**1.** 设 $A\in P^{m\times n}$，则

$$\|A\|_{m_1}=\sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{m}|a_{ij}|$$

$$\|A\|_{m_2}=\left(\sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{m}|a_{ij}|^2\right)^{\frac{1}{2}}$$

自相容

$$\|A\|_{m_\infty}=\max_{i,j}\{|a_{ij}|\}\quad 1\le i\le m\quad 1\le j\le n$$

不相容

$$\|A\|_a=n\bullet\max_{i,j}\{|a_{ij}|\}\ 1\le i\le n\ ,1\le j\le n$$

自相容

**2. 定理 1** 设$A\in P^{n\times n}$,

(1) 若$A=(a_1,a_2,\cdots,a_n)$, 则

$$\|A\|_F^2=\|A\|_{m_2}^2=\sum_{i=1}^{n}\|a_j\|_2^2$$

其中, $\|a_j\|_2^2=a_j^H a_j$.

(2) $\|A\|_{m_2}^2=tr(A^H A)=\sum_{i=1}^{n}\lambda_i(A^H A)$

(3) 对任意的酉矩阵$U$、$V\in P^{n\times n}$，有

$$\|A\|_{m_2}^2=\|U^H AV\|_{m_2}^2=\|UAV^H\|_{m_2}^2$$

$$\|A\|_{m_2}=\|UA\|_{m_2}=\|AV\|_{m_2}=\|UAV\|_{m_2}$$

$$(4).A^H A = AA^H \Leftrightarrow A = U\begin{pmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{pmatrix}U^H$$

$$\Rightarrow \|A\|_{m_2} = \left(\sum_{i=1}^{n} |\lambda_i|^2\right)^{1/2}$$

(5) $\|A\|_{m_1} = \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{n} |a_{ij}|$ 与向量范数 $\|\bullet\|_1$ 相容.

$\|A\|_{m_2} = (\sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{m} |a_{ij}|^2)^{\frac{1}{2}}$ 与向量范数 $\|x\|_2$ 相容.

$\|A\|_{m_\infty} = \max|a_{ij}|$ 与向量范数 $\|x\|_\infty$ 不相容.

**3. 定理 2** 设 $\|x\|_a$ 是 $P^n$ 上的向量范数, $A \in P^{n\times n}$, 则

$$\|A\|_a = \max_{x\neq 0}\frac{\|Ax\|_a}{\|x\|_a} \quad \left(= \max_{\|u\|_a=1}\|Au\|_a\right)$$

是与向量范数 $\|x\|_a$ 相容的矩阵范数.

**性质1**

$$\|AB\|_a \leq \|A\|_a \cdot \|B\|_a$$

**性质2**

$\|A\|_a$ 是所有与向量范数 $\|x\|_a$ 相容的矩阵范数中最小的.

1) $\|A\|_{m_1}$、$\|A\|_1$ 与向量范数 $\|\bullet\|_1$ 相容($\|A\|_1$ 最小).

2) $\|A\|_{m_2}$、$\|A\|_2$ 与向量范数 $\|\bullet\|_2$ 相容($\|A\|_2$ 最小).

3) $\|A\|_{m_\infty} = \max|a_{ij}|$ 与向量范数 $\|x\|_\infty$ 不相容.

4) $\|A\|_\alpha = n\max|a_{ij}|$、$\|A\|_\infty$ 与向量范数 $\|x\|_\infty$ 相容($\|A\|_\infty$ 最小).

5) $\|\bullet\|_a$ 是算子范数 $\Rightarrow \|E\|_a = 1.$

$\therefore \|E\|_a \neq 1 \Rightarrow \|\bullet\|_a$ 不是是算子范数.

## 4.算子范数表示

(1). $\|A\|_1 = \max_j \left( \sum_{i=1}^{n} |a_{ij}| \right)$ －－－－－极大列和范数.

(2). $\|A\|_\infty = \max_i \left( \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}| \right)$ －－－－－极大行和范数.

(3). $\|A\|_2 = \sqrt{r(A^H A)}$ －－－－（又称为谱范数）

(其中 : $r(A) = \max_i |\lambda_i|$ 称为$A$的谱半径).

(4). $A^H = A \Rightarrow \|A\|_2 = \sqrt{r(A^H A)} = \sqrt{r(A^2)} = \sqrt{r^2(A)} = r(A)$

(5). $A^H A = AA^H \Leftrightarrow A = U\begin{pmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{pmatrix}U^H \Rightarrow$

$$A^H A = U\begin{pmatrix} |\lambda_1|^2 & & & \\ & |\lambda_2|^2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & |\lambda_n|^2 \end{pmatrix}U^H \Rightarrow \|A\|_2 = r(A)$$

(6). $A^H = A$半正定$\Rightarrow \|A\|_2 = \sqrt{r(A^H A)} = \sqrt{r(A^2)} = \sqrt{r^2(A)} = \lambda_{\max}(A)$

**定理 3** 设$\|\bullet\|_m$是相容的矩阵范数，则存在向量范数$\|x\|$，使

$$\|Ax\| \le \|A\|_m \cdot \|x\|$$

**证** 定义 向量范数

$$\|x\| = \|xa^H\|_m \quad \theta \ne a \in P^n,\ \forall x \in P^n$$

**定理 4** 如果$\|\bullet\|_m : C^{n\times n} \to R$是一相容的矩阵范数，则对任一$A \in C^{n\times n}$，有

$$|\lambda_i| \le \|A\|_m \Rightarrow r(A) \le \|A\|_m$$

其中，$\lambda_i$是$A$的特征值.

**定理 5** 设 $A\in C^{n\times n}$，则

(1) $\|A\|_2=\|A^H\|_2=\|A^T\|_2=\|\overline{A}\|_2$

(2) $\|A^HA\|_2=\|AA^H\|_2=\|A\|_2^2$

(3) 对任何$n$阶酉矩阵$U$及$V$都有

$$\|UA\|_2=\|AV\|_2=\|UAV\|_2=\|A\|_2$$

**定理 6** 设 $A\in C^{n\times n}$，则

(1) $\|A\|_2=\max\limits_{\|x\|_2=\|y\|_2=1}|y^HAx|$

(2) $\|A\|_2^2\le\|A\|_1\|A\|_\infty$

## 5.矩阵摄动

**定理7**: $A \in C^{n\times n}$, $\| A \|_a$ 是从属于向量范数 $\| x \|_a$ 的矩阵范数，如果 $\| A \|_a < 1$，则 $E \pm A$ 可逆，且

$$\| (E \pm A)^{-1} \|_a \le (1 - \| A \|_a)^{-1}.$$

1.设$P$可逆,且$\|P^{-1}\|_\infty<1$,则$\|A\|_a=\|PA\|_\infty$ 或 $\|A\|_b=\|AP\|_\infty$ 均为自相容的矩阵范数.

$Proof$ :容易证明所定义的映射都是矩阵范数,
下面证明它们是相容的.

$$\|AB\|_a=\|PAB\|_\infty=\|PAP^{-1}PB\|_\infty\le\|PA\|_\infty\cdot\|P^{-1}\|_\infty\cdot\|PB\|_\infty$$
$$\le\|PA\|_\infty\cdot\|PB\|_\infty=\|A\|_a\|B\|_a\,.$$

$$\|AB\|_b=\|ABP\|_\infty=\|APP^{-1}BP\|_\infty\le\|AP\|_\infty\cdot\|P^{-1}\|_\infty\cdot\|BP\|_\infty$$
$$\le\|AP\|_\infty\cdot\|BP\|_\infty=\|A\|_b\|B\|_b\,.$$

2. 设$A \in C^{m\times n}$可逆, $B \in C^{m\times n}$，若对某种相容矩阵范数

有$\|B\| < \dfrac{1}{\|A^{-1}\|}$,则$A+B$可逆.

证: $\|B\| < \dfrac{1}{\|A^{-1}\|} \Leftrightarrow \|A^{-1}\| \cdot \|B\| < 1 \Rightarrow \|A^{-1}B\| \le \|A^{-1}\| \cdot \|B\| < 1.$

$\Rightarrow E + A^{-1}B$可逆

(否则, 若$E + A^{-1}B$不可逆, 则有$(E + A^{-1}B)x = 0 (x \ne 0)$

$\Leftrightarrow A^{-1}Bx = (-1)x \Rightarrow r(A^{-1}B) \ge 1 \Rightarrow \|A^{-1}B\| \ge r(A^{-1}B) \ge 1)$

而$A + B = A(E + A^{-1}B) \Rightarrow A + B$可逆.