矩阵理论第三章参考答案

杨　传　胜

1. 求矩阵

$$A = \left\{ \begin{array}{cc} 1 & 1 \\ 4 & 1 \end{array} \right\}$$

的谱分解.

解：(1) 求特征值： $|\lambda E - A| = (\lambda_1 - 3)(\lambda_2 + 1) = 0$, 故特征值为 $\lambda_1 = 3,\ \lambda_2 = -1$.

(2) 求特征向量： $\lambda_1 = 3$ 对应的特征向量为 $p_1 = (1, 2)^T$;

$\lambda_2 = -1$ 对应的特征向量为 $p_2 = (1, -2)^T$.

(3) 谱分解式：令 $P = (p_1, p_2) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}$, 则 $P^{-1} = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/4 \\ 1/2 & -1/4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} w_1^T \\ w_2^T \end{pmatrix}$.

令 $A_1 = p_1 w_1^T = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/4 \\ 1 & 1/2 \end{pmatrix}$, $A_2 = p_2 w_2^T = \begin{pmatrix} 1/2 & -1/4 \\ -1 & 1/2 \end{pmatrix}$,

所以谱分解式为 $A = 3A_1 - A_2$.

2. 求单纯矩阵

$$A = \begin{pmatrix} -29 & 6 & 18 \\ -20 & 5 & 12 \\ -40 & 8 & 25 \end{pmatrix}$$

的谱分解式.

本题的计算同第一题类似.

3. 设 $\lambda_i\,(i = 1, 2, \cdots, n)$ 是正规矩阵 $A \in C^{n\times n}$ 的特征值，证明： $|\lambda_i|^2\,(i = 1, 2, \cdots, n)$ 是 $A^H A$ 与 AA^H 的特征值.

证明：根据题设矩阵 A 是正规矩阵，则 A 酉相似于对角矩阵，即

$$A = U\mathrm{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n)U^H,$$

其中 U 为酉矩阵，则

$$\begin{aligned} A^H A &= (U\mathrm{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n)U^H)^H (U\mathrm{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n)U^H) \\ &= U\mathrm{diag}(|\lambda_1|^2, |\lambda_2|^2, \cdots, |\lambda_n|^2)U^H, \end{aligned}$$

即 $A^H A$ 的特征值为 $|\lambda_i|^2\,(i = 1, 2, \cdots, n)$, 同理可证 $|\lambda_i|^2\,(i = 1, 2, \cdots, n)$ 是 AA^H 的特征值.

4. 设 A 是 $n \times n$ 阶实对称矩阵，并且 $A^2 = 0$, 你能用几种方法证明 $A = 0$.

证明：(1) 设 λ 是矩阵 A 的一个特征值， x 是对应于 λ 的一个非零特征向量，即 $Ax = \lambda x$, 有 $A^2 x = \lambda^2 x = 0$, 所以 $\lambda^2 = 0$, 即 $\lambda = 0$, 所以矩阵 A 的特征值全为零，又 A 酉相似于对角矩阵 $(diag(\lambda_1, \cdots, \lambda_n))$, 所以 $A = 0$.

(2) 设 $A \neq 0$, 则 $A^2 = A^H A \neq 0$, 与题设矛盾，所以结论成立.

5. 试证：对于每一个实对称矩阵 A, 都存在一个 n 阶方阵 S, 使 $A = S^3$.

证明：矩阵 A 是一个对称矩阵，则 A 酉相似于一个对角矩阵，即

$$A = Udiag(\lambda_1, \cdots, \lambda_n)U^H,$$

令 $D = diag(\lambda_1^{1/3}, \cdots, \lambda_n^{1/3})$, 则 $diag(\lambda_1, \cdots, \lambda_n) = D^3$.

我们有 $A = UD^3U^H = (UDU^H)(UDU^H)(UDU^H)$. 令 $S = UDU^H$, 则 $A = S^3$.

6. 如果 A 是一个正规矩阵, W 是 A 的一个不变子空间 (即 $AW \subseteq W$). 试证: W 的正交补 $W^\perp$ 也是 A 的不变子空间.

证明:

7. 证明：一个正规矩阵若是三角矩阵，则它一定是对角矩阵.

见课本 101 页引理 3.

8. 证明：正规矩阵 A 是幂零阵 ($A^2 = 0$) 的充要条件是 $A = 0$.

证明：充分性：若 $A = 0$, 则结论显然.

必要性：若 $A^2 = 0$, 根据题设矩阵 A 是正规矩阵，则 A 酉相似于一个对角矩阵，即

$$A = Udiag(\lambda_1, \cdots, \lambda_n)U^H,$$

$$A^2 = Udiag(\lambda_1^2, \cdots, \lambda_n^2)U^H = 0,$$

即

$$diag(\lambda_1^2, \cdots, \lambda_n^2) = 0,$$

所以我们有

$$\lambda_1 = \lambda_2 = \cdots = \lambda_n = 0,$$

即 $A = 0$, 结论成立.

9. 求矩阵

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -2 & -4 \\ -2 & 6 & -2 \\ -4 & -2 & 3 \end{pmatrix}$$

的谱分解式，并给出 A^n 的表达式.

解：矩阵 A 的特征值： $det(\lambda E - A) = (\lambda + 2)(\lambda - 7)^2$, 所以矩阵 A 的特征值为 $\lambda_1 = -2$, $\lambda_{2,3} = 7$.

$\lambda_1 = -2$, $\lambda_{2,3} = 7$ 对应的特征向量分别为 $u_1 = (2/3, -1/3, -2/3)^T$, $u_2 = (-0.5758, 0.7982, 0.1767)^T$, $u_3 = (0.4732, 0.5017, -0.7241)^T$. 令 $U = (u_1, u_2, u_3)$,

$$U^H = \begin{pmatrix} v_1^T \\ v_2^T \\ v_3^T \end{pmatrix},$$

$A_1 = u_1v_1^T$, $A_2 = u_2v_2^T$, $A_3 = u_3v_3^T$, 则 A 的谱分解为

$$A = -2A_1 + 7A_2 + 7A_3.$$

$A^n = (-2)^nA_1 + 7^nA_2 + 7^nA_3$.

10. 证明：如果一个实对称矩阵 A 的主对角元都大于零，则 A 至少有一个正的特征值.

证明：设矩阵 $A = [a_{ij}] \in R^{n\times n}$, 由于矩阵 A 是是对称矩阵，则其特征值 $\lambda_i(i = 1, 2, \cdots, n)$ 都是实数. 根据矩阵特征值和矩阵迹的关系，我们有

$$a_{11} + a_{22} + \cdots + a_{nn} = \lambda_1 + \lambda_2 + \cdots + \lambda_n,$$

同时矩阵 A 的主对角元素都大于零，所以矩阵 A 至少有一个正的特征值.

11. 求下列矩阵的最大秩分解式.

(1) $A=\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, (2) $A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 6 \\ 2 & 4 & 6 & 12 \\ 1 & 2 & 3 & 6 \\ 2 & 4 & 6 & 12 \end{pmatrix}$.

解

(1) 对矩阵 A 实行行初等变换，得

$$A \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

取矩阵

$$B=\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \\ 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, D=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \end{pmatrix},$$

则 $A=BD$ 就是矩阵 A 得最大秩分解.

(2) 同理对矩阵 A 进行行初等变换，得

$$A \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

取

$$B=\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, D=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 6 \end{pmatrix},$$

则 $A=BD$ 就是矩阵 A 得最大秩分解.

12. 设矩阵为

$$A=\begin{pmatrix} -1 & i & 0 \\ -i & 0 & -i \\ 0 & i & -1 \end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix} 0 & i & 1 \\ -i & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

试问： A 与 B 是正规矩阵吗？若是，通过酉变换把它们化成相似的对角矩阵？

解：由于

$$A^H A = AAT^H = \begin{pmatrix} 2 & -i & 1 \\ i & 2 & i \\ 1 & -i & -1 \end{pmatrix},$$

所以矩阵 A 是正规矩阵.

矩阵 A 的特征值为 -2,-1,1; 其对应的特征向量构成的矩阵为

$$U=\begin{pmatrix} -0.5774 & -0.7071 & 0.4082 \\ -0.5774i & 0 & -0.8165i \\ -0.5774 & 0.7071 & 0.4082 \end{pmatrix},$$

则酉变换为

$$U^H AU = diag(-2,-1,1).$$

对矩阵 B 用相同的方法进行运算.

13. 设矩阵 A 的最大秩分解为 $A = BC$, 证明：

$$Ax = 0 \Leftrightarrow Cx = 0.$$

证明：充分性显然；

必要性： (反证法) 如果存在向量 x 使得 $Ax = 0$, 但 $Cx \neq 0$, 令 $y = Cx$, 则 $y \neq 0$. 由于 $A = BC$ 是矩阵 A 的最大秩分解，则矩阵 B 的列向量是线性无关的，如果 $y \neq 0$, 则 $By \neq 0$, 从而 $BCx \neq 0$, 与题设矛盾，所以 $Cx = 0$.

14. 若 $A = (a_{ij})$ 是 n 阶正定矩阵，则有

$$det(A) \leq a_{11}a_{22}\cdots a_{nn},$$

当且仅当 A 为对角矩阵时等式才成立 (这就是 Hadamard 不等式).

见课本定理 5 结论 4(110 页).

15. $A, B \in C^{n\times n}$ 均为正定的 Hermite 矩阵，则 AB 为正定的 Hermite 矩阵的充要条件是 $AB = BA$.

证明：必要性：设 AB 为正定的 Hermite 矩阵，根据定义我们有 $(AB)^H = AB$, 即 $B^HA^H = AB$, 同时有 $A^H = A, B^H = B$, 所以 $AB = BA$.

充分性：设 $AB = BA$, 则 $(AB)^H = B^HA^H = BA = AB$, 则矩阵 AB 是 Hermite 矩阵.

由于矩阵 A 是正定的 Heimite 矩阵, 根据第三节定理 5, 存在一个正定的 Hermite 矩阵 S, 使得 $A = S^2$, 则有 $AB = S^2B$, 对矩阵 AB 实行相似变换：$S^{-1}(AB)S = SBS = S^HBS$, 则 AB 与矩阵 S^HBS 有相同的特征值，且 S^HBS 是 Hermite 矩阵.

对任意的 $x \neq 0$, 我们有 $x^HS^HBSx = (Sx)^HB(Sx)$. 由于矩阵 S 是非奇异矩阵，则 $Sx \neq 0$, 同时矩阵 B 是正定矩阵，则 $x^HS^HBSx = (Sx)^HB(Sx) > 0$, 即 S^HBS 是正定的 Hermite 矩阵，所以其所有的特征值为正，从而矩阵 AB 所有的特征值为正，即矩阵 AB 为正定的 Hermite 矩阵.