$(AG)^H = (UDVV^HD^+U^H)^H = (UDD^+U^H)^H = U(D^+)^H D^H U^H$ $= U(DD^+)^H U^H$ $= UDD^+U^H$ ✓

一.1. X ✓ $AGA=A, \to UDVV^HD^+U^HUDV = UDD^+DV = UDV$ ✓

$GAG=G. \to V^HD^+U^HUDVV^HD^+U^H = V^HD^+DD^+U^H = V^HD^+U^H$ ✓

$(GA)^H=GA \to (V^HD^+U^HUDV)^H = V^HD^HU^HU(D^H)^+V$ X

$= V^HD^H(D^+)^HV$ $= V^H(D^+D)^HV = V^HD^+DV$ ✓.

2. X $E = E-A+A \Rightarrow 1 \leq \|E-A\| + \|A\|$

若$A=0$. 则$\|x\|=0$.

3. ✓ X $\|x\| = \|Ax\|_2$. 又$\|\cdot\|_2 \geq 0$, 则$\|x\| \geq 0$.当$x=0$时 $\|Ax\|=0$.

$\|\lambda x\| = \|A\lambda x\|_2 = |\lambda|\,\|x\|$

$\|x+y\| = \|A(x+y)\|_2 = \|Ax+Ay\|_2 \leq \|Ax\|_2 + \|Ay\|_2 = \|x\|_2 + \|y\|_2$

4. ✓ $J_1 = \frac{\pi}{2}$ $J_2 = -\frac{\pi}{2}$ $J_3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

则$\sin J_1 = 1$ $\sin J_2 = -1$. $\sin J_3 = \begin{pmatrix} \sin 0 & \frac{\sin'(0)}{1!} \\ & \sin 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

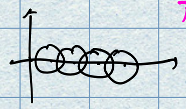
$\Rightarrow \sin A = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & -1 & & \\ & & 0 & 1 \\ & & 0 & 0 \end{pmatrix}$

5. ✓. A列满秩. 则A存在$A_L^{-1} = (A^HA)^{-1}A^H$, $A^+ = (A^HA)^{-1}A^H$

$\Rightarrow A^+A = (A^HA)^{-1}(A^HA) = E$ $\lambda(E)=1$

6. ✓

7. X. ✓ 方阵A任意盖尔圆不一定都包含A的λ



8. ✓

9. ✓ X $r(A) = \max_i \lambda_i \leq \|A\|$ ← 方阵X.

10. ✓ X 奇异矩阵 ⇒ 不可逆矩阵. 可逆阵才存在QR分解

二.解: $\because A^H=A$. 则A为正规矩阵, 则存在酉矩阵U.

使$U^HAU = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & \sqrt{2} & & \\ & & \ddots & \\ & & & \sqrt{n} \end{pmatrix}$. 则$\|A\|_F = \|U^HAU\|_F = \sqrt{1+2+\cdots+n} = \sqrt{\frac{n(1+n)}{2}}$

$r(A) = \sqrt{n}$.

$\|A\|_2 = \|U^HAU\|_2 = \sqrt{n}$

$K_2(A) = \|A\|_2\|A^{-1}\|_2 = \sqrt{n}\sqrt{1} = \sqrt{n}$

$\|(A^{-1})^m\|_2 = 1$

三.解: $\sum_{j=1}^{n}|a_{ij}| < 1. \Rightarrow \|A\|_\infty = \max_i \sum_{j=1}^{n}|a_{ij}| < 1.$

又 $Ax=\lambda x$. $\quad \|\lambda x\|_\infty=\|Ax\|_\infty \Rightarrow |\lambda|\,\|x\|_\infty \leqslant \|A\|_\infty\|x\|_\infty \quad \Rightarrow |\lambda| \leqslant \|A\|_\infty$

$\Rightarrow |\lambda|<1$

四、解: (1)

$$A \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad 则 \quad B=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \\ 2 & 0 \\ 4 & 2 \end{pmatrix} \quad D=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

(2) $A^+=D^+B^+$

$$B^+=(B^HB)^{-1}B^H=\frac{1}{5}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 \\ -2 & 1 & -4 & 1 \end{pmatrix}$$

$$D^+=D^H(DD^H)^{-1}=\frac{1}{5}\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \\ 2 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow A^+=\frac{1}{25}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 2 \\ -5 & 3 & -10 & 6 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 5 & -2 & 10 & -4 \end{pmatrix}$$

(3). $$AA^+b=\frac{1}{25}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 2 & 2 \\ 4 & 2 & 4 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 2 \\ -5 & 3 & -10 & 6 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 5 & -2 & 10 & -4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 \\ 5 \\ -2 \\ 10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 5 \\ -2 \\ 10 \end{pmatrix}=b.$$

则 $Ax=b$ 有解

(4). $Ax=b$ 相容. 则有最小范数解 $x=A^+b=\begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$

五、解:

$$A^HA=\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & b \\ a & 0 & c \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & a & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ b & c & 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \frac{1}{2}+b^2 & \frac{1}{\sqrt{2}}a+bc & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}}a+bc & a^2+c^2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}=E$$

则有 $$\begin{cases} \frac{1}{2}+b^2=1 \\ a^2+c^2=1 \\ \frac{1}{\sqrt{2}}a+bc=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=-\frac{1}{\sqrt{2}} \\ b=\frac{1}{\sqrt{2}} \\ c=\frac{1}{\sqrt{2}} \end{cases} 或 \begin{cases} a=\frac{1}{\sqrt{2}} \\ b=\frac{1}{\sqrt{2}} \\ c=-\frac{1}{\sqrt{2}} \end{cases} 或 \begin{cases} a=\frac{1}{\sqrt{2}} \\ b=-\frac{1}{\sqrt{2}} \\ c=\frac{1}{\sqrt{2}} \end{cases} 或 \begin{cases} a=-\frac{1}{\sqrt{2}} \\ b=-\frac{1}{\sqrt{2}} \\ c=-\frac{1}{\sqrt{2}} \end{cases}$$

六、证 (1) 设 $\exists x$. 则 $x^TBx=x^TA^TAx=(Ax)^TAx\geqslant 0$. 则 B为半正定阵

(2) A列向量组线性无关. 则 $Ax=0$ 只有零解

当 $x\neq 0$ 时, $Ax\neq 0$. $\Rightarrow$ $x^TBx>0$. 则B为正定阵.

七、证: 若A的M-P广义逆矩阵为 A^+.

则有 $AA^+A=A \quad A^+AA^+=A^+ \quad (AA^+)^H=AA^+ \quad (A^+A)^H=A^+A$ 成立

假设A^+的M-P广义逆矩阵为A

$\Rightarrow$. $A^+AA^+=A^+$ $\quad AA^+A=A$ $\quad (A^+A)^H=A^+A$ $\quad (AA^+)^H=(AA^+)$

则 $(A^+)^+=A$