非线性方程求根

用**数值方法**求非线性方程的根, 通常分两步进行:

第一步: **对根进行隔离**,找出隔根区间,或在隔根区间内确定一个解的近似值x_0;

第二步:**逐步逼近**,利用近似解x_0 (或隔根区间)通过**迭代算法**得到更精确的近似解.

设$f(x) = 0$的根为 x^*,通过**迭代计算**, 产生序列:

$$x_0 \to x_1 \to x_2 \to \cdots \to x_n \cdots\cdots\cdots$$

只须 $\lim_{n\to\infty} x_n = x^*$

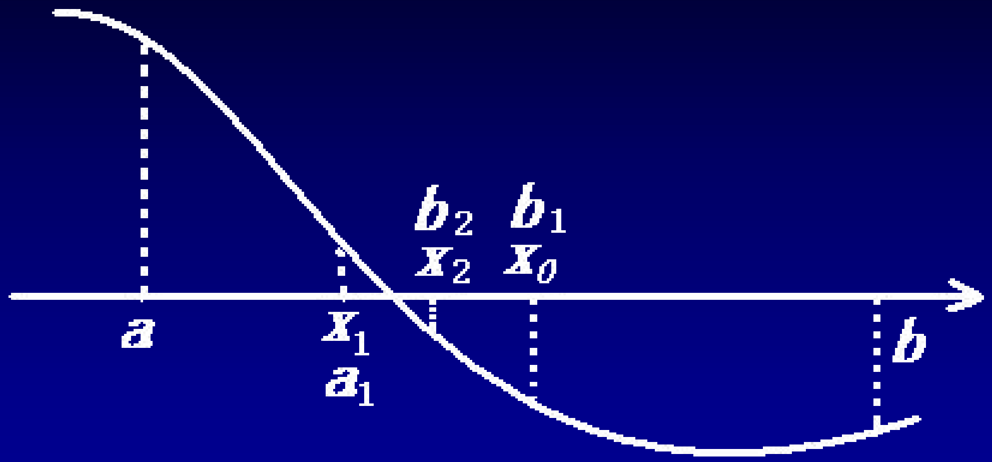
一、二分法

定理2.1 设函数 $f(x)$在区间$[a, b]$上连续，且

$$f(a)f(b)<0,$$

则方程$f(x)=0$ 在区间(a, b)内至少有一个根。

基本思想： 对有根区间$[a, b]$逐次分半，直到满足精度要求 。



二分法计算过程中产生区间序列

$[a_k，b_k]$（$k=1，2，3，\ldots\ldots$）

显然有

$$[a，b]\supset[a_1，b_1]\supset[a_2，b_2]\supset\ldots\supset[a_n，b_n]$$

有如下性质

（1）$b_n-a_n=（b-a）/ 2^n$;

（2）$a_{n+1}\geq a_n，b_{n+1}\leq b_n$;

（3）$f（a_n）f（b_n）<0.$

当n充分大时,令

$$x_n=\frac{b_n+a_n}{2}$$

定理2.2 设x^*为方程$f(x)=0$在区间$[a, b]$内的唯一根，$f(x)$满足$f(a)f(b)<0$，则二分法计算过程中第n个区间$[a_n, b_n]$的中点x_n满足不等式

$$\left|x_n - x^*\right| \le \frac{b-a}{2^{n+1}}$$

证：因为$a_n \leqslant x^* \leqslant b_n$，所以

$$\left|x_n - x^*\right| = \left|\frac{1}{2}(a_n + b_n) - x^*\right| = \frac{1}{2}\left|(a_n - x^*) + (b_n - x^*)\right|$$

$$\le \frac{1}{2}[|a_n - x^*| + |b_n - x^*|]$$

$$= \frac{1}{2}[(x^* - a_n) + (b_n - x^*)]$$

故有

$$\left|x_n - x^*\right| \leq \frac{b_n - a_n}{2} = \frac{b-a}{2^{n+1}}$$

由此可知，当$n \to \infty$时，$x_n \to x^*$，即二分法产生的序列收敛。

算法(二分法求解非线性方程)

第一步：输入误差限ε_0，ε_1，计算 $y_1 \leftarrow f(a)$，$y_2 \leftarrow f(b)$；

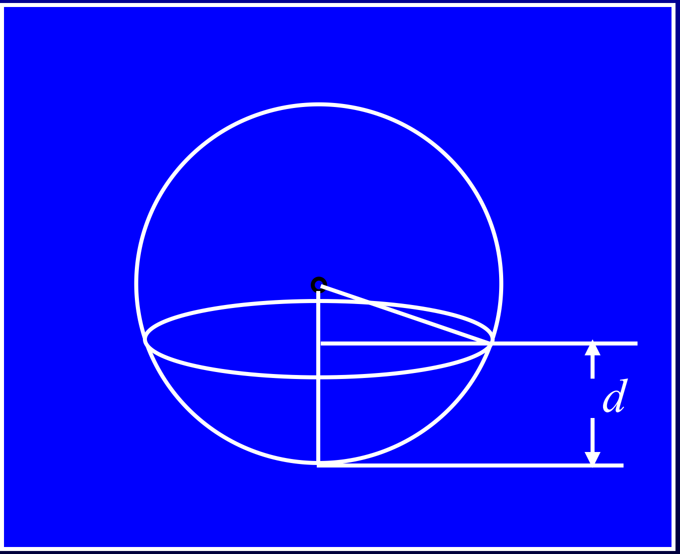
第二步：计算$x_0 \leftarrow 0.5(a+b)$，$y_0 \leftarrow f(x_0)$，若$|y_0| <= \varepsilon_0$，则输出x_0，结束。否则转第三步；

第三步：若 $y_0 y_1 < 0$，则置$b \leftarrow x_0$，$y_2 \leftarrow y_0$；否则$a \leftarrow x_0$，$y_1 \leftarrow y_0$，转第四步；

第四步：若$|b - a| > \varepsilon_1$则转第二步；否则，输出x_0结束。

例1. 水中浮球问题

有一半径$r=10$ cm的球体,密度$\rho=0.638$.球体浸入水中后,浸入水中的深度d 是多少?



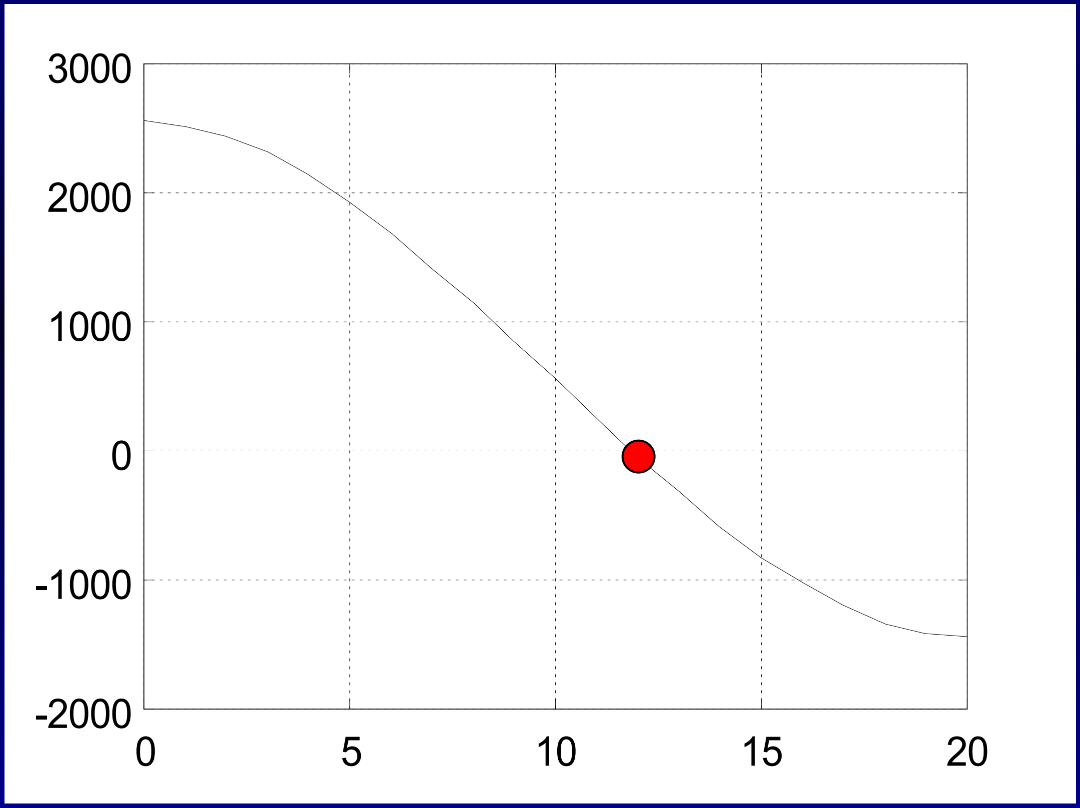
根据阿基米德定律,物体排开水的质量就是水对物体的浮力。

$$M=\frac{4}{3}\pi r^3\rho \qquad V=\int_0^d \pi[r^2-(r-x)^2]dx$$

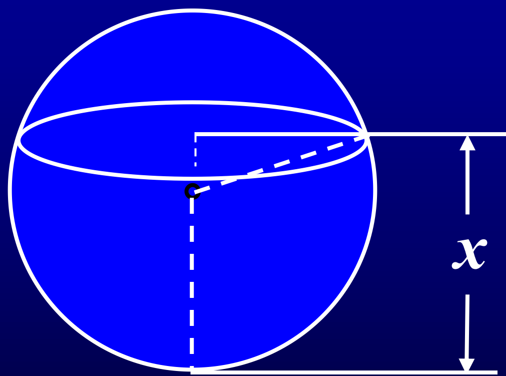
整理得: $d^3-3rd^2+4r^3\rho=0$

由$\rho=0.638$, $r=10$.代入,得$d^3-30d^2+2552=0$

令 $f(x)=x^3-30x^2+2552$,函数图形如下所示



水中浮球问题：$x^3 - 30x^2 + 2552 = 0$




```
delta =5e-6;eps = 1e-6
def f(x):
    return x*x*x-30*x*x+2552

def MyBicection(f, a, b):
    n=1;    fa= f(a);    fb= f(b)
    while True:
        c=(a+b)/2;        fc=f(c)
        print('二分次数
',"{0:.0f}".format(n),"{0:.4f}".format(a),"{0:.4f}".format(a),"{0:.4f}".format(b))
        n=n+1
        if abs(fc)<delta:        break
        elif fa*fc <0:
            b=c;        fb=fc
        else:
            a=c;        fa=fc
        if b-a<eps:        break
    return c

x=MyBicection(f,0,20)

print('方程的根为x=',"{0:.6f}".format(x))
```

11.861501

Python 3.7.3 Shell

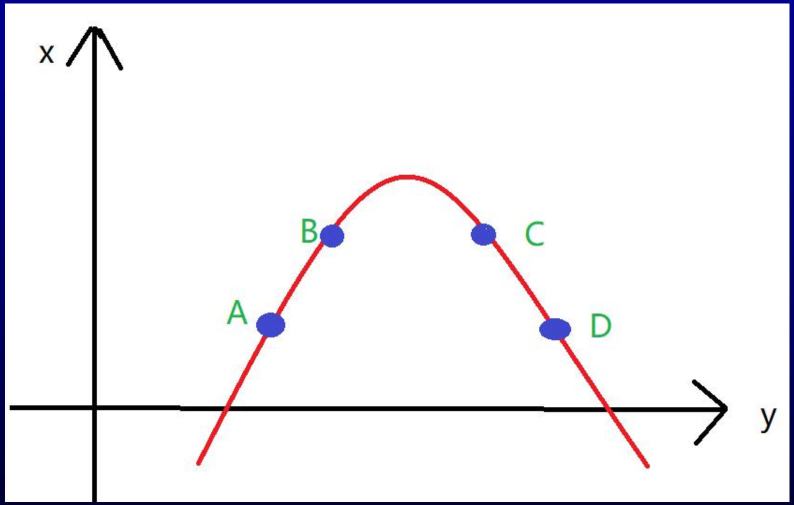
File Edit Shell Debug Options Window Help

```
>>>
===== RESTART: C:/Users/hegl/Documents/Pyt
二分次数 1 0.0000 0.0000 20.0000
二分次数 2 10.0000 10.0000 20.0000
二分次数 3 10.0000 10.0000 15.0000
二分次数 4 10.0000 10.0000 12.5000
二分次数 5 11.2500 11.2500 12.5000
二分次数 6 11.2500 11.2500 11.8750
二分次数 7 11.5625 11.5625 11.8750
二分次数 8 11.7188 11.7188 11.8750
二分次数 9 11.7969 11.7969 11.8750
二分次数 10 11.8359 11.8359 11.8750
二分次数 11 11.8555 11.8555 11.8750
二分次数 12 11.8555 11.8555 11.8652
二分次数 13 11.8604 11.8604 11.8652
二分次数 14 11.8604 11.8604 11.8628
二分次数 15 11.8604 11.8604 11.8616
二分次数 16 11.8610 11.8610 11.8616
二分次数 17 11.8613 11.8613 11.8616
二分次数 18 11.8614 11.8614 11.8616
二分次数 19 11.8615 11.8615 11.8616
二分次数 20 11.8615 11.8615 11.8615
二分次数 21 11.8615 11.8615 11.8615
二分次数 22 11.8615 11.8615 11.8615
二分次数 23 11.8615 11.8615 11.8615
二分次数 24 11.8615 11.8615 11.8615
二分次数 25 11.8615 11.8615 11.8615
方程的根为x= 11.861501
>>>
```

近似值：

11.861501

二、黄金分割法（0.618法）



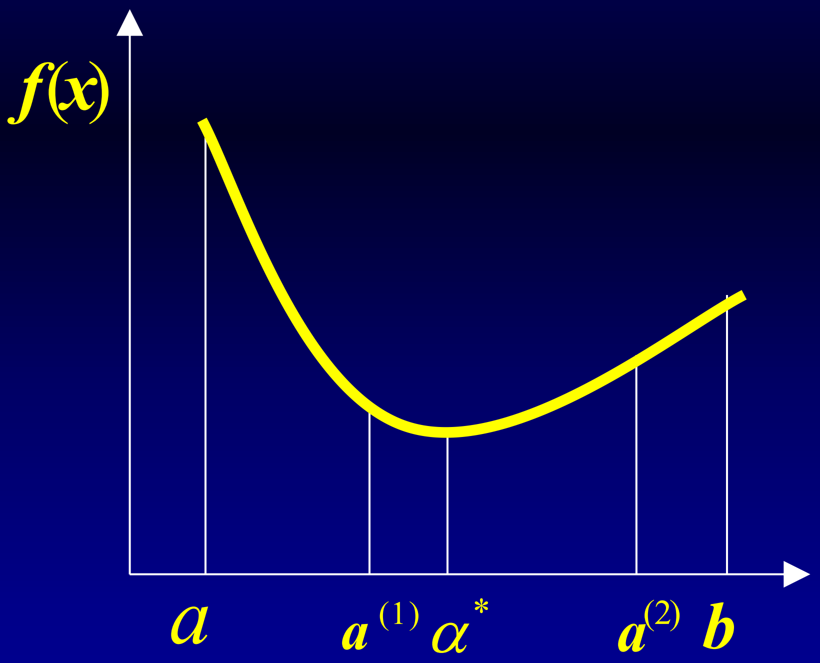
单峰函数：

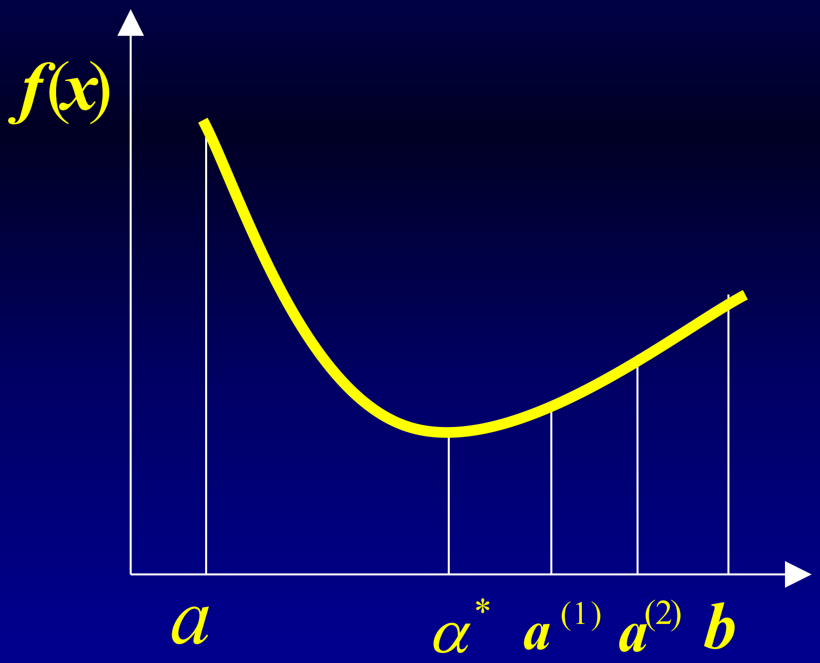
基本思路：逐步缩小搜索区间，直至最小点存在的区间达到允许的误差范围为止。

做法： 1. 设一元函数$f(x)$的起始搜索区间为$[a,b]$，a^*是函数的极小值点. 在搜索区间$[a,b]$内任取两点:a_1,a_2,使得$a<a_1<a_2<b$.

2. 计算$f(a_1)$，$f(a_2)$. 将$f(a_1)$，$f(a_2)$进行比较，可能出现三种情况：

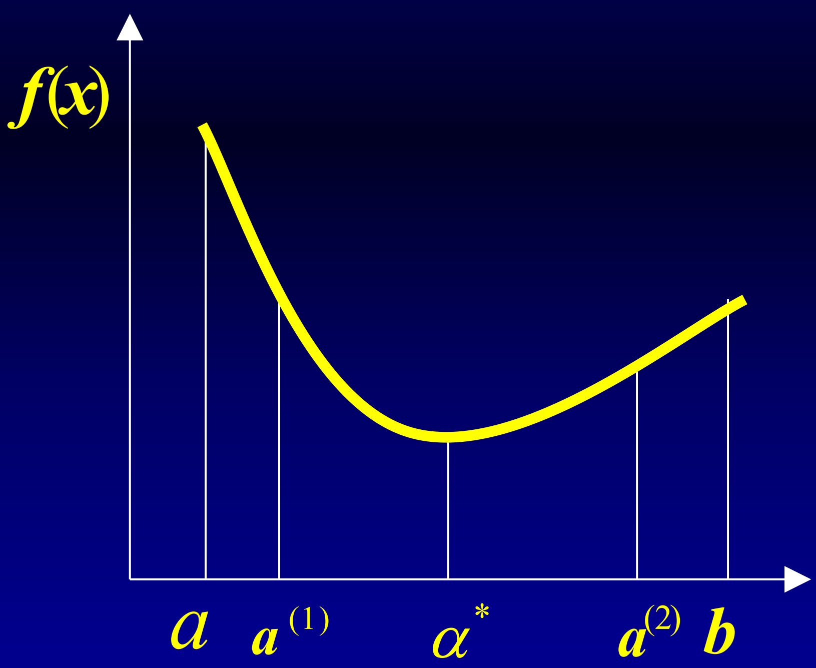
1）. 若$f(a_1)<f(a_2)$, 可以去掉$[a_2，b]$；

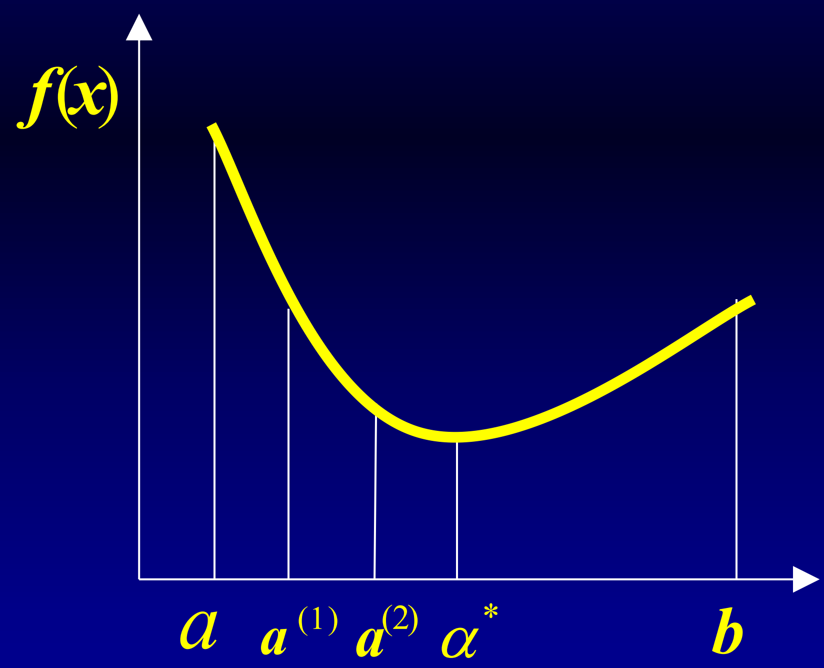




2. 计算$f(a_1)$，$f(a_2)$. 将$f(a_1)$，$f(a_2)$进行比较， 可能出现三种情况：

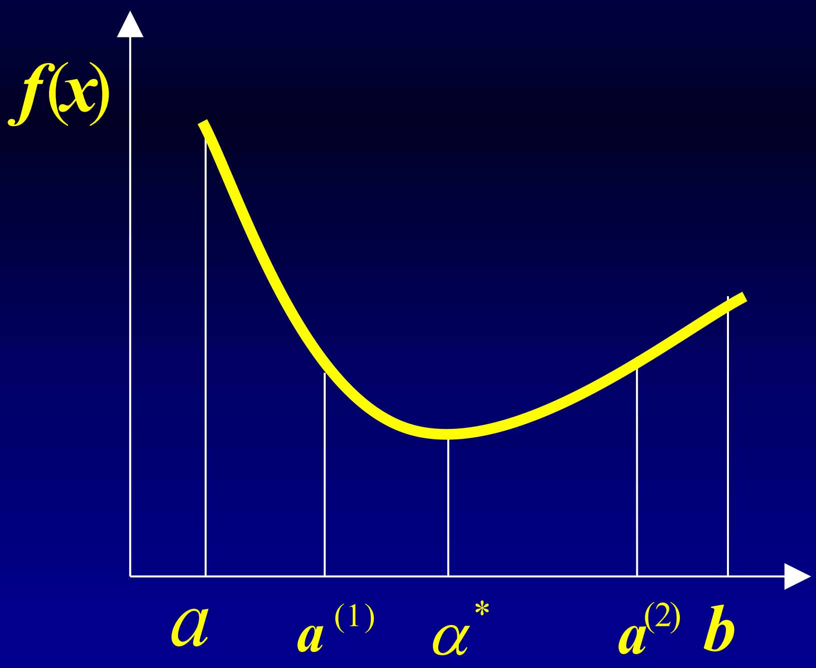
2）. 若$f(a_1)>f(a_2)$, 可以去掉$[a，a_1]$；





2. 计算$f(a_1)$，$f(a_2)$. 将$f(a_1)$，$f(a_2)$进行比较， 可能出现三种情况：

3）. 若$f(a_1)=f(a_2)$, 可以去掉$[a，a_1]$ 或$[a_2，b]$都可以。



整合起来，有：

- **若$f(a_1)\le f(a_2)$, 取$[a，a_2]$；**
- **若$f(a_1)>f(a_2)$, 取$[a_1，b]$.**