(I)\cdot P_A(\lambda) = 1\cdot P_A(\lambda) = P_A(\lambda). \end{aligned}$$

$\square$

21.6. Tétel. *Legyen $A \in \mathbb{K}^{n\times n}$. Az A mátrix akkor és csak akkor diagonalizálható ($\mathbb{K}$ felett), ha létezik S.B. $\mathbb{K}^n$-ben.*

Bizonyítás. Tegyük fel először, hogy A diagonalizálható. Legyenek $c_1, \ldots, c_n \in \mathbb{K}^n$ a diagonalizáló C mátrix oszlopvektorai:

$$C = [c_1 \ \ldots \ c_n] \ .$$

Megmutatjuk, hogy $c_1, \ldots, c_n$ egy S.B.

Mivel C invertálható, ezért $c_1, \ldots, c_n$ egy n-tagú lineárisan független rendszer, tehát bázis $\mathbb{K}^n$-ben.

Annak igazolásához, hogy a c_j vektorok sajátvektorok, induljunk ki a

$$C^{-1}AC = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{bmatrix}$$

egyenlőségből, ahol $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ az A sajátértékei. Szorozzuk be az egyenletet C-vel balról:

$$A \cdot [c_1 \ldots c_n] = C \cdot \begin{bmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{bmatrix} = [c_1 \ldots c_n] \cdot \begin{bmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{bmatrix}$$

$$[Ac_1 \ldots Ac_n] = [\lambda_1 c_1 \ldots \lambda_n c_n]$$

Az oszloponkénti egyenlőséget felírva:

$$Ac_j = \lambda_j c_j \qquad (j = 1, \ldots, n)$$

tehát a bázis valóban sajátvektorokból áll.

Megfordítva, tegyük fel, hogy $c_1, \ldots, c_n$ egy S.B. $\mathbb{K}^n$-ben. Legyen $C \in \mathbb{K}^{n\times n}$ a $c_1, \ldots, c_n$ oszlopokból felépített mátrix. C nyilvánvalóan invertálható, mivel oszlopai lineárisan függetlenek.

Írjuk fel a sajátérték-egyenleteket:

$$Ac_j = \lambda_j c_j \qquad (j = 1, \ldots, n)\,,$$

majd végezzük el visszafelé a bizonyítás első felében tett átalakításokat. Az alábbi egyenlőséghez jutunk:

$$C^{-1}AC = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{bmatrix}.$$

Tehát A valóban diagonalizálható. $\square$

22.7. Tétel. (a norma két egyszerű tulajdonsága)

1. $\|x\| \geq 0 \quad (x \in V)$. *Továbbá* $\|x\| = 0 \iff x = 0$ *(pozitív definit);*
2. $\|\lambda x\| = |\lambda| \cdot \|x\| \qquad (x \in V;\ \lambda \in \mathbb{R})$ *(homogén).*

Bizonyítás. Az első állítás azonnal adódik a skaláris szorzat ötödik axiómájából.
A második állítás igazolása:

$$\|\lambda x\| = \sqrt{\langle \lambda x,\, \lambda x\rangle} = \sqrt{\lambda\lambda\langle x,\, x\rangle} = \sqrt{\lambda^2 \cdot \|x\|^2} = \sqrt{\lambda^2} \cdot \sqrt{\|x\|^2} = |\lambda| \cdot \|x\|\,.$$

22.14. Tétel. (altérre való merőlegesség) *Legyen* $e_1, \ldots, e_n \in V$ *egy vektorrendszer,* $W := \mathrm{Span}\,(e_1, \ldots, e_n)$, *és* $x \in V$. *Ekkor*

$$x \perp W \iff \langle x,\, e_i\rangle = 0 \quad (i = 1, \ldots, n)\,.$$

Bizonyítás.
„$\Longrightarrow$": Nyilvánvaló az $y := e_i$ választással.
„$\Longleftarrow$": Legyen $y = \sum\limits_{i=1}^{n} \lambda_i e_i \in W$ egy tetszőleges vektor. Ekkor

$$\langle x,\, y\rangle = \langle x,\, \sum_{i=1}^{n} \lambda_i e_i\rangle = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \langle x,\, e_i\rangle = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \cdot 0 = 0\,.$$

22.19. Tétel. (Pitagorasz-tétel) *Legyen* $x_1, \ldots, x_n \in V$ *egy véges O.R. Ekkor*

$$\|\sum_{i=1}^{n} x_i\|^2 = \sum_{i=1}^{n} \|x_i\|^2\,,$$

részletesebben:

$$\|x_1 + x_2 + \ \ldots\ + x_n\|^2 = \|x_1\|^2 + \|x_2\|^2 + \ \ldots\ \|x_n\|^2\,.$$

Bizonyítás.

$$\|\sum_{i=1}^{n} x_i\|^2 = \langle \sum_{i=1}^{n} x_i,\, \sum_{j=1}^{n} x_j\rangle = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} \langle x_i,\, x_j\rangle = \sum_{\substack{i,j=1\\ i\neq j}}^{n} \langle x_i,\, x_j\rangle + \sum_{\substack{i,j=1\\ i=j}}^{n} \langle x_i,\, x_j\rangle =$$

$$= \sum_{\substack{i,j=1\\ i\neq j}}^{n} 0 + \sum_{i=1}^{n} \langle x_i,\, x_i\rangle = \sum_{i=1}^{n} \|x_i\|^2.$$

(Felhasználtuk, hogy $i \neq j$ esetén $\langle x_i,\, x_j\rangle = 0$.)

22.18. Tétel. **(O.R. függetlensége)** *Legyen $x_1, \ldots, x_n \in V \setminus \{0\}$ egy O.R. Ekkor ez a rendszer lineárisan független. Következésképpen minden O.N.R. lineárisan független.*

Bizonyítás.
A

$$0 = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i$$

összefüggőségi egyenletet szorozzuk be skalárisan az x_j vektorral, ahol $j = 1, \ldots, n$:

$$0 = \langle 0,\, x_j \rangle = \langle \sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i,\, x_j \rangle = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \langle x_i,\, x_j \rangle = \lambda_j \langle x_j,\, x_j \rangle \,.$$

Mivel a rendszerből kizártuk a nullvektort, ezért $\langle x_j,\, x_j \rangle \neq 0$. Következésképpen: $\lambda_j = 0$.

Az összefüggőségi egyenletben minden együttható 0, tehát a rendszer valóban lineárisan független. □

23.3. Tétel. **(vetület hosszának becslése)** *A felbontási tétel feltételei mellett:*

$$\| P(x) \| \leq \| x \| \,.$$

Itt egyenlőség akkaor és csk akkor áll, ha $Q(x) = 0$, ami ekvivalens azzal, hogy $x \in W$.

Bizonyítás. Mivel $P(x) \perp Q(x)$, alkalmazzuk a Pitagorasz-tételt, majd hagyjuk el a nemnegatív $\| Q(x) \|^2$ tagot:

$$\| x \|^2 = \| P(x) + Q(x) \|^2 = \| P(x) \|^2 + \| Q(x) \|^2 \geq \| P(x) \|^2 \,,$$

amiből négyzetgyökvonás után kapjuk a bizonyítandó állítást. Nyilvánvaló, hogy az utolsó becslésnél akkor és csak akkor van egyenlőség, ha $Q(x) = 0$. □

23.1. Tétel. (Felbontási tétel)

Legyen $e_1, \ldots, e_n \in V$ egy O.N.R., továbbá $W := \operatorname{Span}(e_1, \ldots, e_n)$ a rendszer által generált altér. (Fontos megjegyeznünk, hogy ekkor $e_1, \ldots, e_n$ O.N.B. W-ben.)

Ekkor bármely $x \in V$ vektor egyértelműen felbontható $x = x_1 + x_2$ alakban, ahol $x_1 \in W$ és $x_2 \perp W$. Nevezetesen

$$x_1 = \sum_{i=1}^{n} \langle x, e_i \rangle \cdot e_i \quad \text{és} \quad x_2 = x - x_1 = x - \sum_{i=1}^{n} \langle x, e_i \rangle \cdot e_i .$$

Bizonyítás. Először a felbontás létezését igazoljuk úgy, hogy megmutatjuk, hogy a megadott képletek egy helyes felbontást adnak. Jelölje ismét c_i az i-edik Fourier-együtthatót, azaz legyen $c_i = \langle x, e_i \rangle$ $(i = 1, \ldots, n)$. Ezzel a jelöléssel

$$x_1 = \sum_{i=1}^{n} c_i e_i \quad \text{és} \quad x_2 = x - x_1 = x - \sum_{i=1}^{n} c_i e_i .$$

Nyilvánvaló, hogy $x_1 \in W$ (mivel x_1 az e_i-k lineáris kombinációja).

Az is nyilvánvaló, hogy $x = x_1 + x_2$ (mivel $x_2 = x - x_1$).

Csak azt kell igazolnunk, hogy $x_2 \perp W$. Mivel W altér, a rá való merőlegesség ekvivalens az $e_1, \ldots, e_n$ generátorrendszerre való merőlegességgel (22.14 tétel). Ez viszont egyszerűen adódik az alábbi számolásból:

$$\begin{aligned}
\langle x_2, e_i \rangle &= \langle x - \sum_{j=1}^{n} c_j e_j, e_i \rangle = \langle x, e_i \rangle - \sum_{j=1}^{n} c_j \langle e_j, e_i \rangle = \\
&= \langle x, e_i \rangle - \sum_{\substack{i,j=1 \\ i \neq j}}^{n} c_j \langle e_j, e_i \rangle - c_i \langle e_i, e_i \rangle = \\
&= \langle x, e_i \rangle - 0 - c_i \cdot 1 = 0 \qquad (i = 1, \ldots, n).
\end{aligned}$$

Második lépésként igazoljuk az egyértelműséget.

Tegyük fel, hogy

$$x = x_1 + x_2 \quad \text{és} \quad x = x_1' + x_2'$$

is a követelményeknek megfelelő felbontások. Ebből következően

$$x_1 + x_2 = x_1' + x_2' \quad \text{átrendezve} \quad x_1 - x_1' = x_2' - x_2 . \tag{23.1}$$

Ezt felhasználva

$$\begin{aligned}
\langle x_1 - x_1', x_1 - x_1' \rangle &= \langle x_2' - x_2, x_1 - x_1' \rangle = \\
&= \langle x_2', x_1 \rangle - \langle x_2, x_1 \rangle - \langle x_2', x_1' \rangle + \langle x_2, x_1' \rangle = 0 - 0 - 0 + 0 = 0 ,
\end{aligned}$$

amiből a skaláris szorzat utolsó axiómája alapján $x_1 - x_1' = 0$, azaz $x_1 = x_1'$ következik. Ekkor viszont (23.1) alapján $x_2 = x_2'$ is azonnal adódik. □