§3 自反广义逆矩阵

程光辉

2020 年 5 月 15 日

定义 1 设 $\boldsymbol{A} \in \mathbf{C}^{m\times n}$，如果存在矩阵 $\boldsymbol{G} \in \mathbf{C}^{n\times m}$，使得

$$\boldsymbol{AGA} = \boldsymbol{A},\ \boldsymbol{GAG} = \boldsymbol{G}$$

同时成立，则称 $\boldsymbol{G}$ 为 $\boldsymbol{A}$ 的自反广义逆矩阵，记为 $\boldsymbol{G} = \boldsymbol{A}_r^-$.

例 1 设 $\boldsymbol{A} = (\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_r) \in \mathbf{U}_r^{m\times r}$, 即 $\boldsymbol{\alpha}_i^H \boldsymbol{\alpha}_j = \begin{cases} 1,\ i = j \\ 0,\ i \neq j \end{cases} \quad (i, j = 1, 2, \cdots, r)$, 则 $\boldsymbol{A}^H$ 为 $\boldsymbol{A}$ 的自反广义逆.

例 2 设 $\boldsymbol{A} \in \mathbf{C}^{m\times n}$ 是行满秩矩阵，则 $\boldsymbol{A}$ 的右逆矩阵 $\boldsymbol{A}_R^{-1}$ 为 $\boldsymbol{A}$ 的一个自反广义逆.

定理 1 任何矩阵都有自反广义逆矩阵.

证明： (1) 若 $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{O}$，则 $\boldsymbol{A}_r^- = \boldsymbol{O}$，显然成立.

(2) 对 $\boldsymbol{A} \neq \boldsymbol{O}$，不妨设 $\boldsymbol{A} \in \mathbf{C}_r^{m\times n}$，则存在可逆矩阵 $\boldsymbol{P}$, $\boldsymbol{Q}$，使得

$$\boldsymbol{A} = \boldsymbol{P} \begin{bmatrix} \boldsymbol{E}_r & \boldsymbol{O} \\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{O} \end{bmatrix} \boldsymbol{Q},$$

取

$$\boldsymbol{G} = \boldsymbol{Q}^{-1} \begin{bmatrix} \boldsymbol{E}_r & \boldsymbol{X} \\ \boldsymbol{Y} & \boldsymbol{YX} \end{bmatrix} \boldsymbol{P}^{-1},$$

直接验证即可.

定理 2 设 $\boldsymbol{X}, \boldsymbol{Y} \in \mathbf{C}^{n\times m}$ 均为 $\boldsymbol{A} \in \mathbf{C}^{m\times n}$ 的广义逆矩阵，则

$$\boldsymbol{Z} = \boldsymbol{XAY}$$

是 $\boldsymbol{A}$ 的自反广义逆矩阵.

证明：因为 $\boldsymbol{X}$, $\boldsymbol{Y}$ 是 $\boldsymbol{A}$ 的广义逆矩阵，则 $\boldsymbol{AXA}=\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{AYA}=\boldsymbol{A}$，进而有

$$\boldsymbol{AZA}=\underline{\boldsymbol{AXA}}\boldsymbol{YA}=\boldsymbol{AYA}=\boldsymbol{A},$$

和

$$\boldsymbol{ZAZ}=\boldsymbol{X}\underline{\boldsymbol{AYA}}\boldsymbol{XAY}=\boldsymbol{X}\underline{\boldsymbol{AXA}}\boldsymbol{Y}=\boldsymbol{XAY}=\boldsymbol{Z},$$

得证.

定理 3 设 $\boldsymbol{A}\in\mathbf{C}^{m\times n}$，$\boldsymbol{A}^-$ 是 $\boldsymbol{A}$ 的广义逆矩阵，则 $\boldsymbol{A}^-$ 是 $\boldsymbol{A}$ 的自反广义逆矩阵的充要条件是

$$\mathrm{rank}(\boldsymbol{A})=\mathrm{rank}(\boldsymbol{A}^-).$$

证明： **(必要性)** 因为 $\boldsymbol{A}^-$ 是 $\boldsymbol{A}$ 的自反广义逆矩阵，即有

$$\boldsymbol{AA}^-\boldsymbol{A}=\boldsymbol{A},\ \boldsymbol{A}^-\boldsymbol{AA}^-=\boldsymbol{A}^-,$$

因此，

$$\mathrm{rank}(\boldsymbol{A})=\mathrm{rank}(\boldsymbol{AA}^-\boldsymbol{A})\le\mathrm{rank}(\boldsymbol{A}^-)\le\mathrm{rank}(\boldsymbol{A}^-\boldsymbol{AA}^-)\le\mathrm{rank}(\boldsymbol{A}),$$

即

$$\mathrm{rank}(\boldsymbol{A})=\mathrm{rank}(\boldsymbol{A}^-).$$

(充分性) 因为 $\boldsymbol{AA}^-\boldsymbol{A}=\boldsymbol{A}$，且 $\mathrm{rank}(\boldsymbol{A})=\mathrm{rank}(\boldsymbol{A}^-)$，因此

$$\mathrm{rank}(\boldsymbol{A})=\mathrm{rank}(\boldsymbol{A}^-\boldsymbol{A})=\mathrm{rank}(\boldsymbol{A}^-).$$

又由 $\mathbf{R}(\boldsymbol{A}^-\boldsymbol{A})\subset\mathbf{R}(\boldsymbol{A}^-)$，得 $\mathbf{R}(\boldsymbol{A}^-\boldsymbol{A})=\mathbf{R}(\boldsymbol{A}^-)$，故存在 $\boldsymbol{X}\in\mathbf{C}^{n\times m}$，使得 $\boldsymbol{A}^-=\boldsymbol{A}^-\boldsymbol{AX}$.

因为

$$\boldsymbol{A}=\boldsymbol{AA}^-\boldsymbol{A}=\boldsymbol{AA}^-\boldsymbol{AXA}=\boldsymbol{AXA},$$

即 $\boldsymbol{X}$ 为 $\boldsymbol{A}$ 的广义逆矩阵，由定理 2 知，$\boldsymbol{A}^-$ 为 $\boldsymbol{A}$ 的自反广义逆矩阵.

定理 4 设 $\boldsymbol{A}\in\mathbf{C}^{m\times n}$，$\boldsymbol{X}\in\mathbf{C}^{n\times m}$，则下列任意两个等式成立都可推导得第三个等式成立.

(1) $\mathrm{rank}(\boldsymbol{A})=\mathrm{rank}(\boldsymbol{X})$;

(2) $\boldsymbol{AXA}=\boldsymbol{A}$;

(3) $\boldsymbol{XAX}=\boldsymbol{X}$.

定理 5 设 $\boldsymbol{A} \in \mathbf{C}^{m\times n}$，则

$$\boldsymbol{X} = \left(\boldsymbol{A}^H\boldsymbol{A}\right)^- \boldsymbol{A}^H,\ \boldsymbol{Y} = \boldsymbol{A}^H\left(\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^H\right)^-$$

都是 $\boldsymbol{A}$ 的自反广义逆矩阵.

证明: 因为 $\operatorname{rank}(\boldsymbol{A}^H) = \operatorname{rank}(\boldsymbol{A}^H\boldsymbol{A})$, $\mathrm{R}(\boldsymbol{A}^H\boldsymbol{A}) \subset \mathrm{R}(\boldsymbol{A}^H)$，则有 $\mathrm{R}(\boldsymbol{A}^H) = \mathrm{R}(\boldsymbol{A}^H\boldsymbol{A})$，于是存在矩阵 $\boldsymbol{D} \in \mathbf{C}^{n\times m}$，使得

$$\boldsymbol{A}^H = \boldsymbol{A}^H\boldsymbol{A}\boldsymbol{D},$$

即 $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{D}^H\boldsymbol{A}^H\boldsymbol{A}$.

因为

$$\boldsymbol{AXA} = \boldsymbol{A}\left(\boldsymbol{A}^H\boldsymbol{A}\right)^- \boldsymbol{A}^H\boldsymbol{A} = \boldsymbol{D}^H\boldsymbol{A}^H\boldsymbol{A}\left(\boldsymbol{A}^H\boldsymbol{A}\right)^- \boldsymbol{A}^H\boldsymbol{A} = \boldsymbol{D}^H\boldsymbol{A}^H\boldsymbol{A} = \boldsymbol{A},$$

所以 $\boldsymbol{X}$ 是 $\boldsymbol{A}$ 的广义逆矩阵.

又因

$$\operatorname{rank}(\boldsymbol{A}) \le \operatorname{rank}(\boldsymbol{X}) = \operatorname{rank}\left(\left(\boldsymbol{A}^H\boldsymbol{A}\right)^- \boldsymbol{A}^H\right) \le \operatorname{rank}(\boldsymbol{A}^H) = \operatorname{rank}(\boldsymbol{A}),$$

即 $\operatorname{rank}(\boldsymbol{A}) = \operatorname{rank}(\boldsymbol{X})$，由定理 3 知，$\boldsymbol{X}$ 是 $\boldsymbol{A}$ 的自反广义逆矩阵.

定理 6 设 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}_r^-$ 和 $\boldsymbol{A}_r^-\boldsymbol{A}$ 都是幂等矩阵.

证明： 直接验证即可.

$$\left(\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}_r^-\right)^2 = \boldsymbol{A}\boldsymbol{A}_r^-\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}_r^- = \boldsymbol{A}\boldsymbol{A}_r^-,$$

即 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}_r^-$ 是幂等矩阵.

同理，可证 $\boldsymbol{A}_r^-\boldsymbol{A}$ 是幂等矩阵.