3. gyakorlat

Differenciálszámítás 1.

A derivált definíciója

1. feladat. *A definíció alapján lássuk be, hogy $f \in D\{a\}$, és számítsuk ki $f'(a)$-t, ha*

(a) $f(x) := x^4 \quad (x \in \mathbb{R}), \quad a := 1;$

(b) $f(x) := \sqrt{x} \quad \big(x \in [0, +\infty)\big), \quad a := 2;$

(c) $f(x) := \dfrac{1}{x} \quad \big(x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}\big), \quad a := 3.$

Megoldás.

Emlékeztető. **Definíció.** *Azt mondjuk, hogy az $f \in \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvény* ***differenciálható*** *(vagy* ***deriválható****) az $a \in \operatorname{int} \mathcal{D}_f$ pontban (jelben $f \in D\{a\}$), ha*

$$\exists \quad \textit{és véges a} \quad \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} \quad \textit{határérték,}$$

amit az $f'(a)$ szimbólummal jelölünk, és az f függvény a ***pontbeli deriváltjának*** *nevezünk.*

Jegyezzük meg, hogy egy $\frac{0}{0}$ típusú határértékkel (ez, mint tudjuk bármi lehet) értelmeztük a deriválhatóságot. □

Világos, hogy az $a \in \operatorname{int} \mathcal{D}_f$ feltétel mindegyik esetben teljesül.

(a) Mivel

$$\begin{aligned}
\lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} &= \lim_{h \to 0} \frac{(1+h)^4 - 1^4}{h} = \\
= \big(\text{az } a^4 - b^4 = (a-b) \cdot \big(a^3 + a^2\, b + a\, b^2 + b^3\big) \text{ alapján}\big) &= \\
= \lim_{h \to 0} \frac{h \cdot \big((1+h)^3 + (1+h)^2 + (1+h) + 1\big)}{h} &= \\
= \lim_{h \to 0} \big((1+h)^3 + (1+h)^2 + (1+h) + 1\big) &= 4,
\end{aligned}$$

ezért $f \in D\{1\}$ és $f'(1) = 4$.

(b) Mivel

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{\sqrt{2+h} - \sqrt{2}}{h} = \lim_{h \to 0} \left(\frac{\sqrt{2+h} - \sqrt{2}}{h} \cdot \frac{\sqrt{2+h} + \sqrt{2}}{\sqrt{2+h} + \sqrt{2}} \right) =$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{(2+h) - 2}{h \cdot \big(\sqrt{2+h} + \sqrt{2}\big)} = \lim_{h \to 0} \frac{1}{\sqrt{2+h} + \sqrt{2}} = \frac{1}{2\sqrt{2}},$$

ezért $f \in D\{2\}$ és $f'(2) = \dfrac{1}{2\sqrt{2}}$.

(c) Mivel

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{\dfrac{1}{3+h}-\dfrac{1}{3}}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{\dfrac{-h}{3\cdot(3+h)}}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{-1}{3\cdot(3+h)}=-\frac{1}{9},$$

ezért $f\in D\{3\}$ és $f'(3)=-\dfrac{1}{9}$. ■

Megjegyzés. Néhány elemi függvény deriváltját tartalmazza `ez a táblázat`. □

Deriválási szabályok

2. feladat. *Számítsuk ki $f'(x)$-et, ha*

(a) $f(x):=4x^3-2x^2+5x-3 \quad (x\in\mathbb{R})$,

(b) $f(x):=\sqrt{x\sqrt{x\sqrt{x}}} \quad (x>0)$,

(c) $f(x):=x^3+\dfrac{1}{x^2}-\dfrac{1}{5\,x^5} \quad \big(x\in\mathbb{R}\setminus\{0\}\big)$,

(d) $f(x):=x^a+a^x+ax+\dfrac{x}{a}+\dfrac{a}{x} \quad \big(x>0\big),\ \ a>0$ *paraméter.*

Megoldás. Alkalmas átalakításokkal elemi függvények összegeit kapjuk, ezért $f'(x)$ mindegyik esetben létezik.

(a) Ha $x\in\mathbb{R}$, akkor

$$\begin{aligned}\underline{f'(x)}&=\big(4x^3-2x^2+5x-3\big)'=4\cdot\big(x^3\big)'-2\cdot\big(x^2\big)'+5\cdot(x)'-3'=\\&=4\cdot 3\,x^2-2\cdot 2\,x+5\cdot 1+0=\underline{12\,x^2-4\,x+5}.\end{aligned}$$

(b) A hatványazonosságok felhasználásával először átalakítjuk $f(x)$-et:

$$\sqrt{x\sqrt{x\sqrt{x}}}=\sqrt{x\sqrt{x\cdot x^{1/2}}}=\sqrt{x\cdot\big(x^{3/2}\big)^{1/2}}=\big(x\cdot x^{3/4}\big)^{1/2}=\big(x^{7/4}\big)^{1/2}=x^{7/8}.$$

Így

$$\underline{f'(x)}=\left(\sqrt{x\sqrt{x\sqrt{x}}}\right)'=\big(x^{7/8}\big)'=\frac{7}{8}\cdot x^{7/8-1}=\frac{7}{8}\cdot x^{-1/8}=\underline{\frac{7}{8\sqrt[8]{x}}}\,.$$

(c) Ha $x\in\mathbb{R}\setminus\{0\}$, akkor

$$\begin{aligned}\underline{f'(x)}&=\left(x^3+\frac{1}{x^2}-\frac{1}{5\,x^5}\right)'=\big(x^3\big)'+\big(x^{-2}\big)'-\frac{1}{5}\cdot\big(x^{-5}\big)'=\\&=3\,x^2+(-2)\cdot x^{-3}-\frac{1}{5}\cdot(-5)\cdot x^{-6}=\underline{3\,x^2-\frac{2}{x^3}+\frac{1}{x^6}}\,.\end{aligned}$$

(d) Tetszőleges $a>0$ paraméter esetén minden $x>0$ pontban

$$\underset{\sim\sim}{f'(x)}=\Big(x^a+a^x+ax+\frac{x}{a}+\frac{a}{x}\Big)'=(x^a)'+(a^x)'+a\cdot(x)'+\frac{1}{a}\cdot(x)'+a\cdot\Big(\frac{1}{x}\Big)'=$$
$$=\underset{\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim}{a\,x^{a-1}+a^x\cdot\ln a+a+\frac{1}{a}-\frac{a}{x^2}}\,.\ \blacksquare$$

3. feladat. *Deriváljuk az alábbi függvényeket:*

(a) $f(x):=x^2\cdot\sin x\quad(x\in\mathbb{R})$,

(b) $f(x):=\dfrac{x^3+2}{x^2+x+5}\quad(x\in\mathbb{R})$.

Megoldás.

<u>**Emlékeztető**</u>. Az algebrai műveletek és a derivált kapcsolatára a következő állítások érvényesek:

Tétel. *Ha $f,g\in D\{a\}$, akkor*

1^o $c\cdot f\in D\{a\}$ *és* $(c\cdot f)'(a)=c\cdot f'(a)\quad(c\in\mathbb{R})$,

2^o $f+g\in D\{a\}$ *és* $\big(f+g\big)'(a)=f'(a)+g'(a)$,

3^o $f\cdot g\in D\{a\}$ *és* $\big(f\cdot g\big)'(a)=f'(a)\cdot g(a)+f(a)\cdot g'(a)$,

4^o *ha még a $g(a)\neq 0$ feltétel is teljesül, akkor*

$$\frac{f}{g}\in D\{a\}\ \textit{és}\ \Big(\frac{f}{g}\Big)'(a)=\frac{f'(a)\cdot g(a)-f(a)\cdot g'(a)}{g^2(a)}.\quad\square$$

Az elemi függvények deriválhatósága és a fenti tétel alapján mindegyik függvénytetszőleges $x\in\mathbb{R}$ pontban deriválható.

(a) Ha $x\in\mathbb{R}$, akkor

$$\underset{\sim\sim}{f'(x)}=\big(x^2\cdot\sin x\big)'=\big(x^2\big)'\cdot\sin x+x^2\cdot(\sin x)'=\underset{\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim}{2\,x\sin x+x^2\cdot\cos x}\,.$$

(b) A nevezőnek nincs valós gyöke ($D=1^2-4\cdot 5<0$), ezért az elemi függvények deriváltjai és a fenti tétel alapján $f\in D\{x\}$ minden $x\in\mathbb{R}$ pontban. Ha $x\in\mathbb{R}$, akkor

$$\underset{\sim\sim}{f'(x)}=\Big(\frac{x^3+2}{x^2+x+5}\Big)'=\frac{\big(x^3+2\big)'\cdot\big(x^2+x+5\big)-\big(x^3+2\big)\cdot\big(x^2+x+5\big)'}{\big(x^2+x+5\big)^2}=$$
$$=\frac{3\,x^2\cdot\big(x^2+x+5\big)-\big(x^3+2\big)\cdot\big(2\,x+1\big)}{\big(x^2+x+5\big)^2}=\underset{\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim}{\frac{x^4+2x^3+15x^2-4x-2}{\big(x^2+x+5\big)^2}}\,.\ \blacksquare$$

4. feladat. *Határozzuk meg a következő függvények deriváltfüggvényeit:*

(a) $f(x):=\big(5x^2+3x\big)^{2020}\quad(x\in\mathbb{R})$,

(b) $f(x):=\sqrt{x+\sqrt{x}}\quad(x\geq 0)$,

(c) $f(x):=\sin\dfrac{x^2+1}{x+3}\quad(x>-3)$,

(d) $f(x):=\sin^2\big(\ln\sqrt{1+\cos^2 x}+1\big)\quad(x\in\mathbb{R})$.

Megoldás.

<u>**Emlékeztető**</u>. Összetett függvényekről van szó, ezek deriváltjára a következő állítást ismertük meg:

Tétel. *Tegyük fel, hogy* $g \in D\{a\}$ *és* $h \in D\{g(a)\}$*. Ekkor* $f := h \circ g \in D\{a\}$ *és*

$$f'(a) = \big(h \circ g\big)'(a) = h'\big(g(a)\big) \cdot g'(a).$$

Sokszor többszörösen összetett függvényt kell deriválni. Az ilyen esetekben a fenti tételt többször egymás után „kívülről befele haladva” alkalmazzuk. $\square$

(a) Az f függvény a $h(t) := t^{2020}$ $(t \in \mathbb{R})$ külső és a $g(x) := 5x^2 + 3x$ $(x \in \mathbb{R})$ belső függvény kompozíciója:

$$f(x) = \big(h \circ g\big)(x) = h\big(g(x)\big) = \big(g(x)\big)^{2020} = \big(5x^2 + 3x\big)^{2020} \quad (x \in \mathbb{R}).$$

Mivel $\forall\, x \in \mathbb{R}$ pontban $g \in D\{x\}$ és $g'(x) = 10x + 3$, illetve $h \in D\{g(x)\}$ és $h'(t) = 2020t^{2019}$ $(\forall\, t \in \mathbb{R})$, ezért az összetett függvény deriválására vonatkozó tétel feltételei teljesülnek. Így minden $x \in \mathbb{R}$ esetén $f = h \circ g \in D\{x\}$ és

$$\begin{aligned} \underline{f'(x)} &= \big(h \circ g\big)'(x) = h'\big(g(x)\big) \cdot g'(x) = 2020\,\big(g(x)\big)^{2019} \cdot g'(x) = \\ &= \underline{2020\,\big(5x^2 + 3x\big)^{2019} \cdot \big(10x + 3\big)}\,. \end{aligned}$$

(b) Az f függvény a $h(t) := \sqrt{t}$ $(t \geq 0)$ külső és a $g(x) := x + \sqrt{x}$ $(x \geq 0)$ belső függvény kompozíciója:

$$f(x) = \big(h \circ g\big)(x) = h\big(g(x)\big) = \sqrt{g(x)} = \sqrt{x + \sqrt{x}} \quad (x \geq 0).$$

Mivel $\forall\, x > 0$ pontban $g \in D\{x\}$ és $g'(x) = 1 + \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$, illetve $h \in D\{g(x)\}$ és $h'(t) = \dfrac{1}{2\sqrt{t}}$ $(\forall\, t > 0)$, ezért az összetett függvény deriválására vonatkozó tétel feltételei ezekben a pontokban teljesülnek. Így minden $x > 0$ esetén $f = h \circ g \in D\{x\}$ és

$$\begin{aligned} \underline{f'(x)} &= \big(h \circ g\big)'(x) = h'\big(g(x)\big) \cdot g'(x) = \frac{1}{2\sqrt{g(x)}} \cdot g'(x) = \\ &= \underline{\frac{1}{2\sqrt{x + \sqrt{x}}} \cdot \left(1 + \frac{1}{2\sqrt{x}}\right)}\,. \end{aligned}$$

Az f függvény a 0 pontban nem deriválható.

(c) Az f függvény a $h(t) := \sin t$ $(t \in \mathbb{R})$ külső és a $g(x) := \dfrac{x^2 + 1}{x + 3}$ $(x > -3)$ belső függvény kompozíciója. Ezek a függvények az értelmezési tartományuk minden pontjában deriválhatók, ezért az összetett függvény deriválására vonatkozó tétel szerint $f \in D\{x\}$ $\forall\, x > -3$ esetén, és a deriváltfüggvény

$$\underset{\sim\sim\sim}{f'(x)} = \left(\sin \frac{x^2+1}{x+3}\right)' = \cos \frac{x^2+1}{x+3} \cdot \left(\frac{x^2+1}{x+3}\right)' =$$

$$= \cos \frac{x^2+1}{x+3} \cdot \frac{\left(x^2+1\right)' \cdot (x+3) - \left(x^2+1\right) \cdot \left(x+3\right)'}{(x+3)^2} =$$

$$= \cos \frac{x^2+1}{x+3} \cdot \frac{2x \cdot (x+3) - \left(x^2+1\right) \cdot 1}{(x+3)^2} = \underset{\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim}{\cos \frac{x^2+1}{x+3} \cdot \frac{x^2+6x-1}{(x+3)^2}}\,.$$

(d) Többszörösen összetett függvényről van szó. Az elemi függvények deriváltjait, valamint az összetett függvény deriválására vonatkozó tételt többször egymás után (kívűlről befele haladva) alkalmazva azt kapjuk, hogy $f \in D\{x\}$ minden $x \in \mathbb{R}$ pontban, és a deriváltfüggvény:

$$\underset{\sim\sim\sim}{f'(x)} = \left(\sin^2\left(\ln\sqrt{1+\cos^2 x}+1\right)\right)' =$$

$$= 2\,\sin\left(\ln\sqrt{1+\cos^2 x}+1\right) \cdot \left(\sin\left(\ln\sqrt{1+\cos^2 x}+1\right)\right)' =$$

$$= 2\,\sin\left(\ln\sqrt{1+\cos^2 x}+1\right) \cdot \cos\left(\ln\sqrt{1+\cos^2 x}+1\right) \cdot \left(\ln\sqrt{1+\cos^2 x}+1\right)' =$$

$$= \sin\left(2\left(\ln\sqrt{1+\cos^2 x}+1\right)\right) \cdot \frac{1}{\sqrt{1+\cos^2 x}} \cdot \left(\sqrt{1+\cos^2 x}\right)' =$$

$$= \frac{\sin\left(2\left(\ln\sqrt{1+\cos^2 x}+1\right)\right)}{\sqrt{1+\cos^2 x}} \cdot \frac{1}{2\sqrt{1+\cos^2 x}} \cdot 2\,\cos x \cdot (-\sin x) =$$

$$= \underset{\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim}{-\frac{\sin\left(2\left(\ln\sqrt{1+\cos^2 x}+1\right)\right)}{2\left(1+\cos^2 x\right)} \cdot \sin 2x}\,. \quad \blacksquare$$

5. feladat. *Mutassuk meg, hogy az alábbi függvények differenciálhatók, és számítsuk ki a deriváltfüggvényeiket:*

(a) $f(x) := \left(1+\dfrac{1}{x}\right)^{1-x} \quad (x>0)$,

(b) $f(x) := \left(\ln x\right)^{x+1} \quad (x>1)$.

Megoldás.

Megjegyzés. Olyan hatványokról van szó, amelyeknél az alap és a kitevő is változik, vagyis az f függvény

$$f(x) = \left(g(x)\right)^{h(x)}$$

alakú, ahol a $g(x)$ alap pozitív. Az ilyen esetekben az átalakításhoz célszerű felhasználni a következő <u>ötletet</u>: *írjuk fel a $g(x)$ alapot e hatványaként* az

$$a = e^{\ln a} \quad (a>0)$$

azonosság felhasználásával. Így azt kapjuk, hogy

$$f(x) = \big(g(x)\big)^{h(x)} = \big(e^{\ln g(x)}\big)^{h(x)} = e^{h(x)\cdot \ln g(x)}.$$

Az f függvényt összetett függvényként fogjuk fel. Nevezetesen f az exp külső és a $h \cdot \ln \circ g$ belső függvény kompozíciója. $\square$

(a) Az $a = e^{\ln a}$ $(a > 0)$ azonosságot alkalmazva azt kapjuk, hogy

$$f(x) := \left(1 + \frac{1}{x}\right)^{1-x} = \left(e^{\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)}\right)^{1-x} = e^{(1-x)\cdot \ln\left(1+\frac{1}{x}\right)} = \exp\left((1-x)\cdot \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right)\right).$$

Az f függvény tehát az exp külső és az $(1-x)\cdot \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right)$ $(x > 0)$ belső függvény kompozíciója. Ezek a függvények minden $x > 0$ pontban deriválhatók, ezért az összetett függvény deriválására vonatkozó tétel szerint f valóban deriválható minden $x > 0$ pontban, és a deriváltfüggvény:

$$\begin{aligned} f'(x) &= \exp'\left((1-x)\cdot \ln\left(1+\frac{1}{x}\right)\right)\cdot\left((1-x)\cdot \ln\left(1+\frac{1}{x}\right)\right)' = \\ &= \exp\left((1-x)\cdot \ln\left(1+\frac{1}{x}\right)\right)\cdot \\ &\cdot\left((-1)\cdot \ln\left(1+\frac{1}{x}\right) + (1-x)\cdot \ln'\left(1+\frac{1}{x}\right)\cdot\left(1+\frac{1}{x}\right)'\right) = \\ &= \left(1+\frac{1}{x}\right)^{1-x}\cdot\left(-\ln\left(1+\frac{1}{x}\right) - \frac{1-x}{x\,(x+1)}\right). \end{aligned}$$

(b) Mivel minden $x > 1$ pontban

$$f(x) = \big(\ln x\big)^{x+1} = \big(e^{\ln(\ln x)}\big)^{x+1} = e^{(x+1)\cdot \ln(\ln x)} = \exp\big((x+1)\cdot \ln(\ln x)\big),$$

ezért az elemi függvények deriváltjainak és a deriválási szabályoknak a felhasználásával azt kapjuk, hogy $f \in D\{x\}$ minden $x > 1$ pontban, és a deriváltfüggvény:

$$\begin{aligned} f'(x) &= \exp'\big((x+1)\cdot \ln(\ln x)\big)\cdot\big((x+1)\cdot \ln(\ln x)\big)' = \\ &= \exp\big((x+1)\cdot \ln(\ln x)\big)\cdot\Big(1\cdot \ln(\ln x) + (x+1)\cdot \ln'(\ln x)\cdot \ln' x\Big) = \\ &= \big(\ln x\big)^{x+1}\cdot\left(\ln(\ln x) + \frac{x+1}{x}\cdot\frac{1}{\ln x}\right). \quad \blacksquare \end{aligned}$$

Érintő

6. feladat. *Legyen*

$$f(x) := \ln \frac{\sqrt{1+x}}{\left(x^2+1\right)^5} \quad (x > -1).$$

(a) *Vizsgáljuk meg derválhatóság szempontjából az f függvényt, és határozzuk meg az f' deriváltfüggvényét.*

(b) *Mutassuk meg, hogy a függvény grafikonjának a $\big(0, f(0)\big)$ pontban van érintője, és írjuk fel az érintőegyenes egyenletét.*

Megoldás. (a) Az elemi függvények deriválhatóságából és a deriválási szabályokból következik, hogy minden $x > -1$ pontban $f \in D\{x\}$, ezért $\mathcal{D}_{f'} = (-1, +\infty)$. $f'(x)$-et az összetett függvény deriválási szályát felhasználva számítjuk ki. Vegyük észre azonban azt, hogy kevesebb számolással kapjuk meg az eredményt, ha először a logaritmusazonosságokkal átalakítjuk $f(x)$-et:

$$f(x) = \ln \frac{\sqrt{1+x}}{\left(x^2+1\right)^5} = \ln \sqrt{1+x} - \ln\left(x^2+1\right)^5 = \frac{1}{2}\ln(1+x) - 5\ln\left(x^2+1\right) \quad (x > -1).$$

Így a deriváltfüggvény:

$$f'(x) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1+x} - 5 \cdot \frac{1}{x^2+1} \cdot 2x = \frac{1}{2(1+x)} - \frac{10x}{x^2+1} \quad (x > -1).$$

(b) Emlékeztetünk az érintő definíciójára: *Azt mondjuk, hogy az $f \in \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvény grafikonjának az $\big(a, f(a)\big)$ pontban **van érintője**, ha $f \in D\{a\}$. Az f függvény grafikonjának $\big(a, f(a)\big)$ pontbeli **érintőjén** az*

$$y = f'(a) \cdot (x - a) + f(a)$$

egyenletű egyenest értjük.

$f \in D\{0\}$, tehát a függvény grafikonjának a $\big(0, f(0)\big)$ pontban *van érintője.*

Mivel

$$f(0) = \ln 1 = 0 \quad \text{és} \quad f'(0) = \frac{1}{2},$$

ezért az érintőegyenes egyenlete:

$$y = f'(0) \cdot (x - 0) + f(0) = \frac{x}{2}. \blacksquare$$