电子科技大学 2004 级硕士研究生《矩阵理论》试题

二、设 A 是 Hermite 矩阵 $(A^H=A)$，且 A 的特征值 $\lambda_1=\lambda_2=\cdots=\lambda_n$，证明矩阵 A 的 Rayleigh 商恒等于 λ_1.（5 分）

三. 已知 $C^{n\times n}$ 中的两种矩阵算子范数 $\|\cdot\|_a$ 与 $\|\cdot\|_b$，对于任意矩阵 $A\in C^{n\times n}$，验证

$$\|A\|=\|A\|_a+\|A\|_b$$

是 $C^{n\times n}$ 中的相容矩阵范数. (10 分)

四、用 Gerschgorin 圆盘定理证明矩阵

$$A=\begin{pmatrix} 2 & \frac{1}{n} & \frac{1}{n} & \cdots & \frac{1}{n} \\ \frac{1}{2n} & 4 & \frac{1}{n} & \cdots & \frac{1}{n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \cdots & \frac{1}{n} \\ \frac{1}{(n-1)n} & \frac{1}{(n-1)n} & \cdots & 2(n-1) & \frac{1}{n} \\ \frac{1}{n^2} & \frac{1}{n^2} & \cdots & \frac{1}{n^2} & 2n \end{pmatrix}\in C^{n\times n},$$

的特征值为两两不相等的正实数. (10 分)

五、 证明:

(1) $\begin{pmatrix} A \\ 0 \end{pmatrix}^+=\begin{pmatrix} A^+ & 0 \end{pmatrix}$, 其中矩阵 $A\in C^{m\times n}$;

(2) 设 λ 是矩阵 $A\in C^{m\times m}$ 的任意特征值, 则 $|\lambda|\le\sqrt[m]{\|A^m\|}$, 其中矩阵范数 $\|.\|$ 是算子范数. (10 分)

六. 设矩阵 $A\in C_r^{m\times n}$ 的非零奇异值为 $\sigma_1,\sigma_2,\cdots,\sigma_r\ (r>0)$, 求证

$$\|A\|_F=\left(\sum_{i=1}^{r}\sigma_i^2\right)^{\frac{1}{2}}.\ \text{(10 分)}$$

七. 已知

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \end{pmatrix},\qquad b=\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix},$$

(1) 求矩阵 A 的最大秩分解;

(2) 求 A^+;

(3) 用广义逆矩阵方法判断方程组 $Ax=b$ 是否有解? (15 分)