Curso: Ecuaciones Diferenciales Ordinarias

Tarea # 1

Instructor: Imelda Trejo Lorenzo

Para entregar el 12 de febrero de 2026, antes de clase

Instrucciones:

- Resuelva todos los ejercicios mostrando claramente su trabajo.
- Justifique rigurosamente cada paso de sus soluciones.
- Los diagramas de campo direccional deben estar claramente etiquetados.
- Puede usar resultados vistos en clase sin demostrarlos, salvo que se pida explícitamente.
- Valor total: **60 puntos** (+ 5 puntos extra).

1. Ejercicios: Métodos Clásicos y Análisis Cualitativo

Ejercicio 1 (8 puntos — Separación de variables y Existencia/Unicidad)**.** Considere el problema de valor inicial:

$$\begin{cases} (t-2)y' = y^2 - 1, \\ y(2) = 1. \end{cases}$$

(a) (5 pts) Determine todas las soluciones del problema de valor inicial y discuta cuidadosamente su dominio de definición.

(b) (3 pts) Explique por qué este problema no contradice el Teorema de Existencia y Unicidad de soluciones. Identifique explícitamente qué hipótesis del teorema falla.

Ejercicio 2 (10 puntos — Existencia global y explosión en tiempo finito)**.** Considere la ecuación diferencial

$$y' = y^2.$$

(a) (4 pts) Resuelva el problema de valor inicial con condición $y(0) = y_0$, $y_0 \neq 0$, y determine explícitamente el intervalo maximal de existencia de la solución.

(b) (3 pts) Determine si la solución se extiende a todo $\mathbb{R}$ en los siguientes casos:

(i) $y_0 > 0$,
(ii) $y_0 < 0$,
(iii) $y_0 = 0$.

(c) (3 pts) Explique cuidadosamente por qué este comportamiento no contradice el Teorema de Existencia y Unicidad.

*Nota: Este fenómeno se conoce como **explosión en tiempo finito** (blow-up).*

Ejercicio 3 (8 puntos — Ecuaciones exactas y transformación a ecuación lineal)**.** Resuelva el problema de valor inicial

$$y' = \frac{xy^2 - \cos(x)\sin(x)}{y(1-x^2)}, \qquad y(0) = 2,$$

determinando explícitamente la solución y su intervalo maximal de definición.

Nota: Para resolver este PVI puede procederse de dos formas:

- Verificar si la ecuación puede escribirse como una ecuación exacta.
- Realizar el cambio de variable $u = y^2$, que transforma la ecuación en una EDO lineal de primer orden.

Ejercicio 4 (8 puntos — Ecuación logística)**.** Considere la ecuación logística

$$\frac{dP}{dt} = rP\left(1 - \frac{P}{K}\right),$$

donde $r > 0$ y $K > 0$, que modela el crecimiento de una población cuya desnidad es $P(t)$, K se le conoce como la capacidad de carga del medio.

(a) (3 pts) Resuelva la ecuación con condición inicial $P(0) = P_0$, $0 < P_0 < K$.

(b) (2 pts) Calcule $\lim\limits_{t\to\infty} P(t)$ e interprete el resultado.

(c) (2 pts) Determine los puntos de equilibrio y analice su estabilidad.

(d) (1 pt) Si $K = 1000$, $r = 0{,}5$ y $P_0 = 100$, calcule $P(10)$ y $P(20)$.

Ejercicio 5 (9 puntos — Ecuación de Gompertz)**.** Considere la ecuación de Gompertz

$$\frac{dy}{dt} = -ry\ln\left(\frac{y}{k}\right), \qquad r, k > 0.$$

(a) (3 pts) Dibuje el campo direccional suponiendo $r = k = 1$ para $0 \le t \le 5$ y $0 < y \le 3$.

(b) (4 pts) Resuelva la ecuación con condición inicial $y(0) = N_0$, $N_0 > 0$, $N_0 \neq k$.

(c) (2 pts) Analice el comportamiento asintótico de la solución cuando $t \to +\infty$ e interprételo en el contexto del crecimiento tumoral.

Ejercicio 6 (5 puntos — Verdadero o Falso (justificación rigurosa))**.** Determine si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas, justificando cuidadosamente su respuesta.

(I) (2.5 pts) Una solución del PVI

$$\begin{cases} y' = y^2 + t^2, \\ y(1) = 4, \end{cases}$$

definida en $(0, 5)$ satisface $y(3) = 2$.

(II) (2.5 pts) La ecuación

$$y' + y + y^2 + e^t = 0$$

se transforma en una ecuación diferencial lineal de segundo orden mediante el cambio $y = \frac{z'}{z}$.

Ejercicio 7 (5 puntos — BONUS: Ecuación de Riccati)**. (Opcional)**
Considere la ecuación

$$y' = p(x) + q(x)y + r(x)y^2.$$

(a) (2.5 pts) Verifique que, si y_1 es una solución particular, el cambio

$$y = y_1 + \frac{1}{v}$$

transforma la ecuación en una EDO lineal para v.

(b) (2.5 pts) Use este método para resolver

$$y' = 1 - 2xy + y^2,$$

sabiendo que $y_1 = 1$ es una solución particular.

Métodos Clásicos de Resolución de EDO de Primer Orden [1]

1. Separación de Variables
Una ecuación diferencial ordinaria de la forma

$$\frac{dy}{dx} = f(x)\,g(y)$$

se resuelve separando variables, $g(y) \neq 0$:

$$\frac{dy}{g(y)} = f(x)\,dx,$$

e integrando ambos lados:

$$\int \frac{dy}{g(y)} = \int f(x)\,dx + C.$$

2. Ecuaciones Exactas
Una ecuación de la forma

$$M(x,y)\,dx + N(x,y)\,dy = 0$$

es **exacta** si se cumple

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}.$$

En ese caso, existe una función potencial $F(x,y)$ tal que

$$\frac{\partial F}{\partial x} = M, \qquad \frac{\partial F}{\partial y} = N.$$

La solución implícita está dada por

$$F(x,y) = C.$$

Para encontrar $F(x,y)$:

$$F(x,y) = \int M(x,y)\,dx + g(y),$$

donde la función $g(y)$ se determina imponiendo la condición

$$\frac{\partial F}{\partial y} = N(x,y).$$

3. Ecuaciones Lineales de Primer Orden
Una EDO lineal de primer orden tiene la forma

$$\frac{dy}{dx} + P(x)y = Q(x).$$

El **factor integrante** está dado por

$$\mu(x) = e^{\int P(x)\,dx}.$$

La solución general es

$$y(x) = \frac{1}{\mu(x)}\left[\int \mu(x)Q(x)\,dx + C\right].$$

Teorema de Existencia y Unicidad (Picard-Lindelöf)

Para el PVI:

$$\frac{dy}{dt} = f(t,y), \quad y(t_0) = y_0$$

Si $f(t,y)$ y $\frac{\partial f}{\partial y}$ son continuas en un rectángulo que contiene (t_0, y_0), entonces existe una única solución local. Ver Teorema 1 del capítulo 8 del libro de clase [2]

Importante: Si alguna de estas hipótesis falla, puede haber:

- Múltiples soluciones
- Ninguna solución
- Soluciones que explotan en tiempo finito

Análisis de Estabilidad

Para encontrar puntos de equilibrio de $\frac{dy}{dt} = f(y)$:

1. Resolver $f(y^*) = 0$ para encontrar equilibrios y^*
2. Analizar el signo de $f(y)$ alrededor de y^*:
   - Si $f(y) > 0$ para $y < y^*$ y $f(y) < 0$ para $y > y^*$: **estable**
   - Si $f(y) < 0$ para $y < y^*$ y $f(y) > 0$ para $y > y^*$: **inestable**

Fracciones Parciales (Útil para Ejercicios 1 y 3)

$$\frac{1}{(y-a)(y-b)} = \frac{1}{a-b}\left(\frac{1}{y-a} - \frac{1}{y-b}\right)$$
$$\frac{1}{y(K-y)} = \frac{1}{K}\left(\frac{1}{y} + \frac{1}{K-y}\right)$$

Campos Direccionales

Para dibujar el campo direccional de $\frac{dy}{dt} = f(t, y)$:

- En cada punto (t_0, y_0), calcular la pendiente $m = f(t_0, y_0)$
- Dibujar una pequeña flecha con esa pendiente
- Usar una cuadrícula regular de puntos
- Las soluciones son curvas tangentes a estas flechas

Referencias

[1] William E. Boyce, Richard C. DiPrima, and Douglas B. Meade. *Elementary Differential Equations and Boundary Value Problems*. Wiley, 12 edition, 2022.

[2] Morris W. Hirsch and Stephen Smale. *Differential Equations, Dynamical Systems, and Linear Algebra*. Academic Press, New York, 1974.