矩阵的分解

定理 1: 设 $A\in C_n^{n\times n}$, 则A可唯一地分解为

$$A=U_1R$$

其中，U_1是酉矩阵，R是正线上三角复矩阵

或A可唯一分解为

$$A=LU_2$$

其中，L是正线下三角复矩阵 U_2是酉矩阵

推论 1：设 A是正定Hermite矩阵，则存在唯一的正线上三角复矩阵R，使

$$A=R^HR$$

定理 2: 设 $A\in C_n^{n\times n}$, 用L表示下三角复矩阵,R是上三角复矩阵,

$\tilde{L}$是单位下三角复矩阵, $\tilde{R}$是单位上三角复矩阵, D表示对角矩阵,

则下列命题等价:

$$(i)\quad \Delta_k=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1k} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2k} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{kk} \end{vmatrix}\neq 0,k=1,\cdots,n$$

(ii) A可唯一地分解为$A=L\tilde{R}$

(iii) A可唯一地分解为$A=\tilde{L}R$

(iv) A可唯一地分解为$A=\tilde{L}D\tilde{R}$.

单纯矩阵： 矩阵A的每个特征值的代数重复度与几何重复度相等.

定理3 设$A \in C^{n\times n}$是单纯矩阵, 则A可分解为一系列幂等矩阵A_i

$(i=1,2,\cdots,n)$的加权和,

$$A=\sum_{i=1}^{n}\lambda_i A_i$$

其中，λ_i $(i=1,2,\cdots,n)$是A的特征值.

A_i的性质：

(1) 幂等性：$A_i^2=A_i$

(2) 分离性：$A_iA_j=0 \quad (i\neq j)$

(3) 可加性：$\sum_{i=1}^{n}A_i=E_n$

正规矩阵: $AA^H = A^H A$ ----- A为正规矩阵

引理1: A为正规矩阵, A与B酉相似, 则B为正规矩阵

引理2: $(Schur)$设$A \in C^{n\times n}$, 则存在酉矩阵U, 使得

$$A = URU^H$$

(R是一个上三角矩阵且主对角线上的元素为A的特征值).

引理3: A正规矩阵且是三角矩阵 $\Rightarrow$ A是对角矩阵.

定理4: A是正规矩阵 $\Leftrightarrow$ A与对角矩阵酉相似

即: 存在n阶酉矩阵U, 使得

$$A = Udiag(\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n)U^H$$

定理5 设$A\in C^{n\times n}$，它有k个相异特征值 $\lambda_i\,(i=1,2,\cdots,k)$,

则A是正规矩阵的充要条件是存在k个矩阵$A_i\,(i=1,2,\cdots,k)$满足

(1) $A=\sum_{i=1}^{k}\lambda_i A_i$ (2) $A_iA_j=\begin{cases}A_i & j=i\\ 0 & j\neq i\end{cases}$

(3) $\sum_{i=1}^{k}A_i=E_n$ (4) $A_i^H=A_i\quad(i=1,2,\cdots,k)$

定理6 设 $A \in C_r^{m\times n}$，则存在矩阵 $B \in C_r^{m\times r}$，$D \in C_r^{r\times n}$，使得

$$A = BD$$

定理7 设 $A \in C_r^{m\times n}$，且 $A = B_1D_1 = B_2D_2$ 均为 A 的最大秩分解，则

(1) 存在 r 阶可逆矩阵 Q，使得

$$B_1 = B_2Q \qquad D_1 = Q^{-1}D_2$$

(2)

$$D_1^H(D_1D_1^H)^{-1}(B_1^HB_1)^{-1}B_1^H$$

$$= D_2^H(D_2D_2^H)^{-1}(B_2^HB_2)^{-1}B_2^H$$

矩阵的最大秩分解步骤：

一、进行行初等变化, 化为行标准形：

$$
\tilde{A}=\begin{array}{c}
\begin{matrix} & & i_1 & & & i_2 & & i_r & & \end{matrix} \\
\begin{bmatrix}
0 & \cdots & 1 & * & \cdots & 0 & \cdots & 0 & \cdots & * \\
0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 1 & \cdots & 0 & \cdots & * \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 1 & \cdots & * \\
0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0
\end{bmatrix}
\end{array}
$$

二. A的第$i_1,i_2,\cdots,i_r$列构成$B=(a_{i_1},a_{i_2},\cdots,a_{i_r});$

三、$\tilde{A}$的非零行则构成D.

定理8 设 $A\in C_r^{m\times n}$，则有

(1) $rank(A)=rank(A^H A)=rank(AA^H)$

(2) $A^H A$、AA^H的特征值均为非负实数

(3) $A^H A$、AA^H的非零特征值相同

奇异值: 设 $A\in C_r^{m\times n}$, $A^H A$的特征值为

$$\lambda_1\ge\lambda_2\ge\cdots\ge\lambda_r>\lambda_{r+1}=\cdots=\lambda_n=0$$

则称 $\sigma_i=\sqrt{\lambda_i}$ $(i=1,2,\cdots,r)$为A的正奇异值

$$(1).A \in C^{n\times n}\text{正规} \Leftrightarrow A^H A = AA^H \Leftrightarrow A = U\begin{pmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{pmatrix}U^H$$

$$\Rightarrow A^H A = U\begin{pmatrix} |\lambda_1|^2 & & & \\ & |\lambda_2|^2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & |\lambda_n|^2 \end{pmatrix}U^H \Rightarrow \sigma_i = \sqrt{|\lambda_i|^2} = |\lambda_i|$$

$$(2).A^H = A\text{且半正定} \Rightarrow A = U\begin{pmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{pmatrix}U^H\text{且}\lambda_i \ge 0(\forall i)$$

$$\Rightarrow \sigma_i = \lambda_i$$

定理 10 设 $A \in C_r^{m\times n}$, $\sigma_1,\sigma_2,\cdots,\sigma_r$ 是A的r个正奇异值，则存在酉矩阵 $U \in C^{m\times m}$和$V \in C^{n\times n}$,

使得
$$A = U\begin{bmatrix} D & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}V$$

其中, $D = diag(\sigma_1,\sigma_2,\cdots,\sigma_r)$.

(1) $A = U\begin{bmatrix} D & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}V \Rightarrow A^H A = V^H\begin{bmatrix} D^H D & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}V = V^H\begin{bmatrix} D^2 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}V$

$$\Rightarrow \| A \|_2 = \sqrt{r(A^H A)} = \sqrt{\max_i \sigma_i^2} = \max_i \sigma_i$$

(2) $A = U\begin{bmatrix} D & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}V \Rightarrow \| A \|_F = \| A \|_{m_2} = \left(\sum_{i=1}^{r}\sigma_i^2\right)^{1/2}$