§6 范数的应用

程光辉

2020 年 4 月 11 日

1 范数的应用

(1) 矩阵 $\boldsymbol{A}$ 可逆，$\boldsymbol{A}$ 与其扰动矩阵 $\boldsymbol{\delta A}$ 满足什么条件时，$\boldsymbol{A}+\boldsymbol{\delta A}$ 可逆？
(2) 当 $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{\delta A}$ 可逆，$\boldsymbol{A}^{-1}$ 与 $(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{\delta A})^{-1}$ 的近似程度如何估计？

例 1. 设

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} 2 & 6 \\ 2 & 6.00001 \end{pmatrix},\quad \boldsymbol{\delta A}=\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -0.00002 \end{pmatrix},$$

求 $\boldsymbol{A}^{-1}$，$(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{\delta A})^{-1}$.

解：计算得

$$\boldsymbol{A}^{-1}=\begin{pmatrix} 300000.5 & -300000 \\ -100000 & 100000 \end{pmatrix},$$

$$(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{\delta A})^{-1}=\begin{pmatrix} -299999.5 & -300000 \\ 100000 & -100000 \end{pmatrix}.$$

定义 1. 设 $\boldsymbol{A}$ 是可逆矩阵，称

$$\boldsymbol{K_p(A)=\|A\|_p\left\|A^{-1}\right\|_p}$$

是矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的条件数.

定理 1. 设 $\boldsymbol{A}\in\mathbf{C}^{n\times n}$，$\|\boldsymbol{A}\|_a$ 是从属于向量范数 $\|\boldsymbol{x}\|_a$ 的算子范数，则当 $\|\boldsymbol{A}\|_a<\mathbf{1}$ 时，$\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}$ 可逆，且

$$\left\|(\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})^{-1}\right\|_a\le(\mathbf{1}-\|\boldsymbol{A}\|_a)^{-1}.$$

证明：对任意的非零向量 $\boldsymbol{x} \in \mathbf{C}^n$，有

$$\begin{aligned}
\|(\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{x}\|_a &= \|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}\|_a \\
&\geq \|\boldsymbol{x}\|_a - \|\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}\|_a \\
&\geq \|\boldsymbol{x}\|_a - \|\boldsymbol{A}\|_a\|\boldsymbol{x}\|_a \\
&= \|\boldsymbol{x}\|_a\left(1-\|\boldsymbol{A}\|_a\right) \\
&> 0,
\end{aligned}$$

即 $(\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{x} \neq \mathbf{0}$，所以 $(\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})$ 可逆.

又因为

$$(\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})^{-1}(\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}) = \boldsymbol{E},$$

则

$$(\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})^{-1} = \boldsymbol{E} + \boldsymbol{A}(\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})^{-1}.$$

进而

$$\begin{aligned}
\left\|(\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})^{-1}\right\|_a &= \left\|\boldsymbol{E}+\boldsymbol{A}(\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})^{-1}\right\|_a \\
&\leq \|\boldsymbol{E}\|_a + \|\boldsymbol{A}\|_a\left\|(\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})^{-1}\right\|_a,
\end{aligned}$$

故

$$\left(1-\|\boldsymbol{A}\|_a\right)\left\|(\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})^{-1}\right\|_a \leq \|\boldsymbol{E}\|_a = 1.$$

整理即

$$\left\|(\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})^{-1}\right\|_a \leq \left(1-\|\boldsymbol{A}\|_a\right)^{-1},$$

得证.

定理 2. 设 $\boldsymbol{A}$ 是可逆,$\delta\boldsymbol{A}$ 为扰动矩阵, 且 $\left\|\boldsymbol{A}^{-1}\right\|_a\|\delta\boldsymbol{A}\|_a < 1$, 则

(1) $\boldsymbol{A}+\delta\boldsymbol{A}$ *可逆;*

(2) $\frac{\left\|\boldsymbol{A}^{-1}-(\boldsymbol{A}+\delta\boldsymbol{A})^{-1}\right\|_a}{\left\|\boldsymbol{A}^{-1}\right\|_a} \leq \frac{K(\boldsymbol{A})\frac{\|\delta\boldsymbol{A}\|_a}{\|\boldsymbol{A}\|_a}}{1-K(\boldsymbol{A})\frac{\|\delta\boldsymbol{A}\|_a}{\|\boldsymbol{A}\|_a}}$.

证明：

(1) 由 $\left\|\boldsymbol{A}^{-1}\delta\boldsymbol{A}\right\|_a \leq \left\|\boldsymbol{A}^{-1}\right\|_a\|\delta\boldsymbol{A}\|_a < 1$，可得 $\boldsymbol{E}+\boldsymbol{A}^{-1}\delta\boldsymbol{A}$ 可逆. 进而 $\boldsymbol{A}+\delta\boldsymbol{A} = \boldsymbol{A}\left(\boldsymbol{E}+\boldsymbol{A}^{-1}\delta\boldsymbol{A}\right)$，可得 $\boldsymbol{A}+\delta\boldsymbol{A}$ 可逆.

(2) 由 $(\boldsymbol{A}+\delta\boldsymbol{A})^{-1} = \left(\boldsymbol{E}+\boldsymbol{A}^{-1}\delta\boldsymbol{A}\right)^{-1}\boldsymbol{A}^{-1}$, 可得

$$\begin{aligned}
\left\|\boldsymbol{A}^{-1}-(\boldsymbol{A}+\delta\boldsymbol{A})^{-1}\right\|_a &= \left\|\left[\boldsymbol{E}-\left(\boldsymbol{E}+\boldsymbol{A}^{-1}\delta\boldsymbol{A}\right)^{-1}\right]\boldsymbol{A}^{-1}\right\|_a \\
&= \left\|\boldsymbol{A}^{-1}\delta\boldsymbol{A}\left(\boldsymbol{E}+\boldsymbol{A}^{-1}\delta\boldsymbol{A}\right)^{-1}\boldsymbol{A}^{-1}\right\|_a \\
&\leq \left\|\boldsymbol{A}^{-1}\delta\boldsymbol{A}\right\|_a\left\|\left(\boldsymbol{E}+\boldsymbol{A}^{-1}\delta\boldsymbol{A}\right)^{-1}\right\|_a\left\|\boldsymbol{A}^{-1}\right\|_a.
\end{aligned}$$

结合定理 1，有

$$\begin{aligned}
\frac{\left\|A^{-1}-(A+\delta A)^{-1}\right\|_a}{\left\|A^{-1}\right\|_a} &\leq \frac{\left\|A^{-1}\delta A\right\|_a}{1-\left\|A^{-1}\delta A\right\|_a} \\
&\leq \frac{\left\|A^{-1}\right\|_a\|\delta A\|_a}{1-\left\|A^{-1}\right\|_a\|\delta A\|_a} \\
&= \frac{\left\|A^{-1}\right\|_a\|A\|_a\cdot\frac{\|\delta A\|_a}{\|A\|_a}}{1-\left\|A^{-1}\right\|_a\|A\|_a\cdot\frac{\|\delta A\|_a}{\|A\|_a}} \\
&= \frac{K(A)\cdot\frac{\|\delta A\|_a}{\|A\|_a}}{1-K(A)\cdot\frac{\|\delta A\|_a}{\|A\|_a}},
\end{aligned}$$

得证.

定理 3. 在方程组 $Ax=b$ 中，A 固定且可逆，令 $b\neq 0$ 且有小扰动，解方程

$$A(x+\delta x)=b+\delta b,$$

得

$$\frac{\|\delta x\|_a}{\|x\|_a}\leq K(A)\frac{\|\delta b\|_a}{\|b\|_a}.$$

证明： 由 $A(x+\delta x)=b+\delta b$，可得 $A(\delta x)=\delta b$，于是 $\delta x=A^{-1}\delta b$. 两边取范数有

$$\|\delta x\|_a\leq\left\|A^{-1}\right\|_a\|\delta b\|_a.$$

又 $Ax=b$，则 $\|b\|_a\leq\|A\|_a\|x\|_a$，移项有

$$\frac{1}{\|x\|_a}\leq\frac{\|A\|_a}{\|b\|_a}.$$

相乘既得结论.

例 2. 方程组

$$\begin{pmatrix}0.505 & 0.495\\ 1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\ 2\end{pmatrix}$$

的解为 $(1,1)^T$. 设 b 有扰动 $\delta b=(0,\varepsilon)^T$, 则方程组

$$\begin{pmatrix}0.505 & 0.495\\ 1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\ 2\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0\\ \varepsilon\end{pmatrix}$$

的解为 $(1-49.5\varepsilon,1+50.5\varepsilon)^T$. 计算易得

$$\frac{\|\delta x\|_1}{\|x\|_1}=50\varepsilon\leq K(A)\frac{\|\delta b\|_1}{\|b\|_1}=301\frac{\varepsilon}{3}\approx 100\varepsilon.$$

定理 4. 在 $Ax=b$ 中, b 固定且非零, 令可逆矩阵 A 有小扰动 δA, 则当 $\left\|A^{-1}\right\|_a \|\delta A\|_a < 1$ 时，解方程组

$$(A+\delta A)x=b,$$

得

$$\frac{\|\delta x\|_a}{\|x\|_a} \leq \frac{K(A)\frac{\|\delta A\|_a}{\|A\|_a}}{1-K(A)\frac{\|\delta A\|_a}{\|A\|_a}}.$$

证明: 由定理 2 知，当 $\left\|A^{-1}\delta A\right\|_a < 1$ 时，$A+\delta A$ 可逆，故方程组 $(A+\delta A)x=b$ 有唯一解，记 $x^*=x+\delta x$.

$$\begin{aligned}
\delta x &= x^* - x \\
&= (A+\delta A)^{-1}b - A^{-1}b \\
&= \left(E+A^{-1}\delta A\right)^{-1}A^{-1}b - A^{-1}b \\
&= \left[\left(E+A^{-1}\delta A\right)^{-1} - E\right]A^{-1}b \\
&= -A^{-1}\delta A\left(E+A^{-1}\delta A\right)^{-1}A^{-1}b \\
&= -A^{-1}\delta A\left(E+A^{-1}\delta A\right)^{-1}x,
\end{aligned}$$

即

$$\|\delta x\|_a = \left\|-A^{-1}\delta A\left(E+A^{-1}\delta A\right)^{-1}x\right\|_a \leq \left\|A^{-1}\delta A\right\|_a \left\|\left(E+A^{-1}\delta A\right)^{-1}\right\|_a \|x\|_a.$$

再由定理 2, 得

$$\frac{\|\delta x\|_a}{\|x\|_a} \leq \frac{K(A)\frac{\|\delta A\|_a}{\|A\|_a}}{1-K(A)\frac{\|\delta A\|_a}{\|A\|_a}}.$$

例 3. 设

$$A=\begin{pmatrix} 2 & 6 \\ 2 & 6.00001 \end{pmatrix} \quad b=\begin{pmatrix} 8 \\ 8.00001 \end{pmatrix},$$

则方程组 $Ax=b$ 得解为 $(1,1)^T$. 若 A,b 均有小扰动

$$\delta A=\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -0.00002 \end{pmatrix} \quad \delta b=\begin{pmatrix} 0 \\ 0.00001 \end{pmatrix},$$

则方程组 $(A+\delta A)x=b+\delta b$ 的解为 $(10,-2)^T$.

定理 5. 设 A 可逆，$0\neq b\in \mathbf{C}^n$，$\left\|A^{-1}\right\|_a \|\delta A\|_a < 1$，方程组 $Ax=b$ 的解是 x，则方程组 $(A+\delta A)(x+\delta x)=b+\delta b$ 有唯一解 $x+\delta x$, 并且满足

$$\frac{\|\delta x\|_a}{\|x\|_a} \leq \frac{K(A)}{1-K(A)\frac{\|\delta A\|_a}{\|A\|_a}}\left(\frac{\|\delta A\|_a}{\|A\|_a}+\frac{\|\delta b\|_a}{\|b\|_a}\right).$$

作业：用 Matlab 实现以下计算,

例 4. 设

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} \mathbf{2} & \mathbf{6} \\ \mathbf{2} & \mathbf{6.00001} \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{B}=\begin{pmatrix} \mathbf{2} & \mathbf{6} \\ \mathbf{2} & \mathbf{8.00001} \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{\Delta}=\begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & -\mathbf{0.00002} \end{pmatrix},$$

求 $\boldsymbol{A}^{-1}$, $(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{\Delta})^{-1}$, $(\boldsymbol{B}+\boldsymbol{\Delta})^{-1}$. 有什么发现?

例 5. 设

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} \mathbf{2} & \mathbf{6} \\ \mathbf{2} & \mathbf{6.00001} \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{B}=\begin{pmatrix} \mathbf{2} & \mathbf{6} \\ \mathbf{2} & \mathbf{8.00001} \end{pmatrix},$$

求矩阵 $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$ 在算子 *1* 范数、*2* 范数和无穷范数意义下的条件数. 有什么发现?