2017 年矩阵理论考试试题

一、 选择题（每题 4 分，共 20 分）

1. 下列命题错误的是（　　　　）

(A) $(A\otimes B)^H = A^H \otimes B^H$ ；　　(B)若 $A\in C^{n\times n}$，且 $A^2=A$ 则 $\mathrm{rank}(A)=\mathrm{tr}(A)$；

(C) 设 $u\in C^n$ 且 $u^H u=1$，令 $H=E-2uu^H$，则 H 的谱半径为 1；

(D) 设 V_1,V_2 为空间 V 的任意子空间，则 $\dim(V_1+V_2)=\dim(V_1)+\dim(V_2)$。

2. 下列命题错误的是（　　　　）

(A)若 $A^H=A, A^2=A$，则 $A^+=A$；

(B) 若 $AA^H=A^HA$,则 $(A^m)^+=(A^+)^m$；

(C)若 $x\in C^n$，则 $\|x\|_\infty \le \|x\|_2 \le \|x\|_1$；

(D) 设 $A,B\in C^{n\times n}$ 的奇异值分别为 $\sigma_1\ge\sigma_2\ge\cdots\ge\sigma_n>0$，$\sigma_1'\ge\sigma_2'\ge\cdots\ge\sigma_n'>0$，如果 $\sigma_i>\sigma_i'\,(i=1,2,\cdots,n)$，则 $\|A^+\|_2>\|B^+\|_2$。

3. 下列说法正确的是（　　　　）

(A) 若 $A=\begin{bmatrix}\pi&0&0\\0&\pi&1\\0&0&\pi\end{bmatrix}$，则 $\sin A=\begin{bmatrix}0&0&0\\0&0&\sin 1\\0&0&0\end{bmatrix}$；

(B)若 A 为收敛矩阵，则 $E-A$ 可逆；

(C)矩阵函数 e^A 对任何矩阵 A 均有定义，无论 A 为实矩阵还是复矩阵；

(D)对任意方阵 A,B，均有 $e^Ae^B=e^{A+B}$。

4.下列选项中正确的是（　　）

(A) $A\in C^{n\times n}$ 且 $\|A\|_{m_\infty}<1$，则 A 为收敛矩阵；　(B) $A\in C^{n\times n}$ 为正规矩阵，则 $r(A)=\|A\|_2$；

(C) $A\in C_r^{m\times n}(r>0)$，则 $\|AA^+\|_F=r$；　(D) $\sigma_1\ge\sigma_2\ge\cdots\ge\sigma_r$ 为 A 的所有正奇异值，则

$\|A^+\|_2=\dfrac{1}{\sigma_1}$。

5. 下列结论错误的是(　　)

(A) 若 A 和 B 分别是列满秩和行满秩矩阵，则 $(AB)^+=B^+A^+$；

(B) 若矩阵 A 为行满秩矩阵，则 AA^H 是正定 Hermite 矩阵；

(C) 设 $A=(a_{ij})\in C^{n\times n}(n>1)$ 为严格对角占优矩阵，$D=diag(a_{11},a_{22},\cdots,a_{nn})$，则 $E-D^{-1}A$ 的谱半径 $r(E-D^{-1}A)\ge 1$；

(D) 任何可相似对角化的矩阵，皆可分解为幂等矩阵 $A_i(i=1,2,\cdots,n)$ 的加权和，即 $A=\sum_{i=1}^{n}\lambda_i A_i$。

二． **判断题（每题 4 分，共 20 分，正确的打∨，错误的打×）**

1. 若 $A\in C^{m\times n}$，且 $A\ne 0$，$(AA^-)^H=AA^-$，则 $\|AA^-\|_2=n$。（　　）

2. 若 $A\in C^{m\times n},G\in C^{n\times m}$ 且 $AGA=A$，则 $y=AGx,\forall x\in C^m$ 为 C^m 到 A 的值域上的正交投影。（　　）

3. 设 $A,B\in C^{n\times n}$ 都是可逆矩阵，且齐次线性方程组 $(A+B)x=0$ 有非零解，$\|\cdot\|$ 为算子范数，则 $\|AB^{-1}\|\ge 1$。（　　）

4. $\forall(x,y)\in R^2$，定义 $f(x,y)=\sqrt{2x^2+3y^2-4xy}$，则 $f(x,y)$ 为 R^2 上的向量范数。（　　）

5. 设矩阵 A 的最大秩分解为 $A=BD$，则 $Ax=0$ 当且仅当 $Dx=0$。（　　）

三. (10 分).设 $A=(a_{ij})\in C^{n\times n}$ 的特征值为 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$，证明：$\sum_{i=1}^{n}|\lambda_i|^2\le\|A\|_F^2$。

四. (10 分). (1) 设 $\lambda_i(i=1,2,\cdots,n)$ 为正规矩阵 $A\in C^{n\times n}$ 的特征值，证明：$|\lambda_i|^2\ (i=1,2,\cdots,n)$ 是 A^HA 的特征值；(2) 设 $A=(a_{ij})_{n\times n}$ 与 $B=(b_{ij})_{n\times n}$ 酉等价，证明：$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}|b_{ij}|^2=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}|a_{ij}|^2$。

五. (10 分). 设 $A\in C^{n\times n}$ 为可逆矩阵，λ 为 A 的任意一个特征值，$\|\cdot\|$ 为任意的算子范数，证明：$\dfrac{1}{\|A^{-1}\|}\le|\lambda|\le\sqrt[m]{\|A^m\|}$。

六. (13 分). 已知矩阵 $A=\begin{pmatrix}0&-1&1\\1&0&-1\\-1&1&0\\0&-1&1\end{pmatrix}, b=\begin{pmatrix}1\\1\\2\\1\end{pmatrix}$,

(1) 求矩阵 A 的最大秩分解；(2) 求 A^+； (3) 用广义逆矩阵方法判断方程组 $Ax=b$ 是否有解？ (4) 求方程组 $Ax=b$ 的最小范数解或最佳逼近解？（要求指出所求的是哪种解）(10 分)

七. (10 分)设 $A=\begin{pmatrix}\frac{2}{3}&\frac{1}{3}&0\\0&0&\frac{1}{3}\\0&\frac{1}{3}&0\end{pmatrix}$，计算： (1). $\sum_{k=0}^{\infty}A^k$； (2). e^{At}。

八. (7 分) 设 $A\in C^{n\times n}$ 为 Hermite 矩阵，λ_1,λ_n 分别是 A 的最大和最小特征值，证明：$\lambda_n\le a_{kk}\le\lambda_1\quad(k=1,2,\cdots,n.)$。

一、 选择题（每题5分，共25分）

1. 下列命题错误的是（ D ）

(A) $(A\otimes B)^H = A^H \otimes B^H$ (B)若 $A\in C^{n\times n}$，且 $A^2=A$ 则 $\mathrm{rank}(A)=\mathrm{tr}(A)$

(C) 设 $u\in C^n$ 且 $u^H u=1$，令 $H=E-2uu^H$，则 H 的谱半径为1

(D) 设 V_1, V_2 为空间 V 的任意子空间，则 $\dim(V_1+V_2)=\dim(V_1)+\dim(V_2)$

2. 下列命题错误的是（ D ）

(A)若 $A^H=A, A^2=A$，则 $A^+=A$，

(B) 若 $AA^H=A^HA$，则 $(A^m)^+=(A^+)^m$

(C)若 $x\in C^n$，则 $\|x\|_\infty \le \|x\|_2 \le \|x\|_1$，

(D) 设 $A,B\in C^{n\times n}$ 的奇异值分别为 $\sigma_1\ge\sigma_2\ge\cdots\ge\sigma_n>0$，$\sigma_1'\ge\sigma_2'\ge\cdots\ge\sigma_n'>0$，如

$\sigma_i>\sigma_i'\ (i=1,2,\cdots,n)$，则 $\|A^+\|_2>\|B^+\|_2$.

3. 下列说法正确的是（ B ）

(A) 若 $A=\begin{bmatrix}\pi&0&0\\0&\pi&1\\0&0&\pi\end{bmatrix}$，则 $\sin A=\begin{bmatrix}0&0&0\\0&0&\sin 1\\0&0&0\end{bmatrix}$.

(B)若 A 为收敛矩阵，则 $E-A$ 一定可逆.

(C)矩阵函数 e^A 对任何矩阵 A 均有定义，无论 A 为实矩阵还是复矩阵.

(D)对任意方阵 A,B，均有 $e^Ae^B=e^{A+B}$.

4. 下列选项中正确的是（ B ）

(A) $A\in C^{n\times n}$ 且 $\|A\|_{m_\infty}<1$，则 A 为收敛矩阵； (B) $A\in C^{n\times n}$ 为正规矩阵，则 $r(A)=\|A\|_2$；

(C) $A\in C_r^{m\times n}(r>0)$，则 $\|AA^+\|_F=\sqrt{r}$； (D) $\sigma_1\ge\sigma_2\ge\cdots\ge\sigma_r$ 为 A 的所有正奇异值，

$\|A^+\|_2=\dfrac{1}{\sigma_1}$.

5. 下列结论错误的是(C)

(A) 若 A 和 B 分别是列满秩和行满秩矩阵，则 $(AB)^+=B^+A^+$；

(B) 若矩阵 A 为行满秩矩阵，则 AA^H 是正定 Hermite 矩阵；

(C) 设 $A=(a_{ij})\in C^{n\times n}(n>1)$ 为严格对角占优矩阵，$D=diag(a_{11},a_{22},\cdots,a_{nn})$，则 $E-D^{-1}A$ 的谱半径 $r(E-D^{-1}A)\geq 1$；

(D) 任何可相似对角化的矩阵，皆可分解为幂等矩阵 $A_i(i=1,2,\cdots,n)$ 的加权和，即 $A=\sum_{i=1}^{n}\lambda_i A_i$.

二. 判断题（15 分）（正确的打∨，错误的打×）

1. 若 $A\in C^{m\times n}$，且 $A\neq 0$，$(AA^-)^H=AA^-$，则 $\|AA^-\|_2=n$.（ × ）

2. 若 $A\in C^{m\times n},G\in C^{n\times m}$ 且 $AGA=A$，则 $y=AGx,\forall x\in C^m$ 为 C^m 到 A 的值域上的正交投影.（ × ）

3. 设 $A,B\in C^{n\times n}$ 都是可逆矩阵，且齐次线性方程组 $(A+B)x=0$ 有非零解，$\|\bullet\|$ 为算子范数，则 $\|AB^{-1}\|\geq 1$.（ × ）

4. $\forall(x,y)\in R^2$，定义 $f(x,y)=\sqrt{2x^2+3y^2-4xy}$，则 $f(x,y)$ 为 R^2 上的范数.（ × ）

5. 设矩阵 A 的最大秩分解为 $A=BD$，则 $Ax=0$ 当且仅当 $Dx=0$.（ ∨ ）

三. **(10 分)**.设 $A=(a_{ij})\in C^{n\times n}$ 的特征值为 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$，证明：$\sum_{i=1}^{n}|\lambda_i|^2\leq\|A\|_F^2$.

3'

证明：因为 $A=(a_{ij})\in C^{n\times n}$，由 Schur 分解知 $A=UTU^H$，其中 T 的对角元为 A 的特征值，则

$A^HA = UT^HU^HUTU^H = UT^HTU^H$

$\sum_{i=1}^{n}|\lambda_i|^2=\sum_{i=1}^{n}|t_{ii}|^2\leq\sum_{i=1}^{n}|t_{ii}|^2+\sum_{i\neq j}|t_{ij}|^2=\|T\|_F^2$. 又由 $\|\bullet\|_F$ 的酉不变性，知 $\|A\|_F=$

4'

$\|UTU^H\|_F=\|T\|_F$. 所以 $\sum_{i=1}^{n}|\lambda_i|^2\leq\|A\|_F^2$. 3'

法2. 利用SVD. $A=U\begin{pmatrix}D&0\\0&0\end{pmatrix}V^H$

$A^HA=U^H\begin{bmatrix}D^2&0\\0&0\end{bmatrix}U \rightarrow \|A$

$=t$

$=$

$=$

$\times$

四.**(10 分)**. (1) 设 $\lambda_i(i=1,2,\cdots,n)$ 为正规矩阵 $A\in C^{n\times n}$ 的特征值，证明：$|\lambda_i|^2\ (i=1,2,\cdots,n)$ 是 A^HA 的特征值；(2) 设 $A=(a_{ij})_{n\times n}$ 与 $B=(b_{ij})_{n\times n}$ 酉等价，证明：$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}|b_{ij}|^2=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}|a_{ij}|^2$.

证明：(1)由 A 为正规矩阵得 $A=Udiag(\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n)U^H$，

则 $A^HA=Udiag(|\lambda_1|^2,|\lambda_2|^2,\cdots,|\lambda_n|^2)U^H$，

故 $|\lambda_i|^2\ (i=1,2,\cdots,n)$ 是 A^HA 的特征值.

五. (10 分). 设 $A \in C^{n\times n}$ 为可逆矩阵，λ 为 A 的任意一个特征值，$\|\cdot\|$ 为任意的算子范数，证明：$\frac{1}{\|A^{-1}\|} \le |\lambda| \le \sqrt[m]{\|A^m\|}$。

六. (13 分). 已知矩阵 $A=\begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}, b=\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$,

(1) 求矩阵 A 的最大秩分解；(2) 求 A^+； (3) 用广义逆矩阵方法判断方程组 $Ax=b$ 是否有解？ (4) 求方程组 $Ax=b$ 的最小范数解或最佳逼近解？（要求指出所求的是哪种解）(10 分)

七. (10 分) 设 $A=\begin{pmatrix} \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} \\ 0 & \frac{1}{3} & 0 \end{pmatrix}$，计算： (1). $\sum_{k=0}^{\infty} A^k$； (2). e^{At}。

法1. 因 $r(A)<1$. 所以 $\sum_{k=0}^{\infty} A^k = (E-A)^{-1}$

法2. ~~将~~ 将A相似对角化.

八. (7 分) 设 $A \in C^{n\times n}$ 为 Hermite 矩阵，λ_1, λ_n 分别是 A 的最大和最小特征值，证明：$\lambda_n \le a_{kk} \le \lambda_1 \quad (k=1,2,\cdots,n.)$。

证：利用 ~~商~~ Rayleigh 商. $\lambda_n \le \frac{x^HAx}{x^Hx} \le \lambda_1$.

~~再~~ 取 $x=(0,0,\cdots 1,0,\cdots 0)$，得证