Diszkrét matematika 1.

Komplex számok

Juhász Zsófia
jzsofia@inf.elte.hu
jzsofi@gmail.com
Mérai László diái alapján

Komputeralgebra Tanszék

2020 tavasz

A számfogalom bővítése

- **Természetes számok:** $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \dots\}$
  Nincs olyan $x \in \mathbb{N}$ természetes szám, melyre $x + 2 = 1$!
  $\mathbb{N}$ halmazon a kivonás nem értelmezett!
- **Egész számok:** $\mathbb{Z} = \{\dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots\}$
  A kivonás elvégezhető: $x = -1$.
  Nincs olyan $x \in \mathbb{Z}$ egész szám, melyre $x \cdot 2 = 1$!
  $\mathbb{Z}$ halmazon az osztás nem értelmezett!
- **Racionális számok:** $\mathbb{Q} = \left\{ \frac{p}{q} : \; p, q \in \mathbb{Z}, q \neq 0 \right\}$
  Az osztás nemnulla számokkal elvégezhető: $x = \frac{1}{2}$.
  Nincs olyan $x \in \mathbb{Q}$ racionális szám, melyre $x^2 = 2$!
  $\mathbb{Q}$ halmazon a négyzetgyökvonás nem (mindíg) elvégezhető még nemnegatív számok esetén sem!
- **Valós számok:** $\mathbb{R}$.
  Nincs olyan $x \in \mathbb{R}$ valós szám, melyre $x^2 = -1$!

  U.i.: Ha $x \geq 0$, akkor $x^2 \geq 0$.
  Ha $x < 0$, akkor $x^2 = (-x)^2 > 0$.

A számfogalom bővítése

A komplex számok körében az $x^2 = -1$ egyenlet megoldható!

Komplex számok alkalmazása:

- egyenletek megoldása;
- geometria;
- fizika (áramlástan, kvantummechanika, relativitáselmélet);
- grafika, kvantumszámítógépek.

Komplex számok bevezetése

Definíció (képzetes egység)

Legyen i (képzetes egység) megoldása az $x^2 = -1$ egyenletnek.

A szokásos számolási szabályok szerint számoljunk az i szimbólummal formálisan, $i^2 = -1$ helyettesítéssel:

$$(1+i)^2 = 1 + 2i + i^2 = 1 + 2i + (-1) = 2i$$

. **Általában:**

$$(a+bi)(c+di) = ac - bd + (ad+bc)i$$

.

A komplex számok definíciója

Definíció (komplex számok)

Az $a + bi$ alakú kifejezéseket, ahol $a, b \in \mathbb{R}$, komplex számoknak ($\mathbb{C}$) hívjuk, az ilyen formában való felírásukat algebrai alaknak nevezzük.

- összeadás: $(a + bi) + (c + di) = a + c + (b + d)i$.
- szorzás: $(a + bi)(c + di) = ac - bd + (ad + bc)i$.

Definíció (komplex szám valós és képzetes része)

A $z = a + bi \in \mathbb{C}$ $(a, b \in \mathbb{R})$ komplex szám
valós része: $Re(z) = a \in \mathbb{R}$, képzetes része: $Im(z) = b \in \mathbb{R}$.

- **Figyelem!** $Im(z) \neq bi$
- Az $a + 0 \cdot i$ alakú komplex számok a valós számok. A $0 + bi$ alakú komplex számok a tisztán képzetes számok.
- Az $a + bi$ és a $c + di$ algebrai alakban megadott komplex számok pontosan akkor egyenlőek: $a + bi = c + di$, ha $a = c$ és $b = d$.

A komplex számok definíciója

Definíció (komplex számok formális definíciója)

A komplex halmaza $\mathbb{C}$ az $(a, b) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ párok halmaza az alábbi műveletekkel:

- összeadás: $(a, b) + (c, d) = (a + c, d + b)$;
- szorzás: $(a, b) \cdot (c, d) = (ac - bd, ad + bc)$.

A két definíció ekvivalens: $a + bi \leftrightarrow (a, b)$, pl. $i \leftrightarrow (0, 1)$.
Az $a + bi$ formátum kényelmesebb számoláshoz.
Az (a, b) formátum kényelmesebb ábrázoláshoz (grafikusan, számítógépen).
További formális számokra nincs szükség:

Tétel (Algebra alaptétele, NB)

Legyen $n > 0$ és $a_0, \ldots, a_n \in \mathbb{C}$, $a_n \neq 0$. Ekkor az $a_0 + a_1x + a_2x^2 + \ldots + a_nx^n$ polinomnak létezik gyöke $\mathbb{C}$-ben, azaz létezik olyan z komplex szám, melyre $a_0 + a_1z + a_2z^2 + \ldots + a_nz^n = 0$.

Összeadás és szorzás alaptulajdonságai $\mathbb{C}$-n

A definíciók alapján könnyen belátható, hogy a $\mathbb{C}$-n bevezetett összeadás és szorzás rendelkezik a következő alaptulajdonságokkal:

Állítás (Összeadás és szorzás alaptulajdonságai $\mathbb{C}$-n)

Összeadás tulajdonságai

1. *Asszociativitás:* $\forall a, b, c \in \mathbb{C} : (a + b) + c = a + (b + c)$.
2. *Kommutativitás:* $\forall a, b \in \mathbb{C} : a + b = b + a$.
3. *Semleges elem (nullelem):* $\exists 0 \in \mathbb{C}$ (*nullelem*), *hogy* $\forall a \in \mathbb{C}$: $0 + a = a + 0 = a$.
4. *Additív inverz (ellentett):* $\forall a \in \mathbb{C} : \exists -a \in \mathbb{C}$ (a *ellentettje*), *melyre* $a + (-a) = (-a) + a = 0$.

Összeadás és szorzás alaptulajdonságai $\mathbb{C}$-n

Állítás (Összeadás és szorzás alaptulajdonságai $\mathbb{C}$-n)

Szorzás tulajdonságai

1. *Asszociativitás:* $\forall a, b, c \in \mathbb{C} : (a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$.
2. *Kommutativitás:* $\forall a, b, c \in \mathbb{C} : a \cdot b = b \cdot a$.
3. *Egységelem:* $\exists 1 \in \mathbb{C}$ (*egységelem*), *melyre* $\forall a \in \mathbb{C} : 1 \cdot a = a \cdot 1 = a$.
4. *Multiplikatív inverz (reciprok):* $\forall a \in \mathbb{C}$ *nemnulla számhoz* $\exists a^{-1} = \frac{1}{a} \in \mathbb{C}$ (*a reciproka*), *melyre* $a \cdot a^{-1} = a^{-1} \cdot a = 1$.

Disztributivitás

$\forall a, b, c \in \mathbb{C} : a(b + c) = ab + ac$ (*és* $(a + b)c = ac + bc$)

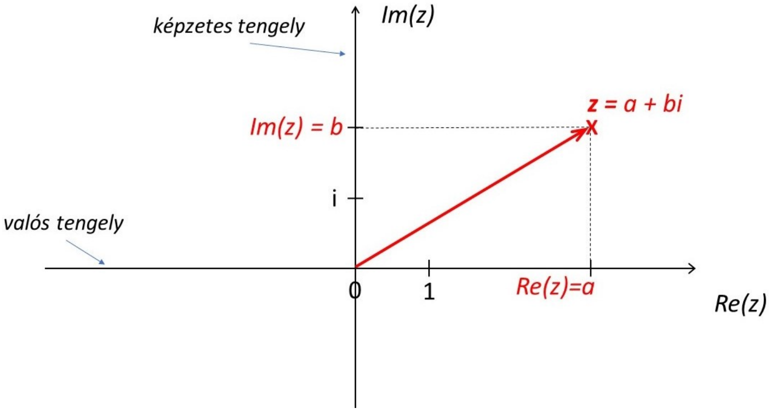
Következmény:

- A fenti tulajdonságok miatt a $(\mathbb{C}, +, \cdot)$ algebrai struktúra ún. *test* ($(\mathbb{Q}, +, \cdot)$ és $(\mathbb{R}, +, \cdot)$ is test).
- Informálisan azt mondhatjuk, hogy a komplex számokkal „ugyanúgy" számolhatunk, mint a valós számokkal (összegek, szorzatok átzárójelezhetők; összeg tagjai, ill. szorzat tényezői felcserélhetők; zárójelek a disztributivitás szabályai szerint kibonthatók etc.).

Komplex számok ábrázolása

A komplex számok ábrázolhatók a komplex számsíkon (Gauss-sík):

- $z = a + bi \leftrightarrow (a, b)$
- bijekció (kölcsönösen egyértelmű megfeleltetés) $\mathbb{C}$ és a sík pontjai (vagy helyvektorai) között



Számolás komplex számokkal: abszolút érték, konjugált

Definíció (komplex szám abszolút értéke)

Egy $z = a + bi \in \mathbb{C}$ algebrai alakban megadott komplex szám abszolút értéke: $|z| = |a + bi| = \sqrt{a^2 + b^2}$.

Valós számok esetében ez a hagyományos abszolút érték: $|a| = \sqrt{a^2}$.

Állítás (HF)

Tetszőleges z komplex szám esetén:

1. $|z| \geq 0$,
2. $|z| = 0 \Leftrightarrow z = 0$.

Definíció (komplex szám konjugáltja)

Egy $z = a + bi$ algebrai alakban megadott komplex szám konjugáltja a $\overline{z} = \overline{a + bi} = a - bi$ szám.

Számolás komplex számokkal: ellentett, kivonás

Definíció (komplex szám ellentettje)

Egy $z \in \mathbb{C}$ szám ellentettje az a $\hat{z}$ szám, melyre $z + \hat{z} = 0$.

Egy $r \in \mathbb{R}$ szám ellentettje: $-r$.

Állítás (Komplex szám ellentettje; Biz. HF)

Egy $z = a + bi \in \mathbb{C}$ algebrai alakban megadott komplex szám ellentettje a $-z = -a - bi$ algebrai alakban megadott komplex szám.

Definíció (komplex számok kivonása)

A z, w komplex számok különbsége:

$$z - w = z + (-w)$$

Számolás komplex számokkal: reciprok, hányados

Definíció (nemnulla komplex szám reciproka)

Egy $z \in \mathbb{C}$ nemnulla szám reciproka az a $z^{-1} = \frac{1}{z}$ szám, melyre $z \cdot z^{-1} = 1$.

A reciprok segítségével a nemnulla komplex számmal történő osztás is definiálható:

Definíció (osztás nemnulla komplex számmal)

Két $z, w \neq 0$ komplex szám hányadosa:

$$\frac{z}{w} = z \cdot \frac{1}{w}.$$

Számolás komplex számokkal: hányados kiszámítása

Mi lesz $\frac{2+3i}{1+i}$ algebrai alakban?

Ötlet: Hasonló, mint valós törteknél a gyöktelenítés:

$$\frac{1}{1+\sqrt{2}} = \frac{1}{1+\sqrt{2}} \cdot \frac{1-\sqrt{2}}{1-\sqrt{2}} = \frac{1-\sqrt{2}}{(1+\sqrt{2})(1-\sqrt{2})} = \frac{1-\sqrt{2}}{1^2-\sqrt{2}^2} =$$

$$= \frac{1-\sqrt{2}}{1-2} = -1+\sqrt{2}$$

.

Nevező konjugáltjával való bővítés:

$$\frac{2+3i}{1+i} = \frac{2+3i}{1+i} \cdot \frac{1-i}{1-i} = \frac{(2+3i)(1-i)}{(1+i)(1-i)} = \frac{2-2i+3i-3i^2}{1^2-i^2} =$$

$$\frac{5+i}{1-(-1)} = \frac{5+i}{2} = \frac{5}{2} + \frac{1}{2}i$$

.

Számolás komplex számokkal: hányados kiszámítása

Lemma

Tetszőleges z *komplex szám esetén:* $z \cdot \overline{z} = |z|^2$.

Bizonyítás.

Legyen z algebrai alakja $a + bi$. Ekkor
$z \cdot \overline{z} = (a + bi)(a - bi) = a^2 + b^2 = |z|^2$. $\square$

Állítás (Hányados kiszámítása algebrai alakban)

Legyenek $z, w \in \mathbb{C}$, $w \neq 0$. *Ekkor* $\frac{z}{w}$ *algebrai alakja megkapható a nevező konjugáltjával való bővítéssel:* $\frac{z}{w} = \frac{z \cdot \overline{w}}{w \cdot \overline{w}}$.

Bizonyítás.

Legyenek $z = a + bi$ és $w = c + di$ $(a, b, c, d \in \mathbb{R})$. Ekkor
$\frac{z}{w} = \frac{z \cdot \overline{w}}{w \cdot \overline{w}} = \frac{(a+bi)(c-di)}{(c+di)(c-di)} = \frac{ac+bd+(bc-ad)i}{c^2+d^2} = \frac{ac+bd}{c^2+d^2} + \frac{bc-ad}{c^2+d^2}i$. $\square$

Számolás komplex számokkal

Tétel (A konjugálás és az abszolút érték tulajdonságai; Biz. HF.)

Tetszőleges $z, w \in \mathbb{C}$ *esetén:*

1. $\overline{\overline{z}} = z$;
2. $\overline{z + w} = \overline{z} + \overline{w}$;
3. $\overline{z \cdot w} = \overline{z} \cdot \overline{w}$;
4. $z + \overline{z} = 2Re(z)$;
5. $z - \overline{z} = 2Im(z) \cdot i$;
6. $z \cdot \overline{z} = |z|^2$;
7. $z \neq 0$ *esetén* $z^{-1} = \frac{\overline{z}}{|z|^2}$;
8. $|0| = 0$ *és* $z \neq 0$ *esetén* $|z| > 0$;
9. $|\overline{z}| = |z|$;
10. $|z \cdot w| = |z| \cdot |w|$;
11. $|z + w| \leq |z| + |w|$ *(háromszög-egyenlőtlenség).*

Számolás komplex számokkal

Tétel

$\vdots$

10. $|z \cdot w| = |z| \cdot |w|$;

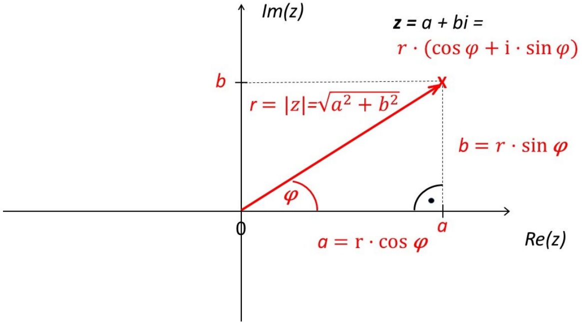
$\vdots$

Bizonyítás.

$|z \cdot w|^2 = z \cdot w \cdot \overline{z \cdot w} = z \cdot w \cdot \overline{z} \cdot \overline{w} = z \cdot \overline{z} \cdot w \cdot \overline{w} = |z|^2 \cdot |w|^2 = (|z| \cdot |w|)^2$. $\square$

Komplex számok trigonometrikus alakja

Legyen $z = a + bi \in \mathbb{C}$ $(a, b \in \mathbb{R})$, $z \neq 0$. A komplex számsíkon:



- Az (a, b) vektor hossza: $r = |z| = \sqrt{a^2 + b^2}$.
- Jelölje φ az (a, b) vektornak a pozitív valós tengellyel bezárt (előjeles) szögét (azaz z egy irányszögét; megjegyzés: ez nem egyértelmű, mert 2π többszörösei hozzáadhatók).

A koordináták r és φ segítségével kifejezve:

$$a = r \cdot \cos\varphi, \quad b = r \cdot \sin\varphi$$

Komplex számok trigonometrikus alakja

Definíció (trigonometrikus alak)

Egy $z \in \mathbb{C}$ nemnulla szám trigonometrikus alakja:

$$z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi),$$

ahol $r = |z|$.

Figyelem!

- A 0-nak nem használjuk a trigonometrikus alakját.
- A trigonometrikus alak nem egyértelmű (mert az irányszög nem egyértelmű): $r(\cos\varphi + i\sin\varphi) = r(\cos(\varphi + 2\pi) + i\sin(\varphi + 2\pi))$.

Definíció (argumentum)

Egy nemnulla $z \in \mathbb{C}$ argumentuma az a $\varphi = arg(z) \in [0, 2\pi)$, melyre $z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$.

Áttérés algebrai alakról trigonometrikus alakra

Adott $z = a + bi \neq 0$ algebrai alakban megadott komplex számnak keressük a trigonometrikus alakját.

$$a + bi = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$$

Adottak: a és b. Keressük: r és φ.

- $r = \sqrt{a^2 + b^2}$.
- φ meghatározása:

$$\left.\begin{aligned} a &= r\cos\varphi \\ b &= r\sin\varphi \end{aligned}\right\}$$

Ha $a \neq 0$, akkor $tg\varphi = \frac{b}{a}$, és így

$$\varphi = \begin{cases} \frac{\pi}{2}, & \text{ha } a = 0 \text{ és } b > 0 \\ \frac{3\pi}{2}, & \text{ha } a = 0 \text{ és } b < 0 \\ arctg\,\frac{b}{a}, & \text{ha } a > 0; \\ arctg\,\frac{b}{a} + \pi, & \text{ha } a < 0. \end{cases}$$

Moivre-azonosságok

Tétel (Moivre-azonosságok)

Legyenek $z, w \in \mathbb{C}$ *nemnulla komplex számok:* $z = |z|(\cos\varphi + i\sin\varphi)$, $w = |w|(\cos\psi + i\sin\psi)$, *és legyen* $n \in \mathbb{N}^+$. *Ekkor*

1. $zw = |z||w|(\cos(\varphi+\psi) + i\sin(\varphi+\psi))$;
2. $\frac{z}{w} = \frac{|z|}{|w|} \cdot (\cos(\varphi-\psi) + i\sin(\varphi-\psi))$;
3. $z^n = |z|^n(\cos n\varphi + i\sin n\varphi)$.

A szögek összeadódnak, kivonódnak, szorzódnak. Az argumentumot ezek után redukcióval kapjuk!

Geometriai jelentés

Egy $z \in \mathbb{C}$ komplex számmal való szorzás a komplex számsíkon mint nyújtva-forgatás hat. $|z|$-vel nyújt, $arg(z)$ szöggel forgat.

Bizonyítás.

1.
$$\begin{aligned} zw &= |z|(\cos\varphi + i\sin\varphi)\cdot|w|(\cos\psi + i\sin\psi) = \\ &= |z||w|(\cos\varphi\cos\psi - \sin\varphi\sin\psi + i(\cos\varphi\sin\psi + \sin\varphi\cos\psi)) = \\ & \text{Így az addíciós képletek alapján:} \\ &= |z||w|(\cos(\varphi+\psi) + i\sin(\varphi+\psi)) \end{aligned}$$

Addíciós képletek:

$\cos(\varphi+\psi) = \cos\varphi\cos\psi - \sin\varphi\sin\psi$

$\sin(\varphi+\psi) = \cos\varphi\sin\psi + \sin\varphi\cos\psi$ □

- A szorzat abszolút értéke: $|zw| = |z||w|$.
- A szorzat egy irányszöge: $\varphi + \psi$.

  (Ha az argumentumot szeretnénk megkapni, akkor az irányszöget esetleg redukálni kell:

  - ha $0 \leq arg(z) + arg(w) < 2\pi$, akkor $arg(zw) = arg(z) + arg(w)$;
  - ha $2\pi \leq arg(z) + arg(w) < 4\pi$, akkor $arg(zw) = arg(z) + arg(w) - 2\pi$.

  A sin, cos függvények 2π szerint periodikusak, az argumentum meghatározásánál redukálni kell az argumentumok összegét.)

Gyökvonás

Definíció (komplex szám n-edik gyökei)

Legyen $n \in \mathbb{N}^+$. A z komplex szám n-edik gyökei az olyan w komplex számok, melyekre $w^n = z$.

Tétel (Gyökvonás komplex számok körében)

Legyen $z = |z|(\cos\varphi + i\sin\varphi)$, $n \in \mathbb{N}^+$. Ekkor a z n-edik gyökei:

$$w_k = \sqrt[n]{|z|}\left(\cos\left(\frac{\varphi}{n} + \frac{2k\pi}{n}\right) + i\sin\left(\frac{\varphi}{n} + \frac{2k\pi}{n}\right)\right)$$

$k = 0, 1, \ldots, n-1.$

A tétel bizonyításánál fel fogjuk használni a következőt:
A $z = |z|(\cos\varphi + i\sin\varphi)$ és $w = |w|(\cos\psi + i\sin\psi)$ trigonometrikus alakban megadott komplex számok pontosan akkor egyenlőek:

$$|z|(\cos\varphi + i\sin\varphi) = |w|(\cos\psi + i\sin\psi),$$

ha:

- $|z| = |w|$ és
- $\varphi = \psi + 2k\pi$ valamely $k \in \mathbb{Z}$ szám esetén.

Gyökvonás

Tétel (Gyökvonás komplex számok körében)

Legyen $z = |z|(\cos\varphi + i\sin\varphi)$, $n \in \mathbb{N}^+$. *Ekkor a* z n*-edik gyökei:*

$$w_k = \sqrt[n]{|z|}\left(\cos\left(\frac{\varphi}{n} + \frac{2k\pi}{n}\right) + i\sin\left(\frac{\varphi}{n} + \frac{2k\pi}{n}\right)\right)$$

$k = 0, 1, \ldots, n-1.$

Bizonyítás.

Tetszőleges $w = |w|(\cos\psi + i\sin\psi)$ komplex számra, a hatványozásra vonatkozó Moivre-azonosság alapján: $w^n = |w|^n(\cos n\psi + i\sin n\psi)$.
Így $w^n = z$ pontosan akkor, ha $|w|^n(\cos n\psi + i\sin n\psi) = |z|(\cos\varphi + i\sin\varphi)$, ami azzal ekvivalens, hogy

- $|w|^n = |z| \Leftrightarrow |w| = \sqrt[n]{|z|}$ és
- $n\psi = \varphi + 2k\pi$ valamely $k \in \mathbb{Z}$-re $\Leftrightarrow \psi = \frac{\varphi}{n} + \frac{2k\pi}{n}$ valamely $k \in \mathbb{Z}$-re.

Ha $k \in \{0, 1, \ldots, n-1\}$, akkor ezek mind különböző komplex számot adnak. $\square$

Példa

Példa

Számítsuk ki $\frac{1-i}{\sqrt{3}+i}$ 6. gyökeinek (w) az értékeit!

$1-i=\sqrt{2}(\frac{\sqrt{2}}{2}-i\frac{\sqrt{2}}{2})=\sqrt{2}(\cos\frac{7\pi}{4}+i\sin\frac{7\pi}{4})$

$\sqrt{3}+i=2(\frac{\sqrt{3}}{2}+i\frac{1}{2})=2(\cos\frac{\pi}{6}+i\sin\frac{\pi}{6})$

Mivel $\frac{7\pi}{4}-\frac{\pi}{6}=\frac{19\pi}{12}$, ezért: $\frac{1-i}{\sqrt{3}+i}=\frac{1}{\sqrt{2}}(\cos\frac{19\pi}{12}+i\sin\frac{19\pi}{12})$.

és így a 6. gyökök:

$w_k=\frac{1}{\sqrt[12]{2}}(\cos\frac{19\pi+24k\pi}{72}+i\sin\frac{19\pi+24k\pi}{72})\ :\ k=0,1,\ldots,5$

Komplex egységgyökök

Definíció (n-edik egységgyökök)

Tetszőleges $n \in \mathbb{N}^+$ esetén az 1 n-edik gyökei az n-edik egységgyökök. (Azaz az $\epsilon^n = 1$ feltételnek eleget tevő komplex számok.)

A gyökvonás képlete alapján:

Tétel (Az n-edik egységgyökök trigonometrikus alakja)

Tetszőleges $n \in \mathbb{N}^+$ esetén az n-edik egységgyökök:

$$\epsilon_k = \epsilon_k^{(n)} = (\cos \frac{2k\pi}{n} + i \sin \frac{2k\pi}{n}) \; : \; k = 0, 1, \ldots, n-1.$$

Nyolcadik komplex egységgyökök: