Analízis I. Előadás

Tétel

Legyen $a, b : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$. Tegyük fel, hogy $\exists \lim a = A \in \overline{\mathbb{R}}$ és $\lim b = B \in \overline{\mathbb{R}}$.
Ekkor

a) $\exists \lim(a + b)$, és $\lim(a + b) = A + B$, feltéve, hogy az $A + B$ művelet értelmezve van

b) $\exists \lim(a \cdot b)$, és $\lim(a \cdot b) = A \cdot B$, feltéve, hogy az $A \cdot B$ művelet értelmezve van

c) $\exists \lim \dfrac{a}{b}$, és $\lim \dfrac{a}{b} = \dfrac{A}{B}$, feltéve, hogy $b_n \neq 0 \;\; n \in \mathbb{N}$) és az $\frac{A}{B}$ művelet értelmezve van.

Megjegyzés: A tétel a korábban, a konvergens sorozatokra vonatkozó megfelelő tétel általánosítsa. Csak az "új" eseteket kell igazolni.

Bizonyítás

a) *Összeadás:* a múlt órán bizonyítottuk.

b) *Szorzás.* Új esetek: $A = \pm\infty, \;\; B \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, illetve $A = \pm\infty, \;\; B = \pm\infty$.
Első eset. Tegyük fel, hogy $A = +\infty$, és $\mathbb{R} \ni B > 0$. Megmutatjuk, hogy ekkor $\lim(a \cdot b) = +\infty$.
Megjegyzés: A többi előjel változat az alábbi bizonyítás értelemszerű módosításával adódik: egyenlőtlenség, szorzás, előjelek.
Legyen $S > 0$.

Mivel $\lim b = B > 0$, ezért $\exists\, N_1 \in \mathbb{N}$, hogy $\forall\, \mathbb{N} \ni n > N_1$ esetén $b_n > \dfrac{B}{2}$.

Másrészt $\lim a = +\infty$ miatt $\exists\, N_2 \in \mathbb{N}$, hogy $\forall\, \mathbb{N} \ni n > N_2$ esetén $a_n > \dfrac{2S}{B}$.

Következésképpen: $\forall\, \mathbb{N} \ni n > N := \max\{N_1, N_2\}$ esetén $a_n \cdot b_n > \dfrac{2S}{B} \cdot \dfrac{B}{2} = S$.

Ezzel bebizonyítottuk, hogy $\lim a \cdot b = +\infty$.

Folytatás

Második eset. Tegyük fel, hogy $A = B = +\infty$. Előjelváltozatok hasonlóan, mint előbb.
Legyen $S > 0$.
$\lim a = +\infty \implies \exists\ N_1 \in \mathbb{N}$, hogy $\forall\ \mathbb{N} \ni n > N_1$ esetén $a_n > \sqrt{S}$.
$\lim B = +\infty \implies \exists\ N_2 \in \mathbb{N}$, hogy $\forall\ \mathbb{N} \ni n > N_2$ esetén $b_n > \sqrt{S}$.
Következésképpen $\forall\ \mathbb{N} \ni n > N := \max\{N_1, N_2\}$ esetén $a_n \cdot b_n > \sqrt{S} \cdot \sqrt{S} = S$.
Ezzel bebizonyítottuk, hogy $\lim a \cdot b = +\infty$.

Példák a nem definiált esetek alátámasztására: $A = \pm\infty$, $B = 0$. Feltesszük: $n \geq 1$, $c \in \mathbb{R}$.

a_n	b_n	$a_n \cdot b_n$	$\lim a \cdot b$
n	c/n	c	c
$\pm n^2$	$1/n$	$\pm n$	$\pm\infty$
n	$(-1)^n/n$	$(-1)^n$	$\nexists$

Folytatás

c) *Hányados.* Új esetek: $A = \pm\infty$ és $B \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, $A \in \mathbb{R}$ és $B = \pm\infty$.

Az első eset visszavezethető a szorzásra: Az $\dfrac{a}{b} = a \cdot \dfrac{1}{b}$ átírásnak megfelelően pl.

$A = +\infty$, $B > 0$ esetén $\dfrac{+\infty}{B} = +\infty \cdot \dfrac{1}{B} = +\infty$.

Második eset.

$A \in \mathbb{R}$, azaz az a sorozat konvergens, tehát korlátos is. Eszerint $\exists K > 0$, amelyre $|a_n| < K\ \forall\ n \in \mathbb{N}$.

$B = \pm\infty$ miatt $\forall\ \epsilon > 0$ számhoz $\exists N \in \mathbb{N}$, hogy $\forall\ n > N$ esetén $|b_n| > \dfrac{K}{\epsilon}$, azaz $\dfrac{1}{|b_n|} < \dfrac{\epsilon}{K}$.

Ha tehát $n > N$, akkor $\left|\dfrac{a_n}{b_n}\right| < K \cdot \dfrac{\epsilon}{K} = \epsilon$.

Következésképpen $\lim \dfrac{a}{b} = \dfrac{A}{\pm\infty} = 0$.

Példák a nem definiált esetek alátámasztására: $A = \pm\infty$, $B = \pm\infty$.

Feltesszük: $n \geq 1$, $c \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

a_n	b_n	a_n/b_n	$\lim a/b$
$c \cdot n$	n	c	$c \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$
n	n^2	$1/n$	0
$\pm n^2$	n	$\pm n$	$\pm\infty$
n ps. n, $2n$ ptlan. n	n	1 ps. n, 2 ptlan. n	$\nexists$

Új szereplők–új esetek, régi szereplők–új esetek

Eddig: az adott művelet bal oldalán megjelenő $\pm$ esetek vizsgálata.

Fordított eset. Kérdés: Nem lehet, hogy $\lim b = 0$ esetén $\lim \dfrac{1}{b} = \pm\infty$?

Válasz: általában nem, pl. $b_n = \dfrac{(-1)^n}{n}$ $(n \geq 1)$ esetén $\dfrac{1}{b_n} = (-1)^n$, $\nexists \lim \dfrac{1}{b} \in \overline{\mathbb{R}}$.

Állítás: Ha $b_n > 0$, $\lim b = 0$ akkor $\lim \dfrac{1}{b} = +\infty$.

Bizonyítás: Legyen $S > 0$. Ekkor $\exists\, N \in \mathbb{N}$, hogy $\forall n > N$ esetén $0 < b_n < \dfrac{1}{S} \implies$ $\dfrac{1}{b_n} > S$.

A numerikus sor fogalma

Legyen $a : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$. Minden $n \in \mathbb{N}$ esetén legyen $s_n := \sum_{k=0}^{n} a_k$.

Az (s_n) sorozatot az a sorozat által generált végtelen sornak (sornak) nevezzük.

Jelölés: $\sum a : \mathbb{N} \to \mathbb{R}, \quad (\sum a)_n := s_n = \sum_{k=0}^{n} a_k$.

Elnevezés: A végtelen sor n-edik tagját, azaz s_n-t a sor n-edik részletösszegének nevezzük.

Példák

a) $a_n = 1$, $s_n = n+1$, $\sum a = (n+1)$,

b) $a_n = (-1)^n$, $s_n = \begin{cases} 1, & n \text{ páros;} \\ 0, & n \text{ páratlan.} \end{cases}$

c) $a_n = \dfrac{1}{n+1}$, $s_n = 1 + \dfrac{1}{2} + \cdots + \dfrac{1}{n+1}$,

d) Mértani sor:

$$a_n = q^n \ \ (q \in \mathbb{R}),\ s_n = 1 + q + \cdots + q^n = \begin{cases} n+1, & q = 1; \\ \dfrac{1-q^{n+1}}{1-q}, & q \neq 1. \end{cases}$$

Definíció

Azt mondjuk, hogy az $a : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ sorozat által generált végtelen sor konvergens, ha a $\sum a$ sorozat, azaz a részletösszegek sorozata konvergens.

Végtelen sor határértéke: $\displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} a_k := \lim \sum a = \lim(s_n)$.

Elnevezés: a végtelen sor határértékét a sor összegének nevezzük.

Példák

a) $a_n = 1$, $s_n = n + 1$, $\sum a = (n + 1)$, a $\sum a$ sor divergens, határértéke $\sum_{n=0}^{\infty} 1 = +\infty$.

b) $a_n = (-1)^n$, $s_n = \begin{cases} 1, & n \text{ páros;} \\ 0, & n \text{ páratlan.} \end{cases}$

A $\sum \left((-1)^n\right)$ sor divergens, nincs határértéke.

c) $a_n = \dfrac{1}{n+1}$, $s_n = 1 + \dfrac{1}{2} + \cdots + \dfrac{1}{n+1}$,

Később megmutatjuk, hogy divergens, és $\sum_{k=0}^{\infty} \left(\dfrac{1}{n+1}\right) = +\infty$.

d) Mértani sor:

$$a_n = q^n \ \ (q \in \mathbb{R}),\ s_n = 1 + q + \cdots + q^n = \begin{cases} n+1, & q = 1; \\ \dfrac{1-q^{n+1}}{1-q}, & q \neq 1. \end{cases}$$

Ha $q = 1$, akkor ld. a) eset.

$$\sum_{k=1}^{\infty} q^k = \lim(s_n) = \begin{cases} \lim(n+1), & q = 1; \\ \lim\left(\dfrac{1-q^{n+1}}{1-q}\right), & q \neq 1. \end{cases} = \begin{cases} +\infty, & q \geq 1; \\ \dfrac{1}{1-q}, & |q| < 1; \\ \nexists, & q \leq -1. \end{cases}$$

Sorok: speciális módon generált sorozatok.
Sorok konvergenciája: az összes eddig tanultak alkalmazhatók a részletösszegek sorozatára.
Például a Cauchy-kritérium.

A Cauchy-féle konvergencia kritérium sorokra

A $\sum a$ sor akkor és csak akkor konvergens, ha $\forall\ \epsilon > 0$ számhoz $\exists\ N \in \mathbb{N}$ küszöbindex, hogy $\forall\ m, n > N$ (pl. $m > n$) esetén $|s_m - s_n| = |a_{n+1} + \cdots + a_m| < \epsilon$.

1. Következmény

Szükséges feltétel végtelen sor konvergenciájára.

Legyen $\sum a$ konvergens, és $\epsilon > 0$.

Ekkor a Cauchy-kritérium miatt, $\exists\ N \in \mathbb{N}$ küszöbindex, hogy $\forall\ m, n > N$ (pl. $m > n$) esetén $|s_m - s_n| = |a_{n+1} + \cdots + a_m| < \epsilon$.

Ha $n > N$, akkor $n + 1 > N$, tehát $|s_{n+1} - s_n| = |a_{n+1}| < \epsilon$.

Ez azt jelenti, hogy $\lim a = 0$, azaz a nullsorozat.

Tehát: Ha $\sum a$ konvergens, akkor a sort generáló a sorozat nullsorozat.

2. Következmény

Legyen $a, b : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$. Ha $a_n = b_n$ majdnem minden n-re, akkor a $\sum a$ és a $\sum b$ sor egyszerre konvergens vagy divergens.

A feltételből következik, hogy $\exists\ N_1 \in \mathbb{N}$, hogy $\forall n > N_1$ esetén $a_n = b_n$.

A részletösszegek jelölése: $s_n := \sum_{k=0}^{n} a_k,\ \ \sigma_n := \sum_{k=0}^{n} b_k$.

Tegyük fel, hogy valamelyik sor konvergens, például $\sum a$. Legyen $\epsilon > 0$.

A Cauchy-kritérium szerint $\exists\ N_2 \in \mathbb{N}$ küszöbindex, hogy $\forall\ m, n > N_2$ (pl. $m > n$) esetén $|s_m - s_n| = |a_{n+1} + \cdots + a_m| < \epsilon$.

Ha $n > N := \max\{N_1, N_2\}$, akkor
$|\sigma_m - \sigma_n| = |b_{n+1} + \cdots + b_m| = |a_{n+1} + \cdots + a_m| = s_m - s_n| < \epsilon$.

Tehát a $\sum b$ sorra is teljesül a Cauchy-kritérium, azaz konvergens.
Vigyázat: ez nem jelenti azt, hogy a sorösszegek is megegyeznek.

3. Következmény

Abszolút Konvergens sorok

Az abszolút konvergens sor definíciója.

Azt mondjuk, hogy az $a : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ sorozat által generált $\sum a$ sor abszolút konvergens, ha az $(|a_n|)$ sorozat által generált $\sum(|a_n|)$ sor konvergens.

Tegyük fel, hogy a $\sum a$ sor abszolút konvergens. Legyen $\epsilon > 0$.

A Cauchy-kritérium szerint $\exists\ N \in \mathbb{N}$ küszöbindex, hogy $\forall\ m, n > N$ (pl. $m > n$) esetén $|a_{n+1}| + \cdots + |a_m| < \epsilon$.

Ekkor azonban $|s_m - s_n| = |a_{n+1} + \cdots + a_m| \leq |a_{n+1}| + \cdots + |a_m| < \epsilon$.

Tehát a $\sum a$ sorra teljesül a Cauchy-kritérium, azaz konvergens.

Azt kaptuk, hogy minden abszolút konvergens sor konvergens.

Megjegyzés: Mutatunk majd példát, hogy ez az állítás fordítva nem igaz.

Pozitív tagú sorok

Ha $a_n \geq 0 \ \forall \ (n \in \mathbb{N})$, akkor a $\sum(a_n)$ sort pozitív tagú sornak nevezzük.

Tétel

Egy pozitív tagú sor akkor és csak akkor konvergens, ha korlátos.

Bizonyítás

Mivel $s_{n+1} - s_n = a_{n+1} \geq 0$, ezért $(s_n) \nearrow$. Korábban igazoltuk: hogy egy monoton növekedő sorozat akkor, és csak akkor konvergens, ha korlátos.

Tétel (Összehasonlító kritérium)

Legyen $0 \leq a_n \leq b_n \ \ (n \in \mathbb{N})$.
Ekkor

a) ha $\sum(b_n)$ konvergens, akkor $\sum(a_n)$ is konvergens,

b) ha $\sum(a_n)$ divergens, akkor $\sum(b_n)$ is divergens.

Bizonyítás

Az előző tételt fogjuk alkalmazni.

Jelölje a $\sum(b_n)$ sor n-edik részletösszegét σ_n, a $\sum(a_n)$ sorét pedig s_n.

a) Mivel $\sum(b_n)$ konvergens, ezért $(\sigma_n) \nearrow$ korlátos. Nyilván $(s_n) \nearrow$, és $a_n \leq b_n$ miatt $s_n \leq \sigma_n$, tehát (s_n) is korlátos.

A b) rész következik a)-ból. Ha ugyanis az állítással ellentétben $\sum(b_n)$ konvergens vona, akkor ugyanez állna fenn $\sum(a_n)$-re is.

A harmonikus sor divergens

Megmutatjuk, hogy a $\sum \left(\frac{1}{n+1}\right)$ sor divergens.

Mivel a sor pozitív tagú, ezért a divergencia egyben azt is jelenti, hogy a részletösszegek $\nearrow$ sorozatának határértéke $+\infty$, azaz $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{n+1} = +\infty$.

Legyen $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 1$. Ekkor

$$s_{2n-1} - s_{n-1} = \frac{1}{n+1} + \cdots + \frac{1}{2n} \geq n \cdot \frac{1}{2n} = \frac{1}{2}\,.$$

Következésképpen a $\sum \left(\frac{1}{n+1}\right)$ sorra $\epsilon = \frac{1}{2}$ választással nem teljesül a Cauchy-féle konvergencia kritérium.

A szuperharmonikus sor konvergens

Legyen $\alpha > 1$. Ekkor a $\sum \left(\frac{1}{(n+1)^{\alpha}}\right)$ sor konverges.

A sor pozitív tagú, ezért csak azt kell megmutatni, hogy a részletösszegek sorozata korlátos. Mivel az s_n részletösszegek sorozata monoton növekedő, ezért $2^n - 1 \geq n$ (ld. Bernoulli egy.) miatt $s_n \leq s_{2^n-1}$, tehát elég csak a 2^{n-1} indexű részletösszegekkel foglalkozni.

$$
\begin{aligned}
s_{2^n-1} &= \sum_{k=0}^{2^n-1} \frac{1}{(k+1)^\alpha} \\
&= 1 + \frac{1}{2^\alpha} + (\frac{1}{3^\alpha} + \frac{1}{4^\alpha}) + (\frac{1}{5^\alpha} + \dots \frac{1}{8^\alpha}) + \dots (\frac{1}{(2^{n-1}+1)^\alpha} \cdots \frac{1}{(2^n)^\alpha}) \\
&= 1 + \sum_{j=0}^{n-1} \sum_{k=2^j+1}^{2^{j+1}} \frac{1}{k^\alpha} \,.
\end{aligned}
$$

A $\displaystyle\sum_{k=0}^{2^n-1} \frac{1}{(k+1)^\alpha} = \sum_{k=1}^{2^n} \frac{1}{k^\alpha}$ összeget blokkokra bontottuk 2 hatványai szerint (diadikus blokkok).
Felső becslést adunk az egyes blokkok értékeire:

$$
\begin{aligned}
\sum_{k=2^j+1}^{2^{j+1}} \frac{1}{k^\alpha} &= \frac{1}{(2^j+1)^\alpha} + \dots \frac{1}{(2^{j+1})^\alpha} \leq 2^j \cdot \frac{1}{(2^j)^\alpha} \\
&= \frac{1}{(2^j)^{\alpha-1}} = \frac{1}{(2^{\alpha-1})^j} = \Big(\frac{1}{2^{\alpha-1}}\Big)^j =: q^j \qquad (j = 0, \dots, n-1)\,,
\end{aligned}
$$

ahol $q = \dfrac{1}{2^{\alpha-1}}$.

Mivel $\alpha > 1$, ezért $2^{\alpha-1} > 1$, azaz $q = \dfrac{1}{2^{\alpha-1}} < 1$. A mértani sor összegére kapott eredményt alkalmazva

$$\sum_{k=0}^{2^n-1} \frac{1}{k^\alpha} \leq 1 + \sum_{j=0}^{n-1} q^j = 1 + \frac{1-q^n}{1-q} < 1 + \frac{1}{1-q} = 1 + \frac{1}{1-\frac{1}{2^{\alpha-1}}} =: C \in \mathbb{R}.$$

Azt kaptuk, hogy $\exists\ C > 0$, olyan hogy $\forall\ n \in \mathbb{N}$ esetén $s_n \leq C$.

Következésképpen $\sum \left((\frac{1}{k+1})^\alpha \right)$ sor konvergens. Jel: $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} (\frac{1}{k+1})^\alpha < \infty$.

Speciális eset $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} < \infty$.