5. előadás

2020. október 5.

Az elemi függvények helyettesítési értékeinek a kiszámolása

Az analízisben (és általában a matematikában) a leggyakrabban előforduló függvények a polinomok, a racionális függvények, az exponenciális-, hatvány- és logaritmusfüggvények, a trigonometrikus függvények, a hiperbolikus függvények és az inverzeik. **Elemi függvényeknek** nevezzük azokat a függvényeket, amelyeket a fentiekből kaphatjuk meg a négy alapművelet, a kompozíció és valamely nyílt intervallumra való leszűkítés véges számú alkalmazásával.

Fontos kérdés az elemi függvények helyettesítési értékeinek „tetszőleges pontossággal" való kiszámíthatósága. Polinomok és racionális függvények helyettesítési értékei a négy alapművelet véges sokszori alkalmazásával egyszerűen számolhatók. Hatványsor összegfüggvényei polinomok sorozatának határértékei, ezért azok helyettesítési értékeit általában nem tudjuk pontosan kiszámolni. A közelítő értékeit azonban (elvileg) tetszőleges pontossággal meg tudjuk határozni a négy alapművelet véges sokszori felhasználásával.

Érdekes és fontos tény az, hogy mindegyik elemi függvényt *ki lehet fejezni* néhány „alapfüggvény" segítségével. Pontosabban igaz a következő állítás:

Mindegyik elemi függvény kifejezhető az

- $\mathbb{R} \ni x \mapsto 1$,
- $\mathbb{R} \ni x \mapsto x$,
- $\mathbb{R} \ni x \mapsto e^x$,
- $\mathbb{R} \ni x \mapsto \sin x$,
- $(0, +\infty) \ni x \mapsto \ln x$,
- $\mathbb{R} \ni x \mapsto \operatorname{arc\,tg} x$

függvényekkel a négy alapművelet, a kompozíció és valamely nyílt intervallumra való leszűkítés véges számú alkalmazásával.

Ez azt is jelenti, hogy az *összes* elemi függvény tetszőleges pontossággal való kiszámolhatóságához elég előállítani csak az utolsó négy függvényt hatványsor összegfüggvényeként. Az exp és a sin függvényekre ilyen előállítást már megismertünk. Az ln és az arc tg függvények alkalmas leszűkítéseit hamarosan elő fogjuk állítani hatványsor összegfüggvényeként.

Most felsoroljuk a fenti állítás bizonyításához alkalmazható formulákat:

- $x^\alpha = e^{\alpha \ln x} \qquad (x \in (0, +\infty),\ \alpha \in \mathbb{R})$,
- $a^x = e^{x \ln a} \qquad (x \in \mathbb{R},\ a \in (0, +\infty))$,
- $\log_a x = \dfrac{\ln x}{\ln a} \qquad (x \in (0, +\infty),\ a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\})$,
- $\operatorname{arc\,sin} x = \operatorname{arc\,tg} \dfrac{x}{\sqrt{1 - x^2}} \qquad (x \in (-1, 1))$,
- $\cos x = \sin\big(x + \dfrac{\pi}{2}\big) \qquad (x \in \mathbb{R})$,

- $\operatorname{arc}\cos x = \dfrac{\pi}{2} - \operatorname{arc}\sin x \qquad (x \in [-1, 1]),$
- $\operatorname{tg} x = \dfrac{\sin x}{\cos x} \qquad \big(x \in \mathbb{R} \setminus \big\{\frac{\pi}{2} + k\pi \mid k \in Z\big\}\big),$
- $\operatorname{ctg} x = \dfrac{\cos x}{\sin x} \qquad \big(x \in \mathbb{R} \setminus \big\{k\pi \mid k \in Z\big\}\big),$
- $\operatorname{arc}\operatorname{ctg} x = \dfrac{\pi}{2} - \operatorname{arc}\operatorname{tg} x \qquad (x \in \mathbb{R}),$
- $\operatorname{sh} x = \dfrac{e^x - e^{-x}}{2} \qquad (x \in \mathbb{R}),$
- $\operatorname{ar}\operatorname{sh} x = \ln\left(x + \sqrt{x^2+1}\right) \qquad (x \in \mathbb{R}),$
- $\operatorname{ch} x = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2} \qquad (x \in \mathbb{R}),$
- $\operatorname{ar}\operatorname{ch} x = \ln\left(x + \sqrt{x^2-1}\right) \qquad (x \in [1, +\infty)),$
- $\operatorname{th} x = \dfrac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} \qquad (x \in \mathbb{R}),$
- $\operatorname{ar}\operatorname{th} x = \dfrac{1}{2} \cdot \ln\left(\dfrac{1+x}{1-x}\right) \qquad (x \in (-1, 1)),$
- $\operatorname{cth} x = \dfrac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}} \qquad (x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}),$
- $\operatorname{ar}\operatorname{cth} x = \dfrac{1}{2} \cdot \ln\left(\dfrac{1+x}{x-1}\right) \qquad \big(x \in (-\infty, -1) \cup (1, +\infty)\big).$

A differenciálszámítás további alkalmazásai

Ezt a pontot egy technikai jellegű állításnak, nevezetesen a Lagrange-féle középértéktételnek az általánosításának a megfogalmazásával kezdjük.

Tétel. (A Cauchy-féle középértéktétel.) *Legyen $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$.*

Tegyük fel, hogy $f, g : [a,b] \to \mathbb{R}$ és

- $f, g \in C[a,b]$,
- $f, g \in D(a,b)$,
- $\forall\, x \in (a,b)$ *esetén* $g'(x) \neq 0$.

$$\Longrightarrow \quad \exists\, \xi \in (a,b), \quad \textit{hogy} \quad \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} = \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}.$$

Bizonyítás. Nélkül. ■

Ha $g(x) = x \ \big(x \in (a,b)\big)$, akkor a Lagrange-féle középértéktételt kapjuk.

L'Hospital-szabályok

Emlékeztetünk arra, hogy függvények határértékével kapcsolatban **kritikus határértékeknek** neveztük azokat az eseteket, amikor az $\overline{\mathbb{R}}$-beli műveletek és a határérték kapcsolatára vonatkozó tételek nem alkalmazhatók. Ilyenek például a következők:

$$(+\infty) + (-\infty), \quad 0 \cdot (\pm\infty), \quad \frac{0}{0}, \quad \frac{\pm\infty}{\pm\infty}, \quad 0^0.$$

Eddig azt az „elvet” követtük, hogy egy kritikus határértéket igyekeztünk nem kritikus határértékre átalakítani (például *szorzatra bontással*, *gyöktelenítéssel* vagy *kiemeléssel.*) A L'Hospital-szabályok hatékony módszerek kritikus határértékek kiszámolására.

Tétel. (L'Hospital-szabály a $\frac{0}{0}$ esetben.)

Tegyük fel, hogy $f, g \in \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *és*

- $f, g \in D(a, b)$, $\big(-\infty \le a < b < +\infty\big)$,
- $g(x) \neq 0$ *és* $g'(x) \neq 0$ $\big(x \in (a, b)\big)$,
- $\lim\limits_{a+0} f = \lim\limits_{a+0} g = 0$,
- $\exists \lim\limits_{a+0} \dfrac{f'}{g'} \in \overline{\mathbb{R}}$ *határérték.*

$$\Longrightarrow \quad \exists \lim_{a+0} \frac{f}{g} \quad \textit{és} \quad \lim_{a+0} \frac{f}{g} = \lim_{a+0} \frac{f'}{g'} \in \overline{\mathbb{R}}.$$

Bizonyítás.

$\boxed{\text{1. eset: } a > -\infty \text{ (véges).}}$ Legyen $A := \lim\limits_{a+0} \dfrac{f'}{g'} \in \overline{\mathbb{R}}$. Azt kell igazolni, hogy

$$(\#) \qquad \forall \varepsilon > 0 \text{ számhoz } \exists \delta > 0 : \ \forall x \in (a, a+\delta) \subset (a, b) \text{ esetén } \frac{f(x)}{g(x)} \in K_\varepsilon(A).$$

Az $A = \lim\limits_{a+0} \dfrac{f'}{g'} \in \overline{\mathbb{R}}$ feltétel azt jelenti, hogy

$$(*) \qquad \forall \varepsilon > 0 \text{ számhoz } \exists \delta > 0 : \ \forall y \in (a, a+\delta) \subset (a, b) \text{ esetén } \frac{f'(y)}{g'(y)} \in K_\varepsilon(A).$$

Értelmezzük az f és a g függvényt az a pontban úgy, hogy

$$f(a) := 0 \quad \text{és} \quad g(a) := 0.$$

A $\lim\limits_{a+0} f = \lim\limits_{a+0} g = 0$ feltételből következik, hogy ekkor $f, g \in C[a, a+\delta)$.

Legyen most $x \in (a, a+\delta)$ tetszőleges pont. A Cauchy-féle középértéktétel feltételei az f és a g függvényre az $[a, x]$ intervallumon teljesülnek. Így $\exists \xi_x \in (a, x)$, amelyre

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f(x) - f(a)}{g(x) - g(a)} = \frac{f'(\xi_x)}{g'(\xi_x)} \text{ (és ez } (*) \text{ miatt) } \in K_\varepsilon(A).$$

A $(\#)$ állítást tehát bebizonyítottuk. A $\lim\limits_{a+0} \dfrac{f}{g}$ határérték létezik, és $\lim\limits_{a+0} \dfrac{f}{g} = A$.

$\boxed{\text{2. eset: } a = -\infty.}$ Nem bizonyítjuk. ■

Most megfogalmazzuk a $\frac{+\infty}{+\infty}$ kritikus határértékre vonatkozó L'Hospital-szabályt.

Tétel. (L'Hospital-szabály a $\frac{\pm\infty}{+\infty}$ esetben.)

Tegyük fel, hogy $f, g \in \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *és*

$$\left.\begin{array}{l} \bullet\ f, g \in D(a,b),\ \ \big(-\infty \le a < b < +\infty\big), \\ \bullet\ g(x) \neq 0 \text{ és } g'(x) \neq 0\ \ \big(x \in (a,b)\big), \\ \bullet\ \lim\limits_{a+0} f = \lim\limits_{a+0} g = +\infty, \\ \bullet\ \exists \lim\limits_{a+0} \dfrac{f'}{g'} \in \overline{\mathbb{R}} \text{ határérték.} \end{array}\right\} \Longrightarrow \begin{array}{c} \exists \lim\limits_{a+0} \dfrac{f}{g} \quad \text{és} \\ \lim\limits_{a+0} \dfrac{f}{g} = \lim\limits_{a+0} \dfrac{f'}{g'} \in \overline{\mathbb{R}}. \end{array}$$

Bizonyítás. Nélkül. ■

Megjegyzések.

1^o A $\frac{0}{0}$ esetre vonatkozó L'Hospital-szabályt az a pontbeli **jobb oldali határértékre** fogalmaztuk meg. Hasonló állítások érvényesek (az értelemszerű módosításokkal) a **bal oldali határértékre**, valamint a (kétoldali) **határértékre**, sőt a $(+\infty)$-ben vett határértékre is (ekkor $a = +\infty$).

2^o A $\frac{\pm\infty}{-\infty}$, $\frac{-\infty}{+\infty}$, $\frac{\pm\infty}{-\infty}$ kritikus határértékekre, a bal oldali határértékre, valamint a (kétoldali) határértékre, sőt a $(+\infty)$-ben vett határértékre hasonló állítások érvényesek.

3^o A többi típusú kritikus határértéket gyakran vissza lehet vezetni $\frac{0}{0}$ vagy $\frac{\pm\infty}{\pm\infty}$ típusú határértékre.

4^o Sok esetben a L'Hospital-szabályt többször egymás után kell alkalmazni.

5^o Olyan eset is van, amikor a L'Hospital-szabály alkalmazásával soha nem kapunk nem kritikus határértéket. Tekintsük pl. a $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}$ határértéket.

Példák.

1. Ha $a > 1$ és $1 \le n \in \mathbb{N}$, akkor a L'Hospital-szabály n-szeri alkalmazásával azt kapjuk, hogy

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{a^x}{x^n} \overset{\frac{\pm\infty}{+\infty}}{=} \lim_{x\to+\infty} \frac{(\ln a)\cdot a^x}{n\cdot x^{n-1}} \overset{\frac{\pm\infty}{+\infty}}{=} \lim_{x\to+\infty} \frac{(\ln a)^2\cdot a^x}{n\cdot(n-1)\cdot x^{n-2}} \overset{\frac{\pm\infty}{+\infty}}{=} \dots \overset{\frac{\pm\infty}{+\infty}}{=}$$
$$\overset{\frac{\pm\infty}{+\infty}}{=} \lim_{x\to+\infty} \frac{(\ln a)^{n-1}\cdot a^x}{n(n-1)\cdot\ldots\cdot 2\cdot x} \overset{\frac{\pm\infty}{+\infty}}{=} \lim_{x\to+\infty} \frac{(\ln a)^n\cdot a^x}{n(n-1)\cdot\ldots\cdot 1} = +\infty.$$

Ezt úgy is kifejezhetjük, hogy *ha $a > 1$, akkor $x \to +\infty$ esetén az a^x $(x \in \mathbb{R})$ függvény gyorsabban tart $(+\infty)$-hez, mint x bármelyik pozitív kitevőjű hatványa*; és ezt szokás így is jelölni:

$$x^n \ll a^x, \quad \text{ha } x \text{ elég nagy.}$$

2. Hasonlóan, ha $1 \le m, n \in \mathbb{N}$, akkor a L'Hospital-szabály n-szeri alkalmazásával azt kapjuk, hogy

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln^n x}{x^m} \overset{\frac{\pm\infty}{+\infty}}{=} \lim_{x\to+\infty} \frac{n\cdot\ln^{n-1} x}{m\cdot x^m} \overset{\frac{\pm\infty}{+\infty}}{=} \dots \overset{\frac{\pm\infty}{+\infty}}{=} \lim_{x\to+\infty} \frac{n!}{m^n\cdot x^m} = 0,$$

azaz x *bármely pozitív kitevőjű hatványa gyorsabban tart* $(+\infty)$*-hez* $x \to +\infty$ *esetén, mint* $\ln x$ *bármely pozitív kitevőjű hatványa.* Röviden: minden $1 \le n, m \in \mathbb{N}$ esetén

$$\big(\ln x\big)^n \ll x^m, \quad \text{ha} \;\; x \;\; \text{elég nagy.}$$

3.

$$\lim_{x\to 0+0} x \cdot \ln x \overset{0\cdot(-\infty)}{=} \lim_{x\to 0+0} \frac{\ln x}{\frac{1}{x}} \overset{\frac{-\infty}{+\infty}}{=} \lim_{x\to 0+0} \frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}} = \lim_{x\to 0+0}(-x) = 0.$$

4.

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x - x}{x^3} \overset{\frac{0}{0}}{=} \lim_{x\to 0} \frac{\cos x - 1}{3x^2} \overset{\frac{0}{0}}{=} \lim_{x\to 0} \frac{-\sin x}{6x} \overset{\frac{0}{0}}{=} \lim_{x\to 0} \frac{-\cos x}{6} = -\frac{1}{6}.$$

5.

$$\lim_{x\to 0} \left(\frac{1}{\sin x} - \frac{1}{x}\right) \overset{?}{=} \lim_{x\to 0} \frac{x - \sin x}{x\,\sin x} \overset{\frac{0}{0}}{=} \lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{\sin x + x\,\cos x} \overset{\frac{0}{0}}{=}$$

$$\overset{\frac{0}{0}}{=} \lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{\cos x + \cos x - x\,\sin x} = \frac{0}{2} = 0.$$

Taylor-polinomok és Taylor-sorok

A címben jelzett fogalmak motivációjaként emlékeztetünk arra, hogy hatványsor összegfüggvényének helyettesítési értékeit (elvben) tetszőleges pontossággal meg lehet határozni csupán a négy alapművelet felhasználásával. Az exp, a sin, a cos, a sh, valamint a ch függvényt hatványsor összegfüggvényeként definiáltuk. Megmutattuk azt, hogy ezeknek bizonyos intervallumokra vonatkozó leszűkítéseik invertálhatók. A szóban forgó inverz függvények helyettesítési értékeit tetszőleges helyen a definíció alapján nem lehet kiszámolni. Ezért (is) fontos a következő kérdésfelvetés.

Probléma. *Egy adott függvényt vajon elő lehet-e állítani hatványsor összegfüggvényeként? Ha igen, akkor a függvény ismeretében hogyan lehet az együtthatókat meghatározni?*

Induljunk ki a hatványsor összegfüggvényének a tagonkénti deriválhatóságára vonatkozó tételből.

Tétel. *Legyen* $a \in \mathbb{R}$ *és* $\alpha_n \in \mathbb{R}$ $(n = 0, 1, \ldots)$*. Tegyük fel, hogy a*

$$\sum_{n=0} \alpha_n (x-a)^n \qquad (x \in \mathbb{R})$$

hatványsor R *konvergenciasugara pozitív, és jelölje* f *az összegfüggvényét:*

$$f(x) := \sum_{n=0}^{+\infty} \alpha_n (x-a)^n \qquad \big(x \in K_R(a)\big).$$

Ekkor minden $x \in K_R(a)$ *pontban* $f \in D\{x\}$ *és*

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} n\alpha_n (x-a)^{n-1} \qquad \big(\forall\, x \in K_R(a)\big).$$

Az f' deriváltfüggvény is egy hatványsor összegfüggvénye, ezért a fenti tétel alapján f' is deriválható, vagyis f kétszer deriválható. Világos, hogy f''-re mindaz elmondható, ami f'-re. Ebben az esetben $f'' \in D^2$. Ezt a gondolatmenetet folytatva kapjuk azt, hogy minden $n = 1, 2, \ldots$ esetén az f függvény n-szer deriválható, amit úgy fejeztünk ki, hogy f végtelen sokszor (vagy akárhányszor) deriválható. Ennek jelölésére az $f \in D^\infty$ szimbólumot vezettük be. Teljes indukcióval igazolható az alábbi állítás.

Tétel. *Legyen $a \in \mathbb{R}$ és $\alpha_k \in \mathbb{R}$ $(k = 0, 1, \ldots)$. Tegyük fel, hogy a $\sum_{k=0} \alpha_k (x-a)^k$ $(x \in \mathbb{R})$ hatványsor R konvergenciasugara pozitív, és jelölje f az összegfüggvényét. Ekkor minden $x \in K_R(a)$ pontban $f \in D^\infty\{x\}$ és minden $n = 1, 2, \ldots$ esetén*

$$f^{(n)}(x) = \sum_{k=n}^{+\infty} k(k-1)\cdots(k-n+1)\alpha_k(x-a)^{k-n} \qquad \big(\forall\, x \in K_R(a)\big).$$

Ha $x = a$, akkor

$$(*) \qquad \boxed{\alpha_n = \frac{f^{(n)}(a)}{n!} \quad (n \in \mathbb{N}).}$$

A tétel tehát azt is állítja, hogy egy hatványsor együtthatói és az összegfüggvénye között a $(*)$ alatti kapcsolat áll fenn. Ebből a formulából kiindulva minden $f \in D^\infty$ függvényhez egy hatványsort rendelünk.

Definíciók. 1^o *Ha $f \in D^\infty\{a\}$, akkor a*

$$T_a(f, x) := f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \cdots + \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k + \cdots =$$
$$= \sum_{k=0} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k \qquad (x \in \mathbb{R})$$

hatványsort az f ***függvény*** *$a \in \operatorname{int} \mathcal{D}_f$* ***ponthoz tartozó Taylor-sorának*** *nevezzük. (Az $a = 0$ esetben használatos a* ***Maclaurin-sor*** *elnevezés is.)*

2^o *Ha $n \in \mathbb{N}$ és $f \in D^n\{a\}$, akkor a Taylor-sor n-edik részletösszegét, vagyis a*

$$T_{a,n}(f, x) := f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n =$$
$$= \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k \qquad (x \in \mathbb{R})$$

polinomot az f ***függvény*** *$a \in \operatorname{int} \mathcal{D}_f$* ***ponthoz tartozó n-edik Taylor-polinomjának*** *nevezzük.*

Az előző tételben megfogalmazott állítás - a most bevezetett szóhasználattal élve - pontosan azt jelenti, hogy **minden konvergens hatványsor az összegfüggvényének a Taylor-sorával egyenlő**. Ezek szerint, ha egy f függvény előállítható konvergens hatványsor összegfüggvényeként, akkor a szóban forgó sor szükségképpen f Taylor-sora. *Mivel az* $\exp, \sin, \cos, \operatorname{sh}, \operatorname{ch}$

függvények végtelen sokszor deriválhatók $\mathbb{R}$-en, ezért a definícióikban megadott hatványsorok a szóban forgó függvények $a=0$ ponthoz tartozó Taylor-sorai.

Megjegyzés. Egy f függvény a-hoz tartozó Taylor-sorának a felírásához ismernünk kell az *összes* magasabb rendű deriváltat, vagyis minden $n \in \mathbb{N}$ számra az $f^{(n)}(a)$ függvényértékeket. Ezek meghatározása általában nem egyszerű feladat. Néhány esetben a szóban forgó függvényértékeket könnyen ki lehet számolni, és segítségükkel lényegesen kibővíthető azoknak a függvényeknek az osztálya, amelyekre a Taylor-sort fel tudjuk írni. Például a $\sin^2 x = \frac{1-\cos 2x}{2}$ $(x \in \mathbb{R})$ azonosság és a sin, valamint a cos függvény definíciója alapján egyszerűen megkapjuk a $\sin^2$ függvény $a=0$ ponthoz tartozó Taylorsorát. $\square$

Természetes módon vethetők fel a következő kérdések.

A sorfejtés problémája. Legyen $f \in D^{\infty}\{a\}$ egy adott függvény.

1^o **A konvergencia problémája**: Hol konvergens a $T_a(f)$ Taylor-sor?

2^o **Az előállítás problémája**: Ha a Taylor-sor konvergens egy $I \subset \mathbb{R}$ intervallumon, akkor vajon fennáll-e az

$$f(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k \qquad (x \in I)$$

egyenlőség? Ha ez igaz, akkor azt mondjuk, hogy *a Taylor-sor előállítja f-et az I intervallumon.*

A sorfejtés problémáját néhány függvénynél „egyedi eszközökkel” vizsgálhatjuk. Ennek illusztrálására mutatunk most példákat.

1. példa. *Legyen*

$$f(x) := \frac{1}{1+x} \quad \big(x \in (-1,+\infty)\big).$$

Állítsuk elő az f függvény $a=0$ ponthoz tartozó Taylor-sorát, és vizsgáljuk az előállítás problémáját.

Megoldás.

A Taylor-sor előállítása. Világos, hogy $f \in D\big(-1,+\infty\big)$. Most a magasabb rendű deriváltak egyszerűen meghatározhatók. Teljes indukcióval igazolható, hogy

$$f^{(n)}(x) = (-1)^n n!(1+x)^{-n-1} \;\; (x > -1), \qquad \text{és} \qquad f^{(n)}(0) = (-1)^n n! \;\; (n = 1, 2, \ldots).$$

A keresett Taylor-sor tehát

$$T_0(f,x) = \sum_{n=0} \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n = \sum_{n=0}(-1)^n x^n = 1 - x + x^2 - x^3 + x^4 - \cdots \qquad (x \in \mathbb{R}),$$

és ez a $(-x)$ hányadosú geometriai sor.

A sorfejtés problémája. A fenti geometriai sor (vagyis a $T_0(f,x)$ Taylor-sor) pontosan akkor konvergens, ha $|x| < 1$, és ekkor az összege:

$$\frac{1}{1-(-x)} = 1 - x + x^2 - x^3 + x^4 - \cdots \qquad (|x| < 1).$$

A Taylor-sor konvergenciahalmaza tehát a $(-1,1)$ intervallum, és az összegfüggvénye ezen az intervallumon az f függvénnyel egyenlő.

Azt kaptuk tehát, hogy a $(-1,+\infty)$ intervallumon értelmezett f függvényt a 0 ponthoz tartozó Taylor-sora a $(-1,1)$ intervallumon (és csak ezen!) állítja elő, azaz

$$f(x)=\frac{1}{1+x}=1-x+x^2-x^3+x^4-\cdots \qquad \big(x\in(-1,1)\big).\ \blacksquare$$

2. példa. *Határozzuk meg az*

$$f(x):=\ln(1+x) \qquad \big(x\in(-1,+\infty)\big).$$

f függvény $a=0$ ponthoz tartozó Taylor-sorát, és vizsgáljuk az előállítás problémáját.

Megoldás. Világos, hogy $f\in D^\infty\big(-1,+\infty\big)$, és teljes indukcióval igazolható, hogy minden $1\le n\in\mathbb{N}$ esetén

$$f^{(n)}(x)=(-1)^{n+1}\cdot(n-1)!\cdot(1+x)^{-n},\quad \text{ezért}\quad f(0)=0,\quad f^{(n)}(0)=(-1)^{n+1}\cdot(n-1)!\,,$$

így az f függvény 0 ponthoz tartozó Taylor-sora:

$$T_0(f,x)=\sum_{n=0}\frac{f^{(n)}(0)}{n!}\cdot x^n=\sum_{n=1}(-1)^{n+1}\cdot\frac{x^n}{n}=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+\cdots \qquad (x\in\mathbb{R}),$$

konvergenciahalmaza a $(-1,1]$ intervallum.
Az előállítás problémája. Jelöljük g-vel a Taylor-sor összegfüggvényét:

$$g(x):=\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n+1}\cdot\frac{x^n}{n}=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+\cdots \qquad \big(x\in(-1,1]\big).$$

A hatványsor tagonkénti deriválására vonatkozó tétel szerint $g\in D(-1,1)$ és

$$g'(x)=\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n+1}\cdot n\cdot\frac{x^{n-1}}{n}=\sum_{n=0}^{+\infty}(-x)^n=1-x+x^2-x^3+\cdots \qquad \big(x\in(-1,1)\big).$$

Ez $(-x)$ hányadosú geometriai sor, ezért a konvergenciahalmaza a $(-1,1)$ intervallum, és az összege $\dfrac{1}{1-(-x)}=\dfrac{1}{1+x}$, így

$$g'(x)=\frac{1}{1+x}\quad \big(x\in(-1,1)\big).$$

Mivel $f'(x)=\dfrac{1}{1+x}$ $(x>-1)$, ezért $f'(x)=g'(x)$ minden $x\in(-1,1)$ pontban. A deriváltak egyenlőségére vonatkozó tételből következik, hogy van olyan $c\in\mathbb{R}$ állandó, hogy

$$f(x)-g(x)=c\quad \big(x\in(-1,1)\big).$$

Ugyanakkor $f(0) - g(0) = 0$, így $c = 0$. Bebizonyítottuk tehát azt, hogy

$$f(x) = \ln(1+x) = \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n+1} \frac{x^n}{n}, \quad \text{ha} \ \ x \in (-1,1).$$

Azt is meg lehet mutatni, hogy ez az egyenlőség az $x = 1$ pontban is fennáll, ezért igaz a következő egyenlőség:

$$\boxed{\ln(1+x) = \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n+1} \frac{x^n}{n} = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \cdots, \quad \big(x \in (-1,1]\big).}$$

Ebből az $x = 1$ helyettesítéssel azt kapjuk, hogy

$$\boxed{\ln 2 = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots.}$$

Az Analízis I. tantárgyban ennek a sornak a konvergenciáját már beláttuk (Leibniz-sorról van szó), és most már a sor összegét is megismertük. ■

3. példa. Az $\operatorname{arc\,tg}$ **függvény** 0 **pont körüli Taylor-sorának** az előállítása a definíció alapján nem egyszerű feladat, mert a magasabb rendű deriváltak (az előző két példával ellentétben) kiszámolása jóval bonyolultabb.

Most a következő **ötlet** lesz célravezető: *tekintsük a függvény deriváltját*:

$$\operatorname{arc\,tg}' x = \frac{1}{1+x^2} \quad (x \in \mathbb{R}),$$

valamint az

$$\frac{1}{1+x^2} = \frac{1}{1-(-x^2)} = 1 - x^2 + x^4 - x^6 + x^8 - \cdots \quad \big(|-x^2| < 1, \ \text{azaz} \ |x| < 1\big)$$

képletet (a $(-x^2)$ hányadosú geometriai sorról van szó).

Vegyük észre továbbá azt is, hogy

$$\left(x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \frac{x^9}{9} - \cdots\right)' = 1 - x^2 + x^4 - x^6 + x^8 - \cdots \quad \big(|x| < 1\big).$$

Legyen

$$g(x) := x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \frac{x^9}{9} - \cdots \quad \big(|x| < 1\big).$$

Az előző feladatban alkalmazott gondolatmenetet követve azt kapjuk, hogy $g(x) = \operatorname{arc\,tg} x$, ha $x \in (-1,1)$. Meg lehet mutatni azt is, hogy hogy ez az egyenlőség az $x = \pm 1$ pontokban is fennáll.

Így az $\operatorname{arc\,tg}$ függvény 0 pont körüli Taylor-sora:

$$T_0(\operatorname{arc\,tg}, x) = \sum_{n=1} (-1)^{n-1} \frac{x^{2n-1}}{2n-1} \quad (x \in \mathbb{R}),$$

a Taylor-sor konvergenciahalmaza a $[-1,1]$ intervallum, továbbá a Taylor sor a $[-1,1]$ intervallumon állítja elő a függvényt:

$$\boxed{\operatorname{arc\,tg} x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \frac{x^9}{9} - \cdots = \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^{2n-1}}{2n-1}, \quad \text{ha} \ \ x \in [-1,1].}$$

Ebből az $x = 1$ helyettesítéssel azt kapjuk, hogy

$$\boxed{\operatorname{arc\,tg} 1 = \frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \cdots = \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n-1} \frac{1}{2n-1}.}$$

Megjegyzések:

1. A fenti képletek alapján az $\operatorname{arc\,tg} x$ $(|x| \le 1)$ és a π értékei tetszőleges pontossággal számolhatók. A részletek ismertetése nélkül megjegyezzük, hogy az $\operatorname{arc\,tg} x$ értékeinek közelítő kiszámolásához az $|x| > 1$ esetben további meggondolások szükségesek.

2. Az $\operatorname{arc\,tg}^{(n)}(0)$ kiszámolása.

4. példa. Legyen

$$f(x) := \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}}, & \text{ha } x \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \\ 0, & \text{ha } x = 0. \end{cases}$$

Bebizonyítható, hogy $f \in D^{\infty}(\mathbb{R})$ és $f^{(n)}(0) = 0$ $(n \in \mathbb{N})$. Ebből következik, hogy f Taylor-sorának minden együtthatója 0, ezért az mindenütt konvergens, és az összegfüggvénye az azonosan 0 függvény, amely nyilván nem egyenlő f-fel. Tehát van olyan függvény, amelyik Taylor-sorának konvergenciasugara végtelen, de csak egy pontban (a középpontban) állítja elő a függvényt.

5. példa. Bonyolult konstrukcióval lehet példát adni olyan akárhányszor deriválható f függvényre, amelynek *bármely* a ponthoz tartozó Taylor-sora az a ponton kívül sehol sem konvergens.

A sorfejtés problémájának a vizsgálatához az általános esetben az

$$f(x) - T_{a,n}(f,x)$$

különbséget kell tekinteni. A következő tételben ezt egy jól kezelhető alakban állítjuk elő.

Tétel. (Taylor-formula.) *Legyen $n \in \mathbb{N}$, és tegyük fel, hogy $f \in D^{n+1}\big(K(a)\big)$. Ekkor*

$$\forall\, x \in K(a) \ \ \textit{ponthoz} \ \ \exists\, \xi \ \ a \ \textit{és} \ x \ \textit{között}:$$

$$f(x) - T_{a,n}(f,x) = f(x) - \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}.$$

A fenti képlet jobb oldalán álló függvényt **Lagrange-féle maradéktagnak** nevezzük.

Bizonyítás. A Cauchy-féle középértéktételt fogjuk felhasználni.

Legyen

$$F(x) := f(x) - T_{a,n}(f,x) = f(x) - \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k =$$
$$= f(x) - \Big(f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f^{(2)}(a)}{2!}(x-a)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n\Big) \qquad \big(x \in K(a)\big).$$

Ekkor

$$\begin{aligned}
F(a) &= f(a) - f(a) = 0,\\
F'(a) &= f'(a) - f'(a) = 0,\\
F''(a) &= f''(a) - \frac{f^{(2)}(a)}{2!} \cdot 2 \cdot 1 = f''(a) - f''(a) = 0,\\
&\vdots\\
F^{(n)}(a) &= 0,\\
F^{(n+1)}(x) &= f^{(n+1)}(x) \quad \big(x \in K(a)\big).
\end{aligned}$$

Legyen tetszőleges $x \in K(a)$ esetén

$$\begin{aligned}
G(x) &:= (x-a)^{n+1} && \Longrightarrow \quad G(a) = 0,\\
G'(x) &= (n+1)(x-a)^n && \Longrightarrow \quad G'(a) = 0,\\
G''(x) &= (n+1)n(x-a)^{n-1} && \Longrightarrow \quad G''(a) = 0,\\
&\vdots && \qquad\qquad \vdots\\
G^{(n)}(x) &= (n+1)!(x-a) && \Longrightarrow \quad G^{(n)}(a) = 0,\\
G^{(n+1)}(x) &= (n+1)!
\end{aligned}$$

Tegyük fel, hogy $x \in K(a)$ és például $x > a$. (Az $x < a$ eset hasonlóan vizsgálható.) Az F és a G függvényekre az $[a,x]$ intervallumon alkalmazható a Cauchy-féle középértéktétel, következésképpen

$$\exists\, \xi_1 \in (a,x): \quad \frac{f(x) - T_{a,n}(f,x)}{(x-a)^{n+1}} = \frac{F(x)}{G(x)} = \frac{F(x) - F(a)}{G(x) - G(a)} = \frac{F'(\xi_1)}{G'(\xi_1)}.$$

A Cauchy-féle középértéktételt most az F' és a G' függvényekre az $[a,\xi_1]$ intervallumon alkalmazzuk:

$$\exists\, \xi_2 \in (a,\xi_1): \quad \frac{F'(\xi_1)}{G'(\xi_1)} = \frac{F'(\xi_1) - F'(a)}{G'(\xi_1) - G'(a)} = \frac{F''(\xi_2)}{G''(\xi_2)}.$$

A fenti gondolatmenetet n-szer megismételve adódik, hogy

$$\exists\, \xi_{n+1} \in (a,\xi_n): \quad \frac{F^{(n)}(\xi_n)}{G^{(n)}(\xi_n)} = \frac{F^{(n)}(\xi_n) - F^{(n)}(a)}{G^{(n)}(\xi_n) - G^{(n)}(a)} = \frac{F^{(n+1)}(\xi_{n+1})}{G^{(n+1)}(\xi_{n+1})}.$$

A bizonyítás során kapott egyenlőségeket egybevetve azt kapjuk, hogy

$$\frac{f(x) - T_{a,n}(f,x)}{(x-a)^{n+1}} = \frac{F(x)}{G(x)} = \frac{F'(\xi_1)}{G'(\xi_1)} = \frac{F''(\xi_2)}{G''(\xi_2)} = \cdots = \frac{F^{(n)}(\xi_n)}{G^{(n)}(\xi_n)} = \frac{F^{(n+1)}(\xi_{n+1})}{G^{(n+1)}(\xi_{n+1})},$$

ahonnan $F^{(n+1)} = f^{(n+1)} - T_{a,n}^{(n+1)} f = f^{(n+1)}$ és $G^{(n+1)} = (n+1)!$ figyelembevételével azt kapjuk, hogy

$$\frac{f(x) - T_{a,n}(f,x)}{(x-a)^{n+1}} = \frac{f^{(n+1)}(\xi_{n+1})}{(n+1)!}$$

A konstrukcióból látható, hogy ξ_{n+1} az a pont és x köyött van, ezért a $\xi := \xi_{n+1}$ választással a bizonyítandó állítást kapjuk. ■

Függvények egy fontos osztályára igaz, hogy egy rögzített a helyhez tartozó Taylor-polinomok sorozata egy $K(a)$ környezet bármely x helyén $f(x)$-hez tart, ha $n \to +\infty$. Az egyik legegyszerűbb, de fontos ilyen jellegű tétel a következő.

Tétel. (Elégséges feltétel az előállításra.) *Legyen $f \in D^{\infty}\big(K(a)\big)$, és tegyük fel, hogy*

$$\exists\, M > 0 \;\; \textit{valós szám}: \;\; \big|f^{(n)}(x)\big| \le M \quad \big(\forall\, x \in K(a),\ \forall\, n \in \mathbb{N}\big).$$

Ekkor f-nek az a ponthoz tartozó Taylor-sora a $K(a)$ halmazon előállítja az f függvényt, vagyis fennáll az

$$f(x) = \lim_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k \qquad \big(x \in K(a)\big)$$

egyenlőség.

Bizonyítás. Legyen $x \in K(a)$ egy tetszőleges pont. Ekkor az előző tétel alapján létezik olyan ξ pont a és x között, hogy

$$\left|f(x) - \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k\right| = \left|\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}\right| \le M \cdot \frac{|x-a|^{n+1}}{(n+1)!}.$$

Ebből a tétel állítása már következik, mert

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{(x-a)^{n+1}}{(n+1)!} = 0. \;\blacksquare$$