Programtervező Informatikus Szak

Analízis-1 7. gyakorlat

2020. tavasz

1. feladat: —

2. feladat: Tegyük fel, hogy a nemnegatív tagú (a_n) sorozat konvergens, és $\lim(a_n)>0$. Mutassa meg, hogy ekkor:

$$\lim(\sqrt[n]{a_n})=1$$

Megoldás: Legyen $A:=\lim(a_n)$. Tudjuk, hogy $A\in\mathbb{R}$, $A>0$.
A konvergencia definíciója miatt $\varepsilon:=\frac{A}{2}>0$-hoz

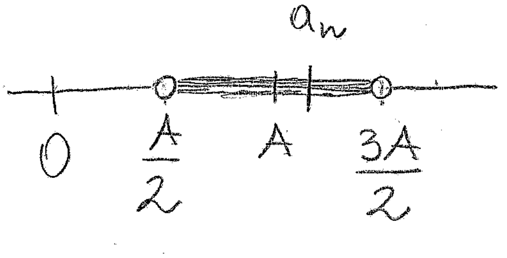
$$\exists N\in\mathbb{N}\ \forall n\geq N: \quad |a_n-A|<\frac{A}{2}$$

$$\Updownarrow$$

$$-\frac{A}{2}<a_n-A<\frac{A}{2}$$

$$\Updownarrow$$

$$\frac{A}{2}=A-\frac{A}{2}<a_n<A+\frac{A}{2}=\frac{3A}{2}$$



n-edik gyököt vonunk: $\sqrt[n]{\frac{A}{2}}<\sqrt[n]{a_n}<\sqrt[n]{\frac{3A}{2}}$

Mivel $\lim\left(\sqrt[n]{\frac{A}{2}}\right) = \lim\left(\sqrt[n]{\frac{3A}{2}}\right) = 1$, ezért

a közrefogási elv alapján: $\lim\left(\sqrt[n]{a_n}\right) = 1$.

---

3. feladat: Konvergensek-e a következő sorozatok, ha igen, mi a határértékük:

(a) $\sqrt[n]{3n^5+2n+1}$ (b) $\sqrt[n]{\frac{n+1}{2n+3}}$

(c) $\sqrt[n]{\frac{3^n}{n!}+2^n}$

Megoldás:

a) 1. megoldás (a 2. feladat eredményét használva):

$$\sqrt[n]{3n^5+2n+1} = \sqrt[n]{n^5\cdot\left(3+\frac{2}{n^4}+\frac{1}{n^5}\right)} = \left(\sqrt[n]{n}\right)^5\cdot\sqrt[n]{3+\frac{2}{n^4}+\frac{1}{n^5}}$$

A 2. feladat eredményét az $a_n = 3+\frac{2}{n^4}+\frac{1}{n^5}$ $(n\in\mathbb{N})$ sorozatra alkalmazva kapjuk, hogy:

$$\lim\left(\sqrt[n]{3+\frac{2}{n^4}+\frac{1}{n^5}}\right) = 1.$$

Másrészt tudjuk, hogy $\lim\left(\sqrt[n]{n}\right) = 1$. Ezért:

$$\lim\left(\sqrt[n]{3n^5+2n+1}\right) = 1^5\cdot 1 = \underline{\underline{1}}$$

(a) 2. megoldás (NRA és NRF becslés a gyökjel alatt):

alsó becslés: $\sqrt[n]{3n^5+2n+1} \geq \sqrt[n]{3n^5} = \underbrace{\sqrt[n]{3}}_{\downarrow \atop 1} \cdot \underbrace{\left(\sqrt[n]{n}\right)^5}_{\downarrow \atop 1^5=1}$

felső becslés: $\sqrt[n]{3n^5+2n+1} \leq \sqrt[n]{3n^5+2n^5+n^5} =$

$= \sqrt[n]{6n^5} = \underbrace{\sqrt[n]{6}}_{\downarrow \atop 1} \cdot \underbrace{\left(\sqrt[n]{n}\right)^5}_{\downarrow \atop 1^5=1}$

Mivel $\lim\left(\sqrt[n]{3}\cdot\left(\sqrt[n]{n}\right)^5\right) = \lim\left(\sqrt[n]{6}\cdot\left(\sqrt[n]{n}\right)^5\right) = 1$, ezért a közrefogási elv alapján:

$$\lim\left(\sqrt[n]{3n^5+2n+1}\right) = \underline{\underline{1}}.$$

(b) (a 2. feladat eredményét használva):

Mivel a gyökjel alatti sorozat határértéke

$$\lim\left(\frac{n+1}{2n+3}\right) = \frac{1}{2},$$

ezért a 2. feladat eredménye alapján:

$$\lim\left(\sqrt[n]{\frac{n+1}{2n+3}}\right) = \underline{\underline{1}}.$$

(c) (a 2. feladat eredményét használva):

$$\sqrt[n]{\frac{3^n}{n!}+2^n} = \sqrt[n]{2^n\cdot\left(\frac{3^n}{2^n\cdot n!}+1\right)} = 2\cdot\sqrt[n]{\frac{(3/2)^n}{n!}+1}$$

A 2. feladat eredményét alkalmazhatjuk a $\left(\frac{(3/2)^n}{n!}+1\right)$ sorozatra, mivel ez a sorozat $0+1=1$-hez tart. Ezért a 2. feladat eredménye alapján: $\lim\left(\sqrt[n]{\frac{(3/2)^n}{n!}+1}\right)=1$.

Ezért tehát

$$\lim\left(\sqrt[n]{\frac{3^n}{n!}+2^n}\right)=\lim\left(2\cdot\sqrt[n]{\frac{(3/2)^n}{n!}+1}\right)=2\cdot 1=\underline{\underline{2}}$$

<u>4. feladat:</u> Számítsa ki a következő sorozatok határértékét:

(a) $\left(\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}\right)$ (b) $\left(\left(1-\frac{1}{n}\right)^{n}\right)$

(c) $\left(\left(1+\frac{1}{n^2}\right)^{n}\right)$

Megoldás: A $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e$ határértéket alkalmazzuk:

(a) $$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1} = \lim_{n\to\infty}\left(\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\cdot\left(1+\frac{1}{n}\right)\right) =$$

$$= \left(\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right)\cdot\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right) = e\cdot 1 = \underline{\underline{e}}$$

(b) A sorozat képletét átalakítjuk:

$$\left(1-\frac{1}{n}\right)^n = \left(\frac{n-1}{n}\right)^n = \left(\frac{1}{\frac{n}{n-1}}\right)^n = \frac{1}{\left(\frac{n}{n-1}\right)^n} =$$

$$= \frac{1}{\left(\frac{n-1+1}{n-1}\right)^n} = \frac{1}{\left(1+\frac{1}{n-1}\right)^n} = \frac{1}{\left(1+\frac{1}{n-1}\right)^{n-1}}\cdot\frac{1}{1+\frac{1}{n-1}}$$

Ezért:

$$\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n}\right)^n = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{\left(1+\frac{1}{n-1}\right)^{n-1}}\cdot\frac{1}{1+\frac{1}{n-1}}\right) =$$

$$= \frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n-1}\right)^{n-1}}\cdot\frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n-1}\right)} = \frac{1}{e}\cdot\frac{1}{1} = \underline{\underline{\frac{1}{e}}}$$

(c) A sorozat képletét átalakítjuk úgy, hogy a 2. feladat eredménye alkalmazható legyen.

$$\left(1+\frac{1}{n^2}\right)^n = \sqrt[n]{\left(\left(1+\frac{1}{n^2}\right)^n\right)^n} = \sqrt[n]{\left(1+\frac{1}{n^2}\right)^{n^2}}$$

A gyök alatti $a_n = \left(1+\frac{1}{n^2}\right)^{n^2}$ $(n\in\mathbb{N}^+)$ sorozat az $\left(\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right)$ sorozat részsorozata, ezért $\lim(a_n)=e$.

Ezért a 2. feladat eredménye alapján:

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n^2}\right)^n = \lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n} = \underline{\underline{1}}$$

<u>5. feladat:</u> Legyen $(x_n): \mathbb{N} \longrightarrow (0,+\infty)$ olyan sorozat, amelyre $\lim(x_n)=+\infty$ teljesül. Bizonyítsa be, hogy ekkor

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{x_n}\right)^{x_n} = e\,.$$

<u>Megoldás</u> (vázlatos bizonyítás):

Jelölje $[x]$ az $x\in\mathbb{R}$ szám egészrészét:

$$[x]\in\mathbb{Z}\;; \qquad [x]\le x<[x]+1$$

alsó becslés:

$$\left(1+\frac{1}{x_n}\right)^{x_n} \geq \left(1+\frac{1}{[x_n]+1}\right)^{[x_n]} =$$

$$=\underbrace{\left(1+\frac{1}{[x_n]+1}\right)^{[x_n]+1}}_{\downarrow \atop e} \cdot \underbrace{\left(1+\frac{1}{[x_n]+1}\right)^{-1}}_{\downarrow \atop 1^{-1}=1},$$

ezért az alsó becslés határértéke: $e\cdot 1 = e$.

felső becslés:

$$\left(1+\frac{1}{x_n}\right)^{x_n} \leq \left(1+\frac{1}{[x_n]}\right)^{[x_n]+1} = \underbrace{\left(1+\frac{1}{[x_n]}\right)^{[x_n]}}_{\downarrow \atop e} \cdot \underbrace{\left(1+\frac{1}{[x_n]}\right)}_{\downarrow \atop 1},$$

ezért a felső becslés határértéke: $e\cdot 1 = e$.

Így a közrefogási elv alapján kapjuk, hogy

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{x_n}\right)^{x_n} = e$$

Megjegyzés: Igazolható az is, hogy $x_n<0$ $(n\in\mathbb{N})$, $\lim(x_n)=-\infty$ esetén:

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{x_n}\right)^{x_n} = e.$$

6. feladat: Számítsa ki a következő sorozatok határértékét:

(a) $\left(\left(\dfrac{6n-7}{6n+4}\right)^{3n+2}\right)$ (b) $\left(\left(\dfrac{4n+3}{5n}\right)^{5n}\right)$

(c) $\left(\left(\dfrac{3n+1}{n+2}\right)^{2n+3}\right)$

Megoldás:

(a) A sorozat képletét átalakítjuk:

$$\left(\frac{6n-7}{6n+4}\right)^{3n+2}=\left(\frac{6n+4-11}{6n+4}\right)^{3n+2}=$$

$$=\left(1-\frac{11}{6n+4}\right)^{3n+2}=\left(1+\frac{1}{-\frac{6n+4}{11}}\right)^{3n+2}=$$

$$=\left(1+\frac{1}{-\frac{6n+4}{11}}\right)^{-\frac{6n+4}{11}\cdot\left(-\frac{11}{6n+4}\right)\cdot(3n+2)}=$$

$$=\left[\left(1+\frac{1}{-\frac{6n+4}{11}}\right)^{-\frac{6n+4}{11}}\right]^{\frac{-11\cdot\cancel{(3n+2)}}{\cancel{6n+4}\,2}}=\left[\left(1+\frac{1}{-\frac{6n+4}{11}}\right)^{-\frac{6n+4}{11}}\right]^{-\frac{11}{2}}$$

Ennek alapján:

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{6n-7}{6n+4}\right)^{3n+2} = \lim_{n\to\infty}\Bigg[\underbrace{\left(1+\frac{1}{-\frac{6n+4}{11}}\right)^{-\frac{6n+4}{11}}}_{\to e}\Bigg]^{-11/2} =$$

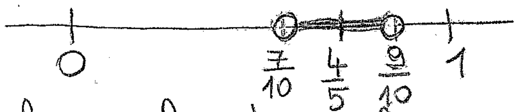
$\to e$, mivel $\left(1+\frac{1}{x_n}\right)^{x_n}$ típusú, ahol $x_n \to -\infty$

$$= e^{-11/2}$$

(b) $\lim\left(\frac{4n+3}{5n}\right) = \frac{4}{5}$, ezért $\varepsilon = \frac{1}{10}$-hez $\exists N \in \mathbb{N}\ \forall n \geq N$:

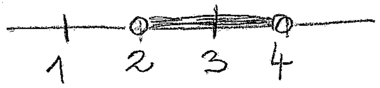
$$0 < \frac{4n+3}{5n} < \frac{4}{5} + \frac{1}{10} = \frac{9}{10}$$

5n-edik hatványra emelünk: $0 < \left(\frac{4n+3}{5n}\right)^{5n} < \underbrace{\left(\frac{9}{10}\right)^{5n}}_{\text{nullsorozat}}$



A közrefogási elv alapján a keresett limesz: $\underline{\underline{0}}$.

(c) $\lim\left(\frac{3n+1}{n+2}\right) = 3$, ezért $\varepsilon = 1$-hez $\exists N \in \mathbb{N}\ \forall n \geq N$:



$$\frac{3n+1}{n+2} > 3-1 = 2$$

(2n+3)-adik hatványra emelünk: $\left(\frac{3n+1}{n+2}\right)^{2n+3} > 2^{2n+3}$

Mivel $\lim\left(2^{2n+3}\right) = +\infty$, ezért

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{3n+1}{n+2}\right)^{2n+3} = \underline{\underline{+\infty}}$$