Curso: Análisis Numérico, Tarea #3

Instructora: Imelda Trejo Lorenzo

Fecha de entrega: 25 de febrero de 2025, antes de clase

Instrucciones: Resuelva los siguientes problemas de manera clara y rigurosa. Para los problemas computacionales, siga las instrucciónes de clase y comente sus resultados.

1. **(5 puntos)** Demuestre que el método de Newton diverge para las siguientes funciones, sin importar el punto inicial real elegido:

   (a) $f(x) = x^2 + 1$

   (b) $f(x) = 7x^4 + 3x^2 + \pi$

2. **(5 puntos)** Si el método de Newton se aplica a $f(x) = x^2 - 1$ con $x_0 = 10^{10}$, ¿cuántos pasos del método iterativo se requieren para obtener la raíz con una precisión de 10^{-8}? Resuelva analíticamente, no experimentalmente.

   Nota: Derive una fórmula explícita para x_n en función de n y x_0, y utilícela alguna corta superior para acotar el error.

3. **(10 puntos) (Teorema del punto fijo - formulación alternativa)**

   Sea $g : [a, b] \to \mathbb{R}$ una función continua tal que $g([a, b]) \subseteq [a, b]$. Se dice que g es una *contracción* en $[a, b]$ si existe una constante L tal que $0 < L < 1$ y

   $$|g(x) - g(y)| \leq L|x - y|, \quad \forall x, y \in [a, b].$$

   (a) Demuestre que g tiene un único punto fijo $\hat{x}$ en $[a, b]$.

   (b) Demuestre que la iteración $x_{k+1} = g(x_k)$, $k = 0, 1, 2, \ldots$ converge a $\hat{x}$ para cualquier valor inicial $x_0 \in [a, b]$.

   (c) Si además g es diferenciable en $[a, b]$ y $x_k \neq \hat{x}$ para $k = 0, 1, 2, \ldots$, determine:

   $$\lim_{k \to \infty} \frac{|x_{k+1} - \hat{x}|}{|x_k - \hat{x}|}$$

   (d) Concluya por qué el método del punto fijo tiene convergencia lineal.

4. **(20 puntos) Análisis riguroso del método de Newton**

   Considere la ecuación escalar $F(x) = 0$. Suponga que α es una raíz de la ecuación.

   (a) Escriba la fórmula de recursión del método de Newton para aproximar la raíz.

   (b) Enuncie condiciones sobre $F(x)$ en una vecindad de α que garanticen la convergencia del método de Newton para x_0 suficientemente cerca de α.

(c) Considere la siguiente expansión de Taylor:

$$F(\alpha) = F(x) + F'(x)(\alpha - x) + \frac{1}{2}F''(w)(\alpha - x)^2$$

donde $w = \beta x + (1-\beta)\alpha$ para algún $\beta \in [0,1]$.

Usando esta expansión de Taylor, derive una relación entre el error en el paso $j+1$ en términos del error en el paso j.

Nota: Denote $e_j = x_j - \alpha$ como el error en el paso j.

(d) Demuestre cómo las condiciones enunciadas en el inciso (b), junto con la expansión de Taylor del inciso (c), pueden utilizarse para acotar el error en el paso $j+1$ en términos del error en el paso j.

(e) Finalmente, demuestre cómo el desarrollo anterior puede utilizarse para establecer la convergencia del método de Newton. ¿Con qué orden converge la iteración?

5. **(10 puntos) Análisis del método de la secante**

(a) Derive la fórmula de recursión del método de la secante a partir de consideraciones geométricas o mediante una aproximación apropiada de la derivada.

(b) Enuncie condiciones suficientes para la convergencia local del método de la secante.

(c) Demuestre que el orden de convergencia del método de la secante es $p = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \approx 1.618$ (el número áureo).

Sugerencia: Suponga que para valores grandes de n, el error satisface $|e_{n+1}| \approx C|e_n|^p$ para alguna constante $C > 0$. Derive una ecuación que debe satisfacer p.

(d) Compare el costo computacional del método de la secante versus el método de Newton. Considere tanto el número de iteraciones necesarias para alcanzar una tolerancia dada como el costo por iteración (evaluaciones de función y derivadas).

6. **(5 puntos)** Sea $p > 1$. Determine el valor de la siguiente fracción continua:

$$x = \cfrac{1}{p + \cfrac{1}{p + \cfrac{1}{p + \cdots}}}$$

Sugerencia: Formule esto como un problema de punto fijo y resuelva la ecuación resultante, ver [2], pag. 106.

Problemas extras (opcionales)

7. **(10 puntos extra)** En el método de bisección, ¿existe el límite

$$\lim_{n\to\infty} \frac{|r - c_{n+1}|}{|r - c_n|}$$

donde r es la raíz exacta y c_n es la aproximación en la iteración n? Explique su respuesta y, si el límite existe, calcule su valor.

8. **(10 puntos extra)** Extienda el análisis del Problema 4 al caso en que α es una raíz múltiple, es decir, $F(\alpha) = F'(\alpha) = \cdots = F^{(m-1)}(\alpha) = 0$ pero $F^{(m)}(\alpha) \neq 0$ para algún $m \geq 2$.

   (a) Demuestre que en este caso el método de Newton tiene convergencia solo lineal.

   (b) Determine la constante de convergencia asintótica.

   (c) Proponga una modificación del método de Newton que restaure la convergencia cuadrática cuando se conoce la multiplicidad m de la raíz.

   (d) Demuestre que su método modificado efectivamente tiene convergencia cuadrática.

Problema aplicado: Epidemiología matemática (15 puntos extras)

Problema 1 (Número reproductivo básico y tasa de ataque)**.** *En epidemiología matemática, el* número reproductivo básico $\mathcal{R}_0$ *se define como el número promedio de casos secundarios que genera un individuo infectado a lo largo de todo su período infeccioso, cuando se introduce en una población completamente susceptible.*

En particular:

- *Si $\mathcal{R}_0 > 1$, cada individuo infectado genera en promedio más de un caso secundario y se espera que la enfermedad se propague en la población.*
- *Si $\mathcal{R}_0 < 1$, la transmisión no se sostiene y el brote se extingue.*

Para un brote epidémico que sigue un modelo SIR homogéneo, la tasa de ataque final *(attack rate), denotada por π, representa la fracción de la población que resulta infectada durante toda la epidemia y satisface la ecuación trascendental:*

$$\pi = 1 - \exp(-\mathcal{R}_0 \pi).$$

Suponga que para la influenza estacional se ha estimado que $\mathcal{R}_0 = 1.28$.

(a) Reformule la ecuación del attack rate como un problema de búsqueda de raíces para la incógnita π. Es decir, escriba una función

$$f(\pi) = 0$$

cuyo cero en el intervalo $(0, 1)$ corresponda al valor buscado de la tasa de ataque π.

(b) Analice cualitativamente la función $f(\pi)$:

- *Determine el dominio apropiado para π (recuerde que π representa una proporción).*
- *Verifique que $\pi = 0$ es siempre una solución trivial. ¿Qué representa epidemiológicamente?*
- *Demuestre que existe al menos una solución no trivial $\pi^* \in (0, 1)$ cuando $\mathcal{R}_0 > 1$.*
- *Determine un intervalo $[a, b] \subset (0, 1)$ que contenga la solución no trivial.*

(c) Seleccione un método numérico adecuado para aproximar π (por ejemplo, método de bisección, punto fijo, Newton o secante). Para el método elegido:

- *Explique brevemente su funcionamiento.*
- *Verifique que se cumplen las hipótesis necesarias para su aplicación.*
- *Si elige un método de punto fijo, proponga una función de iteración $g(\pi)$ apropiada y verifique que es una contracción en un intervalo adecuado.*
- *Discuta el orden de convergencia esperado.*

(d) Implemente el método numérico elegido para estimar la tasa de ataque π correspondiente a $\mathcal{R}_0 = 1.28$. Reporte:

- *El intervalo inicial o punto inicial (según corresponda).*

- *El criterio de paro utilizado (por ejemplo, tolerancia absoluta* $\epsilon = 10^{-6}$*).*
- *Una tabla con las primeras iteraciones mostrando la convergencia.*
- *El número total de iteraciones realizadas.*
- *La aproximación final obtenida para* π*.*
- *El código implementado (puede ser pseudocódigo o código en Python/MATLAB/Julia).*

(e) *Interprete el resultado obtenido:*

- *¿Qué porcentaje de la población se espera que sea infectado durante la epidemia?*
- *Compare este valor con el número reproductivo básico* $\mathcal{R}_0 = 1.28$*. ¿Por qué la tasa de ataque no es simplemente* $(1 - 1/\mathcal{R}_0)$*?*

(f) *Estudie cómo varía la tasa de ataque* π *en función de* $\mathcal{R}_0$*:*

- *Genere una gráfica de* π *vs* $\mathcal{R}_0$ *para valores de* $\mathcal{R}_0$ *en el intervalo* $[1.1, 5.0]$.
- *¿Qué comportamiento observa cuando* $\mathcal{R}_0 \to 1^+$*?*
- *¿Qué valor límite alcanza* π *cuando* $\mathcal{R}_0 \to \infty$*?*

Notas:

- *Para la resolución numérica, puede implementar su propio código o utilizar rutinas existentes en software científico. En cualquier caso, debe explicar claramente el método, justificar su elección y documentar el código.*
- *El valor* $\mathcal{R}_0 = 1.28$ *es típico para influenza estacional. Para referencia, se estima que COVID-19 (variante original) tuvo* $\mathcal{R}_0 \approx 2.5 - 3.5$ *y sarampión tiene* $\mathcal{R}_0 \approx 12 - 18$*.*
- *Recuerde que esta ecuación proviene del modelo SIR clásico y asume una población homogéneamente mezclada sin intervenciones, con una población totalmente susceptible [1].*

Distribución de puntos:

- Problemas obligatorios: 55 puntos
- Problemas extras opcionales: 35 puntos
- **Total máximo posible: 100 puntos (sobre base de 55)**

References

[1] Fred Brauer, Carlos Castillo-Chavez, and Carlos Castillo-Chavez. *Mathematical models in population biology and epidemiology*, volume 2. Springer, Springer New York Heidelberg Dordrecht London, 2 edition, 2012.

[2] David Ronald Kincaid and Elliott Ward Cheney. *Numerical analysis: mathematics of scientific computing*, volume 2. American Mathematical Soc., 2009.