9. 初等矩阵

一、三个初等矩阵

(1)交换两行(列)的位置初等矩阵;

$$P_1 = E - E_{ii} - E_{jj} + E_{ij} + E_{ji} = E - (e_i - e_j)(e_i - e_j)^T$$

(2)某行(列)乘以非零数k的初等矩阵;

$$P_2 = E - (1-k)E_{ii} = E - (1-k)e_i e_i^T$$

(3)将某行(列)的k倍加到另外一行(列)的初等矩阵.

$$P_3 = E + kE_{ji} = E + ke_j e_i^T$$

P_1, P_2, P_3的共性：$E - \sigma uv^T$.

返回

二、初等矩阵的一般形式

定义1 设$u, v \in C^n$, $\sigma \in C$, 则称 $E(u,v,\sigma)=E-\sigma uv^H$ 为初等矩阵.

1. 初等矩阵的性质

1). 初等矩阵的特征向量$(u,v\neq 0, \sigma\neq 0)$.

注意到 $E(u,v;\sigma)u=(E-\sigma uv^H)u=u-\sigma uv^H u$

$$=u-\sigma u(v^H u)=u-\sigma(v^H u)u$$

$$=(1-\sigma v^H u)u$$

即 $E(u,v;\sigma)u=(1-\sigma v^H u)u$

返回

即 $E(u,v;\sigma)u=(1-\sigma v^{H}u)u$

u是$E(u,v;\sigma)$的特征向量,相应的特征值是 $1-\sigma v^{H}u$.

若$v^{H}u=0\Rightarrow u\in v^{\perp}\Rightarrow$ 在$v^{\perp}$中任取一组基$u_1,u_2,\cdots u_{n-1}$.

$\Rightarrow E(u,v;\sigma)u_i=u_i,\quad i=1,2,\cdots,n-1.$

u_i是$E(u,v;\sigma)$的属于特征值1的特征向量.

又注意到$E(u,v;\sigma)v=v-(\sigma v^{H}v)u,\quad v\perp u$

$\Rightarrow v,u$线性无关$\Rightarrow v-(\sigma v^{H}v)u$一定不是$v$ 的倍数,

故v一定不是$E(u,v;\sigma)$特征向量.

$\therefore u\in v^{\perp}$,设$u_1,\cdots,u_{n-1}$是$v^{\perp}$的一组基, 它们也是$E(u,v,\sigma)$ 的

$n-1$个线性无关的特征向量.

若$v^H u \neq 0 \Rightarrow u \notin v^{\perp}\ (\Rightarrow u \in L(v)?)$

$\Rightarrow u$不能由$u_1, u_2, \cdots u_{n-1}$线性表出，

$\Rightarrow u$与$u_1, u_2, \cdots u_{n-1}$线性无关，

且$u, u_1, u_2, \cdots u_{n-1}$为$E(u, v; \sigma)$的$n$个线性无关的特征向量.

$\therefore u \notin v^{\perp}$, 设$u_1, \cdots, u_{n-1}$是$v^{\perp}$的一组基, 则$u, u_1, \cdots, u_{n-1}$

是$E(u, v, \sigma)$的n个线性无关的特征向量.

2). 初等矩阵的特征值 $\lambda(E(u,v,\sigma))=\{1,1,\cdots,1,1-\sigma v^H u\}$

若$v^H u = 0 \Rightarrow \lambda(E(u,v,\sigma))=\{1,1,\cdots,1,1\}$,

若$v^H u \neq 0 \Rightarrow \lambda(E(u,v,\sigma))=\{1,1,\cdots,1,1-\sigma v^H u\}$.

3). $det(E(u,v,\sigma))=1-\sigma v^H u$;

4). $E(u,v,\sigma)^{-1} = E((u,v,\frac{\sigma}{\sigma v^H u-1}), \quad (1-\sigma v^H u \neq 0)$;

5). 非零向量$a, b \in C^n$, 存在u, v, σ, 使得

$$E(u, v, \sigma)a = b, (v^H a \neq 0, \sigma u = \frac{a-b}{v^H a}).$$

2. 初等变换矩阵

$$P_1 = E-(e_i-e_j)(e_i-e_j)^T = E(e_i-e_j, e_i-e_j, 1)$$

$$P_2 = E+(k-1)e_i e_i^T = E(e_i, e_i, 1-k)$$

$$P_3 = E+ke_j e_i^T = E(e_j, e_i, -k)$$

返回

3. 矩阵计算中的三大变换

1). *Gauss*变换

设$x=(x_1,x_2,\cdots x_n)^T\in R^n$,满足$x_k\neq 0$. 令

$l_{ik}=\dfrac{x_i}{x_k},i=k+1,\cdots,n.$ 我们定义 $L_k=E-l_ke_k^T,$

其中$l_k=(0,\cdots,0,l_{k+1,k},\cdots l_{n,k})^T,$

则有 $L_kx=x-x_kl_k=(x_1,x_2,\cdots x_k,0,\cdots,0)^T.$

我们把形如L_k的矩阵叫做*Gauss*变换,有时也叫初等下三角阵,其中l_k称为*Gauss*向量.

Gauss变换乘积的性质：

$$E(l_i,e_i;1)^{-1}=E(l_i,e_i;-1)$$

$$E(l_i,e_i;1)E(l_j,e_j;1)=E-l_ie_i^T-l_je_j^T\,(j\geq i),$$

$$(E-l_1e_1^T)(E-l_2e_2^T)\cdots(E-l_{n-1}e_{n-1}^T)$$

$$=(E-l_1e_1^T-l_2e_2^T)(E-l_3e_3^T)\cdots(E-l_{n-1}e_{n-1}^T)$$

$$=\cdots=E-l_1e_1^T-l_2e_2^T\cdots-l_{n-1}e_{n-1}^T=L$$

$$L=\begin{bmatrix} 1 & & & & \\ -l_{21} & 1 & & & \\ -l_{31} & -l_{32} & 1 & & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \\ -l_{n1} & -l_{n2} & \cdots & -l_{n,n-1} & 1 \end{bmatrix}$$

2).*Householder*变换

$$H\begin{bmatrix} \times & \times & \times & \times \\ \times & \times & \times & \times \\ \times & \times & \times & \times \\ \times & \times & \times & \times \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \times & \times & \times & \times \\ \times & \times & \times & \times \\ 0 & \times & \times & \times \\ 0 & 0 & \times & \times \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \times & \times & \times & \times \\ \times & \times & \times & \times \\ \times & \times & \times & \times \\ \times & \times & \times & \times \end{bmatrix} H = \begin{bmatrix} \times & \times & 0 & 0 \\ \times & \times & \times & 0 \\ \times & \times & \times & \times \\ \times & \times & \times & \times \end{bmatrix}$$

*Householder*变换为什么在矩阵计算中重要？

设$x \in R^n$是任意给定的非零向量，则可以构造出单位向量$u \in R^n$，使得变换 $Hx = ae_1$，其中$a = \pm \| x \|$.

解 由于 $Hx = (I - 2uu^T)x = x - 2(u^T x)u$

令$x - 2(u^T x)u = \pm \| x \| e_1$ 即 $2(u^T x)u = x \pm \| x \| e_1$

$$u = \frac{x \pm \| x \| e_1}{\| x \pm \| x \| e_1 \|}.$$

注：x的后$n-1$个分量变为0.

形如 $H(u)=E(u,u;2)=E-2uu^H,(u^H u=1)$
n阶方阵成为*Household*矩阵或者镜像变换.

(1) $H(u)^H = H(u) = H(u)^{-1}$

(2) $H(u)(a+ru)=a-ru, \forall a \in u^{\perp}, r \in C$(镜象变换)

(3) H只有两个互不相同的特征值-1和1,其中1是$n-1$重的,-1是单重的,u是属于-1的单位特征向量.

3).*Givens*变换

*Givens*变换就是形如

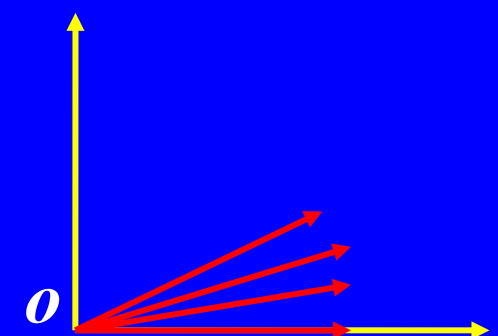
$$
G(i,j,\theta)=\begin{array}{cc}
\begin{bmatrix}
1 & \cdots & 0 & & & & 0 \\
\vdots & \ddots & & & & & \\
0 & & c & \cdots & s & & \\
\vdots & & & \ddots & & & \\
0 & & -s & \cdots & c & & \\
\vdots & & & & & \ddots & \\
0 & \cdots & 0 & & 0 & & 1
\end{bmatrix} & \begin{array}{c} \\ \\ i \\ \\ j \\ \\ \\ \end{array} \\
\begin{array}{ccccccc} & & i & & j & & \end{array} &
\end{array}
\qquad c^2+s^2=1
$$

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

假定$x=[\sqrt{3},1]^T$，将x顺时针旋转30^0，则

$$A = \begin{bmatrix} \cos(-30^0) & -\sin(-30^0) \\ \sin(-30^0) & \cos(-30^0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{bmatrix}$$

$$Ax = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sqrt{3} \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix}$$



*Givens*变换方法可以将非对称矩阵变成对角矩阵.

返回

4).*Householder*变换与*Givens*变换的关系.

$$\begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$$

$$=\left[E-2\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & 1\end{pmatrix}\right]\left[E-2\begin{pmatrix}\sin\dfrac{\theta}{2}\\ -\cos\dfrac{\theta}{2}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\sin\dfrac{\theta}{2} & -\cos\dfrac{\theta}{2}\end{pmatrix}\right]$$

返回