1. 设矩阵 $A$ 为

$$A=\begin{pmatrix}2&3&1&-1\\5&8&0&1\\1&2&-2&3\end{pmatrix},$$

求广义逆矩阵 $A^-,A_r^-$.

**解：**用矩阵初等变换来求广义逆 $A^-$.

$$\begin{pmatrix}2&3&1&-1&1&0&0\\5&8&0&1&0&1&0\\1&2&-2&3&0&0&1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&2&-2&3&0&0&1\\2&3&1&-1&1&0&0\\0&0&0&0&-2&1&-1\end{pmatrix},$$

$$\to\begin{pmatrix}1&2&-2&3&0&0&1\\0&-1&5&-7&1&0&-2\\0&0&0&0&-2&1&-1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&8&-11&2&0&-3\\0&1&-5&7&-1&0&2\\0&0&0&0&-2&1&-1\end{pmatrix},$$

$$PAQ=\begin{pmatrix}2&0&-3\\-1&0&2\\-2&1&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2&3&1&1\\5&8&0&1\\1&2&-2&3\end{pmatrix}E_4=\begin{pmatrix}1&0&8&-11\\0&1&-5&7\\0&0&0&0\end{pmatrix}=B_1.$$

取 $B_1^-=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$，则 $A^-=QB_1^-P=E_4\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2&0&-3\\-1&0&2\\-2&1&-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2&0&-3\\-1&0&2\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}.$

再用最大秩分解来求 $A_r^-$：

用初等行变换化 $A$ 为行标准形矩阵 $\tilde{A}$

$$A=\begin{pmatrix}2&3&1&-1\\5&8&0&1\\1&2&-2&3\end{pmatrix}\to\tilde{A}=\begin{pmatrix}1&0&8&-11\\0&1&-5&7\\0&0&7&0\end{pmatrix},$$

则 $A=BD=\begin{pmatrix}2&3\\5&8\\1&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&8&-11\\0&1&-5&7\end{pmatrix}$为 $A$ 的一个最大秩分解.

用初等行变换求 $B$ 的单边逆. 由 $\begin{pmatrix}2&3&1&0&0\\5&8&0&1&0\\1&2&0&0&1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&2&0&-3\\0&1&-1&0&2\\0&0&-2&1&-1\end{pmatrix}$ 得

$B_L^{-1}=\begin{pmatrix}2&0&-3\\-1&0&2\end{pmatrix}$. 容易看出 $D_R^{-1}=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\\0&0\\0&0\end{pmatrix}$，于是

$$A_r^-=D_R^{-1}B_L^{-1}=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\\0&0\\0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2&0&-3\\-1&0&2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2&0&-3\\-1&0&2\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}.$$

2. 设 $A\in \boldsymbol{C}^{n\times n}$，证明：总有广义逆矩阵 $A^-$ 存在.

**证：**若 $A=0_{m\times n}$，此时任给 $X\in \boldsymbol{C}^{n\times m}$，都有 $0X0=0$，故 $X=A^-$.

若 $A\neq 0_{m\times n}$，设 $\operatorname{rank}(A)=r>0$，则存在 $m$ 阶可逆矩阵 $P$ 与 $n$ 阶可逆矩阵 $Q$ 使得

$$A=P\begin{pmatrix}E_r&0\\0&0\end{pmatrix}Q.$$

设 $G=Q^{-1}\begin{pmatrix}E_r&X\\Y&Z\end{pmatrix}P^{-1}$，其中 $X\in \boldsymbol{C}^{r\times(m-r)},Y\in \boldsymbol{C}^{(n-r)\times r},Z\in \boldsymbol{C}^{(n-r)\times(m-r)}$为任意矩阵。则

$$\begin{aligned}AGA&=P\begin{pmatrix}E_r&0\\0&0\end{pmatrix}QQ^{-1}\begin{pmatrix}E_r&X\\Y&Z\end{pmatrix}P^{-1}P\begin{pmatrix}E_r&0\\0&0\end{pmatrix}Q\\&=P\begin{pmatrix}E_r&0\\0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}E_r&X\\Y&Z\end{pmatrix}\begin{pmatrix}E_r&0\\0&0\end{pmatrix}Q\\&=P\begin{pmatrix}E_r&X\\0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}E_r&0\\0&0\end{pmatrix}Q\\&=P\begin{pmatrix}E_r&0\\0&0\end{pmatrix}Q\\&=A\end{aligned}$$

故 $G=A^-$.

3. 设 $A\in \boldsymbol{C}^{m\times n}$，证明 $(A^-)^T\in A^T\{1\}$.

**证：**因为 $A^T\{1\}=\{G\mid A^TGA^T=A^T,\forall G\in \boldsymbol{C}^{m\times n}\}$，而 $A^T(A^-)^TA^T=(AA^-A)^T$，故

$(A^-)^T\in A^T\{1\}$.

4. 设 $P\in \boldsymbol{C}^{m\times m},Q\in \boldsymbol{C}^{n\times n}$ 均为可逆矩阵，且有 $B=PAQ$，证明：$Q^{-1}A^-P^{-1}\in B\{1\}$.

**证：**因为 $B(Q^{-1}A^-P^{-1})B=PAQQ^{-1}A^-P^{-1}PAQ=PAA^-AQ=PAQ=B$, 所以

$Q^{-1}A^-P^{-1}\in B\{1\}$.

5. 证明：$0_{m\times n}$ 的自反广义逆矩阵仅为 $0_{n\times m}$ .

**证：** $\forall G\in \boldsymbol{C}^{n\times m}$，有 $0_{m\times n}G0_{m\times n}=0_{m\times n}$ ，可见 $G$ 为 $0_{m\times n}$ 的广义逆矩阵. 要使 $G$ 是 $0_{m\times n}$ 的自反广义逆矩阵，还需 $G0_{m\times n}G=G$ 成立，但 $G0_{m\times n}G=0_{n\times m}$，所以 $G=0_{n\times m}$ .

6. 设 $A\in \boldsymbol{C}^{m\times n},Y\in \boldsymbol{C}^{n\times r},Z\in \boldsymbol{C}^{r\times m}$，且 $ZAY=E_r$，则 $A_r^- =YZ$ 是 $A$ 的自反广义逆矩阵.

7. 设矩阵 $A=\begin{pmatrix}1&0&2\\2&1&5\\0&1&-1\\1&3&-1\end{pmatrix}$，求 M-P 广义逆矩阵 $A^+$.

**解：** 容易验证 $\operatorname{rank}(A)=3$， $A$ 为列满秩矩阵，所以 $A^+=(A^HA)^{-1}A^H$ .

$$A^HA=\begin{pmatrix}1&2&0&1\\0&1&1&3\\2&5&-1&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&2\\2&1&5\\0&1&-1\\1&3&-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}6&5&11\\5&11&1\\11&1&31\end{pmatrix}$$，所以

$$A^+=(A^HA)^{-1}A^H=\begin{pmatrix}6&5&11\\5&11&1\\11&1&31\end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix}1&2&0&1\\0&1&1&3\\2&5&-1&-1\end{pmatrix}$$
$$=\begin{pmatrix}\frac{85}{11}&-\frac{36}{11}&-\frac{29}{11}\\-\frac{36}{11}&\frac{65}{44}&\frac{49}{44}\\-\frac{29}{11}&\frac{49}{44}&\frac{41}{44}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&2&0&1\\0&1&1&3\\2&5&-1&-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{27}{11}&-1&-\frac{7}{11}&\frac{6}{11}\\-\frac{23}{22}&\frac{1}{2}&\frac{4}{11}&\frac{1}{22}\\-\frac{17}{22}&\frac{1}{2}&\frac{2}{11}&-\frac{5}{22}\end{pmatrix}$$

8. 设 $A\in \boldsymbol{C}^{m\times n},D,G\in A\{1\}$ 试证明： $GAD\in A\{1,2\}$ .

**证：** 由 $D,G\in A\{1\}$ 得 $ADA=A, AGA=A$，故有

$$A(GAD)A=(AGA)DA=ADA=A，$$

$$(GAD)A(GAD)=G(ADA)GAD=G(AGA)D=GAD.$$

所以 $GAD\in A\{1,2\}$ .

9. 设 $A^2=A=A^H$，试证明： $A=A^+$ .

**证：** 由条件 $A^2=A=A^H$ 可得

$$AAA = A^2A = A^2 = A，(AA)^H = A^HA^H = AA.$$

由以上两式易见矩阵 $A$ 与它本身满足 M-P 广义逆定义的四个方程，所以 $A = A^+$.

10. 设 $A = A^H$，证明：

$$(A^2)^+ = (A^+)^2,\quad AA^+ = A^+A,\quad A^+A^2 = A^2A^+,\quad A^2(A^2)^+ = (A^2)^+A^2 = AA^+.$$

**证：** (1)利用已知 $A = A^H$ 和教材 P203 定理 4(1)中结论有

$$(A^2)^+ = (AA^H)^+ = (A^H)^+A^+ = A^+A^+ = (A^+)^2.$$

(2) 由 $A = A^H$ 和 $A^+$ 的性质有 $AA^+ = (AA^+)^H = (A^+)^HA^H = (A^H)^+A^H = A^+A.$

(3) 利用(2)的结论 $AA^+ = A^+A$ 有 $A^+A^2 = A^+AA = AA^+A = AAA^+ = A^2A^+.$

(4) 由(1)，(2)中结论得 $A^2(A^2)^+ = A^2(A^+)^2 = AAA^+A^+ = AA^+AA^+ = AA^+$，同理可得 $(A^2)^+A^2 = AA^+.$

11. 若 $A$ 的最大秩分解为 $A = BC$，证明：$A^+ = C^+B^+.$

**证：** $\forall A \in \boldsymbol{C}_r^{m\times n}$，由已知 $A = BC$ 为 $A$ 的最大秩分解，可得 $A^+ = C^H(CC^H)^{-1}(B^HB)^{-1}B^H$. 由于 $B$ 是列满秩矩阵，则 $B = BE_r$ 为 $B$ 的最大秩分解，于是 $B^+ = (B^HB)^{-1}B^H$，同理, 由 $C$ 是行满秩矩阵得 $C^+ = C^H(CC^H)^{-1}$，所以 $A^+ = C^+B^+.$

12. 证明：$(A^+)^+ = A.$

**证：** 易知 $A$ 与 $A^+$ 满足 M-P 广义逆定义的四个方程, 故有 $(A^+)^+ = A.$

13. 试证明：

$$(A^HA)^+ = A^+(A^H)^+,\quad (AA^H)^+ = (A^H)^+A^+,$$
$$(A^HA)^+ = A^+(AA^H)^+A = A^H(AA^H)^+(A^H)^+,$$
$$AA^+ = (AA^H)(AA^H)^+ = (AA^H)^+(AA^H).$$

**证：** 略，见教材 P203 定理 4.

14. 设 $U \in \boldsymbol{C}^{m\times m}$ 与 $V \in \boldsymbol{C}^{n\times n}$ 均是酉矩阵，证明：$(UAV^H)^+ = VA^+U^H$.

**证：** 利用 $U,V$ 为酉矩阵和 $A^+$ 的运算性质，容易验证 $UAV^H$ 和 $VA^+U^H$ 满足 M-P 广义逆定义的四个方程：

(1) $UAV^HVA^+U^HUAV^H = UAA^+AV^H = UAV^H$；

(2) $VA^{+}U^{H}UAV^{H}VA^{+}U^{H}=VA^{+}AA^{+}U^{H}=VA^{+}U^{H}$；

(3) $(UAV^{H}VA^{+}U^{H})^{H}=(UAA^{+}U^{H})^{H}=U(AA^{+})^{H}U^{H}=UAA^{+}U^{H}=UAV^{H}VA^{+}U^{H}$；

(4) 类似(3)可得 $(VA^{+}U^{H}UAV^{H})^{H}=VA^{+}U^{H}UAV^{H}$.

所以 $(UAV^{H})^{+}=VA^{+}U^{H}$.

15. 若 $A$ 是正规矩阵，证明：(1) $A^{+}A=AA^{+}$；(2) $(A^{n})^{+}=(A^{+})^{n}$.

**证：**设 $A$ 为 $m$ 阶正规矩阵，则存在酉矩阵 $U$，使得

$$U^{H}AU=\begin{bmatrix}\lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_m\end{bmatrix},\quad A=U\begin{bmatrix}\lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_m\end{bmatrix}U^{H}.$$

由 14 题结论知 $A^{+}=U\begin{bmatrix}\lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_m\end{bmatrix}^{+}U^{H}=U\begin{bmatrix}\lambda_1^{+} & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_m^{+}\end{bmatrix}U^{H}$，其中 $\lambda_i^{+}=\begin{cases}1/\lambda_i & \lambda_i\neq 0,\\ 0 & \lambda_i=0.\end{cases}$，

$i=1,\cdots m$.

(1) $$A^{+}A=U\begin{bmatrix}\lambda_1^{+} & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_m^{+}\end{bmatrix}U^{H}U\begin{bmatrix}\lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_m\end{bmatrix}U^{H}=U\begin{bmatrix}\lambda_1^{+}\lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_m^{+}\lambda_m\end{bmatrix}U^{H},$$

$$AA^{+}=U\begin{bmatrix}\lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_m\end{bmatrix}U^{H}U\begin{bmatrix}\lambda_1^{+} & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_m^{+}\end{bmatrix}U^{H}=U\begin{bmatrix}\lambda_1^{+}\lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_m^{+}\lambda_m\end{bmatrix}U^{H}.$$

所以 $A^{+}A=AA^{+}$.

(2) $$(A^{n})^{+}=\left(U\begin{bmatrix}\lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_m\end{bmatrix}U^{H}U\begin{bmatrix}\lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_m\end{bmatrix}U^{H}\cdots U\begin{bmatrix}\lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_m\end{bmatrix}U^{H}\right)^{+}$$

$$=\left(U\begin{bmatrix}\lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_m\end{bmatrix}^{n}U^{H}\right)^{+}=\left(U\begin{bmatrix}\lambda_1^{n} & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_m^{n}\end{bmatrix}U^{H}\right)^{+}=U\begin{bmatrix}(\lambda_1^{+})^{n} & & \\ & \ddots & \\ & & (\lambda_m^{+})^{n}\end{bmatrix}U^{H}$$

$$=U\begin{bmatrix}\lambda_1^{+} & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n^{+}\end{bmatrix}U^{H}U\begin{bmatrix}\lambda_1^{+} & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n^{+}\end{bmatrix}U^{H}\cdots U\begin{bmatrix}\lambda_1^{+} & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n^{+}\end{bmatrix}U^{H}$$

$$=(A^{+})^{n}$$

16. 若 $ABA=A,(BA)^H=BA,AGA=A,(AG)^H=AG$，则 $BAG=A^+$.

**证：**由已知条件验证 $BAG$ 满足 M-P 广义逆定义的四个方程：

(1) $A(BAG)A=(ABA)GA=AGA=A$；

(2) $(BAG)A(BAG)=B(AGA)BAG=BABAG=BAG$；

(3) $(ABAG)^H=(AG)^H=AG=ABAG$；

(4) $(BAGA)^H=(BA)^H=BA=BAGA$.

所以 $BAG=A^+$.

17. 试证明：$(A\otimes B)^+=A^+\otimes B^+$.

**证：**根据 Kronecker 乘积的性质有：

$$(A\otimes B)(A^+\otimes B^+)(A\otimes B)=(AA^+A)\otimes(BB^+B)=A\otimes B；$$

$$(A^+\otimes B^+)(A\otimes B)(A^+\otimes B^+)=(A^+AA^+)\otimes(B^+BB^+)=A^+\otimes B^+；$$

$$\begin{aligned}[(A\otimes B)(A^+\otimes B^+)]^H&=[(AA^+)\otimes(BB^+)]^H=(AA^+)^H\otimes(BB^+)^H\\&=(AA^+)\otimes(BB^+)=(A\otimes B)(A^+\otimes B^+)\end{aligned}；$$

同理 $[(A^+\otimes B^+)(A\otimes B)]^H=(A^+\otimes B^+)(A\otimes B)$. 所以 $(A\otimes B)^+=A^+\otimes B^+$.

18. 试用各种方法求 $A^+$：

(1) $A=\begin{pmatrix}1&2\\0&0\\2&4\end{pmatrix}$, (2) $A=\begin{pmatrix}1&2&-1\\0&-1&2\end{pmatrix}$, (3) $A=\begin{pmatrix}i&0\\1&i\\0&1\end{pmatrix}$,

(4) $A=\begin{pmatrix}1&2&0\\0&0&2\\2&4&0\end{pmatrix}$, (5) $A=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&-1\\1&0&0\\2&1&-1\end{pmatrix}$.

**解：**(1) 奇异值分解法:

$$AA^H=\begin{pmatrix}1&2\\0&0\\2&4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&2\\2&0&4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}5&0&10\\0&0&0\\10&0&20\end{pmatrix},$$

由 $\left|\lambda E_3 - AA^H\right| = \begin{vmatrix} \lambda-5 & 0 & -10 \\ 0 & \lambda & 0 \\ -10 & 0 & \lambda-20 \end{vmatrix} = \lambda^2\left(\lambda-25\right)=0$ 得 $AA^H$ 的特征值 $\lambda_1 = 25, \lambda_2 = 0$ .

而对应于 $\lambda_1 = 25$ 的单位特征向量为 $\alpha_1 = [\frac{1}{\sqrt{5}}, 0, \frac{2}{\sqrt{5}}]^T$，故 $\boldsymbol{U}_1 = \left(\alpha_1\right)$.

$$A^+ = A^H U_1 \Delta_r^{-1} U_1^H = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & 0 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{5}} \\ 0 \\ \frac{2}{\sqrt{5}} \end{pmatrix} \times \frac{1}{25} \times [\frac{1}{\sqrt{5}}, 0, \frac{2}{\sqrt{5}}] = \begin{pmatrix} \frac{1}{25} & 0 & \frac{2}{25} \\ \frac{2}{25} & 0 & \frac{4}{25} \end{pmatrix}.$$

（2）最大秩分解法：显然 $A$ 是行满秩矩阵，

$$AA^H = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & -4 \\ -4 & 5 \end{pmatrix}，\text{易得} \left(AA^H\right)^{-1} = \frac{1}{14}\begin{pmatrix} 5 & 4 \\ 4 & 6 \end{pmatrix}.$$

所以 $A^+ = A^H\left(AA^H\right)^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{14}\begin{pmatrix} 5 & 4 \\ 4 & 6 \end{pmatrix} = \frac{1}{14}\begin{pmatrix} 5 & 4 \\ 6 & 2 \\ 3 & 8 \end{pmatrix}$.

（3）极限算法：

$$A^H A = \begin{pmatrix} -i & 1 & 0 \\ 0 & -i & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} i & 0 \\ 1 & i \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & i \\ -i & 2 \end{pmatrix}，\quad A^H A + \delta^2 E_2 = \begin{bmatrix} 2+\delta^2 & i \\ -i & 2+\delta^2 \end{bmatrix}.$$

容易算得 $(A^H A + \delta^2 E_2)^{-1} = \frac{1}{(\delta^2+1)(\delta^2+3)} \begin{bmatrix} \delta^2+2 & -i \\ i & \delta^2+2 \end{bmatrix}$，于是

$$A^+ = \lim_{\delta\to 0}(A^H A + \delta^2 E_2)^{-1} A^H = \lim_{\delta\to 0} \frac{1}{(\delta^2+1)(\delta^2+3)} \begin{bmatrix} \delta^2+2 & -i \\ i & \delta^2+2 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} -i & 1 & 0 \\ 0 & -i & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \lim_{\delta\to 0} \frac{1}{(\delta^2+1)(\delta^2+3)} \begin{pmatrix} -i(\delta^2+2) & \delta^2+1 & -i \\ 1 & -i(\delta^2+1) & \delta^2+2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{2i}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{i}{3} \\ \frac{1}{3} & -\frac{i}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix}$$

（4）谱分解法：

$$A^H A=\begin{pmatrix}1&0&2\\2&0&4\\0&2&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&2&0\\0&0&2\\2&4&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}5&10&0\\10&20&0\\0&0&4\end{pmatrix},$$

$$\left|\lambda E_3-A^H A\right|=\begin{vmatrix}\lambda-5&-10&0\\-10&\lambda-20&0\\0&0&\lambda-4\end{vmatrix}=\lambda(\lambda-4)\left(\lambda-25\right)=0,$$

故 $A^H A$ 的特征值为 $\lambda_1=4,\lambda_2=25,\lambda_3=0$ . 于是 $\lambda_1^-=\dfrac{1}{4},\lambda_2^-=\dfrac{1}{25},\lambda_3^-=0$.

设 $\quad P_1(\lambda)=(\lambda-\lambda_2)(\lambda-\lambda_3)=\lambda(\lambda-\ \ P_2(\lambda)=(\lambda-\lambda_1)(\lambda-\lambda_3)=\lambda(\lambda-$

$$P_3(\lambda)=(\lambda-\lambda_1)(\lambda-\lambda_2)=(\lambda-4)(\lambda-25).$$

可求得 $\quad P_1(\lambda_1)=4(4-25)=-84, P_2(\lambda_2)=25(25-4)=525$，

$$P_1(A^H A)=(A^H A-25E_3)A^H A, P_2(A^H A)=(A^H A-4E_3)A^H A.$$

于是

$$\boldsymbol{A}^+=\left[\frac{1}{4}\times\frac{(A^H A-25E_3)A^H A}{-84}+\frac{1}{25}\times\frac{(A^H A-4E_3)A^H A}{525}\right]A^H=\begin{pmatrix}\frac{1}{25}&0&\frac{2}{25}\\\frac{2}{25}&0&\frac{4}{25}\\0&\frac{1}{2}&0\end{pmatrix}.$$

(5) 最大秩分解法：容易得到 $A$ 的一个满秩分解表达式

$$A=BC=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\\1&0\\2&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&-1\end{pmatrix},$$

$$CC^T=\begin{pmatrix}1&0\\0&2\end{pmatrix}, B^T B=\begin{pmatrix}6&2\\2&2\end{pmatrix}, (CC^T)^{-1}=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}2&0\\0&1\end{pmatrix}, (B^T B)^{-1}=\frac{1}{4}\begin{pmatrix}1&-1\\-1&3\end{pmatrix}.$$

于是 $\quad A^+=C^T(CC^T)^{-1}(B^T B)^{-1}B^T=\dfrac{1}{8}\begin{pmatrix}2&-2&2&2\\-1&3&-1&1\\1&-3&1&-1\end{pmatrix}.$

19. 证明：方程组 $A^H Ax=A^H b$ 是相容的，其中 $A\in\boldsymbol{C}^{m\times n}, b\in\boldsymbol{C}^m$.

**证：** 方程 $A^H Ax=A^H b$ 相容的充要条件是 $\operatorname{rank}(A^H A\vdots A^H b)=\operatorname{rank}(A^H A)$，显然 $\operatorname{rank}(A^H A\vdots A^H b)\geq\operatorname{rank}(A^H A)$，同时有

$$\mathrm{rank}(A^H A \vdots A^H b) = \mathrm{rank}(A^H (A \vdots b)) \le \mathrm{rank}(A^H) = \mathrm{rank}(A^H A),$$

所以 $\mathrm{rank}(A^H A \vdots A^H b) = \mathrm{rank}(A^H A)$，方程 $A^H Ax = A^H b$ 相容.

20. 已知

$$A=\begin{pmatrix}1&2\\0&0\\2&4\end{pmatrix},\quad b=\begin{pmatrix}1\\0\\2\end{pmatrix}.$$

求方程组 $Ax=b$ 的通解及最小范数解.

**解：**显然 $\mathrm{rank}(A\vdots b)=\mathrm{rank}(A)=2$，方程组是相容的. 容易得到 $A$ 的一个最大秩分解

为 $A=\begin{pmatrix}1\\0\\2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&2\end{pmatrix}=BD$，而

$$B^+=(B^TB)^{-1}B^T=\left(\begin{pmatrix}1&0&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\0\\2\end{pmatrix}\right)^{-1}\begin{pmatrix}1&0&2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{1}{5}&0&\frac{2}{5}\end{pmatrix},$$

$$D^+=D^T(DD^T)^{-1}=\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}\left(\begin{pmatrix}1&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}\right)^{-1}=\begin{pmatrix}\frac{1}{5}\\\frac{2}{5}\end{pmatrix}.$$

所以 $$A^+=D^+B^+=\begin{pmatrix}\frac{1}{5}\\\frac{2}{5}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\frac{1}{5}&0&\frac{2}{5}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{1}{25}&0&\frac{2}{25}\\\frac{2}{25}&0&\frac{4}{25}\end{pmatrix}.$$

方程组的通解为

$$\begin{aligned}x&=A^+b+(E_2-A^+A)\begin{pmatrix}u_1\\u_2\end{pmatrix}\\&=\begin{pmatrix}\frac{1}{25}&0&\frac{2}{25}\\\frac{2}{25}&0&\frac{4}{25}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\0\\2\end{pmatrix}+\left(\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}\frac{1}{25}&0&\frac{2}{25}\\\frac{2}{25}&0&\frac{4}{25}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&2\\0&0\\2&4\end{pmatrix}\right)\begin{pmatrix}u_1\\u_2\end{pmatrix}\\&=\begin{pmatrix}\frac{1}{5}\\\frac{2}{5}\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}\frac{4}{5}&-\frac{2}{5}\\-\frac{2}{5}&\frac{1}{5}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}u_1\\u_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{1}{5}\\\frac{2}{5}\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}\frac{4}{5}\\-\frac{2}{5}\end{pmatrix}u_1+\begin{pmatrix}-\frac{2}{5}\\\frac{1}{5}\end{pmatrix}u_2.\quad u_1,u_2\in\mathrm{R}\end{aligned}$$

最小范数解为 $A^+b=[\frac{1}{5} \quad \frac{2}{5}]^T$ .

21. 验证下列方程组是不相容的，并用 $A^+$ 求它的最佳逼近解.

(1) $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} x = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$； (2) $\begin{pmatrix} 0 & 2i & i & 0 & 4+2i & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -3 & -6 & -2-3i \\ 0 & 2 & 1 & 1 & 4-6i & 1 \end{pmatrix} x = \begin{pmatrix} -i \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

**解：**（1）显然 $3=\mathrm{rank}(A\vdots b)\neq \mathrm{rank}(A)=2$，故方程组不相容．将矩阵 $A$ 通过初等行变换变为 $\tilde{A}$

$$A=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \to \tilde{A}=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

可得 $A$ 的最大秩分解 $A=BC=\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

$$B^TB=\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 6 \end{pmatrix}, CC^T=\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},\ (B^TB)^{-1}=\frac{1}{11}\begin{pmatrix} 6 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}, (CC^T)^{-1}=\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

所以

$$\begin{aligned} A^+ &= C^T(CC^T)^{-1}(B^TB)^{-1}B^T \\ &= \frac{1}{11}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 6 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{22}\begin{pmatrix} -2 & 6 & -1 & 5 \\ -2 & 6 & -1 & 5 \\ 8 & -2 & 4 & 2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

最佳逼近解为

$$x_0=A^+b=\frac{1}{22}\begin{pmatrix} -2 & 6 & - & 1 \\ -2 & 6 & -1 & 5 \\ 8 & -2 & 4 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}=\frac{1}{11}\begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 6 \end{pmatrix}.$$

22. 已知

$$A=\begin{pmatrix}1&0&2\\2&0&4\end{pmatrix}^T, b=(0,1,0)^T,$$

求方程组 $Ax=b$ 的最小二乘解和最佳逼近解.

**解：**因 $2=\mathrm{rank}(A\vdots b)\neq\mathrm{rank}(A)=1$，故方程组不相容. 易得 $A$ 的一个最大秩分解为

$$A=BC=\begin{pmatrix}1\\0\\2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&2\end{pmatrix},$$

所以 $A^+=C^T(CC^T)^{-1}(B^TB)^{-1}B^T=\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}\cdot\frac{1}{5}\cdot\frac{1}{5}\begin{pmatrix}1&0&2\end{pmatrix}=\frac{1}{25}\begin{pmatrix}1&0&2\\2&0&4\end{pmatrix}$，最佳逼近解为

$$x_0=A^+b=\frac{1}{25}\begin{pmatrix}1&0&2\\2&0&4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\ \end{pmatrix}.$$

方程组的最小二乘解为

$$\begin{aligned}x&=A^+b+(E_2-A^+A)\begin{pmatrix}u_1\\u_2\end{pmatrix}\\&=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}+\left(\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}\frac{1}{25}&0&\frac{2}{25}\\\frac{2}{25}&0&\frac{4}{25}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&2\\0&0\\2&4\end{pmatrix}\right)\begin{pmatrix}u_1\\u_2\end{pmatrix}\\&=\begin{pmatrix}\frac{4}{5}&-\frac{2}{5}\\-\frac{2}{5}&\frac{1}{5}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}u_1\\u_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{4}{5}\\-\frac{2}{5}\end{pmatrix}u_1+\begin{pmatrix}-\frac{2}{5}\\\frac{1}{5}\end{pmatrix}u_2.\quad u_1,u_2\in\mathrm{R}\end{aligned}$$

23. 设 $A$ 是对称矩阵，$M=A^+$，证明：$M^2=(A^2)^+$.

**证：**略，见第 10 题.

24. 设 $A\in\boldsymbol{C}^{m\times m}$ 和 $B\in\boldsymbol{C}^{n\times n}$ 均可逆，证明：

⑴ 若 $D\in\boldsymbol{C}^{m\times n}$ 是左可逆的，则 $ADB$ 是左可逆的.

⑵ 若 $D\in\boldsymbol{C}^{m\times n}$ 是右可逆的，则 $ADB$ 是右可逆的.

**证：**（1）若 $D$ 左可逆，则存在 $D_L^{-1}\in\boldsymbol{C}^{n\times m}$，使得 $D_L^{-1}D=E_n$，由于 $A,B$ 均可逆，故 $(B^{-1}D_L^{-1}A^{-1})ADB=E_n$. 所以 $ADB$ 是左可逆的，且 $(ADB)_L^{-1}=B^{-1}D_L^{-1}A^{-1}$.

（2）类似(1)可证得 $(ADB)_R^{-1}=B^{-1}D_R^{-1}A^{-1}$.

**25.** 求$A_1=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$和$A_2=\begin{pmatrix}1&0\\0&0\\0&0\end{pmatrix}$的$A_1^+$和$A_2^+$.

**解**：(1) $A_1$的最大秩分解为$A_1=\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&0\end{pmatrix}=BC$， 所以

$$A_1^+=C^T(CC^T)^{-1}(B^TB)^{-1}B^T=\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}\cdot1\cdot1\cdot\begin{pmatrix}1&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0\\0&0\\0&0\end{pmatrix}.$$

(2) 因为$A_2=A_1^T$，所以$A_2^+=\left(A_1^T\right)^+=\left(A_1^+\right)^T=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$.

**26.** 已知一组数据：(-3, 9), (-2, 6), (0, 2), (1, 1), 求数据拟合的最佳二次抛物线，并计算误差.

**解**：本题实际上是要求参数$\beta_i$，使函数$y=\beta_0+\beta_1x+\beta_2x^2$最佳拟合数据点(-3, 9), (-2, 6), (0, 2), (1, 1). 也即求方程组

$$A\beta=\begin{pmatrix}1&-3&9\\1&-2&4\\1&0&0\\1&1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\beta_0\\\beta_1\\\beta_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}9\\6\\2\\1\end{pmatrix}=b$$

的最佳逼近解.

因系数矩阵$\boldsymbol{A}$是列满秩的，求得$(A^TA)^{-1}=\frac{1}{90}\begin{pmatrix}54&-21&-15\\-21&49&20\\-15&20&10\end{pmatrix}$，故最佳逼近解

$$\beta=A^+b=(A^TA)^{-1}A^Tb=\frac{1}{90}\begin{pmatrix}54&-21&-15\\-21&49&20\\-15&20&10\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&1&1&1\\-3&-2&0&1\\9&4&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}9\\6\\2\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\\-4/3\\1/3\end{pmatrix}.$$

于是数据拟合的最佳二次抛物线为$y=2-\frac{4}{3}x+\frac{1}{3}x^2$. 误差为

$$\|A\beta-b\|_2=\left\|\begin{pmatrix}1&-3&9\\1&-2&4\\1&0&0\\1&1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2\\-4/3\\1/3\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}9\\6\\2\\1\end{pmatrix}\right\|_2=\left\|\begin{pmatrix}0\\0\\0\\0\end{pmatrix}\right\|_2=0.$$

## 参考文献

[1] 黄廷祝, 钟守铭, 李正良. 矩阵理论[M]. 第1版. 北京: 高等教育出版社, 2003.

[2] 方保镕, 周继东, 李医民. 矩阵论 [M] . 第1版. 北京: 清华大学出版社, 2004.

[3] 林升旭. 矩阵论学习辅导与典型题解析[M]. 第1版. 武昌: 华中科技大学出版社, 2003.

[4] 张凯院, 徐仲. 矩阵论导教导学导考 [M] . 第2版. 西安: 西北工业大学出版社, 2006.

[5] 魏丰, 史荣昌, 闫晓霞. 矩阵分析学习指导[M]. 第1版, 北京: 北京理工大学出版社, 2005.

[6] 张贤达. 矩阵分析与应用 [M] . 第1版. 北京: 清华大学出版社, 2004.

[7] Roger A. Horn, Charles R. Johnson. Matrix Analysis [M] . 第1版. 北京：人民邮电出版社，2005.