

Lecture 8-2 Time-Frequency Analysis

小波分析

一、认识小波

1、学习小波变换需要的基础知识

一个信号从数学的角度来看，它是一个自变量为时间 t 的函数 $f(t)$ 。因为信号是能量有限的，即

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |f(t)|^2 dt < E \quad (1.1)$$

满足条件(1.1)的所有函数的集合就形成能量有限空间 $L^2(R)$ 。

二维信号（例如图像）同样是能量有限的。实际上任何一幅数字图像都是从真实的场景中经过采样和量化处理后得到的。从数学上看，图像是定义在 $L^2(R^2)$ 上的函数。

➤ 需要 $L^2(\mathbf{R})$ 空间的基础知识

从数学的角度讲，小波是构造函数空间正交基的基本单元，是在能量有限空间 $L^2(\mathbf{R})$ 上满足允许条件的函数，这样认识小波需要 $L^2(\mathbf{R})$ 空间的基础知识，特别是内积空间中空间分解、函数变换等的基础知识。

➤ 需要傅立叶变换、傅立叶级数、滤波器等的基础知识

从信号处理的角度讲，小波(变换)是强有力的时频分析(处理)工具，是在克服傅立叶变换缺点的基础上发展而来的，所以从信号处理的角度认识小波，需要傅立叶变换、傅立叶级数、滤波器等的基础知识。

2、 $L^2(\mathbf{R})$ 空间的正交分解和变换

对 $f(t) \in L^2(\mathbf{R})$ ，在 $L^2(\mathbf{R})$ 上存在一组标准正交基 $g_i(t)$ ， $t \in \mathbf{R}$ ， $i=1,2,\dots$ 使得

$$f(t) = \sum_{i=1}^{+\infty} c_i g_i(t) \quad (1.2)$$

其中

$$c_i = \langle f(t), g_i(t) \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) g_i(t) dt$$
$$\langle g_k(t), g_l(t) \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} g_k(t) g_l(t) dt = \delta_{kl}, \quad k, l \in \mathbf{Z} \quad (1.3)$$

对于给定信号 $f(t)$ ，关键是选择合适的基 $g_i(t)$ ，使得 $f(t)$ 在这组基下的表现呈现出我们需要的特性，但是如果某一个基不满足要求，可通过变换将函数转换到另一个基下表示，才能得到我们需要的特性。常用的变换有：

(1) K-L变换（Karhunen-Loeve Transform）

(2) Walsh变换

(3) 傅立叶变换

(4) 小波变换

基底不同得到的变换也不同。

在信号处理中，有两类非常重要的变换：

傅立叶变换和小波变换。

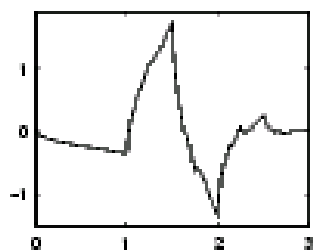
目前，可简单地将小波理解为满足以下两个条件的特殊信号：

(1) 小波必须是振荡的；

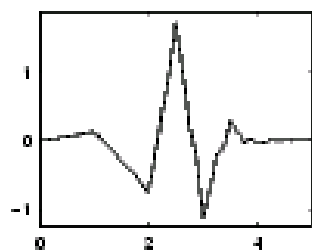
(2) 小波的振幅只能在一个很短的一段区间上非零，即是局部化的。

3、一些著名的小波:

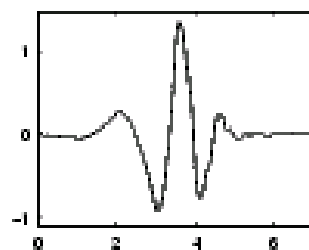
(1) **Daubechies** (英格丽·多贝西) 小波



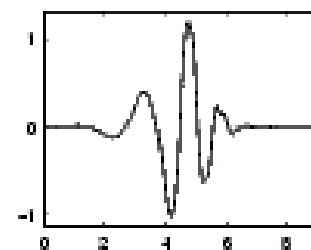
db2



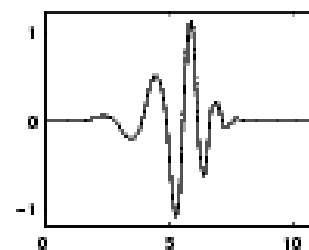
db3



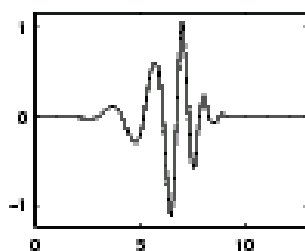
db4



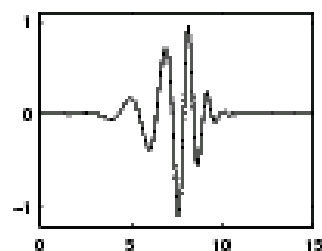
db5



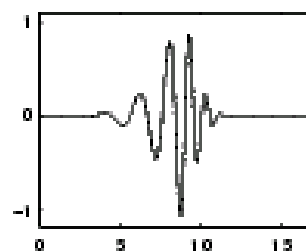
db6



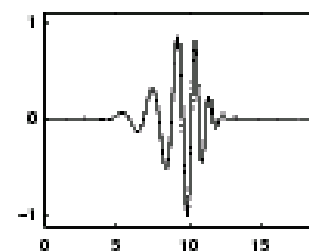
db7



db8

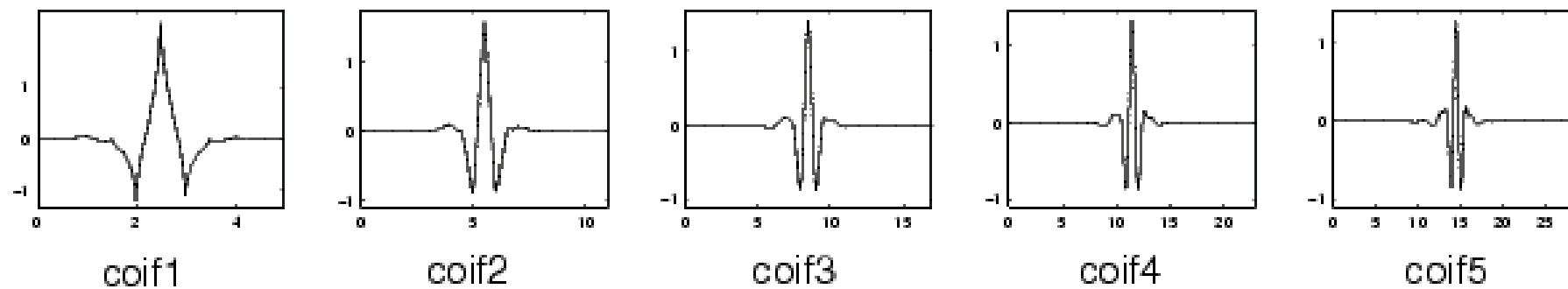


db9

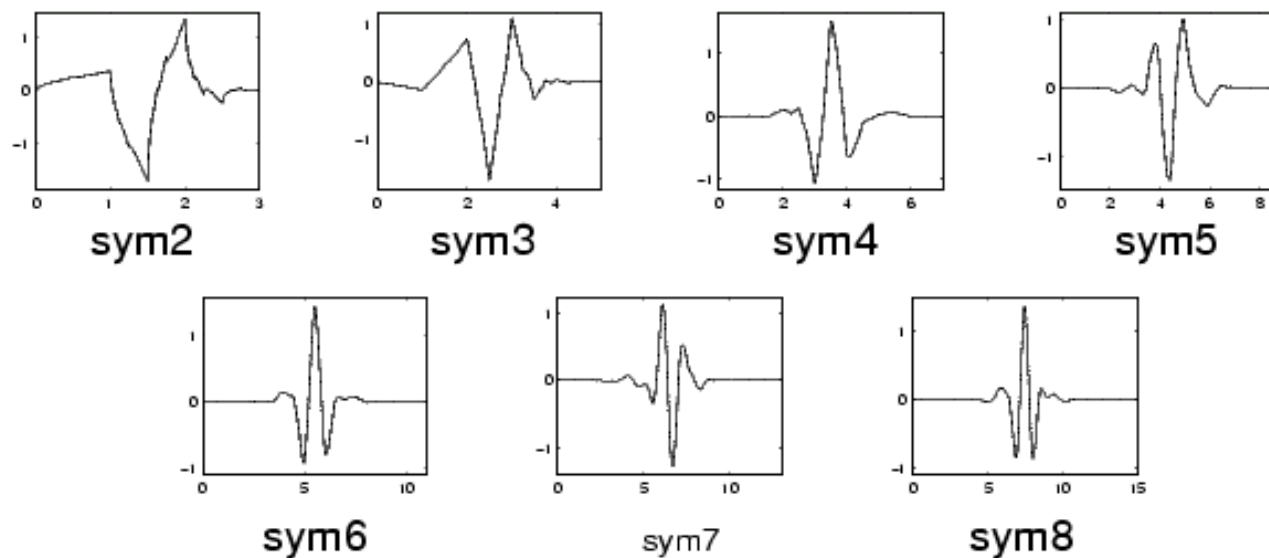


db10

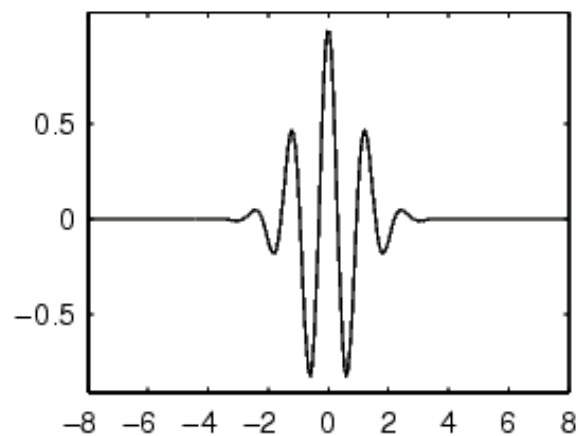
(2) Coiflets小波



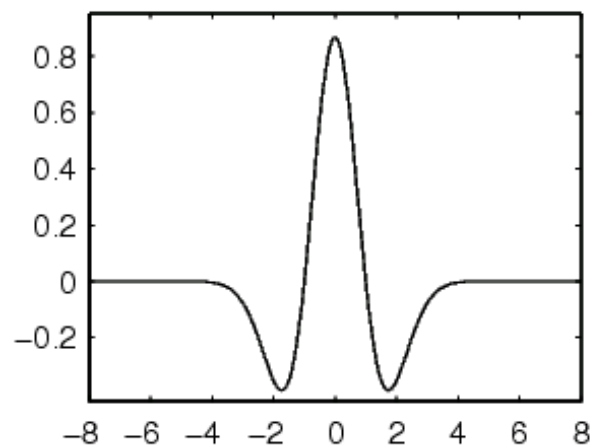
(3) Symlets小波



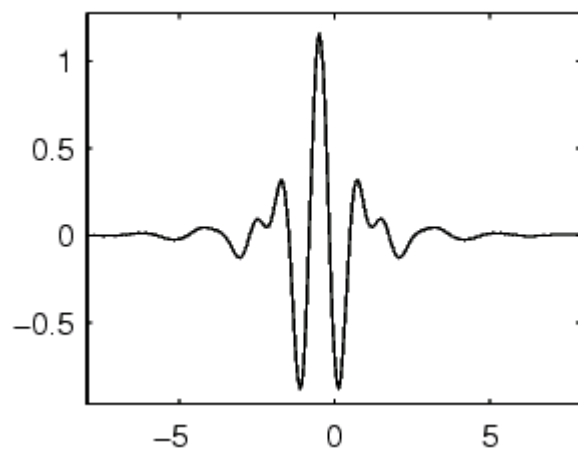
(4) Morlet小波



(5) Mexican Hat小波

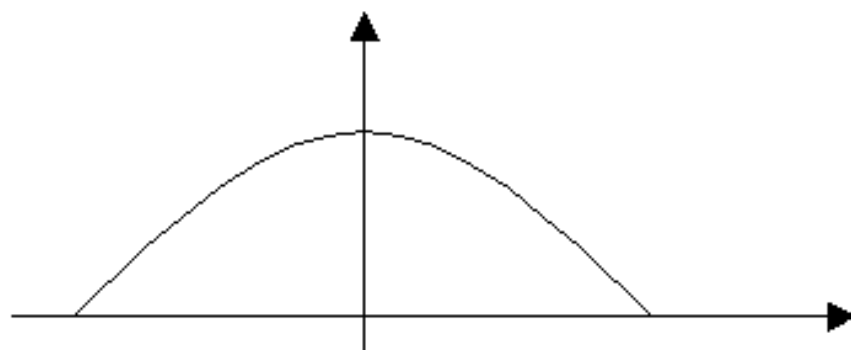
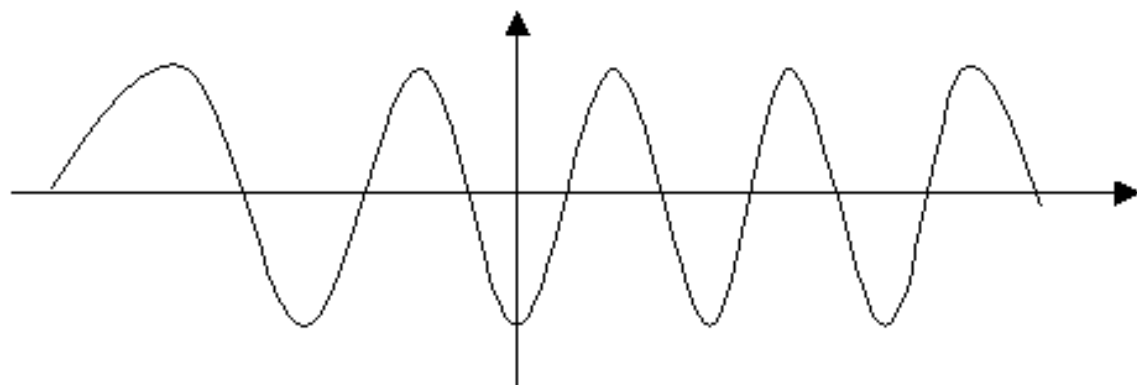


(6) Meyer小波

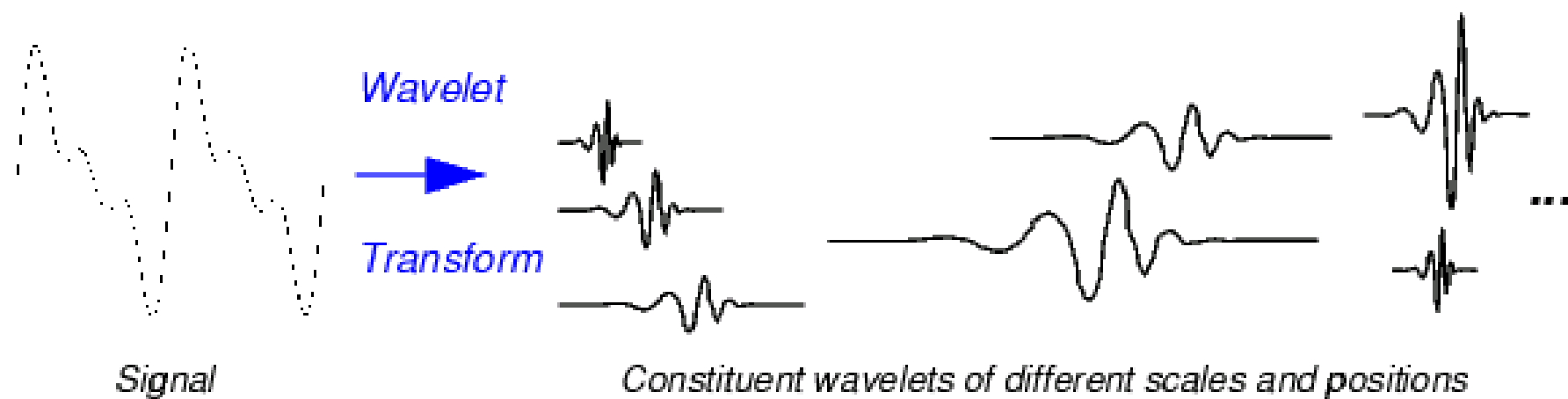
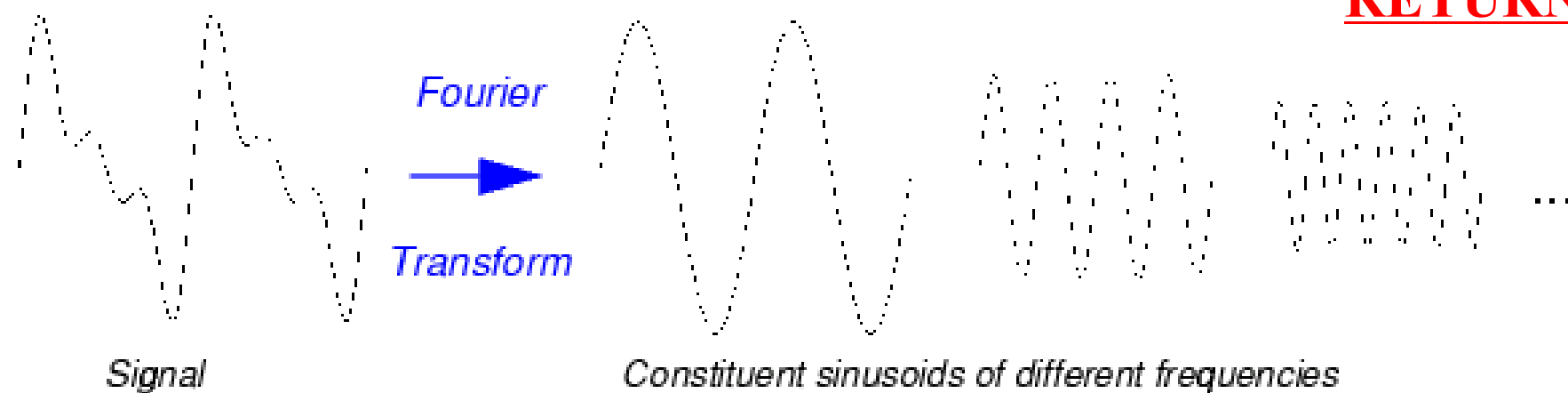


每个小波的波形是不一样的，各个小波的对称性、正则性以及紧支撑性都不一样

不是小波的例子



RETURN



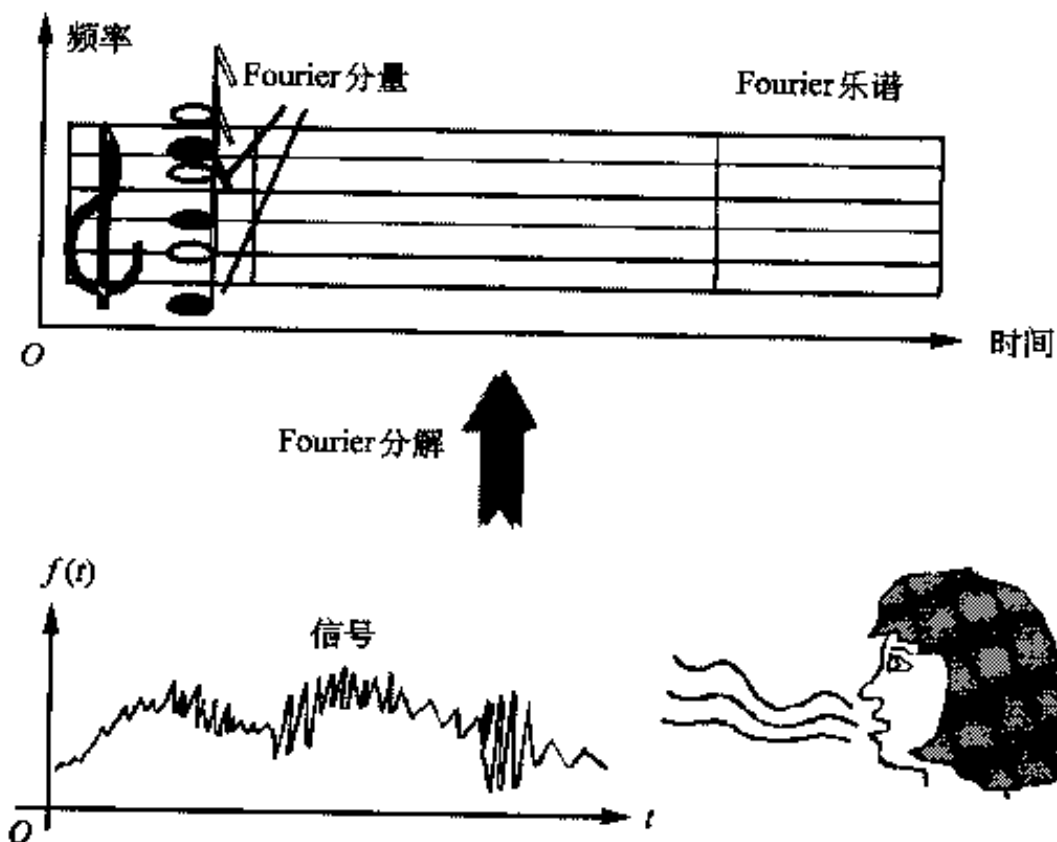
3、傅立叶变换的不足

有了傅立叶变换，我们可以很容易地将时域信号 $f(t)$ 转换到频域 $\hat{f}(\omega)$ 上，于是信号的频率特性一目了然，并且与傅立叶级数一样，傅立叶变换将一段信号的主要低频能量都集中在频率信号的前面几项，这种能量集中性有利于进一步的处理。在过去**200**年里，傅立叶分析在科学与工程领域发挥了巨大的作用，但傅立叶分析也有不足，主要表现在以下两点：

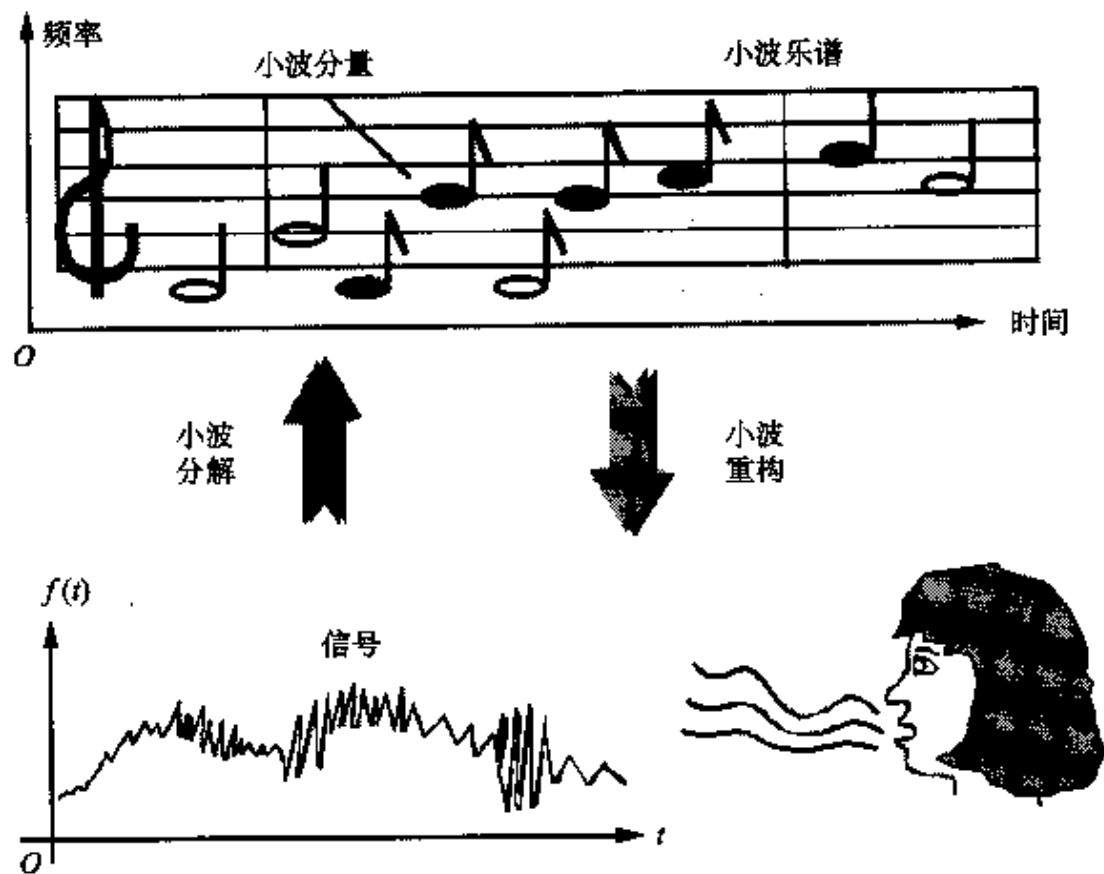
- 傅立叶分析不能刻画时域信号的局部特性；
 - 傅立叶分析对非平稳信号的处理效果不好。
- 下面通过例子来说明这两点。

例：一个歌声信号

歌声是一种声音震荡的波函数，其傅立叶变换就是将这个波函数转化成某种乐谱。但遗憾地是，傅立叶变换无法反映信号在哪一时刻有高音，在哪一时刻有低音，因此结果是所有的音符都挤在了一起，如图所示。



小波变换有效地克服了傅立叶变换的这一缺点，信号变换到小波域后，小波不仅能检测到高音与低音，而且还能将高音与低音发生的位置与原始信号相对应，如图所示。



因此我们需要这样一个数学工具：既能在时域很好地刻画信号的局部性，同时也能在频域反映信号的局部性，这种数学工具就是“小波”。从函数分解的角度，希望能找到另外一个小波基函数 $\psi(t)$ 来代替 $\sin\omega t$ 。 $\psi(t)$ 应满足以下三个特性：

- 任何复杂的信号 $f(t)$ ，都能由一个母函数 $\psi(t)$ 经过伸缩和平移产生的基底的线性组合表示；
- 信号用新的基展开的系数要能反映出信号在时域上的局部化特性；
- 新的基函数 $\psi(t)$ 及其伸缩平移要比三角基 $\sin\omega t$ 更好地匹配非平稳信号。

历史上，**Haar**第一个找到了这样一个基函数，这就是非常著名但又及其简单的**Haar**小波。

$$\psi(t) = \begin{cases} 1 & t \in \left[0, \frac{1}{2}\right) \\ -1 & t \in \left[\frac{1}{2}, 1\right) \end{cases} \quad (1.11)$$

数学上已经证明：

$$\psi_{j,k}(t) = 2^{j/2} \psi(2^j t - k) \quad (j, k \in \mathbb{Z}) \quad (1.12)$$

构成 $L^2(\mathbb{R})$ 的一个规范正交基。故任何一个能量有限信号 $f(t) \in L^2(\mathbb{R})$ 可以分解为

小波级数、信号的小波逼近

$$f(t) = \sum_{j \in \mathbb{Z}} \sum_{k \in \mathbb{Z}} c_{j,k} \psi_{j,k}(t) \quad (1.13)$$

$$\text{其中 } c_{j,k} = \langle f(t), \psi_{j,k}(t) \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \psi_{j,k}(t) dt \quad (1.14)$$

二、小波变换的定义及特点

定义1 函数 $\psi(t) \in L^2(R)$ 称为基本小波，如果它满足以下的“约束”条件：

$$C_{\psi} = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{|\hat{\psi}(\omega)|}{|\omega|} d\omega < \infty \quad (2.1)$$

如果 $\hat{\psi}(\omega)$ 是连续的，易得：

$$\hat{\psi}(0) = 0 \Leftrightarrow \int_{-\infty}^{+\infty} \psi(t) dt = 0 \quad (2.2)$$

$\psi(t)$ 又称为母小波，因为其伸缩、平移可构成 $L^2(R)$ 的一个标准正交基：

$$\psi_{a,b}(t) = a^{-\frac{1}{2}} \psi\left(\frac{t-b}{a}\right), \quad a \in R^+, b \in R \quad (2.3)$$

同傅立叶变换一样，连续小波变换可定义为函数与小波基的内积：

$$(W_\psi f)(a,b) = \langle f(t), \psi_{a,b}(t) \rangle \quad (2.4)$$

将 a, b 离散化，令

$$a = 2^{-j}, \quad b = 2^{-j} k, \quad j, k \in Z \quad (2.5)$$

可得离散小波变换：

离散小波变换:

$$(DW_{\psi}f)(j,k) = \langle f(t), \psi_{j,k}(t) \rangle \quad (2.6)$$

$$\psi_{j,k}(t) = 2^{\frac{j}{2}} \psi(2^j t - k), \quad j, k \in \mathbb{Z} \quad (2.7)$$

总结: **小波**即小区域的波, 是一种特殊的长度有限、平均值为零的波形。它有两个特点: 一是“小”, 即在时域具有紧支集或近似紧支集; 二是正负交替的“波动性”, 也即支流分量为零。

傅立叶分析是将信号分解成一系列不同频率的正弦波的叠加, 同样小波分析是将信号分解为一系列小波函数的叠加, 而这些小波函数都是由一个母小波函数经过平移和尺度伸缩得来的。

小波分析优于傅立叶分析的地方是，它在时域和频域同时具有良好的局部化性质。而且由于对高频成分采用逐渐精细的时域或频域取样步长，从而可以聚焦到对象的任何细节，所以被称为“数学显微镜”。小波分析广泛应用与信号处理、图像处理、语音识别等领域。

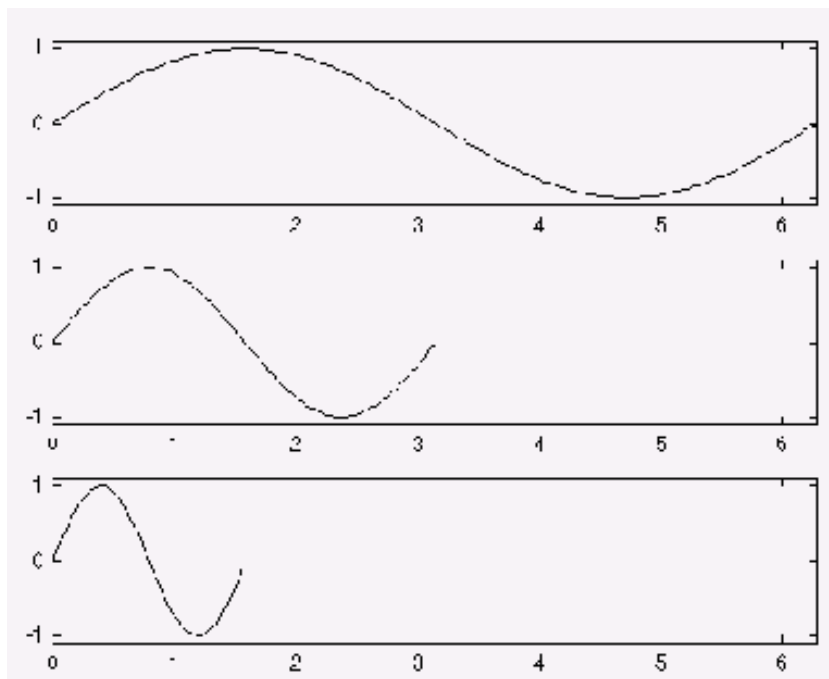
可以这样理解小波变换的含义：打个比喻，我们用镜头观察目标信号 $f(t)$ ， $\psi(t)$ 代表镜头所起的作用。 b 相当于使镜头相对于目标平行移动， a 的作用相当于镜头向目标推进或远离。由此可见，小波变换有以下特点：

- 多尺度/多分辨的特点，可以由粗及细地处理信号；
- 可以看成用基本频率特性为 $\Psi(\omega)$ 的带通滤波器在不同尺度 a 下对信号做滤波。
- 适当地选择小波，使 $\psi(t)$ 在时域上为有限支撑， $\Psi(\omega)$ 在频域上也比较集中，就可以使WT在时、频域都具有表征信号局部特征的能力。

小波变换的思想来源于伸缩和平移方法。

❖ 尺度伸缩

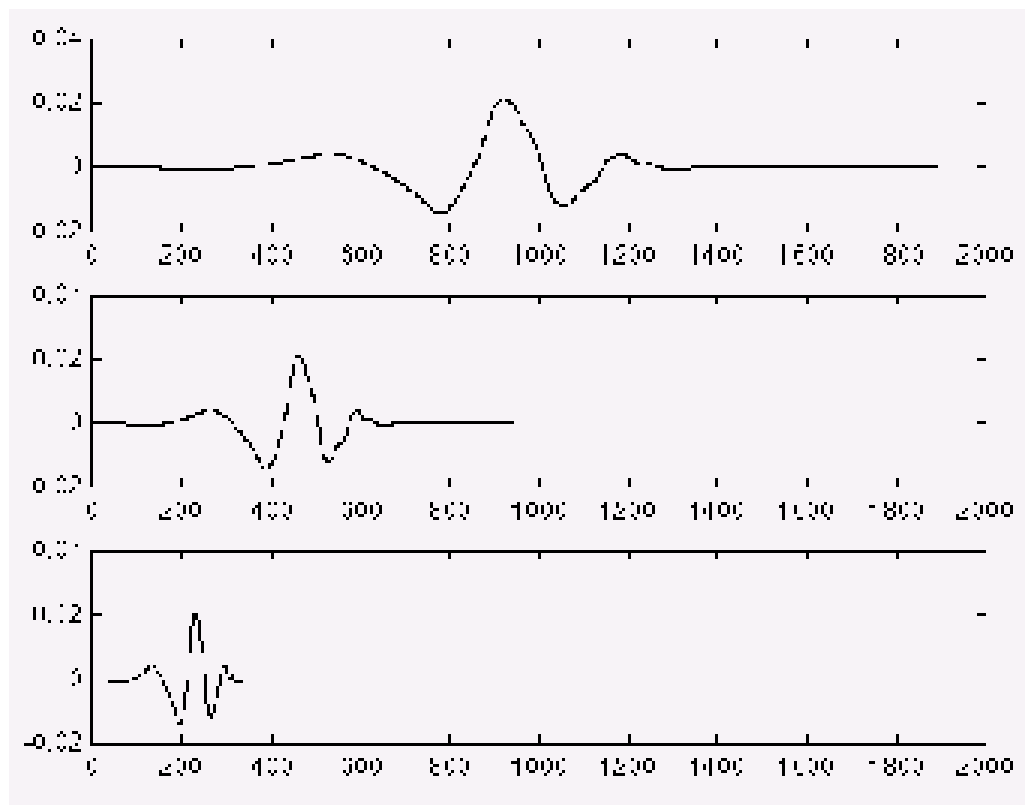
对波形的尺度伸缩就是在时间轴上对信号进行压缩和伸展，如图所示。



$$f(t) = \sin(t); a = 1$$

$$f(t) = \sin(2t); a = \frac{1}{2}$$

$$f(t) = \sin(4t); a = \frac{1}{4}$$



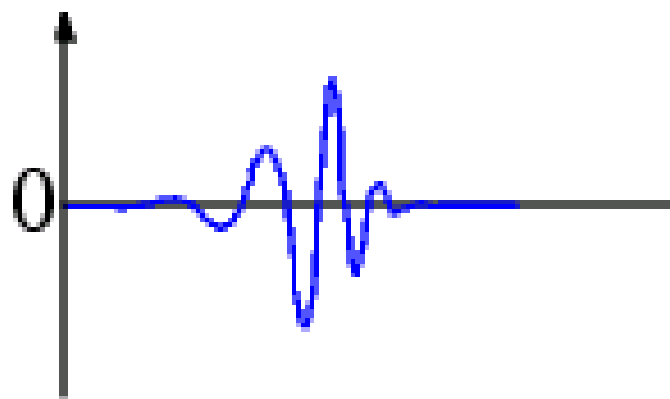
$$f(t) = \psi(t); a = 1$$

$$f(t) = \psi(2t); a = \frac{1}{2}$$

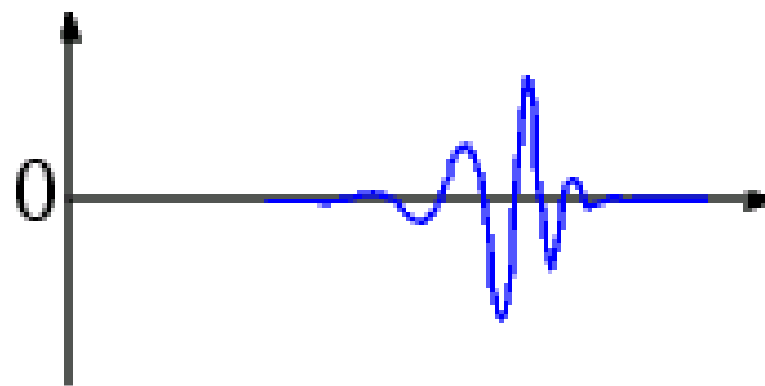
$$f(t) = \psi(4t); a = \frac{1}{4}$$

❖ 时间平移

时间平移就是指小波函数在时间轴上的波形平行移动，如图所示。



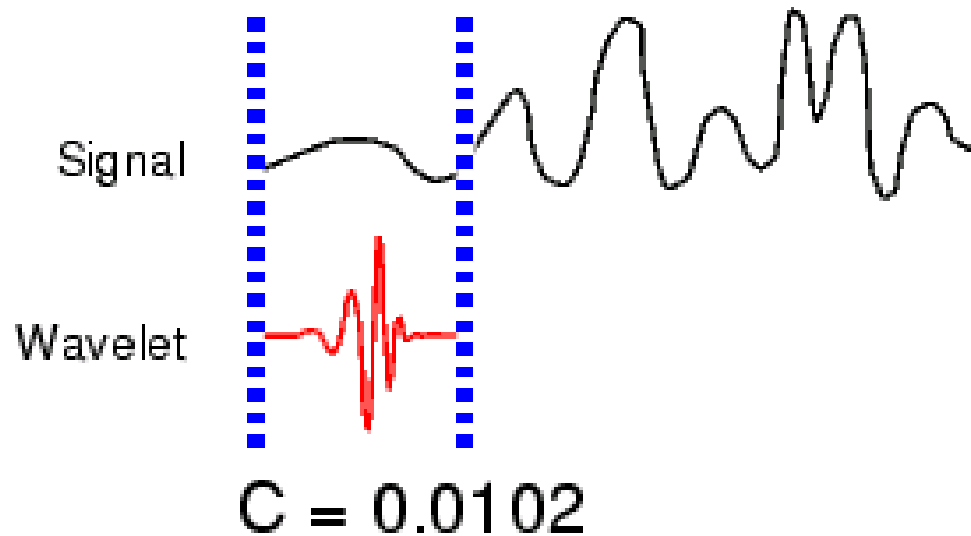
Wavelet function
 $\psi(t)$



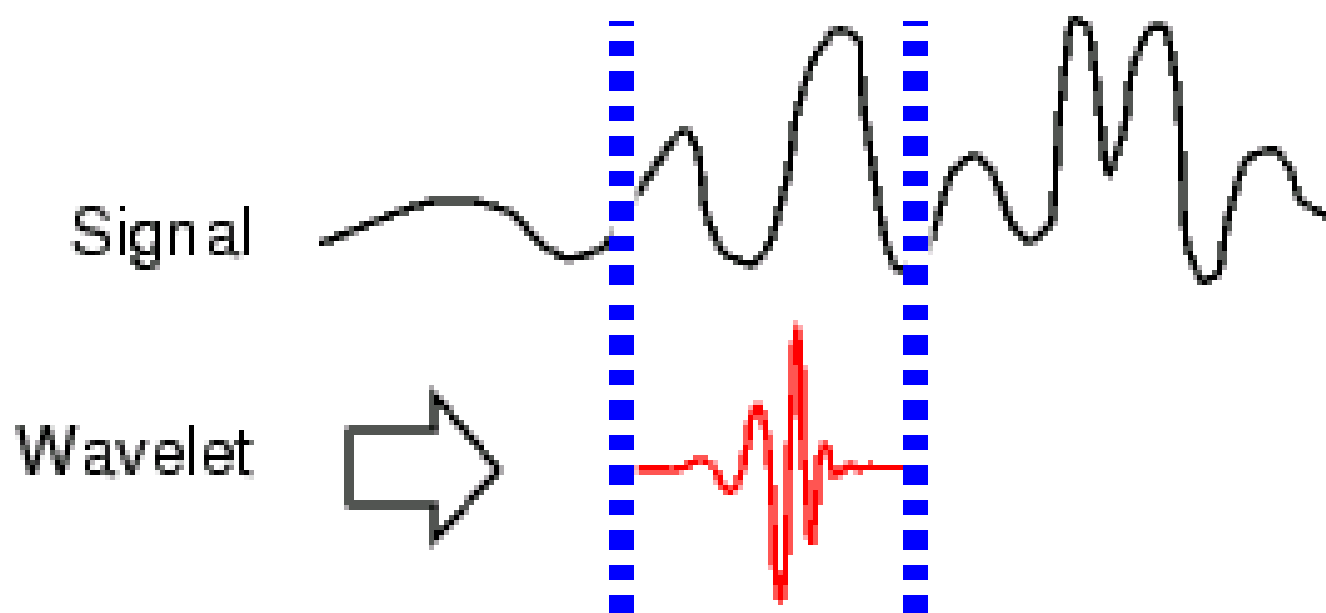
Shifted wavelet function
 $\psi(t-k)$

小波运算的基本步骤:

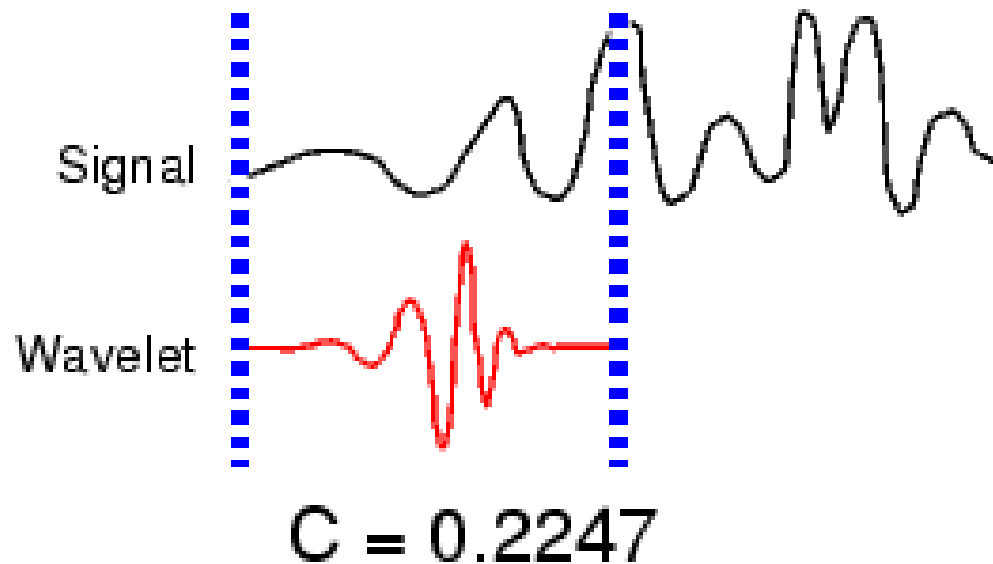
- (1) 选择一个小波函数，并将这个小波与要分析的信号起始点对齐；
- (2) 计算在这一时刻要分析的信号与小波函数的逼近程度，即计算小波变换系数 C ， C 越大，就意味着此刻信号与所选择的小波函数波形越相近，如图所示。



(3) 将小波函数沿时间轴向右移动一个单位时间，然后重复步骤(1)、(2)求出此时的小波变换系数 C ，直到覆盖完整个信号长度，如图所示；

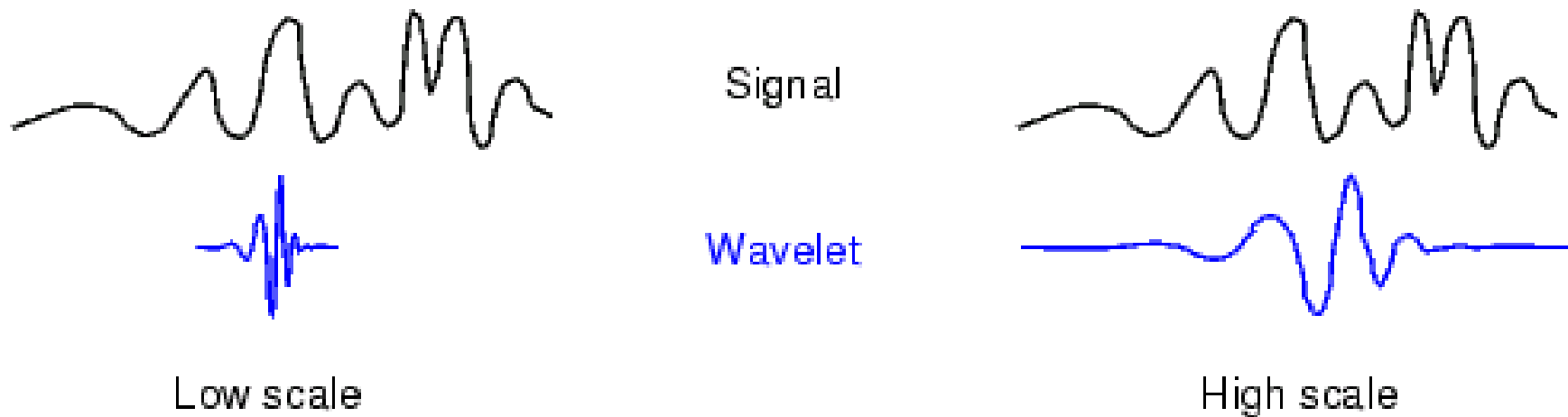


(4) 将所选择的小波函数尺度伸缩一个单位，然后重复步骤(1)、(2)、(3)，如图所示；



(5) 对所有的尺度伸缩重复步骤(1)、(2)、(3)、(4)。

❖ 尺度与频率的关系

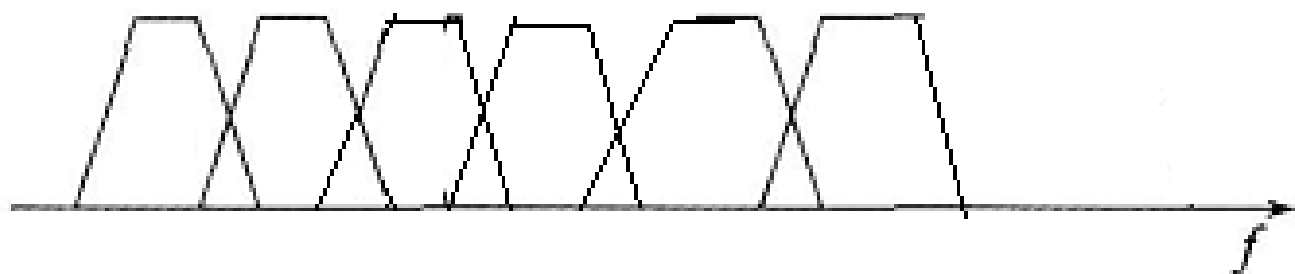


尺度与频率的关系如下：

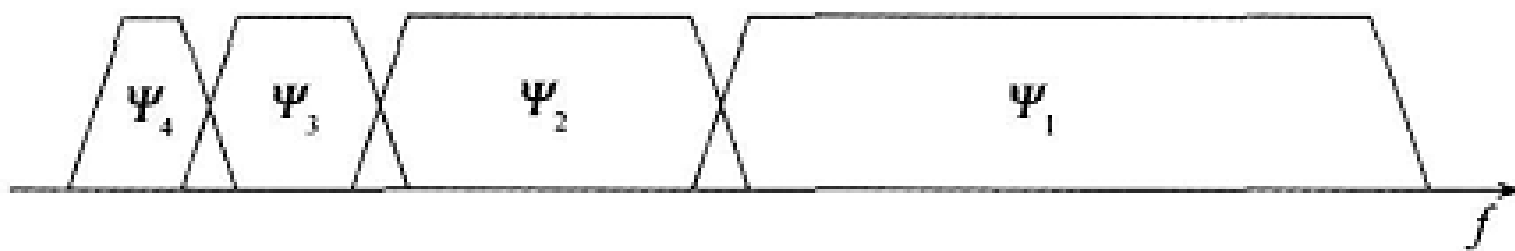
- 小尺度 a → 压缩的小波 → 快速变换的细节 → 高频部分
- 大尺度 a → 拉伸的小波 → 缓慢变换的粗部 → 低频部分

STFT与小波变换的区别:

STFT



小波



谢谢！