数值分析

期末复习要点总结

第一章 误差

一. 误差的来源:

1. 模型误差

2. 观测误差

3. 截断误差

4. 舍入误差

二. 绝对误差、 相对误差和有效数字

定义 设x为准确值x^*的一个近似值，称

$$e(x) = x - x^*$$

为近似值 x 的**绝对误差**，简称**误差**.

若

$$|e(x)| = |x - x^*| \le \varepsilon$$

通常称 ε 为近似值 x 的**绝对误差限**，简称**误差限**.

定义 设 x为准确值 x^* 的近似值， 称绝对误差与准确值之比为近似值x 的相对误差，记为 $e_r(x)$

即

$$e_r(x) = \frac{e(x)}{x^*} = \frac{x - x^*}{x^*}$$

由于在计算过程中准确值 x^* 总是未知的，

故一般取相对误差为

$$e_r(x)=\frac{e(x)}{x}=\frac{x-x^*}{x}$$

如果存在正数 ε_r 使得

$$\left|e_r(x)\right|=\left|\frac{e(x)}{x}\right|\le\varepsilon_r$$

则称 ε_r 为 x 的相对误差限.

有效数字

一般地，如果近似值 x 的规格化形式为

$$x = \pm 0.a_1 a_2 \cdots a_n \cdots \times 10^m$$

其中m为整数，$a_1 \neq 0, a_i (i = 1,2,\cdots)$ 为0到9之间的整数.

如果

$$|x - x^*| \leq \frac{1}{2} \times 10^{m-n}$$

则称近似值 x 有n位有效数字.

误差插播规律

$$\begin{cases} e(x_1 \pm x_2) = e(x_1) \pm e(x_2) \\ e_r(x_1 \pm x_2) = \dfrac{x_1}{x_1 \pm x_2} e_r(x_1) \pm \dfrac{x_2}{x_1 \pm x_2} e_r(x_2) \end{cases}$$

$$\begin{cases} e(x_1 x_2) \approx x_2 e(x_1) + x_1 e(x_2) \\ e_r(x_1 x_2) \approx e_r(x_1) + e_r(x_2) \end{cases}$$

$$\begin{cases} e\left(\dfrac{x_1}{x_2}\right) \approx \dfrac{1}{x_2} e(x_1) - \dfrac{x_1}{x_2^2} e(x_2) \\ e_r\left(\dfrac{x_1}{x_2}\right) \approx e_r(x_1) - e_r(x_2) \end{cases}$$

例 设近似数 $a=1.557$ 是某真值 x 经四舍五入所得，试求其绝对误差限和相对误差限.

解 由于a经四舍五入得到,故

$$|e(a)|\le\frac{1}{2}\times10^{-3}$$

$$|e_r(a)|=\left|\frac{e(a)}{a}\right|\le\frac{\frac{1}{2}\times10^{-3}}{1.577}$$

$$=3.1705\times10^{-4}$$

数值计算中的一些原则

1. 避免两个相近的数相减

2. 避免大数“吃”小数的现象

3. 避免除数的绝对值远小于被除数的绝对值

4. 要简化计算，减少运算次数，提高效率

5. 要有数值稳定性,即能控制舍入误差的传播

例如 为提高数值计算精度, 当正数x充分大时,应将

$$\sqrt{2x+1}-\sqrt{2x-1}$$

改写为

$$\frac{(\sqrt{2x+1}-\sqrt{2x-1})(\sqrt{2x+1}+\sqrt{2x-1})}{\sqrt{2x+1}+\sqrt{2x-1}} = \frac{2}{\sqrt{2x+1}+\sqrt{2x-1}}$$

例 如何计算下列函数值才比较精确

(1) $\dfrac{1}{1+2x}-\dfrac{1}{1+x}$ 对 $|x|<<1$ (2) $\sqrt{x+\dfrac{1}{x}}-\sqrt{x-\dfrac{1}{x}}$ 对 $|x|>>1$

解 (1) 要使计算准确, 应避免两个相近的数相减

故变换所给公式

$$\frac{1}{1+2x}-\frac{1}{1+x}=\frac{-x}{(1+2x)(1+x)}$$

(2) 要使计算准确, 应避免两个相近的数相减

故变换所给公式

$$\sqrt{x+\frac{1}{x}}-\sqrt{x-\frac{1}{x}}=\frac{\left(\sqrt{x+\frac{1}{x}}-\sqrt{x-\frac{1}{x}}\right)\left(\sqrt{x+\frac{1}{x}}+\sqrt{x-\frac{1}{x}}\right)}{\sqrt{x+\frac{1}{x}}+\sqrt{x-\frac{1}{x}}}=\frac{\frac{2}{x}}{\sqrt{x+\frac{1}{x}}+\sqrt{x-\frac{1}{x}}}$$

第二章 非线性方程求解

•区间对分法（二分法）

1．计算$f(x)$在有解区间[a, b]端点处的值，f(a)，f(b)。

2．计算$f(x)$在区间中点处的值$f(x_1)$。

3．判断若$f(x_1)=0$，则x_1即是根，否则检验：

（1）若$f(x_1)$与f(a)异号，则知解位于区间$[a, x_1]$，

$b_1=x_1,\ a_1=a$;

（2）若$f(x_1)$与f(a)同号，则知解位于区间$[x_1, b]$，

$a_1=x_1,\ b_1=b$。

反复执行步骤2、3，便可得到一系列有根区间：

$(a, b), (a_1, b_1), \ldots, (a_k, b_k), \ldots$

4、当 $b_{n+1}-a_{n+1}<\varepsilon$ 时

5、则 $x_{n+1}=\dfrac{1}{2}(a_k+b_k)$ 即为根的近似

先验误差估计：

$$\boxed{\left|x_{k+1}-x^*\right|\le\frac{1}{2^{k+1}}(b-a)\qquad(k=1,2,\cdots)}$$

理论基础：

定理1： 设函数 $f(x)$ 在区间[a, b]上连续，如果 $f(a)\cdot f(b)<0$，则方程 $f(x)=0$ 在[a, b]内至少有一实根 x^*。

例 试用对分区间法求方程 $x^5+3x-1=0$ 在[0, 0.5]内的根,要求误差不超过 $\frac{1}{2}\times 10^{-2}$.

[解] 令 $f(x)=x^5+3x-1$ 则

$f(0)=-1<0, f(0.5)=0.531>0$ $\quad f'(x)=5x^4+3>0,$

故在[0,0.5]内 $f(x)=x^5+3x-1=0$ 有唯一实根.

为达到要求

$$n \geq \frac{\ln\dfrac{(b-a)}{\varepsilon}}{\ln 2}-1$$

即

$$n \geq \frac{\ln\dfrac{(0.5-0)}{\frac{1}{2}\times 10^{-2}}}{\ln 2}-1 = \frac{\ln 10^2}{\ln 2}-1=5.64$$

取 $n=6$

计算结果见下表。

$$f(x)=x^5+3x-1$$

n	a_n	b_n	x_n	$f(x_n)$
0	0	0.5	0.25	-0.249023
1	0.25	0.5	0.375	0.1324158
2	0.25	0.375	0.3125	-0.0595197
3	0.3125	0.375	0.34375	0.0360497
4	0.3125	0.34375	0.328125	-0.0118214
5	0.328125	0.34375	0.3359375	0.01209101
6	0.328125	0.3359375	0.33203125	0.00012923

故 $x_6=0.33203125$ 即为符合精度要求的解.

不动点迭代

基本思想

- 构造 $f(x)=0$ 的一个等价方程： $x=\varphi(x)$

$$f(x)=0 \quad \xLeftrightarrow{\text{等价变换}} \quad x=\varphi(x)$$

$$f(x) \text{ 的零点} \quad \Longleftrightarrow \quad \varphi(x) \text{ 的不动点}$$

不动点迭代

具体过程

- 任取一个迭代初始值 x_0，计算

$$\boxed{x_{k+1} = \varphi(x_k)} \qquad k = 0, 1, 2, \ldots\ldots$$

得到一个迭代序列： $x_0, x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$

几何含义：求曲线 $y = \varphi(x)$ 与直线 $y = x$ 的交点

收敛性分析

设 $\varphi(x)$ 连续，若 $\{x_k\}_{k=0}^{\infty}$ 收敛，即 $\lim\limits_{k\to\infty} x_k = x^*$，则

$$\lim_{k\to\infty} x_{k+1} = \lim_{k\to\infty} \varphi(x_k) = \varphi\left(\lim_{k\to\infty} x_k\right)$$

$$\Rightarrow \quad x^* = \varphi(x^*) \quad \text{即} \quad \boxed{f(x^*) = 0}$$

性质：若 $\lim\limits_{k\to\infty} x_k = x^*$，则不动点迭代收敛，且 x^* 是 $f(x)=0$ 的解；否则迭代法发散。

不动点迭代的收敛性

定理： 设 $\varphi(x) \in C[a,b]$ 且满足

(1) 对任意的 $x\in[a,b]$ 有 $\varphi(x)\in[a,b]$

(2) 存在常数 $0<L<1$，使得任意的 $x, y\in[a,b]$ 有

$$\left|\varphi(x)-\varphi(y)\right| \le L\left|x-y\right|$$

则对任意初始值 $x_0\in[a,b]$，不动点迭代 $x_{k+1}=\varphi(x_k)$ 收敛，且

$$\left|x_k - x^*\right| \le \frac{L}{1-L}\left|x_k - x_{k-1}\right| \le \frac{L^k}{1-L}\left|x_1 - x_0\right|$$

定理： 若 $\varphi(x)\in C^1[a,b]$ 且对任意 $x\in[a,b]$ 有

$$|\varphi'(x)|\le L<1$$

则上述定理中的结论成立。

收敛性结论表明：收敛性与初始值的选取无关

→ $\boxed{\text{全局收敛}}$

例：求 $f(x) = x^3 - x - 1 = 0$ 在区间 [1, 2] 中的根

(1) $\varphi(x) = x^3 - 1 \Rightarrow 0 \le \varphi(x) \le 7 \quad (x \in [1,2])$

$\varphi'(x) = 3x^2 \Rightarrow |\varphi'(x)| > 1$ ✗

(2) $\varphi(x) = \sqrt[3]{x+1} \Rightarrow 1 \le \varphi(x) \le 2 \quad (x \in [1,2])$

$\varphi'(x) = \frac{1}{3}(x+1)^{-\frac{2}{3}} \Rightarrow |\varphi'(x)| \le \frac{1}{3}\sqrt[3]{0.25} < 1$ ✓

局部收敛

定义：设 x^* 是 $\varphi(x)$ 的不动点，若存在 x^* 的某个 δ-邻域 $U(x^*)=[x^*-\delta, x^*+\delta]$，对任意 $x_0\in U(x^*)$，不动点迭代

$$x_{k+1}=\varphi(x_k)$$

产生的点列都收敛到 x^*，则称该迭代**局部收敛**。

定理：设 x^* 是 $\varphi(x)$ 的不动点，若 $\varphi'(x)$ 在 x^* 的某个邻域内连续，且

$$|\varphi'(x^*)|<1$$

则不动点迭代 $x_{k+1}=\varphi(x_k)$ 局部收敛

定义： 设迭代 $x_{k+1}=\varphi(x_k)$ 收敛到 $\varphi(x)$ 的不动点 x^*，记 $e_k=x_k-x^*$，若

$$\lim_{k\to\infty}\frac{|e_{k+1}|}{|e_k|^r}=C$$

其中常数 C>0，则称该迭代为 r 阶收敛。

(1) 当 $r=1$ 时称为线性收敛，此时 $C<1$

(2) 当 $r=2$ 时称为二次收敛，或平方收敛

(3) 当 $r>1$ 时称为超线性收敛

- 二分法是线性收敛的
- 若 $\varphi'(x^*)\neq 0$，则不动点迭代 $x_{k+1}=\varphi(x_k)$ 线性收敛

定理：设 x^* 是 $\varphi(x)$ 的不动点，若 $\varphi^{(p)}(x)$ 在 x^* 的某邻域内连续，且

$$\varphi'(x^*) = \varphi''(x^*) = \cdots = \varphi^{(p-1)}(x^*) = 0,$$

$$\varphi^{(p)}(x^*) \neq 0$$

则迭代 $x_{k+1} = \varphi(x_k)$ 是 p 阶收敛的。

例：求 $f(x) = x^2 - 3=0$ 的正根 $x^* = \sqrt{3}$

(1) $\varphi(x) = x^2 - 3 + x \quad \Rightarrow \quad \varphi'(x^*) = 2\sqrt{3} + 1 > 1$

(2) $\varphi(x) = x - \dfrac{x^2 - 3}{4} \quad \Rightarrow \quad \varphi'(x^*) = 1 - \dfrac{\sqrt{3}}{2} \approx 0.314 < 1$

局部收敛

(3) $\varphi(x) = \dfrac{1}{2}\left(x + \dfrac{3}{x}\right) \quad \Rightarrow \quad \varphi'(x^*) = 0$

$\varphi''(x^*) = \dfrac{2}{\sqrt{3}} \neq 0$

二次收敛

例 用简单迭代法求方程 $e^x-4x=0$ 在[0,1]内的根精确到3位有效数字.

[解] $f(x)=e^x-4x,\ f(0)=1>0,\quad f(1)=e-4<0$

$f(x)$ 在[0,1]内连续, $f'(x)=e^x-4<0, x\in[0,1]$ 故 $f(x)=0$ 在[0,1]内有唯一 实根.

$e^x-4x=0$ 的等价方程为 $x=\dfrac{1}{4}e^x$

$$\varphi(x)=\frac{1}{4}e^x,\ |\varphi'(x)|=\frac{1}{4}e^x\ \le\frac{1}{4}e\ <1,\quad x\in[0,1]$$

又当 $x\in[0,1],\varphi(x)\in[0,1]$

故 $x_{n+1}=\dfrac{1}{4}e^{x_n}$ 对 $\forall x_0\in[0,1]$ 均收敛. 取

$x_0=0.5$ 计算得

$$x_{n+1} = \frac{1}{4}e^{x_n} \qquad x_0 = 0.5$$

$$x_1 = 0.4122, \quad x_2 = 0.3775, \quad x_3 = 0.3675,$$

$$x_4 = 0.3600, \quad x_5 = 0.3583, \quad x_6 = 0.3571,$$

$$x_7 = 0.3575$$

故， $x^* = 0.358$

Newton 法

基本思想

将非线性方程线性化

- 设 x_k 是 $f(x)=0$ 的近似根，将 $f(x)$ 在 x_k 处 Taylor 展开

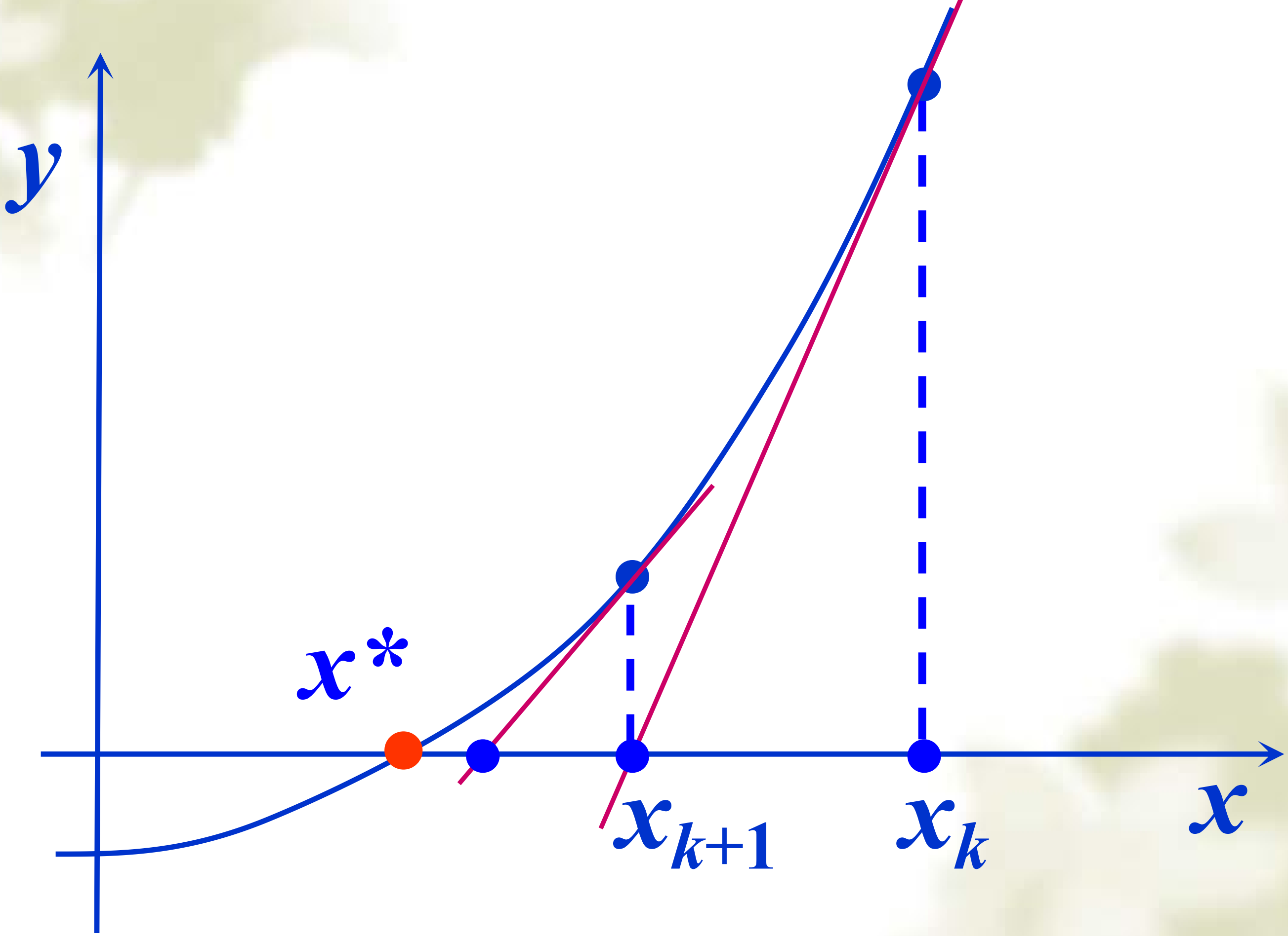
$$f(x)=f(x_k)+f'(x_k)(x-x_k)+\frac{f''(\xi)}{2!}(x-x_k)^2$$

$$\approx f(x_k)+f'(x_k)(x-x_k) \triangleq P(x)$$

令：$P(x)=0$ $\Rightarrow$ $\boxed{x_{k+1}=x_k-\dfrac{f(x_k)}{f'(x_k)}}$

条件：$f'(x)\neq 0$

Newton 法



例7 用Newton法求方程 $f(x)=x^3+2x^2+10x-20=0$ 在(1,2)的根，取初值 $x_0=1$

[解] 因为 $f(1)=-7,\quad f(2)=16$

$$f'(x)=3x^2+4x+10>0,\quad x\in[1,2]$$

故在[1,2]内方程有唯一实根

根据 Newton迭代
$$x_{n+1}=x_n-\frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

得牛顿迭代公式为

$$x_{n+1}=x_n-\frac{x_n^3+2x_n^2+10x_n-20}{3x_n^2+4x_n+10}$$

取初值 $x_0=1$ 得

$$x_{n+1} = x_n - \frac{x_n^3 + 2x_n^2 + 10x_n - 20}{3x_n^2 + 4x_n + 10} \qquad x_0 = 1$$

代入初值得

$$x_1 = 1.411764706, \qquad x_2 = 1.369336471$$

$$x_3 = 1.368808189, \qquad x_4 = 1.368808108,$$

$$x_5 = 1.368808108$$

$$|x_5 - x_4| < \frac{1}{2} \times 10^{-9}$$

故取 $x \approx x_5 = 1.368808108$

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}$$

- 迭代函数 $k = 0, 1, 2, \ldots$

$$\varphi(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)} \Rightarrow \varphi'(x) = \frac{f(x)f''(x)}{[f'(x)]^2}$$

$$\Rightarrow \varphi'(x^*) = 0, \quad \varphi''(x^*) = \frac{f''(x^*)}{2f'(x^*)}$$

牛顿法至少二阶局部收敛

$$\lim_{k\to\infty} \frac{x_{k+1} - x^*}{(x_k - x^*)^2} = \frac{\varphi''(x^*)}{2!} = \frac{f''(x^*)}{2f'(x^*)}$$

那牛顿法的全局部收敛性呢？

例 证明牛顿迭代法对于重根为线性收敛。

例3. 设x^*是方程$f(x)=0$的$m(\geq 2)$重根，证明迭代法

$$x_{k+1}=x_k-\frac{f(x_k)}{f'(x_k)}$$

为线性收敛

证明: 因为x^*是方程$f(x)=0$的m重根，故

$$f(x)=(x-x^*)^m g(x) \qquad 且 g(x^*)\neq 0, m\geq 2$$

所以 $f'(x)=m(x-x^*)^{m-1}g(x)+(x-x^*)^m g'(x)$

$$x_{k+1}=x_k-\frac{f(x_k)}{f'(x_k)}=x_k-\frac{(x_k-x^*)^m g(x_k)}{m(x_k-x^*)^{m-1}g(x_k)+(x_k-x^*)^m g'(x_k)}$$

$$=x_k-\frac{(x_k-x^*)g(x_k)}{mg(x_k)+(x_k-x^*)g'(x_k)}$$

$$x_{k+1} - x^* = (x_k - x^*)\left(1 - \frac{g(x_k)}{mg(x_k) + (x_k - x^*)g'(x_k)}\right)$$

$$\lim_{k\to\infty} \frac{x_{k+1} - x^*}{x_k - x^*} = \lim_{k\to\infty}\left(1 - \frac{g(x_k)}{mg(x_k) + (x_k - x^*)g'(x_k)}\right) = 1 - \frac{1}{m}$$

$m \geq 2$时,$1 - \frac{1}{m} > 0$ 由定义1

该迭代法对$m(\geq 2)$重根是线性收敛的

Gauss 消去法

例：直接法解线性方程组

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 2x_3 = -2 \\ 2x_1 - 3x_2 - 3x_3 = 4 \\ 4x_1 + x_2 + 6x_3 = 3 \end{cases}$$

解：

$$(A,b) = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 2 & -2 \\ 2 & -3 & -3 & 4 \\ 4 & 1 & 6 & 3 \end{array}\right] \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & -2 & 2 & -2 \\ 0 & 1 & -7 & 8 \\ 0 & 9 & -2 & 11 \end{bmatrix}$$

$$\rightarrow \begin{bmatrix} 1 & -2 & 2 & -2 \\ 0 & 1 & -7 & 8 \\ 0 & 0 & 61 & -61 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{cases} x_3 = -1 \\ x_2 = 8 + 7x_3 = 1 \\ x_1 = -2 + 2x_2 - 2x_3 = 2 \end{cases}$$

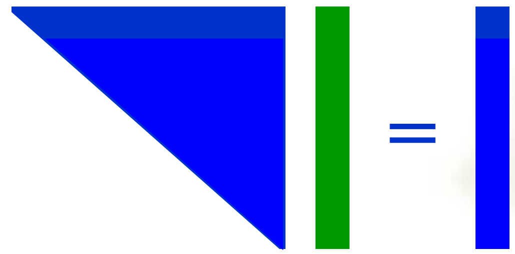
Gauss 消去法

考虑 n 阶线性方程组：

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \qquad \vdots \qquad\qquad \vdots \qquad\qquad \vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases} \xrightarrow{\text{矩阵形式}} Ax = b$$

高斯消去法的主要思路：

将系数矩阵 A 化为上三角矩阵，然后回代求解。



计算 LU 分解

利用矩阵乘法直接计算 *LU* 分解

$$\begin{bmatrix} 1 & & & \\ l_{21} & 1 & & \\ \vdots & & \ddots & \\ l_{n1} & \cdots & l_{n,n-1} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_{11} & u_{12} & \cdots & u_{1n} \\ & u_{22} & & u_{2n} \\ & & \ddots & \vdots \\ & & & u_{nn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & & a_{2n} \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

$$L \times U = A$$

①比较等式两边的第一行得：$u_{1j} = a_{1j} \quad (j=1,\ldots,n)$ — *U* 的第一行

比较等式两边的第一列得：$l_{i1} = a_{i1} / u_{11} \quad (i=2,\ldots,n$ — *L* 的第一列

②比较等式两边的第二行得：$u_{2j} = a_{2j} - l_{21}u_{1j} \quad (j=$ — *U* 的第二行

比较等式两边的第二列得：$l_{i2} = \left(a_{i2} - l_{i1}u_{12}\right) / u_{22} \quad ($ — *L* 的第二列

LU 分解算法

例 求下列矩阵的LU分解

$$A=\begin{bmatrix}3 & -1 & 2\\ 1 & 2 & 3\\ 2 & -2 & -1\end{bmatrix}$$

解: 设

$$\begin{bmatrix}3 & -1 & 2\\ 1 & 2 & 3\\ 2 & -2 & -1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & & \\ l_{21} & 1 & \\ l_{31} & l_{32} & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}u_{11} & u_{12} & u_{13}\\ & u_{22} & u_{23}\\ & & u_{33}\end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow u_{11}=3, u_{12}=-1, u_{13}=2$$

向量范数

- 常见的向量范数

① 1-范数 $\|x\|_1 = \sum_{i=1}^{n} |x_i|$

② 2-范数 $\|x\|_2 = \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2 \right)^{\frac{1}{2}}$

③ 无穷范数（最大范数）

$$\|x\|_\infty = \max_{1 \le i \le n} |x_i|$$

范数性质

范数的性质

(1) 等价性

设 $\|\cdot\|_s$ 和 $\|\cdot\|_t$ 是 R^n 上的任意两个范数，则存在常数 c_1 和 c_2，使得对任意的 $x\in R^n$ 有

$$c_1\|x\|_s \le \|x\|_t \le c_2\|x\|_s$$

范数性质

(2) Cauchy-Schwarz 不等式

$$|(x,y)| \le \|x\|_2 \times \|y\|_2$$

(3) 向量序列的收敛性

$$\lim_{k\to\infty} x^{(k)} = x^* \iff \lim_{k\to\infty} \left\| x^{(k)} - x^* \right\| = 0$$

- **矩阵的谱：** $\boxed{\sigma(A) = \{\ A\ \text{的所有特征值}\ \}}$
- **矩阵的谱半径：** $\boxed{\rho(A) = \max_{\lambda \in \sigma(A)} \{|\lambda|\}}$

矩阵范数

■ 常见的矩阵范数

(1) F-范数 (Frobenious 范数)

$$\|A\|_F = \left(\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} a_{ij}^2 \right)^{\frac{1}{2}}$$

(2) 算子范数 (从属范数、诱导范数)

$$\|A\| = \sup_{\substack{x \in R^n \\ x \neq 0}} \frac{\|Ax\|}{\|x\|} = \max_{\|x\|=1} \|Ax\|$$

其中 $\|\cdot\|$ 是 R^n 上的任意一个范数

算子范数

- **常见的算子范数**

① 1-范数（列范数） $\|A\|_1 = \max_{1\le j\le n}\sum_{i=1}^{n}|a_{ij}|$

② 2-范数（谱范数） $\|A\|_2 = \sqrt{\rho(A^T A)}$

③ 无穷范数（行范数） $\|A\|_\infty = \max_{1\le i\le n}\sum_{j=1}^{n}|a_{ij}|$

例：设 $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -3 & 4 \end{pmatrix}$ 计算 $\|A\|_1, \|A\|_2, \|A\|_\infty, \|A\|_F$

矩阵范数性质

矩阵范数的性质

(1) 等价性：设 $\|\cdot\|_s$ 和 $\|\cdot\|_t$ 是 $R^{n\times n}$ 上的任意两个矩阵范数，则存在常数 c_1 和 c_2，使得对任意的 $A\in R^{n\times n}$ 有

$$c_1\|A\|_s \le \|A\|_t \le c_2\|A\|_s$$

(2) 若 A 是对称矩阵，则 $\rho(A)=\|A\|_2$

算子范数性质

■ 算子范数的性质

定理：设 $\|\cdot\|$ 是 R^n 上的任一向量范数，其对应的算子范数也记为 $\|\cdot\|$，则有

$$\|Ax\| \le \|A\| \times \|x\|$$

定理：设 $\|\cdot\|$ 是任一算子范数，则 $\rho(A) \le \|A\|$

稳定性理论分析

理论分析：

(1) 由于右端项的扰动而引起的解的变化

设 $A(x+\delta x)=b+\delta b \Rightarrow \delta x = A^{-1}\cdot\delta b$

$\Rightarrow \|\delta x\| \le \|A^{-1}\|\cdot\|\delta b\|$

又 $\|b\| \le \|A\|\cdot\|x\|$

$$\left.\begin{array}{l}\|\delta x\| \le \|A^{-1}\|\cdot\|\delta b\| \\ \|b\| \le \|A\|\cdot\|x\|\end{array}\right\} \Rightarrow \frac{\|\delta x\|}{\|x\|} \le \boxed{\|A\|\cdot\|A^{-1}\|}\,\frac{\|\delta b\|}{\|b\|}$$

Ax* = *b 的条件数

矩阵***A*** 的条件数

矩阵条件数

$$\mathrm{Cond}(A) = \|A\| \cdot \|A^{-1}\|$$

■ 条件数与范数有关，常用的有无穷范数和2-范数

$$\mathrm{Cond}(A)_\infty = \left\|A^{-1}\right\|_\infty \left\|A\right\|_\infty$$

$$\mathrm{Cond}(A)_2 = \left\|A\right\|_2 \left\|A^{-1}\right\|_2$$

● $\mathrm{Cond}(A)_2$ 称为谱条件数，当 A 对称时有

$$\mathrm{Cond}(A)_2 = \left\|A\right\|_2 \left\|A^{-1}\right\|_2 = \frac{\max\limits_{1\le i\le n}|\lambda_i|}{\min\limits_{1\le i\le n}|\lambda_i|}$$

举例

例： $A=\begin{bmatrix}1 & 1\\ 1 & 1.0001\end{bmatrix}$ **计算 $\mathrm{Cond}(A)_\infty$ 和 $\mathrm{Cond}(A)_2$**

解：

$$A^{-1}=\begin{bmatrix}10001 & -10000\\ -10000 & 10000\end{bmatrix}$$

第四章 线性方程组的迭代方法

矩阵分裂迭代法

矩阵分裂迭代法基本思想

A 的一个矩阵分裂

$$Ax=b \quad \xLeftrightarrow[M\text{ 非奇异}]{A=M-N} \quad Mx=Nx+b$$

$$\Updownarrow$$

$$x=M^{-1}Nx+M^{-1}b$$

给定一个初始向量 $x^{(0)}$，可得 迭代格式

$$\boxed{x^{(k+1)}=Bx^{(k)}+f} \qquad k=0,1,2,\ldots$$

其中 $B=M^{-1}N$ 称为迭代矩阵

收敛性分析

$$x^{(k+1)} = Bx^{(k)} + f$$

基本收敛定理

定理：对任意初始向量 $x^{(0)}$，上述迭代格式收敛的充要条件是

$$\rho(B) < 1$$

定理：若存在算子范数 $\|\cdot\|$，使得 $\|B\| < 1$，对任意的初始向量 $x^{(0)}$，上述迭代格式收敛。

充分条件

例：考虑迭代法 $x^{(k+1)} = Bx^{(k)} + f$ 的收敛性，其中

$$B = \begin{bmatrix} 0.9 & 0 \\ 0.3 & 0.8 \end{bmatrix}$$

Jacobi 迭代

考虑线性方程组

$$Ax = b$$

其中 $A=(a_{ij})_{n\times n}$ 非奇异，且对角线元素全不为 0。

- 将 A 分裂成 $A = D - L - U$，其中

$$D = \mathrm{diag}(a_{11}, a_{22}, \ldots, a_{nn})$$

$$L = \begin{bmatrix} 0 & & & \\ -a_{21} & 0 & & \\ \vdots & \ddots & \ddots & \\ -a_{n1} & \cdots & -a_{n,n-1} & 0 \end{bmatrix}, \quad U = \begin{bmatrix} 0 & -a_{12} & \cdots & -a_{1n} \\ & 0 & \ddots & \vdots \\ & & \ddots & -a_{n-1,n} \\ & & & 0 \end{bmatrix}$$

Jacobi 迭代

Jacobi 迭代

令 $M = D$，$N = L + U$，可得 雅可比 (Jacobi) 迭代方法

$$\boxed{x^{(k+1)} = D^{-1}(L+U)x^{(k)} + D^{-1}b} \qquad k = 0, 1, 2, \ldots$$

- 迭代矩阵记为：$\boxed{J = D^{-1}(L+U)}$
- 分量形式：$$\boxed{x_i^{(k+1)} = \left(b_i - \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij}x_j - \sum_{j=i+1}^{n} a_{ij}x_j \right) \Big/ a_{ii}}$$

$i = 1, 2, \ldots, n$，$k = 0, 1, 2, \ldots$

Gauss-Seidel 迭代

$$\begin{cases} x_1^{(k+1)} = \left(b_1 - a_{12}x_2^{(k)} - a_{13}x_3^{(k)} - \cdots - a_{1n}x_n^{(k)}\right) \Big/ a_{11} \\ x_2^{(k+1)} = \left(b_2 - a_{21}x_1^{(k)} - a_{23}x_3^{(k)} - \cdots - a_{2n}x_n^{(k)}\right) \Big/ a_{22} \\ \qquad \vdots \\ x_n^{(k+1)} = \left(b_n - a_{n1}x_1^{(k)} - a_{n2}x_2^{(k)} - \cdots - a_{n,n-1}x_{n-1}^{(k)}\right) \Big/ a_{nn} \end{cases}$$

- 在计算 $x_i^{(k+1)}$ 时，如果用 $x_1^{(k+1)},\cdots,x_{i-1}^{(k+1)}$ 代替 $x_1^{(k)},\cdots,x_{i-1}^{(k)}$，则可能会得到更好的收敛效果。

$$\begin{cases} x_1^{(k+1)} = \left(b_1 - a_{12}x_2^{(k)} - a_{13}x_3^{(k)} - \cdots - a_{1n}x_n^{(k)}\right) \Big/ a_{11} \\ x_2^{(k+1)} = \left(b_2 - \boxed{a_{21}x_1^{(k+1)}} - a_{23}x_3^{(k)} - \cdots - a_{2n}x_n^{(k)}\right) \Big/ a_{22} \\ \qquad \vdots \\ x_n^{(k+1)} = \left(b_n - \boxed{a_{n1}x_1^{(k+1)} - a_{n2}x_2^{(k+1)} - \cdots - a_{n,n-1}x_{n-1}^{(k+1)}}\right) \Big/ a_{nn} \end{cases}$$

Gauss-Seidel 迭代

写成矩阵形式:

$$x^{(k+1)} = D^{-1}\left(b + Lx^{(k+1)} + Ux^{(k)}\right)$$

可得

$$\boxed{x^{(k+1)} = \left(D-L\right)^{-1} Ux^{(k)} + \left(D-L\right)^{-1} b} \quad k = 0, 1, 2, \ldots$$

此迭代方法称为 高斯-塞德尔 (Gauss-Seidel) 迭代法

- 迭代矩阵记为: $\boxed{G = \left(D-L\right)^{-1} U}$

$$\begin{aligned} x^{(k+1)} &= \left(D-L\right)^{-1}\left(D-L-A\right)x^{(k)} + \left(D-L\right)^{-1} b \\ &= \left(I - \left(D-L\right)^{-1} A\right)x^{(k)} + \left(D-L\right)^{-1} b = x^{(k)} + \left(D-L\right)^{-1}\left(b - Ax^{(k)}\right) \end{aligned}$$

收敛性

收敛性定理

- Jacobi 迭代收敛的充要条件 $\rho(J)<1$
- G-S 迭代收敛的充要条件 $\rho(G)<1$

- Jacobi 迭代收敛的充分条件 $\|J\|<1$
- G-S 迭代收敛的充分条件 $\|G\|<1$

定理：若 A 对称，且对角线元素均大于 0，则

(1) Jacobi 迭代收敛的充要条件是 A 与 2D-A 均正定；

(2) G-S 迭代收敛的充要条件是 A 正定。

举例

例：设 $A=\begin{bmatrix}1 & a & a\\ a & 1 & a\\ a & a & 1\end{bmatrix}$，给出 Jacobi 和 G-S 收敛的充要条件

解：A 对称，且对角线元素均大于 0，故

(1) Jacobi 收敛的充要条件是 A 和 2D-A 均正定

(2) G-S 收敛的充要条件是 A 正定

A 正定 $\Leftrightarrow D_1=1>0, D_2=1-a^2>0, D_3=(1-a)^2(1+2a)>0$

$\Leftrightarrow -0.5<a<1$

$2D\text{-}A$ 正定 $\Leftrightarrow D_1=1>0, D_2=1-a^2>0, D_3=(1+a)^2(1-2a)>0$

$\Leftrightarrow -0.5<a<0.5$

$\Rightarrow$ Jacobi 收敛的充要条件是：$-0.5<a<0.5$

G-S 收敛的充要条件是：$-0.5<a<1$

举例

解法二： Jacobi 的迭代矩阵为

$$J=\begin{bmatrix} 0 & -a & -a \\ -a & 0 & -a \\ -a & -a & 0 \end{bmatrix}$$

设 λ 是 J 的特征值，则由 $\det(\lambda I - J) = 0$ 可得

$$(\lambda - a)^2(\lambda + 2a) = 0$$

Jacobi 收敛的充要条件是 $\rho(J)<1 \Leftrightarrow |\lambda|<1$，

即 $-0.5<a<0.5$

极小化方法

设A对称正定，求解的线性方程组为

$$Ax = b \tag{1}$$

其中$A = (a_{ij}) \in R^{n\times n}, x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)^T, b = (b_1, b_2, \ldots, b_n)^T$

对应的二次函数φ：$R^{n\times n} \to R$，称为模函数，定义为

$$\varphi(x) = \frac{1}{2}(Ax, x) - (b, x) = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_i x_j - \sum_{i=1}^{n} b_i x_i \tag{2}$$

例： 设 $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 6 \end{bmatrix}$, $b = \begin{bmatrix} 4 \\ 10 \end{bmatrix}$

$$\varphi(x) = \frac{1}{2}(x_1^2 + 6x_2^2 + 4x_1x_2) - (4x_1 + 10x_2)$$

（2）对一切$x, y \in R^n, \alpha \in R$

$$\varphi(x+\alpha y)=\frac{1}{2}(A(x+\alpha y), x+\alpha y)-(b, x+\alpha y)$$

$$=\frac{1}{2}(Ax, x)-(b, x)+\alpha(Ax, y)-\alpha(b, y)+\frac{\alpha^2}{2}(Ay, y)$$

$$=\varphi(x)+\alpha(Ax-b, y)+\frac{\alpha^2}{2}(Ay, y)$$

$$\boxed{\varphi(x)=\frac{1}{2}(Ax, x)-(b, x)}$$

定理1 设$A=(a_{ij})_{n\times n}$为**实对称正定矩阵**, b, $x\in R^n$, 则 x使二次函数

$$\boldsymbol{f(x)=\frac{1}{2}(Ax,x)-(b,x)}$$

取极小值 $\Leftrightarrow x$ 是线性方程组$Ax=b$ 的解。

求二次函数$\varphi(x)$极小值点的一般方法是：

构造一个向量序列$\left\{x^{(k)}\right\}$，使$\varphi(x^{(k)}) \to \min\varphi(x)$

可以采取以下方法：

（1）任取一个初始向量$x^{(0)}$，

（2）构造迭代格式

$$x^{(k+1)} = x^{(k)} + \alpha_k p^{(k)}, \qquad (k = 0, 1, \dots)$$

其中$p^{(k)}$是搜索方向，α_k是搜索步长，

（3）选择$p^{(k)}$和α_k使得

$$\varphi(x^{(k+1)}) = \varphi(x^{(k)} + \alpha_k p^{(k)}) < \varphi(x^{(k)})$$

则当$k \to \infty$时，有$\varphi(x^{(k)}) \to \varphi(x^{*}) = \min\limits_{x \in R^n} \varphi(x)$

（4）算出误差限ε，直到

$$\left\|x^{(k)} - x^{(k-1)}\right\| < \varepsilon \text{或} \left\|r^{(k)}\right\| = \left\|b - Ax^{(k)}\right\| < \varepsilon$$

迭代为止。

最速下降法

最速下降算法：

(1) 选取$x^{(0)} \in R^n$

(2) 对$k = 0,1,2,\ldots.$

$$r^{(k)} = b - Ax^{(k)}$$

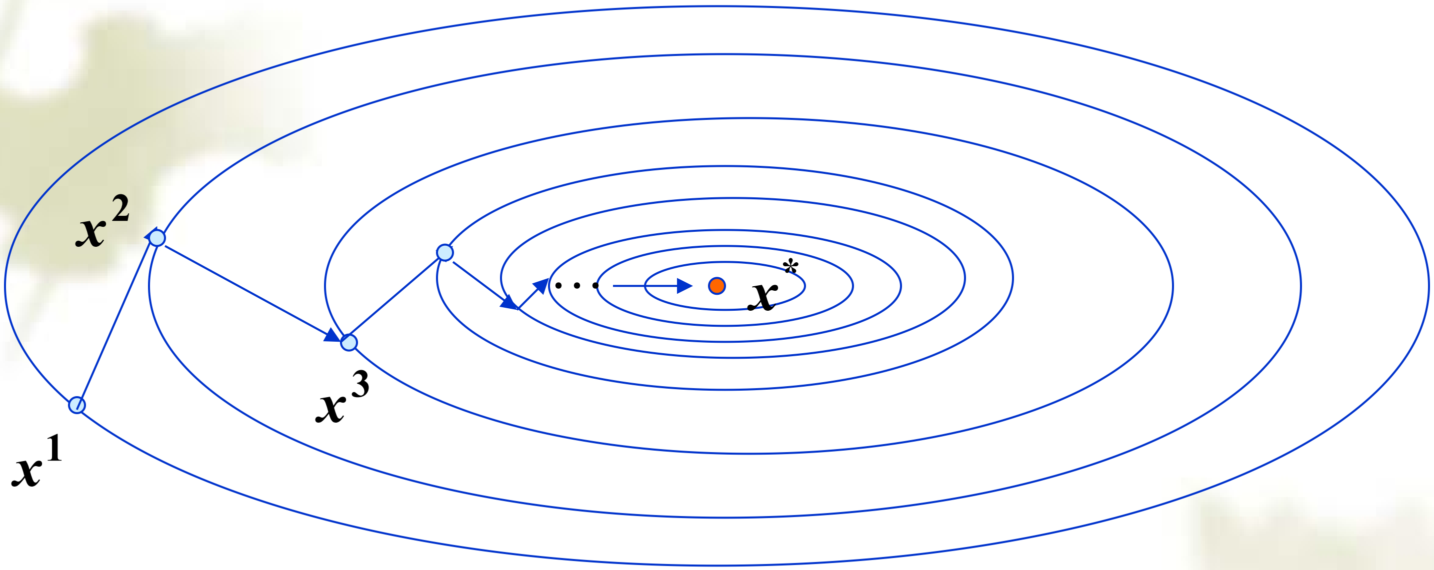
$$\alpha_k = \frac{(r^{(k)}, r^{(k)})}{(Ar^{(k)}, r^{(k)})}$$

$$x^{(k+1)} = x^{(k)} + \alpha_k r^{(k)}$$

(3)当 $\left\| x^{(k+1)} - x^{(k)} \right\| < \varepsilon$ 时，终止迭代。

$$\boxed{\alpha = \frac{\left(r^{(k)}, p^{(k)}\right)}{\left(Ap^{(k)}, p^{(k)}\right)}}$$

目标函数为二次函数，其等值面为椭球面。



注　最速下降方向反映了目标函数的一种局部性质。它只是局部目标函数值下降最快的方向。

最速下降法是线性收敛的算法。

不难验证，相邻两次的搜索方向是正交的，即

$$(r^{(k+1)},\ r^{(k)}) = 0$$

容易看到，$\{\varphi(x^{(k)})\}$是单调下降有界序列，它存在极限，

可以证明 $$\lim_{k\to\infty} x^{(k)} = x^* = A^{-1}b$$

而且 $$\|x^{(k)} - x^*\|_A \le \left(\frac{\lambda_1 - \lambda_n}{\lambda_1 + \lambda_n}\right)^k \|x^{(0)} - x^*\|_A$$

其中λ_1,λ_n分别是对称正定阵A的最大、最小特征值，

$$\|u\|_A = (Au,u)^{1/2}$$

当$\lambda_1 >> \lambda_n$时，收敛是很慢的，

当$\|r^{(k)}\|$很小时，因舍入误差的影响，计算将出现不稳定现象。

共轭梯度法

定义　A对称正定，若R^n中向量组$\left\{p^{(0)},\dots,p^{(l)}\right\}$满足

$$(Ap^{(i)},p^{(j)})=0,\qquad i\neq j$$

则称它为R^n中的一个$A-$共轭向量组，或称$A-$正交向量组。

注：

1、当$l<n$时，不含零向量的$A-$共轭向量组线性无关；

2、当$A=I$时，$A-$共轭性质就是一般的正交性；

3、给了一组线性无关的向量，可以按$Schmidt$正交化的方法得到对应的$A-$共轭向量组。

原始的CG算法：

(1) $x^{(0)} \in R^{(n)}$

(2) $r^{(0)} = b - Ax^{(0)}, p^{(0)} = r^{(0)}$

(3) $k = 0,1,...,$

$$\alpha_k = \frac{(r^{(k)}, r^{(k)})}{(Ap^{(k)}, p^{(k)})},$$

$$x^{(k+1)} = x^{(k)} + \alpha_k p^{(k)},$$

$$r^{(k+1)} = r^{(k)} - \alpha_k Ap^{(k)},$$

$$\beta_k = -\frac{(r^{(k+1)}, Ap^{(k)})}{(p^{(k)}, Ap^{(k)})},$$

$$p^{(k+1)} = r^{(k+1)} + \beta_k p^{(k)},$$

改进的CG算法：

(1) $x^{(0)} \in R^{(n)}$

(2) $r^{(0)} = b - Ax^{(0)}, p^{(0)} = r^{(0)}$

(3) $k = 0,1,...,$

$$\alpha_k = \frac{(r^{(k)}, r^{(k)})}{(Ap^{(k)}, p^{(k)})},$$

$$x^{(k+1)} = x^{(k)} + \alpha_k p^{(k)},$$

$$r^{(k+1)} = r^{(k)} - \alpha_k Ap^{(k)},$$

$$\boxed{\beta_k = \frac{(r^{(k+1)}, r^{(k+1)})}{(r^{(k)}, r^{(k)})},}$$

$$p^{(k+1)} = r^{(k+1)} + \beta_k p^{(k)},$$

注：

(1) 剩余向量相互正交，而R^n中至多有n个相互正交的非零向量，所以$r^{(0)},r^{(1)},\dots,r^{(n)}$中至少有一个向量为零。若$r^{(k)}=0$，则$x^{(k)}=x^*$.

(2)实际计算中，由于舍入误差的影响，n步内得不到准确解，故还需继续迭代。一般因$p^{(0)},p^{(1)},\dots,p^{(n-1)}$是一组$A$-共轭向量组，继续迭代时，要取$x^{(0)}=x^{(n)}$.

(3)由误差估计式

$$\left\|x^{(k)}-x^*\right\|_A \le 2\left[\frac{\sqrt{cond(A)_2}-1}{\sqrt{cond(A)_2}+1}\right]^k \left\|x^{(0)}-x^*\right\|_A$$

当A的条件数很小时，共轭斜量法收敛很快，但当A是病态严重的矩阵时，共轭斜量法收敛速度很慢。可采用预处理技术，降低A的条件数。

非线性方程组的牛顿法

$$\min F(x,y) \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{\partial f(x,y)}{\partial x} = 0 \\ \dfrac{\partial f(x,y)}{\partial y} = 0 \end{cases} \qquad \Rightarrow \begin{cases} f_1(x,y) = 0 \\ f_2(x,y) = 0 \end{cases}$$

在点(x_0,y_0)作二元Taylor展开，

$$\begin{cases} f_1(x,y) = f_1(x_0,y_0) + \dfrac{\partial f_1(x_0,y_0)}{\partial x}(x-x_0) + \dfrac{\partial f_1(x_0,y_0)}{\partial y}(y-y_0) \approx 0 \\ f_2(x,y) = f_2(x_0,y_0) + \dfrac{\partial f_2(x_0,y_0)}{\partial x}(x-x_0) + \dfrac{\partial f_2(x_0,y_0)}{\partial y}(y-y_0) \approx 0 \end{cases}$$

即

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f_1(x_0,y_0)}{\partial x}(x-x_0) + \dfrac{\partial f_1(x_0,y_0)}{\partial y}(y-y_0) \approx -f_1(x_0,y_0) \\ \dfrac{\partial f_2(x_0,y_0)}{\partial x}(x-x_0) + \dfrac{\partial f_2(x_0,y_0)}{\partial y}(y-y_0) \approx -f_2(x_0,y_0) \end{cases}$$

令

$$J(X_0)=\begin{pmatrix} \dfrac{\partial f_1}{\partial x} & \dfrac{\partial f_1}{\partial y} \\ \dfrac{\partial f_2}{\partial x} & \dfrac{\partial f_2}{\partial y} \end{pmatrix}\Bigg|_{\substack{x=x_0\\ y=y_0}}$$

若

$$|J(X_0)|=\begin{vmatrix} \dfrac{\partial f_1}{\partial x} & \dfrac{\partial f_1}{\partial y} \\ \dfrac{\partial f_2}{\partial x} & \dfrac{\partial f_2}{\partial y} \end{vmatrix}_{\substack{x=x_0\\ y=y_0}} \neq 0$$

设 $\Delta x=x-x_0, \Delta y=y-y_0,$

$$X=\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}, X_0=\begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \end{bmatrix}, \quad \Delta X=\begin{bmatrix} \Delta x \\ \Delta y \end{bmatrix} \qquad B=\begin{bmatrix} -f_1(x_0,y_0) \\ -f_2(x_0,y_0) \end{bmatrix}$$

则求解非线性方程组的牛顿迭代格式

$$J(X)\cdot\Delta X=B \qquad \Delta X=J^{-1}(X)\cdot B$$

例　解非线性方程组

$$\begin{cases} f_1(x,y) = 4 - x^2 - y^2 = 0 \\ f_2(x,y) = 1 - e^x - y = 0 \end{cases} \quad \text{initial values} \quad \begin{cases} x_0 = 1 \\ y_0 = -1.7 \end{cases}$$

解　Jacobi矩阵：

$$J(x,y) = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial f_1}{\partial x} & \dfrac{\partial f_1}{\partial y} \\ \dfrac{\partial f_2}{\partial x} & \dfrac{\partial f_2}{\partial y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2x & -2y \\ -e^x & -1 \end{pmatrix}$$

$$J(x_0,y_0)=\begin{pmatrix}-2x & -2y\\ -e^x & -1\end{pmatrix}_{(x_0,y_0)}=\begin{pmatrix}-2 & -3.4\\ -2.71828 & -1\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}f_1(x_0,y_0)\\ f_2(x_0,y_0)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0.11\\ -0.01828\end{pmatrix}$$

$$\begin{cases}-2\Delta x+3.4\Delta y=-0.11\\ -2.71828\Delta x-\Delta y=-0.01828\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\Delta x=0.004256\\ \Delta y=-0.029846\end{cases}$$

$$\therefore\begin{cases}x_1=x_0+\Delta x=1+0.004256=1.004256\\ y_1=y_0+\Delta y=-1.7-0.029846=-1.729849\end{cases}$$

继续做下去，直到 $\max(|\Delta x|,|\Delta y|)<10^{-6}$ **时停止。**

第五章 特征值求解

§1 幂法和反幂法

1.1 幂法

用于求矩阵的按模最大的特征值与相应的特征向量的近似值。

设A为n阶实矩阵，

$\lambda_i, u_i \ (i=1,2,\cdots,n)$为$A$的特征值和相应的特征 向量，

且满足: $|\lambda_1|>|\lambda_2|\geq|\lambda_3|\geq\cdots\geq|\lambda_n|$

$u_1, u_2, \cdots, u_n$, 线性无关 .

对任意向量 $x^{(0)}$，有$x^{(0)}=\sum_{i=1}^{n}\alpha_i u_i$， α_i不全为零．

$$x^{(k+1)}=Ax^{(k)}=A^{k+1}x^{(0)}$$

$$=\sum_{i=1}^{n}A^{k+1}\alpha_i u_i=\sum_{i=1}^{n}\alpha_i\lambda_i^{k+1}u_i$$

$$=\lambda_1^{k+1}\left[\alpha_1 u_1+\left(\frac{\lambda_2}{\lambda_1}\right)^{k+1}a_2u_2+\cdots+\left(\frac{\lambda_n}{\lambda_1}\right)^{k+1}a_nu_n\right]$$

$$\approx\lambda_1^{k+1}\alpha_1 u_1$$

定理: 设$A \in R^{n\times n}$,特征值$\lambda_i (i=1,2,\cdots n)$满足

$$|\lambda_1| > |\lambda_2| \ge |\lambda_3| \ge \cdots \ge |\lambda_n|,$$

且与λ_i对应的特征向量$u_1, u_2, \cdots u_n$线性无关,

则对任意非零初始向量$x^{(0)} (\alpha_1 \ne 0)$,向量序列

$$x^{(k)} = A^k x^{(0)} \to \lambda_1{}^k \alpha_1 u_1, \qquad \frac{x_i^{(k+1)}}{x_i^{(k)}} \to \lambda_1 (k \to \infty).$$

相应的特征向量为 $x^{(k+1)}$.

注: $x^{(k+1)} \approx \lambda_1^{k+1} \alpha_1 u_1$, 实际计算时将 $x^{(k+1)}$标准化。

幂法的收敛速度取决于 比值$\left|\frac{\lambda_2}{\lambda_1}\right|$,比值越小,收敛越快.

1.2 幂法的加速

（一）原点移位法

λ_i是A的特征值，则$\lambda_i-\lambda_0$是$A-\lambda_0 I$的特征值

$$x^{(k+1)}=(A-\lambda_0 I)x^{(k)}$$

$$=(\lambda_1-\lambda_0)^{k+1}[\alpha_1\mathbf{u}_1+(\frac{\lambda_2-\lambda_0}{\lambda_1-\lambda_0})^{k+1}\alpha_2\mathbf{u}_2+\cdots(\frac{\lambda_n-\lambda_0}{\lambda_1-\lambda_0})^{k+1}\alpha_n\mathbf{u}_n]$$

(二)幂法的埃特肯（Aitken）加速

若$\{a_k\}$收敛与 a， 且$\lim\limits_{k\to\infty}\dfrac{a_{k+1}-a}{a_k-a}=c\neq 0$

即$\{a_k\}$线性收敛 ，当k充分大时，有

$$\frac{a_{k+1}-a}{a_k-a}\approx\frac{a_{k+2}-a}{a_{k+1}-a}$$

$$\boxed{y_{n+2}=x_{n+2}-\frac{(x_{n+2}-x_{n+1})^2}{x_{n+2}-2x_{n+1}+x_n}}$$

$$\Rightarrow\quad a\approx a_k-\frac{(a_{k+1}-a_k)^2}{a_{k+2}-2a_{k+1}+a_k}:=\hat{a}_k$$

用$\hat{a}_k$逼近a，这种方法称为$Aitken$加速法.

3. 对称矩阵的Rayleigh商加速法

- 定义 设A对称，$x \neq 0$，则称

$$R(x) = \frac{x^T A x}{x^T x}$$

- 为x关于A的Rayleigh商

$$\begin{cases} y^{(k)} = \dfrac{x^{(k)}}{\max(x^{(k)})} = \dfrac{A^k x^{(0)}}{\max(A^k x^{(0)})} \\ x^{(k+1)} = Ay^{(k)} = \dfrac{A^{k+1} x^{(0)}}{\max(A^k x^{(0)})} \\ R(y^{(k)}) = \dfrac{(y^{(k)})^T A y^{(k)}}{(y^{(k)})^T (y^{(k)})} = \dfrac{(A^k x^{(0)})^T A^{k+1} x^{(0)}}{(A^k x^{(0)})^T A^k x^{(0)}} \end{cases}$$

$$R(y^{(k)}) = \frac{(A^k x^{(0)})^T A^{k+1} x^{(0)}}{(A^k x^{(0)})^T A^k x^{(0)}} = \frac{\sum_{j=1}^{n} \alpha_j^2 \lambda_j^{2k+1}}{\sum_{j=1}^{n} \alpha_j^2 \lambda_j^{2k}} \approx \lambda_1 + O\left(\left(\frac{\lambda_2}{\lambda_1}\right)^{2k}\right)$$

反幂法

基本思想：$Ax=\lambda x \Rightarrow x=A^{-1}(\lambda x)$，则$A^{-1}x=\dfrac{1}{\lambda}x$

(1)A与A^{-1}的特征值互为倒数，特征向量不变，

求A的按模最小的特征值 λ_n

$\Leftrightarrow$ 求A^{-1}的按模最大的特征值 $\dfrac{1}{\lambda_n}$.

(2)计算$x^{(k+1)}=A^{-1}y^{(k)} \Leftrightarrow$ 解方程组 $Ax^{(k+1)}=y^{(k)}$

例：用反幂法求矩阵 $A=\begin{bmatrix}2 & -1 & 0\\ 0 & 2 & -1\\ 0 & -1 & 2\end{bmatrix}$

求按模最小的特征值及　特征向量，取$x^{(0)}=(0,0,1)^T$；

解：求A按模最小的特征值及其 特征向量

用反幂法

$$x^{(k+1)}=A^{-1}y^{(k)} \quad \Leftrightarrow \quad Ax^{(k+1)}=y^{(k)}$$

将A进行LU分解，

$$A=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & -\frac{1}{2} & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2 & -1 & 0\\ 0 & 2 & -1\\ 0 & 0 & \frac{3}{2}\end{bmatrix}=LU$$

$$y^{(0)} = x^{(0)} = (0,0,1)^T$$

$$L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} & 1 \end{bmatrix}, \quad U = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & \frac{3}{2} \end{bmatrix}$$

$$x^{(1)} = A^{-1} y^{(0)} \Leftrightarrow LUx^{(1)} = y^{(0)}$$

$$Lz = y^{(0)} \qquad z = (0,0,1)^T$$

$$Ux^{(1)} = z \qquad x^{(1)} = (\frac{1}{6}, \frac{1}{3}, \frac{2}{3})^T \qquad \mu = \frac{2}{3}$$

$$\lambda^{(1)} = \frac{1}{\mu} = 1.5 \qquad y^{(1)} = (\frac{1}{4}, \frac{1}{2}, 1)^T$$

$$Lz = y^{(1)} \qquad z = (\frac{1}{4}, \frac{1}{2}, \frac{5}{4})^T$$

$$Ux^{(2)} = z \qquad x^{(2)} = (\frac{11}{24}, \frac{2}{3}, \frac{5}{6})^T \qquad \mu = \frac{5}{6}$$

$$\lambda^{(2)} = \frac{1}{\mu} = 1.2 \qquad y^{(2)} = (\frac{11}{20}, \frac{4}{5}, 1)^T$$

第六章插值

插值区间

已知函数 $y = f(x)$ 在 $[a, b]$ 上有定义，且已经测得在点

$$a \le x_0 < x_1 < \cdots < x_n \le b$$

插值节点

处的函数值为 $y_0 = f(x_0)$，…，$y_n = f(x_n)$

如果存在一个**简单易算**的函数 $P(x)$，使得

$$P(x_i) = f(x_i), \quad i = 1, 2, \ldots, n$$

插值节点无需递增排列，但必须确保互不相同！

则称 $P(x)$ 为 $f(x)$ 的**插值函数**

插值条件

求插值函数 $P(x)$ 的方法就称为**插值法**

基函数法

$n+1$ 维线性空间

记 $\mathrm{Z}_n(x) = \{$次数不超过 n 的多项式的全体$\}$

设 $z_0(x), z_1(x), \ldots, z_n(x)$ 构成 $\mathrm{Z}_n(x)$ 的一组基，则插值多项式

$$P(x) = a_0 z_0(x) + a_1 z_1(x) + \cdots + a_n z_n(x)$$

通过基函数来构造插值多项式的方法就称为**基函数插值法**

基函数法基本步骤

① 寻找合适的基函数

② 确定插值多项式在这组基下的表示系数

Lagrange插值

Lagrange插值基函数

设 $l_k(x)$ 是 n 次多项式，在插值节点 $x_0, x_1, \ldots, x_n$ 上满足

$$l_k(x_j)=\begin{cases}1, & j=k\\0, & j\neq k\end{cases}$$

则称 $l_k(x)$ 为节点 $x_0, x_1, \ldots, x_n$ 上的**拉格朗日插值基函数**

线性与抛物线插值

两种特殊情形

$n=1$

$$L_1(x) = y_0 l_0(x) + y_1 l_1(x) = y_0 \frac{x - x_1}{x_0 - x_1} + y_1 \frac{x - x_0}{x_1 - x_0}$$

线性插值多项式（一次插值多项式）

$n=2$

$$L_2(x) = y_0 \frac{(x-x_1)(x-x_2)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)} + y_1 \frac{(x-x_0)(x-x_2)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)} + y_2 \frac{(x-x_0)(x-x_1)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)}$$

抛物线插值多项式（二次插值多项式）

例： 已知函数 $y=\ln x$ 的函数值如下

x	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8
$\ln x$	-0.9163	-0.6931	-0.5108	-0.3567	-0.2231

试分别用线性插值和抛物线插值计算 ln 0.54 的近似值

解： 为了减小截断误差，通常选取插值点 x 邻接的插值节点

线性插值： 取 $x_0=0.5$, $x_1=0.6$ 得

$$L_1(x)=y_0\frac{x-x_1}{x_0-x_1}+y_1\frac{x-x_0}{x_1-x_0}=0.1823x-1.6046$$

将 $x=0.54$ 代入可得： $\ln 0.54\approx L_1(0.54)=-0.6202$

抛物线插值： 取 $x_0=0.4$, $x_1=0.5$, $x_2=0.6$, 可得

$$\ln 0.54 \approx L_2(0.54) = -0.6153$$

$\ln 0.54$ 的精确值为：$-0.616186\cdots$

可见，抛物线插值的精度比线性插值要高

Lagrange插值多项式简单方便，只要取定节点就可写出基函数，进而得到插值多项式，易于计算机实现。

Lagrange插值

$l_k(x)$ 的表达式

由构造法可得

$$l_k(x)=\frac{(x-x_0)\cdots(x-x_{k-1})(x-x_{k+1})\cdots(x-x_n)}{(x_k-x_0)\cdots(x_k-x_{k-1})(x_k-x_{k+1})\cdots(x_k-x_n)}$$

$$=\prod_{j=1,j\neq k}^{n}\frac{x-x_j}{x_k-x_j}$$

性质 $l_0(x), l_1(x), \ldots, l_n(x)$ 构成 $Z_n(x)$ 的一组基

注意 $l_0(x), l_1(x), \ldots, l_n(x)$ 与插值节点有关，但与函数 $f(x)$ 无关

误差估计

如何估计误差

$$R_n(x) = f(x) - L_n(x)$$

插值余项

定理

设 $f(x) \in C^n[a, b]$（n 阶连续可微），且 $f^{(n+1)}(x)$ 在 (a, b) 内存在，则对 $\forall x \in [a,b]$，有

$$R_n(x) = f(x) - L_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi_x)}{(n+1)!}\omega_{n+1}(x)$$

其中 $\xi_x \in (a, b)$ 且与 x 有关，$\omega_{n+1}(x) = (x - x_0)(x - x_1)\cdots(x - x_n)$

插值余项

几点说明

- 余项公式只有当 $f(x)$ 的高阶导数存在时才能使用
- ξ_x 与 x 有关，通常无法确定, 实际使用中通常是估计其上界

如果 $\left|f^{(n+1)}(x)\right| \le M_{n+1}$ ，则 $R_n(x) \le \dfrac{M_{n+1}}{(n+1)!}\prod_{i=0}^{n}\left|x-x_i\right|$

- 计算插值点 x 上的近似值时，应选取与 x 相近插值节点

插值误差举例

例：已知函数 $y=\ln x$ 的函数值如下

x	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8
$\ln x$	-0.9163	-0.6931	-0.5108	-0.3567	-0.2231

试估计线性插值和抛物线插值计算 ln 0.54 的误差

解

线性插值

$$R_1(x)=\frac{f^{(2)}(\xi)}{2}(x-x_0)(x-x_1)$$

$x_0=0.5,\ x_1=0.6,\ \xi\in(0.5,0.6)$ ⟹ $\left|f^{(2)}(\xi)\right|\le\left|-\xi^{-2}\right|\le 4$

⟹ $\boxed{\left|R_1(0.54)\right|\le\left|2(0.54-0.5)(0.54-0.6)\right|=0.0048}$

Newton 插值

为什么 Newton 插值

Lagrange 插值简单易用，但若要增加一个节点时，全部基函数 $l_k(x)$ 都需重新计算，不太方便。

解决办法

设计一个可以逐次生成插值多项式的算法，即 n 次插值多项式可以通过 n-1 次插值多项式生成 —— Newton 插值法

什么是差商

设函数 $f(x)$，节点 $x_0, \dots, x_n$

$$f[x_i, x_j] = \frac{f(x_j) - f(x_i)}{x_j - x_i}$$

→ $f(x)$ 关于点 x_i, x_j 的**一阶差商**

$$f[x_i, x_j, x_k] = \frac{f[x_j, x_k] - f[x_i, x_j]}{x_k - x_i}$$

→ $f(x)$ 关于点 x_i, x_j, x_k 的**二阶差商**

差商的一般定义

$$f[x_0, x_1, \dots, x_k] = \frac{f[x_1, \dots, x_k] - f[x_0, \dots, x_{k-1}]}{x_k - x_0}$$

→ **k 阶差商**

差商的性质

- **k 阶差商与 k 阶导数之间的关系：**若 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上具有 k 阶导数，则至少存在一点 $\xi\in(a, b)$，使得

$$f[x_0,x_1,\cdots,x_k]=\frac{f^{(k)}(\xi)}{k!}$$

差商举例

例： 已知 $y=f(x)$ 的函数值表，试计算其各阶差商

i	0	1	2	3
x_i	-2	-1	1	2
$f(x_i)$	5	3	17	21

解： 差商表如下

x_i	$f(x_i)$	一阶差商	二阶差商	三阶差商
-2	5			
-1	3	-2		
1	17	7	3	
2	21	4	-1	-1

Newton / Lagrange

Newton 插值多项式与 Lagrange 插值多项式

$f(x)$ 在 $x_0, x_1, \ldots, x_n$ 上的 n 次插值多项式是唯一的！

$$N_n(x) \equiv L_n(x)$$

余项也相同

$$\Leftrightarrow \quad f[x, x_0, \ldots, x_n]\prod_{i=0}^{n}(x-x_i) = \frac{f^{(n+1)}(\xi_x)}{(n+1)!}\prod_{i=0}^{n}(x-x_i)$$

$$\Rightarrow \quad f[x, x_0, \ldots, x_n] = \frac{f^{(n+1)}(\xi_x)}{(n+1)!}$$

将 x 看作节点

$$\boxed{f[x_0, \ldots, x_k] = \frac{f^{(k)}(\xi)}{k!}}$$

插值举例

插值节点无需递增排列，但必须确保互不相同！

例： 已知函数 $y = \ln x$ 的函数值如下

x	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8
$\ln x$	-0.9163	-0.6931	-0.5108	-0.3567	-0.2231

试分别用**牛顿**线性插值和抛物线插值计算 $\ln 0.54$ 的近似值

解： 取节点 $\boxed{0.5,\ 0.6,\ 0.4}$ 作差商表

x_i	$f(x_i)$	一阶差商	二阶差商
0.5	-0.6931		
0.6	-0.5108	1.8230	
0.4	-0.9163	2.0275	-2.0450

$$N_1(x) = -0.6931 + 1.8230(x-0.5)$$

$$\boxed{N_1(0.54) = -0.6202}$$

$$N_2(x) = -0.6931 + 1.8230(x-0.5) - 2.0450(x-0.5)(x-0.6)$$

$$\boxed{N_2(0.54) = -0.6153}$$

分段线性插值

插值节点满足：$x_0<x_1<\cdots\cdots<x_n$ 已知

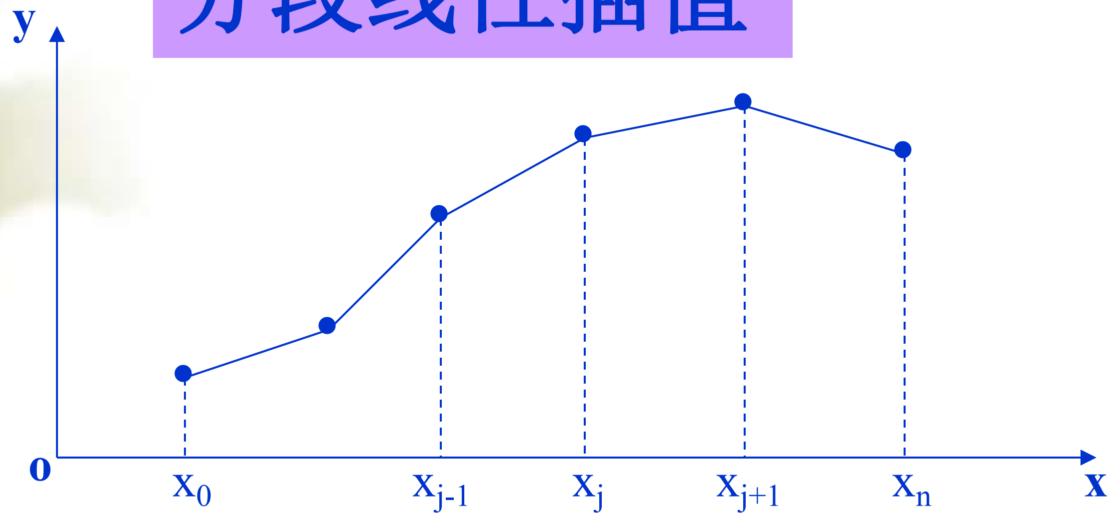
$y_j=f(x_j) \qquad (j=0,1,2,\cdots,n)$

$x\in[x_j,\ x_{j+1}]$时, 线性插值函数

$$L_h(x)=\frac{x_{j+1}-x}{x_{j+1}-x_j}y_j+\frac{x-x_j}{x_{j+1}-x_j}y_{j+1}$$

$(j=0,1,\cdots,n-1)$

分段线性插值



$$L_n(x)=\sum_{j=0}^{n} y_j l_j(x)$$

$$l_j(x)=\begin{cases}\dfrac{x-x_{j-1}}{x_j-x_{j-1}}, & x_{j-1}\le x\le x_j\\ \dfrac{x-x_{j+1}}{x_j-x_{j+1}}, & x_j\le x\le x_{j+1}\\ 0, & \text{其它}\end{cases}$$

计算量与n无关；

n越大，误差越小.

$$\lim_{n\to\infty} L_n(x)=g(x),\ x_0\le x\le x_n$$

定义 5.4 给定区间$[a, b]$上的一个分划:

$$a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$$

已知 $f(x_j) = y_j \quad (j = 0,1,\cdots,n)$, 如果

$$S(x) = \begin{cases} S_1(x), x \in [x_0, x_1] \\ S_2(x), x \in [x_1, x_2] \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ S_n(x), x \in [x_{n-1}, x_n] \end{cases}$$

满足：(1) $S(x)$在 $[x_j, \ x_{j+1}]$上为三次多项式;

(2) $S''(x)$在区间$[a, \ b]$上连续;

(3) $S(x_j) = y_j \ (j = 0,1,\cdots,n)$.

则称 $S(x)$为三次样条插值函数.

(1)自然边界条件: $S''(x_0)=0,\ S''(x_n)=0$

(2)周期边界条件: $S'(x_0)=S'(x_n),\ S''(x_0)=S''(x_n)$

(3)固定边界条件: $S'(x_0)=f'(x_0),\ S'(x_n)=f'(x_n)$

例2 5.7 已知$f(-1) = 1, f(0) = 0, f(1) = 1$.求[–1，1]上的三次自然样条(满足自然边界条件).

解 设

$$S(x)=\begin{cases} a_1x^3+b_1x^2+c_1x+d_1, & x\in[-1,0] \\ a_2x^3+b_2x^2+c_2x+d_2, & x\in[0,1] \end{cases}$$

则有:

$-a_1+b_1-c_1+d_1=1,$ $d_1=d_2,$

$d_1=0,$ $c_1=c_2,$

$a_2+b_2+c_2+d_2=1$ $b_1=b_2$

由自然边界条件:

$$-6a_1+2b_1=0,\ 6a_2+2b_2=0$$

解方程组,得

$$a_1=-a_2=1/2,\quad b_1=b_2=3/2,$$

$$c_1=c_2=d_1=d_2=0.$$

问题的解

$$S(x)=\begin{cases}\frac{1}{2}x^3+\frac{3}{2}x^2, & x\in[-1,0]\\ -\frac{1}{2}x^3+\frac{3}{2}x^2, & x\in[0,1]\end{cases}$$

三次Hermite插值

$$H(x)=y_0\alpha_0(x)+y_1\alpha_1(x)+m_0\beta_0(x)+m_1\beta_1(x)$$

$$\alpha_0(x)=(1+2\frac{x-x_0}{x_1-x_0})(\frac{x_1-x}{x_1-x_0})^2 \qquad \beta_0(x)=(x-x_0)(\frac{x_1-x}{x_1-x_0})^2$$

$$\alpha_1(x)=(1+2\frac{x_1-x}{x_1-x_0})(\frac{x-x_0}{x_1-x_0})^2 \qquad \beta_1(x)=(x-x_1)(\frac{x-x_0}{x_1-x_0})^2$$

x	x_0	x_1
$\alpha_0(x)$	1	0
$\alpha_0'(x)$	0	0
$\alpha_1(x)$	0	1
$\alpha_1'(x)$	0	0

x	x_0	x_1
$\beta_0(x)$	0	0
$\beta_0'(x)$	1	0
$\beta_1(x)$	0	0
$\beta_1'(x)$	0	1

样条插值函数的极性

设$f(x)\in C^2[a, b]$, 对于$a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b$, 有$f(x_j)=y_j$ (j=0,1,···,n). $S(x)$是满足$S(x_j)=y_j$ (j=0,1,···,n) 的三次自然样条. 则有

$$\|S''(x)\| \le \|f''(x)\|$$

即

$$\int_a^b [S''(x)]^2 dx \le \int_a^b [f''(x)]^2 dx$$

第七章 拟合、函数逼近

- 三个问题

插值

拟合、逼近

问题一 已知一个函数的数值表

x	x_1	x_2	……	x_n
y	y_1	y_2	……	y_n

能否找到一个简单易算的 $p(x)$，使得 $p(x_i) = y_i$ 。

问题二 函数 $f(x)$ 的表达式非常复杂，能否找到一个简单易算的 $p(x)$，使得$p(x)$ 是 $f(x)$ 的一个合理的逼近。

问题三 问题一的表中的数值带有误差，能否找到一个简单易算的 $p(x)$，可以近似地表示这些数据。

曲线拟合

已知 $f(x)$ 在某些点的函数值：

x	x_0	x_1	…	x_m
$f(x)$	y_0	y_1	…	y_m

能否找到一个简单易算的 $p(x)$，使得 $f(x) \approx p(x)$

但是 (1) m 通常很大

(2) y_i 本身是测量值，不准确，即 $y_i \neq f(x_i)$

这时不要求 $p(x_i) = y_i$，而只要

$\boxed{p(x_i) - y_i \text{ 总体上尽可能小}}$

最小二乘

曲线拟合的最小二乘问题

已知函数值表 (x_i, y_i)，在函数空间 Φ 中求 $S^*(x)$，使得

$$\sum_{i=0}^{m}\omega_i[S^*(x_i)-y_i]^2=\min_{s(x)\in\Phi}\sum_{i=0}^{m}\omega_i\left[S(x_i)-y_i\right]^2$$

其中 ω_i 是点 x_i 处的权。

● 这个问题实质上是最佳平方逼近问题的**离散形式**。可以将求连续函数的最佳平方逼近函数的方法直接用于求解该问题。

最小二乘求解

对任意 $S(x) \in \Phi = \mathrm{span}\{\varphi_0, \varphi_1, \ldots, \varphi_n\}$，可设

$$S(x) = a_0\varphi_0 + a_1\varphi_1 + \cdots + a_n\varphi_n(x)$$

则求 $S^*(x)$ 等价于求下面的多元函数的最小值点

$$I(a_0, a_1, \ldots, a_n) = \sum_{i=0}^{m} \omega_i \left[S(x_i) - y_i\right]^2$$

$$= \sum_{i=0}^{m} \omega_i \left[\sum_{j=0}^{n} a_j\varphi_j(x_i) - y_i\right]^2$$

最小值点 $\Leftrightarrow$ $\boxed{\dfrac{\partial I}{\partial a_k} = 0}$ $k = 0, 1, \ldots, n$

最小二乘求解

$$\Rightarrow \quad \sum_{j=0}^{n}(\varphi_j,\varphi_k)a_k=(f,\varphi_k)$$

$(\,k=0,1,\ldots,n\,)$

这里的内积是离散带权内积，即

$$(\varphi_j,\varphi_k)=\sum_{i=0}^{m}\omega_i\varphi_j(x_i)\varphi_k(x_i)\text{，}\quad (f,\varphi_k)=\sum_{i=0}^{m}\omega_i f(x_i)\varphi_k(x_i)$$

$\Rightarrow$ **法方程**

G

$$\begin{bmatrix}(\varphi_0,\varphi_0) & (\varphi_0,\varphi_1) & \cdots & (\varphi_0,\varphi_n)\\ (\varphi_1,\varphi_0) & (\varphi_1,\varphi_1) & \cdots & (\varphi_1,\varphi_n)\\ \vdots & & \ddots & \vdots\\ (\varphi_n,\varphi_0) & (\varphi_n,\varphi_n) & \cdots & (\varphi_n,\varphi_n)\end{bmatrix}\begin{bmatrix}a_0\\ a_1\\ \vdots\\ a_n\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}d_0\\ d_1\\ \vdots\\ d_n\end{bmatrix}$$

法方程

$$d_k=(\varphi_k,f)$$

最小二乘求解

设法方程的解为：a_0^* , a_1^*, …, a_n^* , 则

$$S^*(x) = a_0^* \varphi_0 + a_1^* \varphi_1 + \cdots + a_n^* \varphi_n(x)$$

结论 $S^*(x)$ 是 $f(x)$ 在 Φ 中的 最小二乘解

举例

例： 求下面数据表的二次最小二乘拟合多项式

x_i	0	0.25	0.50	0.75	1.00
$f(x_i)$	1.0000	1.2840	1.6487	2.1170	2.7183

解： 设二次拟合多项式为 $$p_2(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2$$

得法方程

$$\begin{bmatrix} 5 & 2.5 & 1.875 \\ 2.5 & 1.875 & 1.5625 \\ 1.875 & 1.5625 & 1.3828 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8.7680 \\ 5.4514 \\ 4.4015 \end{bmatrix}$$

解得 $$a_0 = 1.0052, a_1 = 0.8641, a_2 = 0.8437$$

所以此组数据的二次最小二乘拟合多项式为

$$p_2(x) = 1.0052 + 0.8641x + 0.8437x^2$$

函数逼近

最佳逼近 记 H_n 为所有次数不超过 n 的多项式组成的集合，给定函数 $f(x)\in C[a, b]$，若 $P^*(x)\in H_n$ 使得

$$\left\| f(x)-P^*(x)\right\| = \min_{P\in H_n}\left\| f(x)-P(x)\right\|$$

则称 $P^*(x)$ 为 $f(x)$ 在 $C[a, b]$ 上的 **最佳逼近多项式**

函数逼近

最佳平方逼近

$$\|f(x)-P^*(x)\|_2=\min_{P\in H_n}\|f(x)-P(x)\|_2$$

最小二乘拟合

给定 $f(x)\in C[a,b]$ 的数据表

x	x_0	x_1	…	x_n
y	y_0	y_1	…	y_n

寻找 $P^*(x)$，使得下面的离散 2-范数最小

$$\sum_{i=1}^{n}|f(x_i)-P(x_i)|^2$$

正交多项式

定义 设 $\varphi_n(x)$ 是首项系数不为 0 的 n 次多项式，若

$$(\varphi_j,\varphi_k)=\int_a^b \rho(x)\varphi_j(x)\varphi_k(x)dx=\begin{cases}0, & j\neq k\\ A_k\neq 0, & j=k\end{cases}$$

则称 $\{\varphi_n\}_{n=0}^{\infty}$ 为 $[a, b]$ 上带权 $\rho(x)$ **正交**

称 $\varphi_n(x)$ 为 $\boxed{n\text{ 次正交多项式}}$

Chebyshev 多项式

Chebyshev 多项式

$$\rho(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

在 [-1, 1] 上带权 $\rho(x)$ 的正交多项式称为切比雪夫多项式

- **切比雪夫多项式的表达式**

$$\boxed{T_n(x) = \cos\left(n \arccos x\right)}$$

$x \in [-1, 1]$， $n = 0, 1, 2, \ldots$

- 令 $x = \cos\theta$，则 $T_n(x) = \cos(n\theta)$，展开后即得

$$T_n(x) = \cos^n\theta - C_n^2 \cos^{n-2}\theta \sin^2\theta + C_n^4 \cos^{n-4}\theta \sin^4\theta + \cdots$$

$$= x^n - C_n^2 x^{n-2}(1-x^2) + C_n^4 x^{n-4}(1-x^2)^2 + \cdots$$

Chebyshev 零点插值多项式

Chebyshev 插值

以 Chebyshev 多项式的零点作为插值节点进行插值

好处：误差最小

$$x_k = \cos\left(\frac{2k+1}{2(n+1)}\pi\right)$$

定理 设 $f(x)\in C^{n+1}[-1, 1]$，插值节点 $x_0, x_1, \ldots, x_n$ 为 $T_{n+1}(x)$ 的 $n+1$ 个零点，则

$$\|f(x)-L_n(x)\|_\infty = \min_{p\in H_n(x)} \|f(x)-p(x)\|_\infty$$

Legendre 多项式

Legendre 多项式

在 [-1, 1] 上带权 $\rho(x)=1$ 的正交多项式称为 **勒让德多项式**

记号： $P_0, P_1, P_2, \ldots$

$$P_0(x)=1,\quad P_n(x)=\frac{1}{2^n n!}\frac{d^n}{dx^n}(x^2-1)^n$$

$x\in[-1, 1]$, $n = 1, 2, \ldots$

Legendre多项式

$$P_0(x) = 1$$

$$(n+1)\mathrm{P}_{n+1}(x) = (2n+1)x\,\mathrm{P}_n(x) - n\mathrm{P}_{n-1}(x)$$

$$P_1(x) = x$$

其中$\mathrm{P}_0(x) = 1$, $\mathrm{P}_1(x) = x$,

$$P_2(x) = (3x^2 - 1)/2$$

$$P_3(x) = (5x^3 - 3x)/2$$

$$P_4(x) = (35x^4 - 30x^2 + 3)/8$$

$$P_5(x) = (63x^5 - 70x^3 + 15x)/8$$

$$\vdots$$

最佳平方逼近

设 $f(x)\in C[a,b]$，$\varphi_0(x), \varphi_1(x), \ldots, \varphi_n(x)\in C[a,b]$ 线性无关，令

$$\Phi = \operatorname{span}\left\{\varphi_0, \varphi_1, \ldots, \varphi_n\right\}$$

求 $S^*(x)\in\Phi$，使得

$$\left\| f(x) - S^*(x) \right\|_2^2 = \min_{s\in\Phi} \left\| f(x) - S(x) \right\|_2^2$$

$S^*(x)$ 称为 $f(x)$ 在 Φ 中的**最佳平方逼近函数**

其中

$$\left\| f(x) - S(x) \right\|_2^2 = \left(f - S, f - S \right) = \int_a^b \rho(x)\left(f(x) - S(x) \right)^2 \mathrm{d}x$$

最佳平方逼近

即 $$\frac{\partial I}{\partial a_k} = 2\int_a^b \rho(x)\left(f(x) - \sum_{j=0}^{n} a_j\varphi_j(x) \right)\varphi_k(x)\mathrm{d}x = 0$$

$$\Longleftrightarrow \quad \sum_{j=1}^{n} a_j \int_a^b \rho(x)\varphi_j(x)\varphi_k(x)\mathrm{d}x = \int_a^b \rho(x) f(x)\varphi_k(x)\mathrm{d}x$$

$$\Longleftrightarrow \quad \boxed{\sum_{j=0}^{n} a_j\left(\varphi_k, \varphi_j\right) = \left(\varphi_k, f\right)}$$

$k = 0, 1, \ldots, n$

$$\underbrace{\begin{bmatrix} (\varphi_0,\varphi_0) & (\varphi_0,\varphi_1) & \cdots & (\varphi_0,\varphi_n) \\ (\varphi_1,\varphi_0) & (\varphi_1,\varphi_1) & \cdots & (\varphi_1,\varphi_n) \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ (\varphi_n,\varphi_0) & (\varphi_n,\varphi_n) & \cdots & (\varphi_n,\varphi_n) \end{bmatrix}}_{G} \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d_0 \\ d_1 \\ \vdots \\ d_n \end{bmatrix}$$

法方程

$$\boxed{d_k = \left(\varphi_k, f\right)}$$

举例

例：求 $f(x)=\sqrt{1+x^2}$ **在 [0, 1] 上的一次最佳平方逼近多项式**

解：

$$d_0=(\varphi_0,f)=(1,f)=\int_0^1\sqrt{1+x^2}\,\mathrm{d}x\approx 1.147$$

$$d_1=(\varphi_1,f)=(x,f)=\int_0^1 x\sqrt{1+x^2}\,\mathrm{d}x\approx 0.609$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix}1 & 1/2\\ 1/2 & 1/3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}a_0\\ a_1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}d_0\\ d_1\end{bmatrix} \Rightarrow \boxed{a_0=0.934,\quad a_1=0.426}$$

$$\Rightarrow \boxed{S^*(x)=0.934+0.426\,x}$$

$$\|\delta(x)\|_2^2=\|f(x)\|_2^2-\sum_{j=0}^{n}a_j^*\left(\varphi_j,f\right)=0.0026$$

$$\|\delta(x)\|_\infty\approx 0.066$$

第8章　数值积分

$$I(f)=\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$$

- 微积分基本公式：$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = F(b)-F(a)$
- 但是在许多实际计算问题中

(1) $F(x)$ 表达式较复杂时，计算较困难。如 $f(x)=\dfrac{1}{1+x^6}$

(2) $F(x)$ 难求！甚至有时不能用初等函数表示。

如 $f(x)=\dfrac{1}{x}\sin x,\quad e^{-x^2}$

(3) $f(x)$ 表达式未知，只有通过测量或实验得来的数据表

数值积分公式的一般形式

一般地，用 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上的一些离散点

$$a \le x_0 < x_1 < \cdots < x_n \le b$$

上的函数值的加权平均作为 $f(\xi)$ 的近似值，可得

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x \approx \sum_{i=0}^{n} A_i f(x_i)$$

→ 机械求积方法

求积系数　　求积节点

- 将定积分计算转化成被积函数的函数值的计算
- 无需求原函数
- 易于计算机实现

定义： 如果对于所有次数不超过 m 的多项式 $f(x)$，公式

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x \approx \sum_{i=0}^{n} A_i f(x_i)$$

精确成立，但对某个次数为 $m+1$ 的多项式不精确成立，则称该求积公式具有 m 次代数精度

代数精度的验证方法

- 将 $f(x) = 1,\ x,\ x^2, \dots, x^m$ 依次代入，公式精确成立;
- 但对 $f(x) = x^{m+1}$ 不精确成立。即：

$$\sum_{i=0}^{n} A_i x_i^k = \int_a^b x^k\ \mathrm{d}x = \frac{b^{k+1} - a^{k+1}}{k+1}$$

$$\sum_{i=0}^{n} A_i x_i^{m+1} \neq \int_a^b x^{m+1}\ \mathrm{d}x = \frac{b^{m+2} - a^{m+2}}{m+2}$$

$(k = 0, 1, \dots, m)$

例：试确定系数 A_i，使得下面的求积公式具有尽可能高的代数精度，并求出此求积公式的代数精度。

$$\int_{-1}^{1} f(x)\mathrm{d}x \approx A_0 f(-1) + A_1 f(0) + A_2 f(1)$$

解：将 $f(x)=1, x, x^2$ 代入求积公式，使其精确成立，可得

$$\begin{cases} A_0 + A_1 + A_2 = (b^1 - a^1)/1 = 2 \\ -A_0 \qquad + A_2 = (b^2 - a^2)/2 = 0 \\ A_0 \qquad + A_2 = (b^3 - a^3)/3 = 2/3 \end{cases}$$

解得 $A_0=1/3$，$A_1=4/3$，$A_2=1/3$。所以求积公式为

$$\int_{-1}^{1} f(x)\mathrm{d}x \approx [f(-1) + 4f(0) + f(1)]/3$$

易验证该公式对 $f(x)=x^3$ 也精确成立，但对 $f(x)=x^4$ 不精确成立，所以此求积公式具有 3 次代数精度。

设求积节点为：$a \le x_0 < x_1 < \cdots < x_n \le b$

若 $f(x_i)$ 已知，则可做 n 次多项式插值：$L_n(x) = \sum_{i=0}^{n} l_i(x) f(x_i)$

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x \approx \int_a^b L_n(x)\,\mathrm{d}x = \sum_{i=0}^{n} f(x_i) \int_a^b l_i(x)\,\mathrm{d}x \equiv \sum_{i=0}^{n} A_i f(x_i)$$

其中 $A_i = \int_a^b l_i(x)\,\mathrm{d}x$ $\quad \sum_{k=0}^{n} A_k = b - a$

插值型求积公式

误差：$R[f] = \int_a^b \left(f(x) - L_n(x) \right) \mathrm{d}x = \int_a^b R_n(x)\,\mathrm{d}x$

其中 $R_n(x) = \dfrac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x - x_0)(x - x_1)\cdots(x - x_n)$

Newton-Cotes 求积公式

基于等分点的插值型求积公式

- 积分区间：$[a,\ b]$
- 求积节点：$x_i = a + i \times h$
- 求积公式：

$$h = \frac{b-a}{n}$$

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \approx (b-a)\sum_{i=0}^{n} C_i^{(n)} f(x_i)$$

$n=1$: $C_0^{(1)}=\frac{1}{2}$, $C_1^{(1)}=\frac{1}{2}$

$$\boxed{\int_a^b f(x)dx \approx \frac{b-a}{2}[f(a)+f(b)] \triangleq T}$$

梯形公式　代数精度 $=1$

$n=2$: $C_0^{(2)}=\frac{1}{6}$, $C_1^{(2)}=\frac{2}{3}$, $C_2^{(2)}=\frac{1}{6}$

$$\boxed{\int_a^b f(x)dx \approx \frac{b-a}{6}[f(a)+4f(\tfrac{a+b}{2})+f(b)] \triangleq S}$$

抛物线公式
Simpson公式

代数精度 $=3$

- **梯形公式 (n=1) 的余项**

$$R[f] = -\frac{1}{12}(b-a)^3 f''(\eta) \qquad \boxed{\eta \in (a,b)}$$

- **Simpson公式 (n=2) 的余项**

$$R[f] = -\frac{1}{180}\left(\frac{b-a}{2}\right)^4 f^{(4)}(\eta) \qquad \boxed{\eta \in (a,b)}$$

❑ 提高积分计算精度的常用两种方法

- 用 复合公式
- 用 非等距节点

复合求积公式

- 将积分区间分割成多个小区间
- 在每个小区间上使用低次牛顿－科特斯求积公式

● 将 $[a, b]$ 分成 n 等分 $[x_i, x_{i+1}]$，其中

$$x_i = a + i \cdot h, \quad h = \frac{b-a}{n} \qquad (i = 0, 1, \ldots, n)$$

复合梯形公式

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \sum_{i=0}^{n-1}\int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x)\,\mathrm{d}x \approx \sum_{i=0}^{n-1}\frac{h}{2}[f(x_i)+f(x_{i+1})]$$

$$= \frac{h}{2}\left[f(a) + 2\sum_{i=1}^{n-1} f(x_i) + f(b)\right] \triangleq T_n$$

● 余项

$$R[f] = -\frac{h^3}{12}\sum_{i=0}^{n-1} f''(\eta_i) = -\frac{b-a}{12}h^2 f''(\eta) \qquad \boxed{\eta \in (a, b)}$$

复合 Simpson 公式

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x=\sum_{i=0}^{n-1}\int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x)\,\mathrm{d}x\approx\int_a^b \sum_{i=0}^{n-1}\frac{h}{6}[f(x_i)+4f(x_{i+\frac{1}{2}})+f(x_{i+1})]$$

$$=\frac{h}{6}\left[f(a)+4\sum_{i=0}^{n-1}f(x_{i+\frac{1}{2}})+2\sum_{i=1}^{n-1}f(x_i)+f(b)\right]\triangleq S_n$$

- **余项**

$$R[f]=-\frac{h^5}{2880}\sum_{i=0}^{n-1}f^{(4)}(\eta_i)=-\frac{b-a}{2880}h^4f^{(4)}(\eta)\qquad \boxed{\eta\in(a,b)}$$

性质：复合梯形公式和复合Simpson 公式都是收敛的，也都是稳定的。

例2 分别用复化梯形公式与复化Simpson公式计算积分

$$I=\int_0^1 e^x dx$$

的近似值，为使截断误差的绝对值不超过 $\frac{1}{2}\times 10^{-4}$ 至少应将[0,1]的多少等份.

[解] (1)用复化梯形公式, 截断误差为

$$R_T(f)=-\frac{b-a}{12}h^2 f''(\xi),\quad \xi\in(a,b) \qquad \left|f^{(k)}(x)\right|=e^x\le e,\quad x\in[0,1]$$

$$|R_T|=\frac{1}{12}h^2|f''(\xi)|\le\frac{h^2}{12}e=\frac{1}{12}\frac{1}{n^2}e\le\frac{1}{2}\times 10^{-4},$$

$$n^2\ge\frac{2}{12}\times 10^4 e,\quad n\ge 67.3$$

故取 $n=68$

(2)若用复化Simpson公式，截断误差为

$$R_S(f) = -\frac{b-a}{180}h^4 f^{(4)}(\xi) \qquad \xi \in (a,b)$$

$$|R_S(f)| = \left|-\frac{b-a}{180}h^4 f^{(4)}(\xi)\right| = \frac{1-0}{180}h^4 e^{\xi} \le \frac{1}{180}\frac{1}{n^4}e$$

$$\le \frac{1}{2}\times 10^{-4}, \xi \in (0,1)$$

$$n^4 \ge \frac{2e}{180}\times 10^4, \qquad n \ge 4.1688$$

故取 n=6

定义 如果一组节点 $x_1, x_2, \cdots, x_n \in [a,b]$ 能使求积公式

$$\int_a^b \rho(x) f(x)dx \approx \sum_{k=1}^{n} A_k f(x_k)$$

具有 $2n+1$ 次代数精确度，则称这组节点 $\{x_k\}$ 为Gauss点， 称为带权函数 $\rho(x)$ 的Gauss型求积公式.

例5 试确定求积公式

$$\int_{-4}^{4} f(x)dx \approx \frac{8}{3}[2f(-2) - f(0) + 2f(2)]$$

代数精确度， 它是否是 Gauss型求积公式.

$$\int_{-4}^{4} f(x)dx \approx \frac{8}{3}[2f(-2)-f(0)+2f(2)]$$

解 由于当 $f(x)$ 分别取 $1, x, x^2, x^3$ 有

$$\int_{-4}^{4} dx = 8 = \frac{8}{3}[2-1+2] = 8$$

$$\int_{-4}^{4} xdx = 0 = \frac{8}{3}[2\times(-2)-0+2\times 2] = 0$$

$$\int_{-4}^{4} x^2 dx = \frac{1}{3}x^3\Big|_{-4}^{4} = \frac{128}{3} = \frac{8}{3}[2\times(-2)^2-0+2\times 2^2] = \frac{128}{3}$$

$$\int_{-4}^{4} x^3 dx = \frac{1}{4}x^4\Big|_{-4}^{4} = 0 = \frac{8}{3}[2\times(-2)^3-0+2\times(2)^3] = 0$$

即求积公式精确成立. 而当 $f(x) = x^4$

$$\int_{-4}^{4} x^4 dx = \frac{1}{5}x^5\Big|_{-4}^{4} = \frac{2048}{5}, \quad \frac{8}{3}[2\times(-2)^4-0+2\times(2)^4] = \frac{512}{3} \neq \frac{2048}{5}$$

因此,求积公式的代数精度为3.

它不是Gauss型求积公式.

第九章　常微分方程数值解法

$$\begin{cases} y_{n+1} = y_n + hf(x_n, y_n) \\ y_0 = y(a) \end{cases} \qquad (n = 0, 1, \cdots)$$

上式称为显式欧拉公式.

Euler法的局部截断误差也可表示为

$$R_{n+1} = \frac{1}{2} h^2 y''(x_n) + O(h^3) = O(h^2)$$

Euler方法是一阶方法.

$$y_{n+1} = y_n + \frac{h}{2}[f(x_n, y_n) + f(x_{n+1}, y_{n+1})]$$

这就是梯形公式.

梯形公式的局部截断误差为

$$R_{n+1} = y(x_{n+1}) - y(x_n) - \frac{h}{2}[f(x_n, y(x_n)) + f(x_{n+1}, y(x_{n+1}))]$$

$$= -\frac{h^3}{12} y'''(\xi) \qquad x_n < \xi < x_{n+1}$$

故梯形公式为二阶方法.

一般地,RK方法设近似公式为

$$\begin{cases} y_{n+1} = y_n + h\sum_{i=1}^{p} c_i K_i \\ K_1 = f\left(x_n, y_n\right) \\ K_i = f(x_n + a_i h, y_n + h\sum_{j=1}^{i-1} b_{ij} K_j) \qquad (i = 2, 3, \cdots, p) \end{cases}$$

其中 a_i, b_{ij}, c_i, 都是参数，确定它们的原则是使近似公式在 (x_n, y_n) 处的Taylor展开式与 $y(x)$ 在 x_n 处的Taylor展开式的前面的项尽可能多地重合，这样就使近似公式有尽可能高的精度。

$$\begin{cases} y_{n+1} = y_n + \dfrac{h}{2}(K_1 + K_2) \\ K_1 = f\left(x_n, y_n\right) \\ K_2 = f\left(x_n + h, y_n + hK_1\right) \end{cases}$$

这就是改进Euler公式,它是一种二阶龙格-库塔公式。

$$\begin{cases} \bar{y}_{n+1} = y_n + hf(x_n, y_n) & \text{预测} \\ y_{n+1} = y_n + \dfrac{h}{2}[f(x_n, y_n) + f(x_{n+1}, \bar{y}_{n+1})] & \text{校正} \end{cases}$$

上式称为由Euler公式和梯形公式得到的预测—校正公式，也叫改进Euler法，它是显式单步法。

改进Euler法的局部截断误差为 $O(h^3)$,

故它是二阶方法。

例1用欧拉法求初值问题

$$\begin{cases} y' = -\dfrac{0.9}{1+2x}y \\ y(x_0) = 1 \quad x_0 = 0 \end{cases}$$

当h = 0.02时在区间[0, 0.10]上的数值解。

解 把 $f(x,y) = -\dfrac{0.9}{1+2x}y$ 代入欧拉法计算公式。就得

$$y_{n+1} = y_n - h\frac{0.9}{1+2x_n}y_n = \left(1 - \frac{0.018}{1+2x_n}\right)y_n \qquad n = 0, 1, \cdots, 5$$

具体计算结果如下表：

n	x_n	y_n	$y(x_n)$	$\varepsilon_n = y(x_n) - y_n$
0	0	1.0000	1.0000	0
1	0.02	0.9820	0.9825	0.0005
2	0.04	0.9650	0.9660	0.0005
3	0.06	0.9489	0.9503	0.0014
4	0.08	0.9336	0.9354	0.0018
5	0.10	0.9192	0.923	0.0021

例 **用改进的Euler法求初值问题** $\begin{cases} y' = x^2 + x - y & 0 \le x \le 0.3 \\ y(0) = 0 \end{cases}$ **的数值解, 取** $h = 0.1$ **.**

解 **改进的Euler公式为**

$$\begin{cases} \bar{y}_{n+1} = y_n + hf(x_n, y_n) \\ y_{n+1} = y_n + \dfrac{h}{2}[f(x_n, y_n) + f(x_{n+1}, \bar{y}_{n+1})] \end{cases}$$

$f(x, y) = x^2 + x - y$ **所以**

$$\bar{y}_{n+1} = y_n + 0.1(x_n^2 + x_n - y_n) = 0.9y_n + 0.1(x_n^2 + x_n)$$

$$y_{n+1} = y_n + \frac{0.1}{2}[x_n^2 + x_n - y_n + x_{n+1}^2 + x_{n+1} - \bar{y}_{n+1}]$$

$$= y_n + \frac{0.1}{2}[x_n^2 + x_n - y_n + (x_n + 0.1)^2 + (x_n + 0.1) - 0.9y_n - 0.1(x_n^2 + x_n)]$$

$$= y_n + 0.05[1.9x_n^2 + 2.1x_n - 1.9y_n + 0.11]$$

$$y_{n+1} = y_n + \frac{0.1}{2}[x_n^2 + x_n - y_n + x_{n+1}^2 + x_{n+1} - \overline{y}_{n+1}]$$
$$= y_n + 0.05[1.9x_n^2 + 2.1x_n - 1.9y_n + 0.11]$$

将 $x_0 = 0, y_0 = 0$ **代入上式得**

$$y_1 = y_0 + 0.05[1.9x_0^2 + 2.1x_0 - 1.9y_0 + 0.11]$$
$$= 0.05 \times 0.11 = 0.00550$$

将 $x_1 = 0.1, y_1 = 0.00550$ **代入上式得**

$$y_2 = y_1 + 0.05[1.9x_1^2 + 2.1x_1 - 1.9y_1 + 0.11]$$
$$y_2 = 0.00550 + 0.05[1.9 \times 0.1^2 + 2.1 \times 0.1 - 1.9 \times 0.0055 + 0.11]$$
$$= 0.021927$$

将 $x_2 = 0.2, y_2 = 0.021927$ **代入上式得**

$$y_3 = y_2 + 0.05[1.9x_2^2 + 2.1x_2 - 1.9y_2 + 0.11] = 0.050144$$

例12 用二阶方程初值问题 $y''=3y'-2y, y(0)=y'(0)=1$ 化为一阶方程组初值问题,并写出欧拉方法求解的计算公式.

解 令 $z=y'$ 可得

$$y'=z, \qquad y(0)=1$$
$$z'=3z-2y, \qquad z(0)=1$$

计算公式为

$$\begin{cases} y_{n+1}=y_n+hz_n \\ z_{n+1}=z_n+h(3z_n-2y_n) \end{cases}$$

$$y_0=1, z_0=1$$

例4.3 对初值问题 $\begin{cases} y' + y = 0 \\ y(0) = 1 \end{cases}$

证明用梯形公式求得的近似解为 $y_n = \left(\dfrac{2-h}{2+h}\right)^n, x = nh$

并证明当步长h→0时, y_n 收敛于精确解 e^{-x}

证明：解初值问题的梯形公式为：

$$y_{n+1} = y_n + \frac{h}{2}[f(x_n, y_n) + f(x_{n+1}, y_{n+1})]$$

$$\because \quad f(x,y) = -y \qquad \therefore \quad y_{n+1} = y_n + \frac{h}{2}[-y_n - y_{n+1}]$$

整理成显式 $y_{n+1} = \left(\dfrac{2-h}{2+h}\right) y_n$ 反复迭代，得到：

$$y_{n+1}=\left(\frac{2-h}{2+h}\right)y_n$$

$$y_{n+1}=\left(\frac{2-h}{2+h}\right)y_n=\left(\frac{2-h}{2+h}\right)^2 y_{n-1}$$

$$=\left(\frac{2-h}{2+h}\right)^3 y_{n-2}=\dots=\left(\frac{2-h}{2+h}\right)^{n+1} y_0$$

$\because\ y_0=1$

$$\therefore\quad y_n=\left(\frac{2-h}{2+h}\right)^n$$

$$y_n = \left(\frac{2-h}{2+h}\right)^n$$ 由于 $x = nh$ ，有:

$$\lim_{h\to 0} y_n = \lim_{h\to 0}\left(\frac{2-h}{2+h}\right)^{\frac{x}{h}}$$

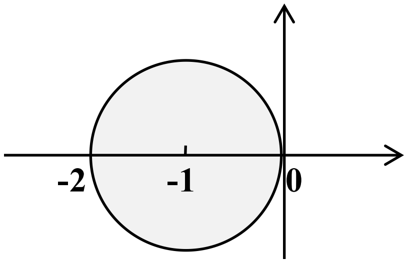
$$= \lim_{h\to 0}\frac{\left(1-\frac{h}{2}\right)^{\left(-\frac{2}{h}\right)\left(-\frac{x}{2}\right)}}{\left(1+\frac{h}{2}\right)^{\left(\frac{2}{h}\right)\left(\frac{x}{2}\right)}} = \frac{e^{-\frac{x}{2}}}{e^{\frac{x}{2}}} = e^{-x}$$

$$\therefore \quad \lim_{h\to 0} y_n = e^{-x}$$

例：考察显式欧拉法 $y_{i+1}=y_i+h\lambda y_i=(1+\bar{h})^{i+1}y_0$

$$\varepsilon_0=y_0-\bar{y}_0 \;\Rightarrow\; \bar{y}_{i+1}=(1+\bar{h})^{i+1}\bar{y}_0$$

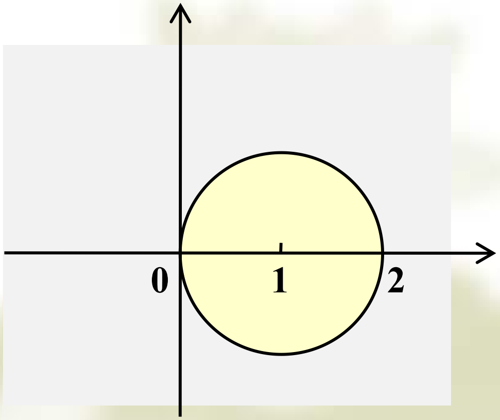
$$\Rightarrow\; \varepsilon_{i+1}=y_{i+1}-\bar{y}_{i+1}=(1+\bar{h})^{i+1}\varepsilon_0$$



由此可见，要保证初始误差ε_0以后逐步衰减，$\bar{h}=\lambda h$ 必须满足：$|1+\bar{h}|<1$

例：考察隐式欧拉法 $y_{i+1}=y_i+h\lambda y_{i+1}$

$$y_{i+1}=\left(\frac{1}{1-\bar{h}}\right)y_i \;\Rightarrow\; \varepsilon_{i+1}=\left(\frac{1}{1-\bar{h}}\right)^{i+1}\varepsilon_0$$



可见绝对稳定区域为：$|1-\bar{h}|>1$

注：一般来说，隐式欧拉法的绝对稳定性比同阶的显式法的好。