# §2 圆盘定理

程光辉

2020 年 4 月 28 日

**定义 1.** 设 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})\in \mathbf{C}^{n\times n}$，则称

$$\boldsymbol{S}_i=\left\{z\in C:|z-a_{ii}|\le R_i=\sum_{j\neq i}|a_{ij}|\right\}$$

为行盖尔圆盘;

$$\boldsymbol{G}_i=\left\{z\in C:|z-a_{ii}|\le C_i=\sum_{j\neq i}|a_{ji}|\right\}$$

为列盖尔圆盘.

**定理 1.** *(1931, 圆盘定理 1)* 设 $\boldsymbol{A}\in \mathbf{C}^{n\times n}$，则 $\boldsymbol{A}$ 的任一特征值

$$\lambda\in S=\bigcup_{j=1}^{n}S_j.$$

**证明:** 因为 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\lambda\boldsymbol{x}$, $\left(\boldsymbol{x}=(x_1,x_2,\cdots,x_n)^T\neq \boldsymbol{0}\right)$，则

$$\sum_{j=1}^{n}a_{ij}x_j=\lambda x_i\ (i=1,2,\cdots,n).$$

令 $|x_k|=\max\{|x_1|,\cdots,|x_n|\}>0$，那么

$$\sum_{j=1}^{n}a_{kj}x_j=\lambda x_k,$$

移项得

$$x_k(\lambda-a_{kk})=\sum_{j\neq k}a_{kj}x_j,$$

两边取模放缩有

$$|x_k||\lambda-a_{kk}|=\left|\sum_{j\neq k}a_{kj}x_j\right|\le\sum_{j\neq k}|a_{kj}|\,|x_j|\le|x_k|\sum_{j\neq k}|a_{kj}|$$

故

$$|\lambda - a_{kk}| \le R_k,$$

由于 $\lambda$ 的任意性，得证.

**例 1.** 估计矩阵

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ -\frac{1}{2} & \frac{3}{2} & i & 0 \\ 0 & -\frac{i}{2} & 5 & -\frac{i}{2} \\ -1 & 0 & 0 & 5i \end{bmatrix}$$

的特征值的分布范围.

**解:**

$$\begin{aligned} S_1 &: |z-1| \le 1; \\ S_2 &: \left|z-\frac{3}{2}\right| \le \frac{3}{2}; \\ S_3 &: |z-5| \le 1; \\ S_4 &: |z-5i| \le 1. \end{aligned}$$

**推论 1.** 设 $A \in \mathbf{C}^{n\times n}$，则 $A$ 的任一特征值

$$\lambda \in \bigcup_{i=1}^{n} G_i.$$

**定理 2.** *(圆盘定理 2)* 设 $n$ 阶方阵 $A=(a_{ij})$ 的 $n$ 个盖尔圆盘中有 $k$ 个圆盘的并形成一个连通区域 $G$，且它与余下的 $n-k$ 个圆盘都不相交，则在该区域 $G$ 中恰好有 $A$ 的 $k$ 个特征值.

**证明:** 把矩阵 $A$ 分解为对角部分和非对角部分的和，即

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{22} & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & 0 & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & 0 \end{bmatrix} =: D + B.$$

令

$$A_\varepsilon = D + \varepsilon B, \quad \varepsilon \in [0,1],$$

则

$$R_i\left(A_\varepsilon\right) = R_i(\varepsilon B) = \varepsilon R_i(A).$$

设

$$G_k=\bigcup_{i=1}^{k}\{z\in C:|z-a_{ii}|\leq R_i(A)\},$$
$$G_k(\varepsilon)=\bigcup_{i=1}^{k}\{z\in C:|z-a_{ii}|\leq R_i\left(A_\varepsilon\right)=\varepsilon R_i(A)\},$$

故 $G_k\equiv G_k(1)$.

根据特征多项式知，矩阵特征值是关于矩阵元素的连续函数，也就是说 $A_\varepsilon$ 的特征值是关于 $\varepsilon$ 的连续函数，即特征值随着 $\varepsilon$ 变化的曲线是不间断的. 当 $\varepsilon$ 从 0 到 1 变化时，特征值 $\lambda\left(A_\varepsilon\right)$ 从矩阵 $A$ 的对角元素为起点到 $A$ 的对应特征值为终点变化. 因为特征值不会跑到区域外或者消失，也不会有外面的特征值进入区域 $G$，因此，$k$ 个圆盘的并形成一个连通区域 $G$ 中恰好有 $k$ 个特征值.

**推论 2.** 设 $A\in\mathrm{C}^{n\times n}$，$\lambda$ 是 $A$ 的任一特征值，则

$$\lambda\in\left(\bigcup_{i=1}^{n}S_i\right)\cap\left(\bigcup_{j=1}^{n}G_j\right).$$

**推论 3.** 设 $n$ 阶方阵 $A$ 的 $n$ 个盖尔圆盘两两互不相交, 则 $A$ 相似于对角阵.

**推论 4.** 设 $n$ 阶实阵 $A$ 的 $n$ 个盖尔圆盘两两互不相交, 则 $A$ 特征值全为实数.

令 $D=\operatorname{diag}\left(p_1,p_2,\cdots,p_n\right),\left(p_i>0\right)$，则

$$D^{-1}AD=\begin{bmatrix}a_{11}&\frac{p_2}{p_1}a_{12}&\cdots&\frac{p_n}{p_1}a_{1n}\\\frac{p_1}{p_2}a_{21}&a_{22}&\cdots&\frac{p_n}{p_2}a_{2n}\\\cdots&\cdots&\cdots&\cdots\\\frac{p_1}{p_n}a_{n1}&\frac{p_2}{p_n}a_{n2}&\cdots&a_{nn}\end{bmatrix},$$

进而

$$r_i=\frac{1}{p_i}\sum_{\substack{j=1\\j\neq i}}^{n}\left|a_{ij}\right|p_j,\quad Q_i=\{z\in C:|z-a_{ii}|\leq r_i\},$$
$$t_j=p_j\sum_{\substack{i=1\\i\neq j}}^{n}\frac{\left|a_{ij}\right|}{p_i},\quad P_j=\{z\in C:|z-a_{jj}|\leq t_j\}.$$

**定理 3.** 设 $A\in\mathrm{C}^{n\times n}$，$\lambda$ 是 $A$ 的任一特征值，则

$$\lambda\in\left(\bigcup_{i=1}^{n}Q_i\right)\cap\left(\bigcup_{j=1}^{n}P_j\right).$$

**例 2.** 估计矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix} 0.9 & 0.01 & 0.12 \\ 0.01 & 0.8 & 0.13 \\ 0.01 & 0.02 & 0.4 \end{bmatrix}$ 的特征值范围.

**解:** 行盖尔圆为

$$
\begin{aligned}
S_1 &:|z-0.9| \leq 0.13; \\
S_2 &:|z-0.8| \leq 0.14; \\
S_3 &:|z-0.4| \leq 0.03.
\end{aligned}
$$

先令 $D=\mathrm{diag}(1,1,0.1)$，对 $A$ 进行相似变换有 $D^{-1}AD$，其行盖尔圆为

$$
\begin{aligned}
S_1 &:|z-0.9| \leq 0.022 \\
S_2 &:|z-0.8| \leq 0.023 \\
S_3 &:|z-0.4| \leq 0.3.
\end{aligned}
$$

两者结合得更好估计.

**定义 2.** 设 $A\in \mathbf{C}^{n\times n}$，若 $A$ 行对角占优，则

$$|a_{ii}| \geq R_i = \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{n} |a_{ij}|, \quad (i=1,2,\cdots,n);$$

若 $A$ 列对角占优, 则

$$|a_{ii}| \geq C_i = \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{n} |a_{ji}|, \quad (i=1,2,\cdots,n);$$

若 $A$ 行严格对角占优, 则

$$|a_{ii}| > R_i = \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{n} |a_{ij}|, \quad (i=1,2,\cdots,n);$$

若 $A$ 列严格对角占优, 则

$$|a_{ii}| > C_i = \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{n} |a_{ji}|, \quad (i=1,2,\cdots,n).$$

**定理 4.** 设 $A\in \mathbf{C}^{n\times n}$ 行 *(或列)* 严格对角占优，则

*(1)* $A$ 可逆, 且 $\lambda_i \in \bigcup\limits_{i=1}^{n} S_i, \quad (S_i=\{z\in C: |z-a_{ii}| \leq |a_{ii}|\})$;

*(2)* 若 $A$ 的所有主对角元都是正数, 则 $A$ 的特征值都有正实部;

*(3) 若 $\boldsymbol{A}$ 为 $\boldsymbol{Hermitian}$ 矩阵，且所有主对角元都为正数，则 $\boldsymbol{A}$ 的特征值都为正数.*

**证明：** (1) 因为 $\boldsymbol{A}$ 行严格对角占优，则有 $\boldsymbol{R_i = \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{n} |a_{ij}| < |a_{ii}|}$，则

$$\boldsymbol{\lambda_i \in \bigcup_{i=1}^{n} S_i, \quad (S_i = \{z \in C : |z - a_{ii}| < |a_{ii}|\})\,;}$$

显然 $\boldsymbol{0 \notin S_i}$，所以 $\boldsymbol{0}$ 不是其特征值，即可逆.

(2) 因为 $\boldsymbol{a_{ii} > 0, |\lambda - a_{ii}| < |a_{ii}|}$，则 $\boldsymbol{A}$ 的特征值都有正实部.

(3)$\boldsymbol{A^H = A}$，则 $\boldsymbol{A}$ 得特征值都是实数，所以 $\boldsymbol{A}$ 的特征值都有正数.