

特征值的估计

定理 1 (Shur不等式) 设 $A \in C^{n \times n}$ 的特征值为 $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$, 则

$$\sum_{i=1}^n |\lambda_i|^2 \leq \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n |a_{ij}|^2 = \|A\|_F^2$$

且等号成立当且仅当为正规矩阵

定理 2 (Hirsch) 设 $A \in C^{n \times n}$ 的特征值为 $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$, 则

$$1) |\lambda_i| \leq n \max_{i,j} |a_{ij}|, \quad 2) |\operatorname{Re} \lambda_i| \leq n \max_{i,j} |b_{ij}|,$$

$$3) |\operatorname{Im} \lambda_i| \leq n \max_{i,j} |c_{ij}|,$$



定理 3 (Bendixson) 设 $A \in R^{n \times n}$, 则 A 的任一特征值 λ_i 满足

$$|\operatorname{Im} \lambda_i| \leq \sqrt{\frac{n(n-1)}{2}} \max_{i,j} |c_{ij}|$$

定理 4 (Browne): 设 $A \in C^{n \times n}$ 的特征值为 $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$, 奇异值为 $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \dots \geq \sigma_n$, 则

$$\sigma_n \leq |\lambda_i| \leq \sigma_1 \quad (i = 1, 2, \dots, n)$$



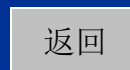
$$B = \frac{1}{2}(A^H + A), \quad C = \frac{1}{2}(A - A^H)$$

A, B, C 的特征值分别为 $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$,
 $\{\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_n\}, \{i\gamma_1, i\gamma_2, \dots, i\gamma_n\}$, 且满足

$$|\lambda_1| \geq |\lambda_2| \geq \dots \geq |\lambda_n|, \quad \mu_1 \geq \mu_2 \geq \dots \geq \mu_n, \\
\gamma_1 \geq \gamma_2 \geq \dots \geq \gamma_n.$$

定理 5 设 $A \in C^{n \times n}$, $B, C, \lambda_i, \mu_i, \gamma_i$ 定义同上, 则

$$\mu_n \leq \operatorname{Re} \lambda_i \leq \mu_1, \quad \gamma_n \leq \operatorname{Im} \lambda_i \leq \gamma_1$$



圆盘定理

定义 1 设 $A = (a_{ij}) \in C^{n \times n}$

行盖尔圆盘 $\longleftrightarrow S_i = \{z \in C : |z - a_{ii}| \leq R_i = \sum_{j \neq i} |a_{ij}|\}$

列盖尔圆盘 $\longleftrightarrow G_i = \{z \in C : |z - a_{ii}| \leq C_i = \sum_{j \neq i} |a_{ji}|\}$

定理 2 (圆盘定理1) 设 $A \in C^{n \times n}$, 则 A 的任一特征值

$$\lambda \in S = \bigcup_{j=1}^n S_j$$



返回

定理 3 (圆盘定理2) 设 n 阶方阵 A 的 n 个盖尔圆盘中有 k 个圆盘的并形成一连通区域 G , 且它与余下的 $n - k$ 个圆盘都不相交, 则在该区域 G 中恰好有 A 的 k 个特征值.

推论 1 设 n 阶方阵 A 的 n 个盖尔圆盘两两互不相交, 则 A 相似于对角阵.

推论 2 设 n 阶实阵 A 的 n 个盖尔圆盘两两互不相交, 则 A 特征值全为实数.



返回

推论 3 $B = D^{-1}AD \Rightarrow \begin{cases} \lambda_i(A) = \lambda_i(B) \in \bigcup_{i=1}^n S_i(B) \\ \rho(A) = \rho(B) \end{cases}$

令 $D = \text{diag}(p_1, p_2, \dots, p_n), (p_i > 0)$

$$D^{-1}AD = \begin{bmatrix} a_{11} & \frac{p_2}{p_1} a_{12} & \cdots & \frac{p_n}{p_1} a_{1n} \\ \frac{p_1}{p_2} a_{21} & a_{22} & \cdots & \frac{p_n}{p_2} a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{p_1}{p_n} a_{n1} & \frac{p_2}{p_n} a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$



返回

$$r_i = \frac{1}{p_i} \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n |a_{ij}| p_j, \quad Q_i = \{z \in C : |z - a_{ii}| \leq r_i\}$$

$$t_j = p_j \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^n \frac{|a_{ij}|}{p_i}, \quad P_j = \{z \in C : |z - a_{jj}| \leq t_j\}$$

推论 4 设 $A \in C^{n \times n}$, 则 A 的任一特征值

$$\lambda_i \in \left(\bigcup_{i=1}^n Q_i \right) \cap \left(\bigcup_{j=1}^n P_j \right)$$



定义 2 设 $A \in C^{n \times n}$

行对角占优 $\longleftrightarrow |a_{ii}| \geq R_i = \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n |a_{ij}| \quad (i=1,2,\dots,n)$

列对角占优 $\longleftrightarrow |a_{ii}| \geq C_i = \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n |a_{ji}| \quad (i=1,2,\dots,n)$

行严格对角占优 $\longleftrightarrow |a_{ii}| > R_i = \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n |a_{ij}|$

列严格对角占优 $\longleftrightarrow |a_{ii}| > C_i = \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n |a_{ji}|$



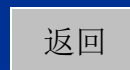
返回

定理 4 设 $A \in C^{n \times n}$ 行(或列)严格对角占优, 则

(1) A 可逆, 且 $\lambda_i \in \bigcup_{i=1}^n S_i$ ($S_i = \{z \in C : |z - a_{ii}| \leq |a_{ii}|\}$)

(2)若 A 的所有主对角元都为正数, 则 A 的特征值都有正实部;

(3)若 A 为Hermite矩阵, 且所有主对角元都为正数, 则 A 的特征值都为正数.



定义： 设 $A \in C^{n \times n}$ 为Hermite矩阵, $x \in C$, 称

$$R(x) = \frac{x^H A x}{x^H x} \quad x \neq 0$$

为A的 **Rayleigh商**.

定理1(Rayleigh-Ritz)： 设 $A \in C^{n \times n}$ 为Hermite矩阵, 则

$$(1) \lambda_n x^H x \leq x^H A x \leq \lambda_1 x^H x \quad (\forall x \in C^n)$$

$$(2) \lambda_{\max} = \lambda_1 = \max_{x \neq 0} R(x) = \max_{x^H x = 1} x^H A x$$

$$(3) \lambda_{\min} = \lambda_n = \min_{x \neq 0} R(x) = \min_{x^H x = 1} x^H A x$$



返回

定理3(Courant-Fischer): 设 $A \in C^{n \times n}$ 为 Hermite 矩阵, 特征值为 $\lambda_n \leq \lambda_{n-1} \leq \dots \leq \lambda_1$, i 为给定的正整数, $1 \leq i \leq n$, 则

$$\lambda_i = \max_{\substack{W \\ \dim W = i}} \min_{\substack{x \in W \\ x \neq 0}} R(x) = \max_{\substack{W \\ \dim W = i}} \min_{\substack{u \in W \\ \|u\|_2 = 1}} u^H A u$$

$$\lambda_i = \min_{\substack{W \\ \dim W = n-i+1}} \max_{\substack{x \in W \\ x \neq 0}} R(x) = \min_{\substack{W \\ \dim W = n-i+1}} \max_{\substack{u \in W \\ \|u\|_2 = 1}} u^H A u$$



返回

定理4(Weyl) : 设 $A, B \in C^{n \times n}$ 为 Hermite 矩阵, 则

$\forall k = 1, 2, \dots, n$, 有

$$\lambda_k(A) + \lambda_n(B) \leq \lambda_k(A + B) \leq \lambda_k(A) + \lambda_1(B)$$



返回

例1. $A = \begin{pmatrix} 6 & 5 & 1 & 2 \\ 1 & 7 & 0 & 2 \\ 0 & 4 & 7 & 5 \\ 2 & 0 & 1 & 5 \end{pmatrix}$, 证明 $r(A) < 13$.

证明: 取 $D = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & 1/2 & & \\ & & 1 & \\ & & & 1/2 \end{pmatrix}$, $B = D^{-1}AD =$

$$\begin{pmatrix} 1 & & & \\ & 2 & & \\ & & 1 & \\ & & & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 6 & 5 & 1 & 2 \\ 1 & 7 & 0 & 2 \\ 0 & 4 & 7 & 5 \\ 2 & 0 & 1 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & 1/2 & & \\ & & 1 & \\ & & & 1/2 \end{pmatrix}$$

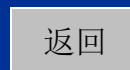


返回

$$= \begin{pmatrix} 6 & 5 & 1 & 2 \\ 2 & 14 & 0 & 4 \\ 0 & 4 & 7 & 5 \\ 4 & 0 & 2 & 10 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & 1/2 & & \\ & & 1 & \\ & & & 1/2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 5/2 & 1 & 1 \\ 2 & 7 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 7 & 5/2 \\ 4 & 0 & 2 & 5 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow r(A) = r(B) \leq 12.$$

例2. $A = \begin{pmatrix} 1/4 & 1/4 & 1/4 & 1/4 \\ 1/5 & 2/5 & 1/5 & 1/5 \\ 1/6 & 1/6 & 3/6 & 1/6 \\ 1/7 & 1/7 & 1/7 & 4/7 \end{pmatrix}$, 证明 $r(A) = 1$.



$$r(A) \leq \|A\|_{\infty} = 1 \text{ 且 } A \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = 1 \bullet \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow \lambda = 1$ 为 A 的特征值. $\Rightarrow r(A) \geq 1 \Rightarrow r(A) = 1$.

例3. $A = \begin{pmatrix} 1/4 & 1/4 & 1/4 & 1/4 \\ 1/5 & 2/5 & 1/5 & 1/5 \\ 1/6 & 1/6 & 3/6 & 1/6 \\ 1/7 & 1/7 & 1/7 & 3/7 \end{pmatrix}$, 证明 $r(A) < 1$.



$$D = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & 1 & \\ & & & \frac{9}{10} \end{pmatrix} \Rightarrow B = D^{-1}AD =$$

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{4} & \frac{2}{4} & \frac{1}{4} & \left(\frac{1}{4}\right) \times \frac{9}{10} \\ \frac{1}{5} & \frac{2}{5} & \frac{1}{5} & \left(\frac{1}{5}\right) \times \frac{9}{10} \\ \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{3}{6} & \left(\frac{1}{6}\right) \times \frac{9}{10} \\ \frac{10}{63} & \frac{10}{63} & \frac{10}{63} & \frac{17}{63} \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow r(A) = r(B) \leq \|B\|_{\infty} < 1.$$



例4: 证明 $A = \begin{pmatrix} 2 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2^2} & \frac{1}{2^3} & \frac{1}{2^4} \\ \frac{2}{3} & 4 & \frac{2}{3^2} & \frac{2}{3^3} & \frac{2}{3^4} \\ \frac{3}{4} & \frac{3}{4^2} & 6 & \frac{3}{4^3} & \frac{3}{4^4} \\ \frac{4}{5} & \frac{4}{5^2} & \frac{4}{5^3} & 8 & \frac{4}{5^4} \\ \frac{4}{5} & \frac{4}{5^2} & \frac{4}{5^3} & \frac{4}{5^4} & 10 \end{pmatrix}$ 有5个不同的实特征值.

$$A \in R^{n \times n}, a_{ii} = 2i (i = 1, \dots, 5) \Rightarrow a_{i+1, i+1} - a_{ii} = 2(i+1) - 2i = 2$$



返回

$$R_1 = \frac{\frac{1}{2}(1 - (\frac{1}{2})^4)}{1 - \frac{1}{2}} = 1 - \frac{1}{2^4}, R_2 = 1 - \frac{1}{3^4},$$

$$R_3 = 1 - \frac{1}{4^4}, R_4 = 1 - \frac{1}{5^4}, R_5 = 1 - \frac{1}{6^4},$$

$$|a_{i+1,i+1} - a_{ii}| = 2 > R_i + R_{i+1} (i = 1, \dots, 4)$$

$\Rightarrow A$ 的5个盖尔圆互不相交 $\Rightarrow A$ 有5个不同的实特征值.

