第二章 范数

1. 设 $A \in P^{m\times n}$，则

$$\|A\|_{m_1} = \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{m}|a_{ij}|$$

$$\|A\|_{m_2} = (\sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{m}|a_{ij}|^2)^{\frac{1}{2}}$$

自相容

$$\|A\|_{m_\infty} = \max_{i,j}\{|a_{ij}|\} \quad 1 \le i \le m \quad 1 \le j \le n$$

不相容

$$\|A\|_a = n \bullet \max_{i,j}\{|a_{ij}|\} \quad 1 \le i \le n \ ,1 \le j \le n$$

自相容

2. 定理 1 设$A \in P^{n\times n}$,

(1) 若$A=(a_1,a_2,\cdots,a_n)$, 则

$$\|A\|_F^2=\|A\|_{m_2}^2=\sum_{i=1}^{n}\|a_j\|_2^2$$

其中, $\|a_j\|_2^2=a_j^H a_j$.

(2) $\|A\|_{m_2}^2=tr(A^H A)=\sum_{i=1}^{n}\lambda_i(A^H A)$

(3) 对任意的酉矩阵U、$V\in P^{n\times n}$，有

$$\|A\|_{m_2}^2=\|U^H AV\|_{m_2}^2=\|UAV^H\|_{m_2}^2$$

$$\|A\|_{m_2}=\|UA\|_{m_2}=\|AV\|_{m_2}=\|UAV\|_{m_2}$$

$$\|A\|_{m_1}=\sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{n}|a_{ij}|$$ 与向量范数 $\|\bullet\|_1$ 相容.

$$\|A\|_{m_2}=(\sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{m}|a_{ij}|^2)^{\frac{1}{2}}$$ 与向量范数 $\|x\|_2$ 相容.

$$\|A\|_{m_\infty}=\max|a_{ij}|$$ 与向量范数 $\|x\|_\infty$ 不相容.

3. 定理 2　设 $\| x \|_a$ 是 P^n 上的向量范数，$A \in P^{n\times n}$，则

$$\| A \|_a = \max_{x\neq 0} \frac{\| Ax \|_a}{\| x \|_a} \quad \left(= \max_{\|u\|_a = 1} \| Au \|_a \right)$$

是与向量范数 $\| x \|_a$ 相容的矩阵范数.

性质1

$$\| AB \|_a \leq \| A \|_a \cdot \| B \|_a$$

性质2

$\|A\|_a$ 是所有与向量范数 $\| x \|_a$ 相容的矩阵范数中最小的.

4.算子范数表示

(1). $\|A\|_1 = \max\limits_{j}\left(\sum\limits_{i=1}^{n} |a_{ij}|\right)$ ----- 极大列和范数.

(2). $\|A\|_\infty = \max\limits_{i}\left(\sum\limits_{j=1}^{n} |a_{ij}|\right)$ ----- 极大行和范数.

(3). $\|A\|_2 = \sqrt{r(A^H A)}$ ----（又称为谱范数）

(其中 : $r(A) = \max\limits_{i} |\lambda_i|$ 称为A的谱半径).

定理 3 设$\|\bullet\|_m$是相容的矩阵范数，则存在向量范数$\|x\|$，使

$$\|Ax\|\le\|A\|_m\cdot\|x\|$$

$$\|x\|=\|xa^H\|_m \quad \theta\ne a\in P^n, \ \forall x\in P^n$$

定理 4 如果$\|\bullet\|_m : C^{n\times n}\to R$是一相容的矩阵范数，则对任一$A\in C^{n\times n}$，有

$$|\lambda_i|\le\|A\|_m$$

其中，λ_i是A的特征值.

定理 5　设 $A\in C^{n\times n}$，则

(1)　$\|A\|_2=\|A^H\|_2=\|A^T\|_2=\|\overline{A}\|_2$

(2) $\|A^H A\|_2=\|AA^H\|_2=\|A\|_2^2$

(3)　对任何n阶酉矩阵U及V都有

$$\|UA\|_2=\|AV\|_2=\|UAV\|_2=\|A\|_2$$

定理 6　设 $A\in C^{n\times n}$，则

$$(1)\ \|A\|_2=\max_{\|x\|_2=\|y\|_2=1}|y^H Ax|$$

$$(2)\quad \|A\|_2^2\le\|A\|_1\|A\|_\infty$$

1.设P可逆,且$\| P^{-1} \| < 1$,则$\| A \|_a = \| PA \|_\infty$ 或 $\| A \|_b = \| AP \|_\infty$ 均为自相容的矩阵范数.

$\mathrm{Pr}\,oof$:容易证明所定义的映射都是矩阵范数,下面证明它们是相容的.

$$\| AB \|_a = \| PAB \|_\infty = \| PAP^{-1}PB \|_\infty \le \| PA \| . \| P^{-1} \| . \| PB \|_\infty$$

$$\le \| PA \| . \| PB \|_\infty = \| A \|_a \| B \|_a \ .$$

$$\| AB \|_b = \| ABP \|_\infty = \| APP^{-1}BP \|_\infty \le \| AP \| . \| P^{-1} \| . \| BP \|_\infty$$

$$\le \| AP \| . \| BP \|_\infty = \| A \|_b \| B \|_b \ .$$

2. 设$A=A^H$,则$\|A\|_2\le\|A\|_\infty=\|A\|_1\le n\|A\|_2$.

证明:由于$A^H=A$,所以$\|A\|_1=\|A^H\|_1=\|A\|_\infty$

$$\|A\|_2^2=r(A^HA)=\lambda_{\max}(A^HA)\le\|A^HA\|_1$$

$$\le\|A^H\|_1\|A\|_1=\|A\|_1^{\,2},\text{故}\ \|A\|_2\le\|A\|_1\ .$$

$$\|A\|_2^2 = r(A^H A) = \lambda_{\max}(A^H A) \geq \frac{\sum \lambda_i}{n}$$

$$= \frac{\|A\|_{m_2}^2}{n} = \frac{\sum |a_{ij}|^2}{n} \geq \frac{\max_i \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}|^2}{n}$$

$$= \frac{\max_i n \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}|^2}{n^2} \geq \frac{\max_i (\sum_{j=1}^{n} |a_{ij}|)^2}{n^2}$$

$$= \frac{\|A\|_\infty^2}{n^2},$$ 故 $\|A\|_\infty \leq n \|A\|_2$.

3. 设$A\in C^{m\times n}$可逆, $B\in C^{m\times n}$，若对某种相容矩阵范数

有$\|B\|<\dfrac{1}{\|A^{-1}\|}$,则$A+B$可逆.

证: $\|B\|<\dfrac{1}{\|A^{-1}\|}\Leftrightarrow\|A^{-1}\|\cdot\|B\|<1\Rightarrow\|A^{-1}B\|\le\|A^{-1}\|\cdot\|B\|<1.$

$\Rightarrow E+A^{-1}B$可逆

(否则, 若$E+A^{-1}B$不可逆, 则有$(E+A^{-1}B)x=0(x\neq 0)$

$\Leftrightarrow A^{-1}Bx=(-1)x\Rightarrow r(A^{-1}B)\ge 1\Rightarrow\|A^{-1}B\|\ge r(A^{-1}B)\ge 1)$

而$A+B=A(E+A^{-1}B)\Rightarrow A+B$可逆.

第三章　矩阵的分解

定理 1: 设 $A\in C_n^{n\times n}$,则A可唯一地分解为

$$A=U_1R$$

其中，U_1是酉矩阵，R是正线上三角复矩阵

或A可唯一分解为

$$A=LU_2$$

其中，L是正线下三角复矩阵 U_2是酉矩阵

推论 1：设 A是正定Hermite矩阵, 则存在唯一的正线上三角复矩阵R，使

$$A=R^HR$$

定理 2: 设 $A\in C_n^{n\times n}$，用L表示下三角复矩阵，R是上三角复矩阵，$\tilde{L}$是单位下三角复矩阵，$\tilde{R}$是单位上三角复矩阵，D表示对角矩阵，

则下列命题等价：

$$(i)\quad \Delta_k=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1k} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2k} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{kk} \end{vmatrix}\neq 0, k=1,\cdots,n$$

(ii) A可唯一地分解为$A=L\tilde{R}$

(iii) A可唯一地分解为$A=\tilde{L}R$

(iv) A可唯一地分解为$A=\tilde{L}D\tilde{R}$.

单纯矩阵： 矩阵A的每个特征值的代数重复度与几何重复度相等.

定理3 设$A\in C^{n\times n}$是单纯矩阵, 则A可分解为一系列幂等矩阵A_i $(i=1,2,\cdots,n)$的加权和,

$$A=\sum_{i=1}^{n}\lambda_i A_i$$

其中，λ_i $(i=1,2,\cdots,n)$是A的特征值.

A_i的性质：

(1) 幂等性：$A_i^2=A_i$

(2) 分离性：$A_iA_j=0 \quad (i\neq j)$

(3) 可加性：$\sum_{i=1}^{n}A_i=E_n$

正规矩阵: $AA^H = A^H A$ $----$ A为正规矩阵

引理1: A为正规矩阵, A与B酉相似, 则B为正规矩阵

引理2: $(Schur)$设$A \in C^{n\times n}$, 则存在酉矩阵U, 使得

$$A = URU^H$$

(R是一个上三角矩阵且主对角线上的元素为A的特征值).

引理3: A正规矩阵且是三角矩阵 $\Rightarrow$ A是对角矩阵.

定理4: A是正规矩阵 $\Leftrightarrow$ A与对角矩阵酉相似

即: 存在n阶酉矩阵U, 使得

$$A = U diag(\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n) U^H$$

定理 1 设 $A\in C_r^{m\times n}$，则存在矩阵 $B\in C_r^{m\times r}$，$D\in C_r^{r\times n}$，使得

$$A=BD$$

定理 2 设 $A\in C_r^{m\times n}$，且 $A=B_1D_1=B_2D_2$ 均为 A 的最大秩分解，则

(1) 存在 r 阶可逆矩阵 Q，使得

$$B_1=B_2Q \qquad D_1=Q^{-1}D_2$$

(2)

$$D_1^H(D_1D_1^H)^{-1}(B_1^HB_1)^{-1}B_1^H$$

$$=D_2^H(D_2D_2^H)^{-1}(B_2^HB_2)^{-1}B_2^H$$

矩阵的最大秩分解步骤：

一、进行行初等变化, 化为行标准形：

$$\tilde{A}=\begin{array}{c}
\begin{matrix} & & i_1 & & & i_2 & & i_r & & \end{matrix}\\
\begin{bmatrix}
0 & \cdots & 1 & * & \cdots & 0 & \cdots & 0 & \cdots & * \\
0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 1 & \cdots & 0 & \cdots & * \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 1 & \cdots & * \\
0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0
\end{bmatrix}
\end{array}$$

二. A的第$i_1,i_2,\cdots,i_r$列构成$B=(a_{i_1},a_{i_2},\cdots,a_{i_r});$

三、$\tilde{A}$的非零行则构成D.

定理1 设 $A \in C_r^{m\times n}$,则有

(1) $rank(A) = rank(A^H A) = rank(AA^H)$

(2) $A^H A$、AA^H的特征值均为非负实数

(3) $A^H A$、AA^H的非零特征值相同

定义1 设 $A \in C_r^{m\times n}$, $A^H A$的特征值为

$$\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \cdots \geq \lambda_r > \lambda_{r+1} = \cdots = \lambda_n = 0$$

则称 $\sigma_i = \sqrt{\lambda_i}$ $(i = 1,2,\cdots,r)$为A的正奇异值

定理 3 设 $A \in C_r^{m\times n}$, $\sigma_1, \sigma_2, \cdots, \sigma_r$ 是A的r个正奇异值，则存在酉矩阵$U \in C^{m\times m}$和$V \in C^{n\times n}$,

使得

$$A = U\begin{bmatrix} D & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}V$$

其中, $D = diag(\sigma_1, \sigma_2, \cdots, \sigma_r)$.

第四章 特征值的估计

定理 1 (Shur不等式) 设$A \in C^{n\times n}$的特征值为$\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$，则

$$\sum_{i=1}^{n} |\lambda_i|^2 \le \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} |a_{ij}|^2 = \|A\|_F^2$$

且等号成立当且仅当A为正规矩阵

定理 2 (Hirsch) 设$A \in C^{n\times n}$的特征值为$\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$，则

1) $|\lambda_i| \le n \max\limits_{i,j} |a_{ij}|$，2) $|\mathrm{Re}\lambda_i| \le n \max\limits_{i,j} |b_{ij}|$，

3) $|\mathrm{Im}\lambda_i| \le n \max\limits_{i,j} |c_{ij}|$，

定理 3 (Bendixson) 设$A\in R^{n\times n}$,则A的任一特值λ_i满足

$$|\operatorname{Im}\lambda_i|\le\sqrt{\frac{n(n-1)}{2}}\max_{i,j}|c_{ij}|$$

定理 4(Browne): 设$A\in C^{n\times n}$的特征值为λ_1, $\lambda_2,\cdots,\lambda_n$,奇异值为$\sigma_1\ge\sigma_2\ge\cdots\ge\sigma_n$,则

$$\sigma_n\le|\lambda_i|\le\sigma_1\quad(i=1,2,\cdots,n)$$

$$B=\frac{1}{2}(A^H+A),\ C=\frac{1}{2}(A-A^H)$$

A,B,C的特征值分别为$\{\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n\}$,

$\{\mu_1,\mu_2,\cdots,\mu_n\},\{i\gamma_1,i\gamma_2,\cdots,i\gamma_n\}$, 且满足

$$|\lambda_1|\geq|\lambda_2|\geq\cdots\geq|\lambda_n|,\quad \mu_1\geq\mu_2\geq\cdots\geq\mu_n,$$
$$\gamma_1\geq\gamma_2\geq\cdots\geq\gamma_n.$$

定理 5 设$A\in C^{n\times n},B,C,\lambda_i,\mu_i,\gamma_i$定义同上,则

$$\mu_n\leq \mathrm{Re}\lambda_i\leq\mu_1,\ \gamma_n\leq \mathrm{Im}\lambda_i\leq\gamma_1$$

圆盘定理

定义 1 设$A=(a_{ij})\in C^{n\times n}$

行盖尔圆盘 $\longleftrightarrow$ $S_i=\{z\in C:|z-a_{ii}|\le R_i=\sum_{j\ne i}|a_{ij}|\}$

列盖尔圆盘 $\longleftrightarrow$ $G_i=\{z\in C:|z-a_{ii}|\le C_i=\sum_{j\ne i}|a_{ji}|\}$

定理 2 (圆盘定理1) 设$A\in C^{n\times n}$, 则A的任一特征值

$$\lambda\in S=\bigcup_{j=1}^{n}S_j$$

返回

定理 3 (圆盘定理2) 设n阶方阵A的n个盖尔圆盘中有k个圆盘的并形成一连通区域G，且它与余下的$n-k$个圆盘都不相交，则在该区域G中恰好有A的k个特征值.

推论 1 设n阶方阵A的n个盖尔圆盘两两互不相交，则A相似于对角阵.

推论 2 设n阶实阵A的n个盖尔圆盘两两互不相交，则A特征值全为实数.

推论 3 $B = D^{-1}AD \Rightarrow \begin{cases} \lambda_i(A) = \lambda_i(B) \in \bigcup\limits_{i=1}^{n} S_i(B) \\ \rho(A) = \rho(B) \end{cases}$

令 $D = diag(p_1, p_2, \cdots, p_n), (p_i > 0)$

$$D^{-1}AD = \begin{bmatrix} a_{11} & \frac{p_2}{p_1}a_{12} & \cdots & \frac{p_n}{p_1}a_{1n} \\ \frac{p_1}{p_2}a_{21} & a_{22} & \cdots & \frac{p_n}{p_2}a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{p_1}{p_n}a_{n1} & \frac{p_2}{p_n}a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

返回

$$r_i = \frac{1}{p_i}\sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n} |a_{ij}|\, p_j, \quad Q_i = \{z \in C : |z - a_{ii}| \le r_i\}$$

$$t_j = p_j \sum_{\substack{i=1\\ i\neq j}}^{n} \frac{|a_{ij}|}{p_i}, \quad P_j = \{z \in C : |z - a_{jj}| \le t_j\}$$

推论 4 设$A \in C^{n\times n}$, 则A的任一特征值

$$\lambda_i \in \left(\bigcup_{i=1}^{n} Q_i\right) \bigcap \left(\bigcup_{j=1}^{n} P_j\right)$$

定义 2　设$A\in C^{n\times n}$

行对角占优 $\Leftrightarrow$ $|a_{ii}|\geq R_i=\sum_{\substack{j=1\\j\neq i}}^{n}|a_{ij}|\quad(i=1,2,\cdots,n)$

列对角占优 $\Leftrightarrow$ $|a_{ii}|\geq C_i=\sum_{\substack{j=1\\j\neq i}}^{n}|a_{ji}|\quad(i=1,2,\cdots,n)$

行严格对角占优 $\Leftrightarrow$ $|a_{ii}|>R_i=\sum_{\substack{j=1\\j\neq i}}^{n}|a_{ij}|$

列严格对角占优 $\Leftrightarrow$ $|a_{ii}|>C_i=\sum_{\substack{j=1\\j\neq i}}^{n}|a_{ji}|$

定理 4 设$A \in C^{n\times n}$行(或列)严格对角占优，则

(1) A可逆，且$\lambda_i \in \bigcup_{i=1}^{n} S_i \quad (S_i = \{z \in C : |z - a_{ii}| \le |a_{ii}|\})$

(2)若A的所有主对角元都为正数，则A的特征值都有正实部；

(3)若A为Hermite矩阵，且所有主对角元都为正数，则A的特征值都为正数.

定义： 设 $A\in C^{n\times n}$为Hermite矩阵, $x\in C$,称

$$R(x)=\frac{x^{H}Ax}{x^{H}x}\quad x\neq 0$$

为A的 **Rayleigh商.**

定理1(Rayleigh-Ritz)： 设 $A\in C^{n\times n}$为Hermite矩阵，则

(1) $\lambda_n x^{H}x\le x^{H}Ax\le \lambda_1 x^{H}x\quad(\forall\ x\in C^{n})$

(2) $\lambda_{\max}=\lambda_1=\max\limits_{x\neq 0}R(x)=\max\limits_{x^{H}x=1}x^{H}Ax$

(3) $\lambda_{\min}=\lambda_n=\min\limits_{x\neq 0}R(x)=\min\limits_{x^{H}x=1}x^{H}Ax$

定理2(Courant-Fischer)：设$A \in C^{n\times n}$为Hermite矩阵，特征值为$\lambda_n \le \lambda_{n-1} \le \cdots \le \lambda_1$，$i$为给定的正整数，$1 \le i \le n$，则

$$\lambda_i = \max_{\substack{W \\ \dim W = i}} \min_{\substack{x \in W \\ x \ne 0}} R(x) = \max_{\substack{W \\ \dim W = i}} \min_{\substack{u \in W \\ \|u\|_2 = 1}} u^H A u$$

$$\lambda_i = \min_{\substack{W \\ \dim W = n-i+1}} \max_{\substack{x \in W \\ x \ne 0}} R(x) = \min_{\substack{W \\ \dim W = n-i+1}} \max_{\substack{u \in W \\ \|u\|_2 = 1}} u^H A u$$

定理3(Weyl)：设 $A, B \in C^{n\times n}$ 为Hermite矩阵,则

$\forall k = 1,2,\cdots,n$,有

$$\lambda_k(A) + \lambda_n(B) \le \lambda_k(A+B) \le \lambda_k(A) + \lambda_1(B)$$

例1. $A=\begin{pmatrix} 6 & 5 & 1 & 2 \\ 1 & 7 & 0 & 2 \\ 0 & 4 & 7 & 5 \\ 2 & 0 & 1 & 5 \end{pmatrix}$, 证明$r(A)<13.$

证明: 取$D=\begin{pmatrix} 1 & & & \\ & 1/2 & & \\ & & 1 & \\ & & & 1/2 \end{pmatrix}$, $B=D^{-1}AD=$

$$\begin{pmatrix} 1 & & & \\ & 2 & & \\ & & 1 & \\ & & & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 6 & 5 & 1 & 2 \\ 1 & 7 & 0 & 2 \\ 0 & 4 & 7 & 5 \\ 2 & 0 & 1 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & & & \\ & 1/2 & & \\ & & 1 & \\ & & & 1/2 \end{pmatrix}$$

返回

$$=\begin{pmatrix}6&5&1&2\\2&14&0&4\\0&4&7&5\\4&0&2&10\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&&&\\&1/2&&\\&&1&\\&&&1/2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}6&5/2&1&1\\2&7&0&2\\0&2&7&5/2\\4&0&2&5\end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow r(A)=r(B)\leq 12.$$

例2. $A=\begin{pmatrix}1/4&1/4&1/4&1/4\\1/5&2/5&1/5&1/5\\1/6&1/6&3/6&1/6\\1/7&1/7&1/7&4/7\end{pmatrix}$, 证明$r(A)=1$.

$$r(A) \le \|A\|_\infty = 1 \text{且} A\begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix} = 1 \bullet \begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \lambda = 1 \text{为} A \text{的特征值} \Rightarrow r(A) \ge 1 \Rightarrow r(A) = 1.$$

例3. $A = \begin{pmatrix} 1/4 & 1/4 & 1/4 & 1/4 \\ 1/5 & 2/5 & 1/5 & 1/5 \\ 1/6 & 1/6 & 3/6 & 1/6 \\ 1/7 & 1/7 & 1/7 & 3/7 \end{pmatrix}$, 证明 $r(A) < 1$.

返回

$$D=\begin{pmatrix}1&&&\\&1&&\\&&1&\\&&&9/10\end{pmatrix}\Rightarrow B=D^{-1}AD=$$

$$\begin{pmatrix}1/4&1/4&1/4&(1/4)\times\dfrac{9}{10}\\1/5&2/5&1/5&(1/5)\times\dfrac{9}{10}\\1/6&1/6&3/6&(1/6)\times\dfrac{9}{10}\\10/63&10/63&10/63&27/63\end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow r(A)=r(B)\le\|B\|_\infty<1.$$

返回

例4：证明$A=\begin{pmatrix} 2 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2^2} & \frac{1}{2^3} & \frac{1}{2^4} \\ \frac{2}{3} & 4 & \frac{2}{3^2} & \frac{2}{3^3} & \frac{2}{3^4} \\ \frac{3}{4} & \frac{3}{4^2} & 6 & \frac{3}{4^3} & \frac{3}{4^4} \\ \frac{4}{5} & \frac{4}{5^2} & \frac{4}{5^3} & 8 & \frac{4}{5^4} \\ \frac{4}{5} & \frac{4}{5^2} & \frac{4}{5^3} & \frac{4}{5^4} & 10 \end{pmatrix}$有5个不同的实特征值.

$$A\in R^{n\times n}, a_{ii}=2i(i=1,\cdots,5)\Rightarrow a_{i+1,i+1}-a_{ii}=2(i+1)-2i=2$$

返回

$$R_1=\frac{\frac{1}{2}\left(1-\left(\frac{1}{2}\right)^4\right)}{1-\frac{1}{2}}=1-\frac{1}{2^4},R_2=1-\frac{1}{3^4},$$

$$R_3=1-\frac{1}{4^4},R_4=1-\frac{1}{5^4},R_5=1-\frac{1}{6^4},$$

$$\left|a_{i+1,i+1}-a_{ii}\right|=2>R_i+R_{i+1}(i=1,\cdots,4)$$

$\Rightarrow A$的5个盖尔圆互不相交$\Rightarrow A$有5个不同的实特征值.

第 五 章

矩阵分析

定义1: 设$A \in C^{n\times n}$，若 $\lim\limits_{k\to\infty} A^k = 0$ (k为正整数),

则称A为收敛矩阵.

定理1 设$A \in C^{n\times n}$，则A为收敛矩阵的充要条件是$r(A) < 1$.

定理2(Neumann定理) 方阵A的Neumann级数

$$\sum_{k=0}^{\infty} A^k = E + A + A^2 + \cdots + A^k + \cdots$$

收敛的充要条件是$r(A) < 1$,且收敛时,其和为$(E-A)^{-1}$.

定理3 设幂级数

$$f(z)=\sum_{k=0}^{\infty}c_k z^k$$

的收敛半径为 r

(1) 如果$r(A)<r$, 则矩阵幂级数 $\sum_{k=0}^{\infty}c_k A^k$ 绝对收敛（$\sum_{k=0}^{\infty}c_k A^k$收敛）

(2) 如果$r(A)>r$,则矩阵幂数 $\sum_{k=0}^{\infty}c_k A^k$发散.

定义2　设幂级数 $\sum_{k=0}^{\infty} c_k z^k$ 收敛半径为r，且当

$|z|<r$时，幂级数收敛于$f(z)$，即

$$f(z)=\sum_{k=0}^{\infty} c_k z^k,\quad |z|<r$$

如果$A\in C^{n\times n}$满足$r(A)<r$，则称收敛的矩阵幂级数 $\sum_{k=0}^{\infty} a_k A^k$的和为矩阵函数，记为$f(A)$，即

$$f(A)=\sum_{k=0}^{\infty}c_k A^k,$$

把 $f(A)$的方阵A换为At, t为参数,则得到

$$f(At)=\sum_{k=0}^{\infty}c_k (At)^k.$$

1.常用的矩阵函数:

$$(1)\quad e^A=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}A^k,\quad A\in C^{n\times n}$$

$$(2)\quad \sin A=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{(2k+1)!}A^{2k+1},\quad A\in C^{n\times n}$$

$$(3)\ \ \cos A = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k)!} A^{2k}, \quad A \in C^{n\times n}$$

$$(4)\ \ (E - A)^{-1} = \sum_{k=0}^{\infty} A^k, \quad r(A) < 1$$

$$(5)\ \ \ln(E + A) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k+1} A^{k+1}, \quad r(A) < 1$$

2、矩阵函数值的计算

$$f(z)=\sum_{k=0}^{\infty}c_k z^k,\quad |z|<r$$

(1)、利用相似对角化:

设$P^{-1}AP=diag(\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n)=D$

$\Rightarrow$ $A=PDP^{-1}$

$\Rightarrow$ $$f(A)=P\begin{pmatrix} f(\lambda_1) & & \\ & \ddots & \\ & & f(\lambda_n) \end{pmatrix}P^{-1}$$

同理

$$f(At) = Pdiag(f(\lambda_1 t), f(\lambda_2 t), \cdots, f(\lambda_n t))P^{-1}.$$

例1 设 $A = \begin{pmatrix} 4 & 6 & 0 \\ -3 & -5 & 0 \\ -3 & -6 & 1 \end{pmatrix}$, 求$e^{At}$.

解: 1) $\det(\lambda E - A) = (\lambda + 2)(\lambda - 1)^2$ $\longrightarrow$

$$\lambda_1 = -2, \lambda_2 = \lambda_3 = 1$$

2) 对应的特征向量

$$\lambda_1=-2:\ \xi_1=(-1,1,1)^T$$

$$\lambda_2=\lambda_3=1:\ \xi_2=(-2,1,0)^T,\xi_3=(0,0,1)^T$$

$$P=\begin{pmatrix}-1 & -2 & 0\\ 1 & 1 & 0\\ 1 & 0 & 1\end{pmatrix}$$

$$e^{At} = P\begin{pmatrix} e^{-2t} & & \\ & e^{t} & \\ & & e^{t} \end{pmatrix}P^{-1}$$

$$= \begin{pmatrix} 2e^{t} - e^{-2t} & 2e^{t} - 2e^{-2t} & 0 \\ e^{2t} - e^{-t} & 2e^{-2t} - e^{t} & 0 \\ e^{-2t} - e^{t} & 2e^{-2t} - 2e^{t} & e^{t} \end{pmatrix}$$

(2)、Jordan 标准形法:

设$\boldsymbol{P^{-1}AP = J = diag(J_1, J_2, \cdots, J_s)}$

$$\Rightarrow \quad A = PJP^{-1} = Pdiag(J_1, J_2, \cdots, J_s)P^{-1}$$

$$\Rightarrow \quad f(A) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k A^k = \sum_{k=0}^{\infty} a_k (PJP^{-1})^k = P(\sum_{k=0}^{\infty} a_k J^k)P^{-}$$

$$\Rightarrow \quad f(A) = P\begin{pmatrix} f(J_1) & & \\ & \ddots & \\ & & f(J_s) \end{pmatrix}P^{-1}$$

$$f(J_i)=\begin{bmatrix} f(\lambda_i) & \frac{1}{1!}f^{'}(\lambda_i) & \cdots & \frac{1}{(m_i-1)!}f^{(m_i-1)}(\lambda_i) \\ & f(\lambda_i) & \cdots & \frac{1}{(m_i-2)!}f^{(m_i-2)}(\lambda_i) \\ & & \ddots & \vdots \\ & & & f(\lambda_i) \end{bmatrix}$$

例 2 $A=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&1\\0&0&1\end{pmatrix}$, 求 $\sin A$.

解： 1) 化为*Jordan*标准形

$$A \longrightarrow J_1=1, J_2=\begin{pmatrix}1&1\\0&1\end{pmatrix}$$

2) 计算 $\sin J_i$

$$\sin J_1=\sin 1, \sin J_2=\begin{pmatrix}\sin 1 & \frac{1}{1!}\cos 1\\ 0 & \sin 1\end{pmatrix}$$

$$\therefore \sin A = \begin{pmatrix} \sin 1 & 0 & 0 \\ 0 & \sin 1 & \cos 1 \\ 0 & 0 & \sin 1 \end{pmatrix}$$

三、矩阵函数的一些性质

性质1： 如果$AB = BA$，则$e^A e^B = e^B e^A = e^{A+B}$.

性质2： 如果$AB = BA$，则

$$(1)\quad \cos(A+B) = \cos A \cos B - \sin A \sin B$$

$$(2)\quad \sin(A+B) = \sin A \cos B + \cos A \sin B$$

$$(3)\quad \cos(2A) = \cos^2 A - \sin^2 A$$

$$(4)\quad \sin(2A) = 2\sin A \cos A$$

四、矩阵函数的几种特殊情形

$(1) A^2 = A$

$$A^2 = A \Rightarrow A^k = A (k \geq 1) \longrightarrow f(A) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k A^k = \sum_{k=1}^{\infty} a_k A^k + a_0 E$$

$$= a_0 E + \sum_{k=1}^{\infty} a_k A$$

若$\sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k = f(z)$, $|z| < R (R > 1)$, 则

$$f(A) = a_0 E + (\sum_{k=1}^{\infty} a_k \cdot 1) A \quad = a_0 E + (f(1) - a_0) A$$

$(2) A^2 = E$

$$A^2 = E \Rightarrow \begin{cases} A^{2k} = E \\ A^{2k+1} = A \end{cases} \longrightarrow f(A) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k A^k = \sum_{k=0}^{\infty} a_{2k} A^{2k} + \sum_{k=0}^{\infty} a_{2k+1} A^{2k+1}$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} a_{2k} E + \sum_{k=0}^{\infty} a_{2k+1} A$$

$$(1)\quad A^2=A\Rightarrow e^A=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}A^k=E+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k!}A=E+(\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k!}\cdot 1)A$$

$$=E+(e^1-1)A=E+(e-1)A$$

$$A^2=A\Rightarrow \sin A=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{(2k+1)!}A^{2k+1}=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{(2k+1)!}A=(\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{(2k+1)!}\cdot 1)A=(\sin 1)A$$

$$(2)\quad A^2=E\Rightarrow \sin A=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{(2k+1)!}A^{2k+1}=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{(2k+1)!}A=(\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{(2k+1)!}\cdot 1)A=(\sin 1)A$$

$$A^2=E\Rightarrow \cos A=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{(2k)!}A^{2k}=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{(2k)!}E=(\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{(2k)!}\cdot 1)E=(\cos 1)E$$

例1: 设$A=\begin{pmatrix} 0 & c & c \\ c & 0 & c \\ c & c & 0 \end{pmatrix}(c\in R)$, 讨论$c$取何值时$A$为收敛矩阵.

$$解:\det(\lambda E-A)=(\lambda-2c)(\lambda+c)^2\Rightarrow r(A)=2|c|$$

A为收敛矩阵$\Leftrightarrow r(A)<1\Leftrightarrow 2|c|<1\Leftrightarrow -\dfrac{1}{2}<c<\dfrac{1}{2}$.

例2：求$\sum_{k=0}^{\infty}\begin{pmatrix}0.1 & 0.7\\ 0.3 & 0.6\end{pmatrix}^k$

$$r(A)\le\|A\|_\infty=0.9<1\Rightarrow\sum_{k=0}^{\infty}\begin{pmatrix}0.1 & 0.7\\ 0.3 & 0.6\end{pmatrix}^k=$$

$$\left(E-\begin{pmatrix}0.1 & 0.7\\ 0.3 & 0.6\end{pmatrix}\right)^{-1}=\begin{pmatrix}0.9 & -0.7\\ -0.3 & 0.4\end{pmatrix}^{-1}$$

$$=\left(\frac{1}{10}\begin{pmatrix}9 & -7\\ -3 & 4\end{pmatrix}\right)^{-1}=\frac{1}{0.15}\begin{pmatrix}0.4 & 0.7\\ 0.3 & 0.9\end{pmatrix}$$

例3：$\|A\|<1$，求$\sum_{k=1}^{\infty} kA^{k-1}$

$$\sum_{k=1}^{\infty} kz^{k-1} = \sum_{k=1}^{\infty} \left(z^{k}\right)' = \left(\sum_{k=0}^{\infty} z^{k}\right)' = \left(\frac{1}{1-z}\right)'$$

$$= \frac{1}{(1-z)^{2}} \qquad (|z|<1).$$

$$r(A) \le \|A\| < 1 \Rightarrow \sum_{k=1}^{\infty} kA^{k-1} = \left[(E-A)^{-1}\right]^{2}$$

第六章 广义逆矩阵

$$1.(1) A\in C^{m\times n}, G\in C^{n\times m}, \begin{cases} GA=E_n \Rightarrow G=A_L^{-1} \\ AG=E_m \Rightarrow\Rightarrow G=A_R^{-1} \end{cases}$$

$$(2) A\in C^{m\times n},\ G\in C^{n\times m}, AGA=A\Rightarrow G=A^{-}$$

$$(3) A\in C_n^{m\times n} \Leftrightarrow A_L^{-1}\text{存在} \Leftrightarrow N(A)=0 \Leftrightarrow A^{-}A=E_n$$

$$A\in C_m^{m\times n} \Leftrightarrow A_R^{-1}\text{存在} \Leftrightarrow R(A)=C^m \Leftrightarrow AA^{-}=E_m$$

$$(4) A\in C^{m\times n},\ G\in C^{n\times m}, \begin{cases} AGA=A \\ GAG=G \end{cases} \Rightarrow G=A_r^{-}$$

（5）初等变换求左(右)逆矩阵:

$$\text{(I)}\ \ P(A\ \ E_m)=\begin{pmatrix} E_n & G \\ * & * \end{pmatrix}, G=A_L^{-1} \qquad G=(A^H A)^{-1}A^H=A_L^{-1}$$

$$\text{(II)}\ \ \begin{pmatrix} A \\ E_n \end{pmatrix} Q=\begin{pmatrix} E_m & * \\ G & * \end{pmatrix}, G=A_R^{-1} \qquad G=A^H(AA^H)^{-1}=A_R^{-1}$$

$$(6)\,A=\begin{pmatrix} A_{11} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}(A_{11}\in C_r^{r\times r})\Rightarrow\begin{cases} A^- =\begin{pmatrix} A_{11}^{-1} & X \\ Y & C \end{pmatrix} \\ A_r^- =\begin{pmatrix} A_{11}^{-1} & X \\ Y & YX \end{pmatrix} \\ A^+ =\begin{pmatrix} A_{11}^{-1} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \end{cases}$$

$$(7)A \in C^{m\times n}, P \in C_m^{m\times m}, Q \in C_n^{n\times n} \Rightarrow Q(PAQ)^{-}P \in A\{1\}$$

$$A \in C^{m\times n}, S \in C_m^{m\times m}, T \in C_n^{n\times n}, B = SAT \Rightarrow T^{-1}A^{-}S^{-1} \in B\{1\}$$

$$\begin{cases} AXA = A \\ AYA = A \end{cases} \Rightarrow Z = XAY = A_r^{-}$$

$$\boldsymbol{X = (A^H A)^{-} A^H = A_r^{-}} \qquad \boldsymbol{Y = A^H (AA^H)^{-} = A_r^{-}}$$

$$(8) rank(A_r^{-}) = rank(A) = rank(A^{-}A) = rank(AA^{-}) \le rank(A^{-})$$

$$
(9)\ \begin{cases} R(AA^-)=R(A),\ N(A^-A)=N(A) \\ R(AA_r^-)=R(A),\ N(AA_r^-)=N(A_r^-) \\ R(A_r^-A)=R(A_r^-),\ N(A_r^-A)=N(A) \\ R(A^+)=R(A^H) \end{cases}
$$

$$
(10)\ \begin{cases} AA^-,\ A^-A(AA_L^{-1}, A_L^{-1}A) \\ AA_r^-,\ A_r^-A \\ AA^+,\ A^+A \\ (AA^+)^H=AA^+, (A^+A)^H=A^+A \end{cases}
$$

幂等

（11）. 幂等矩阵的性质

$$A \in C^{n\times n},\ A = A^2 \Rightarrow \begin{cases} (1) & A^H = \left(A^H\right)^2, E - A = \left(E - A\right)^2 \\ (2) & \sigma(A) = \{\lambda \mid Ax = \lambda x, x \neq 0\} = \{0,1\} \\ (3) & rank(A) = tr(A) \\ (4) & A(E - A) = (E - A)A = 0 \\ (5) & A\alpha = \alpha \Leftrightarrow \alpha \in R(A) \\ (6) & N(A) = R(E - A), R(A) = N(E - A) \end{cases}$$

$$2. A \in C^{m\times n},\ \ G \in C^{n\times m}, \begin{cases} AGA = A,\ GAG = G, \\ (GA)^H = GA, (AG)^H = AG, \end{cases} \Rightarrow G = A^+.$$

$$(1)\ \begin{cases} (A^H A)^+ = A^+ (A^H)^+, (AA^H)^+ = (A^H)^+ A^+; \\ A^+ = (A^H A)^+ A^H = A^H (AA^H)^+; \\ rank(A) = rank(A^+), (UAV)^+ = V^H A^+ U^H \end{cases}$$

$$(2) A \in C_r^{m\times n}, A = BD(B \in C_r^{m\times r}, D \in C_r^{r\times n})$$

$$A^+ = D^+ \bullet B^+$$

(其中$D^+ = D^H (DD^H)^{-1}, B^+ = (B^H B)^{-1} B^H$)

$$(3)A \in C_r^{m\times n}, \quad A = U\begin{pmatrix} D_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}V = UDV, \quad D_r = diag(\sigma_1, \cdots, \sigma_r)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} (1) \quad A^{+} = V^{H} D^{+} U^{H} = V^{H}\begin{pmatrix} D_r^{-1} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}U^{H}; \\ (2) \| A \|_F^2 = \sum_{i=1}^{r} \sigma_i^2, \quad \| A^{+} \|_F^2 = \sum_{i=1}^{r} \frac{1}{\sigma_i^2}; \\ (3) \| A \|_2 = \max_{1\le i\le r}\{\sigma_i\}, \quad \| A^{+} \|_2 = \frac{1}{\min_{1\le i\le r}\{\sigma_i\}}. \end{cases}$$

$$(4) A \in C_r^{m\times n}, AA^H \in C_r^{m\times m},$$

$$\begin{cases} AA^H \alpha_i = \lambda_i \alpha_i (i = 1, \cdots, r), \quad \alpha_i^H \alpha_j = \begin{cases} 1, & j = i \\ 0, & j \neq i \end{cases} \\ \Delta_r = diag(\lambda_1, \cdots, \lambda_r), \quad U_1 = (\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_r) \end{cases}$$

$$\Rightarrow A^+ = A^H (AA^H)^+ = A^H U_1 \Delta_r^{-1} U_1^H$$

3. $Ax=b$有解 $\Leftrightarrow AA^{-}b=b$（$AA^{+}b=b$）

$$\Rightarrow x=A^{-}b+(E_n-A^{-}A)u \quad \forall \quad u\in C^n.$$

（1）相容方程$Ax=b$

$$Ax=b\text{有解}\Leftrightarrow rank(A)=rank(A\,|\,b)$$

$$\Leftrightarrow b\in R(A)$$

$$\Leftrightarrow AA^{+}b=b$$

$$\Rightarrow \text{通解}\, x=Db+(E_n-DA)u \quad \forall \quad u\in C^n. (D\in A\{1,3\})$$

$$=A^{+}b+(E_n-A^{+}A)u \quad \forall \quad u\in C^n.$$

$Db=A^{+}b$—————— **最小范数解**

(2) 不相容方程$Ax=b$

$$Ax=b\text{无解} \Leftrightarrow rank(A)\neq rank(A|b)$$
$$\Leftrightarrow b\notin R(A)$$
$$\Leftrightarrow AA^{+}b\neq b$$

$\Rightarrow$ 最小二乘解的通解$x=Gb+(E_n-A^{-}A)u \quad \forall \quad u\in C^n.(G\in A\{1,4\})$

$$=A^{+}b+(E_n-A^{+}A)u \quad \forall \quad u\in C^n.$$

$A^{+}b$ ———————————— **最佳逼近解**

例1：已知A的$M-P$逆A^+，求$\begin{pmatrix} A & A \\ A & A \end{pmatrix}^+$

$$A=BD\Rightarrow\begin{pmatrix} A & A \\ A & A \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} B \\ B \end{pmatrix}\begin{pmatrix} D & D \end{pmatrix}\Rightarrow\begin{pmatrix} A & A \\ A & A \end{pmatrix}^+=\frac{1}{4}\begin{pmatrix} A^+ & A^+ \\ A^+ & A^+ \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} B \\ B \end{pmatrix}^+=\left(\begin{pmatrix} B \\ B \end{pmatrix}^H\begin{pmatrix} B \\ B \end{pmatrix}\right)^{-1}\begin{pmatrix} B \\ B \end{pmatrix}^H=\left((B^H,B^H)\begin{pmatrix} B \\ B \end{pmatrix}\right)^{-1}(B^H,B^H)$$

$$=(2B^HB)^{-1}(B^H,B^H)=\frac{1}{2}(B^+,B^+)$$

$$\begin{pmatrix} D & D \end{pmatrix}^+=\begin{pmatrix} D & D \end{pmatrix}^H\left(\begin{pmatrix} D & D \end{pmatrix}\begin{pmatrix} D & D \end{pmatrix}^H\right)^{-1}=\begin{pmatrix} D^H \\ D^H \end{pmatrix}\left(\begin{pmatrix} D & D \end{pmatrix}\begin{pmatrix} D^H \\ D^H \end{pmatrix}\right)^{-1}$$

$$=\begin{pmatrix} D^H \\ D^H \end{pmatrix}(2DD^H)^{-1}=\frac{1}{2}\begin{pmatrix} D^+ \\ D^+ \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} A & A \\ A & A \end{pmatrix}^+ = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} D^+ \\ D^+ \end{pmatrix}\frac{1}{2}(B^+, B^+) = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} D^+B^+ & D^+B^+ \\ D^+B^+ & D^+B^+ \end{pmatrix} = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} A^+ & A^+ \\ A^+ & A^+ \end{pmatrix}$$

类例：已知A的M - P逆A^+，求$\begin{pmatrix} A \\ A \end{pmatrix}^+$

$$A = BD \Rightarrow \begin{pmatrix} A \\ A \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} B \\ B \end{pmatrix} D \Rightarrow \begin{pmatrix} A \\ A \end{pmatrix}^+ = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} A^+ & A^+ \end{pmatrix}$$

类例：已知A的逆A^{-1}，求$\begin{pmatrix} 0 & A \\ 0 & 0 \end{pmatrix}^+$

$$\begin{pmatrix} 0 & A \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E \\ 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & A \end{pmatrix} = BD \Rightarrow A^+ = D^+B^+ = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ A^{-1} & 0 \end{pmatrix}$$

例2：设A是元素全为1的$m\times n$矩阵，则$A^{+}=$

$$A=\begin{pmatrix}1\\1\\\vdots\\1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&1&\cdots&1\end{pmatrix}=BD\Rightarrow A^{+}=D^{+}B^{+}=\frac{1}{mn}A^{T}$$

例3：已知$A\in C_n^{m\times n}\Rightarrow\left\|AA^+\right\|_2=1$

$$\left(AA^+\right)^2=AA^+\Rightarrow\lambda(AA^+)=0\text{或}\,1$$

$$A\in C_n^{m\times n}\Rightarrow\forall x\neq0,Ax\neq0\Rightarrow AA^+Ax=Ax=1\bullet Ax\Rightarrow1\in\sigma(AA^+)$$

$$\Rightarrow\left\|AA^+\right\|_2=\sqrt{r(\left(AA^+\right)^H AA^+)}=r(AA^+)=1$$

类例：已知$A\in C^{m\times n},A\neq0\Rightarrow\left\|A^+A\right\|_2=1$

$$B=A^+A,B^2=B\Rightarrow\lambda(B)=0\text{或}\,1;rank(B)=rank(A)\geq1\Rightarrow B\neq0.$$

$$B^H=B,B\neq0\Rightarrow\text{存在}\lambda(B)\neq0\Rightarrow\text{存在}\lambda(B)=1$$

$$\Rightarrow\left\|B\right\|_2^2=r(B^HB)=r^2(B)=1\Rightarrow\left\|B\right\|_2=1.$$

例5：用广义逆矩的方法判断线性性方程组

$$\begin{cases} 2x_1+4x_2+x_3+x_4=3 \\ x_1+2x_2-x_3+2x_4=0 \\ -x_1-2x_2-2x_3+x_4=3 \end{cases}$$

是否有解？如果有解，求通解和最小范数解；

如果无解，求最小二乘解和最佳逼近解.

解 $A=\begin{pmatrix} 2 & 4 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 & 2 \\ -1 & -2 & -2 & 1 \end{pmatrix}, b=\begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$

$step1:$求A的最大秩分解$:A=BD$

$$B=\begin{pmatrix}2&1\\1&-1\\-1&2\end{pmatrix},D=\begin{pmatrix}1&2&0&1\\0&0&1&-1\end{pmatrix}$$

$step2:$求A^+

$$A^+$$

$$=D^H(DD^H)^{-1}(B^HB)^{-1}B^H=\frac{1}{33}\begin{pmatrix}2&1&-1\\4&2&-2\\1&-5&-6\\1&6&5\end{pmatrix}$$

$step3:$ 检验 $AA^{+}b=b$是否成立.

$$AA^{+}b=\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}\neq b$$

故$Ax=b$是不相容的方程.

例6 $A_i \in C^{m\times n}, A_i A_j^H = 0, A_i^H A_j = 0 (i \neq j, i, j = 1, 2, \cdots, r)$,

记 $A = \sum_{i=1}^{r} A_i, G = \sum_{i=1}^{r} A_i^+$; 则 $\left(\sum_{i=1}^{r} A_i\right)^+ = A^+ = G = \sum_{i=1}^{r} A_i^+$

证明: (1) $AG = \left(\sum_{i=1}^{r} A_i\right)\left(\sum_{j=1}^{r} A_j^+\right) = \left(\sum_{i=1}^{r} A_i\right)\left(\sum_{j=1}^{r} A_j^H (A_j A_j^H)^+\right)$

$$= \sum_{i=1}^{r} (A_i A_i^H)(A_i A_i^H)^+ = \sum_{i=1}^{r} A_i [A_i^H (A_i A_i^H)^+] = \sum_{i=1}^{r} A_i A_i^+$$

(2) $GA = \left(\sum_{i=1}^{r} A_i^+\right)\left(\sum_{j=1}^{r} A_j\right) = \left(\sum_{i=1}^{r} (A_i^H A_i)^+ A_i^H\right)\left(\sum_{j=1}^{r} A_j\right)$

$$= \sum_{i=1}^{r} (A_i^H A_i)^+ (A_i^H A_i) = \sum_{i=1}^{r} [(A_i^H A_i)^+ A_i^H] A_i = \sum_{i=1}^{r} A_i^+ A_i$$

$(A^+ = (A^H A)^+ A^H = A^H (A A^H)^+)$

$$(1) \Rightarrow (AG)^H = \left(\sum_{i=1}^{r} A_i A_i^+\right)^H = \sum_{i=1}^{r} (A_i A_i^+)^H = \sum_{i=1}^{r} A_i A_i^+ = AG$$

$$(2) \Rightarrow (GA)^H = \left(\sum_{i=1}^{r} A_i^+ A_i\right)^H = \sum_{i=1}^{r} (A_i^+ A_i)^H = \sum_{i=1}^{r} A_i^+ A_i = GA$$

$$(3) AGA = \left(\sum_{i=1}^{r} A_i\right)\left(\sum_{j=1}^{r} A_j^+\right)\left(\sum_{k=1}^{r} A_k\right) = \left(\sum_{i=1}^{r} A_i A_i^+\right)\left(\sum_{k=1}^{r} A_k\right)$$

$$= \left(\sum_{i=1}^{r} A_i (A_i^H A_i)^+ A_i^H\right)\left(\sum_{k=1}^{r} A_k\right) = \sum_{i=1}^{r} A_i (A_i^H A_i)^+ A_i^H A_i = \sum_{i=1}^{r} A_i A_i^+ A_i = \sum_{i=1}^{r} A_i = A$$

$$(4) GAG = \left(\sum_{i=1}^{r} A_i^+\right)\left(\sum_{j=1}^{r} A_j\right)\left(\sum_{k=1}^{r} A_k^+\right) = \sum_{i=1}^{r} A_i^+ = G$$

故 $$\left(\sum_{i=1}^{r} A_i\right)^+ = \sum_{i=1}^{r} A_i^+$$