§4 矩阵的最大秩分解

程光辉

2020 年 4 月 4 日

定理 1 设 $\boldsymbol{A} \in \mathbf{C}_r^{m\times n}$，则存在矩阵 $\boldsymbol{B} \in \mathbf{C}_r^{m\times r}$，$\boldsymbol{D} \in \mathbf{C}_r^{r\times n}$，使得

$$\boldsymbol{A} = \boldsymbol{B}\boldsymbol{D}.$$

证明： 因为 $\boldsymbol{A} \in \mathbf{C}_r^{m\times n}$，存在酉矩阵 $\boldsymbol{U} \in \mathbf{U}^{m\times m}, \boldsymbol{V} \in \mathbf{U}^{n\times n}$ 和 $\boldsymbol{r}$ 阶正线下三角矩阵 $\boldsymbol{L}$，使得

$$\begin{aligned}\boldsymbol{A} &= \boldsymbol{U}\begin{bmatrix}\boldsymbol{L} & \boldsymbol{0}\\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0}\end{bmatrix}\boldsymbol{V}\\ &= \boldsymbol{U}\begin{bmatrix}\boldsymbol{L}\\ \boldsymbol{0}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\boldsymbol{E}_r & \boldsymbol{0}\end{bmatrix}\boldsymbol{V}\\ &= \boldsymbol{B}\boldsymbol{D},\end{aligned}$$

其中 $\boldsymbol{B} = \boldsymbol{U}\begin{bmatrix}\boldsymbol{L}\\ \boldsymbol{0}\end{bmatrix} \in \mathbf{C}_r^{m\times r}$，$\boldsymbol{D} = \begin{bmatrix}\boldsymbol{E}_r & \boldsymbol{0}\end{bmatrix}\boldsymbol{V} \in \mathbf{C}_r^{r\times n}$，得证.

矩阵最大秩分解的步骤：

(1) 进行行初等变换，化为简化行阶梯型：

$$\tilde{\boldsymbol{A}} = \begin{bmatrix}\boldsymbol{0}\cdots\boldsymbol{0} & \boldsymbol{1} & \star\cdots\star & \boldsymbol{0} & \star\cdots\star & \boldsymbol{0} & \star\cdots\star\\ \boldsymbol{0}\cdots\boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0}\cdots\boldsymbol{0} & \boldsymbol{1} & \star\cdots\star & \boldsymbol{0} & \star\cdots\star\\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots\\ \boldsymbol{0}\cdots\boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0}\cdots\boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0}\cdots\boldsymbol{0} & \boldsymbol{1} & \star\cdots\star\\ \boldsymbol{0}\cdots\boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0}\cdots\boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0}\cdots\boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0}\cdots\boldsymbol{0}\\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots\\ \boldsymbol{0}\cdots\boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0}\cdots\boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0}\cdots\boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0}\cdots\boldsymbol{0}\end{bmatrix},$$

其中 $\star$ 表示不一定为 0 的元素，$\tilde{\boldsymbol{A}}$ 中非零首元所在的列分别为 $\boldsymbol{i_1}, \boldsymbol{i_2}, \cdots, \boldsymbol{i_r}$.

(2) 由 $\boldsymbol{A}$ 中第 $\boldsymbol{i_1}, \boldsymbol{i_2}, \cdots, \boldsymbol{i_r}$ 列构成 $\boldsymbol{B} = (\boldsymbol{a}_{i_1}, \boldsymbol{a}_{i_2}, \cdots, \boldsymbol{a}_{i_r})$.

(3) 由 $\tilde{\boldsymbol{A}}$ 的非零行构成 $\boldsymbol{D}$.

思考上述算法的证明？还有哪些计算最大秩分解算法？

例 1 求矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1&3&2&1&4\\2&6&1&0&7\\3&9&3&1&11\end{bmatrix}$ 的最大秩分解.

解： (行初等变换) 对矩阵 $\boldsymbol{A}$ 进行行初等变换化为简化行阶梯型，有

$$\boldsymbol{A}\to\begin{bmatrix}1&3&0&-\frac{1}{3}&\frac{10}{3}\\0&0&1&\frac{2}{3}&\frac{1}{3}\\0&0&0&0&0\end{bmatrix}=\tilde{\boldsymbol{A}},$$

则

$$\boldsymbol{B}=\begin{bmatrix}1&2\\2&1\\3&3\end{bmatrix},\quad \boldsymbol{D}=\begin{bmatrix}1&3&0&-\frac{1}{3}&\frac{10}{3}\\0&0&1&\frac{2}{3}&\frac{1}{3}\end{bmatrix}.$$

(列初等变换) 对矩阵 $\boldsymbol{A}$ 进行列初等变换化为简化列阶梯型，有

$$\boldsymbol{A}\to\begin{bmatrix}1&0&0&0&0\\0&1&0&0&0\\1&1&0&0&0\end{bmatrix}=\tilde{\boldsymbol{A}},$$

则

$$\boldsymbol{B}=\begin{bmatrix}1&0\\0&1\\1&1\end{bmatrix},\quad \boldsymbol{D}=\begin{bmatrix}1&3&2&1&4\\2&6&1&0&7\end{bmatrix}.$$

定理 2 设 $\boldsymbol{A}\in\mathbf{C}_r^{m\times n}$，且 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{B}_1\boldsymbol{D}_1=\boldsymbol{B}_2\boldsymbol{D}_2$ 均是 $\boldsymbol{A}$ 的最大秩分解，则

(1) 存在 r 阶可逆矩阵 $\boldsymbol{Q}$，使得

$$\boldsymbol{B}_1=\boldsymbol{B}_2\boldsymbol{Q},\quad \boldsymbol{D}_1=\boldsymbol{Q}^{-1}\boldsymbol{D}_2.$$

(2) $\boldsymbol{D}_1^H(\boldsymbol{D}_1\boldsymbol{D}_1^H)^{-1}(\boldsymbol{B}_1^H\boldsymbol{B}_1)^{-1}\boldsymbol{B}_1^H=\boldsymbol{D}_2^H(\boldsymbol{D}_2\boldsymbol{D}_2^H)^{-1}(\boldsymbol{B}_2^H\boldsymbol{B}_2)^{-1}\boldsymbol{B}_2^H$.

注：

(1) $\mathbf{rank}(\boldsymbol{A})=\mathbf{rank}(\boldsymbol{A}^H\boldsymbol{A})=\mathbf{rank}(\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^H)$.

(2) 若 $\boldsymbol{B}\in\mathbf{C}_r^{m\times r}$，则 $\boldsymbol{B}^H\in\mathbf{C}_r^{r\times m}$，$\boldsymbol{B}^H\boldsymbol{B}\in\mathbf{C}_r^{r\times r}$，进而有

$$(\boldsymbol{B}^H\boldsymbol{B})^{-1}(\boldsymbol{B}^H\boldsymbol{B})=(\boldsymbol{B}^H\boldsymbol{B})^{-1}\boldsymbol{B}^H\boldsymbol{B}=\boldsymbol{E}_r.$$

(3) $D \in \mathbf{C}_r^{r\times n}$，则 $D^H \in \mathbf{C}_r^{n\times r}$，$DD^H \in \mathbf{C}_r^{r\times r}$，进而有

$$(DD^H)(DD^H)^{-1} = DD^H(DD^H)^{-1} = E_r.$$

证明： (1) 因为 $B_1D_1 = B_2D_2$，则 $B_1D_1D_1^H = B_2D_2D_1^H$，进而得

$$B_1 = B_2D_2D_1^H\left(D_1D_1^H\right)^{-1} = B_2Q_1,$$

其中 $Q_1 = D_2D_1^H\left(D_1D_1^H\right)^{-1}$.

同理可得 $D_1 = (B_1^HB_1)^{-1}B_1^HB_2D_2 = Q_2D_2$，其中 $Q_2 = (B_1^HB_1)^{-1}B_1^HB_2$.

于是有

$$B_1D_1 = B_2Q_1Q_2D_2 = B_2D_2,$$

即

$$B_2^HB_2Q_1Q_2D_2D_2^H = B_2^HB_2D_2D_2^H,$$

因此，$Q_1Q_2 = E_r$，记 $Q = Q_1$，则 $Q_2 = Q^{-1}$.

(2) 利用 (1)，有

$$\begin{aligned}
D_1^H(D_1D_1^H)^{-1}(B_1^HB_1)^{-1}B_1^H &= (Q^{-1}D_2)^H\left[Q^{-1}D_2(Q^{-1}D_2)^H\right]^{-1}\left[(B_2Q)^HB_2Q\right]^{-1}(B_2Q)^H \\
&= D_2^H(Q^{-1})^H\left[Q^{-1}D_2D_2^H(Q^{-1})^H\right]^{-1}\left[Q^HB_2^HB_2Q\right]^{-1}Q^HB_2^H \\
&= D_2^H(Q^{-1})^HQ^H(D_2D_2^H)^{-1}QQ^{-1}(B_2^HB_2)^{-1}(Q^H)^{-1}Q^HB_2^H \\
&= D_2^H(D_2D_2^H)^{-1}(B_2^HB_2)^{-1}B_2^H,
\end{aligned}$$

得证.