7. gyakorlat

Primitív függvények meghatározására vonatkozó módszerek 1.

A továbbiakban I-vel mindig $\mathbb{R}$ valamely nyílt intervallumát jelöljük.

Emlékeztető.

1^o Az előadáson láttuk, hogy primitív függvény keresése bizonyos értelemben a deriválás műveletének „megfordítása" (inverze). Arról is volt szó, hogy miért érdemes (fontos) közelebbről tanulmányozni ezt a problémát (l. pl. a Newton–Leibniz-tételt).

Definíció. *Azt mondjuk, hogy az adott $f : I \to \mathbb{R}$ függvénynek $F : I \to \mathbb{R}$ egy **primitív függvénye**, ha $F \in D(I)$ és $F'(x) = f(x)$ $(x \in I)$.*

Ha a F függvény primitív függvénye f-nek, akkor $\forall\, c \in \mathbb{R}$ esetén $F + c$ is primitív függvénye f-nek, mert a konstansfüggvény deriváltaja 0.

2^o A primitív függvényekre vonatkozó állításokból itt csak a következőket emeljük ki:

T1. *Ha $f : I \to \mathbb{R}$ **folytonos** függvény, akkor f-nek **van** primitív függvénye.*

T2. *Ha az $f : I \to \mathbb{R}$ függvénynek van egy F primitív függvénye, akkor végtelen sok is van, de azok F-től csak egy konstansban különböznek.*

A **T2.** állítás nem igaz, ha f értelmezési tartománya *nem intervallum.*

Definíció. *Az $f : I \to \mathbb{R}$ függvény primitív függvényeinek a halmazát f **határozatlan integráljának** nevezzük, és az $\boxed{\int f}$ vagy $\boxed{\int f(x)\,dx}$ szimbólumok valamelyikével jelöljük.*

Az **T1.** állítást úgy is megfogalmazhatjuk, hogy ha f folytonos, akkor $\int f \neq \emptyset$. A **T2.** állításból pedig az következik, hogy

$$\int f = \{F + c \mid c \in \mathbb{R}\}.$$

Ezt az egyenlőséget rövidebben (és kevésbé precízen) így fogjuk jelölni:

$$\int f(x)\,dx = F(x) + c \quad (x \in I,\ c \in \mathbb{R}) \quad \text{vagy} \quad \int f(x)\,dx = F(x) + c \quad (x \in I).$$

(Az adott f függvény értelmezési tartományát – vagyis az I intervallumot – mindig feltüntetjük, és időnként a $c \in \mathbb{R}$ feltételt a képletbe „beleértjük", de azt nem írjuk ki.)

3^o Amikor függvények primitív függvényeit keressük, akkor ugyanazt a módszert kell követnünk, amelyet a határérték és a deriváltak kiszámításánál alkalmaztunk. Először is szükségünk van egy listára, amely megadja a legegyszerűbb függvények primitív függvényeit. Ezek az ún. **alapintegrálok**. Ezen kívül ismernünk kell a deriválási szabályok „megfordításaiból" adódó **integrálási szabályokat**.

1. Alapintegrálok, a határozatlan integrál linearitása

Emlékeztető.

1^o Az alapintegrálokat ebben a táblázatban soroltuk fel.

2^o A határozatlan integrál linearitása: *Ha az $f, g : I \to \mathbb{R}$ függvényeknek létezik primitív függvénye, akkor tetszőleges $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ mellett $(\alpha f + \beta g)$-nek is létezik primitív függvénye és*

$$\int \big(\alpha f(x) + \beta g(x)\big)\,dx = \alpha \int f(x)\,dx + \beta \int g(x)\,dx \quad (x \in I).$$

1. feladat. *Számítsuk ki az alábbi határozatlan integrálokat:*

(a) $\displaystyle\int \sqrt{x\sqrt{x\sqrt{x}}}\,dx \quad \big(x\in(0,+\infty)\big)$,

(b) $\displaystyle\int \frac{x^2}{x^2+1}\,dx \quad \big(x\in\mathbb{R}\big)$,

(c) $\displaystyle\int \frac{(x+1)^2}{x^3}\,dx \quad \big(x\in(0,+\infty)\big)$,

(d) $\displaystyle\int \frac{3\cos^2 x+2}{\cos 2x-1}\,dx \quad \big(x\in(0,\pi)\big)$.

Megoldás. Az integrandusok „alkalmas” átalakítása után a határozatlan integrál linearitására vonatkozó tételt felhasználva alapintegrálokat kapunk.

(a)

$$\int \sqrt{x\sqrt{x\sqrt{x}}}\,dx = \int \left(x\cdot\left(x\cdot x^{1/2}\right)^{1/2}\right)^{1/2}\,dx = \int \left(x\cdot\left(x^{3/2}\right)^{1/2}\right)^{1/2}\,dx =$$

$$= \int \left(x\cdot x^{3/4}\right)^{1/2}\,dx = \int x^{7/8}\,dx = \frac{x^{7/8+1}}{7/8+1}+c = \frac{8}{15}\sqrt[8]{x^{15}}+c \quad \left(x\in(0,+\infty),\ c\in\mathbb{R}\right).$$

(b)

$$\int \frac{x^2}{x^2+1}\,dx = \int \frac{x^2+1-1}{x^2+1}\,dx = \int \left(1-\frac{1}{1+x^2}\right)\,dx =$$

$$= x-\operatorname{arc\,tg} x + c \quad \left(x\in\mathbb{R},\ c\in\mathbb{R}\right).$$

(c)

$$\int \frac{(x+1)^2}{x^3}\,dx = \int \frac{x^2+2x+1}{x^3}\,dx = \int \left(\frac{1}{x}+\frac{2}{x^2}+\frac{1}{x^3}\right) = \int \left(\frac{1}{x}+2x^{-2}+x^{-3}\right)\,dx =$$

$$= \ln x + 2\frac{x^{-1}}{-1}+\frac{x^{-2}}{-2}+c = \ln x - \frac{2}{x}-\frac{1}{2x^2}+c \quad \left(x\in(0,+\infty)\right).$$

(d)

$$\int \frac{3\cos^2 x+2}{\cos 2x-1}\,dx = \int \frac{3\left(1-\sin^2 x\right)+2}{\left(\cos^2 x-\sin^2 x\right)-\left(\sin^2 x+\cos^2 x\right)}\,dx = \int \frac{5-3\sin^2 x}{-2\sin^2 x}\,dx =$$

$$= \int \left(\frac{3}{2}+\frac{5}{2}\cdot\left(-\frac{1}{\sin^2 x}\right)\right)\,dx = \frac{3}{2}\,x+\frac{5}{2}\operatorname{ctg} x + c \quad \left(x\in(0,\pi)\right). \blacksquare$$

$\boxed{2.}$ Az első helyettesítési szabály és speciális esetei

Megjegyzések.

1° Az előadáson az összetett függvény deriválására vonatkozó tételnek a „megfordításával” kapcsolatban két állítást mutattunk meg. Az első a következő volt:

Az első helyettesítési szabály. *Legyenek adottak az $I, J \subset \mathbb{R}$ nyílt intervallumok és a $g : I \to \mathbb{R}$, $f : J \to \mathbb{R}$ függvények. Tegyük fel, hogy $g \in D(I)$, $\mathcal{R}_g \subset J$ és a f függvénynek van primitív függvénye. Ekkor az $(f \circ g) \cdot g'$ függvénynek is van primitív függvénye és*

$$\boxed{\int f\big(g(x)\big) \cdot g'(x)\, dx = F\big(g(x)\big) + c \quad (x \in I,\ c \in \mathbb{R})},$$

ahol F a f függvény egy primitív függvénye.

Ez a tétel akkor használható, ha az $\int f \circ g \cdot g'$ integrált kell kiszámítanunk, és ismerjük f egy primitív függvényét.

2° A tétel alábbi három speciális esetét érdemes külön is megjegyezni!

- $\int \frac{f'}{f}$ **alakú integrálok**: Ha $f : I \to \mathbb{R}$, $f > 0$ és $f \in D(I)$, akkor

$$\boxed{\int \frac{f'(x)}{f(x)}\, dx = \ln f(x) + c \qquad (x \in I,\ c \in \mathbb{R})}.$$

- $\int f^\alpha \cdot f'$ **alakú integrálok**: Ha $f : I \to \mathbb{R}$, $f > 0$, $f \in D(I)$ és $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}$, akkor

$$\boxed{\int f^\alpha(x) f'(x)\, dx = \frac{f^{\alpha+1}(x)}{\alpha + 1} + c \quad (x \in I,\ c \in \mathbb{R})}.$$

- $\int f(ax + b)\, dx$ **alakú integrálok (lineáris helyettesítés)**: Ha a $f : I \to \mathbb{R}$ függvénynek van egy $F : I \to \mathbb{R}$ primitív függvénye, $a, b \in \mathbb{R}$ és $a \neq 0$, akkor

$$\boxed{\int f(ax + b)\, dx = \frac{F(ax + b)}{a} + c \quad (x \in I,\ c \in \mathbb{R})}.$$

Érdemes meggondolni, hogy az **1°**-ben megfogalmazott tételből milyen szereposztásokkal kapjuk meg az előző állításokat (amelyek egyébként közvetlenül is könnyen bebizonyíthatóak).

3° A feladatmegoldások során először általában az integrandust „alkalmas módon” át kell alakítanunk ahhoz, hogy az előző képleteket használni tudjuk.

4° Sok esetben érdemes a kiszámított primitív függvényt deriválni, és így ellenőrizni, hogy visszakapjuk-e az integrandust. □

2. feladat. *Számítsuk ki az alábbi határozatlan integrálokat:*

(a) $\displaystyle\int \frac{x}{x^2+3}\,dx \quad \big(x \in \mathbb{R}\big),$

(b) $\displaystyle\int \operatorname{tg} x\,dx \quad \big(x \in \big(-\tfrac{\pi}{2}, \tfrac{\pi}{2}\big)\big),$

(c) $\displaystyle\int \frac{1}{x \cdot \ln x}\,dx \quad \big(x \in (1, +\infty)\big),$

(d) $\displaystyle\int \cos(5x-3)\,dx \quad \big(x \in \mathbb{R}\big),$

(e) $\displaystyle\int \sin^5 x \cdot \cos^3 x\,dx \quad \big(x \in \mathbb{R}\big),$

(f) $\displaystyle\int \sin^2 x\,dx \quad \big(x \in \mathbb{R}\big),$

(g) $\displaystyle\int \frac{1}{\cos^2 x \cdot \sqrt{\operatorname{tg}^3 x}}\,dx \quad \big(x \in \big(0, \tfrac{\pi}{2}\big)\big),$

(h) $\displaystyle\int \frac{1}{x\big(1+\ln^2 x\big)}\,dx \quad \big(x \in \big(0, +\infty\big)\big).$

Megoldás. *Figyeljük meg* (!!), hogy az integrandusokat hogyan alakítjuk át ahhoz, hogy az előző képleteket használni tudjuk.

(a)

$$\int \frac{x}{x^2+3}\,dx = \left(\frac{f'}{f} \text{ típus}\right) = \frac{1}{2}\int \frac{2x}{x^2+3}\,dx = \frac{1}{2}\ln\left(x^2+3\right) + c \quad \left(x \in \mathbb{R},\ c \in \mathbb{R}\right).$$

(b)

$$\int \operatorname{tg} x\,dx = \int \frac{\sin x}{\cos x}\,dx = \left(\frac{f'}{f} \text{ típus}\right) = -\int \frac{-\sin x}{\cos x}\,dx = -\ln\cos x + c,$$

ha $x \in (-\pi/2, \pi/2)$ és $c \in \mathbb{R}$.

(c)

$$\int \frac{1}{x \cdot \ln x}\,dx = \int \frac{\frac{1}{x}}{\ln x}\,dx = \left(\frac{f'}{f} \text{ típus és } \ln x > 0, \text{ mert } x > 1\right) = \ln\left(\ln x\right) + c,$$

ha $x \in (1, +\infty)$ és $c \in \mathbb{R}$.

(d)

$$\int \cos(5x-3)\,dx = \big(\text{lineáris helyettesítés}\big) = -\frac{\sin\left(5x-3\right)}{5} + c \quad \left(x \in \mathbb{R},\ c \in \mathbb{R}\right).$$

(e) Az integrandus átalakításához most a $\cos^3 x = \cos x \cdot \left(1-\sin^2 x\right)$ $(x \in \mathbb{R})$ azonosságot alkalmazzuk. Így

$$\int \sin^5 x \cdot \cos^3 x \, dx = \int \left(\sin^5 x \cdot \cos x - \sin^7 x \cdot \cos x\right) \, dx = (f^\alpha \cdot f' \quad \text{típus}) =$$

$$= \frac{\sin^6 x}{6} - \frac{\sin^8 x}{8} + c \quad (x \in \mathbb{R},\ c \in \mathbb{R}).$$

(f) A $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$ és a $\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x$ $(x \in \mathbb{R})$ azonosságokból következik, hogy

$$\sin^2 x = \frac{1-\cos 2x}{2} \quad (x \in \mathbb{R})$$

(azt is mondhatjuk, hogy $\sin^2 x$-et „linearizáltuk"). Így

$$\int \sin^2 x \, dx = \int \frac{1-\cos 2x}{2} \, dx = \frac{x}{2} - \frac{1}{2} \int \cos 2x \, dx = \big(\text{lineáris helyettesítés}\big) =$$

$$= \frac{x}{2} - \frac{1}{2} \cdot \frac{\sin 2x}{2} + c = \frac{x}{2} - \frac{\sin 2x}{4} + c \quad (x \in \mathbb{R},\ c \in \mathbb{R}).$$

(g) Vegyük figyelembe azt, hogy $\operatorname{tg}' x = \dfrac{1}{\cos^2 x}$, ha $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ és $\displaystyle\int t^{-3/2} \, dt = \frac{t^{-1/2}}{-1/2} + c$ $(t > 0)$, majd alkalmazzuk az első helyettesítési szabályt az $f(t) = t^{-2/3}$, $g(u) = \operatorname{tg} u$ szereposztással:

$$\int \frac{1}{\cos^2 x \cdot \sqrt{\operatorname{tg}^3 x}} \, dx = \int (\operatorname{tg} x)^{-3/2} \cdot (\operatorname{tg} x)' \, dx = \frac{(\operatorname{tg} x)^{-1/2}}{-1/2} + c = -\frac{2}{\sqrt{\operatorname{tg} x}} + c,$$

ha $\left(x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)\right)$ és $c \in \mathbb{R}$.

(h) Vegyük figyelembe azt, hogy $\ln' x = \dfrac{1}{x}$, ha $x > 0$ és $\displaystyle\int \frac{1}{1+t^2} \, dt = \operatorname{arc\,tg} t + c$ $(t \in \mathbb{R})$, majd alkalmazzuk az első helyettesítési szabályt az $f(t) = \dfrac{1}{1+t^2}$, $g(u) = \ln u$ szereposztással:

$$\int \frac{1}{x\left(1+\ln^2 x\right)} \, dx = \int \frac{1}{\left(1+\ln^2 x\right)} \cdot (\ln x)' \, dx = \operatorname{arc\,tg}(\ln x) + c \quad \big(x \in (0, +\infty),\ c \in \mathbb{R}\big). \blacksquare$$

3. Parciális integrálás

Emlékeztető. A szorzatfüggvény deriválására vonatkozó tétel „megfordítását" fejezi ki a következő állítás.

A parciális integrálás szabálya. *Tegyük fel, hogy $f, g \in D(I)$ és az $f'g$ függvénynek létezik primitív függvénye. Ekkor az fg' függvénynek is van primitív függvénye és*

$$\boxed{\int f(x) \, g'(x) \, dx = f(x) \, g(x) - \int f'(x) \, g(x) \, dx \quad (x \in I)}.$$

A parciális integrálás tételét akkor célszerű használni az fg' primitív függvényének a meghatározására, ha $f'g$ egy primitív függvényét már ismerjük.

3. feladat. *Számítsuk ki az alábbi határozatlan integrálokat:*

(a) $\displaystyle\int x\cdot\sin x\,dx \quad \big(x\in\mathbb{R}\big)$,

(b) $\displaystyle\int \big(x^2+3x\big)\cdot e^{2x}\,dx \quad \big(x\in\mathbb{R}\big)$,

(c) $\displaystyle\int e^x\cdot\cos x\,dx \quad \big(x\in\mathbb{R}\big)$,

(d) $\displaystyle\int \ln x\,dx \quad \big(x\in(0,+\infty)\big)$,

(e) $\displaystyle\int \operatorname{arc\,tg} 3x\,dx \quad \big(x\in\mathbb{R}\big)$.

Megoldás. Ebben a feladatban bemutatjuk az integrandusnak azt **a három alaptípusát**, amelyeknél a parciális integrálás mindig célhoz vezet.

(a) Alkalmazzuk a parciális integrálás szabályát az

$$f(x):=x,\qquad g'(x):=\sin x\quad(x\in\mathbb{R})$$

szereposztással. Ekkor $f'(x)=1$ $(x\in\mathbb{R})$ és g a sin függvény egy primitív függvénye, következésképpen $g=-\cos+c$. Az egyszerűség kedvéért válasszuk a $c=0$ értéket, azaz legyen $g(x):=-\cos x$ $(x\in\mathbb{R})$. Így

$$\int x\cdot\sin x\,dx=\int x\cdot(-\cos x)'\,dx=-x\cos x-\int (x)'\cdot(-\cos x)\,dx=$$

$$=-x\cos x+\int\cos x\,dx=-x\cos x+\sin x+c\quad\big(x\in\mathbb{R},\ c\in\mathbb{R}\big).$$

(b) Esetenként többször egymás után kell parciálisan integrálni.

$$\int\big(x^2+3x\big)\cdot e^{2x}\,dx=\int\big(x^2+3x\big)\cdot\left(\frac{e^{2x}}{2}\right)'dx=$$

$$=\big(x^2+3x\big)\cdot\frac{e^{2x}}{2}-\int\big(x^2+3x\big)'\cdot\frac{e^{2x}}{2}\,dx=\frac{\big(x^2+3x\big)e^{2x}}{2}-\int(2x+3)\cdot\frac{e^{2x}}{2}\,dx=$$

$$=\frac{\big(x^2+3x\big)e^{2x}}{2}-\frac{1}{2}\left[\int(2x+3)\cdot e^{2x}\,dx\right]=\frac{\big(x^2+3x\big)e^{2x}}{2}-\frac{1}{2}\left[\int(2x+3)\cdot\left(\frac{e^{2x}}{2}\right)'dx\right]=$$

$$=\frac{\big(x^2+3x\big)e^{2x}}{2}-\frac{1}{2}\left[(2x+3)\cdot\frac{e^{2x}}{2}-\int 2\cdot\frac{e^{2x}}{2}\,dx\right]=$$

$$=\frac{\big(x^2+3x\big)e^{2x}}{2}-\frac{(2x+3)\,e^{2x}}{4}+\frac{e^{2x}}{4}+c=$$

$$=\frac{1}{2}\big(x^2+2x-1\big)\,e^{2x}+c\quad\big(x\in\mathbb{R},\ c\in\mathbb{R}\big).$$

Megjegyzés (1. alaptípus). Hasonló módon számítjuk ki az

$$\int P(x) \cdot T(ax+b)\,dx \quad \big(x \in \mathbb{R},\ a,b \in \mathbb{R},\ a \neq 0\big)$$

alakú határozatlan integrálokat, ahol P egy tetszőleges polinom és $T \in \big\{\exp, \sin, \cos, \operatorname{sh}, \operatorname{ch}\big\}$. Ebben az esetben legyen

$$f(x) := P(x) \quad \text{és} \quad g'(x) = T(ax+b) \quad (x \in \mathbb{R}).$$

(A g függvényeket mindegyik esetben könnyen meg tudjuk határozni!) Itt annyi parciális integrálásra lesz szükség, mint amennyi a P polinom fokszáma. $\square$

(c) Előfordulhat, hogy parciális integrálás révén egy egyenletet kapunk a keresett integrálra. Legyen most

$$f(x) := e^x \implies f'(x) = e^x \quad \text{és} \quad g'(x) = \cos x \implies g(x) = \sin x \quad (x \in \mathbb{R}). \quad \text{Így}$$

$$\begin{aligned}\underset{\sim\sim\sim\sim\sim}{\int e^x \cdot \cos x\,dx} &= \int e^x \cdot (\sin x)'\,dx = e^x \sin x - \int \big(e^x\big)' \cdot \sin x\,dx = \\ &= e^x \sin x - \int e^x \cdot \sin x\,dx = e^x \sin x - \left[\int e^x \cdot (-\cos x)'\,dx\right] = \\ &= e^x \sin x - \left[e^x \cdot (-\cos x) - \int (e^x)' \cdot (-\cos x)\,dx\right] = \\ &= \underset{\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim}{e^x \sin x + e^x \cos x - \int e^x \cdot \cos x\,dx}\,.\end{aligned}$$

Így az $\int e^x \cdot \cos x\,dx$ határozatlan integrálra egy egyenletet kaptunk, amelynek rendezése után az adódik, hogy

$$\underset{\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim}{\int e^x \cdot \cos x\,dx = \frac{1}{2} \cdot \big(e^x \sin x + e^x \cos x\big) + c \quad \big(x \in \mathbb{R}\big).}$$

Megjegyzés (2. alaptípus). Hasonló módon számítjuk ki az

$$\int e^{\alpha x+\beta} \cdot T(ax+b)\,dx \quad \big(x \in \mathbb{R},\ \alpha, \beta, a, b \in \mathbb{R} \ \text{ és } \ \alpha \cdot a \neq 0\big)$$

alakú határozatlan integrálokat, ahol $T \in \big\{\sin, \cos, \operatorname{sh}, \operatorname{ch}\big\}$. Ebben az esetben legyen

$$f(x) := e^{\alpha x+\beta} \quad \text{és} \quad g'(x) = T(ax+b) \quad (x \in \mathbb{R}).$$

(A g függvényeket mindegyik esetben könnyen meg tudjuk határozni!) $\square$

(d) Az elemi alapfüggvények inverzeinek a primitív függvényeit is kiszámíthatjuk parciális integrálással. Itt azt a **trükköt** használjuk fel, hogy az integrandust az $1 \cdot \ln x$ alakban írjuk fel, és ezután alkalmazzuk a parciális integrálás szabályát az

$$f(x) := \ln x \quad \text{és} \quad g'(x) = 1 \quad (x > 0)$$

szereposztással. Így

$$\underset{\sim\sim\sim\sim\sim}{\int \ln x\, dx} = \int 1 \cdot \ln x\, dx = \int (\ln x) \cdot (x)'\, dx = (\ln x) \cdot x - \int (\ln x)' \cdot x\, dx =$$

$$= x \ln x - \int \frac{1}{x} \cdot x\, dx = \underset{\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim}{x\,(\ln x - 1) + c \quad (x > 0,\ c \in \mathbb{R})}\,.$$

(e) Az integrandust az $1 \cdot \operatorname{arc\,tg} 3x$ alakban írjuk fel, és ezután alkalmazzuk a parciális integrálás szabályát az

$$f(x) := \operatorname{arc\,tg} 3x \quad \text{és} \quad g'(x) = 1 \quad (x \in \mathbb{R})$$

szereposztással. Így

$$\underset{\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim}{\int \operatorname{arc\,tg} 3x\, dx} = \int 1 \cdot \operatorname{arc\,tg} 3x\, dx = \int (\operatorname{arc\,tg} 3x) \cdot (x)'\, dx =$$

$$= (\operatorname{arc\,tg} 3x) \cdot x - \int (\operatorname{arc\,tg} 3x)' \cdot x\, dx = x \operatorname{arc\,tg} 3x - \int \frac{3}{1 + (3x)^2} \cdot x\, dx =$$

$$= x \operatorname{arc\,tg} 3x - \int \frac{3x}{1 + 9x^2}\, dx = \left(\int \frac{f'}{f} \text{ alakú integrál} \right) =$$

$$= x \operatorname{arc\,tg} 3x - \frac{1}{6} \int \frac{18x}{1 + 9x^2}\, dx = \underset{\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim}{x \operatorname{arc\,tg} 3x - \frac{1}{6} \ln\bigl(1 + 9x^2\bigr) + c \quad (x \in \mathbb{R},\ c \in \mathbb{R})}\,.$$

Megjegyzés (3. alaptípus). Ezzel az ötlettel számítjuk ki az

$$\int G(a\, x)\, dx$$

alakú integrálokat, ahol $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ és

$$G \in \bigl\{\ln,\ \text{arc} \ldots,\ \text{ar} \ldots\bigr\}. \ \blacksquare$$

4. feladat. *Parciális integrálással számítsuk ki az alábbi integrálokat:*

(a) $\displaystyle\int \sqrt{1 - x^2}\, dx \quad \bigl(x \in (-1, 1)\bigr)$,

(b) $\displaystyle\int x^5 \cdot e^{x^3}\, dx \quad \bigl(x \in \mathbb{R}\bigr)$.

Megoldás. Ezzel a feladattal azt illusztráljuk, hogy az előző feladatban felsorolt három alaptípustól különböző esetekben is *próbálkozhatunk* – esetenként alkalmas trükkök „bevetésével” – a parciális integrálás alkalmazásával.

(a) Ha $x \in (-1, 1)$, akkor

$$\int \sqrt{1 - x^2}\, dx = \int 1 \cdot \sqrt{1 - x^2}\, dx = x\sqrt{1 - x^2} - \int x \left(\frac{-x}{\sqrt{1 - x^2}} \right) dx =$$

$$= x\sqrt{1 - x^2} - \int \frac{(1 - x^2) - 1}{\sqrt{1 - x^2}}\, dx = x\sqrt{1 - x^2} - \int \sqrt{1 - x^2}\, dx + \int \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}\, dx.$$

Következésképpen

$$\underset{\sim\sim\sim}{\int \sqrt{1-x^2}\,dx = \frac{x\sqrt{1-x^2}+\arc\sin x}{2} + c \quad \big(x\in(-1,1),\ c\in\mathbb{R}\big)}.$$

Megjegyzés. Emlékeztetünk arra, hogy az előadáson ezt a feladatot az $x = \sin t$ helyettesítéssel oldottuk meg.

(b) Most az $f(x) = x^5$, $g'(x) = e^{x^3}$ $(x\in\mathbb{R})$ választás *nem megfelelő*, mert az e^{x^3} $(x\in\mathbb{R})$ függvény g primitív függvényét nem ismerjük. Próbálkozhatunk az $f(x) = e^{x^3}$, $g'(x) = x^5$ $(x\in\mathbb{R})$ szereposztással is. Gondoljuk meg, hogy így sem tudjuk megoldani a feladatot!

Alkalmazzuk a következő **ötletet**: az integrandust írjuk fel az

$$x^5\cdot e^{x^3} = x^3\cdot\left(x^2\cdot e^{x^3}\right) \quad (x\in\mathbb{R}) \quad \text{alakban, és legyen}$$

$$f(x) := x^3 \quad \text{és} \quad g'(x) = x^2\cdot e^{x^3} \quad (x\in\mathbb{R}).$$

Itt a g függvényt már meg tudjuk határozni, ti.

$$g(x) = \frac{e^{x^3}}{3} + c \quad \big(x\in\mathbb{R},\ c\in\mathbb{R}\big).$$

A parciális integrálás szabályát ezzel a szereposztással alkalmazva kapjuk, hogy

$$\int x^5\cdot e^{x^3}\,dx = \int x^3\cdot\left(x^2\cdot e^{x^3}\right)dx = \int x^3\cdot\left(\frac{e^{x^3}}{3}\right)'dx =$$

$$= x^3\cdot\frac{e^{x^3}}{3} - \int \left(x^3\right)'\cdot\frac{e^{x^3}}{3}\,dx = \frac{x^3\,e^{x^3}}{3} - \int x^2\cdot e^{x^3}\,dx =$$

$$= \frac{x^3\,e^{x^3}}{3} - \frac{e^{x^3}}{3} + c = \frac{\left(x^3-1\right)e^{x^3}}{3} + c \quad \big(x\in\mathbb{R},\ c\in\mathbb{R}\big). \quad \blacksquare$$