《矩阵理论》（2005）

一、判断题（40 分）（对者打∨，错者打×）

1、 A为n阶实对称矩阵，对R^n中的列向量x， 定义$||x|| = \sqrt{\ ^{T} x}$，则$||x||$为向量x的范数.   (   )

因为非负性不成立，故结论错误。

2、设 A 为n阶Hermite矩阵，$\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$ 是矩阵 A 的特征值，则$\| A \|_{m_2}^2 = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i^2$.

(   )

$$A \text{ 为}n\text{阶Hermite矩阵} \Rightarrow \| A \|_{m_2}^2 = \| U diag(\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n) U^H \|_{m_2}^2$$

$$= \| diag(\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n) \|_{m_2}^2 = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i^2 .$$

3、如果$A \in C^{m \times n}$，且$A \neq 0$，$(AA^-)^H = AA^-$，则$\| AA^- \|_2 = n$.   (   )

AA^- 为幂等矩阵$\Rightarrow$ AA^- 的特征值为 0 或 1。又$A \neq 0$,$\Rightarrow$ 秩(A)=秩$(AA^-) \geq 1 \Rightarrow$

$AA^- \neq 0 \Rightarrow$1 是 AA^- 的特征值$\Rightarrow \| AA^- \|_2 = \sqrt{\max(\lambda_i((AA^-)^H AA^-))} = \max \lambda_i(AA^-)$

$=1$

4、设$\| \cdot \|_a$为从属于向量范数$\| x \|_a$的算子范数，$H = E - 2uu^H$(其中，E 为 n 阶单位矩阵，$u \in C^n$且$\| u \|_2 = 1$)，则$\| H \|_a = n$ (   )

$H = E - 2uu^H \Rightarrow H^H H = E \Rightarrow$ H 为 n 阶酉矩阵$\Rightarrow \| H \|_a = 1$

5、设$A = \begin{pmatrix} 1/5 & 1/5 & 1/5 & 1/5 \\ 1/6 & 2/6 & 1/6 & 1/6 \\ 1/7 & 1/7 & 3/7 & 1/7 \\ 1/8 & 1/8 & 1/8 & 4/8 \end{pmatrix}$，则 A 矩阵的谱半径$r(A) < 1$.   (   )

因为$\| A \|_\infty < 1$，故结论成立

6、若$A \in C^{m \times m} (m > 1)$严格对角占优，则 A 的谱半径$r(A) < \| 2A \|_{m_\infty}$. (   )

$$A \in C^{m \times m} (m > 1) \text{严格对角占优} \Rightarrow \lambda \in \bigcup_{i=1}^{m} \{ z \in C^m : | z - a_{ii} | \leq C_i < | a_{ii} | \}$$

$$\Rightarrow r(A) < 2 \cdot \max_{1 \leq i \leq m} | a_{ii} | = 2 \cdot \| A \|_{m_\infty} .$$ 故结论成立

7、若设$x \in R^n$，则$\| x \|_2 \leq \| x \|_1 \leq \sqrt{n} \| x \|_2$.   (   )

$\because\ \|x\|_2^2=|x_1|^2+|x_2|^2+\cdots+|x_2|^2\le\|x\|_1^2$， $\|x\|_1=\sum_{i=1}^{n}|x_1|=\sum_{i=1}^{n}|x_1|\cdot 1$

$\le\sqrt{n}(\sum_{i=1}^{n}|x_1|^2)^{1/2}=\sqrt{n}\,\|x\|_2$

8、设$A=\begin{pmatrix}1&0&0&1\\1&1&0&0\\0&1&1&0\\0&0&1&1\end{pmatrix}$，则$\|A^+\|_{m_1}=1.$ (　　)

$A^+=\frac{1}{8}\begin{pmatrix}3&3&-1&-1\\-1&3&3&-1\\-1&-1&3&3\\3&-1&-1&3\end{pmatrix}\Rightarrow\|A^+\|_{m_1}=$ ， 故结论不成立

9、设G为矩阵$A\in C_r^{m\times n}(r<n)$的广义逆$A^-$，$A=BD$为$A$的最大秩分解，则

秩$(DGB)=n.$ (　　)

G为矩阵$A\in C_r^{m\times n}$的广义逆，$A=BD$为A的最大秩分解$\Rightarrow BDGBD=BD\Rightarrow$

$DGB=E_r\Rightarrow$秩$(DGB)=r$

10、设$A=\begin{pmatrix}0.9&0.01&0.12\\0.01&0.8&0.13\\0.01&0.02&0.4\end{pmatrix}$，则 A 的特征值均为实数. (　　)

取 $D=diag(1,1,0.1)$，则 $D^{-1}AD$ 的 3 个盖尔圆盘为 $|z-0.9|\le 0.022$，$|z-0.8|\le 0.023$，$|z-0.4|\le 0.3$，3 个盖尔圆盘彼此孤立，故 A 的特征值均为实数.

二、 设$A\in C^{m\times n}$，$\|A\|=\sqrt{mn}\max_{i,j}|a_{ij}|$，证明:

(1)$\|A\|$为矩阵范数; (2)$\|A\|$为与向量 2-范数相容. (10 分)

三、设$A=\begin{pmatrix}1/4&1/4&1/4&1/4\\1/5&2/5&1/5&1/5\\1/6&1/6&3/6&1/6\\1/7&1/7&1/7&4/7\end{pmatrix}$，利用盖尔圆盘定理计算矩阵 A 的谱半径$r(A)$.(10 分)

四、试证：如果 A 为 n 阶正规矩阵，且 $Ax=\lambda x$ 和 $Ay=\mu y$，其中，$\lambda\neq\mu$，那么 x 与 y 正交.(10 分)

证： A 为 n 阶正规矩阵$\Rightarrow A=U^H\Lambda U\Rightarrow$

$$Ax=\lambda x\Rightarrow U^H\Lambda Ux=\lambda x\Rightarrow \Lambda Ux=\lambda Ux\ \underrightarrow{x^{'}=Ux}\ \ \Lambda x^{'}=\lambda x^{'}$$

$$\text{设}x^{'}=(x^{'}_1,\cdots,x^{'}_n)^T\Rightarrow \lambda_i\neq\lambda\text{时},\ x^{'}_i=0$$

$$Ay=\lambda y\Rightarrow U^H\Lambda Uy=\mu y\Rightarrow \Lambda Uy=\mu Uy\Rightarrow \underrightarrow{y^{'}=Uy}\ \ \Lambda y^{'}=\lambda y^{'}$$

$$\text{设}y^{'}=(y^{'}_1,\cdots,y^{'}_n)^T\Rightarrow \mu_i\neq\mu\text{时},\ y^{'}_i=0$$

$$\lambda\neq\mu\Rightarrow (x^{'},y^{'})=0$$

$$0=\left(x^{'},y^{'}\right)=(Ux)^HUy=x^HU^HUy=x^Hy=\left(x,y\right)$$

五、设 $D\in C^{m\times n}$ 为列满秩矩阵，D^{+} 为 M-P 广义逆，$A\in C^{n\times n}$,证明: $\|A\|=\|DAD^{+}\|_2$ 为 $C^{n\times n}$ 上的矩阵范数. (10 分)

六、设线性方程组为$\begin{cases}x_1+2x_2+2x_2+x_4=1\\x_1+x_2+x_3+x_4=1\\2x_1+x_2+x_3+2x_4=1\end{cases}$，

(1) 求方程组的系数矩阵 A 的最大秩分解;

(2) 计算 A^{+};

(3) 求线性方程组的最佳逼近解. (10 分)

七、(1) 设 $A\in C^{n\times n}(n>1)$ 为严格对角占优矩阵，$D=diag(a_{11},a_{22},\cdots,a_{nn})$，其中 $a_{ii}(i=1,2,\cdots,n)$ 为 A 的对角元，E 为 n 阶单位矩阵，则存在一个矩阵范数$\|\cdot\|$使得 $r(E-D^{-1}A)<1$. (5 分).

(2) 设 $A\in C^{n\times n}$，ε 为任意给定的正数，$r(A)$ 为矩阵的谱半径。证明：至少存在一个矩阵范数$\|A\|$使得$\|A\|\leq r(A)+\varepsilon$. (5 分)