常微分方程数值解

差分格式的稳定性

线性多步法

常微分方程组的有限差分法

高阶常微分方程的有限差分法

稳定性

定义 若一种数值方法在节点值 y_n 上大小为δ 的扰动，对于以后各节点值 $y_m(m>n)$ 上产生的偏差均不超过δ，则称该方法是**稳定**。

以欧拉法为例考察计算稳定性.

例 考察初值问题

$$\begin{cases} y' = -100\ y, \\ y(0) = 1. \end{cases}$$

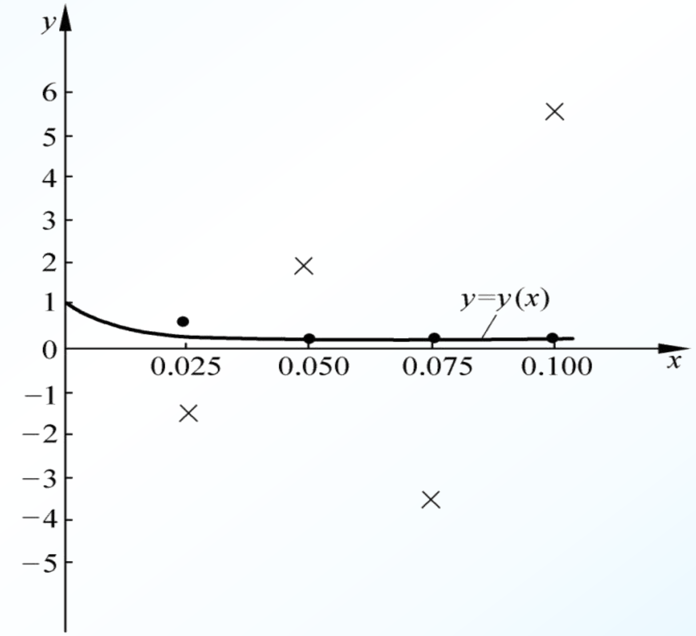
其准确解 $y(x)=e^{-100x}$ 是一个按指数曲线衰减得很快的函数，如下图所示：

用欧拉法解方程 $y' = -100y$ 得

$$y_{n+1} = (1 - 100h)y_n.$$

若取 h=0.025，则欧拉公式的具体形式为

$$y_{n+1} = -1.5y_n,$$



可以看到，欧拉方法的解 y_n（图中用×号标出）在准确值 $y(x_n)$的上下波动，计算过程明显地不稳定.

但若取 h=0.005，则计算过程稳定.

再考察欧拉隐式方法，取 h=0.025 时计算公式为

$$y_{n+1} = \frac{1}{3.5} y_n .$$

计算结果如下，这时计算过程是稳定的.

计算结果对比

节点	欧拉方法	欧拉隐式方法
0.025	−1.5	0.2857
0.050	2.25	0.0816
0.075	−3.375	0.0233
0.100	5.0625	0.0067

线性多步法的一般公式

如果计算y_{n+k}时，除用 y_{n+k-1} 的值，还用到 y_{n+i} $(i=0,1,2,\ldots,k-2)$ 的值，则称此方法为**线性多步法**.

一般的线性多步法公式可表示为

$$y_{n+k}=\sum_{i=0}^{k-1}\alpha_i y_{n+i}+h\sum_{i=0}^{k}\beta_i f_{n+i},$$

其中 y_{n+i} 为 $y(x_{n+i})$ 的近似，$f_{n+i}=f(x_{n+i},y_{n+i})$，$x_{n+i}=x_0+ih$

α_i,β_i为常数，α_0 及 β_0 不全为零，则称为**线性 k 步法**.

计算时需先给出前面 k个近似值$y_0, y_1, y_2, \ldots y_{k-1}$，再逐次求出 $y_k, y_{k+1}, y_{k+2}, \cdots$

阿当姆斯显式与隐式公式

考虑形如

$$y_{n+k} = y_{n+k-1} + h\sum_{i=0}^{k} \beta_i f_{n+i}$$

的 k 步法，称为阿当姆斯（Adams)方法.

β_k=0为显式方法，$\beta_k \neq 0$为隐式方法，通常称为阿当姆斯显式与隐式公式,也称Adams-Bashforth公式与Adams-Monlton公式.

阿当姆斯显式公式

k	p	公式
1	1	$y_{n+1} = y_n + hf_n$
2	2	$y_{n+1} = y_n + \frac{h}{2}(3f_n - f_{n-1})$
3	3	$y_{n+1} = y_n + \frac{h}{12}(23f_n - 16f_{n-1} + 5f_{n-2})$
4	4	$y_{n+1} = y_n + \frac{h}{24}(55f_n - 59f_{n-1} + 37f_{n-2} - 9f_{n-3})$

例

$$\begin{cases} y' = -y\ln y, \\ y(0) = 1/2. \end{cases}$$

精确解为：

$$y = e^{(-\ln 2)e^{-t}}.$$

$n = h^{-1}$	二阶Adams	四阶Adams
8	0.28474335730512E-02	0.19742002576040E-05
16	0.67170745938105E-03	0.12099205870530E-06
32	0.16212367000479E-03	0.72652883709168E-08
64	0.39755173993794E-04	0.44197434601045E-09
128	0.98386454340238E-05	0.27204238861600E-10
256	0.24469431793017E-05	0.16866508190105E-11
512	0.61013351659867E-06	0.10536016503693E-12
1024	0.15233231 1 98675E-06	0.76605388699136E-14

阿当姆斯隐式公式

k	p	公 式
1	2	$y_{n+1} = y_n + \frac{h}{2}(f_{n+1} + f_n)$
2	3	$y_{n+1} = y_n + \frac{h}{12}(5f_{n+1} + 8f_n - f_{n-1})$
3	4	$y_{n+1} = y_n + \frac{h}{24}(9f_{n+1} + 19f_n - 5f_{n-1} + f_{n-2})$
4	5	$y_{n+1} = y_n + \frac{h}{720}(251f_{n+1} + 646f_n - 264f_{n-1} + 106f_{n-2} - 19f_{n-3})$

一阶常微分方程组的有限差分法

$$\begin{cases} \dfrac{dy_i}{dx} = f_i(x, y_1, y_2, \cdots, y_m), \; x > x_0 \\ y_i(x_0) = y_i^0, \end{cases} ,(i = 1, 2, \cdots, m).$$

引入向量记号：

$$\overline{y}(x) = (y_1, y_2, \cdots, y_m)^T$$

$$\overline{f}(x, \overline{y}) = [f_1(x, \overline{y}), f_2(x, \overline{y}), \cdots, f_m(x, \overline{y})]^T$$

$$\overline{y}_0(x) = (y_1^0, y_2^0, \cdots, y_m^0)^T$$

则上面的初值问题可写为：

则上面的初值问题可写为:

$$\begin{cases} \dfrac{d\bar{y}}{dx} = \bar{f}(x, \bar{y}),\ x > x_0 \\ \bar{y}(x_0) = \bar{y}^0 \end{cases}$$

欧拉显示格式:

$$\bar{y}_{n+1} = \bar{y}_n + h\bar{f}(x_i, \bar{y}_n)$$

预估-校正格式:

$$\begin{cases} \bar{\bar{y}}_{n+1} = \bar{y}_n + h\bar{f}(x_n, \bar{y}_n) \\ \bar{y}_{n+1} = \bar{y}_n + \dfrac{h}{2}[\bar{f}(x_n, \bar{y}_n) + \bar{f}(x_{n+1}, \bar{\bar{y}}_{n+1})] \end{cases}$$

例1 考虑经典的Lotka-Volterra模型：

$$\begin{cases} y_1' = y_1 - y_1 y_2 + \sin \pi t, \quad y_1(0) = 2, \\ y_2' = y_1 y_2 - y_2, \quad y_2(0) = 1. \end{cases}$$

将右端写为如下形式：

$$\begin{cases} f_1\left(t, y_1, y_2\right) = y_1 - y_1 y_2 + \sin \pi t, \\ f_2\left(t, y_1, y_2\right) = y_1 y_2 - y_2. \end{cases}$$

利用欧拉显式格式计算如下：

$$\begin{cases} y_{1,n+1} = y_{1,n} + h f_1\left(t_n, y_{1,n}, y_{2,n}\right), \\ y_{2,n+1} = y_{2,n} + h f_2\left(t_n, y_{1,n}, y_{2,n}\right). \end{cases}$$

$$\begin{cases} y_1' = y_1 - y_1 y_2 + \sin \pi t, & y_1(0) = 2, \\ y_2' = y_1 y_2 - y_2, & y_2(0) = 1. \end{cases}$$

二阶预估-校正法的计算格式如下：

$$\begin{cases} \tilde{y}_{n+1} = y_n + hf(x_n, y_n) \\ y_{n+1} = y_n + \dfrac{h}{2}[f(x_n, y_n) + f(x_{n+1}, \tilde{y}_{n+1})] \end{cases}$$

$$\begin{cases} \bar{y}_{1,n+1} = y_{1,n} + hf_1\left(t_n, y_{1,n}, y_{2,n}\right), \\ \bar{y}_{2,n+1} = y_{2,n} + hf_2\left(t_n, y_{1,n}, y_{2,n}\right), \\ y_{1,n+1} = y_{1,n} + \dfrac{h}{2}\left[f_1\left(t_n, y_{1,n}, y_{2,n}\right) + f_1\left(t_n + h, \bar{y}_{1,n+1}, \bar{y}_{2,n+1}\right)\right], \\ y_{2,n+1} = y_{2,n} + \dfrac{h}{2}\left[f_2\left(t_n, y_{1,n}, y_{2,n}\right) + f_2\left(t_n + h, \bar{y}_{1,n+1}, \bar{y}_{2,n+1}\right)\right]. \end{cases}$$

二阶常微分方程的有限差分法

$$\begin{cases} y'' + p(x)y' + q(x)y = f(x), & a < x < b, \\ y(a) = \alpha, \qquad y(b) = \beta. \end{cases}$$

直接离散，

$$y'(x_i) = \frac{y(x_{i+1}) - y(x_{i-1})}{2h} + O(h^2),$$

$$y''(x_i) = \frac{y(x_{i+1}) - 2y(x_i) + y(x_{i-1})}{h^2} + O(h^2)$$

直接离散有

$$\frac{y_{i+1} - 2y_i + y_{i-1}}{h^2} + p_i \frac{y_{i+1} - y_{i-1}}{2h} + q_i y_i = f_i$$

二阶常微分方程的有限差分法

$$\begin{cases} y'' + p(x)y' + q(x)y = f(x), & a < x < b, \\ y(a) = \alpha, & y(b) = \beta. \end{cases}$$

整理有:

$$\begin{cases} \left(1 - \dfrac{h}{2}p_i\right)y_{i-1} - 2\left(1 - \dfrac{h^2}{2}q_i\right)y_i + \left(1 + \dfrac{h}{2}p_i\right)y_{i+1} = h^2 f_i \\ \qquad i = 1, 2, \cdots, N-1 \\ y_0 = \alpha, \qquad y_N = \beta \end{cases}$$

该方程组为三对角方程组.

例2 考虑二阶方程：

$$\begin{cases} y'' - 2(9x+2)y = -2(9x+2)e^x, 0 < x < 1. \\ y(0) = 0, \qquad y(1) = 1. \end{cases}$$

取： $x_0 = 0, \quad x_1 = \frac{1}{4}, \quad x_2 = \frac{1}{2}, \quad x_3 = \frac{3}{4}, \quad x_4 = 1.$

微分方程离散为：

$$\begin{cases} \dfrac{y_{n-1} - 2y_n + y_{n+1}}{h^2} - 2(9x_n + 2)y_n = -2(9x_n + 2)e^{x_n}, n = 1, 2, 3, \\ y_0 = 0, \qquad y_4 = 1. \end{cases}$$

在每个内点列方程得.

$$\begin{cases} -2.5312y_1 + y_2 = -0.6821 \\ y_1 - 2.8125y_2 + y_3 = -1.3396 \\ y_2 - 3.0938y_3 = -3.3156 \end{cases}$$

$$y_3 = 1.4855$$
$$y_2 = 1.2802$$
$$y_1 = 0.7753$$

二阶常微分方程的有限差分法

$$\begin{cases} y''(x) = f(x, y, y'), \quad x > x_0 \\ y(x_0) = y_0, \\ y'(x_0) = y'_0. \end{cases}$$

引入新变量：$z(x) = y'(x)$则可将上面的方程化为：

$$\begin{cases} z'(x) = f(x, y, z), \quad x > x_0 \\ y'(x) = z(x), \quad x > x_0 \\ y(x_0) = y_0, \\ z(x_0) = y'_0. \end{cases}$$

二阶常微分方程的有限差分法

对于方程组形式：

$$\begin{cases} z'(x) = f(x, y, z) \;, & x > x_0 \\ y'(x) = z(x), & x > x_0 \\ y(x_0) = y_0, \\ z(x_0) = y'_0. \end{cases}$$

欧拉显示格式：

$$\begin{cases} z_{n+1} = z_n + hf(x_n, y_n, z_n), \\ y_{n+1} = y_n + hz_n. \end{cases}$$

预估-校正格式：

$$\begin{cases} z'(x) = f(x, y, z), & x > x_0 \\ y'(x) = z(x), & x > x_0 \\ y(x_0) = y_0, \\ z(x_0) = y'_0. \end{cases}$$

$$\begin{cases} \tilde{z}_{n+1} = z_n + hf(x_n, y_n, z_n), \\ \tilde{y}_{n+1} = y_n + hz_n, \\ z_{n+1} = z_n + \dfrac{h}{2}[f(x_n, y_n, z_n) + f(x_{n+1}, \tilde{y}_{n+1}, \tilde{z}_{n+1})], \\ y_{n+1} = y_n + \dfrac{h}{2}[z_n + \tilde{z}_{n+1}]. \end{cases}$$

高阶常微分方程的有限差分法

$$y^{(n)} = g\left(t, y, y', y'', \ldots, y^{(n-1)}\right)$$

$$\begin{cases} w_1' = w_2, \quad w_1(0) = y_0, \\ w_2' = w_3, \quad w_2(0) = y_0', \\ w_3' = w_4, \quad w_3(0) = y_0'', \\ \qquad \vdots = \vdots \\ w_n' = g\left(t, w_1, w_2, \ldots, w_{n-1}, w_n\right), \quad w_n(0) = y_0^{(n-1)}. \end{cases}$$

写成向量形式：

$$\begin{cases} \boldsymbol{w} = \boldsymbol{f}(t, \boldsymbol{w}), \\ \boldsymbol{w}(0) = \boldsymbol{w}_0. \end{cases}$$

其中：

$$\boldsymbol{f}(t, \boldsymbol{w}) = \begin{pmatrix} w_2 \\ w_3 \\ w_4 \\ \vdots \\ g\left(t, w_1, w_2, w_3, \ldots, w_n\right) \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{w}_0 = \begin{pmatrix} y_0 \\ y_0' \\ y_0'' \\ \vdots \\ y_0^{(n-1)} \end{pmatrix}.$$