

Név: ....., NEPTUN-kód .....

Csoport, gyak.vez.: .....

Pontszám: .....

*Programtervező informatikus szak I. évfolyam*  
*Matematikai alapok javító zárthelyi* *a 3. zh anyagából*  
*2020. január 3.*

*Minden feladathoz indoklást, levezetést kérünk.*

*Az 5. feladat (tételkimondás és bizonyítás) megoldását csak e feladatlap hátoldalára írva fogadjuk el.*

1. (11 pont) Határozzuk meg az alábbi mátrix sajátértékeit és sajátvektorait, majd vizsgáljuk meg a mátrixot diagonalizálhatóság szempontjából (diagonalizáló mátrix, diagonális alak):

$$A = \begin{bmatrix} 3 & -1 & -1 \\ 3 & -1 & -3 \\ -1 & 1 & 3 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$$

2. Adott az alábbi lineárisan független vektorrendszer az  $\mathbb{R}^4$  vektortérben:

$$b_1 = (-1, 0, 1, 2), \quad b_2 = (-2, -1, 2, 1), \quad b_3 = (-1, 1, 3, 1),$$

továbbá legyen  $W = \text{Span}(b_1, b_2, b_3)$ .

a) (8 pont) Adjunk meg ortonormális és ortonormált bázist a  $W$  altérben.

b) (6 pont) Bontsuk fel az  $x = (1, 0, 0, 1)$  vektort a  $W$  altér szerint párhuzamos és merőleges komponensekre.

3. (8 pont) Adott az alábbi  $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  típusú függvény:

$$f(x) = \frac{3x+1}{x-2} \quad (x \in (3; +\infty))$$

Igazoljuk, hogy  $f$  invertálható, továbbá adjuk meg a  $D_{f^{-1}}$ ,  $R_{f^{-1}}$  halmazokat és  $y \in D_{f^{-1}}$  esetén az  $f^{-1}(y)$  függvényértéket.

4. (8 pont) A definíció alapján igazoljuk, hogy

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^4 - x^3 - x^2 - 1}{2x^3 + 3x^2 + x + 4} = +\infty$$

5. (9 pont) Tételkimondás és bizonyítás (a megoldást kérjük e feladatlap hátoldalára írni):  
A felbontási tétel (euklideszi terekben).