# Curso: Análisis Númerico, Tarea # 1 (repaso de cálculo)

Instructor: Imelda Trejo Lorenzo

Para entregar el 11 de febreo 2026, antes de clase.

**Indicaciones.** Todas las demostraciones deben escribirse de manera rigurosa, utilizando definiciones analíticas y argumentos $\varepsilon$–$\delta$. No se permite apelar directamente a resultados topológicos generales sin justificación analítica.

## Ejercicio 1. Límite

(10 puntos) Demuestra, usando la definición $\varepsilon$–$\delta$, que

$$\lim_{x \to 2} \frac{1}{x} = \frac{1}{2}.$$

## Ejercicio 2. Continuidad

### 2.a Definición

(5 puntos) Escribe la definición de continuidad de una función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ en un punto $c \in \mathbb{R}$ utilizando la definición $\varepsilon$–$\delta$.

### 2.b Continuidad de una función

(10 puntos) Demuestra que la función

$$f(x) = x^2$$

es continua en todo punto $c \in \mathbb{R}$.

## Ejercicio 3. Derivabilidad y continuidad

### 3.a Definición

(5 puntos) Escribe la definición de derivada de una función real $f$ en un punto $c$.

### 3.b

(15 puntos) Demuestra que si $f$ es diferenciable en un punto $c$, entonces $f$ es continua en $c$.

## Ejercicio 4. Teorema del Valor Medio

### 4.a Enunciado

(5 puntos) Enuncia el Teorema del Valor Medio, indicando claramente todas sus hipótesis.

### 4.b Aplicación

Sea

$$f(x) = 3 - 2x + x^2.$$

1. (5 puntos) Verifica que $f$ satisface las hipótesis del Teorema del Valor Medio (TVM) en el intervalo $[1, 3]$.
2. (5 puntos) Encuentra el número $\xi \in (1, 3)$ tal que satiface el TVM.

## Ejercicio 5. Teorema de Taylor

Sea $f \in C^{n+1}[a, b]$. Demuestra que para cualesquiera $c, x \in [a, b]$ existe un punto $\xi$ entre $c$ y $x$ tal que

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(c)}{k!}(x - c)^k + R_n(x),$$

donde el resto está dado por

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x - c)^{n+1}.$$

### Aplicación

Sea

$$f(x) = \ln(1 + x).$$

1. (10 puntos) Calcula el polinomio de Taylor de orden $n$ alrededor del punto $c = 0$.
2. (5 puntos )Escribe explícitamente la expresión del resto $R_n(x)$.
3. (5 puntos) Indica para qué valores de $x$ es válida la expansión.

## Ejercicio 6. Relación de recurrencia: análisis e implementación numérica

Considérese la relación de recurrencia definida por

$$\begin{cases} x_0 = 1, \quad x_1 = \dfrac{1}{3}, \\ x_{n+1} = \dfrac{13}{3}x_n - \dfrac{4}{3}x_{n-1}, \quad n \geq 1. \end{cases}$$

(a) (6 puntos) Usando inducción matemática, demuestre que la sucesión generada por la relación de recurrencia está dada explícitamente por

$$x_n = \left(\frac{1}{3}\right)^n, \quad n \geq 0.$$

(b) (4 puntos) Demuestre que la sucesión $\{x_n\}_{n\geq 0}$ converge a cero cuando $n \to \infty$.

(c) (6 puntos) Implemente numéricamente la relación de recurrencia y calcule los primeros 35 términos de la sucesión. Puede utilizar `Rstudio`, `Python` u otro software de su preferencia. Presente claramente el algoritmo empleado y los (últimos) valores obtenidos .

(d) (4 puntos) Compare los valores obtenidos numéricamente con la expresión exacta

$$x_n = \left(\frac{1}{3}\right)^n.$$

Discuta brevemente las discrepancias observadas y comente posibles dificultades que surgen al aproximar numéricamente una sucesión definida por una relación de recurrencia.

**Observación.** Este ejercicio ilustra que, aun cuando la sucesión exacta converge, su implementación numérica puede exhibir un comportamiento distinto debido a errores de redondeo y a la estructura de la relación de recurrencia.

**Bibliografía básica:**


1. Kincaid, D., Cheney, W. *Numerical Analysis of Scientific Computing.* Brooks/Cole Publishing Company, 1991.

2. Burden, R. L., Faires, J. D. *Numerical Analysis.* 7th ed., Brooks/Cole, 2001.