Programtervező informatikus szak
Analízis-1, 6. gyakorlat
2020. tavasz

1. feladat: A határérték definíciója alapján mutassa meg, hogy
$$\lim (n^2+3) = +\infty$$

Megoldás:

A definíció így szól:
$$\lim (a_n) = +\infty \overset{\text{def.}}{\Longleftrightarrow} \forall P>0\ \exists N \in \mathbb{N}\ \forall n \geq N:\ a_n > P.$$

Ezért ezt kell igazolnunk:
$$\forall P>0\ \exists N \in \mathbb{N}\ \forall n \geq N:\ n^2+3 > P.$$

Legyen tehát $P>0$, és vizsgáljuk az
$$n^2+3 > P$$
egyenlőtlenséget. Ennek teljesüléséhez elegendő, hogy $n^2 > P$ (a bal oldalt csökkentettük). Ehhez pedig elegendő, hogy $n > \sqrt{P}$.
Legyen $N \in \mathbb{N}$ olyan, hogy $N > \sqrt{P}$ (ilyen N létezik a rendezés arkhimédeszi tulajdonsága

miatt). Ez az N jó lesz, mivel $\forall n \geq N$ esetén $n > \sqrt{P}$, amiből következik, hogy $n^2+3 > P$.

---

2. feladat:

A definíció alapján igazolja, hogy

(a) $\lim\left(\frac{n^2+3n+1}{n+3}\right) = +\infty$

(b) $\lim\left(\frac{2-3n^2}{n+1}\right) = -\infty$

Megoldás:

(a) A definíciót figyelembe véve, azt kell igazolnunk, hogy

$$\forall P > 0 \ \exists N \in \mathbb{N} \ \forall n \geq N: \ \frac{n^2+3n+1}{n+3} > P.$$

Legyen tehát $P > 0$, és vizsgáljuk az alábbi egyenlőtlenséget:

$$\frac{n^2+3n+1}{n+3} > P$$

(teljesül-e egy N küszöbindextől kezdve)

A bal oldalt csökkentjük (NRA):

$$\frac{n^2+3n+1}{n+3} \geq \frac{n^2}{n+3n} = \frac{n^2}{4n} = \frac{n}{4} \quad , \text{ha } n \geq 1.$$

Ennek alapján:

$$\frac{n^2+3n+1}{n+3} > P \qquad (*)$$

$$\Uparrow$$

$$\frac{n}{4} > P$$

$$\Uparrow$$

$$n > 4P$$

N megadása: Legyen $N \in \mathbb{N}$ olyan, hogy $N \geq 1$ és $N > 4P$. ($\exists N$ az arkhimédeszi tul. miatt)

Ez az N jó lesz, mivel $\forall n \geq N$ esetén $n \geq 1$ és $n > 4P$ is fennáll, amiből pedig a fenti levezetés alapján következik a $(*)$ egyenlőtlenség.

(b) A definíciót figyelembe véve, azt kell igazolnunk, hogy

$$\forall P<0 \ \exists N \in \mathbb{N} \ \forall n \geq N: \quad \frac{2-3n^2}{n+1} < P.$$

Legyen tehát $P<0$, és vizsgáljuk az alábbi egyenlőtlenséget:

$$\frac{2-3n^2}{n+1} < P$$

Szorozzuk be (-1)-gyel, így a folytatás hasonló lesz az (a) résznél látottakhoz:

$$\frac{3n^2-2}{n+1} > -P$$

(teljesül-e ez egy N küszöbindextől kezdve)

A bal oldalt csökkentjük (NRA):

$$\frac{3n^2-2}{n+1} = \frac{2n^2+(n^2-2)}{n+1} \geq \frac{2n^2}{n+n} = \frac{2n^2}{2n} = n \text{ , ha } n \geq 2.$$

Ennek alapján:

$$(*) \qquad \frac{3n^2-2}{n+1} > -P$$

$$\Uparrow \longleftarrow \text{ tegyük fel, hogy } n \geq 2$$

$$n > -P$$

N megadása: Legyen $N \in \mathbb{N}$ olyan, hogy $N \geq 2$ és $N > -P$. ($\exists$, arkhimédeszi tul.)

Ez az N jó lesz, mivel $\forall n \geq N$ esetén $n \geq 2$ és $n > -P$ is fennáll, amiből pedig a fenti levezetés alapján következik $(*)$.

---

3. feladat: Mutassa meg, hogy ha (x_n) pozitív tagú nullsorozat, akkor

$$\lim\left(\frac{1}{x_n}\right) = +\infty$$

Megoldás:

Legyen $P>0$. Ekkor a $\lim(x_n)=0$ definíciója alapján az $\varepsilon=\frac{1}{P}>0$ számhoz

$$\exists N\in\mathbb{N}\ \forall n\geq N: \quad |x_n-0|<\frac{1}{P}$$

Mivel $x_n>0$, ezért $|x_n-0|=|x_n|=x_n$, tehát:

$$0<x_n<\frac{1}{P}.$$

Vegyük mindkét oldal reciprokát:

$$\frac{1}{x_n}>P$$

Ezzel tehát igazoltuk, hogy:

$$\forall P>0\ \exists N\in\mathbb{N}\ \forall n\geq N: \quad \frac{1}{x_n}>P,$$

ami a definíció alapján azt jelenti, hogy

$$\lim\left(\frac{1}{x_n}\right)=+\infty$$

4. feladat: Legyen

$$P(x) = a_r x^r + a_{r-1} x^{r-1} + \ldots + a_1 x + a_0$$

$$(x \in \mathbb{R},\ a_i \in \mathbb{R}\ (i = 0, \ldots, r),\ a_r \neq 0)$$

egy pontosan r-edfokú polinom.

Mutassa meg, hogy

$$\lim_{n\to\infty} P(n) = \begin{cases} +\infty & \text{ha } a_r > 0 \\ -\infty & \text{ha } a_r < 0 \end{cases}$$

Megoldás:

Emeljünk ki $P(n)$-ből n^r-t:

$$\lim_{n\to\infty} P(n) = \lim_{n\to\infty} \left(a_r \cdot n^r + a_{r-1} \cdot n^{r-1} + \ldots + a_1 \cdot n + a_0\right)$$

$$= \lim_{n\to\infty} n^r \cdot \left(a_r + \frac{a_{r-1}}{n} + \ldots + \frac{a_1}{n^{r-1}} + \frac{a_0}{n^r}\right) =$$

$$= \left(\lim_{n\to\infty} n\right)^r \cdot \lim_{n\to\infty} \left(\underset{\substack{\downarrow \\ a_r}}{a_r} + \underset{\substack{\downarrow \\ 0}}{\frac{a_{r-1}}{n}} + \ldots + \underset{\substack{\downarrow \\ 0}}{\frac{a_1}{n^{r-1}}} + \underset{\substack{\downarrow \\ 0}}{\frac{a_0}{n^r}}\right) =$$

$$= (+\infty)^r \cdot (a_r + 0 + 0 + \ldots + 0) =$$

$$= (+\infty) \cdot a_r = \begin{cases} +\infty & \text{ha } a_r > 0 \\ -\infty & \text{ha } a_r < 0 \end{cases}$$

5. feladat:

Számítsa ki az alábbi sorozatok határértékét:

(a) $\left(\dfrac{n^7+n-12}{1-n^2+3n}\right)$ (b) $\left(\dfrac{n^4+n^2+n+1}{2n^5+n-4}\right)$

(c) $\left(n^2\cdot\left(n-\sqrt{n^2+1}\right)\right)$

Megoldás:

(a) Egyszerűsítsük a törtet n^2-tel:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n^7+n-12}{1-n^2+3n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\dfrac{n^7+n-12}{n^2}}{\dfrac{1-n^2+3n}{n^2}}=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{n^5+\dfrac{1}{n}-\dfrac{12}{n^2}}{\dfrac{1}{n^2}-1+\dfrac{3}{n}}=\frac{(+\infty)+0-0}{0-1+0}=\underline{\underline{-\infty}}$$

(b) Egyszerűsítsük a törtet n^5-nel:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n^4+n^2+n+1}{2n^5+n-4}=\lim_{n\to\infty}\frac{\dfrac{n^4+n^2+n+1}{n^5}}{\dfrac{2n^5+n-4}{n^5}}=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{\dfrac{1}{n}+\dfrac{1}{n^3}+\dfrac{1}{n^4}+\dfrac{1}{n^5}}{2+\dfrac{1}{n^4}-\dfrac{4}{n^5}}=\frac{0+0+0+0}{2+0-0}=\underline{\underline{0}}$$

(c) Gyöktelenítünk, azaz szorzunk és osztunk $(n+\sqrt{n^2+1})$-gyel:

$$n^2\cdot(n-\sqrt{n^2+1}) = n^2\cdot\frac{(n-\sqrt{n^2+1})\cdot(n+\sqrt{n^2+1})}{n+\sqrt{n^2+1}} =$$

$$= n^2\cdot\frac{n^2-(n^2+1)}{n+\sqrt{n^2+1}} = n^2\cdot\frac{\cancel{n^2}-\cancel{n^2}-1}{n+\sqrt{n^2+1}} = \frac{-n^2}{n+\sqrt{n^2+1}}.$$

Ez után egyszerűsítsük a törtet n-nel:

$$\frac{-n^2}{n+\sqrt{n^2+1}} = \frac{-\frac{n^2}{n}}{\frac{n+\sqrt{n^2+1}}{n}} = \frac{-n}{1+\sqrt{1+\frac{1}{n^2}}}$$

Ezzel tehát

$$\lim_{n\to\infty} n^2\cdot(n-\sqrt{n^2+1}) = \lim_{n\to\infty}\frac{-n}{1+\sqrt{1+\frac{1}{n^2}}} =$$

$$= \frac{-\infty}{1+\sqrt{1+0}} = \underline{\underline{-\infty}}$$

<u>6. feladat:</u> Az $a\in\mathbb{R}$ paramétertől függően határozza meg a következő határértéket:

$$\lim(\sqrt{n^2+n+1} - a\cdot n)$$

<u>Megoldás:</u> Jelölje x_n a sorozat n-edik tagját:

$$x_n = \sqrt{n^2+n+1} - a\cdot n$$

<u>az $a<0$ esetben:</u>

$$\lim(x_n) = \lim\left(\sqrt{n^2+n+1}\right) + \lim(\underbrace{-a}_{+}\cdot n) = (+\infty)+(+\infty) = \underline{\underline{+\infty}}$$

<u>az $a=0$ esetben:</u>

$$\lim(x_n) = \lim\left(\sqrt{n^2+n+1} - 0\cdot n\right) = \lim\left(\sqrt{n^2+n+1}\right) = \underline{\underline{+\infty}}$$

A továbbiakban vizsgáljuk az <u>$a>0$ esetet.</u> Ekkor a határérték $(+\infty)-(+\infty)$ típusú, ezért át kell alakítani a képletet:

$$x_n = \frac{\left(\sqrt{n^2+n+1} - a\cdot n\right)\cdot\left(\sqrt{n^2+n+1} + a\cdot n\right)}{\sqrt{n^2+n+1} + a\cdot n} =$$

$$= \frac{n^2+n+1 - a^2n^2}{\sqrt{n^2+n+1} + an} = \frac{(1-a^2)n^2 + n + 1}{\sqrt{n^2+n+1} + an} =$$

$$= \frac{\dfrac{(1-a^2)n^2+n+1}{n}}{\dfrac{\sqrt{n^2+n+1} + an}{n}} = \frac{(1-a^2)n + 1 + \frac{1}{n}}{\sqrt{1+\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}} + a}$$

<u>Ha $0<a<1$</u>, akkor $1-a^2>0$, ezért

$$\lim_{n\to\infty}(1-a^2)n^2 = +\infty,$$

amiből a műveleti szabályok alapján:

$$\lim(x_n) = \frac{(+\infty)+1+0}{\sqrt{1+0+0}+a} = \underline{\underline{+\infty}} .$$

Ha $a>1$, akkor $1-a^2<0$, ezért

$$\lim_{n\to\infty}(1-a^2)n^2 = -\infty ,$$

amiből:

$$\lim(x_n) = \frac{(-\infty)+1+0}{\sqrt{1+0+0}+a} = \underline{\underline{-\infty}} .$$

Végül, ha $a=1$, akkor $(1-a^2)n=0$ miatt

$$\lim(x_n) = \lim\left(\frac{1+\frac{1}{n}}{\sqrt{1+\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}}+1}\right) =$$

$$= \frac{1+0}{\sqrt{1+0+0}+1} = \underline{\underline{\frac{1}{2}}}$$