9. Polinom interpoláció

9.1. Feladat

Tekintsük az $f(x) = \sqrt{x}$ függvényt és az $1, 4, 9$ alappontokat.

(a) Írjuk fel az interpolációs polinom Lagrange-alakját!

(b) Írjuk fel az interpolációs polinom Newton-alakját!

(c) Ellenőrizzük, hogy a Lagrange- és a Newton-alakban felírt polinomok egyenlők!

(d) Közelítsük $f(2) = \sqrt{2}$-t az interpolációs polinom segítségével!

(e) Becsüljük a hibát az $x = 2$ pontban és az $[1, 9]$ intervallumon!

(a) A Lagrange-alak felírásához először meg kell határoznunk a Lagrange-alappolinomokat.

$$\begin{aligned}
\ell_0(x) &= \frac{(x-4)(x-9)}{(1-4)(1-9)} = \frac{1}{24}(x-4)(x-9), \\
\ell_1(x) &= \frac{(x-1)(x-9)}{(4-1)(4-9)} = -\frac{1}{15}(x-1)(x-9), \\
\ell_2(x) &= \frac{(x-1)(x-4)}{(9-1)(9-4)} = \frac{1}{40}(x-1)(x-4).
\end{aligned}$$

Az $1, 4, 9$ alappontokhoz tartozó függvényértékek rendre $1, 2, 3$. Felhasználva az interpolációs polinom Lagrange-alakjának definícióját:

$$L_2(x) = 1 \cdot \ell_0(x) + 2 \cdot \ell_1(x) + 3 \cdot \ell_2(x),$$

azaz

$$L_2(x) = \frac{1}{24}(x-4)(x-9) - \frac{2}{15}(x-1)(x-9) + \frac{3}{40}(x-1)(x-4).$$

(b) Az alappontok és a függvényértékek ismeretében felírhatjuk az osztott differencia táblázatot.

x_i	$f(x_i)$	$f[x_i, x_{i+1}]$	$f[x_i, x_{i+1}, x_{i+2}]$
1	$\mathbf{1}$		
4	2	$\frac{2-1}{4-1} = \mathbf{\frac{1}{3}}$	
9	3	$\frac{3-2}{9-4} = \frac{1}{5}$	$\frac{\frac{1}{5}-\frac{1}{3}}{9-1} = \mathbf{-\frac{1}{60}}$

A táblázat segítségével pedig felírhatjuk az interpolációs polinom Newton-alakját:

$$N_2(x) = 1 + \frac{1}{3}(x-1) - \frac{1}{60}(x-1)(x-4).$$

(c) Először vizsgáljuk a Lagrange-alakot, hozzuk L_2-t algebrai alakra:

$$\begin{aligned}
L_2(x) &= \frac{1}{24}(x-4)(x-9) - \frac{2}{15}(x-1)(x-9) + \frac{3}{40}(x-1)(x-4) = \\
&= \frac{1}{24}(x^2-13x+36) - \frac{2}{15}(x^2-10x+9) + \frac{3}{40}(x^2-5x+4) = \\
&= \frac{1}{120}\Big(5(x^2-13x+36) - 16(x^2-10x+9) + 9(x^2-5x+4)\Big) = \\
&= \frac{1}{120}\Big(-2x^2+50x+72\Big) = -\frac{1}{60}\Big(x^2-25x-36\Big).
\end{aligned}$$

Most hozzuk N_2-t is algebrai alakra:

$$\begin{aligned}
N_2(x) &= 1 + \frac{1}{3}(x-1) - \frac{1}{60}(x-1)(x-4) = \\
&= 1 + \frac{1}{3}x - \frac{1}{3} - \frac{1}{60}\Big(x^2-5x+4\Big) = \\
&= \frac{20}{60}x + \frac{40}{60} - \frac{1}{60}\Big(x^2-5x+4\Big) = \\
&= -\frac{1}{60}\Big(-20x-40+x^2-5x+4\Big) = -\frac{1}{60}\Big(x^2-25x-36\Big).
\end{aligned}$$

Láthatjuk, hogy $L_2 \equiv N_2$, ami nem meglepő, hiszen tudjuk, hogy az interpolációs feladat megoldása egyértelmű. A továbbiakban az interpolációs polinomot mindig L_n-nek nevezzük, a Newton-alak hangsúlyozására használt N_n jelölést nem fogjuk használni.

(d) Közelítsük $\sqrt{2}$-t L_2 segítségével!

$$\sqrt{2} \approx L_2(2) = 1 + \frac{1}{3}(2-1) - \frac{1}{60}(2-1)(2-4) = 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{30} = \frac{41}{30}.$$

9.1. Megjegyzés

A fenti kifejezés a $\sqrt{2}$ egy úgynevezett racionális approximációja. A fenti módszer működik tetszőleges függvény esetében, amelynek értékei irracionálisak lehetnek. Tegyük fel ugyanis, hogy $x_0, \ldots, x_n \in \mathbb{Q}$ és $x \in \mathbb{Q}$. Ekkor a Lagrange-alappolinomok definíciója alapján nyilván $\ell_k(x) \in \mathbb{Q}$. Ha feltesszük most, hogy a függvényértékek is racionálisak, azaz $f(x_0), \ldots, f(x_n) \in \mathbb{Q}$, miközben $f(x) \in \mathbb{Q}^*$, akkor azt kapjuk, hogy

$$\mathbb{Q}^* \ni f(x) \approx L_n(x) \in \mathbb{Q}$$

Vagy szavakkal kifejezve az alábbi eljárást: vegyünk egy f függvényt, melynek a racionális x_i helyeken a szintén racionális $f(x_i)$ helyettesítési értékei ismertek. Ekkor, ha x racionális és $f(x)$ irracionális, akkor az $L_n(x)$ az $f(x)$ irracionális szám egy racionális approximációja (közelítése).

(e) Tetszőleges $x \in [1, 9]$ pontban az interpoláció hibáját az

$$|f(x) - L_2(x)| \leq \frac{M_3}{3!} \cdot |\omega_2(x)|$$

összefüggéssel tudjuk becsülni, ahol

$$M_3 = \max_{x \in [1,9]} |f'''(x)| = \|f'''\|_\infty,$$

és

$$\omega_2(x) = (x-1)(x-4)(x-9).$$

A képlet alkalmazásához először számítsuk ki M_3 értékét. Ehhez szükségünk lesz f harmadik deriváltjára:

$$\begin{aligned} f(x) &= \sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}}, \\ f'(x) &= \frac{1}{2} x^{-\frac{1}{2}}, \\ f''(x) &= -\frac{1}{4} x^{-\frac{3}{2}}, \\ f'''(x) &= \frac{3}{8} x^{-\frac{5}{2}}. \end{aligned}$$

Felhasználva, hogy az $|f'''|$ pozitív és szigorúan monoton csökkenő a kijelölt intervallumon:

$$|f'''(x)| = \frac{3}{8}x^{-\frac{5}{2}} = \frac{3}{8}\frac{1}{\sqrt{x^5}} \leq \frac{3}{8} = M_3 \qquad (x \in [1,9]).$$

Az $x = 2$ pontbeli hiba becsléséhez szükségünk van még $|\omega_2(2)|$ értékére:

$$|\omega_2(2)| = |(2-1)\cdot(2-4)\cdot(2-9)| = 14.$$

Most felírhatjuk a pontbeli hiba becslését, a fenti képletet alkalmazva:

$$|f(2) - L_2(2)| \leq \frac{3}{8}\cdot\frac{1}{3!}\cdot 14 = \frac{7}{8}.$$

Ha azt szeretnénk, hogy a hibabecslés az $[1,9]$ intervallum bármely pontjára teljesüljön, akkor az előző képletben $|\omega_2(x)|$-et az

$$\|\omega_2\|_\infty = \max_{x\in[1,9]} |\omega_2(x)|$$

kifejezésre kell cserélnünk. Feladatunk tehát az, hogy kiszámítsuk $|\omega_2(x)|$ maximumát az $[1,9]$ intervallumon. Nyilvánvaló, hogy $|\omega_2(x)|$-nek csak ott lehet maximuma, ahol $\omega_2(x)$-nek szélsőértéke van a kijelölt intervallumon. Az intervallum végpontjaiban $\omega_2(1) = \omega_2(9) = 0$, ez minden olyan esetben igaz, ahol az intervallum végpontjai az interpoláció alappontjai. Ebből következően $|\omega_2(x)|$-nek az ω_2 $[1,9]$ intervallumba eső lokális szélsőérték helyén lehet. A lehetséges lokális szélsőértékek meghatározásához keressük meg $\omega_2'(x)$ gyökeit:

$$\begin{aligned}
\omega_2(x) &= (x-1)(x-4)(x-9) = x^3 - 14x^2 + 49x - 36\\
\omega_2'(x) &= 3x^2 - 28x + 49 = 0
\end{aligned}$$

$$\Downarrow$$

$$x_{1,2} = \frac{28 \pm \sqrt{28^2 - 4\cdot 3\cdot 49}}{2\cdot 3} = \frac{28\pm 14}{6} = \frac{14\pm 7}{3}.$$

Ebből pedig

$$\begin{aligned}
x_1 &= 7,\\
x_2 &= \frac{7}{3},
\end{aligned}$$

továbbá

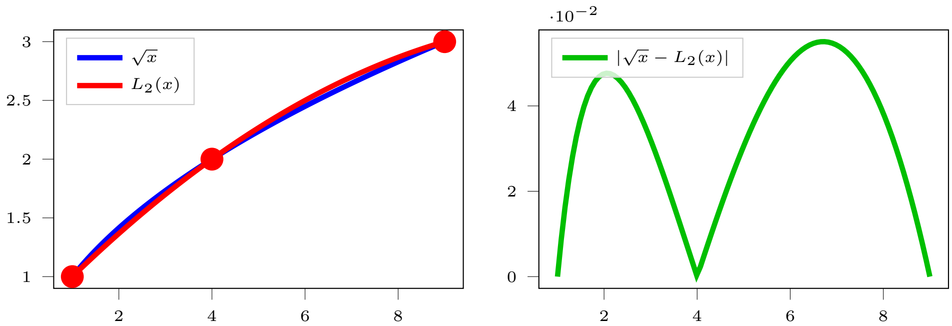
$$\begin{aligned}
\omega_2(x_1) &= \omega_2(7) = (7-1)(7-4)(7-9) = -36,\\
\omega_2(x_2) &= \omega_2\left(\frac{7}{3}\right) = \frac{400}{27} \approx 14,8.
\end{aligned}$$

A fentiekből nyilvánvaló, hogy

$$\|\omega_2\|_\infty = \max_{x\in[1,9]} |\omega_2(x)| = \max\left\{|\omega_2(\tfrac{7}{3})|,\ |\omega_2(7)|\right\} = 36.$$

Így a teljes intervallumra érvényes hibabecslésünk a következő:

$$\|f - L_2\|_\infty \le \frac{M_3}{3!}\|\omega_2\|_\infty = \frac{3}{8}\cdot\frac{1}{3!}\cdot 36 = \frac{9}{4}.$$



9.2. Feladat

Írjuk fel az (x_i, y_i) pontokon interpoláló polinom Newton-alakját!

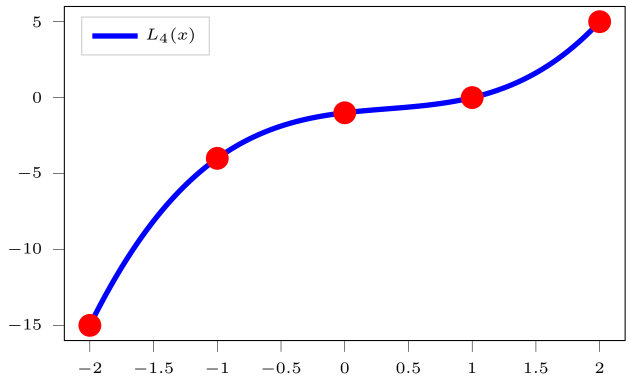
x_i	-2	-1	0	1	2
y_i	-15	-4	-1	0	5

Az alappontok és a hozzájuk tartozó $y_i = f(x_i)$ értékek ismeretében felírhatjuk az osztott differencia táblázatot.

x_i	$y_i = f(x_i)$	$f[x_i, x_{i+1}]$	$f[x_i, x_{i+1}, x_{i+2}]$	...	...
-2	$\mathbf{-15}$				
-1	-4	$\frac{-4-(-15)}{-1-(-2)} = \mathbf{11}$			
0	-1	$\frac{-1-(-4)}{0-(-1)} = 3$	$\frac{3-11}{0-(-2)} = \mathbf{-4}$		
1	0	$\frac{0-(-1)}{1-0} = 1$	$\frac{1-3}{1-(-1)} = -1$	$\frac{-1-(-4)}{1-(-2)} = \mathbf{1}$	
2	5	$\frac{5-0}{2-1} = 5$	$\frac{5-1}{2-0} = 2$	$\frac{2-(-1)}{2-(-1)} = 1$	$\frac{1-1}{2-(-2)} = \mathbf{0}$

A Newton-alak definíciójának megfelelően, a táblázat segítségével írhatjuk fel az interpolációs polinomot:

$$
\begin{aligned}
L_4(x) = \mathbf{-15} + & \\
& + \mathbf{11} \cdot (x+2) - \\
& - \ \mathbf{4} \cdot (x+2)(x+1) + \\
& + \ \mathbf{1} \cdot (x+2)(x+1)(x-0) + \\
& + \ \mathbf{0} \cdot (x+2)(x+1)(x-0)(x-1) = \cdots = x^3 - x^2 + x - 1.
\end{aligned}
$$



9.3. Feladat

Tekintsük az $f(x) = \log_2(x)$ függvényt, és az $1, 2, 4$ alappontokat.

(a) Adjuk meg az f-et, az alappontokban interpoláló polinom Newton-alakját!

(b) A Newton-alak segítségével adjuk meg $\log_2(3)$ racionális approximációját!

(c) Írjuk fel az interpoláló polinom hibáját az $x = 3$ pontban!

(a) Számítsuk ki az alappontokban felvett függvényértékeket, majd írjuk fel az osztott differencia táblázatot.

x_i	$f(x_i)$	$f[x_i, x_{i+1}]$	$f[x_i, x_{i+2}]$
1	$\mathbf{0}$		
2	1	$\frac{1-0}{2-1} = \mathbf{1}$	
4	2	$\frac{2-1}{4-2} = \frac{1}{2}$	$\frac{\frac{1}{2}-1}{4-1} = \mathbf{-\frac{1}{6}}$

A táblázat segítségével felírhatjuk az interpolációs polinom Newton-alakját:

$$L_2(x) = 0 + 1 \cdot (x-1) - \frac{1}{6} \cdot (x-1)(x-2).$$

(b) Az $f(3) = \log_2(3)$ közelítése az interpolációs polinomból:

$$L_2(3) = 0 + 1 \cdot (3-1) - \frac{1}{6} \cdot (3-1)(3-2) = 2 - \frac{1}{3} = \frac{5}{3}.$$

(c) Az $x = 3$ pontban a hibabecslés:

$$|f(3) - L_2(3)| \leq \frac{M_3}{3!}|\omega_2(3)|,$$

ahol $|\omega_2(3)| = |(3-1)(3-2)(3-4)| = |-2| = 2$. Most írjuk fel f deriváltjait:

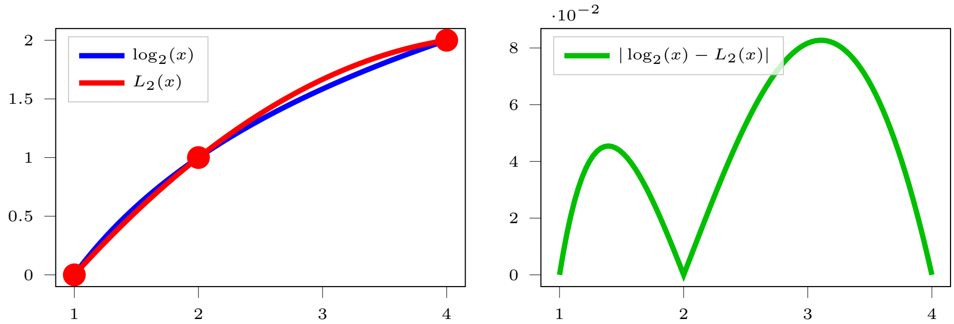
$$\begin{aligned}
f(x) &= \log_2(x) = \frac{\ln x}{\ln 2}, \\
f'(x) &= \frac{1}{\ln 2} x^{-1}, \\
f''(x) &= -\frac{1}{\ln 2} x^{-2}, \\
f'''(x) &= \frac{2}{\ln 2} x^{-3},
\end{aligned}$$

melyből

$$|f'''(x)| = \frac{2}{x^3 \cdot \ln 2} \leq \frac{2}{\ln 2} = M_3, \quad x \in [1,4].$$

Így felírhatjuk az $x = 3$ pontbeli hibabecslést:

$$|\log_2(3) - L_2(3)| \leq \frac{\frac{2}{\ln 2}}{3!} \cdot 2 = \frac{2}{3 \ln 2} \approx 0,96.$$



9.4. Feladat

Tekintsük a már korábbról ismerős $f(x) = \sqrt{x}$ függvényt, amelyet ismét másodfokú polinommal szeretnénk interpolálni, viszont nem feltétlenül az $1, 4, 9$ alappontokon. Hogyan válasszuk meg az interpoláció alappontjait, hogy az interpolációs polinom hibabecslése az $[1, 9]$ intervallumon a lehető legpontosabb legyen? Írjuk fel a hibabecslést!

A másodfokú interpoláció miatt *három* alappontra van szükség. Ahhoz, hogy a hiba minimális legyen, úgy kell választani őket, hogy a *harmadfokú* Csebisev-polinom gyökeit az $[1, 9]$ intervallumba transzformáljuk. T_3 gyökei:

$$
\begin{aligned}
x_0 &= \cos\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2},\\
x_1 &= \cos\left(\frac{3\pi}{6}\right) = 0,\\
x_2 &= \cos\left(\frac{5\pi}{6}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2}.
\end{aligned}
$$

Tudjuk, hogy a

$$\varphi(x) = \frac{a+b}{2} + \frac{b-a}{2} \cdot x$$

transzformáció a $[-1, 1]$ intervallumot tetszőleges $[a, b]$ intervallumra képezi. Legyen most $[a, b] = [1, 9]$, ekkor

$$\varphi(x) = \frac{1+9}{2} + \frac{9-1}{2} \cdot x = 5 + 4x.$$

Ezután alkalmazzuk φ-t a kiszámított Csebisev gyökökre:

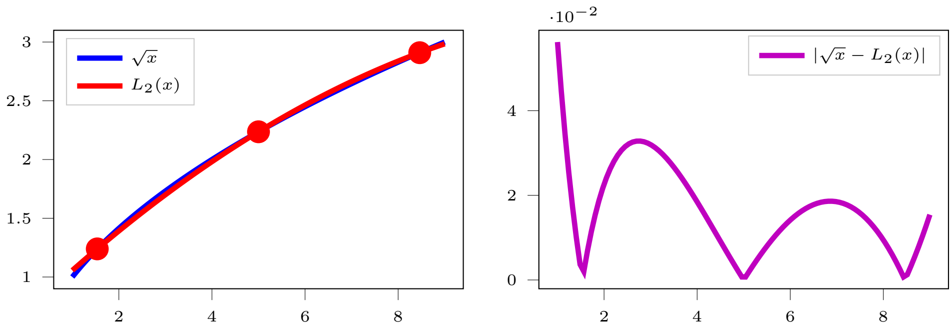
$$
\begin{aligned}
y_0 &= \varphi(x_0) = 5 + 4 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 5 + 2\sqrt{3},\\
y_1 &= \varphi(x_1) = 5,\\
y_2 &= \varphi(x_2) = 5 - 4 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 5 - 2\sqrt{3}.
\end{aligned}
$$

Most számítsuk ki az így kapott alappontokra felírt interpolációs polinom hibáját az

$$\|f - L_n\|_\infty \leq \frac{M_{n+1}}{(n+1)!} \cdot \frac{(b-a)^{n+1}}{2^{2n+1}}$$

hibaformula alapján. Mivel esetünkben $(b-a) = (9-1) = 8$, $n = 2$, M_3-at pedig korábban már meghatároztuk, ezért:

$$\|f - L_2\|_\infty \leq \frac{3}{8} \cdot \frac{1}{3!} \cdot \frac{8^3}{2^5} = \frac{1}{16} \cdot 16 = 1.$$



Érdemes észben tartani, hogy az $[a, b]$ intervallumra transzformált Csebisev gyökök a hibaformulában szereplő $\|\omega_n\|_\infty$ mennyiséget minimalizálják. Egyáltalán nem biztos, hogy a Csebisev gyökök megválasztásánál lesz az interpoláció $[a, b]$ intervallumon vett *pontos* hibája, azaz az $\|f - L_n\|_\infty$ mennyiség minimális! Az alappontok ilyen megválasztásával csak azt értük el, hogy a *hibabecslésünk* lett pontosabb.

Vegyük észre, hogy jelen példában az $x = 1$ esetén a transzformált Csebisev gyökökön interpoláló polinom hibája nagyobb, mint az $1, 4, 9$ alappontokon interpoláló polinom hibája a *teljes intervallumon*! Ez leolvasható az $1, 4, 9$ pontokon interpoláló polinom hibáját illusztráló ábráról is.