§1 矩阵的三角分解

程光辉

2020 年 4 月 14 日

定义 1 设 $\boldsymbol{A}$ 为 $\boldsymbol{m\times n}$ 复 *(实)* 矩阵，如果 $\mathbf{rank}(\boldsymbol{A})=\boldsymbol{m}$，则称 $\boldsymbol{A}$ 为行满秩矩阵，记为 $\boldsymbol{A}\in\mathbf{C}_{\boldsymbol{m}}^{\boldsymbol{m\times n}}$ $(\mathbf{R}_{\boldsymbol{m}}^{\boldsymbol{m\times n}})$; 如果 $\mathbf{rank}(\boldsymbol{A})=\boldsymbol{n}$, 则称 $\boldsymbol{A}$ 为列满秩矩阵, 记为 $\boldsymbol{A}\in\mathbf{C}_{\boldsymbol{n}}^{\boldsymbol{m\times n}}$ $(\mathbf{R}_{\boldsymbol{n}}^{\boldsymbol{m\times n}})$.

定义 2 设 $\boldsymbol{U}$ 为 $\boldsymbol{m\times n}$ 复矩阵，如果 $\boldsymbol{UU^H}=\boldsymbol{E_m}$，则 $\boldsymbol{U}$ 为行向量单位正交矩阵，记为 $\boldsymbol{U}\in\mathbf{U}_{\boldsymbol{m}}^{\boldsymbol{m\times n}}$；如果 $\boldsymbol{U^HU}=\boldsymbol{E_n}$，则 $\boldsymbol{U}$ 为列向量组单位正交矩阵，记为 $\boldsymbol{U}\in\mathbf{U}_{\boldsymbol{n}}^{\boldsymbol{m\times n}}$.

定义 3 若矩阵

$$\boldsymbol{R}=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n}\\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n}\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn}\end{bmatrix},$$

则称 $\boldsymbol{R}$ 为上三角矩阵；

若矩阵

$$\tilde{\boldsymbol{R}}=\begin{bmatrix} 1 & a_{12} & \cdots & a_{1n}\\ 0 & 1 & \cdots & a_{2n}\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ 0 & 0 & \cdots & 1\end{bmatrix},$$

则称 $\tilde{\boldsymbol{R}}$ 为单位上三角矩阵.

定义 4 若矩阵

$$\boldsymbol{L}=\begin{bmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0\\ a_{21} & a_{22} & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn}\end{bmatrix},$$

则称 $\boldsymbol{L}$ 为下三角矩阵；

若矩阵

$$\tilde{L} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & 1 \end{bmatrix},$$

则称 $\tilde{L}$ 为单位下三角矩阵.

根据三角矩阵的结构性质，有如下性质：

(1) 若上三角矩阵 R 可逆，则 R^{-1} 也是上三角矩阵，且对角元是 R 对角元的倒数.

(2) 两个上三角矩阵 R_1 和 R_2 的乘积 R_1R_2 也是上三角矩阵，且对角元是 R_1 和 R_2 对角元之积.

酉矩阵也有类似性质，如下：

(1) 酉矩阵 U 的逆 U^{-1} 也是酉矩阵.

(2) 酉矩阵 U_1 和 U_2 的乘积 U_1U_2 也是酉矩阵.

定理 1 设 $A \in \mathbb{C}_n^{n\times n}$，则 A 可唯一地分解为

$$A = U_1R,$$

其中 U_1 是酉矩阵，R 是正线上三角复矩阵，或 A 可唯一分解为

$$A = LU_2,$$

其中 L 是正线下三角复矩阵，U_2 是酉矩阵.

证明：把矩阵 A 按照列划分，即 $A = (a_1,\ a_2, \cdots,\ a_n)$. 因为 $A \in \mathbb{C}_n^{n\times n}$ 列满秩，则 $a_1,\ a_2, \cdots,\ a_n$ 线性无关，对其进行 **Gram-Schmidt** 正交化和单位化，有

$$\begin{cases} b_1 = \frac{a_1}{\|a_1\|} \\ b_i = \frac{a_i - \sum\limits_{j=1}^{i-1}(a_i, b_j)b_j}{\|a_i - \sum\limits_{j=1}^{i-1}(a_i, b_j)b_j\|}, \quad i = 2, \cdots, n. \end{cases}$$

记 $r_{11} = \|a_1\|$，$r_{ii} = \|a_i - \sum\limits_{j=1}^{i-1}(a_i, b_j)b_j\|$ 和 $r_{ji} = (a_i, b_j)$，则有 $a_i = \sum\limits_{j=1}^{i} r_{ji}b_j, \quad i = 1, 2, \cdots, n.$

于是有

$$A = (r_{11}b_1, r_{12}b_1 + r_{22}b_2, \cdots, \sum_{j=1}^{n} r_{jn}b_j)$$

$$
\begin{aligned}
&= (b_1, b_2, \cdots, b_n)R \\
&= U_1 R,
\end{aligned}
$$

其中

$$
R = \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & \cdots & r_{1n} \\ 0 & r_{22} & \cdots & r_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & r_{nn} \end{bmatrix}.
$$

唯一性：设 $A = U_1 R_1 = U_2 R_2$，其中 U_1, U_2 是酉矩阵，R_1, R_2 是上三角矩阵. 于是有

$$
U_2^H U_1 = R_2 R_1^{-1},
$$

既是酉矩阵又是上三角矩阵，即为对角矩阵。又根据对角元，知为单位矩阵，即 $R_1 = R_2$，$U_1 = U_2$，唯一性得证.

推论 1 *(矩阵的 QR 分解)* 设 $A \in \mathrm{R}_n^{n\times n}$，则 A 可唯一地分解为

$$
A = Q_1 R,
$$

其中 Q_1 是正交矩阵，R 是正线上三角实矩阵；或 A 可唯一分解为

$$
A = L Q_2,
$$

其中 L 是正线下三角实矩阵，Q_2 是正交矩阵.

例 1 求三阶实矩阵 $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$ 的 QR 分解.

解：令 $A = (a_1, a_2, a_3)$，对 a_1, a_2, a_3 使用 Gram-Schmidt 正交化得

$$
\begin{aligned}
b_1 &= a_1 = (1, 1, 1)^T \\
b_2 &= a_2 - \frac{(a_2, b_1)}{(b_1, b_1)} b_1 = a_2 - b_1 = (-1, 0, 1)^T \\
b_3 &= a_3 - \frac{(a_3, b_2)}{(b_2, b_2)} b_2 - \frac{(a_3, b_1)}{(b_1, b_1)} b_1 = a_3 - \frac{1}{2} b_2 - \frac{5}{3} b_1 = \frac{5}{6}(1, -2, 1)^T.
\end{aligned}
$$

单位化有

$$
\begin{aligned}
\gamma_1 &= \frac{b_1}{||b_1||} = \frac{1}{\sqrt{3}}(1, 1, 1)^T \\
\gamma_2 &= \frac{b_2}{||b_2||} = \frac{1}{\sqrt{2}}(-1, 0, 1)^T \\
\gamma_3 &= \frac{b_3}{||b_3||} = \frac{1}{\sqrt{6}}(1, -2, 1)^T.
\end{aligned}
$$

综上，有

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{A} &= (\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2, \boldsymbol{b}_3)\begin{bmatrix} 1 & 1 & \frac{5}{3} \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\
&= (\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3)\begin{bmatrix} \sqrt{3} & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{5}{\sqrt{6}} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 1 & \frac{5}{3} \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\
&= \boldsymbol{Q}\begin{bmatrix} \sqrt{3} & \sqrt{3} & \frac{5}{\sqrt{3}} \\ 0 & \sqrt{2} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & 0 & \frac{5}{\sqrt{6}} \end{bmatrix}.
\end{aligned}
$$

推论 2 设 $\boldsymbol{A}$ 是实对称正定矩阵，则存在唯一的正线上三角实矩阵 $\boldsymbol{R}$，使

$$\boldsymbol{A} = \boldsymbol{R}^T\boldsymbol{R}.$$

证明：因为 $\boldsymbol{A}$ 是实对称正定矩阵，则存在实可逆矩阵 $\boldsymbol{P}$ 使得

$$\boldsymbol{A} = \boldsymbol{P}^T\boldsymbol{P}.$$

又因推论 1 知，$\boldsymbol{P} = \boldsymbol{Q}\boldsymbol{R}$，其中 $\boldsymbol{Q}$ 是实正交矩阵，$\boldsymbol{R}$ 是正线上三角实矩阵. 进而有

$$\boldsymbol{A} = \boldsymbol{R}^T\boldsymbol{Q}^T\boldsymbol{Q}\boldsymbol{R} = \boldsymbol{R}^T\boldsymbol{R}.$$

(唯一性) 设 $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{R}_1^T\boldsymbol{R}_1 = \boldsymbol{R}_2^T\boldsymbol{R}_2$，其中 $\boldsymbol{R}_1$，$\boldsymbol{R}_2$ 正线上三角实矩阵，则

$$(\boldsymbol{R}_1^T)^{-1}\boldsymbol{R}_2^T = \boldsymbol{R}_1(\boldsymbol{R}_2)^{-1},$$

上式等号左侧为正线下三角矩阵，等号右侧为上三角矩阵，即为对角矩阵. 再根据对角元素，知为单位矩阵，即有

$$\boldsymbol{R}_1 = \boldsymbol{R}_2,$$

得证.

推论 3 设 $\boldsymbol{A}$ 是正定 **Hermitian** 矩阵，则存在唯一的正线上三角复矩阵 $\boldsymbol{R}$，使

$$\boldsymbol{A} = \boldsymbol{R}^H\boldsymbol{R}.$$

定理 2 设 $\boldsymbol{A} \in \mathbf{C}_n^{n\times n}$，用 $\boldsymbol{L}$，$\tilde{\boldsymbol{L}}$，$\boldsymbol{R}$，$\tilde{\boldsymbol{R}}$ 和 $\boldsymbol{D}$ 分别表示下三角复矩阵、单位下三角复矩阵、上三角复矩阵、单位上三角复矩阵和对角矩阵，则下列命题等价：

(1) $\boldsymbol{\Delta}_k = \det\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1k} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2k} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{k1} & a_{k2} & \cdots & a_{kk} \end{pmatrix} \neq 0,$

(2) $\boldsymbol{A}$ 可唯一地分解为 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{L}\tilde{\boldsymbol{R}}$,

(3) $\boldsymbol{A}$ 可唯一地分解为 $\boldsymbol{A}=\tilde{\boldsymbol{L}}\boldsymbol{R}$,

(4) $\boldsymbol{A}$ 可唯一地分解为 $\boldsymbol{A}=\tilde{\boldsymbol{L}}\boldsymbol{D}\tilde{\boldsymbol{R}}$.

证明： $\mathbf{(1)} \Rightarrow \mathbf{(2)}$ 利用数学归纳法进行证明.

(i) 若 $\boldsymbol{A}$ 为一阶方阵，则显然有 $\boldsymbol{A}=(\boldsymbol{a_{11}})(\mathbf{1})=\boldsymbol{L}\tilde{\boldsymbol{R}}$.

(ii) 若 $\boldsymbol{A}$ 为 $\boldsymbol{n-1}$ 阶方阵，假设有 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{L_{n-1}}\tilde{\boldsymbol{R}}_{\boldsymbol{n-1}}$ 成立.

(iii) 若 $\boldsymbol{A}$ 为 $\boldsymbol{n}$ 阶方阵，则有

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{A} &= \begin{bmatrix} \boldsymbol{A}_{n-1} & \boldsymbol{\beta} \\ \boldsymbol{\alpha}^T & \boldsymbol{a}_{nn} \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} \boldsymbol{A}_{n-1} & \mathbf{0} \\ \boldsymbol{\alpha}^T & \boldsymbol{a}_{nn}-\boldsymbol{\alpha}^T\boldsymbol{A}_{n-1}^{-1}\boldsymbol{\beta} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boldsymbol{E}_{n-1} & \boldsymbol{A}_{n-1}^{-1}\boldsymbol{\beta} \\ \mathbf{0} & \mathbf{1} \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} \boldsymbol{L}_{n-1}\tilde{\boldsymbol{R}}_{n-1} & \mathbf{0} \\ \boldsymbol{\alpha}^T & \boldsymbol{a}_{nn}-\boldsymbol{\alpha}^T\boldsymbol{A}_{n-1}^{-1}\boldsymbol{\beta} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boldsymbol{E}_{n-1} & \boldsymbol{A}_{n-1}^{-1}\boldsymbol{\beta} \\ \mathbf{0} & \mathbf{1} \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} \boldsymbol{L}_{n-1} & \mathbf{0} \\ \boldsymbol{\alpha}^T\tilde{\boldsymbol{R}}_{n-1}^{-1} & \boldsymbol{a}_{nn}-\boldsymbol{\alpha}^T\boldsymbol{A}_{n-1}^{-1}\boldsymbol{\beta} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{\boldsymbol{R}}_{n-1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boldsymbol{E}_{n-1} & \boldsymbol{A}_{n-1}^{-1}\boldsymbol{\beta} \\ \mathbf{0} & \mathbf{1} \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} \boldsymbol{L}_{n-1} & \mathbf{0} \\ \boldsymbol{\alpha}^T\tilde{\boldsymbol{R}}_{n-1}^{-1} & \boldsymbol{a}_{nn}-\boldsymbol{\alpha}^T\boldsymbol{A}_{n-1}^{-1}\boldsymbol{\beta} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{\boldsymbol{R}}_{n-1} & \tilde{\boldsymbol{R}}_{n-1}\boldsymbol{A}_{n-1}^{-1}\boldsymbol{\beta} \\ \mathbf{0} & \mathbf{1} \end{bmatrix} \\
&= \boldsymbol{L}\tilde{\boldsymbol{R}},
\end{aligned}
$$

得证.

$\mathbf{(2)} \Rightarrow \mathbf{(1)}$ 由 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{L}\tilde{\boldsymbol{R}}$，分块得

$$
\begin{aligned}
\begin{bmatrix} \boldsymbol{A}_{11} & \boldsymbol{A}_{12} \\ \boldsymbol{A}_{21} & \boldsymbol{A}_{22} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \boldsymbol{L}_{11} & \mathbf{0} \\ \boldsymbol{L}_{21} & \boldsymbol{L}_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{\boldsymbol{R}}_{11} & \tilde{\boldsymbol{R}}_{12} \\ \mathbf{0} & \tilde{\boldsymbol{R}}_{22} \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} \boldsymbol{L}_{11}\tilde{\boldsymbol{R}}_{11} & \boldsymbol{L}_{11}\tilde{\boldsymbol{R}}_{12} \\ \boldsymbol{L}_{21}\tilde{\boldsymbol{R}}_{11} & \boldsymbol{L}_{21}\tilde{\boldsymbol{R}}_{12}+\boldsymbol{L}_{22}\tilde{\boldsymbol{R}}_{22} \end{bmatrix}.
\end{aligned}
$$

有 $\boldsymbol{A}_{11}=\boldsymbol{L}_{11}\tilde{\boldsymbol{R}}_{11}$，进而

$$
\boldsymbol{\Delta}_k=\det(\boldsymbol{A}_{11})=\det(\boldsymbol{L}_{11})\det(\tilde{\boldsymbol{R}}_{11})=\det(\boldsymbol{L}_{11})=\boldsymbol{l}_{11}\boldsymbol{l}_{22}\cdots\boldsymbol{l}_{kk}\neq\mathbf{0}.
$$

例 2 求 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix} \mathbf{2} & \mathbf{-1} & \mathbf{3} \\ \mathbf{1} & \mathbf{2} & \mathbf{1} \\ \mathbf{2} & \mathbf{4} & \mathbf{3} \end{bmatrix}$ 的 $\tilde{\boldsymbol{L}}\boldsymbol{R}$ 及 $\tilde{\boldsymbol{L}}\boldsymbol{D}\tilde{\boldsymbol{R}}$ 分解.

解：计算得 $\boldsymbol{\Delta_1 = 2}$，$\boldsymbol{\Delta_2 = 5}$，$\boldsymbol{\Delta_3 = 5}$，则存在所求分解.

令

$$\tilde{L} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ l_{21} & 1 & 0 \\ l_{31} & l_{32} & 1 \end{bmatrix}, \quad R = \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} \\ 0 & r_{22} & r_{23} \\ 0 & 0 & r_{33} \end{bmatrix},$$

则

$$\tilde{L}R = \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} \\ l_{21}r_{11} & l_{21}r_{12} + r_{22} & l_{21}r_{13} + r_{23} \\ l_{31}r_{11} & l_{31}r_{12} + l_{32}r_{22} & l_{31}r_{13} + l_{32}r_{23} + l_{33}r_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 3 \end{bmatrix} = A,$$

利用追赶法求解得

$$\tilde{L} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0.5 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}, R = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 0 & 2.5 & -0.5 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, D = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2.5 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \tilde{R} = \begin{bmatrix} 1 & -0.5 & 1.5 \\ 0 & 1 & -0.2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

定理 3 设 $A \in \mathbf{C}_n^{m\times n}$，则存在 m 阶酉矩阵 U 和 n 阶正线上三角复矩阵 R，使得

$$A = U \begin{bmatrix} R \\ 0 \end{bmatrix}.$$

设 $A \in \mathbf{C}_m^{m\times n}$，则存在 n 阶酉矩阵 U 和 m 阶正线下三角复矩阵 L，使得

$$A = \begin{bmatrix} L & 0 \end{bmatrix} U.$$

证明：因为 $A \in \mathbf{C}_n^{m\times n}$，则列向量组 $a_1, a_2, \cdots, a_n$ 线性无关，添加 $m-n$ 个向量使得

$$a_1, a_2, \cdots, a_n, a_{n+1}, \cdots, a_m$$

线性无关 ($\mathbf{C}^m$ 空间的一组基).

类似于定理 1 的证明，对其进行 **Gram-Schmidt** 正交化得

$$\begin{aligned} A &= (a_1, a_2, \cdots, a_n) \\ &= (r_{11}b_1, r_{12}b_1 + r_{22}b_2, \cdots, \sum_{j=1}^{n} r_{jn}b_j) \\ &= (b_1, b_2, \cdots, b_n, \cdots, b_m) \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & \cdots & r_{1n} \\ 0 & r_{22} & \cdots & r_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & r_{nn} \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

$$= \boldsymbol{U}\begin{bmatrix}\boldsymbol{R}\\ \boldsymbol{0}\end{bmatrix},$$

得证.

定理 4 设 $\boldsymbol{A} \in \mathbf{C}_n^{m\times n}$，则 $\boldsymbol{A}$ 可唯一地分解为

$$\boldsymbol{A} = \boldsymbol{U}\boldsymbol{R},$$

其中 $\boldsymbol{U} \in \mathbf{U}_n^{m\times n}$，$\boldsymbol{R}$ 是 $\boldsymbol{n}$ 阶正线上三角矩阵；设 $\boldsymbol{A} \in \mathbf{C}_m^{m\times n}$，则 $\boldsymbol{A}$ 可唯一地分解为

$$\boldsymbol{A} = \boldsymbol{L}\boldsymbol{U},$$

其中 $\boldsymbol{L}$ 是 $\boldsymbol{m}$ 阶正线下三角矩阵，$\boldsymbol{U} \in \mathbf{U}_m^{m\times n}$.

证明： (可利用定理 3 的结论证明存在性.)

因为 $\boldsymbol{A} \in \mathbf{C}_n^{m\times n}$，对 $\forall \boldsymbol{x} \neq \boldsymbol{0}$，有 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} \neq \boldsymbol{0}$，故

$$\boldsymbol{x}^H\boldsymbol{A}^H\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = (\boldsymbol{A}\boldsymbol{x})^H(\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}) > 0,$$

则 $\boldsymbol{A}^H\boldsymbol{A}$ 为正定 **Hermitian** 矩阵. 进而存在正线上三角复矩阵 $\boldsymbol{R}$，使得 $\boldsymbol{A}^H\boldsymbol{A} = \boldsymbol{R}^H\boldsymbol{R}$.

令 $\boldsymbol{U} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{R}^{-1}$，则 $\boldsymbol{U}^H\boldsymbol{U} = (\boldsymbol{A}\boldsymbol{R}^{-1})^H(\boldsymbol{A}\boldsymbol{R}^{-1}) = (\boldsymbol{R}^H)^{-1}\boldsymbol{A}^H\boldsymbol{A}\boldsymbol{R}^{-1} = \boldsymbol{E}_n$，即 $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{U}\boldsymbol{R}$ 得证.

(唯一性) 令 $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{U}_1\boldsymbol{R}_1 = \boldsymbol{U}_2\boldsymbol{R}_2$，则

$$\boldsymbol{A}^H\boldsymbol{A} = \boldsymbol{R}_1^H\boldsymbol{U}_1^H\boldsymbol{U}_1\boldsymbol{R}_1 = \boldsymbol{R}_1^H\boldsymbol{R}_1 = \boldsymbol{R}_2^H\boldsymbol{R}_2,$$

根据定理 1 的推论 3 知，$\boldsymbol{R}_1 = \boldsymbol{R}_2$，进而 $\boldsymbol{U}_1 = \boldsymbol{U}_2$，得证.

另证： $\boldsymbol{U}_2^H\boldsymbol{U}_1 = \boldsymbol{R}_2\boldsymbol{R}_1^{-1}$，$\boldsymbol{U}_1^H\boldsymbol{U}_2 = \boldsymbol{R}_1\boldsymbol{R}_2^{-1}$，易知上述两个等式左侧矩阵互为共轭转置，有

$$\boldsymbol{U}_2^H\boldsymbol{U}_1 = \boldsymbol{R}_2\boldsymbol{R}_1^{-1} = (\boldsymbol{R}_1\boldsymbol{R}_2^{-1})^H,$$

上式第二个等号左右两侧分别为上三角矩阵和下三角矩阵，即为对角矩阵. 再根据对角元易证 $\boldsymbol{R}_1 = \boldsymbol{R}_2$，进而 $\boldsymbol{U}_1 = \boldsymbol{U}_2$，得证.

定理 5 设 $\boldsymbol{A} \in \mathbf{C}_r^{m\times n}$，则存在酉矩阵 $\boldsymbol{U} \in \mathbf{U}^{m\times m}$ 和 $\boldsymbol{V} \in \mathbf{U}^{n\times n}$ 及 $\boldsymbol{r}$ 阶正线下三角矩阵 $\boldsymbol{L}$，使得

$$\boldsymbol{A} = \boldsymbol{U}\begin{bmatrix}\boldsymbol{L} & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix}\boldsymbol{V}.$$

证明： 因为 $\boldsymbol{A} \in \mathbf{C}_r^{m\times n}$，则存在酉矩阵 $\boldsymbol{P}$ (列初等矩阵的乘积)，使得

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{P} = (\boldsymbol{\alpha}_1, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_r, \boldsymbol{\alpha}_{r+1}, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_n),$$

其中 $\boldsymbol{\alpha}_1, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_r$ 线性无关. 于是存在矩阵 $\boldsymbol{C}$, 使得

$$(\boldsymbol{\alpha}_{r+1}, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_n) = (\boldsymbol{\alpha}_1, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_r)\boldsymbol{C}.$$

再根据定理 3，有

$$\begin{aligned} \boldsymbol{AP} &= (\boldsymbol{\alpha}_1, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_r) \begin{bmatrix} \boldsymbol{E}_r & \boldsymbol{C} \end{bmatrix} \\ &= \boldsymbol{U} \begin{bmatrix} \boldsymbol{R} \\ \boldsymbol{0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boldsymbol{E}_r & \boldsymbol{C} \end{bmatrix} \\ &= \boldsymbol{U} \begin{bmatrix} \boldsymbol{R} & \boldsymbol{RC} \\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

令 $\boldsymbol{B} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{R} & \boldsymbol{RC} \end{bmatrix} \in \mathbb{C}_r^{r\times n}$，则 $\boldsymbol{B} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{L} & \boldsymbol{0} \end{bmatrix} \boldsymbol{V}_1$.

于是有

$$\boldsymbol{A} = \boldsymbol{U} \begin{bmatrix} \boldsymbol{R} & \boldsymbol{RC} \\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} \end{bmatrix} \boldsymbol{P}^{-1} = \boldsymbol{U} \begin{bmatrix} \boldsymbol{L} & \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} \end{bmatrix} \boldsymbol{V}_1 \boldsymbol{P}^{-1} = \boldsymbol{U} \begin{bmatrix} \boldsymbol{L} & \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} \end{bmatrix} \boldsymbol{V},$$

其中 $\boldsymbol{V} = \boldsymbol{V}_1 \boldsymbol{P}^{-1}$.