7. Fixpont iteráció

7.1. Feladat

Az $f(x) = x^3 - 5x + 2 = 0$ egyenlet $[0,1]$-beli megoldására az

$$x_{k+1} = \frac{x_k^3 + 2}{5}$$

iterációt használjuk. Bizonyítsuk a módszer konvergenciáját, és írjuk fel a hibabecslést!

Az iterációs módszert úgy kaptuk, hogy az egyenletetből kifejeztük x-et:

$$x = \frac{x^3 + 2}{5} \iff x^3 - 5x + 2 = 0,$$

majd felírtuk a fixponttétel közelítő sorozatát.

7.1. Megjegyzés

Ebben a fejezetben a következő jelölésbeli konvenciót alkalmazzuk. A nemlineáris függvényt, amelynek a gyökét keressük f-fel jelöljük. Az $f(x) = 0$ egyenlettel ekvivalens fixpontegyenlet függvényét pedig φ-vel. Tehát a következő átalakítást alkalmazzuk:

$$f(x) = 0 \qquad \iff \qquad x = \varphi(x).$$

Könnyű meggondolni, hogy a fenti átalakítás nem egyértelmű, azt többféleképpen is végre tudjuk hajtani. Jelen feladat esetében például az alábbiak mind helyes átfogalmazások:

$$x^3 - 5x + 2 = 0 \iff \begin{cases} x = \frac{x^3+2}{5}, \\ x = x^3 - 4x + 2, \\ x = \sqrt[3]{5x - 2}. \end{cases}$$

Az egyenletek jobb oldalán láthatóak az egyes átfogalmazásokhoz tartozó φ függvények, melyek mindegyikére teljesül, hogy **az f függvény gyöke a φ függvény fixpontja**. Az viszont, hogy az ezek segítségével készített

$$x_{k+1} = \varphi(x_k)$$

fixpont iterációk könvergensek-e, az egyes konkrét φ függvények intervallumbeli tulajdonságaitól függenek. Előfordulhat, hogy egyes átfogalmazásokhoz tartozó iterációk konvergensek, mások pedig divergensek.

Először is ellenőrizzük a konvergencia feltételeit.

7.2. Megjegyzés

Az $x_{k+1} = \varphi(x_k)$ iterációs sorozat konvergenciájának a feltételei $\varphi \in C[a,b]$ esetén a következők:

(i) $\varphi : [a,b] \to [a,b]$,

(ii) φ kontrakció $[a,b]$-n.

(i) Vizsgáljuk meg, hogy a
$$\varphi(x) := \frac{x^3+2}{5}$$
függvény a $[0,1]$ intervallumot önmagába képezi-e. Mivel φ szigorúan monoton növő, ezért elegendő a 0 és az 1 pontokban vizsgálni a felvett értékeket:
$$\varphi(0) = \frac{2}{5}, \qquad \varphi(1) = \frac{3}{5},$$
eszerint
$$\varphi\big[[0,1]\big] = \left[\frac{2}{5}, \frac{3}{5}\right] \subset [0,1],$$
ezért ez a feltétel teljesül.

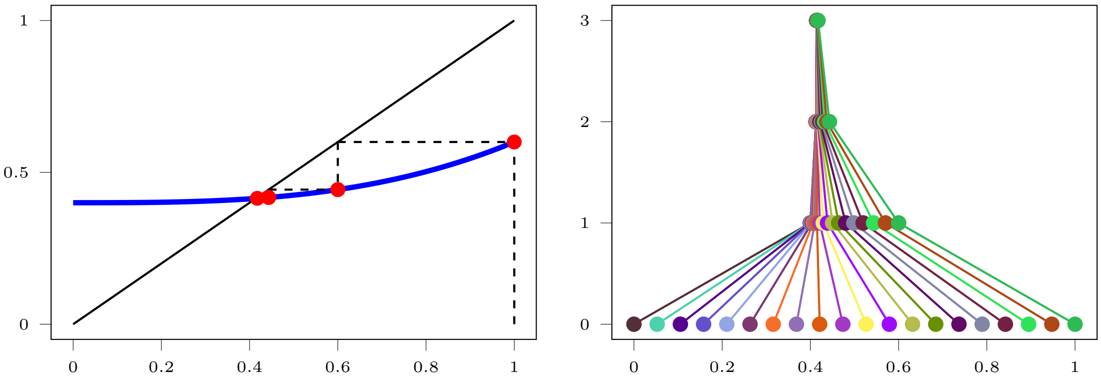
(ii) Ezután igazolnunk kell, hogy φ kontrakció a $[0,1]$ intervallumon. Ehhez a Lagrange-féle középérték tételt felhasználva elég azt megmutatnunk, hogy bármely $x \in [0,1]$ esetén $|\varphi'(x)| < 1$. Mivel
$$|\varphi'(\xi)| = \left|\frac{3 \cdot \xi^2}{5}\right| = \frac{3 \cdot \xi^2}{5} \le \frac{3}{5} =: q \qquad (\xi \in [0,1]),$$
ezért φ valóban kontrakció $[0,1]$-en a $q = \frac{3}{5}$ kontrakciós együtthatóval.

Az előbbiek alapján az iterációs eljárásunk teljesíti a fixponttétel feltételeit, így konvergens a $[0,1]$-en. Az erre vonatkozó tétel segítségével adjuk meg az iterációhoz tartozó hibabecslést:
$$|x_k - x^*| \le \left(\frac{3}{5}\right)^k \cdot |x_0 - x^*| \le \left(\frac{3}{5}\right)^k \cdot (1-0) = \left(\frac{3}{5}\right)^k \qquad (x_0 \in [0,1]).$$

A következő ábrán az látható, ahogy az iterációs sorozat konvergál. A bal oldalon φ függvényt és az identitást ábrázoltuk. Az iterációs sorozat a következő geometriai koncepció alapján képezhető. Minden k-ra hajtsuk végre az alábbi lépéseket.

- Legyen $y_k := \varphi(x_k)$.
- Az (x_k, y_k) pontot kössük össze az identitásfüggvény (y_k, y_k) pontjával (vízszintes vonal).
- Az identitás függvény (y_k, y_k) pontját kössük össze a φ függvény $(y_k, \varphi(y_k))$ pontjával (függőleges vonal).
- Legyen $x_{k+1} := x_k (= y_k)$, és kezdjük elölről az eljárást.

Az eljárás során az x_k pontok éppen az iterációs sorozat elemei, melyek a φ fixpontjához konvergálnak. A metszéspontban $\varphi(x) = x$, azaz az $(x^*, \varphi(x^*)) = (x^*, x^*)$ metszéspont éppen a fixpontegyenlet megoldása.



A jobb oldali ábrán az látható, hogy a φ függvény miképpen transzformálja a $[0, 1]$ intervallum pontjait. Az y-tengelyen az egyes iterációs lépéseket szemléltettük. A nulladik lépésben induljunk ki a $[0, 1]$ intervallum egy tetszőleges ekvidisztáns (egyenlő távolságú) felosztásából. Az iteráció során az intervallum minden lépésben szűkül, míg *határátmenetben* a fixpontot tartalmazó egyelemű halmazt nem kapjuk.

7.3. Megjegyzés

Az $f(x) = 0$ egyenlet megoldásainak elhelyezkedését nem feltétlenül ismerjük minden esetben. Ilyenkor az iterációs eljárás elindításához találnunk kell egy olyan intervallumot, amely biztosan tartalmaz (legalább egy) gyököt. Ehhez segítségül hívhatjuk a Bolzano-tételt, mely szerint, ha

$$f \in C[a, b], \qquad f(a)f(b) < 0,$$

akkor f-nek van gyöke az $[a, b]$ intervallumon.

7.2. Feladat

Az $f(x) = x^3 - 3x + 1 = 0$ egyenlet megoldására az

$$x_{k+1} = \frac{x_k^3 + 1}{3}$$

iterációt használjuk. Bizonyítsuk a módszer konvergenciáját *valamely intervallumon* és írjuk fel a hibabecslését!

Az iterációs sorozatot úgy kapjuk, hogy az egyenletet átrendezzük a vele ekvivalens alakra:

$$x = \frac{x^3 + 1}{3} \iff x^3 - 3x + 1 = 0.$$

majd ez alapján felírjuk a fixponttétel közelítő sorozatát.
Először is keressünk egy intervallumot, mely tartalmazza a megoldást. Ehhez két olyan pontot kell találnunk, ahol az f függvény értéke különböző előjelű. Könnyű észrevenni, hogy a $[0, 1]$ intervallum jó választás:

$$\begin{aligned} f(0) &= 0^3 - 3 \cdot 0 + 1 = 1 > 0, \\ f(1) &= 1^3 - 3 \cdot 1 + 1 = -1 < 0. \end{aligned}$$

Mivel f függvény folytonos, és $f(0)f(1) < 0$, a Bolzano-tétel miatt a $[0, 1]$ intervallum tartalmazza f legalább egy gyökét, azaz az $f(x) = 0$ nemlineáris egyenlet megoldását.

Most ellenőrizzük a fixponttétel feltételeit a

$$\varphi(x) := \frac{x^3 + 1}{3}$$

függvény esetén, a $[0, 1]$ intervallumon.

(i) A $\varphi(x)$ függvény a $[0, 1]$ intervallumot saját magába képezi, ugyanis φ szigorúan monoton növő $[0, 1]$-en, valamint

$$\varphi(0) = \frac{1}{3}, \qquad \varphi(1) = \frac{2}{3},$$

ezért tehát

$$\varphi\big[[0, 1]\big] = \left[\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right] \subset [0, 1].$$

(ii) Igazolnunk kell még, hogy φ kontrakció $[0, 1]$-en. A Lagrange-féle középértéktételt felhasználva

$$|\varphi'(\xi)| = |\xi^2| = \xi^2 \leq 1 \qquad (\xi \in [0,1]).$$

Ez sajnos nem elegendő a kontrakciós tulajdonság igazolásához, az intervallum szűkítésével azonban elérhető, hogy ez a feltétel is teljesüljön. Legyen az új intervallum $[0, 0.9]$, ekkor

$$|\varphi'(\xi)| = \xi^2 \leq 0.81 =: q \qquad (\xi \in [0, 0.9]),$$

tehát φ kontrakció $[0, 0.9]$-en, és könnyen ellenőrizhető, hogy $f(0)f(0.9) < 0$ is teljesül. Mivel változott az intervallum, ezért kénytelenek vagyunk ismét ellenőrizni az előző feltételt, vagyis azt, hogy φ a $[0, 0.9]$-et önmagába képezi-e. Mivel φ szigorúan montonon növő $[0, 0.9]$-en, valamint

$$\varphi(0) = \frac{1}{3}, \qquad \varphi(0.9) = 0.5763,$$

ezért

$$\varphi\big[[0, 0.9]\big] = \left[\frac{1}{3}, 0.5763\right] \subset [0, 0.9].$$

A szűkített $[0, 0.9]$ intervallumon tehát a konvergenciatétel feltételei teljesülnek a $\varphi(x)$ függvényre, következésképpen az $x_{k+1} = \varphi(x_k)$ iterációs sorozat az f (egyik) gyökéhez konvergál. A hibabecslést a fixponttétel segítségével írhatjuk fel:

$$|x_k - x^*| \leq 0.81^k \cdot (0.9 - 0) \leq 0.9 \cdot 0.81^k.$$

7.4. Megjegyzés

A fixpontiteráció konvergenciája a φ függvény megálvasztásától és a gyököt tartalmazó intervallum megválasztásától egyaránt függ. Ha a konvergencia nem teljesül az $[a, b]$ intervallumon, akkor vizsgálhatjuk a konvergenciatétel feltételeinek teljesülését egy szűkebb, $[a', b'] \subset [a, b]$ intervallumon. Persze előfordulhat, hogy semmilyen gyököt tartalmazó intervallum esetén sem tudjuk igazolni a konvergenciát. Ekkor a φ függvényt vagyunk kénytelenek módosítani.

7.3. Feladat

Adjunk meg az $x - \sqrt{x+1} = 0$ egyenlet $[0,3]$-beli megoldásához konvergáló sorozatot.

(a) Bizonyítsuk a konvergenciát!

(b) Hány lépést kell tennünk a 10^{-3} pontosság eléréséhez?

(c) Lássuk be, hogy a sorozat konvergenciája elsőrendű!

(a) Az iterációs sorozatot az $x - \sqrt{x+1} = 0$ alakból az x kifejezésével kapjuk:

$$x = \sqrt{x+1},$$

mely segítségével a megoldást közelítő sorozat a következő lesz:

$$x_{k+1} = \sqrt{x_k + 1}.$$

Ellenőrizzük a fixponttétel feltételeit φ-re!

(i) Vizsgáljuk meg, hogy a φ függvény a $[0,3]$ intrevallumot a $[0,3]$-ba képezi-e. Mivel φ szigorúan monoton növő függvény a $[0,3]$ intervallumon, ezért elegendő megvizsgálnunk a végpontokban felvett értékeket.

$$\varphi(0) = 1, \qquad \varphi(3) = 2,$$

ezért tehát

$$\varphi\big[[0,3]\big] = [1,2] \subset [0,3],$$

így ez a feltétel teljesül.

(ii) Most igazoljuk, hogy φ kontrakció a $[0,\ 3]$ intervallumon a Lagrange-féle középérték-tétel felhasználásával:

$$|\varphi'(\xi)| = \left|\frac{1}{2\cdot\sqrt{\xi+1}}\right| = \frac{1}{2\cdot\sqrt{\xi+1}} \le \frac{1}{2} = q \qquad (\xi \in [0,3]).$$

A fixponttétel mindkét feltétele teljesül, így a tétel állításai alkalmazhatók a feladatra. A hibabecslés $x \in [0,3]$ esetén:

$$|x_k - x^*| \le \left(\frac{1}{2}\right)^k \cdot |x_0 - x^*| \le \frac{1}{2^k}\cdot(3-0) = \frac{3}{2^k}.$$

(b) Számítsuk ki, hány lépést kell tennünk, hogy a közelítő megoldás hibája kisebb legyen, mint 10^{-3}. Ehhez használhatjuk az imént levezetett hibaformulát:

$$|x_k - x^*| \leq \frac{3}{2^k} < 10^{-3} \quad \Longleftarrow \quad 3000 < 2^k \quad \Longleftarrow \quad k \geq 12.$$

Eszerint legalább 12 lépést kell tennünk a 10^{-3} pontosság eléréséhez.

(c) A Lagrange-féle középértéktétel szerint létezik $\xi_k \in [x_k, x^*]$ vagy $\xi_k \in [x^*, x_k]$ olyan, hogy:

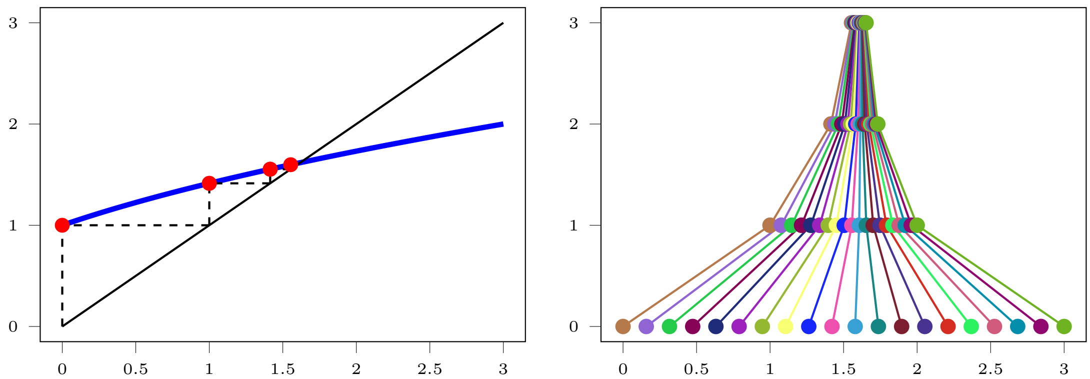
$$|x_{k+1} - x^*| = |\varphi(x_k) - \varphi(x^*)| = |\varphi'(\xi_k)| \cdot |x_k - x^*|.$$

Ezt, valamint a φ' folytonosságát felhasználva:

$$\lim_{k\to\infty} \frac{|x_{k+1} - x^*|}{|x_k - x^*|^1} = \lim_{k\to\infty} |\varphi'(\xi_k)| = |\varphi'(x^*)| = \frac{1}{2 \cdot \sqrt{x^* + 1}} \neq 0,$$

tehát a sorozat konvergenciája elsőrendű.

A következő ábrán a fixpont iterációs sorozat konvergenciáját szemléltettük az előzőeknek megfelelően.



7.4. Feladat*

Az $f(x) = x^3 - x - 1 = 0$ egyenlet megoldására az $[1, 2]$ intervallumon vizsgáljuk meg az

$$\text{(a)}\quad x_{k+1} = x_k^3 - 1, \qquad\qquad \text{(b)}\quad y_{k+1} = \frac{2y_k^3 + 1}{3y_k^2 - 1}$$

iterációkat. Melyik sorozat konvergens? Bizonyítsuk a konvergenciát!

Legyen

$$\varphi(x) := x^3 - 1, \qquad \psi(x) := \frac{2x^3 + 1}{3x^2 - 1}.$$

Könnyen ellenőrizhető, hogy az $f(x) = 0$ egyenlet ekvivalens az $x = \varphi(x)$, és az $x = \psi(x)$ fixpontegyenletekkel. A fixponttétel alkalmazásához választhatjuk az $[1, 2]$ intervallumot ugyanis

$$\begin{aligned} f(1) &= 1^3 - 1 - 1 = -1 < 0, \\ f(2) &= 2^3 - 2 - 1 = 5 > 0, \end{aligned}$$

így a Bolzano-tétel alapján az egyenletnek itt biztosan van megoldása.

(a) Először is, vizsgáljuk meg, hogy φ kontrakció-e az $[1, 2]$ intervallumon!

(i) Vegyük észre, hogy

$$3 \le |\varphi'(\xi)| = |3\xi^2| = 3\xi^2 \le 12 \qquad (\xi \in [1, 2]),$$

így φ biztosan nem kontrakció [1, 2]-n. Sőt,

$$\begin{aligned} |x_{k+1} - x^*| &= |\varphi(x_k) - \varphi(x^*)| = |x_k^3 - (x^*)^3| = \\ &= |x_k - x^*| \cdot |x_k^2 + x_k x^* + (x^*)^2| = \\ &= |x_k - x^*| \cdot \left(x_k^2 + x_k x^* + (x^*)^2\right) \ge \\ &\ge |x_k - x^*| \cdot (1^2 + 1 \cdot 1 + 1^2) \ge \\ &\ge 3|x_k - x^*| \ge \cdots \ge 3^{k+1} \cdot |x_0 - x^*|, \end{aligned}$$

azaz ha $x_0 \ne x^*$, akkor a hibasorozat végtelenhez tart, a vizsgált sorozat tehát divergens.

(b) A továbbiakban jelölje $f(x) = x^3 - x - 1$ az egyenlet bal oldalát. Írjuk fel a

$$\psi(x) = \frac{2x^3 + 1}{3x^2 - 1}$$

függvény deriváltját:

$$\psi'(x) = \frac{6x^2 \cdot (3x^2-1) - (2x^3+1) \cdot 6x}{(3x^2-1)^2} = \frac{6x \cdot (x^3-x-1)}{(3x^2-1)^2}.$$

(i) Vegyük észre, hogy a számlálóban szerepel $f(x)$, így $\psi'(x^*) = 0$. Másrészt

$$\begin{aligned}
\forall x \in [1, x^*] &: f(x) < 0 \implies \psi'(x) < 0 \implies \psi \downarrow \\
\forall x \in [x^*, 2] &: f(x) > 0 \implies \psi'(x) > 0 \implies \psi \uparrow .
\end{aligned}$$

Ennek fényében elmondható, hogy x^*-ban ψ-nek lokális minimuma van. Mivel a ψ függvény folytonos (sőt, deriválható), így az $[1,2]$ kompakt intervallumon felveszi minimumát és maximumát. A minimum és a maximum pedig vagy az intervallum végpontjaiban, vagy az intervallumba eső lokális szélsőértékhelyeken vétetik fel. Az előzőek alapján ψ egyetlen $[1,2]$ intervallumba eső lokális szélsőértékhelye éppen az x^*, emiatt

$$\min_{x\in[1,2]} \psi(x) = \min\{\psi(1), \psi(2), \psi(x^*)\} = \min\left\{\frac{3}{2}, \frac{17}{11}, x^*\right\} \geq 1.$$

Hasonlóan

$$\max_{x\in[1,2]} \psi(x) = \max\{\psi(1), \psi(2), \psi(x^*)\} = \max\left\{\frac{3}{2}, \frac{17}{11}, x^*\right\} \leq 2.$$

Ebből pedig az következik, hogy

$$\psi\big[[1,2]\big] = \left[\min_{x\in[1,2]} \psi(x), \max_{x\in[1,2]} \psi(x)\right] \subset [1,2]$$

(ii) Ellenőriznünk kell még, hogy ψ kontrakció-e az $[1,2]$ intervallumon. Vegyük észre, hogy $x \in [1,2]$ esetén

$$\psi''(x) = 6 \cdot \frac{2x^3+9x^2+2x+1}{(3x^2-1)^3} > 0,$$

azaz ψ' szigorúan monoton növő, ellenőrizzük tehát a végpontokban felvett értékeit:

$$\psi'(1) = -\frac{3}{2}, \qquad \psi'(2) = \frac{60}{121}.$$

Világos, hogy finomítanunk kell az intervallumon. Tekintsük az $[1.1, 2]$ intervallumot, amely szintén tartalmazza a gyököt, ugyanis

$$\begin{aligned}
&f(1.1) = 1.1^3 - 1.1 - 1 = -0.769 < 0, \\
&f(2) = 2^3 - 2 - 1 = 5 > 0.
\end{aligned}$$

Az előzőek alapján

$$\psi(1.1) = \frac{2 \cdot 1.1^3 + 1}{3 \cdot 1.1^2 - 1} = \frac{3.662}{2.993} \approx 1.2235 \geq 1.22$$

miatt

$$\psi\big[[1.1,\ 2]\big] \subset [1.22,\ 2] \subset [1.1,\ 2].$$

Továbbá

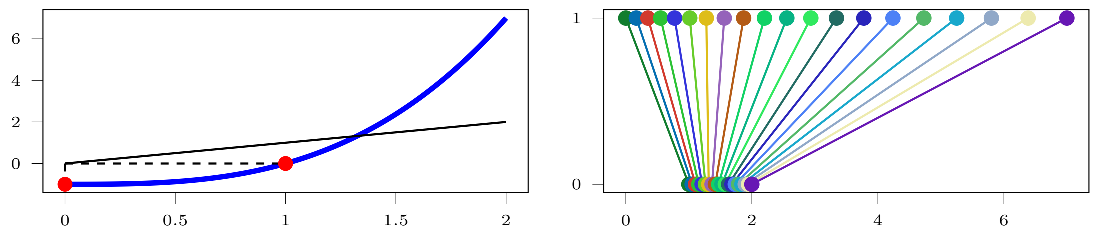
$$\psi'(1.1) = \frac{6 \cdot 1.1 \cdot (1.1^3 - 1.1 - 1)}{(3 \cdot 1.1^2 - 1)^2} = \frac{-5.0754}{6.9169} \approx -0.7337 \geq -0.7338$$

Így a Lagrange-féle középérték-tételt felhasználva:

$$|\psi'(\xi)| \leq 0.7338 =: q < 1, \quad \xi \in [1.1, 2].$$

Az előzőekben tehát beláttuk, hogy a ψ függvény az $[1.1, 2]$ intervallumot önmagára képezi, ráadásul ezen az intervallumon kontrakció, ezért az $x_{k+1} = \psi(x_k)$ iteráció bármely $x_0 \in [1.1,\ 2]$ esetén konvergens.

A következő ábrán a φ függvény működését szemléltettük. Az első lépésben az $(1, 0)$ pontból láthatóan a fixponttól távolabb kerültünk. Az is ellenőrizhető, hogy az 1. lépésben az $[1, 2]$ intervallumot a $[0, 7]$ intervallumra képeztük, tehát φ nem lehet kontrakció.



Ezzel szemben a ψ függvénnyel konstruált iterációs sorozatunk konvergens, amely megtekinthető a következő ábrán.