①矩阵序列与矩阵级数

谱半径 $r(A)=\max_i |\lambda_i| < 1$

1> 若 $A_{n\times n}$ 满足 $\lim_{k\to\infty} A^k = O_{n\times n}$，称A为收敛矩阵

2> $\sum_{k=0}^{\infty} A^{(k)}$ 绝对收敛 $\Longleftrightarrow$ $\sum_{k=1}^{\infty} \|A^{(k)}\|$ 收敛.

3> 方阵A的幂级数（Neumann 级数）

$$\sum_{k=0}^{\infty} A^k = E + A + A^2 + \cdots + A^k + \cdots$$

$\sum_{k=0}^{\infty} A^k$ 收敛 $\Longleftrightarrow$ A为收敛矩阵.

$\Downarrow$

和为 $(E-A)^{-1}$.

②矩阵函数

1> $e^{A+B} \neq e^A e^B \neq e^B e^A$

当 $A_{n\times n}$, $B_{n\times n}$, $AB=BA \Rightarrow e^{A+B} = e^A e^B$

2> $e^A e^{-A} = e^0 = E \Rightarrow (e^A)^{-1} = e^{-A}$ $\forall A$.

3> $(e^A)^m = e^{mA}$ $m=2,3\cdots$

2> 矩阵函数值的计算

A: 利用相似对角化

例1 设 $A = \begin{pmatrix} 4 & 6 & 0 \\ -3 & -5 & 0 \\ -3 & -6 & 1 \end{pmatrix}$，求 e^{At}, $\cos A$.

解：$|\lambda E - A| = (\lambda+2)(\lambda-1)^2$，则 $\lambda_1=-2$, $\lambda_2=\lambda_3=1$.

当 $\lambda_1=-2$ 时.

$$(-2E-A) = \begin{pmatrix} -6 & -6 & 0 \\ 3 & 3 & 0 \\ 3 & 6 & -3 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad 则\ \xi_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

当 $\lambda_2=\lambda_3=1$ 时.

$$(E-A) = \begin{pmatrix} -3 & -6 & 0 \\ 3 & 6 & 0 \\ 3 & 6 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad 则\ \xi_2 = (-2, 1, 0)^T,\ \xi_3 = (0, 0, 1)^T$$

则P为 $\begin{pmatrix} -1 & -2 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$，

注意 λ 与 ξ 对应

$$\Rightarrow e^{At} = P \begin{pmatrix} e^{-2t} & & \\ & e^t & \\ & & e^t \end{pmatrix} P^{-1} \qquad \cos A = P \begin{pmatrix} \cos(-2) & & \\ & \cos 1 & \\ & & \cos 1 \end{pmatrix} P^{-1}$$

B. Jordan标准形法.

例: 设 $A=\begin{pmatrix}\pi&0&0&0\\0&-\pi&0&0\\0&0&0&1\\0&0&0&0\end{pmatrix}$, 求 $\sin A$

解: A已为Jordan标准形. $J_1=\pi$ $J_2=-\pi$ $J_3=\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}$

则 $\sin J_1=0$ $\sin J_2=0$. $\sin J_3=\begin{pmatrix}\sin 0&\frac{1}{1!}\sin(0)\\0&\sin 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix}f(\lambda_i)&\frac{1}{1!}f'(\lambda_i)&\frac{1}{2!}f''(\lambda_i)&\cdots\\&f(\lambda_i)&\ddots&\frac{1}{2!}f''(\lambda_i)\\&&\ddots&\frac{1}{1!}f'(\lambda_i)\\&&&f(\lambda_i)\end{pmatrix}$$

则 $\sin A=\begin{pmatrix}0&&&\\&0&&\\&&0&1\\&&0&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&1\\0&0&0&0\end{pmatrix}$

习题. 8. 证: $AB=BA$, 则有 $e^Ae^B=e^{A+B}$

$$\sin(A+B)=\frac{e^{i(A+B)}-e^{-i(A+B)}}{2i}=\frac{e^{iA}e^{iB}-e^{-iA}e^{-iB}}{2i}=\sin A\cos B+\cos A\sin B$$

9. 解: $A=\begin{pmatrix}2&1&0\\0&0&1\\0&1&0\end{pmatrix}$ $|\lambda E-A|=\begin{vmatrix}\lambda-2&-1&0\\0&\lambda&-1\\0&-1&\lambda\end{vmatrix}=(\lambda-2)(\lambda-1)(\lambda+1)=0$, 则 $\lambda_1=2$, $\lambda_2=1$, $\lambda_3=-1$

$(2E-A)=\begin{pmatrix}0&-1&0\\0&2&-1\\0&-1&2\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}0&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$ 则 $\xi_1=(1,0,0)^T$

$(E-A)=\begin{pmatrix}-1&-1&0\\0&1&-1\\0&-1&1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&1\\0&1&-1\\0&0&0\end{pmatrix}$ 则 $\xi_2=(-1,1,1)^T$

$(-E-A)=\begin{pmatrix}-3&-1&0\\0&-1&-1\\0&-1&-1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}3&0&1\\0&1&1\\0&0&0\end{pmatrix}$ 则 $\xi_3=(-1,-3,3)^T$

则 $P=\begin{pmatrix}1&-1&-1\\0&1&-1\\0&1&3\end{pmatrix}\Rightarrow e^{At}=P\begin{pmatrix}e^{2t}&&\\&e^{t}&\\&&e^{-t}\end{pmatrix}P^{-1}$ $\sin At=P\begin{pmatrix}\sin 2t&&\\&\sin t&\\&&-\sin t\end{pmatrix}P^{-1}$

11. $A^T=\begin{pmatrix}1&1&0&0\\0&1&1&0\\0&0&1&1\\0&0&0&1\end{pmatrix}$ 为Jordan块 则 $\ln A^T=\begin{pmatrix}0&1&-\frac{1}{2}&\frac{1}{3}\\&0&1&-\frac{1}{2}\\&&0&1\\&&&0\end{pmatrix}$

则 $\ln A=\begin{pmatrix}0&&&\\1&0&&\\-\frac{1}{2}&1&0&\\\frac{1}{3}&-\frac{1}{2}&1&0\end{pmatrix}$