12. előadás

2020. november 30.

INTEGRÁLSZÁMÍTÁS

Az egyváltozós analízisben hangsúlyoztuk, hogy a matematika alkalmazásának igen fontos fejezete az *integrálszámítás*. Bevezettük a határozott integrál (vagy Riemann-integrál) *fogalmát*, megismertük a legfontosabb *tulajdonságait* és bemutattuk számos gyakorlati *alkalmazását*.

A továbbiakban a Riemann-integrál többváltozós függvényekre való kiterjesztéséről lesz szó.

Az első fontos megjegyzés az, hogy a valós-valós függvények körében megismert integrálfogalmat többféle módon *lehet* általánosítani. Sőt: különböző (pl. geometriai, fizikai és egyéb) problémák vizsgálata *szükségessé is tette* különböző integrálfogalmak bevezetését.

1. Geometriai problémaként vessük fel pl. egy kétváltozós függvény grafikonja alatti térrész térfogatának a problémáját. Ez vezet el $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ függvények **többszörös integráljának** a fogalmához.

2. Fizikai motivációként gondoljunk pl. az $\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ típusú függvényekkel leírható (gravitációs, elektromos vagy mágneses) erőterekre. Ezek vizsgálata tette szükségessé a következő két integrálfogalom bevezetését:

- A **vonalintegrál** segítségével pl. egy erőtérben adott görbe mentén végzett munkát lehet meghatározni.
- A **felületi integrál** alapvető fogalom pl. az áramlástanban.

A továbbiakban csak a többszörös integrálokról lesz szó.

Többszörös integrálok

Emlékeztetünk arra, hogy a Riemann-integrál bevezetésének a motivációjaként függvény grafikonja alatti tartomány területének a problémáját vetettük fel. Abból az Arkhimédész-óta ismert, egyébként elég természetes ötletből indultunk ki, hogy a szóban forgó (görbe vonallal határolt) síkidom területét téglalapok területeinek az összegével közelítsük. Ebből kiindulva jutottunk el a *Riemann-integrálhatóság* fogalmához.

A címben jelzett integrálfogalom bevezetését hasonló geometriai, illetve fizikai problémák motiválják. Példaként tekintsünk egy kétváltozós, valós értékű pozitív függvényt, amelyik az egyszerűség végett például egy, a koordináta-tengelyekkel párhuzamos oldalú téglalapon van értelmezve. A függvény grafikonja alatti térrész *térfogatát* téglatestek térfogatainak az összegével lehet közelíteni. Látni fogjuk, hogy az egyváltozós Riemann-integrál fogalmának bevezetésénél követett út szó szerint átvihető $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ függvényekre, ezért a többszörös integrál értelmezése az egyváltozós Riemann-integrál definíciójának *közvetlen* általánosításaként adódik.

A többszörös integrálok értelmezése $\mathbb{R}^n$-beli intervallumokon

Először a legegyszerűbb $\mathbb{R}^n$-beli halmazokat ($1 \le n \in \mathbb{N}$), nevezetesen az intervallumokat definiáljuk. **n-dimenziós intervallumon** (vagy más szóval **n-dimenziós téglán**) az

$$I := [a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \times \cdots \times [a_n, b_n] \subset \mathbb{R}^n \tag{1}$$

Descartes-szorzatot értjük, ahol $a_k, b_k \in \mathbb{R}$, $a_k < b_k$ $(k = 1, 2, \ldots, n)$. Ha $n = 1$, akkor a „szokásos" (korlátos és zárt) $\mathbb{R}$-beli intervallumot, $n = 2$-re a koordináta-síkon a koordináta-tengelyekkel párhuzamos oldalú téglalapot, $n = 3$-ra pedig a térbeli derékszögű koordináta-rendszerben a koordináta-síkokkal párhuzamos oldallapú téglatestet kapjuk.

Az

$$|I| := \mu(I) := \prod_{k=1}^{n} (b_k - a_k)$$

számot az I intervallum **mértékének** nevezzük.

Tehát $n = 1$ esetén

$$|I| = b_1 - a_1$$

az $I \subset \mathbb{R}$ intervallum *hossza*, $n = 2$-re

$$|I| = (b_1 - a_1) \cdot (b_2 - a_2)$$

az $I = [a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \subset \mathbb{R}^2$ téglalap területe, ha pedig $n = 3$, akkor

$$|I| = (b_1 - a_1) \cdot (b_2 - a_2) \cdot (b_3 - a_3)$$

az $I = [a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \times [a_3, b_3] \subset \mathbb{R}^3$ téglatest *térfogata*.

Emlékeztetünk arra, hogy egy korlátos és zárt $[a, b] \subset \mathbb{R}$ intervallum felosztásán olyan $\tau \subset [a, b]$ *véges* halmazt értettünk, amelyre $a, b \in \tau$, azaz

$$\tau := \{a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_m = b\},$$

ahol m egy adott természetes szám. Az intervallum felosztásainak a halmazát az $\mathcal{F}[a, b]$ szimbólummal jelöltük. A többdimenziós intervallum felosztásának az értelmezéséhez vegyük észre, hogy a feti osztópontokkal megadott felosztást az $I_j := [x_j, x_{j+1}]$ intervallumok $(j = 0, 1, 2, \ldots, m - 1)$ halmazaként is értelmezhetjük:

$$\tau = \{I_j = [x_j, x_{j+1}] \mid j = 0, 1, 2, \ldots, m - 1\}.$$

Legyen ezek után egy $k = 1, 2, \ldots, n$ index esetén az $[a_k, b_k]$ intervallum egy felosztása

$$\begin{aligned} \tau_k &= \{x_{k,0} = a_k < x_{k,1} < x_{k,2} < \cdots < x_{k,m_k} = b_k\} = \\ &= \{I_{k,j} = [x_{k,j}, x_{k,j+1}] \mid j = 0, 1, \ldots, m_k - 1\}. \end{aligned}$$

(A felosztás tehát $m_k + 1$ osztópontot, illetve m_k intervallumot tartalmaz.) Ekkor az (1) n-dimenziós I intervallum egy **felosztásán** a

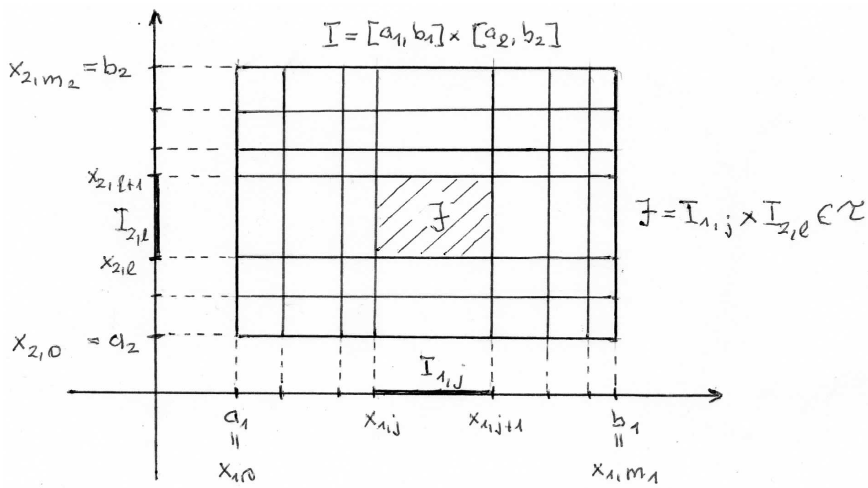
$$\tau := \tau_1 \times \tau_2 \times \cdots \times \tau_n \subset I$$

halmazt értjük, a felosztások halmazát a $\mathcal{F}(I)$ szimbólummal jelöljük. A τ halmaz elemei tehát az

$$I_{1,j_1} \times I_{2,j_2} \times \cdots \times I_{n,j_n}$$

n-dimenziós intervallumok, ahol $0 \leq j_l \leq m_j - 1$ $(l = 1, 2, \ldots, n)$.

A fentieket az $n = 2$ esetben az alábbi ábra szemlélteti.



Egyszerűen igazolható, hogy

$$I = \bigcup_{J \in \tau} J, \qquad \mu(I) = \sum_{J \in \tau} \mu(J).$$

Az egyváltozós esethez hasonlóan értelmezzük az alsó-, illetve a felső közelítő összeg fogalmát. Legyen τ az n-dimenziós I intervallum egy felosztása és $f : I \to \mathbb{R}$ korlátos függvény. Ekkor

$$s(f, \tau) := \sum_{J \in \tau} \inf_{x \in J} f(x) \cdot \mu(J)$$

az f függvény τ felosztáshoz tartozó **alsó közelítő összege**,

$$S(f, \tau) := \sum_{J \in \tau} \sup_{x \in J} f(x) \cdot \mu(J)$$

az f függvény τ felosztáshoz tartozó **felső közelítő összege**.

Mivel tetszőleges $\tau \in \mathcal{F}(I)$ felosztás esetén

$$\inf_{x \in I} f(x) \cdot \mu(I) \leq s(f, \tau) \leq S(f, \tau) \leq \sup_{x \in I} f(x) \cdot \mu(I),$$

ezért minden korlátos f függvényre az

$$\big\{ s(f, \tau) \bigm| \tau \in \mathcal{F}(I) \big\} \quad \text{és az} \quad \big\{ S(f, \tau) \bigm| \tau \in \mathcal{F}(I) \big\}$$

halmazok korlátosak.

1. definíció. *Az*

$$I_*(f) := \sup\big\{s(f,\tau \;\big|\; \tau \in \mathcal{F}(I)\big\}$$

*valós számot az f függvény **Darboux-féle alsó integráljának**, az*

$$I^*(f) := \inf\big\{S(f,\tau \;\big|\; \tau \in \mathcal{F}(I)\big\}$$

*valós számot pedig az f függvény **Darboux-féle felső integráljának** nevezzük.*

*Akkor mondjuk, hogy a korlátos $f : I \to \mathbb{R}$ függvény **Riemann-integrálható** (röviden **integrálható**) az I intervallumon (jelben $f \in R(I)$), ha $I_*(f) = I^*(f)$. A közös $I_*(f) = I^*(f)$ számot az f függvény I intervallumon vett **Riemann-integráljának** (röviden **integráljának**) nevezzük, és az alábbi szimbólumok valamelyikével jelöljük:*

$$\int\limits_I f, \quad \int\limits_I f(x)\,dx, \quad \int\limits_{a_1}^{b_1} \cdots \int\limits_{a_n}^{b_n} f(x_1,\ldots,x_n)\,dx_1\ldots\,dx_n.$$

Jegyezzük meg, hogy tetszőleges $f : I \to \mathbb{R}$ függvényre $I_*(f)$ és $I^*(f)$ létezik, mindegyik véges, továbbá bármely két $\tau, \sigma \in \mathcal{F}(I)$ felosztásra $s(f,\tau) \leq S(f,\sigma)$, következésképpen

$$I_*(f) \leq I^*(f).$$

Az egyváltozós esethez hasonlóan egyszerű példát lehet megadni olyan korlátos f függvényre, amelyre az $I_*(f) < I^*(f)$, ami azt jelenti, hogy a függvény *nem integrálható.*

Példa. Legyen $f : [0,1] \times [0,1] \to \mathbb{R}$,

$$f(x,y) := \begin{cases} 0, & \text{ha } x \text{ és } y \text{ racionális,} \\ 1, & \text{különben.} \end{cases}$$

Ekkor $I_*(f) = 0$ és $I^*(f) = 1$, ezért az f függvény *nem integrálható* a $[0,1] \times [0,1] \subset \mathbb{R}^2$ intervallumon.

A továbbiakban felsorolt állítások azt fejezik ki, hogy a Riemann-integrálhatóság, illetve maga a Riemann-integrál a többváltozós esetben is rendelkezik az egyváltozós esetben megismert tulajdonságokkal.

1. tétel. *Tekintsük az $I \subset \mathbb{R}^n$ $(n \in \mathbb{N})$ intervallumon az $f, g : I \to \mathbb{R}$ korlátos függvényeket. Tegyük fel, hogy az $A := \big\{x \in I \;\big|\; f(x) \neq g(x)\big\}$ halmaz véges. Ekkor*

(a) $f \in R(I) \iff g \in R(I)$,

(b) *ha* $f \in R(I)$, *akkor* $\int\limits_I f = \int\limits_I g$.

2. tétel. *Tegyük fel, hogy az $I \subset \mathbb{R}^n$ $(n \in \mathbb{N})$ intervallumon értelmezett $f : I \to \mathbb{R}$ függvény folytonos. Ekkor $f \in R(I)$, azaz $C(I) \subset R(I)$.*

3. tétel. *Legyen $I \subset \mathbb{R}^n$ $(n \in \mathbb{N})$ intervallum, és tegyük fel, hogy f, $g \in R(I)$. Ekkor*

1^o *minden $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ esetén*

$$\alpha f + \beta g \in R(I) \quad \textit{és} \quad \int\limits_I (\alpha f + \beta g) = \alpha \int\limits_I f + \beta \int\limits_I g,$$

2^o $f \cdot g \in R(I)$,

3^o *ha valamilyen $m > 0$ állandóval fennáll az*

$$|g(x)| \geq m > 0 \quad (x \in I)$$

egyenlőtlenség, akkor az $\dfrac{f}{g}$ függvény is integrálható az I intervallumon.

4. tétel. *Tegyük fel, hogy $f \in R(I)$. Ekkor*

(a) *$|f| \in R(I)$, és $\left|\int\limits_I f\right| \leq \int\limits_I |f|$;*

(b) *ha $g \in R(I)$, és $f(x) \leq g(x)$ $(x \in I)$, akkor $\int\limits_I f \leq \int\limits_I g$.*

A többszörös integrálok értelmezése $\mathbb{R}^n$-beli korlátos halmazokon

Az integrálhatóság fogalma egyszerűen kiterjeszthető *tetszőleges* korlátos $H \subset \mathbb{R}^n$-beli halmazokon értelmezett *korlátos* függvényekre. Legyen H egy ilyen halmaz és $f : H \to \mathbb{R}$ egy adott korlátos függvény. Ekkor van olyan n-dimenziós $I \subset \mathbb{R}^n$ intervallum, amelyre $H \subset I$. Terjesszük ki az f függvény értelmezését az I intervallumra a következőképpen:

$$\tilde{f}(x) := \begin{cases} f(x), & \text{ha } x \in H, \\ 0, & \text{ha } x \in I \setminus H. \end{cases}$$

Azt mondjuk, hogy az $f : H \to \mathbb{R}$ függvény *(Riemann)-integrálható a H halmazon* (jelben $f \in R(H)$), ha az $\tilde{f} : I \to \mathbb{R}$ függvény integrálható az I intervallumon. Ekkor legyen

$$\int\limits_H f := \int\limits_I \tilde{f}.$$

Egyszerűen belátható, hogy ez az értelmezés *független* a H-t tartalmazó intervallum megválasztásától.

A kettős integrálok geometriai jelentései

Az $n = 2$ esetben a többszörös integrált *kettős integrálnak* nevezzük. Ha a korlátos $f \in \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ függvény integrálható a $H \subset \mathbb{R}^2$ korlátos halmazon, akkor az integrálját a korábbi jelöléseinket kissé módosítva a

$$\iint\limits_H f \quad \text{vagy az} \quad \iint\limits_H f(x, y)\, dx\, dy$$

szimbólumok valamelyikével fogjuk jelölni.

Az egyváltozós esetben már definiáltuk *síkidom területét.* Ezt kettős integrálokkal a következőképpen értelmezhetjük.

2. definíció. *Legyen $H \subset \mathbb{R}^2$ egy korlátos halmaz és $f(x,y) := 1$ $\big((x,y) \in H\big)$. Azt mondjuk, hogy a H síkidomnak* ***van területe****, ha $f \in R(H)$, és ekkor H* ***területét*** *a*

$$t(H) := \iint\limits_H f = \iint\limits_H 1\,dx\,dy$$

kettős intergállal értelmezzük.

Megjegyzés. A síkidom területére megadott két definícó ekvivalens. Számos esetben bizonyos síkidomok területét könnyebb kiszámolni kettős integrállal, mint egyváltozós integrállal.

Most arra emlékeztetünk, hogy az egyváltozós analízisben már értelmeztük *forgástest térfogatát*, és annak kiszámolására egy képletet is megismertünk.

Kettős integrálok alsó- és a felső közelítő összegeinek geometriai jelentése alapján kézenfekvő bizonyos „térrészek” (pl. kétváltozós függvény grafikonja alatti tartományok) térfogatának az alábbi értelmezése.

3. definíció. *Legyen $H \subset \mathbb{R}^2$ korlátos halmaz és $f : H \to \mathbb{R}$ nemnegatív korlátos függvény. Azt mondjuk, hogy a*

$$T := \big\{(x,y,z) \;\big|\; (x,y) \in H, \quad 0 \le z \le f(x,y)\big\} \subset \mathbb{R}^3$$

„térrésznek” (hengerszerű testnek) ***van térfogata****, ha $f \in R(H)$. Ekkor a*

$$V(T) := \iint\limits_H f = \iint\limits_H f(x,y)\,dx\,dy$$

kettős integrált a T test ***térfogatának*** *nevezzük.*

Kettős integrálok kiszámítása 1.

Kétváltozós valós értékű függvény integrálhatóságának az eldöntése és az integráljának a kiszámolása a definíció alapján *nem egyszerű* feladat.

Ha a korlátos $f \in \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ függvény integrálható a $H \subset \mathbb{R}^2$ korlátos halmazon, akkor az integrálját a korábbi jelöléseinket kissé módosítva a

$$\iint\limits_H f \quad \text{vagy az} \quad \iint\limits_H f(x,y)\,dx\,dy$$

szimbólumok valamelyikével fogjuk jelölni.

Az integrálok kiszámolására a gyakorlatban jól használható, **az integrálási tartománytól függő** képletek ismeretesek. A továbbiakban ezekre vonatkozó eredményeket ismertetünk.

$\boxed{1.}$ Kettős integrál kiszámítása téglalapon (szukcesszív integrálással)

Leonhard Euler (1707–1783) fedezte fel azt a fontos tényt, hogy *folytonos függvény* kettős integráljának a kiszámítását vissza lehet vezetni két valós-valós függvény egymásra következő (szukcesszív) integráljának a kiszámolására. Euler eredményét *Guido Fubini* (1879–1943) általánosította *integrálható függvényekre.*

A továbbiakban feltesszük, hogy adott egy

$$I := I_1 \times I_2 := [a, b] \times [c, d] \subset \mathbb{R}^2$$

kétdimenziós intervallum és egy $f : I \to \mathbb{R}$ *korlátos* függvény.

Kétváltozós függvény viselkedésének az áttekintését megkönnyítheti, ha az egyik változóját rögzítjük, és a függvényt a másik változó függvényének fogjuk fel. Az így kapott függvények az eredeti függvény ún. **szekciófüggvényei**.

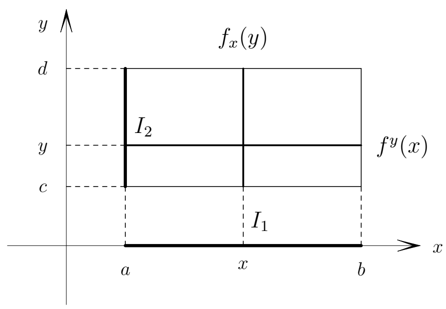
Ha $f : I_1 \times I_2 \to \mathbb{R}$ adott kétváltozós függvény, akkor tetszőlegesen rögzített $x \in I_1$ esetén az

$$f_x : I_2 \to \mathbb{R}, \quad f_x(y) := f(x, y) \quad \big(y \in I_2\big);$$

tetszőlegesen rögzített $y \in I_2$ esetén az

$$f^y : I_1 \to \mathbb{R}, \quad f^y(x) := f(x, y) \quad \big(x \in I_1\big)$$

az f függvény szekciófüggvényei.



1. tétel: A szukcesszív integrálás tétele. *Legyen $I = [a, b] \times [c, d]$ és $f : I \to \mathbb{R}$. Tegyük fel, hogy*

(a) $f \in R(I)$,

(b) $\forall\, x \in [a, b]$ *pont esetén* $f_x \in R[c, d]$*;*

(c) $\forall\, y \in [c, d]$ *pont esetén* $f^y \in R[a, b]$.

Ekkor

$$\iint\limits_I f = \int_a^b \int_c^d f(x, y)\, dx\, dy = \int_a^b \left(\int_c^d f(x, y)\, dy \right) dx = \int_c^d \left(\int_a^b f(x, y)\, dx \right) dy. \tag{2}$$

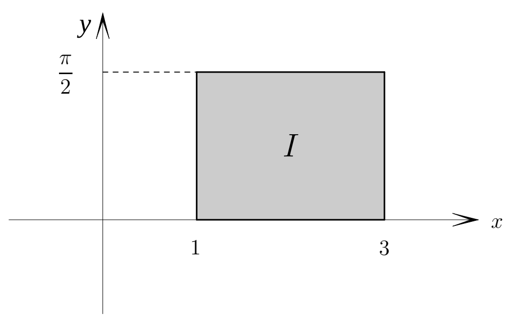
1. megjegyzés. Ha az f függvény *folytonos* az I téglalapon, akkor az f_x $(x \in [a, b])$ és az f^y $(y \in [c, d])$ szekciófüggvények is folytonosak, következésképpen Riemann-integrálhatóak. Így a tétel feltételei teljesülnek. Ebben az esetben az állítás *egyszerűen* bebizonyítható. Korábban már említettük, hogy ennek a speciális esetnek a felfedezése Euler érdeme.

2. megjegyzés. Formálisan megfogalmazva tehát a fenti feltételek teljesülése esetén egy kétváltozós függvény integrálját kiszámíthatjuk úgy is, hogy az egyik változót először (tetszőlegesen) rögzítjük, és a másik változó szerint integrálunk, majd az így kapott (a rögzített változótól függő) integrált integráljuk. (Innen ered a *szukcesszív* (egymás utáni) jelző.) Az (2) egyenlőség azt is állítja, hogy az integrálást bármelyik változóval kezdhetjük, tehát az **integrálás sorrendje felcserélhető**. Ez a helyzet például akkor, ha az f függvény *folytonos*.

1. példa. *Számítsuk ki a következő kettős integrált:*

$$\int_1^3 \int_0^{\pi/2} x \cdot \sin(xy)\, dx\, dy.$$

Megoldás. Az integrálási tartomány az $I = [1, 3] \times [0, \frac{\pi}{2}]$ intervallum:



Az integrálandó $f(x, y) := x \cdot \sin(xy)$ $\big((x, y) \in \mathbb{R}^2\big)$ függvény folytonos I-n ($\mathbb{R}^2$-ön is), ezért $f \in R(I)$. A szukcesszív integrálás tétele alapján mindegy, hogy milyen sorrendben integrálunk, az eredmény ugyanaz lesz.

Ha először az $x \in [1, 3]$ változót (tetszőlegesen) rögzítjük, és az y változó szerint integrálunk, akkor az

$$(*) \qquad \int_1^3 \left(\int_0^{\pi/2} x \cdot \sin(xy)\, dy \right) dx$$

egyváltozós integrálokat kell egymás után kiszámolni.

Ha először az $y \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ változót (tetszőlegesen) rögzítjük, és az x változó szerint integrálunk, akkor pedig azt kapjuk, hogy

$$(**) \qquad \int_0^{\pi/2} \left(\int_1^3 x \cdot \sin(xy)\, dx \right) dy$$

Vegyük észre azonban azt, hogy a $(**)$ esetben először parciálisan kell integrálni, a $(*)$ esetben pedig a belső integrált rögtön kiszámíthatjuk. Ezért a $(*)$ alatti sorrendben integrálunk:

$$\int_1^3 \int_0^{\pi/2} x \cdot \sin(xy)\, dx\, dy = \int_1^3 \left(\int_0^{\pi/2} x \cdot \sin(xy)\, dy \right) dx =$$

$$= \int_1^3 \Big[-\cos(xy) \Big]_{y=0}^{y=\pi/2} dx = \int_1^3 \Big(-\cos\frac{\pi x}{2} + \cos 0 \Big) dx = \int_1^3 \Big(-\cos\frac{\pi x}{2} + 1 \Big) dx =$$

$$= \left[-\frac{\sin\frac{\pi x}{2}}{\frac{\pi}{2}} + x \right]_1^3 = \Big(-\frac{2}{\pi}\sin\frac{3\pi}{2} + 3 \Big) - \Big(-\frac{2}{\pi}\sin\frac{\pi}{2} + 1 \Big) = 2 + \frac{4}{\pi}.$$

Így

$$\underline{\underline{\int_1^3 \int_0^{\pi/2} x \cdot \sin(xy)\, dx\, dy = 2 + \frac{4}{\pi}.}} \ \blacksquare$$

3. megjegyzés. A szukcesszív integrálás tétele azt állítja, hogy (a tétel feltételeinek a teljesülése esetén) mindegy, hogy melyik sorrendben integrálunk, az eredmény ugyanaz lesz. Ez azonban nem jelenti azt, hogy a kétféle sorrendben történő kiszámolás során ugyanolyan technikai jellegű nehézségek lépnek fel. Előfordulhatnak lényeges különbségek is. Erre a gyakorlaton mutatunk majd példát.

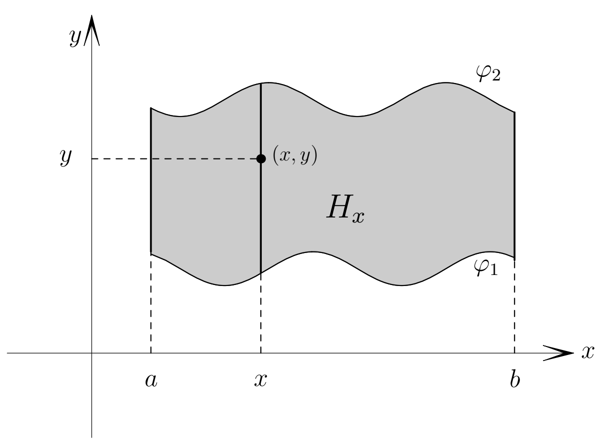
2. Kettős integrál kiszámítása normáltartományon

Gyakran előfordul, hogy nem intervallumon értelmezett függvény integrálját kell kiszámítani. A legegyszerűbb esetek a következők.

Legyenek $\varphi_1, \varphi_2 : [a,b] \to \mathbb{R}$ folytonos függvények, és tegyük fel, hogy $\varphi_1(x) \le \varphi_2(x)$ $(\forall\, x \in [a,b])$. A

$$H_x := \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; a \le x \le b,\ \varphi_1(x) \le y \le \varphi_2(x) \right\}$$

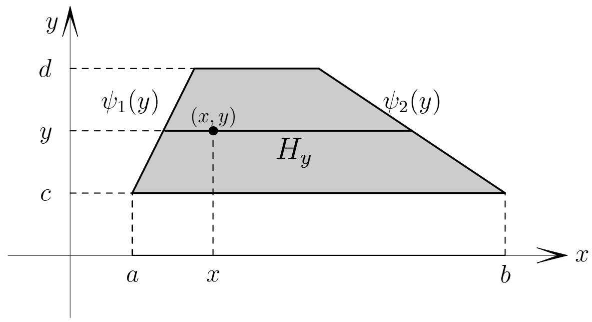
halmazt a *x tengelyre nézve normáltartománynak* nevezzük.



Legyenek $\psi_1, \psi_2 : [c,d] \to \mathbb{R}$ folytonos függvények, és tegyük fel, hogy $\psi_1(y) \le \psi_2(y)$ $(\forall\, y \in [c,d])$. A

$$H_y := \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; c \le y \le d,\ \psi_1(y) \le x \le \psi_2(y)\right\}$$

halmazt a *y tengelyre nézve normáltartománynak* nevezzük.



Az eddigiekből egyszerűen adódnak az alábbi fontos állítások.

2. tétel: Integrálás normáltartományon.

1^o *Legyen H_x az x tengelyre nézve normáltartomány, és tegyük fel, hogy az $f : H_x \to \mathbb{R}$ függvény folytonos. Ekkor $f \in R(H_x)$ és*

$$\iint\limits_{H_x} f(x,y)\,dx\,dy = \int\limits_a^b \int\limits_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)\,dy\,dx = \int\limits_a^b \left(\int\limits_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)\,dy \right) dx.$$

2^o *Legyen H_y az y tengelyre nézve normáltartomány, és tegyük fel, hogy az $f : H_y \to \mathbb{R}$ függvény folytonos. Ekkor $f \in R(H_y)$ és*

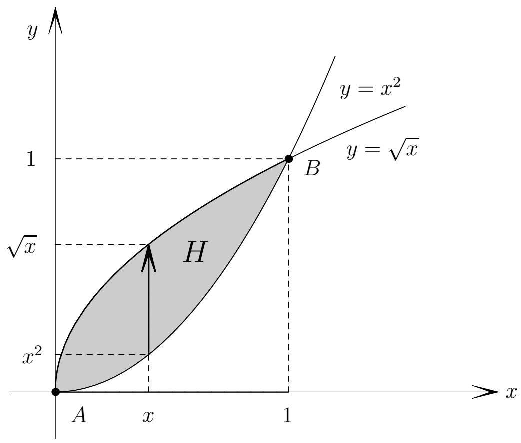
$$\iint\limits_{H_y} f(x,y)\,dx\,dy = \int\limits_c^d \int\limits_{\psi_1(y)}^{\psi_2(y)} f(x,y)\,dx\,dy = \int\limits_c^d \left(\int\limits_{\psi_1(y)}^{\psi_2(y)} f(x,y)\,dx \right) dy.$$

1. példa. *Számítsuk ki a következő integrált:*

$$\iint\limits_H xy^2\,dx\,dy,$$

ahol H az $y = x^2$ és az $y = \sqrt{x}$ egyenletű görbék által közrezárt korlátos síkrész.

Megoldás. Ábrázoljuk a H halmazt!



Az integrandus folytonos az egész $\mathbb{R}^2$-őn, tehát a korlátos H halmazon is. Következésképpen $f \in R(H)$.

Az integrál kiszámításához először a görbék metszéspontjainak a koordinátáit határozzuk meg:

$$\left.\begin{aligned} y &= x^2 \\ y &= \sqrt{x} \end{aligned}\right\} \quad \Longleftrightarrow \quad \sqrt{x} = x^2 \quad \Longleftrightarrow \quad \sqrt{x} \cdot (x^{3/2} - 1) = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad x = 0 \text{ vagy } x = 1.$$

A metszéspontok tehát $A(0,0)$ és $B(1,1)$.

A H halmaz a x tengelyre és az y tengelyre nézve is normáltartomány, ezért mindegyik megismert képletet használhatjuk. (Érdemes arra is figyelni, hogy mindegyik esetben a „belső” integrálokat könnyen kiszámolhatjuk, ezért bármelyik változó szerinti integrálással kezdhetünk.)

Tekintsük a H halmazt az x tengelyre nézve normáltartománynak:

$$0 \le x \le 1, \qquad x^2 \le y \le \sqrt{x}.$$

Ekkor először y szerint kell integrálnunk. (A nyíl jelzi a „belső” integrál irányát.) Így

$$\underline{\underline{\iint\limits_H xy^2\,dx\,dy}} = \int_0^1 \left(\int_{x^2}^{\sqrt{x}} xy^2\,dy \right) dx = \int_0^1 \left[x \cdot \frac{y^3}{3} \right]_{y=x^2}^{y=\sqrt{x}} dx = \frac{1}{3} \int_0^1 x \cdot \left(x^{3/2} - x^6 \right) dx =$$

$$= \frac{1}{3} \int_0^1 \left(x^{5/2} - x^7 \right) dx = \frac{1}{3} \cdot \left[\frac{x^{7/2}}{7/2} - \frac{x^8}{8} \right]_0^1 = \frac{1}{3} \cdot \left(\frac{1}{7/2} - \frac{1}{8} \right) = \underline{\underline{\frac{3}{56}}}. \;\blacksquare$$

Tegyük fel, hogy a H integrálási tartomány az x tengelyre és az y tengelyre nézve is normáltartomány és az f függvény folytonos H-n. Ekkor a fenti tétel szerint az $\iint_H f$ kettős integrált kétféle sorrendben is kiszámíthatjuk. Az integrálás sorrendjének felcserélésénél azonban körültekintően kell eljárnunk.

2. példa. *Tegyük fel, hogy $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ folytonos függvény. Tekintsük a következő kettős integrált:*

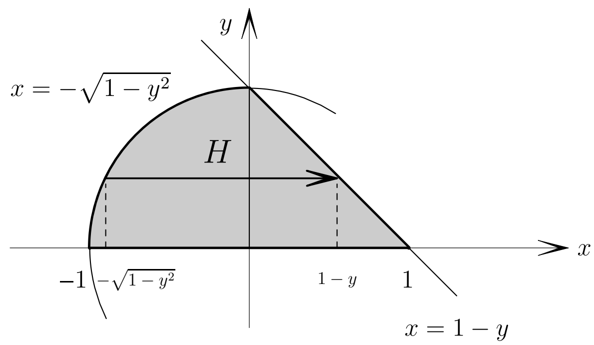
$$\int_0^1 \int_{-\sqrt{1-y^2}}^{1-y} f(x,y)\,dx\,dy\,.$$

Szemléltessük az integrálási tartományt. Cseréljük fel az integrálás sorrendjét.

Megoldás. A H-val jelölt integrálási tartomány a

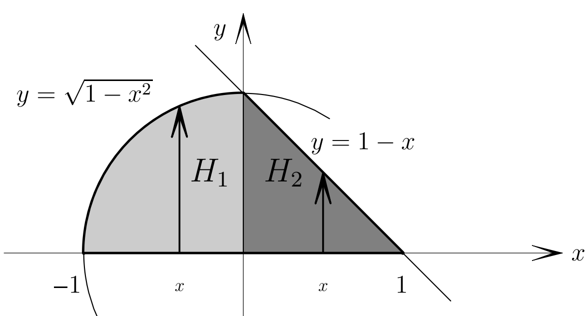
$$0 \le y \le 1, \quad -\sqrt{1-y^2} \le x \le 1-y$$

egyenlőtlenségeknek eleget tevő $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ pontok halmaza:



Mivel H az y tengelyre nézve normáltartomány, ezért először az x változó, utána pedig az y változó szerint integrálunk. (A nyíl jelzi a belső integrálban az integrálás irányát.)

Ha a H halmazt az x tengelyre nézve normáltartománynak tekintjük, akkor először az y, utána pedig az x változó szerint kell integrálnunk. Az f függvény folytonos $\mathbb{R}^2$-ön (tehát a H halmazon is), ezért az integrálás sorrendje felcserélhető. A H tartományt ebben az esetben az alábbi módon két részre bontjuk:



A tartományokat a következő egyenlőtlenségrendszerek határozzák meg:

$$H_1: \quad -1 \le x \le 0, \quad 0 \le y \le \sqrt{1-x^2};$$
$$H_2: \quad 0 \le x \le 1, \quad 0 \le y \le 1-x.$$

Így

$$\iint_{H_1} f = \int_{-1}^{0} \int_{0}^{\sqrt{1-x^2}} f(x,y)\,dy\,dx = \int_{-1}^{0} \left(\int_{0}^{\sqrt{1-x^2}} f(x,y)\,dy \right) dx,$$

$$\iint_{H_2} f = \int_{0}^{1} \int_{0}^{1-x} f(x,y)\,dy\,dx = \int_{0}^{1} \left(\int_{0}^{1-x} f(x,y)\,dy \right) dx.$$

Mivel

$$\iint_{H} f = \iint_{H_1} f + \iint_{H_2} f,$$

ezért

$$\int_{0}^{1} \int_{-\sqrt{1-y^2}}^{1-y} f(x,y)\,dx\,dy = \int_{-1}^{0} \int_{0}^{\sqrt{1-x^2}} f(x,y)\,dy\,dx + \int_{0}^{1} \int_{0}^{1-x} f(x,y)\,dy\,dx. \blacksquare$$

Megjegyzés. Itt emlékeztetünk arra, hogy egyváltozós határozott integrálok kiszámításához bizonyos esetekben a Newton–Leibniz-tétel nem használható. Ez a helyzet például akkor, amikor az inetgrálandó függvénynek van primitív függvénye (mert pl. folytonos), azonban a primitív függvény nem elemi függvény. Bebizonyítható, hogy ilyenek a következő függvények:

$$e^{\pm x^2} \quad (x \in \mathbb{R}), \quad \sin x^2 \quad (x \in \mathbb{R}), \quad \cos x^2 \quad (x \in \mathbb{R}),$$

$$\frac{\sin x}{x} \quad \big(x \in (0,+\infty)\big), \quad \frac{\cos x}{x} \quad \big(x \in (0,+\infty)\big), \quad \frac{e^x}{x} \quad \big(x \in (0,+\infty)\big),$$

$$\frac{1}{\ln x} \quad \big(x \in (0,+\infty)\big), \sqrt{x^3+1} \quad \big(x \in (0,+\infty)\big).$$

Ha egy kettős integrál kiszámolásánál ilyen függvények adódnak, akkor bizonyos esetekben az integrálás sorrendjének a felcserélése segíthet.

3. példa. *Számítsuk ki a*

$$\int_{0}^{1} \int_{y^2}^{1} y \sin x^2\,dx\,dy$$

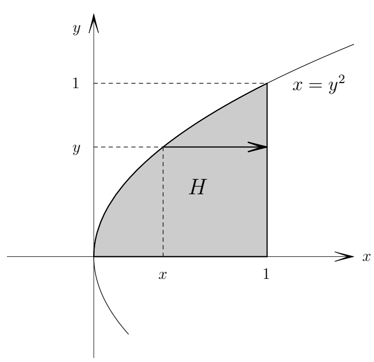
integrált.

Megoldás. A H-val jelölt integrálási halmaz az

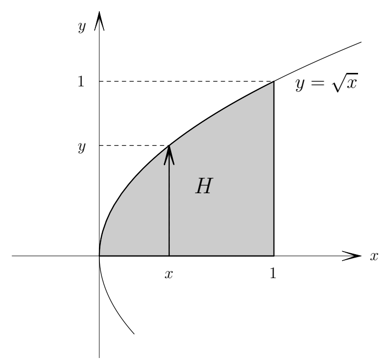
$$y^2 \le x \le 1, \quad 0 \le y \le 1$$

egyenlőtlenségekkel meghatározott y tengelyre nézve normáltartomány (l. az (a) ábrát).

Ezért
$$\int\limits_0^1 \int\limits_{y^2}^1 y \sin x^2 \, dx \, dy = \int\limits_0^1 \left(\int\limits_{y^2}^1 y \sin x^2 \, dx \right) dy.$$
Ha a fenti képlet szerint először x szerint integrálunk, akkor a következő problémába ütközünk: A $\sin x^2$ $(x \in \mathbb{R})$ függvénynek *van* primitív függvénye (hiszen folytonos), de az *nem elemi függvény*, így a belső (egyváltozós) integrál kiszámítására a Newton–Leibniz-tétel *nem alkalmazható*. Próbáljuk meg az integrálás sorrendjét felcserélni, azaz először y szerint integrálni. Ezt megtehetjük, mert a szóban forgó halmaz az x tengelyre nézve is normáltartomány, amelyet a (b) ábra alatti egyenlőtlenségek határoznak meg.



(a) ábra
H az y-ra normáltartomány
$0 \le y \le 1, \quad y^2 \le x \le 1$



(b) ábra
H az x-re normáltartomány
$0 \le x \le 1, \quad 0 \le y \le \sqrt{x}$

(A nyíl jelzi az eredeti felírásban, illetve az integrálok felcserélése után a belső integrálok irányát.)

Így
$$\int\limits_0^1 \int\limits_{y^2}^1 y \sin x^2 \, dx \, dy = \int\limits_0^1 \left(\int\limits_0^{\sqrt{x}} y \sin x^2 \, dy \right) dx = \int\limits_0^1 \left(\sin x^2\right) \cdot \left[\frac{y^2}{2}\right]_{y=0}^{y=\sqrt{x}} dx =$$
$$= \frac{1}{2} \int\limits_0^1 x \cdot \sin x^2 \, dx = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \int\limits_0^1 2x \cdot \sin x^2 \, dx = \frac{1}{4} \left[-\cos x^2\right]_0^1 = \frac{1}{4}\left(1 - \cos 1\right). \ \blacksquare$$