3-3 向量和矩阵范数

向量范数与矩阵范数

矩阵的条件数概念

Hilbert矩阵的条件数

一、向量的范数

定义1 设 R^n是n维向量空间,如果对任意$x\in R^n$,都有一个实数与之对应,且满足如下三个条件:

(1)正定性: $\|x\|\geq 0$,且$\|x\|=0$ <=> $x=0$;

(2)齐次性: $\|\lambda x\|=|\lambda|\,\|x\|$ λ为任意实数

(3)三角不等式: $\|x+y\|\leq\|x\|+\|y\|$ $(y\in R^n)$

则称$\|x\|$为向量x的范数 .

注: 向量范数是向量长度概念的推广.例如

$$\sqrt{\sum_{i=1}^{n}x_i^2}=\sqrt{x_1{}^2+x_2{}^2+\cdots+x_n{}^2}$$

是向量 x 的范数。

例1. 设 $x=(x_1, x_2, \cdots, x_n)^T \in R^n$，则

$$(1)\ \| x \|_1 = \sum_{i=1}^{n} | x_i |$$ ⇦ $1-$范数

$$(2)\ \| x \|_2 = (\sum_{i=1}^{n} | x_i |^2)^{1/2}$$ ⇦ $2-$范数

$$(3)\ \| x \|_\infty = \max_{1 \le i \le n} | x_i |$$ ⇦ 无穷范数

例2. 证明 $\|x\|_2$ 是 R^n 上的一种范数

先证明柯西不等式: $|x^Ty| \le \|x\|_2 \cdot \|y\|_2$

对任意实数λ, 有$(x-\lambda y)^T(x-\lambda y) \ge 0$ →

$$x^Tx - 2\lambda x^Ty + \lambda^2 y^Ty \ge 0$$

判别式

$$|x^Ty|^2 - (x^Tx)(y^Ty) \le 0$$

→ $|x^Ty| \le \|x\|_2 \cdot \|y\|_2$

$$\|x+y\|_2^2=(x+y)^T(x+y)$$
$$=x^Tx+x^Ty+y^Tx+y^Ty$$
$$\le\|x\|_2^2+2|x^Ty|+\|y\|_2^2$$
$$\le\|x\|_2^2+2\|x\|_2\|y\|_2+\|y\|_2^2$$

$\|x+y\|_2\le\|x\|_2+\|y\|_2$ （三角不等式成立）

$\|x\|_2=\sqrt{x_1^{\ 2}+x_2^{\ 2}+\cdots+x_n^{\ 2}}\ge 0$ （正定性成立）

$$\|\lambda x\|_2=\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(\lambda x_i)^2}=|\lambda|\sqrt{\sum_{i=1}^{n}x_i^2}=|\lambda|\cdot\|x\|_2$$

（齐次性成立）

正交变换下向量2-范数不变性

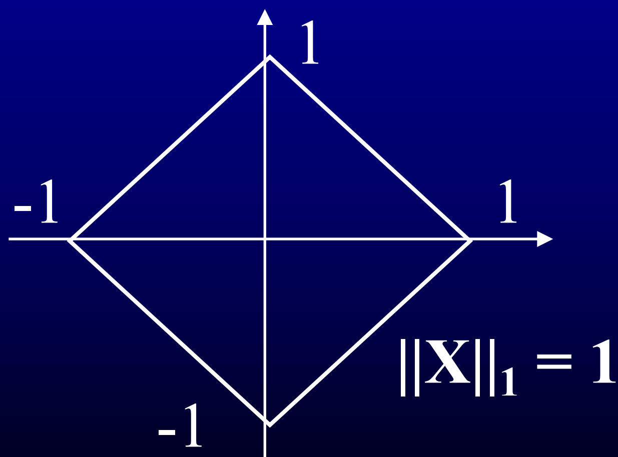
$$Q^TQ = I\,,\ y = Qx$$

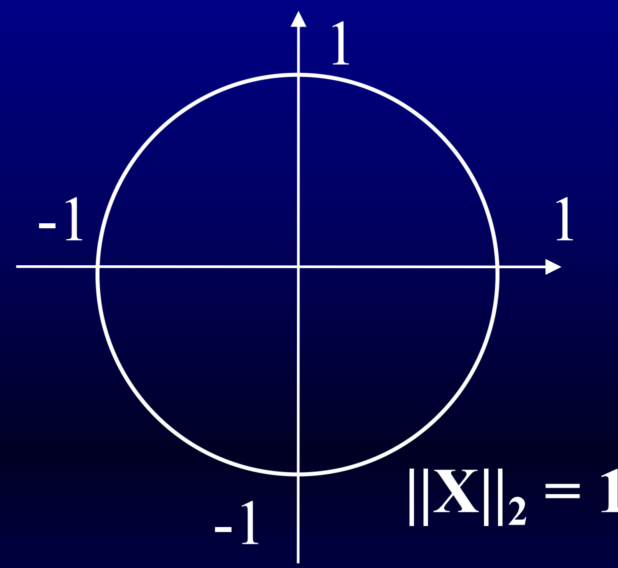
➔ $\|y\|_2 = \|x\|_2$

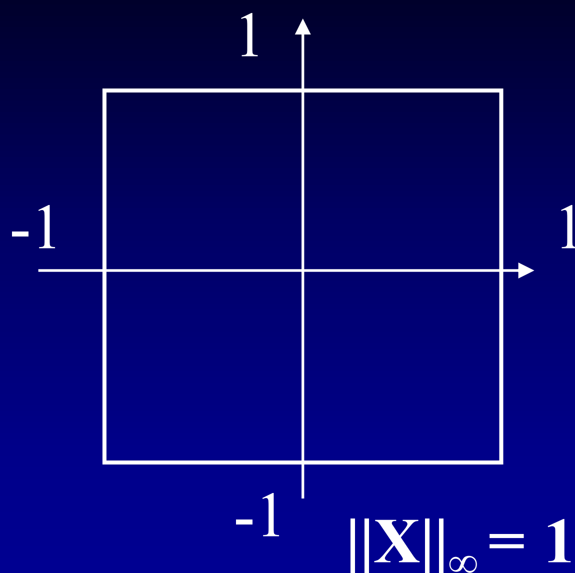
$$y^T y = (Qx)^T (Qx) = x^T Q^T Q x = x^T x$$

➔ $\|y\|_2 = \sqrt{y^T y} = \sqrt{x^T x} = \|x\|_2$

例3. 范数意义下的单位向量: $X=[x_1,\ x_2]^T$







$$\| X \|_1 = | x_1 | + | x_2 |$$

$$\| X \|_2 = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}$$

$$\| X \|_\infty = \max\{| x_1 |, | x_2 |\}$$

例4. 设$x=(x_1, x_2, \cdots, x_n)^T$,证明

$$\| x \|_\infty \le \| x \|_1 \le n \| x \|_\infty$$

证明:
$$\| x \|_1 = | x_1 | + | x_2 | + \cdots + | x_n |$$

$$\max_{1\le k\le n} | x_k | \le \| x \|_1 \le n \times \max_{1\le k\le n} | x_k |$$

所以
$$\| x \|_\infty \le \| x \|_1 \le n \| x \|_\infty$$

定义 2 设在$V_n(P)$上定义了$\|x\|_a, \|x\|_b$两种向量范数，若存在常数$C_1 > 0, C_2 > 0$，使得

$$C_1 \|x\|_a \le \|x\|_b \le C_2 \|x\|_a \quad \forall x \in V_n(P)$$

则称$\|x\|_a$与$\|x\|_b$等价.

定理 1 $V_n(P)$上的任意两个向量范数均等价.

二、矩阵的范数

定义 3 设$A \in P^{m\times n}$，若映射 $\|\cdot\|$： $P^{m\times n} \to R$ 满足

(1)正定性 $\| A \| \geq 0$, 当且仅当$A = 0$时, $\| A \| = 0$;

(2) 齐次性 $\| \lambda A \| = |\lambda| \| A \|, \forall \lambda \in R, \forall A \in P^{m\times n}$;

(3) 三角不等式 $\| A + B \| \leq \| A \| + \| B \|, \forall A, B \in P^{m\times n}$.

则称映射 $\|\cdot\|$ 为$p^{m\times n}$上的矩阵范数.

例 5 设 $A \in P^{m\times n}$，则

$$\|A\|_{m_1} = \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{m}|a_{ij}|$$

$$\|A\|_{m_2} = \left(\sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{m}|a_{ij}|^2\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$\|A\|_{m_\infty} = \max_{i,j}\{|a_{ij}|\} \quad 1 \le i \le m \quad 1 \le j \le n$$

定义 4 设 $\|\cdot\|_a: P^{m\times l} \to R$, $\|\cdot\|_b: P^{l\times n} \to R$,

$\|\cdot\|_c: P^{m\times n} \to R$ 是矩阵范数，如果

$$\|AB\|_c \le \|A\|_a \cdot \|B\|_b$$

则称矩阵范数 $\|\cdot\|_a$,$\|\cdot\|_b$ 和 $\|\cdot\|_c$ 相容 .

如果

$$\|AB\| \le \|A\| \cdot \|B\|$$

则 $\|\cdot\|$ 称是自相容矩阵范数.

例 5 $\|A\|_{m_\infty}=\max\limits_{i,j}\{|a_{ij}|\}\quad 1\le i\le m\quad 1\le j\le n$

是不相容的矩阵范数 .

例如 $A=B=\begin{pmatrix}1&1\\1&1\end{pmatrix} \Rightarrow AB=\begin{pmatrix}2&2\\2&2\end{pmatrix}$

$\Rightarrow \|AB\|_{m_\infty}=2\ \not\le\ \|A\|_{m_\infty}\|B\|_{m_\infty}=1$

矩阵算子范数的概念

定义 5 设 $\|x\|$是R^n上的向量范数,$A \in R^{n\times n}$,则A的非负函数

$$\|A\| = \max_{x\neq 0} \frac{\|Ax\|}{\|x\|}$$

称为矩阵A的算子范数。

注1：矩阵算子范数由向量范数诱导出, 如

$$\|A\|_2 = \max_{x\neq 0} \frac{\|Ax\|_2}{\|x\|_2}$$

或 $$\|A\|_2 = \max_{\|x\|_2 = 1} \|Ax\|_2$$

注3: A^{-1}的算子范数可表示为

$$\left(\min_{x\neq 0}\frac{\|Ax\|}{\|x\|}\right)^{-1}$$

$$\|A^{-1}\| = \max_{x\neq 0}\frac{\|A^{-1}x\|}{\|x\|} = \max_{y\neq 0}\frac{\|y\|}{\|Ay\|}$$

$$\|A^{-1}\| = \max_{x\neq 0}\frac{\|A^{-1}x\|}{\|x\|} = \frac{1}{\min\limits_{y\neq 0}\frac{\|Ay\|}{\|y\|}}$$

定理 2 设 $\|x\|_a$ 是 P^n 上的向量范数，$A \in P^{n\times n}$，则

$$\|A\|_a = \max_{x\neq 0} \frac{\|Ax\|_a}{\|x\|_a} \quad \left(= \max_{\|u\|_a = 1} \|Au\|_a\right)$$

是与向量范数 $\|x\|_a$ 相容的矩阵范数.

例 6 从属于 $\|x\|_\infty$ 的算子范数为

$$\|A\|_\infty = \max_i \left(\sum_{j=1}^{n} |a_{ij}|\right)$$

被称为极大行和范数.

定理 3 如果 $\|\bullet\|_m : C^{n\times n} \to R$ 是一相容的矩阵范数，则对任一 $A \in C^{n\times n}$，有

$$|\lambda_i| \le \|A\|_m$$

其中，λ_i 是 A 的特征值．

证 $Ax = \lambda_i x \Rightarrow |\lambda_i| \cdot \|x\| = \|\lambda_i x\|$

$= \|Ax\| \le \|A\|_m \|x\| \Rightarrow |\lambda_i| \le \|A\|_m$

定理 4

$$\|A\|_2 = \max_{x\ne 0} \frac{\|Ax\|_2}{\|x\|_2} = \sqrt{\lambda_{\max}(A^T A)}$$

三、矩阵的条件数概念

方程组 $Ax=b$, 右端项 b 有一扰动 δb 引起方程组解 x 的扰动 δx.

设 x 是方程组 $Ax=b$ 的解,则有

$$A(x+\delta x)=b+\delta b$$

化简,得 $A\delta x=\delta b \qquad \delta x=A^{-1}\delta b$

$$\|\delta x\|\le\|A^{-1}\|\,\|\delta b\|$$

由 $Ax=b$ 得 $\|b\|\le\|A\|\,\|x\| \qquad \dfrac{1}{\|x\|}\le\dfrac{\|A\|}{\|b\|}$

所以 $$\frac{\|\delta x\|}{\|x\|}\le(\|A\|\cdot\|A^{-1}\|)\frac{\|\delta b\|}{\|b\|}$$

定义6 条件数: $\mathrm{Cond}(A) = \|A\| \cdot \|A^{-1}\|$

或 $\mathrm{C}(A) = \|A\| \cdot \|A^{-1}\|$

Hilbert矩阵的病态性

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1/2 & 1/3 & 1/4 \\ 1/2 & 1/3 & 1/4 & 1/5 \\ 1/3 & 1/4 & 1/5 & 1/6 \\ 1/4 & 1/5 & 1/6 & 1/7 \end{bmatrix}$$

阶数	2	4	6
条件数1	27	19.4×10^5	9.8×10^8
条件数2	19.2815	1.5×10^4	1.4×10^7
条件数∞	27	19.4×10^5	9.8×10^8