拉格朗日插值与牛顿插值

代数插值基础介绍

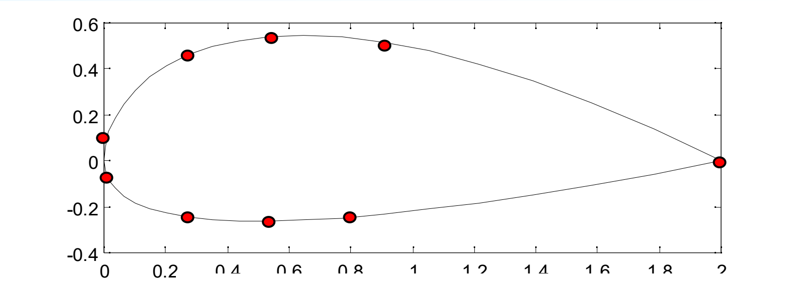
拉格朗日插值公式

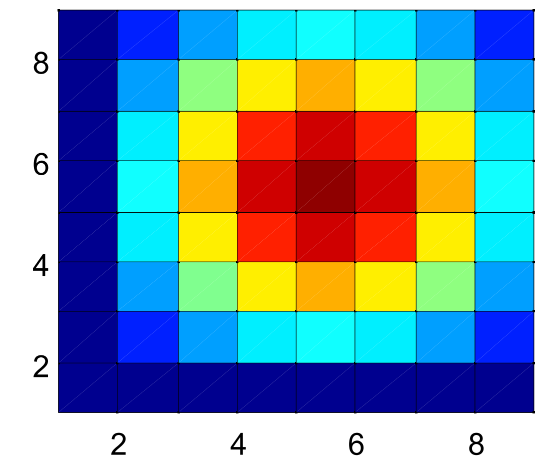
拉格朗日插值的误差分析

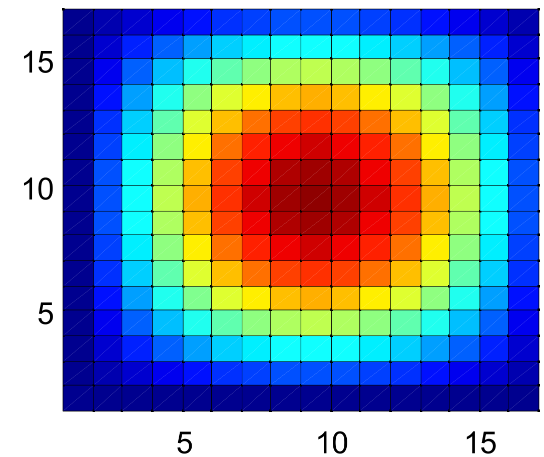
牛顿插值

三次Hermite插值

插值法的应用背景







(1)复杂函数的计算;

(2)函数表中非表格点计算

(3)光滑曲线的绘制;

(4)提高照片分辨率算法;

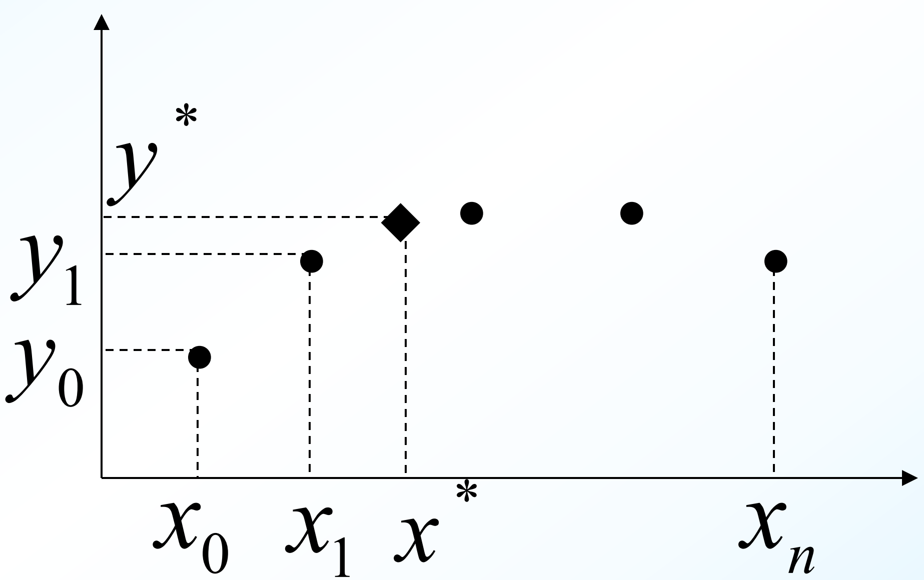
(5)定积分的离散化处理;

(6)微分方程的离散化处理.

一维插值

已知 n+1个节点 (x_j, y_j) $(j=0,1,\cdots n$,其中 x_j 互不相同，不妨设 $a=x_0<x_1<\cdots<x_n=b)$,

求任一插值点 $x^*(\neq x_j)$处的插值 y^*.



节点可视为由 $y=g(x)$产生, g 表达式复杂, 或无封闭形式, 或未知.

插值问题基本提法：

寻求一个次数尽可能低的多项式 p，满足条件：

$$p(x_i) = y_i \qquad (i = 0,1,\cdots,n). \qquad \text{（1）}$$

从几何上看，就是寻求一个最低次的多项式，

其几何曲线通过给定的 $n+1$ 个点 $(x_i, y_i), (i = 0,1,\cdots,n)$.

如果多项式 p 存在，则称 p 为 f 的**插值多项式**，

$x_0, x_1, \cdots, x_n$ 称为**插值节点**（简称节点），

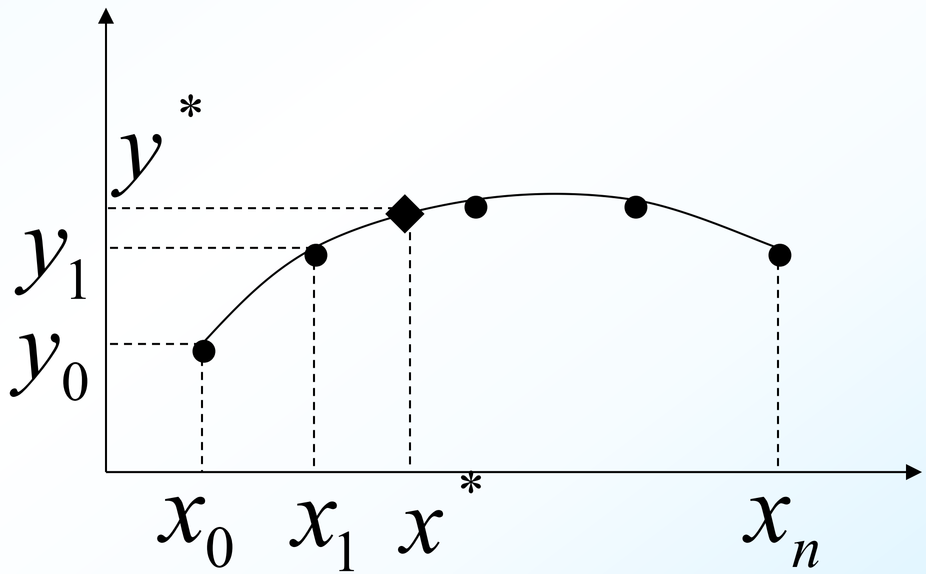
$[a,b]$ 称为**插值区间**，

条件（1）称为**插值条件**， f 称为**被插值函数**.

构造一个(相对简单的)函数 $y=P(x)$,通过全部节点,即

$$P(x_j)=y_j \quad (j=0,1,\cdots n)$$

再用 $P(x)$ 计算插值，即 $y^*=P(x^*)$.



定理1 若插值结点$x_0, x_1,\cdots, x_n$ 是 $(n+1)$个互异点,则满足插值条件 $P(x_k)= y_k \quad (k = 0,1,\ldots,n)$ 的 n 次插值多项式

$$P(x)=a_0 + a_1x +\ldots\ldots+ a_nx^n$$

存在而且是唯一的。

证明: 由插值条件

$$\boxed{\begin{array}{l} P(x_0)= y_0 \\ P(x_1)=y_1 \\ \cdots \\ P(x_n)=y_n \end{array}} \Rightarrow \begin{cases} a_0 + a_1x_0 + \cdots + a_nx_0^n = y_0 \\ a_0 + a_1x_1 + \cdots + a_nx_1^n = y_1 \\ \qquad\qquad \cdots \\ a_0 + a_1x_n + \cdots + a_nx_n^n = y_n \end{cases}$$

方程组系数矩阵取行列式

$$|A|=\begin{vmatrix} 1 & x_0 & \cdots & x_0^n \\ 1 & x_1 & \cdots & x_1^n \\ & \cdots\cdots & & \\ 1 & x_n & \cdots & x_n^n \end{vmatrix}=\prod_{n\geq i>j\geq 0}(x_i-x_j)\neq 0$$

故方程组有唯一解.

从而插值多项式 $P(x)$ 存在而且是唯一的.

拉格朗日插值公式

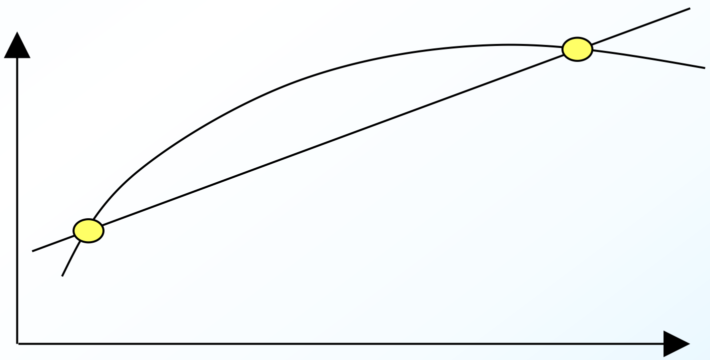
已知函数表

x	x_0	x_1
$f(x)$	y_0	y_1

求满足:

$L(x_0)=y_0$ ，$L(x_1)=y_1$

的线性函数 $L(x)$



过两点直线方程

$$L(x)=y_0+\frac{y_1-y_0}{x_1-x_0}(x-x_0)$$

例1　求$\sqrt{115}$　的近似值(函数值：10.7238)

$$\sqrt{115}\approx 10+\frac{11-10}{121-100}(115-100)=10.7143$$

$$L(x)=y_0+\frac{y_1-y_0}{x_1-x_0}(x-x_0)$$

对称形式 $$L(x)=\frac{x-x_0}{x_1-x_0}y_1+\frac{x_1-x}{x_1-x_0}y_0$$

记 $$l_0(x)=\frac{x_1-x}{x_1-x_0},l_1(x)=\frac{x-x_0}{x_1-x_0}$$

当 $x_0 \le x \le x_1$ 时

$0\le l_0(x)\le 1,$

$0\le l_1(x)\le 1$

x	x_0	x_1
$l_0(x)$	1	0
$l_1(x)$	0	1

基函数

$$L(x)=l_0(x)y_0+l_1(x)y_1$$

二次插值问题

已知函数表

x	x_0	x_1	x_2
$f(x)$	y_0	y_1	y_2

求函数 $L(x)=a_0+a_1x+a_2x^2$ 满足:

$$L(x_0)=y_0\,,\ L(x_1)=y_1,\ L(x_2)=y_2$$

$$L(x)=l_0(x)y_0+l_1(x)y_1+l_2(x)y_2,$$

x	x_0	x_1	x_2
$l_0(x)$	1	0	0

$$l_0(x)=\frac{(x-x_1)(x-x_2)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)}$$

x	x_0	x_1	x_2
$l_0(x)$	1	0	0
$l_1(x)$	0	1	0
$l_2(x)$	0	0	1
$L(x)$	y_0	y_1	y_2

$$l_1(x)=\frac{(x-x_0)(x-x_2)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)}$$

$$l_2(x)=\frac{(x-x_0)(x-x_1)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)}$$

二次插值函数：$L(x)=l_0(x)y_0+l_1(x)y_1+l_2(x)y_2$,

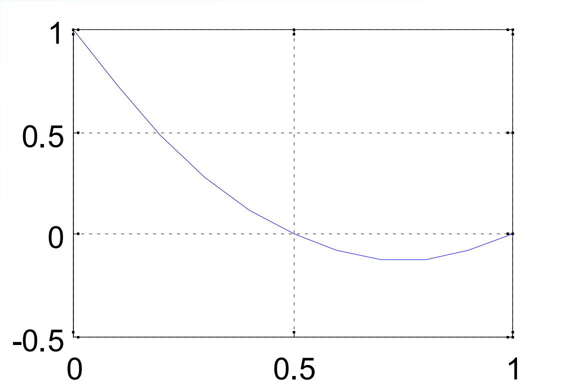
二次插值基函数图形

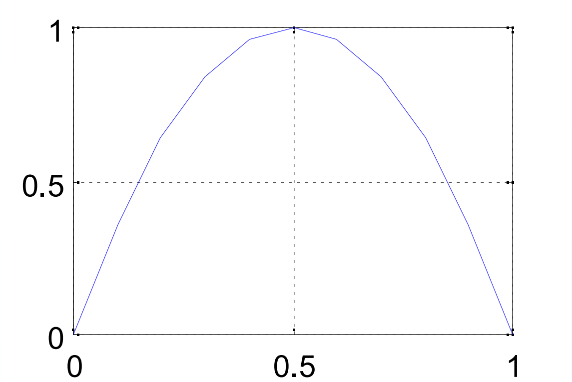
取 $x_0 = 0,\ x_1 = 0.5,\ x_2 = 1$

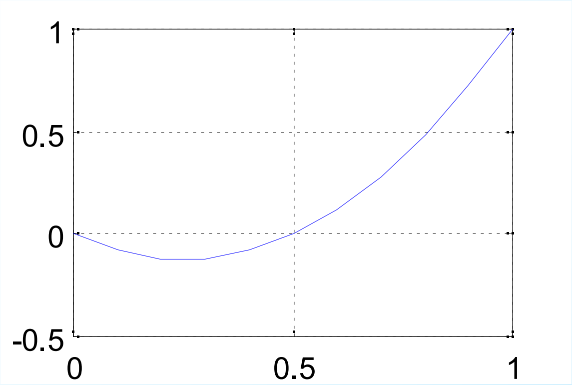
$l_0(x) = 2(x - 0.5)(x - 1);$

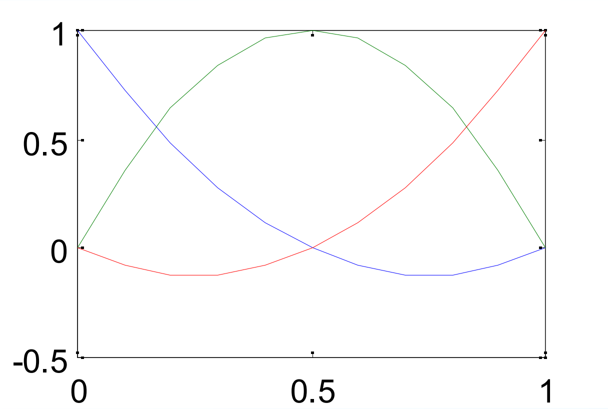
$l_1(x) = -4x(x - 1);$

$l_2(x) = 2(x - 0.5)x$









二次插值的一个应用——极值点近似计算

二次插值函数：$L(x)=l_0(x)y_0+l_1(x)y_1+l_2(x)y_2$,

$$\frac{d}{dx}[l_0(x)y_0+l_1(x)y_1+l_2(x)y_2]=0$$

$$l_0'(x)=\frac{2x-(x_1+x_2)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)},\qquad l_2'(x)=\frac{2x-(x_0+x_1)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)}$$

$$l_1'(x)=\frac{2x-(x_0+x_2)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)},$$

极值点近似计算公式

$$x^*\approx\frac{1}{2}\frac{(x_2^2-x_1^2)y_0-(x_2^2-x_0^2)y_1+(x_1^2-x_0^2)y_2}{(x_2-x_1)y_0-(x_2-x_0)y_1+(x_1-x_0)y_2}$$

拉格朗日插值公式

插值条件:$L(x_k)= y_k \quad (k = 0,1,\ldots,n)$

$$L_n(x) = l_0(x)y_0 + l_1(x)y_1 + \cdots + l_n(x)y_n$$

其中,第k (k=0,1,…， n)个插值基函数

$$l_k(x) = \frac{(x-x_0)\cdots(x-x_{k-1})(x-x_{k+1})\cdots(x-x_n)}{(x_k-x_0)\cdots(x_k-x_{k-1})(x_k-x_{k+1})\cdots(x_k-x_n)}$$

或:

$$l_k(x) = \prod_{\substack{j=0 \\ j\neq k}}^{n} \frac{(x-x_j)}{(x_k-x_j)}$$

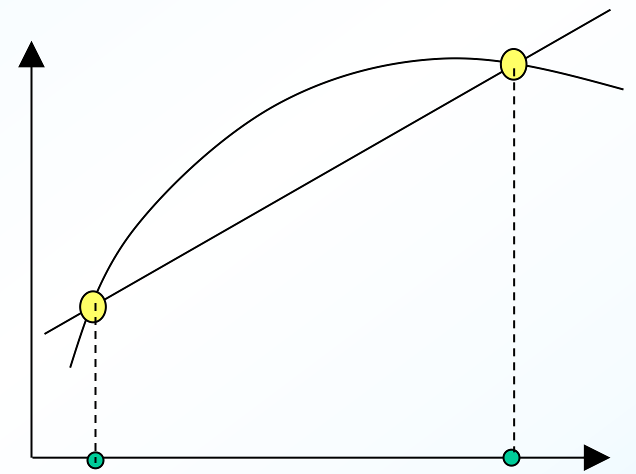
例2 $$g(x)=\frac{1}{1+x^2},\quad -5\le x\le 5$$

采用拉格朗日多项式插值：选取不同插值节点个数n+1，其中n为插值多项式的次数，当n分别取2,4,6,8,10时，绘出插值结果图形.

拉格朗日多项式插值的
这种振荡现象叫 **Runge现象(龙格)**

拉格朗日插值的误差分析

两点线性插值



$$L(x)=\frac{x-x_0}{x_1-x_0}y_1+\frac{x_1-x}{x_1-x_0}y_0$$

插值余项(误差):

$$R(x) = f(x) - L(x)$$

由插值条件,知

$$R(x)=C(x)\,(x-x_0)(x-x_1)$$

即 $f(x) - L(x) = C(x)\,(x-x_0)(x-x_1)$

$$\boxed{C(x) = ???}$$

定理2 设 $f(x)\in C[a, b]$, 且 $f(x)$ 在(a, b)内具有$n+1$阶导数, 取插值结点

$$a\le x_0 < x_1 < \cdots\cdots < x_n \le b$$

则对任何$x\in[a, b]$, 满足 $L_n(x_k) = f(x_k)$ 的 n 次插值多项式$L_n(x)$ 的误差

$$R_n(x) = f(x) - L_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi_n)}{(n+1)!}\omega_{n+1}(x)$$

其中, $\omega_{n+1}(x) = (x - x_0)(x - x_1)\cdots(x - x_n)$

$\xi_n \in (a, b)$ 且与x有关.

证明: 设$\underline{x} \in [a,b]$,记 $\omega_{n+1}(\underline{x}) = (\underline{x}-x_0)(\underline{x}-x_1)\cdots\cdots(\underline{x}-x_n)$

由插值条件

$$L_n(x_k) = f(x_k) \qquad (k = 0,1,\ldots,n)$$

知存在$C(\underline{x})$使得

$$f(\underline{x}) - L_n(\underline{x}) = C(\underline{x})\,\omega_{n+1}(\underline{x})$$

对于取定的 $\underline{x} \in (a, b)$, 设 $t \in (a, b)$且$t \neq \underline{x}$. 构造函数

$$F(t) = f(t) - L_n(t) - C(\underline{x})\omega_{n+1}(t)$$

显然, $F(\underline{x}) = 0$, $F(x_j) = 0$, $(j = 0,1,\cdots,n)$

$F(t)$ 有$(n+2)$个相异零点. 根据Rolle定理, $F'(t)$在区间(a, b)内至少有 $(n+1)$个相异零点.

依此类推,$F^{(n+1)}(t)$ 在区间 (a, b) 内至少有一个零点。故存在 $\xi \in (a, b)$, 使$F^{(n+1)}(\xi)=0$

$$\boxed{F^{(n+1)}(t)=f^{(n+1)}(t)-L_n^{(n+1)}(t)-C(\underline{x})\omega_{n+1}^{(n+1)}(t)}$$

$$f^{(n+1)}(\xi)-C(\underline{x})(n+1)!=0$$

$$C(\underline{x})=\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} \quad \rightarrow \quad f(\underline{x})-L_n(\underline{x})=\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}\omega_{n+1}(\underline{x})$$

$$f(x)-L_n(x)=\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}\omega_{n+1}(x)$$

例3 设 $y=f(x)$ 在区间 $[a, b]$上有连续,且 $f(x)$ 在 (a, b) 内具有2阶导数,已知$f(x)$在区间端点处的值.如果当$x\in(a, b)$时,有$|f''(x)|\le M$. 试证明

$$|R_1(x)|\le\frac{M}{8}(b-a)^2$$

证明 由Lagrange插值误差定理

$$R_1(x)=f(x)-L_1(x)=\frac{f''(\xi)}{2}(x-a)(x-b)$$

令$h(x)=|(x-a)(x-b)|$

$$\max_{a\le x\le b}h(x)=h\left(\frac{a+b}{2}\right)=\frac{(b-a)^2}{4}\qquad |R_1(x)|\le\frac{M}{8}(b-a)^2$$

应用: 考虑制做 $\sin x$ 在$[0, \pi]$上等距结点的函数表, 要求用线性插值计算非表格点数据时, 能准确到小数后两位, 问函数表中自变量数据的步长h应取多少为好?

解：设应取的步长为h, 则 $x_j = jh\ (j = 0,1,\cdots,n)$.

当 $x \in (x_j,\ x_{j+1})$时

$$\sin x \approx \frac{1}{h}[(x - x_j)\sin x_{j+1} + (x_{j+1} - x)\sin x_j]$$

$$|R(x)| \le \max_{x_j \le x \le x_{j+1}} |f''(x)| \frac{(x_{j+1} - x_j)^2}{8} = \frac{h^2}{8}$$

只须 $\frac{h^2}{8} \le \frac{1}{2} \times 10^{-2}$ ➔ $h \le 0.2$

牛顿插值

取x_0, x_1, x_2,求二次函数

$$P(x)=a_0 + a_1(x-x_0) + a_2(x-x_0)(x-x_1)$$

满足条件

$$P(x_0)=f(x_0),\ P(x_1)=f(x_1),\ P(x_2)=f(x_2)$$

插值条件引出关于a_0, a_1, a_2方程

$$\begin{cases} a_0 & = f(x_0) \\ a_0 + a_1(x_1 - x_0) & = f(x_1) \\ a_0 + a_1(x_2 - x_0) + a_2(x_2 - x_0)(x_2 - x_1) & = f(x_2) \end{cases}$$

解下三角方程组过程中引入符号

$$f[x_0, x_1] = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}$$

$$f[x_1, x_2] = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$$

$$f[x_0, x_1, x_2] = \frac{f[x_1, x_2] - f[x_0, x_1]}{x_2 - x_0}$$

$$a_0 = f(x_0), \quad a_1 = f[x_0, x_1], \quad a_2 = f[x_0, x_1, x_2]$$

牛顿插值公式:

$$\begin{aligned} P(x) = & f(x_0) + f[x_0, x_1](x - x_0) \\ & + f[x_0, x_1, x_2](x - x_0)(x - x_1) \end{aligned}$$

定义3 若已知函数 $f(x)$ 在点 $x_0, x_1, \cdots, x_n$ 处的值 $f(x_0)$, $f(x_1), \cdots, f(x_n)$.如果 $i \neq j$,则

一阶均差 $$f[x_j, x_{j+1}] = \frac{f(x_{j+1}) - f(x_j)}{x_{j+1} - x_j} \quad (j = 0,1,\ldots,n\text{-}1)$$

二阶均差 $$f[x_j, x_{j+1}, x_{j+2}] = \frac{f[x_{j+1}, x_{j+2}] - f[x_j, x_{j+1}]}{x_{j+2} - x_j}$$

$$(j = 0,1,\ldots,n\text{-}2)$$

n阶均差 $$f[x_0, x_1, \cdots, x_n] = \frac{f[x_1, \cdots, x_n] - f[x_0, \cdots x_{n-1}]}{x_n - x_0}$$

$$P(x) = f(x_0) + f[x_0, x_1](x - x_0) + f[x_0, x_1, x_2](x - x_0)(x - x_1) + \ldots + f[x_0, x_1, \ldots, x_n](x - x_0)(x - x_1)\ldots(x - x_{n-1})$$

例4 由函数表求各阶均差

x	- 2	-1	0	1	3
y	-56	-16	-2	-2	4

解:按公式计算一阶差商、二阶差商、三阶差商如下

$$f[x_0, x_1, \cdots, x_n] = \frac{f[x_1, \cdots, x_n] - f[x_0, \cdots x_{n-1}]}{x_n - x_0}$$

x	$f(x)$	一阶差商	二阶差商	三阶差商
-2	-56			
-1	-16	40		
0	-2	14	-13	
1	-2	0	-7	2
3	4	3	1	2

例5 由函数表求Newton插值函数

x	- 2	-1	0	1	3
y	-56	-16	-2	-2	4

$$f(x_0)=-56, f[x_0, x_1] = 40, f[x_0, x_1, x_2] = -13,$$

$$f[x_0, x_1, x_2, x_3] = 2 , f[x_0, x_1, x_2, x_3, x_4] = 0$$

$$N_3(x) = -56 + 40(x + 2) - 13(x + 2)(x + 1) + 2(x + 2)(x + 1)\, x$$

函数值的计算:

$$N_3(x) = -56 + (x + 2)\,[40 + (x + 1)\,[-13 + 2\,x]]$$

算法: 记插值节点为$x_0, x_1, \cdots, x_n$,

$f(x)$的各阶差商为$f_0, f_1, f_2, \cdots, f_n$

(1) $s \leftarrow f_n$

(2) 计算 $s \leftarrow f_k + s*(x-x_k)$ $\quad (k=n-1, n-2, \cdots, 0)$

(3) $N(x)=s$

根据代数插值存在唯一性定理, n 次牛顿插值公式恒等于n次拉格朗日插值公式,误差余项也相等，即

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}\omega_{n+1}(x)$$

$$\boxed{\begin{aligned} P(x) = {} & f(x_0) + f[x_0, x_1](x - x_0) + f[x_0, x_1, x_2](x - x_0)(x - x_1) \\ & + \ldots + f[x_0, x_1, \ldots, x_n](x - x_0)(x - x_1)\ldots(x - x_{n-1}) \end{aligned}}$$

三次Hermite插值

已知节点x_0和x_1处的函数值及导数值

$$f(x_0)=y_0 \quad f(x_1)=y_1 \quad f'(x_0)=m_0 \quad f'(x_1)=m_1$$

求三次插值函数

$$H(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+a_3x^3$$

满足插值条件 $H(x_j)=y_j \quad H'(x_j)=m_j \quad (j=0,1)$

x	x_0	x_1
$H(x)$	y_0	y_1
$H'(x)$	m_0	m_1

例6. 已知插值条件:

x	0	1
$H(x)$	0	1
$H'(x)$	0	0

求3次插值函数.

解:设 $H(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+a_3x^3$

得 $a_0=0$, $a_1=0$, 列出方程组

$$\begin{cases} a_2+a_3=1 \\ 2a_2+3a_3=0 \end{cases}$$

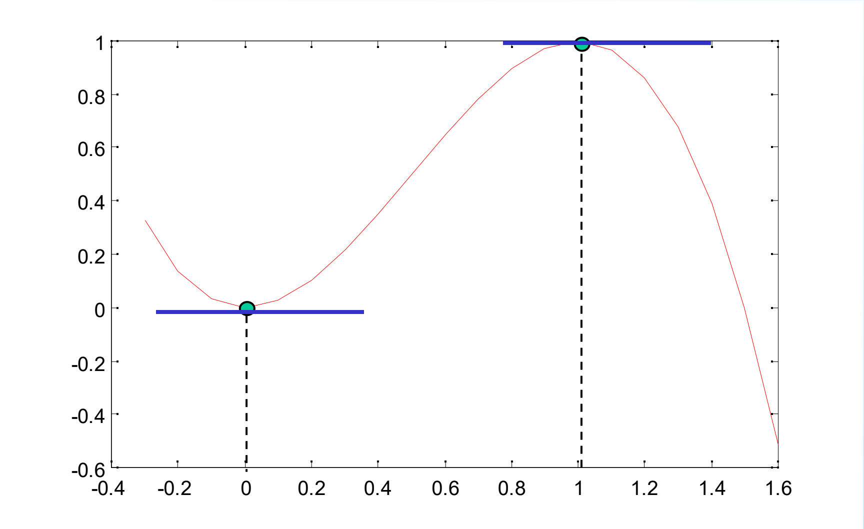
求解, 得

$$a_2=3\ ,\ a_3=-2$$

所以,有

$$H(x)=3x^2-2x^3$$

$$=(3-2x)x^2$$



利用基函数表示Hermite插值

$$H(x) = y_0\alpha_0(x) + y_1\alpha_1(x) + m_0\beta_0(x) + m_1\beta_1(x)$$

$$\alpha_0(x) = (1 + 2\frac{x - x_0}{x_1 - x_0})(\frac{x_1 - x}{x_1 - x_0})^2 \quad \beta_0(x) = (x - x_0)(\frac{x_1 - x}{x_1 - x_0})^2$$

$$\alpha_1(x) = (1 + 2\frac{x_1 - x}{x_1 - x_0})(\frac{x - x_0}{x_1 - x_0})^2 \quad \beta_1(x) = (x - x_1)(\frac{x - x_0}{x_1 - x_0})^2$$

x	x_0	x_1
$\alpha_0(x)$	1	0
$\alpha_0'(x)$	0	0
$\alpha_1(x)$	0	1
$\alpha_1'(x)$	0	0

x	x_0	x_1
$\beta_0(x)$	0	0
$\beta_0'(x)$	1	0
$\beta_1(x)$	0	0
$\beta_1'(x)$	0	1

两点Hermite插值的误差估计式

$$R(x) = f(x) - H_3(x) = \frac{f^{(4)}(\xi)}{4!}[(x-x_0)(x-x_1)]^2$$

证明: 由插值条件知

$$R(x_0)=R'(x_0)=0,\ R(x_1)=R'(x_1)=0$$

取 x 异于 x_0 和 x_1, 设

$$R(x) = C(x)(x-x_0)^2(x-x_1)^2$$

利用 $f(x) - H(x)=C(x)(x-x_0)^2(x-x_1)^2$

构造辅助函数

$$F(t) = f(t) - H(t) - C(x)(t-x_0)^2(t-x_1)^2$$

显然,$F(t)$有三个零点x_0, x, x_1,由Roll定理知,存在$F'(t)$的两个零点t_0,t_1满足$x_0<t_0<t_1<x_1$,而x_0和x_1也是$F'(x)$的零点,故$F'(x)$有四个相异零点.

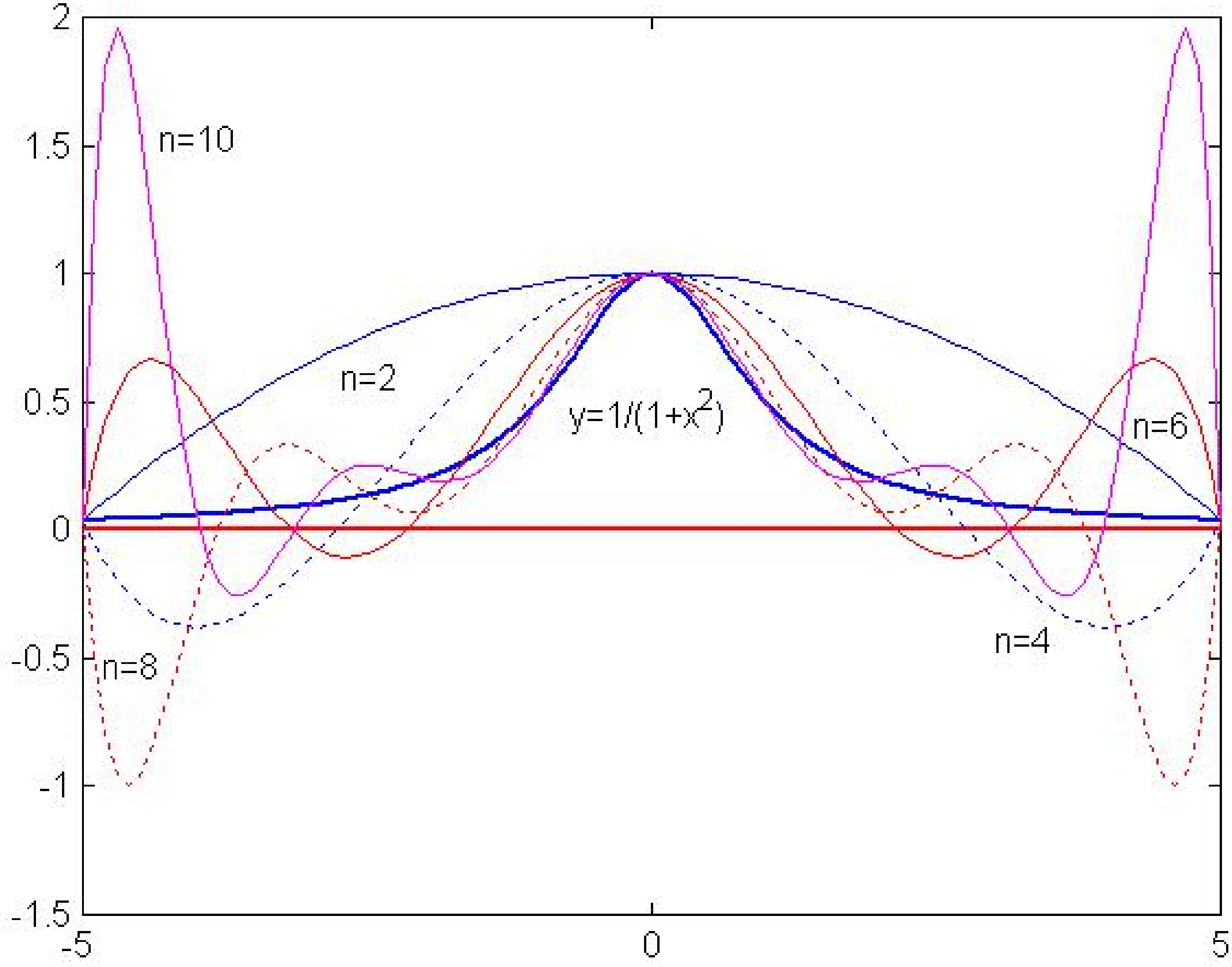
反复应用Roll定理,得$F^{(4)}(t)$有一个零点设为ξ

$$F(t)=f(t)-H(t)-C(x)(t-x_0)^2(t-x_1)^2$$

$$F^{(4)}(\xi)=f^{(4)}(\xi)-C(x)(4!)=0$$

$$C(x)=\frac{f^{(4)}(\xi)}{4!}$$

$$R(x)=C(x)(x-x_0)^2(x-x_1)^2=\frac{f^{(4)}(\xi)}{4!}[(x-x_0)(x-x_1)]^2$$


n=10
n=2
y=1/(1+x2)
n=6
n=4
n=8
2
1.5
1
0.5
0
-0.5
-1
-1.5
-5
0
5