# 6. gyakorlat

# Differenciálszámítás 4.

## • L'Hospital-szabályok

**<u>Emlékeztető</u>.**

**L'Hospital-szabály a $\frac{0}{0}$ esetben.** *Tegyük fel, hogy $f, g \in \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ és*

$$\left.\begin{array}{l} \bullet\ f, g \in D(a,b),\ \big(-\infty \le a < b < +\infty\big), \\ \bullet\ g(x) \ne 0 \text{ és } g'(x) \ne 0 \ \ \big(x \in (a,b)\big), \\ \bullet\ \lim\limits_{a+0} f = \lim\limits_{a+0} g = 0, \\ \bullet\ \exists \lim\limits_{a+0} \dfrac{f'}{g'} \in \overline{\mathbb{R}} \text{ határérték.} \end{array}\right\} \Longrightarrow \begin{array}{c} \exists \lim\limits_{a+0} \dfrac{f}{g} \quad \text{és} \\ \\ \lim\limits_{a+0} \dfrac{f}{g} = \lim\limits_{a+0} \dfrac{f'}{g'} \in \overline{\mathbb{R}}. \end{array}$$

A **bal oldali határértékre**, valamint a (kétoldali) **határértékre** hasonló állítások érvényesek.

Ugyanezeket mondhatjuk el a $\frac{\pm\infty}{\pm\infty}$ típusú kritikus határértékekre is.

A többi típusú kritikus határértéket (pl. $(+\infty)+(-\infty)$, $0\cdot(\pm\infty)$, $0^0$, $1^{+\infty}$) vezessük vissza $\frac{0}{0}$ vagy $\frac{\pm\infty}{\pm\infty}$ típusú határértékre.

A feladatmegoldások során először döntsük el, hogy milyen típusú kritikus határértékről van szó, ezután ellenőrizük a L'Hospital-tétel feltételeit. □

**1. feladat.** *Számítsuk ki az alábbi határértékeket:*

(a) $\displaystyle \lim_{x\to 1} \frac{x^2-1}{2x^2-x-1}$, (b) $\displaystyle \lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{tg} x - x}{x - \sin x}$.

**Megoldás.**

**(a)** $\frac{0}{0}$ típusú kritikus határértékről van szó. A L'Hospital-szabály feltételei teljesülnek, ezért a tétel alkalmazható:

$$\lim_{x\to 1} \frac{x^2-1}{2x^2-x-1} \overset{\frac{0}{0}}{=} (\text{L'Hospital}) = \lim_{x\to 1} \frac{2x}{4x-1} = \frac{2}{3}.$$

(A feladatot a következőképpen is meg lehet oldani:

$$\lim_{x\to 1} \frac{x^2-1}{2x^2-x-1} = \lim_{x\to 1} \frac{(x-1)(x+1)}{(x-1)(2x+1)} = \lim_{x\to 1} \frac{x+1}{2x+1} = \frac{2}{3}.\Big)$$

**(b)** Most is $\frac{0}{0}$ típusú kritikus határértékről van szó. A L'Hospital-szabály feltételei teljesülnek, ezért a tétel alkalmazható:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{tg} x - x}{x - \sin x} \overset{\frac{0}{0}}{=} (\text{L'Hospital}) = \lim_{x\to 0} \frac{\dfrac{1}{\cos^2 x} - 1}{1 - \cos x} = \lim_{x\to 0} \frac{1-\cos^2 x}{(1-\cos x)\cdot \cos^2 x} =$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{(1-\cos x)(1+\cos x)}{(1-\cos x)\cdot\cos^2 x} = \lim_{x\to 0} \frac{1+\cos x}{\cos^2 x} = \frac{2}{1} = 2.\ \blacksquare$$

**2. feladat.** *Számítsuk ki az alábbi határértékeket:*

(a) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{e^x-1}\right)$, (b) $\lim\limits_{x\to 1-0}\ln x\cdot\ln(1-x)$,

(c) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(xe^{1/x}-x\right)$.

**Megoldás.**

**(a)** Az összeg egyik tagjának sincs határértéke a 0 pontban. Először alakítsuk át a kifejezést! Mivel

$$\frac{1}{x}-\frac{1}{e^x-1}=\frac{e^x-1-x}{x(e^x-1)},$$

ezért ez már egy $\frac{0}{0}$ típusú kritikus határérték 0-ban, és a L'Hospital-tétel feltételei is teljesülnek. Így

$$\underbrace{\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{e^x-1}\right)}=\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1-x}{x(e^x-1)}\overset{\frac{0}{0}}{=}\text{ (L'Hospital) }=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{1\cdot(e^x-1)+x\cdot e^x}\overset{\frac{0}{0}}{=}\text{ (L'Hospital) }\overset{\frac{0}{0}}{=}\lim_{x\to 0}\frac{e^x}{e^x+1\cdot e^x+xe^x}=\underbrace{\frac{1}{2}}.$$

**(b)** Mivel

$$\lim_{x\to 1-0}\ln x=\lim_{x\to 1}\ln x=\ln 1=0\quad\text{és}\quad\lim_{x\to 1-0}\ln(1-x)\overset{y=1-x}{=}\lim_{y\to 0+0}\ln y=-\infty,$$

ezért $0\cdot(-\infty)$ típusú határértékről van szó. Ezt először $\frac{-\infty}{-\infty}$ típusú kritikus határértékre alakítjuk át.

$$\underbrace{\lim_{x\to 1-0}\ln x\cdot\ln(1-x)}\overset{0\cdot(-\infty)}{=}\lim_{x\to 1-0}\frac{\ln(1-x)}{\dfrac{1}{\ln x}}=\overset{\frac{-\infty}{-\infty}}{=}\text{ (L}'\text{Hospital) }=$$

$$=\lim_{x\to 1-0}\frac{\dfrac{1}{1-x}\cdot(-1)}{-\dfrac{1}{(\ln x)^2}\cdot\dfrac{1}{x}}=\lim_{x\to 1-0}\frac{x}{1-x}\ln^2 x=\left(\lim_{x\to 1-0}x\right)\cdot\lim_{x\to 1-0}\frac{\ln^2 x}{1-x}=$$

$$=1\cdot\lim_{x\to 1-0}\frac{\ln^2 x}{1-x}\overset{\frac{0}{0}}{=}\text{ (L}'\text{Hospital) }=\lim_{x\to 1-0}\frac{2\cdot\ln x\cdot\dfrac{1}{x}}{-1}=(-2)\cdot\lim_{x\to 1-0}\frac{\ln x}{x}=(-2)\cdot\frac{0}{1}\underbrace{=0}.$$

**(c)** Mivel $\lim\limits_{x\to+\infty}e^{1/x}\overset{y=1/x}{=}\lim\limits_{y\to 0}e^y=e^0=1$ (ui. $\exp\in C\{0\}$) és $\lim\limits_{x\to+\infty}x=+\infty$, ezért $(+\infty)-(+\infty)$ típusú határértékről van szó. Ezt először átalakítjuk:

$$\underbrace{\lim_{x\to+\infty}\left(xe^{1/x}-x\right)}=\lim_{x\to+\infty}x\cdot\left(e^{1/x}-1\right)\overset{(+\infty)\cdot 0}{=}\lim_{x\to+\infty}\frac{e^{1/x}-1}{\dfrac{1}{x}}\overset{\frac{0}{0}}{=}$$

$$\overset{\frac{0}{0}}{=}\text{ (L}'\text{Hospital) }=\lim_{x\to+\infty}\frac{e^{1/x}\cdot\left(-\dfrac{1}{x^2}\right)}{-\dfrac{1}{x^2}}=\lim_{x\to+\infty}e^{1/x}\underbrace{=1}.\ \blacksquare$$

**3. feladat.** *Mutassuk meg, hogy a*

$$\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}$$

*határérték létezik, és azt számítsuk is ki.*

**Megoldás.** $1^{+\infty}$ típusú kritikus határértékről van szó (1-hez közeli szám nagy kitevőjű hatványa bármi lehet).

A szóban forgó kifejezés $\boxed{f(x)^{g(x)}}$ alakú, ahol tehát az alap és a kitevő is változik. Az átalakításhoz a többször már „bevált” **ötletet** alkalmazzuk: az $a=e^{\ln a}$ $(a>0)$ azonosság alapján az alapot $e$ hatványaként írjuk fel. Mivel

$$f(x)^{g(x)}=\left(e^{\ln f(x)}\right)^{g(x)}=e^{g(x)\cdot\ln f(x)},$$

ezért

$$\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}=\left(e^{\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)}\right)^{x}=e^{x\cdot\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)}\quad(x>0).$$

Nézzük először a kitevő határértékét:

$$\lim_{x\to+\infty}x\cdot\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)\overset{(+\infty)\cdot 0}{=}\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)}{\frac{1}{x}}\overset{\frac{0}{0}}{=}(\text{L'Hospital})=$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{1}{1+\frac{1}{x}}\cdot\left(-\frac{1}{x^2}\right)}{-\frac{1}{x^2}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{1+\frac{1}{x}}=\frac{1}{1+0}=1.$$

Az exp függvény folytonos az 1 pontban, ezért

$$\lim_{x\to+\infty}e^{x\cdot\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)}=e^{\lim\limits_{x\to+\infty}x\cdot\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)}=e^{1}=e.$$

A megadott határérték tehát létezik és az $e$ számmal egyenlő . ■

**Megjegyzés.** A határértékre vonatkozó átviteli elvet a $(+\infty)$-hez tartó $n$ $(n\in\mathbb{N})$ sorozatra alkalmazva kapjuk, hogy

$$\lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}=e.$$

Emlékeztetünk arra, hogy az Analízis I-ben megmutattuk azt, hogy az

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}\quad\left(1\le n\in\mathbb{N}\right)$$

sorozat konvergens, és az $e$ számot ennek a határértékével **definiáltuk**. □

## • Taylor-polinomok és Taylor-sorok

**Emlékeztető**.

$\boxed{\textbf{1.}}$ *Ha $f \in D^\infty\{a\}$, akkor a*

$$T_a(f,x) := f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \cdots + \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k + \cdots =$$
$$= \sum_{k=0} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k \quad (x \in \mathbb{R})$$

*hatványsort az $f$ **függvény** $a \in \operatorname{int} \mathcal{D}_f$ **ponthoz tartozó Taylor-sorának** nevezzük.*

$\boxed{\textbf{2.}}$ *Ha $n \in \mathbb{N}$ és $f \in D^n\{a\}$, akkor a Taylor-sor $n$-edik részletösszegét, vagyis a*

$$T_{a,n}(f,x) := f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n =$$
$$= \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k \quad (x \in \mathbb{R})$$

*polinomot az $f$ **függvény** $a \in \operatorname{int} \mathcal{D}_f$ **ponthoz tartozó $n$-edik Taylor-polinomjának** nevezzük.*

$\boxed{\textbf{3.}}$ Az előadáson felvetettük a **sorfejtés problémáját**. Láttuk, hogy minden konvergens hatványsor az $f$ összegfüggvényének a Taylor-sorával egyenlő. Ezek szerint, ha egy $f$ függvény előállítható konvergens hatványsor összegfüggvényeként, akkor a szóban forgó sor szükségképpen $f$ Taylor-sora, és ennek konvergenciahalmazán előállítja az $f$ függvényt. Mivel az $\exp, \sin, \cos, \operatorname{sh}, \operatorname{ch}$ függvények végtelen sokszor deriválhatók $\mathbb{R}$-en, ezért a definícióikban megadott hatványsorok a szóban forgó függvények $a = 0$ ponthoz tartozó Taylor-sorai. A Taylor-sorok szintén az egész $\mathbb{R}$-en konvergensek és előállítják a függvényeket.

$\boxed{\textbf{4.}}$ Megismertük a sorfejtés általános problémájának vizsgálatánál alkalmazható alábbi fontos állítást:

**Taylor-formula**. *Legyen $n \in \mathbb{N}$, és tegyük fel, hogy $f \in D^{n+1}\big(K(a)\big)$. Ekkor*

$$\forall\, x \in K(a) \ \ \textit{ponthoz} \ \ \exists\, \xi \ \ \textit{a és x között}:$$

$$f(x) - T_{a,n}(f,x) = f(x) - \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}. \ \square$$

### 4. feladat.

(a) *Mutassuk meg, hogy bármely $P$ polinomot bármely $a \in \mathbb{R}$ ponthoz tartozó Taylor-sora mindenütt előállítja, azaz ha $P$ tetszőleges legfeljebb $n$-edfokú polinom és $a \in \mathbb{R}$ egy tetszőlegesen megadott középpont, akkor minden $x \in \mathbb{R}$ esetén*

$$P(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{P^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k.$$

(b) *Írjuk fel a $2x^3 + 5x^2 + 3x + 1$ polinomot $(x+1)$ hatványai szerint.*

**Megoldás. (a)** Tekintsünk egy tetszőleges legfeljeb $n$-edfokú $P$ polinomot, és egy adott $a \in \mathbb{R}$ számot. Mivel $P^{(m)} \equiv 0$ minden $m > n$ esetén, ezért a Taylor-formulából következik, hogy

$$P(x) - \sum_{k=0}^{n} \frac{P^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k = 0 \quad \big(\forall\, x \in \mathbb{R}\big),$$

és ez az állítás bizonyítását jelenti.

**(b)** Legyen $P(x) := 2x^3 + 5x^2 + 3x + 1$ $(x \in \mathbb{R})$ és $a := -1$. Ekkor

$$P'(x) = 6x^2 + 10x + 3, \quad P''(x) = 12x + 10, \quad P'''(x) = 12,$$
$$P^{(m)}(x) = 0 \quad \big(x \in \mathbb{R},\ 4 \le m \in \mathbb{N}\big)$$

és

$$P^{(0)}(-1) = P(-1) = 1, \quad P'(-1) = -1, \quad P''(-1) = -2, \quad P'''(-1) = 12,$$

ezért

$$2x^3 + 5x^2 + 3x + 1 =$$
$$= P(x) = P^{(0)}(-1) + \frac{P'(-1)}{1!}(x+1) + \frac{P''(-1)}{2!}(x+1)^2 + \frac{P'''(-1)}{3!}(x+1)^3 =$$
$$= 1 - (x+1) - (x+1)^2 + 2(x+1)^3 \quad (x \in \mathbb{R})\,. \ \blacksquare$$

**5. feladat.** *Számítsuk ki az* arc tg *függvény deriváltjait a* 0 *pontban.*

**Megoldás.** Az első két derivát $\operatorname{arc\,tg}'(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$ és $\operatorname{arc\,tg}''(x) = -\dfrac{2x}{(1+x^2)^2}$ minden $x \in \mathbb{R}$ pontban, ezért $\operatorname{arc\,tg}'(0) = 1$ és $\operatorname{arc\,tg}''(0) = 0$. A további deriváltak meghatározása így hosszadalmas számolást igényel.

Az előadáson azonban láttuk, hogy az arc tg függvényt a 0 pont körüli Taylor-sora előállítja $[-1,1]$-en:

$$\operatorname{arc\,tg} x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \cdots = \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^{2n-1}}{2n-1} =$$
$$= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\operatorname{arc\,tg}^{(n)}(0)}{n!} x^n \quad \big(x \in [-1,1]\big).$$

Így

$$\operatorname{arc\,tg}^{(2k)}(0) = 0 \quad \text{és} \quad \operatorname{arc\,tg}^{(2k+1)}(0) = (-1)^k \cdot (2k)! \quad (k = 0, 1, 2, \ldots). \ \blacksquare$$

**6. feladat.** *Milyen* $x \in \mathbb{R}$ *pontban konvergens az*

$$1 + 2x + 3x^2 + 4x^3 + \cdots + nx^{n-1} + \cdots$$

*hatványsor, és mi az összegfüggvény?*

**Megoldás.**

**Konvergencia**. Ha $x = 0$, akkor a sor nyilván konvergens. Ha $x \neq 0$ valós szám, akkor (például) a hányadoskritériumból következik, hogy

$$\left| \frac{(n+1)x^n}{nx^{n-1}} \right| = \left(1 + \frac{1}{n}\right) \cdot |x| \to |x|, \quad \text{ha } n \to +\infty,$$

ezért a sor $|x| < 1$, vagyis $x \in (-1,1)$ esetén konvergens. Az $x = \pm 1$ pontokban pedig divergens, mert a tagjaiból képzett sorozatok nem nullasorozatok. A sor konververgenciahalmaza tehát a $(-1,1)$ intervallum.

**Az összegfüggvény meghatározásához** vegyük észre azt, hogy a megadott sor a $\sum_{n=1} x^n$ ($x \in \mathbb{R}$) hatványsor (ennek konvergenciahalmaza szintén a $(-1,1)$ intervallum) deriváltsora. A hatványsor deriválására vonatkozó tétel szerint

$$\Big(\sum_{n=1} x^n\Big)' = \big(x+x^2+x^3+\cdots+x^n+\cdots\big)' = 1+2x+3x^2+\cdots+nx^{n-1}+\cdots \quad \big(x \in (-1,1)\big).$$

A geometriai sor összegére vonatkozó képlet alapján

$$x + x^2 + x^3 + \cdots + x^n + \cdots = x \cdot \big(1 + x + x^2 + \cdots + x^{n-1} + \cdots\big) = \frac{x}{1-x} \quad \big(|x| < 1\big),$$

ezért

$$\Big(\frac{x}{1-x}\Big)' = \frac{1}{(1-x)^2} = 1 + 2x + 3x^2 + \cdots \quad \big(|x| < 1\big).$$

Beláttuk tehát azt, hogy

$$1 + 2x + 3x^2 + 4x^3 + \cdots + nx^{n-1} + \cdots = \frac{1}{(1-x)^2}, \quad \text{ha } x \in (-1,1)\,. \ \blacksquare$$

**Megjegyzés.** Emlékeztetünk arra, hogy számsorok, illetve hatványsorok konvergenciahalmazát az Analízis I. tantárgyban megismert gyök-, illetve hányadoskritérium segítségével sok esetben könnyen meg tudjuk határozni. A sorok összegének kiszámolására ezek az állítások nem használhatók.

A feladatban bemutatott gondolatmenettel azonban lényegesen ki lehet bővíteni azon sorok körét, amelyeknek az összegét is meg tudjuk határozni. $\square$

**7. feladat.** *Legyen*

$$f(x) := \frac{1}{\sqrt[3]{1+x}} \quad (x > -1).$$

(a) *Írjuk fel az $f$ függvény 0 pont körüli harmadfokú Taylor-polinomját, és határozzuk meg, hogy a $\big[0, \frac{1}{10}\big]$ intervallumon mekkora hibával közelíti meg a Taylor-polinom a függvényt.*

(b) *Az (a)-ban kapott becslés felhasználásával számítsuk ki az $A := \dfrac{1}{\sqrt[3]{1030}}$ szám egy közelítő értékét, és a közelítés hibáját.*

**Megoldás. (a)** Az $f(x) = (1+x)^{-1/3}$ $(x > -1)$ függvény akárhányszor deriválható, és minden $x > -1$ pontban

$$f'(x) = -\tfrac{1}{3}(1+x)^{-4/3}, \quad f''(x) = \tfrac{4}{9}(1+x)^{-7/3}, \quad f'''(x) = -\tfrac{28}{27}(1+x)^{-10/3},$$

ezért

$$f(0) = 1, \qquad f'(0) = -\frac{1}{3}, \qquad f''(0) = \frac{4}{9}, \qquad f'''(0) = -\frac{28}{27}.$$

Az $f$ függvény 0 ponthoz tartozó harmadfokú Taylor-polinomja:

$$T_{0,3}(f,x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \frac{f'''(0)}{3!}x^3 = 1 - \frac{1}{3}x + \frac{2}{9}x^2 - \frac{14}{81}x^3,$$

ezért $f(x)$-re az

$$f(x) \approx 1 - \frac{1}{3}x + \frac{2}{9}x^2 - \frac{14}{81}x^3$$

közelítő képletet használjuk.

A hibabecsléshez a Taylor-formulát alkalmazzuk a Lagrange-féle maradéktaggal. Legyen $x \in \left(0, \frac{1}{10}\right]$. Ekkor létezik olyan $\xi$ a 0 és az $x$ pont között, hogy

$$f(x) - T_{0,3}(f,x) = \frac{f^{(4)}(\xi)}{4!} \cdot x^4.$$

Mivel $f^{(4)}(\xi) = \frac{280}{81(1+\xi)^{13/3}}$ és $0 < \xi < x < \frac{1}{10}$, ezért $|f^{(4)}(\xi)| \le \frac{280}{81}$. Ezt felhasználva azt kapjuk, hogy

$$\left| f(x) - T_{0,3}(f,x) \right| \le \frac{280}{81} \cdot \frac{1}{4!} \cdot 10^{-4} = \frac{7}{486000} \approx 0,0000144, \quad \text{ha } \ 0 < x < \tfrac{1}{10},$$

azaz

$$\underset{\sim\sim\sim}{\left| \frac{1}{\sqrt[3]{1+x}} - \left(1 - \frac{1}{3}x + \frac{2}{9}x^2 - \frac{14}{81}x^3\right) \right| \le \frac{7}{486000}, \quad \text{ha } \ 0 < x < \frac{1}{10}}\,.$$

**(b)** Vegyük észre, hogy $A := \frac{1}{\sqrt[3]{1030}} = \frac{1}{10\sqrt[3]{1+\frac{3}{100}}}$, és számítsuk ki először a $B := \frac{1}{\sqrt[3]{1+\frac{3}{100}}} = f\left(\frac{3}{100}\right)$ szám egy közelítő értékét. Az (a)-ban kapott képlet alapján

$$B = f\left(\frac{3}{100}\right) \approx T_{0,3}\left(\frac{3}{100}\right) = 1 - \frac{1}{3} \cdot \frac{3}{100} + \frac{2}{9} \cdot \left(\frac{3}{100}\right)^2 - \frac{14}{81}\left(\frac{3}{100}\right)^3 = 0,990195\dot{3}.$$

A hibabecsléshez a Taylor-formulát alkalmazzuk most a $\left(0, \frac{3}{100}\right]$ intervallumon. Létezik olyan $\xi \in \left(0, \frac{3}{100}\right)$, hogy

$$\left| f\left(\frac{3}{100}\right) - T_{0,3}\left(\frac{3}{100}\right) \right| \le \frac{\left|f^{(4)}(\xi)\right|}{4!} \cdot \left(\frac{3}{100}\right)^4 \le \frac{280}{81} \cdot \frac{1}{4!} \cdot \left(\frac{3}{100}\right)^4 = \frac{35}{3} \cdot 10^{-8} <$$
$$< \frac{36}{3} \cdot 10^{-8} = 1,2 \cdot 10^{-7}.$$

Így $A$ egy közelítő értéke

$$A = \frac{B}{10} \approx 0,0990195\dot{3},$$

és a közelítés hibája

$$\left| A - 0,0990195\dot{3} \right| < 1.2 \cdot 10^{-8}. \ \blacksquare$$

**8. feladat.** *Számítsuk ki* $\sin 1$ *értékét* 5 *tizedesjegy pontossággal.*

**Megoldás.** Az, hogy egy számot 5 tizedesjegyre pontosan adunk meg, azt jelenti, hogy a közelítő érték és a valódi érték eltérése nem nagyobb, mint $\frac{1}{2} \cdot 10^{-5}$.

Alkalmazzuk a sin függvényre az $a = 0$ pont körüli Taylor-formulát rögzített $x > 0$ pontban a $(0, x)$ intervallumon. Ekkor tetszőleges $n \in \mathbb{N}$ esetén $\exists \xi_x \in (0, x)$, hogy

$$\left| \sin x - \left(x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}\right) \right| = \left| \frac{\sin^{(2n+2)}(\xi_x)}{(2n+2)!} x^{2n+2} \right| \le \frac{|x|^{2n+2}}{(2n+2)!}.$$

Ha $x = 1$, akkor azt kapjuk, hogy

$$\left| \sin 1 - \left(1 - \frac{1}{3!} + \frac{1}{5!} - \cdots + (-1)^n \frac{1}{(2n+1)!}\right) \right| \le \frac{1}{(2n+2)!}.$$

Most azt a legkisebb $n \in \mathbb{N}$ számot kell megválasztanunk, amelyre fennáll az

$$\frac{1}{(2n+2)!} \le \frac{1}{2} \cdot 10^{-5} \qquad \Longleftrightarrow \qquad 200\,000 \le (2n+2)!$$

egyenlőtlenség. Mivel $8! = 40\,320$ és $10! = 3\,628\,800$, ezért $n = 4$.

Így az adódik, hogy

$$\left|\sin 1 - \left(1 - \frac{1}{3!} + \frac{1}{5!} - \frac{1}{7!} + \frac{1}{9!}\right)\right| \le \frac{1}{10!} \le \frac{1}{2} \cdot 10^{-5} = 0,000005.$$

Ha

$$C := 1 - \frac{1}{3!} + \frac{1}{5!} - \frac{1}{7!} + \frac{1}{9!} = \frac{305\,353}{362\,880} = 0,8414710\ldots,$$

akkor

$$C - 0,000005 \le \sin 1 \le C + 0,000005.$$

Legyen tehát

$$\underline{A := 0,841471}$$

a $\sin 1$ egy közelítése. Ez 5 tizedesjegyre pontos, mert az előzőek alapján

$$0,841466 = A - 0,000005 \le \sin 1 \le A + 0,000005 = 0,841476. \blacksquare$$

**9. feladat.** *Adja meg a következő függvények* 0 *pont körüli Taylor-sorát:*

(a) $f(x) := \sin^3 x \quad (x \in \mathbb{R})$,

(b) $f(x) := \dfrac{1}{x^2 - 5x + 6} \quad (x \in \mathbb{R} \setminus \{2, 3\})$.

*Milyen intervallumon állítja elő a Taylor-sor a függvényt?*

**Megoldás.**

**Megjegyzés**. Egy $f$ függvény 0 pont körüli Taylor-sorának a felírásához ismernünk kell *minden* $n \in \mathbb{N}$ számra az $f^{(n)}(0)$ függvényértékeket. Ezek meghatározása az „esetek többségében” nem egyszerű feladat. Már *ismert* Taylor-sorok felhasználásával a feladat azonban jóval *egyszerűbben* is megoldható. Itt is ilyen eljárásokat fogunk bemutatni. □

**(a)** Az alapvető trigonometrikus képleteket felhasználva $\sin^3 x$ a következőképpen „linearizálható”:

$$\underline{\sin^3 x} = \sin x \cdot \left(1 - \cos^2 x\right) = \sin x - \sin x \cdot \frac{1 + \cos 2x}{2} =$$
$$= \frac{\sin x}{2} - \frac{1}{2} \cdot \frac{\sin(x + 2x) + \sin(x - 2x)}{2} = \underline{\frac{3}{4}\sin x - \frac{1}{4}\sin 3x} \quad (x \in \mathbb{R}).$$

Tudjuk, hogy a sin függvényt a 0 pont körüli Taylor-sora előállítja:

$$\sin x = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} \quad (x \in \mathbb{R}).$$

Így azonnal felírhatjuk a $g(x) := \sin 3x$ $(x \in \mathbb{R})$ függvény 0 pont körüli Taylor-sorát. Ez a sor is az egész $\mathbb{R}$-en előállítja $g$-t, ezért

$$\sin 3x = \sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n \frac{(3x)^{2n+1}}{(2n+1)!} = \sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n \cdot 3^{2n+1} \cdot \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} \quad (x \in \mathbb{R}).$$

A fentiek alapján tehát *egyszerűen* megkapjuk a kérdezett Taylor-sort. Ez a sor is egész $\mathbb{R}$-en előállítja a $\sin^3$ függvényt, ezért

$$\sin^3 x = \sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n \cdot \frac{3}{4} \cdot \left(1 - 3^{2n}\right) \cdot \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} \quad (x \in \mathbb{R})\,.$$

**(b)** Vegyük észre, hogy az

$$\frac{1}{x^2 - 5x + 6} = \frac{1}{(x-3)(x-2)} = \frac{1}{x-3} - \frac{1}{x-2} \quad \big(x \in \mathbb{R} \setminus \{2, 3\}\big)$$

azonosság alapján a törtet két egyszerű alakú tört összegére bonthatjuk. Itt a törtek mindegyike geometriai sor összegeként fogható fel.

Például az elsőt ilyen alakban is írhatjuk:

$$\frac{1}{x-3} = \frac{-1}{3-x} = \frac{-1}{3\left(1 - \frac{x}{3}\right)} = -\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{1 - \frac{x}{3}}.$$

Itt a második tényező $|x| < 3$ esetén az $\frac{x}{3}$ hányadosú geometriai összegeként fogható fel. Tehát, ha $x \in (-3, 3)$, akkor

$$\frac{1}{x-3} = -\frac{1}{3}\left(1 + \frac{x}{3} + \frac{x^2}{3^2} + \cdots + \frac{x^n}{3^n} + \cdots\right) = -\frac{1}{3} - \frac{x}{3^2} - \frac{x^2}{3^3} - \cdots - \frac{x^n}{3^{n+1}} - \cdots\,.$$

Hasonlóan:

$$-\frac{1}{x-2} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1 - \frac{x}{2}} = \frac{1}{2} + \frac{x}{2^2} + \frac{x^2}{2^3} + \cdots + \frac{x^n}{2^{n+1}} + \cdots\,, \quad \text{ha } x \in (-2, 2).$$

Elvégezve a tagonkénti összeadást megkapjuk az $f$ függvény 0 pont körüli Taylor-sorát. A fentiekből az is követezik, hogy a Taylor sor a $(-2, 2)$ intervallumban állítja elő az $f$ függvényt:

$$f(x) = \frac{1}{x^2 - 5x + 6} = \frac{1}{6} + \frac{5}{6^2}x + \frac{19}{6^3}x^2 + \cdots + \frac{3^{n+1} - 2^{n+1}}{6^{n+1}}x^n + \cdots\,. \blacksquare$$