矩阵理论2017-2018学年期末考试试题

一、选择题 (每题5分，共25分)

1.下列命题错误的是(　)

(A)$(A\otimes B)^H=A^H\otimes B^H$

(B)若$A\in C^{n\times n}$，且$A^2=A$，则$rank(A)=tr(A)$

(C)设$\mu\in C^n$且$\mu^H\mu=1$，令$H=E-2\mu\mu^H$，则H的谱半径为1

(D)设V_1,V_2为空间V的任意子空间，则$dim(V_1+V_2)=dim(V_1)+dim(V_2)$

2.下列命题错误的是(　)

(A)若$A^H=A,A^2=A$，则$A^+=A$

(B)若$AA^H=A^HA$,则$(A^m)^+=(A^+)^m$

(C)若$x\in C^n$，则$\|x\|_\infty\le\|x\|_2\le\|x\|_1$

(D)设$A,B\in C^{n\times n}$的奇异值分别为$\sigma_1\ge\sigma_2\ge\cdots\ge\sigma_n>0$，$\sigma_1'\ge\sigma_2'\ge\cdots\ge\sigma_n'>0$，如果$\sigma_i>\sigma_i'(i=1,2,\cdots,n)$，则$\|A^+\|_2>\|B^+\|_2$

3.下列说法正确的是(　)

(A)若$A=\begin{bmatrix}\pi&0&0\\0&\pi&1\\0&0&\pi\end{bmatrix}$，则$sinA=\begin{bmatrix}0&0&0\\0&0&sin1\\0&0&0\end{bmatrix}$

(B)若A为收敛矩阵，则$E-A$一定可逆

(C)矩阵函数e^A对任何矩阵A均有定义，无论A为实矩阵还是复矩阵

(D)对任意方阵A,B，均有$e^Ae^B=e^{A+B}$

4.下列选项中正确的是(　)

(A)$A\in C^{n\times n}$且$\|A\|_m<1$，则A为收敛矩阵；

(B)$A\in C^{n\times n}$为正规矩阵，则$r(A)=\|A\|_2$

(C)$A\in C_r^{m\times n}(r>0)$，则$\|AA^+\|_F=\sqrt{r}$

(D)$\sigma_1\ge\sigma_2\ge\cdots\ge\sigma_r$为A的所有正奇异值，$\|A^+\|_2=\frac{1}{\sigma_1}$

5.下列结论错误的是(　)

(A)若A和B分别是列满秩和行满秩矩阵，则$(AB)^+=B^+A^+$

(B)若矩阵A为行满秩矩阵，则AA^H是正定$Hermite$矩阵

(C)设$A=(a_{ij})\in C^{n\times n}(n>1)$为严格对角占优矩阵，$D=diag(a_{11},a_{22},\cdots,a_{nn})$，则$E-D^{-1}A$的谱半径$r(E-D^{-1}A)\ge1$

(D)任何可相似对角化的矩阵，皆可分解为幂等矩阵$A_i(i=1,2,\cdots,n)$的加权和，即$A=\sum_{i=1}^n\lambda_iA_i$

二、判断题(15分)(正确的打√，错误的打×)

1.若$A\in C^{m\times n}$，且$A\neq0$，$(AA^-)^H=AA^-$，则$\|AA^-\|_2=n$　(　)

2.若$A\in C^{m\times n}$，$G\in C^{n\times m}$且$AGA=A$，则$y=AGx,\forall x\in C^m$为C^m到A的值域上的正交投影　(　)

3.设$A,B\in C^{n\times n}$都是可逆矩阵，且齐次线性方程组$(A+B)x=0$有非零解，$\|\cdot\|$为算子范数，则$\|AB^{-1}\|\ge1$　(　)

4.$\forall(x,y)\in R^2$，定义$f(x,y)=\sqrt{2x^2+3y^2-4xy}$，则$f(x,y)$是$R^2$上的范数　(　)

5.设矩阵A的最大秩分解为$A=BD$，则$Ax=0$当且仅当$Dx=0$　(　)

三、(10分)

设$A=(a_{ij})\in C^{n\times n}$的特征值为$\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$，证明:

$$\sum_{i=1}^{n}|\lambda_i|^2 \leq \|A\|_F^2$$

四、(10分)

(1).设$\lambda_i(i=1,2,\cdots,n)$为正规矩阵$A\in C^{n\times n}$的特征值，证明：$|\lambda_i|^2(i=1,2,\cdots,n)$是$A^HA$的特征值；

(2).设$A=(a_{ij})_{n\times n}$和$B=(b_{ij})_{n\times n}$酉等价，证明：

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}|b_{ij}|^2=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}|a_{ij}|^2$$

五、(10分)

设$A \in C^{n\times n}$为可逆矩阵，λ为A的任意一个特征值，$\|\cdot\|$为任意的算子范数，证明:

$$\frac{1}{\|A^{-1}\|} \le |\lambda| \le \sqrt[m]{\|A^m\|}$$

六、(13分)

已知矩阵$A = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$，$b = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$

(1).求矩阵A的最大秩分解；

(2).求A^+；

(3).用广义逆矩阵方法判断方程组$Ax = b$是否有解？

(4).求方程组$Ax = b$的最小范数解或最佳逼近解？(要求指出所求的是哪种解)

七、(10分)

设$A = \begin{bmatrix} \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} \\ 0 & \frac{1}{3} & 0 \end{bmatrix}$，计算：

(1).$\sum_{k=0}^{\infty} A^k$；

(2).e^{At}

八、（7分）

设$A \in C^{n\times n}$为$Hermite$矩阵，λ_1, λ_n分别是A的最大和最小特征值，证明：

$$\lambda_n \leq a_{kk} \leq \lambda_1 \quad (k = 1, 2, \cdots, n)$$