

# Processamento de Imagens usando Grafos (MAC6903)

Prof. Dr. Paulo A. V. de Miranda

`pmiranda@vision.ime.usp.br`

Instituto de Matemática e Estatística (IME),  
Universidade de São Paulo (USP)

# Imagem Digital

Uma imagem digital genérica  $\hat{I}$  é um par  $(\mathcal{D}_I, \vec{I})$ , onde  $\mathcal{D}_I$  é um conjunto de pontos do  $Z^n$  (domínio da imagem), denominados *spels* (*space elements*), e  $\vec{I}$  é um mapeamento vetorial que associa a cada spel  $p$  em  $\mathcal{D}_I$  um vetor  $\vec{I}(p) = \{I_1(p), I_2(p), \dots, I_k(p)\} \in Z^k$  de valores escalares, associados a um conjunto de  $k$  propriedades físicas. O valor de  $n$  refere-se à dimensão da imagem e o valor de  $k$  ao número de bandas.

# Imagem em tons de cinza

Uma imagem  $\hat{I} = (\mathcal{D}_I, I)$  em tons de cinza (e.g. foto, imagem de ultrasom, fatia tomográfica) e bidimensional ( $\mathcal{D}_I \subset \mathbb{Z}^2$ ) possui apenas uma banda  $I$  ( $k = 1$ ), onde os spels são chamados pixels (*picture elements*). A imagem bidimensional é portanto uma matriz de tamanho  $N \times M$  pixels ( $N$  linhas e  $M$  colunas).

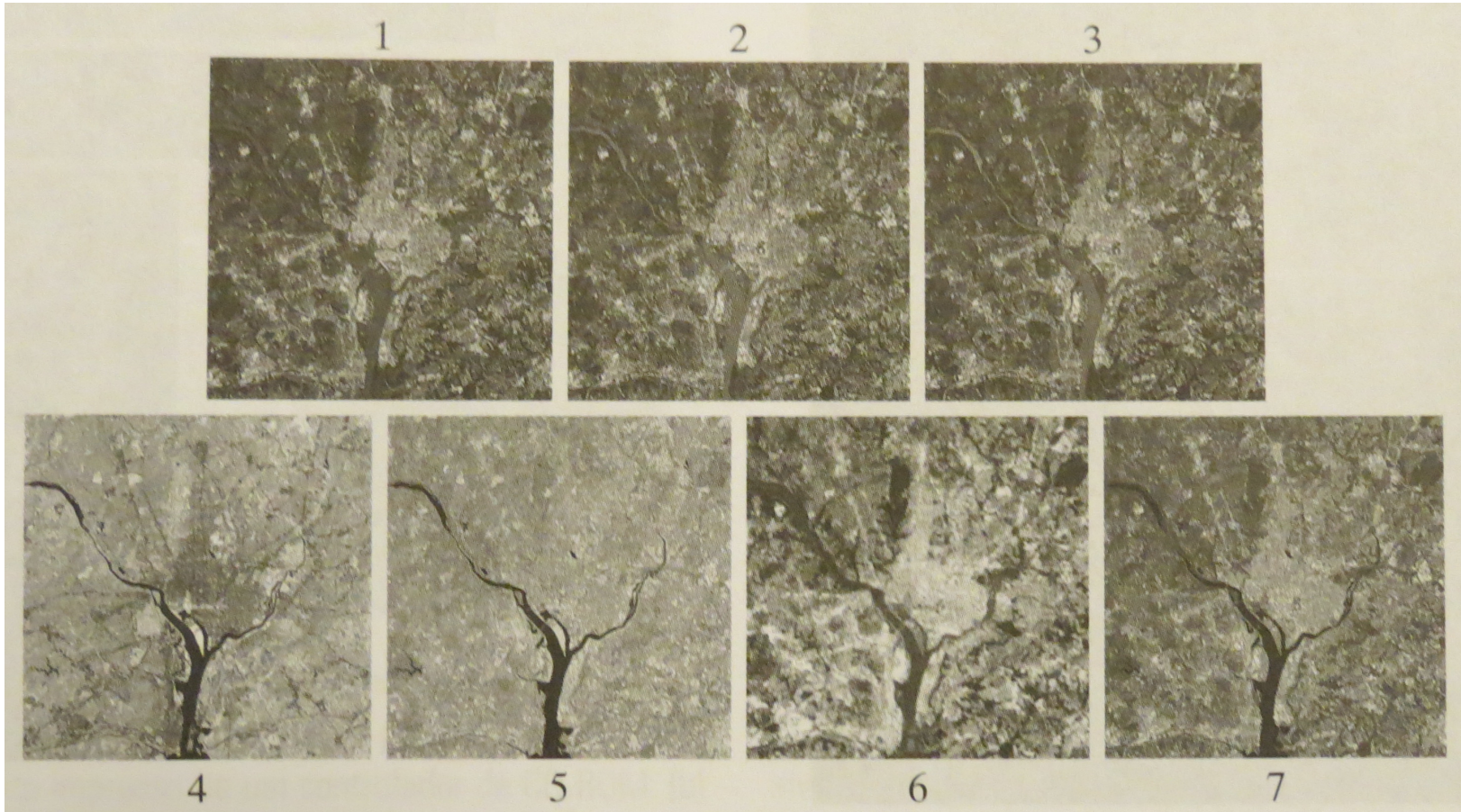
# Imagem multidimensional

Uma imagem  $\hat{I} = (\mathcal{D}_I, I)$  em tons de cinza e multidimensional define o domínio de amostragem  $\mathcal{D}_I \subset Z^n$ , para  $n > 2$ . Por exemplo, uma sequência espacial de fatias tomográficas é uma imagem tridimensional ( $n = 3$ ), e uma sequência espacial e temporal de fatias tomográficas é uma imagem tetradimensional ( $n = 4$ ). No primeiro caso, os spels são chamados de *voxels* (*volume element*) e a imagem é chamada de *volume*.

# Imagem multibanda

Uma imagem  $\hat{I} = (\mathcal{D}_I, \vec{I})$  é multibanda quando o mapeamento vetorial  $\vec{I}$  associa a cada spel  $p$  obrigatoriamente mais de um valor escalar ( $\vec{I}(p) = \{I_1(p), \dots, I_k(p)\}$ , para  $k > 1$ ). Imagens de satélite, por exemplo, possuem bandas que correspondem a imagens cinza obtidas nos comprimentos de onda do azul, vermelho, verde, infravermelho, infravermelho próximo, termal, e ultravioleta. O intervalo de amostragem define a resolução espectral. No caso de uma foto colorida temos  $k = 1, 2, 3$  correspondendo aos componentes vermelho, verde e azul. Observe que o vídeo colorido é uma imagem multidimensional e multibanda.

# Imagem multibanda



Imagens da área de Washington, D.C., vistas pelo satélite Landsat (Livro Gonzalez).



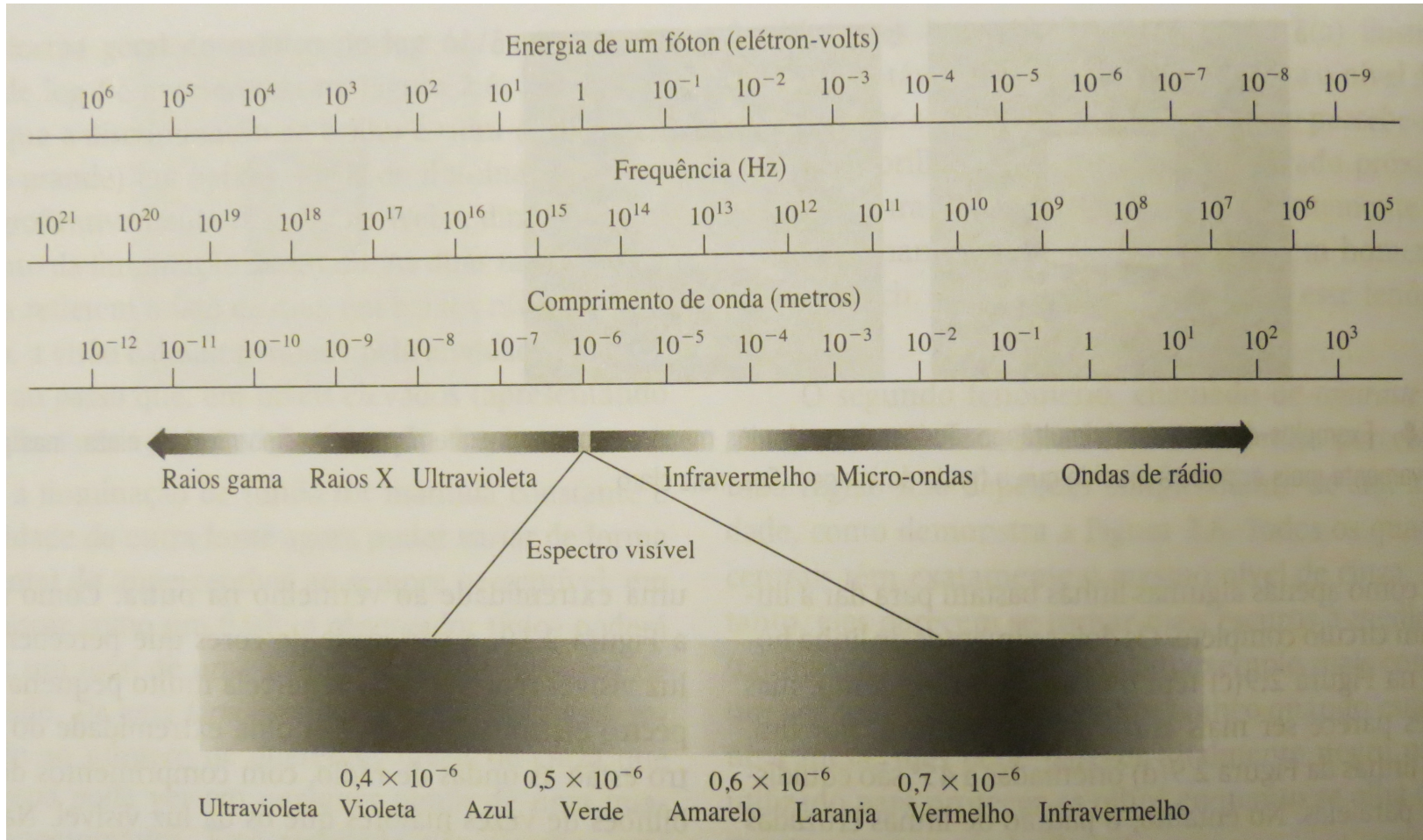
# Imagem multibanda

Bandas temáticas no satélite Landsat, da Nasa.

Número da banda	Nome	Comprimento de onda ( $\mu\text{m}$ )	Características e utilizações
1	Azul visível	0,45-0,52	Máxima penetração na água
2	Verde visível	0,52-0,60	Bom para a mensuração do vigor de plantas
3	Vermelho visível	0,63-0,69	Discriminação de vegetação
4	Infravermelho próximo	0,76-0,90	Mapeamento de biomassa e linha costeira
5	Infravermelho médio	1,55-1,75	Conteúdo de umidade do solo e vegetação
6	Infravermelho termal	10,4-12,5	Umidade do solo, mapeamento térmico
7	Infravermelho médio	2,08-2,35	Mapeamento mineral

Imagens da área de Washington, D.C., vistas pelo satélite Landsat (Livro Gonzalez).

# Imagem multibanda



Espectro eletromagnético.



# Imagem como um grafo

Existem várias formas de modelar um grafo a partir de uma imagem, definindo os nós do grafo e uma relação de adjacência entre eles.

- Dependendo do problema, pixels, vértices de pixels, arestas de pixels, ou regiões da imagem podem ser os nós.
- A relação de adjacência pode levar em conta a posição relativa entre os nós, bem como propriedades da imagem.

Podemos ainda estender a idéia para grafos onde os nós são objetos de uma imagem ou objetos (ou imagens) de um banco de dados.

# Imagem como um grafo

Inicialmente, vamos considerar o caso em que a imagem é interpretada como um grafo cujos nós são os pixels

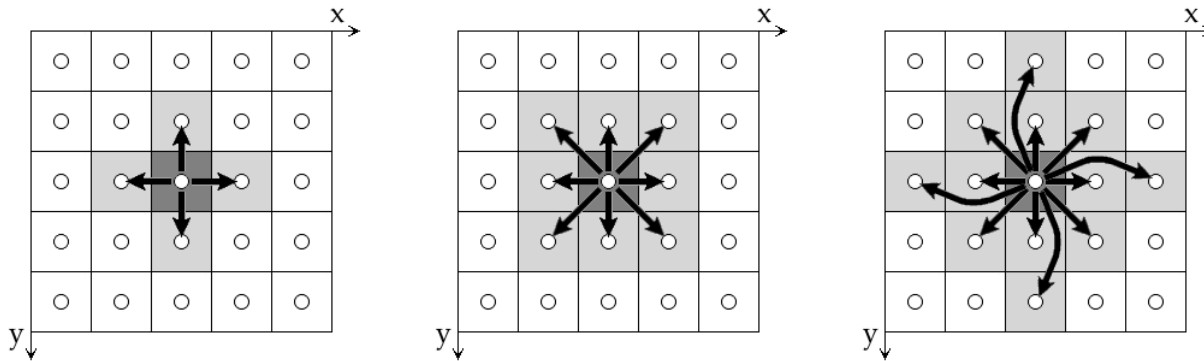
$p = (x_p, y_p)$  e os arcos são definidos por uma **relação de adjacência**  $\mathcal{A} \subset \mathcal{D}_I \times \mathcal{D}_I$ .

Se  $(p, q) \in \mathcal{A}$  (ou  $q \in A(p)$ ), dizemos que  $q$  é **adjacente** a  $p$ .

# Imagem como um grafo

Exemplos de relação de adjacência para o caso de uma imagem 2D:

- **1. Circular:**  $(p, q) \in \mathcal{A}$  se  $d(p, q) \leq \rho$ , onde  $d$  é a distância Euclideana e  $\rho$  é um escalar.



Adjacências euclidianas. (a) 2D de raio  $\rho = 1$  (vizinhos-4), (b) raio  $\rho = \sqrt{2}$  (vizinhos-8), (c) raio  $\rho = 2$ .

# Imagem como um grafo

Exemplos de relação de adjacência para o caso de uma imagem 2D:

- **2. Retangular:**  $(p, q) \in \mathcal{A}$  se  $|x_q - x_p| \leq \frac{a}{2}$  e  $|y_q - y_p| \leq \frac{b}{2}$ , onde  $a$  e  $b$  são os comprimentos dos lados do retângulo com centro em  $(x_p, y_p)$ .
- **3. Baseada em conjunto:**  $(p, q) \in \mathcal{A}$  se  $q - p \in \{(-1, -1), (1, -1)\}$ .
- **4. Baseada em propriedades locais:**  $(p, q) \in \mathcal{A}$  se  $d(p, q) \leq \rho_i$  e  $d(\vec{I}(p), \vec{I}(q)) \leq \rho_a$ , onde  $d()$  é o operador de distância Euclideana e  $\rho_i$  e  $\rho_a$  são os raios nos espaços imagem e de atributos (paramétrico), respectivamente.



# Relação de conexidade

- Um caminho  $\pi$  no grafo  $G = (\mathcal{D}_I, \mathcal{A})$  é uma sequência de pixels distintos  $\langle p_1, p_2, \dots, p_n \rangle$ , onde  $(p_i, p_{i+1}) \in \mathcal{A}$ ,  $i = 1, 2, \dots, n - 1$ .
- O pixel  $p_1$  é a origem  $org(\pi)$  do caminho, e  $p_n$  é o destino  $dst(\pi)$ .
- O caminho  $\pi$  é dito **trivial** se  $\pi = \langle p_1 \rangle$ .
- Seja  $\pi$  um caminho que termina em um pixel  $p$  e  $(p, q) \in \mathcal{A}$ , então  $\pi \cdot \langle p, q \rangle$  é dito o caminho resultante da concatenação de  $\pi$  e  $\langle p, q \rangle$  com as duas instâncias de  $p$  se fundindo em uma.
- Um pixel  $q$  é dito **conexo** a um pixel  $p$  se existir um caminho de  $p$  a  $q$  em  $G = (\mathcal{D}_I, \mathcal{A})$ .

# Componente Conexos

- Um **componente conexo** em  $G$  é um subconjunto maximal de  $\mathcal{D}_I$ , onde todos os pares  $(p, q)$  de pixels são conexos (i.e., existe um caminho de  $p$  a  $q$  e um caminho de  $q$  a  $p$ , que não são necessariamente os mesmos).
- O conjunto de componentes conexos forma uma partição de  $\mathcal{D}_I$  (i.e., os componentes conexos são disjuntos, e sua união é o conjunto  $\mathcal{D}_I$ ).
- Em muitas situações desejamos particionar uma imagem, identificando individualmente cada componente conexo. Por exemplo, podemos enumerar todos os componentes 1's de uma imagem binária ou definir componentes conexos em uma imagem cinza a partir de uma relação de dissimilaridade local entre pixels.

# Rotulação de componentes conexos

Considere o problema de obter uma partição da imagem, onde cada componente conexo recebe um rótulo  $l = 1, 2, \dots, c$  e o número  $c$  de componentes depende da relação de adjacência  $\mathcal{A}$ . Uma solução simples é aplicar a seguinte busca em largura no grafo  $G$ .

# Algoritmo de rotulação

**Algoritmo 1** — ALGORITMO DE ROTULAÇÃO DE COMPONENTES CONEXOS

ENTRADA: Imagem  $\hat{I} = (\mathcal{D}_I, \vec{I})$ , e relação de adjacência  $\mathcal{A}$ .

SAÍDA: Imagem rotulada  $\hat{L} = (\mathcal{D}_I, L)$ , onde  $L(p) = 0$  inicialmente  $\forall p \in \mathcal{D}_I$ .

AUXILIARES: Fila FIFO  $Q$  e variável inteira  $l = 1$ .

1. **Para Cada** pixel  $p \in \mathcal{D}_I$ , tal que  $L(p) = 0$ , **Faça**
2.      $L(p) \leftarrow l$  e insira  $p$  em  $Q$ .
3.     **Enquanto**  $Q \neq \emptyset$ , **Faça**
4.         Remova um pixel  $q$  de  $Q$ .
5.         **Para Cada**  $t \in \mathcal{A}(q)$ , tal que  $L(t) = 0$ , **Faça**
6.              $L(t) \leftarrow l$  e insira  $t$  em  $Q$ .
7.      $l \leftarrow l + 1$



# Rotulação por conjuntos disjuntos

O problema de rotulação de componentes conexos também pode ser visto como um problema de manutenção de conjuntos disjuntos (algoritmo *union-find*). A rotulação pode levar em conta propriedades mais globais dos componentes, como o brilho médio, por exemplo.

**Algoritmo 2** - Rotulação por conjuntos disjuntos:

ENTRADA: Imagem cinza  $\hat{I} = (\mathcal{D}_I, I)$ , relação de adjacência  $\mathcal{A}$  e limiar  $T$ .

SAÍDA: Imagem rotulada  $\hat{L} = (\mathcal{D}_I, L)$ .

AUXILIAR: Imagem de representantes  $\hat{R} = (\mathcal{D}_I, R)$  de cada componente, imagem  $\hat{S} = (\mathcal{D}_I, S)$  onde cada representante guarda a soma dos brilhos dos pixels do componente, imagem  $\hat{N} = (\mathcal{D}_I, N)$  onde cada representante guarda o número de pixels de seu componente, e variável inteira  $l = 1$ .

# Rotulação por conjuntos disjuntos

**Algoritmo 2** — ROTULAÇÃO POR CONJUNTOS DISJUNTOS (CONT.)

1. **Para Cada pixel**  $p \in \mathcal{D}_I$ , **Faça**  $R(p) \leftarrow p$ ,  $S(p) \leftarrow I(p)$ , e  $N(p) \leftarrow 1$ .
2. **Para Cada pixel**  $p \in \mathcal{D}_I$ , **Faça**
3.      $r_p \leftarrow \text{Representante}(\hat{R}, p)$ .
4.     **Para Cada pixel**  $q \in \mathcal{A}(p)$ , **Faça**
5.          $r_q \leftarrow \text{Representante}(\hat{R}, q)$ .
6.         **Se**  $r_q \neq r_p$ , **Então**
7.             **Se**  $\left| \frac{S(r_p)}{N(r_p)} - \frac{S(r_q)}{N(r_q)} \right| \leq T$ , **Então**
8.                  $\text{Junte}(\hat{R}, r_p, r_q, \hat{S}, \hat{N})$ .
9. **Para Cada pixel**  $p \in \mathcal{D}_I$ , **Faça**
10.      $R(p) \leftarrow \text{Representante}(\hat{R}, p)$ .
11.     **Se**  $R(p) = p$ , **Então**  $L(p) \leftarrow l$  e  $l \leftarrow l + 1$ .
12. **Para Cada pixel**  $p \in \mathcal{D}_I$ , **Faça**  $L(p) \leftarrow L(R(p))$ .

# Rotulação por conjuntos disjuntos

Algoritmo para encontrar o representante com compressão:

**Algoritmo 3** —  $Representante(\hat{R}, p)$

1. **Se**  $R(p) = p$ , **Então**
2.      $\perp$  **retorne**  $p$ .
3. **Senão**
4.      $\perp$  **retorne**  $R(p) \leftarrow Representante(\hat{R}, R(p))$ .

# Rotulação por conjuntos disjuntos

## Algoritmo de união de componentes com otimização:

**Algoritmo 4** —  $Junte(\hat{R}, r_p, r_q, \hat{S}, \hat{N})$

1. **Se**  $N(r_p) \geq N(r_q)$ , **Então**
2.      $\downarrow$       $N(r_p) \leftarrow N(r_p) + N(r_q), S(r_p) \leftarrow S(r_p) + S(r_q), \text{ e } R(r_q) \leftarrow r_p.$
3. **Senão**
4.      $\downarrow$       $N(r_q) \leftarrow N(r_q) + N(r_p), S(r_q) \leftarrow S(r_q) + S(r_p), R(r_p) \leftarrow r_q, \text{ e } r_p \leftarrow r_q.$

Observe que  $r_p$  pode ser atualizado na linha 4 da função Junte, portanto deve ser passado por referência.