Curso: Ecuaciones Diferenciales Ordinarias

Tarea #2

Instructor: Imelda Trejo Lorenzo

Para entregar el 19 de febrero de 2026, antes de clase

Indicaciones generales.
Esta tarea tiene como objetivo reforzar la comprensión de sistemas lineales homogéneos de ecuaciones diferenciales ordinarias, enfatizando la relación entre operadores lineales, autovalores, autovectores y el comportamiento cualitativo de las soluciones.

Responde cada problema con argumentos matemáticos claros y bien redactados. No basta con presentar cálculos sin explicación.

1. **Matrices diagonales y decaimiento** **(8 puntos)**
   Sea A una matriz diagonal real de tamaño $n \times n$.
   (a) (4 pts) Demuestre que el sistema $x'(t) = Ax(t)$ tiene una solución única para toda condición inicial $x(0) \in \mathbb{R}^n$.
   (b) (4 pts) Encuentre condiciones necesarias y suficientes sobre las entradas diagonales de A que garanticen que
   $$\lim_{t\to\infty} x(t) = 0$$
   para toda solución del sistema.

2. **Inversión temporal** **(7 puntos)**
   Sea A una matriz real de tamaño $n \times n$ y denote por $-A$ a la matriz obtenida cambiando el signo de todas las entradas de A.
   (a) (3 pts) ¿Cuál es la relación entre los campos vectoriales $x \mapsto Ax$ y $x \mapsto -Ax$?
   (b) (4 pts) Describa la relación geométrica entre las curvas solución de los sistemas
   $$x'(t) = Ax(t) \quad \text{y} \quad x'(t) = -Ax(t).$$

3. **Estructura lineal de las soluciones** **(5 puntos)**
   Sean $u(t)$ y $v(t)$ soluciones del sistema lineal homogéneo
   $$x'(t) = Ax(t),$$
   definidas en un intervalo común $I \subset \mathbb{R}$. Demuestre que, para cualesquiera $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, la función
   $$w(t) = \alpha u(t) + \beta v(t)$$
   también es solución del sistema en I. Concluya que el conjunto de soluciones es un espacio vectorial.

4. **Matriz fundamental (recordatorio)** **(5 puntos)**
Sea el sistema lineal homogéneo

$$x'(t) = Ax(t), \qquad A \in \mathbb{R}^{n\times n}.$$

Explique qué se entiende por una *matriz fundamental* del sistema y describa su papel en la construcción de soluciones generales.

5. **Sistema tridimensional y comportamiento asintótico** **(25 puntos)**
Sea la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

(a) (10 pts) Encuentre la solución del problema de Cauchy

$$Y'(t) = AY(t), \qquad Y(0) = (x_0, y_0, z_0)^T.$$

(Sugerencia: trabaja con el sistema reducido)

(b) (6 pts) Analice el comportamiento cualitativo de las soluciones usando los autovalores de A. Identifique las direcciones de crecimiento y decaimiento exponencial.

(c) (9 pts) Determine el conjunto S de condiciones iniciales tales que

$$\lim_{t\to+\infty} Y(t) = 0,$$

y el conjunto U de condiciones iniciales tales que

$$\lim_{t\to-\infty} Y(t) = 0.$$

¿Es cierto que $S \cup U = \mathbb{R}^3$? Justifique. ¿Qué puede decir sobre $S \cap U$?

6. **Dependencia de parámetros** **(22 puntos)**
Considere el sistema

$$\begin{cases} x' = (k+3)x + 2y, \\ y' = 2x + ky, \end{cases} \qquad k \in \mathbb{R}.$$

(a) (10 pts) Encuentre una matriz fundamental del sistema para todo k. Analice por separado los casos en que la matriz del sistema tenga autovalores repetidos o complejos (si existen tales valores de k).

(b) (6 pts) Determine los valores de k para los cuales todas las soluciones satisfacen

$$\lim_{t\to\infty} (x(t), y(t)) = (0, 0).$$

(c) (6 pts) Determine los valores de k para los cuales existen soluciones no triviales con este comportamiento. ¿Cuál es la dimensión del espacio de tales soluciones?

Los siguientes problemas corresponden a los del capítulo 4 del libro [1], pag 55.

7. **Retratos fase y autovalores reales** **(15 puntos)**
Sea A una matriz real 2×2 con autovalores reales y distintos λ y μ. Suponga que un autovector asociado a λ es $(1,0)^T$ y uno asociado a μ es $(1,1)^T$.

Bosqueje los retratos fase del sistema

$$x'(t) = Ax(t)$$

en los siguientes casos:

(a) (4 pts) $\lambda < 0 < \mu$
(b) (3 pts) $0 < \lambda < \mu$
(c) (3 pts) $\lambda < \mu < 0$
(d) (5 pts) $\lambda = 0$, $\mu > 0$

En cada caso, describa el comportamiento cualitativo de las trayectorias, indicando el papel de los autovectores y clasificando el tipo de equilibrio en el origen.

8. **Reducción a sistema de primer orden** **(13 puntos)**
Considere la ecuación diferencial de segundo orden

$$\ddot{x} + 3\dot{x} + 2x = 0.$$

(a) (3 pts) Reescriba la ecuación como un sistema de primer orden.
(b) (5 pts) Determine la solución general del sistema.
(c) (3 pts) Analice la estabilidad del equilibrio.
(d) (2 pts) Clasifique el tipo de equilibrio en el plano fase.

Puntuación total: 100 puntos

Referencias

[1] Morris W. Hirsch and Stephen Smale. *Differential Equations, Dynamical Systems, and Linear Algebra*. Academic Press, New York, 1974.