§6 A^+ 的计算方法

程光辉

2019 年 12 月 17 日

1 最大秩分解

引理 1 设 $\boldsymbol{A} \in \mathbf{C}^{m\times n}$，则

(1) 如果 $\boldsymbol{A}$ 是行满秩矩阵，则 $\boldsymbol{A}^+ = \boldsymbol{A}^H(\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^H)^{-1}$;

(2) 如果 $\boldsymbol{A}$ 是列满秩矩阵，则 $\boldsymbol{A}^+ = (\boldsymbol{A}^H\boldsymbol{A})^{-1}\boldsymbol{A}^H$.

证明： (1) 因为 $\boldsymbol{A} \in \mathbf{C}_m^{m\times n}$，则 $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{E}_m\boldsymbol{A}$ 是矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的最大秩分解，于是有

$$\boldsymbol{A}^+ = \boldsymbol{A}^H\left(\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^H\right)^{-1}\left(\boldsymbol{E}_m^H\boldsymbol{E}_m\right)^{-1}\boldsymbol{E}_m^H = \boldsymbol{A}^H\left(\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^H\right)^{-1}.$$

(2) 类似 (1) 的证明.

定理 1 设 $\boldsymbol{A} \in \mathbf{C}_r^{m\times n}$，$\boldsymbol{A} = \boldsymbol{B}\boldsymbol{D}$ 是 $\boldsymbol{A}$ 的最大秩分解，则

$$\boldsymbol{A}^+ = \boldsymbol{D}^+\boldsymbol{B}^+.$$

证明： 因为 $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{B}\boldsymbol{D}$ 是 $\boldsymbol{A}$ 的最大秩分解，由引理 1 可得

$$\boldsymbol{A}^+ = \boldsymbol{D}^H\left(\boldsymbol{D}\boldsymbol{D}^H\right)^{-1}\left(\boldsymbol{B}^H\boldsymbol{B}\right)^{-1}\boldsymbol{B}^H = \boldsymbol{D}^+\boldsymbol{B}^+.$$

例 1 设矩阵 $\boldsymbol{A}$ 为

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 & 1 & 4 \\ 2 & 6 & 1 & 0 & 7 \\ 3 & 9 & 3 & 1 & 11 \end{pmatrix},$$

求 $\boldsymbol{A}$ 的 $\boldsymbol{M-P}$ 广义逆矩阵 $\boldsymbol{A}^+$.

解： (1) 求 $\boldsymbol{A}$ 的最大秩分解 $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{B}\boldsymbol{D}$，

$$\boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \\ 3 & 3 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{D} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 & -\frac{1}{3} & \frac{10}{3} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}.$$

(2) 计算 $\boldsymbol{B}^+$ 和 $\boldsymbol{D}^+$，

$$\boldsymbol{B}^+=\left(\boldsymbol{B}^H\boldsymbol{B}\right)^{-1}\boldsymbol{B}^H=-\frac{1}{9}\begin{pmatrix}-4&5&1\\5&-1&1\end{pmatrix},$$

$$\boldsymbol{D}^+=\boldsymbol{D}^H\left(\boldsymbol{D}\boldsymbol{D}^H\right)^{-1}=\frac{9}{290}\begin{pmatrix}1&0\\3&0\\0&1\\-\frac{1}{3}&\frac{2}{3}\\\frac{10}{3}&\frac{1}{3}\end{pmatrix}.$$

(3) 计算 $\boldsymbol{A}^+=\boldsymbol{D}^+\boldsymbol{B}^+$，

$$\boldsymbol{A}^+=\frac{3}{290}\begin{pmatrix}-32&34&2\\-96&102&6\\329&-268&61\\230&-190&40\\3&24&27\end{pmatrix}.$$

例 2 举例说明下列结论不成立：

(1) $(\boldsymbol{AB})^+=\boldsymbol{B}^+\boldsymbol{A}^+$.

(2) $(\boldsymbol{A}^k)^+=(\boldsymbol{A}^+)^k$, 其中 $\boldsymbol{k}$ 是正整数.

(3) 若 $\boldsymbol{P}$, $\boldsymbol{Q}$ 为可逆矩阵，$(\boldsymbol{PAQ})^+=\boldsymbol{Q}^{-1}\boldsymbol{A}^+\boldsymbol{P}^{-1}$.

解： (1) 令 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&1\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$，则有 $\boldsymbol{AB}=(1)$，$(\boldsymbol{AB})^+=(1)$.

因为 $\boldsymbol{A}$ 行满秩，则 $\boldsymbol{A}^+=\boldsymbol{A}^H(\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^H)^{-1}=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$. 因为 $\boldsymbol{B}$ 列满秩，则 $\boldsymbol{B}^+=(\boldsymbol{B}^H\boldsymbol{B})^{-1}\boldsymbol{B}^H=\begin{pmatrix}1&0\end{pmatrix}$.

于是有 $\boldsymbol{B}^+\boldsymbol{A}^+=(\frac{1}{2})\neq(\boldsymbol{AB})^+$.

(2) 令 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&-1\\0&0\end{pmatrix}$，则 $\boldsymbol{A}$ 为幂等矩阵.

$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&-1\end{pmatrix}$ 是其最大秩分解，则 $\boldsymbol{A}^+=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1&0\\-1&0\end{pmatrix}$.

于是有

$$(\boldsymbol{A}^2)^+=\boldsymbol{A}^+=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1&0\\-1&0\end{pmatrix},$$

$$(\boldsymbol{A}^+)^2 = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix},$$

则有 $(\boldsymbol{A}^2)^+ \neq (\boldsymbol{A}^+)^2$.

(3) 令 $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$，$\boldsymbol{P} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$，$\boldsymbol{Q} = (1)$，则有

$$\boldsymbol{A}^+ = (\boldsymbol{A}^H\boldsymbol{A})^{-1}\boldsymbol{A}^H = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 \end{pmatrix},$$

$$(\boldsymbol{PAQ})^+ = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}^+ = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 2 & 1 \end{pmatrix},$$

$$\boldsymbol{Q}^{-1}\boldsymbol{A}^+\boldsymbol{P}^{-1} = (1)\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix},$$

显然有 $(\boldsymbol{PAQ})^+ \neq \boldsymbol{Q}^{-1}\boldsymbol{A}^+\boldsymbol{P}^{-1}$.

2 奇异值分解法

定理 2 设 $\boldsymbol{A} \in \mathbf{C}_r^{m\times n}$ 的奇异值分解为

$$\boldsymbol{A} = \boldsymbol{U}\begin{pmatrix} \boldsymbol{D}_r & \boldsymbol{O} \\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{O} \end{pmatrix}\boldsymbol{V}^H = \boldsymbol{UDV}^H,$$

则有

(1) $\boldsymbol{A}^+ = \boldsymbol{VD}^+\boldsymbol{U}^H$;

(2) $\|\boldsymbol{A}^+\|_F^2 = \sum\limits_{i=1}^{r}\frac{1}{\sigma_i^2}$;

(3) $\|\boldsymbol{A}^+\|_2 = \frac{1}{\min\limits_{1\leq i\leq r}\{\sigma_i\}}$.

证明： (1) 直接验证. (2) 和 (3) 利用范数的酉不变性.

定理 3 设 $\boldsymbol{A} \in \mathbf{C}^{m\times n}$，$\boldsymbol{\lambda}_i$ $(i = 1, 2, \cdots, r)$ 是 $\boldsymbol{AA}^H$ 的 r 个非零特征值，$\boldsymbol{\alpha}_i$ $(i = 1, 2, \cdots, r)$ 是 $\boldsymbol{AA}^H$ 对应于 $\boldsymbol{\lambda}_i$ 单位正交的特征向量，记 $\boldsymbol{\Delta}_r = \mathbf{diag}(\boldsymbol{\lambda}_1, \cdots, \boldsymbol{\lambda}_r)$, $\boldsymbol{U}_1 = (\boldsymbol{\alpha}_1, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_r)$，则有

$$\boldsymbol{A}^+ = \boldsymbol{A}^H\boldsymbol{U}_1\boldsymbol{\Delta}_r^{-1}\boldsymbol{U}_1^H.$$

证明： 设 $\boldsymbol{A} \in \mathbf{C}_r^{m\times n}$ 的奇异值分解为

$$\boldsymbol{A} = \boldsymbol{U}\begin{pmatrix} \boldsymbol{D}_r & \boldsymbol{O} \\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{O} \end{pmatrix}\boldsymbol{V}^H,$$

则有

$$
\begin{aligned}
AA^H &= U\begin{pmatrix} D_r & O \\ O & O \end{pmatrix} V^H V \begin{pmatrix} D_r^H & O \\ O & O \end{pmatrix} U^H \\
&= U\begin{pmatrix} \Delta_r & O \\ O & O \end{pmatrix} U^H,
\end{aligned}
$$

于是有

$$
\begin{aligned}
(AA^H)^+ &= U\begin{pmatrix} \Delta_r & O \\ O & O \end{pmatrix}^+ U^H \\
&= \begin{pmatrix} U_1 & U_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Delta_r^{-1} & O \\ O & O \end{pmatrix} \begin{pmatrix} U_1^H \\ U_2^H \end{pmatrix} \\
&= U_1 \Delta_r^{-1} U_1^H.
\end{aligned}
$$

即

$$
A^+ = A^H (AA^H)^+ = A^H U_1 \Delta_r^{-1} U_1^H.
$$

例 3 设矩阵 A 为

$$
A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & -2 \end{pmatrix},
$$

求 A 的 $M-P$ 广义逆矩阵 A^+.

解：求 AA^H 的特征值和非零特征值对应的单位正交特征向量，

$$
AA^H = \begin{pmatrix} 2 & -4 \\ -4 & 8 \end{pmatrix},
$$

则特征值为 $\lambda_1 = 10, \lambda_2 = 0$. 进而 $\lambda_1 = 10$ 对应的单位特征向量为 $\alpha_1 = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{5}} & -\frac{2}{\sqrt{5}} \end{pmatrix}^T$，即 $U_1 = \alpha_1$.

由定理 3，得

$$
A^+ = A^H U_1 \Delta_r^{-1} U_1^H = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 0 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{5}} \\ -\frac{2}{\sqrt{5}} \end{pmatrix} (\frac{1}{10}) \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{5}} & -\frac{2}{\sqrt{5}} \end{pmatrix}.
$$