§2 广义逆矩阵 A^-

程光辉

2019 年 12 月 6 日

定义 1 设 $\boldsymbol{A} \in \mathbf{C}^{m\times n}$，如果存在矩阵 $\boldsymbol{G} \in \mathbf{C}^{n\times m}$，使得

$$\boldsymbol{AGb} = \boldsymbol{b}, \quad \forall \boldsymbol{b} \in \mathbf{R}(\boldsymbol{A}),$$

则称 $\boldsymbol{G}$ 为 $\boldsymbol{A}$ 的广义逆矩阵，记为 $\boldsymbol{G} = \boldsymbol{A}^-$.

定理 1 设 $\boldsymbol{A} \in \mathbf{C}^{m\times n}$，则 $\boldsymbol{A}$ 存在广义逆矩阵的充要条件是存在 $\boldsymbol{G} \in \mathbf{C}^{n\times m}$，满足

$$\boldsymbol{AGA} = \boldsymbol{A}.$$

证明： **(必要性)** 对 $\forall \boldsymbol{u} \in \mathbf{C}^n$，则 $\boldsymbol{b} = \boldsymbol{Au} \in \mathbf{R}(\boldsymbol{A})$. 因 $\boldsymbol{AGb} = \boldsymbol{b}$，故

$$\boldsymbol{AGAu} = \boldsymbol{AGb} = \boldsymbol{b} = \boldsymbol{Au},$$

由于 $\boldsymbol{u}$ 的任意性 (可取单位矩阵的列向量)，故 $\boldsymbol{AGA} = \boldsymbol{A}$.

(充分性) 对 $\forall \boldsymbol{b} \in \mathbf{R}(\boldsymbol{A})$，则存在 $\boldsymbol{u} \in \mathbf{C}^n$ 使得 $\boldsymbol{b} = \boldsymbol{Au}$. 因

$$\boldsymbol{b} = \boldsymbol{Au} = \boldsymbol{AGAu} = \boldsymbol{AGb},$$

故 $\boldsymbol{G}$ 为 $\boldsymbol{A}$ 的广义逆矩阵.

推论 1 设 $\boldsymbol{A} \in \mathbf{C}^{m\times n}$，且 $\boldsymbol{A}^-$ 是 $\boldsymbol{A}$ 的一个广义逆矩阵，则

$$\mathrm{rank}(\boldsymbol{A}^-) \geq \mathrm{rank}(\boldsymbol{A}).$$

证明：因为

$$\mathrm{rank}(\boldsymbol{A}) = \mathrm{rank}(\boldsymbol{AA^-A}) \leq \mathrm{rank}(\boldsymbol{AA^-}) \leq \mathrm{rank}(\boldsymbol{A}^-),$$

故得证.

定义 2 $\boldsymbol{A}\{1\} = \{\boldsymbol{G} | \boldsymbol{AGA} = \boldsymbol{A},\ \forall \boldsymbol{G} \in \mathbf{C}^{n\times m}\}$.

定理 2 设 $\boldsymbol{A}\in\mathbf{C}^{m\times n}$，且 $\boldsymbol{A}^-$ 是 $\boldsymbol{A}$ 的任意广义逆矩阵，则

$$\begin{aligned}\boldsymbol{A}\{1\}&=\{\boldsymbol{G}|\boldsymbol{G}=\boldsymbol{A}^-+\boldsymbol{U}-\boldsymbol{A}^-\boldsymbol{AUAA}^-,\ \forall\boldsymbol{U}\in\mathbf{C}^{n\times m}\}\\&=\{\boldsymbol{G}|\boldsymbol{G}=\boldsymbol{A}^-+(\boldsymbol{E}_n-\boldsymbol{A}^-\boldsymbol{A})\boldsymbol{V}+\boldsymbol{W}(\boldsymbol{E}_m-\boldsymbol{AA}^-),\ \forall\boldsymbol{V},\boldsymbol{W}\in\mathbf{C}^{n\times m}\}.\end{aligned}$$

证明：若两个集合互相包含，则这两个集合相等.

对 $\forall\boldsymbol{G}\in\boldsymbol{A}\{1\}$，则 $\boldsymbol{AGA}=\boldsymbol{A}$，于是有

$$\boldsymbol{G}=\boldsymbol{A}^-+\boldsymbol{G}-\boldsymbol{A}^--\boldsymbol{A}^-\boldsymbol{A}(\boldsymbol{G}-\boldsymbol{A}^-)\boldsymbol{AA}^-=\boldsymbol{A}^-+\boldsymbol{U}-\boldsymbol{A}^-\boldsymbol{AUAA}^-,$$

其中 $\boldsymbol{U}=\boldsymbol{G}-\boldsymbol{A}^-$，进而 $\boldsymbol{A}\{1\}\subset\{\boldsymbol{G}|\boldsymbol{G}=\boldsymbol{A}^-+\boldsymbol{U}-\boldsymbol{A}^-\boldsymbol{AUAA}^-,\ \forall\boldsymbol{U}\in\mathbf{C}^{n\times m}\}$.

对 $\forall\boldsymbol{M}\in\{\boldsymbol{G}|\boldsymbol{G}=\boldsymbol{A}^-+\boldsymbol{U}-\boldsymbol{A}^-\boldsymbol{AUAA}^-,\ \forall\boldsymbol{U}\in\mathbf{C}^{n\times m}\}$，则存在 $\boldsymbol{U}\in\mathbf{C}^{n\times m}$，使得

$$\boldsymbol{M}=\boldsymbol{A}^-+\boldsymbol{U}-\boldsymbol{A}^-\boldsymbol{AUAA}^-,$$

进而

$$\begin{aligned}\boldsymbol{AMA}&=\boldsymbol{A}(\boldsymbol{A}^-+\boldsymbol{U}-\boldsymbol{A}^-\boldsymbol{AUAA}^-)\boldsymbol{A}\\&=\boldsymbol{AA}^-\boldsymbol{A}+\boldsymbol{AUA}-\boldsymbol{AA}^-\boldsymbol{AUAA}^-\boldsymbol{A}\\&=\boldsymbol{A}+\boldsymbol{AUA}-\boldsymbol{AUA}\\&=\boldsymbol{A}.\end{aligned}$$

因此，$\{\boldsymbol{G}|\boldsymbol{G}=\boldsymbol{A}^-+\boldsymbol{U}-\boldsymbol{A}^-\boldsymbol{AUAA}^-,\ \forall\boldsymbol{U}\in\mathbf{C}^{n\times m}\}\subset\boldsymbol{A}\{1\}$，得证.

定理 3 设 $\boldsymbol{A}\in\mathbf{C}^{m\times n}$，$\boldsymbol{\lambda}\in\mathbf{C}$ 非零，则

(1) $(\boldsymbol{A}^{\boldsymbol{T}})^-=(\boldsymbol{A}^-)^{\boldsymbol{T}}$，$(\boldsymbol{A}^{\boldsymbol{H}})^-=(\boldsymbol{A}^-)^{\boldsymbol{H}}$；

(2) $\boldsymbol{AA}^-$，$\boldsymbol{A}^-\boldsymbol{A}$ 都是幂等矩阵，且 $\mathbf{rank}(\boldsymbol{A})=\mathbf{rank}(\boldsymbol{AA}^-)=\mathbf{rank}(\boldsymbol{A}^-\boldsymbol{A})$;

(3) $\boldsymbol{\lambda}^{-1}\boldsymbol{A}^-$ 为 $\boldsymbol{\lambda A}$ 的广义逆矩阵;

(4) 设 $\boldsymbol{S}\in\mathbf{C}^{m\times m}$ 是可逆矩阵，$\boldsymbol{T}\in\mathbf{C}^{n\times n}$ 是可逆矩阵，且 $\boldsymbol{B}=\boldsymbol{SAT}$，则 $\boldsymbol{T}^{-1}\boldsymbol{A}^-\boldsymbol{S}^{-1}$ 是 $\boldsymbol{B}$ 的广义逆矩阵;

(5) $\mathbf{R}(\boldsymbol{AA}^-)=\mathbf{R}(\boldsymbol{A})$，$\mathbf{N}(\boldsymbol{A}^-\boldsymbol{A})=\mathbf{N}(\boldsymbol{A})$.

证明：(1) 因为 $\boldsymbol{AA}^-\boldsymbol{A}=\boldsymbol{A}$，所以 $\boldsymbol{A}^{\boldsymbol{T}}=\boldsymbol{A}^{\boldsymbol{T}}(\boldsymbol{A}^-)^{\boldsymbol{T}}\boldsymbol{A}^{\boldsymbol{T}}$，即 $(\boldsymbol{A}^{\boldsymbol{T}})^-=(\boldsymbol{A}^-)^{\boldsymbol{T}}$.

同理，$(\boldsymbol{A}^{\boldsymbol{H}})^-=(\boldsymbol{A}^-)^{\boldsymbol{H}}$.

(2) 因 $(\boldsymbol{AA}^-)^2=\boldsymbol{AA}^-\boldsymbol{AA}^-=\boldsymbol{AA}^-$，故是幂等矩阵.

因 $\mathbf{rank}(\boldsymbol{A})\geq\mathbf{rank}(\boldsymbol{AA}^-)\geq\mathbf{rank}(\boldsymbol{AA}^-\boldsymbol{A})=\mathbf{rank}(\boldsymbol{A})$，故

$$\mathbf{rank}(\boldsymbol{A})=\mathbf{rank}(\boldsymbol{AA}^-).$$

同理，可证 $\mathbf{rank}(\boldsymbol{A}) = \mathbf{rank}(\boldsymbol{A}^-\boldsymbol{A})$.

(3) $(\boldsymbol{\lambda A})(\boldsymbol{\lambda}^{-1}\boldsymbol{A}^-)(\boldsymbol{\lambda A}) = (\boldsymbol{\lambda\lambda}^{-1}\boldsymbol{\lambda})\boldsymbol{AA}^-\boldsymbol{A} = \boldsymbol{\lambda A}$.

(4) 因 $\boldsymbol{BT}^{-1}\boldsymbol{A}^-\boldsymbol{S}^{-1}\boldsymbol{B} = \boldsymbol{SATT}^{-1}\boldsymbol{A}^-\boldsymbol{S}^{-1}\boldsymbol{SAT} = \boldsymbol{SAA}^-\boldsymbol{AT} = \boldsymbol{SAT} = \boldsymbol{B}$，则 $\boldsymbol{T}^{-1}\boldsymbol{A}^-\boldsymbol{S}^{-1}$ 是 $\boldsymbol{B}$ 的广义逆矩阵.

(5) 显然有 $\mathbf{R}(\boldsymbol{AA}^-) \subset \mathbf{R}(\boldsymbol{A})$，$\mathbf{N}(\boldsymbol{A}) \subset \mathbf{N}(\boldsymbol{A}^-\boldsymbol{A})$，又因

$$\mathbf{rank}(\boldsymbol{A}) = \mathbf{rank}(\boldsymbol{AA}^-) = \mathbf{rank}(\boldsymbol{A}^-\boldsymbol{A}),$$

故 $\mathbf{R}(\boldsymbol{AA}^-)$ 和 $\mathbf{R}(\boldsymbol{A})$ 的基相同，$\mathbf{N}(\boldsymbol{A})$ 和 $\mathbf{N}(\boldsymbol{A}^-\boldsymbol{A})$ 的基相同，即 $\mathbf{R}(\boldsymbol{AA}^-) = \mathbf{R}(\boldsymbol{A})$，$\mathbf{N}(\boldsymbol{A}^-\boldsymbol{A}) = \mathbf{N}(\boldsymbol{A})$.

(另证：) 对 $\forall \boldsymbol{b} \in \mathbf{R}(\boldsymbol{A})$，则存在 $\boldsymbol{x} \in \mathbf{C}^{\boldsymbol{n}}$，使得 $\boldsymbol{b} = \boldsymbol{Ax}$. 因为 $\boldsymbol{AA}^-\boldsymbol{A} = \boldsymbol{A}$，则有

$$\boldsymbol{b} = \boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{AA}^-\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{AA}^-\boldsymbol{y} \in \mathbf{R}(\boldsymbol{AA}^-),$$

其中 $\boldsymbol{y} = \boldsymbol{Ax}$. 由 $\boldsymbol{b}$ 的任意性，有 $\mathbf{R}(\boldsymbol{AA}^-) \supset \mathbf{R}(\boldsymbol{A})$.

推论 2 设 $\boldsymbol{A} \in \mathbf{C}^{\boldsymbol{m}\times\boldsymbol{n}}$，则

(1) $\mathbf{rank}(\boldsymbol{A}) = \boldsymbol{n}$ 的充要条件是 $\boldsymbol{A}^-\boldsymbol{A} = \boldsymbol{E}_{\boldsymbol{n}}$;

(2) $\mathbf{rank}(\boldsymbol{A}) = \boldsymbol{m}$ 的充要条件是 $\boldsymbol{AA}^- = \boldsymbol{E}_{\boldsymbol{m}}$.

证明： (1) **(充分性)** 由定理 3(2) 知，$\mathbf{rank}(\boldsymbol{A}) = \mathbf{rank}(\boldsymbol{A}^-\boldsymbol{A}) = \mathbf{rank}(\boldsymbol{E}_{\boldsymbol{n}}) = \boldsymbol{n}$.

(必要性) 因为 $\mathbf{rank}(\boldsymbol{A}) = \mathbf{rank}(\boldsymbol{A}^-\boldsymbol{A}) = \boldsymbol{n}$，则 $\boldsymbol{A}^-\boldsymbol{A}$ 是 $\boldsymbol{n}$ 阶可逆矩阵，即有

$$\boldsymbol{E}_{\boldsymbol{n}} = (\boldsymbol{A}^-\boldsymbol{A})(\boldsymbol{A}^-\boldsymbol{A})^{-1} = \boldsymbol{A}^-(\boldsymbol{AA}^-\boldsymbol{A})(\boldsymbol{A}^-\boldsymbol{A})^{-1} = (\boldsymbol{A}^-\boldsymbol{A})(\boldsymbol{A}^-\boldsymbol{A})(\boldsymbol{A}^-\boldsymbol{A})^{-1} = \boldsymbol{A}^-\boldsymbol{A}.$$

引理 1 设 $\boldsymbol{A} \in \mathbf{C}^{\boldsymbol{m}\times\boldsymbol{n}}$，且 $\boldsymbol{P} \in \mathbf{C}^{\boldsymbol{m}\times\boldsymbol{m}}$ 和 $\boldsymbol{Q} \in \mathbf{C}^{\boldsymbol{n}\times\boldsymbol{n}}$ 都是可逆矩阵，则

$$\boldsymbol{Q}(\boldsymbol{PAQ})^-\boldsymbol{P} \in \boldsymbol{A}\{\mathbf{1}\}.$$

证明： 因 $\boldsymbol{P}$ 和 $\boldsymbol{Q}$ 都是可逆矩阵，$\boldsymbol{PAQ}(\boldsymbol{PAQ})^-\boldsymbol{PAQ} = \boldsymbol{PAQ}$，所以 $\boldsymbol{AQ}(\boldsymbol{PAQ})^-\boldsymbol{PA} = \boldsymbol{A}$，即

$$\boldsymbol{Q}(\boldsymbol{PAQ})^-\boldsymbol{P} \in \boldsymbol{A}\{\mathbf{1}\}.$$

引理 2 设 $\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{A}_{11} & \boldsymbol{O} \\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{A}_{22} \end{bmatrix} \in \mathbf{C}^{\boldsymbol{m}\times\boldsymbol{n}}$，则存在 $\boldsymbol{X}_{12}, \boldsymbol{X}_{21}$ 满足 $\boldsymbol{A}_{11}\boldsymbol{X}_{12}\boldsymbol{A}_{22} = \boldsymbol{O}$，$\boldsymbol{A}_{22}\boldsymbol{X}_{21}\boldsymbol{A}_{11} = \boldsymbol{O}$，使得

$$\begin{bmatrix} \boldsymbol{A}_{11}^- & \boldsymbol{X}_{12} \\ \boldsymbol{X}_{21} & \boldsymbol{A}_{22}^- \end{bmatrix} \in \boldsymbol{A}\{\mathbf{1}\}.$$

证明：直接验证即可.

$$
\begin{aligned}
A\begin{bmatrix} A_{11}^{-} & X_{12} \\ X_{21} & A_{22}^{-} \end{bmatrix}A &= \begin{bmatrix} A_{11} & O \\ O & A_{22} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} A_{11}^{-} & X_{12} \\ X_{21} & A_{22}^{-} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} A_{11} & O \\ O & A_{22} \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} A_{11}A_{11}^{-} & A_{11}X_{12} \\ A_{22}X_{21} & A_{22}A_{22}^{-} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} A_{11} & O \\ O & A_{22} \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} A_{11}A_{11}^{-}A_{11} & A_{11}X_{12}A_{22} \\ A_{22}X_{21}A_{11} & A_{22}A_{22}^{-}A_{22} \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} A_{11} & O \\ O & A_{22} \end{bmatrix} \\
&= A.
\end{aligned}
$$

定理 4 设 $A = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix} \in \mathbf{C}^{m\times n}$，有

(1) 如果 A_{11}^{-1} 存在，则存在 X_{12}，X_{21} 满足

$$
\begin{aligned}
X_{12}(A_{22} - A_{21}A_{11}^{-1}A_{12}) = O, \\
(A_{22} - A_{21}A_{11}^{-1}A_{12})X_{21} = O,
\end{aligned}
$$

使得

$$
\begin{bmatrix} E_r & -A_{11}^{-1}A_{12} \\ O & E_{n-r} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} A_{11}^{-1} & X_{12} \\ X_{21} & (A_{22} - A_{21}A_{11}^{-1}A_{12})^{-} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} E_r & O \\ -A_{21}A_{11}^{-1} & E_{m-r} \end{bmatrix} \in A\{1\}.
$$

(2) 如果 A_{22}^{-1} 存在，则存在 Y_{12}，Y_{21} 满足

$$
\begin{aligned}
Y_{21}(A_{11} - A_{12}A_{22}^{-1}A_{21}) = O, \\
(A_{11} - A_{12}A_{22}^{-1}A_{21})Y_{12} = O,
\end{aligned}
$$

使得

$$
\begin{bmatrix} E_r & O \\ -A_{22}^{-1}A_{21} & E_{n-r} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} (A_{11} - A_{12}A_{22}^{-1}A_{21})^{-} & Y_{12} \\ Y_{21} & A_{22}^{-1} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} E_r & -A_{12}A_{22}^{-1} \\ O & E_{m-r} \end{bmatrix} \in A\{1\}.
$$

证明：(1) 因为

$$
\begin{bmatrix} E_r & O \\ -A_{21}A_{11}^{-1} & E_{m-r} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} E_r & -A_{11}^{-1}A_{12} \\ O & E_{n-r} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & O \\ O & A_{22} - A_{21}A_{11}^{-1}A_{12} \end{bmatrix},
$$

利用引理 1 和引理 2，即可得证.

(2) 同 (1) 的证明.