§1 单边逆矩阵

程光辉

2019 年 12 月 2 日

定义 1 设 $A \in \mathbf{C}^{m\times n}$，如果有 $G \in \mathbf{C}^{n\times m}$，使得

$$GA = E_n,$$

则称 G 为 A 的左逆矩阵，记为 $G = A_L^{-1}$.

如果有 $G \in \mathbf{C}^{n\times m}$，使得

$$AG = E_m,$$

则称 G 为 A 的右逆矩阵，记为 $G = A_R^{-1}$.

定理 1 设 $A \in \mathbf{C}^{m\times n}$，则

(1) A 左可逆的充要条件是 A 为列满秩矩阵;

(2) A 右可逆的充要条件是 A 为行满秩矩阵.

证明： (1) **充分性**：因 A 为列满秩矩阵，则 A^HA 为满秩矩阵，进而

$$\left(A^HA\right)^{-1}A^HA = GA = E_n,$$

其中 $G = \left(A^HA\right)^{-1}A^H$ 为矩阵 A 的左逆.

必要性：因为 $A_L^{-1}A = E_n$，则

$$\mathrm{rank}(A) \geq \mathrm{rank}(A_L^{-1}A) = \mathrm{rank}(E_n) = n,$$

因此，$\mathrm{rank}(A) = n$，即 A 为列满秩矩阵.

推论 1 设 $A \in \mathbf{C}^{m\times n}$，则

(1) A 左可逆的充要条件是 $\mathrm{N}(A) = \{0\}$;

(2) A 右可逆的充要条件是 $\mathrm{R}(A) = \mathbf{C}^m$.

证明： (1) **充分性：**因为 $\mathrm{N}(\boldsymbol{A})=\{\boldsymbol{0}\}$，则 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 只有零解，系数矩阵列满秩，即 $\boldsymbol{A}$ 左可逆的.

必要性： $\boldsymbol{A}$ 左可逆，则 $\boldsymbol{A}_L^{-1}\boldsymbol{A}=\boldsymbol{E}$，对 $\forall \boldsymbol{x}\in\mathrm{N}(\boldsymbol{A})$，有

$$\boldsymbol{x}=\boldsymbol{Ex}=\boldsymbol{A}_L^{-1}\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{A}_L^{-1}\boldsymbol{0}=\boldsymbol{0},$$

即 $\mathrm{N}(\boldsymbol{A})=\{\boldsymbol{0}\}$.

初等变换求左 (右) 逆矩阵：

(1) $\boldsymbol{P}\begin{bmatrix}\boldsymbol{A} & \boldsymbol{E}_m\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{E}_n & \boldsymbol{G}\\ \boldsymbol{O} & \star\end{bmatrix}$;

(2) $\begin{bmatrix}\boldsymbol{A}\\ \boldsymbol{E}_n\end{bmatrix}\boldsymbol{Q}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{E}_m & \boldsymbol{O}\\ \boldsymbol{G} & \star\end{bmatrix}$.

例 1 设矩阵 $\boldsymbol{A}$ 为

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1 & -2\\ 0 & 1\\ 0 & 0\end{bmatrix},$$

求 $\boldsymbol{A}$ 的一个左逆矩阵 $\boldsymbol{A}_L^{-1}$.

解：经行初等变换，有

$$\begin{bmatrix}\boldsymbol{A} & \boldsymbol{E}_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & -2 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1 & 0 & 1 & 2 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix},$$

因此，$\boldsymbol{A}_L^{-1}=\begin{bmatrix}1 & 2 & 0\\ 0 & 1 & 0\end{bmatrix}$.

例 2 设矩阵 $\boldsymbol{A}$ 为

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1 & 2 & -1\\ 0 & -1 & 2\end{bmatrix},$$

求 $\boldsymbol{A}$ 的一个右逆矩阵 $\boldsymbol{A}_R^{-1}$.

解：经列初等变换，有

$$\begin{bmatrix}\boldsymbol{A}\\ \boldsymbol{E}_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 2 & -1\\ 0 & -1 & 2\\ 1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & -1 & 2\\ 1 & -2 & 1\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 1 & 2 & -3\\ 0 & -1 & 2\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix},$$

因此，$A_R^{-1}=\begin{bmatrix}1 & 2\\ 0 & -1\\ 0 & 0\end{bmatrix}$.

定理 2 设 $A\in C^{m\times n}$ 是左可逆矩阵，则

$$G=\begin{bmatrix}A_1^{-1}-BA_2A_1^{-1} & B\end{bmatrix}P$$

是 A 的左逆矩阵，其中 $B\in C^{n\times(m-n)}$ 的任意矩阵，行初等变换矩阵 P 满足 $PA=\begin{bmatrix}A_1\\ A_2\end{bmatrix}$，$A_1$ 是 n 阶可逆矩阵.

证明： 直接验证，即

$$GA=\begin{bmatrix}A_1^{-1}-BA_2A_1^{-1} & B\end{bmatrix}\begin{bmatrix}A_1\\ A_2\end{bmatrix}=E_n.$$

定理 3 设 $A\in C^{m\times n}$ 是右可逆矩阵，则

$$G=Q\begin{bmatrix}A_1^{-1}-A_1^{-1}A_2D\\ D\end{bmatrix}$$

是 A 的右逆矩阵，其中 $D\in C^{(n-m)\times m}$ 的任意矩阵，列初等变换矩阵 Q 满足 $AQ=\begin{bmatrix}A_1 & A_2\end{bmatrix}$，$A_1$ 是 m 阶可逆矩阵.

定理 4 设 $A\in C^{m\times n}$ 是左可逆矩阵，A_L^{-1} 是 A 的左逆矩阵，则方程组 $Ax=b$ 有解的充要条件是

$$(E_m-AA_L^{-1})b=0. \tag{1}$$

若 (1) 成立，则方程组 $Ax=b$ 有唯一解

$$x=\left(A^HA\right)^{-1}A^Hb.$$

证明： (必要性) 设 x_0 是方程组 $Ax=b$ 的解，则

$$(AA_L^{-1})b=(AA_L^{-1})(Ax_0)=A(A_L^{-1}A)x_0=AE_nx_0=Ax_0=b,$$

进而有 $(E_m-AA_L^{-1})b=0$.

(充分性) 因为 $(E_m-AA_L^{-1})b=0$，故有 $AA_L^{-1}b=b$，即方程组 $Ax=b$ 有解 $A_L^{-1}b$.

(唯一性) 设 x_0，x_1 是 $Ax=b$ 的解，则 $A(x_0-x_1)=b-b=0$. 又因为 A 为列满秩矩阵，故只有零解，即 $x_0=x_1$.

定理 5 设 $\boldsymbol{A} \in \mathbf{C}^{m\times n}$ 是右可逆矩阵，则方程组 $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{b}$ 对任何 $\boldsymbol{b} \in \mathbf{C}^{m}$ 都有解，若 $\boldsymbol{b} \neq \mathbf{0}$，则方程组的解可表示为

$$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{A}_R^{-1}\boldsymbol{b}.$$

证明： 因为 $\boldsymbol{b} = \boldsymbol{E}_m\boldsymbol{b} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{A}_R^{-1}\boldsymbol{b} = (\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}_R^{-1})\boldsymbol{b}$，故 $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{A}_R^{-1}\boldsymbol{b}$ 是 $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{b}$ 的解.