Notas complementarias
Cómo leer soluciones de EDO: campos, trayectorias y estados

Se interpretarán geométricamente las soluciones de EDO, más que resolverlas explícitamente. Se distinguen y conectan los conceptos de campo direccional, campo vectorial y retrato de fase, destacando el papel del tiempo y la noción de curva integral *curva integral* [1] como hilo conductor.

Se dejan algunos recursos interactivos que permiten manipular directamente estos objetos.

1. Campo direccional: la dinámica vista desde el tiempo

Consideremos una EDO escalar de primer orden:

$$y'(t) = f(t, y).$$

Un campo direccional asigna a cada punto (t, y) del plano una pendiente $f(t, y)$. Gráficamente, esto se representa mediante pequeños segmentos inclinados.

Cómo debe leerse esta representación

- El plano es el plano *tiempo–estado* (t, y).
- El eje horizontal siempre representa el tiempo.
- El campo no muestra trayectorias completas, solo información local.

Las soluciones $y(t)$ aparecen como curvas que son tangentes al campo direccional en cada punto. Por ello, esta representación está íntimamente ligada a la *evolución temporal*.

Recurso interactivo (Wolfram)

https://demonstrations.wolfram.com/SlopeFields/

Sugerencia pedagógica

Antes de buscar fórmulas explícitas, obsérvese:

- si las soluciones crecen o decrecen,
- si existen regiones de estabilidad,
- cómo influyen las condiciones iniciales.

2. Campo vectorial: el sistema como flujo

Ahora consideremos un sistema autónomo:

$$\mathbf{F}(x, y) = (F_1(x, y), F_2(x, y)).$$

Un campo vectorial asigna a cada punto del plano un vector con dirección y magnitud.

Interpretación conceptual

- El campo existe independientemente del tiempo.
- Representa un *flujo*: velocidad, fuerza o tendencia.
- No es todavía una solución, sino el objeto que las genera.

Una analogía útil es la de una corriente de agua: el campo indica cómo se movería una partícula si se colocara en cierto punto.

Recurso interactivo (Wolfram)

https://demonstrations.wolfram.com/VectorFieldPlotter/

3. Curvas integrales: el puente conceptual

Dado un campo vectorial $\mathbf{F}$, una curva $\gamma(t)$ se llama *curva integral* si satisface:

$$\gamma'(t) = \mathbf{F}(\gamma(t)).$$

Idea clave

Las soluciones de una EDO no son objetos independientes:

son las curvas integrales del campo asociado.

Esta idea unifica:

- campos direccionales,
- campos vectoriales,
- soluciones.

4. Retrato de fase: dinámica sin tiempo explícito

Consideremos el sistema:

$$\begin{cases} x' = f(x, y), \\ y' = g(x, y). \end{cases}$$

El retrato de fase se obtiene graficando el campo vectorial y sus curvas integrales en el plano (x, y). Esto es sólo para ecuaciones autónomas.

Lectura correcta

- Los ejes representan *estados*, no tiempo.
- Cada punto es una configuración posible del sistema.
- Cada trayectoria es una solución completa.

  En el retrato de fase no hay tiempo, solo estados. El tiempo actúa como parámetro que recorre la trayectoria.

  `https://visualize-it.github.io/planetary_motion/simulation.html`

5. Ejemplo guiado: modelo presa–depredador

El modelo presa–depredador ilustra de manera clara la diferencia entre evolución temporal y retrato de fase.

Dependencia temporal

Las gráficas $x(t)$ y $y(t)$ muestran cómo las poblaciones oscilan en el tiempo.

Espacio de estados

El plano (x, y) muestra qué combinaciones de poblaciones son visitadas y en qué orden.

Recurso interactivo (Wolfram)

https://demonstrations.wolfram.com/PredatorPreyDynamicsWithTypeTwoFunctionalResponse/

Este recurso permite ver simultáneamente:

- evolución temporal,
- retrato de fase,
- animación del tiempo recorriendo la trayectoria.

6. Ejemplo avanzado: sistema caótico de Lorenz

El sistema de Lorenz introduce dinámica en $\mathbb{R}^3$:

$$\begin{cases} x' = \sigma(y - x), \\ y' = x(\rho - z) - y, \\ z' = xy - \beta z. \end{cases}$$

Recurso interactivo (Wolfram)

https://demonstrations.wolfram.com/LorenzAttractor/

Por qué es caótico

El sistema es determinista pero presenta sensibilidad extrema a las condiciones iniciales, lo que limita la predictibilidad a largo plazo.

Mensaje final

Una misma solución puede verse como:

- una función del tiempo,
- una curva en el espacio de estados,
- una trayectoria inducida por un campo.

Referencias

[1] Vladimir I. Arnold. *Ordinary Differential Equations*. Springer-Verlag, 3 edition, 1991.