§5 初等矩阵

程光辉

2020 年 3 月 17 日

1 初等矩阵的一般形式

定义 1 设 $\boldsymbol{u}$, $\boldsymbol{v} \in \mathbf{C}^n$，$\boldsymbol{\sigma} \in \mathbf{C}$，则形如

$$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}; \boldsymbol{\sigma}) = \boldsymbol{E}_n - \boldsymbol{\sigma} \boldsymbol{u} \boldsymbol{v}^H$$

的矩阵叫做初等矩阵，其中 $\boldsymbol{E}_n$ 为 $\boldsymbol{n}$ 阶单位矩阵.

若 $\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{0}$，有 $\boldsymbol{E}(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}; \mathbf{0}) = \boldsymbol{E}_n$. 于是下面只讨论 $\boldsymbol{\sigma} \neq \mathbf{0}$，$\boldsymbol{u}$，$\boldsymbol{v}$ 非零向量情况的初等矩阵的性质.

定理 1 设 $\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \cdots, \boldsymbol{u}_{n-1}$ 是 $\boldsymbol{v}^\perp$ 的一组基，若 $\boldsymbol{u} \in \boldsymbol{v}^\perp$，则 $\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \cdots, \boldsymbol{u}_{n-1}$ 是 $\boldsymbol{E}(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}; \boldsymbol{\sigma})$ 的 $\boldsymbol{n} - \mathbf{1}$ 个线性无关的特征向量；若 $\boldsymbol{u} \notin \boldsymbol{v}^\perp$，则 $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \cdots, \boldsymbol{u}_{n-1}$ 是 $\boldsymbol{E}(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}; \boldsymbol{\sigma})$ 的 $\boldsymbol{n}$ 个线性无关的特征向量.

证明：因为

$$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}; \boldsymbol{\sigma}) \boldsymbol{u}_i = \boldsymbol{E}_n \boldsymbol{u}_i - \boldsymbol{\sigma} \boldsymbol{u} \boldsymbol{v}^H \boldsymbol{u}_i = \boldsymbol{u}_i,\ \boldsymbol{i} = \mathbf{1}, \mathbf{2}, \cdots, \boldsymbol{n} - \mathbf{1},$$

因此，$\boldsymbol{u}_i$ $(\boldsymbol{i} = \mathbf{1}, \mathbf{2}, \cdots, \boldsymbol{n} - \mathbf{1})$ 是 $\boldsymbol{E}(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}; \boldsymbol{\sigma})$ 的属于特征值 1 的线性无关特征向量.

若 $\boldsymbol{u} \in \boldsymbol{v}^\perp$，$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}; \boldsymbol{\sigma})$ 存在 $\boldsymbol{n}$ 个线性无关的特征向量，则 $\boldsymbol{v}$ 一定是，即有

$$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}; \boldsymbol{\sigma}) \boldsymbol{v} = \boldsymbol{E}_n \boldsymbol{v} - \boldsymbol{\sigma} \boldsymbol{u} \boldsymbol{v}^H \boldsymbol{v} = \boldsymbol{v} - \boldsymbol{\sigma} \boldsymbol{v}^H \boldsymbol{v} \boldsymbol{u} = \boldsymbol{\lambda} \boldsymbol{v},$$

则 $\boldsymbol{u}$ 和 $\boldsymbol{v}$ 共线 (必相关)，矛盾. 因此，则 $\boldsymbol{E}(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}; \boldsymbol{\sigma})$ 只有 $\boldsymbol{n} - \mathbf{1}$ 个线性无关的特征向量 $\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \cdots, \boldsymbol{u}_{n-1}$.

若 $\boldsymbol{u} \notin \boldsymbol{v}^\perp$，有

$$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}; \boldsymbol{\sigma}) \boldsymbol{u} = \boldsymbol{E}_n \boldsymbol{u} - \boldsymbol{\sigma} \boldsymbol{u} \boldsymbol{v}^H \boldsymbol{u} = (\mathbf{1} - \boldsymbol{\sigma} \boldsymbol{v}^H \boldsymbol{u}) \boldsymbol{u},$$

则 $\boldsymbol{u}$ 是特征值 $\mathbf{1} - \boldsymbol{\sigma} \boldsymbol{v}^H \boldsymbol{u}$ 对应的特征向量. 因此，则 $\boldsymbol{E}(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}; \boldsymbol{\sigma})$ 有 $\boldsymbol{n}$ 个线性无关的特征向量 $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \cdots, \boldsymbol{u}_{n-1}$.

推论 1 $E(u,v;\sigma)$ 的特征谱 *(即不考虑代数重数的特征值集合)* 为

$$\lambda\big(E(u,v;\sigma)\big)=\{1-\sigma v^H u,1,1,\cdots,1\}.$$

推论 2 当且仅当 $\sigma v^H u\neq 1$ 时，$E(u,v;\sigma)$ 可逆，且

$$E(u,v;\sigma)^{-1}=E(u,v;\frac{\sigma}{\sigma v^H u-1}).$$

推论 3 对任意的非零向量 $a,b\in \mathbf{C}^n$，存在 u,v,σ，使得

$$E(u,v;\sigma)a=b.$$

2 初等酉阵

定义 2 设 $u\in \mathbf{C}^n$，且 $u^H u=1$，则

$$H(u)=E(u,u;2)=E_n-2uu^H$$

称为初等酉阵，或 *Householder* 变换.

定理 2 $H(u)^H=H(u)=H(u)^{-1}$.

定理 3 $H(u)$ 是镜像变换. 即对 $\forall a\in u^{\perp}$，有

$$H(u)(a+ru)=a-ru,\quad r\in \mathbf{C},$$

也就是说 $H(u)$ 是关于 u 的垂直超平面的镜像.

3 酉变换与酉矩阵

定义 3 若线性空间 $V_n(\mathbf{C})$ 的变换 T 满足:

$$(T(x),T(y))=(x,y),\forall x,y\in V_n(\mathbf{C}),$$

则称 T 为 $V_n(\mathbf{C})$ 的酉变换.

酉变换及其对应的矩阵有非常好的性质, 在实际工程计算中有非常广泛的应用.

定理 4 设 T 是 $V_n(\mathbf{C})$ 的线性变换, 则下列命题等价:

(1) T 是酉变换;

(2) $\|T(x)\|=\|x\|,\forall x\in V_n(\mathbf{C})$;

(3) 设 $\varepsilon_1, \cdots, \varepsilon_n$ 是 $V_n(\mathbf{C})$ 的标准正交基, 则 $T(\varepsilon_1), \cdots, T(\varepsilon_n)$ 也是它的标准正交基;

(4) T 在任一标准正交基下的矩阵 A 是酉矩阵, 即 $A^H A = AA^H = E_n$.

定理 5 设 $A \in \mathbf{C}^{n\times n}$ 是酉矩阵, 则

(1) $(Ax, Ay) = (x, y)$;

(2) $\|Ax\| = \|x\|, \forall x \in \mathbf{C}^n$;

(3) A^H 也是酉矩阵;

(4) 若 $B \in \mathbf{C}^{n\times n}$ 是酉矩阵, 则 AB, BA 也是酉矩阵;

(5) 酉矩阵的特征值的模为 1.