2015《矩阵理论》参考答案

一、判断题（15 分，每小题 3 分）（对者打∨，错者打×）

1. $A\in R^{n\times n}$ 的奇异值为$\sigma_1\geq\sigma_2\geq\cdots\geq\sigma_n$，$R(x)=\dfrac{x^TA^TAx}{x^Tx}$，则 $\max\limits_{0\neq x\in R^n}R(x)=\sigma_1$ （ × ）

2. 设 A 为 n 阶矩阵，则 $AA^+=A^+A$. （ × ）

3. 设 $A^2=A,B^2=B$，则 $(A\otimes B)^2=A\otimes B$. （ ∨ ）

4. 设 $\rho(A)$ 为矩阵 A 的谱半径，则 $\rho(A)\leq\|A\|_{m_\infty}$. （ × ）

5. 设 $A\in C^{n\times n}$ 的行列式 $\det A=0$，则 $\|E-A\|_2\geq 1$，其中 E 为单位矩阵. （ ∨ ）

二． 选择题（每题 3 分，共 15 分）

1. 若 A,B 均为 n 阶方阵，下列结论错误的是……………………………………………（ C ）

A. $(A\otimes B)^{-1}=A^{-1}\otimes B^{-1}$.　　B. 若$A,B$为正规矩阵，则$A\otimes B$也为正规矩阵.

C. $Vec(AXB)=(A^T\otimes B)VecX$.　　D. $rank(A\otimes B)=rank\ A\bullet rank\ B$.

2. 下列命题正确的是……………………………………………………………………（ C ）

A. 若 A 为正规矩阵，则 $A^H=A$.　　B. 若矩阵 A 对角占优，则 A 一定可逆.

C. 设 $A\in C^{n\times n}$ 满足 $\sum\limits_{i=1}^{n}|a_{ij}|<1(j=1,2,\cdots,n)$，则 A 的谱半径 $\rho(A)<1$.

D. 若 n 阶方阵 A 存在矩阵范数 $\|\bullet\|$ 使得 $\|A\|<1$，则 A 为收敛矩阵

3. 下列命题错误的是……………………………………………………………………（ A ）

A. $R(A^+)=R(A)$ ($R(A)$表示矩阵A的值域)

B. 设 $A\in C^{n\times n}$，$B=\begin{pmatrix}0 & A\\ A^H & 0\end{pmatrix}$，则 $\|B\|_2=\|A\|_2$.

C. A 为正规矩阵，则 A 的特征向量也是 A^H 的特征向量.

D. $A^2=A$ 且 $A\neq E$（E 为单位矩阵），则 A 不是严格对角占优矩阵.

4.设 $A^2=A\neq O$，$B=cA$，若 $\sum\limits_{k=0}^{\infty}B^k$ 收敛，则 c 为………………………………………（ D ）

A. $c>1$　　B. $|c|\geq 1$　　C. $|c|\leq 1$　　D. $|c|<1$

5. 下列结论正确的是……………………………………………………………………（ A ）

A. $\frac{1}{\sqrt{n}}\|A\|_{m_2}\le\|A\|_2$ B. A是列满秩矩阵，则$A^+=A_L^{-1}$ C. $rank(A)=rank(A^-)$

D. $\sum_{i=1}^{k}\lambda_i A_i$是单纯矩阵$A\in C_r^{n\times n}(r<n)$的谱分解，则$\sum_{i=1}^{k}rank(A_i)=r$.

二．计算和证明（共 70 分）

1. (12 分)设$A\in C^{n\times n}$，E为单位矩阵，$\|A\|_a$为从属于向量范数$\|x\|_a$的算子范数，则当$\|A\|_a<1$，

证明:(1) $E-A$可逆；(2) $\|(E-A)^{-1}\|_a\le(1-\|A\|_a)^{-1}$.

证：(1) $\forall x\ne 0\in C^n \Rightarrow \|(E-A)x\|_a=\|x-Ax\|_a\ge\|x\|_a-\|Ax\|_a\ge\|x\|_a-\|A\|_a\|x\|_a$

$=\|x\|_a(1-\|A\|_a)>0\Rightarrow(E-A)x\ne 0\Rightarrow(E-A)$可逆

(2) $(E-A)^{-1}(E-A)=E\Rightarrow(E-A)^{-1}=E+A(E-A)^{-1}\Rightarrow$

$\|(E-A)^{-1}\|_a=\|E+A(E-A)^{-1}\|_a\le\|E\|_a+\|A\|_a\|(E-A)^{-1}\|_a\Rightarrow$

$(1-\|A\|_a)\|(E-A)^{-1}\|_a\le\|E\|_a=1$

2. (13 分) (1)设$A\in C^{m\times n}$，证明：$rank(A)=rank(A^HA)$；(2)设$\lambda_i(i=1,2,\cdots,n)$是正规矩阵$A\in C^{n\times n}$的特征值，证明：$|\lambda_i|^2\ (i=1,2,\cdots,n)$为$AA^H$的特征值.

证：(1) 设 $rank(A^HA)=r$，则$A^HAx=0$ 的解空间W 为 $n-r$ 维.

设 $x_1\in W$，则$x_1^HA^HAx_1=(Ax_1)^HAx_1=0$得$Ax_1=0$，所以$rank(A)\le rank(A^HA)$.

又因为$rank(A)\ge rank(A^HA)$，所以$rank(A)=rank(A^HA)$.

(2) 因为A是正规矩阵，所以A与对角矩阵酉相似,即存在 n 阶酉矩阵 U，使得

$A=Udiag(\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n)U^H$，其中，$\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$是$A$ 的特征值，故，

$AA^H=Udiag(|\lambda_1|^2,|\lambda_2|^2,\cdots,|\lambda_n|^2)U^H$

所以$|\lambda_i|^2\ (i=1,2,\cdots,n)$为$AA^H$的特征值.

3. (10 分) 设$A\in C^{m\times n}$，证明：A是右可逆矩阵的充要条件是A是行满秩矩阵.

证：充分性：A为行满秩$\Rightarrow AA^H$为满秩矩阵$\Rightarrow AA^H(AA^H)^{-1}=E \Rightarrow G=(A^HA)^{-1}A^H$ 为 A 的右逆矩阵.

必要性：A 是右可逆矩阵$\Rightarrow AA_R^{-1}=E \Rightarrow rank(A)\geq rank(A_L^{-1}A)=m \Rightarrow rank(A)=m$

4.(10 分) 证明矩阵 A 为单纯矩阵且 A 的特征值都为实数.

证：因为 A 的盖尔圆盘的半径为 $R_i=\dfrac{i}{i+1}+\dfrac{i}{(i+1)^2}+\cdots+\dfrac{i}{(i+1)^{n-1}}=1-\dfrac{1}{(i+1)^{n-1}}<1$

所以 A 的盖尔圆盘 $S_i=\{z:|z-a_{ii}|\leq R_i\}(i=1,2,\cdots,n)$ 都是孤立的，从而 A 的特征值互不相同.

故 A 为单纯矩阵.

矩阵 A 为实矩阵，它如有复特征值必成共轭对出现，所以由圆盘定理 2 知道，A 的特征值都为实数.

5. (15 分)已知 $A=\begin{pmatrix}1&1&-1\\-1&0&1\\1&2&-1\\0&1&-1\end{pmatrix}$，$b=\begin{pmatrix}1\\1\\2\\1\end{pmatrix}$. (1) 求矩阵 A 的最大秩分解；(2) 求 A^+；(3) 判断方程组 $Ax=b$ 是否有解？ (4) 求方程组 $Ax=b$ 的最小范数解及通解或最小二乘解通解及其最佳逼近解?(指出所求的是哪种解).

解: (1) $A=\begin{pmatrix}1&1&-1\\-1&0&1\\1&2&-1\\0&1&-1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\\0&0&0\end{pmatrix}$，所以 A 的最大秩分解为 $A=AE$；

(2) $A^+=(A^HA)^{-1}A^H=\dfrac{1}{6}\begin{pmatrix}2&-2&2&-6\\0&3&3&0\\0&3&3&-6\end{pmatrix}$

(3) $AA^+b=\dfrac{1}{6}\begin{pmatrix}4\\5\\13\\6\end{pmatrix}\neq b$，故方程组无解；

(4) 方程组最佳逼近解为 $A^+b=\dfrac{1}{6}\begin{pmatrix}-2\\9\\3\end{pmatrix}$ $=\begin{bmatrix}-\frac{1}{3}\\\frac{3}{2}\\\frac{1}{2}\end{bmatrix}$

最小二乘解通解为$\dfrac{1}{6}\begin{pmatrix}-2\\9\\3\end{pmatrix}+(E-A^+A)u,\ \forall u\in C^n$

6. (10 分) (1) 设 $A=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 2 & 1\end{pmatrix}$，求 $\cos At$；

(2) 证明：$\lim\limits_{k\to+\infty}A^{(k)}=0$的充分必要条件是 $\lim\limits_{k\to+\infty}A^{(k)}x=0,\quad \forall x\in R^n$.

解：(1) $|\lambda E-A|=\begin{vmatrix}\lambda-1 & -2\\ -2 & \lambda-1\end{vmatrix}=0\Rightarrow \lambda_1=-1,\lambda_2=3$ 3'

对应的特征向量为: $\alpha_1=\begin{pmatrix}-1 & 1\end{pmatrix}^T,\alpha_2=\begin{pmatrix}1 & 1\end{pmatrix}^T$

令 $P=\begin{pmatrix}-1 & 1\\ 1 & 1\end{pmatrix}$，故

$$\cos At=P\begin{pmatrix}\cos t & 0\\ 0 & \cos 3t\end{pmatrix}P^{-1}=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}\cos t+\cos 3t & -\cos t+\cos 3t\\ -\cos t+\cos 3t & \cos t+\cos 3t\end{pmatrix}$$ 2'

(2) `必要性: (法 1) $\lim\limits_{k\to\infty}A^{(k)}=0\Leftrightarrow\lim\limits_{k\to\infty}\|A^{(k)}-0\|=0\Leftrightarrow\lim\limits_{k\to\infty}\|A^{(k)}\|=0$

$$0\le\|A^{(k)}x\|\le\|A^{(k)}\|\bullet\|x\|\Rightarrow\lim_{k\to\infty}\|A^{(k)}x\|=0\Rightarrow\lim_{k\to\infty}A^{(k)}x=0$$ 5

(法 2) 由 $\lim\limits_{k\to\infty}A^{(k)}=A,\lim\limits_{k\to\infty}B^{(k)}=B,\lim\limits_{k\to\infty}A^{(k)}B^{(k)}=AB$,可得 $\lim\limits_{k\to\infty}A^{(k)}x=0x=0$. 2

充分性: 取 $x=\varepsilon_i=(0,\cdots 0,\underset{i}{1},0,\cdots,0)^T\in R^n\ (i=1,2,\cdots,n)$, $A^{(k)}=(\alpha_1^{(k)},\cdots,\alpha_i^{(k)},\cdots,\alpha_n^{(k)})$,则

$\lim\limits_{k\to\infty}A^{(k)}\varepsilon_i=0\Leftrightarrow\lim\limits_{k\to\infty}\alpha_i^{(k)}=0(i=1,2,\cdots,n)\Leftrightarrow\lim\limits_{k\to\infty}A^{(k)}=0$ 3