A számításelmélet alapjai II.
2. gyakorlat

<u>Cél:</u> Formulák kiértékelése, tulajdonságaiknak vizsgálata. Módszerek megismerése a formulák igaz-, illetve hamis halmazainak meghatározására. Következmény fogalom megismerése.

<u>Fogalmak:</u> igazságértékelés, kielégíthetőség, tautológia (ítéletlogikai törvény), ekvivalencia, tautologikus következmény, legszűkebb következmény, előre- és visszakövetkeztetés

---

Egy n-változós formula az igazságtáblájával megadott $\{h,i\}^n \to \{h,i\}$ leképezést ír le.
Egy formula **igazhalmaz**a azon I interpretációk halmaza, amelyekre a formula helyettesítési értéke **i**gaz. Egy formula **hamishalmaz**a azon I interpretációk halmaza, amelyekre a formula helyettesítési értéke **h**amis.

<u>Feladat:</u> Adjuk meg az alábbi formula nem prím részformuláit! Majd igazságtábla segítségével értékeljük ki a formulát!

$$P \to Q \to R \wedge \neg(R \to P)$$

$\alpha := R \to P$
$\beta := \neg\alpha$
$\gamma := R \wedge \beta$
$\delta := Q \to \gamma$
$\varepsilon := P \to \delta$

P	Q	R	α	β	γ	δ	ε
			R → P	¬(R → P)	R ∧ β	Q → γ	P → δ
							P → Q → R ∧ ¬(R → P)
i	i	i	i	h	h	h	**h**
i	i	h	i	h	h	h	**h**
i	h	i	i	h	h	i	**i**
i	h	h	i	h	h	i	**i**
h	i	i	h	i	i	i	**i**
h	i	h	i	h	h	h	**i**
h	h	i	h	i	i	i	**i**
h	h	h	i	h	h	i	**i**

<u>Gyakorlat:</u> Készítsük el az alábbi formulák igazságtábláját!

a) $P \wedge Q \to \neg Q \vee P$
b) $P \vee Q \to \neg(Q \wedge P)$
c) $(Q \to P \wedge R) \wedge \neg(P \vee R \to Q)$

Egy formula igazhalmaza/hamishalmaza rekurzív módon is előállítható.
Ennek eszköze a φA^{α} **igazságértékelés** függvény (α= i vagy h), amely a különböző formulák esetén az igazságtábla felírása nélkül megadja a formula közvetlen részformuláin keresztül azokat a φA^{i} és a φA^{h} feltételeket, amelyeket teljesítő interpretációkban a formula értéke **i** vagy **h** lesz.

A **φ-igazságértékelés** szabályai
1. ha A prímformula (ítéletváltozó): akkor a φA^{i} feltételt pontosan azok az interpretációk teljesítik amelyekben *I* (A)=i, a φA^{h} feltételt pedig azok amelyekben *I* (A)=h.
2. a $\varphi\,(\neg A)^{i}$ feltételek pontosan akkor teljesülnek, ha teljesülnek a φA^{h} feltételek.
3. a $\varphi\,(A\wedge B)^{i}$ feltételek pontosan akkor teljesülnek, ha teljesülnek a φA^{i} **és** a φB^{i} feltételek.
4. a $\varphi\,(A\vee B)^{i}$ feltételek pontosan akkor teljesülnek, ha teljesülnek a $\varphi\, A^{i}$ **vagy** a φB^{i} feltételek.
5. a $\varphi\,(A\rightarrow B)^{i}$ feltételek pontosan akkor teljesülnek, ha teljesülnek a φA^{h} **vagy** a $\varphi\, A^{i}$ feltételek.
6. a $\varphi\,(\neg A)^{h}$ feltételek pontosan akkor teljesülnek, ha teljesülnek a φA^{i} feltételek.
7. a $\varphi\,(A\wedge B)^{h}$ feltételek pontosan akkor teljesülnek, ha teljesülnek a φA^{h} **vagy** a φB^{h} feltételek.
8. a $\varphi\,(A\vee B)^{h}$ feltételek pontosan akkor teljesülnek, ha teljesülnek a φA^{h} **és** a φB^{h} feltételek.
9. a $\varphi\,(A\rightarrow B)^{h}$ feltételek pontosan akkor teljesülnek, ha teljesülnek a φA^{i} **és** a φA^{h} feltételek.

<u>Példa:</u>

$\varphi\,(X\rightarrow Y\wedge Z\vee\neg X)^{i}$, ha implikációs formula

φX^{h} 1.értékadás

$\varphi(Y\wedge Z\vee\neg X)^{i}$, ha diszjunkciós formula

konjunkciós formula $\varphi\,(Y\wedge Z)^{i}$,

φY^{i} 2. értékadás

φZ^{i}

$\varphi\,(\neg X)^{i}$, negációs formula

φX^{h} 3. értékadás

1. ág	2. ág	3. ág
X Y Z	X Y Z	X Y Z
h ~ ~	~ i i	h ~ ~

Az igazhalmaz

X	Y	Z
i	i	i
h	i	i
h	i	h
h	h	i
h	h	h

A hamishalmazt a formula hamissá válás feltételeinek megkeresésével kapjuk.

$\varphi\,(X \rightarrow Y \wedge Z \vee \neg X)^h$, ha $\qquad$ $\neg$ implikációs formula

1. értékadás $\qquad \varphi X^i$

$\varphi(Y \wedge Z \vee \neg X)^h$, ha $\qquad$ $\neg$diszjunkciós formula

$\varphi(\neg X)^h$

$\varphi\,(Y \wedge Z)^h$, ha

2. értékadás $\qquad \varphi X^i$

3. értékadás $\qquad \varphi Y^h \qquad \varphi\, Z^h$

bal ág	jobb. ág
X Y Z	X Y Z
i h ~	i ~ h

A hamishalmaz

X	Y	Z
i	i	h
i	h	i
i	h	h

<u>Gyakorlat:</u> Mely interpretációkban lesz az alábbi formulák értéke igaz?

a) $(\neg X \rightarrow \neg Y) \wedge (Z \wedge X \rightarrow \neg Y)$
b) $(\neg X \wedge Y) \rightarrow (\neg Z \wedge X \vee \neg Y)$

Mely interpretációkban lesz az alábbi formulák értéke hamis?

c) $(X \rightarrow Y \wedge Z) \wedge \neg(Z \vee Y \rightarrow X)$
d) $X \rightarrow Y \rightarrow X \wedge Y$

Definíció: *Azt mondjuk, hogy az ítéletlogikában egy I* ***interpretáció kielégít egy B formulát*** *($I \models_0 B$), ha a formula helyettesítési értéke* ***i*** *az I interpretációban.*
Definíció: *Azt mondjuk, hogy egy B formula* ***kielégíthető****, ha legalább egy interpretáció kielégíti.*
Definíció: *Azt mondjuk, hogy egy B formula* ***kielégíthetetlen****, ha egyetlen interpretáció sem elégíti ki.*
Definíció: *Azt mondjuk, hogy egy B formula* ***tautológia*** *($\models_0 B$), ha minden interpretáció kielégíti. A tautológiát* ***ítéletlogikai törvénynek*** *is nevezik.*

Legyen **F** = $\{A_1, A_2, \ldots, A_n\}$ formulahalmaz.
Definíció: *Azt mondjuk, hogy az ítéletlogikában egy I* ***interpretáció kielégít egy F formulahalmazt*** *($I \models_0 F$), ha a formulahalmaz minden formulájának helyettesítési értéke* ***i*** *az I interpretációban.*
Definíció: *Azt mondjuk, hogy egy F formulahalmaz* ***kielégíthető****, ha legalább egy interpretáció kielégíti.*
Definíció: *Azt mondjuk, hogy F formulahalmaz* ***kielégíthetetlen****, ha bármely interpretációban legalább egy formulája* ***h*** *(nincs olyan interpretáció, ami kielégítené).*

<u>Gyakorlat:</u> Mondjuk meg, hogy a korábbi formulák közül melyek tautológiák?

Definíció: *Ha két formula igazságtáblája azonos, ekkor azt mondjuk, hogy a formulák* ***tautologikusan ekvivalensek****.*
Ennek jelölésére a $\sim_0$ szimbólumot használjuk.

<u>Nevezetes ekvivalenciák:</u>

1.	$\neg\neg X \sim_0 X$	
2.	$X \vee X \sim_0 X$,	$X \wedge X \sim_0 X$
3.	$X \vee Y \sim_0 Y \vee X$,	$X \wedge Y \sim_0 Y \wedge X$
4.	$(X \vee Y) \vee Z \sim_0 X \vee (Y \vee Z)$,	$(X \wedge Y) \wedge Z \sim_0 X \wedge (Y \wedge Z)$
5.	$(X \vee Y) \wedge Z \sim_0 (X \wedge Z) \vee (Y \wedge Z)$,	$(X \wedge Y) \vee Z \sim_0 (X \vee Z) \wedge (Y \vee Z)$
6.	$(X \vee Y) \wedge Y \sim_0 Y$,	$(X \wedge Y) \vee Y \sim_0 Y$
7.	$X \rightarrow Y \sim_0 \neg X \vee Y$	
8.	$\neg(X \wedge Y) \sim_0 \neg X \vee \neg Y$,	$\neg(X \vee Y) \sim_0 \neg X \wedge \neg Y$
9.	$X \vee \neg X \sim_0$ True (tautológia),	$X \wedge \neg X \sim_0$ False (kelégíthetetlen)
10.	$X \vee$ True $\sim_0$ True	$X \wedge$ False $\sim_0$ False
11.	$X \vee$ False $\sim_0 X$	$X \wedge$ True $\sim_0 X$

<u>Egyszerűsítési szabályok:</u>
1. $(X \vee d) \wedge (\neg X \vee d) \sim_0 d$,ahol d elemi diszjunkció
2. $(X \wedge k) \vee (\neg X \wedge k) \sim_0 k$,ahol k elemi konjunkció.

<u>Feladat:</u> Az ekvivalencia szabályok segítségével lássuk be, hogy a következő formula tautológia!
$\models_0 A \rightarrow (B \rightarrow A)$

$A \rightarrow (B \rightarrow A) \underset{7.}{\sim_0} \neg A \vee (B \rightarrow A) \underset{7.}{\sim_0} \neg A \vee (\neg B \vee A) \underset{3.}{\sim_0} \neg A \vee (A \vee \neg B) \underset{4.}{\sim_0} (\neg A \vee A) \vee \neg B \underset{9.}{\sim_0} \text{True} \vee \neg B$
$\underset{3.}{\sim_0} \neg B \vee \text{True} \underset{10.}{\sim_0} \text{True}$

<u>Gyakorlat:</u> Az ekvivalencia szabályok segítségével lássuk be, hogy a következő formulák tautológiák!
a) $\models_0 (A \rightarrow B \rightarrow C) \rightarrow (A \rightarrow B) \rightarrow A \rightarrow C$
b) $\models_0 A \rightarrow B \rightarrow A \wedge B$

Definició: *Egy G formula az F={F1, F2, ..., Fn} formulahalmaznak* ***tautologikus következménye****, ha minden olyan I interpretációra, amelyre I $\models_0${F1, F2, ..., Fn} fennáll, I $\models_0$G is fennáll.*
Jelölés: {F1, F2, ..., Fn} $\models_0$G

Megjegyzés: Ha egy G formula bármely F feltételhalmaznak következménye, akkor G tautológia.

Előre- és visszakövetkeztetés

Definició: *Legyen a feltételhalmazban szereplő változók száma n. Ekkor a* ***legszűkebb következmény*** *az az $\{i,h\}^n \rightarrow \{i,h\}$ leképezés, amely pontosan azokhoz az interpretációkhoz rendel* ***i*** *értéket, amelyek kielégítik a feltételhalmazt.*

Megjegyzés: Ha F legszűkebb következménye R, akkor következmény minden olyan G formula, amelyre R→G tautológia, azaz R igazhalmaza része G igazhalmazának.

Előrekövetkeztetés: ismert az F feltételhalmaz, és keressük F lehetséges következményeit.

Példa. ***F***={Z→M∨P, Z, ¬P }

P	M	Z	Z→M∨P	Z	¬P	következmény
						h vagy i
h	i	i	**i**	**i**	**i**	i
						h vagy i

Csak egy igazságkiértékelésre kielégíthető a feltételhalmaz. Tehát a legszűkebb következmény : ¬P ∧ M ∧ Z. De következmény pl.: M ∧ Z, ¬P ∧ Z, M, stb.

Visszakövetkeztetés: Az F feltételhalmaz és a B következményformula ismeretében eldöntjük, hogy B valóban következménye-e F-nek. Mivel F $\models_0$B pontosan akkor, ha az {F∪{¬B}} formulahalmaz kielégíthetetlen. Más szóval B pontosan akkor következménye F-nek, ha minden olyan interpretációban, ahol B hamis az F kielégíthetetlen.

Példa: ***F***={Z→M∨P, Z, ¬P } és be kell látni, hogy M következmény. Be kell látni, hogy, ha ¬M igaz, akkor {Z→M∨P, Z, ¬P } nem lesz kielégíthető.
Ha minden feltételformula i legyen, akkor Z=i, P=h. Viszont ha M hamis, akkor Z→M∨P=h lehet csak. Tehát M következménye ***F***-nek.

Feladat: Lássuk be, hogy {X→Y, Y→Z} $\models_0$ X→Z.

X	Y	Z	X→Y	Y→ Z	X→Z
i	i	i	i	i	i
i	i	h	i	h	h
i	h	i	h	i	i
i	h	h	h	i	h
h	i	i	i	i	i
h	i	h	i	h	i
h	h	i	i	i	i
h	h	h	i	i	i

Mivel a következmény igazsághalmazának részhalmaza a feltételeket kielégítő interpretációk halmaza, ezért igaz az állítás. Ez nem a legszűkebb következmény. Legszűkebb következmény: (¬X∧¬Y) ∨ (Y∧Z).

<u>Előrekövetkeztetéssel:</u> Ha X→Y=i, akkor X=h vagy Y=i. *a)* Ha X=h és Y→Z=i, akkor Y=h vagy Z=i. *b)* Ha Y=i és Y→Z=i, akkor Z=i. Tehát (¬X∧¬Y) ∨ (¬X∧Z) ∨ (Y∧Z) a legszűkebb következmény. Mivel, ha (¬X∧Z)=i, akkor (¬X∧¬Y) ∨ (Y∧Z)=i, ezért ez utóbbi a legszűkebb következmény egyszerűbb alakja.

Feladat: Visszakövetkeztetéssel lássuk be, hogy {P → Q ∨ R , R → ¬P ∧Q, P ∨ R} $\models_0$ Q.
Tegyük fel, hogy Q=h. Ha P → Q ∨ R=i, akkor P → R=i is teljesül. Ez azt jelenti, hogy P=h vagy R=i. *a)* Ha P=h és P ∨ R=i, akkor R=i. *b)* Ha R=i és R → ¬P ∧Q=i, akkor ¬P ∧Q=i kéne legyen, de Q=h, ami ennek ellentmond.