电子科技大学研究生试卷

（考试时间： 16:20 至 18:20，共 2 小时）

课程名称 矩阵理论 教师__________ 学时 60 学分 3

教学方式 课堂讲授 考核日期 2013 年 12 月 27 日 成绩__________

考核方式：__________（学生填写）

符号说明： E 表示单位矩阵，Vec(A)表示矩阵 A 向量化算符，λ_i 和 σ_i 分别表示矩阵的第 i 个特征值和奇异值，$N(A)$ 和 $R(A)$ 分别表示矩阵 A 的核和值域，rank(A)表示矩阵 A 的秩。

一． 判断题，对的打 √，错得打×。（每题 4 分，共 20 分）

1. 矩阵 A 为 n 阶方阵，则 $\|A\|_{m_2}^2=\sum_{i=1}^{n}|\lambda_i|^2$。…………………………………………………( )

2. 若 $A^H=\begin{bmatrix}0&1&0\\1&1&0\end{bmatrix}$，$B=\begin{bmatrix}0&1&0\\1&2&1\end{bmatrix}$，则 $(AB)^+=B^+A^+$。………………………( )

3. 设 $A=\begin{bmatrix}2\pi&0&0\\0&0&2\\0&0&0\end{bmatrix}$，则 $\cos A=\begin{bmatrix}0&0&0\\0&1&1\\0&0&1\end{bmatrix}$。………………………………………... ( )

4. 设 A,B 为任意矩阵，则 $(A\otimes B)^+=A^+\otimes B^+$。…………………………………( )

5. 设 $A\in C^{n\times n}$，其奇异值为 $\sigma_1\ge\cdots\ge\sigma_n$，特征值为 $\lambda_1,\cdots,\lambda_n$，则 $\sigma_n\le|\lambda_i|\le\sigma_1$。….( )

二． 选择题（每题 4 分，共 20 分）

1. 若 $A\in C^{n\times n}$ 是幂等矩阵，则下列说法***错误***的是…………………………………( )

A. rank(A)等于非零特征值的个数. B. 矩阵 A 可对角化.

C. $N(A)=R(E-A)$. D. $C^n=R(A)\oplus N(A)$.

2. 设 $A,B\in C^{n\times n}$，下列说法***错误***的是…………………………………………….（ ）

A. $\mathbf{tr}(A\otimes B)=\mathbf{tr}(A)\mathbf{tr}(B)$. B. $\mathbf{rank}(A\otimes B)=\mathbf{rank}(A)\mathbf{rank}(B)$.

C. $\mathbf{Vec}(AXB)=(B\otimes A)\mathbf{Vec}(X)$. D. 若 rank($AB$)=rank($A$)，则 $R(A)=R(AB)$.

学院________ 姓名________ 学号________

密……封……线……以……内……答……题……无……效

3.下列结论***错误***的是 ……………………………………………………………………………(　　)

A．n阶矩阵A的n个盖尔圆两两互不相交，则A为单纯矩阵.

B．λ为n阶酉矩阵U的特征值,则 $|\lambda|=1$.

C. 正规矩阵的特征值与奇异值相同.

D. n阶方阵A有零特征值,则A不是严格对角占优矩阵.

4．下列结论***正确***的是………………………………………………………………………(　　)

A. A为n阶方阵， 则 $r(A^H A)\geq\|A\|_1\bullet\|A\|_\infty$.

B. 设A为正定 Hermite 矩阵，则$A=R^H R$分解唯一，其中R为正线上三角复矩阵.

C. 若n阶方阵A满足$A^H=A$， 则$\sqrt{x^H Ax}$为C^n上的向量范数.

D. A为n方阵,则$(A^2)^+=(A^+)^2$.

5.关于收敛矩阵A**等价**说法***错误***的是 ……………………………...............................(　　)

A. $\|A\|_2<1$.　B. 谱半径$r(A)<1$.　C. $\sum\limits_{k=0}^{\infty}A^k$收敛.　D. $\lim\limits_{k\to 0}A^k=O$.

三．计算和证明（共 60 分）

1. 设$A\in P^{m\times n}$，**证明**：从属于向量 2 范数$\|x\|_2$的算子范数为$\|A\|_2=\sqrt{r(A^H A)}$,其中$r(A^H A)$是矩阵$A^H A$的谱半径.（10 分）

2. 设$A\in C^{n\times n}$，$A^H=A$，$f(x)=x^H Ax, x\in C^n$，证明：在$\|x\|_2=1$的情况下$f(x)$有界,并求出最大值和最小值。(即证明 Rayleigh-Ritz 定理)。 (10 分)

学号________ 姓名________ 学院________

密封线以内答题无效

3. 已知矩阵 $A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}, b=\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$,

(1) 求矩阵 A 的最大秩分解; **(2)** 求 A^{+}; **(3)**判断方程组 $Ax=b$ 是否有解?

(4) 求方程组 $Ax=b$ 的最小范数解及通解或最小二乘解通解及其最佳逼近解?(指出所求的是哪种解) . (15 分)

4. 设 $A\in C_r^{m\times n}$ (*r*>0)的正奇异值为 $\sigma_1\geq\cdots\geq\sigma_r$， $B=\left[A^{+}, \ A^{+}\right]$ 的正奇异值为 $\eta_1\geq\cdots\geq\eta_r$，证明：$\sum_{i=1}^{r}\eta_i^2=2\sum_{i=1}^{r}\frac{1}{\sigma_i^2}$。（**10** 分）

5. 设 d_i 为 m 个非零常数， $P=\left(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m\right)\in C^{n\times m}$，

$$A=d_1\alpha_1\alpha_1^H+d_2\alpha_2\alpha_2^H+\cdots+d_m\alpha_m\alpha_m^H,$$

证明：矩阵 P 列满秩的**充要条件**是 rank(A) =m. (10 分)

6. 设 $A\in C^{n\times n}$，且 $\|A\|_2<1$，证明：$\left(E+A\right)$ 可逆，且 $\left\|\left(E+A\right)^{-1}\right\|_2\leq\dfrac{1}{1-\|A\|_2}$. (5 分)

2013 级矩阵理论评分标准

一.　　判断题（每题 4 分，共 20 分）×　√　×　√　√

二.　　选择题（每题 4 分，共 20 分）D　C　C　B　A(D)

三.　　证明和计算

1. **证明：**

$f(X)=X^H(A^HA)X=(AX)^HAX\geq 0$；

$\lambda_1\geq\lambda_2\geq\cdots\geq\lambda_n\geq 0; X_i$是对应$\lambda_i$的单位正交特征向量 …………………………… 3 分

设 $\forall\, \boldsymbol{u}\in \boldsymbol{P}^n$ 且 $\|\boldsymbol{u}\|_2=1$. $\boldsymbol{u}=\boldsymbol{a}_1\boldsymbol{X}_1+\boldsymbol{a}_2\boldsymbol{X}_2+\cdots+\boldsymbol{a}_n\boldsymbol{X}_n$. ……………………… 4 分

$\|\boldsymbol{u}\|_2^2=\boldsymbol{u}^H\boldsymbol{u}=|\boldsymbol{a}_1|^2+|\boldsymbol{a}_2|^2+\cdots+|\boldsymbol{a}_n|^2=1$. $\boldsymbol{A}^H\boldsymbol{A}\boldsymbol{u}=\boldsymbol{a}_1\lambda_1\boldsymbol{X}_1+\boldsymbol{a}_2\lambda_2\boldsymbol{X}_2+\cdots+\boldsymbol{a}_n\lambda_n\boldsymbol{X}_n$.

$\|Au\|_2^2=(Au)^HAu=u^HA^HAu=\lambda_1|a_1|^2+\lambda_2|a_2|^2+\cdots+\lambda_n|a_n|^2$,………… 6 分

$\leq\lambda_1(|a_1|^2+|a_2|^2+\cdots+|a_n|^2)=\lambda_1$.

$\max\limits_{\|\boldsymbol{u}\|_2=1}\|\boldsymbol{A}\boldsymbol{u}\|_2\leq\sqrt{\lambda_1}$. ………………………………………………………………… 8 分

又　$\|AX_1\|_2^2=X_1^HA^HAX_1=X_1^H\lambda_1X_1=\lambda_1$

$\|\boldsymbol{A}\|_2=\max\limits_{\|\boldsymbol{u}\|_2=1}\|\boldsymbol{A}\boldsymbol{u}\|_2=\sqrt{\lambda_1}=\sqrt{r(\boldsymbol{A}^H\boldsymbol{A})}$. …………………………………………10 分

2. **证明：**

A为Hermite矩阵， $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{U}\Lambda\boldsymbol{U}^H,\Lambda=diag(\lambda_1,\lambda_2,\cdots\lambda_n)$， ....3 分

$\boldsymbol{x}^H\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{x}^H\boldsymbol{U}\Lambda\boldsymbol{U}^H\boldsymbol{x}=\left(\boldsymbol{U}^H\boldsymbol{x}\right)^H\Lambda\left(\boldsymbol{U}^H\boldsymbol{x}\right)=\boldsymbol{y}^H\Lambda\boldsymbol{y}=\sum\limits_{i=1}^n\lambda_i|y_i|^2$， ....5 分

$\|\boldsymbol{x}\|_2=\boldsymbol{1}$，$\|\boldsymbol{y}\|_2=\boldsymbol{1}$或$\sum\limits_{i=1}^n|y_i|^2=1$,

$\boldsymbol{x}^H\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}\geq\lambda_{\min}\cdot\sum\limits_{i=1}^n|y_i|^2=\lambda_{\min}$,..7 分

$\boldsymbol{x}^H\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}\leq\lambda_{\max}\cdot\sum\limits_{i=1}^n|y_i|^2=\lambda_{\max}$. ....9 分

$\boldsymbol{A}\alpha=\lambda_{\max}\alpha, f(\alpha)=\lambda_{\max}; \boldsymbol{A}\beta=\lambda_{\min}\beta, f(\beta)=\lambda_{\min}$. ....10 分

3. 解：（1）$A=BD=\begin{bmatrix}1&0\\1&2\\0&2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}$，不唯一。……………………………………..3 分

（2）$A^{+}=D^{H}(DD^{H})^{-1}(B^{H}B)^{-1}B^{H}=\frac{1}{6}\begin{bmatrix}2&1&-1\\2&1&-1\\-1&1&2\end{bmatrix}$……………………………..……..7 分

(3) $AA^{+}b=\frac{2}{3}\begin{bmatrix}1\\2\\1\end{bmatrix}\neq b$，不相容方程组，无解。…………………………………...………..11 分

(4) $x=A^{+}b+(E-A^{+}A)u$ 为最小二乘解通解，………………………………………………..13 分

$A^{+}b=\frac{1}{3}\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}$为最佳逼近解………………………………………………………………..15 分

4. 证明：矩阵 A 的奇异值分解 $A=U\begin{pmatrix}D&0\\0&0\end{pmatrix}V$，其中 $D=diag(\sigma_1,\cdots,\sigma_r)$，……….3 分

则 $A^{+}=V^{H}\begin{pmatrix}D&0\\0&0\end{pmatrix}^{+}U^{H}=V^{H}\begin{pmatrix}D^{-1}&0\\0&0\end{pmatrix}U^{H}$，…………………………………………5 分

因为 $BB^{H}=2A^{+}\left(A^{+}\right)^{H}$ ……………………………………………………... …..…………7 分

$=2V^{H}\begin{pmatrix}D^{-2}&0\\0&0\end{pmatrix}V=V^{H}\begin{pmatrix}2D^{-2}&0\\0&0\end{pmatrix}V$，……………...……………………..…………8 分

则 B 的奇异值平方为 BB^{H} 的特征值，因此$\sum_{i=1}^{r}\eta_i^2=2\sum_{i=1}^{r}\frac{1}{\sigma_i^2}$。……………….…………10 分

5.证明：必要性：因为$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$ 线性无关,

$rank(P)=m, rank(P^H P)=rank(P)=m,$……………………………..…………....2 分

$P^H P$ 是可逆的. $P^H AP=P^H P\begin{pmatrix} d_1 & & \\ & \ddots & \\ & & d_m \end{pmatrix}P^H P,$……………...………..……....4 分

可得，$rank(P^H AP)=m,$ 故有 $m=rank(P^H AP)\le rank(A)\le rank(P)\le m,$

证得 $rank(A)=m$ ……………………………………………………………..….5 分

充分性： $rank(A)=m,\ A=(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m)\begin{bmatrix} d_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & d_2 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & d_m \end{bmatrix}\begin{pmatrix} \alpha_1^H \\ \alpha_2^H \\ \vdots \\ \alpha_m^H \end{pmatrix}.$…..……...8 分

$P=(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m),$ 则 $A=P\begin{pmatrix} d_1 & & \\ & \ddots & \\ & & d_m \end{pmatrix}P^H,\ m=rank(A)\le rank(P)\le m,$ 故有，

$rank(P)=m.$ 故 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$ 线性无关……………………………….…..……..10 分

6. 证明：

$\forall x\ne 0\in C^n$，$\|(E+A)x\|_2=\|x+Ax\|_2\ge\|x\|_2-\|Ax\|_2\ge\|x\|_2-\|A\|_2\|x\|_2$

$=\|x\|_2(1-\|A\|_2)>0.$

$(E+A)x\ne 0$，$(E+A)$可逆. ....……………...……….2 分

$(E+A)^{-1}(E+A)=E$，$(E+A)^{-1}=E-A(E+A)^{-1}$,........................………..……….4 分

$\|(E+A)^{-1}\|_2=\|E-A(E+A)^{-1}\|_2\le\|E\|_2+\|A\|_2\|(E+A)^{-1}\|_2$，

$(1-\|A\|_2)\|(E+A)^{-1}\|_2\le\|E\|_2=1$ ....………..…………………………...5 分