# 第五章课后习题解答

1. 设$\boldsymbol{A}=\begin{vmatrix}0 & c & c\\ c & 0 & c\\ c & c & 0\end{vmatrix}$. 讨论$c$取何值时$\boldsymbol{A}$为收敛矩阵.

**解**：由于$\left|\lambda \boldsymbol{E}_3-\boldsymbol{A}\right|=\begin{vmatrix}\lambda & -c & -c\\ -c & \lambda & -c\\ -c & -c & \lambda\end{vmatrix}=\left(\lambda+c\right)^2\left(\lambda-2c\right)$，所以$\boldsymbol{A}$的特征值为$\lambda_1=2c$，$\lambda_2=\lambda_3=-c$，于是$r(\boldsymbol{A})=2|c|$，而矩阵$\boldsymbol{A}$收敛的充要条件是$r(\boldsymbol{A})<1$即$-\frac{1}{2}<c<\frac{1}{2}$.

2. 若$\lim\limits_{k\to\infty}\boldsymbol{A}^{(k)}=\boldsymbol{A}$，证明$\lim\limits_{k\to\infty}\left\|\boldsymbol{A}^{(k)}\right\|=\left\|\boldsymbol{A}\right\|$，其中$\boldsymbol{A}^{(k)},\boldsymbol{A}\in\boldsymbol{C}^{m\times n}$，$\|\cdot\|$为$\boldsymbol{C}^{m\times n}$中的任何一种矩阵范数，并问该命题的逆命题是否成立，为什么？

**证**：由于$\lim\limits_{k\to\infty}\boldsymbol{A}^{(k)}=\boldsymbol{A}\Leftrightarrow\lim\limits_{k\to\infty}\left\|\boldsymbol{A}^{(k)}-\boldsymbol{A}\right\|=0$，再利用矩阵范数的三角不等式推知

$$\left|\left\|\boldsymbol{A}^{(k)}\right\|-\left\|\boldsymbol{A}\right\|\right|\le\left\|\boldsymbol{A}^{(k)}-\boldsymbol{A}\right\|,$$

所以有$\lim\limits_{k\to\infty}\left|\left\|\boldsymbol{A}^{(k)}\right\|-\left\|\boldsymbol{A}\right\|\right|=0$，即$\lim\limits_{k\to\infty}\left\|\boldsymbol{A}^{(k)}\right\|=\left\|\boldsymbol{A}\right\|$.

该命题的逆命题不成立，例如取$\boldsymbol{A}^{(k)}=\begin{pmatrix}(-1)^k & \frac{1}{k}\\ 1 & 0\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 1 & 0\end{pmatrix}$，并取矩阵范数为 Frobenius 范数，则有$\lim\limits_{k\to\infty}\left\|\boldsymbol{A}^{(k)}\right\|=\lim\limits_{k\to\infty}\sqrt{1+1+\frac{1}{k^2}}=\sqrt{2}=\left\|\boldsymbol{A}\right\|$，但$\lim\limits_{k\to\infty}\boldsymbol{A}^{(k)}$不存在，所以$\lim\limits_{k\to\infty}\boldsymbol{A}^{(k)}\ne\boldsymbol{A}$.

3. 设$\boldsymbol{A}^{(k)}\in\boldsymbol{C}^{m\times n},\boldsymbol{B}^{(k)}\in\boldsymbol{C}^{n\times l},\lim\limits_{k\to\infty}\boldsymbol{A}^{(k)}=\boldsymbol{A},\lim\limits_{k\to\infty}\boldsymbol{B}^{(k)}=\boldsymbol{B}$, 证明$\lim\limits_{k\to\infty}\boldsymbol{A}^{(k)}\boldsymbol{B}^{(k)}=\boldsymbol{AB}$.

**证**：$\lim\limits_{k\to\infty}\boldsymbol{A}^{(k)}\boldsymbol{B}^{(k)}=\boldsymbol{AB}\Leftrightarrow\lim\limits_{k\to\infty}\left\|\boldsymbol{A}^{(k)}\boldsymbol{B}^{(k)}-\boldsymbol{AB}\right\|=0$，利用矩阵范数的性质有

$$\begin{aligned}\left\|\boldsymbol{A}^{(k)}\boldsymbol{B}^{(k)}-\boldsymbol{AB}\right\|&=\left\|\boldsymbol{A}^{(k)}\boldsymbol{B}^{(k)}-\boldsymbol{AB}^{(k)}+\boldsymbol{AB}^{(k)}-\boldsymbol{AB}\right\|\\&\le\left\|(\boldsymbol{A}^{(k)}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{B}^{(k)}\right\|+\left\|\boldsymbol{A}(\boldsymbol{B}^{(k)}-\boldsymbol{B})\right\|\\&\le\left\|\boldsymbol{B}^{(k)}\right\|\left\|(\boldsymbol{A}^{(k)}-\boldsymbol{A})\right\|+\left\|\boldsymbol{A}\right\|\left\|\boldsymbol{B}^{(k)}-\boldsymbol{B}\right\|\end{aligned}$$

由已知条件 $\lim\limits_{k\to\infty} \boldsymbol{A}^{(k)} = \boldsymbol{A}$, $\lim\limits_{k\to\infty} \boldsymbol{B}^{(k)} = \boldsymbol{B}$ 及第 2 题结论知 $\lim\limits_{k\to\infty} \left\|\boldsymbol{A}^{(k)} - \boldsymbol{A}\right\| = 0$, $\lim\limits_{k\to\infty} \left\|\boldsymbol{B}^{(k)} - \boldsymbol{B}\right\| = 0$，$\lim\limits_{k\to\infty} \left\|\boldsymbol{B}^{(k)}\right\| = \left\|\boldsymbol{B}\right\|$. 由此可见上面不等式的右边趋于 0， 所以 $\lim\limits_{k\to\infty} \left\|\boldsymbol{A}^{(k)}\boldsymbol{B}^{(k)} - \boldsymbol{AB}\right\| = 0$.

4. 设 $\boldsymbol{A}^{(k)} \in \boldsymbol{C}^{n\times n}, \lim\limits_{k\to\infty} \boldsymbol{A}^{(k)} = \boldsymbol{A}, (\boldsymbol{A}^{(k)})^{-1}$ 和 $\boldsymbol{A}^{-1}$ 都存在，证明 $\lim\limits_{k\to\infty}(\boldsymbol{A}^{(k)})^{-1} = \boldsymbol{A}^{-1}$.

**证**：记 $\mathrm{adj}\boldsymbol{A}$ 为矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的伴随矩阵，$\boldsymbol{A}_{ij}$ 为 $\boldsymbol{A}$ 中元素 $a_{ij}$ 的代数余子式，则

$$(\boldsymbol{A}^{(k)})^{-1} = \frac{\mathrm{adj}\boldsymbol{A}^{(k)}}{\det \boldsymbol{A}^{(k)}}, \qquad \text{其中 } \mathrm{adj}\boldsymbol{A}^{(k)} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{A}_{11}^{(k)} & \boldsymbol{A}_{21}^{(k)} & \cdots & \boldsymbol{A}_{n1}^{(k)} \\ \boldsymbol{A}_{12}^{(k)} & \boldsymbol{A}_{22}^{(k)} & \cdots & \boldsymbol{A}_{n2}^{(k)} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \boldsymbol{A}_{1n}^{(k)} & \boldsymbol{A}_{2n}^{(k)} & \cdots & \boldsymbol{A}_{nn}^{(k)} \end{pmatrix}.$$

易知 $\boldsymbol{A}_{ij}^{(k)}$ 是 $\boldsymbol{A}^{(k)}$ 中元素的 $n-1$ 次多项式，由多项式函数的连续性知 $\lim\limits_{k\to\infty} \boldsymbol{A}_{ij}^{(k)} = A_{ij}$，故 $\lim\limits_{k\to\infty} \mathrm{adj}\boldsymbol{A}^{(k)} = \mathrm{adj}\boldsymbol{A}$. 同理 $\det \boldsymbol{A}^{(k)}$ 是 $\boldsymbol{A}^{(k)}$ 中元素的 $n$ 次多项式，所以 $\lim\limits_{k\to\infty} \det \boldsymbol{A}^{(k)} = \det \boldsymbol{A} \neq 0$，于是 $\lim\limits_{k\to\infty}(\boldsymbol{A}^{(k)})^{-1} = \lim\limits_{k\to\infty} \dfrac{\mathrm{adj}\boldsymbol{A}^{(k)}}{\det\boldsymbol{A}^{(k)}} = \dfrac{\mathrm{adj}\boldsymbol{A}}{\det\boldsymbol{A}} = \boldsymbol{A}^{-1}$.

5. 设矩阵级数 $\sum\limits_{k=0}^{\infty} \boldsymbol{A}^{(k)}$ 收敛（绝对收敛），证明 $\sum\limits_{k=0}^{\infty} \boldsymbol{PA}^{(k)}\boldsymbol{Q}$ 也收敛（绝对收敛），且

$$\sum_{k=0}^{\infty} \boldsymbol{PA}^{(k)}\boldsymbol{Q} = \boldsymbol{P}\left(\sum_{k=0}^{\infty} \boldsymbol{A}^{(k)}\right)\boldsymbol{Q},$$

其中 $\boldsymbol{A}^{(k)} \in \boldsymbol{C}^{m\times n}, \boldsymbol{P} \in \boldsymbol{C}^{s\times m}, \boldsymbol{Q} \in \boldsymbol{C}^{n\times l}$.

**证**：记 $\boldsymbol{S}^{(N)} = \sum\limits_{k=0}^{N} \boldsymbol{PA}^{(k)}\boldsymbol{Q} = \boldsymbol{P}(\sum\limits_{k=0}^{N} \boldsymbol{A}^{(k)})\boldsymbol{Q}$ ，于是

$$\sum_{k=0}^{\infty} \boldsymbol{PA}^{(k)}\boldsymbol{Q} = \lim_{N\to\infty} \boldsymbol{S}^{(N)} = \boldsymbol{P}(\lim_{N\to\infty} \sum_{k=0}^{N} \boldsymbol{A}^{(k)})\boldsymbol{Q} = \boldsymbol{P}(\sum_{k=0}^{\infty} \boldsymbol{A}^{(k)})\boldsymbol{Q}$$

可见若 $\sum\limits_{k=0}^{\infty} \boldsymbol{A}^{(k)}$ 收敛，则 $\sum\limits_{k=0}^{\infty} \boldsymbol{PA}^{(k)}\boldsymbol{Q}$ 也收敛. 如果 $\sum\limits_{k=0}^{\infty} \boldsymbol{A}^{(k)}$ 绝对收敛，则 $\sum\limits_{k=0}^{\infty} \left\|\boldsymbol{A}^{(k)}\right\|$ 收敛. 又由于 $\left\|\boldsymbol{PA}^{(k)}\boldsymbol{Q}\right\| \le \left\|\boldsymbol{P}\right\| \left\|\boldsymbol{A}^{(k)}\right\| \left\|\boldsymbol{Q}\right\| \le c\left\|\boldsymbol{A}^{(k)}\right\|$，其中 $c$ 是与 $k$ 无关的正常数，由比较判别法知 $\sum\limits_{k=0}^{\infty} \left\|\boldsymbol{PA}^{(k)}\boldsymbol{Q}\right\|$ 收敛，故 $\sum\limits_{k=0}^{\infty} \boldsymbol{PA}^{(k)}\boldsymbol{Q}$ 也绝对收敛.

6．讨论下列幂级数的敛散性：

(1) $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2}\begin{pmatrix}1 & 7\\ -1 & -3\end{pmatrix}^k$；　(2) $\sum_{k=0}^{\infty}\frac{k}{6^k}\begin{pmatrix}1 & -8\\ -2 & 1\end{pmatrix}^k$．

**解**：(1) 设 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1 & 7\\ -1 & -3\end{bmatrix}$

可求得 $\boldsymbol{A}$ 的特征值为 $\lambda_1=\lambda_2=-2$，所以 $r(\boldsymbol{A})=2$．幂级数 $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2}x^k$ 的收敛半径为

$$r=\lim_{k\to\infty}\left|\frac{a_k}{a_{k+1}}\right|=\lim_{k\to\infty}\frac{(k+1)^2}{k^2}=1.$$

由 $r(\boldsymbol{A})=2>r$ 知矩阵幂级数 $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2}\boldsymbol{A}^k$ 发散.

(2) 设 $\boldsymbol{B}=\begin{bmatrix}1 & -8\\ -2 & 1\end{bmatrix}$，可求得 $\boldsymbol{B}$ 的特征值为 $\lambda_1=-3$，$\lambda_2=5$，所以 $r\left(\boldsymbol{B}\right)=5$. 又因幂级数 $\sum_{k=0}^{\infty}\frac{k}{6^k}x^k$ 的收敛半径 $r=\lim_{k\to\infty}\left|\frac{a_k}{a_{k+1}}\right|=\lim_{k\to\infty}\frac{k}{6^k}\frac{6^{k+1}}{k+1}=6$，$r(\boldsymbol{B})<r$，所以矩阵幂级数 $\sum_{k=0}^{\infty}\frac{k}{6^k}\boldsymbol{B}^k$ 绝对收敛.

7．计算 $\sum_{k=0}^{\infty}\begin{pmatrix}0.1 & 0.7\\ 0.3 & 0.6\end{pmatrix}^k$．

**解**：设 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}0.1 & 0.7\\ 0.3 & 0.6\end{bmatrix}$，由于 $\|\boldsymbol{A}\|_\infty=0.9<1$，故矩阵幂级数 $\sum_{k=0}^{\infty}\boldsymbol{A}^k$ 收敛，且其和为

$(\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})^{-1}=\frac{2}{3}\begin{bmatrix}4 & 7\\ 3 & 9\end{bmatrix}$.

8．设 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}\in\boldsymbol{C}^{n\times n},\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{BA}$，证明

$\sin(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})=\sin\boldsymbol{A}\cos\boldsymbol{B}+\cos\boldsymbol{A}\sin\boldsymbol{B},\quad \cos(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})=\cos\boldsymbol{A}\cos\boldsymbol{B}-\sin\boldsymbol{A}\sin\boldsymbol{B}$.

**证**：由 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{BA}$，有 $e^{\boldsymbol{A}}e^{\boldsymbol{B}}=e^{\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}}$，

$$\begin{aligned}\sin(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})&=\frac{1}{2i}(e^{i(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})}-e^{-i(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})})=\frac{1}{2i}(e^{i\boldsymbol{A}}e^{i\boldsymbol{B}}-e^{-i\boldsymbol{A}}e^{-i\boldsymbol{B}})\\&=\frac{1}{2i}[(\cos\boldsymbol{A}+i\sin\boldsymbol{A})(\cos\boldsymbol{B}+i\sin\boldsymbol{B})-(\cos\boldsymbol{A}-i\sin\boldsymbol{A})(\cos\boldsymbol{B}-i\sin\boldsymbol{B})]\end{aligned}$$

$$=\sin\boldsymbol{A}\cos\boldsymbol{B}+\cos\boldsymbol{A}\sin\boldsymbol{B}$$

同理可证：$\cos(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})=\cos\boldsymbol{A}\cos\boldsymbol{B}-\sin\boldsymbol{A}\sin\boldsymbol{B}$.

9．设 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}2&1&0\\0&0&1\\0&1&0\end{pmatrix}$，求 $e^{\boldsymbol{A}t}$，$\sin\boldsymbol{A}t$ .

**解：** $\left|\lambda\boldsymbol{E}_3-\boldsymbol{A}\right|=(\lambda+1)(\lambda-1)(\lambda-2)=0$

求得 $\boldsymbol{A}$ 的特征值为 $\lambda_1=-1$，$\lambda_2=1$，$\lambda_3=2$，于是存在可逆矩阵

$$\boldsymbol{P}=\begin{bmatrix}1&-1&1\\-3&1&0\\3&1&0\end{bmatrix}\quad,\ \boldsymbol{P}^{-1}=\frac{1}{6}\begin{bmatrix}0&-1&1\\0&3&3\\6&4&2\end{bmatrix}$$

使得 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}=\begin{bmatrix}-1&&\\&1&\\&&2\end{bmatrix}$. 再根据矩阵函数值公式得

$$e^{\boldsymbol{A}t}=\boldsymbol{P}diag\left(e^{-t},\quad e^{t},\quad e^{2t}\right)\boldsymbol{P}^{-1}$$

$$=\frac{1}{6}\begin{bmatrix}6e^{2t}&4e^{2t}-3e^{t}-e^{-t}&2e^{2t}-3e^{t}+e^{-t}\\0&3e^{t}+3e^{-t}&3e^{t}-3e^{-t}\\0&3e^{t}-3e^{-t}&3e^{t}+3e^{-t}\end{bmatrix}$$

$$\sin\boldsymbol{A}t=\boldsymbol{P}diag\left(\sin(-t),\quad \sin t,\quad \sin 2t\right)\boldsymbol{P}^{-1}$$

$$=\frac{1}{6}\begin{bmatrix}\sin 2t&4\sin 2t-2\sin t&2\sin 2t-4\sin t\\0&0&6\sin t\\0&6\sin t&0\end{bmatrix}$$

10．设 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}-1&-2&6\\-1&0&3\\-1&-1&4\end{pmatrix}$，求 $e^{\boldsymbol{A}t},\cos\boldsymbol{A}t.$

**解：** 由 $\left|\lambda\boldsymbol{E}_3-\boldsymbol{A}\right|=\begin{vmatrix}\lambda+1&2&-6\\1&\lambda&-3\\1&1&\lambda-4\end{vmatrix}=(\lambda-1)^3=0$ 得 $\boldsymbol{A}$ 的特征值 $\lambda=1$，解

齐次线性方程组 $(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E}_3)\boldsymbol{x}=0$，即 $\begin{pmatrix}-2&-2&6\\-1&-1&3\\-1&-1&3\end{pmatrix}x=$（得 $\lambda=1$ 的两个无关特征向量

$\alpha_1=(-1,1,0)^T,\alpha_2=(2,1,1)^T$. 又对 $\alpha_2$，因非齐次方程组 $(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E}_3)\beta_2=\alpha_2$ 相容，故可求得

解 $\beta_2=(-1,0,0)^T$. 由 $\alpha_1,\alpha_2,\beta_2$ 构造可逆矩阵 $\boldsymbol{P}=\begin{pmatrix}-1&2&-1\\1&1&0\\0&1&0\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{P}^{-1}=\begin{pmatrix}0&1&-1\\0&0&1\\-1&-1&3\end{pmatrix}$，

使 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&1\\0&0&1\end{pmatrix}$ 为 $\boldsymbol{A}$ 的 Jordan 标准形. 于是

$$e^{\boldsymbol{A}t}=P\begin{pmatrix}e^t&0&0\\0&e^t&te^t\\0&0&e^t\end{pmatrix}P^{-1}=\begin{pmatrix}-1&2&-1\\1&1&0\\0&1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}e^t&0&0\\0&e^t&te^t\\0&0&e^t\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&1&-1\\0&0&1\\-1&-1&3\end{pmatrix}=e^t\begin{pmatrix}1-2t&-2t&6t\\-t&1-t&3t\\-t&-t&1+3t\end{pmatrix}$$

$$\cos\boldsymbol{A}t=\boldsymbol{P}\begin{pmatrix}\cos t&0&0\\0&\cos t&-t\sin t\\0&0&\cos t\end{pmatrix}\boldsymbol{P}^{-1}=\begin{pmatrix}2t\sin t+\cos t&2t\sin t&-6t\sin t\\t\sin t&\cos t+t\sin t&-3t\sin t\\t\sin t&t\sin t&\cos t-3t\sin t\end{pmatrix}.$$

11．设 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\1&1&0&0\\0&1&1&0\\0&0&1&1\end{pmatrix}$，求 $\ln\boldsymbol{A}$.

**解**：方法一：事实上，可证明 $f(\boldsymbol{A}^T)=[f(\boldsymbol{A})]^T$ 成立. 本题中 $\boldsymbol{A}^T$ 为一约当标准形矩阵，

由 $f(\boldsymbol{A})=\ln(\boldsymbol{A})$ 知 $f(1)=0,f'(1)=1,f''(1)=-1,f'''(1)=2$. 所以

$$\ln(\boldsymbol{A})=[\ln(\boldsymbol{A}^T)]^T=\begin{pmatrix}f(1)&f'(1)&\frac{f''(1)}{2!}&\frac{f'''(1)}{3!}\\&f(1)&f'(1)&\frac{f''(1)}{2!}\\&&f(1)&f'(1)\\&&&f(1)\end{pmatrix}^T=\begin{pmatrix}0&1&-\frac{1}{2}&\frac{1}{3}\\&0&1&-\frac{1}{2}\\&&0&1\\&&&0\end{pmatrix}^T=\begin{pmatrix}0&&&\\1&0&&\\-\frac{1}{2}&1&0&\\\frac{1}{3}&-\frac{1}{2}&1&0\end{pmatrix}$$

方法二：对 $\boldsymbol{A}$ 求得 $\boldsymbol{P}$，使得 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}=\begin{bmatrix}1&1&&\\&1&1&\\&&1&1\\&&&1\end{bmatrix}=\boldsymbol{J}$，再得到

$$\ln \boldsymbol{A}=\boldsymbol{P}\cdot\ln \boldsymbol{J}\cdot\boldsymbol{P}^{-1}=\begin{bmatrix}0&0&0&0\\1&0&0&0\\-\frac{1}{2}&1&0&0\\\frac{1}{3}&-\frac{1}{2}&1&0\end{bmatrix}.$$

12．设 $\boldsymbol{A}(t)$ 和 $\boldsymbol{A}^{-1}(t)$ 均为 $n$ 阶可微矩阵，证明 $\frac{d\boldsymbol{A}^{-1}(t)}{dt}=-\boldsymbol{A}^{-1}(t)\left(\frac{d\boldsymbol{A}(t)}{dt}\right)\boldsymbol{A}^{-1}(t)$.

**证：**对 $\boldsymbol{A}(t)\boldsymbol{A}^{-1}(t)=\boldsymbol{E}$ 两端关于 $t$ 求导数可得

$$\frac{d\boldsymbol{A}(t)}{dt}\cdot\boldsymbol{A}^{-1}(t)+\boldsymbol{A}(t)\cdot\frac{d\boldsymbol{A}^{-1}(t)}{dt}=0.$$

两边左乘 $\boldsymbol{A}^{-1}(t)$ 并移项即得 $\frac{d\boldsymbol{A}^{-1}(t)}{dt}=-\boldsymbol{A}^{-1}(t)\left(\frac{d\boldsymbol{A}(t)}{dt}\right)\boldsymbol{A}^{-1}(t)$.

13. 设 $f\left(\boldsymbol{X}\right)=tr(\boldsymbol{X}^T\boldsymbol{X}),\boldsymbol{X}\in\boldsymbol{R}^{m\times n}$，求 $\frac{df}{d\boldsymbol{X}}$.

**解：**这是数量函数对矩阵变量的导数. 设 $\boldsymbol{X}=\left(x_{ij}\right)_{m\times n}$，则

$$f\left(\boldsymbol{X}\right)=\left\|\boldsymbol{X}\right\|_F^2=\sum_{s=1}^{m}\sum_{t=1}^{n}x_{st}^2=tr\left(\boldsymbol{X}^T\boldsymbol{X}\right).$$

又因为 $\frac{\partial f}{\partial x_{ij}}=2x_{ij}\left(i=1,2,\cdots,m;\quad j=1,2,\cdots,n\right)$，所以

$$\frac{df}{d\boldsymbol{X}}=\left(\frac{\partial f}{\partial x_{ij}}\right)_{m\times n}=\left(2x_{ij}\right)_{m\times n}=2\boldsymbol{X}\quad.$$

14．设 $\boldsymbol{A}\in\boldsymbol{R}^{m\times n},\boldsymbol{x}\in\boldsymbol{R}^n,F(\boldsymbol{x})=\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$，求 $\frac{dF(\boldsymbol{x})}{d\boldsymbol{x}},\frac{dF(\boldsymbol{x})}{d\boldsymbol{x}^T}$.

**解：**设 $\boldsymbol{A}=\left(a_{ij}\right)_{m\times n}$，$\boldsymbol{x}=(x_1,x_2,\cdots,x_n)^T$，由于

$$F(\boldsymbol{x})=\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\left(\sum_{k=1}^{n}a_{1k}x_k,\cdots,\sum_{k=1}^{n}a_{mk}x_k\right)^T$$

所以 $\frac{\partial F}{\partial x_i}=\left(a_{1i},\cdots,a_{mi}\right)^T$，$\frac{dF}{d\boldsymbol{x}}=\left(\frac{\partial F}{\partial x_1},\cdots,\frac{\partial F}{\partial x_n}\right)^T=\left(a_{11},\cdots,a_{m1},\cdots,a_{1n},\cdots,a_{mn}\right)^T$.

$$而\quad\frac{dF}{d\boldsymbol{x}^T}=\left(\frac{\partial F}{\partial x_1},\quad\cdots,\quad\frac{\partial F}{\partial x_n}\right)=\begin{bmatrix}a_{11}&\cdots&a_{1n}\\\vdots&&\vdots\\a_{m1}&\cdots&a_{mn}\end{bmatrix}=\boldsymbol{A}.$$

15．设 $\boldsymbol{X} \in \boldsymbol{R}^{n\times n}, \det \boldsymbol{X} \neq 0, f\left(\boldsymbol{X}\right) = \det \boldsymbol{X}$． 证明 $\dfrac{df}{d\boldsymbol{X}} = (\det \boldsymbol{X})(\boldsymbol{X}^{-1})^T$．

**证**：设 $\boldsymbol{X} = \left(x_{ij}\right)_{n\times n}$，记 $x_{ij}$ 的代数余子式为 $\boldsymbol{X}_{ij}$， $\boldsymbol{X}$ 的伴随矩阵为 $adj\boldsymbol{X}$ . 将 $det\boldsymbol{X}$ 按第 $i$ 行展开，得

$$f(\boldsymbol{X}) = det\boldsymbol{X} = x_{i1}\boldsymbol{X}_{i1} + \cdots + x_{ij}\boldsymbol{X}_{ij} + \cdots + x_{in}\boldsymbol{X}_{in},$$

所以 $\dfrac{\partial f}{\partial x_{ij}} = \boldsymbol{X}_{ij}\left(i, j = 1, 2, \cdots, n\right)$，从而有

$$\frac{df}{d\boldsymbol{X}} = \left(\boldsymbol{X}_{ij}\right)_{n\times n} = \left(adj\boldsymbol{X}\right)^T = \left(\left(\det \boldsymbol{X}\right)\boldsymbol{X}^{-1}\right)^T = (\det \boldsymbol{X})\left(\boldsymbol{X}^{-1}\right)^T.$$