12. gyakorlat
Többváltozós analízis 3.

$\boxed{5.}$ $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ függvények (feltétel nélküli) szélsőértékei

Emlékeztető. A **lokális szélsőértékekre** az előző gyakorlaton oldottunk meg feladatokat.

Abszolút szélsőértékek

Az a megfigyelés, hogy a lokális szélsőértékhelyeken a függvény deriváltja eltűnik (feltéve, hogy létezik), lehetővé tette olyan f **egyváltozós függvény abszolút szélsőértékei**nek meghatározását, amelyik *folytonos egy korlátos és zárt $[a, b]$ intervallumban*, és differenciálható annak (a, b) belsejében. Ekkor ui. f-nek van legnagyobb és legkisebb értéke a *Weierstrass-tétel* szerint. Ha f ezek valamelyikét egy c pontban veszi fel, akkor vagy $c = a$, vagy $c = b$, vagy pedig $c \in (a, b)$. Ez utóbbi esetben lokális szélsőértékről van szó, és így $f'(c) = 0$. Ha tehát megkeressük az összes olyan $c \in (a, b)$ pontot, amelyben f' eltűnik, akkor biztos, hogy az abszolút szélsőértékhelyek ezek közül, valamint az a és a b végpontok közül kerülnek ki. Például az abszolút maximumhelyet úgy határozzuk meg, hogy kiszámítjuk f értékeit ezekben a pontokban (nem feledkezve meg az a és b végpontokról sem), és kiválasztjuk azokat, amelyekben f értéke a legnagyobb.

Ezt a gondolatmenetet könnyen általánosíthatjuk többváltozós függvényekre.

Tétel. *Legyen $H \subset \mathbb{R}^n$ korlátos és zárt halmaz. Tegyük fel, hogy az $f : H \to \mathbb{R}$ függvény folytonos és léteznek a parciális deriváltjai H belsejének minden pontjában. Ekkor f a legnagyobb (legkisebb) értékét vagy a H halmaz határán veszi fel, vagy pedig egy olyan $a \in \operatorname{int} \mathcal{D}_f$ belső pontban, ahol $\partial_i f(a) = 0$ teljesül minden $i = 1, 2, \ldots, n$ indexre.* $\square$

1. feladat. *Határozza meg az*

$$f(x, y) := x^3 - 12x + y^3 - 3y \qquad \big((x, y) \in \mathbb{R}^2\big)$$

függvénynek

(a) *a lokális szélsőértékhelyeit és a lokális szélsőértékeit,*

(b) *az abszolút szélsőértékhelyeit és az abszolút szélsőértékeit a*

$$H := \big\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid -2 \leq x \leq 3, \quad -x \leq y \leq 2\big\}$$

halmazon.

Megoldás. (a) Az f függvény kétszer deriválható $\mathbb{R}^2$-ön.

Elsőrendű szükséges feltétel. Mivel

$$\left.\begin{array}{rcrcl} \partial_x f(x, y) & = & 3x^2 - 12 & = & 0 \\ \partial_y f(x, y) & = & 3y^2 - 3 & = & 0 \end{array}\right\} \Longrightarrow x = \pm 2 \text{ és } y = \pm 1,$$

ezért f stacionárius pontjai, vagyis a lehetséges lokális szélsőértékhelyek:

$$P_1(-2, -1), \quad P_2(-2, 1), \quad P_3(2, -1), \quad P_4(2, 1).$$

Másodrendű elégséges feltétel. Az $f''(x, y)$ Hesse-féle mátrix egy $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ pontban a

$$\partial_{xx} f(x, y) = 6x, \quad \partial_{xy} f(x, y) = 0 = \partial_{yx} f(x, y), \quad \partial_{yy} f(x, y) = 6y$$

képletek alapján

$$f''(x,y)=\begin{pmatrix}\partial_{xx}f(x,y) & \partial_{xy}f(x,y)\\ \partial_{yx}f(x,y) & \partial_{yy}f(x,y)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}6x & 0\\ 0 & 6y\end{pmatrix},$$

$$D_1=6x,\quad D_2=\det f''(x,y)=36xy.$$

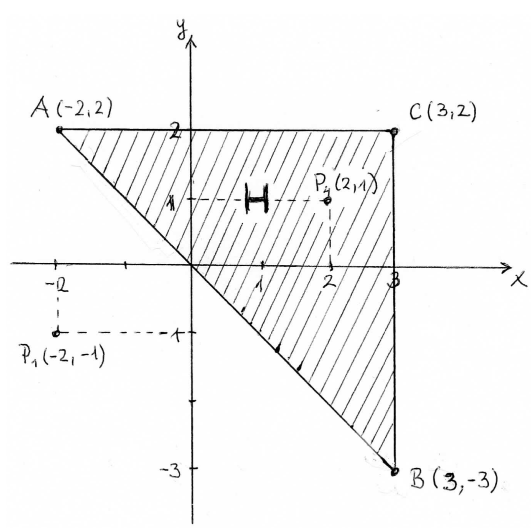
A $P_1(-2,-1)$ pontban $f''(-2,-1)=\begin{pmatrix}-12 & 0\\ 0 & -6\end{pmatrix}$, $D_1=-12<0$, $D_2=72>0 \implies$ az $f''(-2,-1)$ mátrix negatív definit $\implies$
$P_1(-2,-1)$ lokális maximumhely, *$f(-2,-1)=18$ lokális maximum.*

A $P_2(-2,1)$ pontban $f''(-2,1)=\begin{pmatrix}-12 & 0\\ 0 & 6\end{pmatrix}$, $D_2=-72<0 \implies$ az $f''(-2,1)$ mátrix indefinit $\implies$ a $P_2(-2,1)$ pontban *nincs lokális szélsőérték.*

A $P_3(2,-1)$ pontban $f''(2,-1)=\begin{pmatrix}12 & 0\\ 0 & -6\end{pmatrix}$, $D_2=-72<0 \implies$ az $f''(2,-1)$ mátrix indefinit $\implies$ a $P_3(2,-1)$ pontban *nincs lokális szélsőérték.*

A $P_4(2,1)$ pontban $f''(2,1)=\begin{pmatrix}12 & 0\\ 0 & 6\end{pmatrix}$, $D_1=12>0$, $D_2=72>0 \implies$ az $f''(2,1)$ mátrix pozitív definit $\implies$
$P_4(2,1)$ lokális minimumhely, *$f(2,1)=-18$ lokális minimum.*

(b) Szemléltessük a H halmazt és a P_1,P_4 lokális szélsőértékhelyeket:



A H halmaz az $A(-2,2)$, $B(3,-3)$ és $C(3,2)$ csúcspontú korlátos és zárt háromszöglap. Az f függvény folytonos H-n, ezért Weierstrass tétele alapján a függvénynek a H-n felvett értékei között van legnagyobb és van legkisebb érték.

Az abszolút szélsőértékhelyek vagy a H halmaz belső pontjaiban (ekkor azok egyúttal lokális szélsőértékhelyek is), vagy pedig a H halmaz határán lehetnek.

Mivel $P_1(-2,-1) \notin H$ és $P_4(2,1) \in \operatorname{int} H$ lokális minimumhely, ezért $P_4(2,1)$ lehet az f függvénynek (egy) abszolút minimumhelye. Az itt felvett függvényérték:

$$f(2,1) = -18.$$

Most megvizsgáljuk az f függvény H határán felvett helyettesítési értékeit. A H halmaz határa három szakaszra bontható.

<u>Az AB szakaszon</u> a $g_1(x) := f(x,-x) = -9x$ $\big(x \in [-2,3]\big)$ függvény abszolút minimuma $g_1(3) = -27$, abszolút maximuma $g_1(-2) = 18$, ezért az f függvény az AB szakaszon a $B(3,-3)$, illetve az $A(-2,2)$ pontban veszi fel a legkisebb, illetve legnagyobb értékét, és

$$f(3,-3) = -27, \quad \text{illetve} \quad f(-2,2) = 18.$$

<u>A BC szakaszon</u> $f(3,y) = y^3 - 3y - 9 =: g_2(y)$ $\big(y \in [-3,2]\big)$. Mivel

$$g_2'(y) = 3y^2 - 3 = 0 \implies y = \pm 1; \;\; g_2''(y) = 6y \implies$$
$$\implies g_2(-1) = -7 \;\; \text{lokális maximum}, \quad g_2(1) = -11 \;\; \text{lokális minimum},$$

továbbá $g_2(-3) = -27$ és $g_2(2) = -7$, ezért az f függvény a BC szakaszon a $B(3,-3)$, illetve a $(3,-1)$ és a $C(3,2)$ pontokban veszi fel a legkisebb, illetve legnagyobb értékét, és

$$f(3,-3) = -27, \quad \text{illetve} \quad f(3,-1) = f(3,2) = -7.$$

<u>Az AC szakaszon</u> $f(x,2) = x^3 - 12x + 2 =: g_3(x)$ $\big(x \in [-2,3]\big)$. Mivel

$$g_3'(x) = 3x^2 - 12 = 0 \implies x = \pm 2; \;\; g_3''(x) = 6x \implies$$
$$\implies g_3(2) = -14 \;\; \text{lokális minimum},$$

továbbá $g_3(-2) = 18$ és $g_3(3) = -7$, ezért az f függvény a AC szakaszon a $(2,2)$, illetve az $A(-2,2)$ pontban veszi fel a legkisebb, illetve legnagyobb értékét, és

$$f(2,2) = -14, \quad \text{illetve} \quad f(-2,2) = 18.$$

Összefoglalva: A kapott értékeket összehasonlítva kapjuk, hogy a H halmazon az f függvény abszolút maximumhelye az $A(-2,2)$ pont és az abszolút maximuma $f(-2,2) = 18$, abszolút minimumhelye a $B(3,-3)$ pont és az abszolút minimuma $f(3,-3) = -27$, azaz

$$\boxed{\min_{(x,y)\in H} f(x,y) = f(3,-3) = -27}, \qquad \boxed{\max_{(x,y)\in H} f(x,y) = f(-2,2) = 18}. \;\blacksquare$$

$\boxed{6.}$ $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ függvények feltételes szélsőértékei

Emlékeztető.

Feladat: Adott:
- $U \subset \mathbb{R}^2$ nyílt halmaz,
- $f : U \to \mathbb{R}$ (célfüggvény),
- $g : U \to \mathbb{R}$ (feltételfüggvény),

$$H_g := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid g(x, y) = 0\} \neq \emptyset.$$

Keressük az f függvény szélsőértékeit a H_g halmazon, azaz határozzuk meg az $f_{|H_g}$ függvény szélsőértékeit.

A 11. előadáson megismertük a **feltételes lokális szélsőértékek definícióit**. Arról is volt szó, hogy a feltételes szélsőértékek vizsgálatára alkalmazható módszer kitalálója *Joseph Louis Lagrange* (1736–1813) francia matematikus. Ezért a szóban forgó módszert **Lagrange-szorzók** (vagy **Lagrange-féle multiplikátorok**) **módszerének** nevezzük.

Szükséges feltétel a feltételes lokális szélsőértékre. *Tegyük fel, hogy*

(a) *$U \subset \mathbb{R}^2$ nyílt halmaz és az $f, g : U \to \mathbb{R}$ függvényeknek léteznek a parciális deriváltjaik és ezek folytonosak az U halmazon;*

(b) *az $(x_0, y_0) \in U$ pontban az f függvénynek a $g = 0$ feltételre vonatkozóan feltételes lokális szélsőértéke van;*

(c) $g'(x_0, y_0) = \big(\partial_1 g(x_0, y_0), \partial_2 g(x_0, y_0)\big) \neq (0, 0)$.

*Ekkor van olyan $\lambda \in \mathbb{R}$ valós szám (ezt **Lagrange-szorzónak** szokás nevezni), hogy az*

$$\mathcal{L}(x, y) := f(x, y) + \lambda g(x, y) \qquad \big((x, y) \in U\big)$$

***Lagrange-függvénynek** (x_0, y_0) stacionárius pontja, azaz*

$$\mathcal{L}'(x_0, y_0) = \big(\partial_x \mathcal{L}(x_0, y_0), \partial_y \mathcal{L}(x_0, y_0)\big) = (0, 0).$$

Másodrendű elégséges feltétel a feltételes lokális szélsőértékre. *Tegyük fel, hogy*

(a) *$U \subset \mathbb{R}^2$ nyílt halmaz és az $f, g : U \to \mathbb{R}$ függvényeknek léteznek a másodrendű parciális deriváltjaik és ezek folytonosak az U halmazon;*

(b) *az $(x_0, y_0) \in U$ pontban a $\lambda_0 \in \mathbb{R}$ számmal teljesül a szükséges feltétel.*

Tekintsük ezzel a λ_0 számmal az

$$\mathcal{L}(x, y) := f(x, y) + \lambda_0 g(x, y) \qquad \big((x, y) \in U\big)$$

Lagrange-függvényt. Legyen

$$D(x_0, y_0; \lambda_0) := \det \begin{bmatrix} 0 & \partial_1 g(x_0, y_0) & \partial_2 g(x_0, y_0) \\ \partial_1 g(x_0, y_0) & \partial_{11} \mathcal{L}(x_0, y_0) & \partial_{12} \mathcal{L}(x_0, y_0) \\ \partial_2 g(x_0, y_0) & \partial_{21} \mathcal{L}(x_0, y_0) & \partial_{22} \mathcal{L}(x_0, y_0) \end{bmatrix}$$

*(a mátrixot **kibővített Hesse-mátrixnak** szokás nevezni).*

Ekkor,

1^o *ha $D(x_0, y_0; \lambda_0) > 0 \Longrightarrow (x_0, y_0)$ feltételes lokális **maximumhely**,*

2^o *ha $D(x_0, y_0; \lambda_0) < 0 \Longrightarrow (x_0, y_0)$ feltételes lokális **minimumhely**.* $\square$

2. feladat. *Határozza meg az* $f(x,y) := x^2 + y^2$ $\big((x,y) \in \mathbb{R}^2\big)$ *függvény feltételes lokális minimumhelyeit a* $g(x,y) = x + 2y - 4 = 0$ *feltételre vonatkozóan.*

(a) *Mi a feladat geometriai tartalma?*

(b) *Oldja meg a feladatot úgy, hogy a korlátozó feltételből* y *kifejezésével visszavezeti egyváltozós szélsőérték-problémára.*

(c) *Oldja meg a feladatot a Lagrange-szorzók módszerével.*

Megoldás.

(a) Mivel az egyenes egy (x, y) pontjának az origótól vett távolsága $\sqrt{x^2+y^2}$, ezért a feladat az egyenes origóhoz legközelebbi pontjának a meghatározása.

(b) A $g(x,y) = x + 2y - 4 = 0$ egyenletből $y = -\frac{1}{2}x + 2$ adódik. Ezért a feladat a

$$h(x) := f\big(x, -\tfrac{1}{2}x + 2\big) = x^2 + \big(-\tfrac{1}{2}x + 2\big)^2 = \tfrac{5}{4}x^2 - 2x + 4 \quad (x \in \mathbb{R})$$

valós-valós függvény lokális minimumhelyeinek a megkeresése. Mivel

$$h'(x) = \frac{5}{2}x - 2 = 0 \quad \Rightarrow \quad x_0 = \frac{4}{5} \;\text{ és } h''(x_0) = \frac{5}{2} > 0,$$

ezért x_0 a h másodfokú polinomnak egyetlen lokális minimumhelye. Következésképpen az $(x_0, y_0) = \big(\frac{4}{5}, \frac{8}{5}\big)$ pont az f függvénynek a $g = 0$ feltételre vonatkozó <u>egyetlen feltételes lokális minimumhelye</u>.

(c) A feltételes lokális szélsőértékre vonatkozó tételeket alkalmazzuk.

<u>*A szükséges feltétel*</u>: A szóban forgó tétel feltételei teljesülnek, mert

$$f, g \in C^1\big(\mathbb{R}^2\big) \text{ és } g'(x,y) = \big(\partial_1 g(x,y), \partial_2 g(x,y)\big) = (1,2) \neq \big(0,0\big) \quad \big(\forall\,(x,y) \in \mathbb{R}^2\big).$$

A Lagrange-függvény:

$$\mathcal{L}(x,y) = f(x,y) + \lambda g(x,y) = x^2 + y^2 + \lambda(x + 2y - 4) \quad \big((x,y) \in \mathbb{R}^2\big).$$

A lehetséges lokális szélsőértékhelyek az

$$\begin{aligned} \partial_1 \mathcal{L}(x,y) &= 2x + \lambda &&= 0 \\ \partial_2 \mathcal{L}(x,y) &= 2y + 2\lambda &&= 0 \\ g(x,y) &= x + 2y - 4 &&= 0 \end{aligned}$$

egyenletrendszer megoldásai.

Az első és a második egyenletből adódó $x = -\frac{\lambda}{2}$ és $y = -\lambda$ értékeket a harmadik egyenletbe beírva kapjuk, hogy

$$x + 2y - 4 = -\frac{\lambda}{2} - 2\lambda - 4 = -\frac{5}{2}\lambda - 4 = 0 \quad \Longrightarrow \quad \lambda = -\frac{8}{5}.$$

Az egyenletrendszer egyetlen megoldása tehát:

$$x_0 = \frac{4}{5}, \quad y_0 = \frac{8}{5}, \quad \lambda_0 = -\frac{8}{5}.$$

Következésképpen csak az $(x_0, y_0) = \left(\frac{4}{5}, \frac{8}{5}\right)$ pontban lehet lokális feltételes szélsőérték. A hozzá tartozó Lagrange-szorzó: $\lambda_0 = -\frac{8}{5}$.

Az elégséges feltétel: Mivel minden $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ pontban

$$\partial_1 g(x,y) = 1, \qquad \partial_2 g(x,y) = 2;$$
$$\partial_{11}\mathcal{L}(x,y) = 2, \quad \partial_{12}\mathcal{L}(x,y) = 0 = \partial_{21}\mathcal{L}(x,y), \quad \partial_{22}\mathcal{L}(x,y) = 2;$$

$$D(x,y;\lambda) := \det \begin{bmatrix} 0 & \partial_1 g(x,y) & \partial_2 g(x,y) \\ \partial_1 g(x,y) & \partial_{11}\mathcal{L}(x,y) & \partial_{12}\mathcal{L}(x,y) \\ \partial_2 g(x,y) & \partial_{21}\mathcal{L}(x,y) & \partial_{22}\mathcal{L}(x,y) \end{bmatrix} = \det \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \end{bmatrix} =$$

$$= 0 \cdot (2 \cdot 2 - 0 \cdot 0) - 1(1 \cdot 2 - 2 \cdot 0) + 2 \cdot (1 \cdot 0 - 2 \cdot 2) = -10 < 0.$$

Így $D(x_0, y_0; \lambda_0) < 0$, ezért az $(x_0, y_0) = \left(\frac{4}{5}, \frac{8}{5}\right)$ pont az egyetlen feltételes lokális minimumhely. ■

1. megjegyzés. A kapott (x_0, y_0) pont egyúttal **abszolút** feltételes minimumhely is.

Ez az állítás a **(b)** esetben abból következik, hogy h egy másodfokú, pozitív főegyütthatójú polinom, aminek x_0 **abszolút minimumhelye**.

A **(c)** esetben pedig tekintsük az

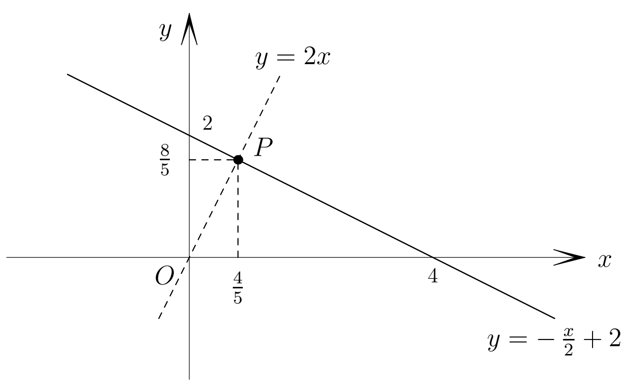
$$\mathcal{L}(x,y) = f(x,y) - \tfrac{8}{5} \cdot g(x,y) = x^2 + y^2 - \tfrac{8}{5} \cdot (x + 2y - 4) \quad \big((x,y) \in \mathbb{R}^2\big)$$

Lagrange-függvényt. Mivel

$$\mathcal{L}(x,y) = \left(x - \frac{4}{5}\right)^2 + \left(y - \frac{8}{5}\right)^2 + \frac{16}{5} \quad \big((x,y) \in \mathbb{R}^2\big),$$

ezért az $(x_0, y_0) = \left(\frac{4}{5}, \frac{8}{5}\right)$ pont $\mathcal{L}$-nek *abszolút* minimumhelye. Így (x_0, y_0) az f függvénynek a $g = 0$ feltétel melletti **abszolút feltételes minimumhelye is**. □

2. megjegyzés. A **(b)** és **(c)** módszerekkel kapott válaszok megegyeznek az elemi geometriából ismert eredménnyel, amit az alábbi ábrán szemléltetünk:



Az $y = 2x$ egyenletű egyenes merőleges az $y = -\frac{x}{2} + 2$ egyenesre, mert a meredekségük szorzata $2 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) = -1$. A szóban forgó egyenes és az origó távolsága pedig $\sqrt{f\big(x_0, y_0\big)} = $
$= \sqrt{x_0^2 + y_0^2} = \frac{4}{\sqrt{5}}$. □

3. feladat. *Legyen*

$$f(x,y) := xy \quad \textit{és} \quad g(x,y) := x^2+y^2-1 \qquad \big((x,y)\in\mathbb{R}^2\big).$$

Keresse meg az f függvény feltételes lokális szélsőértékhelyeit a $g=0$ feltétel mellett

(a) *elemi úton,*

(b) *a Lagrange-szorzók módszerével.*

Megoldás.

(a) Az elemi megoldás *alapötlete* az egyszerűen igazolható

$$-\frac{x^2+y^2}{2} \le xy \le \frac{x^2+y^2}{2} \quad \big(\forall\,(x,y)\in\mathbb{R}^2\big)$$

egyenlőtlenségek alkalmazása.

A $H_g := \big\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \;\big|\; g(x,y)=0\big\}$ halmaz pontjaiban $x^2+y^2=1$, ezért a fenti egyenlőtlenségek alapján

$$-\frac{1}{2} \le xy \le \frac{1}{2} \quad \big(\forall\,(x,y)\in H_g\big).$$

Világos, hogy az első egyenlőtlenségben egyenlőség akkor és csak akkor áll fenn, ha $x=-y$. Mivel $x^2+y^2=1$, ezért $x=\pm\frac{1}{\sqrt{2}}$ és $y=\mp\frac{1}{\sqrt{2}}$. Ez viszont azt jelenti, hogy az $\big(\frac{1}{\sqrt{2}},-\frac{1}{\sqrt{2}}\big)$, $\big(-\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}}\big)$ pontok az f függvény *abszolút* (következésképpen *lokális*) feltételes minimumhelyei a $g=0$ feltétel mellett.

Hasonlóan adódik az is, hogy az $\big(\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}}\big)$, $\big(-\frac{1}{\sqrt{2}},-\frac{1}{\sqrt{2}}\big)$ pontok az f függvény *abszolút* (következésképpen *lokális*) feltételes maximumhelyei a $g=0$ feltétel mellett.

(b) A feltételes lokális szélsőértékekre vonatkozó tételeket alkalmazzuk.

A szükséges feltétel: A szóban forgó tétel feltételei teljesülnek, mert

$$f,g\in C^1\big(\mathbb{R}^2\big) \text{ és } g'(x,y)=\big(\partial_1 g(x,y),\partial_2 g(x,y)\big)=(2x,2y)\ne\big(0,0\big) \quad \big(\forall\,(x,y)\in H_g\big).$$

A Lagrange-függvény:

$$\mathcal{L}(x,y)=f(x,y)+\lambda g(x,y)=xy+\lambda(x^2+y^2-1) \quad \big((x,y)\in\mathbb{R}^2\big).$$

A lehetséges lokális szélsőértékhelyek az

$$\begin{aligned}
\partial_1\mathcal{L}(x,y) &= y+2\lambda x &&= 0\\
\partial_2\mathcal{L}(x,y) &= x+2\lambda y &&= 0\\
g(x,y) &= x^2+y^2-1 &&= 0
\end{aligned}$$

egyenletrendszer megoldásai.

Az $x=0$ nem megoldás (hiszen akkor y is 0 lenne, ami a 3. egyenlet miatt lehetetlen), ezért az első egyenletből $2\lambda=-\frac{y}{x}$. Ezt a 2. egyenletbe beírva $x-\frac{y^2}{x}=0$, azaz $x^2=y^2$

adódik. A 3. egyenletből pedig azt kapjuk, hogy $2x^2 = 1$. Ezek alapján az egyenletrendszernek az alábbi megoldásaiban *lehetnek* a feltételes lokális szélsőértékhelyek:

$$P_1\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right), \quad P_2\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right), \quad \lambda_1 = -\frac{1}{2},$$
$$P_3\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right), \quad P_4\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right), \quad \lambda_2 = \frac{1}{2}.$$

Az elégséges feltétel: Mivel minden $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ pontban

$$\partial_1 g(x, y) = 2x, \qquad \partial_2 g(x, y) = 2y;$$
$$\partial_{11}\mathcal{L}(x, y) = 2\lambda, \quad \partial_{12}\mathcal{L}(x, y) = 1 = \partial_{21}\mathcal{L}(x, y), \quad \partial_{22}\mathcal{L}(x, y) = 2\lambda;$$

ezért

$$\begin{aligned} D(x, y; \lambda) :&= \det \begin{bmatrix} 0 & \partial_1 g(x, y) & \partial_2 g(x, y) \\ \partial_1 g(x, y) & \partial_{11}\mathcal{L}(x, y) & \partial_{12}\mathcal{L}(x, y) \\ \partial_2 g(x, y) & \partial_{21}\mathcal{L}(x, y) & \partial_{22}\mathcal{L}(x, y) \end{bmatrix} = \\ &= \det \begin{bmatrix} 0 & 2x & 2y \\ 2x & 2\lambda & 1 \\ 2y & 1 & 2\lambda \end{bmatrix} = 8(xy - \lambda). \end{aligned}$$

Így

$$D(P_1, \lambda_1) = D(P_2, \lambda_1) > 0 \implies \text{P_1 és P_2 feltételes lokális maximumhelyek,}$$
$$D(P_3, \lambda_2) = D(P_4, \lambda_2) < 0 \implies \text{P_3 és P_4 feltételes lokális minimumhelyek.}$$

Megjegyzés. Az előzőekből az is következik, hogy körbe írható maximális területű téglalap a négyzet. ☐

4. feladat. *Legyen*

$$f(x, y) := 2x + 3y \quad \text{és} \quad g(x, y) := x^2 + y^2 - 1 \qquad \big((x, y) \in \mathbb{R}^2\big).$$

Határozza meg az f függvény feltételes lokális szélsőértékhelyeit a $g = 0$ feltétel mellett.

Megoldás.

A szükséges feltételre vonatkozó tétel feltételei teljesülnek, mert $f, g \in C^1\big(\mathbb{R}^2\big)$ és

$$g'(x, y) = \big(\partial_1 g(x, y), \partial_2 g(x, y)\big) = (2x, 2y) \neq \big(0, 0\big)$$

$\forall\, (x, y) \in \big\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \;\big|\; g(x, y) = 0\big\}$ pontban (hiszen g' csak az origóban egyenlő $(0, 0)$-val, és az origó nem pontja az $x^2 + y^2 = 1$ egyenletű körvonalnak).

A Lagrange-függvény:

$$\mathcal{L}(x, y) = f(x, y) + \lambda g(x, y) = 2x + 3y + \lambda(x^2 + y^2 - 1) \quad \big((x, y) \in \mathbb{R}^2\big).$$

A szóban forgó tétel szerint a lehetséges feltételes lokális szélsőértékhelyek az

$$\begin{aligned} \partial_1\mathcal{L}(x,y) &= 2+2\lambda x &&= 0 \\ \partial_2\mathcal{L}(x,y) &= 3+2\lambda y &&= 0 \\ g(x,y) &= x^2+y^2-1 &&= 0 \end{aligned}$$

egyenletrendszer megoldásaiból adódnak.

A $\lambda = 0$ nyilván nem megoldás, ezért az első és a második egyenletből $x = -\frac{1}{\lambda}$ és $y = -\frac{3}{2\lambda}$ adódik. Ezeket az értékeket a 3. egyenletbe beírva azt kapjuk, hogy

$$x^2+y^2-1 = \frac{1}{\lambda^2}+\frac{9}{4\lambda^2}-1 = \frac{13-4\lambda^2}{4\lambda^2} = 0 \quad\Longrightarrow\quad \lambda = \pm\frac{\sqrt{13}}{2}.$$

Az egyenletrendszer megoldásai, tehát a *lehetséges* feltételes lokális szélsőértékhelyek:

$$P_1\left(-\frac{2}{\sqrt{13}}, -\frac{3}{\sqrt{13}}\right), \quad \lambda_1 = \frac{\sqrt{13}}{2},$$

$$P_2\left(\frac{2}{\sqrt{13}}, \frac{3}{\sqrt{13}}\right), \quad \lambda_2 = -\frac{\sqrt{13}}{2}.$$

Az elégséges feltétel: Mivel minden $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ pontban

$$\partial_1 g(x,y) = 2x, \qquad \partial_2 g(x,y) = 2y;$$
$$\partial_{11}\mathcal{L}(x,y) = 2\lambda, \quad \partial_{12}\mathcal{L}(x,y) = 0 = \partial_{21}\mathcal{L}(x,y), \quad \partial_{22}\mathcal{L}(x,y) = 2\lambda;$$

ezért

$$D(x,y;\lambda) := \det\begin{bmatrix} 0 & \partial_1 g(x,y) & \partial_2 g(x,y) \\ \partial_1 g(x,y) & \partial_{11}\mathcal{L}(x,y) & \partial_{12}\mathcal{L}(x,y) \\ \partial_2 g(x,y) & \partial_{21}\mathcal{L}(x,y) & \partial_{22}\mathcal{L}(x,y) \end{bmatrix} =$$

$$= \det\begin{bmatrix} 0 & 2x & 2y \\ 2x & 2\lambda & 0 \\ 2y & 0 & 2\lambda \end{bmatrix} = -8\lambda\big(x^2+y^2\big).$$

Így

$$D\left(-\frac{2}{\sqrt{13}}, -\frac{3}{\sqrt{13}}; \frac{\sqrt{13}}{2}\right) < 0 \quad\Longrightarrow\quad P_1 \text{ feltételes lokális minimumhely},$$

$$D\left(\frac{2}{\sqrt{13}}, \frac{3}{\sqrt{13}}; -\frac{\sqrt{13}}{2}\right) > 0 \quad\Longrightarrow\quad P_2 \text{ feltételes lokális maximumhely}. \ \blacksquare$$

1. megjegyzés. A feltételes lokális szélsőértékre vonatkozó *elégséges* feltételt bizonyos esetekben *egyszerűen* is ellenőrizhetjük. Tegyük fel, hogy az (x_0, y_0) pontban a λ_0 Lagrange-szorzóval teljesül a szükséges feltétel, és tekintsük az

$$\mathcal{L}(x,y) := f(x,y) + \lambda_0 g(x,y) \qquad \big((x,y) \in U\big)$$

Lagrange-függvényt.

Ha sikerül *egyszerűen* belátnunk azt, hogy ennek a függvénynek az $(x_0, y_0) \in \operatorname{int} U$ pont lokális (feltétel nélküli) szélsőértékhelye, akkor ez nyilván egyúttal f-nek a $g = 0$ feltétel melletti feltételes lokális szélsőértékhelye is.

Ez a helyzet az előbbi feladatnál is.

Vegyük először a $\lambda_0 = -2$ Lagrange-szorzóval képzett Lagrange-függvényt:

$$\mathcal{L}(x, y) = x^2 + y^2 - 2(x^2 + xy + y^2 - 3) = -(x + y)^2 + 6 \qquad \big((x, y) \in \mathbb{R}^2\big)).$$

Nyilvánvaló, hogy $\mathcal{L}$-nek az $y = -x$ egyenletű egyenes minden pontja *abszoút* maximumhely. A $g(x, y) = x^2 + xy + y^2 - 3 = 0$ egyenletű halmaznak a szóban forgó egyeneshez tartozó pontjai $P_3(\sqrt{3}, -\sqrt{3})$ és $P_4(-\sqrt{3}, \sqrt{3})$. Így $\mathcal{L}$-nek ezek a pontok is *abszolút* maximumhelyei, következésképpen P_3 és P_4 az f függvény $g = 0$ fetétel melletti *abszolút* (egyúttal *lokális*) feltételes maximumhelyei.

Ha $\lambda_0 = -2/3$, akkor

$$\mathcal{L}(x, y) = x^2 + y^2 - \tfrac{2}{3}(x^2 + xy + y^2 - 3) = \tfrac{2}{3}(x - y)^2 + 2 \qquad \big((x, y) \in \mathbb{R}^2\big).$$

Az előzőekhez hasonlóan azt kapjuk, hogy a $P_1(1, 1)$ és a $P_2(-1, -1)$ pont az f függvény $g = 0$ fetétel melletti *abszolút* (egyúttal *lokális*) feltételes minimumhelyei. □