A számításelmélet alapjai II.
3. gyakorlat

Cél: Következmény fogalom megismerése. Szemantikus fa és rezolúció használata.

Fogalmak: legszűkebb következmény, előre- és visszakövetkeztetés, literál, klóz, KNF, DNF

Definíció: *Azt mondjuk, hogy az ítéletlogikában egy I **interpretáció kielégít egy B formulát** (I $\models_0$B), ha a formula helyettesítési értéke **i** az I interpretációban.*
Definíció: *Azt mondjuk, hogy egy B formula **kielégíthető**, ha legalább egy interpretáció kielégíti.*
Definíció: *Azt mondjuk, hogy egy B formula **kielégíthetetlen**, ha egyetlen interpretáció sem elégíti ki.*
Definíció: *Azt mondjuk, hogy egy B formula **tautológia** ($\models_0$B), ha minden interpretáció kielégíti. A tautológiát **ítéletlogikai törvénynek** is nevezik.*

Legyen **F** = {A_1, A_2,…,A_n} formulahalmaz.
Definíció: *Azt mondjuk, hogy az ítéletlogikában egy I **interpretáció kielégít egy F formulahalmazt** (I $\models_0$F), ha a formulahalmaz minden formulájának helyettesítési értéke **i** az I interpretációban.*
Definíció: *Azt mondjuk, hogy egy F formulahalmaz **kielégíthető**, ha legalább egy interpretáció kielégíti.*
Definíció: *Azt mondjuk, hogy F formulahalmaz **kielégíthetetlen**, ha bármely interpretációban legalább egy formulája **h** (nincs olyan interpretáció, ami kielégítené).*

Definició: *Egy G formula az F={F1, F2, ..., Fn} formulahalmaznak **tautologikus következménye**, ha minden olyan I interpretációra, amelyre I $\models_0${F1, F2, ..., Fn} fennáll, I $\models_0$G is fennáll.*
Jelölés: {F1, F2, ..., Fn} $\models_0$G

Megjegyzés: Ha egy G formula bármely F feltételhalmaznak következménye, akkor G tautológia.

Előre- és visszakövetkeztetés

Definíció: *Legyen a feltételhalmazban szereplő változók száma n. Ekkor a **legszűkebb következmény** az az $\{i,h\}^n \rightarrow \{i,h\}$ leképezés, amely pontosan azokhoz az interpretációkhoz rendel **i** értéket, amelyek kielégítik a feltételhalmazt.*

Megjegyzés: Ha F legszűkebb következménye R, akkor következmény minden olyan G formula, amelyre R→G tautológia, azaz R igazhalmaza része G igazhalmazának.

Előre következtetés: ismert az F feltételhalmaz, és keressük F lehetséges következményeit.

Példa. ***F***={**Z→M∨P, Z, ¬P** }

P	M	Z	Z→M∨P	Z	¬P	következmény
						h vagy i
h	i	i	**i**	**i**	**i**	i
						h vagy i

Csak egy igazságkiértékelésre kielégíthető a feltételhalmaz. Tehát a legszűkebb következmény : $\neg P \wedge M \wedge Z$. De következmény pl.: $M \wedge Z$, $\neg P \wedge Z$, M, stb.

Visszakövetkeztetés: Az F feltételhalmaz és a B következményformula ismeretében eldöntjük, hogy B valóban következménye-e F-nek. Mivel $F \models_0 B$ pontosan akkor, ha az $\{F \cup \{\neg B\}\}$ formulahalmaz kielégíthetetlen. Más szóval B pontosan akkor következménye F-nek, ha minden olyan interpretációban, ahol B hamis az F kielégíthetetlen.

<u>**Példa:**</u> $\boldsymbol{F}=\{Z \to M \vee P, Z, \neg P\}$ és be kell látni, hogy M következmény. Be kell látni, hogy, ha $\neg M$ igaz, akkor $\{Z \to M \vee P, Z, \neg P\}$ nem lesz kielégíthető.
Ha minden feltételformula i kell legyen, akkor Z=i, P=h. Viszont ha M hamis, akkor $Z \to M \vee P$=h lehet csak. Tehát M következménye ***F***-nek.

<u>**Feladat:**</u> Lássuk be, hogy $\{X \to Y, Y \to Z\} \models_0 X \to Z$.

X	Y	Z	$X \to Y$	$Y \to Z$	$X \to Z$
i	i	i	i	i	i
i	i	h	i	h	h
i	h	i	h	i	i
i	h	h	h	i	h
h	i	i	i	i	i
h	i	h	i	h	i
h	h	i	i	i	i
h	h	h	i	i	i

Mivel a következmény igazsághalmazának részhalmaza a feltételeket kielégítő interpretációk halmaza, ezért igaz az állítás. Ez nem a legszűkebb következmény. Legszűkebb következmény: $(\neg X \wedge \neg Y) \vee (Y \wedge Z)$.

<u>Előrekövetkeztetéssel:</u> Ha $X \to Y$=i, akkor X=h vagy Y=i. *a)* Ha X=h és $Y \to Z$=i, akkor Y=h vagy Z=i. *b)* Ha Y=i és $Y \to Z$=i, akkor Z=i. Tehát $(\neg X \wedge \neg Y) \vee (\neg X \wedge Z) \vee (Y \wedge Z)$ a legszűkebb következmény. Mivel, ha $(\neg X \wedge Z)$=i, akkor $(\neg X \wedge \neg Y) \vee (Y \wedge Z)$=i, ezért ez utóbbi a legszűkebb következmény egyszerűbb alakja.

<u>**Feladat:**</u> Visszakövetkeztetéssel lássuk be, hogy $\{P \to Q \vee R, R \to \neg P \wedge Q, P \vee R\} \models_0 Q$. Tegyük fel, hogy Q=h. Ha $P \to Q \vee R$=i, akkor $P \to R$=i is teljesül. Ez azt jelenti, hogy P=h vagy R=i. *a)* Ha P=h és $P \vee R$=i, akkor R=i. *b)* Ha R=i és $R \to \neg P \wedge Q$=i, akkor $\neg P \wedge Q$=i kéne legyen, de Q=h, ami ennek ellentmond.

Konjunktív normálforma

Definíció: *Egy L formulát **literál**nak nevezünk, ha prímformula (azaz ítéletváltozó) vagy a negáltja.*

Definíció: *Egy C formulát **klóz**nak nevezünk, ha különböző alapú literálok diszjunkciója.*

Definíció: *Klózok konjunkcióját **konjunktív normálformá**nak nevezzük. (KNF)*

Példa: Adjuk meg az $(X \to Y) \wedge (Y \to Z)$ konjunktív normálformát az igazságtábla alapján.

X	Y	Z	$X \to Y$	$Y \to Z$	$(X \to Y) \wedge (Y \to Z)$
i	i	i	i	i	i
i	i	h	i	h	h
i	h	i	h	i	i
i	h	h	h	i	i
h	i	i	i	i	i
h	i	h	i	h	h
h	h	i	i	i	i
h	h	h	i	i	i

Az $X \wedge Y \wedge \neg Z$ csak akkor igaz, ha X=i és Y=i és Z=h.
Ebből következik, hogy a $\neg(X \wedge Y \wedge \neg Z)$ csak a megadott interpretációban hamis.
$\neg(X \wedge Y \wedge \neg Z) = \neg X \vee \neg Y \vee Z$
Hasonlóan $\neg X \wedge Y \wedge \neg Z$ csak akkor igaz, ha X=h és Y=i és Z=h.
Csak ebben az interpretációban hamis az $X \vee \neg Y \vee Z$ formula.

Tehát az $(X \to Y) \wedge (Y \to Z) = (\neg X \vee \neg Y \vee Z) \wedge (X \vee \neg Y \vee Z)$ kitüntetett konjunktív normálformával.

Példa: Adjuk meg az $(X \to Y) \wedge (Y \to Z)$ konjunktív normálformát ekvivalens átalakításokkal.

$(X \to Y) \wedge (Y \to Z) = (\neg X \vee Y) \wedge (\neg Y \vee Z)$

Rezolúció

Tétel: $F \models_0 G$ akkor és csak akkor, ha $F \cup \{\neg G\}$ kielégíthetetlen.

Definíció: Legyenek C_1 és C_2 pontosan 1 komplemens literált tartalmazó klózok, azaz $C_1 = C_1' \vee L$ és $C_2 = C_2' \vee \neg L$. Ekkor $C_1' \vee C_2'$ klózt C_1 és C_2 klózpár rezolvensének nevezzük.
Jelölés: $res(C_1,C_2) := C_1' \vee C_2'$

Megjegyzés: Ha $C_1 = L$ és $C_2 = \neg L$,akkor $res(C_1,C_2) = False$. Ezt üres klóznak is nevezzük.

Állítások formalizálása ítéletlogikában

Példa:

A1: Ha Aladár busszal utazik, és a busz késik, akkor nem ér oda a találkozóra.
A2: Ha nem ér oda a találkozóra és nem tud telefonálni, akkor nem kapja meg az állást.
A3: Ha rossz a kocsija, akkor busszal kell mennie.
A4: Aladárnak rossz napja van, mert a kocsija nem indul, rossz a telefonja és a busz késik.
B: Tehát Aladár nem kapja meg az állást.

Az eddigiek alapján lássuk be, hogy $\{A1,A2,A3,A4\} \models_0 B$ teljesül az előző feladatban kapott formulákra.

Ítéletváltozók: B: busszal utazik; K: késik a busz; O: odaér a találkozóra; T: tud telefonálni; R: rossz a kocsija; M: megkapja az állást.

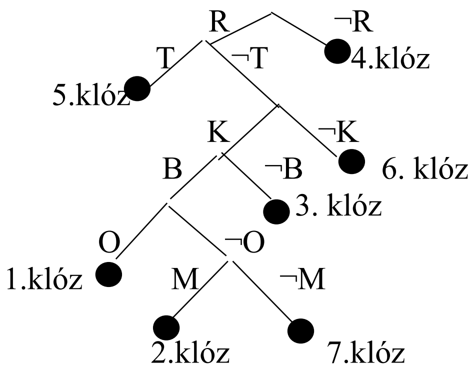
A1: $B \wedge K \rightarrow \neg O$
A2: $\neg O \wedge \neg T \rightarrow \neg M$
A3: $R \rightarrow B$
A4: $R \wedge \neg T \wedge K$
B: $\neg M$

Írjuk át a *A1,A2,A3,A4*, formulákat és az állítás tagadottját KNF-re.

A1: $\neg B \vee \neg K \vee \neg O$
A2: $O \vee T \vee \neg M$
A3: $\neg R \vee B$
A4: $R \wedge \neg T \wedge K$
¬B: M

Az így kapott formulák klózhalmaza:
{
1. $\neg B \vee \neg K \vee \neg O$,
2. $O \vee T \vee \neg M$,
3. $\neg R \vee B$,
4. R,
5. $\neg T$,
6. K,
7. M
}

Erről kell belátni, hogy kielégíthetetlen. Ha a ***szemantikusfa*** minden ágát lezárja valamelyik klóz, akkor egyszerre minden klóz nem kielégíthető.



Másik módszer a **rezolválás**.
Egy lehetséges rezolúciós levezetés a következő lépésekből áll:
Lépések sorszáma:

1. M
2. $O \lor T \lor \neg M$
3. $O \lor T$ res(1,2)
4. $\neg T$
5. O res(3,4)
6. $\neg B \lor \neg K \lor \neg O$
7. $\neg B \lor \neg K$ res(5,6)
8. K
9. $\neg B$ res(7,8)
10. $\neg R \lor B$
11. $\neg R$ res(9,10)
12. R
13. $\square$ (üres klóz) res(11,12)

Gyakorlás (házi feladat):
Formalizálja ítéletkalkulusban az alábbi szöveget és rezolúciós levezetéssel bizonyítsa, hogy a A1,A2 tautologikus következménye B!

A1: Ha elég ennivalót csomagoltam az útra, akkor nem leszek éhes.
A2: Ha nem leszek éhes, akkor jól érzem magam.
B: Tehát, ha nem érzem jól magam, akkor nem csomagoltam elég ennivalót az útra.