一、初等矩阵

定义 1 设$u,v\in C^n,\sigma\in C$,则称

$$E(u,v,\sigma)=E-\sigma uv^H$$ 为初等矩阵.

1. 初等矩阵的特征向量$(u,v\neq 0,\sigma\neq 0)$.

(1) $u\in v^{\perp}$,设$u_1,\cdots,u_{n-1}$是$v^{\perp}$的一组基,它们也是$E(u,v,\sigma)$的$n-1$个线性无关的特征向量.

(2) $u\notin v^{\perp}$,设$u_1,\cdots,u_{n-1}$是$v^{\perp}$的一组基,则$u,u_1,\cdots,u_{n-1}$是$E(u,v,\sigma)$的n个线性无关的特征向量.

2. 初等矩阵的特征值

$$\lambda(E(u,v,\sigma))=\{1,1,\cdots,1,1-\sigma v^H u\}$$

$$3.\ \det(E(u,v,\sigma))=1-\sigma v^H u$$

$$4.\ E(u,v,\sigma)^{-1}=E(u,v,\frac{\sigma}{\sigma v^H u-1}),(1-\sigma v^H u\neq 0)$$

5. 非零向量$a,b\in C^n$, 存在u,v,σ,使得

$$E(u,v,\sigma)a=b,(\sigma u=\frac{a-b}{v^H a}).$$

6. 初等变换矩阵

$$E_{ij}=E-(e_i-e_j)(e_i-e_j)^T=E(e_i-e_j,e_i-e_j,1)$$

$$E_{ij}(k)=E+ke_je_i^T=E(e_j,e_i,-k)$$

$$E_i(k)=E-(1-k)e_ie_i^T=E(e_i,e_i,1-k)$$

7. 初等酉阵（*Householder*变换）

$$H(u)=E(u,u;2)=E-2uu^H,(u^Hu=1)$$

(1) $H(u)^H=H(u)=H(u)^{-1}$

(2) $H(u)(a+ru)=a-ru,\forall a\in u^{\perp},r\in C$(镜象变换)

(3)Householder变化的特性

$$(H(u)x,H(u)y)=(x,y)\Rightarrow\|H(u)x\|^2=(H(u)x,H(u)x)=(x,x)=\|x\|^2$$

$$\Rightarrow\|H(u)x\|=\|x\|$$

二. 投影变换与矩阵

(1)斜投影 $P_{LM}(\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n)=(\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n)A \Rightarrow A=A^2$

(2)正交投影 $P_{LM}(\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n)=(\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n)A \Rightarrow \begin{cases} A^2=A \\ A^H=A \end{cases}$

(3) $A\in C^{m\times n}$,则

$R(A)=\{y\,|\,y=Ax,\forall x\in C^n\}---A$的值域;

$N(A)=\{x\,|\,Ax=0,\ \forall x\in C^n\}---A$的核.

$rank(A)=rank(AB)\Rightarrow R(AB)=R(A)$

(4) $A\in C^{n\times m},B\in C^{n\times s},R(A)\perp R(B)\Leftrightarrow A^H B=0$

$$(5)A\in C^{m\times n}\Rightarrow\begin{cases}\dim R(A)+\dim N(A^H)=m\\ \dim R(A^H)+\dim N(A)=n\\ C^m=R(A)\oplus N(A^H)\\ C^n=R(A^H)\oplus N(A)\end{cases}$$

$$(6)A\in C^{n\times n},A=A^2\Rightarrow\begin{cases}(1)\quad A^H=\left(A^H\right)^2,E-A=\left(E-A\right)^2\\ (2)\quad \sigma(A)=\{\lambda\,|\,Ax=\lambda x,x\neq 0\}=\{0,1\}\\ (3)\quad rank(A)=tr(A)\\ (4)\quad A(E-A)=(E-A)A=0\\ (5)\quad A\alpha=\alpha\Leftrightarrow\alpha\in R(A)\\ (6)\quad N(A)=R(E-A),R(A)=N(E-A)\end{cases}$$

$$(7)A\in C^{n\times n},A=A^2\Rightarrow A=A^H\Leftrightarrow C^n=R(A)\oplus N(A),R^{\perp}(A)=N(A)$$

返回

三、Kronecker积(和)

$$A=(a_{ij})\in P^{m\times n}, B=(b_{ij})\in P^{p\times q}$$

1. Kronecker积$\Leftrightarrow A\otimes B=\begin{bmatrix} a_{11}B & a_{12}B & \cdots & a_{1n}B \\ a_{21}B & a_{22}B & \cdots & a_{2n}B \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1}B & a_{m2}B & \cdots & a_{mn}B \end{bmatrix}\in P^{mp\times nq}$

2. m阶矩阵A与n阶矩阵B的Kronecker 和

$$A\oplus_k B=A\otimes E_n+E_m\otimes B$$

$$\left(A\oplus_k B=E_n\otimes A+B\otimes E_m\right)$$

3. Kronecker积的性质：

设$A\in P^{m\times n},B\in P^{p\times q},C\in P^{r\times s},D\in P^{k\times h}$,则

(1) $E_m\otimes E_n=E_{mn}$

(2) $\lambda(A\otimes B)=(\lambda A)\otimes B=A\otimes(\lambda B)$

(3) $(A+B)\otimes C=(A\otimes C)+(B\otimes C)$

(4) $(A\otimes B)\otimes C=A\otimes(B\otimes C)$

(5) $(A\otimes B)^T=A^T\otimes B^T$, $\overline{(A\otimes B)}=\overline{A}\otimes\overline{B}$, $(A\otimes B)^H=A^H\otimes B^H$

(6) $A \in P^{m\times n}, B \in P^{p\times q}, C \in P^{n\times s}, D \in P^{q\times h}$，则

$$(A \otimes B)(C \otimes D) = AC \otimes BD$$

(7) $A \in P^{m\times m}, B \in P^{p\times p}$，且$A, B$可逆，则

$$(A \otimes B)^{-1} = A^{-1} \otimes B^{-1}$$

(8)$A \in P^{m\times m}, B \in P^{p\times p}$，则 $tr(A \otimes B) = trA \bullet trB$

(9) $rank(A \otimes B) = rankA \bullet rankB$

返回

(10) $A \in P^{m\times m}, B \in P^{p\times p}$,则

$$\det(A \otimes B) = (\det A)^p \cdot (\det B)^m$$

(11) 当$A^T = A, B^T = B$时,$A \otimes B$也是对称矩阵;

当$A^H = A, B^H = B$时,$A \otimes B$也是Hermite矩阵;

(12) 当U, V均为酉矩阵时,$U \otimes V$也是酉矩阵;

4、Kronecker积(和)的特征值

定理1：设$\lambda_i(i=1,2,\cdots,m)$为$A\in C^{m\times m}$的特征值，$x_i(i=1,2,\cdots,m)$为相应的特征向量；$\mu_j(j=1,2,\cdots,n)$为$B\in C^{n\times n}$，$y_j(j=1,2,\cdots,n)$为相应的特征向量，则$A\otimes B$有$mn$个特征值为$\lambda_i\mu_j$，对应的特征向量为$x_i\otimes y_j$.

定理2：设$\lambda_i(i=1,2,\cdots,m)$为$A\in C^{m\times m}$的特征值，$x_i(i=1,2,\cdots,m)$为相应的特征向量；$\mu_j(j=1,2,\cdots,n)$为$B\in C^{n\times n}$，$y_j(j=1,2,\cdots,n)$为相应的特征向量，则$\lambda_i+\mu_j$是$A\oplus_k B$的特征值，$x_i\otimes y_j$为对应的特征向量.

5、向量化算符

设 $A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}=(A_{c1},A_{c2},\dots,A_{cn})$

(1). 向量化算符: $Vec\ A=\begin{pmatrix} A_{c1} \\ A_{c2} \\ \vdots \\ A_{cn} \end{pmatrix}$ ----矩阵A的拉直.

(2).性质： $Vec\,(kA+lB)=kVec\,A+lVec\,B$

$$A\in P^{m\times n},\text{且}A=\alpha\beta^T,Vec\,(\alpha\beta^T)=\beta\otimes\alpha$$

定理3：设$A\in C^{m\times n},X\in C^{n\times r},B\in C^{r\times s}$，则

$$Vec\,(AXB)=(B^T\otimes A)Vec\,X$$

推论1：设$A\in C^{m\times m},B\in C^{n\times n},X\in C^{m\times n}$,则

(1) $Vec\,(AX)=(E_n\otimes A)Vec\,X$;

(2) $Vec\,(XB)=(B^T\otimes E_m)Vec\,X$.

(3)$vec(AX+XB)=[(E_n\otimes A)+(B^T\otimes E_m)]vec(X)$

6.Kronecker乘积的应用 --------矩阵方程的求解

(1) : *Sylvester*方程

$$AX + XB = D$$

$$\Leftrightarrow vec(AX + XB) = [(E \otimes A) + (B^T \otimes E)]vec(X) = vec(D)$$

特别$B = A^T$，即$AX + XA^T = D$ -----*Lyapunov*方程

(2) : $AXB = D$

$$\Leftrightarrow vec(AXB) = (B^T \otimes A)vec(X) = vec(D)$$

(3) : $A_1XB_1 + A_2XB_2 = D$

$$\Leftrightarrow [(B_1^T \otimes A_1) + (B_2^T \otimes A_2)]vec(X) = vec(D)$$