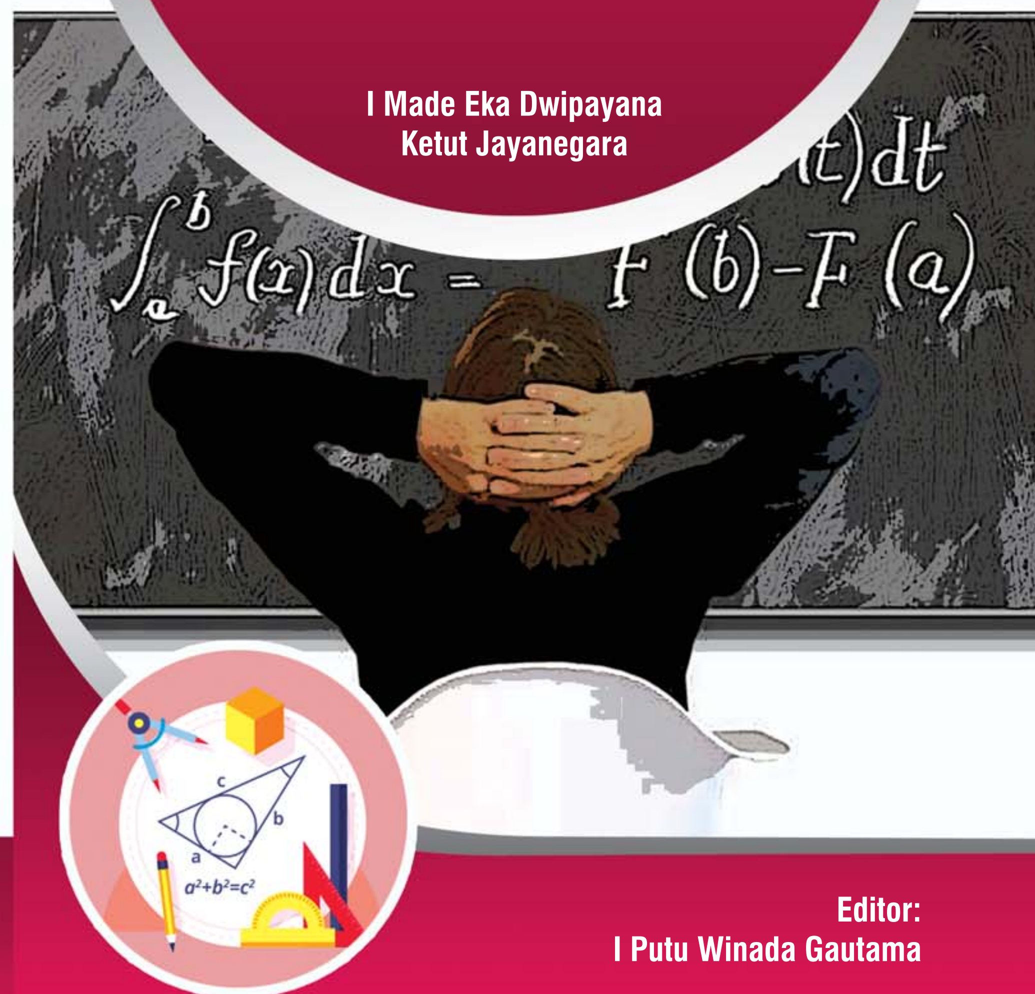
UDAYANA UNIVERSITY PRESS

Kalkulus Lanjut

Barisan, Deret dan Aplikasinya

I Made Eka Dwipayana
Ketut Jayanegara



Editor:
I Putu Winada Gautama

UDAYANA UNIVERSITY PRESS
Gedung Vokasional
Jl. Diponegoro No. 256, Sanglah, Denpasar - Bali
unudpress@unud.ac.id http://udayanapress.unud.ac.id

ISBN 978-602-294-604-5
9 786022 946045

Kalkulus Lanjut

Barisan, Deret dan Aplikasinya

Kalkulus Lanjut
Barisan, Deret dan Aplikasinya

Penyusun:
I Made Eka Dwipayana
Ketut Jayanegara

Editor:
I Putu Winada Gautama

UNIVERSITAS UDAYANA

UDAYANA UNIVERSITY PRESS
2023

Kalkulus Lanjut
Barisan, Deret dan Aplikasinya

Penyusun:
I Made Eka Dwipayana
Ketut Jayanegara

Editor:
I Putu Winada Gautama

Cover & Ilustrasi:
Repro

Design & Lay Out:
I Putu Mertadana

Diterbitkan oleh:
UDAYANA UNIVERSITY PRESS
Gedung Vokasional. Jl. Diponegoro 256, Sanglah, Denpasar - Bali
unudpress@gmail.com http://udayanapress.unud.ac.id

Cetakan Pertama:
2023, vii + 127 hlm, 15,5 x 23 cm

ISBN: 978-602-294-604-5

Kata Pengantar

Dengan mengucapkan puji syukur kehadirat Tuhan Yang Maha Esa yang telah memberikan rahmatNya sehingga penyusunan buku “KALKULUS LANJUT: Barisan, Deret Dan Aplikasinya” ini dapat terselesaikan dengan baik. Penulisan buku ini disusun untuk memberikan kasanah ilmu pengetahuan baru kepada praktisi di bidang memahami matematika secara keseluruhan dan dapat mengaplikasikannya pada permasalahan dikehidupan sehari-hari. Buku ini dapat disusun dengan bantuan dari berbagai pihak. Ucapan terimakasih kami sampaikan ke berbagai pihak yang telah memberikan kontribusi dalam penyusunan buku ini.

Jika diibaratkan sebagai sebuah gedung, Kalkulus merupakan fondasi agar gedung tersebut bisa berdiri kokoh. Kuatnya dasar sebuah gedung dapat menyokong materi yang akan di bangun di atasnya. Untuk itu pemahaman yang kuat terhadap materi Kalkulus merupakan modal yang besar untuk memahami matematika secara keseluruhan dan dapat mengaplikasikannya pada permasalahan dikehidupan sehari-hari.

Penulis berharap semoga buku ini dapat bermanfaat bagi para pembaca. Penulis menyadari bahwa buku ini masih jauh dari sempurna sehingga penulis sangat mengharapkan kritik dan saran bagi pembaca yang sifatnya membangun demi terus meningkatkan kualitas dan kesempurnaan buku ini.

Daftar Isi

1

Barisan

1.1 Pendahuluan

Pak Andi selalu menyisihkan keuntungan dari tokonya sebanyak Rp. 1000000,00 tiap bulannya. Jadi selama setahun akan terkumpul uang sebanyak Rp. 12000000,00, yaitu hasil dari perkalian Rp. 1000000,00 dengan 12 bulan dalam setahun. Pola menabung Pak Andi dapat dilihat pada tabel 1.1.

Pola menabung Pak Andi setiap bulannya yaitu 1000000, 1000000, 1000000, $\cdots$, 1000000

Bulan ke	**Tabungan**	**Jumlah**
1	1000000	1000000
2	1000000	2000000
3	1000000	3000000
4	1000000	4000000
5	1000000	5000000
6	1000000	6000000
7	1000000	7000000
8	1000000	8000000
9	1000000	9000000
10	1000000	10000000
11	1000000	11000000
12	1000000	12000000

Tabel 1.1: Tabel tabungan Pak Andi.

disebut barisan yang dapat dituliskan sebagai a_n untuk $n \in \{1,2,\cdots,12\}$. Dengan a_n adalah unsur barisan ke-n. Cara penulisan lainnya adalah $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$. Kebetulan karena dalam contoh ini unsur barisannya konstan sehingga $a_n = 1000000$ untuk setiap $n \in \{1,2,\cdots,12\}$. Sedangkan jumlah tabungan Pak Andi yaitu 1000000+1000000+1000000+$\cdots$+1000000 disebut dengan deret yang dapat dituliskan sebagai $\sum_{n=1}^{12} a_n$. Kebetulan nilai deret sudah dihitung pada tabel 1.1, dimana $\sum_{n=1}^{12} a_n = 12000000$.

1.2 Pola Barisan

Bentuk barisan bervariasi dari yang berpola seperti contoh sebelumnya di atas, tanpa pola, berhingga, tak berhingga dan rekursif. Berikut beberapa contoh barisan:

1. 1, 2 , 3, 0, -1, 2, 3, 10, 1, -5, 4
   Hal pertama yang dapat diperhatikan dari barisan tersebut adalah jumlah unsur pembentuknya yang berhingga. Selanjutnya dilihat dari urutannya terlihat bahwa barisan tersebut tidak berpola.

2. 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15
   Barisan ini unsur pembentuknya berhingga dan terlihat pola nya dimana unsur selanjutnya adalah satu lebih besar dari unsur sebelumnya. Sehingga barisan ini dapat dituliskan sebagai $a_n = n$ dengan $n \in \{1,2,\cdots,15\}$.

3. 1, -2, 3, -4, 5, -6, 7, -8, 9, -10, 11, -12, 13, -14, 15
   Contoh pada barisan ini juga berhingga dan polanya hampir mirip dengan barisan sebelumnya. Hanya saja setiap unsur genap akan berganti tanda menjadi negatif. Untuk itu barisan ini dapat dituliskan sebagai $a_n = (-1)^{n+1}n$ dengan $n \in \{1,2,\cdots,15\}$.

4. 1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15, 17, 19, 21
   Barisan ini merupakan barisan berhingga dengan unsur berikutnya adalah 2 lebihnya dari unsur sebelumnya. Selain itu dilihat dari unsur-unsur pembentuknya, barisan tersebut merupakan barisan 11 bilangan ganjil pertama. Contoh barisan ini dapat dituliskan sebagai $a_n = 2n - 1$ dengan $n \in \{1,2,\cdots,11\}$.

5. 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, $\cdots$
   Dari adanya tiga titik paling belakang menandakan bahwa barisan ini adalah barisan tak hingga karena unsur-unsurnya masih mengikuti akan tetapi untuk lebih memudahkan dalam penulisan unsur-unsur lanjutannya tersebut diwakilkan dengan tanda 3 titik paling belakang. Selanjutnya dilihat dari unsur-unsur pembentuk barisan, terlihat bahwa barisan tersebut merupakan barisan bilangan prima.

6. 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, $\cdots$
   Contoh barisan ini merupakan salah satu barisan yang terkenal dengan nama Barisan Fibbonacci. Dimana unsur barisan yang sekarang dibentuk dari penjumlahan dua unsur barisan sebelumnya. Barisan ini dapat dituliskan sebagai $F_n = F_{n-1} + Fn - 2$ dengan $F_1 = 1$, $F_2 = 1$ dan $n \in \{3,4,5,\cdots\}$.

Latihan 1.2.1. *Tuliskan pola barisan berikut dalam bentuk a_n:*

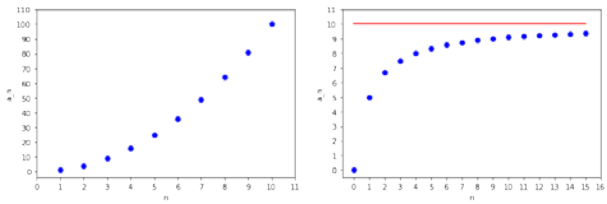
1. *1, 4, 9, 16, 25, 36, 49, 64,* $\cdots$
2. *1, -4, 9, -16, 25, -36, 49, -64,* $\cdots$
3. *-1, 4, -9, 16, -25, 36, -49, 64,* $\cdots$
4. *1,* $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \frac{1}{6}, \frac{1}{7}, \frac{1}{8}, \frac{1}{9}, \cdots$
5. *1,* $-\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, -\frac{1}{4}, \frac{1}{5}, -\frac{1}{6}, \frac{1}{7}, -\frac{1}{8}, \frac{1}{9}, \cdots$
6. *-1,* $\frac{1}{2}, -\frac{1}{3}, \frac{1}{4}, -\frac{1}{5}, \frac{1}{6}, -\frac{1}{7}, \frac{1}{8}, -\frac{1}{9}, \cdots$
7. $\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \frac{5}{6}, \frac{6}{7}, \frac{7}{8}, \frac{8}{9}, \cdots$
8. $-\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, -\frac{3}{4}, \frac{4}{5}, -\frac{5}{6}, \frac{6}{7}, -\frac{7}{8}, \frac{8}{9}, \cdots$
9. $\frac{1}{2}, -\frac{2}{3}, \frac{3}{4}, -\frac{4}{5}, \frac{5}{6}, -\frac{6}{7}, \frac{7}{8}, -\frac{8}{9}, \cdots$

Latihan 1.2.2. *Tentukan 10 nilai pertama dari barisan berikut:*

1. $a_n = \frac{1}{n^2}$, *untuk* $n \in \{1,2,3,\cdots\}$.
2. $a_n = \frac{n}{\sqrt{n+1}}$, *untuk* $n \in \{1,2,3,\cdots\}$.
3. $a_n = \frac{n^2}{n-2}$, *untuk* $n \in \{3,4,5,\cdots\}$.

1.3 Barisan Konvergen

Selanjutnya topik menarik yang perlu dibahas dalam barisan adalah apakah suatu barisan akan konvergen atau divergen. Sebagai bayangan, misalkan untuk $a_n = n^2$, terlihat bahwa semakin besar nilai n, maka a_n juga membesar tanpa batas. Sebaliknya untuk $b_n = \frac{10n}{n+1}$, semakin besar n, maka nilai b_n akan cenderung menuju 10. Perbandingan kedua barisan tersebut dapat dilihat pada gambar 1.1.



Gambar 1.1: Gambar sebelah kiri merupakan plot barisan $a_n = n^2$, sedangkan gambar sebelah kanan merupakan plot barisan $b_n = \frac{10n}{n+1}$.

Definisi 1.3.1. Suatu barisan a_n memiliki nilai limit L yang dituliskan sebagai:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = L$$

jika untuk suatu nilai n yang cukup besar maka a_n akan dekat dengan L.

Jika $\lim_{n\to\infty} a_n$ ada, maka barisan akan konvergen sedangkan jika tidak ada maka barisan disebut divergen. Dari contoh sebelumnya didapatkan bawa $a_n = n^2$ adalah barisan divergen dan $b_n = \frac{10n}{n+1}$ adalah barisan konvergen.

Teorema 1.3.1. *Jika $\lim_{x\to\infty} f(x) = L$ dan $f(n) = a_n$ untuk n bilangan bulat, maka $\lim_{n\to\infty} a_n = L$.*

Teorema di atas dapat berlaku karena barisan a_n merupakan bagian dari fungsi $f(x)$ saat $x = n$. Sehingga saat $f(x)$ terbatas oleh L, maka a_n yang merupakan bagian dari $f(x)$ akan terbatas oleh L juga.

Contoh 1.3.1. *Tunjukkan bahwa barisan berikut $a_n = \frac{10n}{n+1}$ akan konvergen.*

Jawab 1.3.1. *Nilai darisan barisan $a_n = \frac{10n}{n+1}$ akan berada pada fungsi $f(x) = \frac{10x}{x+1}$, sehingga akan dicari nilai $\lim_{x\to\infty} f(x)$:*

$$\begin{aligned}\lim_{x\to\infty}\frac{10x}{x+1} &= \lim_{x\to\infty}\frac{10}{1+\frac{1}{x}}\\ &= \frac{10}{1+\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x}}\\ &= \frac{10}{1+0} = 10\end{aligned}$$

Karena $\lim_{x\to\infty}\frac{10x}{x+1} = 10$, maka a_n akan konvergen ke angka 10.

Contoh 1.3.2. *Periksa kekonvergenan barisan $a_n = \frac{n}{n^2+2}$.*

Jawab 1.3.2. *Nilai barisan* $a_n = \frac{n}{n^2+2}$ *akan berada pada fungsi* $f(x) = \frac{x}{x^2+2}$*, sehingga akan dicari nilai dari* $\lim_{x\to\infty} f(x)$*:*

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to\infty} \frac{x}{x^2+2} &= \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{1}{x}}{1+\frac{2}{x^2}} \\
&= \frac{\lim_{x\to\infty} \frac{1}{x}}{1+\lim_{x\to\infty} \frac{2}{x^2}} \\
&= \frac{0}{1+0} = 0
\end{aligned}$$

karena $\lim_{x\to\infty} \frac{x}{x^2+2} = 0$*, maka* a_n *akan konvergen ke angka 0.*

Contoh 1.3.3. *Buktikan bahwa barisan* $a_n = \frac{\ln(n)}{n}$ *konvergen.*

Jawab 1.3.3. *Semua nilai dari barisan* $a_n = \frac{\ln(n)}{n}$ *akan berada pada fungsi* $f(x) = \frac{\ln(x)}{x}, x \in \mathbb{R}^+$*, akan dicari nilai dari* $\lim_{x\to\infty} f(x)$*:*

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to\infty} \frac{\ln(x)}{x} &= \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{1}{x}}{1} \\
&= \frac{0}{1} \\
&= 0
\end{aligned}$$

karena $\lim_{x\to\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$*, maka* a_n *akan konvergen ke angka 0.*

Contoh 1.3.4. *Buktikan bahwa barisan* $a_n = \frac{n}{\sqrt{n+1}}$ *divergen.*

Jawab 1.3.4. *Karena semua unsur dari barisan* $a_n = \frac{n}{\sqrt{n+1}}$ *berada pada fungsi* $f(x) = \frac{x}{\sqrt{x+1}}$*, maka akan dicari nilai dari* $\lim_{x\to\infty} f(x)$*:*

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to\infty} \frac{x}{\sqrt{x+1}} &= \lim_{x\to\infty} \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}} \\
&= \frac{1}{\sqrt{\lim_{x\to\infty} \frac{1}{x} + \lim_{x\to\infty} \frac{1}{x^2}}} \\
&= \frac{1}{\sqrt{0+0}} = \infty
\end{aligned}$$

Dengan menggunakan pertimbangan bahwa pembilang memiliki orde 1 sedangkan penyebut berorde $\frac{1}{2}$*, maka untuk nilai n yang besar, maka* a_n *akan selalu membesar. Oleh karena itu* a_n *adalah barisan divergen.*

Contoh 1.3.5. *Tentukan syarat kekonvergenan barisan* $a_n = r^n$ *untuk r adalah bilangan real dan ke mana barisan* a_n *akan konvergen.*

Jawab 1.3.5. *Terlihat bahwa fungsi $f(r) = r^n$ akan selalu membesar secara eksponensial untuk $r > 1$ dan $n \to \infty$. Sedangkan untuk $r < -1$ dan $n \to \infty$, maka fungsi f akan membesar secara eksponensial dengan nilai positif saat n bernilai genap, dilain pihak fungsi f akan menurun secara eksponensial dengan nilai negatif saat n bernilai ganjil. Ketika $r = -1$, maka fungsi f akan bernilai 1 untuk n genap dan bernilai -1 untuk n ganjil. Ketika $r = 1$, maka fungsi akan selalu bernilai 1 untuk setiap nilai n dan saat $-1 < r < 1$, maka fungsi akan konvergen ke 0 saat $n \to \infty$. Jadi dapat disimpulkan bahwa barisan $a_n = r^n$ akan:*

$$\lim_{n\to\infty} r^n = \begin{cases} 0 & -1 < r < 1, \\ 1 & r = 1 \end{cases}$$

Jadi barisan $a_n = r^n$ akan konvergen untuk $-1 < r \leq 1$ dan divergen untuk nilai r selain itu.

1.4 Barisan Berganti Tanda

Selanjutnya untuk barisan yang memiliki unsur yang nilainya berganti tanda. Misalnya barisan $a_n = (-1)^n n$, di mana unsur barisan tersebut adalah $a_n = -1, 2, -3, 4, -5, 6, -7, \cdots$. Perlu juga dianalisis, kenapa barisan yang berganti tanda hanya bisa konvergen ke 0. Itu satu-satunya cara bagi barisan berganti tanda untuk konvergen. Untuk lebih jelasnya dapat dilihat teorema berikut:

Teorema 1.4.1. *Jika $\lim_{x\to\infty} |a_n| = 0$ maka $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$.*

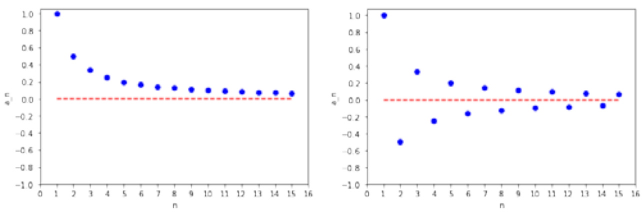
Contoh 1.4.1. *Untuk $a_n = (-1)^{n+1}\frac{1}{n}$, maka*

$$\begin{aligned} \lim_{x\to\infty} |a_n| &= \lim_{x\to\infty} \left|(-1)^{n+1}\frac{1}{n}\right| \\ &= \lim_{x\to\infty} \frac{1}{n} \\ &= 0 \end{aligned}$$

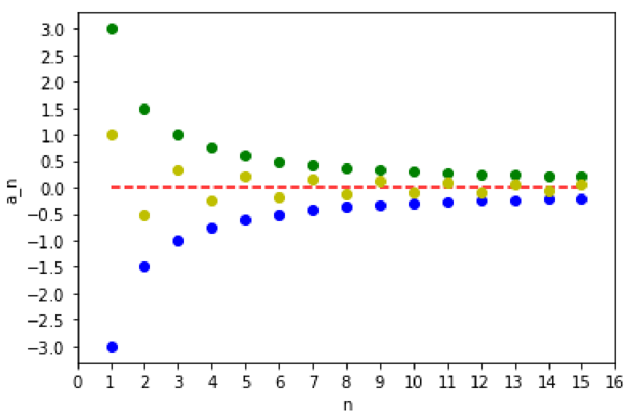
sehingga a_n akan konvergen ke 0. Lebih jelasnya bisa dilihat pada gambar 1.2.

Mungkin ada yang bertanya tentang teorema di atas kenapa $\lim_{x\to\infty} |a_n| = 0$? Secara intuisi untuk barisan yang berganti tanda, yaitu unsurnya berganti tanda positif negatif secara berurutan, maka satu-satunya jalan agar barisannya konvergen adalah unsur yang bernilai positif akan menuju 0 demikian pula unsur yang negatif akan menuju 0. Lebih jelasnya dapat disimak dalam contoh berikut:

Contoh 1.4.2. *Barisan $a_n = (-1)^n$, unsur yang nilai positif akan konvergen ke 1 dan unsur yang bernilai negatif akan konvergen ke -1. Sehingga barisan a_n menjadi divergen.*



Gambar 1.2: Gambar sebelah kiri merupakan plot $a_n = \frac{1}{n}$, sedangkan gambar sebelah kanan adalah plot barisan $a_n = (-1)^{n+1}\frac{1}{n}$. Terlihat keduanya konvergen menuju 0 dengan cara yang berbeda.



Gambar 1.3: Titik berwarna biru adalah a_n, titik berwarna kuning adalah b_n dan titik berwarna hijau adalah c_n. Terlihat bahwa $a_n \leq b_n \leq c_n$ dan $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} c_n = 0$. Terlihat pula bahwa $\lim_{n\to\infty} b_n = 0$.

1.5 Teorema Apit Barisan

Jika terdapat dua barisan yang konvergen ke nilai yang sama, maka barisan lain yang selalu berada di antara kedua barisan sebelumnya pasti akan konvergen ke nilai yang sama. Pada akhirnya ketiga barisan tersebut akan konvergen ke nilai yang sama. Fenomena ini dapat dilihat pada teorema berikut:

Teorema 1.5.1. *Jika* $a_n \leq b_n \leq c_n$ *untuk* $n \geq n_0$ *dan* $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} c_n = L$*, maka* $\lim_{n\to\infty} b_n = L$*.*

Untuk lebih jelas dari ilustrasi teorema di atas, dapat dilihat pada gambar 1.3.

Contoh 1.5.1. *Tentukan apakah barisan* $a_n = \frac{n!}{n^n}$ *konvergen atau tidak?*

Jawab 1.5.1. *Akan dicari bahwa barisan a_n:*

$$\begin{aligned} 0 \leq a_n &= \frac{n!}{n^n} \\ &= \frac{(n)(n-1)(n-2)\cdots(2)(1)}{(n)(n)(n)\cdots(n)(n)} \\ &\leq \frac{1}{n} \end{aligned}$$

Jadi didapatkan bahwa $0 \leq a_n \leq \frac{1}{n}$*, sehingga* $0 \leq \lim_{n\to\infty} a_n \leq \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$*. Jadi* $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$*. Sehingga barisan a_n adalah barisan yang konvergen.*

1.6 Uji Kekonvergenan Menggunakan Limit

Unsur-unsur dari suatu barisan a_n dapat berada pada suatu fungsi kontinu $f(x)$, di mana nilai dari barisan tersebut adalah $a_n = f(n)$. Maka properti limit pada suatu fungsi kontinu dapat digunakan sebagai uji kekonvergenan seperti dinyatakan pada teorema berikut:

Contoh 1.6.1. *Jika* $\lim_{n\to\infty} a_n = L$*, dan fungsi f kontinu pada L, maka* $\lim_{n\to\infty} f(a_n) = f(L)$.

Contoh 1.6.2. *Periksa kekonvergenan dari barisan berikut:* $a_n = \cos\left(\frac{\pi}{n^2}\right)$.

Jawab 1.6.1. *Karena fungsi* cos *akan kontinu dimana-mana maka:*

$$\begin{aligned} \lim_{n\to\infty} a_n &= \lim_{n\to\infty} \cos\left(\frac{\pi}{n^2}\right) \\ &= \cos\left(\lim_{n\to\infty} \frac{\pi}{n^2}\right) \\ &= \cos(0) = 1 \end{aligned}$$

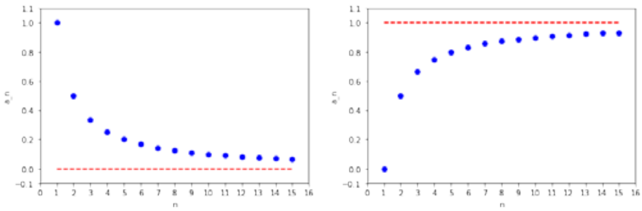
jadi barisan a_n akan konvergen ke 0.

1.7 Barisan Monoton Naik dan Monoton Turun

Definisi 1.7.1. Suatu barisan a_n disebut monoton naik jika $a_{n+1} > a_n$ dan monoton turun jika $a_{n+1} < a_n$ untuk setiap $n \geq 1$.

Dengan kata lain, suatu barisan yang monoton naik, maka nilai-nilai unsurnya akan memenuhi $a_1 < a_2 < \cdots < a_n < \cdots$. Sedangkan barisan monoton turun akan memenuhi $a_1 > a_2 > \cdots > a_n > \cdots$.

Contoh 1.7.1. *Buktikan bahwa barisan* $a_n = \frac{1}{n}$ *adalah barisan monoton turun,*



Gambar 1.4: Gambar kiri merupakan barisan $a_n = \frac{1}{n}$ yang merupakan barisan monoton turun, sedangkan yang sebelah kanan merupakan barisan $a_n = 1 - \frac{1}{n}$ yang merupakan barisan monoton naik.

Jawab 1.7.1. *Akan dibuktikan dibuktikan bahwa $a_{n+1} < a_n$:*

$$\begin{aligned} a_{n+1} &< a_n \\ \frac{1}{n+1} &< \frac{1}{n} \\ n &< n+1 \\ 0 &< 1 \end{aligned}$$

Jadi terbukti bahwa $a_{n+1} < a_n$, sehingga barisan a_n adalah monoton turun. Lebih jelasnya lihat gambar 1.4.

Contoh 1.7.2. *Buktikan $a_n = 1 - \frac{1}{n}$ adalah barisan monoton naik.*

Jawab 1.7.2. *Akan dibuktikan $a_{n+1} > a_n$:*

$$\begin{aligned} a_{n+1} &> a_n \\ 1 - \frac{1}{n+1} &> 1 - \frac{1}{n} \\ -\frac{1}{n+1} &> -\frac{1}{n} \\ \frac{1}{n+1} &< \frac{1}{n} \\ n &< n+1 \\ 0 &< 1 \end{aligned}$$

Jadi terbukti bahwa $a_{n+1} > a_n$, sehingga barisan a_n adalah monoton naik. Lebih jelasnya lihat gambar 1.4.

Contoh 1.7.3. *Buktikan jika barisan $a_n = \frac{n}{n^2+1}$ adalah monoton turun.*

Jawab 1.7.3. *Barisan a_n akan dibuktikan monoton turun sehingga perlu dibuktikan bahwa*

$a_{n+1} < a_n$.

$$
\begin{aligned}
a_{n+1} &< a_n \\
\frac{n+1}{(n+1)^2+1} &< \frac{n}{n^2+1} \\
(n+1)(n^2+1) &< n[(n+1)^2+1] \\
n^3+n^2+n+1 &< n^3+2n^2+2n \\
1 &< n^2+n \\
1 &< n(n+1)
\end{aligned}
$$

karena $n \geq 1$, maka pertidaksamaan di atas selalu benar. Jadi terbukti bahwa $a_{n+1} < a_n$, sehingga barisan a_n adalah monoton turun.
Cara lain adalah dengan membuktikan bahwa fungsi $f(x) = \frac{x}{x^2+1}$ gradiennya adalah selalu negatif untuk setiap $x > 1$.

$$
\begin{aligned}
f'(x) &= \frac{(1)(x^2+1)-(x)(2x)}{(x^2+1)^2} \\
&= \frac{1-x^2}{(x^2+1)^2} \\
&= \frac{(1-x)(1+x)}{(x^2+1)^2}
\end{aligned}
$$

Jadi untuk $x > 1$ akan menyebabkan $f'(x) < 0$, sehingga fungsi $f(x)$ adalah fungsi menurun karena gradiennya selalu negatif. Maka dapat disimpulkan bahwa a_n adalah barisan monoton turun.

Sejauh ini sudah dijabarkan beberapa metoda untuk menguji kekonvergenan suatu barisan. Yaitu bisa menggunakan metoda limit, mencari turunan fungsi yang bersesuaian dan membandingkan urutan dari unsur-unsur pembentuk barisan. Dari beberapa metoda yang disampaikan, ada beberapa kelebihan dan kekurangannya.

Barisan yang unsur-unsurnya mengandung faktorial, sebaiknya gunakan metoda membandingkan unsur a_{n+1} dengan unsur a_n karena barisan tipe ini akan sulit untuk dicari limit dan turunan dari fungsi yang berkaitan. Selanjutnya metoda limit hanya bisa mencari karakter dari barisan pada bagian akhirnya saja. Sedangkan metoda turunan dapat menentukan sejak kapan terdapat perubahan trend di dalam barisan tersebut.

Lebih lanjut, dengan memperbanyak latihan akan didapatkan intuisi yang lebih tajam mengenai kapan menggunakan metoda yang berbeda ini. Untuk latihan sendiri sudah dibuatkan pada akhir dari bab ini.

Contoh 1.7.4. *Buktikan bahwa barisan $a_n = \frac{n!}{n^n}$ adalah barisan konvergen.*

Jawab 1.7.4. *dengan membuktikan bahwa a_n adalah barisan monoton turun.*

$$\begin{aligned}
a_{n+1} &< a_n \\
\frac{(n+1)!}{(n+1)^{(n+1)}} &< \frac{n!}{n^n} \\
\frac{(n+1)!}{n!} &< \frac{(n+1)^{(n+1)}}{n^n} \\
\frac{(n+1)(n!)}{n!} &< \frac{(n+1)^{(n+1)}}{n^n} \\
(n+1) &< \frac{(n+1)(n+1)^n}{n^n} \\
1 &< \frac{(n+1)(n+1)^n}{(n+1)n^n} \\
1 &< \left(\frac{n+1}{n}\right)^n \\
1 &< \left(1+\frac{1}{n}\right)^n
\end{aligned}$$

untuk n bilangan bulat positif maka $\frac{1}{n} > 0$, sehingga pertidaksamaan di atas terpenuhi. Jadi terbukti bahwa barisan a_n adalah barisan monoton turun.

1.8 Barisan Terbatas

Definisi 1.8.1. Barisan a_n disebut terbatas di atas jika terdapat suatu bilangan asli M sehingga $a_n \leq M$ untuk setiap $n \geq 1$. Barisan a_n disebut terbatas di bawah jika terdapat suatu bilangan asli N sehingga $N \leq a_n$ untuk setiap $n \geq 1$. Jika a_n terbatas di bawah dan juga terbatas di atas, maka barisan a_n disebut barisan terbatas.

Teorema 1.8.1. *Barisan yang monoton naik dan terbatas di atas adalah barisan konvergen. Demikian pula barisan yang monoton turun dan terbatas di bawah juga barisan konvergen.*

Contoh 1.8.1. *Buktikan bahwa barisan $a_{n+1} = \frac{1}{2}(a_n + 6)$ dengan $a_1 = 2$ adalah barisan monoton naik dan terbatas di atas untuk n adalah bilangan asli.*

Jawab 1.8.1. *Barisan a_n adalah monoton naik berarti akan dibuktikan bahwa $a_{n+1} > a_n$. Akan dibuktikan dengan menggunakan induksi. Untuk $n = 1$, maka $a_2 = \frac{1}{2}(a_1 + 6) = \frac{1}{2}(2+6) = 4$. Jadi benar untuk $n = 1$ karena $a_2 > a_1$. Selanjutnya misalkan benar untuk*

$n = k$, berarti:

$$\begin{aligned}
a_{k+1} &> a_k \\
a_{k+1} + 6 &> a_k + 6 \\
\frac{1}{2}(a_{k+1} + 6) &> \frac{1}{2}(a_k + 6) \\
a_{k+2} &> a_{k+1}
\end{aligned}$$

sehingga benar untuk $n = k+1$. Jadi dapat disimpulkan melalui induksi matematika bahwa barisan a_n adalah monoton naik. Selanjutnya akan dibuktikan bahwa barisan a_n akan terbatas di atas. Misalkan bahwa a_n akan terbatas di atas oleh 10. Jadi akan dibuktikan bahwa $a_n < 10$. Akan dibuktikan dengan menggunakan induksi matematika. Karena $a_1 = 2$ maka benar untuk $n = 1$ bahwa $a_1 < 10$. Misalkan benar untuk $n = k$, sehingga $a_k < 10$.

$$\begin{aligned}
a_k &< 10 \\
a_k + 6 &< 10 + 6 \\
\frac{1}{2}(a_k + 6) &< \frac{1}{2}16 \\
a_{k+1} &< 8 < 10
\end{aligned}$$

jadi benar juga untuk $n = k+1$. Sehingga dapat disimpulkan bahwa barisan a_n terbatas di atas. Karena barisan a_n monoton naik dan terbatas di atas, maka dapat disimpulkan bahwa barisan a_n adalah konvergen. Selanjutnya untuk mencari kemana barisan a_n akan konvergen akan kita gunakan cara sebagai berikut. Jika barisan a_n konvergen, maka $\lim_{n\to\infty} a_n = L$ dan $\lim_{n\to\infty} a_{n+1} = L$. Gunakan ini pada persamaan barisan a_n akan didapatkan bahwa:

$$\begin{aligned}
a_{n+1} &= \frac{1}{2}(a_n + 6) \\
\lim_{n\to\infty} a_{n+1} &= \frac{1}{2}(\lim_{n\to\infty} a_n + 6) \\
L &= \frac{1}{2}(L + 6) \\
2L &= L + 6 \\
L &= 6
\end{aligned}$$

Jadi barisan a_n akan konvergen ke 6.

1.9 Ekor Suatu Barisan

Sering sekali dalam menentukan pola suatu barisan, dicari beberapa suku awal dari barisan tersebut dengan memasukkan beberapa nilai n. Misalkan barisan $a_n = n^2$ beberapa unsur awalnya adalah $1,4,9,16,25,36,49,64,81,\cdots$. Karena terlihat polanya dimana suku setelahnya lebih besar dari suku sebelumnya, maka didapatkan bahwa barisan tersebut adalah barisan monoton naik.

Akan tetapi sering sekali cara seperti ini mengecoh, karena ada beberapa barisan yang pola di awal adalah monoton naik, akan tetapi pada beberapa unsur selanjutnya malah berupah polanya menjadi monoton turun. Untuk itu, pola di awal dari suatu barisan tidak dapat menentukan karakter barisan tersebut secara keseluruhan. Yang terpenting adalah bagaimana pola barisan tersebut pada unsur yang urutannya cukup besar. Cukup besar di sini juga relatif. Jadi dapat dibilang bahwa ekor dari barisan tersebut yang menentukan apakah barisan tersebut akan konvergen atau divergen, bukan pola di awal barisan. Untuk lebih jelasnya dapat diamati dari beberapa contoh berikut:

Contoh 1.9.1. *Diketahui suatu barisan* $a_n = \frac{1}{(n-10)^2}$.

1. *Carilah unsur-unsur awal barisan tersebut, yaitu* $a_2, a_3, \cdots, a_9$.
2. *Carilah nilai unsur-unsur barisan tersebut pada* $a_{11}, a_{12}, \cdots, a_{18}$.
3. *Amati apakah ada perubahan pola dari unsur-unsur barisan tersebut.*
4. *Tentukan kapan terjadinya perubahan pola tersebut.*
5. *Periksa kekonvergenan dari barisan* a_n.

Jawab 1.9.1. 1. *Berikut adalah nilai unsur-unsur awal dari barisan tersebut, yaitu:*

$$a_2 = \frac{1}{64}, a_3 = \frac{1}{49}, a_4 = \frac{1}{36}, a_5 = \frac{1}{25}, a_6 = \frac{1}{16}, a_7 = \frac{1}{9}, a_8 = \frac{1}{4}, a_9 = 1$$

2. *Berikut adalah nilai-nilai dari unsur-unsur barisan:*

$$a_{11} = 1, a_{12} = \frac{1}{4}, a_{13} = \frac{1}{9}, a_{14} = \frac{1}{16}, a_{15} = \frac{1}{25}, a_{16} = \frac{1}{36}, a_{17} = \frac{1}{49}, a_{18} = \frac{1}{64}$$

3. *Pada unsur-unsur barisan dari* a_2 *sampai* a_9 *terlihat bahwa* $a_2 < a_3 < \cdots < a_9$, *sedangkan unsur-unsur barisan selanjutnya memiliki pola* $a_{11} > a_{12} > \cdots > a_{19}$.

4. *Perubahan pola terjadi tepatnya saat* $n > 10$. *Untuk melihat fenomena ini dapat dicari gradien dari fungsi yang bersesuaian dengan barisan* a_n, *yaitu* $f(x) = \frac{1}{(x-10)^2}$:

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{1}{(x-10)^2} \\ f'(x) &= \frac{-2}{(x-10)^3} \end{aligned}$$

Jadi untuk $x < 10$, *nilai dari* $f'(x)$ *akan positif. Sedangkan untuk untuk* $x > 10$, *nilai dari* $f'(x)$ *akan negatif.*

5. *Untuk memeriksa kekonvergenan, tinggal cari apakah limit fungsi yang bersesuaian dengan barisan tersebut ada.*

$$\begin{aligned}\lim_{x\to\infty} f(x) &= \lim_{x\to\infty} \frac{1}{(x-10)^2} \\ &= \lim_{x\to\infty} \frac{1}{(x-10)^2}\left(\frac{1/x^2}{1/x^2}\right) \\ &= \lim_{x\to\infty} \frac{1/x^2}{(1-10/x)^2} \\ &= \frac{0}{(1-0)^2} = 0\end{aligned}$$

Karena nilai $\lim_{x\to\infty} \frac{1}{(x-10)^2} = 0$*, maka barisan* $a_n = \frac{1}{(n-10)^2}$ *konvergen ke 0.*

Terlihat dari contoh soal di atas, nilai suku awal tidak mencerminkan perilaku dari barisan secara keseluruhan. Sehingga dapat terlihat bahwa yang menentukan dari kekonvergenan suatu barisan adalah ekor dari barisan itu sendiri. Terlihat dari contoh tersebut, untuk suku yang lebih besar dari 10, maka unsur-unsur barisan akan mulai serempak menurun menuju 0. Sedangkan untuk suku yang lebih kecil dari unsur ke 10, polanya berkebalikan.

Jika seumpamanya kita hanya melihat dari beberapa suku awal saja, maka kesimpulan yang akan terhadap barisan tersebut mungkin tidak tepat karena beberapa suku awal menandakan bahwa barisan a_n adalah monoton naik. Untuk itu, jika kalian menjawab pertanyaan baik itu pada ujian, tugas ataupun latihan, menampilkan beberapa unsur awal barisan bisa memberikan inspirasi terhadap kelakuan barisan tersebut, akan tetapi yang paling penting adalah prilaku dari ekor barisan tersebut.

1.10 Latihan Soal Barisan

Latihan 1.10.1. *Dengan mencari nilai limit fungsi yang bersesuaian, periksa kekonvergenan dari barisan berikut:*

1. *Diketahui* $a_n = \frac{n}{n+1}$
2. *Diketahui* $a_n = \frac{n}{n^2+1}$
3. *Diketahui* $a_n = \frac{n^2}{n+1}$
4. *Diketahui* $a_n = \frac{n+1}{\sqrt{n^2-1}}$
5. *Diketahui* $a_n = \frac{3n^3}{n+\sqrt{n^6+n^3+2}}$
6. *Diketahui* $a_n = n + \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2}$
7. *Diketahui* $a_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^2$

Latihan 1.10.2. *Bandingkan nilai dari a_n dengan a_{n+1} untuk menentukan apakah barisan berikut monoton turun atau naik.*

1. *Diketahui* $a_n = \left(\frac{2}{3}\right)^n$
2. *Diketahui* $a_n = \left(\frac{99}{100}\right)^n$
3. *Diketahui* $a_n = \left(\frac{1001}{999}\right)^n$
4. *Diketahui* $a_n = \left(\frac{2.01}{1.99}\right)^n$
5. *Diketahui* $a_n = \frac{9^n}{10^{n-1}}$
6. *Diketahui* $a_n = \frac{10^{n-2}}{9^n}$
7. *Diketahui* $a_n = \frac{2^n}{(n-1)!}$
8. *Diketahui* $a_n = \frac{10^n}{(n-2)!}$
9. *Diketahui* $a_n = \frac{1000^{n-2}}{(n-100)!}$
10. *Diketahui* $a_n = \frac{(n+1)!}{n!}$
11. *Diketahui* $a_n = \frac{(n+1)!}{(n+2)!}$

Latihan 1.10.3. *Gunakan limit trigonometri untuk memeriksa kekonvergenan dari barisan berikut:*

1. *Diketahui* $a_n = \cos(n)$.
2. *Diketahui* $a_n = \sin(n)$.
3. *Diketahui* $a_n = \sin\left(\frac{1}{n}\right)$.
4. *Diketahui* $a_n = \cos\left(\frac{1}{n}\right)$.
5. *Diketahui* $a_n = n\sin\left(\frac{1}{n}\right)$.
6. *Diketahui* $a_n = n\cos\left(\frac{\pi}{2} + \frac{1}{n}\right)$.
7. *Diketahui* $a_n = n\sin\left(\frac{1}{n^2}\right)$.
8. *Diketahui* $a_n = n\cos(n)$.
9. *Diketahui* $a_n = \cos\left(\pi + \frac{\pi}{n} + \frac{\pi}{n^2}\right)$.

Latihan 1.10.4. *Gunakan teorema apit untuk mencari kekonvergenan barisan berikut:*

1. *Diketahui* $a_n = \frac{\sin(n)}{n}$

2. *Diketahui* $a_n = \frac{\cos(n)}{n}$
3. *Diketahui* $a_n = \frac{1}{n^2}\cos(n^2)$
4. *Diketahui* $a_n = \frac{1}{n}\sin\left(n^2+n+\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}\right)$
5. *Diketahui* $a_n = \frac{1}{n^2+2n+3}\cos\left(n^6+n^3+3\right)$
6. *Diketahui* $a_n = \frac{1}{n^2}\cos\left(\frac{1}{n}\right)$
7. *Diketahui* $a_n = \frac{3^n}{2^n+4^n}$
8. *Diketahui* $a_n = \frac{10^n}{3^n+6^n+9^n+12^n}$
9. *Diketahui* $a_n = \frac{3^n+6^n+9^n}{2^n+4^n+6^n+8^n+10^n}$

Latihan 1.10.5. *Carilah limit dari fungsi yang bersesuaian dengan barisan berikut untuk menguji kekonvergenannya. Gunakan Teorema L'Hospital dalam mencari nilai limit fungsinya.*

1. *Diketahui* $a_n = \frac{\ln(n^2)}{n}$.
2. *Diketahui* $a_n = \frac{\ln(n^3)}{n^2+1}$.
3. *Diketahui* $a_n = \frac{\ln(n^3+n^2+n+2)}{n+1}$.
4. *Diketahui* $a_n = \frac{(\ln(n^2+1))^2}{n^3+1}$.

Latihan 1.10.6. *Jawablah pertanyaan berikut sesuai dengan materi yang telah disampaikan:*

1. *Buktikan bahwa barisan* $a_n = \frac{2^n-1}{2^n}$ *konvergen.*
2. *Apakah barisan* $a_n = \frac{n^2+1}{n^2-1}$ *konvergen?*
3. *Apakah barisan* $a_n = \frac{\sin n}{\sqrt{n}}$ *konvergen. Jika konvergen, tentukan nilai limitnya.*
4. *Tentukan apakah barisan* $a_n = 1-(0.2)^n$ *akan konvergen atau divergen.*
5. *Tentukan apakah barisan* $a_n = \frac{n^3}{n^3+1}$ *konvergen atau divergen.*
6. *Periksa kekonvergenan barisan* $a_n = \frac{2^n}{n!}$

Latihan 1.10.7. *Latihan berikut merupakan barisan yang kekonvergenannya dibuktikan dengan metoda dan trik khusus.*

1. *Periksa kekonvergenan barisan berikut, dengan mencari nilai limitnya.*

$$a_n = \left(\frac{n^2+1}{n^2}\right)^n$$

2. *Periksa kekonvergenan barisan berikut, dengan mencari nilai limitnya.*

$$a_n = \left(\frac{n-1}{n+1}\right)^n$$

3. *Periksa kekonvergenan barisan berikut, dengan mencari nilai limitnya.*

$$a_n = \left(\frac{n^2+2}{n^2+3}\right)^n$$

4. *Periksa kekonvergenan barisan berikut, dengan mencari nilai limitnya.*

$$a_n = \left(\frac{n^2+2}{n^2+3}\right)^{n^2}$$

2

Deret

2.1 Pendahuluan

Ibu Indah, istri Pak Andi menabung di bulan pertama sebanyak Rp. 1000000,00 dan pada bulan selanjutnya menabung Rp.100000,00 lebih banyak dari bulan sebelumnya. Hal ini dilakukan beliau selama setahun. Sehingga pola menabung Ibu Indah dapat dilihat pada tabel 2.1. Terlihat bahwa pola menabung Ibu Indah akan membentuk barisan 1000000,

Bulan ke	**Tabungan**	**Jumlah**
1	1000000	1000000
2	1100000	2100000
3	1200000	3300000
4	1300000	4600000
5	1400000	6000000
6	1500000	7500000
7	1600000	9100000
8	1700000	10800000
9	1800000	12600000
10	1900000	14500000
11	2000000	16500000
12	2100000	18600000

Tabel 2.1: Tabel tabungan Indah.

1100000, 1200000, $\cdots$, 2100000 dan jumlah tabungannya akan membentuk deret 1000000

+ 1100000 + 1200000 + $\cdots$ + 2100000. Dilihat dari barisan yang dibentuk oleh cara Ibu Indah menabung, bisa didapatkan pola sehingga nantinya dapat dihitung unsur-unsur barisan tersebut.
Contoh:

1. Tanpa melihat tabel 2.1 dan hanya mengetahui pola menabung Ibu Indah, dapatkah diketahui berapa banyak beliau akan menabung di bulan ke-10?
   Jawab:
   Dilihat dari pola menabung Ibu Indah dimana setiap bulannya akan meningkat sebesar Rp. 100000,00, maka pada bulan ke 10 beliau akan menabung sebesar $1000000 + (10-1)100000 = 1900000$.

2. Tanpa melihat tabel 2.1 dan hanya mengetahui pola menabung Ibu Indah, dapatkah diketahui jumlah tabungan beliau di bulan ke-10?
   Jawab:
   Jumlah tabungan Ibu indah dapat diketahui dengan menjumlahkan banyaknya uang yang ditabung pada bulan pertama, kedua sampai terakhir pada bulan ke sepuluh, yaitu:

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{10} &= 1000000 + 1100000 + 1200000 + \cdots + 1900000 \\ &= (10 \times 1000000) + (0 + 100000 + 200000 + \cdots + 900000) \\ &= 10000000 + 4 \times 1000000 + 500000 \\ &= 14500000\end{aligned}$$

Tanpa disadari, kita telah menggunakan ekspresi deret pada bilangan desimal seperti $\pi = 3.14159\cdots$, dimana nilai desimalnya dapat dibentuk sebagai:

$$\begin{aligned}\pi &= 3.14159 \\ &= 3 + 0.1 + 0.04 + 0.001 + 0.0005 + 0.00009 + \cdots \\ &= 3 + \frac{1}{10} + \frac{4}{100} + \frac{1}{1000} + \frac{5}{10000} + \frac{9}{100000} + \cdots\end{aligned}$$

Secara umum deret dapat dituliskan sebagai deret terbatas:

$$\sum_{n=1}^{M} a_n = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_M$$

ataupun deret tak terbatas:

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n + \cdots$$

Sebagai ilustrasi misalkan deret

$$1+2+3+4+5+6+7+8+9+10$$

Dengan mudah dapat dihitung bahwa nilai dari $\sum_{n=1}^{10} n = 55$. Jika unsur deret ditambah lagi menjadi

$$1+2+3+4+5+6+7+8+9+10+\cdots+100$$

maka nilai dari $\sum_{n=1}^{100} n = 5050$. Jika ditambah lagi menjadi

$$1+2+3+4+5+6+7+8+9+10+\cdots+1000$$

maka nilai dari $\sum_{n=1}^{1000} n = 500500$. Demikian selanjutnya sehingga didapatkan pola bahwa semakin ditambah unsur dari deret tersebut, maka nilai deretnya akan semakin membesar. Selain itu kita dapatkan bahwa nilai deret $\sum_{n=1}^{\infty} n = \frac{1}{2}n(n+1)$. Terlihat bahwa semakin besar nilai n, maka nilai deret juga akan membesar. Dengan kata lain bahwa deret tak hingga $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ akan bernilai tidak berhingga.
Contoh lain, misalkan deret:

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}$$

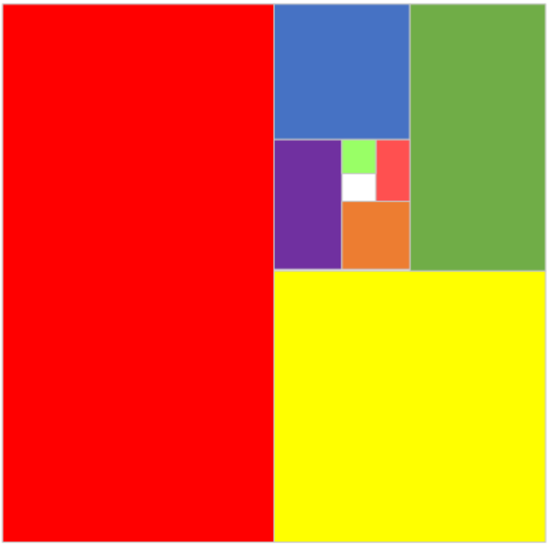
Dengan mudah dapat dihitung nilai deretnya yaitu $\frac{15}{16} = 0.9375$. Jika unsur deretnya ditambah menjadi:

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+\frac{1}{32}+\frac{1}{64}$$

Nilai deretnya juga dapat kita hitung yaitu $\frac{63}{64} = 0.984375$. Coba ditambah lagi unsur deretnya menjadi:

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+\frac{1}{32}+\frac{1}{64}+\frac{1}{128}+\frac{1}{256}$$

Nilai deretnya menjadi $\frac{255}{256} = 0.99609375$. Terlihat bahwa semakin ditambah unsur deretnya, nilai deret akan membesar, akan tetapi tidak pernah melebihi 1. Salah satu ilustrasi yang mudah untuk menjelaskan fenomena ini dapat dilihat pada gambar 2.1.



Gambar 2.1: Salah satu cara menggambarkan deret $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n}$. Sisi persegi adalah 1, sehingga luas persegi adalah 1 satuan luas. Luas daerah berwarna merah adalah setengah dari persegi, luas daerah berwarna kuning adalah seperempat dari persegi, luas daerah berwarna hijau adalah seperdelapan dari persegi, luas daerah berwarna biru adalah seperenambelas dari luas persegi, demikian seterusnya. Jadi terlihat bahwa jika dilanjutkan sampai tak berhingga suku, maka deret akan konvergen ke seluruh daerah persegi yaitu 1 satuan luas. Jadi nilai dari deret $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} = 1$.

Cara lain yaitu dengan menggunakan permisalan:

$$\begin{aligned} X &= \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \cdots \\ \frac{1}{2}X &= \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \frac{1}{32} + \cdots \end{aligned}$$

kurangkan persamaan pertama dengan persamaan kedua akan didapatkan bahwa:

$$\begin{aligned} X - \frac{1}{2}X &= \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2}X &= \frac{1}{2} \\ X &= 1 \end{aligned}$$

Jadi terlihat bahwa nilai deret $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} = 1$.

Definisi 2.1.1. Diketahui suatu deret $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots$, maka s_n disebut sebagai deret parsial dimana:

$$s_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n = \sum_{n=1}^{n} a_n$$

Jika barisan dari s_n konvergen, dan $\lim_{n\to\infty} s_n = s$ ada, maka deret $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergen. Sebaliknya jika s_n divergen, maka deret $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ akan divergen.

Contoh 2.1.1. *Buktikan bahwa deret berikut* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *dengan* $\sum_{i=1}^{n} a_i = \frac{n^2}{n^2+1}$ *adalah deret konvergen.*

Jawab 2.1.1. *Dengan kata lain, deret tersebut membentuk suatu barisan. Jika barisan konvergen, berarti deretnya juga konvergen. Selanjutnya dengan mencari nilai limit dari barisan akan dibuktikan bahwa barisannya konvergen yang akan menyebabkan deretnya juga menjadi konvergen.*

$$\begin{aligned} \lim_{n\to\infty} \frac{n^2}{n^2+1} &= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{1+\frac{1}{n^2}} \\ &= 1 \end{aligned}$$

jadi karena $\lim_{n\to\infty} \frac{n^2}{n^2+1} = \lim_{n\to\infty} s_n = \sum_{n=1}^{\infty} a_n = 1$, *maka deret* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *adalah deret konvergen.*

2.2 Deret Geometri

Deret geometri dapat dituliskan sebagai

$$\sum_{n=1}^{\infty} ar^{n-1}, a \neq 0$$

Suku selanjutnya dari deret geometri merupakan kelipatan r kali suku sebelumnya. Dapat juga dijabarkan sebagai

$$a + ar + ar^2 + \cdots + ar^n + \cdots$$

Untuk $r \neq 1$ didapatkan:

$$\begin{aligned} s_n &= a + ar + ar^2 + \cdots + ar^n \\ rs_n &= ar + ar^2 + ar^3 + \cdots + ar^{n+1} \end{aligned}$$

persamaan pertama dikurangi persamaan kedua akan didapatkan

$$\begin{aligned} s_n - rs_n &= a - ar^{n+1} \\ (1-r)s_n &= a(1-r^{n+1}) \\ s_n &= \frac{a(1-r^{n+1})}{(1-r)} \end{aligned}$$

untuk $-1 < r < 1$, maka $\lim_{n\to\infty} r^{n+1} = 0$, sehingga

$$\begin{aligned} \lim_{n\to\infty} s_n &= \lim_{n\to\infty} \frac{a(1-r^{n+1})}{(1-r)} \\ &= \frac{a}{1-r} \end{aligned}$$

Jadi dapat disimpulkan bahwa deret geometri akan konvergen jika $-1 < r < 1$. Sebaliknya deret geometri akan divergen jika $|r| \geq 1$.

Contoh 2.2.1. *Tentukan nilai deret berikut* $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n}$.

Jawab 2.2.1. *Diketahui* $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \cdots$. *Terlihat bahwa deret tersebut adalah deret geometri dengan* $r = \frac{1}{2}$. *Jadi*

$$\begin{aligned} \lim_{n\to\infty} s_n &= \frac{a}{1-r} \\ &= \frac{0.5}{1-0.5} = 1 \end{aligned}$$

Jadi $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} = 1$, *sesuai dengan contoh soal sebelumnya yang sudah kita selesaikan.*

Contoh 2.2.2. *Tentukan nilai dari deret berikut* $5 + 2 + \frac{4}{5} + \frac{8}{25} + \frac{16}{125} + \cdots$.

Jawab 2.2.2. *Terlihat bahwa deret tersebut adalah deret geometri dengan* $r = \frac{2}{5}$. *Sehingga:*

$$\begin{aligned} \lim_{n\to\infty} s_n &= \frac{a}{1-r} \\ &= \frac{5}{1-\frac{2}{5}} = \frac{25}{3} \end{aligned}$$

Jadi nilai deret tersebut adalah $\frac{25}{3}$.

Contoh 2.2.3. *Tentukan apakah deret berikut konvergen atau tidak:* $\sum_{n=1}^{\infty} 2^{2n} 5^{1-n}$.

Jawab 2.2.3. *Deret terlebih dahulu diubah dalam bentuk yang sesuai:*

$$\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{\infty} 2^{2n}5^{1-n} &= \sum_{n=1}^{\infty} (2^2)^n 5^{-(n-1)} \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4^n}{5^{n-1}} \\
&= 4\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4^{n-1}}{5^{n-1}} \\
&= 4\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{4}{5}\right)^{n-1}
\end{aligned}$$

jadi didapatkan bahwa deret tersebut adalah deret geometri dengan $a = 4$ *dan* $r = \frac{4}{5}$. *Karena* $-1 < r < 1$, *maka deret tersebut akan konvergen. Kemana konvergennya?*

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} s_n &= \frac{1}{1-r} \\
&= \frac{4}{1-\frac{4}{5}} = 16
\end{aligned}$$

jadi deret tersebut akan konvergen ke 16 atau $\sum_{n=1}^{\infty} 2^{2n}5^{1-n} = 16$.

Contoh 2.2.4. *Tulislah bilangan* $3.141919191919\cdots$ *ke dalam bentuk pecahan.*

Jawab 2.2.4. *Bilangan tersebut dapat ditulis sebagai:*

$$\begin{aligned}
3.141919191919... &= 3.14 + 0.0019 + 0.000019 + 0.00000019 + ... \\
&= 3.14 + \frac{19}{10000} + \frac{19}{1000000} + \frac{19}{100000000} + \cdots \\
&= \frac{314}{100} + \frac{19}{10000}\left[1 + \frac{1}{100} + \frac{1}{10000} + \cdots\right] \\
&= \frac{314}{100} + \frac{19}{10000}\left(\frac{1}{1-\frac{1}{100}}\right) \\
&= \frac{314}{100} + \frac{19}{10000}\frac{100}{99} \\
&= \frac{314}{100} + \frac{19}{9900} \\
&= \frac{31185}{9900}
\end{aligned}$$

Contoh 2.2.5. *Tunjukkan jika deret* $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$ *akan konvergen dan tentukan kemana deret tersebut akan konvergen.*

Jawab 2.2.5. *Jabarkan dahulu deretnya:*

$$\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)} &= \frac{1}{(1)(2)}+\frac{1}{(2)(3)}+\frac{1}{(3)(4)}+\cdots \\
&= \left(1-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)+\cdots \\
&= 1+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{4}\right)+\cdots \\
&= 1
\end{aligned}$$

Jadi deret $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)}$ akan konvergen ke 1.

Latihan 2.2.1.

1. *Tentukan apakah deret geometri $\sum_{n=1}^{\infty} 6(0.9)^{n-1}$ konvergen atau divergen. Jika konvergen, tentukan ke mana dia akan konvergen.*

2. *Tentukan apakah deret geometri $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{10^n}{(-9)^{n-1}}$ konvergen atau divergen. Jika konvergen, tentukan ke mana dia akan konvergen.*

3. *Tentukan apakah deret geometri $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-3)^{n-1}}{4^n}$ konvergen atau divergen. Jika konvergen, tentukan ke mana dia akan konvergen.*

4. *Tentukan apakah deret geometri $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(\sqrt{2})^n}$ konvergen atau divergen. Jika konvergen, tentukan ke mana dia akan konvergen.*

5. *Tentukan apakah deret geometri $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\pi^n}{3^{n+1}}$ konvergen atau divergen. Jika konvergen, tentukan ke mana dia akan konvergen.*

2.3 Deret Harmonik

Deret harmonik didefinisikan oleh:

$$\sum_{n=1}^{\infty} = 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\cdots$$

akan dibuktikan bahwa deret harmonik adalah deret yang tidak konvergen. Sebelumnya perlu diperhatikan beberapa hal yaitu:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{3} &> \frac{1}{4} \\
\frac{1}{3}+\frac{1}{4} &> \frac{1}{4}+\frac{1}{4}=\frac{1}{2}
\end{aligned}$$

selain itu:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{5} &> \frac{1}{8}\\
\frac{1}{6} &> \frac{1}{8}\\
\frac{1}{7} &> \frac{1}{8}\\
\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}+\frac{1}{8} &> \frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}\\
\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}+\frac{1}{8} &> \frac{1}{2}
\end{aligned}$$

demikian juga:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{9}+\frac{1}{10}+\cdots+\frac{1}{16} &> \frac{1}{16}+\frac{1}{16}+\cdots+\frac{1}{16}\\
\frac{1}{9}+\frac{1}{10}+\cdots+\frac{1}{16} &> \frac{1}{2}
\end{aligned}$$

sehingga:

$$\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n} &= 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\cdots\\
&= 1+\frac{1}{2}+\left[\frac{1}{3}+\frac{1}{4}\right]+\left[\frac{1}{5}+\cdots+\frac{1}{8}\right]+\left[\frac{1}{9}+\cdots+\frac{1}{16}\right]+\cdots\\
&> 1+\frac{1}{2}+\left[\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\cdots\right]\\
&= 1+\frac{n}{2}
\end{aligned}$$

Karena nilai deret akan membesar menuju tak hingga saat $n \to \infty$, maka deret harmonik tidak konvergen.

2.4 Uji Kedivergenan

Teorema 2.4.1. *Jika deret $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergen, maka $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$.*

Bukti. Misalkan $s_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n$, maka $a_n = s_n - sn - 1$. Karena $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergen, maka $\lim_{n\to\infty} s_n = L$ demikian juga $\lim_{n\to\infty} s_{n-1} = L$, sehingga $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} s_n - \lim_{n\to\infty} sn - 1 = L - L = 0$. ■

Teorema di atas paling tepat digunakan untuk menguji kedivergenan suatu deret. Hal pertama yang perlu diuji adalah menentukan nilai $\lim_{n\to\infty} a_n$. Jika $\lim_{n\to\infty} a_n \neq 0$, maka sesuai dengan teorema, deret akan divergen. Akan tetapi jika $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$, maka perlu uji lainnya untuk membuktikan apakah deret tersebut divergen atau konvergen. Dengan kata lain $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ tidk menjamin deret akan konvergen. Sebagai contoh deret harmonik memenuhi $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$, akan tetapi deret harmonik divergen.

Contoh 2.4.1. *Buktikan bahwa deret berikut divergen* $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n+1}$.

Jawab 2.4.1. *Hal pertama yang perlu dilakukan adalah mengecek nilai dari* $\lim_{n\to\infty} a_n$ *dari deret tersebut.*

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty} a_n &= \lim_{n\to\infty} \frac{n}{n+1} \\ &= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{1+\frac{1}{n}} \\ &= 1\end{aligned}$$

karena $\lim_{n\to\infty} a_n = 1$, *maka deret tersebut divergen.*

Contoh 2.4.2. *Dengan uji kedivergenan buktikan bahwa deret berikut divergen* $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2+1}{n+3}$.

Jawab 2.4.2. *Gunakan uji kedivergenan:*

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty} a_n &= \lim_{n\to\infty} \frac{n^2+1}{n+3} \\ &= \lim_{n\to\infty} \frac{1+\frac{1}{n^2}}{\frac{1}{n}+\frac{3}{n^2}} \\ &= \frac{1+0}{0+0} = \infty\end{aligned}$$

jadi terbukti deret tersebut adalah deret divergen.

Contoh 2.4.3. *Apakah uji kedivergenan dapat digunakan untuk mengetahui apakah deret* $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+1}{n^2+3}$ *divergen atau konvergen?*

Jawab 2.4.3. *Dengan menggunakan uji kedivergenan didapatkan:*

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty} a_n &= \lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{n^2+3} \\ &= \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}}{1+\frac{3}{n}} \\ &= \frac{0+0}{1+0} = 0\end{aligned}$$

karena $\lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{n^2+3} = 0$, *maka uji kedivergenan tidak dapat menyimpulkan apakah deret tersebut konvergen atau divergen.*

Latihan 2.4.1. 1. *Dengan uji kedivergenan, buktikan bahwa deret* $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n}{3n+1}$ *adalah deret divergen.*

2. *Dengan uji kedivergenan, buktikan bahwa deret* $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{\sqrt{n^2+4}}$ *adalah deret divergen.*

3. *Dengan uji kedivergenan, buktikan bahwa deret* $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n-1}{3n-1}$ *adalah deret divergen.*

4. *Dengan uji kedivergenan, buktikan bahwa deret* $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n(n+2)}{(n+3)^2}$ *adalah deret divergen.*

5. *Dengan uji kedivergenan, buktikan bahwa deret* $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{\pi}{3}\right)^n$ *adalah deret divergen.*

2.5 Uji Integral

Integral suatu fungsi pada suatu selang dapat digunakan untuk mencari luas daerah di bawah kurva yang dibentuk oleh fungsi tersebut. Dengan ide yang sama, integral dapat digunakan untuk menguji deret konvergen atau divergen.

Teorema 2.5.1. *Misalkan f adalah fungsi kontinu yang menurun pada $[1,\infty)$ dan misalkan $a_n = f(n)$, maka deret $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ akan konvergen jika dan hanya jika integral berikut $\int_1^{\infty} f(x)dx$ konvergen.*

Kata "jika dan hanya jika " pada teorema tersebut berarti bahwa:

1. Jika $\int_1^{\infty} f(x)dx$ konvergen, maka deret $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergen.

2. Jika $\int_1^{\infty} f(x)dx$ divergen, maka deret $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ divergen.

Contoh 2.5.1. *Dengan teorema di atas, buktikan bahwa deret $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ adalah deret konvergen.*

Jawab 2.5.1. *Pertama akan dicari bahwa:*

$$\begin{aligned}
\lim_{t\to\infty} \int_1^t \frac{1}{x^2}dx &= \lim_{t\to\infty} \left[\frac{-2}{x}\right]_1^t \\
&= \lim_{t\to\infty} \left[\frac{-2}{t} - \frac{(-2)}{1}\right] \\
&= 2
\end{aligned}$$

Jadi karena nilai integralnya ada, maka deret $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ adalah deret konvergen. Disini terlihat bahwa nilai integralnya tidak sama dengan nilai deret. Karena nilai integralnya adalah 2 sedangkan nilai deretnya adalah $\frac{\pi}{6}$.

Contoh 2.5.2. *Dengan teorema di atas, buktikan bahwa deret $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ adalah deret divergen.*

Jawab 2.5.2. *Pertama akan dicari bahwa:*

$$\begin{aligned}
\lim_{t\to\infty} \int_1^t \frac{1}{x}dx &= \lim_{t\to\infty} [\ln x]_1^t \\
&= \lim_{t\to\infty} [\ln t - \ln(1)] \\
&= \infty
\end{aligned}$$

Jadi karena nilai integralnya tidak ada, maka deret $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ *adalah deret divergen.*

Contoh 2.5.3. *Tentukan apakah deret* $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2+1}$ *adalah deret konvergen atau divergen?*

Jawab 2.5.3. *Terlebih dahulu kita lihat nilai integralnya yaitu:*

$$\begin{aligned}
\lim_{t\to\infty} \int_1^t \frac{1}{x^2+1} dx &= \lim_{t\to\infty} \left[\tan^{-1} x\right]_1^t \\
&= \lim_{t\to\infty} \left[\tan^{-1} t - \tan^{-1}(1)\right] \\
&= \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{4}
\end{aligned}$$

Karena nilai integralnya ada maka deret $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2+1}$ *adalah deret konvergen.*

Teorema 2.5.2. *Suatu deret* $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$ *dengan* $p > 0$ *akan konvergen jika dan hanya jika* $p > 1$.

Bukti. Dengan menggunakan teorema sebelumnya kita gunakan:

$$\begin{aligned}
\lim_{t\to\infty} \int_1^t \frac{1}{x^p} dx &= \lim_{t\to\infty} \left[\frac{x^{1-p}}{1-p}\right]_1^t \\
&= \lim_{t\to\infty} \frac{t^{1-p}}{1-p} - \frac{1}{1-p}
\end{aligned}$$

Terlihat bahwa untuk $p > 1$, maka nilai integralnya adalah $\frac{1}{p-1}$, sedangkan untuk $0 < p < 1$, maka nilai integralnya adalah ∞. Jadi $p > 1$ akan membuat deret $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$ konvergen. ■

Dengan adanya teorema di atas maka dengan cepat dapat kita tentukan bahwa deret berikut adalah konvergen $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3}$, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4}$, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^5}$. Sedangkan deret berikut adalah divergen: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}$, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[3]{n}}$, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[4]{n}}$.

Latihan 2.5.1.

1. *Dengan menggunakan uji integral, tentukan apakah deret* $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[5]{n}}$ *konvergen atau divergen.*
2. *Dengan menggunakan uji integral, tentukan apakah deret* $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^5}$ *konvergen atau divergen.*
3. *Dengan menggunakan uji integral, tentukan apakah deret* $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^3}$ *konvergen atau divergen.*
4. *Dengan menggunakan uji integral, tentukan apakah deret* $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n+4}}$ *konvergen atau divergen.*
5. *Dengan menggunakan uji integral, tentukan apakah deret* $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n^2+1}$ *konvergen atau divergen.*

2.6 Uji Perbandingan

Penggunaan metoda uji integral terdapat tantangan berupa fungsi yang sulit untuk diintegralkan seperti pada deret $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^5+n+1}$ jika menggunakan metoda integral musti mencari nilai $\lim_{t\to\infty}\int_1^t \frac{1}{x^5+x+1}dx$. Sedangkan jika kita bandingkan bentuk deret tersebut mirip dengan deret $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^5}$, dimana $\frac{1}{n^5+n+1} < \frac{1}{n^5}$. Karena deret $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^5}$ konvergen, sangat logis bahwa deret $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^5+n+1}$ akan konvergen juga. Muncullah teorema berikut:

Teorema 2.6.1. *Misalkan bahwa deret $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ dan $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ adalah dua deret dengan unsur-unsur yang positif. Maka:*

1. *Jika $a_n \le b_n$ dan $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ konvergen, maka $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ juga konvergen.*

2. *Jika $a_n \ge b_n$ dan $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ divergen, maka $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ juga divergen.*

Tantangan dari teorema uji perbandingan tersebut adalah kita musti tahu kedivergenan atau kekonvergenan deret pembanding. Misalnya:

1. Deret $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^p}$ akan konvergen jika $p > 1$ dan divergen jika $0 < p \le 1$.

2. Deret geometri $\sum_{n=1}^{\infty} ar^{n-1}$ akan konvergen jika $-1 < r < 1$ dan divergen jika $|r| \ge 1$.

Pemahaman tentang deret pembanding akan memudahkan dalam memahami deret mana yang musti digunakan sebagai pembanding agar uji nya menjadi tepat.

Contoh 2.6.1. *Tentukan apakah deret $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2+1}$ akan konvergen atau divergen?*

Jawab 2.6.1. *Dengan menggunakan pembanding yaitu deret $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ akan didapatkan bahwa:*

$$\frac{1}{n^2+1} < \frac{1}{n^2}$$

karena kita tahu bahwa deret $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ konvergen, maka deret $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2+1}$ juga konvergen.

Contoh 2.6.2. *Tentukan apakah deret $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3n}{2n^4+n^2+5n+1}$ akan konvergen atau divergen?*

Jawab 2.6.2. *Akan kita gunakan deret $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^3}$ sebagai pembanding, yaitu:*

$$\begin{aligned}\frac{3n}{2n^4+n^2+5n+1} &< \frac{3n}{2n^4}\\ &= \frac{3}{2n^3}\\ &= \frac{3}{2}\left(\frac{1}{n^3}\right)\end{aligned}$$

Karena deret $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^3}$ konvergen, maka deret $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3n}{2n^4+n^2+5n+1}$ akan konvergen.

Contoh 2.6.3. *Tentukan apakah deret* $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3n+1}{2n^4+n^2+5n+1}$ *akan konvergen atau divergen?*

Jawab 2.6.3. *Hal pertama yang musti dilakukan adalah dengen menggunakan sifat dari* $\sum$ *akan didapatkan bahwa:*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3n+1}{2n^4+n^2+5n+1} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3n}{2n^4+n^2+5n+1} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n^4+n^2+5n+1}$$

akan digunakan deret pembanding yang berbeda untuk masing-masing deret. Untuk deret yang pertama sama dengan contoh sebelumnya yaitu deretnya akan konvergen. Sedangkan untuk deret kedua akan digunakan $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4}$ *sebagai pembanding.*

$$\begin{aligned} \frac{1}{2n^4+n^2+5n+1} &< \frac{1}{2n^4} \\ &= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{n^4}\right) \end{aligned}$$

dimana deret $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4}$ *konvergen sehingga deret* $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3n+1}{2n^4+n^2+5n+1}$ *akan konvergen .*

Teorema 2.6.2. *Misalkan bahwa deret* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *dan* $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ *adalah dua deret dengan unsur-unsur yang positif. Jika*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = c$$

maka salah satu pernyataan berikut benar:

1. *Deret* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *dan* $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ *keduanya konvergen.*
2. *Deret* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *dan* $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ *keduanya divergen.*

Ddimana c adalah bilangan positif yang terbatas.

Dengan menggunakan teorema berikut, maka contoh-contoh sebelumnya di atas akan menjadi:

Contoh 2.6.4. *Untuk deret* $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2+1}$, *gunakan deret* $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ *sebagai pembanding.*

Jawab 2.6.4.

$$\begin{aligned} \lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} &= \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{n^2+1}}{\frac{1}{n^2}} \\ &= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{1+\frac{1}{n^2}} = 1 \end{aligned}$$

Karena deret $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ *adalah konvergen, maka deret* $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2+1}$ *juga konvergen.*

Contoh 2.6.5. *Tentukan apakah deret* $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n-1}$ *akan konvergen atau divergen?*

Jawab 2.6.5. *Akan digunakan deret geometri* $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}$ *sebagai pembanding*

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n} &= \lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{2^n-1}}{\frac{1}{2^n}}\\ &= \lim_{n\to\infty}\frac{1}{1-\frac{1}{2^n}} = 1\end{aligned}$$

maka deret $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n-1}$ *akan konvergen.*

Contoh 2.6.6. *Tentukan apakah deret* $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n^3+3n^2+4n+5}{6n^9+7n^5+8n^3+9n+10}$ *konvergen atau divergen?*

Jawab 2.6.6. *Akan digunakan deret* $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^6}$ *sebagai deret pembanding:*

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n} &= \lim_{n\to\infty}\frac{\frac{2n^3+3n^2+4n+5}{6n^9+7n^5+8n^3+9n+10}}{\frac{1}{n^6}}\\ &= \lim_{n\to\infty}\frac{2n^9+3n^8+4n^7+5n^6}{6n^9+7n^5+8n^3+9n+10}\\ &= \lim_{n\to\infty}\frac{2+\frac{3}{n}+\frac{4}{n^2}+\frac{5}{n^3}}{6+\frac{7}{n^4}+\frac{8}{n^6}+\frac{9}{n^8}+\frac{10}{n^9}}\\ &= \frac{2}{6}=\frac{1}{3}\end{aligned}$$

jadi deret $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n^3+3n^2+4n+5}{6n^9+7n^5+8n^3+9n+10}$ *konvergen.*

Contoh 2.6.7. *Tentukan apakah deret* $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n^4+3}{4n^5+5n^4+6}$ *konvergen atau divergen?*

Jawab 2.6.7. *Akan digunakan deret* $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ *sebagai deret pembanding:*

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n} &= \lim_{n\to\infty}\frac{\frac{2n^4+3}{4n^5+5n^4+6}}{\frac{1}{n}}\\ &= \lim_{n\to\infty}\frac{2n^5+3n}{4n^5+5n^4+6}\\ &= \lim_{n\to\infty}\frac{2+\frac{3}{n^4}}{4+\frac{5}{n}+\frac{6}{n^5}}\\ &= \frac{2}{4}=\frac{1}{2}\end{aligned}$$

Karena deret $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ *divergen, maka deret* $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n^4+3}{4n^5+5n^4+6}$ *akan divergen.*

Latihan 2.6.1.

1. *Dengan menggunakan uji perbandingan, tentukan apkaah deret* $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{2n^3+1}$ *akan konvergen atau divergen.*

2. *Dengan menggunakan uji perbandingan, tentukan apkaah deret* $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^3}{n^4-1}$ *akan konvergen atau divergen.*

3. *Dengan menggunakan uji perbandingan, tentukan apkaah deret* $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+1}{n\sqrt{n}}$ *akan konvergen atau divergen.*

4. *Dengan menggunakan uji perbandingan, tentukan apkaah deret* $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n-1}{n^2\sqrt{n}}$ *akan konvergen atau divergen.*

5. *Dengan menggunakan uji perbandingan, tentukan apkaah deret* $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{9^n}{3+10^n}$ *akan konvergen atau divergen.*

2.7 Deret Berganti Tanda

Deret berganti tanda adalah deret yang unsur-unsurnya berganti tanda dari positif ke negatif pada unsur yang berturutan. Misalnya unsur pertama negatif maka unsur kedua akan positif, unsur ketiga akan negatif, unsur keempat akan positif demikian seterusnya. Pada kondisi ini suku ganjil akan bernilai negatif sedangkan unsur genap bernilai positif. Jenis lain dari deret berganti tanda adalah unsur ganjil positif dan unsur genap bernilai negatif. Dilihat dari berubahnya tanda pada unsur yang berturutan, secara intuisi maka deret berganti tanda akan konvergen hanya pada satu nilai yaitu 0.

Teorema 2.7.1. *Misalkan barisan a_n adalah barisan yang tidak monoton naik, nilai unsurnya semua positif dan $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$, maka deret berganti tanda $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n a_n$ akan konvergen.*

Contoh 2.7.1. *Tentukan apakah deret berganti tanda harmonik $\sum_{n=1}(-1)^n \frac{1}{n}$ konvergen atau divergen?*

Jawab 2.7.1. *Barisan $a_n = \frac{1}{n}$ adalah tidak naik karena semakin besar nilai n, maka a_n akan semakin kecil. Unsur-unsur dari barisan a_n juga semua positif dan $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$. Jadi deret berganti tanda harmonik adalah deret konvergen.*

Contoh 2.7.2. *Tentukan apakah deret berganti tanda $\sum_{n=1}(-1)^n \frac{n^2+2}{n^3+1}$ konvergen atau divergen?*

Jawab 2.7.2. *Karena orde penyebut lebih tinggi dari orde pembilang maka dapat disimpulkan bahwa barisan $a_n = \frac{n^2+2}{n^3+1}$ tidak monoton naik. Selanjutnya:*

$$\begin{aligned} \lim_{n\to\infty} \frac{n^2+2}{n^3+1} &= \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{n}+\frac{2}{n^3}}{1+\frac{1}{n^3}} \\ &= 0 \end{aligned}$$

Jadi deret berganti tanda $\sum_{n=1}(-1)^n \frac{n^2+2}{n^3+1}$ konvergen.

Latihan 2.7.1. 1. *Tentukan apakah deret berganti tanda berikut $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1}$ akan konvergen atau divergen.*

2. *Tentukan apakah deret* $\sum_{n\to\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{\ln(n+4)}$ *akan konvergen atau divergen.*

3. *Apakah deret* $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{3n-1}{2n+1}$ *akan konvergen atau divergen?*

4. *Apakah deret* $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n}{\sqrt{n^3+2}}$ *akan konvergen atau divergen?*

5. *Tentukan apakah deret* $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n e^{-n}$ *akan konvergen atau divergen.*

2.8 Konvergen Mutlak

Berikut adalah definisi dari deret konvergen mutlak:

Definisi 2.8.1. Suatu deret $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ disebut konvergen mutlak jika deret dari nilai mutlaknya yaitu $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ konvergen.

Contoh 2.8.1. *Buktikan bahwa deret geometri berganti tanda berikut* $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{3^n}$ *adalah deret konvergen mutlak.*

Jawab 2.8.1.

$$\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| &= \sum_{n=1}^{\infty} \left|(-1)^n \frac{1}{3^n}\right| \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3^n} \\
&= \frac{1}{3} + \frac{1}{9} + \frac{1}{27} + \cdots \\
&= \frac{\frac{1}{3}}{1-\frac{1}{3}} \\
&= \frac{1}{2}
\end{aligned}$$

Jadi deret geometri berganti tanda $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{3^n}$ *adalah deret yang konvergen mutlak.*

Contoh 2.8.2. *buktikan bahwa deret harmonik berganti tanda* $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{n}$ *bukanlah deret konvergen mutlak.*

Jawab 2.8.2.

$$\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| &= \sum_{n=1}^{\infty} \left|(-1)^n \frac{1}{n}\right| \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}
\end{aligned}$$

Dimana deret harmonik $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ *adalah deret divergen. Sehingga deret harmonik berganti tanda* $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{n}$ *bukanlah deret konvergen mutlak.*

Teorema 2.8.1. *Jika deret* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *adalah konvergen mutlak, maka deret tersebut pasti konvergen.*

Contoh 2.8.3. *Tentukan apakah deret* $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n}{n^3}$ *konvergen atau divergen.*

Jawab 2.8.3. *Pertama kita cari:*

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| &= \sum_{n=1}^{\infty} \left|\frac{\sin n}{n^3}\right| \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|\sin n|}{n^3}\end{aligned}$$

Dimana nilai $\sin n$ *akan selalu berada pada* $-1 \leq \sin n \leq 1$*, sehingga* $|sinn| \leq 1$*. Maka* $\frac{|\sin n|}{n^3} < \frac{1}{n^3}$*. Karena deret* $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3}$ *adalah konvergen, maka deret* $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n}{n^3}$ *juga konvergen.*

Latihan 2.8.1.

1. *Tentukan apakah deret* $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin 4n}{4^n}$ *konvergen atau divergen.*
2. *tentukan apakah deret* $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n}{\sqrt{n^3+2}}$ *konvergen atau divergen.*
3. *Tentukan apakah deret* $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\ln n}$ *konvergen atau divergen.*
4. *Apakah deret* $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos\left(\frac{n\pi}{3}\right)}{n!}$ *merupakan deret konvergen atau divergen?*
5. *Tentukan apakh deret* $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \sin^3\left(\frac{n\pi}{10}\right)}{n}$ *merupakan deret konvergen atau divergen.*

2.9 Tes Rasio

Teorema 2.9.1. *Diketahui deret* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$*:*

1. *Jika* $\lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = L < 1$*, maka deret* $\sum_{n=1}^{\infty}$ *akan konvergen mutlak.*
2. *Jika* $\lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = L > 1$ *atau* $\lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \infty$*, maka deret* $\sum_{n=1}^{\infty}$ *akan divergen.*
3. *Jika* $\lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = 1$*, maka test rasio tidak akan dapat menghasilkan kesimpulan mengenai apakah deret tersebut konvergen atau divergen.*

Contoh 2.9.1. *Poin nomor tiga pada teorema di atas akan diterapkan pada deret harmonik* $\sum_{n+1}^{\infty} \frac{1}{n}$.

Jawab 2.9.1.

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| &= \lim_{n\to\infty}\left|\frac{\frac{1}{n+1}}{\frac{1}{n}}\right| \\
&= \lim_{n\to\infty}\frac{n}{n+1} \\
&= \lim_{n\to\infty}\frac{1}{1+\frac{1}{n}} \\
&= 1
\end{aligned}$$

Diketahui bahwa deret harmonik adalah deret divergen, akan tetapi teorema uji rasio tidak dapat digunakan untuk menentukan kedivergenan deret harmonik. Selain itu akan dilakukan uji rasio pada deret $\sum_{n+1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$*:*

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| &= \lim_{n\to\infty}\left|\frac{\frac{1}{(n+1)^2}}{\frac{1}{n^2}}\right| \\
&= \lim_{n\to\infty}\frac{n^2}{n^2+2n+1} \\
&= \lim_{n\to\infty}\frac{1}{1+\frac{2}{n}+\frac{1}{n^2}} \\
&= 1
\end{aligned}$$

Disini kita ketahui bahwa deret $\sum_{n+1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ *adalah konvergen, tetapi test rasio tidak dapat menyimpulkan tentang kekonvergenan dari deret* $\sum_{n+1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$*.*

Contoh 2.9.2. *Tentukan apakah deret* $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{n^2}{2^n}$ *konvergen atau divergen?*

Jawab 2.9.2. *Gunakan test rasio akan didapatkan:*

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| &= \lim_{n\to\infty}\left|\frac{(-1)^{n+1}\frac{(n+1)^2}{2^{n+1}}}{(-1)^n\frac{n^2}{2^n}}\right| \\
&= \lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)^2}{2^{n+1}}\frac{2^n}{n^2} \\
&= \lim_{n\to\infty}\frac{1}{2}\left(\frac{n+1}{n}\right)^2 \\
&= \lim_{n\to\infty}\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{n}\right)^2 \\
&= \frac{1}{2} < 1
\end{aligned}$$

jadi deret $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{n^2}{2^n}$ *konvergen.*

Contoh 2.9.3. *Tentukan apakah deret* $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^n}{n!}$ *konvergen atau divergen?*

Jawab 2.9.3. *Akan digunakan test rasio:*

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| &= \lim_{n\to\infty}\left|\frac{\frac{(n+1)^{n+1}}{(n+1)!}}{\frac{n^n}{n!}}\right| \\
&= \lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)^{n+1}}{(n+1)!}\frac{n!}{n^n} \\
&= \lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)^{n+1}}{(n+1)n!}\frac{n!}{n^n} \\
&= \lim_{n\to\infty}\left(\frac{n+1}{n}\right)^n \\
&= e > 1
\end{aligned}$$

Jadi dengan test rasio didapatkan bahwa deret $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^n}{n!}$ *akan divergen.*

Latihan 2.9.1.

1. *Tentukan apakah deret* $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-2)^n}{n^2}$ *akan konvergen mutlak, konvergen bersyarat atau divergen.*

2. *Apakah deret* $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{5^n}$ *merupakan deret konvergen mutlak, konvergen bersyarat atau divergen?*

3. *Tentukan apakah deret* $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{n}{n^2+4}$ *merupakan deret konvergen mutlak, konvergen bersyarat atau divergen.*

4. *Tentukan apakah deret* $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{5n+1}$ *merupakan deret konvergen mutlak, konvergen bersyarat atau divergen.*

5. *Apakah deret* $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-3)^n}{(2n+1)!}$ *merupakan deret konvergen mutlak, konvergen bersyarat atau divergen?*

2.10 Test Bentuk Akar

Teorema 2.10.1. *Diketahui deret* $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$*:*

1. *Jika* $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|}=L<1$*, maka deret* $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ *akan konvergen mutlak.*

2. *Jika* $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|}=L>1$ *atau* $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|}=\infty$*, maka deret* $\sum_{n=1}^{\infty}$ *akan divergen.*

3. *Jika* $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|}=1$*, maka test rasio tidak akan dapat menghasilkan kesimpulan mengenai apakah deret tersebut konvergen atau divergen.*

Contoh 2.10.1. *Tentukan kekonvergenan deret* $\sum_{n+1}^{\infty}\left(\frac{n^2+1}{n^2+2}\right)^n$.

Jawab 2.10.1. *Gunakan test bentuk akar didapatkan:*

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} &= \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\left|\frac{n^2+1}{n^2+2}\right|^n} \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{n^2+1}{n^2+2} \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{1+\frac{1}{n^2}}{1+\frac{2}{n^2}} \\
&= 1
\end{aligned}$$

Jadi test bentuk akar tidak dapat menentukan kekonvergenan deret $\sum_{n+1}^{\infty} \left(\frac{n^2+1}{n^2+2}\right)^n$.

Contoh 2.10.2. *Tentukan kekonvergenan deret* $\sum_{n+1}^{\infty} \left(\frac{n^2+1}{3n^2+2}\right)^n$.

Jawab 2.10.2. *Gunakan test bentuk akar didapatkan:*

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} &= \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\left|\frac{n^2+1}{3n^2+2}\right|^n} \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{n^2+1}{3n^2+2} \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{1+\frac{1}{n^2}}{3+\frac{2}{n^2}} \\
&= \frac{1}{3}
\end{aligned}$$

Jadi test bentuk akar menyimpulkan bahwa deret $\sum_{n+1}^{\infty} \left(\frac{n^2+1}{3n^2+2}\right)^n$ *konvergen.*

Contoh 2.10.3. *Tentukan kekonvergenan deret* $\sum_{n+1}^{\infty} \left(\frac{3n^2+1}{n^2+2}\right)^n$.

Jawab 2.10.3. *Gunakan test bentuk akar didapatkan:*

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} &= \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\left|\frac{3n^2+1}{n^2+2}\right|^n} \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{3n^2+1}{n^2+2} \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{3+\frac{1}{n^2}}{1+\frac{2}{n^2}} \\
&= 3
\end{aligned}$$

Jadi test bentuk akar menyimpulkan bahwa deret $\sum_{n+1}^{\infty} \left(\frac{3n^2+1}{n^2+2}\right)^n$ *divergen.*

Latihan 2.10.1. 1. *Tentukan apakah deret* $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-2)^n}{n^n}$ *konvergen mutlak, konvergen bersyarat atau divergen.*

2. *Apakah deret* $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n^2+1}{2n^2+1}\right)^n$ *merupakan deret konvergen mutlak, konvergen bersyarat atau divergen?*

3. *Tentukan apakah deret* $\sum_{n=2}^{\infty}\left(\frac{-2n}{n+1}\right)^{5n}$ *merupakan deret konvergen mutlak, konvergen bersyarat atau divergen.*

4. *Apakah deret* $\sum_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n^2}$ *merupakan deret konvergen mutlak, konvergen bersyarat atau divergen?*

5. *Tentukan deret* $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^n}{3^n}$ *akan konvergen mutlak, konvergen bersyarat atau divergen.*

2.11 Strategi dalam Menentukan Uji yang Tepat untuk Suatu Deret

Ada beberapa tahapan dalam menentukan jenis test dalam menentukan apakah suatu deret divergen atau konvergen. Tahapan berikut bisa mempermudah dalam menentukan jenis test tersebut:

1. Deret dalam bentuk $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^p}$ akan konvergen jika $p > 1$ dan divergen jika $p \leq 1$.

2. Deret dalam bentuk $\sum_{n=1}^{\infty} ar^{n-1}$ adalah deret geometri yang akan konvergen jika $|r| < 1$ dan divergen jika $|r| \geq 1$.

3. Deret yang memiliki kemiripan dengan bentuk $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^p}$ atau mirip dengan deret geometri, gunakan test perbandingan jika semua unsurnya bernilai positif. Jika deretnya berganti tanda, gunakan uji konvergen mutlak.

4. Deret yang memiliki nilai $\lim_{n\to\infty} a_n \neq 0$, maka gunakan uji kedivergenan.

5. Deret dalam bentuk berganti tanda, gunakan uji deret berganti tanda.

6. Deret yang mengandung bentuk faktorial, sebaiknya gunakan test rasio.

7. Deret dalam bentuk $(a_n)^n$, gunakan test dalam bentuk akar.

8. Jika $a_n = f(n)$ dan nilai integral $\int_1^{\infty} f(x)dx$ dapat diintegralkan, gunakan uji integral.

2.12 Deret Pangkat

Deret pangkat dapat dituliskan sebagai:

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{\infty} a_n &= \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n \\ &= b_0 + b_1 x + b_2 + x^2 + b_3 x^3 + \cdots\end{aligned}$$

Dimana x adalah variabel, untuk saat ini akan bernilai real dan b_n adalah konstanta yang pada saat ini juga bernilai real. Kekonvergenan dari deret pangkat kadang bergantung pada nilai dari x.

Contoh 2.12.1. *Tentukan rentang x yang akan menyebabkan deret* $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}$ *konvergen.*

Jawab 2.12.1. *Menggunakan test rasio akan didapatkan:*

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| &= \lim_{n\to\infty}\left|\frac{x^{n+1}}{(n+1)}\frac{n}{x^n}\right| \\
&= \lim_{n\to\infty}|x|\frac{n}{n+1} \\
&= |x|\lim_{n\to\infty}\frac{1}{1+\frac{1}{n}} \\
&= |x|
\end{aligned}$$

Menurut teorema test rasio, deret $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}$ *akan konvergen jika* $|x| < 1$*, yaitu* $-1 < x < 1$*. Untuk* $x = -1$*, deret* $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$ *akan menjadi deret harmonik berganti tanda. Dimana deret harmonik berganti tanda adalah deret konvergen. Selanjutnya untuk* $x = 1$*, deret* $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x)^n}{n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ *akan menjadi deret harmonik. Dimana deret harmonik adalah deret divergen. Jadi selang x yang menyebabkan deret* $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}$ *konvergen adalah* $-1 \leq x < 1$.

Contoh 2.12.2. *Akan dicari rentang x yang menyebabkan deret* $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-1)^n}{n}$ *konvergen.*

Jawab 2.12.2. *Dengan menggunakan test rasio akan didapatkan:*

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| &= \lim_{n\to\infty}\left|\frac{(x-1)^{n+1}}{(n+1)}\frac{n}{(x-1)^n}\right| \\
&= \lim_{n\to\infty}|x-1|\frac{n}{n+1} \\
&= |x-1|\lim_{n\to\infty}\frac{1}{1+\frac{1}{n}} \\
&= |x-1|
\end{aligned}$$

Menurut teorema test rasio, deret $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-1)^n}{n}$ *akan konvergen jika* $|x-1| < 1$*, yaitu* $0 < x < 2$*. Untuk* $x = 0$*, deret* $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-1)^n}{n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$ *akan menjadi deret harmonik berganti tanda. Dimana deret harmonik berganti tanda adalah deret konvergen. Selanjutnya untuk* $x = 2$*, deret* $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-1)^n}{n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ *akan menjadi deret harmonik. Dimana deret harmonik adalah deret divergen. Jadi selang x yang menyebabkan deret* $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-1)^n}{n}$ *konvergen adalah* $0 \leq x < 2$.

Teorema 2.12.1. *Untuk deret pangkat* $\sum_{n=1}^{\infty} b_n(x-a)^n$ *akan ada beberapa kemungkinan yaitu:*

1. *Deret akan konvergen hanya jika $x = a$.*

2. *Deret akan konvergen untuk sembarang x.*

3. *Terdapat bilangan positif R sehingga deret akan konvergen jika $|x-a| < R$ dan divergen jika $|x-a| > R$*

Bilangan R disebut sebagai radius konvergensi dari deret pangkat. Timbul pertanyaan pada poin nomor 3, apa yang terjadi saat $x = R + a$ dan $x = R - a$, untuk memeriksanya tinggal dimasukkan kedua nilai tersebut ke dalam deret dan bisa diperiksa langsung kekonvergenan deret setelah disubstitusi pada kedua nilai tersebut.

Contoh 2.12.3. *Akan dicari rentang x yang menyebabkan deret $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$ konvergen.*

Jawab 2.12.3. *Dengan menggunakan test rasio akan didapatkan:*

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| &= \lim_{n\to\infty}\left|\frac{x^{n+1}}{(n+1)!}\frac{n!}{x^n}\right| \\
&= \lim_{n\to\infty}\frac{|x|}{n+1} \\
&= 0
\end{aligned}$$

Untuk sembarang nilai x. Jadi kekonvergenan deret $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$ tidak bergantung pada nilai x. Dengan kata lain $x \in R$ akan menyebabkan deret konvergen.

Latihan 2.12.1. 1. *Tentukan radius konvergensi dan interval konvergensi dari deret $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n n x^n$.*

2. *Carilah radius kekonvergenan dan selang kekonvergenan dari deret $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n x^n}{\sqrt[3]{n}}$.*

3. *Tentukan radius konvergensi dan selang konvergensi dari deret $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{2n-1}$.*

4. *Carilah radius kekonvergenan dan selang kekonvergenan dari deret $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n x^n}{n^2}$.*

5. *Hitunglah radius kekonvergenan dan selang kekonvergenan dari deret $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$.*

2.13 Hampiran suatu Fungsi dalam Deret Pangkat

Perhatikan deret pangkat berikut:

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n = 1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + \cdots$$

Deret tersebut adalah deret geometri dengan suku awal 1 dan rasio x. Sehingga untuk $|x| < 1$ akan didapatkan:

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{\infty} x^n &= 1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + \cdots \\ &= \frac{1}{1-x}\end{aligned}$$

sehingga deret berpangkat $\sum_{n=0}^{\infty} x^n$ merupakan hampiran dari fungsi $f(x) = \frac{1}{1-x}$ untuk $|x| < 1$.

Contoh 2.13.1. *Dengan menggunakan deret pangkat yang menghampiri fungsi $f(x) = \frac{1}{1-x}$, carilah hampiran deret pangkat untuk fungsi $g(x) = \frac{1}{x+1}$.*

Jawab 2.13.1. *Diketahui deret pangkat:*

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + \cdots$$

Dengan memisalkan $y = -x$, didapatkan bahwa:

$$\begin{aligned}\frac{1}{1+y} &= 1 + (-y) + (-y)^2 + (-y)^3 + (-y)^4 + \cdots \\ &= 1 - y + y^2 - y^3 + y^4 + \cdots\end{aligned}$$

Sehingga deret pangkat hampiran untuk $g(x) = \frac{1}{x+1}$ adalah:

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + x^4 + \cdots$$

Contoh 2.13.2. *Hampirilah fungsi $f(x) = \frac{1}{1-2x}$ dengan menggunakan deret pangkat.*

Jawab 2.13.2. *Diketahui deret pangkat:*

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + \cdots$$

Dengan memisalkan $x = 2y$, didapatkan bahwa:

$$\begin{aligned}\frac{1}{1-2y} &= 1 + (2y) + (2y)^2 + (2y)^3 + (2y)^4 + \cdots \\ &= 1 + 2y + 4y^2 + 8y^3 + 16y^4 + \cdots\end{aligned}$$

Sehingga deret pangkat hampiran untuk $g(x) = \frac{1}{1+2x}$ adalah:

$$\frac{1}{1+x} = 1 + 2x + 4x^2 + 8x^3 + 16x^4 + \cdots$$

Contoh 2.13.3. *Gunakan hampiran deret pangkat untuk menghampiri fungsi* $g(x) = \frac{1}{x+2}$.

Jawab 2.13.3. *Pertama fungsi* $g(x)$ *musti dimanipulasi untuk bisa mirip dengan fungsi* $\frac{1}{1-x}$.

$$\begin{aligned} g(x) &= \frac{1}{x+2} \\ &= \frac{1}{2\left(\frac{1}{2}x+1\right)} \\ &= \frac{1}{2}\frac{1}{\left(\frac{1}{2}x+1\right)} \end{aligned}$$

Diketahui deret pangkat:

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + \cdots$$

Dengan memisalkan $x = -\frac{1}{2}y$, *didapatkan bahwa:*

$$\begin{aligned} \frac{1}{1+\frac{1}{2}y} &= 1 + \left(-\frac{1}{2}y\right) + \left(-\frac{1}{2}y\right)^2 + \left(-\frac{1}{2}y\right)^3 + \left(-\frac{1}{2}y\right)^4 + \cdots \\ &= 1 - \frac{1}{2}y + \frac{1}{4}y^2 - \frac{1}{4}y^3 + \frac{1}{16}y^4 + \cdots \end{aligned}$$

Sehingga deret pangkat hampiran untuk $g(x) = \frac{1}{x+2}$ *adalah:*

$$\begin{aligned} \frac{1}{x+2} &= \frac{1}{2}\left[1 - \frac{1}{2}x + \frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{8}x^3 + \frac{1}{16}x^4 + \cdots\right] \\ &= \frac{1}{2} - \frac{1}{4}x + \frac{1}{8}x^2 - \frac{1}{16}x^3 + \frac{1}{32}x^4 + \cdots \end{aligned}$$

Contoh 2.13.4. *Gunakan hampiran deret pangkat untuk menghampiri fungsi* $g(x) = \frac{4}{3x+2}$.

Jawab 2.13.4. *Pertama fungsi* $g(x)$ *musti dimanipulasi untuk bisa mirip dengan fungsi* $\frac{1}{1-x}$.

$$\begin{aligned} g(x) &= \frac{4}{3x+2} \\ &= \frac{4}{2\left(\frac{3}{2}x+1\right)} \\ &= 2\frac{1}{\left(\frac{3}{2}x+1\right)} \end{aligned}$$

Diketahui deret pangkat:

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + \cdots$$

Dengan memisalkan $x = -\frac{3}{2}y$, didapatkan bahwa:

$$\begin{aligned}\frac{1}{1+\frac{3}{2}y} &= 1 + \left(-\frac{3}{2}y\right) + \left(-\frac{3}{2}y\right)^2 + \left(-\frac{3}{2}y\right)^3 + \left(-\frac{3}{2}y\right)^4 + \cdots \\ &= 1 - \frac{3}{2}y + \frac{9}{4}y^2 - \frac{27}{8}y^3 + \frac{81}{16}y^4 + \cdots\end{aligned}$$

Sehingga deret pangkat hampiran untuk $g(x) = \frac{4}{3x+2}$ adalah:

$$\begin{aligned}\frac{4}{3x+2} &= 2\left[1 - \frac{3}{2}x + \frac{9}{4}x^2 - \frac{27}{8}x^3 + \frac{81}{16}x^4 + \cdots\right] \\ &= 2 - 3x + \frac{9}{2}x^2 - \frac{27}{4}x^3 + \frac{81}{8}x^4 + \cdots\end{aligned}$$

Contoh 2.13.5. *Tentukan hampiran deret pangkat untuk fungsi $g(x) = \frac{x^2}{x+2}$.*

Jawab 2.13.5. *Fungsi $g(x)$ merupakan perkalian x^2 dengan $\frac{1}{x+2}$. Hampiran deret pangkat untuk $\frac{1}{x+2}$ sudah kita kerjakan sebelumnya sehingga:*

$$\begin{aligned}\frac{x^2}{x+2} &= x^2\frac{1}{x+2} \\ &= x^2\left[\frac{1}{2} - \frac{1}{4}x + \frac{1}{8}x^2 - \frac{1}{16}x^3 + \frac{1}{32}x^4 + \cdots\right] \\ &= \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{4}x^3 + \frac{1}{8}x^4 - \frac{1}{16}x^5 + \frac{1}{32}x^6 + \cdots\end{aligned}$$

Contoh 2.13.6. *Gunakan hampiran deret pangkat untuk menghampiri $g(x) = \frac{1}{1+x^3}$.*

Jawab 2.13.6. *Diketahui deret pangkat:*

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + \cdots$$

Dengan memisalkan $x = -y^3$, didapatkan bahwa:

$$\begin{aligned}\frac{1}{1+y^3} &= 1 + (-y^3) + (-y^3)^2 + (-y^3)^3 + (-y^3)^4 + \cdots \\ &= 1 - y^3 + y^6 - y^9 + y^{12} + \cdots\end{aligned}$$

Sehingga deret pangkat hampiran untuk $g(x) = \frac{1}{1+x^3}$ adalah:

$$\frac{1}{1+x^3} = 1 - x^3 + x^6 - x^9 + x^{12} + \cdots$$

Latihan 2.13.1. *1. Hampirilah $f(x) = \frac{2}{3-x}$ dengan menggunakan deret pangkat.*

2. Tentukan hampiran deret pangkat untuk $f(x) = \frac{5}{1-4x^2}$.

3. *Tentukan hampiran deret pangkat pada* $f(x) = \frac{1+x}{1-x}$.

4. *Tentukan hampiran deret pangkat untuk* $f(x) = \frac{x^2}{a^3-x^3}$.

5. *Tentukan hampiran deret pangkat untuk* $\frac{3}{x^2-x-2}$.

2.14 Turunan dan Integral Deret Pangkat

Deret pangkat dalam radius kekonvergenan dapat diturunkan dan diintegralkan.

Teorema 2.14.1. *Jika deret pangkat* $\sum_{n=0}^{\infty} b_n(x-a)^n$ *konvergen pada radius kekonvergenan* $R > 0$*, maka deret pangkat tersebut dapat diturunkan dan diintegralkan pada selang* $(a-R, a+R)$ *dan*

1. $f'(x) = b_1 + 2b_2(x-a) + 3b_3(x-a)^3 + \cdots$

2. $\int f(x)dx = B + b_0(x-a) + b_1\frac{(x-a)^2}{2} + b_2\frac{(x-a)^3}{3} + \cdots$

dimana radius konvergensi dari hasil turunan dan integral tersebut sama yaitu R.

Contoh 2.14.1. *Gunakan hasil turunan dari* $\frac{1}{1-x}$ *untuk menghampiri* $\frac{1}{(1-x)^2}$ *dengan deret pangkat.*

Jawab 2.14.1. *Diketahui deret pangkat:*

$$\begin{aligned}
\frac{1}{1-x} &= 1 + x + x^2 + x^3 + \cdots \\
\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{1-x}\right) &= \frac{d}{dx}(1 + x + x^2 + x^3 + \cdots) \\
\frac{1}{(1-x)^2} &= 1 + 2x + 3x^2 + 4x^3 + \cdots
\end{aligned}$$

Contoh 2.14.2. *Gunakan hasil dari* $\int \frac{1}{1-x}dx$ *untuk menghampiri* $\ln(1-x)$ *dengan deret pangkat.*

Jawab 2.14.2. *Diketahui deret pangkat:*

$$\begin{aligned}
\frac{1}{1-x} &= 1 + x + x^2 + x^3 + \cdots \\
\int \frac{1}{1-x}dx &= \int (1 + x + x^2 + x^3 + \cdots)dx \\
-\int \frac{1}{1-x}d(1-x) &= x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{4}x^4 + \cdots \\
-\ln(1-x) &= x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{4}x^4 + \cdots \\
\ln(1-x) &= -x - \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{4}x^4 + \cdots
\end{aligned}$$

Latihan 2.14.1. *1. Gunakan hasil dari* $\int \frac{1}{1+x}dx$ *untuk menghampiri fungsi* $f(x) = \ln(1+x)$ *dengan deret pangkat.*

2. *Gunakan hasil dari* $\int \frac{1}{1+x^2}dx$ *untuk menghampiri fungsi* $f(x) = \tan^{-1} x$ *dengan deret pangkat.*

3. *Dengan menggunakan deret pangkat, hampirilah nilai integral berikut dengan deret pangkat:*

$$\int \frac{1}{1+x^{10}}dx$$

4. *Tentukan hasil dari integral berikut berupa deret pangkat.*

$$\int \frac{\tan^{-1}}{x}dx$$

5. *Tentukan hasil dari integral berikut berupa deret pangkat.*

$$\int x^2 \ln(1+x)dx$$

3

Aplikasi Deret

3.1 Deret Maclaurin dan Deret Taylor

Dari penjelasan sebelumnya didapatkan bahwa suatu fungsi f dapat dihampiri menggunakan deret pangkat pada suatu titik a dengan radius konvergensi $|x-a| < R$. Misalkan hampiran tersebut adalah:

$$f(x) = b_0 + b_1(x-a) + b_2(x-a)^2 + b_3(x-a)^3 + b_4(x-a)^4 + \cdots$$

didapatkan untuk $x = a$, maka $b_0 = f(a)$. Selanjutnya saat fungsi $f(x)$ diturunkan terhadap x akan didapatkan:

$$f'(x) = b_1 + 2b_2(x-a) + 3b_3(x-a)^2 + 4b_4(x-a)^3 + 5b_5(x-a)^4 + \cdots$$

didapatkan untuk $x = a$, maka $b_1 = f'(a)$. Selanjutnya diturunkan lagi untuk mendapatkan:

$$f^{(2)}(x) = 2b_2 + 6b_3(x-a) + 12b_4(x-a)^2 + 20b_5(x-a)^3 + 30b_6(x-a)^4 + \cdots$$

didapatkan untuk $x = a$, maka $b_2 = \frac{f''(a)}{2}$. Selanjutnya diturunkan lagi untuk mendapatkan:

$$f^{(3)}(x) = 6b_3 + 24b_4(x-a) + 60b_5(x-a)^2 + 150b_6(x-a)^3 + \cdots$$

didapatkan untuk $x = a$, maka $b_3 = \frac{f^3(a)}{6}$. Selanjutnya diturunkan lagi untuk mendapatkan:

$$f^{(4)}(x) = 24b_4 + 120b_5(x-a) + 450b_6(x-a)^3 + \cdots$$

didapatkan untuk $x = a$, maka $b_4 = \frac{f^4(a)}{24}$. Dari semua penurunan tersebut didapatkan pola untuk nilai konstanta $b_n = \frac{f^n(a)}{n!}$.

Teorema 3.1.1. *Jika f dapat dihampiri dengan deret pangkat di titik a dengan radius kekonvergenan $|x-a| < R$, yaitu $f(x) = \sum n = 0^\infty b_n(x-a)^n$, maka koefisien $b_n = \frac{f^n(a)}{n!}$.*

Hasil dari teorema di atas dapat dituliskan sebagai:

$$\begin{aligned} f(x) &= b_0 + b_1(x-a) + b_2(x-a)^2 + b_3(x-a)^3 + \cdots \\ &= f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \frac{f^2(a)}{2!}(x-a)^2 + \frac{f^3(a)}{3!}(x-a)^3 + \cdots \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^n(a)}{n!}(x-a)^n \end{aligned}$$

Nilai hampiran di atas disebut dengan hampiran Deret Taylor terhadap fungsi f di titik a. Bentuk khusus Deret Taylor pada $a = 0$ disebut dengan Deret Maclaurin yaitu:

$$\begin{aligned} f(x) &= f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f^2(0)}{2!}x^2 + \frac{f^3(0)}{3!}x^3 + \cdots \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^n(0)}{n!}x^n \end{aligned}$$

Contoh 3.1.1. *Tuliskan hampiran Taylor dan Maclaurin untuk $f(x) = e^x$ di titik a.*

Jawab 3.1.1. *Kita cari nilai turunannya:*

$$\begin{aligned} f(x) &= e^x \\ f'(x) &= e^x \\ f^{(2)}(x) &= e^x \\ f^{(3)}(x) &= e^x \end{aligned}$$

Sehingga hampiran Taylornya menjadi:

$$\begin{aligned} f(x) &= f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \frac{f^{(2)}(a)}{2!}(x-a)^2 + \frac{f^{(3)}(a)}{3!}(x-a)^3 + \cdots \\ e^x &= e^a + \frac{e^a}{1!}(x-a) + \frac{e^a}{2!}(x-a)^2 + \frac{e^a}{3!}(x-a)^3 + \cdots \end{aligned}$$

Untuk $a = 0$ didapatkan hampiran Maclaurin nya yaitu:

$$\begin{aligned} f(x) &= f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f^{(2)}(0)}{2!}x^2 + \frac{f^{(3)}(0)}{3!}x^3 + \cdots \\ e^x &= 1 + x + \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{3!}x^3 + \cdots \end{aligned}$$

Contoh 3.1.2. *Tentukan hampiran Taylor dan Maclaurin untuk $f(x) = e^{-x}$ di titik a.*

Jawab 3.1.2. *Pertama cari dahulu nilai turunannya:*

$$\begin{aligned} f(x) &= e^{-x} \\ f'(x) &= -e^{-x} \\ f^{(2)}(x) &= e^{-x} \\ f^{(3)}(x) &= -e^{-x} \end{aligned}$$

Sehingga hampiran Taylornya menjadi:

$$\begin{aligned} f(x) &= f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \frac{f^{(2)}(a)}{2!}(x-a)^2 + \frac{f^{(3)}(a)}{3!}(x-a)^3 + \cdots \\ e^{-x} &= e^{-a} - \frac{e^{-a}}{1!}(x-a) + \frac{e^{-a}}{2!}(x-a)^2 - \frac{e^{-a}}{3!}(x-a)^3 + \cdots \end{aligned}$$

Untuk $a = 0$ didapatkan hampiran Maclaurin nya yaitu:

$$\begin{aligned} f(x) &= f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f^{(2)}(0)}{2!}x^2 + \frac{f^{(3)}(0)}{3!}x^3 + \cdots \\ e^{-x} &= 1 - x + \frac{1}{2!}x^2 - \frac{1}{3!}x^3 + \cdots \end{aligned}$$

Sebenarnya ada cara lebih mudah yaitu dengan mensubstitusikan $x = -y$ ke hampiran Maclaurin untuk $f(x) = e^x$, yaitu:

$$\begin{aligned} e^x &= 1 + x + \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{3!}x^3 + \cdots \\ e^{-y} &= 1 + (-y) + \frac{1}{2!}(-y)^2 + \frac{1}{3!}(-y)^3 + \cdots \\ &= 1 - y + \frac{1}{2!}y^2 - \frac{1}{3!}y^3 + \cdots \end{aligned}$$

dengan hasil yang sama dengan yang dicari menggunakan hampiran Taylor kemudian mensubstitusi $a = 0$ ke dalam hampiran Taylor nya.

Contoh 3.1.3. *Tentukan hampiran Taylor dan Maclaurin untuk $f(x) = e^{x^2}$.*

Jawab 3.1.3. *Pertama cari dahulu nilai turunannya:*

$$\begin{aligned} f(x) &= e^{x^2} \\ f'(x) &= 2xe^{x^2} \\ f^{(2)}(x) &= 2e^{x^2} + 4x^2e^{x^2} \\ f^{(3)}(x) &= 4xe^{x^2} + 8xe^{x^2} + 8x^3e^{x^2} \\ &= 12xe^{x^2} + 8x^3e^{x^2} \end{aligned}$$

Sehingga hampiran Taylornya menjadi:

$$\begin{aligned} f(x) &= f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \frac{f^{(2)}(a)}{2!}(x-a)^2 + \frac{f^{(3)}(a)}{3!}(x-a)^3 + \cdots \\ e^{x^2} &= e^{a^2} + \frac{2ae^{a^2}}{1!}(x-a) + \frac{2e^{a^2} + 4a^2e^{a^2}}{2!}(x-a)^2 + \frac{12ae^{a^2} + 8a^3e^{a^2}}{3!}(x-a)^3 + \cdots \end{aligned}$$

Untuk $a = 0$ didapatkan hampiran Maclaurin nya yaitu:

$$\begin{aligned} f(x) &= f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f^{(2)}(0)}{2!}x^2 + \frac{f^{(3)}(0)}{3!}x^3 + \cdots \\ e^{x^2} &= 1 + (0)x + \frac{2}{2!}x^2 + \frac{(0)}{3!}x^3 + \cdots \\ &= 1 + \frac{1}{1!}x^2 + \frac{1}{2!}x^4 + \cdots \end{aligned}$$

Hasil yang sama juga didapatkan dengan metoda substitusi $x = y^2$ ke hampiran Maclaurin untuk $f(x) = e^x$:

$$\begin{aligned} e^x &= 1 + x + \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{3!}x^3 + \cdots \\ e^{y^2} &= 1 + (y^2) + \frac{1}{2!}(y^2)^2 + \frac{1}{3!}(y^2)^3 + \cdots \\ &= 1 + y^2 + \frac{1}{2!}y^4 + \frac{1}{3!}y^6 + \cdots \end{aligned}$$

Latihan 3.1.1. 1. *Carilah hampiran Maclaurin untuk $f(x) = \sin x$.*

2. *Carilah hampiran Maclaurin untuk $f(x) = \cos x$.*

3. *Carilah hampiran Maclaurin dari $f(x) = x^2 \sin x$.*

4. *Tentukan nilai dari deret berikut:*

$$\frac{1}{(1)(3)} - \frac{1}{(2)(3^2)} + \frac{1}{(3)(3^3)} - \frac{1}{(4)(3^4)} + \frac{1}{(5)(3^5)} - \frac{1}{(6)(3^6)} + \cdots$$

5. *Tentukan hampiran Maclaurin dari $f(x) = \tan x$.*

3.2 Aplikasi Hampiran Deret Pangkat

Hampiran deret pangkat dapat digunakan dalam banyak bidang seperti mencari solusi persamaan diferensial, menghampiri nilai integral suatu fungsi dan menghampiri suatu fungsi.

Contoh 3.2.1. *Dengan menggunakan deret pangkat, carilah solusi persamaan diferensial* $\frac{dy}{dx} = y$.

Jawab 3.2.1. *Misalkan y adalah deret pangkat yang dapat dituliskan sebagai:*

$$y = b_0 + b_1x + b_2x^2 + b_3x^3 + \cdots$$

Sehingga nilai turunan y terhadap x adalah

$$\frac{dy}{dx} = b_1 + 2b_2x + 3b_3x^2 + \cdots$$

Substitusi persamaan yang kita ketahui ke persamaan yang ditanyakan yaitu:

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= y \\ b_1 + 2b_2x + 3b_3x^2 + \cdots &= b_0 + b_1x + b_2x^2 + b_3x^3 + \cdots \\ 0 &= (b_1 - b_0) + (2b_2 - b_1)x + (3b_3 - b_2)x^2 + (4b_4 - b_3)x^3 + \cdots \end{aligned}$$

Agar persamaan bernilai benar, maka semua koefisien dari polinomial di atas harus sama dengan nol.

$$\begin{aligned} b_1 - b_0 &= 0 \\ 2b_2 - b_1 &= 0 \\ 3b_3 - b_2 &= 0 \\ 4b_4 - b_3 &= 0 \end{aligned}$$

Selanjutnya akan didapatkan nilai koefisien dari deret pangkat y, yaitu:

$$\begin{aligned} b_1 &= b_0 \\ b_2 &= \frac{b_1}{2} = \frac{b_0}{2} \\ b_3 &= \frac{b_2}{3} = \frac{b_0}{3!} \\ b_4 &= \frac{b_3}{4} = \frac{b_0}{4!} \end{aligned}$$

Sehingga solusi persamaan diferensial $\frac{dy}{dx} = y$ *adalah*

$$\begin{aligned} y &= b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + b_3 x^3 + \cdots \\ &= b_0 + b_0 x + \frac{b_0}{2} x^2 + \frac{b_0}{3!} x^3 + \frac{b_0}{4!} x^4 + \cdots \\ &= b_0 \left(1 + x + \frac{1}{2} x^2 + \frac{1}{3!} x^3 + \frac{1}{4!} x^4 + \cdots\right) \\ &= b_0 e^x \end{aligned}$$

karena hampiran deret pangkat untuk e^x *adalah* $1 + x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{4!}x^4 + \cdots$. *Jadi solusi persamaan diferensial* $\frac{dy}{dx} = y$ *adalah* $y = b_0 e^x$. *Untuk mengujinya, kita turunkan persamaan ini terhadap x:*

$$\begin{aligned} y &= b_0 e^x \\ \frac{dy}{dx} &= b_0 e^x \\ &= y \end{aligned}$$

Jadi terbukti bahwa $y = b_0 e^x$ *adalah solusi persamaan diferensial* $\frac{dy}{dx} = y$.

Contoh 3.2.2. *Dengan menggunakan deret pangkat, tentukan solusi persamaan diferensial* $\frac{d^2y}{dx^2} + y = 0$.

Jawab 3.2.2. *Misalkan solusi persamaan diferensial tersebut dapat dihampiri menggunakan deret pangkat:*

$$y = b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + b_3 x^3 + b_4 x^4 + b_5 x^5 + b_6 x^6 + \cdots$$

Selanjutnya turunkan y terhadap x sebanyak dua kali untuk mendapatkan $\frac{d^2y}{dx^2}$.

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= b_1 + 2b_2 x + 3b_3 x^2 + 4b_4 x^3 + 5b_5 x^4 + 6b_6 x^5 + \cdots \\ \frac{d^2y}{dx^2} &= 2b_2 + 6b_3 x + 12b_4 x^2 + 20b_5 x^3 + 30b_6 x^4 + \cdots \end{aligned}$$

Substitusi hasilnya ke dalam persamaan diferensial:

$$\begin{aligned} \frac{d^2y}{dx^2} + y &= 0 \\ \left(2b_2 + 6b_3 x + 12b_4 x^2 + 20b_5 x^3 + \cdots\right) + \left(b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + b_3 x^3 + \cdots\right) &= 0 \\ (2b_2 + b_0) + (6b_3 + b_1)x + (12b_4 + b_2)x^2 + (20b_5 + b_3)x^3 + \cdots &= 0 \end{aligned}$$

Sehingga semua nilai koefisien harus sama dengan nol.

$$\begin{aligned} 2b_2 + b_0 &= 0 \\ 6b_3 + b_1 &= 0 \\ 12b_4 + b_2 &= 0 \\ 20b_5 + b_3 &= 0 \end{aligned}$$

Selanjutnya akan didapatkan nilai koefisien dari deret pangkat y, yaitu:

$$\begin{aligned} b_2 &= -\frac{b_0}{2!} \\ b_3 &= -\frac{b_1}{3!} \\ b_4 &= -\frac{b_2}{12} = \frac{b_0}{4!} \\ b_5 &= -\frac{b_3}{20} = \frac{b_1}{5!} \end{aligned}$$

Masukkan hasilnya ke y:

$$\begin{aligned} y &= b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + b_3 x^3 + b_4 x^4 + b_5 x^5 + b_6 x^6 + \cdots \\ &= b_0 + b_1 x - \frac{b_0}{2!}x^2 - \frac{b_1}{3!}x^3 + \frac{b_0}{4!}x^4 + \frac{b_1}{5!}x^5 + \frac{b_0}{6!}x^6 + \cdots \\ &= \left(b_0 - \frac{b_0}{2!}x^2 + \frac{b_0}{4!}x^4 + \cdots\right) + \left(b_1 x - \frac{b_1}{3!}x^3 + \frac{b_1}{5!}x^5 + \cdots\right) \\ &= b_0\left(1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots\right) + b_1\left(x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \cdots\right) \\ &= b_0 \cos x + b_1 \sin x \end{aligned}$$

Dimana hampiran deret pangkat untuk $\cos x$ *adalah* $1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots$ *dan hampiran deret pangkat untuk* $\sin x$ *adalah* $x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \cdots$. *Untuk lebih meyakinkan akan diuji solusi tersebut pada persamaan diferensial.*

$$\begin{aligned} y &= b_0 \cos x + b_1 \sin x \\ \frac{dy}{dx} &= -b_0 \sin x + b_1 \cos x \\ \frac{d^2y}{dx^2} &= -b_0 \cos x - b_1 \sin x \end{aligned}$$

Selanjutnya substitusi persamaan $\frac{d^2y}{dx^2} = -b_0 \cos x - b_1 \sin x$ *dan* $y = b_0 \cos x + b_1 \sin x$ *ke* *dalam persamaan diferensial:*

$$\begin{aligned}\frac{d^2y}{dx^2}+y &= (-b_0\cos x - b_1\sin x)+(b_0\cos x+b_1\sin x)\\ &= 0\end{aligned}$$

Jadi $y = b_0\cos x + b_1\sin x$ *adalah solusi untuk persamaan diferensial* $\frac{d^2y}{dx^2}+y=0$.

Contoh 3.2.3. *Dengan menggunakan hampiran deret pangkat, tentukan nilai*

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}$$

Jawab 3.2.3. *Diketahui hampiran deret pangkat untuk* $\cos x$ *adalah*

$$\cos x = 1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\frac{x^6}{6!}+\cdots$$

Sehingga

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2} &= \lim_{x\to 0}\frac{1-\left(1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\frac{x^6}{6!}+\cdots\right)}{x^2}\\ &= \lim_{x\to 0}\frac{\left(\frac{x^2}{2!}-\frac{x^4}{4!}+\frac{x^6}{6!}+\cdots\right)}{x^2}\\ &= \lim_{x\to 0}\frac{1}{2!}+\frac{x^2}{4!}-\frac{x^4}{6!}+\cdots\\ &= \frac{1}{2}\end{aligned}$$

Jadi nilai dari $\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}=\frac{1}{2}$. *Untuk mengujinya bisa menggunakan aturan L'Hospital yaitu dengan menurunkan pembilang dan penyebut masing-masing sebanyak dua kali:*

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2} &\overset{H}{=} \lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{2x}\\ &\overset{H}{=} \lim_{x\to 0}\frac{\cos x}{2}\\ &= \frac{1}{2}\end{aligned}$$

Contoh 3.2.4. *Dengan menggunakan deret pangkat, tentukan hampiran deret pangkat untuk* $y = e^x\cos x$.

Jawab 3.2.4. *Hampiran deret pangkat untuk* e^x *dan* $\cos x$ *adalah*

$$\begin{aligned}e^x &= 1+x+\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{3!}x^3+\frac{1}{4!}x^4+\cdots\\ \cos x &= 1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}+\cdots\end{aligned}$$

Sehingga

$$\begin{aligned}
e^x\cos x &= \left(1+x+\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{3!}x^3+\frac{1}{4!}x^4+\cdots\right)\left(1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}+\cdots\right)\\
&= \left(1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}+\cdots\right)+\left(x-\frac{x^3}{2!}+\cdots\right)+\left(\frac{1}{2}x^2-\frac{x^4}{4}+\cdots\right)+\frac{1}{3!}x^3+\frac{1}{4!}x^4\\
&= 1+x-\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{6}x^4+\cdots
\end{aligned}$$

Jadi hampiran deret pangkat untuk $y=e^x\cos x$ *adalah* $1+x-\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{6}x^4+\cdots$.

Latihan 3.2.1. 1. *Gunakan hampiran deret pangkat untuk menghitung*

$$\lim_{x\to 0}\frac{\tan x - x}{x^3}$$

2. *Gunakan hampiran deret pangkat untuk menghitung*

$$\lim_{x\to 0}\frac{x-\ln(1+x)}{x^2}$$

3. *Gunakan hampiran deret pangkat untuk menghitung*

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x - x+\frac{1}{6}x^3}{x^5}$$

4. *Gunakan hampiran deret pangkat untuk menghitung*

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{1+x-e^x}$$

5. *Dengan menggunakan deret pangkat, tentukan solusi dari persamaan diferensial* $\frac{dy}{dx}+2xy=0$.

6. *Dengan menggunakan hampiran deret pangkat, carilah solusi dari persamaan diferensial* $x\frac{dy}{dx}-3y=c$*, dimana* c *adalah konstanta sembarang.*

3.3 Soal UTS Tipe 1

1. Diketaui n adalah bilangan asli. Buktikan bahwa barisan a_n berikut adalah barisan tidak naik dan terbatas di bawah sehingga barisan a_n adalah barisan yang konvergen.

$$a_n=\frac{1}{(n+1)!}$$

2. Buktikan bahwa barisan berikut adalah barisan konvergen:

$$b_n = \frac{n^{1000}}{e^{2n}}$$

3. Buktikan bahwa barisan berikut adalah konvergen dengan mencari nilai limitnya:

$$c_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$$

4. Buktikan apakah deret berikut adalah deret konvergen atau divergen:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{100n}{2n^2+1}$$

5. Gunakan uji integral untuk menentukan kekonvergenan deret

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n^2+2}$$

6. Tentukan hampiran Taylor untuk persamaan $f(x)$ di titik $x = 3$:

$$f(x) = \frac{\sin\left(\frac{\pi}{3}x\right)}{\sqrt{x+1}}$$

3.4 Soal UTS Tipe 2

1. Diketaui n adalah bilangan asli. Buktikan bahwa barisan a_n berikut adalah barisan tidak naik dan terbatas di bawah sehingga barisan a_n adalah barisan yang konvergen.

$$a_n = \frac{1}{(n+2)!}$$

2. Buktikan bahwa barisan berikut adalah barisan konvergen:

$$b_n = \frac{n^{2000}}{e^{2n}}$$

3. Buktikan bahwa barisan berikut adalah konvergen dengan mencari nilai limitnya:

$$c_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$$

4. Buktikan apakah deret berikut adalah deret konvergen atau divergen:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{200n}{2n^2+1}$$

5. Gunakan uji integral untuk menentukan kekonvergenan deret

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n^2+3}$$

6. Tentukan hampiran Taylor untuk persamaan $f(x)$ di titik $x = 3$:

$$f(x) = \frac{\sin\left(\frac{\pi}{3}x\right)}{\sqrt{x+1}}$$

4

Jawaban Latihan Bab I

4.1 Pola Barisan

Latihan 4.1.1. 1. *Tuliskan pola barisan berikut dalam bentuk a_n:*
1, 4, 9, 16, 25, 36, 49, 64, $\cdots$
Jawab:
Terlihat bahwa unsur-unsur barisan tersebut adalah bilangan kuadrat berturutan sehingga dapat dituliskan sebagai $a_n = n^2$ dengan $n \in \{1, 2, 3, 4, \cdots\}$.

2. *Tuliskan pola barisan berikut dalam bentuk a_n:*
1, -4, 9, -16, 25, -36, 49, -64, $\cdots$
Jawab:
Terlihat bahwa unsur-unsur barisan tersebut adalah bilangan kuadrat berturutan dengan setiap unsur genap bernilai negatif. Sehingga dapat dituliskan sebagai $a_n = (-1)^{n+1}n^2$ dengan $n \in \{1, 2, 3, 4, \cdots\}$.

3. *Tuliskan pola barisan berikut dalam bentuk a_n:*
-1, 4, -9, 16, -25, 36, -49, 64, $\cdots$
Terlihat bahwa unsur-unsur barisan tersebut adalah bilangan kuadrat berturutan dengan setiap unsur ganjil bernilai negatif. Sehingga dapat dituliskan sebagai $a_n = (-1)^n n^2$ dengan $n \in \{1, 2, 3, 4, \cdots\}$.

4. *Tuliskan pola barisan berikut dalam bentuk a_n:*

1, $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \frac{1}{6}, \frac{1}{7}, \frac{1}{8}, \frac{1}{9}, \cdots$
Jawab:
Terlihat bahwa unsur-unsur barisan tersebut merupakan pecahan yang penyebutnya selalu lebih besar satu dari yang sebelumnya. Sehingga dapat dituliskan sebagai $a_n = \frac{1}{n}$ *dengan* $n \in \{1,2,3,4,\cdots\}$.

5. *Tuliskan pola barisan berikut dalam bentuk* a_n*:*
1, $-\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, -\frac{1}{4}, \frac{1}{5}, -\frac{1}{6}, \frac{1}{7}, -\frac{1}{8}, \frac{1}{9}, \cdots$
Jawab:
Terlihat bahwa unsur-unsur barisan tersebut merupakan pecahan yang penyebutnya selalu lebih besar satu dari yang sebelumnya dengan unsur genap selalu bernilai negatif. Sehingga dapat dituliskan sebagai $a_n = (-1)^{n+1}\frac{1}{n}$ *dengan* $n \in \{1,2,3,4,\cdots\}$.

6. *Tuliskan pola barisan berikut dalam bentuk* a_n*:*
-1, $\frac{1}{2}, -\frac{1}{3}, \frac{1}{4}, -\frac{1}{5}, \frac{1}{6}, -\frac{1}{7}, \frac{1}{8}, -\frac{1}{9}, \cdots$
Jawab:
Terlihat bahwa unsur-unsur barisan tersebut merupakan pecahan yang penyebutnya selalu lebih besar satu dari yang sebelumnya dengan unsur ganjil selalu bernilai negatif. Sehingga dapat dituliskan sebagai $a_n = (-1)^n\frac{1}{n}$ *dengan* $n \in \{1,2,3,4,\cdots\}$.

7. *Tuliskan pola barisan berikut dalam bentuk* a_n*:*
$\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \frac{5}{6}, \frac{6}{7}, \frac{7}{8}, \frac{8}{9}, \cdots$
Jawab:
Terlihat bahwa unsur-unsur barisan dibentuk oleh pembilang yang nilainya selalu lebih besar satu nilai dari unsur pembilang sebelumnya. Begitu juga dengan penyebutnya memiliki pola yang sama dengan pembilang. Akan tetapi terlihat bahwa setiap pembilang selalu nilainya satu lebih besar dari penyebut pada setiap unsur barisan. Jadi barisan tersebut dapat dituliskan sebagai $a_n = \frac{n}{n+1}$ *dengan* $n \in \{1,2,3,4,\cdots\}$.

8. *Tuliskan pola barisan berikut dalam bentuk* a_n*:*
$-\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, -\frac{3}{4}, \frac{4}{5}, -\frac{5}{6}, \frac{6}{7}, -\frac{7}{8}, \frac{8}{9}, \cdots$
Jawab:
Terlihat bahwa unsur-unsur barisan dibentuk oleh pembilang yang nilainya selalu lebih besar satu nilai dari unsur pembilang sebelumnya. Begitu juga dengan penyebutnya memiliki pola yang sama dengan pembilang. Akan tetapi terlihat bahwa setiap pembilang selalu nilainya satu lebih besar dari penyebut pada setiap unsur barisan. Selain itu setiap unsur ganjil selalu bernilai negatif. Jadi barisan tersebut dapat dituliskan sebagai $a_n = (-1)^n\frac{n}{n+1}$ *dengan* $n \in \{1,2,3,4,\cdots\}$.

9. *Tuliskan pola barisan berikut dalam bentuk* a_n*:*
$\frac{1}{2}, -\frac{2}{3}, \frac{3}{4}, -\frac{4}{5}, \frac{5}{6}, -\frac{6}{7}, \frac{7}{8}, -\frac{8}{9}, \cdots$

Jawab:
Terlihat bahwa unsur-unsur barisan dibentuk oleh pembilang yang nilainya selalu lebih besar satu nilai dari unsur pembilang sebelumnya. Begitu juga dengan penyebutnya memiliki pola yang sama dengan pembilang. Akan tetapi terlihat bahwa setiap pembilang selalu nilainya satu lebih besar dari penyebut pada setiap unsur barisan. Selain itu setiap unsur genap selalu bernilai negatif. Jadi barisan tersebut dapat dituliskan sebagai $a_n = (-1)^n \frac{n}{n+1}$ *dengan* $n \in \{1,2,3,4,\cdots\}$.

10. *Tentukan 10 nilai pertama dari barisan* $a_n = \frac{1}{n^2}$*, untuk* $n \in \{1,2,3,\cdots\}$.
    Jawab:
    Nilai barisan akan menjadi:

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{1}{1^2}, \frac{1}{2^2}, \frac{1}{3^2}, \frac{1}{4^2}, \frac{1}{5^2}, \frac{1}{6^2}, \frac{1}{7^2}, \frac{1}{8^2}, \frac{1}{9^2}, \frac{1}{10^2} \\ &= 1, \frac{1}{4}, \frac{1}{9}, \frac{1}{16}, \frac{1}{25}, \frac{1}{36}, \frac{1}{49}, \frac{1}{64}, \frac{1}{81}, \frac{1}{100} \end{aligned}$$

11. *Tentukan 10 nilai pertama dari barisan* $a_n = \frac{n}{\sqrt{n+1}}$*, untuk* $n \in \{1,2,3,\cdots\}$.
    Jawab:
    Nilai barisan akan menjadi:

$$a_n = \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{2}{\sqrt{3}}, \frac{3}{\sqrt{4}}, \frac{4}{\sqrt{5}}, \frac{5}{\sqrt{6}}, \frac{6}{\sqrt{7}}, \frac{7}{\sqrt{8}}, \frac{8}{\sqrt{9}}, \frac{9}{\sqrt{10}}, \frac{10}{\sqrt{11}}$$

12. *Tentukan 10 nilai pertama dari barisan* $a_n = \frac{n^2}{n-2}$*, untuk* $n \in \{3,4,5,\cdots\}$.
    Jawab:
    Nilai barisan akan menjadi:

$$a_n = \frac{9}{1}, \frac{16}{2}, \frac{25}{3}, \frac{36}{4}, \frac{49}{5}, \frac{64}{6}, \frac{81}{7}, \frac{100}{8}, \frac{121}{9}, \frac{144}{10}$$

4.2 Barisan Konvergen

Latihan 4.2.1. *Dengan mencari nilai limit fungsi yang bersesuaian, periksa kekonvergenan dari barisan berikut:*

1. *Diketahui* $a_n = \frac{n}{n+1}$
   Jawab:
   Unsur-unsur dari barisan a_n *akan berada pada fungsi* $f(x) = \frac{x}{x+1}$*, sehingga jika*

limit dari $\lim_{x\to\infty} f(x)$ *ada, maka barisan* a_n *adalah barisan konvergen.*

$$\begin{aligned}\lim_{x\to\infty} f(x) &= \lim_{x\to\infty} \frac{x}{x+1} \\ &= \lim_{x\to\infty} \frac{x}{x+1}\left(\frac{1/x}{1/x}\right) \\ &= \lim_{x\to\infty} \frac{1}{1+1/x} \\ &= \frac{1}{1+0} = 1\end{aligned}$$

Karena $\lim_{x\to\infty} f(x) = 1$*, maka barisan* a_n *adalah barisan konvergen.*

2. *Diketahui* $a_n = \frac{n}{n^2+1}$

   Jawab:

   Unsur-unsur dari barisan a_n *akan berada pada fungsi* $f(x) = \frac{x}{x^2+1}$*, sehingga jika limit dari* $\lim_{x\to\infty} f(x)$ *ada, maka barisan* a_n *adalah barisan konvergen.*

$$\begin{aligned}\lim_{x\to\infty} f(x) &= \lim_{x\to\infty} \frac{x}{x^2+1} \\ &= \lim_{x\to\infty} \frac{x}{x^2+1}\left(\frac{1/x^2}{1/x^2}\right) \\ &= \lim_{x\to\infty} \frac{1/x}{1+1/x^2} \\ &= \frac{0}{1+0} = 0\end{aligned}$$

   Karena $\lim_{x\to\infty} f(x) = 0$*, maka barisan* a_n *adalah barisan konvergen.*

3. *Diketahui* $a_n = \frac{n^2}{n+1}$

   Jawab:

   Unsur-unsur dari barisan a_n *akan berada pada fungsi* $f(x) = \frac{x^2}{x+1}$*, sehingga jika limit dari* $\lim_{x\to\infty} f(x)$ *ada, maka barisan* a_n *adalah barisan konvergen.*

$$\begin{aligned}\lim_{x\to\infty} f(x) &= \lim_{x\to\infty} \frac{x^2}{x+1} \\ &= \lim_{x\to\infty} \frac{x^2}{x+1}\left(\frac{1/x^2}{1/x^2}\right) \\ &= \lim_{x\to\infty} \frac{1}{1/x+1/x^2} \\ &= \frac{1}{0+0}\end{aligned}$$

   Karena $\lim_{x\to\infty} f(x)$ *tidak terdefinisi, maka barisan* a_n *adalah barisan divergen.*

4. *Diketahui* $a_n = \frac{n+1}{\sqrt{n^2-1}}$

Jawab:
Unsur-unsur dari barisan a_n akan berada pada fungsi $f(x) = \frac{x+1}{\sqrt{x^2-1}}$, sehingga jika limit dari $\lim_{x\to\infty} f(x)$ *ada, maka barisan a_n adalah barisan konvergen.*

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to\infty} f(x) &= \lim_{x\to\infty} \frac{x+1}{\sqrt{x^2-1}} \\
&= \lim_{x\to\infty} \frac{x+1}{\sqrt{x^2-1}} \left(\frac{1/x}{1/x}\right) \\
&= \lim_{x\to\infty} \frac{1+1/x}{\sqrt{1-1/x^2}} \\
&= \frac{1+0}{\sqrt{1-0}} = 1
\end{aligned}$$

Karena $\lim_{x\to\infty} f(x) = 1$*, maka barisan a_n adalah barisan konvergen.*

5. *Diketahui $a_n = \frac{3n^3}{n+\sqrt{n^6+n^3+2}}$*
   Jawab:
   Unsur-unsur dari barisan a_n akan berada pada fungsi $f(x) = \frac{3x^3}{x+\sqrt{x^6+x^3+2}}$, sehingga jika limit dari $\lim_{x\to\infty} f(x)$ *ada, maka barisan a_n adalah barisan konvergen.*

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to\infty} f(x) &= \lim_{x\to\infty} \frac{3x^3}{x+\sqrt{x^6+x^3+2}} \\
&= \lim_{x\to\infty} \frac{3x^3}{x+\sqrt{x^6+x^3+2}} \left(\frac{1/x^3}{1/x^3}\right) \\
&= \lim_{x\to\infty} \frac{3}{1/x^2+\sqrt{1+1/x^3+2/x^6}} \\
&= \frac{3}{0+\sqrt{1+0+0}} = 3
\end{aligned}$$

   Karena $\lim_{x\to\infty} f(x) = 3$*, maka barisan a_n adalah barisan konvergen.*

6. *Diketahui $a_n = n + \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2}$*
   Jawab:
   Unsur-unsur dari barisan a_n akan berada pada fungsi $f(x) = x + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}$, sehingga jika limit dari $\lim_{x\to\infty} f(x)$ *ada, maka barisan a_n adalah barisan konvergen.*

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to\infty} f(x) &= \lim_{x\to\infty} \left(x + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}\right) \\
&= \lim_{x\to\infty} x + \lim_{x\to\infty} \frac{1}{x} + \lim_{x\to\infty} \frac{1}{x^2} \\
&= \lim_{x\to\infty} x + 0 + 0
\end{aligned}$$

   Karena $\lim_{x\to\infty} f(x)$ *tidak terdefinisi, maka barisan a_n adalah barisan divergen.*

7. *Diketahui $a_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^2$*

Jawab:
Unsur-unsur dari barisan a_n akan berada pada fungsi $f(x) = \left(1+\frac{1}{x}\right)^2 = 1+\frac{2}{x}+\frac{1}{x^2}$, sehingga jika limit dari $\lim_{x\to\infty} f(x)$ ada, maka barisan a_n adalah barisan konvergen.

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to\infty} f(x) &= \lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{2}{x}+\frac{1}{x^2}\right) \\
&= \lim_{x\to\infty} 1 + \lim_{x\to\infty}\frac{2}{x} + \lim_{x\to\infty}\frac{1}{x^2} \\
&= \lim_{x\to\infty} 1 + 0 + 0 = 1
\end{aligned}$$

Karena $\lim_{x\to\infty} f(x) = 1$, maka barisan a_n adalah barisan konvergen.

Latihan 4.2.2. *Bandingkan nilai dari a_n dengan a_{n+1} untuk menentukan apakah barisan berikut monoton turun atau naik.*

1. *Diketahui $a_n = \left(\frac{2}{3}\right)^n$*
   Jawab:
   Nilai dari:

$$a_{n+1} = \left(\frac{2}{3}\right)^{n+1} = \frac{2}{3}\left(\frac{2}{3}\right)^n = \frac{2}{3}a_n < a_n$$

   Karena $a_{n+1} < a_n$, maka barisan $a_n = \left(\frac{2}{3}\right)^n$ adalah monoton turun.

2. *Diketahui $a_n = \left(\frac{99}{100}\right)^n$*
   Jawab:
   Nilai dari:

$$a_{n+1} = \left(\frac{99}{100}\right)^{n+1} = \frac{99}{100}\left(\frac{99}{100}\right)^n = \frac{99}{100}a_n < a_n$$

   Karena $a_{n+1} < a_n$, maka barisan $a_n = \left(\frac{99}{100}\right)^n$ adalah monoton turun.

3. *Diketahui $a_n = \left(\frac{1001}{999}\right)^n$*
   Jawab:
   Nilai dari:

$$a_{n+1} = \left(\frac{1001}{999}\right)^{n+1} = \frac{1001}{999}\left(\frac{1001}{999}\right)^n = \frac{1001}{999}a_n > a_n$$

   Karena $a_{n+1} > a_n$, maka barisan $a_n = \left(\frac{1001}{999}\right)^n$ adalah monoton naik.

4. *Diketahui $a_n = \left(\frac{2.01}{1.99}\right)^n$*
   Jawab:

Nilai dari:

$$a_{n+1} = \left(\frac{2.01}{1.99}\right)^{n+1} = \frac{2.01}{1.99}\left(\frac{2.01}{1.99}\right)^{n} = \frac{2.01}{1.99}a_n > a_n$$

Karena $a_{n+1} > a_n$, maka barisan $a_n = \left(\frac{2.01}{1.99}\right)^n$ adalah monoton naik.

5. *Diketahui $a_n = \frac{9^n}{10^{n-1}}$*
   Jawab:
   Nilai dari:

$$a_{n+1} = \frac{9^{n+1}}{10^n} = \frac{9}{10}\left(\frac{9^n}{10^{n-1}}\right) = \frac{9}{10}a_n < a_n$$

   Karena $a_{n+1} < a_n$, maka barisan $a_n = \frac{9^n}{10^{n-1}}$ adalah monoton turun.

6. *Diketahui $a_n = \frac{10^{n-2}}{9^n}$*
   Jawab:
   Nilai dari:

$$a_{n+1} = \frac{10^{n-1}}{9^{n+1}} = \frac{10}{9}\left(\frac{10^{n-2}}{9^n}\right) = \frac{10}{9}a_n > a_n$$

   Karena $a_{n+1} > a_n$, maka barisan $a_n = \frac{10^{n-2}}{9^n}$ adalah monoton naik.

7. *Diketahui $a_n = \frac{2^n}{(n-1)!}$*
   Jawab:
   Nilai dari:

$$a_{n+1} = \frac{2^{n+1}}{n!} = \frac{2}{n}\left(\frac{2^n}{(n-1)!}\right) = \frac{2}{n}a_n$$

   Jadi untuk $n > 2$, maka $a_{n+1} < a_n$, maka barisan $a_n = \frac{2^n}{(n-1)!}$ adalah monoton turun.

8. *Diketahui $a_n = \frac{10^n}{(n-2)!}$*
   Jawab:
   Nilai dari:

$$a_{n+1} = \frac{10^{n+1}}{(n-1)!} = \frac{10}{n-1}\left(\frac{10^n}{(n-2)!}\right) = \frac{10}{n-1}a_n$$

   Jadi untuk $n > 11$, maka $a_{n+1} < a_n$, maka barisan $a_n = \frac{10^n}{(n-2)!}$ adalah monoton turun.

9. *Diketahui $a_n = \frac{1000^{n-2}}{(n-100)!}$*
   Jawab:

Nilai dari:

$$a_{n+1} = \frac{1000^{n-1}}{(n-99)!} = \frac{1000}{n-99}\left(\frac{1000^{n-2}}{(n-100)!}\right) = \frac{1000}{n-99}a_n$$

Jadi untuk $n > 1099$*, maka* $a_{n+1} < a_n$*, maka barisan* $a_n = \frac{1000^{n-2}}{(n-100)!}$ *adalah monoton turun.*

10. *Diketahui* $a_n = \frac{(n+1)!}{n!}$
   Jawab:
   Nilai dari:

$$a_{n+1} = \frac{(n+2)!}{(n+1)!} = \frac{n+2}{n+1}\left(\frac{(n+1)!}{n!}\right) = \frac{n+2}{n+1}a_n > a_n$$

   Karena $a_{n+1} > a_n$*, maka barisan* $a_n = \frac{(n+1)!}{n!}$ *adalah monoton naik.*

11. *Diketahui* $a_n = \frac{(n+1)!}{(n+2)!}$
   Jawab:
   Nilai dari:

$$a_{n+1} = \frac{(n+2)!}{(n+3)!} = \frac{n+2}{n+3}\left(\frac{(n+1)!}{(n+2)!}\right) = \frac{n+1}{n+2}a_n < a_n$$

   Karena $a_{n+1} < a_n$*, maka barisan* $a_n = \frac{(n+1)!}{(n+2)!}$ *adalah monoton turun.*

Latihan 4.2.3. *Gunakan limit trigonometri untuk memeriksa kekonvergenan dari barisan berikut:*

1. *Diketahui* $a_n = \cos(n)$.
   Jawab:
   Semua unsur barisan dari a_n *akan berada pada fungsi* $f(x) = \cos(x)$*. Dimana:*

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty} \cos(x)$$

   Karena nilai dari $\cos(x)$ *berada pada selang* $-1 \leq \cos(x) \leq 1$*, maka* $\lim_{x\to\infty}\cos(x)$ *tidak ada. Jadi barisan* $a_n = \cos(n)$ *tidak konvergen.*

2. *Diketahui* $a_n = \sin(n)$.
   Jawab:
   Semua unsur barisan dari a_n *akan berada pada fungsi* $f(x) = \sin(x)$*. Dimana:*

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty} \sin(x)$$

Karena nilai dari $\sin(x)$ *berada pada selang* $-1 \leq \sin(x) \leq 1$*, maka* $\lim_{x\to\infty}\sin(x)$ *tidak ada. Jadi barisan* $a_n = \sin(n)$ *tidak konvergen.*

3. *Diketahui* $a_n = \sin\left(\frac{1}{n}\right)$.
   Jawab:
   Semua unsur barisan dari a_n *akan berada pada fungsi* $f(x) = \sin\left(\frac{1}{x}\right)$*. Dimana:*

$$\begin{aligned} \lim_{x\to\infty} f(x) &= \lim_{x\to\infty} \sin\left(\frac{1}{x}\right) \\ &= \sin\left(\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x}\right) \\ &= \sin(0) = 0 \end{aligned}$$

   Karena nilai dari $\lim_{x\to\infty}\sin\left(\frac{1}{x}\right) = 0$*, maka barisan* $a_n = \sin\left(\frac{1}{n}\right)$ *adalah barisan konvergen.*

4. *Diketahui* $a_n = \cos\left(\frac{1}{n}\right)$.
   Jawab:
   Semua unsur barisan dari a_n *akan berada pada fungsi* $f(x) = \cos\left(\frac{1}{x}\right)$*. Dimana:*

$$\begin{aligned} \lim_{x\to\infty} f(x) &= \lim_{x\to\infty} \cos\left(\frac{1}{x}\right) \\ &= \cos\left(\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x}\right) \\ &= \cos(0) = 1 \end{aligned}$$

   Karena nilai dari $\lim_{x\to\infty}\cos\left(\frac{1}{x}\right) = 1$*, maka barisan* $a_n = \cos\left(\frac{1}{n}\right)$ *adalah barisan konvergen.*

5. *Diketahui* $a_n = n\sin\left(\frac{1}{n}\right)$.
   Jawab:
   Semua unsur barisan dari a_n *akan berada pada fungsi* $f(x) = x\sin\left(\frac{1}{x}\right)$*. Dimana:*

$$\begin{aligned} \lim_{x\to\infty} f(x) &= \lim_{x\to\infty} x\sin\left(\frac{1}{x}\right) \\ &= \lim_{x\to\infty} \frac{\sin\left(\frac{1}{x}\right)}{\frac{1}{x}} \\ &= \lim_{x\to 0} \frac{\sin(x)}{x} \\ &= 1 \end{aligned}$$

   Karena nilai dari $\lim_{x\to\infty}x\sin\left(\frac{1}{x}\right) = 1$*, maka barisan* $a_n = n\sin\left(\frac{1}{n}\right)$ *adalah barisan konvergen.*

6. *Diketahui* $a_n = n\cos\left(\frac{\pi}{2}+\frac{1}{n}\right)$.
   Jawab:
   Semua unsur barisan dari a_n *akan berada pada fungsi* $f(x) = x\cos\left(\frac{\pi}{2}+\frac{1}{x}\right)$. *Dimana:*

$$\begin{aligned}\lim_{x\to\infty} f(x) &= \lim_{x\to\infty} x\cos\left(\frac{\pi}{2}+\frac{1}{x}\right)\\ &= \lim_{x\to\infty}\frac{\cos\left(\frac{\pi}{2}+\frac{1}{x}\right)}{\frac{1}{x}}\\ &= \lim_{x\to 0}\frac{\cos\left(\frac{\pi}{2}+x\right)}{x}\\ &= \lim_{x\to 0} -\sin\left(\frac{\pi}{2}+x\right) = -1\end{aligned}$$

   Karena nilai dari $\lim_{x\to\infty} x\cos\left(\frac{\pi}{2}+\frac{1}{x}\right) = -1$, *maka barisan* $a_n = n\cos\left(\frac{\pi}{2}+\frac{1}{n}\right)$ *adalah barisan konvergen.*

7. *Diketahui* $a_n = n\sin\left(\frac{1}{n^2}\right)$.
   Jawab:
   Semua unsur barisan dari a_n *akan berada pada fungsi* $f(x) = x\sin\left(\frac{1}{x^2}\right)$. *Dimana:*

$$\begin{aligned}\lim_{x\to\infty} f(x) &= \lim_{x\to\infty} x\sin\left(\frac{1}{x^2}\right)\\ &= \lim_{x\to\infty}\frac{\sin\left(\frac{1}{x^2}\right)}{\frac{1}{x}}\\ &= \lim_{x\to 0}\frac{\sin\left(x^2\right)}{x}\\ &= \lim_{x\to 0}\frac{2x\cos\left(x^2\right)}{1} = 0\end{aligned}$$

   Karena nilai dari $\lim_{x\to\infty} x\sin\left(\frac{1}{x^2}\right) = 0$, *maka barisan* $a_n = n\sin\left(\frac{1}{n^2}\right)$ *adalah barisan konvergen.*

8. *Diketahui* $a_n = n\cos(n)$.
   Jawab:
   Semua unsur barisan dari a_n *akan berada pada fungsi* $f(x) = x\cos(x)$. *Dimana diketahui* $-1 \le \cos(x) \le 1$, *sehingga* $\lim_{x\to\infty} x\cos(x)$ *tidak ada. Karena nilai dari* $\lim_{x\to\infty} x\sin\left(\frac{1}{x^2}\right)$ *tidak ada, maka barisan* $a_n = n\cos(n)$ *adalah barisan tidak konvergen.*

9. *Diketahui* $a_n = \sin\left(n+\frac{1}{n}\right)$.
   Jawab:

Semua unsur barisan dari a_n akan berada pada fungsi $f(x) = \sin\left(x+\frac{1}{x}\right)$. Dimana diketahui $-1 \leq \sin\left(x+\frac{1}{x}\right) \leq 1$, sehingga $\lim_{x\to\infty}\left(x+\frac{1}{x}\right)$ tidak ada. Karena nilai dari $\lim_{x\to\infty}\sin\left(x+\frac{1}{x}\right)$ tidak ada, maka barisan $a_n = \sin\left(n+\frac{1}{n}\right)$ adalah barisan tidak konvergen.

10. *Diketahui $a_n = \cos\left(\pi+\frac{\pi}{n}+\frac{\pi}{n^2}\right)$.*
    Jawab:
    Semua unsur barisan dari a_n akan berada pada fungsi $f(x) = \cos\left(\pi+\frac{\pi}{x}+\frac{\pi}{x^2}\right)$.
    Dimana:

$$\begin{aligned}\lim_{x\to\infty} f(x) &= \lim_{x\to\infty}\cos\left(\pi+\frac{\pi}{x}+\frac{\pi}{x^2}\right)\\ &= \cos\left(\lim_{x\to\infty}\pi+\lim_{x\to\infty}\frac{\pi}{x}+\lim_{x\to\infty}\frac{\pi}{x^2}\right)\\ &= \cos(\pi+0+0)\\ &= -1\end{aligned}$$

Karena nilai dari $\lim_{x\to\infty}\cos\left(\pi+\frac{\pi}{x}+\frac{\pi}{x^2}\right) = -1$, maka barisan $a_n = \cos\left(\pi+\frac{\pi}{n}+\frac{\pi}{n^2}\right)$ adalah barisan konvergen.

Latihan 4.2.4. *Gunakan teorema apit untuk mencari kekonvergenan barisan berikut:*

1. *Diketahui $a_n = \frac{\sin(n)}{n}$*
   Jawab:
   Semua unsur barisan a_n akan berada pada fungsi $f(x) = \frac{\sin(x)}{x}$, dimana $-1 \leq \sin(x) \leq 1$, sehingga didapatkan:

$$\begin{aligned}-1 &\leq \sin(x) \leq 1\\ \frac{-1}{x} &\leq \frac{\sin(x)}{x} \leq \frac{1}{x}\\ \lim_{x\to\infty}\frac{-1}{x} &\leq \lim_{x\to\infty}\frac{\sin(x)}{x} \leq \lim_{x\to\infty}\frac{1}{x}\\ 0 &\leq \lim_{x\to\infty}\frac{\sin(x)}{x} \leq 0\end{aligned}$$

Sehingga $\lim_{x\to\infty}\frac{\sin(x)}{x} = 0$. Jadi dapat disimpulkan bahwa barisan $a_n = \frac{\sin(n)}{n}$ akan konvergen ke 0.

2. *Diketahui $a_n = \frac{\cos(n)}{n}$*
   Jawab:
   Semua unsur barisan a_n akan berada pada fungsi $f(x) = \frac{\cos(x)}{x}$, dimana $-1 \leq \cos(x) \leq$

1, *sehingga didapatkan:*

$$\begin{aligned}
-1 &\leq \cos(x) \leq 1 \\
\frac{-1}{x} &\leq \frac{\cos(x)}{x} \leq \frac{1}{x} \\
\lim_{x\to\infty} \frac{-1}{x} &\leq \lim_{x\to\infty} \frac{\cos(x)}{x} \leq \lim_{x\to\infty} \frac{1}{x} \\
0 &\leq \lim_{x\to\infty} \frac{\cos(x)}{x} \leq 0
\end{aligned}$$

Sehingga $\lim_{x\to\infty} \frac{\cos(x)}{x} = 0$. *Jadi dapat disimpulkan bahwa barisan* $a_n = \frac{\cos(n)}{n}$ *akan konvergen ke 0.*

3. *Diketahui* $a_n = \frac{1}{n^2}\cos(n^2)$
   Jawab:
   Semua unsur barisan a_n *akan berada pada fungsi* $f(x) = \frac{1}{x^2}\cos(x^2)$, *dimana* $-1 \leq \cos(x^2) \leq 1$, *sehingga didapatkan:*

$$\begin{aligned}
-1 &\leq \cos(x^2) \leq 1 \\
\frac{-1}{x^2} &\leq \frac{\cos(x^2)}{x^2} \leq \frac{1}{x^2} \\
\lim_{x\to\infty} \frac{-1}{x^2} &\leq \lim_{x\to\infty} \frac{\cos(x^2)}{x^2} \leq \lim_{x\to\infty} \frac{1}{x^2} \\
0 &\leq \lim_{x\to\infty} \frac{\cos(x^2)}{x^2} \leq 0
\end{aligned}$$

   Sehingga $\lim_{x\to\infty} \frac{\cos(x^2)}{x^2} = 0$. *Jadi dapat disimpulkan bahwa barisan* $a_n = \frac{1}{n^2}\cos(n^2)$ *akan konvergen ke 0.*

4. *Diketahui* $a_n = \frac{1}{n}\sin\left(n^2 + n + \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2}\right)$
   Jawab:
   Semua unsur barisan a_n *akan berada pada fungsi* $f(x) = \frac{1}{x}\sin\left(x^2 + x + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}\right)$, *dimana* $-1 \leq \sin\left(x^2 + x + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}\right) \leq 1$, *sehingga didapatkan:*

$$\begin{aligned}
-1 &\leq \sin\left(x^2 + x + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}\right) \leq 1 \\
\frac{-1}{x} &\leq \frac{\sin\left(x^2 + x + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}\right)}{x} \leq \frac{1}{x} \\
\lim_{x\to\infty} \frac{-1}{x} &\leq \lim_{x\to\infty} \frac{\sin\left(x^2 + x + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}\right)}{x} \leq \lim_{x\to\infty} \frac{1}{x} \\
0 &\leq \lim_{x\to\infty} \frac{\sin\left(x^2 + x + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}\right)}{x} \leq 0
\end{aligned}$$

Sehingga $\lim_{x\to\infty} \frac{\sin\left(x^2+x+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}\right)}{x} = 0$. *Jadi dapat disimpulkan bahwa barisan* $a_n = \frac{1}{n}\sin\left(n^2+n+\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}\right)$ *akan konvergen ke 0.*

5. *Diketahui* $a_n = \frac{1}{n^2+2n+3}\cos\left(n^6+n^3+3\right)$

   Jawab:

   Semua unsur barisan a_n *akan berada pada fungsi* $f(x) = \frac{1}{x^2+2x+3}\cos\left(x^6+x^3+3\right)$, *dimana* $-1 \le \cos\left(x^6+x^3+3\right) \le 1$, *sehingga didapatkan:*

$$\begin{aligned}
-1 &\le \cos\left(x^6+x^3+3\right) \le 1 \\
\frac{-1}{x^2+2x+3} &\le \frac{\cos\left(x^6+x^3+3\right)}{x^2+2x+3} \le \frac{1}{x^2+2x+3} \\
\lim_{x\to\infty}\frac{-1}{x^2+2x+3} &\le \lim_{x\to\infty}\frac{\cos\left(x^6+x^3+3\right)}{x^2+2x+3} \le \lim_{x\to\infty}\frac{1}{x^2+2x+3} \\
0 &\le \lim_{x\to\infty}\frac{\cos\left(x^6+x^3+3\right)}{x^2+2x+3} \le 0
\end{aligned}$$

   Sehingga $\lim_{x\to\infty}\frac{\cos\left(x^6+x^3+3\right)}{x^2+2x+3} = 0$. *Jadi dapat disimpulkan bahwa barisan* $a_n = \frac{1}{n^2+2n+3}\cos\left(n^6+n^3+3\right)$ *akan konvergen ke 0.*

6. *Diketahui* $a_n = \frac{1}{n^2}\cos\left(\frac{1}{n}\right)$

   Jawab:

   Semua unsur barisan a_n *akan berada pada fungsi* $f(x) = \frac{1}{x^2}\cos\left(\frac{1}{x}\right)$, *dimana* $-1 \le \cos\left(\frac{1}{x}\right) \le 1$, *sehingga didapatkan:*

$$\begin{aligned}
-1 &\le \cos\left(\frac{1}{x}\right) \le 1 \\
\frac{-1}{x^2} &\le \frac{\cos\left(\frac{1}{x}\right)}{x^2} \le \frac{1}{x^2} \\
\lim_{x\to\infty}\frac{-1}{x^2} &\le \lim_{x\to\infty}\frac{\cos\left(\frac{1}{x}\right)}{x^2} \le \lim_{x\to\infty}\frac{1}{x^2} \\
0 &\le \lim_{x\to\infty}\frac{\cos\left(\frac{1}{x}\right)}{x^2} \le 0
\end{aligned}$$

   Sehingga $\lim_{x\to\infty}\frac{\cos\left(\frac{1}{x}\right)}{x^2} = 0$. *Jadi dapat disimpulkan bahwa barisan* $a_n = \frac{1}{n^2}\cos\left(\frac{1}{n}\right)$ *akan konvergen ke 0.*

7. *Diketahui* $a_n = \frac{3^n}{2^n+4^n}$

   Jawab:

   Semua unsur barisan a_n *akan berada pada fungsi* $f(x) = \frac{3^x}{2^x+4^x}$. *Untuk* $x > 0$, *maka*

$f(x) \geq 0$ dan $\frac{3^x}{2^x+4^x} \leq \frac{3^x}{4^x} = \left(\frac{3}{4}\right)^x$, sehingga didapatkan:

$$\begin{aligned}
0 &\leq \frac{3^x}{2^x+4^x} \leq \left(\frac{3}{4}\right)^x \\
\lim_{x\to\infty} 0 &\leq \lim_{x\to\infty} \frac{3^x}{2^x+4^x} \leq \lim_{x\to\infty} \left(\frac{3}{4}\right)^x \\
0 &\leq \lim_{x\to\infty} \frac{3^x}{2^x+4^x} \leq 0
\end{aligned}$$

Sehingga menurut teorema apit, $\lim_{x\to\infty} \frac{3^x}{2^x+4^x} = 0$. Jadi dapat disimpulkan bahwa barisan $a_n = \frac{3^n}{2^n+4^n}$ akan konvergen ke 0.

8. *Diketahui $a_n = \frac{10^n}{3^n+6^n+9^n+12^n}$*

   Jawab:

   Semua unsur barisan a_n akan berada pada fungsi $f(x) = \frac{10^x}{3^x+6^x+9^x+12^x}$. Untuk $x > 0$, maka $f(x) \geq 0$ dan $\frac{10^x}{3^x+6^x+9^x+12^x} \leq \frac{10^x}{12^x} = \left(\frac{10}{12}\right)^x$, sehingga didapatkan:

$$\begin{aligned}
0 &\leq \frac{10^x}{3^x+6^x+9^x+12^x} \leq \left(\frac{10}{12}\right)^x \\
\lim_{x\to\infty} 0 &\leq \lim_{x\to\infty} \frac{10^x}{3^x+6^x+9^x+12^x} \leq \lim_{x\to\infty} \left(\frac{10}{12}\right)^x \\
0 &\leq \lim_{x\to\infty} \frac{10^x}{3^x+6^x+9^x+12^x} \leq 0
\end{aligned}$$

   Sehingga menurut teorema apit, $\lim_{x\to\infty} \frac{10^x}{3^x+6^x+9^x+12^x} = 0$. Jadi dapat disimpulkan bahwa barisan $a_n = \frac{10^n}{3^n+6^n+9^n+12^n}$ akan konvergen ke 0.

9. *Diketahui $a_n = \frac{3^n+6^n+9^n}{2^n+4^n+6^n+8^n+10^n}$*

   Jawab:

   Semua unsur barisan a_n akan berada pada fungsi $f(x) = \frac{3^x+6^x+9^x}{2^x+4^x+6^x+8^x+10^x}$. Untuk $x > 0$, maka $f(x) \geq 0$ dan $\frac{3^x+6^x+9^x}{2^x+4^x+6^x+8^x+10^x} \leq \frac{3^x+6^x+9^x}{6^x+8^x+10^x}$, sehingga didapatkan:

$$\begin{aligned}
0 &\leq \frac{3^x+6^x+9^x}{2^x+4^x+6^x+8^x+10^x} \leq \frac{3^x+6^x+9^x}{6^x+8^x+10^x} \\
\lim_{x\to\infty} 0 &\leq \lim_{x\to\infty} \frac{3^x+6^x+9^x}{2^x+4^x+6^x+8^x+10^x} \leq \lim_{x\to\infty} \frac{3^x+6^x+9^x}{6^x+8^x+10^x} \\
0 &\leq \lim_{x\to\infty} \frac{3^x+6^x+9^x}{2^x+4^x+6^x+8^x+10^x} \leq 0
\end{aligned}$$

   Dimana $\lim_{x\to\infty} \frac{3^x+6^x+9^x}{6^x+8^x+10^x} = 0$ karena $3^x+6^x+9^x < 6^x+8^x+10^x$, sehingga menurut teorema apit, $\lim_{x\to\infty} \frac{3^x+6^x+9^x}{2^x+4^x+6^x+8^x+10^x} = 0$. Jadi dapat disimpulkan bahwa barisan $a_n = \frac{3^n+6^n+9^n}{2^n+4^n+6^n+8^n+10^n}$ akan konvergen ke 0.

Latihan 4.2.5. *Carilah limit dari fungsi yang bersesuaian dengan barisan berikut untuk* *menguji kekonvergenannya. Gunakan Teorema L'Hospital dalam mencari nilai limit fungsinya.*

1. *Diketahui* $a_n = \frac{\ln(n^2)}{n}$.
   Jawab:
   Unsur-unsur barisan a_n *akan berada pada fungsi* $f(x) = \frac{\ln(x^2)}{x}$. *Selanjutnya akan dicari:*

$$\begin{aligned}\lim_{x\to\infty} f(x) &= \lim_{x\to\infty} \frac{\ln(x^2)}{x} \\ &= \lim_{x\to\infty} \frac{2}{x} = 0\end{aligned}$$

   Karena $\lim_{x\to\infty} \frac{\ln(x^2)}{x} = 0$, *maka barisan* $a_n = \frac{n}{\ln(n)}$ *adalah barisan yang konvergen.*

2. *Diketahui* $a_n = \frac{\ln(n^3)}{n^2+1}$.
   Jawab:
   Unsur-unsur barisan a_n *akan berada pada fungsi* $f(x) = \frac{\ln(x^3)}{x^2+1}$. *Selanjutnya akan dicari:*

$$\begin{aligned}\lim_{x\to\infty} f(x) &= \lim_{x\to\infty} \frac{\ln(x^3)}{x^2+1} \\ &= 3\lim_{x\to\infty} \frac{\ln(x)}{x^2+1} \\ &= 3\lim_{x\to\infty} \frac{1}{2x^2} = 0\end{aligned}$$

   Karena $\lim_{x\to\infty} \frac{\ln(x^3)}{x^2+1} = 0$, *maka barisan* $a_n = \frac{\ln(n^3)}{n^2+1}$ *adalah barisan yang konvergen.*

3. *Diketahui* $a_n = \frac{\ln(n^3+n^2+n+2)}{n+1}$.
   Jawab:
   Unsur-unsur barisan a_n *akan berada pada fungsi* $f(x) = \frac{\ln(x^3+x^2+x+2)}{x+1}$. *Selanjutnya akan dicari:*

$$\begin{aligned}\lim_{x\to\infty} f(x) &= \lim_{x\to\infty} \frac{\ln(x^3+x^2+x+2)}{x+1} \\ &= \lim_{x\to\infty} \frac{3x^2+2x^2+1}{x^3+x^2+x+2} \\ &= \lim_{x\to\infty} \frac{3x^2+2x^2+1}{x^3+x^2+x+2}\left(\frac{1/x^3}{1/x^3}\right) \\ &= \lim_{x\to\infty} \frac{3/x+2/x^2+1/x^3}{1+1/x+1/x^2+2/x^3} \\ &= \frac{0+0+0}{1+0+0+0+0} = 0\end{aligned}$$

Karena $\lim_{x\to\infty} \frac{\ln(x^3+x^2+x+2)}{x+1} = 0$, *maka barisan* $a_n = \frac{\ln(n^3+n^2+n+2)}{n+1}$ *adalah barisan yang konvergen.*

4. *Diketahui* $a_n = \frac{(\ln(n^2+1))^2}{n^3+1}$.
   Jawab:
   Unsur-unsur barisan a_n *akan berada pada fungsi* $f(x) = \frac{(\ln(x^2+1))^2}{x^3+1}$. *Selanjutnya akan dicari:*

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to\infty} f(x) &= \lim_{x\to\infty} \frac{(\ln(x^2+1))^2}{x^3+1} \\
&= \lim_{x\to\infty} \frac{4x\ln(x^2+1)}{x^2+1} \frac{1}{3x^2} \\
&= \frac{4}{3} \lim_{x\to\infty} \frac{\ln(x^2+1)}{x(x^2+1)} \\
&= \frac{4}{3} \lim_{x\to\infty} \frac{2x}{x^2+1} \frac{1}{3x^2+1} \\
&= \frac{4}{3} \lim_{x\to\infty} \frac{2x}{(x^2+1)(3x^2+1)} = 0
\end{aligned}$$

Karena $\lim_{x\to\infty} \frac{(\ln(x^2+1))^2}{x^3+1} = 0$, *maka barisan* $a_n = \frac{(\ln(n^2+1))^2}{n^3+1}$ *adalah barisan yang konvergen.*

Latihan 4.2.6. *Jawablah pertanyaan berikut sesuai dengan intruksi yang diberikan:*

1. *Buktikan bahwa barisan* $a_n = \frac{2^n-1}{2^n}$ *konvergen.*
   Jawab:
   Barisan a_n *dapat ditulis sebagai:*

$$\begin{aligned}
a_n &= \frac{2^n-1}{2^n} \\
&= 1 - \frac{1}{2^n}
\end{aligned}$$

Sehingga:

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} a_n &= \lim_{n\to\infty} \left(1 - \frac{1}{2^n}\right) \\
&= 1
\end{aligned}$$

Jadi barisan $a_n = \frac{2^n-1}{2^n}$ *akan konvergen ke 1.*

2. *Apakah barisan* $a_n = \frac{n^2+1}{n^2-1}$ *konvergen?*
   Jawab:

Akan dicari nilai $\lim_{n\to\infty} a_n$*, yaitu:*

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty} a_n &= \lim_{n\to\infty} \frac{n^2+1}{n^2-1} \\ &= \lim_{n\to\infty} \frac{1+\frac{1}{n^2}}{1-\frac{1}{n^2}} \\ &= 1\end{aligned}$$

Jadi barisan $a_n = \frac{n^2+1}{n^2-1}$ *akan konvergen ke 1.*

3. *Apakah barisan* $a_n = \frac{\sin n}{\sqrt{n}}$ *konvergen. Jika konvergen, tentukan nilai limitnya.*
   Jawab:
   Diketahui bahwa $|\sin n| \le 1$ *sehingga:*

$$\begin{aligned}0 &< \left|\frac{\sin n}{\sqrt{n}}\right| \\ &= \frac{|\sin n|}{\sqrt{n}} \\ &\le \frac{1}{\sqrt{n}}\end{aligned}$$

   Dimana:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} = 0$$

   Sehingga $\lim_{n\to\infty} \left|\frac{\sin n}{\sqrt{n}}\right| = 0$*. Jadi barisan* $a_n = \frac{\sin n}{\sqrt{n}}$ *akan konvergen ke 0.*

4. *Tentukan apakah barisan* $a_n = 1-(0.2)^n$ *akan konvergen atau divergen.*
   Jawab:
   Karena $0.2 < 1$*, maka:*

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty} a_n &= \lim_{n\to\infty} (1-(0.2)^n) \\ &= 1-0=1\end{aligned}$$

   Jadi barisan $a_n = 1-(0.2)^n$ *akan konvergen ke 1.*

5. *Tentukan apakah barisan* $a_n = \frac{n^3}{n^3+1}$ *konvergen atau divergen.*
   Jawab:

Akan dicari nilai limitnya yaitu:

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty} a_n &= \lim_{n\to\infty} \frac{n^3}{n^3+1} \\ &= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{1+\frac{1}{n^3}} \\ &= 1\end{aligned}$$

Jadi barisan $a_n = \frac{n^3}{n^3+1}$ akan konvergen ke 1.

6. *Periksa kekonvergenan barisan $a_n = \frac{2^n}{n!}$*
Jawab: Karena n adalah bilangan bulat positif sehingga $a_n > 0$. Selanjutnya akan dibuktikan bahwa a_n adalah barisan monoton tidak naik.

$$\begin{aligned}a_{n+1} &\leq a_n \\ \frac{2^{n+1}}{(n+1)!} &\leq \frac{2^n}{n!} \\ \frac{22^n}{(n+1)n!} &\leq \frac{2^n}{n!} \\ \frac{2}{n+1} &\leq 1 \\ 2 &\leq (n+1)\end{aligned}$$

Terbukti bahwa a_n adalah barisan tidak naik. Karena a_n adalah barisan tidak naik dan terbatas di bawah, maka barisan $a_n = \frac{2^n}{n!}$ adalah barisan konvergen.

Latihan 4.2.7. *Carilah nilai limit dari barisan berikut:*

1. *Periksa kekonvergenan barisan berikut, dengan mencari nilai limitnya.*

$$a_n = \left(\frac{n^2+1}{n^2}\right)^n$$

Jawaban:

$$\begin{aligned}a_n &= \left(\frac{n^2+1}{n^2}\right)^n \\ &= \left(1+\frac{1}{n^2}\right)^n \\ &= \left(1+\left[\frac{1}{n}\right]^2\right)^{\frac{1}{1/n}}\end{aligned}$$

Selanjutnya cari nilai dari $\lim_{n\to\infty} a_n$*, yaitu:*

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty}\left(1+\left[\frac{1}{n}\right]^2\right)^{\frac{1}{1/n}}$$

Misalkan $b=\frac{1}{n}$*, maka saat n menuju* ∞ *akan menyebabkan b menuju 0 dari kanan atau dapat ditulis* 0^+*. Selanjutnya dapat ditulis:*

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty} a_n &= \lim_{n\to\infty}\left(1+\left[\frac{1}{n}\right]^2\right)^{\frac{1}{1/n}}\\ &= \lim_{b\to 0^+}\left(1+b^2\right)^{\frac{1}{b}}\end{aligned}$$

Misalkan:

$$\begin{aligned} c &= \left(1+b^2\right)^{\frac{1}{b}}\\ \ln c &= \ln\left[\left(1+b^2\right)^{\frac{1}{b}}\right]\\ &= \frac{1}{b}\ln(1+b^2)\end{aligned}$$

Cari limit kedua ruas didapatkan:

$$\begin{aligned}\lim_{b\to 0^+}\ln c &= \lim_{b\to 0^+}\frac{1}{b}\ln(1+b^2)\\ &= \lim_{b\to 0^+}\frac{\ln(1+b^2)}{b}\end{aligned}$$

Karena saat disubstitusi dengan $b=0$*, ruas kanan akan bernilai* $\frac{0}{0}$*, maka dapat digunakan perbandingan gradien pembilang dan penyebut dari persamaan* $\frac{\ln(1+b^2)}{b}$ *(ini lebih dikenal dengan metoda L'Hospital). Dimana:*

$$\begin{aligned}\frac{d}{db}(\ln(1+b^2)) &= \frac{2b}{1+b^2}\\ \frac{d}{db}(b) &= 1\end{aligned}$$

Masukkan hasilnya ke persamaan akan didapatkan:

$$\begin{aligned}
\lim_{b\to 0^+} \ln c &= \lim_{b\to 0^+} \frac{\ln(1+b^2)}{b} \\
&= \lim_{b\to 0^+} \frac{\frac{2b}{1+b^2}}{1} \\
&= 0
\end{aligned}$$

Karena $f(x) = \ln x$ *adalah fungsi kontinu pada selang* $(0,\infty)$, *maka akan berlaku* $\lim_{b\to 0^+} \ln c = \ln\left(\lim_{b\to 0^+} c\right)$. *Sehingga:*

$$\begin{aligned}
\lim_{b\to 0^+} \ln c &= 0 \\
\ln\left(\lim_{b\to 0^+} c\right) &= 0
\end{aligned}$$

Gunakan kedua ruas sebagai pangkat eksponensial:

$$\begin{aligned}
\lim_{b\to 0^+} \ln c &= 0 \\
\ln\left(\lim_{b\to 0^+} c\right) &= 0 \\
e^{\ln\left(\lim_{b\to 0^+} c\right)} &= e^0 \\
\lim_{b\to 0^+} c &= 1
\end{aligned}$$

Karena $c = \left(1+b^2\right)^{\frac{1}{b}}$, *maka*

$$\begin{aligned}
\lim_{b\to 0^+} c &= 1 \\
\lim_{b\to 0^+} \left(1+b^2\right)^{\frac{1}{b}} &= 1 \\
\lim_{b\to 0^+} a_n &= 1
\end{aligned}$$

Jadi karena $\lim_{b\to 0^+} a_n = 1$ *maka barisan* a_n *adalah barisan konvergen.*

2. *Periksa kekonvergenan barisan berikut, dengan mencari nilai limitnya.*

$$a_n = \left(\frac{n-1}{n+1}\right)^n$$

Jawaban:

$$\begin{aligned} a_n &= \left(\frac{n-1}{n+1}\right)^n \\ &= \left(\frac{n\left(1-\frac{1}{n}\right)}{n\left(1+\frac{1}{n}\right)}\right)^{\frac{1}{1/n}} \\ &= \left(\frac{1-\frac{1}{n}}{1+\frac{1}{n}}\right)^{\frac{1}{1/n}} \end{aligned}$$

Selanjutnya cari nilai dari $\lim_{n\to\infty} a_n$*, yaitu:*

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{1-\frac{1}{n}}{1+\frac{1}{n}}\right)^{\frac{1}{1/n}}$$

Misalkan $b = \frac{1}{n}$*, maka saat n menuju* ∞ *akan menyebabkan b menuju 0 dari kanan atau dapat ditulis* 0^+*. Selanjutnya dapat ditulis:*

$$\begin{aligned} \lim_{n\to\infty} a_n &= \left(\frac{1-\frac{1}{n}}{1+\frac{1}{n}}\right)^{\frac{1}{1/n}} \\ &= \lim_{b\to 0^+} \left(\frac{1-b}{1+b}\right)^{\frac{1}{b}} \end{aligned}$$

Misalkan:

$$\begin{aligned} c &= \left(\frac{1-b}{1+b}\right)^{\frac{1}{b}} \\ \ln c &= \ln\left[\left(\frac{1-b}{1+b}\right)^{\frac{1}{b}}\right] \\ &= \frac{1}{b}\ln\left[\frac{1-b}{1+b}\right] \end{aligned}$$

Cari limit kedua ruas didapatkan:

$$\begin{aligned} \lim_{b\to 0^+} \ln c &= \lim_{b\to 0^+} \frac{1}{b}\ln\left[\frac{1-b}{1+b}\right] \\ &= \lim_{b\to 0^+} \frac{\ln\left[\frac{1-b}{1+b}\right]}{b} \end{aligned}$$

Karena saat disubstitusi dengan $b = 0$*, ruas kanan akan bernilai* $\frac{0}{0}$*, maka dapat digunakan perbandingan gradien pembilang dan penyebut dari persamaan* $\frac{\ln(1+b^2)}{b}$

(ini lebih dikenal dengan metoda L'Hospital). Dimana:

$$\begin{aligned} \frac{d}{db}\left(\ln\left[\frac{1-b}{1+b}\right]\right) &= \left(\frac{1+b}{1-b}\right)\frac{-(1+b)-(1-b)}{(1+b)^2} \\ &= \frac{-2}{1-b^2} \end{aligned}$$

Masukkan hasilnya ke persamaan akan didapatkan:

$$\begin{aligned} \lim_{b\to 0^+} \ln c &= \frac{\ln\left[\frac{1-b}{1+b}\right]}{b} \\ &= \lim_{b\to 0^+} \frac{\frac{-2}{1-b^2}}{1} \\ &= -2 \end{aligned}$$

Karena $f(x) = \ln x$ *adalah fungsi kontinu pada selang* $(0,\infty)$, *maka akan berlaku* $\lim_{b\to 0^+} \ln c = \ln\left(\lim_{b\to 0^+} c\right)$. *Sehingga:*

$$\begin{aligned} \lim_{b\to 0^+} \ln c &= -2 \\ \ln\left(\lim_{b\to 0^+} c\right) &= -2 \end{aligned}$$

Gunakan kedua ruas sebagai pangkat eksponensial:

$$\begin{aligned} \lim_{b\to 0^+} \ln c &= -2 \\ \ln\left(\lim_{b\to 0^+} c\right) &= -2 \\ e^{\ln\left(\lim_{b\to 0^+} c\right)} &= e^{-2} \\ \lim_{b\to 0^+} c &= e^{-2} \end{aligned}$$

Karena $c = \left(\frac{1-b}{1+b}\right)^{\frac{1}{b}}$, *maka*

$$\begin{aligned} \lim_{b\to 0^+} c &= e^{-2} \\ \lim_{b\to 0^+} \left(\frac{1-b}{1+b}\right)^{\frac{1}{b}} &= e^{-2} \\ \lim_{b\to 0^+} a_n &= e^{-2} \end{aligned}$$

Jadi karena $\lim_{b\to 0^+} a_n = e^{-2}$ *maka barisan* a_n *adalah barisan konvergen.*

3. *Periksa kekonvergenan barisan berikut, dengan mencari nilai limitnya.*

$$a_n = \left(\frac{n^2+2}{n^2+3}\right)^n$$

Jawaban:

$$\begin{aligned} a_n &= \left(\frac{n^2+2}{n^2+3}\right)^n \\ &= \left(\frac{n^2\left(1+\frac{2}{n^2}\right)}{n^2\left(1+\frac{3}{n^2}\right)}\right)^{\frac{1}{1/n}} \\ &= \left(\frac{1+\frac{2}{n^2}}{1+\frac{3}{n^2}}\right)^{\frac{1}{1/n}} \end{aligned}$$

Selanjutnya cari nilai dari $\lim_{n\to\infty} a_n$*, yaitu:*

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{1+\frac{2}{n^2}}{1+\frac{3}{n^2}}\right)^{\frac{1}{1/n}}$$

Misalkan $b = \frac{1}{n}$*, maka saat n menuju* ∞ *akan menyebabkan b menuju 0 dari kanan atau dapat ditulis* 0^+*. Selanjutnya dapat ditulis:*

$$\begin{aligned} \lim_{n\to\infty} a_n &= \lim_{n\to\infty}\left(\frac{1+\frac{2}{n^2}}{1+\frac{3}{n^2}}\right)^{\frac{1}{1/n}} \\ &= \lim_{b\to 0^+}\left(\frac{1+2b^2}{1+3b^2}\right)^{\frac{1}{b}} \end{aligned}$$

Misalkan:

$$\begin{aligned} c &= \left(\frac{1+2b^2}{1+3b^2}\right)^{\frac{1}{b}} \\ \ln c &= \ln\left(\frac{1+2b^2}{1+3b^2}\right)^{\frac{1}{b}} \\ &= \frac{1}{b}\ln\left(\frac{1+2b^2}{1+3b^2}\right) \end{aligned}$$

Cari limit kedua ruas didapatkan:

$$\begin{aligned}\lim_{b\to 0^+}\ln c &= \lim_{b\to 0^+}\frac{1}{b}\ln\left(\frac{1+2b^2}{1+3b^2}\right)\\ &= \lim_{b\to 0^+}\frac{\ln\left(\frac{1+2b^2}{1+3b^2}\right)}{b}\end{aligned}$$

Karena saat disubstitusi dengan $b=0$*, ruas kanan akan bernilai* $\frac{0}{0}$*, maka dapat digunakan perbandingan gradien pembilang dan penyebut dari persamaan* $\frac{\ln(1+b^2)}{b}$ *(ini lebih dikenal dengan metoda L'Hospital). Dimana:*

$$\begin{aligned}\frac{d}{db}\left(\ln\left(\frac{1+2b^2}{1+3b^2}\right)\right) &= \left(\frac{1+3b^2}{1+2b^2}\right)\frac{4b(1+3b^2)-(1+2b^2)6b}{(1+3b^2)^2}\\ &= \frac{-2b}{(1+2b^2)(1+3b^2)}\end{aligned}$$

Masukkan hasilnya ke persamaan akan didapatkan:

$$\begin{aligned}\lim_{b\to 0^+}\ln c &= \lim_{b\to 0^+}\frac{\ln(1+b^2)}{b}\\ &= \lim_{b\to 0^+}\frac{\frac{-2b}{(1+2b^2)(1+3b^2)}}{1}\\ &= 0\end{aligned}$$

Karena $f(x)=\ln x$ *adalah fungsi kontinu pada selang* $(0,\infty)$*, maka akan berlaku* $\lim_{b\to 0^+}\ln c = \ln\left(\lim_{b\to 0^+} c\right)$*. Sehingga:*

$$\begin{aligned}\lim_{b\to 0^+}\ln c &= 0\\ \ln\left(\lim_{b\to 0^+} c\right) &= 0\end{aligned}$$

Gunakan kedua ruas sebagai pangkat eksponensial:

$$\begin{aligned}\lim_{b\to 0^+}\ln c &= 0\\ \ln\left(\lim_{b\to 0^+} c\right) &= 0\\ e^{\ln\left(\lim_{b\to 0^+} c\right)} &= e^0\\ \lim_{b\to 0^+} c &= 1\end{aligned}$$

Karena $c = \left(\frac{1+2b^2}{1+3b^2}\right)^{\frac{1}{b}}$*, maka*

$$\begin{aligned} \lim_{b\to 0^+} c &= 1 \\ \lim_{b\to 0^+} \left(\frac{1+2b^2}{1+3b^2}\right)^{\frac{1}{b}} &= 1 \\ \lim_{b\to 0^+} a_n &= 1 \end{aligned}$$

Jadi karena $\lim_{b\to 0^+} a_n = 1$ *maka barisan* a_n *adalah barisan konvergen.*

4. *Periksa kekonvergenan barisan berikut, dengan mencari nilai limitnya.*

$$a_n = \left(\frac{n^2+2}{n^2+3}\right)^{n^2}$$

Jawaban:

$$\begin{aligned} a_n &= \left(\frac{n^2+2}{n^2+3}\right)^{n^2} \\ &= \left(\frac{n^2\left(1+\frac{2}{n^2}\right)}{n^2\left(1+\frac{3}{n^2}\right)}\right)^{\frac{1}{(1/n)^2}} \\ &= \left(\frac{1+\frac{2}{n^2}}{1+\frac{3}{n^2}}\right)^{\frac{1}{(1/n)^2}} \end{aligned}$$

Selanjutnya cari nilai dari $\lim_{n\to\infty} a_n$*, yaitu:*

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{1+\frac{2}{n^2}}{1+\frac{3}{n^2}}\right)^{\frac{1}{(1/n)^2}}$$

Misalkan $b = \frac{1}{n^2}$*, maka saat n menuju* ∞ *akan menyebabkan b menuju 0 dari kanan atau dapat ditulis* 0^+. *Selanjutnya dapat ditulis:*

$$\begin{aligned} \lim_{n\to\infty} a_n &= \lim_{n\to\infty} \left(\frac{1+\frac{2}{n^2}}{1+\frac{3}{n^2}}\right)^{\frac{1}{(1/n)^2}} \\ &= \lim_{b\to 0^+} \left(\frac{1+2b}{1+3b}\right)^{\frac{1}{b}} \end{aligned}$$

Misalkan:

$$\begin{aligned} c &= \left(\frac{1+2b}{1+3b}\right)^{\frac{1}{b}} \\ \ln c &= \ln\left(\frac{1+2b}{1+3b}\right)^{\frac{1}{b}} \\ &= \frac{1}{b}\ln\left(\frac{1+2b}{1+3b}\right) \end{aligned}$$

Cari limit kedua ruas didapatkan:

$$\begin{aligned} \lim_{b\to 0^+} \ln c &= \lim_{b\to 0^+} \frac{1}{b}\ln\left(\frac{1+2b}{1+3b}\right) \\ &= \lim_{b\to 0^+} \frac{\ln\left(\frac{1+2b}{1+3b}\right)}{b} \end{aligned}$$

Karena saat disubstitusi dengan $b = 0$, ruas kanan akan bernilai $\frac{0}{0}$, maka dapat digunakan perbandingan gradien pembilang dan penyebut dari persamaan $\frac{\ln(1+b^2)}{b}$ (ini lebih dikenal dengan metoda L'Hospital). Dimana:

$$\begin{aligned} \frac{d}{db}\left(\ln\left(\frac{1+2b}{1+3b}\right)\right) &= \left(\frac{1+3b}{1+2b}\right)\frac{2(1+3b)-3(1+2b)}{(1+3b)^2} \\ &= \frac{-1}{(1+2b)(1+3b)} \end{aligned}$$

Masukkan hasilnya ke persamaan akan didapatkan:

$$\begin{aligned} \lim_{b\to 0^+} \ln c &= \lim_{b\to 0^+} \frac{\ln\left(\frac{1+2b}{1+3b}\right)}{b} \\ &= \lim_{b\to 0^+} \frac{\frac{-1}{(1+2b)(1+3b)}}{1} \\ &= -1 \end{aligned}$$

Karena $f(x) = \ln x$ adalah fungsi kontinu pada selang $(0,\infty)$, maka akan berlaku $\lim_{b\to 0^+} \ln c = \ln\left(\lim_{b\to 0^+} c\right)$. Sehingga:

$$\begin{aligned} \lim_{b\to 0^+} \ln c &= -1 \\ \ln\left(\lim_{b\to 0^+} c\right) &= -1 \end{aligned}$$

Gunakan kedua ruas sebagai pangkat eksponensial:

$$\begin{aligned}
\lim_{b\to 0^+} \ln c &= -1\\
\ln\left(\lim_{b\to 0^+} c\right) &= -1\\
e^{\ln\left(\lim_{b\to 0^+} c\right)} &= e^{-1}\\
\lim_{b\to 0^+} c &= e^{-1}
\end{aligned}$$

Karena $c = \left(\frac{1+2b}{1+3b}\right)^{\frac{1}{b}}$, *maka*

$$\begin{aligned}
\lim_{b\to 0^+} c &= e^{-1}\\
\lim_{b\to 0^+} \left(\frac{1+2b}{1+3b}\right)^{\frac{1}{b}} &= e^{-1}\\
\lim_{b\to 0^+} a_n &= e^{-1}
\end{aligned}$$

Jadi karena $\lim_{b\to 0^+} a_n = e^{-1}$ *maka barisan* a_n *adalah barisan konvergen.*

5

Jawaban Latihan Bab II

5.1 Deret

5.2 Deret Geometri

1. Tentukan apakah deret geometri $\sum_{n=1}^{\infty} 6(0.9)^{n-1}$ konvergen atau divergen. Jika konvergen, tentukan ke mana dia akan konvergen.
   Jawab:
   Deret tersebut dapat ditulis sebagai:

$$\sum_{n=1}^{\infty} 6(0.9)^{n-1} = 6\sum_{n=1}^{\infty} (0.9)^{n-1}$$

   Dimana deret $\sum_{n=1}^{\infty} (0.9)^{n-1}$ adalah deret geometri dengan suku awal 1 dan $r = 0.9$. Karena $|r| < 1$, maka deret geometri tersebut adalah deret konvergen. Untuk menentukan ke mana deret akan konvergen, perlu dihitung:

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{\infty} (0.9)^{n-1} &= \frac{1}{1-(0.9)} \\ &= 10\end{aligned}$$

   Jadi deret $\sum_{n=1}^{\infty} 6(0.9)^{n-1}$ akan konvergen ke $6\text{x}10 = 60$.

2. Tentukan apakah deret geometri $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{10^n}{(-9)^{n-1}}$ konvergen atau divergen. Jika konvergen, tentukan ke mana dia akan konvergen.
   Jawab:
   Deret tersebut dapat ditulis sebagai:

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{10^n}{(-9)^{n-1}} &= -9\sum_{n=1}^{\infty} \frac{10^n}{(-9)^n} \\ &= -9\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{10}{-9}\right)^n\end{aligned}$$

   Dimana deret $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{10}{-9}\right)^n$ adalah deret geometri dengan suku awal $-\frac{10}{9}$ dan $r = -\frac{10}{9}$. Karena $|r| > 1$, maka deret geometri tersebut adalah divergen.

3. Tentukan apakah deret geometri $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-3)^{n-1}}{4^n}$ konvergen atau divergen. Jika konvergen, tentukan ke mana dia akan konvergen.
   Jawab:
   Deret tersebut dapat ditulis sebagai:

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-3)^{n-1}}{4^n} &= -\frac{1}{3}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-3)^n}{4^n} \\ &= -\frac{1}{3}\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{-3}{4}\right)^n\end{aligned}$$

   Dimana deret $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{-3}{4}\right)^n$ adalah deret geometri dengan suku awal $-\frac{3}{4}$ dan $r = -\frac{3}{4}$. Karena $|r| < 1$, maka deret geometri tersebut adalah deret konvergen. Untuk menentukan ke mana deret akan konvergen, perlu dihitung:

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{-3}{4}\right)^n &= \frac{-\frac{3}{4}}{1-\left(-\frac{3}{4}\right)} \\ &= -\frac{3}{7}\end{aligned}$$

   Jadi deret $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-3)^{n-1}}{4^n}$ akan konvergen ke $\left(-\frac{1}{3}\right)\text{x}\left(-\frac{3}{7}\right) = \frac{1}{7}$.

4. Tentukan apakah deret geometri $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\left(\sqrt{2}\right)^n}$ konvergen atau divergen. Jika konvergen, tentukan ke mana dia akan konvergen.
   Jawab:
   Deret tersebut dapat ditulis sebagai:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\left(\sqrt{2}\right)^n} = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^n$$

Jadi deret tersebut adalah deret geometri dengan suku awal 1 dan $r = \frac{1}{\sqrt{2}}$. Karena $\sqrt{2} > 1$ sehingga $|r| < 1$. Jadi deret $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(\sqrt{2})^n}$ adalah deret konvergen. Untuk menentukan ke mana deret akan konvergen, perlu dihitung:

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\left(\sqrt{2}\right)^n} &= \frac{1}{1-\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)} \\ &= \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}-1}\end{aligned}$$

Jadi deret $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(\sqrt{2})^n}$ akan konvergen ke $\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}-1}$.

5. Tentukan apakah deret geometri $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\pi^n}{3^{n+1}}$ konvergen atau divergen. Jika konvergen, tentukan ke mana dia akan konvergen.

   Jawab:

   Deret tersebut dapat ditulis sebagai:

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\pi^n}{3^{n+1}} &= \frac{1}{3}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\pi^n}{3^n} \\ &= \frac{1}{3}\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{\pi}{3}\right)^n\end{aligned}$$

   Dimana deret $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{\pi}{3}\right)^n$ adalah deret geometri dengan suku awal $\frac{\pi}{3}$ dan $r = \frac{\pi}{3}$. Karena $\pi > 3$, maka $|r| > 1$, sehingga deret $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{\pi}{3}\right)^n$ adalah deret divergen. Jadi deret $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\pi^n}{3^{n+1}}$ adalah deret divergen.

5.3 Deret Harmonik

5.4 Uji Kedivergenan

1. Dengan uji kedivergenan, buktikan bahwa deret $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n}{3n+1}$ adalah deret divergen.

   Jawab:

   Misalkan $a_n = \frac{2n}{3n+1}$, dimana:

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty} a_n &= \lim_{n\to\infty} \frac{2n}{3n+1} \\ &= \lim_{n\to\infty} \frac{2}{3+\frac{1}{n}} \\ &= \frac{2}{3}\end{aligned}$$

   Jadi deret $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n}{3n+1}$ adalah deret divergen.

2. Dengan uji kedivergenan, buktikan bahwa deret $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{\sqrt{n^2+4}}$ adalah deret divergen.
   Jawab:
   Misalkan $a_n = \frac{n}{\sqrt{n^2+4}}$, dimana:

$$\begin{aligned} \lim_{n\to\infty} a_n &= \lim_{n\to\infty} \frac{n}{\sqrt{n^2+4}} \\ &= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{1+\frac{4}{n^2}}} \\ &= 1 \end{aligned}$$

   Jadi deret $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{\sqrt{n^2+4}}$ adalah deret divergen.

3. Dengan uji kedivergenan, buktikan bahwa deret $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n-1}{3n-1}$ adalah deret divergen.
   Jawab:
   Misalkan $a_n = \frac{n-1}{3n-1}$, dimana:

$$\begin{aligned} \lim_{n\to\infty} a_n &= \lim_{n\to\infty} \frac{n-1}{3n-1} \\ &= \lim_{n\to\infty} \frac{1-\frac{1}{n}}{3-\frac{1}{n}} \\ &= \frac{1}{3} \end{aligned}$$

   Jadi deret $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n-1}{3n-1}$ adalah deret divergen.

4. Dengan uji kedivergenan, buktikan bahwa deret $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n(n+2)}{(n+3)^2}$ adalah deret divergen.
   Jawab:
   Misalkan $a_n = \frac{n(n+2)}{(n+3)^2}$, dimana:

$$\begin{aligned} \lim_{n\to\infty} a_n &= \lim_{n\to\infty} \frac{n(n+2)}{(n+3)^2} \\ &= \lim_{n\to\infty} \frac{n^2+2n}{(n+3)^2} \\ &= \lim_{n\to\infty} \frac{1+\frac{2}{n}}{\left(1+\frac{3}{n}\right)^2} \\ &= 1 \end{aligned}$$

   Jadi deret $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n-1}{3n-1}$ adalah deret divergen.

5. Dengan uji kedivergenan, buktikan bahwa deret $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{\pi}{3}\right)^n$ adalah deret divergen.
   Jawab:

Misalkan $a_n = \left(\frac{\pi}{3}\right)^n$, dimana:

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty} a_n &= \lim_{n\to\infty}\left(\frac{\pi}{3}\right)^n \\ &= \infty\end{aligned}$$

Karena $\frac{\pi}{3} > 1$. Jadi deret $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{\pi}{3}\right)^n$ adalah deret divergen.

5.5 Uji Integral

1. Dengan menggunakan uji integral, tentukan apakah deret $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt[5]{n}}$ konvergen atau divergen.
   Jawab:
   Misalkan $a_n = \frac{1}{\sqrt[5]{n}}$. Akan dicari nilai integral dari $\lim_{t\to\infty}\int_1^t a_n dx$, yaitu:

$$\begin{aligned}\lim_{t\to\infty}\int_1^t a_n dx &= \lim_{t\to\infty}\int_1^t \frac{1}{\sqrt[5]{n}}dx \\ &= \frac{5}{4}\lim_{t\to\infty}\left[n^{\frac{4}{5}}\right]_1^t \\ &= \frac{5}{4}\lim_{t\to\infty}\left(t^{\frac{4}{5}}-1\right) \\ &= \infty\end{aligned}$$

   Karena nilai integralnya tidak berhingga, maka deret $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt[5]{n}}$ adalah deret divergen.

2. Dengan menggunakan uji integral, tentukan apakah deret $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^5}$ konvergen atau divergen.
   Jawab:
   Misalkan $a_n = \frac{1}{n^5}$. Akan dicari nilai integral dari $\lim_{t\to\infty}\int_1^t a_n dx$, yaitu:

$$\begin{aligned}\lim_{t\to\infty}\int_1^t a_n dx &= \lim_{t\to\infty}\int_1^t \frac{1}{n^5}dx \\ &= -\frac{1}{4}\lim_{t\to\infty}\left[n^{-4}\right]_1^t \\ &= -\frac{1}{4}\lim_{t\to\infty}\left(t^{-4}-1\right) \\ &= \frac{1}{4}\end{aligned}$$

   Karena nilai integralnya ada, maka deret $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^5}$ adalah deret konvergen.

3. Dengan menggunakan uji integral, tentukan apakah deret $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n+1)^3}$ konvergen atau divergen.
   Jawab:

Misalkan $a_n = \frac{1}{(2n+1)^3}$. Akan dicari nilai integral dari $\lim_{t\to\infty}\int_1^t a_n dx$, yaitu:

$$\begin{aligned}
\lim_{t\to\infty}\int_1^t a_n dx &= \lim_{t\to\infty}\int_1^t \frac{1}{(2n+1)^3}dx \\
&= \frac{1}{2}\lim_{t\to\infty}\int_1^t \frac{1}{(2n+1)^3}d(2n+1) \\
&= -\frac{1}{4}\lim_{t\to\infty}\left[\frac{1}{(2n+1)^2}\right]_1^t \\
&= -\frac{1}{4}\lim_{t\to\infty}\left(\frac{1}{(2t+1)^2}-\frac{1}{9}\right) \\
&= \frac{1}{36}
\end{aligned}$$

Karena nilai integralnya ada, maka deret $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n+1)^3}$ adalah deret konvergen.

4. Dengan menggunakan uji integral, tentukan apakah deret $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n+4}}$ konvergen atau divergen.

   Jawab:

   Misalkan $a_n = \frac{1}{\sqrt{n+4}}$. Akan dicari nilai integral dari $\lim_{t\to\infty}\int_1^t a_n dx$, yaitu:

$$\begin{aligned}
\lim_{t\to\infty}\int_1^t a_n dx &= \lim_{t\to\infty}\int_1^t \frac{1}{\sqrt{n+4}}dx \\
&= \lim_{t\to\infty}\int_1^t \frac{1}{\sqrt{n+4}}d(n+4) \\
&= 2\lim_{t\to\infty}\left[\sqrt{n+4}\right]_1^t \\
&= \frac{5}{4}\lim_{t\to\infty}\left(\sqrt{t+4}-\sqrt{5}\right) \\
&= \infty
\end{aligned}$$

   Karena nilai integralnya tidak berhingga, maka deret $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n+4}}$ adalah deret divergen.

5. Dengan menggunakan uji integral, tentukan apakah deret $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{n^2+1}$ konvergen atau divergen.

   Jawab:

Misalkan $a_n = \frac{1}{\sqrt{n+4}}$. Akan dicari nilai integral dari $\lim_{t\to\infty}\int_1^t a_n dx$, yaitu:

$$\begin{aligned}
\lim_{t\to\infty}\int_1^t a_n dx &= \lim_{t\to\infty}\int_1^t \frac{n}{n^2+1}dx \\
&= \frac{1}{2}\lim_{t\to\infty}\int_1^t \frac{1}{n^2+1}d(n^2+1) \\
&= \frac{1}{2}\lim_{t\to\infty}\left[\ln(n^2+1)\right]_1^t \\
&= \frac{5}{4}\lim_{t\to\infty}\left(\ln(t^2+1)-\ln(2)\right) \\
&= \infty
\end{aligned}$$

Karena nilai integralnya tidak berhingga, maka deret $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{n^2+1}$ adalah deret divergen.

5.6 Uji Perbandingan

1. Dengan menggunakan uji perbandingan, tentukan apakah deret $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{2n^3+1}$ akan konvergen atau divergen.

   Jawab:

   Kita bandingkan dengan deret yang diketahui kekonvergenannya yaitu:

$$\begin{aligned}
\frac{n}{2n^3+1} &< \frac{n}{2n^3} \\
&= \frac{1}{2n^2} \\
&< \frac{1}{n^2}
\end{aligned}$$

   Dimana deret $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ adalah deret konvergen, sehingga deret $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{2n^3+1}$ juga akan konvergen.

2. Dengan menggunakan uji perbandingan, tentukan apakah deret $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^3}{n^4-1}$ akan konvergen atau divergen.

   Jawab:

   Kita bandingkan dengan deret yang diketahui kekonvergenannya yaitu:

$$\begin{aligned}
\frac{n^3}{n^4-1} &> \frac{n^3}{n^4} \\
&= \frac{1}{n}
\end{aligned}$$

   Dimana deret $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ adalah deret divergen, sehingga deret $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^3}{n^4-1}$ juga akan divergen.

3. Dengan menggunakan uji perbandingan, tentukan apakah deret $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+1}{n\sqrt{n}}$ akan konvergen atau divergen.

   Jawab:

   Kita bandingkan dengan deret yang diketahui kekonvergenannya yaitu:

$$\begin{aligned} \frac{n+1}{n\sqrt{n}} &> \frac{n}{n\sqrt{n}} \\ &= \frac{1}{\sqrt{n}} \end{aligned}$$

   Dimana deret $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}$ adalah deret divergen, sehingga deret $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+1}{n\sqrt{n}}$ juga akan divergen.

4. Dengan menggunakan uji perbandingan, tentukan apakah deret $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n-1}{n^2\sqrt{n}}$ akan konvergen atau divergen.

   Jawab:

   Kita bandingkan dengan deret yang diketahui kekonvergenannya yaitu:

$$\begin{aligned} \frac{n-1}{n^2\sqrt{n}} &< \frac{n}{n^2\sqrt{n}} \\ &= \frac{1}{n\sqrt{n}} \\ &< \frac{1}{n^{\frac{3}{2}}} \end{aligned}$$

   Dimana deret $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}$ adalah deret konvergen, sehingga $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n-1}{n^2\sqrt{n}}$ juga akan konvergen.

5. Dengan menggunakan uji perbandingan, tentukan apakah deret $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{9^n}{3+10^n}$ akan konvergen atau divergen.

   Jawab:

   Kita bandingkan dengan deret yang diketahui kekonvergenannya yaitu:

$$\begin{aligned} \frac{9^n}{3+10^n} &< \frac{9^n}{10^n} \\ &= \left(\frac{9}{10}\right)^n \\ &= (0.9)^n \end{aligned}$$

   Karena $0.9 < 1$ sehingga deret $\sum_{n=1}^{\infty}(0.9)^n$ adalah deret konvergen, sehingga $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{9^n}{3+10^n}$ juga akan konvergen.

5.7 Deret Berganti Tanda

1. Tentukan apakah deret berganti tanda berikut $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1}$ akan konvergen atau divergen.
   Jawab:
   Misalkan $a_n = \frac{1}{2n+1}$. Karena a_n adalah barisan monoton turun dan $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{2n+1} = 0$, maka deret $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1}$ adalah deret konvergen.

2. Tentukan apakah deret $\sum_{n\to\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{\ln(n+4)}$ akan konvergen atau divergen.
   Jawab:
   Misalkan $a_n = \frac{1}{\ln(n+4)}$. Karena a_n adalah barisan monoton turun dan $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{\ln(n+4)} = 0$, maka deret $\sum_{n\to\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{\ln(n+4)}$ adalah deret konvergen.

3. Apakah deret $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{3n-1}{2n+1}$ akan konvergen atau divergen?
   Jawab:
   Misalkan $a_n = \frac{3n-1}{2n+1}$. Karena a_n adalah barisan monoton naik dan $\lim_{n\to\infty} \frac{3n-1}{2n+1} = \frac{3}{2}$, maka deret $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{3n-1}{2n+1}$ adalah deret divergen.

4. Apakah deret $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n}{\sqrt{n^3+2}}$ akan konvergen atau divergen?
   Jawab:
   Misalkan $a_n = \frac{n}{\sqrt{n^3+2}}$. Karena a_n adalah barisan monoton turun dan $\lim_{n\to\infty} \frac{n}{\sqrt{n^3+2}} = 0$, maka deret $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n}{\sqrt{n^3+2}}$ adalah deret konvergen.

5. Tentukan apakah deret $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n e^{-n}$ akan konvergen atau divergen.
   Jawab:
   Misalkan $a_n = e^{-n}$. Karena a_n adalah barisan monoton turun dan $\lim_{n\to\infty} e^{-n} = 0$, maka deret $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n e^{-n}$ adalah deret konvergen.

5.8 Konvergen Mutlak

1. Tentukan apakah deret $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin 4n}{4^n}$ konvergen atau divergen.
   Jawab:
   Misalkan $a_n = \frac{\sin 4n}{4^n}$, dimana nilai dari:

$$\begin{aligned} |a_n| &= \left| \frac{\sin 4n}{4^n} \right| \\ &= \frac{|\sin 4n|}{4^n} \\ &\leq \frac{1}{4^n} \end{aligned}$$

Karena deret $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{4^n}$ merupakan deret geometri dengan $r=\frac{1}{4}$, maka deret $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{4^n}$ konvergen yang menyebabkan deret $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin 4n}{4^n}$ juga konvergen.

2. tentukan apakah deret $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{n}{\sqrt{n^3+2}}$ konvergen atau divergen.
   Jawab:
   Misalkan $a_n=(-1)^n\frac{n}{\sqrt{n^3+2}}$, dimana nilai dari:

$$\begin{aligned} |a_n| &= \left|(-1)^n\frac{n}{\sqrt{n^3+2}}\right| \\ &= \frac{n}{\sqrt{n^3+2}} \\ &= \frac{1}{\sqrt{n+\frac{2}{n^2}}} \end{aligned}$$

   Karena $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{n+\frac{2}{n^2}}}=0$ dan a_n adalah barisan monoton turun, maka deret $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{n}{\sqrt{n^3+2}}$ merupakan deret yang konvergen.

3. Tentukan apakah deret $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\ln n}$ konvergen atau divergen.
   Jawab:
   Misalkan $a_n=\frac{(-1)^n}{\ln n}$, dimana nilai dari:

$$\begin{aligned} |a_n| &= \left|\frac{(-1)^n}{\ln n}\right| \\ &= \frac{1}{\ln n} \\ &> \frac{1}{n} \end{aligned}$$

   Karena deret $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n}$ adalah divergen, maka deret $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\ln n}$ juga divergen.

4. Apakah deret $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos\left(\frac{n\pi}{3}\right)}{n!}$ merupakan deret konvergen atau divergen?
   Jawab:
   Misalkan $a_n=\frac{\cos\left(\frac{n\pi}{3}\right)}{n!}$, dimana nilai dari:

$$\begin{aligned} |a_n| &= \left|\frac{\cos\left(\frac{n\pi}{3}\right)}{n!}\right| \\ &= \frac{\left|\cos\left(\frac{n\pi}{3}\right)\right|}{n!} \\ &\leq \frac{1}{n!} \end{aligned}$$

   Dimana nuntuk $n\geq 2$ akan berlaku $\frac{1}{n!}\leq\frac{1}{2^n}$. Karena deret $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{2^n}$ adalah konvergen, maka deret $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos\left(\frac{n\pi}{3}\right)}{n!}$ juga konvergen.

5. Tentukan apakh deret $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \sin^3\left(\frac{n\pi}{10}\right)}{n}$ merupakan deret konvergen atau divergen.
   Jawab:
   Misalkan $a_n = \frac{(-1)^n \sin^3\left(\frac{n\pi}{10}\right)}{n}$, dimana nilai dari:

$$\begin{aligned} |a_n| &= \left| \frac{(-1)^n \sin^3\left(\frac{n\pi}{10}\right)}{n} \right| \\ &= \left| \frac{\sin^3\left(\frac{n\pi}{10}\right)}{n} \right| \\ &\leq \frac{1}{n} \end{aligned}$$

   Karena deret $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ adalah divergen, maka deret $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \sin^3\left(\frac{n\pi}{10}\right)}{n}$ juga divergen.

5.9 Test Rasio

1. Tentukan apakah deret $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-2)^n}{n^2}$ akan konvergen mutlak, konvergen bersyarat atau divergen.
   Jawab:
   Misalkan $a_n = \frac{(-2)^n}{n^2}$. Dengan test rasio akan didapatkan:

$$\begin{aligned} \lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| &= \lim_{n\to\infty} \left| \frac{(-2)^{n+1}}{(n+1)^2} \frac{n^2}{(-2)^n} \right| \\ &= \lim_{n\to\infty} \left| \frac{-2n^2}{(n+1)^2} \right| \\ &= 2 \lim_{n\to\infty} \left(\frac{n^2}{n^2+2n+1} \right) \\ &= 2 \lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{1+\frac{2}{n}+\frac{1}{n^2}} \right) \\ &= 2 \end{aligned}$$

   Jadi deret $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-2)^n}{n^2}$ adalah deret divergen.

2. Apakah deret $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{5^n}$ merupakan deret konvergen mutlak, konvergen bersyarat atau divergen?
   Jawab:

Misalkan $a_n = \frac{n}{5^n}$. Dengan test rasio akan didapatkan:

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| &= \lim_{n\to\infty}\left|\frac{(n+1)}{5^{n+1}}\frac{5^n}{n}\right| \\
&= \lim_{n\to\infty}\left|\frac{(n+1)}{5n}\right| \\
&= \frac{1}{5}\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right) \\
&= \frac{1}{5}
\end{aligned}$$

Jadi deret $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{5^n}$ adalah deret konvergen mutlak.

3. Tentukan apakah deret $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{n}{n^2+4}$ merupakan deret konvergen mutlak, konvergen bersyarat atau divergen.
Jawab:
Misalkan $a_n = (-1)^{n-1}\frac{n}{n^2+4}$. Dengan test rasio akan didapatkan:

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| &= \lim_{n\to\infty}\left|\frac{(-1)^n(n+1)}{(n+1)^2+4}\frac{(n^2+4)}{(-1)^{n-1}n}\right| \\
&= \lim_{n\to\infty}\left(\frac{(n+1)}{n}\frac{(n^2+4)}{(n+1)^2+4}\right) \\
&= \lim_{n\to\infty}\left(\left[1+\frac{1}{n}\right]\left[\frac{1+\frac{4}{n^2}}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^2+\frac{4}{n^2}}\right]\right) \\
&= 1
\end{aligned}$$

Jadi tes rasio tidak dapat menentukan apakah deret $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{5^n}$ konvergen atau divergen. Akan tetapi menggunakan uji deret berganti tanda akan didapatkan bahwa deret tersebut adalah konvergen. Jadi deret $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{5^n}$ adalah konvergen bersyarat.

4. Tentukan apakah deret $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{5n+1}$ merupakan deret konvergen mutlak, konvergen bersyarat atau divergen.
Jawab:
Misalkan $a_n = \frac{(-1)^n}{5n+1}$. Dengan test rasio akan didapatkan:

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| &= \lim_{n\to\infty}\left|\frac{(-1)^{n+1}}{5(n+1)+1}\frac{5n+1}{(-1)^n}\right| \\
&= \lim_{n\to\infty}\left(\frac{5n+1}{5n+6}\right) \\
&= \lim_{n\to\infty}\left(\frac{5+\frac{1}{n}}{5+\frac{6}{n}}\right) \\
&= 1
\end{aligned}$$

Jadi tes rasio tidak dapat menentukan apakah deret $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{5n+1}$ konvergen atau divergen. Akan tetapi menggunakan uji deret berganti tanda akan didapatkan bahwa deret tersebut adalah konvergen. Jadi deret $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{5n+1}$ adalah konvergen bersyarat.

5. Apakah deret $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-3)^n}{(2n+1)!}$ merupakan deret konvergen mutlak, konvergen bersyarat atau divergen?
Jawab:
Misalkan $a_n=\frac{(-3)^n}{(2n+1)!}$. Dengan test rasio akan didapatkan:

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| &= \lim_{n\to\infty}\left|\frac{(-3)^{n+1}}{(2(n+1)+1)!}\frac{(2n+1)!}{(-3)^n}\right|\\ &= \lim_{n\to\infty}\left|\frac{-3(2n+1)!}{(2n+3)!}\right|\\ &= 3\lim_{n\to\infty}\left(\frac{(2n+1)!}{(2n+3)(2n+2)(2n+1)!}\right)\\ &= 3\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{(2n+3)(2n+2)}\right)\\ &= 0\end{aligned}$$

Jadi deret $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-3)^n}{(2n+1)!}$ adalah konvergen mutlak.

5.10 Test Bentuk Akar

1. Tentukan apakah deret $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-2)^n}{n^n}$ konvergen mutlak, konvergen bersyarat atau divergen.
Jawab:
Misalkan $a_n=\frac{(-2)^n}{n^n}$. Gunakan tes dalam bentuk akar:

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|} &= \lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\left|\frac{(-2)^n}{n^n}\right|}\\ &= \lim_{n\to\infty}\frac{2}{n}\\ &= 0\end{aligned}$$

Jadi deret $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-2)^n}{n^n}$ konvergen mutlak.

2. Apakah deret $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n^2+1}{2n^2+1}\right)^n$ merupakan deret konvergen mutlak, konvergen bersyarat atau divergen?
Jawab:

Misalkan $a_n = \left(\frac{n^2+1}{2n^2+1}\right)^n$. Gunakan tes dalam bentuk akar:

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} &= \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\left|\left(\frac{n^2+1}{2n^2+1}\right)^n\right|}\\ &= \lim_{n\to\infty} \frac{n^2+1}{2n^2+1}\\ &= \lim_{n\to\infty} \frac{1+\frac{1}{n^2}}{2+\frac{1}{n^2}}\\ &= \frac{1}{2}\end{aligned}$$

Jadi deret $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n^2+1}{2n^2+1}\right)^n$ konvergen mutlak.

3. Tentukan apakah deret $\sum_{n=2}^{\infty} \left(\frac{-2n}{n+1}\right)^{5n}$ merupakan deret konvergen mutlak, konvergen bersyarat atau divergen.
   Jawab:
   Misalkan $a_n = \left(\frac{-2n}{n+1}\right)^{5n}$. Gunakan tes dalam bentuk akar:

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty} \sqrt[5n]{|a_n|} &= \lim_{n\to\infty} \sqrt[5n]{\left|\left(\frac{-2n}{n+1}\right)^{5n}\right|}\\ &= \lim_{n\to\infty} \frac{2n}{n+1}\\ &= \lim_{n\to\infty} \frac{2}{1+\frac{1}{n}}\\ &= 2\end{aligned}$$

   Jadi deret $\sum_{n=2}^{\infty} \left(\frac{-2n}{n+1}\right)^{5n}$ adalah deret divergen.

4. Apakah deret $\sum_{n=1}^{\infty} \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n^2}$ merupakan deret konvergen mutlak, konvergen bersyarat atau divergen?
   Jawab:
   Misalkan $a_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n^2}$. Gunakan tes dalam bentuk akar:

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} &= \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\left|\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n^2}\right|}\\ &= \lim_{n\to\infty} \left(1+\frac{1}{n}\right)^n\\ &= e\end{aligned}$$

   Jadi deret $\sum_{n=2}^{\infty} \left(\frac{-2n}{n+1}\right)^{5n}$ adalah deret divergen.

5. Tentukan deret $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^n}{3^n}$ akan konvergen mutlak, konvergen bersyarat atau divergen.

   Jawab:

   Misalkan $a_n = \frac{n^n}{3^n}$. Gunakan tes dalam bentuk akar:

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} &= \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\left|\frac{n^n}{3^n}\right|}\\ &= \lim_{n\to\infty} \frac{n}{3}\\ &= \infty\end{aligned}$$

   Jadi deret $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^n}{3^n}$ adalah deret divergen.

5.11 Strategi dalam Menentukan Uji yang Tepat untuk Suatu Deret

5.12 Deret Pangkat

1. Tentukan radius konvergensi dan interval konvergensi dari deret $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n nx^n$.

   Jawab:

   Misalkan $a_n = (-1)^n nx^n$. Gunakan tes rasio:

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| &= \lim_{n\to\infty} \left|\frac{(-1)^{n+1}(n+1)x^{n+1}}{(-1)^n nx^n}\right|\\ &= \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)|x|}{n}\\ &= |x| \lim_{n\to\infty} \left(1+\frac{1}{n}\right)\\ &= |x|\end{aligned}$$

   Karena deret akan konvergen jika $|x| < 1$, maka radius konvergensi adalah 1. Selanjutnya akan diuji untuk batas dari $x = 1$ dan $x = -1$ untuk mencari selang konvergensi. Untuk $x = 1$, deret akan menjadi $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n n$ yang merupakan deret berganti tanda divergen. Selanjutnya untuk $x = -1$, maka deret akan menjadi $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1} n$ yang juga deret berganti tanda divergen. Jadi selang kekonvergenan adalah $-1 < x < 1$.

2. Carilah radius kekonvergenan dan selang kekonvergenan dari deret $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n x^n}{\sqrt[3]{n}}$.

   Jawab:

Misalkan $a_n = \frac{(-1)^n x^n}{\sqrt[3]{n}}$. Gunakan tes rasio akan didapatkan:

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| &= \lim_{n\to\infty}\left|\frac{(-1)^{n+1}x^{n+1}}{\sqrt[3]{n+1}}\frac{\sqrt[3]{n}}{(-1)^n x^n}\right| \\
&= \lim_{n\to\infty}\left|\frac{x\sqrt[3]{n}}{\sqrt[3]{n+1}}\right| \\
&= |x|\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{\sqrt[3]{1+\frac{1}{n}}}\right) \\
&= |x|
\end{aligned}$$

Karena deret akan konvergen jika $|x| < 1$, maka radius konvergensi adalah 1. Selanjutnya akan diuji untuk batas dari $x = 1$ dan $x = -1$ untuk mencari selang konvergensi. Untuk $x = 1$, deret akan menjadi $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{\sqrt[3]{n}}$ yang merupakan deret berganti tanda konvergen. Selanjutnya untuk $x = -1$, maka deret akan menjadi $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt[3]{n}}$ yang juga deret konvergen. Jadi selang kekonvergenan adalah $-1 \leq x \leq 1$.

3. Tentukan radius konvergensi dan selang konvergensi dari deret $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{2n-1}$.

   Jawab:

   Misalkan $a_n = \frac{x^n}{2n-1}$. Gunakan tes rasio akan didapatkan:

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| &= \lim_{n\to\infty}\left|\frac{x^{n+1}}{2(n+1)-1}\frac{2n-1}{x^n}\right| \\
&= \lim_{n\to\infty}\left|\frac{x(2n-1)}{2n+1}\right| \\
&= |x|\lim_{n\to\infty}\left(\frac{2-\frac{1}{n}}{2+\frac{1}{n}}\right) \\
&= |x|
\end{aligned}$$

   Karena deret akan konvergen jika $|x| < 1$, maka radius konvergensi adalah 1. Selanjutnya akan diuji untuk batas dari $x = 1$ dan $x = -1$ untuk mencari selang konvergensi. Untuk $x = 1$, deret akan menjadi $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2n-1}$ yang merupakan deret divergen dengan uji integral. Selanjutnya untuk $x = -1$, maka deret akan menjadi $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n-1}$ yang konvergen dengan uji deret berganti tanda. Jadi selang kekonvergenan adalah $-1 \leq x < 1$.

4. Carilah radius kekonvergenan dan selang kekonvergenan dari deret $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n x^n}{n^2}$.

   Jawab:

Misalkan $a_n = \frac{(-1)^n x^n}{n^2}$. Gunakan tes rasio akan didapatkan:

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| &= \lim_{n\to\infty}\left|\frac{(-1)^{n+1}x^{n+1}}{(n+1)^2}\frac{n^2}{(-1)^n x^n}\right| \\
&= \lim_{n\to\infty}\left|\frac{xn^2}{(n+1)^2}\right| \\
&= |x|\lim_{n\to\infty}\frac{n^2}{n^2+2n+1} \\
&= |x|\lim_{n\to\infty}\frac{1}{1+2\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}} \\
&= |x|
\end{aligned}$$

Karena deret akan konvergen jika $|x| < 1$, maka radius konvergensi adalah 1. Selanjutnya akan diuji untuk batas dari $x = 1$ dan $x = -1$ untuk mencari selang konvergensi. Untuk $x = 1$, deret akan menjadi $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2}$ yang merupakan deret konvergenl. Selanjutnya untuk $x = -1$, maka deret akan menjadi $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ yang konvergen. Jadi selang kekonvergenan adalah $-1 \leq x \leq 1$.

5. Hitunglah radius kekonvergenan dan selang kekonvergenan dari deret $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n!}$.
   Jawab:
   Misalkan $a_n = \frac{x^n}{n!}$. Gunakan tes rasio didapatkan:

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| &= \lim_{n\to\infty}\left|\frac{x^{n+1}}{(n+1)!}\frac{n!}{x^n}\right| \\
&= \lim_{n\to\infty}\left|\frac{x}{n+1}\right| \\
&= |x|\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n+1} \\
&= 0
\end{aligned}$$

   Jadi deret akan konvergen untuk $x \in R$. Oleh karenanya selang konvergensinya adalah ∞ dan radius konvergensinya adalah (∞, ∞).

5.13 Hampiran suatu Fungsi dalam Deret Pangkat

1. Hampirilah $f(x) = \frac{2}{3-x}$ dengan menggunakan deret pangkat.
   Jawab:
   Diketahui hampiran deret pangkat untuk:

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + x^5 + \cdots$$

Sehingga:

$$\begin{aligned}
\frac{2}{3-x} &= \frac{2}{3}\left(\frac{1}{1-\frac{x}{3}}\right)\\
&= \frac{2}{3}\left(1+\left(\frac{x}{3}\right)+\left(\frac{x}{3}\right)^2+\left(\frac{x}{3}\right)^3+\left(\frac{x}{3}\right)^4+\left(\frac{x}{3}\right)^5+\cdots\right)\\
&= \frac{2}{3}+\frac{2x}{3^2}+\frac{2x^2}{3^3}+\frac{2x^3}{3^4}+\cdots\\
&= 2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{n-1}}{3^n}
\end{aligned}$$

2. Tentukan hampiran deret pangkat untuk $f(x)=\frac{5}{1-4x^2}$.
   Jawab:
   Diketahui hampiran deret pangkat untuk:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{1-x} &= 1+x+x^2+x^3+x^4+x^5+\cdots\\
\frac{1}{1-x^2} &= 1+x^2+x^4+x^6+x^8+x^{10}+\cdots
\end{aligned}$$

   Sehingga:

$$\begin{aligned}
\frac{5}{1-4x} &= 5\left(\frac{1}{1-(2x)^2}\right)\\
&= 5(1+(2x)^2+(2x)^4+(2x)^6+(2x)^8+(2x)^{10}+\cdots)\\
&= 5+20x^2+80x^4+320x^6+\cdots\\
&= 5\sum_{n=1}^{\infty}(2x)^{2n-2}
\end{aligned}$$

3. Tentukan hampiran deret pangkat pada $f(x)=\frac{1+x}{1-x}$.
   Jawab:
   Diketahui hampiran deret pangkat untuk:

$$\frac{1}{1-x} = 1+x+x^2+x^3+x^4+x^5+\cdots$$

   Dimana:

$$\begin{aligned}
\frac{1+x}{1-x} &= \frac{1}{1-x}+\frac{x}{1-x}\\
&= (1+x+x^2+x^3+x^4+\cdots)+x(1+x+x^2+x^3+x^4+\cdots)\\
&= 1+2x+2x^2+2x^3+2x^4+2x^5+\cdots\\
&= 1+2\sum_{n=1}^{\infty}x^n
\end{aligned}$$

4. Tentukan hampiran deret pangkat untuk $f(x) = \frac{x^2}{a^3 - x^3}$.
   Jawab:
   Diketahui hampiran deret pangkat untuk:

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + x^5 + \cdots$$

   Dimana:

$$\begin{aligned}
\frac{x^2}{a^3 - x^3} &= \frac{x^2}{a^3}\left(\frac{1}{1-\left(\frac{x}{a}\right)^3}\right) \\
&= \frac{x^2}{a^3}\left(1 + \left(\frac{x}{a}\right)^3 + \left[\left(\frac{x}{a}\right)^3\right]^2 + \left[\left(\frac{x}{a}\right)^3\right]^3 + \left[\left(\frac{x}{a}\right)^3\right]^4 + \cdots\right) \\
&= \frac{x^2}{a^3}\left(1 + \frac{x^3}{a^3} + \frac{x^6}{a^6} + \frac{x^9}{a^9}\right) + \cdots \\
&= \frac{x^2}{a^3} + \frac{x^5}{a^6} + \frac{x^8}{a^9} + \frac{x^{11}}{a^{12}} + \cdots \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{3n-1}}{a^{3n}}
\end{aligned}$$

5. Tentukan hampiran deret pangkat untuk $\frac{3}{x^2 - x - 2}$.
   Jawab:
   Pertama kita jabarkan dahulu persamaannya menjadi:

$$\begin{aligned}
\frac{3}{x^2 - x - 2} &= \frac{3}{(x-2)(x+1)} \\
&= \frac{A}{x-2} + \frac{B}{x+1} \\
&= \frac{A(x+1) + B(x-2)}{(x-2)(x+1)} \\
&= \frac{(A+B)x + (A-2B)}{(x-2)(x+1)}
\end{aligned}$$

   Dengan memilih $A = 1$ dan $B = -1$ didapatkan:

$$\frac{3}{x^2 - x - 2} = \frac{1}{x-2} - \frac{1}{x+1}$$

Kita kerjakan satu-satu. Pertama kita cari hampiran deret pangkat untuk $\frac{1}{x-2}$:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{x-2} &= -\frac{1}{2}\left(\frac{1}{1-\frac{x}{2}}\right) \\
&= -\frac{1}{2}\left(1+\left(\frac{x}{2}\right)+\left(\frac{x}{2}\right)^2+\left(\frac{x}{2}\right)^3+\left(\frac{x}{2}\right)^4+\left(\frac{x}{2}\right)^5+\cdots\right)
\end{aligned}$$

Sedangkan hampiran deret pangkat untuk $\frac{1}{x+1}$ adalah:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{x+1} &= \frac{1}{1-(-x)} \\
&= 1+(-x)+(-x)^2+(-x)^3+(-x)^4+(-x)^5+\cdots \\
&= 1-x+x^2-x^3+x^4-x^5+\cdots
\end{aligned}$$

Jika digabungkan keduanya akan didapatkan:

$$\begin{aligned}
\frac{3}{x^2-x-2} &= \frac{1}{x-2}-\frac{1}{x+1} \\
&= -\frac{1}{2}\left(1+\left(\frac{x}{2}\right)+\left(\frac{x}{2}\right)^2+\left(\frac{x}{2}\right)^3+\left(\frac{x}{2}\right)^4+\left(\frac{x}{2}\right)^5+\cdots\right) \\
&- \left(1-x+x^2-x^3+x^4-x^5+\cdots\right) \\
&= -\frac{3}{2}+\frac{3}{4}x-\frac{9}{8}x^2+\cdots
\end{aligned}$$

5.14 Turunan dan Integral Deret Pangkat

1. Gunakan hasil dari $\int \frac{1}{1+x}dx$ untuk menghampiri fungsi $f(x) = \ln(1+x)$ dengan deret pangkat.

   Jawab:

   Diketahui deret pangkat:

$$\frac{1}{1-x} = 1+x+x^2+x^3+x^4+x^5+\cdots$$

   Sehingga didapatkan:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{1+x} &= \frac{1}{1-(-x)} \\
&= 1+(-x)+(-x)^2+(-x)^3+(-x)^4+(-x)^5+\cdots \\
&= 1-x+x^2-x^3+x^4-x^5+\cdots
\end{aligned}$$

Selanjutnya kita integralkan untuk mendapatkan:

$$\begin{aligned}
\int \frac{1}{1+x}dx &= \int (1-x+x^2-x^3+x^4-x^5+\cdots)dx \\
\int \frac{1}{1+x}d(1+x) &= x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+\frac{x^5}{5}-\frac{x^6}{6}+\cdots \\
\ln(1+x) &= x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+\frac{x^5}{5}-\frac{x^6}{6}+\cdots \\
&= \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{x^n}{n}
\end{aligned}$$

2. Gunakan hasil dari $\int \frac{1}{1+x^2}dx$ untuk menghampiri fungsi $f(x)=\tan^{-1}x$ dengan deret pangkat.

   Jawab:

   Diketahui hampiran deret pangkat untuk $\frac{1}{1+x}$ yaitu

$$\frac{1}{1+x}=1-x+x^2-x^3+x^4-x^5+\cdots$$

   Sehingga didapatkan:

$$\frac{1}{1+x^2}=1-x^2+x^4-x^6+x^8-x^{10}+\cdots$$

   Selanjutnya diintegralkan kedua ruas:

$$\begin{aligned}
\int \frac{1}{1+x^2}dx &= \int (1-x^2+x^4-x^6+x^8-x^{10}+\cdots)dx \\
\tan^{-1}x &= x-\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}-\frac{x^7}{7}+\cdots \\
&= \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)}
\end{aligned}$$

3. Dengan menggunakan deret pangkat, hampirilah nilai integral berikut dengan deret pangkat:

$$\int \frac{1}{1+x^{10}}dx$$

   Jawab:

   Diketahui hampiran deret pangkat untuk $\frac{1}{1+x}$ yaitu

$$\frac{1}{1+x}=1-x+x^2-x^3+x^4-x^5+\cdots$$

Sehingga didapatkan:

$$\frac{1}{1+x^{10}} = 1 - x^{10} + x^{20} - x^{30} + x^{40} - x^{50} + \cdots$$

Sehingga nilai integralnya:

$$\begin{aligned}\int \frac{1}{1+x^{10}}dx &= \int (1 - x^{10} + x^{20} - x^{30} + x^{40} - x^{50} + \cdots)dx \\ &= C + x - \frac{x^{11}}{11} + \frac{x^{21}}{21} - \frac{x^{31}}{31} + \frac{x^{41}}{41} + \cdots\end{aligned}$$

4. Tentukan hasil dari integral berikut berupa deret pangkat.

$$\int \frac{\tan^{-1}}{x}dx$$

Jawab:
Kita ketahui deret Maclaurin dari $\tan^{-1} x$ adalah

$$\tan^{-1} x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \cdots$$

Sehingga

$$\frac{\tan^{-1}}{x} = 1 - \frac{x^2}{3} + \frac{x^4}{5} - \frac{x^6}{7} + \cdots$$

Integralkan kedua ruas untuk mendapatkan:

$$\begin{aligned}\int \frac{\tan^{-1}}{x}dx &= \int \left(1 - \frac{x^2}{3} + \frac{x^4}{5} - \frac{x^6}{7} + \cdots\right) \\ &= C + x - \frac{x^3}{3^2} + \frac{x^5}{5^2} - \frac{x^7}{7^2} + \cdots\end{aligned}$$

5. Tentukan hasil dari integral berikut berupa deret pangkat.

$$\int x^2 \ln(1+x)dx$$

Jawab:
Deret Maclaurin dari $\ln(1+x)$ adalah

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^6}{6} + \cdots$$

Sehingga

$$\begin{aligned} x^2\ln(1+x) &= x^2\left(x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+\frac{x^5}{5}-\frac{x^6}{6}+\cdots\right) \\ &= x^3-\frac{x^4}{2}+\frac{x^5}{3}-\frac{x^6}{4}+\frac{x^7}{5}-\frac{x^8}{6}+\cdots \end{aligned}$$

Integralkan kedua ruas:

$$\begin{aligned} \int x^2\ln(1+x)dx &= \int\left(x^3-\frac{x^4}{2}+\frac{x^5}{3}-\frac{x^6}{4}+\frac{x^7}{5}-\frac{x^8}{6}+\cdots\right)dx \\ &= \frac{x^4}{4}-\frac{x^5}{10}+\frac{x^6}{18}-\frac{x^7}{28}+\cdots \end{aligned}$$

6

Jawaban Soal Bab III

6.1 Deret Maclaurin dan Deret Taylor

1. Carilah hampiran Maclaurin untuk $f(x) = \sin x$.
   Jawab:
   Hampiran Maclaurin untuk $f(x) = \sin x$ akan memenuhi:

$$f(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f^{(2)}(0)}{2!}x^2 + \frac{f^{(3)}(0)}{3!}x^3 + \frac{f^{(4)}(0)}{4!}x^4 + \cdots$$

   Mencari turunan pertama, ke dua, ke tiga, ke empat dan seterusnya dari $f(x)$:

$$\begin{aligned} f(x) &= \sin x \\ f'(x) &= \cos x \\ f^{(2)}(x) &= -\sin x \\ f^{(3)}(x) &= -\cos x \\ f^{(4)}(x) &= \sin x \\ f^{(5)}(x) &= \cos x \end{aligned}$$

Evaluasi hasilnya di $x = 0$:

$$
\begin{aligned}
f(0) &= 0 \\
f'(0) &= 1 \\
f^{(2)}(0) &= 0 \\
f^{(3)}(0) &= -1 \\
f^{(4)}(0) &= 0 \\
f^{(5)}(0) &= 1
\end{aligned}
$$

Sehingga hampiran Maclaurin untuk $f(x) = \sin x$ adalah:

$$
\begin{aligned}
\sin x &= f(0) + f'(0)x + \frac{f^{(2)}(0)}{2!}x^2 + \frac{f^{(3)}(0)}{x^3} + \frac{f^{(4)}(0)}{x^4} + \cdots \\
&= (0) + (1)x + \frac{(0)}{2!}x^2 + \frac{(-1)}{3!}x^3 + \frac{(0)}{4!}x^4 + \cdots \\
&= x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \cdots
\end{aligned}
$$

2. Carilah hampiran Maclaurin untuk $f(x) = \cos x$.

   Jawab:

   Cara paling mudah adalah dengan menurunkan hampiran Maclaurin dari $\sin x$. Karena $\cos x = \frac{d}{dx} sinx$.

$$
\begin{aligned}
\cos x &= \frac{d}{dx} sinx \\
&= \frac{d}{dx}\left(x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \cdots\right) \\
&= 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \cdots
\end{aligned}
$$

   Atau bisa menggunakan deret Taylor yang dievaluasi untuk $a = 0$, yaitu:

$$
f(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f^{(2)}(0)}{2!}x^2 + \frac{f^{(3)}(0)}{3!}x^3 + \frac{f^{(4)}(0)}{4!}x^4 + \cdots
$$

Mencari turunan pertama, ke dua, ke tiga, ke empat dan seterusnya dari $f(x)$:

$$\begin{aligned}
f(x) &= \cos x \\
f'(x) &= -\sin x \\
f^{(2)}(x) &= -\cos x \\
f^{(3)}(x) &= \sin x \\
f^{(4)}(x) &= \cos x \\
f^{(5)}(x) &= -\sin x \\
f^{(6)}(x) &= -\cos x
\end{aligned}$$

Evaluasi hasilnya di $x = 0$:

$$\begin{aligned}
f(0) &= 1 \\
f'(0) &= 0 \\
f^{(2)}(0) &= -1 \\
f^{(3)}(0) &= 0 \\
f^{(4)}(0) &= 1 \\
f^{(5)}(0) &= 0 \\
f^{(6)}(0) &= -1
\end{aligned}$$

Sehingga hampiran Maclaurin untuk $f(x) = \sin x$ adalah:

$$\begin{aligned}
\sin x &= f(0) + f'(0)x + \frac{f^{(2)}(0)}{2!}x^2 + \frac{f^{(3)}(0)}{x^3} + \frac{f^{(4)}(0)}{x^4} + \cdots \\
&= (1) + (0)x + \frac{(-1)}{2!}x^2 + \frac{(0)}{3!}x^3 + \frac{(1)}{4!}x^4 + \cdots \\
&= 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \cdots
\end{aligned}$$

3. Carilah hampiran Maclaurin dari $f(x) = x^2 \sin x$.
   Jawab:
   Diketahui bahwa hampiran Maclaurin untuk $\sin x$ adalah

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \cdots$$

Sehingga deret Maclaurin $f(x) = x^2 \sin x$ adalah perkalian hampiran Maclaurin $\sin x$

dengan x^2.

$$\begin{aligned} f(x) &= x^2 \sin x \\ &= x^2\left(x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \cdots\right) \\ &= x^3 - \frac{x^5}{3!} + \frac{x^7}{5!} - \frac{x^9}{7!} + \cdots \end{aligned}$$

4. Tentukan nilai dari deret berikut:

$$\frac{1}{(1)(3)} - \frac{1}{(2)(3^2)} + \frac{1}{(3)(3^3)} - \frac{1}{(4)(3^4)} + \frac{1}{(5)(3^5)} - \frac{1}{(6)(3^6)} + \cdots$$

Jawab:
Deret tersebut akan berbentuk

$$\begin{aligned} \frac{1}{(1)(3)} &- \frac{1}{(2)(3^2)} + \frac{1}{(3)(3^3)} - \frac{1}{(4)(3^4)} + \frac{1}{(5)(3^5)} - \frac{1}{(6)(3^6)} + \cdots \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{(n)(3^n)} \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{\left(\frac{1}{3}\right)^n}{n} \end{aligned}$$

Merupakan hampiran Maclaurin dari $f(x) = \ln(1+x)$ dengan $x = \frac{1}{3}$. Sehingga

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{\left(\frac{1}{3}\right)^n}{n} &= \ln(1 + \frac{1}{3}) \\ &= \ln\left(\frac{4}{3}\right) \end{aligned}$$

5. Tentukan hampiran Maclaurin dari $f(x) = \tan x$.
Jawab:
Tentunya dapat diturunkan melalui deret Taylor yang dievaluasi pada $a = 0$. Akan tetapi cara ini lumayan ribet karena musti mencari turunan dari fungsi $\tan x$. Untuk melatih kemampuan mencari turunan Trigonometri, para mahasiswa diharapkan untuk mencoba cara ini. Akan tetapi untuk saat ini akan digunakan cara lain yaitu dengan menggunakan persamaan $\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$. Dimana hampiran Maclaurin dari

$\sin x$ dan $\cos x$ sudah kita ketahui.

$$\begin{aligned}
\tan x &= \frac{\sin x}{\cos x} \\
&= \frac{\left(x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \cdots\right)}{\left(1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \cdots\right)} \\
&= x + \frac{1}{3}x^3 + \frac{2}{15}x^5 + \cdots
\end{aligned}$$

Hasil pembagian yang terakhir hanya merupakan membagi biasa antara pembilang dan penyebut. Caranya sama dengan membagi bilangan, cuman disini kita menggunakan polinomial.

6.2 Aplikasi Hampiran Deret Pangkat

1. Gunakan hampiran deret pangkat untuk menghitung

$$\lim_{x \to 0} \frac{\tan x - x}{x^3}$$

Jawab:
Hampiran deret pangkat untuk $\tan x$ adalah

$$\tan x = x + \frac{1}{3}x^3 + \frac{2}{15}x^5 + \cdots$$

Sehingga

$$\begin{aligned}
\lim_{x \to 0} \frac{\tan x - x}{x^3} &= \lim_{x \to 0} \frac{\left(x + \frac{1}{3}x^3 + \frac{2}{15}x^5 + \cdots\right) - x}{x^3} \\
&= \lim_{x \to 0} \frac{\left(\frac{1}{3}x^3 + \frac{2}{15}x^5 + \cdots\right)}{x^3} \\
&= \lim_{x \to 0} \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{15}x^2 + \cdots\right) \\
&= \frac{1}{3}
\end{aligned}$$

2. Gunakan hampiran deret pangkat untuk menghitung

$$\lim_{x \to 0} \frac{x - \ln(1 + x)}{x^2}$$

Jawab:

Hampiran deret pangkat untuk $\ln(1+x)x$ adalah

$$\ln(1+x) = x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 + \cdots$$

Sehingga

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 0} \frac{x - \ln(1+x)}{x^2} &= \lim_{x\to 0} \frac{x - \left(x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 + \cdots\right)}{x^2} \\
&= \lim_{x\to 0} \frac{\left(\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{3}x^3 + \cdots\right)}{x^2} \\
&= \lim_{x\to 0} \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}x + \cdots\right) \\
&= \frac{1}{2}
\end{aligned}$$

3. Gunakan hampiran deret pangkat untuk menghitung

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x - x + \frac{1}{6}x^3}{x^5}$$

Jawab:
Hampiran deret pangkat untuk $\sin x$ adalah

$$\sin x = x - \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{5!}x^5 - \frac{1}{7!}x^7 + \cdots$$

Sehingga

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 0} \frac{\sin x - x + \frac{1}{6}x^3}{x^5} &= \lim_{x\to 0} \frac{\left(x - \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{5!}x^5 - \frac{1}{7!}x^7 + \cdots\right) - x + \frac{1}{6}x^3}{x^5} \\
&= \lim_{x\to 0} \frac{\left(\frac{1}{5!}x^5 - \frac{1}{7!}x^7 + \cdots\right)}{x^5} \\
&= \lim_{x\to 0} \left(\frac{1}{5!} - \frac{1}{7!}x^2 + \cdots\right) \\
&= \frac{1}{120}
\end{aligned}$$

4. Gunakan hampiran deret pangkat untuk menghitung

$$\lim_{x\to 0} \frac{1 - \cos x}{1 + x - e^x}$$

Jawab:

Hampiran deret pangkat untuk $\cos x$ dan e^x adalah

$$\begin{aligned}\cos x &= 1-\frac{1}{2!}x^2+\frac{1}{4!}x^4-\frac{1}{6!}x^6+\cdots \\ e^x &= 1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\frac{x^4}{4!}+\cdots\end{aligned}$$

Sehingga

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{1+x-e^x} &= \lim_{x\to 0}\frac{1-\left(1-\frac{1}{2!}x^2+\frac{1}{4!}x^4-\frac{1}{6!}x^6+\cdots\right)}{1+x-\left(1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\frac{x^4}{4!}+\cdots\right)} \\ &= \lim_{x\to 0}\frac{\left(\frac{1}{2!}x^2-\frac{1}{4!}x^4+\frac{1}{6!}x^6+\cdots\right)}{\left(-\frac{x^2}{2!}-\frac{x^3}{3!}-\frac{x^4}{4!}+\cdots\right)} \\ &= \lim_{x\to 0}\frac{x^2\left(\frac{1}{2!}-\frac{1}{4!}x^2+\frac{1}{6!}x^4+\cdots\right)}{x^2\left(-\frac{1}{2!}-\frac{x}{3!}-\frac{x^2}{4!}+\cdots\right)} \\ &= \lim_{x\to 0}\frac{\left(\frac{1}{2!}-\frac{1}{4!}x^2+\frac{1}{6!}x^4+\cdots\right)}{\left(-\frac{1}{2!}-\frac{x}{3!}-\frac{x^2}{4!}+\cdots\right)} \\ &= -1\end{aligned}$$

5. Dengan menggunakan deret pangkat, tentukan solusi dari persamaan diferensial $\frac{dy}{dx}+2xy=0$.

   Jawab:

   Misalkan solusi dari persamaan diferensial tersebut adalah merupakan deret pangkat:

$$y=b_0+b_1x+b_2x^2+b_3x^3+b_4x^4+b_5x^5+b_6x^6+\cdots$$

   Turunkan y terhadap x akan didapat

$$\frac{dy}{dx}=b_1+2b_2x+3b_3x^2+4b_4x^3+\cdots$$

   Substitusi hasilnya ke dalam persamaan diferensial:

$$\begin{aligned}\frac{dy}{dx}+2xy &= 0 \\ \left(b_1+2b_2x+3b_3x^2+4b_4x^3+\cdots\right)+2x\left(b_0+b_1x+b_2x^2+b_3x^3+\cdots\right) &= 0 \\ b_1+(2b_2+2b_0)x+(3b_3+2b_1)x^2+(4b_4+2b_2)x^3+(5b_5+2b_3)x^4+\cdots &= 0\end{aligned}$$

Semua konstanta harus sama dengan nol:

$$\begin{aligned} b_1 &= 0 \\ 2b_2 + 2b_0 &= 0 \\ 3b_3 + 2b_1 &= 0 \\ 4b_4 + 2b_2 &= 0 \\ 5b_5 + 2b_3 &= 0 \end{aligned}$$

Sehingga semua konstantanya akan bernilai

$$\begin{aligned} b_1 &= 0 \\ b_2 &= -b_0 \\ b_3 &= -\frac{2}{3}b_1 = 0 \\ b_4 &= -\frac{1}{2}b_2 = \frac{1}{2}b_0 \\ b_5 &= -\frac{2}{5}b_3 = 0 \\ b_6 &= -\frac{1}{3}b_4 = -\frac{1}{3!}b_0 \end{aligned}$$

Jadi solusi dari persamaan diferensial $\frac{dy}{dx} + 2xy = 0$ adalah

$$\begin{aligned} y &= b_0 + b_1x + b_2x^2 + b_3x^3 + b_4x^4 + b_5x^5 + b_6x^6 + \cdots \\ &= b_0 + (0)x - b_0x^2 + (0)x^3 + \frac{1}{2}b_0x^4 + (0)x^5 - \frac{1}{3!}b_0x^6 + \cdots \\ &= b_0(1 - x^2 + \frac{1}{2}x^4 - \frac{1}{3!}x^6 + \cdots) \end{aligned}$$

6. Dengan menggunakan hampiran deret pangkat, carilah solusi dari persamaan diferensial $x\frac{dy}{dx} - 3y = c$, dimana c adalah konstanta sembarang.
   Jawab:
   Misalkan solusi dari persamaan diferensial tersebut adalah merupakan deret pangkat:

   $$y = b_0 + b_1x + b_2x^2 + b_3x^3 + b_4x^4 + b_5x^5 + b_6x^6 + \cdots$$

   Turunkan y terhadap x akan didapat

   $$\frac{dy}{dx} = b_1 + 2b_2x + 3b_3x^2 + 4b_4x^3 + \cdots$$

Substitusi hasilnya ke dalam persamaan diferensial:

$$
\begin{aligned}
x\frac{dy}{dx} - 3y &= c \\
x\left(b_1 + 2b_2x + 3b_3x^2 + 4b_4x^3 + \cdots\right) - 3\left(b_0 + b_1x + b_2x^2 + b_3x^3 + \cdots\right) &= c \\
-3b_0 - 2b_1x - b_2x^2 + (0)x^3 + b_4x^4 + \cdots &= c
\end{aligned}
$$

Untuk menentukan nilai konstanta, harus dipenuhi:

$$
\begin{aligned}
-3b_0 &= c \\
-2b_1 &= 0 \\
-b_2 &= 0 \\
b_3 &= k \\
b_4 &= 0
\end{aligned}
$$

Dengan k adalah sembarang konstanta. Sehingga semua konstantanya akan bernilai

$$
\begin{aligned}
b_0 &= -\frac{1}{3}c \\
b_1 &= 0 \\
b_2 &= 0 \\
b_3 &= k \\
b_4 &= 0
\end{aligned}
$$

Jadi solusi dari persamaan diferensial $x\frac{dy}{dx} - 3y = c$ adalah

$$
\begin{aligned}
y &= b_0 + b_1x + b_2x^2 + b_3x^3 + b_4x^4 + b_5x^5 + b_6x^6 + \cdots \\
&= -\frac{1}{3}c + kx^3 \cdots
\end{aligned}
$$

6.3 Jawaban UTS Tipe 1

1. Diketahui untuk n adalah bilangan asli, buktikan bahwa barisan a_n berikut adalah barisan tidak naik dan terbatas di bawah sehingga barisan a_n adalah barisan yang konvergen.

$$a_n = \frac{1}{(n+1)!}$$

Jawab:
Akan dibuktikan menggunakan induksi matematika.
Untuk $n = 1$, maka:

$$\begin{aligned} a_1 &= \frac{1}{(1+1)!} = \frac{1}{2} \\ a_2 &= \frac{1}{(2+1)!} = \frac{1}{6} \end{aligned}$$

Jadi terbukti $a_2 \leq a_1$. Misalkan benar untuk $n = k$, berarti benar bahwa:

$$a_k \geq a_{k+1}$$

selanjutnya akan dibuktikan benar untuk $n = k+1$, yaitu:

$$a_{k+1} \geq a_{k+2}$$

Kita ketahui yang bernilai benar adalah:

$$\begin{aligned} a_k &\geq a_{k+1} \\ \frac{1}{(k+1)!} &\geq \frac{1}{(k+2)!} \\ \frac{1}{(k+1)!}\frac{(k+2)}{(k+2)} &\geq \frac{1}{(k+2)!} \\ \frac{1}{(k+1)!}\frac{1}{(k+2)} &\geq \frac{1}{(k+2)!}\frac{1}{(k+2)} \geq \frac{1}{(k+2)!}\frac{1}{(k+3)} \\ \frac{1}{(k+2)!} &\geq \frac{1}{(k+3)!} \\ a_{k+1} &\geq a_{k+2} \end{aligned}$$

Jadi terbukti benar untuk $n = k$ sehingga terbukti bahwa barisan a_n adalah barisan monoton tak naik. Selanjutnya karena n adalah bilangan asli, maka unsur-unsur dari barisan a_n adalah bilangan positif sehingga a_n akan terbatas di bawah oleh bilangan negatif, misalkan bilangan tersebut adalah -1. Jadi barisan a_n terbatas di bawah oleh -1. Karena a_n adalah barisan monoton tak naik dan terbatas di bawah, maka barisan a_n merupakan barisan konvergen.

2. Buktikan bahwa barisan berikut adalah barisan konvergen:

$$b_n = \frac{n^{1000}}{e^{2n}}$$

Jawab:

Dari ekspansi Maclaurin untuk e^x didapatkan bahwa:

$$e^x = 1 + x + \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{4!}x^4 + \cdots$$

Sehingga ekspansi Maclaurin untuk e^{2n} adalah:

$$e^{2n} = 1 + (2n) + \frac{1}{2!}(2n)^2 + \frac{1}{3!}(2n)^3 + \frac{1}{4!}(2n)^4 + \cdots$$

Cari nilai limit dari b_n, yaitu:

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} b_n &= \lim_{n\to\infty} \frac{n^{1000}}{e^{2n}} \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{n^{1000}}{1 + (2n) + \frac{1}{2!}(2n)^2 + \frac{1}{3!}(2n)^3 + \frac{1}{4!}(2n)^4 + \cdots} \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{n^{1000}}{1 + (2n) + \frac{1}{2!}(2n)^2 + \cdots + \frac{1}{1000!}2^{1000}x^1000 + \cdots} \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\frac{1}{n^{1000}} + \frac{2}{n^{999}} + \cdots + \frac{1}{1000!}2^{1000} + \frac{1}{1001!}2^{1001}n + \cdots} \\
&= 0
\end{aligned}$$

Karena $\lim_{n\to\infty} b_n = 0$ maka b_n adalah barisan konvergen.

3. Buktikan bahwa barisan berikut adalah konvergen dengan mencari nilai limitnya:

$$c_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$$

Jawab:

Mencari nilai limitnya:

$$\lim_{n\to\infty} c_n = \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$$

Misalkan $b = \frac{1}{n}$, maka:

$$\lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = \lim_{b\to 0^+} (1 + b)^{\frac{1}{b}}$$

Misalkan $d = (1+b)^{\frac{1}{b}}$, maka:

$$\begin{aligned} d &= (1+b)^{\frac{1}{b}} \\ \ln d &= \ln(1+b)^{\frac{1}{b}} \\ &= \frac{1}{b}\ln(1+b) \\ &= \frac{\ln(1+b)}{b} \end{aligned}$$

Cari limit kedua ruas didapatkan:

$$\begin{aligned} d &= (1+b)^{\frac{1}{b}} \\ \lim_{b\to 0^+} \ln d &= \lim_{b\to 0^+} \frac{\ln(1+b)}{b} \\ &= \lim_{b\to 0^+} \frac{1}{1+b} \\ &= 1 \end{aligned}$$

Karena $y = \ln x$ adalah fungsi kontinu maka:

$$\begin{aligned} \lim_{b\to 0^+} \ln d &= 1 \\ \ln(\lim_{b\to 0^+} d) &= 1 \\ e^{\ln(\lim_{b\to 0^+} d)} &= e^1 \\ \lim_{b\to 0^+} d &= e \\ \lim_{b\to 0^+} (1+b)^{\frac{1}{b}} &= e \\ \lim_{n\to\infty} \left(1+\frac{1}{n}\right)^n &= e \end{aligned}$$

Jadi karena $\lim_{n\to\infty} \left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e$, maka barisan c_n adalah barisan konvergen.

4. Buktikan apakah deret berikut adalah deret konvergen atau divergen:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{100n}{2n^2+1}$$

Jawab:

Gunakan deret $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ sebagai deret pembanding:

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n} &= \lim_{n\to\infty}\frac{\frac{100n}{2n^2+1}}{\frac{1}{n}} \\
&= \lim_{n\to\infty}\frac{100n^2}{2n^2+1} \\
&= \lim_{n\to\infty}\frac{100}{2+\frac{1}{n^2}} \\
&= 50
\end{aligned}$$

Karena deret $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ adalah divergen, maka $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{100n}{2n^2+1}$ adalah deret divergen.

5. Gunakan uji integral untuk menentukan kekonvergenan deret

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{n^2+2}$$

Jawab:

$$\begin{aligned}
\lim_{a\to\infty}\int_1^a \frac{x}{x^2+2}dx &= \frac{1}{2}\lim_{a\to\infty}\int_1^a \frac{1}{x^2+2}d(x^2+2) \\
&= \frac{1}{2}\lim_{a\to\infty}\ln|x^2+2|_1^a \\
&= \frac{1}{2}\lim_{a\to\infty}(\ln|a^2+2|-\ln(3)) \\
&= \infty
\end{aligned}$$

Jadi menurut teorema uji integral, deret $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{n^2+2}$ merupakan deret divergen.

6. Tentukan hampiran Taylor untuk persamaan $f(x)$ di titik $x=3$:

$$f(x)=\frac{\sin\left(\frac{\pi}{3}x\right)}{\sqrt{x+1}}$$

Jawab: Cari turunannya:

$$\begin{aligned}
f(x) &= \frac{\sin\left(\frac{\pi}{3}x\right)}{\sqrt{x+1}} \\
f'(x) &= \frac{\frac{\pi}{3}\cos\left(\frac{\pi}{3}x\right)(\sqrt{x+1})-\sin\left(\frac{\pi}{3}x\right)\frac{1}{2}(x+1)^{-\frac{1}{2}}}{x+1} \\
f'(x) &= \frac{\frac{\pi}{3}\cos\left(\frac{\pi}{3}x\right)}{\sqrt{x+1}}-\frac{1}{2}\frac{\sin\left(\frac{\pi}{3}x\right)}{\sqrt{(x+1)^3}} \\
f^2(x) &=
\end{aligned}$$

Evaluasi di titik $x = 3$ didapatkan:

$$\begin{aligned} f(3) &= 0 \\ f'(3) &= -\frac{\pi}{6} \\ f^2(3) &= \frac{\pi}{24} \end{aligned}$$

Hampiran Taylornya adalah:

$$\begin{aligned} \frac{\sin\left(\frac{\pi}{3}x\right)}{\sqrt{x+1}} &= f(3) + f'(3)(x-3) + \frac{f^2(3)}{2}(x-3)^2 + \cdots \\ &= 0 - \frac{\pi}{6}(x-3) + \frac{\pi}{48}(x-3)^2 + \cdots \end{aligned}$$

Daftar Pustaka

EJ Purcell, D Varberg, and SE Rigdon. *Calculus (9th Edition)*. New Jersey: Prentice-Hall Inc, 2007.

Stewart J. *Multivariable Calculus*. Brooks/Cole, 7th edition, 2012.

Guichard D. *Single and Multivariable Calculus*. Creative Commons Attribution-NonCommercial-ShareAlike, 2023.

Robert G Bartle and Donald R Sherbert. *Introduction to real analysis*. John Wiley & Sons, Inc., 2000.