2006 级硕士研究生《矩阵理论》试卷

一、判断题（40 分）（对者打$\vee$，错者打$\times$）

1、设矩阵$A\in C^{n\times n}$，且$A\neq 0$，则$\|A(A^HA)^+A^H\|_2=1$.　　　　(　　　)

$B=A(A^HA)^+A^H\Rightarrow B^H=B\Rightarrow$ 则$\|B\|_2=\rho(B)$；　$B^2=B\Rightarrow B$的特征值为0或者$1\Rightarrow$ $A\neq 0\Rightarrow \rho(B)=1$

2、设$A\in R^{m\times n}$的奇异值为$\sigma_1\geq\sigma_2\geq\cdots\geq\sigma_n$，则$\|A\|_2^2=\sum_{i=1}^{n}\sigma_i^2$.　　　　(　　　)

3、设$A\in C^{n\times n}$，且有某种算子范数$\|\cdot\|$，使得$\|A\|<1$，则$\|(E-A)^{-1}\|>\dfrac{1}{1-\|A\|}$，其中$E$为$n$阶单位矩阵.　　　　(　　　)

$$E=(E-A)(E-A)^{-1}=(E-A)^{-1}-A(E-A)^{-1}\Rightarrow(E-A)^{-1}=E+A(E-A)^{-1}\Rightarrow$$

$$\|(E-A)^{-1}\|=\|E+A(E-A)^{-1}\|\leq\|E\|+\|A\|\|(E-A)^{-1}\|\Rightarrow$$

$$\|(E-A)^{-1}\|\leq\frac{\|E\|}{1-\|A\|}=\frac{1}{1-\|A\|}$$

4、设$A=E-2uu^H$(其中，E为n阶单位矩阵，$u\in C^n$且$\|u\|_2=1$)，则$\|A\|_{m_2}=\sqrt{n}$

(　　　)

$\because A^H=(E-2uu^H)^H=E-(2uu^H)^H=E-2uu^H=A$

$A^HA=(E-2uu^H)(E-2uu^H)=E-2uu^H-2uu^H+4uu^Huu^H=$

$\therefore\ \|A\|_{m_2}=\sqrt{tr(A^HA)}=\sqrt{\ }$

5、设$A=\begin{pmatrix}1&2&3&4\\2&4&6&8\\1&1&0&1\end{pmatrix}$,则$A$的$M\text{-}P$广义逆$A^+$的秩$rank(A^+)=1$.　　　　(　　　)

6、若A为列满秩矩阵，则$(A^HA)^{-1}A^H$既是A的左逆又是A的$M\text{-}P$广义逆A^+.

(　　　)

7、设$\varepsilon_1,\varepsilon_2,\ldots,\varepsilon_n$线性空间$V^n$的一组基，$x=x_1\varepsilon_1+x_2\varepsilon_2+\cdots x_n\varepsilon_n\in V^n$，则.

$\|x\|=k_1|x_1|^2+k_2|x_2|^2+\cdots k_n|x_n|^2$ $(k_i\geq 0)$是V^n上向量x的范数.　(　　　)

8、设$A=\begin{pmatrix}30&3&2\\2&10&2\\8&1&0\end{pmatrix}$，则 A 有三个实特征值.　　　　　　　　　　　(　　　)

9、设G为矩阵$A\in C_r^{m\times n}(r<n)$的广义逆$A^-$，　$A=BD$为A的最大秩分解，则

$\|DGB\|_2=r$.　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　(　　　)

10、设 $A=(a_{ij})\in C^{n\times n}(n>1)$为严格对角占优矩阵，　$D=diag(a_{ii},a_{22},\ldots,a_{nn})$，

$B=E-D^{-1}A(E$为n阶单位矩阵$)$,则 B 的谱半径 $r(B)\ge 1$.　　　　　　　　　(　　　)

二、计算与证明（60分）

1.　设矩阵 U 是酉矩阵，$A=\mathrm{diag}(a_1,a_2,\cdots,a_n)$，证明：$UA$ 的所有特征值λ满足不等式

$$\min_i\{|a_i|\}\le|\lambda|\le\max_i\{|a_i|\}. \text{ (10 分)}$$

2.　设$\|\cdot\|_a$是 $C^{n\times n}$ 上的相容的矩阵范数，矩阵 B,C 都是 n 阶可逆矩阵，且$\|B^{-1}\|_a$及$\|C^{-1}\|_a$都小于或等于 1，证明：对任意矩阵$A\in C^{n\times n}$

$$\|A\|_b=\|BAC\|_a$$

定义了 $C^{n\times n}$ 上的一个相容的矩阵范数. (10 分)

3.　已知矩阵 $A=\begin{pmatrix}0&1&-1\\-1&0&1\\1&-1&0\\0&1&-1\end{pmatrix}, b=\begin{pmatrix}1\\-1\\0\\1\end{pmatrix}$,

(1)　求矩阵 A 的最大秩分解;

(2)　求 A^+;

(3)　用广义逆矩阵方法判断方程组 $Ax=b$ 是否有解?

(4)　求方程组 $Ax=b$ 的最小范数解或最佳逼近解?(要求指出所求的是哪种解) (10 分)

解: (1) $A=\begin{pmatrix}0&1\\-1&0\\1&-1\\0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&-1\\0&1&-1\end{pmatrix}=BD$,

(2) $B^+=(B^TB)^{-1}B^T=\dfrac{1}{5}\begin{pmatrix}1&-3&2&1\\2&-1&-1&2\end{pmatrix}$,　$D^+=D^T(DD^T)^{-1}=\dfrac{1}{3}\begin{pmatrix}2&-1\\-1&2\\-1&-1\end{pmatrix}$,

$$A^{+}=D^{+}B^{+}=\frac{1}{15}\begin{pmatrix}0 & -5 & 5 & 0\\ 3 & 1 & -4 & 3\\ -3 & 4 & -1 & -3\end{pmatrix},$$

(3) $AA^{+}b=b=\begin{pmatrix}1\\ -1\\ 0\\ 1\end{pmatrix}$，方程组 $Ax=b$ 有解;

(4) 最小范数解: $x_0=A^{+}b=\frac{1}{3}\begin{pmatrix}1\\ 1\\ -2\end{pmatrix}$.

4. 用 Gerschgorin 圆盘定理证明: 矩阵 $A=\begin{pmatrix}2 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2^2} & \frac{1}{2^3} & \frac{1}{2^4}\\ \frac{2}{3} & 4 & \frac{2}{3^2} & \frac{2}{3^3} & \frac{2}{3^4}\\ \frac{3}{4} & \frac{3}{4^2} & 6 & \frac{3}{4^3} & \frac{3}{4^4}\\ \frac{4}{5} & \frac{4}{5^2} & \frac{4}{5^3} & 8 & \frac{4}{5^4}\\ \frac{5}{6} & \frac{5}{6^2} & \frac{5}{6^3} & \frac{5}{6^4} & 10\end{pmatrix}$ 能够相似于对角矩阵且 A 的特征值都是正实数.

证明: A 的 5 个盖尔圆盘为 $G_i=\{z\,|\,|z-2i|\le 1-\frac{1}{(i+1)^4}\}\quad (i=1,2,3,4,5)$

它们都是孤立的, 从而矩阵有 5 个互异特征值, 所以矩阵能够相似于对角矩阵, 再由 G_i 关于实轴对称且都在 y 坐标轴右边, 以及实矩阵的复数特征值成对共扼出现的性质知, G_i 中的特征值必为正实数, 所以 A 的特征值都是正实数.

5. 设矩阵 $A,B\in C^{m\times n}$，$\sigma_1(M)$ 表示矩阵 $M\in C^{m\times n}$ 的最大奇异值, 证明:

(1) $\sigma_1(AB)\le\sigma_1(A)\cdot\sigma_1(B)$;

(2). $\sigma_1(A+B)\le\sigma_1(A)+\sigma_1(B)$. (10 分)

证明: (1) $\sigma_1(AB)=\|AB\|_2\le\|A\|_2\cdot\|B\|_2\le\sigma_1(A)\cdot\sigma_1(B)$

(2) $\sigma_1(A+B)=\|A+B\|_2\le\|A\|_2+\|B\|_2\le\sigma_1(A)+\sigma_1(B)$.

6. (1) 设 A 是可逆矩阵, λ 是 A 的一个特征值, 对于任意的算子范数 $\|\cdot\|$, 证明

$$|\lambda| \geq \frac{1}{\|A^{-1}\|}.$$ (5 分)

(2) 设矩阵 $A=(a_{ij})\in R^{n\times n}$，$R_i=\sum_{j=1}^{n}\left|a_{ij}\right|$，证明：$\operatorname{rank}(A)\geq\sum_{i=1}^{n}\frac{|a_{ii}|}{R_i}$，其中 $\operatorname{rank}(A)$ 表示矩阵 A 的秩，约定在和式中 $\frac{0}{0}=0$.(5 分)

证明：由于用一非零数乘以矩阵的一行的所有元素不改变矩阵的秩，因而可以假设矩阵 A 的主对角元素 $a_{ii}\geq 0$，且所有的 $R_i=1$ 或者为 0. 则矩阵 A 的所有特征值都在单位圆内且可以证明 $\operatorname{rank}(A)\geq\sum_{i=1}^{n}a_{ii}$，($\sum_{i=1}^{n}a_{ii}=tr(A)=\sum_{i=1}^{n}\lambda_i\leq\sum_{i=1}^{n}|\lambda_i|\leq$ A 的非零特征值的个数 $\leq\operatorname{rank}(A)$).