特征值的估计

定理 1 (Shur不等式) 设$A \in C^{n\times n}$的特征值为 $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$，则

$$\sum_{i=1}^{n} |\lambda_i|^2 \le \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} |a_{ij}|^2 = \|A\|_F^2$$

且等号成立当且仅当A为正规矩阵

定理 2 (Hirsch) 设$A \in C^{n\times n}$的特征值为 $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$，则

1) $|\lambda_i| \le n \max_{i,j} |a_{ij}|$, 2) $|\mathrm{Re}\,\lambda_i| \le n \max_{i,j} |b_{ij}|$,

3) $|\mathrm{Im}\,\lambda_i| \le n \max_{i,j} |c_{ij}|$,

返回

定理 3 (Bendixson) 设$A\in R^{n\times n}$,则A的任一特值λ_i满足

$$|\operatorname{Im}\lambda_i|\le\sqrt{\frac{n(n-1)}{2}}\max_{i,j}|c_{ij}|$$

定理 4(Browne): 设$A\in C^{n\times n}$的特征值为$\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$,奇异值为$\sigma_1\ge\sigma_2\ge\cdots\ge\sigma_n$,则

$$\sigma_n\le|\lambda_i|\le\sigma_1\quad(i=1,2,\cdots,n)$$

$$B=\frac{1}{2}(A^H+A),\ C=\frac{1}{2}(A-A^H)$$

A,B,C的特征值分别为$\{\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n\}$,

$\{\mu_1,\mu_2,\cdots,\mu_n\},\{i\gamma_1,i\gamma_2,\cdots,i\gamma_n\}$, 且满足

$$|\lambda_1|\geq|\lambda_2|\geq\cdots\geq|\lambda_n|,\quad \mu_1\geq\mu_2\geq\cdots\geq\mu_n,$$

$$\gamma_1\geq\gamma_2\geq\cdots\geq\gamma_n.$$

定理 5 设$A\in C^{n\times n},B,C,\lambda_i,\mu_i,\gamma_i$定义同上,则

$$\mu_n\leq \mathrm{Re}\lambda_i\leq\mu_1,\ \gamma_n\leq \mathrm{Im}\lambda_i\leq\gamma_1$$

圆盘定理

定义 1 设$A=(a_{ij})\in C^{n\times n}$

行盖尔圆盘 $\Longleftrightarrow$ $S_i=\{z\in C:|z-a_{ii}|\le R_i=\sum_{j\ne i}|a_{ij}|\}$

列盖尔圆盘 $\Longleftrightarrow$ $G_i=\{z\in C:|z-a_{ii}|\le C_i=\sum_{j\ne i}|a_{ji}|\}$

定理 2 (圆盘定理1) 设$A\in C^{n\times n}$，则A的任一特征值

$$\lambda\in S=\bigcup_{j=1}^{n}S_j$$

定理 3 (圆盘定理2) 设n阶方阵A的n个盖尔圆盘中有k个圆盘的并形成一连通区域G，且它与余下的$n-k$个圆盘都不相交，则在该区域G中恰好有A的k个特征值.

推论 1 设n阶方阵A的n个盖尔圆盘两两互不相交，则A相似于对角阵.

推论 2 设n阶实阵A的n个盖尔圆盘两两互不相交，则A特征值全为实数.

推论 3 $B=D^{-1}AD\Rightarrow\begin{cases}\lambda_i(A)=\lambda_i(B)\in\bigcup\limits_{i=1}^{n}S_i(B)\\ \rho(A)=\rho(B)\end{cases}$

令$D=diag(p_1,p_2,\cdots,p_n),(p_i>0)$

$$D^{-1}AD=\begin{bmatrix} a_{11} & \frac{p_2}{p_1}a_{12} & \cdots & \frac{p_n}{p_1}a_{1n}\\ \frac{p_1}{p_2}a_{21} & a_{22} & \cdots & \frac{p_n}{p_2}a_{2n}\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ \frac{p_1}{p_n}a_{n1} & \frac{p_2}{p_n}a_{n2} & \cdots & a_{nn}\end{bmatrix}$$

$$r_i = \frac{1}{p_i}\sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n} |a_{ij}|\, p_j, \quad Q_i = \{z \in C : |z - a_{ii}| \le r_i\}$$

$$t_j = p_j \sum_{\substack{i=1\\ i\neq j}}^{n} \frac{|a_{ij}|}{p_i}, \quad P_j = \{z \in C : |z - a_{jj}| \le t_j\}$$

推论 4 设$A \in C^{n\times n}$, 则A的任一特征值

$$\lambda_i \in \left(\bigcup_{i=1}^{n} Q_i\right) \cap \left(\bigcup_{j=1}^{n} P_j\right)$$

定义 2 设$A \in C^{n\times n}$

行对角占优 $\Longleftrightarrow$ $|a_{ii}| \geq R_i = \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{n} |a_{ij}| \quad (i=1,2,\cdots,n)$

列对角占优 $\Longleftrightarrow$ $|a_{ii}| \geq C_i = \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{n} |a_{ji}| \quad (i=1,2,\cdots,n)$

行严格对角占优 $\Longleftrightarrow$ $|a_{ii}| > R_i = \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{n} |a_{ij}|$

列严格对角占优 $\Longleftrightarrow$ $|a_{ii}| > C_i = \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{n} |a_{ji}|$

返回

定理 4 设$A \in C^{n\times n}$行(或列)严格对角占优，则

(1) A可逆，且$\lambda_i \in \bigcup_{i=1}^{n} S_i \quad (S_i = \{z \in C : |z - a_{ii}| \le |a_{ii}|\})$

(2)若A的所有主对角元都为正数，则A的特征值都有正实部；

(3)若A为Hermite矩阵，且所有主对角元都为正数，则A的特征值都为正数.

定义： 设 $A\in C^{n\times n}$为Hermite矩阵, $x\in C$,称

$$R(x)=\frac{x^H Ax}{x^H x}\quad x\neq 0$$

为A的 **Rayleigh商.**

定理1(Rayleigh-Ritz)： 设 $A\in C^{n\times n}$为Hermite矩阵，则

$$(1)\ \lambda_n x^H x\le x^H Ax\le \lambda_1 x^H x\quad (\forall\ x\in C^n)$$

$$(2)\ \lambda_{\max}=\lambda_1=\max_{x\neq 0} R(x)=\max_{x^H x=1} x^H Ax$$

$$(3)\ \lambda_{\min}=\lambda_n=\min_{x\neq 0} R(x)=\min_{x^H x=1} x^H Ax$$

定理3(Courant-Fischer):设$A \in C^{n\times n}$为Hermite矩阵,特征值为$\lambda_n \le \lambda_{n-1} \le \cdots \le \lambda_1$, i为给定的正整数,$1 \le i \le n$,则

$$\lambda_i = \max_{\substack{W \\ \dim W = i}} \min_{\substack{x \in W \\ x \ne 0}} R(x) = \max_{\substack{W \\ \dim W = i}} \min_{\substack{u \in W \\ \|u\|_2 = 1}} u^H A u$$

$$\lambda_i = \min_{\substack{W \\ \dim W = n-i+1}} \max_{\substack{x \in W \\ x \ne 0}} R(x) = \min_{\substack{W \\ \dim W = n-i+1}} \max_{\substack{u \in W \\ \|u\|_2 = 1}} u^H A u$$

定理4(Weyl) :设 $A, B \in C^{n \times n}$为Hermite矩阵,则

$\forall k = 1,2,\cdots,n$,有

$$\lambda_k(A)+\lambda_n(B) \le \lambda_k(A+B) \le \lambda_k(A)+\lambda_1(B)$$

◀ ▶ 返回

例1. $A=\begin{pmatrix}6&5&1&2\\1&7&0&2\\0&4&7&5\\2&0&1&5\end{pmatrix}$, 证明$r(A)<13$.

证明: 取$D=\begin{pmatrix}1&&&\\&1/2&&\\&&1&\\&&&1/2\end{pmatrix}$, $B=D^{-1}AD=$

$$\begin{pmatrix}1&&&\\&2&&\\&&1&\\&&&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}6&5&1&2\\1&7&0&2\\0&4&7&5\\2&0&1&5\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&&&\\&1/2&&\\&&1&\\&&&1/2\end{pmatrix}$$

返回

$$=\begin{pmatrix}6&5&1&2\\2&14&0&4\\0&4&7&5\\4&0&2&10\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&&&\\&1/2&&\\&&1&\\&&&1/2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}6&5/2&1&1\\2&7&0&2\\0&2&7&5/2\\4&0&2&5\end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow r(A)=r(B)\le 12.$$

例2. $A=\begin{pmatrix}1/4&1/4&1/4&1/4\\1/5&2/5&1/5&1/5\\1/6&1/6&3/6&1/6\\1/7&1/7&1/7&4/7\end{pmatrix}$，证明$r(A)=1$.

$$r(A)\le\|A\|_\infty=1\text{且}A\begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix}=1\bullet\begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix}$$

$\Rightarrow\lambda=1$为A的特征值. $\Rightarrow r(A)\ge1\Rightarrow r(A)=1.$

例3. $A=\begin{pmatrix}1/4 & 1/4 & 1/4 & 1/4\\ 1/5 & 2/5 & 1/5 & 1/5\\ 1/6 & 1/6 & 3/6 & 1/6\\ 1/7 & 1/7 & 1/7 & 3/7\end{pmatrix}$, 证明$r(A)<1.$

返回

$$D=\begin{pmatrix}1&&&\\&1&&\\&&1&\\&&&9/10\end{pmatrix}\Rightarrow B=D^{-1}AD=$$

$$\begin{pmatrix}1/4 & 2/4 & 1/4 & (1/4)\times\frac{9}{10}\\ 1/5 & 2/5 & 1/5 & (1/5)\times\frac{9}{10}\\ 1/6 & 1/6 & 3/6 & (1/6)\times\frac{9}{10}\\ 10/63 & 10/63 & 10/63 & 17/63\end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow r(A)=r(B)\le\|B\|_\infty<1.$$

例4：证明$A=\begin{pmatrix} 2 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2^2} & \frac{1}{2^3} & \frac{1}{2^4} \\ \frac{2}{3} & 4 & \frac{2}{3^2} & \frac{2}{3^3} & \frac{2}{3^4} \\ \frac{3}{4} & \frac{3}{4^2} & 6 & \frac{3}{4^3} & \frac{3}{4^4} \\ \frac{4}{5} & \frac{4}{5^2} & \frac{4}{5^3} & 8 & \frac{4}{5^4} \\ \frac{4}{5} & \frac{4}{5^2} & \frac{4}{5^3} & \frac{4}{5^4} & 10 \end{pmatrix}$有5个不同的实特征值.

$$A \in R^{n \times n}, a_{ii} = 2i(i=1,\cdots,5) \Rightarrow a_{i+1,i+1} - a_{ii} = 2(i+1) - 2i = 2$$

$$R_1=\frac{\frac{1}{2}\left(1-\left(\frac{1}{2}\right)^4\right)}{1-\frac{1}{2}}=1-\frac{1}{2^4},R_2=1-\frac{1}{3^4},$$

$$R_3=1-\frac{1}{4^4},R_4=1-\frac{1}{5^4},R_5=1-\frac{1}{6^4},$$

$$\left|a_{i+1,i+1}-a_{ii}\right|=2>R_i+R_{i+1}(i=1,\cdots,4)$$

$\Rightarrow A$的5个盖尔圆互不相交$\Rightarrow A$有5个不同的实特征值.

返回