§2 空间分解与维数定理

程光辉

2020 年 3 月 3 日

定义 1 设 V_1, V_2 是线性空间 V 的子空间, 则称

$$V_1 + V_2 = \{\alpha_1 + \alpha_2 | \forall \alpha_1 \in V_1, \forall \alpha_2 \in V_2\}$$

是子空间 V_1 与 V_2 的和，而

$$V_1 \cap V_2 = \{\alpha | \alpha \in V_1 \text{且} \alpha \in V_2\}$$

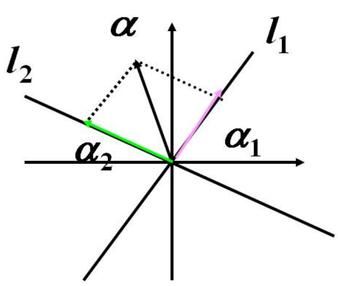
是子空间 V_1 与 V_2 的交.

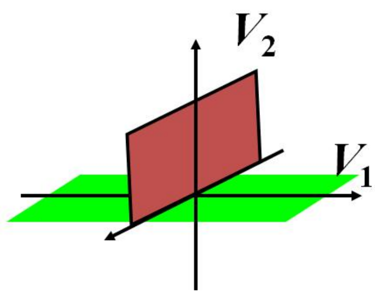
定理 1 设 V_1, V_2 是线性空间 V 的子空间, 则 $V_1 + V_2$ 和 $V_1 \cap V_2$ 也是 V 的子空间.

推论 1 设 V_1, V_2 是线性空间 V 的子空间, 则 $V_1 + V_2$ 是 V 中包含子空间 V_1 和 V_2 的最小子空间.

推论 2 设 V_1, V_2 是线性空间 V 的子空间, 则 $V_1 \cap V_2$ 是 V 中即包含于 V_1，又包含于 V_2 的最大子空间.

注意: $V_1 + V_2$ 是子空间, $V_1 \cap V_2$ 是子空间, 那么 $V_1 \cup V_2$ 是子空间吗？





定理 2 *(维数定理)* 设 V_1, V_2 是线性空间 V 的子空间, 则:

$$dim(V_1) + dim(V_2) = dim(V_1 + V_2) + dim(V_1 \cap V_2).$$

证明： 设 $\boldsymbol{V_1, V_2}$ 的维数分别是 $\boldsymbol{s, t}$，$\boldsymbol{V_1 \cap V_2}$ 的维数是 $\boldsymbol{m}$. 取 $\boldsymbol{V_1 \cap V_2}$ 的一组基

$$\boldsymbol{\alpha_1, \cdots, \alpha_m.}$$

如果 $\boldsymbol{m = 0}$, 这组基为空集，下面讨论中 $\boldsymbol{\alpha_1, \cdots, \alpha_m}$ 不出现，但不影响后面分析.

在 $\boldsymbol{\alpha_1, \cdots, \alpha_m}$ 基础上扩充成 $\boldsymbol{V_1}$ 的一组基

$$\boldsymbol{\alpha_1, \cdots, \alpha_m, \beta_1, \cdots, \beta_{s-m},}$$

同理也扩充成 $\boldsymbol{V_2}$ 的一组基

$$\boldsymbol{\alpha_1, \cdots, \alpha_m, \gamma_1, \cdots, \gamma_{t-m}.}$$

下面证明向量组

$$\boldsymbol{\alpha_1, \cdots, \alpha_m, \beta_1, \cdots, \beta_{s-m}, \gamma_1, \cdots, \gamma_{t-m}}$$

是 $\boldsymbol{V_1 + V_2}$ 的一组基. 即有维数定理成立.

因为

$$\begin{aligned} \boldsymbol{V_1} &= \mathrm{span}\{\boldsymbol{\alpha_1, \cdots, \alpha_m, \beta_1, \cdots, \beta_{s-m}}\} \\ \boldsymbol{V_2} &= \mathrm{span}\{\boldsymbol{\alpha_1, \cdots, \alpha_m, \gamma_1, \cdots, \gamma_{t-m}}\}, \end{aligned}$$

所以

$$\boldsymbol{V_1 + V_2} = \mathrm{span}\{\boldsymbol{\alpha_1, \cdots, \alpha_m, \beta_1, \cdots, \beta_{s-m}, \gamma_1, \cdots, \gamma_{t-m}}\}.$$

下面证明

$$\boldsymbol{\alpha_1, \cdots, \alpha_m, \beta_1, \cdots, \beta_{s-m}, \gamma_1, \cdots, \gamma_{t-m}}$$

线性无关.

令

$$\boldsymbol{k_1\alpha_1 + \cdots + k_m\alpha_m + p_1\beta_1 + \cdots + p_{s-m}\beta_{s-m} + q_1\gamma_1 + \cdots + q_{t-m}\gamma_{t-m} = 0,}$$

记

$$\boldsymbol{\alpha = k_1\alpha_1 + \cdots + k_m\alpha_m + p_1\beta_1 + \cdots + p_{s-m}\beta_{s-m} = -q_1\gamma_1 - \cdots - q_{t-m}\gamma_{t-m}.}$$

由 $\boldsymbol{\alpha = k_1\alpha_1 + \cdots + k_m\alpha_m + p_1\beta_1 + \cdots + p_{s-m}\beta_{s-m}}$ 知，$\boldsymbol{\alpha \in V_1}$；由 $\boldsymbol{\alpha = -q_1\gamma_1 - \cdots - q_{t-m}\gamma_{t-m}}$ 知，$\boldsymbol{\alpha \in V_2}$，于是有 $\boldsymbol{\alpha \in V_1 \cap V_2}$, 即 $\boldsymbol{\alpha}$ 可由 $\boldsymbol{\alpha_1, \cdots, \alpha_m}$ 线性表出. 令 $\boldsymbol{\alpha = l_1\alpha_1 + \cdots + l_m\alpha_m}$, 则

$$\boldsymbol{l_1\alpha_1 + \cdots + l_m\alpha_m + q_1\gamma_1 + \cdots + q_{t-m}\gamma_{t-m} = 0,}$$

由于 $\alpha_1, \cdots, \alpha_m, \gamma_1, \cdots, \gamma_{t-m}$ 线性无关，所以

$$l_1 = \cdots = l_m = q_1 = \cdots = q_{t-m} = 0,$$

即 $\alpha = 0$. 从而有

$$k_1\alpha_1 + \cdots + k_m\alpha_m + p_1\beta_1 + \cdots + p_{s-m}\beta_{s-m} = 0.$$

又因为 $\alpha_1, \cdots, \alpha_m, \beta_1, \cdots, \beta_{s-m}$ 线性无关，得

$$k_1 = \cdots = k_m = p_1 = \cdots = p_{s-m} = 0.$$

综上，证明了

$$\alpha_1, \cdots, \alpha_m, \beta_1, \cdots, \beta_{s-m}, \gamma_1, \cdots, \gamma_{t-m}$$

线性无关，因此它是 $V_1 + V_2$ 的一组基，故维数定理成立.

定义 2 设 V_1, V_2 是线性空间 V 的子空间, 若对 $\forall \alpha \in V_1 + V_2$, 有

$$\alpha = \alpha_1 + \alpha_2 \quad (\alpha_1 \in V_1, \alpha_2 \in V_2),$$

且这种表示是**唯一的**, 这个和 $V_1 + V_2$ 就称为直和, 记为 $V_1 \oplus V_2$.

定理 3 *设 V_1, V_2 是线性空间 V 的子空间, 则如下命题相互等价:*

(1) $V_1 + V_2$ 是直和;

(2) 0 向量表示法唯一, 即若 $0 = \alpha_1 + \alpha_2$ $(\alpha_1 \in V_1, \alpha_2 \in V_2)$, 必有 $\alpha_1 = 0, \alpha_2 = 0$;

(3) $V_1 \bigcap V_2 = \{0\}$.

推论 3 *设 V_1, V_2 是线性空间 V 的子空间, 令 $W = V_1 + V_2$, 则 $W = V_1 \oplus V_2$ 充要条件是 $dim(W) = dim(V_1) + dim(V_2)$.*

例 1 *(1) 设 α, β 是线性空间 V 中线性无关的两个向量, 那么 $L(\alpha) + L(\beta)$ 是直和吗? $L(\alpha, \alpha+\beta) + L(\beta)$ 呢? (其中 $L(\alpha, \beta)$ 代表由向量 α, β 生成的子空间.)*

(2) 设 $\mathbf{R}^{n\times n}$ 表示所有 n 阶实方阵构成的线性空间, 而所有的实对称矩阵 $(A^T = A)$ 的集合 V_1 及所有实反对称矩阵 $(A^T = -A)$ 的集合 V_2, V_1 和 V_2 是子空间吗? 它们的和是直和吗? 如果是, $\mathbf{R}^{n\times n} = V_1 \oplus V_2$ 吗?

解: (1) $L(\alpha) + L(\beta)$ 是直和; $L(\alpha, \alpha+\beta) + L(\beta)$ 不是直和.

(2) 构成子空间; 是直和; $\mathbf{R}^{n\times n} = V_1 \oplus V_2$ 成立.

多个子空间的直和是两个子空间直和的自然扩充, 分解式唯一.

定理 4 设 $\boldsymbol{V_1}, \boldsymbol{V_2}, \cdots, \boldsymbol{V_s}$ 是线性空间 $\boldsymbol{V}$ 的子空间, 则如下命题相互等价:

(1) $\boldsymbol{W} = \sum \boldsymbol{V}_i$ 是直和;

(2) $\mathbf{0}$ 向量表示法唯一;

(3) $\boldsymbol{V_i} \cap (\sum_{j \neq i} \boldsymbol{V_j}) = \{\mathbf{0}\}, \mathbf{1} \leq \boldsymbol{i} \leq \boldsymbol{s}$.

(4) $dim \boldsymbol{W} = \sum dim(\boldsymbol{V_i})$