§1 向量范数

程光辉

2020 年 3 月 22 日

定义 1 设映射 $\|\cdot\|: \mathbf{C}^n \to \mathbf{R}$ 满足：

(1) 正定性 $\|\boldsymbol{x}\| \geq \mathbf{0}$，当且仅当 $\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$ 时，$\|\boldsymbol{x}\| = \mathbf{0}$；

(2) 齐次性 $\|\boldsymbol{\lambda x}\| = |\boldsymbol{\lambda}|\|\boldsymbol{x}\|, \boldsymbol{\lambda} \in \mathbf{C}, \boldsymbol{x} \in \mathbf{C}^n$；

(3) 三角不等式 $\|\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}\| \leq \|\boldsymbol{x}\| + \|\boldsymbol{y}\|$, $\forall \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in \mathbf{C}^n$,

则称映射 $\|\cdot\|$ 为 $\mathbf{C}^n$ 上向量 $\boldsymbol{x}$ 的范数.

向量范数的性质

(1) $\|\mathbf{0}\| = \mathbf{0}$

(2) $\boldsymbol{x} \neq \mathbf{0}$ 时，$\left\|\frac{\mathbf{1}}{\|\boldsymbol{x}\|}\boldsymbol{x}\right\| = \mathbf{1}$；

(3) 对任意 $\boldsymbol{x} \in \mathbf{C}^n$，有 $\|-\boldsymbol{x}\| = \|\boldsymbol{x}\|$；

(4) 对任意 $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in \mathbf{C}^n$，有 $|\|\boldsymbol{x}\| - \|\boldsymbol{y}\|| \leq \|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}\|$.

证明： (4) 因为

$$\|\boldsymbol{x}\| = \|(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}) + \boldsymbol{y}\| \leq \|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}\| + \|\boldsymbol{y}\|,$$

即有 $\|\boldsymbol{x}\| - \|\boldsymbol{y}\| \leq \|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}\|$.

又因

$$\|\boldsymbol{y}\| - \|\boldsymbol{x}\| \leq \|\boldsymbol{y}-\boldsymbol{x}\| = \|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}\|,$$

有 $-\|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}\| \leq \|\boldsymbol{x}\| - \|\boldsymbol{y}\|$.

综上，$|\|\boldsymbol{x}\| - \|\boldsymbol{y}\|| \leq \|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}\|$ 得证.

例 1 设 $\boldsymbol{x} = (\boldsymbol{x_1}, \boldsymbol{x_2}, \cdots, \boldsymbol{x_n})^{\mathrm{T}} \in \mathbf{C}^n$，则

(1) $\|\boldsymbol{x}\|_1 = \sum_{i=1}^{n} |\boldsymbol{x_i}| \Leftarrow$ *1*-范数

(2) $\|x\|_2 = \left(\sum\limits_{i=1}^{n} |x_i|^2\right)^{1/2} \Leftarrow$ *2-范数*

(3) $\|x\|_\infty = \max\limits_{1\le i\le n}\{|x_i|\} \Leftarrow$ *无穷范数*

证明：(2) 正定性和齐次性显然成立，下面只证明三角不等式.

设 $x = (x_1, x_2, \cdots, x_n)^T$，$y = (y_1, y_2, \cdots, y_n)^T$，则

$$\begin{aligned}|(x, y)|^2 &= |\overline{x}_1 y_1 + \overline{x}_2 y_2 + \cdots + \overline{x}_n y_n|^2 \\ &\le \left(|x_1|^2 + |x_2|^2 + \cdots + |x_n|^2\right)\left(|y_1|^2 + |y_2|^2 + \cdots + |y_n|^2\right) \\ &= \|x\|_2^2 \|y\|_2^2.\end{aligned}$$

于是

$$\begin{aligned}\|x+y\|_2^2 &= (x+y)^H(x+y) \\ &= x^H x + x^H y + y^H x + y^H y \\ &\le |x^H x| + |x^H y| + |y^H x| + |y^H y| \\ &\le \|x\|_2^2 + 2\|x\|_2\|y\|_2 + \|y\|_2^2 \\ &= (\|x\|_2 + \|y\|_2)^2,\end{aligned}$$

即

$$\|x+y\|_2 \le \|x\|_2 + \|y\|_2.$$

引理 1 *若 u 和 v 是非负实数，p 和 q 是正实数，且满足条件 $p, q > 1$ 和 $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$，则恒有不等式*

$$uv \le \frac{1}{p}u^p + \frac{1}{q}v^q.$$

证明：根据定积分的几何意义知，以 u 和 v 为边长的矩形面积小于等于两个曲边梯形面积 $\int_0^u x^{p-1}dx$ 和 $\int_0^v y^{\frac{1}{p-1}}dy$ 之和，即

$$\begin{aligned}uv &\le \int_0^u x^{p-1}dx + \int_0^v y^{\frac{1}{p-1}}dy \\ &= \frac{1}{p}u^p + \int_0^v y^{\frac{q}{p}}dy \\ &= \frac{1}{p}u^p + (\frac{q}{p}+1)^{-1}v^{\frac{q}{p}+1} \\ &= \frac{1}{p}u^p + \frac{1}{q}v^q.\end{aligned}$$

定义 2 $\|x\|_p = \left(\sum\limits_{i=1}^{n} |x_i|^p\right)^{1/p}$， $1 \le p < \infty$. *显然是一种映射关系.*

定理 1 *(Hölder 不等式)* 若 $p,q>0$, 且 $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$, 则对 $\mathbf{C}^n$ 任意向量 $x=(x_1,x_2,\cdots,x_n)^T, y=(y_1,y_2,\cdots,y_n)^T$ 都有

$$\sum_{i=1}^{n}|x_i|\cdot|y_i|\leq\left(\sum_{i=1}^{n}|x_i|^p\right)^{1/p}\left(\sum_{i=1}^{n}|y_i|^q\right)^{1/q}$$

证明： 若 x, y 至少有一个为零向量，则显然成立.

下面证明 x, y 均为非零情况. 令

$$u=\frac{|x_i|}{\|x\|_p},\quad v=\frac{|y_i|}{\|y\|_q}.$$

由引理 1，有

$$\frac{|x_i||y_i|}{\|x\|_p\|y\|_q}\leq\frac{1}{p}\frac{|x_i|^p}{\|x\|_p^p}+\frac{1}{q}\frac{|y_i|^q}{\|y\|_q^q},\quad(1\leq i\leq n),$$

因此，对 i 求和得

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{n}\frac{|x_i||y_i|}{\|x\|_p\|y\|_q}&\leq\frac{1}{p\|x\|_p^p}\sum_{i=1}^{n}|x_i|^p+\frac{1}{q\|y\|_q^q}\sum_{i=1}^{n}|y_i|^q\\&=\frac{1}{p}+\frac{1}{q}\\&=1.\end{aligned}$$

即

$$\sum_{i=1}^{n}|x_i|\cdot|y_i|\leq\left(\sum_{i=1}^{n}|x_i|^p\right)^{1/p}\left(\sum_{i=1}^{n}|y_i|^q\right)^{1/q}.$$

例 2 设 $x=(x_1,x_2,\cdots,x_n)^T\in\mathbf{C}^n$，则

$$\|x\|_p=\left(\sum_{i=1}^{n}|x_i|^p\right)^{\frac{1}{p}},\quad 1\leq p<\infty,$$

是 $\mathbf{C}^n$ 上的向量范数，称为 *Hölder* 范数。

证明： 正定性和齐次性容易得证。当 $p=1$ 时为向量 1 范数，前面已经证明，下面只考虑 $p>1$ 情况。

三角不等式的证明。因为

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{n}(|x_i|+|y_i|)^p&=\sum_{i=1}^{n}(|x_i|+|y_i|)(|x_i|+|y_i|)^{p-1}\\&=\sum_{i=1}^{n}|x_i|(|x_i|+|y_i|)^{p-1}+\sum_{i=1}^{n}|y_i|(|x_i|+|y_i|)^{p-1}\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&\le \left(\sum_{i=1}^{n}|x_i|^p\right)^{\frac{1}{p}}\left[\sum_{i=1}^{n}(|x_i|+|y_i|)^{(p-1)q}\right]^{\frac{1}{q}}+\left(\sum_{i=1}^{n}|y_i|^p\right)^{\frac{1}{p}}\left[\sum_{i=1}^{n}(|x_i|+|y_i|)^{(p-1)q}\right]^{\frac{1}{q}}\\
&=\left[\left(\sum_{i=1}^{n}|x_i|^p\right)^{\frac{1}{p}}+\left(\sum_{i=1}^{n}|y_i|^p\right)^{\frac{1}{p}}\right]\left[\sum_{i=1}^{n}(|x_i|+|y_i|)^{(p-1)q}\right]^{\frac{1}{q}}\\
&=\left[\left(\sum_{i=1}^{n}|x_i|^p\right)^{\frac{1}{p}}+\left(\sum_{i=1}^{n}|y_i|^p\right)^{\frac{1}{p}}\right]\left[\sum_{i=1}^{n}(|x_i|+|y_i|)^{p}\right]^{\frac{1}{q}}.\ (\text{因}(p-1)q=p.)
\end{aligned}
$$

即

$$\left(\sum_{i=1}^{n}(|x_i|+|y_i|)^p\right)^{\frac{1}{p}}\le\left(\sum_{i=1}^{n}|x_i|^p\right)^{\frac{1}{p}}+\left(\sum_{i=1}^{n}|y_i|^p\right)^{\frac{1}{p}}.$$

因为

$$\left(\sum_{i=1}^{n}(|x_i+y_i|)^p\right)^{\frac{1}{p}}\le\left(\sum_{i=1}^{n}(|x_i|+|y_i|)^p\right)^{\frac{1}{p}},$$

故

$$\left(\sum_{i=1}^{n}(|x_i+y_i|)^p\right)^{\frac{1}{p}}\le\left(\sum_{i=1}^{n}|x_i|^p\right)^{\frac{1}{p}}+\left(\sum_{i=1}^{n}|y_i|^p\right)^{\frac{1}{p}},$$

即

$$\|x+y\|_p\le\|x\|_p+\|y\|_p,$$

得证.

定理 2 设 $\|\cdot\|$ 是 $\mathbf{C}^m$ 上的范数，$A\in\mathbf{C}^{m\times n}$ 列满秩，则 $\|A\cdot\|$ 是 $\mathbf{C}^n$ 上的范数.

证明：

(1) 因 A 列满秩，则若 $x\ne\mathbf{0}$，有 $Ax\ne\mathbf{0}$，即 $\|Ax\|>0$.

(2) 对 $\forall\lambda\in\mathbf{C}$，则 $\|A(\lambda x)\|=\|\lambda Ax\|=|\lambda|\|Ax\|$.

(3) $\|A(x+y)\|=\|Ax+Ay\|\le\|Ax\|+\|Ay\|$.

故满足范数定义.

定义 3 设 $x^{(k)}=\left(x_1^{(k)},x_2^{(k)},\cdots,x_n^{(k)}\right)^T\in\mathbf{C}^n$，如果

$$\lim_{k\to\infty}x_i^{(k)}=a_i,\quad(i=1,2,\cdots,n)$$

则向量序列 $x^{(k)}$ 收敛于 $a=(a_1,a_2,\cdots,a_n)^T$. 记为

$$\lim_{k\to\infty}x^{(k)}=a.$$

引理 2 设 $\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n$ 为线性空间 $V_n(\mathbf{P})$ 的一组标准正交基,$x=(\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n)\,\tilde{x},\tilde{x}=(x_1,\cdots,x_n)^T\in\mathbf{P}^n$, 则 $V_n(\mathbf{P})$ 上的向量范数 $\|x\|$ 在闭球

$$S=\left\{x|(\tilde{x},\tilde{x})^{\frac{1}{2}}\leq 1\right\}$$

上有界.

证明: 因为 $x=(\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n)\,\widetilde{x}\in S$, 故有

$$(\tilde{x},\tilde{x})=\sum_{i=1}^{n}|x_i|^2\leq 1,$$

即 $|x_i|\leq 1,\quad(i=1,2,\cdots,n)$.

记 $\sum_{i=1}^{n}\|\varepsilon_i\|=M$ 为正常数, 则

$$\|x\|=\left\|\sum_{i=1}^{n}x_i\varepsilon_i\right\|\leq\sum_{i=1}^{n}\|x_i\varepsilon_i\|=\sum_{i=1}^{n}|x_i|\,\|\varepsilon_i\|\leq\sum_{i=1}^{n}\|\varepsilon_i\|=M,$$

故 $\|x\|$ 在 S 上有界.

引理 3 设 $\|x\|$ 是 $V_n(\mathbf{P})$ 上的向量范数, 则 $\|x\|$ 是关于 $\|x\|_2$ 的连续函数.

证明:设非零向量 $\Delta\tilde{x}=(\Delta\tilde{x}_1,\Delta\tilde{x}_2,\cdots,\Delta\tilde{x}_n)^T\in\mathbf{P}^n$,且 $\Delta x=(\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n)\,\Delta\tilde{x}\in V_n(\mathbf{P})$, 则根据三角不等式有

$$|\|x+\Delta x\|-\|x\||\leq\|\Delta x\|=\|\Delta x\,\|_2\|\,\frac{\Delta x}{\|\Delta x\|_2}\|.$$

由于 $\frac{\Delta x}{\|\Delta x\|_2}\in S$, 有引理 2 知 $\|\frac{\Delta x}{\|\Delta x\|_2}\|$ 有界.

又因为

$$\lim_{\Delta x\to 0}\|\Delta x\|_2=0,$$

所以

$$\lim_{\Delta x\to 0}|\|x+\Delta x\|-\|x\||=0,$$

故 $\|x\|$ 是关于 $\|x\|_2$ 的连续函数.

定义 4 设在 $V_n(\mathbf{P})$ 上定义了 $\|x\|_a\|$, $x\|_b$ 两种向量范数, 若存在常数 $m>0$, $M>0$, 使得

$$m\|x\|_a\leq\|x\|_b\leq M\|x\|_a,\quad\forall x\in V_n(\mathbf{P}),$$

则称 $\|x\|_a$ 与 $\|x\|_b$ 等价.

等价关系: 自反性, 对称性和传递性。

定理 3 $\boldsymbol{V_n(\mathrm{P})}$ 上的任意两个向量范数均等价。

证明： 设 $\|\boldsymbol{x}\|_a, \|\boldsymbol{x}\|_b$ 为任意两向量函数，由引理 3 知 $\|\boldsymbol{x}\|_a, \|\boldsymbol{x}\|_b$ 都是 $\|\boldsymbol{x}\|_2$ 的连续函数. 若 $\boldsymbol{x}=\mathbf{0}$，显然满足等价的定义.

若 $\boldsymbol{x}\neq\mathbf{0}$，定义函数

$$\phi(x)=\frac{\|x\|_a}{\|x\|_b}=\frac{\left\|\frac{x}{\|x\|_2}\right\|_a}{\left\|\frac{x}{\|x\|_2}\right\|_b},$$

易知 $\phi(x)$ 是单位球 S(有界闭集) 上关于 $\|x\|_2$ 的连续函数，故 $\exists M>0$，使得 $\phi(x)=\frac{\|x\|_a}{\|x\|_b}\leq M$，即

$$\|x\|_a\leq M\|x\|_b.$$

同理，$\exists m>0$ 可证

$$\|x\|_b\leq m\|x\|_a.$$

因此，$\boldsymbol{V_n(\mathrm{P})}$ 上的任意两个向量范数均等价.

定理 4 设 $\|\cdot\|$ 是 $\mathbf{C}^n$ 上的任一向量范数，则 $\lim\limits_{k\to\infty}x^{(k)}=a$ 等价于 $\lim\limits_{k\to\infty}\left\|x^{(k)}-a\right\|=0$.

证明： 因为

$$\begin{aligned}\lim_{k\to\infty}x^{(k)}=a &\Longleftrightarrow \lim_{k\to\infty}x_i^{(k)}=a_i,\quad (1\leq i\leq n)\\ &\Longleftrightarrow \lim_{k\to\infty}\left|x_i^{(k)}-a_i\right|=0,\quad (1\leq i\leq n)\\ &\Longleftrightarrow \lim_{k\to\infty}\max_{1\leq i\leq n}\left\{\left|x_i^{(k)}-a_i\right|\right\}=0\\ &\Longleftrightarrow \lim_{k\to\infty}\left\|x^{(k)}-a\right\|_\infty=0.\end{aligned}$$

再由 $\boldsymbol{V_n(\mathrm{P})}$ 上的任意两个向量范数均等价和夹逼准则，有

$$\lim_{k\to\infty}\left\|x^{(k)}-a\right\|=0,$$

得证.

例 3 令 $a=(1,1,\cdots,1)^T\in\mathbf{R}^n$ ，且

$$x^{(k)}=\left(1+\frac{1}{2^k},1+\frac{1}{3^k},\cdots,1+\frac{1}{(n+1)^k}\right)^T$$

则

$$\lim_{k\to\infty}x^{(k)}=a.$$

证明：因为

$$\begin{aligned}
\lim_{k\to\infty}\left\|x^{(k)}-a\right\|_\infty &= \lim_{k\to\infty}\max_{1\le i\le n}\left\{\left|x_i^{(k)}-a_i\right|\right\}\\
&= \lim_{k\to\infty}\max_{1\le i\le n}\left\{\frac{1}{(i+1)^k}\right\}\\
&= \lim_{k\to\infty}\frac{1}{2^k}\\
&= 0,
\end{aligned}$$

故得证.

CGH