一、1. X ✓ $\|x\|_2=\sqrt{x^Hx}$ $\|x-y\|_2 \geq \big|\|x\|_2-\|y\|_2\big|$

$=2[(x,x)+(y,y)]$

$\|x+y\|_2 \leq \|x\|_2+\|y\|_2$

$(x-y)(x-y)+(x+y)(x+y)=x^2-xy-xy+y^2+x^2+y^2+xy+xy$ $=2(x^2+y^2)$

2. ✓ $=2x^2+2y^2.$

3. ✓ X ① $\|x\|=\|x\|_a+k\|x\|_b$. 当$x\neq0$时. $\|x\|_a>0$, $k\|x\|_b\geq0$. $\Rightarrow\|x\|>0$.

当$x=0$时. $\|x\|=0$.

若$k=0$

② $\|\lambda x\|=\|\lambda x\|_a+\underbrace{k\|\lambda x\|_b}_{=0}=|\lambda|\{\|x\|_a+k\|x\|_b\}=|\lambda|\,\|x\|$

③. $\|x+y\|=\|x+y\|_a+\underbrace{k\|x+y\|_b}_{=0.}\leq\|x\|_a+\|y\|_a+k\|x\|_b+k\|y\|_b=\|x\|+\|y\|$

4. ✓ $\|A^HA\|_2=\sqrt{r(A^HAA^HA)}=\sqrt{r(A^HA)^2}=r(A^HA)$

$\|A\|_2^2=r(A^HA)$

$\|AA^H\|_2=\sqrt{r(AA^HAA^H)}=\sqrt{r(AA^H)^2}=r(AA^H)=r(A^HA)$

5. X A为H阵

6. X. A列满秩

7. ✓.

8. X $r(A)=\min\{\|A\|_1,\|A\|_\infty\}$. 无法确定.

9. ✓

10. X

二. 解: (1). $|AB|=|A||B|=-1$

$|A^TB|=|A^T||B|=|A||B|=|A||B^T|=|AB^T|=-1$

(2). $|A+B|=|A||A^T+B^T||B|=|A||B||A+B|=-|A+B|$

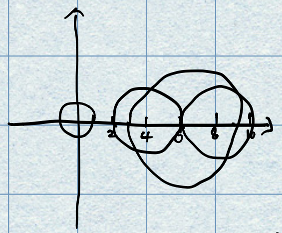
$AA^T=E$ $BB^T=E$ $\Rightarrow|A+B|=0$

三、解: $|z_1-0|\leq1.$

$|z_2-4|\leq2$

$|z_3-6|\leq3$

$|z_4-8|\leq2$



z_1内含有1个实λ.

又z_2,z_3,z_4相连通, 则内部含有3个λ.

又虚λ成对出现, 则连通区域至少有1个实λ.

$\Rightarrow$A至少有2个实λ.

四. 解: (1) $\begin{pmatrix}1&-1&0&-1&1\\ \dots\end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix}1&0\\ \dots\end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix}1&-1&0&-1&1\\ \dots\end{pmatrix}$

$A \to \begin{pmatrix} \cdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ 则 $B = \begin{pmatrix} \cdots \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$ $D = \begin{pmatrix} \cdots \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$

(2) $A^+ = D^+ B^+$

$B^+ = (B^H B)^{-1} B^H = \frac{1}{9} \begin{pmatrix} 5 & -2 & -4 \\ -1 & 4 & -1 \end{pmatrix}$

$D^+ = D^H (D D^H)^{-1} = \frac{1}{8} \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -3 & 2 \\ -2 & 4 \\ -1 & -2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ $\Rightarrow A^+ = \frac{1}{72} \begin{pmatrix} 17 & -14 & -10 \\ -17 & 14 & 10 \\ -14 & 20 & 4 \\ -3 & -6 & 6 \\ 3 & 6 & -6 \end{pmatrix}$

(3). $AA^+b = b$. 有解

(4). 最小范数解 $x = A^+b = (1, -1, -1, 0, 0)^T$

五.解： 必要性： $\|\alpha+\beta\|_2 = \|\alpha\|_2 + \|\beta_2\|$ $\Rightarrow \sqrt{(\alpha+\beta)^T(\alpha+\beta)} = \sqrt{\alpha^T\alpha} + \sqrt{\beta^T\beta}$.

$\Rightarrow \alpha^T\alpha + \alpha^T\beta + \beta^T\alpha + \beta^T\beta = \alpha^T\alpha + 2\sqrt{\alpha^T\alpha\beta^T\beta} + \beta^T\beta$

$\Rightarrow \alpha^T\beta + \beta^T\alpha = 2\sqrt{\alpha^T\alpha\beta^T\beta}$. 若令 $\alpha = k\beta$

$\Rightarrow$. $k\beta^T\beta + k\beta^T\beta = 2\sqrt{k^2\beta^T\beta\beta^T\beta} = 2\sqrt{k^2(\beta^T\beta)^2}$

$\Rightarrow 2k\beta^T\beta = 2k\beta^T\beta$ 成立

充分性： 若 $\alpha = k\beta$. $\Rightarrow$ $\|k\beta+\beta\|_2 = |k+1|\,\|\beta\|_2$

$\|\alpha\|_2 = \|k\beta\|_2 = |k|\,\|\beta\|_2$ $\Rightarrow \|\alpha\|_2 + \|\beta_2\| = |k|\,\|\beta\|_2 + \|\beta\|_2 = |k+1| \cdot \|\beta\|_2$

$\Rightarrow$. $\|\alpha+\beta\|_2 = \|\alpha\|_2 + \|\beta\|_2$.

六.证： 必要性： $A^+AM = A^+AN \Rightarrow AA^+AM = AA^+AN$ $AGA = A$

$\Rightarrow AM = AN$

充分性： $AM = AN$. $\Rightarrow AA^+AM = AA^+AN$ $A = AGA$

$\Rightarrow A^+AM = A^+AN$

七.证： (1). A 为收敛阵 $\Leftrightarrow r(A) < 1$. 又 $r(A) = \min\{\|A\|_1, \|A\|_\infty\}$.

又.各行之和等于各列之和为 $2|c|$. 则 $\|A\|_1 = \|A\|_\infty = 2|c|$

$\Rightarrow 2|c| < 1$. $|c| < \frac{1}{2}$

(2) 假设 $A+B$ 不可逆，则 $(A+B)x = 0$ 有非零解.

令 $x_0 \neq 0$. $\Rightarrow$ $(A+B)x_0 = 0$. $\Rightarrow Ax_0 = \pm Bx_0$ $\Rightarrow$. $x_0 = \pm A^{-1}Bx_0$

$\Rightarrow \|x_0\| = \|A^{-1}Bx_0\|$. $\Rightarrow |x_0| \leq |x_0|\,\|A^{-1}\|\,\|B\|$

$\Rightarrow 1 \leq \|A^{-1}\| \, \|B\|$ $\Rightarrow \|B\| \geq \frac{1}{\|A^{-1}\|}$ 与条件矛盾.

则 $A+B$ 可逆.