A számításelmélet alapjai 2.

11. gyakorlat

<u>Visszavezetés</u>

Rekurzívan felsorolható nyelv:

Az L nyelv *rekurzívan felsorolható* $\Longleftrightarrow$ ha létezik A algoritmus, mely az elemeit felsorolja.
(Felsoroló algoritmus: Az A algoritmus outputjára szavakat állít elő, s így a nyelv összes szavát (és csak azokat) felsorolja.)

Parciálisan rekurzív nyelv:

Az L nyelv *parciálisan rekurzív* $\Longleftrightarrow$ létezik olyan A parciálisan eldöntő algoritmus, melynek inputjára tetszőleges szót helyezve eldönti, benne van-e a nyelvben (u $\in$ L szó esetén igen válasszal áll le, míg u $\notin$ L esetén nem terminál, vagy ha terminál, akkor nem választ ad).

RE = $\{ L \mid \exists M$ Turing gép, amelyre $L(M) = L\}$.

Rekurzív nyelv:

Az L nyelv *rekurzív* $\Longleftrightarrow$ létezik olyan A eldöntő algoritmus, melynek inputjára egy tetszőleges u szót helyezve eldönti, benne van-e az L nyelvben (mindig terminál, igen a válasz, ha u eleme az L nyelvnek, és nem a válasz ellenkező esetben).

R = $\{ L \mid \exists M$ minden inputra megálló Turing gép, amelyre $L(M) = L\}$.

Church-Turing tézis:

Minden formalizálható probléma, ami megoldható algoritmussal, az megoldható Turing géppel is (illetve bármilyen, a Turing géppel azonos számítási teljesítményű absztrakt modellel).

Tétel: $\mathcal{L}_0 \subseteq \mathcal{L}_{\text{RekFel}}$, $\mathcal{L}_0 \subseteq \mathcal{L}_{\text{ParcRek}}$, $\mathcal{L}_1 \subseteq \mathcal{L}_{\text{Rek}}$

Következmény: (ha a Church tézist elfogadjuk) $\mathcal{L}_0 = \mathcal{L}_{\text{RekFel}} = \mathcal{L}_{\text{ParcRek}}$

<u>Definíció:</u> Az $\mathbf{f : \Sigma^* \to \Delta^*}$ szófüggvény ***kiszámítható***, ha van olyan Turing-gép, ami kiszámítja. (Lásd szófüggvényt kiszámító TG)

<u>Definíció:</u> $L_1 \subseteq \Sigma^*$ ***visszavezethető*** $L_2 \subseteq \Delta^*$-ra, ha van olyan $f : \Sigma^* \to \Delta^*$ kiszámítható szófüggvény, hogy $\mathbf{w \in L_1 \Longleftrightarrow f(w) \in L_2}$. Jelölés: $L_1 \leq L_2$

Tétel: Ha $L_1 \leq L_2$ és $L_2 \in$RE, akkor $L_1 \in$RE.

Ha $L_1 \leq L_2$ és $L_2 \in$R, akkor $L_1 \in$R.

Következmény: Ha $L_1 \leq L_2$ és $L_1 \notin$RE, akkor $L_2 \notin$RE.

Ha $L_1 \leq L_2$ és $L_1 \notin$R, akkor $L_2 \notin$R.

Bonyolultságelmélet

R-beli problémák megoldásának hatékonyságát vizsgálja.

Definíció:

TIME(f(n)) = {L|L eldönthető O(f(n)) időkorlátos determinisztikus TG-pel}

NTIME(f(n)) = {L|L eldönthető O(f(n)) időkorlátos NTG-pel}

P=$\bigcup_{k\geq 1} TIME(n^k)$

NP=$\bigcup_{k\geq 1} NTIME(n^k)$

Definíció: Az **f : Σ*→Δ*** szófüggvény ***polinom időben kiszámítható***, ha van olyan polinom időkorlátos Turing-gép, ami kiszámítja.

Definíció: $L_1 \subseteq \Sigma^*$ ***polinom időben visszavezethető*** $L_2 \subseteq \Delta^*$-ra, ha van olyan f : Σ*→Δ* polinom időben kiszámítható szófüggvény, hogy
$w \in L_1 \Longleftrightarrow f(w) \in L_2$. Jelölés: $L_1 \leq_p L_2$

Tétel: Ha $L_1 \leq_p L_2$ és $L_2 \in$P, akkor $L_1 \in$P.

Ha $L_1 \leq_p L_2$ és $L_2 \in$NP, akkor $L_1 \in$NP.

Definíció: Legyen *C* egy bonyolultsági osztály. Egy L nyelv ***C-nehéz*** (a polinom idejű visszavezetésre nézve), ha $\forall$ L'$\in$*C* esetén L' $\leq_p$ L.

Definíció: Legyen *C* egy bonyolultsági osztály. Egy L nyelv ***C-teljes***, ha L$\in$*C* és L *C-nehéz*.

Tétel: Ha L NP-teljes, L $\leq_p$ L' és L'$\in$NP, akkor L' NP-teljes.

SAT probléma: Egy adott ábécé felet kódolt ítéletlogikai kielégíthető konjunktív normálformák halmaza.

Tétel: SAT probléma NP-teljes.

---

1. feladat: Legyen kSzin a következő probléma. Adott egy G = (V,E) irányítatlan gráf.
Kérdés: kiszínezhetők-e G csúcsai k színnel úgy, hogy a szomszédos csúcsok különböző színűek?

Adja meg a 3Szin probléma egy polinom idejű visszavezetését a 6Szin problémára! Mit tudunk elmondani ezek alapján a 6Szin probléma bonyolultságáról, ha tudjuk, hogy 3Szin NP-teljes?

Megoldás: Legyen G egy tetszőleges gráf. A felveszünk három új csúcsot a G csúcsai mellé és ezeket összekötjük G minden csúcsával. Továbbá a három új csúcsot is összekötjük egymással. Legyen G' az így kapott gráf. Látható, hogy G pontosan akkor színezhető három színnel, ha G' színezhető hat színnel. Tehát a fenti konstrukció egy megfelelő polinom idejű visszavezetés. Ezek alapján 3Szin NP-teljessége implikálja 6Szin NP-nehézségét.

2. feladat: Legyen $L_{\exists halt}$ = {<M> | Van olyan bemenet amin M megáll} és
$L_{\exists accept}$ = {<M> | Van olyan bemenet amit M elfogad}. Vázolja $L_{\exists halt}$ egy lehetséges visszavezetését $L_{\exists accept}$ -re! Mit mondhatunk el ez alapján az $L_{\exists accept}$ eldönthetőségéről, ha tudjuk, hogy $L_{\exists halt}$ nem eldönthető?

Megoldás: Tetszőleges M Turing-géphez konstruáljuk meg M' a következő módon. M' annyiban különbözik M-től, hogy M q_n-be vezető átmeneteit q_i-be irányítjuk. Mivel így M akkor és csak akkor áll meg egy u szón, ha M' elfogadja u-t, kapjuk, hogy M pontosan akkor áll meg legalább egy szón, ha M' elfogad legalább egy szót. Azaz a fenti konstrukció egy megfelelő visszavezetés. Ezek alapján $L_{\exists halt}$ eldönthetetlensége implikálja $L_{\exists accept}$ eldönthetetlenségét.