§1 矩阵序列与矩阵级数

程光辉

2020 年 5 月 10 日

设 $m \times n$ 的矩阵序列为 $\{A^{(k)}\}$，其中

$$A^{(k)} = \begin{bmatrix} a_{11}^{(k)} & a_{12}^{(k)} & \cdots & a_{1n}^{(k)} \\ a_{21}^{(k)} & a_{22}^{(k)} & \cdots & a_{2n}^{(k)} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1}^{(k)} & a_{m2}^{(k)} & \cdots & a_{mn}^{(k)} \end{bmatrix}, \quad k = 1, 2, \cdots$$

定义 1 设 $A^{(k)} = (a_{ij}^{(k)}) \in \mathbf{C}^{m\times n}$, 若对 $1 \le i \le m, 1 \le j \le n$ 有 $\lim\limits_{k\to\infty} a_{ij}^{(k)} = a_{ij}$，则称矩阵序列 $\{A^{(k)}\}$ 收敛于 A，记为 $\lim\limits_{k\to\infty} A^{(k)} = A$.

定理 1 设 $\lim\limits_{k\to\infty} A^{(k)} = A$，$\lim\limits_{k\to\infty} B^{(k)} = B$, $\alpha, \beta \in \mathbf{C}$, 则

(1) $\lim\limits_{k\to\infty} (\alpha A^{(k)} + \beta B^{(k)}) = \alpha A + \beta B$,

(2) $\lim\limits_{k\to\infty} A^{(k)} B^{(k)} = AB$,

(3) 当 $A^{(k)}$ 与 A 都可逆时，$\lim\limits_{k\to\infty} (A^{(k)})^{-1} = A^{-1}$.

定理 2 设 $\|\cdot\|$ 是 $\mathbf{C}^{m\times n}$ 上的任一矩阵范数，$\mathbf{C}^{m\times n}$ 中矩阵序列 $\{A^{(k)}\}$ 收敛于 A 的充要条件是

$$\lim_{k\to\infty} \|A^{(k)} - A\| = 0.$$

定义 2 设 $A \in \mathbf{C}^{n\times n}$，若 $\lim\limits_{k\to\infty} A^k = O$，则称 A 为收敛矩阵.

定理 3 设 $A \in \mathbf{C}^{n\times n}$，则 A 为收敛矩阵的充要条件是 $r(A) < 1$.

证明： (必要性) 存在可逆矩阵 P，使得 A 相似于 Jordan 标准型，即

$$A = PJP^{-1} = P\mathrm{diag}(J_{r_1}(\lambda_1), J_{r_2}(\lambda_2), \cdots, J_{r_s}(\lambda_s))P^{-1},$$

则有

$$A^k = PJ^kP^{-1} = P\mathrm{diag}(J_{r_1}^k(\lambda_1), J_{r_2}^k(\lambda_2), \cdots, J_{r_s}^k(\lambda_s))P^{-1}.$$

若 A 为收敛矩阵，则 $\lim\limits_{k\to\infty} A^k = O$，等价于 $\lim\limits_{k\to\infty} J_{r_i}^k(\lambda_i) = O, i = 1, 2, \cdots, s$. 即有 $J_{r_i}^k(\lambda_i)$ 的对角线元素 $|\lambda_i| < 1, i = 1, 2, \cdots, s$，则 $r(A) < 1$.

(充分性) $\lim\limits_{k\to\infty} J^k = O$ 等价于 $\lim\limits_{k\to\infty} J_{r_i}^k(\lambda_i) = O, i = 1, 2, \cdots, s$，而

$$J_{r_i}^k(\lambda_i) = \begin{bmatrix} f_k(\lambda_i) & f_k'(\lambda_i) & \cdots & \frac{f_k^{(r_i-1)}(\lambda_i)}{(r_i-1)!} \\ 0 & f_k(\lambda_i) & \cdots & \frac{f_k^{(r_i-2)}(\lambda_i)}{(r_i-2)!} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & f_k(\lambda_i) \end{bmatrix}, \quad k > r_i,$$

其中 $f_k(\lambda_i) = \lambda_i^k$.

因为 r_i 为固定常数，当 $|\lambda_i| \le r(A) < 1$ 时，有

$$\lim_{k\to\infty} f_k^{(l)}(\lambda_i) = 0, \quad l = 0, 1, \cdots, r_i - 1.$$

定义 3 设矩阵序列 $\{A^{(k)}\}$，称

$$\sum_{k=1}^{\infty} A^{(k)} = A^{(1)} + A^{(2)} + \cdots + A^{(k)} + \cdots,$$

为矩阵级数，$S^{(N)} = \sum\limits_{k=1}^{N} A^{(k)}$ 为矩阵级数的部分和. 如果 $\lim\limits_{N\to\infty} S^{(N)} = S$，则称级数收敛. 不收敛的矩阵级数称为是发散的.

定义 4 设矩阵序列 $A^{(k)} = (a_{ij}^{(k)}) \in \mathbf{C}^{m\times n}$，如果 mn 个数项级数

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_{ij}^{(k)}, i = 1, \cdots, m; j = 1, \cdots, n$$

都绝对收敛，则称矩阵级数 $\sum\limits_{k=1}^{\infty} A^{(k)}$ 绝对收敛.

定理 4 在 $\mathbf{C}^{m\times n}$ 中，矩阵级数 $\sum\limits_{k=1}^{\infty} A^{(k)}$ 绝对收敛的充要条件是正项级数 $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \|A^{(k)}\|$ 收敛，其中 $\|\cdot\|$ 是任意矩阵范数.

证明： (必要性) 因为矩阵级数 $\sum\limits_{k=1}^{\infty} A^{(k)}$ 绝对收敛，则存在正数 M，使得

$$\sum_{k=1}^{N} |a_{ij}^{(k)}| \le M,\ i = 1, 2, \cdots, m;\ j = 1, 2, \cdots, n.$$

从而

$$\sum_{k=1}^{N} \|A^{(k)}\|_{m_1} = \sum_{k=1}^{N} \left(\sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}^{(k)}| \right) \le mnM,$$

故 $\sum\limits_{k=1}^{N}\|A^{(k)}\|_{m_1}$ 收敛. 再根据范数的等价性和正项级数的比较判别法知,正项级数 $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\|A^{(k)}\|$ 收敛.

(充分性) 因正项级数 $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\|A^{(k)}\|$ 收敛，故 $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\|A^{(k)}\|_{m_1}$ 收敛，即有

$$|a_{ij}^{(k)}| \le \|A^{(k)}\|_{m_1},\ i=1,2,\cdots,m;\ j=1,2,\cdots,n,$$

故由级数比较判别法知，$\sum\limits_{k=1}^{\infty}a_{ij}^{(k)}, i=1,\cdots,m; j=1,\cdots,n$ 绝对收敛，得证.

定理 5 *n 方阵 A 的幂级数 (Neumann 级数)*

$$\sum_{k=0}^{\infty}A^k = E + A + A^2 + \cdots$$

收敛的充要条件是 $r(A)<1$，且收敛时，其和为 $(E-A)^{-1}$.

证明： (必要性) 因为 $\sum\limits_{k=0}^{\infty}A^k$ 收敛，则

$$\sum_{k=0}^{\infty}(A^k)_{ij},\ i,j=1,2,\cdots,n,$$

收敛，进而 $\lim\limits_{k\to\infty}(A^k)_{ij}=0,\ i,j=1,2,\cdots,n$，即 $\lim\limits_{k\to\infty}A^k=O$，于是 $r(A)<1$.

(充分性) 因为 $r(A)<1$，故 $E-A$ 可逆. 又因

$$(E+A+A^2+\cdots+A^k)(E-A)=E-A^{k+1},$$

所以

$$E+A+A^2+\cdots+A^k=(E-A)^{-1}-A^{k+1}(E-A)^{-1}.$$

当 $k\to\infty$ 时，有 $A^{k+1}(E-A)^{-1}\to O$，即

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{n}A^k=(E-A)^{-1}.$$

定理 6 *设幂级数*

$$f(z)=\sum_{k=0}^{\infty}a_k z^k$$

的收敛半径为 r，如果方阵 A 满足 $r(A)<r$，则矩阵幂级数 $\sum\limits_{k=0}^{\infty}c_kA^k$ 绝对收敛；若 $r(A)>r$ 则发散.