§3 Hermitian 矩阵及其分解

程光辉

2020 年 4 月 4 日

定义 1 设 $\boldsymbol{A} \in \mathbf{C}^{n \times n}$，若 $\boldsymbol{A}^H = \boldsymbol{A}$，则称 $\boldsymbol{A}$ 为 **Hermitian** 矩阵；若 $\boldsymbol{A}^H = -\boldsymbol{A}$，则称 $\boldsymbol{A}$ 为反 **Hermitian** 矩阵.

定理 1 设 $\boldsymbol{A} \in \mathbf{C}^{n \times n}$ 是 **Hermitian** 矩阵，则

(1) $(\boldsymbol{A\alpha}, \boldsymbol{\beta}) = (\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{A\beta}), \forall \boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta} \in \mathbf{C}^n$,

(2) $\boldsymbol{A}$ 的特征值都是实数,

(3) 属于 $\boldsymbol{A}$ 不同特征值的特征向量正交,

(4) $\boldsymbol{A}$ 与矩阵 $\begin{bmatrix} \boldsymbol{E}_p & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & -\boldsymbol{E}_{r-p} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix}$ 合同，其中 $\mathbf{rank}(\boldsymbol{A}) = \boldsymbol{r}$，$\boldsymbol{p}$ 为正惯性指数,

(5) $\boldsymbol{U}^H \boldsymbol{A} \boldsymbol{U} = \mathbf{diag}(\boldsymbol{\lambda}_1, \boldsymbol{\lambda}_2, \cdots, \boldsymbol{\lambda}_n)$，其中 $\boldsymbol{U}$ 为酉矩阵.

定义 2 设 $\boldsymbol{A} \in \mathbf{C}^{n \times n}$ 是 **Hermitian** 矩阵，对任意非零向量 $\boldsymbol{x} \in \mathbf{C}^n$，都有

$$\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{x}^H \boldsymbol{A} \boldsymbol{x} > \mathbf{0} \quad (\geq \mathbf{0}),$$

则称二次型 $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$ 是正定 *(*半正定*)* 二次型，此时系数矩阵 $\boldsymbol{A}$ 称为正定 *(*半正定*)* 矩阵.

定理 2 设 $\boldsymbol{A} = (\boldsymbol{a}_{ij}) \in \mathbf{C}^{n \times n}$ 是正定 **Hermitian** 矩阵，则

(1) $\boldsymbol{a}_{ii} > \mathbf{0}, \boldsymbol{i} = \mathbf{1}, \mathbf{2}, \cdots, \boldsymbol{n}$;

(2) $\boldsymbol{A}$ 的特征值 $\boldsymbol{\lambda}_i > \mathbf{0}, \boldsymbol{i} = \mathbf{1}, \mathbf{2}, \cdots, \boldsymbol{n}$;

(3) 存在正定矩阵 $\boldsymbol{B}$，使得 $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{B}^k$，$\boldsymbol{k} \in \boldsymbol{Z}^+$;

(4) 存在正线下三角矩阵 $\boldsymbol{L}$，使得 $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{L}\boldsymbol{L}^H$, *(*Cholesky 分解*)*;

(5) $\mathbf{det}(\boldsymbol{A}) \leq \boldsymbol{a}_{11} \boldsymbol{a}_{22} \cdots \boldsymbol{a}_{nn} = \boldsymbol{\Pi}_{i=1}^{n} \boldsymbol{a}_{ii}$, *(*Hadamard 不等式*)*;

(6) $\boldsymbol{A}$ *与单位矩阵合同;*

(7) $\boldsymbol{A}$ *的顺序主子式都为正.*

证明： (5) 由 (4) 知，存在正线下三角 $\boldsymbol{L} = (l_{ij})$，使得 $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{L}\boldsymbol{L}^H$，则矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的对角元素为

$$a_{ii} = \sum_{k=1}^{i} l_{ik}\bar{l}_{ik} = \sum_{k=1}^{i} |l_{ik}|^2 \geq |l_{ii}|^2, \quad i = 1, 2, \cdots n.$$

又因为

$$\det(A) = \det(LL^H) = \det(L)\det(L^H) = \Pi_{i=1}^{n} l_{ii}^2 \leq \Pi_{i=1}^{n} a_{ii},$$

得证.

定理 3 *设* $\boldsymbol{A} \in \mathbf{C}^{n\times n}$ *是正定* **Hermitian** *矩阵，*$\boldsymbol{B} \in \mathbf{C}^{n\times n}$ *是* **Hermitian** *矩阵，则存在可逆矩阵* $\boldsymbol{T} \in \mathbf{C}^{n\times n}$*，使得*

$$\boldsymbol{T}^H\boldsymbol{A}\boldsymbol{T} = \boldsymbol{E}_n, \quad \boldsymbol{T}^H\boldsymbol{B}\boldsymbol{T} = \boldsymbol{\Lambda},$$

其中 $\boldsymbol{\Lambda}$ *为对角矩阵.*

证明： 因为 $\boldsymbol{A} \in \mathbf{C}^{n\times n}$ 是正定 **Hermitian** 矩阵，即存在可逆矩阵 $\boldsymbol{P}$，使得

$$\boldsymbol{P}^H\boldsymbol{A}\boldsymbol{P} = \boldsymbol{E}_n.$$

令 $\boldsymbol{Q} = \boldsymbol{P}^H\boldsymbol{B}\boldsymbol{P}$，又因 $\boldsymbol{B} \in \mathbf{C}^{n\times n}$ 是 **Hermitian** 矩阵，则 $\boldsymbol{Q}$ 也为 **Hermitian** 矩阵，故存在酉矩阵 $\boldsymbol{U}$，使得

$$\boldsymbol{U}^H\boldsymbol{Q}\boldsymbol{U} = \boldsymbol{\Lambda},$$

其中 $\boldsymbol{\Lambda} = (\boldsymbol{\lambda}_1, \boldsymbol{\lambda}_2, \cdots, \boldsymbol{\lambda}_n)$ 为对角矩阵.

记 $\boldsymbol{T} = \boldsymbol{P}\boldsymbol{U}$，则有

$$\begin{aligned} \boldsymbol{T}^H\boldsymbol{A}\boldsymbol{T} &= \boldsymbol{U}^H\boldsymbol{P}^H\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}\boldsymbol{U} = \boldsymbol{U}^H\boldsymbol{E}_n\boldsymbol{U} = \boldsymbol{E}_n, \\ \boldsymbol{T}^H\boldsymbol{B}\boldsymbol{T} &= \boldsymbol{U}^H\boldsymbol{P}^H\boldsymbol{B}\boldsymbol{P}\boldsymbol{U} = \boldsymbol{U}^H\boldsymbol{Q}\boldsymbol{U} = \boldsymbol{\Lambda}, \end{aligned}$$

故得证.