牛顿迭代法

Newton迭代格式

Newton迭代法的收敛性

弦截法迭代格式

数值实验题介绍

➢牛顿(Newton)迭代法

平方根算法求 $\sqrt{2}$

初值: $x_1=1.5$

迭代格式: $x_{n+1}=0.5(x_n+2/x_n)$ $(n=1,2,\cdots\cdots)$

x_n	Error
1.416666666666667	2.45e-003
1.414215686274510	2.12e-006
1.414213562374690	1.59e-012
1.414213562373095	2.22e-016
1.414213562373095	2.22e-016

基本思想:

将方程 $f(x)=0$ 中函数 $f(x)$ 线性化,以线性方程的解逼近非线性方程的解.

设函数 $f(x)$ 在有根区间 $[a,b]$ 二次连续可微,则 $f(x)$ 在 x_0 处的泰勒展开式为:

$$f(x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\frac{f''(\xi)}{2!}(x-x_0)^2$$

只取关于 x 线性项，有

$$f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)=0$$

设 $f'(x_0)\neq 0$ ，其解记为

$$x=x_0-\frac{f(x_0)}{f'(x_0)} \qquad (*)$$

构造迭代格式:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} \qquad (n = 0,1,2,\cdots) \qquad (*)$$

迭代格式(*)称为牛顿迭代法.

牛顿迭代法的几何意义

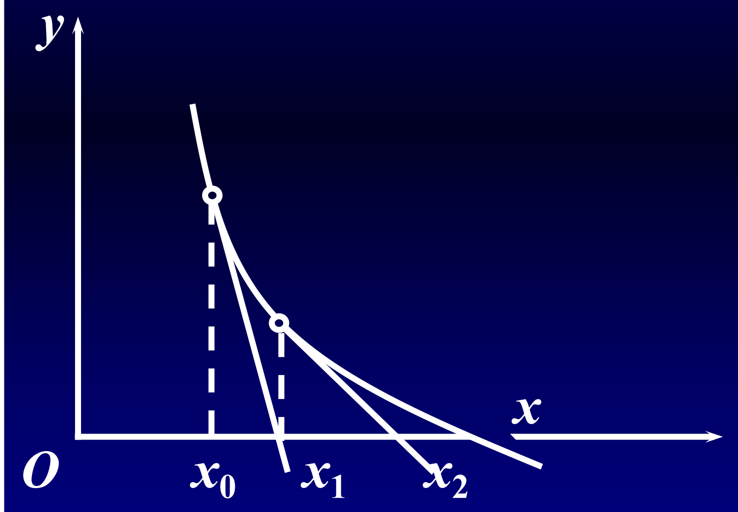


图2.3

牛顿迭代法在单变量情况下又称为切线法.

应用——求正数平方根算法

设 $C>0,\quad x=\sqrt{C}$ $\Rightarrow$ $x^2-C=0$

令 $f(x)=x^2-C$，则 $f'(x)=2x$

$$x_{n+1}=x_n-\frac{x_n^2-C}{2x_n}$$

$$x_{n+1}=\frac{1}{2}[x_n+\frac{C}{x_n}]$$

例1 设$C>0$，证明由迭代格式 $x_{n+1}=\frac{1}{2}(x_n+\frac{C}{x_n})$($n=0$，1，……)产生的迭代序列 $\{x_n\}$，对任意的$x_0>0$，均收敛于$\sqrt{C}$;且具有 2 阶收敛速度。

分析：由迭代格式，有 $$x_{n+1}=\frac{1}{2x_n}(x_n^2+C)$$

$$x_{n+1}-\sqrt{C}=\frac{1}{2}[x_n+\frac{C}{x_n}]-\sqrt{C}$$

$$=\frac{1}{2x_n}[x_n^2-2x_n\sqrt{C}+C]=\frac{1}{2x_n}(x_n-\sqrt{C})^2$$

$$\frac{x_{n+1}-\sqrt{C}}{(x_n-\sqrt{C})^2}=\frac{1}{2x_n}$$

$$\lim_{n\to\infty}x_n=?$$

证明：由迭代格式，有

$$x_{n+1}=\frac{1}{2x_n}(x_n^2+C)$$

等式两端同减 $\sqrt{C}$，配方得

$$x_{n+1}-\sqrt{C}=\frac{1}{2x_n}(x_n-\sqrt{C})^2$$

同理有

$$x_{n+1}+\sqrt{C}=\frac{1}{2x_n}(x_n+\sqrt{C})^2$$

将上面两式相除有

$$\frac{x_{n+1}-\sqrt{C}}{x_{n+1}+\sqrt{C}}=\frac{(x_n-\sqrt{C})^2}{(x_n+\sqrt{C})^2}$$

反复递推，得

$$\frac{x_{n+1}-\sqrt{C}}{x_{n+1}+\sqrt{C}}=\frac{(x_n-\sqrt{C})^2}{(x_n+\sqrt{C})^2}=\left(\frac{x_{n-1}-\sqrt{C}}{x_{n-1}+\sqrt{C}}\right)^{2\times 2}=\cdots=\left(\frac{x_0-\sqrt{C}}{x_0+\sqrt{C}}\right)^{2^{n+1}}$$

令 $q=\dfrac{x_0-\sqrt{C}}{x_0+\sqrt{C}}$ 则有

$$\frac{x_n-\sqrt{C}}{x_n+\sqrt{C}}=q^{2^n}$$

化简得

$$x_n=\sqrt{C}\,\frac{1+q^{2^n}}{1-q^{2^n}}$$

$$\lim_{n\to\infty}x_n=\sqrt{C}$$

$$x_{n+1}-\sqrt{C}=\frac{1}{2}[x_n+\frac{C}{x_n}]-\sqrt{C}$$

$$=\frac{1}{2x_n}[x_n^2-2x_n\sqrt{C}+C]=\frac{1}{2x_n}(x_n-\sqrt{C})^2$$

$$\frac{x_{n+1}-\sqrt{C}}{(x_n-\sqrt{C})^2}=\frac{1}{2x_n}$$

$$\lim_{n\to\infty}x_n=\sqrt{C}$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{|x_{n+1}-\sqrt{C}|}{|x_n-\sqrt{C}|^2}=\frac{1}{2\sqrt{C}}$$

由此可知，平方根迭代具有 2 阶收敛速度

➢Newton迭代法的局部收敛性

定理 2.7 设 $f(x)$ 在点x^*的某邻域内具有二阶连续导数, 且设 $f(x^*)=0$, $f'(x^*)\neq 0$, 则对**充分靠近**点x^*的初值x_0, Newton迭代法至少平方收敛.

$$x_{n+1}=x_n-\frac{f(x_n)}{f'(x_n)} \quad \Rightarrow \quad \varphi(x)=x-\frac{f(x)}{f'(x)}$$

$$\varphi'(x^*)=f(x^*)f''(x^*)/[f'(x^*)]^2=0$$

$$\varphi''(x^*)=\frac{f''(x^*)}{f'(x^*)}$$

根据上一部分的结论:

定理2.6 设x^*是 $\varphi(x)$ 的不动点,且

$$\varphi'(x^*)=\varphi''(x^*)=\cdots=\varphi^{(p-1)}(x^*)=0$$

而 $\varphi^{(p)}(x^*)\neq 0$ 则 $x_{n+1}=\varphi(x_n)$ p阶收敛。

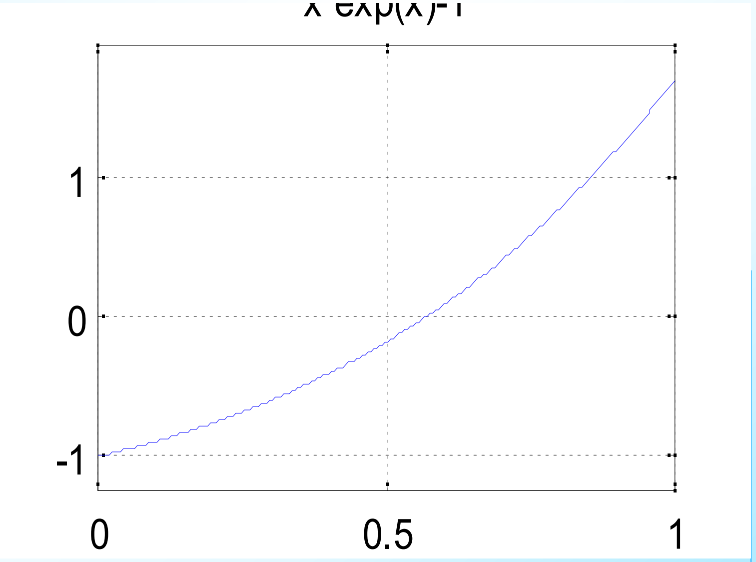
所以, Newton迭代法至少平方收敛。

例2. 求 $f(x)=xe^x-1=0$ 在 $x_0=0.5$ 附近的根

解: $f'(x)=(1+x)e^x$ 迭代格式为

$$x_{n+1}=x_n-\frac{x_ne^{x_n}-1}{(1+x_n)e^{x_n}}$$

$(n=0,1,\cdots\cdots)$




```
import math
delta =5e-6;eps = 1e-6
def f(x):   return x*math.exp(x)-1
def f1(x):   return (x+1)*math.exp(x)
x0=0.5;er=1;k=0;
while er>0.00001:
    x=x0-f(x0)/f1(x0)
    er=abs(x-x0)
    x0=x;    k=k+1
print('迭代次数',"{0:.0f}".format(k),', 方程根的近似值为
x=',"{0:.6f}".format(x))
print('误差er=',"{0:.16f}".format(er))
```

x = 0.5671

k=4

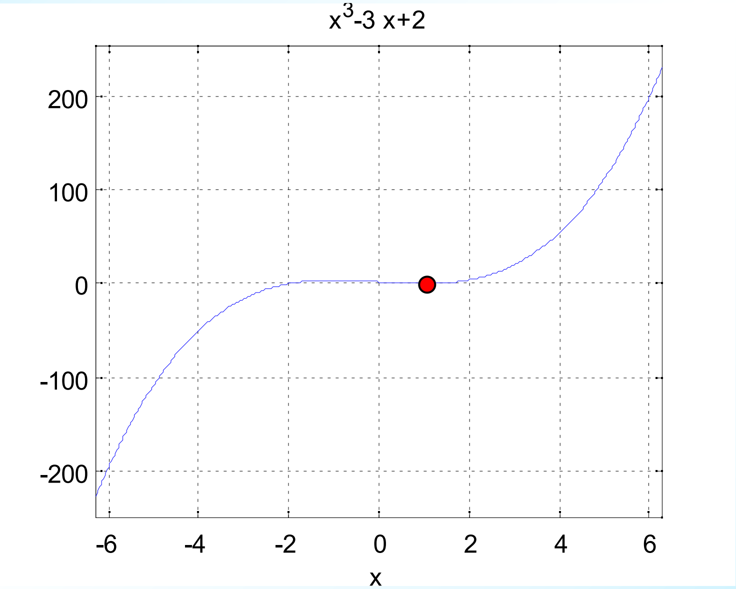
er=1.2347e-010

缺陷

1.被零除错误

方程: $f(x)=x^3-3x+2=0$

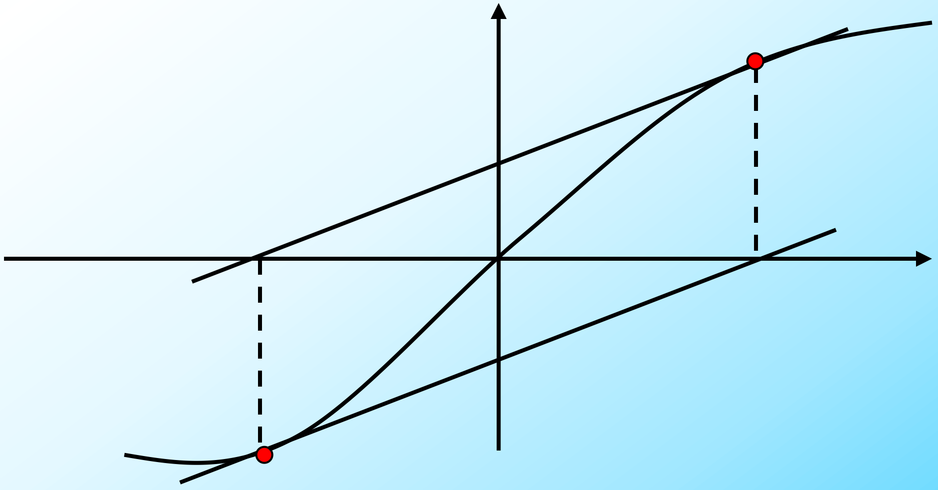
在重根$x^*=1$附近, $f'(x)$近似为零.



2.程序死循环

对 $f(x)=\arctan x$

存在 x_0, Newton迭代法陷入死循环.

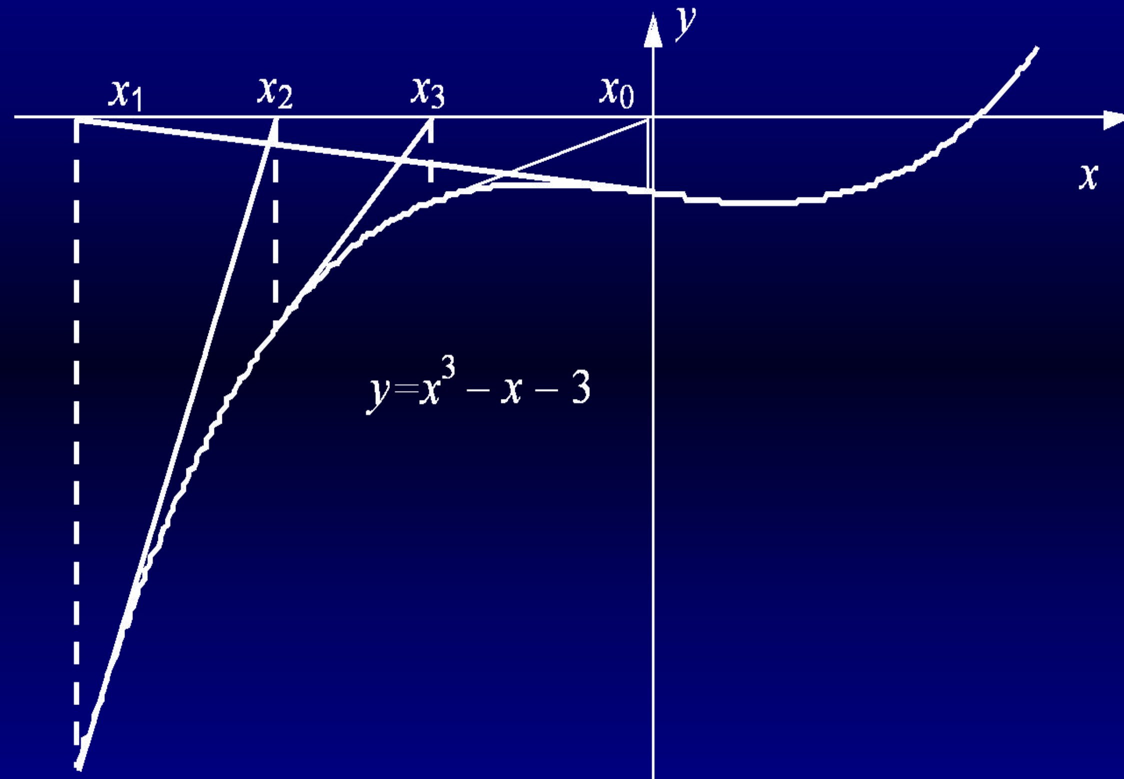


$y=\arctan x$

例3 用牛顿迭代法解方程 $f(x) = x^3 - x - 3 = 0$.

取 $x_0=0$, $$x_{n+1} = x_n - \frac{x_n^3 - x_n - 3}{3x_n^2 - 1} \quad (n = 0, 1, \cdots)$$

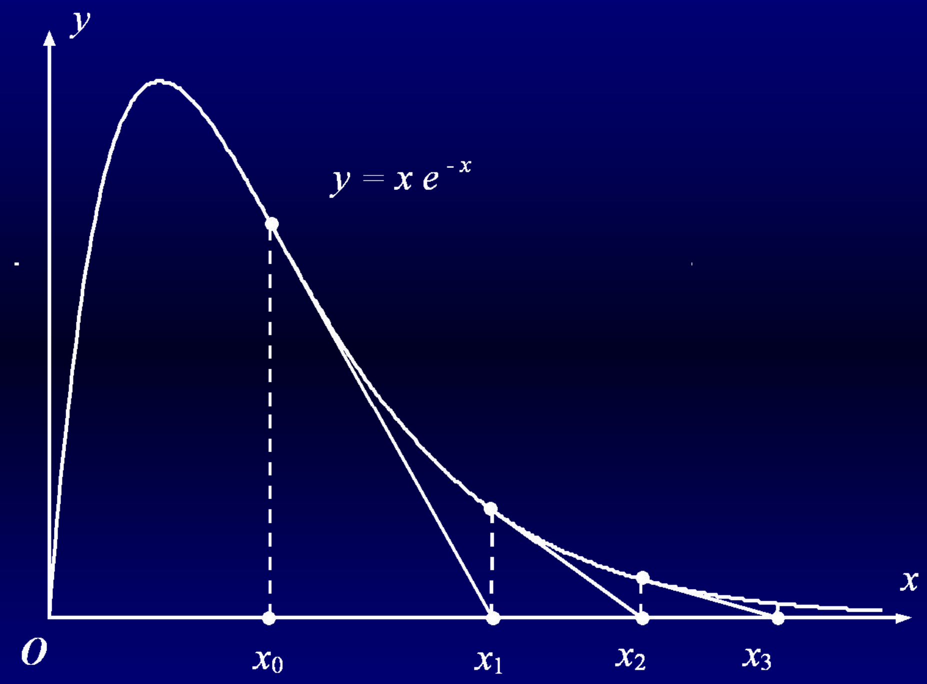
$x_1 = -3$,
$x_2 = -1.9615$,
$x_3 = -1.1472$,
$x_4 = -0.0066$,
……



数列中的项以四项为一个周期重复（死循环）.

例4　用牛顿迭代法解方程 $f(x)=x e^{-x}=0$.

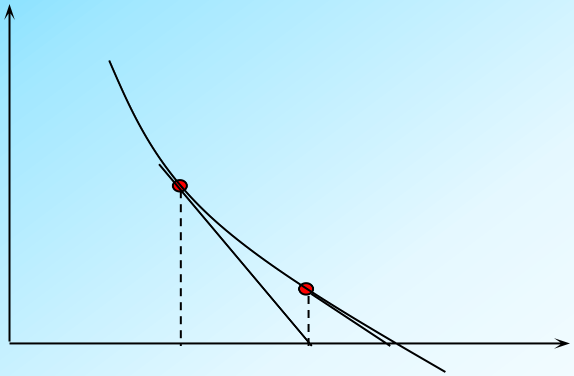
初值取 $x_0=2$，



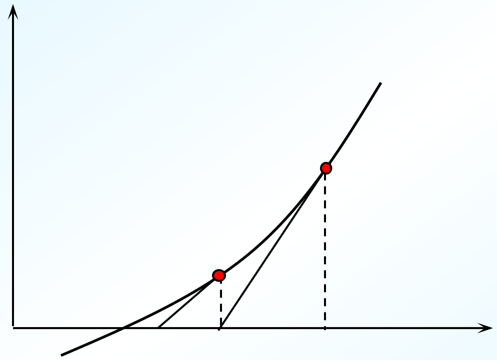
$x_1=4$,
$x_2=5.33333$,
……,
$x_{15}=19.72354943$,
……

$f(x_{15})=0.000000536$

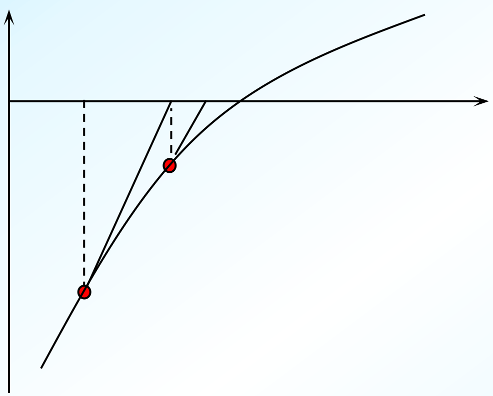
牛顿迭代法收敛的四种情况



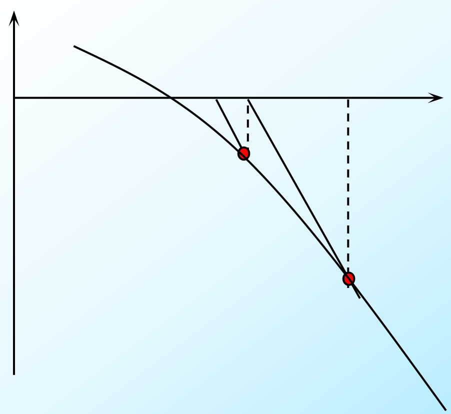
$f'<0$, $f''>0$



$f'>0$, $f''>0$



$f'>0$, $f''<0$



$f'<0$, $f''<0$

定理：若函数$f(x)$在$[a，b]$上满足条件

（1）$f(a)f(b) < 0$；

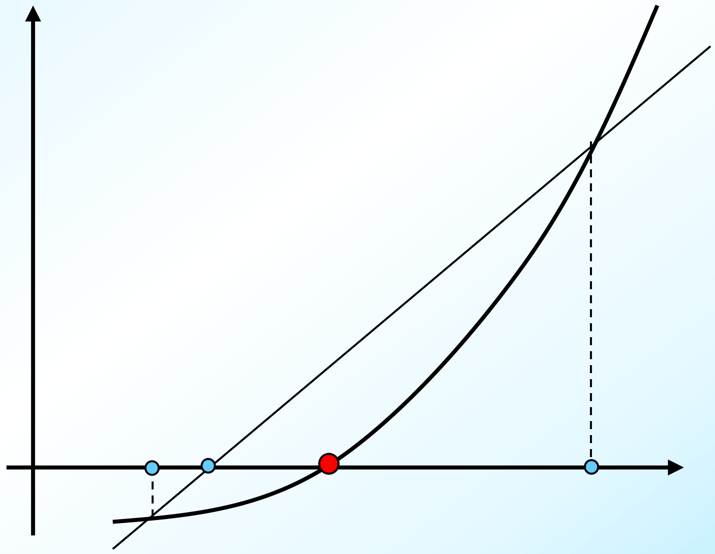
（2）$f'(x)$，$f''(x)$在$[a，b]$上连续且不变号（恒为正或恒为负）；

（3）取$x_0 \in [a，b]$使得$f(x_0)f''(x_0) > 0$。

则方程$f(x) = 0$在$[a，b]$上有唯一根x^*，且由初值x_0按牛顿迭代公式求得的序列$\{x_n\}$二阶收敛于x^*。

➢Newton迭代法的变形—弦截法

设x^*是方程 $f(x)=0$ 的根, x_0和x_1是x^*附近的两个点.



曲线 $y=f(x)$ 在点$(x_0, f(x_0))$和点 $(x_1,f(x_1))$处的割线与X轴交点

$$f(x)=0 \quad \rightarrow$$

$$f(x_1)+\frac{f(x_1)-f(x_0)}{x_1-x_0}(x-x_1)=0$$

$$x_2 = x_1 - \frac{f(x_1)}{f(x_1) - f(x_0)}(x_1 - x_0)$$

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f(x_n) - f(x_{n-1})}(x_n - x_{n-1})$$

$$(\, n = 1, 2, \cdots\cdots \,)$$

例2.8 确定悬链线方程的参数a　　$y = a\cosh\dfrac{x}{a}$

已知 $y(50)=y(0)+10$

$\boxed{a=126.6324}$

求解方程: $a\cosh\dfrac{50}{a} - a - 10 = 0$

割线法:

```
import math
def f(u):    return u*math.cosh(50/u)-u-10
a0=120;a=150;k=1;y0=f(a0);y=f(a);er =1;
while er>0.0001:
    t=a-y*(a-a0)/(y-y0);
    a0=a;y0=y;
    a=t;y=f(a);
    er=abs(a0-a)
    k=k+1
print('迭代次数',"{0:.0f}".format(k),', 方程根的近似值为y=',"{0:.6f}".format(a))
print('误差er=',"{0:.16f}".format(er))
```

Ans

K=6, a=126.6324

er = 5.0229730562E-6

切线法:

```
import math
def f(u):    return u*math.cosh(50/u)-u-10
def f1(u):   return math.cosh(50/u)-50*math.sinh(50/u)/u-1
a0=150;y0=f(a0);k=1;er=1
while er>0.0001:
    t=a0-f(a0)/f1(a0)
    er=abs(t-a0)
    a0=t
    k=k+1
print('迭代次数',"{0:.0f}".format(k),', 方程根的近似值为y=',"{0:.6f}".format(t))
print('误差er=',"{0:.16f}".format(er))
```

Ans

K=6, t=126.6324

er = 3911680E-10

3．计算重根的牛顿迭代法

如果x^*为$f(x)$的m重零点，此时有

$$f(x^*)=f'(x^*)=\cdots=f^{(m-1)}(x^*)=0,\quad f^{(m)}(x^*)\neq 0$$

显然x^*为$[f(x)]^{1/m}=0$ 的单根，相应的牛顿迭代格式：

$$x_{n+1}=x_n-m\frac{f(x_n)}{f'(x_n)}\qquad (n=0,1,2,\cdots)$$

该迭代格式具有至少二阶收敛性质，但不知道重数m，因而难以直接使用.

3．计算重根的牛顿迭代法

$$u(x) = \frac{f(x)}{f'(x)}$$

利用 $f(x)$ 的重根分解式，得

$$u(x) = \frac{(x - x^*)g(x)}{mg(x) + (x - x^*)g'(x)}, \qquad u'(x^*) = \frac{1}{m} \neq 0$$

得到修正的牛顿迭代法:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{u(x_n)}{u'(x_n)}$$

$$= x_n - \frac{f(x_n)f'(x_n)}{[f'(x_n)]^2 - f(x_n)f''(x_n)} \quad (n = 0,1,2,\cdots)$$

该迭代格式至少是二阶收敛

第1次作业

二元或多元函数的极小值问题常常可以转化为如下两步：

- 1.通过求偏导数等于0来得到一个非线性方程组；
- 2.通过求解这个非线性方程组的解，得到极值点。

请推导基于如上原理的数值方法，并利用你推导的数值方法求下面问题的极小值点。

$$\begin{cases} f(x,y)=\exp^{-0.1*(x^2+y^2+xy+2x)}, \\ (x,y)\in[-5,5]\times[-5,5]. \end{cases}$$

交作业邮箱：

数值分析8班：1657685320@qq.com

数值分析9班：1657685320@qq.com

邮件主题：

班级+学号+姓名+第几次作业

截止时间：2021.09.30