Curso: Análisis Númerico, Tarea # 2

Instructor: Imelda Trejo Lorenzo

Para entregar el 19 de Febrero 2025, antes de clase.

Problema 1. Aritmética de punto flotante

Considere un sistema decimal de punto flotante $\mathcal{F}$ con precisión 6 y exponentes $-7 \leq n \leq 7$. Todo número flotante es de la forma

$$x = \pm 0.c_1c_2c_3c_4c_5c_6 \times 10^n,$$

y las operaciones se realizan mediante redondeo.

1. (2 pts) Explique cómo aproximar un número real

   $$x \in [10^6, 10^7)$$

   por un número flotante en $\mathcal{F}$ usando **redondeo al más cercano**.

   Ayuda: escriba primero el número en forma normalizada.

2. (3 pts) Calcule la **unidad de redondeo** del sistema $\mathcal{F}$:

   - usando redondeo por corte (truncamiento),
   - usando redondeo al más cercano.

   Ayuda: Estime una cota superior para el error relativo máximo inducido por el proceso de redondeo.

Problema 2. Conversión de base decimal a binaria

(2 pts) Describa un algoritmo para convertir un número natural N en base decimal a su representación en base binaria.

Problema 3. Esquema iterativo y criterio de paro

(3 pts) Diseñe un algoritmo iterativo para aproximar un número real positivo α. El algoritmo debe detenerse cuando el **error relativo** sea menor que 10^{-3}.

Ayuda: defina una sucesión $x_{k+1} = g(x_k)$ y use

$$\frac{|x_{k+1} - x_k|}{|x_{k+1}|}$$

como criterio de paro.

Problema 4. Cálculo del recíproco sin divisiones

1. (3 pts) Diseñe un esquema iterativo para calcular

$$\frac{1}{\alpha}, \quad \alpha > 0,$$

   utilizando **únicamente sumas y multiplicaciones**.

2. (2 pts) Analice el comportamiento del error del esquema propuesto y determine si la convergencia es lineal, cuadrática o de orden superior.

Problema 5: Iteraciones de punto fijo y orden de convergencia

Sea $I \subset \mathbb{R}$ un intervalo y sea $f : I \to \mathbb{R}$ una función continuamente diferenciable. Suponga que existe $x^* \in I$ tal que

$$x^* = f(x^*).$$

Sea $x_0 \in I$ y considere la sucesión definida por

$$x_{n+1} = f(x_n).$$

Defina el error $e_n = x_n - x^*$.

1. (2 pt) Analice el comportamiento del error e_{n+1} en función de e_n. ¿Bajo qué condiciones la sucesión $\{x_n\}$ converge a x^* con **orden lineal**?

2. (1 pt) Explique qué significa que una sucesión tenga **convergencia cuadrática** en términos del error.

3. (2 pt) ¿Qué condiciones sobre f garantizan que la sucesión $\{x_n\}$ tenga **convergencia cuadrática**?

   ayuda: Use una expansión de Taylor de $f(x_n)$ alrededor de x^* y exprese e_{n+1} en función de e_n.

Problema 6. Estabilidad numérica (Kincaid, sección de problemas 2.2, codificar)

1. (2 pts) Considere las funciones

$$f(x) = \sqrt{x^2+1} - 1, \qquad g(x) = \frac{x^2}{\sqrt{x^2+1}+1}.$$

Evalúe ambas funciones para

$$x = 8^{-1}, 8^{-2}, 8^{-3}, \ldots$$

y explique por qué, aunque son algebraicamente equivalentes, producen resultados distintos en la computadora.

Ayuda: observe el efecto de la cancelación numérica.

2. (3 pts) Considere las siguientes funciones algebraicamente equivalentes:

$$\begin{aligned}
f(x) &= x^8 - 8x^7 + 28x^6 - 56x^5 + 70x^4 - 56x^3 + 28x^2 - 8x + 1, \\
g(x) &= (((((((x-8)x+28)x-56)x+70)x-56)x+28)x-8)x+1, \\
h(x) &= (x-1)^8.
\end{aligned}$$

   (a) Evalúe $f(x)$, $g(x)$ y $h(x)$ en 101 puntos equiespaciados del intervalo $[0.99, 1.01]$.
   (b) Compare los resultados numéricos obtenidos.
   (c) Discuta cuál forma es más estable numéricamente y justifique.
   (d) (Opcional) Represente los resultados en escala logarítmica.