§4 **Hermitian** 矩阵特征值的变分特征

程光辉

2020 年 4 月 28 日

定义 1. 设 $A \in \mathbf{C}^{n\times n}$ 为 *Hermitian* 矩阵，$x \in \mathbf{C}^n$，称

$$R(x) = \frac{x^H A x}{x^H x}, \quad x \neq 0$$

为 A 的 *Rayleigh* 商.

若 $\|x\| = 1$，则 **Rayleigh** 商变为

$$\mathrm{R}(x) = x^H A x.$$

为了下文方便，给出如下结论和记号：

若 $A \in \mathbf{C}^{n\times n}$ 为 **Hermitian** 矩阵，则存在酉矩阵 $U = (u_1, u_2, \cdots, u_n)$ 使得 $A = U\Lambda U^H$，其中 $\Lambda = \mathrm{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n)$，且 $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \cdots \geq \lambda_n$.

引理 1. 若 $W = span\{u_r, \cdots, u_s\}$，其中 $1 \leq r \leq s \leq n$，则对 $\forall x \in W$，$\|x\| = 1$，有

$$\lambda_s \leq x^H A x \leq \lambda_r.$$

证明： 对 $\forall x \in W$，$\|x\| = 1$，有

$$x = \sum_{i=r}^{s} k_i u_i, \quad \sum_{i=r}^{s} |k_i|^2 = 1.$$

进而

$$x^H A x = x^H \sum_{i=r}^{s} k_i A u_i = x^H \sum_{i=r}^{s} k_i \lambda_i u_i = \sum_{i=r}^{s} |k_i|^2 \lambda_i.$$

又因 $\lambda_s \leq \lambda_i \leq \lambda_r$，$i = r, \cdots, s$，则有

$$\lambda_s = \lambda_s \sum_{i=r}^{s} |k_i|^2 \leq x^H A x = \sum_{i=r}^{s} |k_i|^2 \lambda_i \leq \lambda_r \sum_{i=r}^{s} |k_i|^2 = \lambda_r,$$

得证.

定理 1. *(Rayleigh -Ritz)* 设 $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ 为 *Hermitian* 矩阵，则

(1) $\lambda_n x^H x \le x^H A x \le \lambda_1 x^H x, \quad (\forall x \in \mathbb{C}^n)$，

(2) $\lambda_{\max} = \lambda_1 = \max\limits_{x\neq 0} R(x) = \max\limits_{x^H x=1} x^H A x,$

(3) $\lambda_{\min} = \lambda_n = \min\limits_{x\neq 0} R(x) = \min\limits_{x^H x=1} x^H A x.$

证明：(1) 直接由引理 1，即可得证.

(2) 取 x 为 λ_1 对应的特征向量，即可.

(3) 取 x 为 λ_n 对应的特征向量，即可.

定理 2. *(Courant -Fischer)* 设 $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ 为 *Hermitian* 矩阵，特征值为 $\lambda_1 \ge \lambda_2 \ge \ldots \ge \lambda_n$，$k$ 为给定的正整数，且 $1 \le k \le n$，则

$$\max_{V,dim(V)=k} \quad \min_{x\in V,\|x\|=1} R(x) = \lambda_k,$$

$$\min_{V,dim(V)=n-k+1} \quad \max_{x\in V,\|x\|=1} R(x) = \lambda_k.$$

证明：设 A 的特征值 λ_i 对应的单位特征向量为 u_i. 考虑如下子空间

$$T = \mathrm{span}\{u_k, \cdots, u_n\},$$

则 $\dim(T) = n-(k-1) = n-k+1$.

设 V 是 $\mathbb{C}^n$ 上任意的子空间，且 $\dim(V) = k$. 因为

$$\dim(T) + \dim(V) = n-k+1+k = n+1,$$

则有 $\dim(T\cap V) \ge 1$. 对 $\forall x \in T\cap V$，且 $\|x\| = 1$，因 $x \in T$，由引理 1 知

$$\lambda_k \ge x^H A x.$$

又因 $x \in V$，则有

$$x^H A x \ge \min_{v\in V,\|v\|=1} v^H A v.$$

进而有

$$\lambda_k \ge \min_{v\in V,\|v\|=1} v^H A v.$$

上式除了 $\dim(V) = k$ 外，没有任何限制，于是

$$\lambda_k \ge \max_{V,\dim(V)=k} \quad \min_{x\in V,\|x\|=1} x^H A x.$$

下面证明上面不等式的方向. 记 $W = \mathrm{span}\{u_1, \cdots, u_k\}$，由引理 1 知，若 $w \in W$，且 $\|w\| = 1$，有

$$w^H A w \ge \lambda_k = u_k^H A u_k.$$

因此，对 $\forall w \in W$，$\|w\| = 1$，有

$$\min_{w\in W,\|w\|=1} w^H A w \geq \lambda_k = u_k^H A u_k.$$

设 V 是 $\mathbf{C}^n$ 上任意的子空间，且 $\dim(V) = k$，则有

$$\max_{V,\dim(V)=k} \quad \min_{x\in V,\|x\|=1} x^H A x \geq \min_{w\in W,\|w\|=1} w^H A w \geq \lambda_k = u_k^H A u_k.$$

综上，不等式大于等于小于等于同时成立，即

$$\max_{V,\dim(V)=k} \quad \min_{x\in V,\|x\|=1} R(x) = \lambda_k.$$

同理，可证另外一个等式.

定理 3. *(Weyl)* 设 $A, B \in \mathbf{C}^{n\times n}$ 为 *Hermitian* 矩阵，则 $\forall k = 1, 2, \cdots, n$，有

$$\lambda_k(A) + \lambda_n(B) \leq \lambda_k(A+B) \leq \lambda_k(A) + \lambda_1(B).$$

证明： 对 $\forall x \in \mathbf{C}^n$，且 $\|x\| = 1$ 有

$$\lambda_n(B) \leq x^H B x \leq \lambda_1(B),$$

所以

$$\begin{aligned}
\lambda_k(A+B) &= \max_{V,\dim(V)=k} \quad \min_{x\in V,\|x\|=1} x^H (A+B) x \\
&= \max_{V,\dim(V)=k} \quad \min_{x\in V,\|x\|=1} \left(x^H A x + x^H B x\right) \\
&\geq \max_{V,\dim(V)=k} \quad \min_{x\in V,\|x\|=1} \left(x^H A x + \lambda_n(B)\right) \\
&= \lambda_k(A) + \lambda_n(B).
\end{aligned}$$

类似可证不等式另外一侧.