

## §2 矩阵函数

程光辉

2020 年 5 月 10 日

定义 1 设幂级数  $\sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k$  的收敛半径为  $r$ , 且当  $|z| < r$  时, 幂级数收敛于  $f(z)$ , 即

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k, \quad |z| < r.$$

如果方阵  $A \in \mathbf{C}^{n \times n}$  满足  $r(A) < r$ , 则称收敛的矩阵幂级数  $\sum_{k=0}^{\infty} a_k A^k$  的和为矩阵函数, 记为  $f(A)$ , 即

$$f(A) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k A^k.$$

把  $f(A)$  的方阵  $A$  换为  $At$ ,  $t$  为参数, 则有

$$f(At) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k (At)^k.$$

若  $A \in \mathbf{C}^{n \times n}$ , 则常用的矩阵函数:

$$(1) e^A = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} A^k,$$

$$(2) \sin A = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} A^{2k+1},$$

$$(3) \cos A = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k)!} A^{2k},$$

$$(4) (E - A)^{-1} = \sum_{k=0}^{\infty} A^k, \quad r(A) < 1,$$

$$(5) \ln(E + A) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(k+1)} A^{k+1}, \quad r(A) < 1.$$

常用矩阵函数的性质:

$$(1) e^{iA} = \cos A + i \sin A,$$

$$(2) \cos A = \frac{1}{2}(e^{iA} + e^{-iA}),$$

$$(3) \sin A = \frac{1}{2i}(e^{iA} - e^{-iA}),$$

$$(4) \cos(-A) = \cos A, \quad \sin(-A) = -\sin A.$$

矩阵函数的计算方法:

(1) 利用相似对角化 (只对单纯矩阵有用)

(2) Jordan 标准型法 (计算困难)

(3) 数项级数求和法 (不具有通用性)

### 1. 利用相似对角化

设  $A = P \operatorname{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n) P^{-1} = P D P^{-1}$ , 则

$$\begin{aligned} f(A) &= \sum_{k=0}^{\infty} a_k A^k \\ &= P \left( \sum_{k=0}^{\infty} a_k D^k \right) P^{-1} \\ &= P \operatorname{diag} \left( \sum_{k=0}^{\infty} a_k \lambda_1^k, \dots, \sum_{k=0}^{\infty} a_k \lambda_n^k \right) P^{-1} \\ &= P \operatorname{diag} (f(\lambda_1), \dots, f(\lambda_n)) P^{-1}. \end{aligned}$$

例 1 设

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 6 & 0 \\ -3 & -5 & 0 \\ -3 & -6 & 1 \end{bmatrix},$$

求  $e^{At}$ .

解: 计算步骤为

- 计算特征值:  $\lambda_1 = -2, \lambda_2 = \lambda_3 = 1$ .
- 计算特征向量:  $x_1 = [-1 \ 1 \ 1]^T, \quad x_2 = [-2 \ 1 \ 0]^T, \quad x_3 = [0 \ 0 \ 1]^T$ .
- 构造矩阵:

$$P = \begin{bmatrix} -1 & -2 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

- 写出计算值:

$$\begin{aligned} e^{At} &= P \begin{bmatrix} e^{-2t} & 0 & 0 \\ 0 & e^t & 0 \\ 0 & 0 & e^t \end{bmatrix} P^{-1} \\ &= \begin{bmatrix} 2e^t - e^{-2t} & 2e^t - 2e^{-2t} & 0 \\ e^{2t} - e^{-t} & 2e^{-2t} - e^t & 0 \\ e^{-2t} - e^t & 2e^{-2t} - 2e^t & e^t \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

## 2. Jordan 标准型方法

设  $P^{-1}AP = J = \text{diag}(J_1, \dots, J_s)$ , 则  $A = PJP^{-1} = P\text{diag}(J_1, \dots, J_s)P^{-1}$ , 进而

$$f(A) = P \left( \sum_{k=0}^{\infty} a_k J^k \right) P^{-1} = P \text{diag}(f(J_1), \dots, f(J_s)) P^{-1},$$

其中

$$\begin{aligned} f(J_i) &= \sum_{k=0}^{\infty} a_k J_i^k \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} a_k \begin{bmatrix} \lambda_i^k & C_k^1 \lambda_i^{k-1} & \dots & C_k^{r_i-1} \lambda_i^{k-(r_i-1)} \\ & \lambda_i^k & & \vdots \\ & & \ddots & C_k^1 \lambda_i^{k-1} \\ & & & \lambda_i^k \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} f(\lambda_i) & \frac{1}{1!} f'(\lambda_i) & \dots & \frac{1}{(r_i-1)!} f^{(r_i-1)}(\lambda_i) \\ & f(\lambda_i) & \dots & \frac{1}{(r_i-2)!} f^{(r_i-2)}(\lambda_i) \\ & & \ddots & \vdots \\ & & & f(\lambda_i) \end{bmatrix}, \end{aligned}$$

其中  $r_i$  是特征值  $\lambda_i$  的代数重数.

例 2 设

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

求  $\sin A$ .

解: (1) 化为 Jordan 标准型:  $J_1 = 1, \quad J_2 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$

(2) 计算  $\sin J_i$ :

$$\sin J_1 = \sin 1, \quad \sin J_2 = \begin{bmatrix} \sin 1 & \frac{1}{1!} \cos 1 \\ 0 & \sin 1 \end{bmatrix},$$

则

$$\sin A = \begin{bmatrix} \sin 1 & 0 & 0 \\ 0 & \sin 1 & \cos 1 \\ 0 & 0 & \sin 1 \end{bmatrix}.$$

例 3 求  $\sin A$ , 其中

$$A = \begin{bmatrix} \pi & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\pi & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

解: (1) 化为 Jordan 标准型:  $J_1 = \pi, \quad J_2 = -\pi, \quad J_3 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$

(2) 计算  $\sin J_i$ :

$$\sin J_1 = 0, \quad \sin J_2 = 0, \quad \sin J_3 = \begin{bmatrix} \sin 0 & \frac{1}{1!} \cos 0 \\ 0 & \sin 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix},$$

则

$$\sin A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

### 3. 数项级数求和法

定理 1 哈密顿-凯莱定理: 设  $A$  是数域  $P$  上的一个  $n \times n$  矩阵,  $f(\lambda) = |\lambda E - A| = \lambda^n - b_{n-1}\lambda^{n-1} - \dots - b_1\lambda - b_0$  是  $A$  的特征多项式, 则

$$f(A) = A^n - b_{n-1}A^{n-1} - \dots - b_1A - b_0E = O.$$

于是有

$$A^n = b_{n-1}A^{n-1} + \dots + b_1A + b_0E,$$

进而

$$\begin{cases} A^{n+1} = b_{n-1}^{(1)}A^{n-1} + \dots + b_1^{(1)}A + b_0^{(1)}E \\ \dots\dots\dots \\ A^{n+l} = b_{n-1}^{(l)}A^{n-1} + \dots + b_1^{(l)}A + b_0^{(l)}E \\ \dots\dots\dots \end{cases}$$

所以

$$\begin{aligned}
 f(A) &= \sum_{k=0}^{\infty} c_k A^k \\
 &= (c_0 E + c_1 A + \cdots + c_{n-1} A^{n-1}) \\
 &\quad + c_n (b_{n-1} A^{n-1} + \cdots + b_1 A + b_0 E) + \cdots \\
 &= (c_0 + \sum_{l=0}^{\infty} c_{n+l} b_0^{(l)}) E + (c_1 + \sum_{l=0}^{\infty} c_{n+l} b_1^{(l)}) A \\
 &\quad + (c_{n-1} + \sum_{l=0}^{\infty} c_{n+l} b_{n-1}^{(l)}) A^{n-1}.
 \end{aligned}$$

例 4 求  $\sin A$ , 其中

$$A = \begin{bmatrix} \pi & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\pi & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

解: 特征多项式为  $\det(\lambda E - A) = \lambda^4 - \pi^2 \lambda^2$ , 所以有  $A^4 = \pi^2 A^2$ ,  $A^5 = \pi^2 A^3$ ,  $A^7 = \pi^4 A^3$ ,  $\dots$ , 于是有

$$\begin{aligned}
 \sin A &= A - \frac{1}{3!} A^3 + \frac{1}{5!} A^5 - \frac{1}{7!} A^7 + \frac{1}{9!} A^9 - \cdots \\
 &= A - \frac{1}{3!} A^3 + \frac{1}{5!} \pi^2 A^3 - \frac{1}{7!} \pi^4 A^3 + \frac{1}{9!} \pi^6 A^3 - \cdots \\
 &= A - \left( \frac{1}{3!} - \frac{1}{5!} \pi^2 + \frac{1}{7!} \pi^4 - \frac{1}{9!} \pi^6 + \cdots \right) A^3 \\
 &= A + \frac{\sin \pi - \pi}{\pi^3} A^3 \\
 &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.
 \end{aligned}$$

矩阵函数的一些性质:

- (1) 如果  $AB = BA$ , 则  $e^A e^B = e^B e^A = e^{A+B}$ .
- (2)  $e^A e^{-A} = E$ .
- (3)  $(e^A)^m = e^{mA}$ .

(4) 如果  $AB = BA$ , 则

$$\begin{aligned}\cos(A + B) &= \cos A \cos B - \sin A \sin B, \\ \sin(A + B) &= \sin A \cos B + \cos A \sin B.\end{aligned}$$