Notas complementarias
Campos direccionales, campos vectoriales y retratos de fase

Objetivo

Estas notas tienen como objetivo aclarar tres conceptos fundamentales en el estudio de ecuaciones diferenciales ordinarias (EDO) que suelen confundirse:

- Campo direccional
- Campo vectorial
- Retrato de fase

Además, se introduce la noción de curva integral como idea geométrica unificadora [1] y se discute el ejemplo clásico del sistema caótico de Lorenz.

Los enlaces incluidos permiten interactuar directamente con simulaciones en Wolfram Demonstrations para reforzar la intuición geométrica.

1. Campo direccional (campo de pendientes)

Consideremos una ecuación diferencial ordinaria escalar de primer orden:

$$y'(t) = f(t, y).$$

Un campo direccional asigna, a cada punto (t, y) del plano, la pendiente $f(t, y)$. Gráficamente se representa mediante pequeños segmentos con esa inclinación.

Interpretación

- Se trabaja en el plano (t, y), donde el eje horizontal representa el tiempo.
- No se dibujan vectores completos, solo pendientes.
- Las curvas solución son tangentes al campo direccional en cada punto.

Las soluciones $y(t)$ se representan como curvas en el plano (t, y) y se conocen como gráficas de soluciones o evolución temporal.

Recurso interactivo (Wolfram)

Campo direccional con soluciones superpuestas:

https://demonstrations.wolfram.com/SlopeFields/

Actividad sugerida

- Cambiar la función $f(t, y)$.
- Explorar distintas condiciones iniciales.
- Observar cómo las curvas siguen al campo direccional.

2. Campo vectorial

Un campo vectorial asigna a cada punto del plano un vector:

$$\mathbf{F}(x, y) = (F_1(x, y), F_2(x, y)).$$

Este concepto es general y aparece en múltiples contextos:

- flujos de fluidos,
- campos de fuerza,
- campos de velocidad,
- modelos físicos y matemáticos.

Interpretación

- Cada flecha indica dirección y magnitud.
- El campo existe independientemente de que se estudien soluciones.
- Cuando el campo proviene de una EDO, las soluciones siguen las flechas.

Ejemplo intuitivo: un campo de velocidad de una corriente de agua, donde cada vector indica cómo se movería una partícula colocada en ese punto.

Recurso interactivo (Wolfram)

Visualización de campos vectoriales bidimensionales:

https://demonstrations.wolfram.com/VectorFieldPlotter/

Actividad sugerida

- Cambiar las componentes del campo.
- Identificar regiones de atracción, repulsión o rotación.
- Comparar flechas con trayectorias.

3. Curvas integrales (idea geométrica clave)

Dado un campo vectorial $\mathbf{F}$, una curva $\gamma(t)$ se llama curva integral si en cada punto es tangente al campo:

$$\gamma'(t) = \mathbf{F}(\gamma(t)).$$

Idea central

Las soluciones de una ecuación diferencial son curvas integrales del campo asociado.

Conexiones importantes

- En una EDO escalar, las soluciones $y(t)$ son curvas integrales del campo direccional.
- En un sistema, las trayectorias en el plano son curvas integrales del campo vectorial.

Esta noción unifica los conceptos de campo y solución.

4. Retrato de fase

Consideremos un sistema autónomo:

$$\begin{cases} x' = f(x, y), \\ y' = g(x, y). \end{cases}$$

El retrato de fase es la representación geométrica del campo vectorial asociado junto con sus curvas integrales (trayectorias).

Características

- El tiempo no aparece explícitamente.
- Cada punto representa un estado del sistema.
- Las curvas muestran cómo el sistema evoluciona entre estados.

El retrato de fase permite estudiar:

- puntos de equilibrio,
- estabilidad,
- comportamiento a largo plazo,
- ciclos y atractores.

Recurso interactivo (Wolfram)

Retratos de fase para sistemas bidimensionales:

https://demonstrations.wolfram.com/PhasePortraitsForPlanarSystems/

5. Ejemplo: sistema caótico de Lorenz

El sistema de Lorenz está dado por:

$$\begin{cases} x' = \sigma(y - x), \\ y' = x(\rho - z) - y, \\ z' = xy - \beta z. \end{cases}$$

Este sistema fue propuesto como un modelo simplificado de convección atmosférica y es un ejemplo clásico de sistema caótico.

Recurso interactivo (Wolfram)

Simulación del atractor de Lorenz:

https://demonstrations.wolfram.com/LorenzAttractor/

6. ¿Por qué se dice que el sistema de Lorenz es caótico?

Un sistema dinámico se dice caótico si presenta:

- sensibilidad extrema a las condiciones iniciales,
- dinámica determinista (sin ruido),
- comportamiento impredecible a largo plazo.

Este fenómeno se conoce como el efecto mariposa.

7. Retratos de fase en $\mathbb{R}^3$

El sistema de Lorenz tiene tres variables (x, y, z), por lo que su espacio de estados es $\mathbb{R}^3$.

- Cada punto (x, y, z) representa un estado del sistema.
- Las soluciones son curvas en $\mathbb{R}^3$.
- El atractor de Lorenz es un subconjunto geométrico donde viven las trayectorias a largo plazo.

Por esta razón se habla de retratos de fase tridimensionales.

8. Evolución temporal vs espacio de estados

Evolución temporal

- Se grafica una variable como función del tiempo.
- Ejemplo: $x(t)$ vs t.
- Responde a: ¿cómo cambia una cantidad en el tiempo?

Espacio de estados (retrato de fase)

- Se grafican variables entre sí.
- El tiempo no aparece explícitamente.
- Responde a: ¿qué estados visita el sistema?

Ejemplo en el sistema de Lorenz:

- Evolución temporal: $x(t)$, $y(t)$, $z(t)$.
- Espacio de estados: trayectoria en (x, y, z).

Mensaje final para el estudiante

Distinguir entre campo direccional, campo vectorial y retrato de fase es esencial para interpretar correctamente modelos matemáticos.

Referencias

[1] Vladimir I. Arnold. *Ordinary Differential Equations*. Springer-Verlag, 3 edition, 1991.