矩阵论

1．行列式的相关知识：

1.1 定义： 由 n^2 个数 a_{ij} $(i,j=1,2,...,n)$ 组成的一个 n 阶行列式为

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=\sum_{j_1j_2\cdots j_n}(-1)^{\tau(j_1j_2\cdots j_n)}a_{1_{j_1}}a_{2_{j_2}}...a_{n_{j_n}}$$

即所有取自不同行不同列的 n 个元素的乘积 $a_{1_{j_1}}a_{2_{j_2}}...a_{n_{j_n}}$ 的代数和，其中每一项的符合由排列 $j_1j_2\cdots j_n$ 的奇偶性决定。

n 阶行列式的展开原理：

定义 1.1.2 在 n 阶行列式 D 中，任选 k 行和 k 列（$k\le n$），将其交叉点上的 k^2 个元素按原来位置排成一个 k 阶行列式 M，称为 D 的一个 k 阶子式。在 D 中划去 M 所在之 k 行 k 列后余下的 $(n-k)^2$ 个元素按照原来位置排成的 n-k 阶行列式 M'，称为 M 的余子式。

定义 1.1.3 设 D 的 k 阶子式 M 在 D 中所在行列指标分别是 $i_1,i_2,...,i_k$ 和 $j_1,j_2,...,j_k$，则称

$$A=(-1)^{(i_1+i_2+\cdots+i_k)+(j_1+j_2+\cdots j_k)}\bullet M'$$

为 M 的代数余子式，其中 M' 为 M 的余子式。

定理 1.1.1（拉普拉斯定理）设在行列式 D 中任意取定 k 行 $(1\le k\le n-1)$，则由这 k 行元素所组成的一切 k 阶子式与其对应的代数余子式的乘积之和等于和列式 D。

定理 1.1.4（克莱姆法则）：若线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases} \tag{1.1.7}$$

的系数行列式

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \neq 0$$

则方程组（1.1.7）有唯一解，且 $x_i = D_i / D(i = 1, 2 \cdots, n)$，其中 D_i 是将 D 中第 i 列换成（1.1.7）式右端的常数项 $b_1, b_2, \cdots, b_n$ 所得的行列式，即

$$D_i = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1,i-1} & b_1 & a_{1,i+1} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & a_{2,i-1} & b_2 & a_{2,i+2} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{n,i-1} & b_n & a_{n,i+n} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \qquad (i = 1, 2, \cdots, n)$$

该定理通常称为克莱姆法则。特别地，当 $b_i = 0(i = 1, 2, \cdots, n)$ 时，方程组（1.1.7）又称为齐次线性方程组。若其系数行列式不为零，则由克莱姆法则知它必有唯一零解

行列式的降阶定理

定理 1.6.1 设 A 和 D 分别为 n 阶及 m 阶的方阵，则有

$$\begin{vmatrix} A & B \\ C & D \end{vmatrix} = \begin{cases} |A||D - CA^{-1}B|, \text{当}A\text{可逆时}; \\ |D||A - BD^{-1}C|, \text{当}D\text{可逆时}. \end{cases}$$

定理 1.6.2 设 A，B，C，D 皆为 n 阶方阵，且满足 AC=CA，则

$$\begin{vmatrix} A & B \\ C & D \end{vmatrix} = |AD - CB|$$

定义 1.2.4 向量组的极大线性无关组所含向量的个数称为这个向量组的秩。

引理 1.3.1 若齐次线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = 0 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{s1}x_1 + a_{s2}x_2 + \cdots + a_{sn}x_n = 0 \end{cases}$$

的系数矩阵

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{s1} & a_{s2} & \cdots & a_{sn} \end{pmatrix}$$

的秩 r<n,则方程组必有非有非零解。

定理 1.3.2 n 阶方阵 A 的行列式$|A|=0$的充要条件 rank(A)<n

定理 1.1.3 矩阵 A 的秩为 r 的充要条件是 A 中至少有一个 r 阶子式不为零，且其所有的 r+1 阶子式全为零。

定理 1.3.4 设 A，B 是数域 P 上的两个 n 阶方阵，则$|AB|=|A||B|$即矩阵乘积的行列式等于它的因子行列式的乘积。

定义 1.3.4 数域 P 上的 n 阶方阵 A 称为非奇异的（可逆矩阵，满秩矩阵），若$|A|\neq 0$；否则称为奇异的（不可逆矩阵，不满秩矩阵）。

定理 1.3.5 设 A 是数域 P 上的$n\times m$矩阵，B 是数域 P 上的$m\times s$矩阵，则

$$rank(AB) \leq \min\{rank(A), rank(B)\}$$

即乘积的秩不超过各因子的秩。

定理 1.3.6 设 A 是一个 $s\times n$ 矩阵，如果 P 是 s 阶可逆方阵，Q 是 n 阶可逆方阵，那么

$$rank(A)=rank(PA)=rank(AQ)=rank(PAQ)$$

定义 1.3.5 设 $A=(a_{ij})_{n\times n}$ 是一个 n 阶方阵，A 的主对角元素 的和称为 A 的迹，并记之为 $tr(A)$,即

$$tr(A)=a_{11}+a_{22}+\cdots+a_{nn}$$

解的判别定理

定理 1.4.1 线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n=b_1 \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n=b_2 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{s1}x_1+a_{s2}x_2+\cdots+a_{sn}x_n=b_s \end{cases}$$

有解的充要条件为 $rank(A)=rank(B)$。其中

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{s1} & a_{s2} & \cdots & a_{sn} \end{pmatrix}$$

$$B=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{s1} & a_{s2} & \cdots & a_{sn} & b_s \end{pmatrix}$$

系数矩阵 A 与增广矩阵 B 的秩之间只有两种可能，即

$$rank(A)=rank(B) \quad \text{或} \quad rank(A)+1=rank($$

定义 1.4.1 齐次线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = 0 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{s1}x_1 + a_{s2}x_2 + \cdots + a_{sn}x_n = 0 \end{cases} \tag{1.4.5}$$

的一组解$\eta_1,\eta_2,\cdots,\eta_r$称为方程组（1.4.5）的一个基础解系，若

1）$\eta_1,\eta_2,\cdots,\eta_r$线性无关；

2）方程组（1.4.5）的任何一个解都能用$\eta_1,\eta_2,\cdots,\eta_r$线性表示。

定理 1.4.2 若齐次线性方程组有非零解，则它的基础解系必存在，且基础解系所含解的个数为$n-r$，其中 r 为系数矩阵的秩。

矩阵的初等变换与初等矩阵

定义 1.5.1 数域 P 上的矩阵的下列三种变换称为初等行变换：

1）以 P 中非零的数乘矩阵的某一行；

2）把矩阵中某一行的倍数加到另一行；

3）互换矩阵中两行的位置。

同理定义初等列变换，统称为初等变换。

定义 1.5.2 单位矩阵 E 经过一次初等变换后所得到的矩阵称为初等矩阵。

定理 1.5.1 对一个$n\times m$矩阵 A 作一次初等行变换，相当于对 A 左乘一个相应的$n\times n$初等矩阵。对 A 作一次初等列变换，则相当于对 A 右乘一个相应的$m\times m$初等矩阵。

定义 1.5.3 矩阵 A 与 B 称为等价的，若 B 可由 A 经过一系列初等变换得到。

定理 1.5.2 初等变换不改变矩阵的秩。

推论 1.5.1 n 阶方阵可逆的充要件是它与单位矩阵等价。

定理 1.5.3 矩阵 A 与 B 等价的充要条件是有初等矩阵

$P_1,\cdots,P_s,Q_1,\cdots,Q_t$ 使 $A=P_sP_{s-1}\cdots P_1BQ_1Q_2\cdots Q_t$

推论 1.5.3 两个 $n\times m$ 矩阵 A 与 B 等价的充要条件为存在 $n\times n$ 可逆阵 P 与 $m\times m$ 可逆阵 Q，使得 $A=PBQ$

定义 1.5.4 数域 P 上 n 阶方阵 A 与 B 称为合同的，若数域 P 上存在可逆的 n 阶方阵 C，使 $B=C^TAC$

合同必等价，等价不一定合同。

分块矩阵的秩

定理 1.6.4 设 n 阶方阵 $A=diag\{A_1,A_2,\cdots,A_m\}$ 其中 A_k 为 n_k 阶方阵，且 $n_1+n_2+\cdots+n_m=n$。则 $rank(A)=\sum_{i=1}^{m}rank(A_i)$

定理 1.6.5 设 A 和 D 分别为 n 阶和 m 阶的方阵，则

$$rank\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}=\begin{cases} rank(A)+rank(D-CA^{-1}B), & A\text{可逆时} \\ rank(D)+rank(A-BD^{-1}C), & D\text{可逆时} \end{cases}$$

定理 1.6.8 设 A 与 B 分别为 $s\times n$ 和 $n\times m$ 矩阵，则

$$rank(A)+rank(B)-n\le rank(AB)$$

线性空间与线性变换

集合 映射 变换 线性空间 基 维数 坐标 （略）

定义 2.2.2 设 $\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n$ 与 $\varepsilon_1',\varepsilon_2',\cdots,\varepsilon_n'$ 是 n 维线性空间 V 的两个基，且

$$(\varepsilon_1',\varepsilon_2',\cdots,\varepsilon_n')=(\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n)\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}=(\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n)A$$

则矩阵 A 称为由基 $\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n$ 到 $\varepsilon_1',\varepsilon_2',\cdots,\varepsilon_n'$ 的过渡矩阵

还有坐标变换公式

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \\ \vdots \\ x_n' \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \\ \vdots \\ x_n' \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

定义 2.2.2 数域 P 上的两个线性空间 V 与 V' 称为同构的，如果由 V 到 V' 有一个双射 σ，且

1） $\sigma(\alpha+\beta)=\sigma(\alpha)+\sigma(\beta)$

2） $\sigma(k\alpha)=k\sigma(\alpha)$

其中 α,β 是 V 中任意向量，k 是 P 中任意数。此时 σ 就称为 V 与 V' 的一个同构映射。

定理 2.2.1 数域 P 上两个有限维线性空间同构的充要条件是它们有相同的维数。

子空间（略）

定理 2.3.2 两个向量组生成相同子空间的充要条件是它们等价。

定理 2.3.3 $\dim L(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r)=rank(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r)$（其中 $L(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r)$ 是由 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r$ 生成的空间）

定理 2.3.4 设 W 是数域 P 上的 n 维线性空间 V 的一个 m 维子空间，$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$ 是 W 的一个基，则这组基向量必定可扩充为线性空间 V 的基，即在 V 中必定可找到 $n-m$ 个向量 $\alpha_{m+1},\alpha_{m+2},\cdots,\alpha_n$，使得 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 是 V 的一个基。此定理通称为基的扩充定理。

定义 2.3.2 设 V_1，V_2 是线性空间 V 的两个子空间，称

$$V_1+V_2=\{\alpha\,|\,\alpha=\alpha_1+\alpha_2,\alpha_1\in V_1,\alpha_2\in V_2\}$$

为 V_1 与 V_2 的和。易见子空间的“和”与集合的“并”两个概念是不同的。

定理 2.3.5 设 V_1 与 V_2 是线性空间 V 的两个子空间，则它们的交与和也是 V 的两个子空间。

定理 2.3.6 设 V_1 与 V_2 是线性空间 V 的两个子空间，则

$$\dim(V_1)+\dim(V_2)=\dim(V_1+V_2)+\dim(V_1\cap V_2)$$

（维数的和等于和的维数加交的维数）

定义 2.3.3 设 V_1 与 V_2 是线性空间 V 的两个子空间，如果和 V_1+V_2 中每个向量 α 的分解式

$$\alpha=\alpha_1+\alpha_2,\alpha_1\in V_1,\alpha_2\in V_2$$

是唯一的，这个和就称为直和，记为 $V_1\oplus V_2$

定理 2.3.7 设 V_1 与 V_2 是线性空间 V 的两个子空间，则以下论断等价：

1） V_1+V_2 是直和；

2）零向量的分解式唯一；

3） $V_1\cap V_2=\{0\}$

4） $\dim(V_1)+\dim(V_2)=\dim(V_1+V_2)$

定理 2.3.8 设 U 是线性空间 V 的一个子空间，则一定存在一个子空间 $W \subset V$，使

$$V = U \oplus W$$

定义 2.4.1 线性空间 V 的一个变换 $\mathscr{A}$ 称为线性变换，如果对 V 中任意元素 α，β 和数域 P 中任何数 k，都有

$$\begin{cases} \mathscr{A}(\alpha+\beta) = \mathscr{A}(\alpha) + \mathscr{A}(\beta) \\ \mathscr{A}(k\alpha) = k\mathscr{A}(\alpha) \end{cases}$$

线性变换的性质（略）

定理 2.4.1 设 $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \cdots, \varepsilon_n$ 为线性空间 V 的一个基，$\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$ 是 V 中任意 n 个向量，则存在唯一的线性变换 $\mathscr{A}$，使得

$$\mathscr{A}(\varepsilon_i) = \alpha_i \, (i = 1, 2, \cdots, n)$$

定义 2.4.2 设 $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \cdots, \varepsilon_n$ 是数域 P 上 n 维线性空间 V 的一个基，$\mathscr{A}$ 是 V 中的线性变换，且基向量的像可以由这个基线性表示为

$$\begin{cases} \mathscr{A}(\varepsilon_1) = a_{11}\varepsilon_1 + a_{21}\varepsilon_2 + \cdots + a_{n1}\varepsilon_n \\ \mathscr{A}(\varepsilon_2) = a_{12}\varepsilon_1 + a_{22}\varepsilon_2 + \cdots + a_{n2}\varepsilon_n \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \mathscr{A}(\varepsilon_n) = a_{1n}\varepsilon_1 + a_{2n}\varepsilon_2 + \cdots + a_{nn}\varepsilon_n \end{cases}$$

用矩阵表示就是

$$\mathscr{A}(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \cdots, \varepsilon_n) = (\mathscr{A}(\varepsilon_1), \mathscr{A}(\varepsilon_2), \cdots, \mathscr{A}(\varepsilon_n)) = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \cdots, \varepsilon_n)A$$

其中，矩阵

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

称 A 为线性变换 $\mathscr{A}$ 在基 $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \cdots, \varepsilon_n$ 下的矩阵。

定理 2.4.3 设线性变换$\mathscr{A}$在基$\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n$下的矩阵为 A，向量ξ 在基$\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n$下的坐标为$(x_1,x_2,\cdots,x_n)^{\mathrm{T}}$，则$\mathscr{A}(\xi)$在基下$\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n$下的坐标$(y_1,y_2,\cdots,y_n)^{\mathrm{T}}$可以按公式

$$Y=\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}=A\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}=AX$$

定理 2.4.4 设$\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n$与$\eta_1,\eta_2,\cdots,\eta_n$为线性空间 V 的两个基，$\mathscr{A}$为 V 的线性变换，且

$$\begin{aligned}
&\mathscr{A}(\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n)=(\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n)A \\
&\mathscr{A}(\eta_1,\eta_2,\cdots,\eta_n)=(\eta_1,\eta_2,\cdots,\eta_n)B \\
&(\eta_1,\eta_2,\cdots,\eta_n)=(\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n)X
\end{aligned}$$

则

$$B=X^{-1}AX$$

定义 2.5.1 设$\mathscr{A}$是线性空间 V 的一个线性变换，它的全体像所组成的集合

$$\mathscr{A}V=\{\mathscr{A}(\xi)\,|\,\xi\in V\}$$

称为$\mathscr{A}$的值域，用$\mathscr{A}V$表示。所有被$\mathscr{A}$变成零向量的向量所组成的集合

$$\mathscr{A}^{-1}(0)=\{\xi\,|\,\mathscr{A}(\xi)=0,\xi\in V\}$$

称为$\mathscr{A}$的核

称$\mathscr{A}V$的维数为$\mathscr{A}$的秩，$\mathscr{A}^{-1}(0)$的维数则称为$\mathscr{A}$的零度。

定理 2.5.1 设$\mathscr{A}$是 n 维线性空间 V 的线性变换，$\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n$是 V 的一个基，$\mathscr{A}$在基$\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n$下的矩阵是 A，则

1）$\mathscr{A}V=L(\mathscr{A}(\varepsilon_1),\mathscr{A}(\varepsilon_2),\cdots,\mathscr{A}(\varepsilon_n))$；

2）$\mathscr{A}$ 的秩 = A 的秩；

3）$\mathscr{A}$ 的秩+$\mathscr{A}$ 的零度 = n

定义 2.5.2 设 $\mathscr{A}$ 是数域 P 上线性空间 V 的线性变换，W 是 V 的子空间，若

$$\mathscr{A}W=\{\mathscr{A}(\xi)|\xi\in W\}\subset W$$

换句话说，W 中的向量在 $\mathscr{A}$ 下的像仍在 W 中，则称 W 为 V 的关于 $\mathscr{A}$ 的不变子空间，简称为 $\mathscr{A}$—子空间。

定理 2.5.2 如果线性空间 V 的子空间 W 是由 V 中的向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$ 生成的，那么 W 是 $\mathscr{A}$—子空间的充要条件为像 $\mathscr{A}(\alpha_1),\mathscr{A}(\alpha_2),\cdots,\mathscr{A}(\alpha_s)$ 都属于 W。

维数公式设 V_1，V_2 是线性空间 V 的两个子空间，$V_1\cap V_2$ 和 V_1+V_2 分别为 V_1 与 V_2 的交与和，$\mathscr{A}$ 是 V 的任意一个线性变换，则有

第一维数公式

$$\dim V_1+\dim V_2=\dim(V_1+V_2)+\dim(V_1\cap V_2)$$

第二维数公式

$$\dim(\mathscr{A}V_i)+\dim(\mathscr{A}^{-1}(0)\cap V_i)=\dim V_i \qquad (i=1,$$

第三维数公式

$$\dim(\mathscr{A}V)+\dim(\mathscr{A}^{-1}(0))=\dim V$$

定义 3.1.1 设 $\mathscr{A}$ 是数域 P 上线性空间 V 的线性变换，若存在 P 中的数 λ 和 V 中的非零向量 ξ，使得

$$\mathscr{A}(\xi)=\lambda\xi$$

则称 λ 为 $\mathscr{A}$ 的特征值，ξ 为 $\mathscr{A}$ 的属于特征值 λ 的一个特征向量。

定义 3.1.2 设 A 是数域 P 上的一个 n 阶矩阵，λ 是数域 P 上的一个参数，E 是 n 阶单位矩阵，则矩阵 $\lambda E-A$ 的行列式

$$|\lambda E-A|=\begin{vmatrix} \lambda-a_{11} & -a_{12} & \cdots & -a_{1n} \\ -a_{21} & \lambda-a_{22} & \cdots & -a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -a_{n1} & -a_{n2} & \cdots & \lambda-a_{nn} \end{vmatrix}$$

称为 A 的特征多项式，它是数域 P 上的一个 n 次多项式，相应地称

$$|\lambda E-A|=0$$

为 A 的特征方程。

定义 3.1.3 设 A 是 n 阶方阵，若存在多项式

$$\varphi(\lambda)=a_0\lambda^s+a_1\lambda^{s-1}+\cdots+a_s$$

使 $\varphi(A)=0$，则称 $\varphi(A)$ 为 A 的一个零化多项式。

定理 3.1.1 设 A 是数域 P 上的一个 n 阶方阵，且

$$f(\lambda)=|\lambda E-A|$$

是 A 的特征多项式，则

$$f(A)=A^n-(a_{11}+a_{22}+\cdots+a_{nn})A^{n-1}+\cdots+(-1)^n|A|E=0$$

即 $f(\lambda)$ 是 A 的一个零化多项式。

定义 3.1.4 设 A 是数域 P 上的一个 n 阶方阵，$\varphi_A(\lambda)$ 是 A 的首项系数为 1 且次数最低的零化多项式，则称 $\varphi_A(\lambda)$ 为 A 的最小多项式。

定理 3.1.2 数域 P 上的 n 阶方阵 A 的最小多项式整除 A 的任一零化多项式。

推论 3.1.1 方阵 A 的最小多项式唯一。

推论 3.1.2 数域 P 上 n 阶方阵 A 的最小多项式的根是 A 的特征值；反之亦然。

定理 3.2.1 设$\mathscr{A}$是 n 维线性空间 V 的线性变换，$\mathscr{A}$的矩阵可以在 V 的某个基下成为对角矩阵的充要条件是$\mathscr{A}$有 n 个线性无关的特征向量。

定理 3.2.2 属于不同特征值的特征向量是线性无关的。

定理 3.2.3 如果$\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_s$是线性变换$\mathscr{A}$的不同的特征值，则不同特征值的特征向量也是线性无关的。

定义 3.2.1 设 A，B 为 n 阶方阵，若存在可逆矩阵 X，使得$B=X^{-1}AX$，则称 A 相似于 B，记做$A \sim B$

定理 3.2.4 两个对角矩阵相似的充要条件为对角线上的元素相同，只是排列顺序不同。

定理 3.2.5 线性变换在不同基下所对应的矩阵相似；反之，若两个矩阵相似，则它们分别可以看做是同一线性变换在两个不同基下的矩阵。

定义 3.2.2 设f是定义在矩阵空间$P^{n\times n}$上的函数，若对$P^{n\times n}$中的任意两个相似矩阵 A 与 B，总有$f(A)=f(B)$，则称f为相似不变量。

定理 3.2.6 矩阵的行列式是相似不变量。

定理 3.2.7 矩阵的迹是相似不变量。

定理 3.2.8 矩阵的秩是相似不变量。

定理 3.2.9 矩阵的特征多项式是相似不变量。

定义 4.1.1 若尔当标准形：$\begin{pmatrix} A_1 & & \\ & \ddots & \\ & & A_m \end{pmatrix}$，其中

$$A_i = \begin{pmatrix} \lambda_i & 1 & \cdots & 0 \\ & \lambda_i & \ddots & \vdots \\ & & \ddots & 1 \\ & & & \lambda_i \end{pmatrix}, i = 1, \cdots, m$$

叫做若尔当块。

定义 4.1.2 设 $a_{ij}(\lambda)(i = 1, 2, \cdots, m; j = 1, 2, \cdots, n)$ 为数域 P 上的多项式，以 $a_{ij}(\lambda)$ 为元素的 $m \times n$ 矩阵

$$A(\lambda) = \begin{pmatrix} a_{11}(\lambda) & a_{12}(\lambda) & \cdots & a_{1n}(\lambda) \\ a_{21}(\lambda) & a_{22}(\lambda) & \cdots & a_{2n}(\lambda) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1}(\lambda) & a_{m2}(\lambda) & \cdots & a_{mn}(\lambda) \end{pmatrix}$$

称为 λ 矩阵或多项式矩阵。这样矩阵的全体记为 $P[\lambda]^{m \times n}$。

定义 4.1.3 如果 $A(\lambda)$ 经过有限次初等变换后变成 $B(\lambda)$，则称 $A(\lambda)$ 与 $B(\lambda)$ 相抵，记为 $A(\lambda) \simeq B(\lambda)$

定理 4.1.1 设 $A(\lambda) \in P[\lambda]^{m \times n}$ 且 $rank(A(\lambda)) = r$，则 $A(\lambda)$ 相抵于如下对角形，称为 $A(\lambda)$ 的史密斯（smith）标准形。

$$A(\lambda) \simeq \begin{pmatrix} d_1(\lambda) & & & & & & \\ & d_2(\lambda) & & & & & \\ & & \ddots & & & & \\ & & & d_r(\lambda) & & & \\ & & & & 0 & & \\ & & & & & \ddots & \\ & & & & & & 0 \end{pmatrix}$$

其中 $r \le n$，$d_i(\lambda)(i = 1, 2, \cdots, r)$ 是首项系数为 1 的多项式，且 $d_{i-1}(\lambda)$ 能整除 $d_i(\lambda)$ 记为记为 $(d_{i-1}(\lambda) | d_i(\lambda))$

定义 4.1.4 λ 矩阵 $A(\lambda)$ 最后化成的史密斯标准形，其对角线的元素 $d_1(\lambda),d_2(\lambda),\cdots,d_r(\lambda)$ 称为 $A(\lambda)$ 的不变因子。

定义 4.1.5 设 $A(\lambda)$ 的秩为 r，对于正整数 $k(1\le k\le r)$， $A(\lambda)$ 中必有非零的 k 阶子式，把 $A(\lambda)$ 中全部 k 阶子式的最大公因式称为 $A(\lambda)$ 的 k 阶行列式因子，，记为 $D_k(\lambda)$。

定理 4.1.2 相抵的 λ 矩阵具有相同的秩和相同的各阶行列式因子。

定理 4.1.3 λ 矩阵 $A(\lambda)$ 的史密斯标准形是唯一的。

定理 4.1.4 设 $A(\lambda),B(\lambda)\in P[\lambda]^{m\times n}$，则 $A(\lambda)$ 与 $B(\lambda)$ 相抵的充要条件是它们有相同的行列式因子，或者它们有相同的不变因子。

定义 4.1.5 $d_1(\lambda),d_2(\lambda),\cdots,d_r(\lambda)$ 的所有因式的全体叫 $A(\lambda)$ 的初等因子。

定理 4.1.5 设 $A(\lambda),B(\lambda)\in P[\lambda]^{m\times n}$，则 $A(\lambda)$ 与 $B(\lambda)$ 相抵的充要条件是它们有相同的秩和相同的初等因子。

定理 4.1.6 矩阵 $A \sim B$ 的充要条件是它们相应的特征矩阵

$\lambda I-A \sim \lambda I-B$

即两个矩阵的相拟的充要条件是它们的特征矩阵相抵。

定理 4.1.7 相拟矩阵有相同的最小多项式。

定理 4.1.8 n 阶矩阵 A 的最小多项式等于它的特征矩阵 $(\lambda I-A)$ 中的第 n 个不变因子 $d_n(\lambda)$

推论 1 若矩阵 A 的特征值互异，则它的最小多项式就是特征多项式。

在复数域□上，求 n 阶矩阵 A 的若当标准形的步骤如下：

第一步：求特征矩阵$(\lambda I - A)$的初等因子组，设为

$$(\lambda-\lambda_1)^{m_1},(\lambda-\lambda_2)^{m_2},\cdots,(\lambda-\lambda_s)^{m_s} \text{ 且 } m_1+m_2+\cdots+m_s=n$$

第二步：写出每个初等因子$(\lambda-\lambda_i)^{m_i}$ $(i=1,2,\cdots,s)$对应的若当块

$$J_i(\lambda_i)=\begin{pmatrix} \lambda_i & 1 & & & \\ & \lambda_i & 1 & & \\ & & \lambda_i & \ddots & \\ & & & \ddots & 1 \\ & & & & \lambda_i \end{pmatrix}_{m_i \times m_i} \qquad (i=1,2,\cdots,s,$$

第三步：写出以这些若当块构成的若当标准形

$$J=\begin{pmatrix} J_1(\lambda_1) & & & \\ & J_2(\lambda_2) & & \\ & & \ddots & \\ & & & J_s(\lambda_s) \end{pmatrix}$$

定义 5.1.1 设 V 是实数域□上的线性空间，对于 V 中任意两个向量 x，y，如能给定某各规则使 x 与 y 对应着一个实数，记为(x,y)，并且满足以下条件：

1） $(x,y)=(y,x)$

2） $(x+y,z)=(x,z)+(y,z)$

3） $(kx,y)=k(x,y)$

4） $(x,x)\geq 0$，当且仅当$x=0$时，$(x,y)=0$。

则称该实数(x,y)是向量 x 与 y 的内积。

如此定义了内积的实线性空间 V 叫做欧几里得空间（Euclid），简称欧氏空间（或实内积空间）。

定义 5.1.2 非负实数 $\sqrt{(x,x)}$ 叫做向量 x 的长度或模，记为 $|x|$。长度等于 1 的向量叫做单位向量。零向量的长度为 0

定义 5.1.3 非零向量 x 与 y 的夹角 $\langle x,y\rangle$ 规定为

$$\langle x,y\rangle=\arccos\frac{(x,y)}{|x||y|},0\le\langle x,y\rangle\le\pi$$

这个定义在形式上与解析几何中夹角的定义是完全一致的。

定义 5.1.4 设 V 是一个 n 维欧氏空间，$e_1,e_2,\cdots,e_n$ 是 V 的一个基，若在 V 的内积下，让

$$a_{ij}=(e_i,e_j)\qquad (i,j=1,2,\cdots,n)$$

则称 $A=(a_{ij})_{n\times n}$ 为基 $e_1,e_2,\cdots,e_n$ 的度量矩阵。

定理 5.1.1 设 $e_1,e_2,\cdots,e_n$ 与 $\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n$ 为欧氏空间 V 的两个基，它们的度理矩阵分别为 A，B，且

$$(\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n)=(e_1,e_2,\cdots,e_n)C$$

则 $B=C^TAC$

即不同基的度量矩阵是合同的。

定度 5.2.1 设 x , y 为欧氏空间的两个向量,如果 $(x,y)=0$,则说 x 与 y 正交，记为 $x\perp y$。

定理 5.2.1 如果向量 x 与 y 正交，则有

$$|x+y|^2=|x|^2+|y|^2$$

定义 5.2.2 欧氏空间中一组非零向量，如果它们两两正交，则称其为一个正交向量组。

定理 5.2.2 如果 $x_1,x_2,\cdots,x_m$ 是一组两两正交的非零向量，则它们必是线性无关的。

定义 5.2.3 在 n 维欧氏空间中，由 n 个向量组成的正交向量组称为正交基；由单位向量组成的正交基称为标准正交基。

定义 5.2.4 从一组线性无关的向量出发，必可构造出一组相同个数的两两正交的向量，并且还可使每个新向量的长度（模）等于是（即单位向量）。这种做法叫做线性无知向量组的正交规范化，常用的方法是如下的施密特方法。

施密特正交化方法： 设 $x_1, x_2, \cdots, x_m$ 是一组线性无关的向量。施密物正交规范化步骤是先把化们正交化，具体步骤为：

第一步： 取 $y_1' = x_1$ 作为正交向量组中的第一个向量。

第二步： 令 $y_2' = x_2 + k_{21} y_1'$　　其中　　$k_{21} = -\dfrac{(x_2, y_1')}{(y_1', y_1')}$ 这样就得到两个正交向量。

第三步： 又令 $y_3' = x_3 + k_{31} y_2' + k_{32} y_1'$，再由正交条件 $(y_3', y_2') = 0$ 及 $(y_3', y_1') = 0$ 来决定出 k_{31}， k_{32}：

$$k_{31} = -\frac{(x_3, y_2')}{(y_2', y_2')}, \qquad k_{32} = -\frac{(x_3, y_1')}{(y_1', y_1')}$$

到此我们已做出 3 个两两正交的向量。

第四步： 如此继续进行，一般式是

$$\begin{cases} y_m' = x_m + k_{m1} y_{m-1}' + k_{m2} y_{m-2}' + \cdots + k_{m,m-1} y_1' \\ k_{mi} = -\dfrac{(x_m, y_{m-i}')}{(y_{m-i}', y_{m-i}')}, \quad i = 1, 2, \cdots, m-1, \end{cases}$$

直到 $m = n$。这样得到的一组向量 $y_1', y_2', \cdots, y_n'$ 显然是两两正交的。

第五步： 再单位化，即以 y_i' 除以它的模 $|y_i'|$，就得到所要求的下载交规范化的向量组了。

定理 5.2.3 一组基为标准正交基的充要条件是它的度量矩阵为单位矩阵。

定义 5.2.5 n 阶实数矩阵 A 称为正交矩阵，如果 $A^T A = E$

定义 5.2.6 欧氏空间 V 的线性变换 $\mathscr{A}$ 称为正交变换，如果它保持向量的内积不变，即对任意的 $\alpha, \beta \in V$，都有

$$\left(\mathscr{A}(\alpha), \mathscr{A}(\beta)\right) = (\alpha, \beta)$$

定理 5.2.4 欧氏空间的线性变换是正交变换的充要条件是，它对于标准正交基的矩阵是正交矩阵。

推论 正交矩阵是非奇异的，正交矩阵的逆阵还是正交矩阵，两个正交矩阵的乘积还是正交矩阵。

定义 5.3.1 设 V_1, V_2 是欧氏空间 V 中的两个子空间，若对任意的 $\alpha \in V_1, \beta \in V_2$，恒有

$$(\alpha, \beta) = 0$$

则称 V_1 与 V_2 正交，记作 $V_1 \perp V_2$。若某个确定的向量 α，对任意的 $\beta \in V_2$，恒有 $(\alpha, \beta) = 0$，则称 α 与 V_2 正交，记作 $\alpha \perp V_2$

定理 5.3.1 设 V_1, V_2 是欧氏空间 V 中的两个子空间，且 $V_1 \perp V_2$，则

1） $V_1 \cap V_2 = \{0\}$

2） $\dim(V_1 + V_2) = \dim(V_1) + \dim(V_2)$

定理 5.3.2 设子空间 $V_1, V_2, \cdots, V_s$ 两两正交，则

$$V_1 + V_2 + \cdots + V_s$$

是直和。

定义 5.3.2 子空间 V_2 称为子空间 V_1 的一个正交补，如果 $V_1 \perp V_2$，且

$V_1+V_2=V$。

定理 5.3.3 欧氏空间 V 的每一个子空间 V_1 都有唯一的正交补。

定理 5.4.1 设 A 为实对称矩阵，则 A 的特征值皆为实数。

定义 5.4.1 设 $\mathscr{A}$ 是欧氏空间 V 的一个线性变换，且对 V 中任意两个向量 α,β，都有

$$\left(\mathscr{A}(\alpha),\beta\right)=\left(\alpha,\mathscr{A}(\beta)\right)$$

成立，则称 $\mathscr{A}$ 为 V 中一个对称变换。

定理 5.4.2 欧氏空间的线性变换是实对称变换的充要条件是，它对于标准正交基的矩阵是实对称矩阵。

定理 5.4.3 实对称矩阵的不同特征值所对应的特征向量是正交的。

定理 5.4.4 设 A 为一个 n 阶实对称矩阵，则存在 n 阶正交矩阵 T，使

$$T^TAT=T^{-1}AT$$

成为对角矩阵。

定义 5.5.1 设 V 是复数域 $\mathbb{C}$ 上的线性空间，对于 V 中的任意两个向量 x 和 y ,按某规则有一复数 (x,y) 与之对应，它满足下列四个条件：

1）交换律：$(x,y)=\overline{(y,x)}$，这里 $\overline{(y,x)}$ 是 (y,x) 的共轭复数；

2）分配律：$(x,y+z)=(x,y)+(x,z)$；

3）齐次性：$(kx,y)=k(x,y)(\forall k\in\mathbb{C})$；

4）非负性：$(x,x)\geq 0$，当且仅当 $x=0$ 时，实数 $(x,x)=0$

则称 (x,y) 为向量 x 与 y 的内积，而称 V 为酉空间（或复内积空间）。

酉空间的一些结论：

1）$(x,uy)=\overline{u}(x,y)$。

2）$|(x,y)|\leq|x||y|$

3）非零向量 x , y 的夹角规定为：

$$\cos^2\langle x,y\rangle=\frac{(x,y)(y,x)}{(x,x)(y,y)}\qquad \left(0\le\langle x,y\rangle\le\frac{\pi}{2}\right)$$

当$(x,y)=0$时，称 x 与 y 正交或垂直。

4）n 维酉空间中的任意一组线性无关的向量都可以正交化，并能扩充成为一个标准正交基。

5）设$A\in\mathbb{C}^{n\times n}$，$\overline{A}$表示$A$的元素的共轭复数为元素组成的复共轭矩阵。若记

$$A^H=(\overline{A})^T$$

则称A^H为 A 的复共轭转置矩阵。

6）酉空间 V 中的线性变换$\mathscr{A}$，如果满足

$$(x,y)=(\mathscr{A}x,\mathscr{A}y)$$

则称$\mathscr{A}$为 V 的酉变换。

7）酉空间 V 的线性变换$\mathscr{A}$为酉变换的充要条件是，对于 V 中任意两个向量 x , y ，都有

$$(x,y)=(\mathscr{A}x,\mathscr{A}y)$$

8）酉变换在酉空间的标准正交基下的矩阵 A 是酉矩阵，即满足下式：

$$A^HA=AA^H=E$$

定理 5.5.1

1）设$A\in\mathbb{C}^{n\times n}$的特征值为$\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$，则存在酉矩阵 P，使得

$$P^{-1}AP=P^HAP=\begin{pmatrix}\lambda_1 & * & \cdots & * \\ & \lambda_2 & \ddots & \vdots \\ & & \ddots & * \\ & & & \lambda_n\end{pmatrix}$$

2）设 $A\in \square^{n\times n}$ 的特征值为 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$，且 $\lambda_i \in \square\ (i=1,2,\cdots,n)$，则存在正交矩阵 Q，使得

$$Q^{-1}AQ=Q^TAQ=\begin{pmatrix} \lambda_1 & * & \cdots & * \\ & \lambda_2 & \ddots & \vdots \\ & & \ddots & * \\ & & & \lambda_n \end{pmatrix}$$

定义 5.5.2 设 $A\in \square^{n\times n}$，若

$$AA^H=A^HA$$

则称 A 为正规矩阵。

定理 5.5.2

1）设 $A\in \square^{n\times n}$，则 A 酉相似于对角矩阵的充要条件是 A 为正规矩阵。

2）设 $A\in \square^{n\times n}$，且 A 的特征值都是实数，则 A 正交相似于对角矩阵的充要条件是 A 为正规矩阵。

推论

1）实对称矩阵正交相似于对角矩阵。

2）设 $\mathscr{A}$ 是欧氏空间 V 的对称变换，则在 V 中存在标准正交基 $y_1,y_2,\cdots y_n$，使 $\mathscr{A}$ 在该基下的矩阵为对角矩阵。

定理 5.5.3

1）设 $A\in \square^{n\times n}$，则 A 是正规矩阵的充要条件为存在酉矩阵 U，使得

$$U^HAU=U^{-1}AU=diag\{\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n\}$$

其中 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$ 是 A 的特征值。

2）设 A 为正规矩阵，则与 A 酉相似的矩阵都是正规矩阵。

3）设 A 为正规矩阵，且 A 是三角矩阵，则 A 是对称阵。

4）正规矩阵 A 必有 n 个线性无关的特征向量。

5）正规矩阵 A 的属于不同特征值的特征子空间是相互正交的。

定义 6.1.1 如果 V 是数域 K 上的线性空间，且对于 V 的任一向量 x，对应一个实值函数$\|x\|$，它满足以下三个条件：

1）非负性：当$x \neq 0$时，$\|x\| > 0$；当$x = 0$时，$\|x\| = 0$；

2）齐次性：$\|ax\| = |a|\ \|x\| \quad (a \in K, x \in V)$；

3）三角不等式：$\|x+y\| \leq \|x\| + \|y\| \quad (x, y \in V)$。则称$\|x\|$为 V 上向量 x 的范数，简称向量范数。

定义 6.1.2

$$\|x\|_p = \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^p \right)^{\frac{1}{p}}, \quad 1 \leq p \leq +\infty$$

$\|x\|_p$为向量的$p-$范数或称l_p范数。

定义 6.1.3 设$\|x\|_\alpha$和$\|x\|_\beta$为定义在$\mathbb{R}^n$上的任意两种向量范数，若存在正常数c_1和c_2，使得对一切的$X \in \mathbb{R}^n$，总有

$$c_1 \|X\|_\beta \leq \|X\|_\alpha \leq c_2 \|X\|_\beta$$

成立，则称$\mathbb{R}^n$上的这两种向量范数$\|X\|_\alpha$与$\|X\|_\beta$是等价的。

定理 6.1.1 $\mathbb{R}^n$上的任意一种向量范数$\|X\|$都是变量$x_1, x_2, \cdots, x_n$的 n 元连续函数，其中

$$X = (x_1, x_2, \cdots, x_n)^T \in \mathbb{R}^n$$

定理 6.1.2 $\mathbb{R}^n$上的任意两种向量范数都是等价的。

定理 6.1.3 在$\mathbb{R}^n$中，$\lim\limits_{k \to \infty} x^{(k)} = x^* \Leftrightarrow \left\| x^{(k)} - x^* \right\| \to 0(当k \to \infty时)$，其中$\|\bullet\|$为向量的任一种范数。

定义 6.2.1 设 $A\in\mathbb{C}^{m\times n}$，按某一法则在 $\mathbb{C}^{m\times n}$ 上规定 A 的一个实值函数，记作 $\|A\|$，它满足下面四个条件：

1）非负性：如果 $A\neq 0$，则 $\|A\|>0$；如果 $A=0$，则 $\|A\|=0$。

2）齐次性：对任意的 $k\in\mathbb{C}$，$\|kA\|=|k|\|A\|$。

3）三角不等式：对任意 $A,B\in\mathbb{C}^{m\times n}$，$\|A+B\|\leq\|A\|+\|B\|$。

4）相容性：当矩阵乘积 AB 有意义时，若有

$$\|AB\|\leq\|A\|\|B\|$$

则称 $\|A\|$ 为矩阵范数。

定义 6.2.2 设 $A\in\mathbb{C}^{m\times n}$，$x\in\mathbb{C}^{n}$，如果取定的向量范数 $\|x\|$ 和矩阵范数 $\|A\|$ 满足不等式

$$\|Ax\|\leq\|A\|\|x\|$$

则称矩阵范数 $\|A\|$ 与向量范数 $\|x\|$ 是相容的。

定理 6.1.1 设 $A\in\mathbb{C}^{m\times n}$，$x=(x_1,x_2,\cdots,x_n)^T\in\mathbb{C}^{n}$，且在 $\mathbb{C}^{n}$ 中已规定了向量的某种范数 $\|x\|$，则与向量范数 $\|x\|$ 相容的矩阵范数可以取作向量 Ax 的范数的最大值，即：

$$\|A\|=\max_{\|x\|=1}\|Ax\|$$

上面定义的相容范数为算子范数，或称为向量范数的从属范数。

定理 6.1.2 设 $A=(a_{ij})\in\mathbb{C}^{m\times n}, x=(x_1,x_2,\cdots,x_n)^T\in\mathbb{C}^{n}$，则从属于向量 x 的 3 种范数 $\|x\|_1,\|x\|_2,\|x\|_\infty$ 的算子范数依次是

1）$\|A\|_1=\max_{j}\sum_{i=1}^{m}|a_{ij}|$ (称为列范数)

2）$\|A\|_2=\sqrt{\lambda_{\max}(A^HA)}$ (称为谱范数) 其中 $\lambda_{\max}(A^HA)$ 是矩阵 A^HA 特征值绝对值的最大值；

3） $\|A\|_\infty = \max\limits_i \sum\limits_{j=1}^{n} |a_{ij}|$ (称为行范数)

谱范数的性质和谱半径（略）

定义 7.1.1 设 $x^{(k)}$， $x \in \mathbb{R}^m (k=1,2,\cdots)$， 若

$$\left\|x^{(k)} - x\right\| \to 0, \quad k \to +\infty$$

则称向量序列$\{x^{(k)}\}$收敛于向量 x ，或说向量 x 是向量序列$\{x^{(k)}\}$当 $k \to +\infty$时的极限，可记为

$$\lim_{k\to\infty} x^{(k)} = x$$

或

$$x^{(k)} \to x, \quad k \to +\infty$$

定义 7.1.2 设有矩阵序列$\{A^{(k)}\}$，其中$A^{(k)} = (a_{ij}^{(k)}) \in \mathbb{R}^{n\times n}$，且当$k \to +\infty$时，$a_{ij}^{(k)} \to a_{ij}$， 则称$\{A^{(k)}\}$收敛，并把矩阵$A = (a_{ij})$叫做$\{A^{(k)}\}$的极限，或称$\{A^{(k)}\}$收敛于 A， 记为

$$\lim_{k\to+\infty} A^{(k)} = A \quad 或 \quad A^{(k)} \to A$$

定理 7.1.1 若对矩阵 A 的某一范数有$\|A\| < 1$， 则

$$\lim_{k\to+\infty} A^{(k)} = 0$$

定义 7.2.1 设有矩阵序列

$$A^{(0)}, A^{(1)}, \cdots, A^{(k)}, \cdots,$$

其中$A^{(k)} = (a_{ij}^{(k)}) \in \mathbb{R}^{n\times n}$， 称无穷和

$$A^{(0)} + A^{(1)} + A^{(2)} + \cdots + A^{(k)} + \cdots$$

为矩阵级数， 记为$\sum\limits_{k=0}^{\infty} A^{(k)}$， $A^{(k)}$称为矩阵级数的一般项， 即有

$$\sum_{k=0}^{\infty} A^{(k)} = A^{(0)} + A^{(1)} + A^{(2)} + \cdots + A^{(k)} + \cdots$$

定义 7.1.2 级数$\sum\limits_{k=0}^{+\infty} A^{(k)} = A^{(0)} + A^{(1)} + A^{(2)} + \cdots + A^{(k)} + \cdots$前$k+1$项的和

$$S^{(k)} = A^{(0)} + A^{(1)} + A^{(2)} + \cdots + A^{(k)}$$

称为级数的部分和，如果矩阵序列$\{S^{(k)}\}$收敛，且有极限S，即有

$$\lim_{k \to +\infty} S^{(k)} = S,$$

则称此矩阵级数收敛，S称为级数的和，记作

$$S = \sum_{k=0}^{+\infty} A^{(k)}$$

不收敛的矩阵级数称为是发散的。

定义 7.1.3 设矩阵级数$\sum\limits_{k=0}^{+\infty} A^{(k)} = A^{(0)} + A^{(1)} + A^{(2)} + \cdots + A^{(k)} + \cdots$，其中

$A^{(k)} = (a_{ij}^{(k)}) \in \mathbb{C}^{n\times n}$。如果$n^2$个数项级数

$$a_{ij}^{(0)} + a_{ij}^{(1)} + a_{ij}^{(2)} + \cdots + a_{ij}^{(k)} + \cdots, \quad i, j = 1, 2, \cdots, n$$

都绝对收敛，则称矩阵级数绝对收敛。

定理 7.1.1 矩阵级数$\sum\limits_{k=0}^{+\infty} A^{(k)}$绝对收敛的充要条件是

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \left\| A^{(k)} \right\| = \left\| A^{(0)} \right\| + \left\| A^{(1)} \right\| + \left\| A^{(2)} \right\| + \cdots + \left\| A^{(k)} \right\| + \cdots \text{收敛。}$$

定理 7.1.2 设两个矩阵级数

$$A^{(1)} + A^{(2)} + \cdots + A^{(k)} + \cdots, A^{(k)} \in \mathbb{C}^{n\times n}$$

$$B^{(1)} + B^{(2)} + \cdots + B^{(k)} + \cdots, B^{(k)} \in \mathbb{C}^{n\times n}$$

都绝对收敛，其和分别为 A，B，则将它们按项相乘后作成的矩阵级数

$$
\begin{aligned}
&A^{(1)}B^{(1)}+(A^{(1)}B^{(2)}+A^{(2)}B^{(1)})+\cdots\\
&+(A^{(1)}B^{(k)}+A^{(2)}B^{(k-1)}+\cdots+A^{(k)}B^{(1)})+\cdots\\
&=\sum_{k=1}^{\infty}\left(\sum_{i=1}^{k}A^{(i)}B^{(k+1-i)}\right)
\end{aligned}
$$

绝对收敛，且具有和 AB。

性质 1 设矩阵级数 $\sum_{k=0}^{+\infty}A^{(k)}$ 绝对收敛，则

1）级数 $\sum_{k=0}^{+\infty}A^{(k)}$ 收敛。

2）级数 $\sum_{k=0}^{+\infty}A^{(k)}$ 在任意改变各项的次序后仍然收敛，且其和不变。

性质 2 设 P,Q 为 n 阶非奇异矩阵，若级数 $\sum_{k=0}^{+\infty}A^{(k)}$ 收敛（或绝对收敛），则矩阵级数 $\sum_{k=0}^{+\infty}PA^{(k)}Q$ 也收敛（或绝对收敛）。

定义 7.1.4 形如

$$c_0I+c_1A+c_2A^2+\cdots+c_kA^k+\cdots$$

的矩阵级数称为矩阵幂级数，其中 $c_i\in\mathbb{C},A\in\mathbb{C}^{n\times n}$。

若正项级数 $|c_0|\|I\|+\sum_{k=1}^{+\infty}|c_k|\|A\|^k$ 收敛，则矩阵幂级数 $c_0I+c_1A+c_2A^2+\cdots+c_kA^k+\cdots$ 绝对收敛，其中 $\|A\|$ 为矩阵 A 的某种范数。

定理 7.1.3 设 $A\in\mathbb{C}^{n\times n}$，如果 A 的谱半径 $\rho(A)$ 的值在纯量 z 的幂级数 $\sum_{k=0}^{+\infty}c_kz^k$ 的收敛圆内，那么矩阵幂级数 $\sum_{k=0}^{+\infty}c_kA^k$ 绝对收敛；如果 A 的特征值中有一个在幂级数 $\sum_{k=0}^{+\infty}c_kz^k$ 的收敛圆外，则矩阵幂级数 $\sum_{k=0}^{+\infty}c_kA^k$ 发散。

定理 7.1.4 矩阵幂级数 $I+A+A^2+\cdots+A^k+\cdots$ 绝对收敛的充要条件是 A 的谱半径

$\rho(A)<1$，且该级数和为 $(I-A)^{-1}$。

定理 7.1.5 设矩阵 A 的某种范数 $\|A\|<1$，则对任何非负整数 k，有

$$\left\|(I-A)^{-1}-(I+A+A^2+\cdots+A^k)\right\|\le\frac{\|A\|^{k+1}}{1-\|A\|}$$

定义 7.2.1 设一元函数 $f(z)$ 能够展开为 z 的幂级数

$$f(z)=\sum_{k=0}^{\infty}c_k z^k \qquad (|z|<r)$$

其中，$r>0$ 表示该幂级数的收敛半径。当 n 阶矩阵 A 的谱半径 $\rho(A)<r$ 时，把收敛的幂级数 $\sum_{k=0}^{\infty}c_k A^k$ 的和称为矩阵函数，记为 $f(A)$，即

$$f(A)=\sum_{k=0}^{\infty}c_k A^k$$

定理 7.2.1 如果 $AB=BA$，则有

$$e^A \cdot e^B=e^B \cdot e^A=e^{A+B}$$

推论 1 $e^A e^{-A}=e^{-A}e^A=I,\quad (e^A)^{-1}=e^{-A}$

推论 2 设 m 为整数，则

$$(e^A)^m=e^{mA}$$

矩阵函数值的求法（略）

定义 7.3.1 若矩阵 $A=(a_{ij})$ 的诸无素 a_{ij} 均是变量 t 的函数，即

$$A(t)=\begin{pmatrix} a_{11}(t) & a_{12}(t) & \cdots & a_{1n}(t) \\ a_{21}(t) & a_{22}(t) & \cdots & a_{2n}(t) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1}(t) & a_{m2}(t) & \cdots & a_{mn}(t) \end{pmatrix}$$

则称 $A(t)$ 为函数矩阵。推而广之，变量 t 还可以是向量，也可以是矩

阵。

定义 7.1.2 设 $A(t)=(a_{ij}(t))_{m\times n}$， 若 $a_{ij}(t)(i=1,2,\cdots,m;j=1,2,\cdots,n)$ 在 $t=t_0$ 处（或 $[a,b]$ 上）可导，则称 $A(t)$ 在点 $t=t_0$ 处（或 $[a,b]$ 上）可导，且记为

$$A'(t_0)=\frac{dA(t)}{dt}\Big|_{t=t_0}=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{A(t_0+\Delta t)-A(t_0)}{\Delta t}=\begin{pmatrix} a'_{11}(t_0) & a'_{12}(t_0) & \cdots & a'_{1n}(t_0)\\ a'_{21}(t_0) & a'_{22}(t_0) & \cdots & a'_{2n}(t_0)\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ a'_{m1}(t_0) & a'_{m2}(t_0) & \cdots & a'_{mn}(t_0)\end{pmatrix}_{m\times n}$$

函数矩阵导数运算性质（略）

定义 7.2.1 设 $x=(x_1,x_2,\cdots,x_n)^T, f(x)=f(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 是以向量 x 为自变量的数量函数，即为 n 元函数，则规定数量函数 $f(x)$ 对于向量 x 的导数为

$$\frac{df}{dx}=\left(\frac{\partial f}{\partial x_1},\frac{\partial f}{\partial x_2},\cdots,\frac{\partial f}{\partial x_n}\right)^{\mathrm{T}}$$

定义 7.2.2 设 $A\in\mathbb{C}^{m\times n}$， $f(A)$ 为矩阵 A 的数量函数，即看成是 $m\times n$ 元函数，则规定数量函数 $f(A)$ 对于矩阵 A 的导数为

$$\frac{df}{dA}=\left(\frac{\partial f}{\partial a_{ij}}\right)_{m\times n}=\begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial a_{11}} & \cdots & \frac{\partial f}{\partial a_{1n}}\\ \vdots & \ddots & \vdots\\ \frac{\partial f}{\partial a_{m1}} & \cdots & \frac{\partial f}{\partial a_{mn}}\end{pmatrix}$$

定义 7.2.3 设矩阵 F 是以 $A\in\mathbb{C}^{m\times n}$ 为自变量的 $p\times q$ 矩阵，即

$$F(A)=\begin{pmatrix} f_{11}(A) & f_{12}(A) & \cdots & f_{1q}(A)\\ f_{21}(A) & f_{22}(A) & \cdots & f_{2q}(A)\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ f_{p1}(A) & f_{p2}(A) & \cdots & f_{pq}(A)\end{pmatrix}_{p\times q}$$

其元素 $f_{ks}(A)$ 是以矩阵 $A=(a_{ij})_{m\times n}$ 的元素为自变量的 mn 元函数，则规定矩阵 $F(A)$ 对于矩阵 A 的导数为

$$\frac{dF}{dA}=\left(\frac{\partial F}{\partial a_{ij}}\right)_{pm\times qn}=\begin{pmatrix}\frac{\partial f}{\partial a_{11}} & \frac{\partial f}{\partial a_{12}} & \cdots & \frac{\partial f}{\partial a_{1n}}\\ \frac{\partial f}{\partial a_{21}} & \frac{\partial f}{\partial a_{22}} & \cdots & \frac{\partial f}{\partial a_{2n}}\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ \frac{\partial f}{\partial a_{m1}} & \frac{\partial f}{\partial a_{m2}} & \cdots & \frac{\partial f}{\partial a_{mn}}\end{pmatrix}$$

其中

$$\left(\frac{\partial F}{\partial a_{ij}}\right)=\begin{pmatrix}\frac{\partial f_{11}}{\partial a_{ij}} & \frac{\partial f_{12}}{\partial a_{ij}} & \cdots & \frac{\partial f_{1q}}{\partial a_{ij}}\\ \frac{\partial f_{21}}{\partial a_{ij}} & \frac{\partial f_{22}}{\partial a_{ij}} & \cdots & \frac{\partial f_{2q}}{\partial a_{ij}}\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ \frac{\partial f_{p1}}{\partial a_{ij}} & \frac{\partial f_{p2}}{\partial a_{ij}} & \cdots & \frac{\partial f_{pq}}{\partial a_{ij}}\end{pmatrix},\quad \begin{matrix}i=1,2,\cdots,m\\ j=1,2,\cdots,n\end{matrix}$$

定义 7.3.1 设矩阵 $F=(f_{ij})_{m\times n}$， 则规定矩阵 F 的全微分为

$$dF=(df_{ij})_{m\times n}$$

定义 7.3.2 设函数矩阵

$$A(t)=\begin{pmatrix}a_{11}(t) & a_{12}(t) & \cdots & a_{1n}(t)\\ a_{21}(t) & a_{22}(t) & \cdots & a_{2n}(t)\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ a_{n1}(t) & a_{n2}(t) & \cdots & a_{nn}(t)\end{pmatrix}$$

我们定义

$$\int A(t)dt=\begin{pmatrix}\int a_{11}(t)dt & \int a_{12}(t)dt & \cdots & \int a_{1n}(t)dt\\ \int a_{21}(t)dt & \int a_{22}(t)dt & \cdots & \int a_{2n}(t)dt\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ \int a_{n1}(t)dt & \int a_{n2}(t)dt & \cdots & \int a_{nn}(t)dt\end{pmatrix}$$

$$\int_a^b A(t)dt=\begin{pmatrix}\int_a^b a_{11}(t)dt & \int_a^b a_{12}(t)dt & \cdots & \int_a^b a_{1n}(t)dt\\ \int_a^b a_{21}(t)dt & \int_a^b a_{22}(t)dt & \cdots & \int_a^b a_{2n}(t)dt\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ \int_a^b a_{n1}(t)dt & \int_a^b a_{n2}(t)dt & \cdots & \int_a^b a_{nn}(t)dt\end{pmatrix}$$

矩阵微分方程（略）

矩阵分解（略）

广义逆矩阵（略）

特征值的估计和扰动（略）