矩阵理论第二章参考答案

杨　传　胜

1. 设 $a_1, a_2, \cdots, a_n$ 均为正数， $x \in C^n$, 且 $x = (x_1, x_2, \cdots, x_n)^T$. 证明函数

$$f(x) = [\sum_{i=1}^{n} a_i |x_i|^2]^{1/2}$$

是 C^n 上定义了一个向量函数.

证明:

(1) (正定性) 对任意的 $x \neq 0$, 函数 $f(x) > 0$, 且 $x = 0$ 当且仅当 $f(x) = 0$.

(2) (齐次性) $f(\lambda x) = [\sum_{i=1}^{n} a_i |\lambda x_i|^2]^{1/2} = |\lambda| [\sum_{i=1}^{n} a_i |x_i|^2]^{1/2} = |\lambda| \cdot f(x)$.

(3) (三角不等式)

$$\begin{aligned} f(x+y)^2 &= [\sum_{i=1}^{n} a_i |x_i + y_i|^2] \\ &= [\sum_{i=1}^{n} a_i (|x_i|^2 + |y_i|^2 + \bar{x_i} y_i + x_i \bar{y_i})] \\ &\leq f(x)^2 + f(y)^2 + [\sum_{i=1}^{n} a_i (|x_i||y_i| + |x_i||y_i|)] \\ &\leq f(x)^2 + f(y)^2 + [\sum_{i=1}^{n} (2|\sqrt{a_i} x_i||\sqrt{a_i} y_i|)] \\ &\leq f(x)^2 + f(y)^2 + 2[\sum_{i=1}^{n} a_i |x_i|^2]^{1/2} \cdot [\sum_{i=1}^{n} a_i |y_i|^2]^{1/2} \\ &= f(x)^2 + f(y)^2 + 2f(x)f(y). \end{aligned} \tag{1}$$

所以函数 $f(x)$ 是一个向量范数.

2. 证明：在 R^1 中任何向量范数 $||x||$, 一定有

$$||x|| = \lambda |x|, \qquad \lambda > 0.$$

证明：对于任意向量范数 $||x||$, 根据向量范数的定义和性质有

$$||x|| = ||1 * x|| = |x| \cdot ||1|| = \lambda |x|, \qquad \lambda = ||1|| > 0,$$

结论成立.

3. 设 $||x||$ 是 P^n 中的向量范数，则 $||Ax||$ 也是 P^n 中的向量范数的充要条件为 A 是可逆矩阵.

证明 "$\Rightarrow$" 如果矩阵 A 不是可逆矩阵，则存在向量 $x \neq 0$, 使得 $Ax = 0$, 即 $||Ax|| = 0$, 这与向量范数的正定性矛盾，所以矩阵 A 是可逆矩阵.

"$\Leftarrow$" 设矩阵 A 是可逆矩阵, 对于任意的向量 $x \neq 0$, 则向量 $Ax \neq 0$, 所以 $||Ax|| > 0$, 正定性条件满足；$||\lambda Ax|| = |\lambda| \cdot ||Ax||$, 齐次性满足；$||A(x+y)|| = ||Ax + Ay|| \leq ||Ax|| + ||Ay||$, 三角不等式也成立，即 $||Ax||$ 是 P^n 中的向量范数.

4. 证明

(1) $||A||_{m_2} = [tr(A^H A)]^{1/2}$;

(2) $||A||_{m_2}$ 与 $||x||_2$ 是相容的；

(3) $||A||_a$ 与 $||x||_1$, $||x||_2$ 是相容的；

(4) $||AB||_{m_2} \leq min\{||A||_2 ||B||_{m_2}, ||A||_{m_2} ||B||_2\}$.

证明 设 $A \in P^{n \times n}$, 令 $A = (\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n)$.

(1) 根据定义有

$$||A||_{m_2}^2=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}|a_{ij}|^2,$$

$$||\alpha_j||_2^2=\sum_{i=1}^{n}|a_{ij}|^2,\ j=1,2,\cdots,n,$$

所以

$$\sum_{j=1}^{n}||\alpha_j||_2^2=\sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{n}|a_{ij}|^2=||A||_{m_2}^2,$$

同时有

$$A^HA=\begin{pmatrix}\alpha_1^H\\ \vdots\\ \alpha_j^H\\ \vdots\\ \alpha_n^H\end{pmatrix}(\alpha_1,\cdots,\alpha_j,\cdots,\alpha_n)=\begin{pmatrix}\alpha_1^H\alpha_1 & \cdots & \alpha_1^H\alpha_j & \cdots & \alpha_1^H\alpha_n\\ \vdots & & \vdots & & \vdots\\ \alpha_j^H\alpha_1 & \cdots & \alpha_j^H\alpha_j & \cdots & \alpha_j^H\alpha_n\\ \vdots & & \vdots & & \vdots\\ \alpha_n^H\alpha_1 & \cdots & \alpha_n^H\alpha_j & \cdots & \alpha_n^H\alpha_n\end{pmatrix}.$$

所以

$$tr(A^HA)=\sum_{j=1}^{n}\alpha_j^H\alpha_j=\sum_{j=1}^{n}(\sum_{i=1}^{n}|a_{ij}|^2)=||A||_{m_2}^2.$$

所以结论 (1) 成立.

(2) 见课本 61 页下.

(4) 令 $B=(\beta_1,\cdots,\beta_j,\cdots,\beta_n)$.

因为 $||A\beta_j||_2\le||A||_2||\beta_j||_2$, $j=1,2,\cdots,n$. 同时有

$$||AB||_{m_2}=||(A\beta_1,\cdots,A\beta_j,\cdots,A\beta_n)||_{m_2}$$
$$=||A\beta_1||_2^2+\cdots+||A\beta_j||_2^2+\cdots+||A\beta_n||_2^2$$
$$\le||A||_2^2(||\beta_1||_2^2+\cdots+||\beta_n||_2^2)=||A||_2^2||B||_{m_2}^2.$$

由上述结果有

$$||AB||_{m_2}=||(AB^H)||_{m_2}=||B^HA^H||_{m_2}\le||B^H||_2||A^H||_{m_2}=||B||_2||A||_{m_2}.$$

所以结论 (4) 成立.

5. 若 $A\in P^{m\times r}$, 且 $A^HA=E$, 则 $||A||_2=1$, $||A||_{m_2}=\sqrt{r}$.

证明: 根据定义, $||A||_2=\sqrt{r(A^HA)}=\sqrt{r(E)}=1$; $||A||_{m_2}=\sqrt{tr(A^HA)}=\sqrt{r}$.

6. 设 x,Ax 的向量范数为 $||\cdot||_2$. 证明: 它对应的算子范数为

$$||A||_2=max_{||x||_2=1}\{\sigma_1,\sigma_2,\cdots,\sigma_n\}.$$

证明 对任意矩阵 A, 存在酉矩阵 U,V, 得到矩阵 A 的奇异值分解

$$A=UDV,$$

其中, $\sigma_1,\sigma_2,\cdots,\sigma_n$ 是矩阵 A 的奇异值, $D=diag(\sigma_1,\sigma_2,\cdots,\sigma_n)$. 根据定义, 我们有

$$||A||_2=\sqrt{r(A^HA)}=\sqrt{r[(UDV)^HUDV]}=\sqrt{r[V^HDU^HUDV]}=\sqrt{r[V^HD^2V]}=\sqrt{r(D^2)},$$

所以结论成立.

7. 若 $||\cdot||$ 是算子范数，则

(1) $||E||=1$;

(2) $||A^{-1}||\geq||A||^{-1}$;

(3) $||A^{-1}||^{-1}=min_{x\neq0}\frac{||Ax||}{||x||}$.

证明：根据定义 $||A||=max_{x\neq0}\frac{||Ax||}{||x||}$, 我们有

(1) $||E||=max_{x\neq0}\frac{||Ex||}{||x||}=1$;

(2) 由于 $AA^{-1}=E$, 两边同时取范数得：

$||AA^{-1}||=||E||=1\leq||A||\cdot||A^{-1}||$, 即 $||A^{-1}||\geq||A||^{-1}$;

(3) 根据定义, $||A^{-1}||=max_{x\neq0}\frac{||A^{-1}x||}{||x||}$, 令 $y=A^{-1}x$, 则 $x=Ay$, 得 $||A^{-1}||=max_{x\neq0}\frac{||y||}{||Ay||}=max_{y\neq0}\frac{||y||}{||Ay||}$, 从而有 $||A^{-1}||^{-1}=\frac{1}{max_{x\neq0}\frac{||y||}{||Ay||}}=min_{y\neq0}\frac{||Ay||}{||y||}=min_{x\neq0}\frac{||Ax||}{||x||}$.

这就完成了本定理的证明.

8. 设 $||A||_\nu,||A||_\mu$ 是对应于两个向量范数 $||x||_\nu,||x||_\mu=||Bx||_\nu$ 的算子范数， B 可逆，则

$$||A||_\mu=||BAB^{-1}||_\nu.$$

证明：根据定义，我们有 $||A||_\mu=max_{x\neq0}\frac{||Ax||_\mu}{||x||_\mu}$. 把 $||x||_\mu=||Bx||_\nu$ 代入上式得, $||A||_\mu=max_{x\neq0}\frac{||BAx||_\nu}{||Bx||_\nu}$, 令 $y=Bx$, 则 $x=B^{-1}y$, 则

$$||A||_\mu=max_{x\neq0}\frac{||BAB^{-1}y||_\nu}{||y||_\nu}=max_{y\neq0}\frac{||BAB^{-1}y||_\nu}{||y||_\nu}=||BAB^{-1}||_\nu.$$

9. 设 $||x||_a,||x||_b$ 是 C^n 上的两个向量范数， a_1,a_2 是两个正数，证明

(1) $\max\{||x||_a,||x||_b\}=||x||_c$;

(2) $a_1||x||_a+a_2||x||_b=||x||_d$

都是 C^n 上的两个范数.

证明：我们要证明 (1),(2) 满足范数成立的三个条件.

(1) (正定性) 当 $x\neq0$ 时， $||x||_a>0,||x||_b>0$, 则 $||x||_c>0$, 且 $x=0$ 当且仅当 $||x||_a=0$ 且 $||x||_b=0$, 从而 $||x||_c=0$; 齐次性容易证明; (三角不等式) $||x+y||_c=max\{||x+y||_a,||x+y||_b\}\leq max\{||x||_a+||y||_a,||x||_b+||y||_b\}\leq max\{||x||_a,||x||_b\}+max\{||y||_a,||y||_b\}=||x||_c+||y||_c$. 这就完成了对命题 (1) 的证明.

(2) (正定性) 当 $x\neq0$ 时， $||x||_a>0,||x||_b>0$, 则 $||x||_d>0$, 且 $x=0$ 当且仅当 $||x||_a=0$ 且 $||x||_b=0$, 即 $||x||_d=0$; 齐次性容易证明； (三角不等式) $||x+y||_d=a_1||x+y||_a+a_2||x+y||_b\leq a_1(||x||_a+||y||_a)+a_2(||x||_b+||y||_b)$, 即 $||x+y||_d\leq(a_1||x||_a+a_2||x||_b)+(a_1||y||_a+a_2||y||_b)=||x||_d+||y||_d$. 这就完成了对命题 (2) 的证明.

10. 证明

$$\frac{1}{\sqrt{n}}||A||_F\leq||A||_2\leq||A||_F.$$

证明：因为 $||A||_2^2=r(A^HA)\leq\lambda_1+\lambda_2+\cdots+\lambda_n=tr(A^HA)=(||A||_F)^2$, 即 $||A||_2\leq||A||_F$, 其中 $\lambda_i\geq0$ 是半正定矩阵 A^HA 的特征值. 又由于 $(||A||_F)^2=tr(A^HA)=\lambda_1+\lambda_2+\cdots+\lambda_n\leq n\cdot r(A^HA)=n||A||_2$, 即 $||A||_2\geq\frac{1}{\sqrt{n}}||A||_F$. 这就完成了本题的证明.

11. 设 $||A||_a$ 是 $C^{n\times n}$ 上的相容的矩阵范数， B,C 是 n 阶可逆矩阵，且 $||B^{-1}||_a$ 及 $||C^{-1}||_a$ 都小于或等于 1, 证明对任何 $A\in C^{n\times n}$

$$||A||_b=||BAC||_a$$

定义了 $C^{n\times n}$ 上的一个相容矩阵范数.

证明：首先我们证明 $||B||_b = ||BAC||_a$ 是一个矩阵范数.

(正定性) 对任意的矩阵 $A \neq 0$, 则 $BAC \neq 0$, 即 $||BAC||_a > 0$, 且 $||BAC||_a = 0$ 当且仅当 $BAC = 0$, 即 $A = 0$.

(齐次性) $||\lambda A||_b = ||B(\lambda A)C||_a = |\lambda| \cdot ||BAC||$.

(三角不等式)

$||A_1 + A_2||_b = ||B(A_1 + A_2)C||_a = ||BA_1C + BA_2C||_a$
$\leq ||BA_1C||_a + ||BA_2C||_a$
$= ||A_1||_b + ||A_2||_b$.

下面我们再证明相容性.

$||A_1A_2||_b = ||BA_1A_2C||_a$
$= ||(BA_1C)C^{-1}B^{-1}(BA_2C)||_a$
$\leq ||(BA_1C)||_a||C^{-1}B^{-1}||_a||(BA_2C)||_a$
$\leq ||(BA_1C)||_a||C^{-1}||_a||B^{-1}||_a||(BA_2C)||_a$
$\leq ||(BA_1C)||_a||(BA_2C)||_a$
$||A_1||_b||A_2||_b$.

所以 $||A||_b = ||BAC||_a$ 定义了 $C^{n\times n}$ 上的一个相容矩阵范数.

12. 设 $||A||_a$ 是 $C^{n\times n}$ 上的一个矩阵范数， D 是 n 阶可逆矩阵, 证明对任何 $A \in C^{n\times n}$

$$||A||_b = ||BAC||_a$$

定义了 $C^{n\times n}$ 上的一个矩阵范数.

本题的证明与题 12 一样，证明 $||A||_b = ||BAC||_a$ 满足确定矩阵范数的三个条件.