一、1. X $\|x\| = \sqrt{x^TAx} \geq 0$，当且仅当 $x=0$ 时，$\|x\|=0$

$\|\lambda x\| = \sqrt{(\lambda x)^T A(\lambda x)} = \sqrt{\lambda^2 x^T Ax} = \lambda\|x\|$

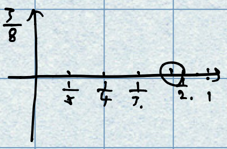
$\|x+y\| = \sqrt{(x+y)^T A(x+y)}$

2. ✓ $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i^2 \leq \|A\|_F^2$，当且仅当A为正规矩阵等号成立。

3. X $\|AA^{-1}\|_2 = \sqrt{r[(AA^{-1})^H(AA^{-1})]} = \sqrt{r(AA^{-1}AA^{-1})} = \sqrt{r(E_m)} = \sqrt{\max_i|\lambda_i|} = 1$.

4. X H为酉阵，$\|u\|_2 = \sqrt{u^Hu} = 1$ $\|H\|_{m_2}^2 = tr(H^HH) = n$.

5. ✓ $r(A) = \max_i|\lambda_i|$ $|z_1 - \frac{1}{5}| \leq \frac{3}{5}$ $|z_2 - \frac{1}{3}| \leq \frac{1}{2}$. $|z_3 - \frac{1}{7}| \leq \frac{3}{7}$ $|z_4 - \frac{1}{2}| \leq \frac{3}{8}$



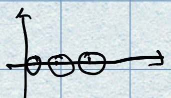
6. ✓ $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ $r(A) = 2$. $\|2A\|_{m_\infty} = 4$.

7. ✓ $x = (2,2)$. $\|x\|_1 = 4$ $\|x\|_2 = 2\sqrt{2}$ $2\|x\|_2 = 4\sqrt{2}$

8. X.

9. X $G = A^- = D_R^- B_L^-$ $\Rightarrow$ $DGB = DD_R^-B_L^-B = E_r$. 则 $r(DGB) = r$.

10. ✓.



圆盘两两不相交，则λ为实数

二、证：(1) ① $\|A\| = \sqrt{mn}\max_{i,j}|a_{ij}|$，又 $|a_{ij}| \geq 0$. $m>0$, $n>0$. $\Rightarrow$ $\|A\| \geq 0$，当且仅当 $A=0$ 时，$\|A\|=0$.

② $\|\lambda A\| = \sqrt{mn}\max_{i,j}|\lambda a_{ij}| = |\lambda|\sqrt{mn}\max_{i,j}|a_{ij}| = |\lambda|\,\|A\|$.

③ $\|A+B\| = \sqrt{mn}\max_{i,j}|a_{ij}+b_{ij}| \leq \sqrt{mn}\max_{i,j}|a_{ij}| + \sqrt{mn}\max_{i,j}|b_{ij}| = \|A\| + \|B\|$

则 $\|A\|$ 为矩阵范数.

(2) $\|Ax\|_2 = \left(\sum_{i=1}^{m}\left|\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j\right|^2\right)^{\frac{1}{2}} \leq \left[\sum_{i=1}^{m}\left(\sum_{j=1}^{n}|a_{ij}||x_j|\right)^2\right]^{\frac{1}{2}} \leq \left(\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}|a_{ij}|^2\sum_{j=1}^{n}|x_j|^2\right)^{\frac{1}{2}}$

$= \left(\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}|a_{ij}|^2\right)^{\frac{1}{2}}\left(\sum_{j=1}^{n}|x_j|^2\right)^{\frac{1}{2}} \leq \left(mn\max_{i,j}|a_{ij}|^2\right)^{\frac{1}{2}}\|x\|_2$

$= \sqrt{mn}\max_{i,j}|a_{ij}|\,\|x\|_2 = \|A\|\,\|x\|_2$.

则 $\|A\|$ 与 $\|x\|_2$ 相容.

三、解：$r(A) = \min\{\|A\|_1, \|A\|_\infty\}$.

又 $\|A\|_1 = \frac{499}{420}$ $\|A\|_\infty = 1$. 则 $r(A) = 1$.

四、证：$Ax = \lambda x$. $Ay = uy$ 且 $\lambda \neq u$. 则 λ, u 是属于A的不同特征值，则x与y与其对应的特征向量

又A为正规矩阵，则A可相似对角化. ⇒ 从属于不同特征值的特征向量之间相互正交.

即x, y正交.

五、证：D为列满秩矩阵，则 $D^+ = (D^HD)^{-1}D^H$

① $\|A\| = \|DAD^+\|_2$ 又 $\|\cdot\|_2$ 为算子范数，则 $\|DAD^+\|_2 \geq 0$.

即 $\|A\| \geq 0$，当且仅当 $A=0$ 时有 $\|A\|=0$.

② $\|\lambda A\| = \|D\lambda AD^+\|_2 = |\lambda|\,\|DAD^+\|_2 = |\lambda|\,\|A\|$.

③ $\|A+B\| = \|D(A+B)D^{+}\|_2 = \|DAD^{+}+DBD^{H}\|_2 \leqslant \|DAD^{H}\|_2 + \|DBD^{H}\|_2 = \|A\| + \|B\|$.

则 $\|A\|$ 为矩阵范数.

六.解: (1)

$$A=\begin{pmatrix}1&2&2&1\\1&1&1&1\\2&1&1&2\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&0&1\\0&1&1&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}\quad 则\ B=\begin{pmatrix}1&2\\1&1\\2&1\end{pmatrix}\quad D=\begin{pmatrix}1&0&0&1\\0&1&1&0\end{pmatrix}$$

(2). $B^{+}=(B^{H}B)^{-1}B^{H}=\frac{1}{11}\begin{pmatrix}-4&1&7\\7&1&-4\end{pmatrix}$

$D^{+}=D^{H}(DD^{H})^{-1}=\frac{1}{4}\begin{pmatrix}2&0\\0&2\\0&2\\2&0\end{pmatrix}$ 则 $A^{+}=D^{+}B^{+}=\frac{1}{22}\begin{pmatrix}-4&1&7\\7&1&-4\\7&1&-4\\-4&1&7\end{pmatrix}$

(3). $Ax=b$ 不相容. 最佳逼近解为 $x=A^{+}b=\frac{1}{11}\begin{pmatrix}2\\2\\2\\2\end{pmatrix}$

七.(1) 证:

$D=\begin{pmatrix}a_{11}&&&0\\&a_{22}&&\\&&\ddots&\\0&&&a_{nn}\end{pmatrix}$. $\Rightarrow D^{-1}=\begin{pmatrix}\frac{1}{a_{11}}&&&0\\&\frac{1}{a_{22}}&&\\&&\ddots&\\0&&&\frac{1}{a_{nn}}\end{pmatrix}$ 则 $D^{-1}A=\begin{pmatrix}1&&&*\\&1&&\\&&\ddots&\\*&&&1\end{pmatrix}$

则 $E-D^{-1}A=\begin{pmatrix}0&-\frac{a_{12}}{a_{11}}&\cdots&-\frac{a_{1n}}{a_{11}}\\-\frac{a_{21}}{a_{22}}&0&\cdots&-\frac{a_{2n}}{a_{22}}\\\vdots&&\ddots&\vdots\\-\frac{a_{n1}}{a_{nn}}&-\frac{a_{n2}}{a_{nn}}&\cdots&0\end{pmatrix}$ 假设 A 第一行模和最大. A为严格对角占优矩阵.

则 $a_{11}>a_{12}+\cdots+a_{1n}$.

$$\Rightarrow \|E-D^{-1}A\|_\infty=\frac{a_{12}+\cdots+a_{1n}}{a_{11}}<1.$$

则 $r(E-D^{-1}A)=\max_i|\lambda_i(E-D^{-1}A)|<\|E-D^{-1}A\|<1$.