Analízis I, 12. gyakorlat

Bevezetés. Az $e \approx 2.718$ konstans a matematika egyik legfontosabb állandója (Euler-állandó, a természetes logaritmus alapszáma; 1683-ban vezette be Jacob Bernoulli).
Az $x \mapsto e^x$ exponenciális függvény kitüntetett tulajdonságokkal rendelkezik, és mindenhol jelen van a természettudományokban és az alkalmazásokban; például a differenciálszámításban (az e^x exponenciális függvény deriváltja önmaga), a differenciálegyenletek elméletében (állandó együtthatós lineáris differenciálegyenletek megoldásakor), az algebrában (az e^x exponenciális függvény a számegyenes megfelelő additív és multiplikatív csoportjai közötti homomorfizmus), a geometriában (az $e^{i x}$ komplex exponenciális függvény a számegyenest az egységkörvonalra képezi), vagy a fizikában (ha t jelöli az időt, akkor az $e^{i t}$ komplex exponenciális függvény megfelelő vetületei a harmonikus rezgőmozgást leíró koszinusz- és szinuszfüggvények).
A ***http://functions.wolfram.com*** függvényenciklopédia az exponenciális függvénnyel kapcsolatban 1523 formulát tartalmaz. Az alábbiakban ezek közül tekintünk át néhány képletet.

A feladatok megoldásához szükséges lesz, hogy felidézzük
- az $\binom{N}{n}$ binomiális együttható különféle kiszámítási módjait;
- a Newton-féle binomiális tételt: $\forall\, a, b \in \mathbb{R},\ \forall\, N \in \mathbb{N}^+ :\ (a+b)^N = \sum_{n=0}^{N} \binom{N}{n} b^n a^{N-n}$;
- a sorozat-határérték kapcsolatát az alapműveletekkel és a rendezéssel;
- a $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ végtelen sorok definícióját, konvergenciáját és abszolút konvergenciáját;
- az abszolút konvergens sorok Cauchy-szorzatát (= diszkrét konvolúció);
- a komplex számok alaptulajdonságait.

12/1

Motiváció. Az e számot – matematikatörténeti okokból – általában az $e := \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ határértékkel vezetjük be. Az $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ sorozat azonban lassan konvergál, ezért az e szám tizedesjegyeinek kiszámítására praktikusan nem alkalmas (például $n = 10^6$ esetén is csak 5 tizedesjegy pontosságot ad). Szerencsére létezik az e szám tizedesjegyeinek kiszámítására hatékony képlet, mégpedig a $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} := \lim_{N\to\infty} \sum_{n=0}^{N} \frac{1}{n!}$ végtelen sor. Először belátjuk, hogy a $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}$ sorösszeg valóban e, majd megfogalmazunk egy hibabecslést, amely segítségével meghatározható, hogy az e szám előre adott pontosságú kiszámításához a $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}$ végtelen sornak melyik részletösszegét elegendő kiszámolni (adott pontosságú racionális approximáció). A hibabecslés azt is mutatja, hogy a $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}$ sor részletösszegei roppant gyorsan konvergálnak e-hez, amiből az e szám irracionális volta egyszerűen következik (Joseph Fourier módszerét ismertetjük).

Állítás. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} = e.$

Bizonyítás. Először az alábbi lemmát mondjuk ki és bizonyítjuk be.

Lemma. $\forall N \in \mathbb{N}^+, \forall M \in \mathbb{N}^+ : \left(1+\frac{1}{N}\right)^N \leq \sum_{n=0}^{N} \frac{1}{n!} \leq \left(1+\frac{1}{M}\right)^{M+N}$.

A lemma alsó becslésének bizonyítása.

$\left(1+\frac{1}{N}\right)^N$ = [binomiális tétel] = $\sum_{n=0}^{N} \binom{N}{n} \frac{1}{N^n} 1^{N-n}$ = [definíció] = $\sum_{n=0}^{N} \frac{N(N-1)\ldots(N-n+1)}{n!} \frac{1}{N^n}$ =

[sorrendcsere] = $\sum_{n=0}^{N} \frac{N(N-1)\ldots(N-n+1)}{N^n} \frac{1}{n!}$ = [széttagolás] =

$\sum_{n=0}^{N} \frac{N}{N} \frac{N-1}{N} \ldots \frac{N-n+1}{N} \frac{1}{n!} \leq$ [tényezőnkénti becslés] $\leq \sum_{n=0}^{N} 1 \cdot 1 \cdot \ldots \cdot 1 \frac{1}{n!}$.

A lemma felső becslésének bizonyítása. $\left(1+\frac{1}{M}\right)^{M+N}$ = [binomiális tétel] = $\sum_{n=0}^{M+N} \binom{M+N}{n} \frac{1}{M^n} \geq$

[néhány pozitív tagot elhagyva a szummából] $\geq \sum_{n=0}^{N} \binom{M+N}{n} \frac{1}{M^n} = \sum_{n=0}^{N} \frac{(M+N)(M+N-1)\ldots(M+N-n+1)}{n!} \frac{1}{M^n}$ =

$\sum_{n=0}^{N} \frac{(M+N)(M+N-1)\ldots(M+N-n+1)}{M^n} \frac{1}{n!} = \sum_{n=0}^{N} \frac{M+N}{M} \frac{M+N-1}{M} \frac{M+N-n+1}{M} \frac{1}{n!} \geq$ [tényezőnkénti becslés] $\geq \sum_{n=0}^{N} 1 \cdot 1 \cdot \ldots \cdot 1 \frac{1}{n!}$ ■

A lemmából már egyszerűen következik a feladat állítása.

Először a $\sum_{n=0}^{N} \frac{1}{n!} \leq \left(1+\frac{1}{M}\right)^{M+N}$ felső becslésben rögzített $N \in \mathbb{N}^+$ esetén tekintsük az $M \to \infty$ határátmenetet: a bal oldal független M-től, a jobb oldal limesze pedig

$\lim_{M\to\infty} \left(1+\frac{1}{M}\right)^{M+N} = \lim_{M\to\infty}\left(\left(1+\frac{1}{M}\right)^M \left(1+\frac{1}{M}\right)^N\right)$ = [szorzástétel]

$= \left(\lim_{M\to\infty} \left(1+\frac{1}{M}\right)^M\right)\left(\lim_{M\to\infty}\left(1+\frac{1}{M}\right)^N\right) = e \cdot 1 = e.$

Azt kaptuk tehát, hogy $\forall N \in \mathbb{N}^+$ esetén $\sum_{n=0}^{N} \frac{1}{n!} \leq e$, amiből a lemma alsó becslésével együtt

$\left(1+\frac{1}{N}\right)^N \leq \sum_{n=0}^{N} \frac{1}{n!} \leq e$ adódik. Ebben az $N \to \infty$ határátmenetet véve a közrefogási elv segítségével kapjuk, hogy $\lim_{N\to\infty} \sum_{n=0}^{N} \frac{1}{n!} = e$. ■■

Hibabecslés. $\forall N \in \mathbb{N}^+$ esetén $0 < e - \sum_{n=0}^{N} \frac{1}{n!} < \frac{1}{N \cdot N!}$

Bizonyítás. Az imént láttuk, hogy $e = \lim_{N\to\infty}\left(\sum_{n=0}^{N} \frac{1}{n!}\right)$. Mivel a (...)-beli sorozat N-ben szigorúan monoton nő, ezért $\forall N \in \mathbb{N}^+$ esetén $\sum_{n=0}^{N} \frac{1}{n!} < e$, azaz $0 < e - \sum_{n=0}^{N} \frac{1}{n!}$.

A felső becsléshez vegyük észre, hogy $e - \sum_{n=0}^{N} \frac{1}{n!} = \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}\right) - \left(\sum_{n=0}^{N} \frac{1}{n!}\right) = \frac{1}{(N+1)!} + \frac{1}{(N+2)!} + \frac{1}{(N+3)!} + \ldots$

$= \frac{1}{(N+1)!}\left(1 + \frac{1}{N+2} + \frac{1}{(N+3)(N+2)} + \frac{1}{(N+4)(N+3)(N+2)} + \ldots\right) < \frac{1}{(N+1)!}\left(1 + \frac{1}{N+2} + \frac{1}{(N+2)^2} + \frac{1}{(N+2)^3} + \ldots\right) =$

[az $\frac{1}{N+2}$ kvóciensű konvergens mértani sor összegképlete alapján] $= \frac{1}{(N+1)!}\left(\frac{1}{1-\frac{1}{N+2}}\right) = \frac{1}{(N+1)!} \frac{N+2}{N+1}$.

Végül belátjuk, hogy $\frac{1}{(N+1)!} \frac{N+2}{N+1} < \frac{1}{N \cdot N!}$ [vagyis gyengítjük a becslésünket, hogy a feladatban megadott egyszerűbb alakot nyerjük]. Nyilván

$\frac{1}{(N+1)!}\,\frac{N+2}{N+1} < \frac{1}{N\cdot N!} \Longleftrightarrow \frac{N!}{(N+1)!}\,\frac{N+2}{N+1} < \frac{1}{N} \Longleftrightarrow \frac{1}{N+1}\,\frac{N+2}{N+1} < \frac{1}{N} \Longleftrightarrow N(N+2) < (N+1)^2$, ez utóbbi pedig triviálisan igaz.

Az *e* szám irracionális

Bizonyítás. Indirekt módon tegyük fel, hogy $e = \frac{p}{q} \in \mathbb{Q}$, ahol $p, q \in \mathbb{N}^+$. Írjuk fel a hibabecslést az $N := q$ választással: $0 < e - \sum_{n=0}^{q} \frac{1}{n!} = \frac{p}{q} - \sum_{n=0}^{q} \frac{1}{n!} < \frac{1}{q\,q!}$, majd szorozzuk ezt be $(q\,q!)$-sal. Így $0 < p\,q! - \sum_{n=0}^{q} \frac{q\,q!}{n!} < 1$. Itt $n \leq q$, tehát $q!$ osztható $n!$-sal, ezért $p\,q! - \sum_{n=0}^{q} \frac{q\,q!}{n!} \in \mathbb{Z}$. Ez viszont ellentmondás, hiszen a $(0,\,1)$ nyílt intervallumban nincs egész szám.

Az *e* számra igaz, hogy 2.718 < *e* < 2.7183

Bizonyítás. Tekintsük a hibabecslésben megfogalmazott egyenlőtlenséget $N = 6$ esetén: $\sum_{n=0}^{6} \frac{1}{n!} < e < \frac{1}{6\times 6!} + \sum_{n=0}^{6} \frac{1}{n!}$. Itt a bal és jobb oldalt kiértékelve élesebb korlátot is kapunk:

$$\left\{\sum_{n=0}^{6} \frac{1}{n!},\ \frac{1}{6\times 6!} + \sum_{n=0}^{6} \frac{1}{n!}\right\}$$

$$\left\{\frac{1957}{720},\ \frac{11\,743}{4320}\right\} \text{ // N}$$

```
{2.71806, 2.71829}
```

Megjegyzés: néhány száz tizedesjegy pontossággal számolva

```
N[e, 500]
```

```
2.718281828459045235360287471352662497757247093699959574966967627724076630353
 547594571382178525166427427466391932003059921817413596629043572900334295260
 595630738132328627943490763233829880753195251019011573834187930702154089149
 934884167509244761460668082264800168477411853742345442437107539077744992069
 551702761838606261331384583000752044933826560297606737113200709328709127443
 747047230696977209310141692836819025515108657463772111252389784425056953696
 77078544996996794686445490598793163688923009879312
```

Az első néhány tizedesjegy fejben tartásához segít az alábbi minta: $e \approx 2.7\ 1828\ 1828\ 45\ 90\ 45\ldots$.

12/2

Motiváció. Az alábbiakban – mindenhol abszolút konvergens Taylor-sor segítségével – bevezetjük az e-alapú exponenciális függvényt, majd megmutatjuk egy fontos algebrai tulajdonságát (csoporthomomorfizmus: "összegből szorzatot készít"). Szintén mindenhol abszolút konvergens Taylor-sorokkal definiáljuk a koszinusz- és a szinuszfüggvényt, és belátjuk ezek kapcsolatát a komplex exponenciális függvénnyel (Euler-formula). Ezen összefüggések egyszerű alkalmazásával adódnak a trigonometrikus függvények addíciós tételei (speciális esetként a "többszörös szögek szögfüggvényei"), illetve a trigonometrikus Pitagorasz-tétel.

Definíció. $\forall\, z \in \mathbb{C}$ esetén $e^z := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$

Megjegyzés: $z = 0$ esetén a szummában $0^0 := 1$ értendő. Más szóval: $e^z := 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$.

Megjegyzés: a hányadoskritérium miatt a fenti végtelen sor tetszőleges, rögzített $z \in \mathbb{C}$ esetén abszolút konvergens, így konvergens is.

Megjegyzés: $z = 1$ esetén visszakapjuk a 12/1-beli $e = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}$ állítást.

Állítás [additív-multiplikatív tulajdonság]. $\forall\, z, w \in \mathbb{C}$ esetén $e^{z+w} = e^z\, e^w$

Bizonyítás. A definíció szerint

$e^{z+w} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z+w)^n}{n!}$ = [a binomiális tételt használva] $= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} z^k\, w^{n-k}$ =[egyszerűsítve]

$= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{z^k}{k!} \frac{w^{n-k}}{(n-k)!}$. Ez utóbbi kifejezés nem más, mint az $e^z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$ és $e^w = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{w^n}{n!}$ abszolút konvergens sorok Cauchy-szorzata. A tanult tétel szerint ilyen esetben a Cauchy-szorzat összege a sorösszegek szorzata, vagyis $\sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{z^k}{k!} \frac{w^{n-k}}{(n-k)!} = \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}\right)\left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{w^n}{n!}\right) = e^z\, e^w$.

Állítás. $\forall\, z \in \mathbb{C}$ esetén $e^{-z} = \frac{1}{e^z}$

Bizonyítás. Mivel $1 = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{0^n}{n!} = e^0 = e^{z+(-z)}$ = [additív – multiplikatív tulajdonság] $= e^z\, e^{-z}$, ezért $e^{-z} = \frac{1}{e^z}$.

Definíció.
$\forall z \in \mathbb{C}: \cos(z) := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} z^{2n}$
$\forall z \in \mathbb{C}: \sin(z) := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} z^{2n+1}$

Állítás [Euler-formula]. Legyen $x \in \mathbb{R}$. Ekkor $e^{i x} = \cos(x) + i \sin(x)$.

Bizonyítás. Emlékezzünk arra, hogy i^n ($n \in \mathbb{N}$) egy 4 periódusú sorozat (lehetséges értékei: $1,\ i,\ -1,\ -i$), így $e^{i x} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(i x)^n}{n!} =$
$1 + i \frac{x^1}{1!} - \frac{x^2}{2!} - i \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + i \frac{x^5}{5!} - \frac{x^6}{6!} - i \frac{x^7}{7!} + \ldots =$
$\left(1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \ldots\right) + i\left(x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \ldots\right) = \cos(x) + i \sin(x)$.

Megjegyzés: a fenti levezetéssel analóg módon látható be, hogy $\forall z \in \mathbb{C}: e^{i z} = \cos(z) + i \sin(z)$, vagy például az, hogy $z = a + b\, i \in \mathbb{C}$ esetén $e^{a+b\, i} = e^a(\cos(b) + i \sin(b))$. Ezekből például azt nyerjük, hogy $\cos(z) = \frac{e^{i z}+e^{-i z}}{2}$ és $\sin(z) = \frac{e^{i z}-e^{-i z}}{2 i}$. A trigonometrikus függvények tehát mind kifejezhetők a (komplex) exponenciális függvénnyel.

Állítás. $\forall x \in \mathbb{R}$ esetén $\cos(2x) = \cos^2(x) - \sin^2(x)$ és $\sin(2x) = 2 \sin(x) \cos(x)$. (A tétel egyébként $\forall x \in \mathbb{C}$ esetén is igaz.)

Bizonyítás. Egyrészt
$e^{2 i x} = e^{i x + i x} =$ [additív – multiplikatív tulajdonság] $= e^{i x} e^{i x} =$ [Euler – formula] $=$
$(\cos(x) + i \sin(x))^2 = (\cos^2(x) - \sin^2(x)) + i\,(2 \sin(x) \cos(x))$.
Másrészt az Euler-formula miatt $e^{2 i x} = e^{i (2x)} = \cos(2x) + i \sin(2x)$. A valós és képzetes részeket összevetve adódik az állítás.

A trigonometrikus Pitagorasz-tétel. $\forall x \in \mathbb{R}$ esetén $\cos^2(x) + \sin^2(x) = 1$. (A tétel egyébként $\forall x \in \mathbb{C}$ esetén is igaz.)

Bizonyítás. $1 = e^0 = e^{i x + (-i x)} =$[additív-multiplikatív tulajdonság] $= e^{i x} e^{-i x} =$
[Euler-formula] $= (\cos(x) + i \sin(x))(\cos(-x) + i \sin(-x)) =$
[a cos-függvény páros és a sin-függvény páratlan volta a fenti definíciókból nyilvánvaló]$=$
$(\cos(x) + i \sin(x))(\cos(x) - i \sin(x)) = \cos^2(x) + \sin^2(x)$.