§2 矩阵的谱分解

程光辉

2020 年 4 月 4 日

定义 1 设 $\boldsymbol{\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_k}$ 是 $\boldsymbol{A \in \mathbf{C}^{n\times n}}$ 的 $\boldsymbol{k}$ 个互异特征值,其重数分别为 $\boldsymbol{r_1, r_2, \cdots, r_k}$,则称 $\boldsymbol{r_i}$ 为矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征值 $\boldsymbol{\lambda_i}$ 的代数重复度. 齐次方程组

$$\boldsymbol{Ax = \lambda_i x \quad (i = 1, 2, \cdots, k)}$$

的解空间 $\boldsymbol{V_{\lambda_i}}$ 称为 $\boldsymbol{A}$ 对应于特征值 $\boldsymbol{\lambda_i}$ 的特征子空间, $\boldsymbol{V_{\lambda_i}}$ 的维数称为 $\boldsymbol{A}$ 的特征值的几何重复度.

定理 1 矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的任意特征值的几何重复度不大于它的代数重复度.

定义 2 若矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的每个特征值的几何重复度与它的代数重复度相等, 则称 $\boldsymbol{A}$ 为单纯矩阵.

定理 2 矩阵 $\boldsymbol{A}$ 是单纯矩阵的充要条件是 $\boldsymbol{A}$ 与对角矩阵相似.

定理 3 设矩阵 $\boldsymbol{A \in \mathbf{C}^{n\times n}}$ 是单纯矩阵,则 $\boldsymbol{A}$ 可分解为一系列幂等矩阵 $\boldsymbol{A_i\ (i = 1, 2, \cdots, n)}$ 的加权和, 即

$$\boldsymbol{A = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i A_i},$$

其中 $\boldsymbol{\lambda_i\ (i = 1, 2, \cdots, n)}$ 是 $\boldsymbol{A}$ 的特征值.

证明: 因为 $\boldsymbol{A}$ 是单纯矩阵, 则存在可逆矩阵 $\boldsymbol{P}$ 使得

$$\boldsymbol{A = P\mathrm{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n)P^{-1}},$$

其中 $\boldsymbol{\lambda_i}$ 是 $\boldsymbol{A}$ 的特征值.

令 $\boldsymbol{P = (v_1, v_2, \cdots, v_n)}$, $\boldsymbol{P^{-1} = (w_1, w_2, \cdots, w_n)^T}$, 则有

$$\boldsymbol{A = (v_1, v_2, \cdots, v_n)\begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{bmatrix}\begin{bmatrix} w_1^T \\ w_2^T \\ \vdots \\ w_n^T \end{bmatrix} = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i A_i},$$

其中 $\boldsymbol{A}_i=\boldsymbol{v}_i\boldsymbol{w}_i^T$.

又因为 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{P}=\boldsymbol{E}_n$，可知

$$\boldsymbol{w}_i^T\boldsymbol{v}_j=\begin{cases}1, & j=i,\\ 0, & j\neq i,\end{cases}$$

进而有

$$\boldsymbol{A}_i\boldsymbol{A}_j=\boldsymbol{v}_i\boldsymbol{w}_i^T\boldsymbol{v}_j\boldsymbol{w}_j^T=\begin{cases}\boldsymbol{v}_i\boldsymbol{w}_i^T=\boldsymbol{A}_i, & j=i,\\ \boldsymbol{O}, & j\neq i,\end{cases}$$

故 $\boldsymbol{A}_i$ 为幂等矩阵，得证.

$\boldsymbol{A}_i$ 的性质：

(1) 幂等性：$\boldsymbol{A}_i^2=\boldsymbol{A}_i$

(2) 分离性：$\boldsymbol{A}_i\boldsymbol{A}_j=\boldsymbol{O}\quad(i\neq j)$

(3) 可加性：$\sum\limits_{i=1}^{n}\boldsymbol{A}_i=\boldsymbol{E}_n$

证明： (3)

$$\boldsymbol{P}\boldsymbol{P}^{-1}=(\boldsymbol{v}_1,\boldsymbol{v}_2,\cdots,\boldsymbol{v}_n)\begin{bmatrix}\boldsymbol{w}_1^T\\ \boldsymbol{w}_2^T\\ \vdots\\ \boldsymbol{w}_n^T\end{bmatrix}=\sum_{i=1}^{n}\boldsymbol{v}_i\boldsymbol{w}_i^T=\sum_{i=1}^{n}\boldsymbol{A}_i=\boldsymbol{E}_n.$$

定理 4 *设 $\boldsymbol{A}\in\mathbf{C}^{n\times n}$，它有 k 个相异特征值 $\lambda_i\ (i=1,2,\cdots,k)$，则 $\boldsymbol{A}$ 是单纯矩阵的充要条件是存在 k 个矩阵 $\boldsymbol{A}_i\ (i=1,2,\cdots,k)$ 满足*

(1) $\boldsymbol{A}_i\boldsymbol{A}_j=\begin{cases}\boldsymbol{A}_i, & j=i,\\ \boldsymbol{O}, & j\neq i,\end{cases}$,

(2) $\sum\limits_{i=1}^{k}\boldsymbol{A}_i=\boldsymbol{E}_n$,

(3) $\boldsymbol{A}=\sum\limits_{i=1}^{k}\lambda_i\boldsymbol{A}_i$.

定义 3 *若 n 阶复矩阵 $\boldsymbol{A}$ 满足*

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^H=\boldsymbol{A}^H\boldsymbol{A},$$

则称矩阵 $\boldsymbol{A}$ 为正规矩阵.

思考：哪些矩阵属于正规矩阵？

引理 1 若 $\boldsymbol{A}$ 为正规矩阵，且 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 酉相似，则 $\boldsymbol{B}$ 为正规矩阵.

证明： 因为 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 酉相似，则存在酉矩阵 $\boldsymbol{U}$，使得 $\boldsymbol{B}=\boldsymbol{U}^H\boldsymbol{A}\boldsymbol{U}$，进而

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{B}\boldsymbol{B}^H &= (\boldsymbol{U}^H\boldsymbol{A}\boldsymbol{U})(\boldsymbol{U}^H\boldsymbol{A}\boldsymbol{U})^H\\
&= \boldsymbol{U}^H\boldsymbol{A}\boldsymbol{U}\boldsymbol{U}^H\boldsymbol{A}^H\boldsymbol{U}\\
&= \boldsymbol{U}^H\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^H\boldsymbol{U}\\
&= \boldsymbol{U}^H\boldsymbol{A}^H\boldsymbol{A}\boldsymbol{U} \quad (\ \boldsymbol{A}\text{为正规矩阵})\\
&= \boldsymbol{U}^H\boldsymbol{A}^H\boldsymbol{U}\boldsymbol{U}^H\boldsymbol{A}\boldsymbol{U}\\
&= (\boldsymbol{U}^H\boldsymbol{A}\boldsymbol{U})^H(\boldsymbol{U}^H\boldsymbol{A}\boldsymbol{U})\\
&= \boldsymbol{B}^H\boldsymbol{B},
\end{aligned}$$

得证.

引理 2 *(Schur 分解)* 若 $\boldsymbol{A}\in\mathbf{C}^{n\times n}$，则存在酉矩阵 $\boldsymbol{U}$，使得

$$\boldsymbol{A}=\boldsymbol{U}\boldsymbol{R}\boldsymbol{U}^H,$$

其中 $\boldsymbol{R}$ 是一个上三角矩阵，且对角元为矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征值.

证明： 对任意的 $\boldsymbol{A}\in\mathbf{C}^{n\times n}$ 都与 Jordan 标准形相似，即存在可逆矩阵 $\boldsymbol{P}$，使得

$$\boldsymbol{A}=\boldsymbol{P}\boldsymbol{J}\boldsymbol{P}^{-1}.$$

因为 $\boldsymbol{P}$ 可逆，存在酉矩阵 $\boldsymbol{U}$ 和正线上三角矩阵 $\boldsymbol{R}_1$，使得 $\boldsymbol{P}=\boldsymbol{U}\boldsymbol{R}_1$.

于是有

$$\boldsymbol{A}=\boldsymbol{P}\boldsymbol{J}\boldsymbol{P}^{-1}=\boldsymbol{U}\boldsymbol{R}_1\boldsymbol{J}\boldsymbol{R}_1^{-1}\boldsymbol{U}^{-1}=\boldsymbol{U}\boldsymbol{R}\boldsymbol{U}^H,$$

其中 $\boldsymbol{R}=\boldsymbol{R}_1\boldsymbol{J}\boldsymbol{R}_1^{-1}$ 为上三角矩阵，故得证.

引理 3 设 $\boldsymbol{A}$ 是三角矩阵，则 $\boldsymbol{A}$ 是正规矩阵充要条件是 $\boldsymbol{A}$ 对角矩阵.

证明： 不妨设

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n}\\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n}\\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots\\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn}\end{bmatrix}.$$

(必要性) 因为 $\boldsymbol{A}$ 是正规矩阵，则

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n}\\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n}\\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots\\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn}\end{bmatrix}\begin{bmatrix} \bar{a}_{11} & 0 & \cdots & 0\\ \bar{a}_{12} & \bar{a}_{22} & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots\\ \bar{a}_{1n} & \bar{a}_{2n} & \cdots & \bar{a}_{nn}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \bar{a}_{11} & 0 & \cdots & 0\\ \bar{a}_{12} & \bar{a}_{22} & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots\\ \bar{a}_{1n} & \bar{a}_{2n} & \cdots & \bar{a}_{nn}\end{bmatrix}\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n}\\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n}\\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots\\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn}\end{bmatrix},$$

比较上式两端矩阵第一行第一列的元素，有

$$\sum_{i=1}^{n} a_{1i}\bar{a}_{1i} = \sum_{i=1}^{n} |a_{1i}|^2 = a_{11}\bar{a}_{11} = |a_{11}|^2,$$

即有

$$a_{1i} = 0, \quad i = 2, 3, \cdots, n.$$

依此类推，即可得证.

(充分性) 直接验证，显然成立.

定理 5 n 阶复矩阵 A 是正规矩阵的充要条件是 A 与对角矩阵酉相似，即存在 n 阶酉矩阵 U，使得

$$A = U\mathrm{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n)U^H,$$

其中 $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$ 是 A 的 n 个特征值.

证明：(必要性) 由引理 2，有 $A = URU^H$. 又因为 A 是正规矩阵及引理 1 和引理 3，有 R 为对角矩阵.

(充分性) 直接由引理 1 得证.

定理 6 设 $A \in \mathbf{C}^{n\times n}$，它有 k 个相异特征值 λ_i $(i = 1, 2, \cdots, k)$，则 A 是正规矩阵的充要条件是存在 k 个矩阵 A_i $(i = 1, 2, \cdots, k)$ 满足

(1) $A_iA_j = \begin{cases} A_i, & j = i, \\ O, & j \neq i, \end{cases}$,

(2) $\sum\limits_{i=1}^{k} A_i = E_n$,

(3) $A = \sum\limits_{i=1}^{k} \lambda_i A_i$,

(4) $A_i^H = A_i$.

证明：(必要性) 因为 A 是正规矩阵，则

$$\begin{aligned} A &= U\mathrm{diag}(\lambda_1 E_{r_1}, \lambda_2 E_{r_2}, \cdots, \lambda_k E_{r_k})U^H \\ &= (U_1, U_2, \cdots, U_k)\begin{bmatrix} \lambda_1 E_{r_1} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 E_{r_2} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_k E_{r_k} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} U_1^H \\ U_2^H \\ \vdots \\ U_k^H \end{bmatrix} \\ &= \sum_{i=1}^{k} \lambda_i U_i U_i^H \\ &= \sum_{i=1}^{k} \lambda_i A_i, \end{aligned}$$

其中 $A_i = U_iU_i^H$.

根据 $UU^H = U^HU = E_n$，有

$$U_iU_j^H = \begin{cases} E_{r_i}, & j = i, \\ O, & j \neq i. \end{cases}$$

于是有

$$\boldsymbol{A}_i\boldsymbol{A}_j = \boldsymbol{U}_i\boldsymbol{U}_i^H\boldsymbol{U}_j\boldsymbol{U}_j^H = \begin{cases} \boldsymbol{U}_i\boldsymbol{U}_i^H = \boldsymbol{A}_i, & j = i, \\ \boldsymbol{O}, & j \neq i, \end{cases}$$

$$\sum_{i=1}^{k}\boldsymbol{A}_i = \sum_{i=1}^{k}\boldsymbol{U}_i\boldsymbol{U}_i^H = \boldsymbol{U}\boldsymbol{U}^H = \boldsymbol{E}_n,$$

$$\boldsymbol{A}_i^H = (\boldsymbol{U}_i\boldsymbol{U}_i^H)^H = \boldsymbol{A}_i.$$

(充分性) 只需验证 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^H = \boldsymbol{A}^H\boldsymbol{A}$ 即可.

$$\begin{aligned} \boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^H &= \left(\sum_{i=1}^{k}\boldsymbol{\lambda}_i\boldsymbol{A}_i\right)\left(\sum_{j=1}^{k}\boldsymbol{\lambda}_j\boldsymbol{A}_j\right)^H \\ &= \sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{k}\boldsymbol{\lambda}_i\bar{\boldsymbol{\lambda}}_j\boldsymbol{A}_i\boldsymbol{A}_j^H \\ &= \sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{k}\boldsymbol{\lambda}_i\bar{\boldsymbol{\lambda}}_j\boldsymbol{A}_i\boldsymbol{A}_j \\ &= \sum_{i=1}^{k}|\boldsymbol{\lambda}_i|^2\boldsymbol{A}_i. \end{aligned}$$

同理，可得

$$\boldsymbol{A}^H\boldsymbol{A} = \sum_{i=1}^{k}|\boldsymbol{\lambda}_i|^2\boldsymbol{A}_i,$$

故 $\boldsymbol{A}$ 是正规矩阵.