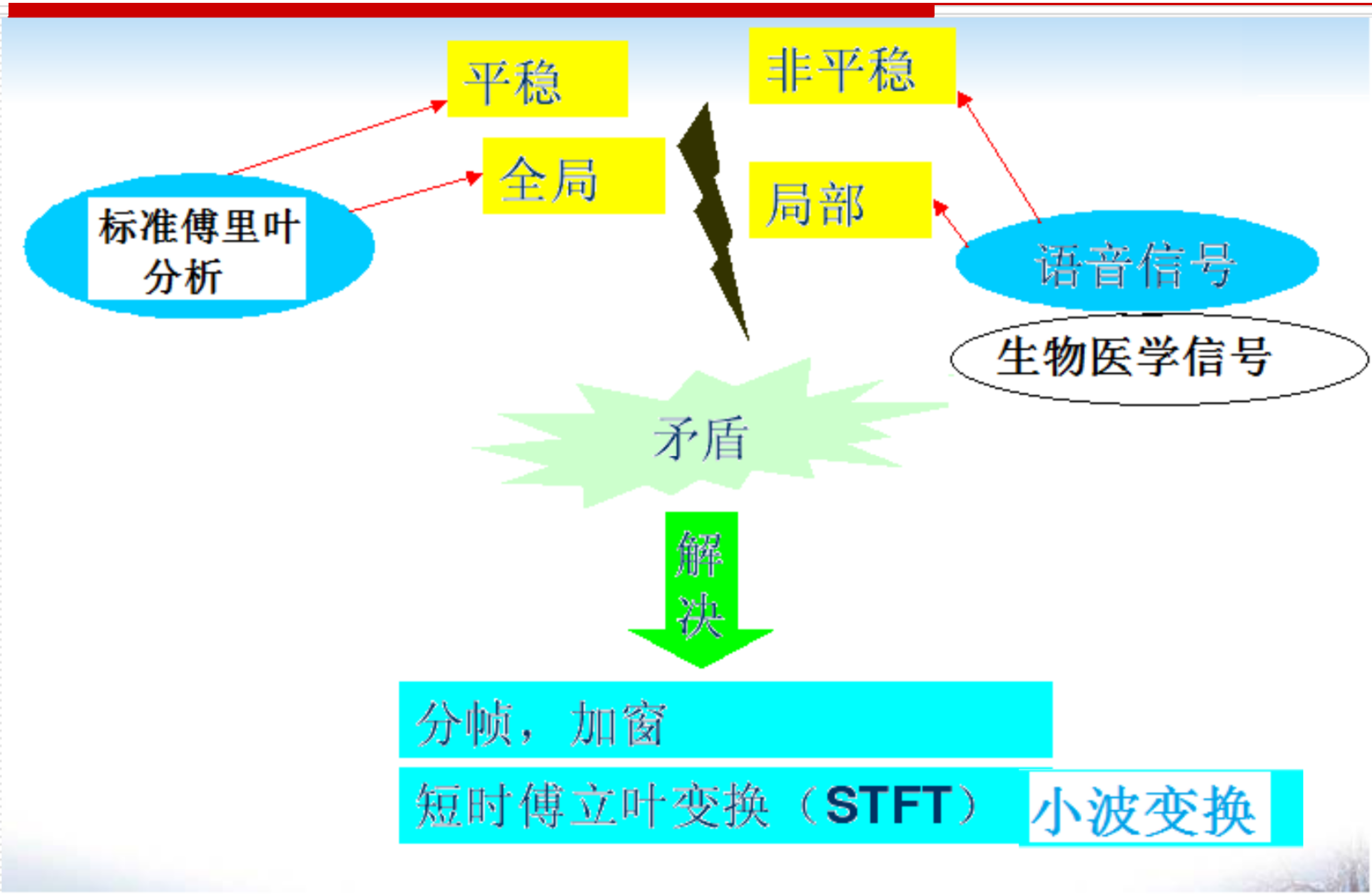
Lecture 8 Time-frequency analysis

Short Time Fourier Transformation (STFT)

1. 概述



2. 短时傅立叶变换(STFT)--定义

- 定义：短时傅立叶变换也叫短时谱（加窗的方式）

$$X_n(e^{j\varpi}) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} x(m)w(n-m)e^{-j\varpi m}$$

- 短时谱的特点：

1) 时变性：既是角频率ω的函数又是时间n的函数

2) 周期性：是关于ω的周期函数，周期为2π

短时傅立叶变换主要用于生物医学信号、语音分析合成系统，由其逆变换可以精确地恢复原始信号。

2. 短时傅立叶变换-定义

- 短时傅里叶变换是窗选信号的标准傅里叶变换。下标**n**区别于标准的傅里叶变换。**w(n-m)**是窗口函数序列。不同的窗口函数序列，将得到不同的傅里叶变换的结果。
- 短时傅里叶变换有两个自变量：**n**和**ω**，所以它既是关于时间**n**的离散函数，又是关于角频率**ω**的连续函数。
- 与离散傅里叶变换和连续傅里叶变换的关系一样，若令**ω＝2πk/N**，则得到离散的短时傅里叶变换,它实际上是在频域的取样。

$$X_n(e^{j\frac{2k\pi}{N}})=X_n(k)=\sum_{m=-\infty}^{\infty}x(m)w(n-m)e^{-j\frac{2k\pi m}{N}} \qquad 0\le k\le N-1$$

$$X_n(k)=\sum_{m=-\infty}^{\infty}x(m)w(n-m)e^{-j\frac{2k\pi m}{N}}\qquad 0\le k\le N-1$$

2. 短时傅立叶变换-定义

- 这两个公式都有两种解释：
  - ① 当n固定不变时，它们是序列w(n-m)x(m)(-∞＜m＜∞)的标准傅里叶变换或标准的离散傅里叶变换。此时与标准傅里叶变换具有相同的性质，而$X_n(k)$与标准的离散傅里叶变换具有相同的特性。
  - ② 当ω或k固定时，$X_n(k)$看做是时间n的函数。它们是信号序列和窗口函数序列的卷积，此时窗口的作用相当于一个滤波器。

2. 短时傅立叶变换-定义

- 频率分辨率**Δf**、取样周期**T**、加窗宽度**N**三者关系：

$$\Delta f = \frac{1}{NT}$$

- 窗宽对短时频谱的影响

  －窗宽长——频率分辨率高，能看到频谱快变化；

  －窗宽短——频率分辨率低，看不到频谱的快变化；

3. 短时傅立叶变换--标准傅里叶变换的解释

- 短时傅里叶变换可写为

$$X_n(e^{j\omega}) = \sum_{m=-\infty}^{\infty}[x(m)w(n-m)]e^{-j\omega m}$$

- 当n取不同值时窗w(n-m)沿着x(m)序列滑动，所以w(n-m)是一个“滑动的”窗口。
- 由于窗口是有限长度的，满足绝对可和条件，所以这个变换是存在的。与序列的傅里叶变换相同，短时傅里叶变换随着ω作周期变化，周期为2π。

3. 短时傅立叶变换--标准傅里叶变换的解释

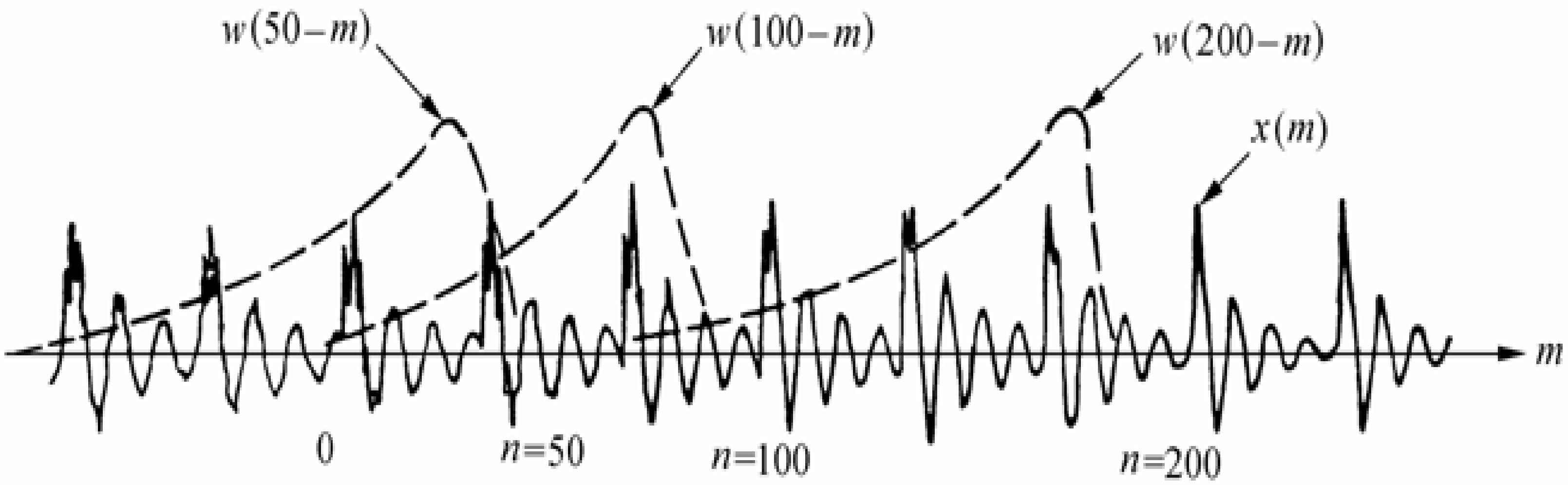


图 4-1 在几个 n 值上 x(m)与 w(n-m)的示意图

3. 短时傅立叶变换--标准傅里叶变换的解释

- 根据功率谱定义，可以写出短时功率谱与短时傅里叶变换之间的关系

$$S_n(e^{j\omega}) = X_n(e^{j\omega}) \bullet X^*{}_n(e^{j\omega}) = |X_n(e^{j\omega})|^2$$

- 式中*表示复共轭运算。同时功率谱是短时自相关函数 $R_n(k) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} w(n-m)x(m)w(n-k-m)x(m+k)$ 的傅里叶变换。
- 下面将短时傅里叶变换写为另一种形式。设信号序列和窗口序列的标准傅里叶变换为

$$X(e^{j\omega}) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} x(m)e^{-j\omega m} \qquad W(e^{j\omega}) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} w(m)e^{-j\omega m}$$

均存在。当n取固定值时，w(n-m)的傅里叶变换为

$$\sum_{m=-\infty}^{\infty} w(n-m)e^{-j\omega m} = e^{-j\omega n} \bullet W(e^{-j\omega})$$

$$X_n(e^{j\omega}) = X(e^{j\omega}) * [e^{-j\omega n} \bullet W(e^{-j\omega})]$$

.3 短时傅立叶变换--标准傅里叶变换的解释

- 用波形乘以窗函数，不仅为了在窗口边缘两端不引起急剧变化，使波形缓慢降为零，而且还相当于对信号谱与窗函数的傅里叶变换进行卷积。
- 为此窗函数应具有如下特性：
  - ① 频率分辨率高，即主瓣狭窄、尖锐；（矩形窗）
  - ② 通过卷积，在其他频率成分产生的频谱泄漏少，即旁瓣衰减大。（汉明窗）
  - 这两个要求实际上相互矛盾，不能同时满足。

因为窗口宽度N、取样周期T和频率分辨率Δf之间存在下列关系Δf＝1/NT，可见：

- 窗口宽度↑→频率分辨率↑ →时间分辨率↓
- 窗口宽度↓→频率分辨率↓ →时间分辨率↑，因而二者是矛盾的。

3. 短时傅立叶变换--标准傅里叶变换的解释

- 不同窗口的特点。
  - 矩形窗：主瓣窄，衰减慢。虽然频率分辨率很高，但由于第一旁瓣的衰减只有**13.2dB**，所以不适合用于频谱成分动态范围很宽的语音分析中。
  - 汉明窗：主瓣宽，衰减快。在频率范围中的分辨率较高，而且由于旁瓣的衰减大于**42dB**，具有频谱泄漏少的优点，频谱中高频分量弱、波动小，因而得到较平滑的谱。
  - 汉宁窗是高次旁瓣低，第一旁瓣衰减只有**30dB**。

3. 短时傅立叶变换--标准傅里叶变换的解释

- 结论:
  - 窗口宽度与短时傅里叶变换特性之间的关系
    - 用窄窗可得到好的时间分辨率
    - 用宽窗可以得到好的频率分辨率。
    - 但由于采用窗的目的是要限制分析的时间以使其中波形的特性没有显著变化，因而要折衷考虑。

4. 短时傅立叶变换的取样率

- $X_n(e^{j\omega})$ 恢复出x(n)的过程称为短时傅里叶反变换，是由短时谱合成信号的问题
- 由于$X_n(e^{j\omega})$是n和ω的二维函数，因而必须对 $X_n(e^{j\omega})$ 在所涉及的两个变量，即时域及频域内进行取样，取样率的选取应保证 $X_n(e^{j\omega})$ 不产生混叠失真，从而能够恢复原始信号x(n)。

4. 短时傅立叶变换的取样率---时间取样率

- 当ω为固定值时，$X_n(e^{j\omega})$是一个单位函数响应为w(n)的低通滤波器的输出。设低通滤波器的带宽为BHz，则$X_n(e^{j\omega})$具有与窗相同的带宽。根据取样定理，$X_n(e^{j\omega})$的取样率至少为2B才不致混叠。
- 低通滤波器的带宽由w(n)的傅里叶变换$W(e^{j\omega})$的第一个零点位置ω_{01}决定，因而B值取决于窗的形状与长度。

4. 短时傅立叶变换的取样率---频率取样率

当 n 为固定值时， $X_n(e^{j\omega})$ 为序列 x(m)w(n-m)的傅里叶变换。为了用数字方法得到 x(n)，

必须对 $X_n(e^{j\omega})$ 进行频域的取样。由于 $X_n(e^{j\omega})$ 是关于ω的周期为 2π的周期函数，所以

只需讨论在 2π范围内频率取样的问题。

取样在 2π范围内等间隔地进行。设取样点数为 L，则各取样频率值为

$\omega_k=2\pi k/L$，k=0，1，…，L-1

L 为取样频率。

含义：在单位圆内取 L 个均匀分布的频率，在这些频率上求出相应的 $X_n(e^{j\omega})$ 值。

在频域内 L 个角频率上对 $X_n(e^{j\omega})$ 进行取样，由这些取样恢复出的时间信号应该是

x(m)w(n-m)进行周期延拓的结果，延拓周期为 2πk/ωk=L。

为使恢复的时域信号不产生混叠失真，需满足条件　L≥N

表明：在 0~2π范围内取样至少应有 N 个样点。通常可取 L=N。

4. 短时傅立叶变换的取样率---总取样率

总取样率 SR 为时域取样率和频域取样率的乘积

$$SR=2BL=\frac{2f_sL}{N}$$ ，直角窗

$$SR=2BL=\frac{4f_sL}{N}$$ ，海明窗

当 L＝N 时，直角窗时 SR＝2fs，海明窗时 SR＝4fs；

即短时谱表示所要求的取样率是原信号时域取样率 fs 的 2 或 4 倍。

对大多数实际应用的窗，其带宽 B 都与 fs／N 成正比，即 B＝k・fs/N

这里 k 为正比例常数。所以 $X_n(e^{j\omega})$ 的最低时域取样率为 2k・fs/N。因此

SR＝2k・fs/N・L≥2k・fs/N・N＝2kfs　其中 SR 的单位为 Hz。

最低取样率为 SRmin＝2kfs　　SRmin／fs＝2k

因而，对短时谱的取样率是信号波形取样率的 2k 倍，这个比值称为“过取样比”。

采用海明窗时，过取样比为 4(即 k=2)。

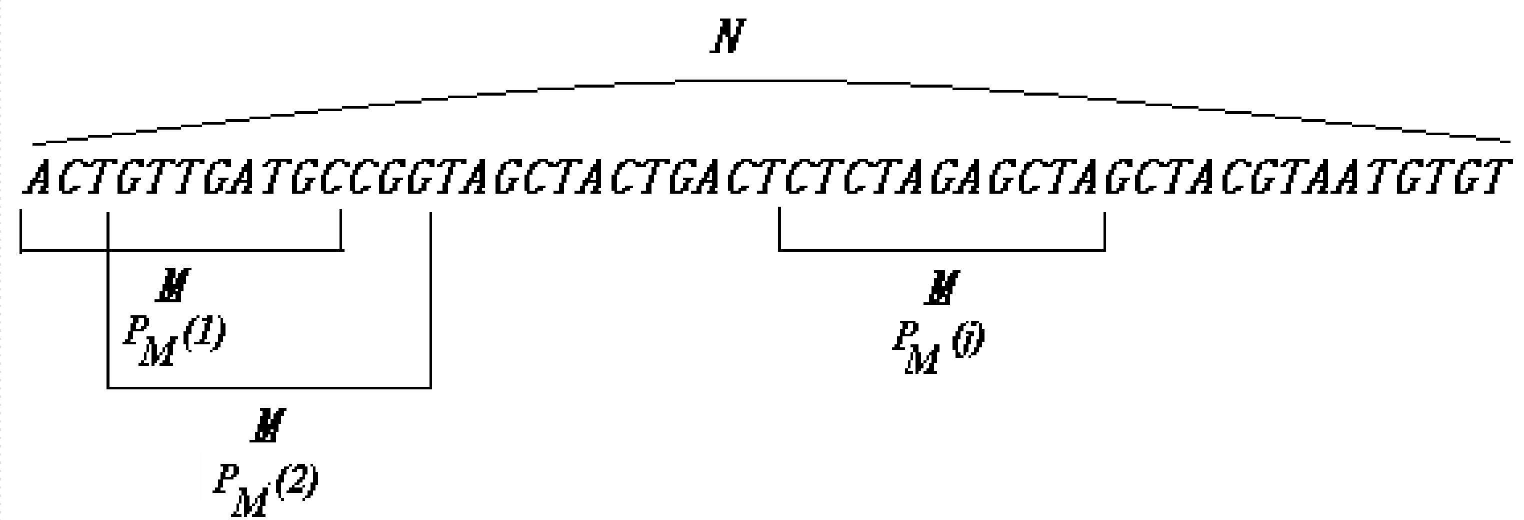
5. **STFT**应用实例

基于功率谱预测蛋白编码区

Method

(1) Predicting process:

Slide Window Length *M*



Step length? Window Length? *P*=5?

Method

(2) DNA sequence mapping

DNA sequence:	A	G	C	A	G	T	A	C	A	G	T	G	T	A	C	G	G	A	T
Apply X_A:	1	0	0	1	0	0	1	0	1	0	0	0	0	1	0	0	0	1	0
Apply X_T:	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	1	0	1	0	0	0	0	0	1
Apply X_C:	0	0	1	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0
Apply X_G:	0	1	0	0	1	0	0	0	0	1	0	1	0	0	0	1	1	0	0

Method

(3) Computing the Power spectrum by Fourier analysis

$$S(f) = \sum_{\alpha} S_{\alpha}(f) = \sum_{\alpha} \frac{1}{N} \left| \sum_{n=0}^{N-1} X_{\alpha}(n) \exp(-j 2\pi f n) \right|^2$$

Method

(4) Defining local Signal-to-noise ratio (S/N)

$$P_M(j) = S_M(1/3) \,/\, \mathrm{AP}$$

Where, M (< N) is the length of sliding window;

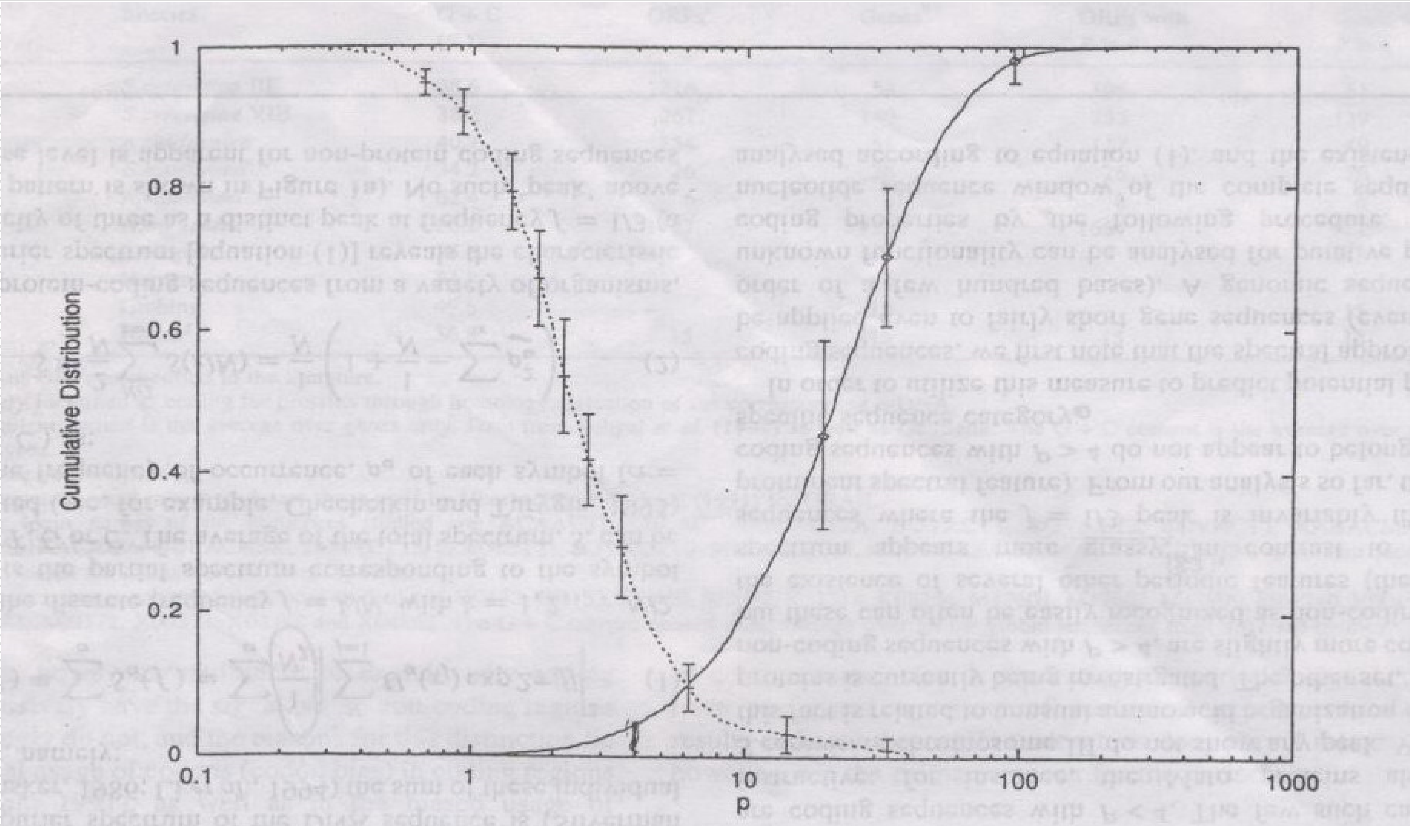
S_M **(1/3) is PSD at 1/3 frequency point;**

AP is the averaged PSD.

Method

（5）Prediction threshold: 4 or others ?

The distribution of period–3 : P_M=?



Coding sequences: 95%, P>4;

Non-coding sequences: 90%, P<4.

Method

(6) Classify according to the local Signal-to-noise ratio (S/N) in a window

$P_M(j)$ is a discriminator between coding and non – coding sequences.

$P_M(j) > 4$ **Coding sequences**

$P_M(j) < 4$ **Non – coding sequences**

Thanks a lot!