矩阵理论第一章参考答案

杨 传 胜

1. 设 $a_1, a_2, \cdots, a_n$ 是互不相同的 n 个数，且

$$f_i = (x - a_1)\cdots(x - a_{i-1})(x - a_{i+1})\cdots(x - a_n)$$

$$(i = 1, 2, \cdots, n),$$

(1) 证明 $f_i(i = 1, 2, \cdots, n)$ 是 $P_n[x]$ 的一组基底；
(2) 取 $a_1, a_2, \cdots, a_n$ 是全体 n 次单位根，求由基底 $1, x, \cdots, x^{n-1}$ 到 $f_1, f_2, \cdots, f_n$ 的过渡矩阵.

证明：

(1) 首先证明它们是线性无关的.

设存在 n 个数 $k_1, k_2, \cdots, k_n$ 使得

$$k_1 f_1 + k_2 f_2 + \cdots + k_n f_n = 0,$$

当 $x = a_i$ 时，上式为 $k_1 f_i = 0$ 得 $k_i = 0$, 所以它们线性无关，又由于 $P_n[x]$ 的维数为 n, 所以结论成立.

(2) 根据题意知 $a_i^n = 1$,

2. 设 V_1, V_2 是线性空间 V 的两个非平凡子空间, 证明: 在 V 中存在 α 使得 $\alpha\bar{\in}V_1, \alpha\bar{\in}V_2$ 同时成立.

证明：

由于 V_1 是 V 的非平凡子空间, 所以存在向量 $\alpha\bar{\in}V_1$, 如果此向量 $\alpha\bar{\in}V_2$, 则结论成立. 如果 $\alpha\in V_2$, 同时由于 V_2 是 V 的非平凡子空间，所以存在向量 $\beta\bar{\in}V_2$, 如果此向量 $\beta\bar{\in}V_1$, 则向量 β 满足结论. 如果此向量 $\beta\in V_1$, 则有

$$\alpha\bar{\in}V_1, \alpha\in V_2, \beta\in V_1, \beta\bar{\in}V_2,$$

则向量 $\gamma = \alpha + \beta$ 满足结论所要求.

4. 设 $\varepsilon_1, \cdots, \varepsilon_n$ 是线性空间 V 的一组基， T 是 V 上的线性变换. 证明： T 可逆的充要条件是 $T\varepsilon_1, \cdots, T\varepsilon_n$ 线性无关.

证明：

设 T 在基底 $\varepsilon_1, \cdots, \varepsilon_n$ 之下的方阵为 A, 即

$$T(\varepsilon_1, \cdots, \varepsilon_n) = (T\varepsilon_1, \cdots, T\varepsilon_n) = (\varepsilon_1, \cdots, \varepsilon_n)A.$$

由于 $\varepsilon_1, \cdots, \varepsilon_n$ 是线性空间 V 的一组基，所以线性无关，所以 T 可逆的充分必要条件是矩阵 A 可逆，而 A 可逆的充分必要条件是 $T\varepsilon_1, \cdots, T\varepsilon_n$ 线性无关，故得证.

5. 设 T 是线性空间 V 上的线性变换，如果 $T^{k-1}(\xi) \neq 0$, 但 $T^k(\xi) = 0$. 求证: $\xi, T(\xi), \cdots, T^{k-1}(\xi)$ 线性无关.

证明：设存在 k 个实数 $l_0, l_1, \cdots, l_{k-1}$, 使得

$$l_0\xi + l_1 T(\xi) + \cdots + l_{k-1}T^{k-1}(\xi) = 0,$$

对上式两边作 $k-1$ 次 T 变换，并利用 $T^k(\xi)=0$. 由题设条件 $T^{k-1}(\xi)\neq 0$ 得 $l_0=0$, 于是上式变为

$$l_1T(\xi)+\cdots+l_{k-1}T^{k-1}(\xi)=0,$$

对上式两边作 $k-2$ 次 T 变换，并利用 $T^k(\xi)=0$, 得 $l_1=0$.

依此类推下去就得到 $l_0=l_1=\cdots=l_{k-1}=0$, 所以结论成立.

6. (1) 设 λ_1,λ_2 是线性变换 T 的两个不同的特征值， $\varepsilon_1,\varepsilon_2$ 是分别属于 λ_1,λ_2 的特征向量，证明： $\varepsilon_1+\varepsilon_2$ 不是 T 的特征向量.

(2) 证明：如果线性空间 V 中每一个非零向量都是线性变换 T 的特征向量，则 T 是数乘变换.

证明：

(1) 根据题意， $T(\varepsilon_1)=\lambda_1\varepsilon_1, T(\varepsilon_2)=\lambda_2\varepsilon_2$. 假设 $\varepsilon_1+\varepsilon_2$ 是 T 的特征向量，其对应的特征值为 λ, 即

$$T(\varepsilon_1+\varepsilon_2)=\lambda(\varepsilon_1+\varepsilon_2).$$

而

$$T(\varepsilon_1+\varepsilon_2)=T(\varepsilon_1)+T(\varepsilon_2)=\lambda_1\varepsilon_1+\lambda_2\varepsilon_2=\lambda(\varepsilon_1+\varepsilon_2).$$

即

$$(\lambda_1-\lambda)\varepsilon_1=(\lambda-\lambda_2)\varepsilon_2,$$

由于 $\varepsilon_1,\varepsilon_2$ 是线性无关的非零特征向量，所以

$$\lambda_1-\lambda=\lambda-\lambda_2=0,$$

即

$$\lambda_1=\lambda_2=0,$$

矛盾，所以结论 (1) 成立.

(2) 根据题意可知，线性变换 T 在任意一组基下的矩阵都相同，设为 A. 根据线性变换 T 在不同基下的矩阵的关系，知任何与 A 相似的矩阵都是 T 在某基下的矩阵，即对于任何可逆矩阵 P, $P^{-1}AP$ 都是 T 在 V 的某基下的矩阵，于是有 $P^{-1}AP=A$, 即 $AP=PA$, 由此可证明矩阵 A 为数量矩阵，从而知 T 为数乘变换.

11. 证明：反对称实矩阵的特征值是零或纯虚数.

证明：设矩阵 A 是反对称矩阵，即 $A^H=A$. 数 λ 是 A 的一个特征值，其对应的特征向量为 x, 有 $Ax=\lambda x$.

$$(Ax)^H=(\lambda x)^H\Rightarrow x^HA^H=\bar{\lambda}x^H,$$

对上式两边同时乘以 Ax 得：

$$x^HA^HAx=\bar{\lambda}x^HAx=\bar{\lambda}\lambda x^Hx,$$

上式的左边为

$$x^HA^HAx=-x^HA^2x=\lambda^2x^Hx,$$

所以有： $\bar{\lambda}\lambda=\lambda^2$, 则 $\lambda=0$ 或是纯虚数.

13. 设 A 是 n 阶实对称矩阵. 证明： A 正定的充要条件为 A 的特征值全大于零.

证明：矩阵 A 是实对称矩阵，所以其所有特征值 $\lambda_i\in R(i=1,2,\cdots,n)$, 对应的特征向量 $p_i(i=1,2,\cdots,n)(Ap_i=\lambda_ip_i)$ 组成 R^n 的一标准正交基.

必要性. 假设矩阵 A 正定，根据定义有 $p_i^TAp_i>0$, 即 $p_i^TAp_i=\lambda_ip_i^Tp_i>0$, 所以有 $\lambda_i>0$, 即 A 的特征值全为正.

充分性. 设 A 的特征值全为正. 令 $P=(p_1,p_2,\cdots,p_n)$, 则 P 是正交矩阵, 且

$$P^{-1}AP=P^TAP=diag(\lambda_1,\cdots,\lambda_n),$$

即

$$A=Pdiag(\lambda_1,\cdots,\lambda_n)P^T,$$

所以对任意非零向量 $x\in R^n$, 有

$$x^TAx=x^TPdiag(\lambda_1,\cdots,\lambda_n)P^Tx,$$

令 $y=P^Tx$, 则 $y\neq 0$, 且

$$x^TAx=y^Tdiag(\lambda_1,\cdots,\lambda_n)y=\sum_{i=1}^{n}\lambda_i y_i^2>0,$$

所以矩阵 A 是正定矩阵.

对任意非零向量 $x\in R^n$, 有 $x=k_1p_1+k_2p_2+\cdots+k_np_n$

15. 设 A,B 都是实对称矩阵, 证明: 存在正交矩阵 Q 使得 $Q^{-1}AQ=B$ 的充要条件是 A,B 的特征值全相同.

证明: 必要性显然, 由于两矩阵相似.

充分性: 由于 A,B 都是实对称矩阵且有相同的特征值, 所以存在正交矩阵 Q_1,Q_2 使得

$$Q_1^{-1}AQ_1=diag(\lambda_1,\cdots,\lambda_n)=Q_2^{-1}BQ_2,$$

即

$$Q_2Q_1^{-1}AQ_1Q_2^{-1}=B,$$

所以有

$$Q^{-1}AQ=B,$$

其中 $Q=Q_1Q_2^{-1}$ 为正交矩阵.

17. 设 A 是 n 阶实对称矩阵, 且 $A^2=E$. 证明: 存在正交矩阵 Q, 使得

$$Q^{-1}AQ=\begin{pmatrix} E_r & 0 \\ 0 & -E_{n-r}\end{pmatrix}.$$

证明: 设矩阵 A 的特征值为 λ, 其对应的特征向量为 x, 即

$$Ax=\lambda x.$$

由于 $A^2=E$, 所以 $A^2x=\lambda^2x=x$, 因此有 $\lambda^2=1$, 即 $\lambda=\pm1$. 设矩阵 A 的特征值为 1 的个数为 r, 特征值为 -1 的个数则为 $n-r$. 同时 A 为实对称矩阵, 存在正交矩阵 Q 使得

$$Q^{-1}AQ=\begin{pmatrix} E_r & 0 \\ 0 & -E_{n-r}\end{pmatrix}.$$

这就完成了结论的证明.

18. 设 $f(x_1,\cdots,x_n)=X^TAX$ 是一实二次型, $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$ 是 A 的特征值, 且 $\lambda_1\leq\lambda_2\leq\cdots\leq\lambda_n$. 证明: 对任意 $X\in R^n$, 有

$$\lambda_1X^TX\leq X^TAX\leq\lambda_nX^TX.$$

证明：根据二次型的定义知矩阵 A 是实对称矩阵，所以矩阵 A 存在 n 个正交的单位特征向量 $p_1, p_2, \cdots, p_n$, 使得 $Ap_i = \lambda_i p_i$, 此 n 个特征向量组成线性空间 R^n 的一组标准正交基. 对任意向量 $X \in R^n$, 有 $X = k_1p_1 + k_2p_2 + \cdots + k_np_n$, 因此有

$$\begin{aligned} X^TAX &= (k_1p_1 + k_2p_2 + \cdots + k_np_n)^T A(k_1p_1 + k_2p_2 + \cdots + k_np_n) \\ &= \lambda_1 p_1^T p_1 + \lambda_2 p_2^T p_2 + \cdots + \lambda_n p_n^T p_n \end{aligned}$$

所以有

$$\lambda_1 X^TX \le X^TAX \le \lambda_n X^TX.$$

这就完成了结论的证明.

19. 设二次型 $f(x_1, \cdots, x_n)$ 的矩阵为 A, λ 是 A 的特征值，证明：存在 R^n 中非零向量 $(\tilde{x}_1, \cdots, \tilde{x}_n)$, 使

$$f(\tilde{x}_1, \cdots, \tilde{x}_n) = \lambda(\tilde{x}_1^2 + \cdots + \tilde{x}_n^2).$$

证明：根据题设， $Ax = \lambda x$, 其中 x 是 A 的非零特征向量. 令 $x = (\tilde{x}_1, \cdots, \tilde{x}_n)^T$, 则

$$f(x) = x^TAx = \lambda(\tilde{x}_1^2 + \cdots + \tilde{x}_n^2).$$

这就完成了本结论的证明.

22. 设 A, B 是两个 n 阶实对称矩阵，且 B 是正定矩阵. 证明：存在 n 阶实可逆矩阵 P, 使

$$P^TAP, P^TBP$$

同时为对角矩阵.

证明：矩阵 B 为实对称正定矩阵，其所有特征值为正，同时存在正交矩阵 P_1, 使得

$$P_1^TBP_1 = diag(\mu_1, \mu_2, \cdots, \mu_n) = D^2,$$

其中 $\mu_i > 0 (i = 1, 2, \cdots, n), D = diag(\sqrt{\mu_1}, \sqrt{\mu_2}, \cdots, \sqrt{\mu_n})$.

令 $P_2 = P_1D^{-1}$, 则有 $P_2^TBP_2 = E$, 其中 P_2 是可逆矩阵.

矩阵 A 是对称矩阵，则矩阵 $P_2^TAP_2$ 也是对称矩阵，所以存在正交矩阵 P_3, 使得

$$P_3^TP_2^TAP_2P_3 = diag(\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n).$$

令 $P = P_2P_3$, 则有

$$P^TAP = diag(\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n), P^TBP = E.$$

这就完成了本结论的证明.

23. 设 $A \in C^{n\times n}$, $x, y \in C^n$, $(x, y) = x^Hy$, 则

$$(Ax, y) = (x, A^Hy).$$

证明：根据题设有

$$(Ax, y) = (Ax)^Hy = x^HA^Hy = (x^H)(A^Hy) = (x, A^Hy).$$

24. 设 $A \in C^{m\times n}$, 则

(1) $N(A) = N(A^HA), N(A^H) = N(AA^H)$;

(2) $R(A) = R(AA^H), R(A^H) = R(A^HA)$;

(3) $rankA = rankA^HA = rankAA^H$.

证明:

(1) 设 $x \in N(A)$, 则 $Ax = 0, \Rightarrow A^HAx = 0 \Rightarrow x \in N(A^HA)$.

设 $x \in N(A^HA)$, $\Rightarrow A^HAx = 0 \Rightarrow x^HA^HAx = 0 \Rightarrow (Ax)^HAx = 0 \Rightarrow Ax = 0 \Rightarrow x \in N(A)$.

所以有 $N(A) = N(A^HA)$, 同理可证， $N(A^H) = N(AA^H)$.

(2) 设 $y \in R(AA^H)$, 则存在 $x_0 \in C^n$ 使得 $y = (AA^H)x_0 = A\tilde{x} \in R(A)$, 其中 $\tilde{x} = A^Hx_0 \in C^m$, 所以有 $R(AA^H) \subseteq R(A)$.

同时由于 $dimR(A) + dimN(A^H) = m = dimR(A) + dimN(AA^H)$, 且 $dimR(AA^H) + dimN(AA^H) = m$, 所以有 $dimR(AA^H) = dimR(A)$, 又由于 $R(AA^H) \subseteq R(A)$, 所以 $R(AA^H) = R(A)$. 同理可得， $R(A^H) = R(A^HA)$.

(3) 根据结论 (2), $dimR(AA^H) = dimR(A)$, 所以 $rankA = rank(AA^H)$; $R(A^H) = R(A^HA)$, $dimR(A^HA) = dimR(A^H)$, 所以 $rank(A^H) = rank(A^HA)$. 综上所述，结论 (3) 成立.

27. 设 $A = A^H = A^2 \in C^{n\times n}$, $\mathrm{rank}A = r$, 则存在酉阵 $U \in C^{n\times n}$, 使得

$$U^HAU = \begin{pmatrix} E_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

证明：根据题设，设矩阵 A 的特征值为 λ, 其对应的特征向量为 x, 即 $Ax = \lambda x$, 则

$$A^2x = \lambda^2x = Ax = \lambda x,$$

所以有 $\lambda^2 = \lambda$, 即 A 的特征值为 1 或 0, 又由于 $\mathrm{rank}A = r$, 所以矩阵 A 有 r 个特征值为 1, 其余特征值全部为零. 同时矩阵 A 为 Hermite 矩阵，所以存在酉阵 $U \in C^{n\times n}$, 使得

$$U^HAU = \begin{pmatrix} E_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$