选择题（一）

1.设子空间$U=\left\{(x,y,z)^T\in R^3|x+y+z=0\right\},W=\left\{(x,y,z)^T\in R^3|x=y=\frac{z}{-2}\right\}$，
则$\dim(U+W)-\dim U=$（ A ）
（A）0；（B）1；（C）2；（D）3；

2.下列选项错误的是（ C ）
（A）$A^H=A\in C^{n\times n}$，则$\|A\|_1=\|A\|_\infty$；
（B）$A\in C^{n\times n}$为可逆矩阵，λ为其任一特征值，$\|\bullet\|$为任意的算子范数，则$|\lambda|\geq\frac{1}{\|A^{-1}\|}$；
（C）$A=E-2uu^H,u\in C^n$且$\|u\|_2=1$，则$\|A\|_2=\sqrt{n}$；
（D）设$A\in C^{m\times n},X\in C^{n\times r},B\in C^{r\times s}$，则$Vec(AXB)=\left(B^T\otimes A\right)VecX$；

3.设A为n阶可逆矩阵，r(A)是其谱半径，$\|\bullet\|$是任意算子范数，则必有（B ）
（A）$\|A^{-1}\|=\frac{1}{\|A\|}$；（B）$\|A^5\|\leq\|A\|^5$；（C）$\|A^5\|\geq\|A\|^5$；（D）$\|A\|\geq r\left(A^HA\right)$；

4.下列选项错误的是（ A ）
（A）$A\in C^{m\times n}$且$\|A\|_{m\infty}<1$，则$r(A)<1$；
（B）$A\in C_r^{n\times n}$为正规矩阵，$\lambda_i(i=1,2\cdots r)$为其非零特征值，则$\|A^+\|_2=\frac{1}{\min_{1\leq i\leq r}|\lambda_i|}$；
（C）$A\in C^{n\times n}$，λ为其任一特征值，$\|\bullet\|$为任意算子范数，则$|\lambda|\leq\sqrt[m]{\|A^m\|}$；
（D）$\sigma_1\geq\sigma_2\geq\cdots\geq\sigma_r$为A的所有正奇异值，则$\|A\|_F^2=\sum_{i=1}^{r}\sigma_i^2$；

5. 设$M=\begin{pmatrix}2&-1&-1\\-1&-1&2\\-1&2&-1\end{pmatrix}$，则不存在（ C ）
（A）奇异值分解；（B）最大秩分解；（C）QR分解（其中Q是正交矩阵）；（D）谱分解；

6.设A为n阶可逆矩阵，r(A)是其谱半径，$\|\bullet\|$为自相容矩阵范数，则必有 （ B）
（A）$\|A^{-1}\|\leqslant\frac{1}{\|A\|}$；（B）$r(A^n)\leqslant\|A\|^n$；（C）$\|A^n\|\geqslant\|A\|^n$；（D）$\|A\|\geqslant r\left(A^HA\right)$；

7.下列命题错误的是 （C ）
（A）若$A^2=A(\neq 0)$且A=BC为满秩分解，则CB=E（E为单位矩阵）；
（B）$A\in C^{m\times n},b\in C^m$，则$A^HAx=A^Hb$一定有解；
（C）$N(A^-A)\neq N(A)$；
（D）$A\in C_r^{m\times n}(r>0)$，则$AA^+$的正奇异值之和为r；

8.下列命题错误的是（D ）
（A）矩阵A的每个行盖尔圆不一定包含A的特征值；
（B）严格对角占优的矩阵一定是可逆矩阵；
（C）若n阶实矩阵A的n个圆盘两两互不相交，则A一定相似于对角矩阵；
（D）若A为Hermite矩阵，则A的特征值都为非负实数；

9.下列结论错误的是（A ）
（A）若A和B分别是列满秩和行满秩矩阵，则$(AB)^+=B^+A^+$；
（B）实反对称矩阵，一定能够酉相似对角化；
（C）对任意矩阵A，A^HA和AA^H具有相同的特征值；
（D）设$A\in C^{m\times n}$和$B\in C^{n\times m}$，则AB和BA有相同的非零特征值；

10.设σ_i为矩阵A的奇异值，下列结论正确的是（C ）

（A）$(AB)^{+}=B^{+}A^{+}$；　（B）$\|A^{+}\|_F^2=\sum_{i=1}^{n}\sigma_i^2$；

（C）$rank(A)=rank\left(A^{+}\right)$；　（D）$(A^{-})^{-}=A$；

选择题（二）

1.下列结论正确的是 （A ）

（A）$\frac{1}{\sqrt{n}}\|A\|_{m2}\leqslant\|A\|_2$；

（B）A是列满秩矩阵，则$A^{+}=A^{-1}$；

（C）$rank(A)=rank(A^{-})$；

（D）$\sum_{i=1}^{k}\lambda_i A_i$是单纯矩阵$A\in C_r^{m\times n}(r<n)$的谱分解，则$\sum_{i=1}^{k}rank(A_i)=r$；

2.下列说法错误的是（D ）

（A）矩阵A与A^H有相同的奇异值；

（B）矩阵收敛的充分必要条件是其谱半径小于1；

（C）矩阵A的右逆A_R^{-1}是A的自反广义逆；

（D）$\|AB\|_{m\infty}\leqslant\|A\|_{m\infty}\|B\|_{m\infty}$；

3.设n阶矩阵A满足$A^2=A$，但A不是单位矩阵，则下列说法正确的是（ A ）

（A）矩阵A不是严格对角占优；

（B）矩阵A为严格对角占优；

（C）矩阵A左可逆；

（D）矩阵A的M-P广义逆$A^{+}=A$；

4.设$A\in C^{n\times n}$且矩阵A的谱半径r(A)<1，则$\sum_{k=0}^{\infty}kA^k=$（ D ）

（A）$A(I-A)$；　（B）$A(I-A)^2$；　（C）$A(I-A)^{-3}$；　（D）$A(I-A)^{-2}$；

5.设A为n阶可逆矩阵，r（A）是其谱半径，‖•‖是一种相容矩阵范数，则必有（ B ）

（A）$\|A^{-1}\|\leq\frac{1}{\|A\|}$；　（B）$\|A^n\|\leq\|A\|^n$；　（C）$\|A^n\|\geq\|A\|^n$；　（D）$\|A\|\geq r\left(A^H A\right)$；

6.设$A\in C^{m\times n}$，U为n阶酉矩阵，下列说法错误的是（ B ）

（A）$\|A\|_F=\|AU\|_F$；　（B）A和AU的特征值相同；

（C）A和AU的正奇异值相同；　（D）rank（A）=rank（AU）；

7.若A,B均为n阶方阵，下列结论错误的是（ C ）

（A）$(A\otimes B)^{-1}=A^{-1}\otimes B^{-1}$；　（B）若A,B为正规矩阵，则$A\otimes B$也为正规矩阵；

（C）$Vec(AXB)=\left(A^T\otimes B\right)VecX$；　（D）$rank(A\otimes B)=rankA\cdot rankB$；

8.设$A=\begin{bmatrix}\frac{1}{4}&0\\0&\frac{1}{2}\end{bmatrix}$，则$\sum_{k=1}^{\infty}kA^{k-1}$为（ C ）

（A）$\begin{bmatrix}\frac{1}{12}&0\\0&2\end{bmatrix}$；　（B）$\begin{bmatrix}\frac{4}{9}&0\\0&\frac{1}{4}\end{bmatrix}$；　（C）$\begin{bmatrix}\frac{16}{9}&0\\0&4\end{bmatrix}$；　（D）$\begin{bmatrix}\frac{8}{9}&0\\0&2\end{bmatrix}$；

9.设A为n阶单纯矩阵，则下列结论正确的是（ D ）

（A）A有n个正交的特征向量；　（B）$\| A \|_{m2}^{2} = \sum_{i=1}^{n} |\lambda_i|^2$；

（C）$A^H = A$；　（D）A的特征值的几何重数之和为n；

选择题（三）

1.若$A \in C^{n\times n}$是幂等矩阵，则下列说法错误的是（ D ）
（A）$rank(A)$等于非零特征值的个数；（B）矩阵A可对角化；
（C）$N(A)=R(E-A)$；（D）$C^n=R(A)\oplus N(A)$；

2.A是正规矩阵，则下列说法错误的是（B ）
（A）A的不同特征值对应的特征向量正交；（B）A^{+}是正规矩阵；
（C）A的特征值为A的奇异值；（D）若A的特征值为λ_i，则$\| A \|_F^2=\sum_{i=1}^{n}|\lambda_i|^2$；

3.下列结论错误的是（A ）
（A）若A和B分别是列满秩和行满秩矩阵，则$(AB)^{+}=B^{+}A^{+}$；
（B）若矩阵A为行满秩矩阵，则AA^H是正定Hermite矩阵；
（C）设$A=\left(a_{ij}\right)\in C^{n\times n}(n>1)$为严格对角占优矩阵，$D=diag\left(a_{11},a_{22},\cdots a_{nn}\right)$，则$E-D^{-1}A$的谱半径$r\left(E-D^{-1}A\right)\geq 1$；
（D）任何可相似对角化的矩阵，皆可分解为幂等矩阵$A_i(i=1,2,\cdots,n)$的加权和，即$A=\sum_{i=1}^{n}\lambda_i A_i$；

4.下列命题错误的是（ A ）
（A）任何矩阵范数都存在与之相容的向量范数；
（B）正规矩阵一定是单纯矩阵；
（C）设$A\in C_r^{m\times n}$的一个广义逆矩阵为G，A=BD为A的最大秩分解，则rank（DGB）=r;
（D）若存在某种算子范数‖•‖使得$\|A\|<1$，则A为收敛矩阵，其中A为n阶方阵；

5.下列命题正确的是 （ C ）
（A）若A为正规矩阵，则$A^H=A$；
（B）若矩阵A对角占优，则A一定可逆；
（C）设$A\in C^{n\times n}$满足$\sum_{i=1}^{n}|a_{ij}|<1\left(j=1,2,\cdots,n\right)$，则A的谱半径$\rho(A)<1$；
（D）若n阶方阵A存在范数‖•‖使得$\| A \|<1$，则A为收敛矩阵；

6.下列命题错误的是 （ B）
（A）$R\left(A^{+}\right)=R(A)$（R(A)表示矩阵A的值域）；
（B）设$A\in C^{n\times n}$，$B=\begin{pmatrix}0 & A\\ A^H & 0\end{pmatrix}$则$\| B \|_2=\| A \|_2$；
（C）A为正规矩阵，则A的特征向量也是A^H的特征向量；
（D）$A^2=A$且$A\neq E$（E为单位矩阵），则A不是严格对角占优矩阵；

7.下列选项中正确的是（B ）
（A）$A\in C^{n\times n}$且$\| A \|_\infty<1$，则A为收敛矩阵；
（B）$A\in C^{n\times n}$为正规矩阵，则$r(A)=\| A \|_2$；
（C）$A\in C_r^{m\times n}(r>0)$，则$\| AA^{+} \|_F=\sqrt{r}$；
（D）$\sigma_1\geqslant\sigma_2\geqslant\cdots\geqslant\sigma_r$为A的所有正奇异值，$\| A^{+} \|_2=\frac{1}{\sigma_1}$；

判断题（一）

1.设$A \in C^{n\times n}$为酉矩阵，则$\| A \|_{m2}^{2} = n$。（ √ ）

2.设$A \in C^{n\times n}$，则$\| A \|_1 \cdot \| A \|_\infty < \| A \|_2^2$。 （× ）

3.设$A \in C^{n\times n}$，则$\| e^A \| > e^{\| A \|}$。 （ × ）

4.设$A \in C_m^{m\times n}, B \in C_m^{n\times m}$，则$(AB)^+ = B^+A^+$。 （ × ）

5.若rank(A)表示矩阵A的秩，R(A)表示矩阵A的值域，如果rank(A)=rank(AB)，则R(A)=R(AB) （ √ ）

6.若$A \in C^{m\times n}$，且$A \neq 0, (AA^-)^H = AA^-$，则$\| AA^- \|_2 = n$。（× ）

7.设$A, B \in C^{n\times n}$都是可逆矩阵，且齐次线性方程组$(A+B)x = 0$有非零解，$\| \cdot \|$为算子范数，则$\| AB^{-1} \| \geqslant 1$。（ √ ）

8.$\forall (x, y) \in R^2$，定义$f(x, y) = \sqrt{2x^2 + 3y^2 - 4xy}$，则$f(x, y)$是$R^2$上的范数。（ √ ）

9.设矩阵A的最大秩分解为$A=BD$，则$Ax=0$当且仅当$Dx=0$。 （ √ ）

判断题（二）

1.设A为n阶矩阵，则$AA^{+}=A^{+}A$（× ）

2.设$A^2=A,B^2=B$，则$(A\otimes B)^2=A\otimes B$（√ ）

3.设$r(A)$为矩阵A的谱半径，则$r(A)\leqslant\|A\|_m$ （× ）

4.设$A\in C^{n\times n}$的行列式$\det A=0$，则$\| E-A \|_2\geqslant 1$，其中E为单位矩阵。（ √ ）

5.设$A\in C_n^{n\times n}$，且方程组（A+B）x=0有非零解，则对$C^{n\times n}$中任意算子范数都有$\| A^{-1}B \| \leqslant 1$。（× ）

6.设$A\in C_n^{m\times n}$，$\| \cdot \|$是$C_n^{m\times n}$上某种相容矩阵范数，若$\| A \| <1$，则$\| A^{+} \| >1$。（ √ ）

7.设$A=\begin{bmatrix}\pi & 0 & 0\\0 & 0 & 2\\0 & 0 & 0\end{bmatrix}$，则$\cos A=\begin{bmatrix}0 & 0 & 0\\0 & 1 & 0\\0 & 0 & 1\end{bmatrix}$。（× ）

8.设$A=\begin{bmatrix}0 & 1 & 0\\1 & 0 & 1\end{bmatrix}$，则$\| A^{+}A \|_2=1$。（√ ）

9.A为n阶实对称矩阵，对R^n中的列向量x，定义$\| x \| = \sqrt{x^TAx}$，则$\| x \|$为向量x的范数 。 （× ）

判断题（三）

1.设$A,B\in C^{n\times n}$的奇异值分别为$\sigma_1\geqslant\sigma_2\geqslant\cdots\geqslant\sigma_n>0,\sigma_1'\geqslant\sigma_2'\geqslant\cdots\geqslant\sigma_n'>0$，如果$\sigma_i>\sigma_i'\ (i=1,2,\cdots,n)$，则$\|A^{+}\|_2>\|B^{+}\|_2$。（×）

2.设$A\in C^{n\times n}$为正规矩阵，则矩阵的谱半径$r(A)=\|A\|_2$。（√）

3.设$A\in C^{n\times n}$可逆，$B\in C^{n\times n}$，若对算子范数有$\|A^{-1}\|\cdot\|B\|<1$，则$A+B$可逆。（√）

4.设$A=\begin{pmatrix}0&-a_3&a_2\\a_3&0&-a_1\\-a_2&a_1&0\end{pmatrix}$为一非零实矩阵，则$-\left(a_1^2+a_2^2+a_3^2\right)^{-1}A$为$A$的一个广义逆矩阵。（√）

5.设A为矩阵，P为m阶酉矩阵，则PA与A有相同的奇异值。（√）

6.设$A\in C^{n\times n}$，且A的所有列和都相等，则$r(A)=\|A^{+}\|_\infty$（×）

7.如果$x=\left(x_1,x_2,\cdots,x_n\right)^T\in C^n$，则$\|x\|=\min\limits_{1\leqslant i\leqslant n}|x_i|$是向量范数。（×）

8.$A=\begin{bmatrix}0&0&1&0\\1&4&0&1\\1&0&6&2\\0&1&1&8\end{bmatrix}$至少有2个实特征值。（√）

9.设$A\in C^{n\times n}$，则矩阵范数$\|A^{+}\|_{m\infty}$与向量的1-范数相容。（√）

10.设$A\in C^{n\times n}$是不可逆矩阵，则对任一自相容矩阵范数有$\|I-A\|\geqslant 1$，其中为单位矩阵。（√）

证明题（一）

1.设$A \in C_r^{m\times n}$的奇异值分解为$A = U\begin{pmatrix} D & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}V^H$，其中$D = diag(\sigma_1, \sigma_2, \cdots, \sigma_r)$。证明：V的列向量是$A^H A$的特征向量

证明：

$A = U\begin{pmatrix} D & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}V^H \Rightarrow A^H = V\begin{pmatrix} D^H & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}U^H$

$A^H A = V\begin{pmatrix} D^H D & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}V$

$\because V$是酉矩阵

$\therefore V^H = V$

$\Rightarrow A^H A V = V\begin{pmatrix} D^H D & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

2.设$A^2 = A$，E为单位矩阵且是A=BC是A的最大秩分解，求证：CB=E

证明：利用幂等矩阵的条件

3.设$A = (a_{ij}) \in C^{n\times n}$的特征值为$\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$，证明：$\sum_{i=1}^{n}|\lambda_i|^2 \leqslant \|A\|_F^2$。

证明：

$\because A = URU^H$。其中R是一个上三角矩阵且主对角元素为A的特征值

$\therefore \sum_{i=1}^{n}|\lambda_i|^2 = \sum_{i=1}^{n}|R_{ii}|^2 \le \sum_{i=1}^{n}|R_{ii}|^2 + \sum_{i\neq j}|R_{ij}|^2 = \|R\|_F^2$

又$\because \|A\|_F = \|URU^H\|_F = \|R\|_F$

$\therefore \sum_{i=1}^{n}|\lambda_i|^2 \le \|A\|_F^2$

4.设$\lambda_i(i = 1,2,\cdots,n)$为正规矩阵$A \in C^{n\times n}$的特征值，证明：$|\lambda_i|^2(i = 1,2,\cdots,n)$是$A^H A$的特征值

证明：利用奇异值分解进而得出奇异值和特征值的关系

5.设$A = (a_{ij})_{n\times n}$和$B = (b_{ij})_{n\times n}$酉等价，证明：$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}|b_{ij}|^2 = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}|a_{ij}|^2$。

证明：

矩阵二范数具有酉不变性

6.设$A \in C^{n\times n}$为可逆矩阵，λ为A的任意一个特征值，$\|\cdot\|$为任意的算子范数，证明：$\frac{1}{\|A^{-1}\|} \leqslant |\lambda| \leqslant \sqrt[m]{\|A^m\|}$。

证明：

利用特征值小于任意算子范数

7.设矩阵$A \in C^{n\times n}$为行严格对角占优矩阵，用Gerschgorini圆盘定理证明：

（1）矩阵A为可逆矩阵；

（2）如果A矩阵的所有主对角元均为负数，证明A的所有特征值都是负实部

证明：

（1）利用严格对角占优矩阵的定义结合盖尔圆盘定理

（2）利用严格对角占优的性质和主对角元为负数的条件

8.（1）设矩阵$A \in C^{m\times n}(m < n)$，且$AA^H = I_m$其中$I_m$为单位矩阵，证明$A^H A$酉相似于对角矩阵，并求此对角矩阵。

（2）设$A \in C_n^{n\times n}$矩阵，证明：$\|AA^+\|_2 = 1$。

证明：

（1）利用奇异值分解，简化问题

（2）利用幂等矩阵的性质

证明题（二）

1.设$A \in C^{n\times n}$，E为单位矩阵，$\| A \|_a$为从属于向量范数$\| x \|_a$的算子范数，则当$\| A \|_a < 1$，证明：（1）E-A可逆；（2）$\| (E-A)^{-1} \|_a \leqslant \left(1-\| A \|_a\right)^{-1}$；

证明：

设$x \in C^n$为任一非零向量则

$\|(E-A)x\|_a = \|x - Ax\|_a \geq \|x\|_a - \|Ax\|_a \geq \|x\|_a - \|A\|_a\|x\|_a = \|x\|_a\left(1-\|A\|_a\right) > 0$

∴对于方程组$(E-A)x = 0$无非零解

∴$E-A$必定为可逆矩阵

即$(E-A)(E-A)^{-1} = E$

即$(E-A)^{-1} = E + A(E-A)^{-1}$

$\left\|(E-A)^{-1}\right\|_a = \left\|E + A(E-A)^{-1}\right\|_a \leq \|E\|_a + \|A\|_a\left\|(E-A)^{-1}\right\|_a = 1 + \|A\|_a \left\|(E-A)^{-1}\right\|_a$

∴$\left(1-\|A\|_a\right)\left\|(E-A)^{-1}\right\|_a \leq 1$

∴$\left\|(E-A)^{-1}\right\|_a \leq \left(1-\|A\|_a\right)^{-1}$

2.设$A \in C^{m\times n}$，证明：A是右可逆矩阵的充要条件是A是行满秩矩阵。

证明：

充分性：A行满秩⇒ AA^H为满秩矩阵 ⇒ $AA^H\left(AA^H\right)^{-1} = E \Rightarrow G = \left(A^H A\right)^{-1}A^H$为右逆矩阵

必要性：A是右可逆矩阵⇒ $AA_R^{-1} = E \Rightarrow rank(A) \geq rank\left(AA_R^{-1}\right) = n \Rightarrow rank(A) = n$

3.设$A \in C_r^{m\times n}(r>0)$的正奇异值为$\sigma_1 \geqslant \cdots \geqslant \sigma_r, B = \left[A^+, A^+\right]$的正奇异值为$\eta_1 \geqslant \cdots \geqslant \eta_r$，证明：$\sum_{i=1}^{r}\eta_i^2 = 2\sum_{i=1}^{r}\frac{1}{\sigma_i^2}$。

证明：

$A = U\begin{pmatrix} D & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}V$

$A^+ = V^H\begin{pmatrix} D^{-1} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}U^H$

$BB^H = 2A^+\left(A^+\right)^H = V^H\begin{pmatrix} 2D^{-2} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}V$

4.设d_i为m个非零常数，$P = \left(\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_m\right) \in C^{n\times m}$，$A = d_1\alpha_1\alpha_1^H + d_2\alpha_2\alpha_2^H + \cdots + d_m\alpha_m\alpha_m^H$。

证明：矩阵P列满秩的充要条件是$rank(A) = m$。

证明：

充分性：$A = d_1\alpha_1\alpha_1^H + d_2\alpha_2\alpha_2^H + \cdots + d_m\alpha_m\alpha_m^H$ 可以看做是相似对角化的结果

必要性：$rank(A) = m \Rightarrow A$满秩

5.设$A \in C_r^{m\times n}$，$Y \in C^{n\times r}, Z \in C^{r\times m}$且ZAY=E，证明：G=YZ是A的自反广义逆矩阵。

证明：

利用ZAY=E和自反广义逆的定义

6.证明：矩阵$A = \begin{bmatrix} 2 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2^2} & \frac{1}{2^3} & \frac{1}{2^4} \\ -\frac{2}{3} & 4 & \frac{2}{3^2} & \frac{2}{3^3} & \frac{2}{3^4} \\ -\frac{3}{4} & -\frac{3}{4^2} & 6 & \frac{3}{4^3} & \frac{3}{4^4} \\ -\frac{4}{5} & -\frac{4}{5^2} & -\frac{4}{5^3} & 8 & \frac{4}{5^4} \\ -\frac{5}{6} & -\frac{5}{6^2} & -\frac{5}{6^3} & -\frac{5}{6^4} & 10 \end{bmatrix}$的特征值为两两不相等的正实数。

证明：

根据盖尔圆盘定理，得出每个行盖尔圆都是孤立的，而共轭特征值都是成对出现，所以每个盖尔圆都有一个特征值

7.设A是秩为1的n阶矩阵，$tr(A)$为A的迹，证明：$A^n = (trA)^{n-1}A$。

证明：

秩1矩阵可以分解为一个列向量和行向量的乘积

8.若矩阵B对某个算子范数满足$\| B \| < 1$，证明：$I - B$可逆

证明：

利用特征值的模小于任何一个相容的矩阵范数 这个结论；而算子范数一定是相容的矩阵范数

所以$I - B$没有零特征值

证明题（三）

1.设$A \in C^{n\times n}$为正规矩阵，证明：A的奇异值等于A特征值的模；
证明：
利用奇异值分解简化证明过程

2.设$A \in C_r^{m\times n}$，E为n阶单位矩阵，证明：$rank\left(E - A^{+}A\right) = n - r$。
证明：
利用$A^{+}A$的幂等性质，幂等矩阵的特征值为0或者−1

3.设$\| A \|_a$是$C^{n\times n}$上的矩阵范数，D为n阶可逆矩阵，证明：对任意$A \in C^{n\times n}$，$\| A \|_b = \| D^{-1}AD \|_a$为$C^{n\times n}$上的矩阵范数。
证明：
正定性：当$A \neq 0$，则$D^{-1}AD \neq 0$，即$\| A \|_b = \| D^{-1}AD \|_a > 0$
齐次性：$\| \lambda A \|_b = \| D^{-1}\lambda AD \|_a = |\lambda| \| D^{-1}AD \|_a = |\lambda| \|A\|_b$
三角不等式：$\|A + B\|_b = \| D^{-1}(A + B)D \|_a = \| D^{-1}AD + D^{-1}BD \|_a \leq \| D^{-1}AD \|_a + \| D^{-1}BD \|_a$

4.设$A \in C^{n\times n}$为单纯矩阵，A可分解为一系列幂等矩阵A_i的加权和即$A = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i A_i$，其中$\lambda_i (i = 1,2,\cdots,n)$是A的特征值。
证明：
利用单纯矩阵的特征：单纯矩阵可以和对角矩阵相似对角化

5.设矩阵$A = \left(a_{ij}\right) \in C^n$满足$A^2 = A$，求矩阵函数$e^{At}$。
证明：
矩阵函数e^{At}的求解过程中，涉及到特征值的求解，而矩阵A为幂等矩阵，所以特征值为1或者0
或者利用展开公式

$$\mathrm{e}^{A} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} A^k$$

6.设矩阵$A \in C^{n\times n}$是正规矩阵，其特征值为$\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$，满足$|\lambda_1| \geqslant |\lambda_2| \geqslant \cdots \geqslant |\lambda_n|$，B=AU，其中U为酉矩阵，B的特征值为$\mu_1, \mu_2, \cdots, \mu_n$，
证明：如果$A^2 = 0$，则$A = 0$；
证明：
利用正规矩阵奇异值和特征值的关系以及奇异值分解

7.设矩阵$A, B \in C^{n\times n}$，若$ABA = A, (BA)^H = BA, AGA = A, (AG)^H = AG$，证明：$A^{+} = BAG$
证明：
直接利用MP逆的定义

8.设$A = \left(a_{ij}\right) \in P^{m\times n}$，证明：$\| A \| = (m + n)\max\limits_{i,j}\left\{|a_{ij}|\right\}, (1 \leqslant i \leqslant m, 1 \leqslant j \leqslant n)$是矩阵范数。
证明：
正定性：当$A \neq 0$，$\| A \| = (m + n)\max\limits_{i,j}\left\{|a_{ij}|\right\} \neq 0$
齐次性：$\|\lambda A\| = (m + n)\max\limits_{i,j}\left\{\left|\lambda a_{ij}\right|\right\} = |\lambda|(m + n)\max\limits_{i,j}\left\{|a_{ij}|\right\} = |\lambda|\|A\|$
三角不等式：$\|A + B\| = (m + n)\max\limits_{i,j}\left\{\left|a_{ij} + b_{ij}\right|\right\} \leq (m + n)\max\limits_{i,j}\left\{\left|a_{ij}\right|\right\} + (m + n)\max\limits_{i,j}\left\{\left|b_{ij}\right|\right\} = \|A\| + \| B \|$

模拟卷一

一、填空

设$A=\begin{pmatrix}0 & 1\\ 9 & 0\end{pmatrix},B=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & 1\end{pmatrix}$，

1.A-B的Jordan标准型为____。

2.是否可将A看做线性空间V^2中的某两个基之间的过度矩阵（ ）

3.是否可将B看做欧式空间V^2的某个基的度量矩阵（ ）

4.$\| vec(B) \|_p$ =____，其中$1\leqslant p<+\infty$。

5.若常数k使得kA为收敛矩阵，则k应满足的条件是____。

6.$A\otimes B$的全体特征值是____

7.$\| A\otimes B \|_2$ =____

二、设$A\in C^{m\times n}$，对于矩阵的2-范数$\| A \|_2$和F-范数$\| A \|_F$，定义实数

$\| A \| = \sqrt{\| A \|_2^2+\| A \|_F^2}$，（任意$A\in C^{m\times n}$）

验证$\| A \|$是$C^{m\times n}$中的矩阵范数，且与向量的2-范数相容。

三、已知$A=\begin{pmatrix}1 & 1 & -1\\ 2 & 0 & 2\\ -1 & 1 & 1\end{pmatrix},b(t)=\begin{pmatrix}e^{3t}\\ e^{3t}\\ 0\end{pmatrix},x(0)=\begin{pmatrix}1\\ 1\\ 0\end{pmatrix}$

（1）求e^{At}；

（2）用矩阵函数方法求微分方程$\frac{d}{dt}x(t)=Ax(t)+b(t)$满足初始条件x(0)的解；

四、用Householder变换求矩阵$A=\begin{pmatrix}1 & 2 & 0 & 0\\ 1 & 0 & 3 & 4\\ 1 & 0 & 3 & 0\\ 1 & 2 & 0 & 4\end{pmatrix}$的QR分解。

五、用Gerschgorin定理隔离矩阵$A=\begin{pmatrix}20 & 1 & 4\\ 6 & 8 & 6\\ 1 & 1 & i\end{pmatrix}$的特征值（要求画图表示）

六、已知$A=\begin{pmatrix}0 & 1 & 0 & 1\\ 1 & 2 & 1 & 2\\ 1 & 0 & 1 & 0\\ 2 & 1 & 2 & 1\end{pmatrix},b=\begin{pmatrix}1\\ 3\\ 1\\ 3\end{pmatrix}$

（1）求矩阵A的满秩分解；

（2）求A^+；

（3）用广义逆矩阵方法判断方程组Ax=b是否有解；

（4）求方程组Ax=b的极小范数解或极小范数最小二乘解（指出所求的是哪种解）

七、已知欧式空间$R^{2\times 2}$的子空间$V=\left\{X=\begin{pmatrix}x_1 & x_2\\ x_3 & x_4\end{pmatrix} \middle| \begin{matrix}x_1-x_4=0\\ x_2-x_3=0\end{matrix}\right\}$中的内积为$(A,B)=$

$\sum_{i=1}^{2}\sum_{j=1}^{2}a_{ij}b_{ij}$，

$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix}$，V中的线性变换为$T(X)=XP+XT$，任意$X\in V, P=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

（1）给出子空间V的一个标准正交基；

（2）验证T是V中的对称变换；

（3）求V的一个标准正交基，使T在该基下的矩阵为对角矩阵；

模拟卷二

一、填空题

1.设$W_1 = L(\alpha_1, \alpha_2), \alpha_1 = [1 \quad 1 \quad 0]^T, \alpha_2 = [0 \quad 1 \quad 1]^T$，则$W_1$在$R^3$中的正交补空间为____。

2.设$V = \left\{A | A = A^T, A \in R^{n\times n}\right\}$是$R^{n\times n}$的子空间$\dim V =$____。

3.设$x = [1 \quad 2 \quad 3]^T, y = [1 \quad 1+i \quad 0]^T$，则$\| x \otimes y^H \| = \begin{cases} ___ & v = 1 \\ ___ & v = m_2 \\ ___ & v = \infty \end{cases}$。

4.已知$A = \begin{bmatrix} 1 & -8 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$，且幂级数$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{k}{6^k} x^k$的收敛半径为6，则矩阵幂级数$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{k}{6^k} A^k$是____（收敛还是发散），其理由是____。

5.若$A(t) = \begin{bmatrix} \sin t & 2t^3 \\ 2\sqrt{t} & e^{2t} \end{bmatrix}$，则$\int_0^1 A(t)dt =$____。

6.矩阵$A = \begin{bmatrix} 1 & 4 & -1 & 5 & 6 \\ 2 & 0 & 0 & 0 & -14 \\ -1 & 2 & -4 & 0 & 1 \\ 2 & 6 & -5 & 5 & -7 \end{bmatrix}$，则A的满秩分解为____。

7.若$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & k & 0 \\ 0 & 0 & k^2 \end{bmatrix}$是正定矩阵，则k应满足的条件是____。

8.λ矩阵$A(\lambda) = \begin{bmatrix} \lambda^3 - \lambda & 2\lambda^2 \\ \lambda^2 + 5\lambda & 3\lambda \end{bmatrix}$，则其Smith标准型为____。

9.设$\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$是Hermite矩阵A的特征值，则$A^H A$的特征值为____。

10.在R^3中，定义内积$\left(x_i, x_j\right) = i \times j$，则空间的一组基$x_1, x_2, x_3$的度量矩阵为____。

二、计算题

1.设$x_1 = (2 \quad 1 \quad 3 \quad 1)^T, x_2 = (-1 \quad 1 \quad -3 \quad 1)^T$，$y_1 = (4 \quad 5 \quad 3 \quad -1)^T, y_2 = (1 \quad 5 \quad -3 \quad 1)^T$，

$V_1 = span\{x_1, x_2\}, V_2 = span\left\{y_1, y_2\right\}$试求：

（1）$V_1 + V_2$的基与维数；（2）$V_1 \cap V_2$的基与维数

2.设多项式空间$P_2[t]$有两组基为；$f_1(t) = 1 - t, f_2(t) = 1 + t^2, f_3(t) = t + 2t^2$；$g_1(t) = 1, g_2(t) = t, g_3(t) = t^2$线性空间T满足$T\left(f_1(t)\right) = 2 + t^2, T\left(f_2(t)\right) = t, T\left(f_1(t)\right) = 1 + t + t^2$

（1）求T在基$f_1(t), f_2(t), f_3(t)$下的矩阵A；

（2）求T在基$g_1(t), g_2(t), g_3(t)$下的矩阵B；

（3）设$f(t) = 1 + 2t + 3t^2$，求$T\left(f(t)\right)$；

3.设$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$，求：（1）可逆阵P和A的Jordan标准型J，使得$A = PJP^{-1}$

（2）求矩阵函数$\sin\left(\frac{\pi}{4}A\right)$。

4.求$A=\begin{bmatrix}1 & 0\\0 & 1\\1 & 1\end{bmatrix}$的奇异值分解。

5.设$x=\left[\xi_1 \quad \xi_1 \quad \cdots \quad \xi_1\right]^T, A=\left(a_{ij}\right)_{n\times n}$是对称阵，$b=\left[\beta_1 \quad \beta_2 \quad \cdots \quad \beta_n\right]^T$为n维向量，c为常数，
求$f(x)=x^TAx-b^Tx+c$对x的导数

三、证明题
1.设$P\in C^{n\times n}$，且$P^2=P$，证明：（1）P的特征值为0或1；（2）$R\left(I_n-P\right)=N(P)$;

2.若矩阵B对某个算子范数满足$\|B\|<1$，
证明：（1）I-B可逆；（2）已知$(I-B)^{-1}=\sum_{k=0}^{\infty}B^k$，则$\|(I-B)^{-1}\|\leqslant\frac{1}{1-\|B\|}$。