《数值分析》 期末复习

- 练习题

1、已知 $X=(3,-6,2)^{\mathrm{T}}$， $A=\begin{pmatrix}2&0&0\\0&0&-1\\0&-1&1\end{pmatrix}$，则 $\|X\|_2=$ _7_， $\|AX\|_2=$ _10.198_， $\rho(A)=$ _2_。

5、要用线性插值计算 $\sqrt{71}$ 的近似值，最佳节点应选为_64，81_。

6、设 $f(x)=x^3-3x+1$，则三阶差商为 $f[0,1,2,3]=$ _1_，四阶差商 $f[0,1,2,3,4]=$ _0_。

7、求积公式 $\int_a^b f(x)dx\approx\frac{b-a}{8}\left[f(a)+3f\left(\frac{2a+b}{3}\right)+A_2f\left(\frac{a+2b}{3}\right)+f(b)\right]$ 的代数精度为 3，

则 $A_2=$ _3_。

8、对于试验方程 $y'=\lambda y$， $Euler$ 方法的绝对稳定区间为_(-2， 0)_。

二、函数 $f(x)=3x^2-e^x$ 在区间 $(0,1)$ 有极小值，建立求函数 $f(x)$ 在区间 $(0,1)$ 极小值点近似值的不动点迭代格式 $p_{n+1}=g(p_n)$，并说明你所建立的不动点迭代对任意 $p_0\in[0,1]$，不动点迭代 $p_{n+1}=g(p_n)$ 收敛。

解： 极小值点为的 $f(x)=3x^2-e^x$ 驻点，即求方程 $F(x)=f'(x)=6x-e^x=0$ 的根

令 $x=\dfrac{e^x}{6}$，则不动点迭代格式为 $x_{n+1}=\dfrac{e^{x_n}}{6}$　　………………5 分

$g(x)=\dfrac{e^x}{6}$，$g'(x)=\dfrac{e^x}{6}>0$，所以 $g(x)$ 为单调增函数，

当 $x\in(0,1)$ 时，$g(x)\in(\dfrac{1}{6},\dfrac{e}{6})\subset(0,1)$，

又 $g''(x)=\dfrac{e^x}{6}>0$，所以 $g'(x)$ 为单调增函数，$\max\limits_{0<x<1}\{g'(x)\}=\dfrac{e}{6}<1$。

所以，在区间（0，1）内不动点迭代对任意初值 x_0 都收敛。　　………………5 分

三、方程组$\begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 3 & 4 & -2 \\ 3 & -2 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 11 \\ 11 \end{pmatrix}$的系数矩阵的 LU 分解。

四、给定线性方程组 $AX=b$，其中 $A=\begin{pmatrix}3&0&2\\0&2&1\\1&1&2\end{pmatrix}$。讨论用 $Jacobi$ 迭代和 $Gauss-Seidel$ 迭代求这方程组的收敛性。如果都收敛，比较哪种方法收敛较快。

解： $B_J=-\begin{bmatrix}0&0&\frac{2}{3}\\0&0&\frac{1}{2}\\\frac{1}{2}&\frac{1}{2}&0\end{bmatrix}$，$\rho(B_J)=\sqrt{\frac{7}{12}}=0.7638<1$，$Jacobi$ 迭代收敛。…………5 分

$B_S=\begin{bmatrix}0&0&\frac{2}{3}\\0&0&\frac{1}{2}\\0&0&-\frac{7}{12}\end{bmatrix}$，$\rho(B_S)=\frac{7}{12}=0.5833<1$，$Gauss-Seidel$ 迭代收敛。………5 分

因为 $\rho(B_S)=\frac{7}{12}<\rho(B_J)=\sqrt{\frac{7}{12}}$，所以 $Gauss-Seidel$ 迭代收敛更快。………2 分

五、已知下列函数表

x	0	1	2
$f(x)$	1	3	9

(1) 写出相应的二次 $Lagrange$ **插值多项式(不化简)；**

(2) 作差商表，写出相应二次 $Newton$ **插值多项式(不化简)。**

解：（1）

$$p_2(x)=\frac{(x-1)(x-2)}{(0-1)(0-2)}\times 1+\frac{(x-0)(x-2)}{(1-0)(1-2)}\times 3+\frac{(x-0)(x-1)}{(2-0)(2-1)}\times 9$$

……………4 分

$$=\frac{1}{2}(x-1)(x-2)-3x(x-2)+\frac{9}{2}x(x-1)$$

（2）

x	y	1阶差商	2阶差商
0	1		
1	3	2	
2	9	6	2

…………………4 分

$$N_2(x)=1+2x+2x(x-1)$$

…………2 分

六、利用最小二乘法确定 a 和 b，使得经验公式 $y = a + bx^2$ 拟合以下数据：

x_i	-1.5	0	1	1.5
y_i	-3	1	-2	-5

解： 超定方程组：
$$\begin{cases} a + 2.25b = -3 \\ a = 1 \\ a + b = -2 \\ a + 2.25b = -5 \end{cases}$$

正规方程组
$$\begin{pmatrix} 4 & 5.5 \\ 5.5 & 11.125 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -9 \\ -20 \end{pmatrix}$$
……………………6 分

求解得 $a = 0.6930$， $b = -2.1404$ ………………………2 分

经验公式： $y = 0.693 - 2.1404x^2$ ………………………2 分

七、设求积公式 $\int_{-1}^{1} f(x)dx \approx A_0 f\left(-\frac{1}{2}\right) + A_1 f(0) + A_2 f\left(\frac{1}{2}\right)$ 是插值型的，确定其待定参数和代数精度。

解： 令 $f(x)=1, x, x^2$ 得：

$$\begin{cases} A_0 + A_1 + A_2 = 2 \\ A_0 \times (-\frac{1}{2}) + A_2 \times (\frac{1}{2}) = 0 \\ A_0 \times (-\frac{1}{2})^2 + A_2 \times (\frac{1}{2})^2 = \frac{2}{3} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A_0 + A_1 + A_2 = 2 \\ -A_0 + A_2 = 0 \\ A_0 + A_2 = \frac{8}{3} \end{cases}$$

解得：$A_0 = A_2 = \frac{4}{3}$， $A_1 = -\frac{2}{3}$

求积公式为 $\int_{-1}^{1} f(x)dx = \frac{4}{3} f(-\frac{1}{2}) - \frac{2}{3} f(0) + \frac{4}{3} f(\frac{1}{2})$ ……………………6 分

令 $f(x)=x^3$， 左边 $=0$ = 右边 $=0$，

令 $f(x)=x^4$， 左边 $=\frac{2}{5} \neq$ 右边 $=\frac{1}{6}$，所以代数精度是 3 ……………………4 分

八、 (1)写出一阶微分方程初值问题求解的梯形公式推导过程；

(2)对于一阶微分方程初值问题 $\begin{cases} \dfrac{dy}{dx} = 2x - y \\ y(0) = 1 \end{cases}$，取步长 $h = 0.2$，用改进的 Euler 方法求 $y(0.4)$。

解： （1）由 $\begin{cases} y' = f(x,y) & x \in [a,b] \\ y(a) = y_0 \end{cases}$，将区间 $[a,b]$, N 等分，$h = \dfrac{b-a}{N}$，

取区间 $[x_n, x_{n+1}]$，$n = 0,1,\cdots,N$，两边对 x 积分 $\int_{x_n}^{x_{n+1}} y'dx = \int_{x_n}^{x_{n+1}} f(x,y)dx$，

右边用梯形积分，得 $y(x_{n+1}) - y(x_n) = \dfrac{x_{n+1} - x_n}{2}[f(x_n, y(x_n)) + f(x_{n+1}, y(x_{n+1}))]$

令 $y_n \approx y(x_n)$，梯形公式为 $y_{n+1} = y_n + \dfrac{h}{2}[f(x_n, y_n) + f(x_{n+1}, y_{n+1})]$ ……………………4 分

（2）改进 Euler 方法

$$\begin{cases} \bar{y}_{n+1} = y_n + hf(x_n, y_n) = y_n + h(2x_n - y_n) = 2hx_n + (1-h)y_n \\ y_{n+1} = y_n + \dfrac{h}{2}[f(x_n, y_n) + f(x_{n+1}, \bar{y}_{n+1})] = y_n + \dfrac{h}{2}[2x_n - y_n + 2x_{n+1} - \bar{y}_{n+1}] \end{cases}$$ …………2 分

得 $\begin{cases} \bar{y}_1 = 2\times 0.2 \times 0 + 0.8 \times 1 = 0.8 \\ y(0.2) \approx y_1 = y_0 + 0.1\times(2\times 0 - y_0 + 2\times 0.2 - \bar{y}_1) = 0.86 \end{cases}$ ………………2 分

$\begin{cases} \bar{y}_2 = 2\times 0.2\times 0.2 + 0.8\times 0.86 = 0.768 \\ y(0.4) \approx y_2 = y_1 + 0.1\times(2\times 0.2 - y_1 + 2\times 0.4 - \bar{y}_2) = 0.8172 \end{cases}$ ………………2 分