电子科技大学研究生试卷

（考试时间：<u> 14:00 </u>至<u> 16:00 </u>，共 2 小时）

课程名称<u> 矩阵理论 </u> 教师________ 学时<u> 60 </u> 学分<u> 3 </u>

教学方式________ 考核日期<u> 2011 </u>年<u> 12 </u>月<u> 22 </u>日 成绩________

考核方式：________（学生填写）

学院________ 姓名________ 学号________

密……封……线……以……内……答……题……无……效

一． 选择题（每题 4 分，共 20 分）

1. 设 A 为 n 阶可逆矩阵，$r(A)$是其谱半径，$\|\bullet\|$是一种相容矩阵范数，则必有….（ ）

A. $\|A^{-1}\|\le 1/\|A\|$.　B. $\|A^n\|\le\|A\|^n$.　C. $\|A^n\|\ge\|A\|^n$.　D. $\|A\|\ge r\left(A^H A\right)$.

2. 设 $A\in C^{m\times n}$，U 为 n 阶酉矩阵，下列说法***错误***的是…………………………（ ）

A. $\|A\|_F=\|AU\|_F$　　B. A 和 AU 的特征值相同

C. A 和 AU 的正奇异值相同　　D. rank(A)=rank(AU)

3. 下列命题***错误***的是………………………………………………………………（ ）

A. 任何矩阵范数都存在与之相容的向量范数.

B. 正规矩阵一定是单纯矩阵.

C. 设 $A\in C_r^{m\times n}$ 的一个广义逆矩阵为 G，$A=BD$ 为 A 的最大秩分解，则 rank(DGB)=r.

D. 若存在某种算子范数$\|\bullet\|$使得$\|A\|<1$，则 A 为收敛矩阵，其中 A 为 n 阶方阵.

4.设 $A=\begin{bmatrix}\frac{1}{4} & 0\\ 0 & \frac{1}{2}\end{bmatrix}$，则 $\sum_{k=1}^{\infty}kA^{k-1}$ 为………… ………………………………......................（ ）

A. $\begin{bmatrix}\frac{1}{12} & 0\\ 0 & 2\end{bmatrix}$　B. $\begin{bmatrix}\frac{4}{9} & 0\\ 0 & \frac{1}{4}\end{bmatrix}$　C. $\begin{bmatrix}\frac{16}{9} & 0\\ 0 & 4\end{bmatrix}$　D. $\begin{bmatrix}\frac{8}{9} & 0\\ 0 & 2\end{bmatrix}$

5. 设 A 为 n 阶单纯矩阵，则下列结论***正确***的是……………………………………（ ）

A. A 有 n 个正交的特征向量　　B. $\|A\|_{m_2}^2=\sum_{i=1}^{n}|\lambda_i|^2$

C. $A^H=A$　　D. A 的特征值的几何重数之和为 n.

二．判断题，对的打 √，错得打×。（每题 4 分，共 20 分）

1. 设 $A\in C_n^{n\times n}$，且方程组$(A+B)x=0$ 有非零解，则对 $C^{n\times n}$ 中任意算子范数都有 $\left\|A^{-1}B\right\|\le 1$。…(　　)

2. 设 $A\in C_n^{m\times n}$，$\|\bullet\|$ 是 $C_n^{m\times n}$ 上某种相容矩阵范数，若 $\|A\|<1$，则 $\left\|A^{+}\right\|>1$。…………………..(　　)

3. 设 $A=\begin{bmatrix}\pi & 0 & 0\\ 0 & 0 & 2\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix}$，则 $\cos A=\begin{bmatrix}0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$。……………………………………………………... (　　)

4. 设 $A\in C^{m\times n}$ 是左可逆矩阵，A_L^{-1} 是 A 的一个左逆矩阵，则 $R(A)=N(E_m-AA_L^{-1})$。…….(　　)

5. **设** $A=\begin{bmatrix}0 & 1 & 0\\ 1 & 0 & 1\end{bmatrix}$，则 $\left\|A^{+}A\right\|_2=1$。………………………………………………………………(　　)

三．计算和证明（共 60 分）

1. 设 $A=(a_{ij})\in P^{m\times n}$，证明：$\|A\|=(m+n)\max\limits_{i,j}\left\{\left|a_{ij}\right|\right\},(1\le i\le m,1\le j\le n)$ 是矩阵范数，并且证明当 m=n 时是相容矩阵范数。（10 分）

2. 证明：矩阵 $A=\begin{pmatrix}2 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2^2} & \frac{1}{2^3} & \frac{1}{2^4}\\ -\frac{2}{3} & 4 & \frac{2}{3^2} & \frac{2}{3^3} & \frac{2}{3^4}\\ -\frac{3}{4} & -\frac{3}{4^2} & 6 & \frac{3}{4^3} & \frac{3}{4^4}\\ -\frac{4}{5} & -\frac{4}{5^2} & -\frac{4}{5^3} & 8 & \frac{4}{5^4}\\ -\frac{5}{6} & -\frac{5}{6^2} & -\frac{5}{6^3} & -\frac{5}{6^4} & 10\end{pmatrix}$ 的特征值为两两不相等的正实数.（10 分）

3. 已知矩阵 $A=\begin{pmatrix}0&2&0\\1&0&2\\0&1&0\end{pmatrix}, b=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$,

(1) 求矩阵 A 的最大秩分解; (2) 求 A^+; (3)判断方程组 $Ax=b$ 是否有解?

(4) 求方程组 $Ax=b$ 的最小范数解及通解或最小二乘解通解及其最佳逼近解?(指出所求的是哪种解) . (15 分)

4. 设 $A\in C_r^{m\times n}$ (r>0)的正奇异值为 $\sigma_1\ge\cdots\ge\sigma_r$， $B=\left[A^+, \ A^+\right]$ 的正奇异值为 $\eta_1\ge\cdots\ge\eta_r$，证明：$\sum_{i=1}^{r}\eta_i^2=2\sum_{i=1}^{r}\frac{1}{\sigma_i^2}$。（10 分）

学号＿＿＿＿ 姓名＿＿＿＿ 学院＿＿＿＿

密……封……线……以……内……答……题……无……效

5. 设 $A\in C^{n\times n}$, A 有 k 个相异特征值 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_k$，证明：$A$ 是正规矩阵的充要条件是存在 k 个矩阵 A_i 使其满足(1) $A_iA_j=O(i\neq j), A_iA_i=A_i$; (2) $\sum_{i=1}^{k}A_i=E_n$; (3) $A=\sum_{i=1}^{k}\lambda_iA_i$; (4) $A_i^H=A_i$. $(i=1,\cdots k)$。 (10 分)

6. 设 $A\in C_r^{m\times n}, Y\in C^{n\times r}, Z\in C^{r\times m}$，且 $ZAY=E_r$, 证明：$G=YZ$ 是 A 的自反广义逆矩阵. (5 分)

2011 级矩阵理论评分标准

一．　　选择题（每题 4 分，共 20 分）

B　B　A　C　D

二．　　判断题（每题 4 分，共 20 分）

X √ X　√　√

三．　　证明和计算

1. **证明是范数：**

（1）正定性：若 $\|A\| \neq 0$，有 $\|A\| = (m+n)\max\limits_{i,j}\{|a_{ij}|\} > 0$，A=0，$\|A\| = 0$；…… 2 分

（2）齐次性，$\|kA\| = (m+n)\max\limits_{i,j}\{|ka_{ij}|\} = |k|(m+n)\max\limits_{i,j}\{|a_{ij}|\} = |k|\cdot\|A\|$；…….…4 分

（3）三角不等式，

$\|A+B\| = (m+n)\max\limits_{i,j}\{|a_{ij}+b_{ij}|\} \leq (m+n)(\max\limits_{i,j}\{|a_{ij}|\} + \max\limits_{i,j}\{|b_{ij}|\}) = \|A\| + \|B\|$。…6 分

相容性：$\|AB\| = 2n\max\limits_{i,j}\left\{\left|\sum\limits_{k=1}^{n} a_{ik}b_{kj}\right|\right\} \leq 2n\max\limits_{i,j}\left\{\sum\limits_{k=1}^{n}|a_{ik}|\cdot|b_{kj}|\right\}$　…………………………8 分

$\leq 2n^2\max\limits_{i,j}\{|a_{ij}|\}\cdot\max\limits_{i,j}\{|b_{ij}|\} \leq 2n\max\limits_{i,j}\{|a_{ij}|\}\cdot 2n\max\limits_{i,j}\{|b_{ij}|\} = \|A\|\cdot\|B\|$…………..10 分

2. **证明：**

根据盖尔圆盘定理知矩阵 A 的 5 个行盖尔圆盘为

$|z-2i| \leq \left[1-\left(\frac{1}{i+1}\right)^4\right] < 1$，i=1,…,5（或具体写出 5 个圆盘）………………………… 8 分

因为圆心都是正数，并且相邻两个盖尔圆圆心距离为 2，故都是孤立的，实矩阵复特征值的出现都是共轭的，因此 5 个不同盖尔圆里面都有 1 个正特征值。………………..……..10 分

3. 解：（1）$A = BD = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$，不唯一。……………………………………..3 分

（2）$A^+ = D^H(DD^H)^{-1}(B^HB)^{-1}B^H = \frac{1}{5}\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \end{bmatrix}$…………………………….……..7 分

(3) $AA^+b = \frac{1}{5}\begin{bmatrix} 6 \\ 5 \\ 3 \end{bmatrix} \neq b$，不相容方程组，无解。……………………………….………..11 分

(4) $x = A^{+}b + (E - A^{+}A)u$ 为最小二乘解通解， $A^{+}b = \frac{1}{5}\begin{bmatrix}1\\3\\2\end{bmatrix}$ 为最佳逼近……………..15 分

4. 证明：矩阵 A 的奇异值分解 $A = U\begin{pmatrix}D & 0\\0 & 0\end{pmatrix}V$，其中 $D = diag(\sigma_1,\cdots,\sigma_r)$，……….2 分

则 $A^{+} = V^{H}\begin{pmatrix}D & 0\\0 & 0\end{pmatrix}^{+}U^{H} = V^{H}\begin{pmatrix}D^{-1} & 0\\0 & 0\end{pmatrix}U^{H}$，………………………………………….4 分

因为 $BB^{H} = 2A^{+}\left(A^{+}\right)^{H}$ ……………………………………………………... ….………….6 分

$= 2V^{H}\begin{pmatrix}D^{-2} & 0\\0 & 0\end{pmatrix}V = V^{H}\begin{pmatrix}2D^{-2} & 0\\0 & 0\end{pmatrix}V$，……………………………….………….8 分

则 B 的奇异值平方为 BB^{H} 的特征值，因此 $\sum_{i=1}^{r}\eta_i^2 = 2\sum_{i=1}^{r}\frac{1}{\sigma_i^2}$。……………….………..10 分

5.证明：必要性：因为 A 为正规矩阵，则 $\boldsymbol{A = Udiag(\lambda_1 E_{r_1}, \lambda_2 E_{r_2}, \cdots, \lambda_k E_{r_k})U^{H}}$，…2 分

$$\boldsymbol{A = (V_1, V_2, \cdots, V_k)\begin{bmatrix}\lambda_1 E_{r_1} & 0 & \cdots & 0\\ 0 & \lambda_2 E_{r_2} & \cdots & 0\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_k E_{r_k}\end{bmatrix}\begin{pmatrix}V_1^{H}\\V_2^{H}\\ \vdots\\ V_k^{H}\end{pmatrix} = \sum_{i=1}^{k}\lambda_i A_i}，\ \boldsymbol{(A_i = V_i V_i^{H})} \text{….4 分}$$

因为 $\boldsymbol{UU^{H} = U^{H}U = E_n}$，则 $\boldsymbol{V_i^{H}V_j = \begin{cases}E_{r_i} & j = i\\ 0 & j \neq i\end{cases}}$。

(1) $A_iA_j = O(i \neq j), A_iA_i = A_i$; (2) $\sum_{i=1}^{k}A_i = E_n$; (3) $A = \sum_{i=1}^{k}\lambda_i A_i$; (4) $A_i^{H} = A_i$. ……6 分

充分性： $\boldsymbol{AA^{H} = (\sum_{i=1}^{k}\lambda_i A_i)(\sum_{j=1}^{k}\lambda_j A_j)^{H} = \sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{k}\lambda_i\bar{\lambda}_j A_i A_j = \sum_{i=1}^{k}|\lambda_i|^2 A_i}$.……….……8 分

同理

$A^{H}A = \sum_{i=1}^{k}|\lambda_i|^2 A_i = AA^{H}$.………………………………………………………...……..10 分

6. 证明：GAG=YZAYZ=YZ=G, 矩阵 A 为 G 的广义逆矩阵，………………….……….…2 分

$r = rank(A) \geq rank(G) \geq rank(Z) \geq rank(E_r) = r$，……………………………..…………4 分

故 A 为 G 的自反广义逆，AGA=A，互为自反广义逆，得证。…………………..……….5 分