导学

一、学习建议：
牢记基本概念、掌握解题套路
重视常用结论：比如范数和特征值、奇异值
重视知识点的联系：比如范数和特征值、奇异值、广义逆、盖尔圆盘
重视证明的思路、重要定理的证明思路

二、课程结构：
1. 线性空间、线性变换的基本概念和证明、线性流形和凸包

2. Kronecker积的性质、矩阵的拉直

3. Jordan标准型：行列式因子、不变因子、初等因子（计算）

4. 范数：向量范数、矩阵范数、算子范数（证明）

5. 矩阵分解：QR分解、谱分解、最大秩分解、奇异值分解（计算、证明）

6. 特征值估计：盖尔圆盘定理（证明）、对角占优矩阵

7. 矩阵级数、收敛矩阵（计算）、矩阵函数

8. 矩阵微积分（计算）

9. 常系数微分方程组（计算）

10. 单边逆、广义逆、自反广义逆、MP逆的计算和相关证明（计算、证明）

线性空间（一）

1. 线性空间：设是一个非空集合V，P是一个数域。在集合的元素之间定义了一种加法运算，在数域和集合之间定义了乘法运算

如果加法和乘法满足下列条件，则称集合为数域上的线性空间

$\alpha+\beta=\beta+\alpha$

$(\alpha+\beta)+v=\alpha+(\beta+v)$

$\alpha+0=\alpha$

对于V中某一个元素α，都有另外一个元素β使得：$\alpha+\beta=0$

$1\alpha=\alpha$

$k(l\alpha)=(kl)\alpha$

$(k+l)\alpha=k\alpha+l\alpha$

$k(\alpha+\beta)=k\alpha+k\beta$

多项式集合，按照普通乘法和加法在实数域上构成一个线性空间

$a_nx^n+\cdots+a_1x+a_0$

n阶矩阵集合，按照矩阵的加法和乘法在实数域上构成一个线性空间

①如果数域P上的线性空间V的一个非空子集W对于V的两种运算也构成线性空间，则称W为V的一个线性子空间

②在线性空间V中，如果n个向量$\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n$线性无关，而$V$中任意$n+1$个向量线性相关，则称$\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n$为$V$的一组基。基中向量的总个数称为线性空间$V$的维数

例如：n阶对称矩阵所构成的矩阵空间的基和维数（给出的条件越多，空间维数就越低）

③过渡矩阵

向量空间的基向量：$\alpha_1=(1,0,0)$，$\alpha_2=(0,1,0)$，$\alpha_3=(0,0,1)$

$\beta_1=(2,0,0)$，$\beta_2=(0,2,0)$，$\beta_3=(0,0,2)$

则可得：$(\beta_1,\beta_2,\beta_3)=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)\begin{pmatrix}2&0&0\\0&2&0\\0&0&2\end{pmatrix}$

则称$\begin{pmatrix}2&0&0\\0&2&0\\0&0&2\end{pmatrix}$为基$(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)$到基$(\beta_1,\beta_2,\beta_3)$的过渡矩阵

④维数定理：设V_1,V_2是线性空间V的子空间则

$\dim(V_1)+\dim(V_2)-\dim(V_1\cap V_2)=\dim(V_1+V_2)$

⑤直和：设V_1,V_2是线性空间V的子空间，若对任意的$\alpha\in V$，有

$\alpha=\alpha_1+\alpha_2(\alpha_1\in V_1,\alpha_2\in V_2)$

且这种表示是唯一的，则称V_1+V_2为直和，记为：$V_1\oplus V_2$

⑥直和$\oplus$：若线性空间V的每个子空间V_i都没有重复元素，除了零元素；则称$\sum_i V_i$为直和

V_1+V_2是直和 $\Leftrightarrow$ $V_1\cap V_2=\{0\}$ $\Leftrightarrow$ 零元素表示法唯一

2. 例题

①已知的两组基

$E_1=\begin{pmatrix}2&1\\0&1\end{pmatrix}$，$E_2=\begin{pmatrix}0&1\\2&2\end{pmatrix}$，$E_3=\begin{pmatrix}-2&1\\1&2\end{pmatrix}$，$E_4=\begin{pmatrix}1&3\\1&2\end{pmatrix}$

$F_1=\begin{pmatrix}1&2\\-1&0\end{pmatrix}$，$F_2=\begin{pmatrix}1&-1\\1&1\end{pmatrix}$，$F_3=\begin{pmatrix}-1&2\\1&1\end{pmatrix}$，$F_4=\begin{pmatrix}-1&-1\\0&1\end{pmatrix}$

求由基E_1,E_2,E_3,E_4到基F_1,F_2,F_3,F_4的过渡矩阵

解：

设过渡矩阵为：$A=\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}&a_{13}&a_{14}\\a_{21}&a_{22}&a_{23}&a_{24}\\a_{31}&a_{32}&a_{33}&a_{34}\\a_{41}&a_{42}&a_{43}&a_{44}\end{pmatrix}$

$$(F_1,F_2,F_3,F_4)=(E_1,E_2,E_3,E_4)\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}&a_{13}&a_{14}\\a_{21}&a_{22}&a_{23}&a_{24}\\a_{31}&a_{32}&a_{33}&a_{34}\\a_{41}&a_{42}&a_{43}&a_{44}\end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow a_{11}E_1+a_{21}E_2+a_{31}E_3+a_{41}E_4=F_1$$

$$a_{11}\begin{pmatrix}2&1\\0&1\end{pmatrix}+a_{21}\begin{pmatrix}0&1\\2&2\end{pmatrix}+a_{31}\begin{pmatrix}-2&1\\1&2\end{pmatrix}+a_{41}\begin{pmatrix}1&3\\1&2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&2\\-1&0\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}2a_{11}-2a_{31}+a_{41}&a_{11}+a_{21}+a_{31}+3a_{41}\\2a_{21}+a_{31}+a_{41}&a_{11}+2a_{21}+2a_{31}+2a_{41}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&2\\-1&0\end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow a_{11}=0\,,a_{21}=-1\,,a_{31}=0\,,a_{41}=1$$

$$A=\begin{pmatrix}0&1&-1&1\\-1&1&0&0\\0&0&1&1\\1&-1&1&-1\end{pmatrix}$$

②取$P_2(t)$的两组基，$B_1=\{1,t,t^2\}$，$B_2=\{t+1,t-2,t^2\}$，求B_2到B_1的过渡矩阵

解：

设过渡矩阵为$A=\begin{pmatrix}a_{11}&a_{21}&a_{31}\\a_{21}&a_{22}&a_{23}\\a_{31}&a_{32}&a_{33}\end{pmatrix}$

$$B_1=B_2\begin{pmatrix}a_{11}&a_{21}&a_{31}\\a_{21}&a_{22}&a_{23}\\a_{31}&a_{32}&a_{33}\end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow 1=a_{11}(t+1)+a_{21}(t-2)+a_{31}t^2$$

$$\Rightarrow a_{11}=\frac{1}{3}，a_{21}=-\frac{1}{3}，a_{31}=0$$

$$A=\begin{pmatrix}\frac{1}{3}&\frac{2}{3}&0\\-\frac{1}{3}&\frac{1}{3}&0\\0&0&1\end{pmatrix}$$

③设子空间$U=\left\{(x,y,z)^T\in R^3|x+y+z=0\right\},W=\left\{(x,y,z)^T\in R^3|x=y=\frac{z}{-2}\right\}$,

则$\dim(U+W)-\dim U=$（ A ）

（A）0；　（B）1；　（C）2；　（D）3；

欧式空间

1. 欧式空间：定义了内积的实线性空间称为欧式空间

①如果映射(α,β)在线性空间V上满足：

交换性：$(\alpha,\beta)=(\beta,\alpha)$ ，$\forall\alpha,\beta\in V$

分配律：$(\alpha+\beta,\gamma)=(\alpha,\gamma)+(\beta,\gamma)$ ，$\forall\alpha,\beta,\gamma\in V$

齐次性：$(k\alpha,\beta)=k(\alpha,\beta)$ ，$\forall k\in R$

正定性：$(\alpha,\alpha)\geq 0$，$(\alpha,\alpha)=0$当且仅当$\alpha=0$

则称(α,β)是定义在线性空间V上的内积

②$Gram$行列式：n维欧式空间V中向量的$Gram$行列式是指

$$G(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_k)=\begin{vmatrix}(\alpha_1,\alpha_1) & (\alpha_1,\alpha_2) & \cdots & (\alpha_1,\alpha_k)\\ (\alpha_2,\alpha_1) & (\alpha_2,\alpha_2) & \cdots & (\alpha_2,\alpha_k)\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ (\alpha_k,\alpha_1) & (\alpha_k,\alpha_2) & \cdots & (\alpha_k,\alpha_k)\end{vmatrix}$$

定理:n维欧式空间V中的向量组$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$线性相关的充要条件是$G(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)=0$

③度量矩阵：设$\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n$是$n$维欧式空间$V$的一组基，作矩阵

$$A=\begin{bmatrix}(\varepsilon_1,\varepsilon_1) & (\varepsilon_1,\varepsilon_2) & \cdots & (\varepsilon_1,\varepsilon_n)\\ (\varepsilon_2,\varepsilon_1) & (\varepsilon_2,\varepsilon_2) & \cdots & (\varepsilon_2,\varepsilon_n)\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ (\varepsilon_n,\varepsilon_1) & (\varepsilon_n,\varepsilon_2) & \cdots & (\varepsilon_n,\varepsilon_n)\end{bmatrix}$$

称A为基$\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n$的度量矩阵

度量矩阵是正定矩阵

不同基的度量矩阵是合同的

度量矩阵是对称矩阵

2. 例题

①证明：若$A\in C^{n\times n},x,y\in C^n,(x,y)=x^Hy$，则$(Ax,y)=(x,A^Hy)$

证明：

$\because(x,y)=x^Hy$

$\therefore(Ax,y)=x^HA^Hy$

$(x,A^Hy)=x^HA^Hy$

$\therefore(Ax,y)=(x,A^Hy)$

②设$x=(\xi_1,\xi_2,\xi_3)$，$y=(\eta_1,\eta_2,\eta_3)$是R^3的任意两个向量，矩阵，

$$A=\begin{pmatrix}2 & 1 & 0\\ 1 & 2 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}，(x,y)=xAy^T$$

（1）证明在该定义下R^n构成欧氏空间

（2）求R^3中由基向量$x_1=(1,0,0)$，$x_2=(1,1,0)$，$x_3=(1,1,1)$构成的度量矩阵

解：

（1）$(x,y)=xAy^T=(y,x)$

$(x+z,y)=(x+z)Ay^T=(x,y)+(z,y)$

$(kx,y)=kxAy^T=k(x,y)$

对于正定性，只需证明矩阵A为正定矩阵即可，容易求得矩阵A的特征值均大于0，所以矩阵A为正定矩阵⇒ $(x,x) = xAx^T \geq 0$

∴在该定义下R^n构成欧氏空间

（2）度量矩阵为：

$$\begin{pmatrix} (x_1,x_1) & (x_1,x_2) & (x_1,x_3) \\ (x_2,x_1) & (x_2,x_2) & (x_2,x_3) \\ (x_3,x_1) & (x_3,x_2) & (x_3,x_3) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 3 \\ 3 & 6 & 6 \\ 3 & 6 & 7 \end{pmatrix}$$

线性变换

1. 线性变换

线性空间V上的一个变换A称为线性变换，当且仅当

线性：$A(\alpha+\beta)=A\alpha+A\beta$

齐次性：$A(k\alpha)=kA(\alpha)\ \ \forall\alpha,\beta\in V$

2. 正交变换

若A是欧式空间V的线性变换，如果它保持向量的内积不变即：$(A\alpha,A\beta)=(\alpha,\beta)\ \forall\alpha,\beta\in V$

称A为正交变换（如果数域为复数域，则正交变换就称为酉变换）

3. 从线性变换角度看特征值和特征向量

设T是线性空间的一个线性变换，如果存在λ和非零向量x，

使得$Tx=\lambda x$，则λ称为T的特征值，x称为T的特征向量

特征值、特征向量基本结论：

λ_i代数重数：特征值λ_i的重数

λ_i几何重数：特征值λ_i对应的特征向量个数

矩阵的迹等于特征值之和：$\operatorname{tr}A=\sum_{i=1}^{n}a_{ii}$

定理：矩阵不同特征值对应的特征向量是线性无关的

定理：对称矩阵、Hermite矩阵的特征值全部为实数

4. 例题

①给定矩阵C，定义变换T：$TA=CA-AC$

证明T是线性变换，且对任意A,B有，$T(AB)=T(A)\cdot B+A\cdot T(B)$

证明：

$T(A+B)=C(A+B)-(A+B)C=CA-AC+CB-BC=T(A)+T(B)$

$T(kA)=CkA-kAC=k(CA-AC)=kT(A)$

∴T为线性变换

$T(AB)=CAB-ABC$

$T(A)\cdot B+A\cdot T(B)=(CA-AC)B+A(CB-BC)=CAB-ABC$

∴$T(AB)=T(A)\cdot B+A\cdot T(B)$

②V表示实数域上次数不超过2的多项式构成的线性空间。对$\forall f(x)=ax^2+bx+c\in V$

在V上定义变换：$T[f(x)]=3ax^2+(2a+2b+3c)x+(a+b+4c)$

（1）验证T是V上的线性变换

（2）求V的基x^2，$x,1$到基$(x-1)^2,x-1,1$的过渡矩阵P

解：

（1）令$f_1(x)=a_1x^2+b_1x+c_1$，$f_2(x)=a_2x^2+b_2x+c_2$

∴$T[f_1(x)+f_2(x)]=3(a_1+a_2)x^2+[2(a_1+a_2)+2(b_1+b_2)+3(c_1+c_2)]x^2+a_1+a_2+b_1+b_2+4(c_1+c_2)$

∴$T[f_1(x)+f_2(x)]=3a_1x^2+(2a_1+2b_1+3c_1)x+(a_1+b_1+4c_1)+3a_2x^2+(2a_2+2b_2+3c_2)x+(a_2+b_2+4c_2)=T(f_1(x))+T(f_2(x))$

$T(kf(x))=3akx^2+(2ak+2bk+3ck)x+ak+bk+4ck=kT(f(x))$

$\therefore T$是V上的线性变换

（2）设过渡矩阵为$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$

$B_1=\{1,x,x^2\}$，$B_2=\{1,x-1,(x-1)^2\}$

$B_2=B_1\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$

③设y是欧氏空间V中的单位向量，$x\in V$，定义变换$Tx=x-2(y,x)y$

证明T是正交变换

证明：

$\because T(\alpha+\beta)=\alpha+\beta-2(y,\alpha)y-2(y,\beta)y=T(\alpha)+T(\beta)$

$T(k\alpha)=k\alpha-2(y,k\alpha)y=k\alpha-2k(y,\alpha)y=kT(\alpha)$

$\therefore T$是线性变换

$(Tx,Tz)=\big(x-2(y,x)y,z-2(y,z)y\big)$

$=(x,z)-2(y,z)(x,y)-2(y,x)(y,z)+4(y,x)(y,z)(y,y)$

$\because y$是欧氏空间V中的单位向量

$\therefore (Tx,Tz)=\big(x-2(y,x)y,z-2(y,z)y\big)=(x,z)-2(y,z)(x,y)-2(y,x)(y,z)+4(y,x)(y,z)$

$\therefore (Tx,Tz)=(x,z)$

$\therefore T$是正交变换

④定义变换$T\big(f(x)\big)=xf'(x)+f''(x)$，$f(x)$为二次多项式

（1）求T在基$1,x,x^2$下的矩阵

（2）求T在基$1,x,1+x^2$下的矩阵

解：

（1）$T(1)=0$，$T(x)=x$，$T(x^2)=2x^2+2$

$\therefore T(1,x,x^2)=(1,x,x^2)\begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

（2）$T(1)=0$，$T(x)=x$，$T(1+x^2)=2x^2+2$

$\therefore T(1,x,1+x^2)=(1,x,1+x^2)\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

⑤设λ_1,λ_2是线性变换T的两个不同的特征值，$\varepsilon_1,\varepsilon_2$是分别属于$\lambda_1,\lambda_2$的特征向量，证明：$\varepsilon_1+\varepsilon_2$不是$T$的特征向量；

证明：

依题意

$T\varepsilon_1=\lambda_1\varepsilon_1$，$T\varepsilon_2=\lambda_2\varepsilon_2$

$\therefore T(\varepsilon_1+\varepsilon_2)=\lambda_1\varepsilon_1+\lambda_2\varepsilon_2$

$\therefore \varepsilon_1+\varepsilon_2$不是T的特征向量

⑥证明：反对称实矩阵的特征值是零或纯虚数

证明：

设反对称矩阵为A，则$Ax=\lambda x$

两端左乘x^H，得$x^HAx=\lambda x^Hx$

对上式两边取共轭转置得：

$-x^HAx=\bar{\lambda}x^Hx$

$\therefore (\lambda+\bar{\lambda})x^Hx=0$

∴λ只能为0或者纯虚数

线性空间（二）

1. 核空间、值域：$A \in C_r^{m\times n}$
矩阵A的核空间(零空间)：$N(A)=\{x|Ax=0,x\in C^n\}$
矩阵A的值域：$R(A)=\left\{y\middle|Ax=y,x\in C^n\right\}$
矩阵A核空间的维数等于$n-r$
矩阵A值域的维数等于矩阵A的秩r

$\dim R(A)+\dim N\left(A^H\right)=m$
$\dim R\left(A^H\right)+\dim N(A)=n$
$C^m=R(A)\oplus N\left(A^H\right)$
$C^n=R\left(A^H\right)\oplus N(A)$

线性流形和凸包

1. 线性流形：
设V_1为V的子空间，r_0是V中的一个固定向量，则
$P = r_0 + V_1 = \{r_0 + \alpha | \alpha \in V_1\}$
称为线性空间V的线性流形。其中V_1的维数称为该线性流形的维数

一维线性流形称为直线，二维线性流形称为平面，更高维度的线性流形称为超平面

2. 凸集
n维向量空间V中，以向量α_1, α_2为端点的线段定义为：
$\{r | r = k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2，k_1 + k_2 = 1，k_1, k_2 \geq 0\}$
设M为V的子空间，若以M中任意两个向量为端点的线段，都还在M中，则称M为凸集

n维向量空间中的任何一组凸集的交集还是凸集

3. 凸包
设n维向量空间V中，M为V的子空间，则所有包含M的凸集的交集，称为M的凸包

不变子空间

1. 定义：
设A是线性空间V上的一个线性变换，其中W是V的一个线性子空间，如果W中的任何一个向量α，满足$A\alpha \in W$,则称W为A的不变子空间

2. A的特征子空间、值域、核空间都是A的不变子空间

①在一个四维向量空间中，线性变换A在该空间中一组基$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$，下的矩阵是：

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 4 & -2 \\ 2 & -1 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

令：$W = \{\alpha_1 + 2\alpha_2, \alpha_2 + \alpha_3 + 2\alpha_4\}$
证明W是A的不变子空间
证明：
$A\alpha_1 = \alpha_1 + 2\alpha_3 + 2\alpha_4$
$A\alpha_2 = \alpha_2 - \alpha_3 - \alpha_4$
$A\alpha_3 = 2\alpha_1 + 4\alpha_2 - \alpha_4$
$A\alpha_4 = -\alpha_1 - 2\alpha_2 + \alpha_3 + 2\alpha_4$
$A(\alpha_1 + 2\alpha_2) = \alpha_1 + 2\alpha_2$
$A(\alpha_2 + \alpha_3 + 2\alpha_4) = A\alpha_2 + A\alpha_3 + 2A\alpha_4 = \alpha_2 + \alpha_3 + 2\alpha_4$

几种特殊矩阵

1. 对称矩阵：$A = A^T$

Hermite矩阵：$A = A^H$
对称矩阵和Hermite矩阵的特征值一定是实数

正交矩阵：$AA^T = A^TA = E$

酉矩阵：$AA^H = A^HA = E$

酉矩阵性质：
A为酉矩阵则，A^H也为酉矩阵；若B也为酉矩阵，则AB, BA都为酉矩阵
酉矩阵的特征值的模值为1

2. 初等矩阵:$E(u,v,\sigma) = E_n - \sigma uv^H$ ，其中$u, v \in C^n$，$\sigma \in C$
$\lambda\left(E(u,v,\sigma)\right) = \left\{1 - \sigma v^H u, 1,1, \dots\right\}$

初等酉阵（Household变换）：$H(u) = E_n - 2uu^H$，其中$u^Hu = 1$
$H(u) = H(u)^{-1} = H(u)^H$
$\det\left(H(u)\right) = -1$
初等酉阵是镜像变换

例：$H(u) = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = E_2 - 2uu^H$
$u = (1,0)$
$H(u)\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$

3. 幂等矩阵（一般投影矩阵）：$A^2 = A$(一定是方阵)
①A^H，$E - A$ 也为幂等矩阵
②A的特征值不是0就是1，并且一定可以对角化
③$\mathrm{rank}(A) = \mathrm{tr}(A)$
$\mathrm{tr}(A)$表示矩阵A的对角线元素之和

4. 正交投影矩阵：$A^2 = A$，且 $A = A^H$

旋转变换

旋转：将一个向量x的长度保持不变，旋转一个角度，使其平行于坐标轴e_n即可。
$Hx = ae_n$

1. Household旋转
定理：假设$u \in C^n$是一个单位向量，则对于任意一个向量$x \in C^n$，
存在Household旋转矩阵H，使得$Hx = au$，其中$a = \|x\|_2$
$H = E - 2ww^T$
$w = \dfrac{x - au}{\|x - au\|_2}$

2. Givens旋转

$$\begin{pmatrix} c & s \\ -s & c \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{a_1^2 + a_2^2} \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} s & -c \\ c & s \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \sqrt{a_1^2 + a_2^2} \end{pmatrix}$$

$$c = \frac{a_1}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2}}$$

$$s = \frac{a_2}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2}}$$

高维度推广：
将三维向量$\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$转化为和$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$平行的向量

$$\begin{pmatrix} c & s & 0 \\ -s & c & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{a_1^2 + a_2^2} \\ 0 \\ a_3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} c & 0 & s \\ 0 & 1 & 0 \\ -s & 0 & c \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \sqrt{a_1^2 + a_2^2} \\ 0 \\ a_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

如果想将三维向量$\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$转化为和$\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$平行的向量，以$a_2$为中心

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & c & s \\ 0 & -s & c \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 \\ \sqrt{a_2^2 + a_3^2} \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} s & -c & 0 \\ c & s & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_1 \\ \sqrt{a_2^2 + a_3^2} \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2} \\ 0 \end{pmatrix}$$

投影矩阵

1. 普通投影
幂等矩阵（一般投影矩阵）：$A^2 = A$(一定是方阵)
①A^H，$E - A$ 也为幂等矩阵
②A的特征值不是0就是1，并且一定可以对角化
③ $\mathrm{rank}(A) = \mathrm{tr}(A)$
$\mathrm{tr}(A)$表示矩阵A的对角线元素之和

2. 正交投影
正交投影矩阵：$A^2 = A$，且 $A = A^H$

①一般的投影矩阵：
假设现在有两个线性子空间L, M，其中L的基按列可以构成矩阵A，M的基按列可以构成矩阵B
则沿着空间M到空间L的一般投影矩阵为$(A \ \ \mathbf{0})(A \ \ B)^{-1}$

②正交投影矩阵：
假设现在有两个线性子空间L, M，其中L的基按列可以构成矩阵A，M的基按列可以构成矩阵B
则沿着空间M到空间L的正交投影矩阵为$A\left(A^H A\right)^{-1} A^H$

专题一

1. 线性空间

①设是一个非空集合V，P是一个数域。在集合的元素之间定义了一种加法运算，在数域和集合之间定义了乘法运算

如果加法和乘法满足下列条件，则称集合为数域上的线性空间

$\alpha+\beta=\beta+\alpha$

$(\alpha+\beta)+v=\alpha+(\beta+v)$

$\alpha+0=\alpha$

对于V中某一个元素α，都有另外一个元素β使得：$\alpha+\beta=0$

$1\alpha=\alpha$

$k(l\alpha)=(kl)\alpha$

$(k+l)\alpha=k\alpha+l\alpha$

$k(\alpha+\beta)=k\alpha+k\beta$

②证明某个空间是线性空间：证明n次多项式集合按照普通的多项式加法和乘法在实数域上构成线性空间

2. 线性变换

①向量空间的线性变换：旋转变换、投影变换（表示形式为矩阵）

②矩阵空间的线性变换：旋转变换、投影变换

3. 线性变换在某组基下的矩阵

①定义变换$T(f(x))=xf'(x)+f''(x)$，$f(x)$为二次多项式

（1）求T在基$1,x,x^2$下的矩阵

（2）求T在基$1,x,1+x^2$下的矩阵

解：

（1）$T(1)=0$，$T(x)=x$，$T(x^2)=2x^2+2$

$$\therefore T(1,x,x^2)=(1,x,x^2)\begin{pmatrix}0&0&2\\0&1&0\\0&0&2\end{pmatrix}$$

（2）$T(1)=0$，$T(x)=x$，$T(1+x^2)=2x^2+2$

$$\therefore T(1,x,1+x^2)=(1,x,1+x^2)\begin{pmatrix}0&0&0\\0&1&0\\0&0&2\end{pmatrix}$$

4. 基和坐标

①普通n阶矩阵空间的基：基等价于空间当中的元素表示问题

二阶矩阵空间的基：

$\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}$、$\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}$、$\begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix}$、$\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix}$

②n阶对称矩阵空间的基：

二阶对称矩阵空间的基：

$\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}$、$\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix}$、$\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}$

③多项式空间的基：$1, x, x^2 \cdots x^n$
勒让德多项式、切比雪夫多项式、拉盖尔多项式、Hermite多项式

④求某个空间的基：第一步确定空间的维数、第二步证明给出的“向量”线性无关

Kronecker积和矩阵拉直

1. Kronecker积定义：

①设$A=(a_{ij})\in P^{m\times n}, B=(b_{ij})\in P^{p\times q}$，则

$$A\otimes B=\begin{bmatrix} a_{11}B & a_{12}B & \cdots & a_{1n}B \\ a_{21}B & a_{22}B & \cdots & a_{2n}B \\ \vdots & & & \vdots \\ a_{m1}B & a_{m2}B & \cdots & a_{mn}B \end{bmatrix}$$

称为矩阵A与B的Kronecker积（或直积，张量积）

②性质：$A\in P^{m\times n}$ ，$B\in P^{p\times q}$ ，$C\in P^{r\times s}$ ，$D\in P^{k\times h}$

当A^{-1},B^{-1}存在时，则$(A\otimes B)^{-1}=A^{-1}\otimes B^{-1}$

$\mathrm{tr}(A\otimes B)=\mathrm{tr}\,A\cdot \mathrm{tr}\,B$

$\mathrm{rank}(A\otimes B)=\mathrm{rank}\,A\cdot \mathrm{rank}\,B$

若A,B均为方阵，则$\det A\otimes B=(\det A)^P(\det B)^m$

$(A\otimes B)^T=A^T\otimes B^T$

$(A\otimes B)^H=A^H\otimes B^H$

$\overline{(A\otimes B)}=\bar{A}\otimes\bar{B}$

若A,B为对称矩阵，则$A\otimes B$也为对称矩阵；当A,B为Hermite矩阵，则$A\otimes B$也为Hermite矩阵

设λ_r是$A\in C^{m\times m}$的特征值，μ_k是$B\in C^{n\times n}$的特征值；则$A\otimes B$的mn个特征值是$\lambda_r\mu_k$

一般$A\otimes B\neq B\otimes A$

$E_m\otimes E_n=E_{mn}$

$(A+B)\otimes C=A\otimes C+B\otimes C$

$\lambda(A\otimes B)=\lambda A\otimes B=A\otimes(\lambda B)$

$A\otimes(B\otimes C)=(A\otimes B)\otimes C$

$(A\otimes B)(C\otimes D)=(AC)\otimes BD$

2. Hadamard矩阵：$HH^T=mE_m$ ，其中H是以1或者-1为元素的m阶矩阵

定理：设A,B分别为m阶和n阶的Hadamard矩阵，则$A\otimes B$是mn阶Hadamard矩阵

3. 矩阵拉直：设矩阵$A=(A_1,A_2\cdots A_n)$

则：$V_{ec}A=\begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \\ A_n \end{pmatrix}$

①设$A\in C^{m\times m}$，$B\in C^{n\times n}$，$X\in C^{m\times n}$

$V_{ec}(k_1A_1+k_2A_2)=k_1V_{ec}A_1+k_2V_{ec}A_2$

$V_{ec}(AXB)=(B^T\otimes A)V_{ec}X$

$V_{ec}(AX)=(E_n\otimes A)V_{ec}X$

$V_{ec}(XB)=(B^T\otimes E_m)V_{ec}X$

②定理：矩阵$A_1,A_2\cdots A_n$为线性无关的充要条件是$V_{ec}A_1$，$V_{ec}A_2$，$\cdots$，$V_{ec}A_n$线性无关

4. 例题

①若A,B均为n阶方阵，下列结论错误的是（ ）B

（A）$(A\otimes B)^{-1}=A^{-1}\otimes B^{-1}$；　（B）若$A,B$为正规矩阵，则$A\otimes B$也为正规矩阵；

（C）$Vec(AXB)=(A^T\otimes B)VecX$；　（D）$rank(A\otimes B)=rankA\cdot rankB$；

②设$A,B\in C^{n\times n}$，下列说法错误的是（ ）C

（A）$tr(A\otimes B)=tr(A)tr(B)$；　（B）$rank(A\otimes B)=rank(A)rank(B)$；

（C）$Vec(AXB)=(B\otimes A)Vec(X)$；　（D）若$rank(AB)=rank(A)$，则$R(A)=R(AB)$；

③$A=\begin{pmatrix} a & 0 \\ 1 & b \end{pmatrix}$，$B=\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$，则$A\otimes B$的特征值为

Jordan标准型

定理：设矩阵$A \in C^{n\times n}$有r个不同的特征值$\lambda_1,\lambda_2,\cdots\lambda_r$，则必定存在可逆矩阵$P \in C^{nxn}$，使得$P^{-1}AP = J = \mathrm{diag}\left(J_1(\lambda_1),J_2(\lambda_2)\cdots J_r(\lambda_r)\right)$，其中$J$为$A$的Jordan标准型(任何方阵都和一个Jordan标准型相似)

$$J = \begin{pmatrix} J_1(\lambda_1) & & & & \\ & J_2(\lambda_2) & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & J_{r-1}(\lambda_{r-1}) & \\ & & & & J_r(\lambda_r) \end{pmatrix}$$

Jordan块：$J_r(\lambda_r) = \begin{pmatrix} \lambda_r & 1 & & & \\ & \lambda_r & 1 & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & \lambda_r & 1 \\ & & & & \lambda_r \end{pmatrix}$

下列命题等价：
A是可对角化的
A的Jordan标准型中Jordan块都是一阶的
每个特征值的几何重数等于代数重数

定理：对称矩阵A必定存在一个正交矩阵，使得A相似于一个对角矩阵

1. 行列式因子
$\lambda E - A$ 中所有非零k阶子行列式的首项系数为1的最大公因式，
称为A的k阶行列式因子，记为$D_k(\lambda)$

①$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$，求$A$的行列式因子

解：

$$\lambda E - A = \begin{pmatrix} \lambda & -1 & -1 \\ -1 & \lambda & -1 \\ -1 & -1 & \lambda \end{pmatrix}$$

三阶子式就是$|A| = (\lambda+1)^2(\lambda-2) = D_3(\lambda)$

考虑所有二阶子式：

$$\begin{vmatrix} \lambda & -1 \\ -1 & \lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 1$$

$$\begin{vmatrix} -1 & -1 \\ \lambda & -1 \end{vmatrix} = 1 + \lambda$$

$$\begin{vmatrix} -1 & \lambda \\ -1 & -1 \end{vmatrix} = 1 + \lambda$$

$$\begin{vmatrix} \lambda & -1 \\ -1 & \lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 1$$

$$\begin{vmatrix} \lambda & -1 \\ -1 & \lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 1$$

$$\begin{vmatrix} \lambda & -1 \\ -1 & -1 \end{vmatrix} = -\lambda - 1$$

$$\begin{vmatrix} -1 & -1 \\ -1 & \lambda \end{vmatrix} = -\lambda - 1$$
$$\begin{vmatrix} \lambda & -1 \\ -1 & -1 \end{vmatrix} = -\lambda - 1$$
$$\begin{vmatrix} -1 & -1 \\ -1 & \lambda \end{vmatrix} = -\lambda - 1$$
$D_2(\lambda) = \lambda + 1$
$D_1(\lambda) = 1$

②$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$，求$A$的各阶行列式因子

解：

$$\lambda E - A = \begin{pmatrix} \lambda - 2 & -1 & 0 \\ 0 & \lambda - 2 & -1 \\ 0 & 0 & \lambda - 2 \end{pmatrix}$$

三阶子行列式就是$|A| = (\lambda - 2)^3 = D_3(\lambda)$
所有二阶子行列式的最大公因式为1，$D_2(\lambda) = 1$
一阶子行列式中有$|-1| = 1$，$D_1(\lambda) = 1$

2. 不变因子
$\lambda E - A$ 在初等行变换下可以化成对角矩阵，对角线上的元素即为A的不变因子

$d_1(\lambda) = D_1(\lambda)$
$d_2(\lambda) = \dfrac{D_2(\lambda)}{D_1(\lambda)}$
…
$d_n(\lambda) = \dfrac{D_n(\lambda)}{D_{n-1}(\lambda)}$

①$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$，求$A$的各阶不变因子

解：
$d_1(\lambda) = D_1(\lambda) = 1$
$d_2(\lambda) = \dfrac{D_2(\lambda)}{D_1(\lambda)} = 1$
$d_3(\lambda) = \dfrac{D_3(\lambda)}{D_2(\lambda)} = (\lambda - 2)^3$

3. 初等因子
A的不变因子在复数域上可以分解为一次因式幂的积形式
$d_1(\lambda) = (\lambda - \lambda_1)^{k_{11}}(\lambda - \lambda_2)^{k_{12}} \dots (\lambda - \lambda_s)^{k_{1s}}$
…
$d_n(\lambda) = (\lambda - \lambda_1)^{k_{n1}}(\lambda - \lambda_2)^{k_{n2}} \dots (\lambda - \lambda_s)^{k_{ns}}$
其中，凡是幂次$k_{ij} > 0$的一次因式幂$(\lambda - \lambda_j)^{k_{ij}}$均称为$A$的初等因子

①已知A的不变因子为$d_1(\lambda) = \cdots = d_9(\lambda) = 1$
$d_{10}(\lambda) = (\lambda - 1)^2$ ，$d_{11}(\lambda) = (\lambda - 1)^2(\lambda + 1)$
$d_{12}(\lambda) = (\lambda - 1)^2(\lambda + 1)(\lambda^2 + 1)^2$
求A的初等因子
解：

初等因子为：
$(\lambda-1)^2$，$(\lambda-1)^2$，$\lambda+1$，$(\lambda-1)^2$，$\lambda+1$，$(\lambda-\mathrm{i})^2$，$(\lambda+\mathrm{i})^2$

②求$A=\begin{pmatrix}2 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}$，求$A$的不变因子和初等因子
解：
$\lambda E-A=\begin{pmatrix}\lambda-2 & 0\\ 0 & \lambda+1\end{pmatrix}$，
$D_1(\lambda)=1$
$D_2(\lambda)=(\lambda-2)(\lambda+1)$
$d_1(\lambda)=D_1(\lambda)=1$
$d_2(\lambda)=\dfrac{D_2(\lambda)}{D_1(\lambda)}=(\lambda-2)(\lambda+1)$
初等因子为：$\lambda-2$，$\lambda+1$

4. 最小多项式（极小因子）：矩阵A最高阶不变因子

5. Smith标准型：对角线上元素为不变因子，其他元素为0的矩阵

6. 零化多项式
$|\lambda E-A|=\lambda^n+a_1\lambda^{n-1}+\cdots+a_n$
Cayley定理： $A^n+a_1A^{n-1}+\cdots+a_nE=0$

Jordan标准型补充

1. Jordan标准型求解：根据初等因子，写出标准型即可

①求矩阵A的Jordan标准型

$$A=\begin{pmatrix}-1&1&0\\-4&3&0\\1&0&2\end{pmatrix}$$

解：

初等因子为：$(\lambda-2)$，$(\lambda-1)^2$

Jordan标准型

为：

$$J=\begin{pmatrix}2&0&0\\0&1&1\\0&0&1\end{pmatrix}$$

②已知A的不变因子为$d_1(\lambda)=\cdots=d_9(\lambda)=1$

$d_{10}(\lambda)=(\lambda-1)^2$ ，$d_{11}(\lambda)=(\lambda-1)^2(\lambda+1)$

$d_{12}(\lambda)=(\lambda-1)^2(\lambda+1)\left(\lambda^2+1\right)^2$

求A的初等因子

解：

初等因子为：

$(\lambda-1)^2$，$(\lambda-1)^2$，$\lambda+1$，$(\lambda-1)^2$，$\lambda+1$，$(\lambda-\mathrm{i})^2$，$(\lambda+\mathrm{i})^2$

③求$A=\begin{pmatrix}2&0\\0&-1\end{pmatrix}$，求$A$的不变因子和初等因子

解：

$\lambda E-A=\begin{pmatrix}\lambda-2&0\\0&\lambda+1\end{pmatrix}$，

$D_1(\lambda)=1$

$D_2(\lambda)=(\lambda-2)(\lambda+1)$

$d_1(\lambda)=D_1(\lambda)=1$

$$d_2(\lambda)=\frac{D_2(\lambda)}{D_1(\lambda)}=(\lambda-2)(\lambda+1)$$

初等因子为：$\lambda-2$，$\lambda+1$

2. 零化多项式的应用

$|\lambda E-A|=\lambda^n+a_1\lambda^{n-1}+\cdots+a_n$

Cayley定理： $A^n+a_1A^{n-1}+\cdots+a_nE=0$

①假设矩阵$A=\begin{pmatrix}1&0&0\\1&0&1\\0&1&0\end{pmatrix}$

求证：$A^n=A^{n-2}+A^2-E$

证明：

可得矩阵A的特征多项式为：

$\left(\lambda^2-1\right)(\lambda-1)=|\lambda E-A|$

$\Rightarrow\left(A^2-E\right)(A-E)=0$

$A^n-A^{n-2}-A^2+E=A^{n-2}\left(A^2-E\right)-\left(A^2-E\right)$

$=\left(A^{n-2}-E\right)\left(A^2-E\right)=\left(A^2-E\right)(A-E)\left(A^{n-3}+A^{n-4}+\cdots+A+E\right)=0$

$\Rightarrow A^n=A^{n-2}+A^2-E$

Jordan标准型

1. Jordan标准型可逆矩阵的求解
①相似对角化：单特征值一定有一个特征向量、重特征值的重数和特征向量个数相等

②对于不能相似对角化的矩阵：重特征值的重数大于特征向量个数，此时矩阵不能相似于对角阵，但是可以相似于一个Jordan标准型

$$P^{-1}AP = J = \mathrm{diag}\left(J_1(\lambda_1), J_2(\lambda_2)\cdots J_r(\lambda_r)\right)$$

假设重特征值λ_i的重数为r，接下来求解特征值λ_i对应的“特征向量”
求出$H^T x = (\lambda_i E - A)^T x = 0$的基础解系$p_1, p_2, \cdots p_s$，以$p_1^T, p_2^T \cdots p_s^T$为行向量构造矩阵$B$

求$\begin{pmatrix} H \\ B \end{pmatrix} x = 0$，的一个非零向量作为$\eta_1$

η_k为$\begin{pmatrix} H \\ B \end{pmatrix} x = \begin{pmatrix} -\eta_{k-1} \\ 0 \end{pmatrix}$的一个非零解，$k = 2, \cdots, r-1$

η_r为$Hx = -\eta_{r-1}$的一个非零解

$\eta_1, \eta_2, \cdots \eta_r$即为所求

2. 例题
①假设$A = \begin{pmatrix} -4 & 2 & 10 \\ -4 & 3 & 7 \\ -3 & 1 & 7 \end{pmatrix}$
求约当标准型当中的可逆矩阵P
解：
2为三重特征值

$$H = 2E - A = \begin{pmatrix} 6 & -2 & -10 \\ 4 & -1 & -7 \\ 3 & -1 & -5 \end{pmatrix}$$

$$H^T x = 0 \Rightarrow x = k\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}$$

$$B = (1,0,-2)$$

$$\begin{pmatrix} H \\ B \end{pmatrix} x = 0 \Rightarrow \eta_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} H \\ B \end{pmatrix} x = \begin{pmatrix} -\eta_1 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \eta_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$Hx = -\eta_2 \Rightarrow \eta_3$$

向量范数

1. 向量范数：

$$\|x\|_1=\sum_{i=1}^{n}|x_i|$$

$$\|x\|_2=\left(\sum_{i=1}^{n}|x_i|^2\right)^{\frac{1}{2}}=\sqrt{x^Hx}$$

$$\|x\|_\infty=\max_{1\le i\le n}|x_i|$$

$Holder$范数: $\|x\|_P=\left(\sum_{i=1}^{n}|x_i|^P\right)^{\frac{1}{P}}$ ， $1\le P<\infty$ 才是向量范数

$\|x\|_P=\left(\sum_{i=1}^{n}|x_i|^P\right)^{\frac{1}{P}}$ ， $0<P<1$ 不是向量范数

柯西施瓦茨不等式：

$x=(x_1,x_2,\ldots,x_n)^T$， $y=(y_1,y_2,\ldots,y_n)^T$

$\|x+y\|_2\le\|x\|_2+\|y\|_2$

范数的证明：范数本质其实是一个映射，把一个矩阵、向量映射成了一个数

齐次性：$\|\lambda x\|=|\lambda|\|x\|$

正定性：$\|x\|\ge 0$， 当且仅当$x=0$时$\|x\|=0$

三角不等式：$\|x+y\|\le\|x\|+\|y\|$

①证明：设$\|.\|$为C^n上的范数，$A\in C_n^{m\times n}$，则$\|A\cdot\|$是C^m上的范数

证明：

齐次性：$\|A(\lambda x)\|=\|\lambda Ax\|=|\lambda|\|Ax\|$

正定性：$x\ne 0\Rightarrow Ax\ne 0\Rightarrow\|Ax\|>0$

三角不等式：$\|A(x+y)\|=\|Ax+Ay\|\le\|Ax\|+\|Ay\|$

②证明向量二范数是向量范数

证明：

$\|x+y\|_2^2=(x+y)^H(x+y)=x^Hx+x^Hy+y^Hx+y^Hy\le|x^Hx|+|x^Hy|+|y^Hx|+|y^Hy|$

$\le\|x\|_2^2+2\|x\|_2\|y\|_2+\|y\|_2^2=\left(\|x\|_2+\|y\|_2\right)^2$

矩阵范数

1. 矩阵范数

$$\|A\|_{m_1}=\sum_{j=1}^{m}\sum_{i=1}^{n}\left|a_{ij}\right|$$

$$\|A\|_{m_2}=\left(\sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{m}\left|a_{ij}\right|^2\right)^{\frac{1}{2}}=\|A\|_F\ (Frobenius\text{范数})$$

$$\|A\|_{m_\infty}=\max_{i,j}\left|a_{ij}\right|$$

$$\|A\|_{m_2}^2=\mathrm{tr}\left(A^HA\right)=\sum_{i=1}^{n}\lambda\left(A^HA\right)$$

2. 算子范数（必须是方阵）

①定义：设$\|x\|_a$是P^n上的向量范数，$A\in P^{n\times n}$，则$\|A\|_a=\max\limits_{x\neq 0}\frac{\|Ax\|_a}{\|x\|_a}$

是与向量范数$\|x\|_a$相容的矩阵范数，称此范数为从属于该向量范数$\|x\|_a$的算子范数

②算子1范数（列和极大范数） $\|A\|_1=\max\limits_{j}\sum_{i=1}^{n}\left|a_{ij}\right|$

③算子无穷范数（行和极大范数） $\|A\|_\infty=\max\limits_{i}\sum_{j=1}^{n}\left|a_{ij}\right|$

④谱半径：$r(A)=\max\left|\lambda_i\right|$

$r(A)\leq\|A\|_\infty$

⑤算子2范数（谱范数）$\|A\|_2=\sqrt{r(A^HA)}$

谱范数性质：

$\|A\|_2=\left\|A^H\right\|_2=\left\|A^T\right\|_2=\left\|\bar{A}\right\|_2$

$\left\|A^HA\right\|_2=\left\|AA^H\right\|_2=\|A\|_2^2$

谱范数是酉不变范数

$\|A\|_2^2\leq\|A\|_1\|A\|_\infty$

3. 酉不变范数（$\|UAV\|=\|A\|$，其中U,V均为酉矩阵）：矩阵2范数和算子2范数

$\|A\|_2=\max\limits_{i}\sigma_i$

$$\|A\|_{m_2}=\left(\sum_{i=1}^{r}\sigma_i^2\right)^{\frac{1}{2}}$$

4. 例题

①设$A\in C^{n\times n}$为酉矩阵，则$\|A\|_{m2}^{2}=n$。（ ）√

②设$A \in C^{n\times n}$，则$\| A \|_1 \cdot \| A \|_\infty < \| A \|_2^2$。 （ ）×

③设$A = \left(a_{ij}\right) \in C^{m\times n}$，定义实数$\| A \|_G = \sqrt{mn}\max\limits_{i,j}|a_{ij}|, 1 \leqslant i \leqslant m, 1 \leqslant j \leqslant n$，
证明：$\| A \|_G$是$C^{m\times n}$上的矩阵范数。
证明：
正定性：当$A \neq 0$，$\| A \|_G = \sqrt{mn}\max\limits_{i,j}|a_{ij}| \neq 0$
齐次性：$\| \lambda A \|_G = \sqrt{mn}\max\limits_{i,j}\left|\lambda a_{ij}\right| = |\lambda| \sqrt{mn}\max\limits_{i,j}\left|a_{ij}\right| = |\lambda|\|A\|_G$
三角不等式：$\| A + B \|_G = \sqrt{mn}\max\limits_{i,j}\left|a_{ij} + b_{ij}\right| \leq \sqrt{mn}\max\limits_{i,j}\left|a_{ij}\right| + \sqrt{mn}\max\limits_{i,j}\left|b_{ij}\right| = \|A\|_G + \| B \|_G$

范数的相容性

1. 范数相容性：

①对于任何的可乘矩阵A,B，如果矩阵范数$\|.\|$恒有不等式$\|AB\| \leq \|A\|\|B\|$，则称该矩阵范数是自相容的

②设$\|.\|_a$是P^n上的向量范数，$\|.\|_m$是$P^{n\times n}$上的矩阵范数，若$\|Ax\|_a \leq \|A\|_m\|x\|_a$ 恒成立，则称矩阵范数$\|.\|_m$ 和向量范数$\|.\|_a$相容

③常用结论

$\|A\|_{m_1}$，$\|A\|_{m_2}$，均为自相容的矩阵范数

$\|A\|_{m_\infty}$ 不是自相容的矩阵范数，但是 $\|A\|_a = n\|A\|_{m_\infty}$ 为自相容矩阵范数

算子1范数和向量1范数相容；矩阵1范数和向量1范数也相容

算子2范数和向量2范数相容；矩阵2范数和向量2范数也相容

算子无穷范数和向量无穷范数相容；矩阵无穷范数和向量无穷范数不相容

算子范数是和向量范数相容的所有矩阵范数中最小的范数

定理：如果$\|.\|_m$是一个相容的矩阵范数，则对于任一矩阵$A \in C^{n\times n}$，都有$|\lambda_i| \leq \|A\|_m$。其中λ_i是矩阵A的特征值

推论：$r(A) \leq \|A\|_m$

2. 例题

①证明：如果$\|.\|_m$是一个相容的矩阵范数，则对于任一矩阵$A \in C^{n\times n}$，都有$|\lambda_i| \leq \|A\|_m$。其中λ_i是矩阵A的特征值

证明：

$\because \lambda x = Ax$

$\therefore \|\lambda x\| = \|Ax\|$

$\|Ax\| \leq \|A\|_m\|x\|$

$\|\lambda x\| = |\lambda|\|x\|$

$\therefore |\lambda| \leq \|A\|_m$

②证明：$r(A) \leq \|A\|_m$,其中$\|A\|_m$是一个相容的矩阵范数

证明：

$\because r(A) = \max|\lambda_i|$ ，且$|\lambda| \leq \|A\|_m$

$\therefore r(A) \leq \|A\|_m$

③下列选项错误的是（ ）C

（A）$A^H = A \in C^{n\times n}$，则$\|A\|_1 = \|A\|_\infty$；

（B）$A \in C^{n\times n}$为可逆矩阵，λ为其任一特征值，$\|\cdot\|$为任意的算子范数，则$|\lambda| \geqslant \frac{1}{\|A^{-1}\|}$；

（C）$A = E - 2uu^H, u \in C^n$且$\|u\|_2 = 1$，则$\|A\|_2 = \sqrt{n}$；

（D）设$A \in C^{m\times n}, X \in C^{n\times r}, B \in C^{r\times s}$，则$Vec(AXB) = \left(B^T \otimes A\right) VecX$；

④设A为n阶可逆矩阵，r(A)是其谱半径，$\|\cdot\|$是任意算子范数，则必有（ ）

（A）$\|A^{-1}\| = \frac{1}{\|A\|}$； （B）$\|A^5\| \leqslant \|A\|^5$； （C）$\|A^5\| \geqslant \|A\|^5$； （D）$\|A\| \geqslant r\left(A^H A\right)$；

矩阵的摄动

引例：$A=\begin{pmatrix}2 & 6\\ 2 & 6.00001\end{pmatrix}$ $\delta A=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & -0.00002\end{pmatrix}$
$A^{-1}=\begin{pmatrix}300000.5 & -300000\\ -100000 & 100000\end{pmatrix}$
$(A+\delta A)^{-1}=\begin{pmatrix}-299999.5 & -300000\\ 100000 & -100000\end{pmatrix}$
$K_2(A)=1105$

①条件数：设A时可逆矩阵，$K_p(A)=\|A\|_p\cdot\|A^{-1}\|_P$，是矩阵$A$相对于矩阵范数$\|.\|_p$的条件数
$K_p(A)$较大的矩阵称为病态矩阵，$K_p(A)$较小的矩阵称为良态矩阵

②定理1：$A\in P^{n\times n}$，$\|A\|_a$是从属于向量范数$\|x\|_a$的算子范数，则当$\|A\|_a<1$时；$E-A$是可逆的，且
$\|(E-A)^{-1}\|_a\leq(1-\|A\|_a)^{-1}$
证明：
设$x\in C^n$为任一非零向量则
$\|(E-A)x\|_a=\|x-Ax\|_a\geq\|x\|_a-\|Ax\|_a\geq\|x\|_a-\|A\|_a\|x\|_a=\|x\|_a(1-\|A\|_a)>0$
∴对于方程组$(E-A)x=0$无非零解
∴$E-A$必定为可逆矩阵
即$(E-A)(E-A)^{-1}=E$
即$(E-A)^{-1}=E+A(E-A)^{-1}$
$\|(E-A)^{-1}\|_a=\|E+A(E-A)^{-1}\|_a\leq\|E\|_a+\|A\|_a\|(E-A)^{-1}\|_a$
$=1+\|A\|_a\|(E-A)^{-1}\|_a$
∴$(1-\|A\|_a)\|(E-A)^{-1}\|_a\leq 1$
∴$\|(E-A)^{-1}\|_a\leq(1-\|A\|_a)^{-1}$

矩阵分解之三角分解

定理：若A为满秩方阵，则A可以唯一分解为$A=UR$，其中U是酉矩阵，R是正线上三角矩阵
或者A可以唯一分解为，$A=LU$，其中U是酉矩阵，L是正线下三角矩阵

注意：满秩方阵才有分解式；唯一分解；对正线上三角矩阵矩阵施加酉变换可以得到满秩矩阵

定理：若A为满秩实方阵，则A可以唯一分解为$A=QR$，其中Q是正交矩阵，R是正线上三角实矩阵
或者A可以唯一分解为，$A=LQ$，其中Q是正交矩阵，L是正线下三角实矩阵

定理：设A是实对称正定矩阵，则存在唯一正线上三角实矩阵R，使得$A=R^TR$
定理：设A是正定Hermite矩阵，则存在唯一正线上三角复矩阵R，使得$A=R^HR$

①利用施密特正交化求QR分解

$$b_1=a_1\quad,e_1=\frac{b_1}{\|b_1\|}$$

$$b_2=a_2-(a_2,e_1)e_1\quad,e_2=\frac{b_2}{\|b_2\|}$$

$$b_3=a_3-(a_3,e_1)e_1-(a_3,e_2)e_2\quad,e_3=\frac{b_3}{\|b_3\|}$$

…

$$b_n=a_n-(a_n,e_1)e_1-\cdots-(a_n,e_{n-1})e_{n-1}$$

$$[a_1,a_2,a_3]=[e_1,e_2,e_3]\begin{pmatrix}\|b_1\| & (a_2,e_1) & (a_3,e_1)\\ 0 & \|b_2\| & (a_3,e_2)\\ 0 & 0 & \|b_3\|\end{pmatrix}$$

$A=\begin{pmatrix}0&1&1\\1&1&0\\1&0&1\end{pmatrix}$，求$A$的$QR$分解

解：

$a_1=(0,1,1)^T,a_2=(1,1,0)^T,a_3=(1,0,1)^T$

则：

$b_1=a_1=(0,1,1)^T$，$\|b_1\|=\sqrt{2}$，$e_1=\frac{1}{\sqrt{2}}(0,1,1)^T$

$(a_2,e_1)=\frac{1}{\sqrt{2}}$

$b_2=a_2-(a_2,e_1)e_1=\left(1,\frac{1}{2},-\frac{1}{2}\right)^T$，$\|b_2\|=\frac{\sqrt{6}}{2}$，$e_2=\frac{1}{\sqrt{6}}(2,1,-1)^T$

$(a_3,e_1)=\frac{1}{\sqrt{2}}$，$(a_3,e_2)=\frac{1}{\sqrt{6}}$

$b_3=a_3-(a_3,e_1)e_1-(a_3,e_2)e_2=\left(\frac{2}{3},-\frac{2}{3},\frac{2}{3}\right)^T$，$\|b_3\|=\frac{2}{\sqrt{3}}$，$e_3=\frac{1}{\sqrt{3}}(1,-1,1)^T$

$$\therefore Q=[e_1,e_2,e_3]=\begin{pmatrix}0 & \frac{2}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}}\\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{\sqrt{3}}\\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}}\end{pmatrix}$$

$$R=\begin{pmatrix}\sqrt{2} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}}\\ 0 & \frac{\sqrt{6}}{2} & \frac{1}{\sqrt{6}}\\ 0 & 0 & \frac{2}{\sqrt{3}}\end{pmatrix}$$

②利用Household变换求QR分解

第一步：

将矩阵A按列分块$A=(\alpha_1,\alpha_2,\dots,\alpha_n)$，取

$w_1=\dfrac{\alpha_1-a_1e_1}{\|\alpha_1-a_1e_1\|}$，$a_1=\|\alpha_1\|_2$，$e_1=(1,0,\dots,0)$

$H_1=I-2w_1w_1^H$

$$H_1A=\begin{pmatrix}a_1 & \cdots & *\\ \vdots & & \\ 0 & & B_1\end{pmatrix}$$

第二步：

将矩阵$B_1\in C^{n-1\times n-1}$分块,$B_1=(\beta_1,\beta_2,\dots,\beta_n)$，令

$u_2=\dfrac{\beta_1-b_2e_1}{\|\beta_1-b_2e_1\|}$,$b_2=\|\beta_1\|_2$

$\widetilde{H}_2=I-2u_2u_2^H$

$$H_2=\begin{pmatrix}1 & \cdots & 0\\ \vdots & & \\ 0 & & \widetilde{H}_2\end{pmatrix}$$

$$H_2H_1A=\begin{pmatrix}a_1 & \cdots & *\\ \vdots & a_2 & *\\ 0 & & C_2\end{pmatrix}$$

$C_2\in C^{(n-2)\times(n-2)}$

第$n-1$步：

$$H_{n-1}\cdots H_2H_1A=\begin{pmatrix}a_1 & \cdots & *\\ \vdots & a_2 & *\\ 0 & & a_n\end{pmatrix}=R$$

$Q=H_1H_2\cdots H_{n-1}$

用Household变换求矩阵$A=\begin{pmatrix}0 & 3 & 1\\ 0 & 4 & -2\\ 2 & 1 & 1\end{pmatrix}$的$QR$分解

解：

$\alpha_1=(0,0,2)^T$，$a_1=2$

$w_1=\dfrac{\alpha_1-a_1e_1}{\|\alpha_1-a_1e_1\|}=\dfrac{1}{\sqrt{2}}(-1,0,1)^T$，$H_1=I-2w_1w_1^H=\begin{pmatrix}0 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 0\\ 1 & 0 & 0\end{pmatrix}$

从而

$$H_1A=\begin{pmatrix}2&1&2\\0&4&-2\\0&3&1\end{pmatrix}$$

记$\beta_1=(4,3)^T$，$b_2=5$

$$u_2=\frac{\beta_1-b_2e_1}{\|\beta_1-b_2e_1\|}=\frac{1}{\sqrt{10}}(-1,3)^T，\widetilde{H}_2=I-2u_2u_2^H=\frac{1}{5}\begin{pmatrix}4&3\\3&-4\end{pmatrix}$$

$$H_2=\begin{pmatrix}1&\cdots&0\\\vdots&&\\0&&\widetilde{H}_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&4&3\\0&3&-4\end{pmatrix}$$

$$H_2H_1A=\begin{pmatrix}2&1&2\\0&5&-1\\0&0&2\end{pmatrix}=R$$

$$Q=H_1H_2=\frac{1}{5}\begin{pmatrix}0&3&-4\\0&4&3\\5&0&0\end{pmatrix}$$

矩阵分解之谱分解

1. 单纯矩阵的谱分解
单纯矩阵：每个特征值的代数重数等于几何重数的矩阵
定理1：设矩阵$A \in C^{n\times n}$是单纯矩阵，则A可以分解为一系列幂等矩阵A_i的加权和，即：$A=\sum_{i=1}^{n}\lambda_i A_i$
其中λ_i是A的特征值

定理：设矩阵$A \in C^{n\times n}$，它有k个相异的特征值λ_i，则矩阵A是单纯矩阵的充要条件是存在k个矩阵A_i满足：

$$\sum_{i=1}^{k} A_i = E_n$$

$$A=\sum_{i=1}^{k}\lambda_i A_i$$

$$A_iA_j=\begin{cases}A_i, j=\mathrm{i}\\ 0, j\neq \mathrm{i}\end{cases}$$

、

矩阵A_i的构造：
求出A的所有特征值对应的特征向量，构造P和P^{-1}并进行分块：

$$PP^{-1}=(v_1,v_2\cdots v_n)\begin{pmatrix} w_1^T\\ w_2^T\\ W_n^T\end{pmatrix}$$

$$A_i=v_iw_i^T$$

2. 正规矩阵的谱分解：
正规矩阵：$AA^H=A^HA$
引理1：任何方阵都和一个Jordan标准型相似
引理2：Schur引理：对于任一方阵$A\in C^{n\times n}$，一定存在酉矩阵U，使得$A=URU^H$。其中R是一个上三角矩阵且主对角元素为A的特征值
引理3：假设矩阵A是三角矩阵，则A是正规矩阵的充要条件是A是对角矩阵

定理1：n阶复矩阵A是正规矩阵的充要条件是A与对角矩阵酉相似

定理2：设矩阵$A \in C^{n\times n}$，它有k个相异的特征值λ_i，则矩阵A是正规矩阵的充要条件是存在k个矩阵A_i满足：

$$\sum_{i=1}^{k} A_i = E_n$$

$$A=\sum_{i=1}^{k}\lambda_i A_i$$

$$A_iA_j=\begin{cases}A_i, j=\mathrm{i}\\ 0, j\neq \mathrm{i}\end{cases}$$

$$A_i=A_i^H$$

3. 常用结论
单纯矩阵：每个特征值的代数重数等于几何重数的矩阵⇔ 与对角矩阵相似（存在可逆矩阵）
正规矩阵：$AA^H=A^HA \Leftrightarrow$ 与对角矩阵酉相似（存在酉矩阵）

正规矩阵一定是单纯矩阵
单纯矩阵不一定是正规矩阵
正规矩阵不一定是Hermite矩阵

对角矩阵、酉矩阵、Hermite、反Hermite矩阵一定是正规矩阵

$A^H = A \Rightarrow \|A\|_2 = r(A)$
正规矩阵$\Rightarrow \|A\|_2 = r(A)$
正规矩阵，奇异值等于特征值的模

4. 例题
①$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}$，求$A$的谱分解
解：
$\because |\lambda E - A| = (\lambda - 3)(\lambda + 1) = 0$
$\therefore A$的特征值为$3，-1$
特征值3对应得特征向量为$(1,2)^T$
特征值-1对应得特征向量为$(1,-2)^T$
$\therefore P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}$，$P^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{4} \end{pmatrix}$
$\therefore PP^{-1} = (v_1, v_2)\begin{pmatrix} w_1^T \\ w_2^T \end{pmatrix}$
$A_1 = v_1 w_1^T = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \\ 1 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$
$A_2 = v_2 w_2^T = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{4} \\ -1 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$
$\therefore A = 3A_1 - A_2$

②设A为n阶单纯矩阵，则下列结论正确的是（ ）
（A）A有n个正交的特征向量；　（B）$\| A \|_{m2}^2 = \sum_{i=1}^{n} |\lambda_i|^2$；
（C）$A^H = A$；　（D）A的特征值的几何重数之和为n；

矩阵分解之最大秩分解

设$A \in C_r^{m\times n}$，则存在矩阵$B \in C_r^{m\times r}$，$D \in C_r^{r\times n}$，使得$A = BD$

例题：

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 & -2 & 2 \\ 1 & -5 & 2 & 1 & -1 \\ 2 & 6 & -3 & -3 & 3 \\ -1 & -11 & 5 & 4 & -4 \end{pmatrix}$$

第一步：对矩阵进行初等行变换，得到行标准形矩阵

$$\hat{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -\frac{3}{16} & -\frac{9}{16} & \frac{9}{16} \\ 0 & 1 & -\frac{7}{16} & -\frac{5}{16} & \frac{5}{16} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

第二步：寻找每一行1，所对应原矩阵A的列

$$B = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & -5 \\ 2 & 6 \\ -1 & -11 \end{pmatrix}$$

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -\frac{3}{16} & -\frac{9}{16} & \frac{9}{16} \\ 0 & 1 & -\frac{7}{16} & -\frac{5}{16} & \frac{5}{16} \end{pmatrix}$$

矩阵分解之奇异值分解

1. 设$A \in C_r^{m\times n}$，$A^H A$的特征值为$\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \cdots \geq \lambda_r > \lambda_{r+1} = \cdots = \lambda_n = 0$，则称$\sigma_i = \sqrt{\lambda_i}$为矩阵$A$的正奇异值

$\operatorname{rank}(A) = \operatorname{rank}\left(A^H A\right) = \operatorname{rank}\left(AA^H\right)$
$A^H A$，AA^H的特征值均为非负实数
$A^H A$，AA^H非零特征值相同，零特征值个数不同

2. 设$A \in C_r^{m\times n}$，$\sigma_1, \sigma_2 \cdots \sigma_r$是$A$的$r$个正奇异值，则存在$m$阶酉矩阵$U$和$n$阶酉矩阵$V$，使得：
$A = U\begin{pmatrix} D & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}V$

求解方法：
①求出矩阵$A^H A$的全部特征值和特征向量，并将特征向量施密特正交化
②V为$A^H A$特征向量拼成的矩阵，D为A的正奇异值矩阵
③将特征向量拼成的矩阵分块$V = \left(V_1, V_2\right)$
④$U_1^H = \left(D^H\right)^{-1} V_1 A^H$
⑤将U_1^H扩充成m阶酉矩阵U^H

3. 例题
①求矩阵$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$的奇异值分解

$A^H A = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$，$D = \left(\sqrt{5}\right)$

$\alpha_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$，$\alpha_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$，$\alpha_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

则酉矩阵$V = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} V_1 \\ V_2 \end{pmatrix}$ $V_1 \in C_r^{r\times n}$，$V_2 \in C_{(n-r)}^{(n-r)\times n}$，其中$r$为矩阵$A$的秩，$n$为矩阵$A$的列数

$U_1^H = \left(D^H\right)^{-1} V_1 A^H = \left(\frac{1}{\sqrt{5}}, \frac{2}{\sqrt{5}}\right)$，接着扩充$U_1^H$

$U_2^H = \left(-\frac{2}{\sqrt{5}}, \frac{1}{\sqrt{5}}\right)$

$$U = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{5}} & -\frac{2}{\sqrt{5}} \\ \frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{5}} \end{pmatrix}$$

②设$A \in C^{m\times n}$，U为n阶酉矩阵，下列说法错误的是（ ）
（A）$\| A \|_F = \| AU \|_F$； （B）A和AU的特征值相同；
（C）A和AU的正奇异值相同； （D）rank（A）=rank（AU）；

Hermite矩阵的分解

①$A \in C^{n\times n}$为Hermite矩阵：则
A的特征值全部为实数
A不同特征值所对应的特征向量相互正交

②反Hermite矩阵的特征值都为纯虚数

③$A \in C^{n\times n}$为Hermite矩阵：则下面命题等价
A是正定矩阵
A的特征值全部为正实数
存在可逆矩阵C，使得$A = C^H C$

④如果$A \in C^{n\times n}$是正定的Hermite矩阵，则
A的主对角线元素都大于零
存在正定Hermite矩阵B，使得$A = B^2$
存在可逆矩阵C，使得$A = C^H C$

⑤如果$A \in C^{n\times n}$是Hermite矩阵，则下面命题等价：
A是半正定矩阵
A的特征值非负

定理：设A是实对称正定矩阵，则存在唯一正线上三角实矩阵R，使得$A = R^T R$
定理：设A是正定Hermite矩阵，则存在唯一正线上三角复矩阵R，使得$A = R^H R$

特征值估计

1. 特征值界的估计

Shur不等式：设$A\in C^{n\times n}$的特征值为$\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$，则：$\sum_{i=1}^{n}\left|\lambda_i\right|^2\le\|A\|_F^2$，等号成立当且仅当$A$为正规矩阵

2. Gerschgorin（盖尔）圆盘定理

行盖尔圆：$S_i=\left\{z\in C:\left|z-a_{ii}\right|\le R_i，R_i=\sum_{j\ne i}\left|a_{ij}\right|\right\}$

列盖尔圆：$G_i=\left\{z\in C:\left|z-a_{jj}\right|\le C_j，C_j=\sum_{j\ne i}\left|a_{ij}\right|\right\}$

定理：矩阵的特征值一定落在行（列）盖尔圆中，也落在行盖尔圆和列盖尔圆的交集中。

定理：设n阶方阵A的n个盖尔圆盘中的k个的并形成一个连通区域G，且G与余下的$n-k$个盖尔圆都不相交，则在G中恰好有矩阵A的k个特征值

推论：（共轭特征值必定成对出现）
如果n阶方阵A的n个盖尔圆两两不相交，则矩阵A相似于对角矩阵
如果n阶实阵A的n个盖尔圆两两不相交，则A的特征值全为实数

行对角占优矩阵：$\left|a_{ii}\right|\ge R_i$
列对角占优矩阵：$\left|a_{jj}\right|\ge C_j$
行严格对角占优矩阵：$\left|a_{ii}\right|>R_i$
列严格对角占优矩阵$\left|a_{ii}\right|>C_j$

设矩阵A为行（列）严格对角占优矩阵，则
（1）矩阵A一定可逆
（2）若矩阵A的所有主对角元素都为正数，则A的特征值都有正实部
（3）若矩阵A为Hermite矩阵，且所有主对角元素都为正数，则A的特征值都为正数

3. 例题

①$A=\begin{pmatrix}\frac{1}{4}&\frac{1}{4}&\frac{1}{4}&\frac{1}{4}\\\frac{1}{5}&\frac{2}{5}&\frac{1}{5}&\frac{1}{5}\\\frac{1}{6}&\frac{1}{6}&\frac{3}{6}&\frac{1}{6}\\\frac{1}{7}&\frac{1}{7}&\frac{1}{7}&\frac{4}{7}\end{pmatrix}$，证明$r(A)=1$

证明：
∵该矩阵为行和相等的矩阵
∴该矩阵必有特征值1
∴$r(A)\ge1$
又∵$\|A\|_\infty=1$
∴$r(A)\le\|A\|_\infty=1$
∴$r(A)=1$

②$A=\begin{vmatrix} 2 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2^2} & \frac{1}{2^3} & \frac{1}{2^4} \\ \frac{2}{3} & 4 & \frac{2}{3^2} & \frac{2}{3^3} & \frac{2}{3^4} \\ \frac{3}{4} & \frac{3}{4^2} & 6 & \frac{3}{4^3} & \frac{3}{4^4} \\ \frac{4}{5} & \frac{4}{5^2} & \frac{4}{5^3} & 8 & \frac{4}{5^4} \\ \frac{4}{5} & \frac{4}{5^2} & \frac{4}{5^3} & \frac{4}{5^4} & 10 \end{vmatrix}$，证明$A$有5个不同的实特征值

证明：

依题意，五个盖尔圆的圆心分别为2,4,6,8,10

而根据盖尔圆的定义可知，五个盖尔圆的半径均小于1

∴五个盖尔圆互不相交，并且矩阵A为实矩阵

∴矩阵A有5个不同的实特征值

③用圆盘定理证明$A=\begin{bmatrix} 9 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 8 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 4 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$至少有两个实特征根

证明：

矩阵A的第三行和第四行对应的盖尔圆，圆心为4,1，半径为1，且不相交

∴矩阵A至少有两个实特征值

④下列命题错误的是（ ）

（A）矩阵A的每个行盖尔圆不一定包含A的特征值；

（B）严格对角占优的矩阵一定是可逆矩阵；

（C）若n阶实矩阵A的n个圆盘两两互不相交，则A一定相似于对角矩阵；

（D）若A为Hermite矩阵，则A的特征值都为非负实数；

⑤下列结论错误的是（ ）

（A）n阶矩阵A的n个盖尔圆两两互不相交，则A为单纯矩阵；

（B）λ为n阶酉矩阵U的特征值，则$|\lambda|=1$；

（C）正规矩阵的特征值与奇异值相同；

（D）n阶方阵A有零特征值，则A不是严格对角占优矩阵；

⑥Shur不等式：设$A\in C^{n\times n}$ 的特征值为$\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$，则：$\sum_{i=1}^{n}|\lambda_i|^2\le\|A\|_F^2$ ，

等号成立当且仅当A为正规矩阵

证明：

∵$A=URU^H$。其中R是一个上三角矩阵且主对角元素为A的特征值

$$\therefore\sum_{i=1}^{n}|\lambda_i|^2=\sum_{i=1}^{n}|R_{ii}|^2\le\sum_{i=1}^{n}|R_{ii}|^2+\sum_{i\ne j}|R_{ij}|^2=\|R\|_F^2$$

又∵$\|A\|_F=\|URU^H\|_F=\|R\|_F$

$$\therefore\sum_{i=1}^{n}|\lambda_i|^2\le\|A\|_F^2$$

若想$\sum_{i=1}^{n}|\lambda_i|^2=\|A\|_F^2$

则：$\sum_{i\ne j}|R_{ij}|^2=0$

即R矩阵为对角矩阵

即矩阵A和对角矩阵酉相似

$\therefore A$为正规矩阵时，$\sum_{i=1}^{n}\left|\lambda_i\right|^2=\|A\|_F^2$

矩阵级数

1. 收敛矩阵：

设$A \in C^{n\times n}$若$\lim\limits_{k\to\infty} A^k = 0$（k为正整数）则称$A$为收敛矩阵

定理：矩阵A为收敛矩阵的充分必要条件是$r(A) < 1$

2. 矩阵级数

$$\sum_{k=1}^{\infty} A_k = A_1 + A_2 + \cdots + A_k + \cdots$$

当$\sum_{k=1}^{\infty} A_k$ 为有限值时，称级数 $\sum_{k=1}^{\infty} A_k$ 收敛

定理：方阵A的幂级数$\sum_{k=0}^{\infty} A^k = E + A + A^2 + \cdots + A^k$

收敛的充要条件是A为收敛矩阵，此时幂级数的和函数为$(E-A)^{-1}$

定理：设幂级数$\sum_{k=0}^{\infty} C_k z^k$的收敛半径为$r$ ；如果$r(A) < r$，则矩阵幂级数 $\sum_{k=0}^{\infty} C_k A^k$绝对收敛

如果$r(A) > r$，则矩阵幂级数$\sum_{k=0}^{\infty} C_k A^k$发散

3. 例题：

①求$\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \begin{pmatrix} 0.1 & 0.7 \\ 0.3 & 0.6 \end{pmatrix}^k$

解：

$A = \begin{pmatrix} 0.1 & 0.7 \\ 0.3 & 0.6 \end{pmatrix}$

$\because r(A) \le \|A\|_\infty = 0.9$

$\therefore$该幂级数收敛

$\therefore$和函数为$(E-A)^{-1} = \begin{pmatrix} 0.9 & -0.7 \\ -0.3 & 0.4 \end{pmatrix}^{-1} = \frac{2}{3}\begin{pmatrix} 4 & 7 \\ 3 & 9 \end{pmatrix}$

②讨论下列幂级数的敛散性

（1）$\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}\begin{pmatrix} 1 & 7 \\ -1 & -3 \end{pmatrix}^k$；（2）$\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \frac{k}{6^k}\begin{pmatrix} 1 & -8 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}^k$；

解：

（1）$A = \begin{pmatrix} 1 & 7 \\ -1 & -3 \end{pmatrix}$

可得A的特征值为-2

$\therefore r(A) = 2$

而幂级数$\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} x^k$ 的收敛半径为$r = \lim\limits_{k\to\infty} \left|\frac{c_k}{c_{k+1}}\right| = \lim\limits_{k\to\infty} \frac{(k+1)^2}{k^2} = 1$

$\because r(A) > 1$

$\therefore$级数$\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}\begin{pmatrix} 1 & 7 \\ -1 & -3 \end{pmatrix}^k$ 发散

（2）$A=\begin{pmatrix}1 & -8\\ -2 & 1\end{pmatrix}$

可得A的特征值为-3，5

$\therefore r(A)=5$

而幂级数$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{k}{6^k}x^k$的收敛半径为$r=\lim\limits_{k\to\infty}\left|\frac{c_k}{c_{k+1}}\right|=\lim\limits_{k\to\infty}\frac{k\cdot 6^{k+1}}{6^k(k+1)}=6$

$\because r(A)<6$

$\therefore$级数$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2}\begin{pmatrix}1 & 7\\ -1 & -3\end{pmatrix}^k$收敛

③设矩阵$A=\begin{pmatrix}0 & c & c\\ c & 0 & c\\ c & c & 0\end{pmatrix}$，$c\in R$，讨论$c$取何值时矩阵$A$为收敛矩阵

解：

$|\lambda E-A|=(\lambda+c)^2(\lambda-2c)$

$\therefore$矩阵A的特征值为$2c$，c

$\therefore r(A)=2|c|$

$\therefore 2|c|<1\Rightarrow -\frac{1}{2}<c<\frac{1}{2}$

矩阵函数

1. 矩阵函数

$$e^A=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}A^k$$

$$\sin A=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{(2k+1)!}A^{2k+1}$$

$$\cos A=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{(2k)!}A^{2k}$$

$e^{-A}e^A=e^Ae^{-A}=E$

$\left(e^A\right)^m=e^{mA}$，其中$m$为整数

如果$AB=BA$(可交换)

则$e^Ae^B=e^Be^A=e^{A+B}$

$\sin(A+B)=\sin A\cos B+\cos A\sin B$

$\cos(A+B)=\cos A\cos B-\sin A\sin B$

2. 例题

①利用相似对角化求矩阵函数

设矩阵$A=\begin{pmatrix}4&6&0\\-3&-5&0\\-3&-6&1\end{pmatrix}$，求$e^{At}$，$\cos A$

解：

第一步：求出矩阵A的特征值和特征向量（可以不用施密特正交化）

$\det(\lambda E-A)=(\lambda+2)(\lambda-1)^2$

$\lambda_1=-2\quad \xi_1=(-1,1,1)^T$

$\lambda_2=\lambda_3=1\quad \xi_2=(-2,1,0)^T\quad \xi_3=(0,0,1)^T$

第二步：将特征向量按照特征值的顺序拼成矩阵P

$$P=\begin{pmatrix}-1&-2&0\\1&1&0\\1&0&1\end{pmatrix}$$

第三步：计算结果

$$e^{At}=P\begin{pmatrix}e^{-2t}&0&0\\0&e^t&0\\0&0&e^t\end{pmatrix}P^{-1}$$

$$\cos A=P\begin{pmatrix}\cos(-2)&0&0\\0&\cos(1)&0\\0&0&\cos(1)\end{pmatrix}P^{-1}$$

矩阵函数补充

1. 利用最小多项式（极小多项式）求矩阵函数

①求e^{At}

其中$A=\begin{pmatrix}1&0&2\\0&0&0\\-1&0&-2\end{pmatrix}$

解：

可得矩阵A的极小多项式为：$\lambda(\lambda+1)$

假设：$e^{At}=a(t)E+b(t)A$ （比极小多项式低一阶）

$\Rightarrow e^{xt}=a(t)+b(t)x$

$1=a(t)$

$e^{-t}=a(t)-b(t)$ ——极小多项式为0的值

$\Rightarrow a(t)=1$

$b(t)=1-e^{-t}$

$\Rightarrow e^{At}=E+(1-e^{-t})A$

②求$\sin A$

其中$A=\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&1\\2&-5&4\end{pmatrix}$

解：

可得最小多项式为：$(\lambda-2)(\lambda-1)^2$

假设：$\sin A=a_0A^2+a_1A+a_2E$

$\Rightarrow \sin x=a_0x^2+a_1x+a_2$

$\sin 2=4a_0+2a_1+a_2$

$a_0+a_1+a_2=\sin 1$

$2a_0+a_1=\cos 1 \quad \Leftrightarrow (\sin x)'=\left(a_0x^2+a_1x+a_2\right)'$

$\Rightarrow a_0=\sin 2-\sin 1-\cos 1$

$a_1=-2\sin 2+2\sin 1+3\cos 1$

$a_2=\sin 2-2\cos 1$

2. 根据最小多项式化简多项式

①已知$A=\begin{pmatrix}2&0&0\\1&1&1\\1&-1&3\end{pmatrix}$，$f(\lambda)=\lambda^6+2\lambda^5-\lambda^4+3\lambda^2-2\lambda+1$，求$f(A)$

解：

可得矩阵A的极小多项式为：$m(\lambda)=(\lambda-2)^2$

令：$f(\lambda)=q(\lambda)m(\lambda)+r(\lambda)$ ————多项式除法

$\Rightarrow r(\lambda)=330\lambda-539$

$\Rightarrow f(A)=r(A)=330A-539E$

矩阵微积分

1. 矩阵函数和矩阵的微积分

$$\frac{\mathrm{d}A(t)}{\mathrm{d}t}=\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}a_{ij}(t)\right)_{m\times n}$$

$$\int_a^b A(t)\,\mathrm{d}t=\left(\int_a^b a_{ij}(t)\,\mathrm{d}t\right)_{m\times n}$$

定理：设$A\in C^{n\times n}$，则

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\mathrm{e}^{At}=A\mathrm{e}^{At}$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\cos(At)=-A(\sin(At))$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\sin(At)=A\cos(At)$$

$$\frac{\mathrm{d}A^{-1}(t)}{\mathrm{d}t}=-A^{-1}(t)\frac{\mathrm{d}A(t)}{\mathrm{d}t}A^{-1}(t)$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\big(A(t)\cdot B(t)\big)=\frac{\mathrm{d}A(t)}{\mathrm{d}t}B(t)+A(t)\frac{\mathrm{d}B(t)}{\mathrm{d}t}$$

2. 数量函数对矩阵变量的导数

设$f(X)$是以矩阵$X=\left(x_{ij}\right)_{m\times n}$为自变量的$mn$元函数，且$\frac{\partial f}{\partial x_{ij}}(i=1,2,\cdots,m;j=1,2,\cdots,n)$都存在，规定$f$对$X$的导数$\frac{df}{dX}$为

$$\frac{df}{dX}=\left(\frac{\partial f}{\partial x_{ij}}\right)_{m\times n}=\begin{pmatrix}\frac{\partial f}{\partial x_{11}} & \cdots & \frac{\partial f}{\partial x_{1n}}\\ \vdots & & \vdots\\ \frac{\partial f}{\partial x_{m1}} & \cdots & \frac{\partial f}{\partial x_{mn}}\end{pmatrix}$$

特别地，以$x=\left(x_1,x_2,\cdots,x_n\right)^T$为自变量的函数$f(x)$的导数

$$\frac{df}{dx}=\left(\frac{\partial f}{\partial x_1},\frac{\partial f}{\partial x_2},\cdots,\frac{\partial f}{\partial x_n}\right)^T$$

$$\frac{df}{dx^T}=\left(\frac{\partial f}{\partial x_1},\frac{\partial f}{\partial x_2},\cdots,\frac{\partial f}{\partial x_n}\right)$$

称为数量函数对向量变量的导数

3. 例题

①已知$A(t)=\begin{pmatrix}\cos t & \sin t\\ -\sin t & \cos t\end{pmatrix}$，求$\frac{\mathrm{d}A(t)}{\mathrm{d}t}$，$\left|\frac{\mathrm{d}A(t)}{\mathrm{d}t}\right|$，$\frac{\mathrm{d}A^{-1}(t)}{\mathrm{d}t}$，$\int_0^{\frac{\pi}{2}}A(t)\,\mathrm{d}t$

解：

$$\frac{\mathrm{d}A(t)}{\mathrm{d}t}=\begin{pmatrix}-\sin t & \cos t\\ -\cos t & -\sin t\end{pmatrix}$$

$$\left|\frac{\mathrm{d}A(t)}{\mathrm{d}t}\right|=1$$

$$A^{-1}(t)=\begin{pmatrix}\cos t & -\sin t\\ \sin t & \cos t\end{pmatrix}$$

$$\frac{\mathrm{d}A^{-1}(t)}{\mathrm{d}t}=\begin{pmatrix}-\sin t & -\cos t\\ \cos t & -\sin t\end{pmatrix}$$
$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} A(t)\,\mathrm{d}t=\begin{pmatrix}1 & 1\\ -1 & 1\end{pmatrix}$$

②设$a=\left(a_1,a_2,\cdots a_n\right)^T$为给定的向量，$x=\left(x_1,x_2,\ldots,x_n\right)^T$为向量变量，$f(x)=a^Tx$，求$\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}$

解：

$$f(x)=a^Tx=a_1x_1+a_2x_2\cdot\cdots+a_nx_n$$
$$\frac{df}{dx}=\left(\frac{\partial f}{\partial x_1},\frac{\partial f}{\partial x_2},\cdots,\frac{\partial f}{\partial x_n}\right)^T=a$$

③设$A\in C^{n\times n}$，$b\in C^m$，$x\in R^n$，$f(x)=\|Ax-b\|_2^2$，求$\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}$

解：

$$f(x)=\|Ax-b\|_2^2=(Ax-b)^T(Ax-b)=x^TA^TAx-b^TAx-x^TA^Tb+b^Tb$$
$$=x^TA^TAx-2b^TAx+b^Tb$$
$$\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}=2A^TAx-2A^Tb$$

常系数微分方程组

$$\frac{\mathrm{d}x_1(t)}{\mathrm{d}t}=a_{11}x_1(t)+a_{12}x_2(t)+\cdots+a_{1n}x_n(t)+f_1(t)$$
$$\frac{\mathrm{d}x_2(t)}{\mathrm{d}t}=a_{21}x_1(t)+a_{22}x_2(t)+\cdots+a_{2n}x_n(t)+f_2(t)$$
$$\cdots$$
$$\frac{\mathrm{d}x_n(t)}{\mathrm{d}t}=a_{n1}x_1(t)+a_{n2}x_2(t)+\cdots+a_{nn}x_n(t)+f_n(t)$$

初始条件：$x_i(t_0)=c_i$

令：$A=\left(a_{ij}\right)_{n\times n}$

$c=\left(c_1,c_2,\ldots,c_n\right)^T$

$x(t)=\left(x_1(t),x_2(t),\ldots,x_n(t)\right)^T$

$f(t)=\left(f_1(t),f_2(t),\ldots,f_n(t)\right)^T$

$$\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}x(t)}{\mathrm{d}t}=Ax(t)+f(t)\\ x(t_0)=c\end{cases}$$

通解为：

$$x(t)=\mathrm{e}^{A(t-t_0)}c+\mathrm{e}^{At}\int_{t_0}^{t}\mathrm{e}^{-A\tau}f(\tau)\,\mathrm{d}\tau$$

①求解下列初值问题：

$$\frac{\mathrm{d}x_1(t)}{\mathrm{d}t}=-x_1(t)+x_3(t)+1$$
$$\frac{\mathrm{d}x_2(t)}{\mathrm{d}t}=x_1(t)+2x_2(t)-1$$
$$\frac{\mathrm{d}x_3(t)}{\mathrm{d}t}=-4x_1(t)+3x_3(t)+2$$

$x_1(0)=1$，$x_2(0)=0$，$x_3(0)=1$

解：

记：$A=\begin{pmatrix}-1&0&1\\1&2&0\\-4&0&3\end{pmatrix}$

$C=\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$，$x(t)=\begin{pmatrix}x_1(t)\\x_2(t)\\x_3(t)\end{pmatrix}$，$f(t)=\begin{pmatrix}1\\-1\\2\end{pmatrix}$

$$\mathrm{e}^{At}=\begin{pmatrix}\mathrm{e}^t-2t\mathrm{e}^t&0&t\mathrm{e}^t\\-\mathrm{e}^{2t}+\mathrm{e}^t+2t\mathrm{e}^t&\mathrm{e}^{2t}&\mathrm{e}^{2t}-\mathrm{e}^t-t\mathrm{e}^t\\-4t\mathrm{e}^t&0&2t\mathrm{e}^t+\mathrm{e}^t\end{pmatrix}$$

$$\mathrm{e}^{A(t-t_0)}c=\begin{pmatrix}\mathrm{e}^t-t\mathrm{e}^t\\t\mathrm{e}^t\\\mathrm{e}^t-2t\mathrm{e}^t\end{pmatrix}$$

$$\int_{t_0}^{t} e^{-A\tau} f(\tau)\,d\tau = \int_{0}^{t} \begin{pmatrix} e^{-\tau} \\ -e^{-\tau} \\ 2e^{-\tau} \end{pmatrix} d\tau = \begin{pmatrix} 1-e^{t} \\ -1+e^{-t} \\ 2-2e^{-t} \end{pmatrix}$$

$$e^{At}\int_{t_0}^{t} e^{-A\tau} f(\tau)\,d\tau = \begin{pmatrix} e^{t}-1 \\ -e^{t}+1 \\ 2e^{t}-2 \end{pmatrix}$$

∴此方程的解为：

$$x(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{t}-te^{t} \\ te^{t} \\ e^{t}-2te^{t} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} e^{t}-1 \\ -e^{t}+1 \\ 2e^{t}-2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (2-t)e^{t}-1 \\ (t-1)e^{t}+1 \\ (3-2t)e^{t}-2 \end{pmatrix}$$

单边逆

1. 单边逆

定理：矩阵A左可逆的充要条件是A为列满秩矩阵

定理：矩阵A右可逆的充要条件是A为行满秩矩阵

定理：矩阵A左可逆的充要条件是$N(A)=\{0\}$

定理：矩阵A右可逆的充要条件是$R(A)=C^m$

单边逆的求法：

①$A=\begin{pmatrix}-1 & 2\\ 0 & 1\\ 0 & 0\end{pmatrix}$，求$A$的一个左逆

$$(AE_3)=\begin{pmatrix}1 & -2 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\Rightarrow\begin{pmatrix}1 & 0 & 1 & 2 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$$

$$A_L^-=\begin{pmatrix}1 & 2 & 0\\ 0 & 1 & 0\end{pmatrix}$$

②$A=\begin{pmatrix}1 & 2 & -1\\ 0 & -1 & 2\end{pmatrix}$，求$A$的一个右逆

$$\begin{pmatrix}A\\ E_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 2 & -1\\ 0 & -1 & 2\\ 1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\Rightarrow\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 1 & 2 & -3\\ 0 & -1 & 2\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$$

$$A_L^-=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 0 & -1\\ 0 & 0\end{pmatrix}$$

注意：单边逆不唯一

广义逆

Moore-Penrose方程
$AGA=A$
$GAG=G$
$(GA)^H=GA$
$(AG)^H=AG$

1. 定理：设$A\in C^{m\times n}$，如果存在$G\in C^{n\times m}$，使得$AGA=A$ 成立，
则称G是A的广义逆矩阵记为A^-

2. 重要结论：
广义逆不唯一
$\mathrm{rank}(A^-)\geq\mathrm{rank}(A)$
$(A^T)^-=(A^-)^T$
$(A^H)^-=(A^-)^H$
AA^- 和A^-A 均为幂等矩阵
$\mathrm{rank}(A)=\mathrm{rank}(AA^-)=\mathrm{rank}(A^-A)$
$R(A)=R(AA^-)$
$N(A)=N(AA^-)$
$(A^-)^-\neq A$

设$A\in C^{m\times n}$，则
$\mathrm{rank}(A)=n$的充分必要条件是$A^-A=E_n$
$\mathrm{rank}(A)=m$的充分必要条件是$AA^-=E_m$

定理：λ^-A^-是λA的广义逆矩阵，其中$\lambda^-=\begin{cases}0\ ,\lambda=0\\ \lambda^{-1},\ \lambda\neq 0\end{cases}$
定理：设S是m阶可逆矩阵，T是n阶可逆矩阵，且$B=SAT$，则$T^{-1}A^-S^{-1}$是B的广义逆矩阵

定理：设$A\in C^{m\times n}$，则广义逆矩阵的一般形式为：$A^-+(E_n-A^-A)V+W(E_m-AA^-)$
其中，$V,W\in C^{n\times m}$，A^-为任意一个给定的广义逆矩阵

3. 例题
①证明$\mathrm{rank}(A^-)\geq\mathrm{rank}(A)$
证明：
$\because AA^-A=A$
$\therefore \mathrm{rank}(A)=\mathrm{rank}(AA^-A)\leq\mathrm{rank}(A^-A)\leq\mathrm{rank}(A^-)$

②证明$(A^T)^-=(A^-)^T$和$(A^H)^-=(A^-)^H$
证明：
$\because AA^-A=A$
$\therefore A^T=A^T(A^-)^TA^T$
$\therefore (A^T)^-=(A^-)^T$
同理可证$(A^H)^-=(A^-)^H$

③证明AA^- 和A^-A 均为幂等矩阵

证明：

$(AA^{-})^2 = AA^{-}AA^{-} = AA^{-}$

$(A^{-}A)^2 = A^{-}A\,A^{-}A = A^{-}A$

∴AA^{-} 和$A^{-}A$ 均为幂等矩阵

④证明$\mathrm{rank}(A) = \mathrm{rank}(AA^{-}) = \mathrm{rank}(A^{-}A)$

证明：

∵$AA^{-}A = A$

∴$\mathrm{rank}(A) = \mathrm{rank}(AA^{-}A) \le \mathrm{rank}(AA^{-}) \le \mathrm{rank}(A)$

∴$\mathrm{rank}(A) = \mathrm{rank}(AA^{-})$

同理可证$\mathrm{rank}(A) = \mathrm{rank}(A^{-}A)$

∴$\mathrm{rank}(A) = \mathrm{rank}(AA^{-}) = \mathrm{rank}(A^{-}A)$

⑤证明：设$A \in C^{m\times n}$，则

$\mathrm{rank}(A) = n$的充分必要条件是$A^{-}A = E_n$

$\mathrm{rank}(A) = m$的充分必要条件是$AA^{-} = E_m$

证明：

充分性：

∵$A^{-}A = E_n$

∴$\mathrm{rank}(A^{-}A) = n$

又∵$\mathrm{rank}(A) = \mathrm{rank}(A^{-}A)$

∴$\mathrm{rank}(A) = n$

必要性：

∵$\mathrm{rank}(A) = n = \mathrm{rank}(A^{-}A)$

∴$A^{-}A$为满秩矩阵且可逆

∴$E_n = (A^{-}A)(A^{-}A)^{-1} = A^{-}AA^{-}A(A^{-}A)^{-1} = A^{-}A$

自反广义逆

Moore-Penrose方程
$AGA = A$
$GAG = G$
$(GA)^H = GA$
$(AG)^H = AG$

1. 定理：设$A \in C^{m\times n}$，如果存在$G \in C^{n\times m}$，使得$AGA = A$，$GAG = G$ 同时成立，则称G是A的自反广义逆矩阵记为A_r^-

左右逆矩阵都是自反广义逆矩阵
任何矩阵都有自反广义逆矩阵
自反广义逆矩阵不唯一

2. 重要结论：
$\operatorname{rank}(A) = \operatorname{rank}(A_r^-)$

$C^m = R(A) \oplus N(A_r^-)$
$C^n = R(A_r^-) \oplus N(A)$

定理：设$X, Y \in C^{n\times m}$ 均为$A \in C^{m\times n}$的广义逆矩阵，则$Z = XAY$是A的自反广义逆矩阵

$R(A) = R(AA_r^-)$
$N(A_r^-) = N(AA_r^-)$
$R(A_r^-) = R(A_r^- A)$
$N(A) = N(A_r^- A)$

定理：$A \in C^{m\times n}$，A^-是A的广义逆矩阵，则A^-是A的自反广义逆矩阵的充要条件是$\operatorname{rank}(A^-) = \operatorname{rank}(A)$

AA_r^- 和$A_r^- A$ 均为幂等矩阵

3. 例题
①证明$\operatorname{rank}(A) = \operatorname{rank}(A_r^-)$
证明：
∵$AA_r^- A = A$ 且$A_r^- AA_r^- = A_r^-$
∴$\operatorname{rank}(A) = \operatorname{rank}(AA_r^- A) \le \operatorname{rank}(A_r^-) = \operatorname{rank}(AA_r^- A) \le \operatorname{rank}(A)$
∴$\operatorname{rank}(A) = \operatorname{rank}(A_r^-)$

②证明AA_r^- 和$A_r^- A$ 均为幂等矩阵
证明：
$(AA_r^-)^2 = AA_r^- AA_r^- = AA_r^-$
$(A_r^- A)^2 = A_r^- A A_r^- A = A_r^- A$
∴AA_r^- 和$A_r^- A$ 均为幂等矩阵

MP逆

Moore-Penrose方程
$AGA=A$
$GAG=G$
$(GA)^H=GA$
$(AG)^H=AG$

1.MP逆（MP逆一定唯一）：A^+
$A^+=D^H\left(DD^H\right)^{-1}\left(B^HB\right)^{-1}B^H$，其中$A=BD$为$A$的满秩分解

2. 常用结论
定理：如果矩阵A为行满秩矩阵，则：$A^+=A^H\left(AA^H\right)^{-1}$ ———右逆
定理：如果矩阵A为列满秩矩阵，则：$A^+=\left(A^HA\right)^{-1}A^H$ ———左逆

$\left(A^+\right)^+=A$
$\left(A^T\right)^+=\left(A^+\right)^T$
$\left(A^H\right)^+=\left(A^+\right)^H$

$(AB)^+\neq B^+A^+$

$(AB)^+=B^+A^+$ 的充要条件为$R\left(AA^HB\right)\subset R(B)$ 且$R\left(BB^HA^H\right)\subset R\left(A^H\right)$

如果$A=A^H$，则有
$\left(A^2\right)^+=\left(A^+\right)^2$ ，$AA^+=A^+A$
$A^2A^+=A^+A^2$ ，$A^2\left(A^2\right)^+=\left(A^2\right)^+A^2=AA^+$

$\left(A^k\right)^+\neq\left(A^+\right)^k$
若P、Q为可逆矩阵，$(PAQ)^+\neq Q^{-1}A^+P^{-1}$

$\mathrm{rank}(A)=\mathrm{rank}\left(A^+\right)$
$(UAV)^+=V^HA^+U^H$

$\|A\|_2=\max\limits_{i}\sigma_i$

$$\|A\|_{m_2}=\left(\sum_{i=1}^{r}\sigma_i^2\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$\left\|A^+\right\|_F^2=\sum_{i=1}^{r}\frac{1}{\sigma_i^2}$$

$$\left\|A^+\right\|_2=\frac{1}{\min\sigma_i}$$

AA^+和A^+A 均为幂等矩阵
AA^+和A^+A 均为Hermite矩阵
AA^+和A^+A 均为正交投影

3. 例题：
①利用MP逆求解方程的最佳逼近解
判断下列方程是否有解，如果有解，求其通解和最小二乘解，如果无解求其最佳逼近解

$$\begin{cases} 2x_1+4x_2+x_3+x_4=3 \\ x_1+2x_2-x_3+2x_4=0 \\ -x_1-2x_2-2x_3+x_4=3 \end{cases}$$

解法：
第一步：求解矩阵A的最大秩分解
第二步：求矩阵A的MP逆
第三步：判断方程组$Ax=b$是否有解　（判断$AA^+b=b$是否成立）
第四步：求解方程组$Ax=b$的最小范数解及通解或者最小二乘解最佳范数解

$$B=\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$$
$$D=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$
$$A^+=D^H\left(DD^H\right)^{-1}\left(B^HB\right)^{-1}B^H$$

$$AA^+b=\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \neq b=\begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$$

最佳逼近解:$x=A^+b=\frac{1}{11}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -5 \\ 6 \end{pmatrix}$

②设σ_i为矩阵A的奇异值，下列结论正确的是（ ）C
（A）$(AB)^+=B^+A^+$；　（B）$\|A^+\|_F^2=\sum_{i=1}^{n}\sigma_i^2$；
（C）$rank(A)=rank(A^+)$；　（D）$(A^-)^-=A$；

③下列结论错误的是（ ）
（A）若A和B分别是列满秩和行满秩矩阵，则$(AB)^+=B^+A^+$；
（B）实反对称矩阵，一定能够酉相似对角化；
（C）对任意矩阵A，A^HA和AA^H具有相同的特征值；
（D）设$A\in C^{m\times n}$和$B\in C^{n\times m}$，则AB和BA有相同的非零特征值；

④下列结论正确的是（ B ）
（A）A为n阶方阵，则$r\left(A^HA\right)\geqslant\|A\|_1\|A\|_\infty$；
（B）设A为正定Hermite矩阵，则$A=R^HR$分解唯一，其中R为正线上三角复矩阵；
（C）若n阶方阵A满足$A^H=A$，则 $\sqrt{x^HAx}$为C^n上的向量范数；
（D）A为n阶方阵，则$\left(A^2\right)^+=(A^+)^2$；

⑤下列选项错误的是（ A ）
（A）$A\in C^{m\times n}$且$\|A\|_{m\infty}<1$，则$r(A)<1$；
（B）$A\in C_r^{n\times n}$为正规矩阵，$\lambda_i(i=1,2\cdots r)$为其非零特征值，则$\|A^+\|_2=\frac{1}{\min_{1\leqslant i\leqslant r}|\lambda_i|}$；
（C）$A\in C^{n\times n}$，λ为其任一特征值，$\|\bullet\|$为任意算子范数，则$|\lambda|\leqslant\sqrt[m]{\|A^m\|}$；
（D）$\sigma_1\geqslant\sigma_2\geqslant\cdots\geqslant\sigma_r$为A的所有正奇异值，则$\|A\|_F^2=\sum_{i=1}^{r}\sigma_i^2$；

⑥设$A\in C_n^{m\times n}$，$\|\bullet\|$是$C_n^{m\times n}$上某种相容矩阵范数，若$\|A\|<1$，则$\|A^+\|>1$（ √ ）

⑦设$A=\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$，则$\|A^+A\|_2=1$（ √ ）

⑧证明：
AA^+和A^+A 均为幂等矩阵
AA^+和A^+A 均为Hermite矩阵
AA^+和A^+A 均为正交投影

证明：

$\because AA^{+}A=A$

$\therefore \left(A^{+}A\right)^{2}=A^{+}AA^{+}A=A^{+}A$

$\therefore A^{+}A$ 为幂等矩阵

⑨证明：

$\operatorname{rank}(A)=\operatorname{rank}\left(A^{+}\right)$

$(UAV)^{+}=V^{H}A^{+}U^{H}$

证明：

$\because \operatorname{rank}(A)=\operatorname{rank}\left(A_{r}^{-}\right)$

而MP逆必定是自反广义逆

$\therefore \operatorname{rank}(A)=\operatorname{rank}\left(A^{+}\right)$

⑩证明：

$\|A\|_{2}=\max\limits_{\mathrm{i}}\sigma_{i}$

$$\|A\|_{m_{2}}=\left(\sum_{i=1}^{r}\sigma_{i}^{2}\right)^{\frac{1}{2}}$$

证：

显然A有奇异值分解

$A=U\begin{pmatrix}D & 0\\0 & 0\end{pmatrix}V$

$\because$算子2范数和矩阵2范数都是酉不变范数

$\therefore \|A\|_{2}=\left\|\begin{pmatrix}D & 0\\0 & 0\end{pmatrix}\right\|_{2}=\max\limits_{\mathrm{i}}\sigma_{i}$

$$\|A\|_{m_{2}}=\left\|\begin{pmatrix}D & 0\\0 & 0\end{pmatrix}\right\|_{m_{2}}=\left(\sum_{i=1}^{r}\sigma_{i}^{2}\right)^{\frac{1}{2}}$$

⑩证明：

$\left(A^{+}\right)^{+}=A$

$\left(A^{T}\right)^{+}=\left(A^{+}\right)^{T}$

$\left(A^{H}\right)^{+}=\left(A^{+}\right)^{H}$

常用结论

1. 范数和奇异值、特征值的关系
算子2范数：谱范数$\|A\|_2=\sqrt{r(A^HA)}$
$\|A\|_2=\max\limits_{i}\sigma_i$

$$\|A\|_{m_2}=\left(\sum_{i=1}^{r}\sigma_i^2\right)^{\frac{1}{2}}$$

谱半径：$r(A)=\max|\lambda_i|$
$r(A)\le\|A\|_\infty$

谱范数性质
$\|A\|_2=\|A^H\|_2=\|A^T\|_2=\|\bar{A}\|_2$
$\|A^HA\|_2=\|AA^H\|_2=\|A\|_2^2$
谱范数是酉不变范数
$\|A\|_2^2\le\|A\|_1\|A\|_\infty$

如果$\|.\|_m$是一个相容的矩阵范数，则对于任一矩阵$A\in C^{n\times n}$，都有$|\lambda_i|\le\|A\|_m$。其中λ_i是矩阵A的特征值
推论：$r(A)\le\|A\|_m$

2. 正规矩阵和单纯矩阵结论
单纯矩阵：每个特征值的代数重数等于几何重数的矩阵⇔ 与对角矩阵相似
正规矩阵：$AA^H=A^HA\Leftrightarrow$ 与对角矩阵酉相似
正规矩阵⇒ $\|A\|_2=r(A)$
正规矩阵的奇异值等于特征值的模

正规矩阵一定是单纯矩阵
单纯矩阵不一定是正规矩阵
正规矩阵不一定是Hermite矩阵
对角矩阵、酉矩阵、Hermite、反Hermite矩阵一定是正规矩阵

$A^H=A\Rightarrow\|A\|_2=r(A)$
正规矩阵⇒ $\|A\|_2=r(A)$
正规矩阵，奇异值等于特征值的模

3. 幂等矩阵
A^H，$E-A$ 也为幂等矩阵
A的特征值不是0就是1，并且一定可以对角化
$\mathrm{rank}(A)=\mathrm{tr}(A)$
AA^- 和A^-A 均为幂等矩阵
AA^+和A^+A 均为幂等矩阵
AA_r^- 和A_r^-A 均为幂等矩阵

4. 收敛矩阵
矩阵A为收敛矩阵的充分必要条件是$r(A) < 1$

5. 矩阵的摄动
$A \in P^{n\times n}$，$\|A\|_a$是从属于向量范数$\|x\|_a$的算子范数，则当$\|A\|_a < 1$时；$E - A$是可逆的，且
$\left\|(E-A)^{-1}\right\|_a \le \left(1-\|A\|_a\right)^{-1}$

6. 特征值估计
shur不等式：
设$A \in C^{n\times n}$ 的特征值为$\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$，则：
$\sum_{i=1}^{n} \left|\lambda_i\right|^2 \le \|A\|_F^2$ ，等号成立当且仅当A为正规矩阵

设矩阵A为行（列）严格对角占优矩阵，则
（1）矩阵A一定可逆
（2）若矩阵A的所有主对角元素都为正数，则A的特征值都有正实部
（3）若矩阵A为Hermite矩阵，且所有主对角元素都为正数，则A的特征值都为正数

盖尔圆盘定理：设n阶方阵A的n个盖尔圆盘中的k个的并形成一个连通区域G，且G与余下的$n-k$个盖尔圆都不相交，则在G中恰好有矩阵A的k个特征值

推论：
如果n阶方阵A的n个盖尔圆两两不相交，则矩阵A相似于对角矩阵
如果n阶实阵A的n个盖尔圆两两不相交，则A的特征值全为实数

矩阵理论和图像处理

1. 奇异值分解和图像降维
①图片是由像素点构成的，灰度图片也称为二值图片，像素值只有0和1，像素值构成了一个矩阵（不一定是方阵）；对于彩色图像，也称为RGB图像，像素值构成了三个矩阵，三个矩阵构成了一个张量。同时由于像素值都是大于等于0的，因为这些矩阵都是非负矩阵，因此图像处理和非负矩阵理论、张量分析理论联系非常紧密

②图像传输和保存：
设$A \in C_r^{m\times n}$，$\sigma_1, \sigma_2 \cdots \sigma_r$
是A的r个正奇异值，则存在m阶酉矩阵U和n阶酉矩阵V，使得：
$$A = U\begin{pmatrix} D & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}V$$

假设酉矩阵为码本矩阵（已知），因此传输图片，只需要传输中间的对角矩阵。

2. 张量分解和视频处理
①视频图像一般为彩色图像、彩色图像为张量

3. 马赛克、水印处理

矩阵理论和信号处理

1. 信道估计

2. 盲元分离

3. 盲信号估计

矩阵理论和计算机视觉

1.