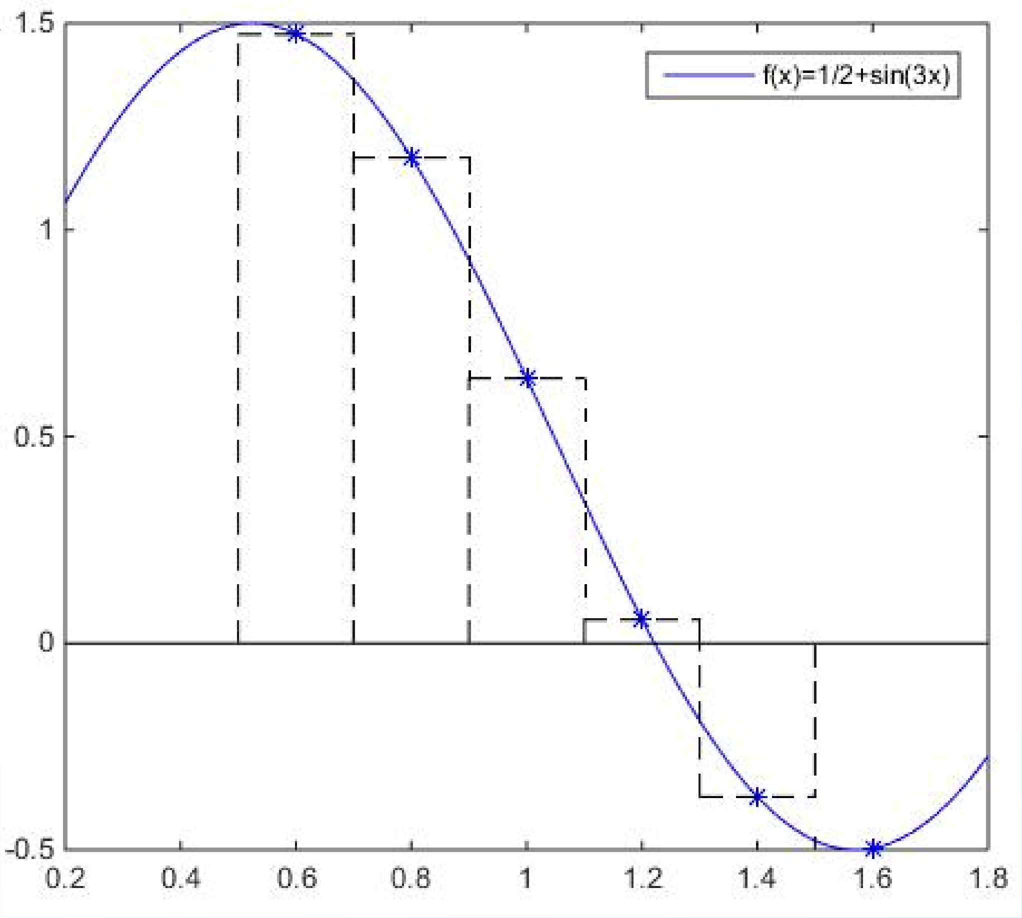
数值积分

- 数值积分基本概念
- 插值型求积公式
- 求积分的蒙特卡罗方法
- 复合求积公式
- 高斯型数值求积公式
- 龙贝格外推计算公式

数值积分基本概念

假设需要求解的定积分为如下形式

$$I(f)=\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$$



定积分的定义给出了一种数值求定积分的方法，但是黎曼和通常收敛很慢，这意味着它需要一个很大的 n 值才能使总和准确值很接近.

定积分与积分和式

假设需要求解的定积分为如下形式：

$$I(f)=\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$$

为了找到能够尽可能逼近$I(f)$准确值的数值方法．通常，求定积分近似值的形式为

$$I_n(f)=\sum_{i=i_0}^{n} w_i f\left(x_i\right)$$

数值求积公式的一般形式

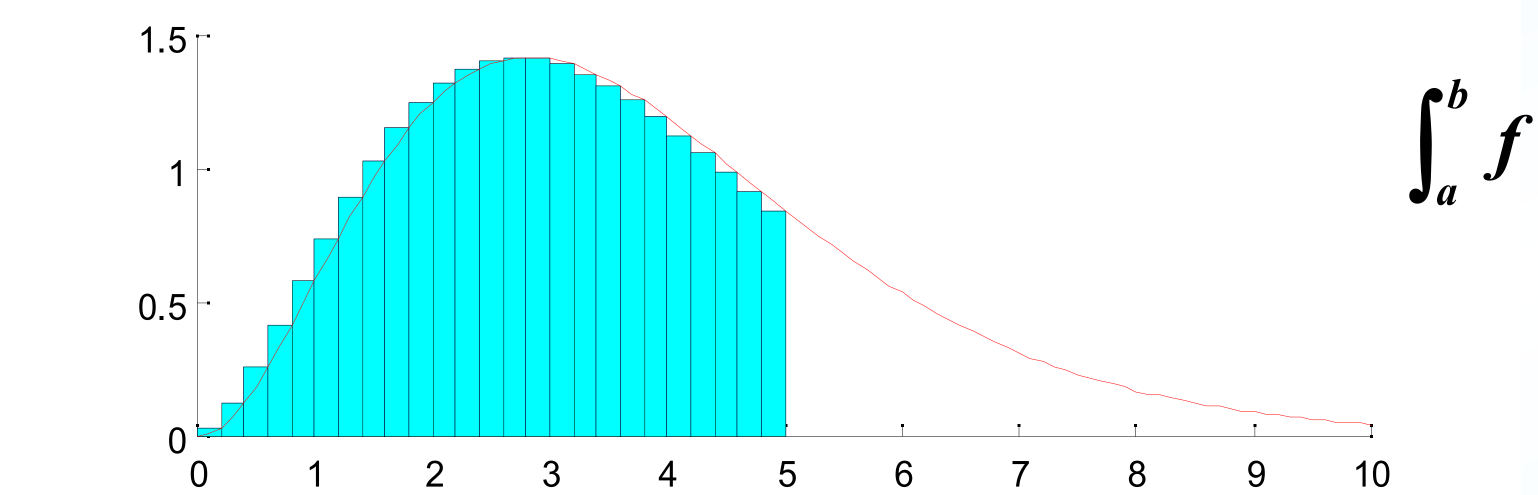
$$\int_a^b f(x)dx = \sum_{k=0}^{n} A_k f(x_k) + R[f]$$

$R[f]$ —— 数值求积公式余项

$x_0, x_1, \cdots, x_n$ —— 求积结点

$A_0, A_1, \cdots, A_n$ —— 求积系数

定积分与积分和式



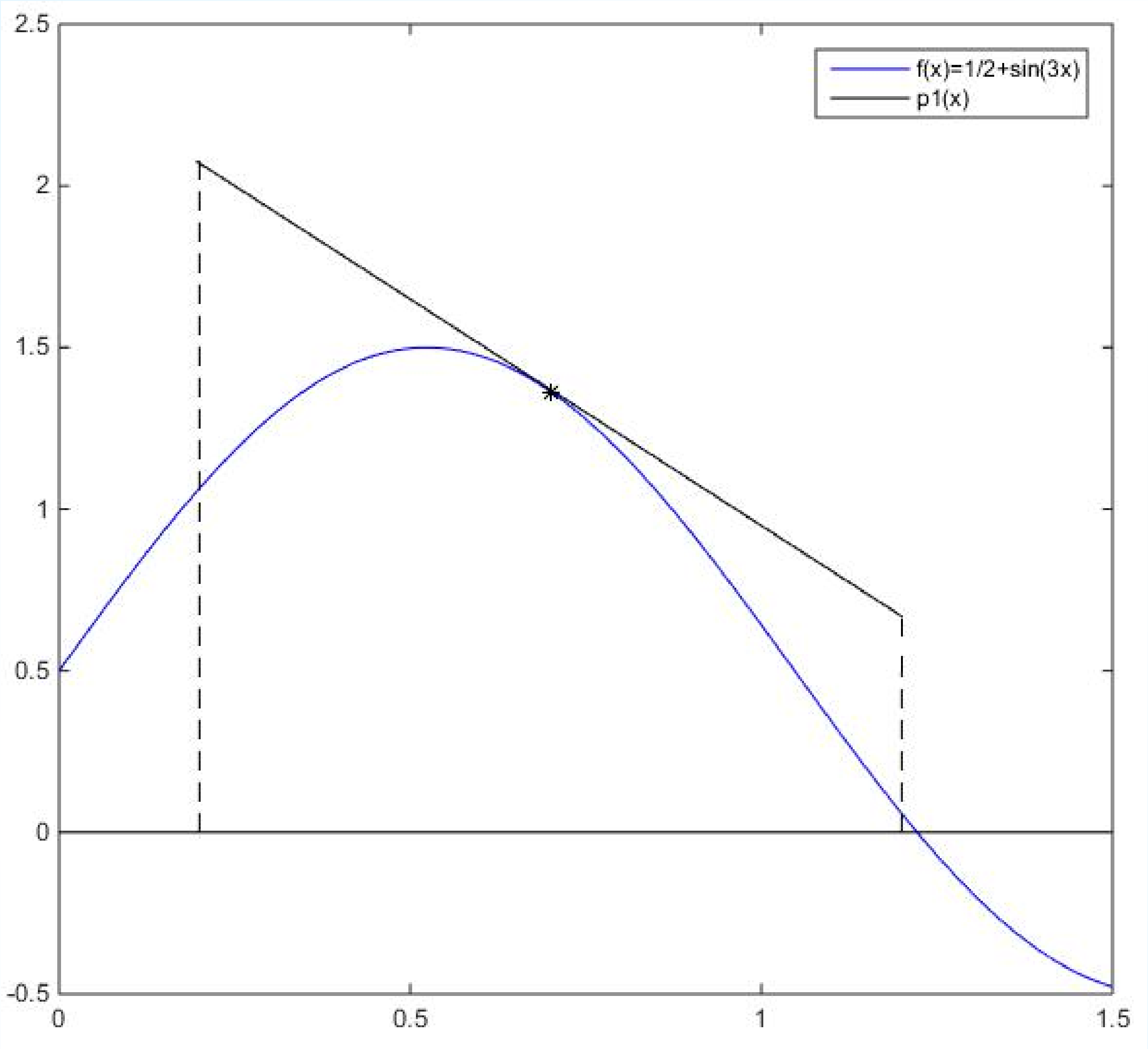
$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{h\to 0}\sum_{j=1}^{n} f(x_j)h$$

$$f(x) = \frac{x^3}{e^x - 1}$$

右矩形和 $S_n = \sum_{j=1}^{n} f(x_j)h$

h	1	0.5	0.2	$\cdots$	
S_n	5.2908	5.1044	4.9835	$\cdots$	4.8999

下图展示了函数 $y = f(x) = 1/2 + \sin \pi x$ ，在区间[1/4,5/4]上积分示意图.



下表是利用等距划分的左矩形公式、右矩形公式和中点公式进行计算的结果比较（这里参考的准确值为：4.89999)

$$f(x)=\frac{x^3}{e^x-1}$$

n	左矩形	右矩形	中点
1	4.4429	5.2908	4.8669
2	4.6804	5.1044	4.8924
3	4.8139	4.9835	4.8987
4	4.8572	4.9420	4.8996

插值型求积公式

对 [a， b]做分划: $a \le x_0 < x_1 < x_2 < \ldots\ldots < x_n \le b$

Lagrange 插值

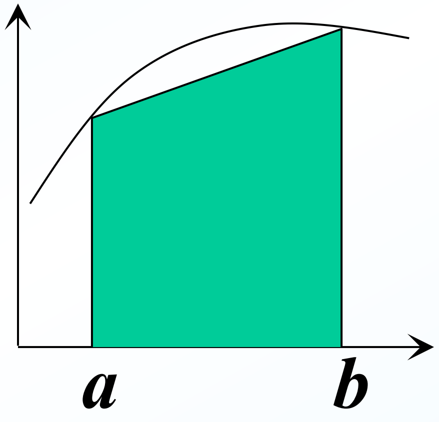
$$f(x) \approx \sum_{j=0}^{n} l_j(x) f(x_j) \qquad \int_a^b f(x)dx \approx \sum_{j=0}^{n} [\int_a^b l_j(x)dx] f(x_j)$$

令 $A_j = \int_a^b l_j(x)dx, (j = 0,1,2,\cdots,n)$ $\qquad \int_a^b f(x)dx \approx \sum_{j=0}^{n} A_j f(x_j)$

插值型求积公式的余项

$$R[f] = \int_a^b [f(x) - L_n(x)]dx = \underline{\int_a^b \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} \omega_{n+1}(x)dx}$$

例1. 梯形公式



线型插值

$$L(x)=\frac{x-x_0}{x_1-x_0}y_1+\frac{x_1-x}{x_1-x_0}y_0$$

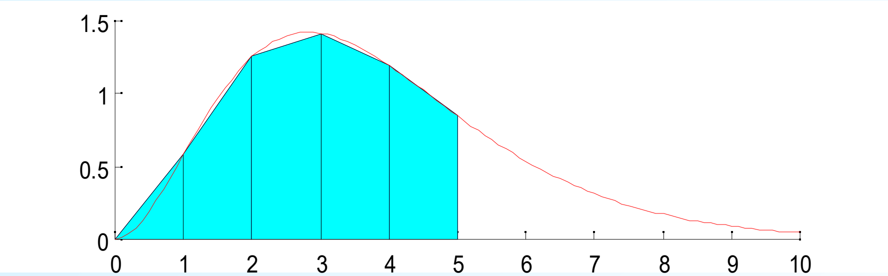
$$l_0(x)=\frac{x_1-x}{x_1-x_0},\ l_1(x)=\frac{x-x_0}{x_1-x_0}$$

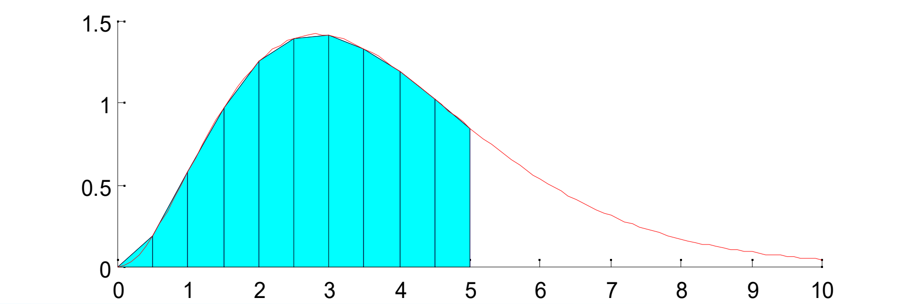
$$A_0=\int_a^b\frac{b-x}{b-a}dx=\frac{1}{2}(b-a)\qquad A_1=\int_a^b\frac{x-a}{b-a}dx=\frac{1}{2}(b-a)$$

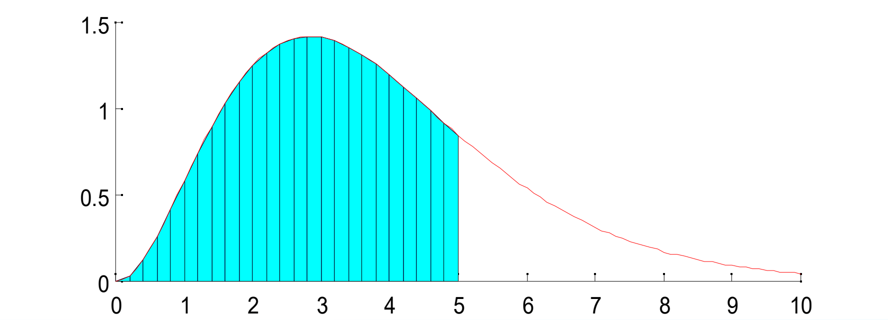
$$\Rightarrow\quad \int_a^b f(x)dx\approx\underline{\frac{b-a}{2}[f(a)+f(b)]}$$

梯形公式的误差（ 余项 ）

$$R=\int_a^b\frac{f''(\xi)}{2}(x-a)(x-b)dx=\frac{f''(\xi)}{2}\int_a^b(x-a)(x-b)dx \text{ 即 } R=-\frac{(b-a)^3}{12}f''(\eta)$$







$$f(x)=\frac{x^3}{e^x-1} \qquad \int_0^5 f(x)dx \approx 4.8999$$

$$S_n=\sum_{j=1}^{n}\frac{1}{2}[f(x_{j-1})+f(x_j)]h$$

左矩形	梯形	右矩形
4.4429	4.8669	5.2908
4.6804	4.8924	5.1044
4.8139	4.8987	4.9835
4.8572	4.8996	4.9420

例2. Simpson 公式

取 $x_0=a$, $x_1=0.5(a+b)$, $x_2=b$,则 $h=0.5(b-a)$

$$A_0=\int_{x_0}^{x_2}\frac{(x-x_1)(x-x_2)}{2h^2}dx$$

$$A_1=\int_{x_0}^{x_2}\frac{(x-x_0)(x-x_2)}{-h^2}dx$$

$$A_2=\int_{x_0}^{x_2}\frac{(x-x_0)(x-x_1)}{2h^2}dx$$

$$l_0(x)=\frac{(x-x_1)(x-x_2)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)}$$

$$l_1(x)=\frac{(x-x_0)(x-x_2)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)}$$

$$l_2(x)=\frac{(x-x_0)(x-x_1)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)}$$

$$\int_a^b f(x)dx\approx\underline{\frac{b-a}{6}[f(a)+4f(\frac{a+b}{2})+f(b)]}$$

$$\boxed{L(x)=l_0(x)y_0+l_1(x)y_1+l_2(x)y_2}$$

Simpson 公式

求积公式的代数精度

定义: 对不高于m次的多项式$P(x)$,求积公式余项

$$R[P]=\int_a^b P(x)dx-\sum_{k=0}^{n}A_k P(x_k)\equiv 0$$

且有m+1次多项式不具有这样的性质, 则称 $\int_a^b f(x)dx\approx\sum_{k=0}^{n}A_k f(x_k)$

具有m阶的代数精确度。

例. 梯形公式 $\int_a^b f(x)dx\approx\frac{b-a}{2}[f(a)+f(b)]$ 代数精度为1.

类似有: Simpson公式具有3阶代数精度.

对于n次Lagrange插值基函数,有恒等式

$$\sum_{j=0}^{n} l_j(x)x_j^k = x^k \quad \rightarrow \quad \sum_{j=0}^{n} A_j x_j^k = \int_a^b x^k dx$$

所以, $R[x^k] = 0, \ (k = 0,1,2,\cdots,n)$

$(n+1)$点插值型求积公式代数精度至少为n阶.

例3. 确定公式 $\int_0^{3h} f(x)dx \approx A_0 f(0) + A_1 f(h) + A_2 f(2h)$

使代数精度尽可能高.

解: 取 $f(x)= 1, x, x^2$ 若求积公式准确成立, 则有

$$\begin{cases} 3h = A_0 + A_1 + A_2 \\ \dfrac{9}{2}h^2 = 0 + A_1 h + A_2 2h \\ 9h^3 = 0 + A_1 h^2 + 4h^2 A_2 \end{cases} \qquad \begin{cases} A_0 = \dfrac{3}{4}h \\ A_1 = 0 \\ A_2 = \dfrac{9}{4}h \end{cases}$$

求积公式 $\int_0^{3h} f(x)dx \approx \dfrac{3h}{4} f(0) + \dfrac{9h}{4} f(2h)$ 具有至少2阶代数精度.

容易验证, 对 $f(x) = x^3$ 求积公式式不能准确成立. 因此这一公式只具有2阶代数精度.

取等距结点$x_j = a + jh$时, 插值型求积公式称为Newton-Cotes公式

$$f(x) \approx \sum_{j=0}^{n} l_j(x) f(x_j) \rightarrow \int_a^b f(x)dx \approx \sum_{j=0}^{n} A_j f(x_j)$$

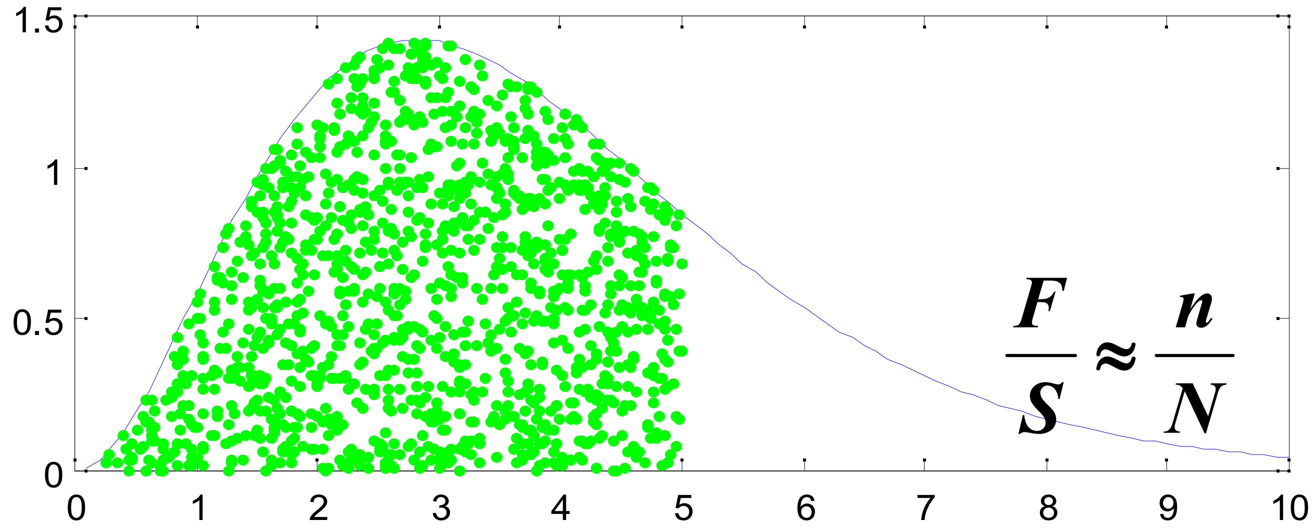
Newton-Cotes公式代数精度至少为n.

定理: 当n为偶数时, n阶Newton-Cotes公式至少有$(n+1)$阶代数精确度.

蒙特卡罗法求积分

$$F=\int_0^5 \frac{x^3}{e^x-1}dx \approx 4.8999 \qquad D=\{(x,y)\,|\,0<x<5, 0<y<1.5\}$$

$S=1.5\times5=7.5$ 在D中投入N个点，落入曲边梯形内的点数为n

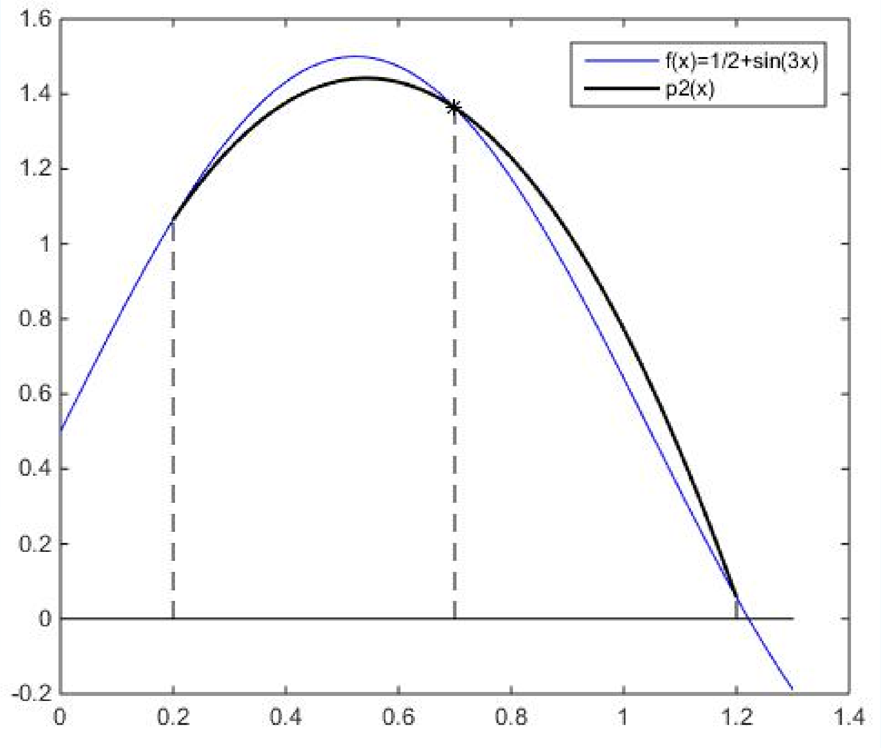


$$\frac{F}{S}\approx\frac{n}{N}$$

N =2000: q= 4.8975, 4.9256, 4.7550, 4.9800 ·····

复合求积公式

例： 在区间 [1/4，5/4]中，将辛普森公式的原始形式应用于函数 $y=f(x)=1/2+\sin \pi x$，有



$$S_2(f)=\frac{1/2}{3}\left(\frac{1}{2}+\sin\frac{1}{4}\pi+4\left(\frac{1}{2}+\sin\frac{3}{4}\pi\right)+\frac{1}{2}+\sin\frac{5}{4}\pi\right)$$

$$=\frac{1}{6}\left(3+\frac{1}{2}\sqrt{2}+2\sqrt{2}-\frac{1}{2}\sqrt{2}\right)=0.9714045208.$$

比较准确的值：0.9501581581

对于前面的的例子，如果现在使用两个区间的抛物线来近似，

$$S_4(f)=\frac{1/4}{3}(f(1/4)+4f(1/2)+2f(3/4)+4f(1)+f(5/4))=0.951184634.$$

S_4比S_2的值更准确.

将辛普森公式应用于定义在区间[0，1]上的 $f(x)=e^x$ ，并使用

一系列递减的网格，得到下表：

n	$S_n(f)$	$I(f)-S_n(f)$	误差率
2	1.718861151877	−0.579323E−03	N/A
4	1.718318841922	−0.370135E−04	15.6517
8	1.718284154700	−0.232624E−05	15.9113
16	1.718281974052	−0.145593E−06	15.9777
32	1.718281837562	−0.910273E−08	15.9944
64	1.718281829028	−0.568969E−09	15.9986
128	1.718281828495	−0.35561 IE−10	15.9998
256	l.718281828461	−0.222178E−11	16.0057
512	1.718281828459	−0.137890E−12	16.1127
1024	1.718281828459	−0.910383E−14	15.1463
2048	1.718281828459	0.444089E−15	−20.5000

当 h 减半时，这里的误差减少了大约16倍.

复合梯形求积公式

$$R = -\frac{(b-a)^3}{12} f''(\eta)$$

将积分区间$[a,b]$ n 等分.取 $h=(b-a)/n$. $x_j=a+jh$

$$\int_a^b f(x)dx = \sum_{j=0}^{n-1} \int_{x_j}^{x_{j+1}} f(x)dx \approx \frac{h}{2} \sum_{j=0}^{n-1} [f(x_j) + f(x_{j+1})]$$

$$= \frac{h}{2} [f(a) + f(b) + 2\sum_{j=1}^{n-1} f(x_j)]$$

$$T_n = \frac{h}{2}[f(a)+f(b)+2\sum_{j=1}^{n-1} f(a+jh)] \qquad h = \frac{b-a}{n}$$

$$T_{2n} = \frac{h_1}{2}[f(a)+f(b)+2\sum_{j=1}^{2n-1} f(a+jh_1)] \qquad h_1 = \frac{h}{2}$$

$$T_{2n}=\frac{1}{2}[T_n+h\sum_{j=1}^{n}f(a+jh-\frac{h}{2})]$$

$$R=-\frac{(b-a)^3}{12}f''(\eta)$$

取 $T_1=\frac{b-a}{2}[f(a)+f(b)]$ 递推，得

$$T_1 \to T_2 \to T_4 \to \cdots\cdots \to T_n \to T_{2n}$$

给定允许误差界ε>0,当 $\left|T_{2n}-T_n\right|\le\varepsilon$ 时，结束计算并以T_{2n}

作为定积分的近似值.

$$R[f]=\int_a^b f(x)dx-T_n=-\frac{h^3}{12}\sum_{k=1}^{n}f''(\xi_k)$$

$$=-\frac{(b-a)h^2}{12}\left[\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}f''(\xi_k)\right]=-\frac{(b-a)h^2}{12}f''(\xi_h)$$

$$\lim_{n\to\infty}\left|I(f)-T_n(f)\right|=\lim_{h\to 0}\frac{(b-a)h^2}{12}\left|f''(\xi_h)\right|$$

$$\leq\lim_{h\to 0}\frac{(b-a)h^2}{12}\left|\max_{\xi_h\in[a,b]}f''(\xi_h)\right|\to 0.$$

$$R[f]=\int_a^b f(x)dx-T_n=-\frac{(b-a)h^2}{12}f''(\xi_h).$$

例，$f(x)=e^x$，$[a,b]=[0,1]$ $I(f)=e-1=1.712828...$

n	$T_n(f)$	$I(f)-T_n(f)$	误差率
2	1.753931092	-0.356493E - 01	*N/A*
4	1.727221905	-0.894008E - 02	**3.9876**
8	1.720518592	-0.223676E - 02	**3.9969**
16	1.718841129	-0.559300E - 03	**3.9992**
32	1.718421660	-0.139832E - 03	**3.9998**
64	1.718316787	-0.349584E - 04	**4.0000**
128	1.718290568	-0.873962E - 05	**4.0000**
256	1.718284013	-0.218491E - 05	**4.0000**
512	1.718282375	-0.546227E - 06	**4.0000**
1024	1.718281965	-0.136557E- 06	**4.0000**
2048	1.718281863	-0.341392E - 07	**4.0000**

$$R[f]=\int_a^b f(x)dx-T_n=-\frac{(b-a)h^2}{12}f''(\xi_h).$$

例2:　对于右面的积分 $I(f)=\int_0^1 e^{-x^2}dx.$

问 h 因该有多小才能保证 $|I(f)-T_n(f)|\le 10^{-3}$ ？

分析:

$$\left|I(f)-T_n(f)\right|=\frac{1}{12}h^2\left|f''(\xi)\right|\le\frac{1}{12}h^2\max_{x\in[0,1]}\left|f''(x)\right|. \qquad f''(x)=e^{-x^2}\left(4x^2-2\right)$$

$$\left|\max_{x\in[0,1]}f''(x)\right|=\left|\max_{x\in[0,1]}e^{-x^2}\left(4x^2-2\right)\right|\le e^0(0-2)=2.$$

$$h\le\sqrt{0.002}=0.0774596661\ldots$$

复合梯形规则的稳定性:

$$T_{2n}=\frac{1}{2}[T_n+h\sum_{j=1}^{n} f(a+jh-\frac{h}{2})]$$

$$g(x)=f(x)+\varepsilon(x)$$

$$T_n(f)=\frac{h}{2}[f(a)+f(b)+2\sum_{j=1}^{n-1} f(a+jh)]$$

$$T_n(g)=\frac{h}{2}[g(a)+g(b)+2\sum_{j=1}^{n-1} g(a+jh)]$$

$$T_n(f-g)=\frac{h}{2}\left\{[f(a)-g(a)]+[f(b)-g(b)]\right.$$

$$\left.+2\left[\sum_{j=1}^{n-1} f(a+jh)-g(a+jh)\right]\right\}$$

改进梯形公式

$$T_{2n}=\frac{1}{2}[T_n+h\sum_{j=1}^{n}f(a+jh-\frac{h}{2})]$$

$$R[f]=\int_a^b f(x)dx-T_n=-\frac{h^3}{12}\left[\sum_{k=1}^{n}f''(\xi_k)\right]$$

$$h^3\sum_{k=1}^{n}f''(\xi_k)=h^2\sum_{i=1}^{n}hf''\left(\xi_{i,h}\right)$$

$$\sum_{i=1}^{n}hf''\left(\xi_{i,h}\right)\approx I\left(f''\right)=\int_a^b f''(x)dx=f'(b)-f'(a)$$

$$R[f]=\int_a^b f(x)dx-T_n=-\frac{h^3}{12}\left[\sum_{k=1}^{n} f''(\xi_k)\right]$$

改进梯形公式: $$\sum_{i=1}^{n} hf''\left(\xi_{i,h}\right)\approx f'(b)-f'(a)$$

$$I(f)-T_n(f)\approx-\frac{1}{12}h^2\left(f'(b)-f'(a)\right).$$

$$T_n^C(f)=T_n(f)-\frac{1}{12}h^2\left(f'(b)-f'(a)\right).$$

例2: 对于右面的积分 $I(f)=\int_0^1 e^{-x^2}dx.$ 使得$T_n(f)\leq 10^{-6}$.

方法1:直接估计n，使得

$$I(f)-T_n(f)\approx -\frac{1}{12}h^2\left(f'(b)-f'(a)\right).$$

$$f'(x)=-2xe^{-x^2}$$

$$E_n(f)=-\frac{h^2}{12}\left(f'(b)-f'(a)\right)=\frac{h^2}{6e}.$$

$$\left|E_n(f)\right|\le 10^{-6}$$

$$\left|E_n(f)\right|=\frac{h^2}{6e}\le 10^{-6}\Rightarrow h\le\sqrt{6e}\times 10^{-3}=4.04\times 10^{-3}$$

$$n=\ 256.$$

方法2：近似导数，比如

$$f'(a)=f'(x_0)=\frac{-3f(x_0)+4f(x_1)-f(x_2)}{2h}+\frac{h^2}{3}f'''(\xi_a)$$

$$f'(b)=f'(x_n)=\frac{3f(x_n)-4f(x_{n-1})+f(x_{n-2})}{2h}+\frac{h^2}{3}f'''(\xi_b)$$

从而有如下修正公式：

$$\tilde{T}_n^C(f)=T_n(f)-\frac{h}{24}\left[3f(x_n)-4f(x_{n-1})+f(x_{n-2})+3f(x_0)-4f(x_1)+f(x_2)\right].$$

改进梯形公式:

n	$\tilde{T}_n^C(f)$	$I(f) - \tilde{T}_n^C(f)$	误差率
2	1.718861152	-0.579323E-03	*N/A*
4	1.718386631	-0.104802E-03	5.5278
8	1.718290593	-0.876407E-05	11.9582
16	1.718282447	-0.618963E-06	14.1593
32	1.718281869	-0.409496E-07	15.1152
64	1.718281831	-0.263078E-08	15.5656
128	1.718281829	-0.166666E-09	15.7847
256	1.718281828	-0.104863E-10	15.8938
512	1.718281828	-0.658362E-12	15.9278
1024	1.718281828	-0.406342E-13	16.2022
2048	1.718281828	-0.199840E-14	20.3333

高斯型数值求积公式

考虑函数$f(x)$在对称区间$[-1,1]$上的积分．一般来说，积分关系均基于预先计算或确定的权重和横坐标来构造．通常积分关系可以写为如下形式

$$G_n(f)=\sum_{i=1}^{n} w_i f\left(x_i\right) \approx \int_{-1}^{1} f(x)\mathrm{d}x.$$

例： 选择恰当的积分节点及相应的积分系数，使下面的插值型求积公式具有尽可能高的代数精度.

$$\int_{-1}^{1} f(x)\mathrm{d}x \approx A_1 f\left(x_1\right)+A_2 f\left(x_2\right)$$

高斯型数值求积公式

$$\int_{-1}^{1} f(x)dx \approx A_0 f(x_0) + A_1 f(x_1)$$

代数精度为3, 取 $f(x)=1, x, x^2, x^3$

$$\begin{cases} A_0 + A_1 = 2 & (1) \\ A_0 x_0 + A_1 x_1 = 0 & (2) \\ A_0 x_0^{\ 2} + A_1 x_1^{\ 2} = \dfrac{2}{3} & (3) \\ A_0 x_0^{\ 3} + A_1 x_1^{\ 3} = 0 & (4) \end{cases}$$

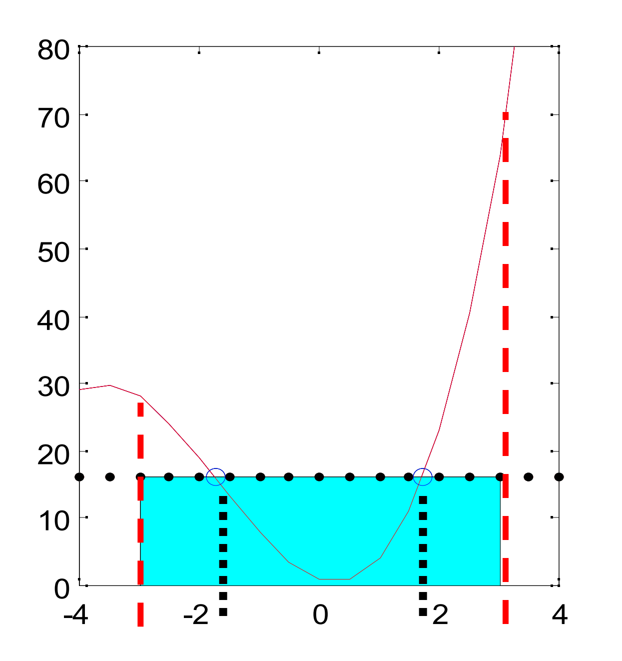
$(4)-(2)\times x_0^2 \Rightarrow x_1^2 = x_0^2$

$(3)-(1)\times x_0^2 \Rightarrow x_0^2 = 1/3$

$$\Rightarrow \quad A_0 = 1,\ A_1 = 1,\ x_0 = -\frac{1}{\sqrt{3}},\ x_1 = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

代数精度为 3 的数值求积公式

$$\int_{-1}^{1} f(x)dx \approx f(-\frac{1}{\sqrt{3}}) + f(\frac{1}{\sqrt{3}})$$



对于[*a*, *b*]区间上的定积分,构造变换

$$x(t) = \frac{b-a}{2}t + \frac{b+a}{2} \qquad t \in [-1,\ 1]$$

$$\int_a^b f(x)dx = \frac{b-a}{2}\int_{-1}^{1} f(\frac{b-a}{2}t + \frac{b+a}{2})dt$$

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{b-a}{2}[f(-\frac{b-a}{2\sqrt{3}} + \frac{b+a}{2}) + f(\frac{b-a}{2\sqrt{3}} + \frac{b+a}{2})]$$

定义 如果求积结点 $x_0, x_1, \cdots\cdots, x_n$，使插值型求积公式

$$\int_{-1}^{1} f(x)dx \approx \sum_{k=0}^{n} A_k f(x_k)$$

的代数精度为$2n+1$,则称该求积公式为**Gauss型**求积公式. 称这些求积结点为Gauss点.

定理7.2 如果多项式 $w_{n+1}(x)=(x-x_0)(x-x_1)\cdots(x-x_n)$ 与任意的不超过n次的多项式$P(x)$ 正交，即

$$\int_{-1}^{1} w_{n+1}(x)P(x)dx = 0$$

则, $w_{n+1}(x)$的所有零点$x_0, x_1, \cdots\cdots, x_n$ 是Gauss点.

例 验证多项式 $w_2(x)=x^2-\dfrac{1}{3}$ 是[−1, 1]上正交多项式.

$$\int_{-1}^{1}(a_0+a_1x)w_2(x)dx=a_0\int_{-1}^{1}w_2(x)dx+a_1\int_{-1}^{1}xw_2(x)dx=0$$

得Gauss点 $x_0=-\dfrac{1}{\sqrt{3}},\ x_1=\dfrac{1}{\sqrt{3}}$

插值公式: $f(x)\approx\dfrac{x_1-x}{x_1-x_0}f(x_0)+\dfrac{x-x_0}{x_1-x_0}f(x_1)$

$$\int_{-1}^{1}\frac{x_1-x}{x_1-x_0}dx=\frac{2x_1}{x_1-x_0}=1 \qquad \int_{-1}^{1}\frac{x-x_0}{x_1-x_0}dx=\frac{-2x_0}{x_1-x_0}=1$$

两点Gauss公式 $\displaystyle\int_{-1}^{1}f(x)dx\approx f\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)+f\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$

定理 令$\{w_i\}$为一组权重，$\{x_i\}$为一组高斯点，使得

$$G_n(f)=\sum_{i=1}^{n} w_i f\left(x_i\right)\approx\int_{-1}^{1} f(x)\mathrm{d}x.$$

对所有$2n-1$次多项式均精确成立，则$\{w_i\}$必须满足 $w_i=\int_{-1}^{1} L_i^{(n)}(x)\mathrm{d}x$

其中，$L_i^{(n)}(x)=\prod_{k=1,k\neq i}^{n}\frac{x-x_k}{x_i-x_k}$

定理：（高斯积分的构造）

对于$2n-1$次多项式，存在一个高斯点集$\{x_i\}$和权重$\{w_i\}$，即权重 $w_i=\int_{-1}^{1} L_i^{(n)}(x)\mathrm{d}x$，使得 $G_n(f)=\sum_{i=1}^{n} w_i f\left(x_i\right)\approx\int_{-1}^{1} f(x)\mathrm{d}x.$ 对于所有不超过$2n-1$次多项式均成立.

Legendre多项式递推式

$$\begin{cases} p_0 = 1, \ \ p_1 = x, \\ p_{n+1} = \dfrac{2n+1}{n+1} x p_n - \dfrac{n}{n+1} p_{n-1} \end{cases}, \quad x \in [-1,1]$$

$$p_2(x) = \frac{1}{2}(3x^2 - 1) \qquad p_3(x) = \frac{1}{2}(5x^3 - 3x)$$

$$p_3(x) = \frac{1}{2}(5x^3 - 3x) = 0 \quad x_{0,2} = \mp\sqrt{\frac{3}{5}} \approx -0.7745067 \quad x_1 = 0$$

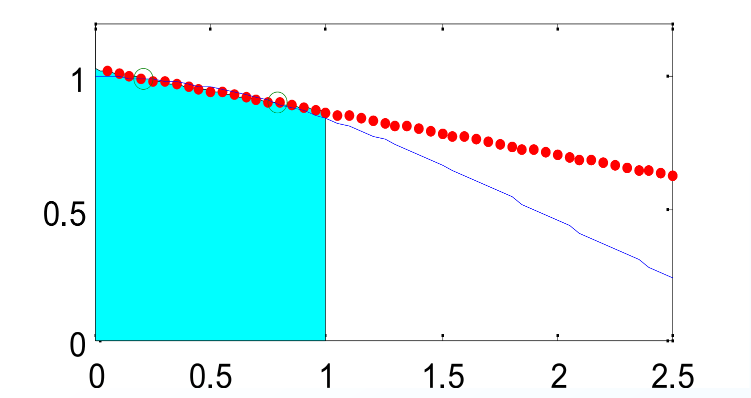
三点Gauss数值求积公式

$$\int_{-1}^{1} f(x)dx \approx 0.5556 f(-0.7745) + 0.8889 f(0) + 0.5556 f(0.7745)$$

常见高斯型数值求积公式

2点公式	高斯点	积分系数	高斯点	积分系数
	－0.5773502691896	1. 0000000000000	0.5773502691896	1. 0000000000000
3点公式	高斯点	积分系数	高斯点	积分系数
	－0.7745966692414	0. 5555555555555	0. 0000000000000	0. 8888888888888
	0.7745966692414	0. 5555555555555		

例： 两点Gauss公式计算 $\int_0^1 \frac{\sin x}{x} dx$



解： 变换 $x = 0.5(\,t + 1\,)$

$$\int_0^1 \frac{\sin x}{x} dx = \int_{-1}^1 \frac{\sin 0.5(t+1)}{t+1} dt$$

取 $t_0 = \frac{-1}{\sqrt{3}} \approx -0.57735$ $\qquad t_1 = \frac{1}{\sqrt{3}} \approx 0.57735$

$$\int_0^1 \frac{\sin x}{x} dx \approx \frac{1}{2}\left[\frac{\sin 0.5(t_0+1)}{0.5(t_0+1)} + \frac{\sin 0.5(t_1+1)}{0.5(t_1+1)}\right]$$

Simpsion三点公式	0.94614588227359
MATLAB命令	0.94608307036718
Gauss两点公式	0.94604113689782

高斯型数值求积公式的误差

利用插值多项式的特点，通过一些计算，我们可以下面高斯积分的误差公式为：

$$I(f)-G_n(f)=\frac{2^{2n+1}(n!)^4}{(2n+1)[(2n)!]^3}f^{(2n)}(\eta_n).$$

利用斯特林公式（Stirling）公式

$$n! \;=C_n\sqrt{n}(n/e)^n \quad , \quad (2n)!=C_{2n}\sqrt{2n}(2n/e)^{2n}$$

$$\frac{2^{2n+1}(n!)^4}{(2n+1)[(2n)!]^3}=\frac{2^{2n+1}C_n^4 n^2(n/e)^{4n}}{(2n+1)C_{2n}^3(2n)^{3/2}(2n/e)^{6n}}=K_n\frac{\sqrt{n}}{n+\frac{1}{2}}\left(\frac{e}{16n}\right)^{2n}$$

其中 $K_n=\frac{C_n^4}{2^{3/2}C_{2n}^3}$ 在0.7和1.04之间．该此估算值表明只要被积函数足够平滑，误差就会随着 n 呈指数下降.

例如

对于$n = 16$，$\dfrac{2^{2n+1}(n!)^4}{(2n+1)[(2n)!]^3} = K_n \dfrac{\sqrt{n}}{n+\frac{1}{2}}\left(\dfrac{e}{16n}\right)^{2n} = K_n \times 1.653181645\times 10^{-64}.$

定理：（通用高斯积分） 令 $w(x)\ge 0$ 是区间$[a，b]$的权重函数，并且令 $\phi_k(x)$ 是与此权重函数和区间有关的正交多项式族. 定义积分关系为

$$G_n(f)=\sum_{i=1}^{n} w_i^{(n)} f\left(x_i^{(n)}\right),$$

对于 $\phi_n(x)$ 的根 $x_i^{(n)}$，令 $w_i^{(n)}$ 由下式定义

$$w_i^{(n)} = \int_a^b w(x)\left(\prod_{k=1}^{n} \frac{x - x_k^{(n)}}{x_i^{(n)} - x_k^{(n)}}\right)\mathrm{d}x$$

那么$G_n(P)$对于所有$2n-1$阶多项式都是精确的，并且存在 $\xi_n \in [a,b]$

使：

$$\int_a^b w(x)f(x)\mathrm{d}x - G_n(f) = \frac{1}{(2n)!}\left(\int_a^b \psi_n(x)\mathrm{d}x\right) f^{(2n)}(\xi_n),$$

对于所有 $f \in C^{2n}([a,b])$ 均成立，其中 $\psi_n(x) = \prod_{k=1}^{n}\left(x - x_k^{(n)}\right)^2$

引例： 构造 $I(f)=\int_0^{\infty}e^{-x}f(x)\mathrm{d}x.$ 高斯积分关系

解： $L_2(x)=\frac{1}{2}\left(x^2-4x+2\right).$ 对应的高斯点是

$$x_1=2-\sqrt{2}=0.5857864376,\quad x_2=2+\sqrt{2}=3.414213562.$$

相应的权重是

$$w_1=\int_0^{\infty}e^{-x}\left(\frac{x-x_2}{x_1-x_2}\right)\mathrm{d}x=\frac{1}{4}(2+\sqrt{2})=0.8535533903,$$

$$w_2=\int_0^{\infty}e^{-x}\left(\frac{x-x_1}{x_2-x_1}\right)\mathrm{d}x=\frac{1}{4}(2-\sqrt{2})=0.1464466092.$$

龙贝格外推计算公式

$$R[f]=\int_a^b f(x)dx-T_n=-\frac{(b-a)h^2}{12}f''(\xi_h).$$

定理：（欧拉—麦克劳林公式）

如果f具有足够的可微性，则对于任何$N>0$，都有一组常数C_k，$1\le k\le N+1$，使得对于$\xi\in[a,b]$，梯形公式中的误差满足

$$I(f)-T_n(f)=\gamma_1 h^2+\gamma_2 h^4+\cdots+\gamma_N h^{2N}+c_{N+1}(b-a)h^{2N+2}f^{(2N+2)}(\xi).$$

其中 $\gamma_k=c_k\left(f^{(2k-1)}(b)-f^{(2k-1)}(a)\right).$

$$I(f)-T_n=-\frac{(b-a)h^2}{12}f''(\xi_h).$$

复合梯形公式

$$T_n=\frac{h}{2}[f(a)+f(b)+2\sum_{j=1}^{n-1}f(a+jh)]$$

$$T_{2n}=\frac{h}{4}[f(a)+f(b)+2\sum_{j=1}^{2n-1}f(a+jh/2)]$$

$$I-T_n=-\frac{(b-a)h^2}{12}f''(\xi_1)$$

$$I-T_{2n}=-\frac{(b-a)h^2}{4\times 12}f''(\xi_2)$$

$$f''(\eta_1)\approx f''(\eta_2)$$

$$I-T_n\approx 4(I-T_{2n})$$

误差估计

$$T_{2n}-T_n\approx 3(I-T_{2n})$$

外推计算

$$I\approx\frac{4T_{2n}-T_n}{3}$$

$$R[f]=-\frac{(b-a)^3}{12n^2}f''(\eta),\quad \eta\in(a,b)$$

记 $I=\int_a^b f(x)dx$ $\qquad T(h)=\frac{h}{2}[f(a)+f(b)+2\sum_{j=1}^{n-1}f(a+jh)]$

则 $I-T(h)=-\frac{(b-a)^3}{12n^2}f''(\eta)$ $\qquad T(h)=I+\frac{(b-a)}{12}f''(\eta)h^2$

欧拉–马克劳林公式

$$T(h)=I+O(h^2)$$

$$T(h)=I+\alpha_1h^2+\alpha_2h^4+\alpha_3h^6+\cdots+\alpha_kh^{2k}+O(h^{2k+2})$$

$$T(\frac{h}{2})=I+\alpha_1(\frac{h}{2})^2+\alpha_2(\frac{h}{2})^4+\cdots+\alpha_k(\frac{h}{2})^{2k}+O(\left(\frac{h}{2}\right)^{2k+2})$$

$$4T(\frac{h}{2})-T(h)=3I+\alpha_2[\frac{1}{4}-1]h^4+\cdots$$

所以 $[4T(\frac{h}{2})-T(h)]/3=I+O(h^4)$ 记 $T^{(1)}(h)=\dfrac{4T(\frac{h}{2})-T(h)}{4-1}$

$$T^{(1)}(h)=I+\beta_2 h^4+\beta_3 h^6+\cdots+\beta_k h^{2k}+O(h^{2k+2})$$

$$T^{(1)}(\frac{h}{2})=I+\beta_2(\frac{h}{2})^4+\beta_3(\frac{h}{2})^6+\cdots+\beta_k(\frac{h}{2})^{2k}+O(\left(\frac{h}{2}\right)^{2k+2})$$

记$T^{(2)}(h)=\dfrac{4^2T^{(1)}(\frac{h}{2})-T^{(1)}(h)}{4^2-1}$ 有:$T^{(1)}(h)=I+O(h^6)$

记 $$T_0^{(0)}=\frac{b-a}{2}[f(a)+f(b)]$$

$$T_k^{(0)}=\frac{b-a}{2^{k+1}}[f(a)+f(b)+2\sum_{j=1}^{2^k-1}f(a+j(b-a)/2^k)]$$

龙贝格外推计算公式 $$T_k^{(m)}=\frac{4^m T_{m-1}^{(k)}-T_{m-1}^{(k-1)}}{4^m-1}$$

$$\downarrow T_n^{(0)}$$

$$\downarrow T_{2n}^{(0)} \rightarrow T_{2n}^{(1)}$$

$$\downarrow T_{4n}^{(0)} \rightarrow T_{4n}^{(1)} \rightarrow T_{4n}^{(2)}$$

$$\downarrow T_{8n}^{(0)} \rightarrow T_{8n}^{(1)} \rightarrow T_{8n}^{(2)} \rightarrow T_{8n}^{(3)}$$

例： 利用外推求 $f(x)=\left(1+x^4\right)^{-1},[a,b]=[0,1]$ 的积分. 为了以最少的工作量，给出积分的基本梯形公式值（即 $T_n^{(0)}(f)=T_n(f)$ 的近似）

$$I(f)=\int_0^1\frac{\mathrm{d}x}{1+x^4}=0.8669729871.$$

n = 2ᵏ	积分值
1	0. 7500000000
2	0. 8455882353
4	0. 8617323343

第一次外推产生第一个龙贝格值：

$$\theta_1(f)=T_2^{(1)}(f)=\frac{4T_2^{(0)}(f)-T_1^{(0)}(f)}{3}=0.8774509800.$$

需要两个推断才能得出第二个龙贝格值：

$$T_4^{(1)}(f)=\frac{4T_4^{(0)}(f)-T_2^{(0)}(f)}{3}=0.8616289989,$$

$$\theta_2(f)=T_4^{(2)}(f)=\frac{16T_4^{(1)}(f)-T_2^{(1)}(f)}{15}=0.8605742004.$$

$T_4^{(1)}(f)$ **和** $T_2^{(1)}(f)$ **误差估计由下式给出**

$$E_4^{(1)}(f)=\frac{T_2^{(1)}(f)-T_4^{(1)}(f)}{15}=0.00105479874.$$

因此，龙贝格值 $\theta_2(f)$ **可以精确到10^{-3}以内.**