

七. (1). 解: $\Rightarrow \|A\|_F = \sqrt{\sum_{i=1}^n \|a_i\|_2^2} = \|A\|_F \quad \Rightarrow \|A\|_F = \left(\sum_{i=1}^n \sigma_i^2\right)^{\frac{1}{2}}$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \quad D = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{则 } A=BD \text{ 为其最大秩分解}$$