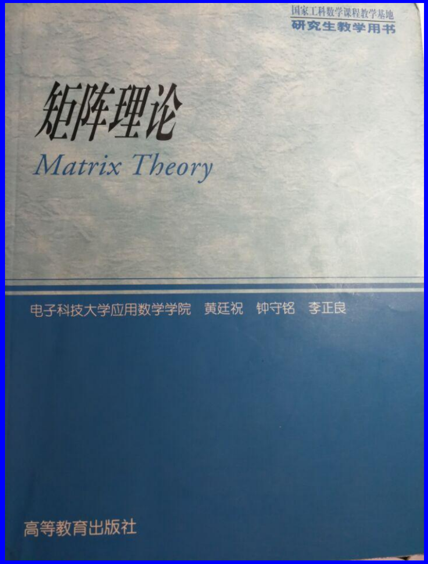
未来可至 强国有我

矩阵理论

Matrix Theory

（公共数学基础课程）

任课教师：高中喜



北斗导航定位系统

组合导航定位问题就是：假设A的秩为m,求方程组

$$V = AX - P \tag{2}$$

的解X使得V最小.
当$n = m = 4$时，

$$X = A^{-1}P \tag{3}$$

当$n > m = 4$时，根据最小二乘原理，由$min(V^TV)$可组成方程组：

$$A^TAX = A^TP \tag{4}$$

可求出使ϵ_i的平方和为极小的解：

$$X = (A^TA)^{-1}A^TP \tag{5}$$

此即北斗/罗兰C组合系统定位问题的数学模型。

控制器设计

动力系统

$$\dot{x} = Ax(t) = Ax(t) + A_d x(t-h) + Bu(t) + B_d d(t), \qquad (1)$$

如果要使这个系统达到鲁棒稳定，需要控制器 $u(t)$ 的调节。

由文献 [1] 可知，系统流程图为：

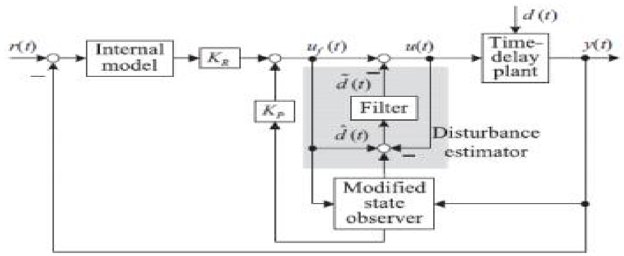


Figure: EID 控制流程图

控制器设计如下：

$$u(t) = K_R x(t) + K_P \hat{x}(t) - \tilde{d}(t), \qquad (2)$$

其中，$K_P = W_1 X_1^{-1}$ 和 $K_R = W_3 X_4^{-1}$ 是控制增益，需要运用到矩阵理论的奇异值分解知识来设计。

线性回归模型

$$\boldsymbol{Y} = \boldsymbol{X}\beta + \varepsilon,$$

这里 $\boldsymbol{Y}$ 为 $n \times 1$ 的观测向量，$\boldsymbol{X}$ 为 $n \times p$ 的设计矩阵，β 为 $p \times 1$ 的未知向量。

获得参数向量 β 的估计的基本方法是最小二乘法，其思想是，β 的真值应该使误差向量 $\varepsilon = \boldsymbol{Y} - \boldsymbol{X}\beta$ 达到最小，也就是

$$Q(\beta) = \|\varepsilon\|_2^2 = \|\boldsymbol{Y} - \boldsymbol{X}\beta\|_2^2$$

达到最小。利用矩阵微商和最小化理论，最小化 $Q(\beta)$ 转化为求解方程

$$\boldsymbol{X}^T\boldsymbol{X}\beta = \boldsymbol{X}^T\boldsymbol{Y}. \tag{3}$$

利用矩阵理论中最佳逼近解的知识，我们可以得到方程 (3) 的解为

$$\hat{\beta} = (\boldsymbol{X}^T\boldsymbol{X})^{-}\boldsymbol{X}^T\boldsymbol{Y}, \tag{4}$$

这里 $(\boldsymbol{X}^T\boldsymbol{X})^{-}$ 是 $\boldsymbol{X}^T\boldsymbol{X}$ 的任意一个广义逆。我们将 $\hat{\beta}$ 称为最小二乘估计。

数学特别是理论数学是我国科学研究的重要基础.我到一些大学调研时发现,能潜下心来钻研数学等基础学科的人还不够多.无论是人工智能还是量子通信等,都需要数学、物理等基础学科作有力支撑. 我们之所以缺乏重大原创性科研成果,‘卡脖子’就卡在基础学科上.——李克强总理

我们要搞原始创新,就必须更加重视基础研究,没有扎实的基础研究,就不可能有原始创新.国际数学界的最高奖项菲尔兹奖,中国至今没有一人获得.现在IT业发展迅猛, 源代码靠什么？靠数学！我们造大飞机,但发动机还要买国外的,为什么？数学基础不行,材料我们都过关了.所以,大学要从百年大计着眼,确实要有一批坐得住冷板凳的人.——李克强总理

强基础, 练思维.学位授予细则要求你们有坚实宽广的理论基础,系统深入的专门知识.——曾勇

将来退休后,想找个好大学,去学学数学.我认为用物理方法来解决问题已趋近饱和,要重视数学方法的突起.——任正非

华为5G标准是源于十多年前土耳其Arikan教授的一篇数学论文;P30手机的照相功能依赖数学把微弱的信号还原;如今华为终端每三个月换一代,主要是数学家的贡献.

返回

温馨提醒

二、 **选课规则**

1.本次选课采用研究生管理信息系统（GMIS），研究生登录网上服务大厅后点击右侧热门应用内**“研究生系统”**，或点击左侧可用应用栏-业务直通车内“研究生系统”，即可进入选课系统，请仔细阅读“附件1：电子科技大学研究生选课指南”，熟悉操作流程，提高选课效率。

2.所有课程均由研究生在选课系统自主选课，在选课期间网上选课成功者方能上课，**不接受任何形式的线下补选。未选课者即使参加了考核，其成绩也作无效处理。选课成功却不上课者，成绩一律作零分或不通过处理。请谨慎选课，认真上课。**

研究生为什么还要继续学习数学课程?

工科研究生的共同问题:

读文献时, 数学知识严重欠缺;

做研究时, 不知道如何创新?

解决途径

实际问题数学化: 避免就事论事, 使研究的对象能够推广到其他问题

主要数学课程: 矩阵理论(分析)　　数值分析

随机过程及应用　　最优化理论等

数学物理方程　　泛函分析

组合数学　　图论

返回

工科硕士研究生为什么要学习矩阵理论?

首先, 后续数学课程和专业课程的基础.　　线性代数+微积分

其次, 提供解决大量实际问题的理论框架和思想方法.

再次, 解决高维线性问题的不二选择.

最后,在现代通信、电子信息、图像处理、模式识别、系统控制、航空航天乃至现代经济等众多领域具有高度创造性和灵活性,是不可替代性的数学工具.

课程认识：高度的应用价值

但更是一门研究生的公共数学基础课程.

学习态度：作为理论课比将其作为工具课对待更为恰当.

参考资料

(1)R.A.Horn & C.R.Johnson << 矩阵分析 >> 杨奇翻译

(2)G.*Strang* << 线性代数及应用>> 侯自新等翻译

(3)陈公宁,<< 矩阵理论及应用>> 北京：高教出版社

(4)程云鹏等 << 矩阵论 >> 西安：西北工大出版社

(5)周杰,<< 矩阵分析及应用>> 成都：四川大学出版社

(6)黄有度等,<< 矩阵论及应用>> 合肥：中科大出版社

(7)张贤达,<< 矩阵分析及应用>> 北京：清华大学出版社

返回

本科线性代数课程的相关问题：

相似矩阵具有相同的特征值.

矩阵乘法一般不满足交换律.

为什么呢？

两个矩阵合同的几何直观解释是什么？

本学期的主要教学内容：

基本知识 ⇒ 范数 ⇒ 矩阵分解 ⇒ 特征值估计

⇒ 矩阵分析 ⇒ 广义逆阵

第一章

线性代数复习与提高

一、 线性空间与子空间

$$\forall \alpha,\beta \in Q, \alpha \pm \beta \in Q, \alpha\beta \in Q, 对\beta \neq 0时, \frac{\alpha}{\beta} \in Q.$$

$$\forall \alpha,\beta \in R, \alpha \pm \beta \in R, \alpha\beta \in R, 对\beta \neq 0时, \frac{\alpha}{\beta} \in R.$$

$$\forall \alpha,\beta \in C, \alpha \pm \beta \in C, \alpha\beta \in C, 对\beta \neq 0时, \frac{\alpha}{\beta} \in C.$$

共性： 1.数集P中的任意两个数$\pm$、$\cdot$、$\div$之后仍然在P中.

(封闭性)

2.数集P中均含有数0和1.

具有上述共性的数集P称为 数域.

返回

1.线性空间的定义

设集合$V\neq\Phi$, 其运算加法 “+”,

对$\forall\alpha,\beta\in V,\alpha+\beta\in V$,称这种性质　封闭性.

（$A1$）结合律：　对$\forall\alpha,\beta,\gamma\in V,(\alpha+\beta)+\gamma=\alpha+(\beta+\gamma)$;

（$A2$）交换律：　对$\forall\alpha,\beta\in V,\alpha+\beta=\beta+\alpha$;

（$A3$）有零元素：$\exists$元素$0,\forall\alpha\in V,\alpha+0=\alpha$;

（$A4$）有负元素：$\forall\alpha\in V,\exists$元素$-\alpha,\alpha+(-\alpha)=0$;

记为 （V,+）.

注：零元素、负元素均唯一.

返回

设数集$P\neq\Phi$， 对$\forall k\in P$与V中的元素作“乘法”，称为“数乘”，记为$k\bullet\alpha\in V$.

数乘满足下面四个条件：

$(B1)$数乘的结合律：设$k,l\in P,\alpha\in V$，有$k(l\alpha)=(kl)\alpha$;

$(B2)$ 数乘关于元素加法的分配律：

设$k\in P,\alpha,\beta\in V$，有$k(\alpha+\beta)=k\alpha+k\beta$;

$(B3)$ 数乘关于数的加法的分配律：

设$k,l\in P,\alpha\in V$，有$(k+l)\alpha=k\alpha+l\alpha$;

$(B4)$数乘的初始条件：$1\bullet\alpha=\alpha,1\in P$.

记为 $(V,+,\bullet)$.

称$(V,+,\bullet)$是数域P上的线性空间(或 向量空间).

称$(V,+,\cdot)$是数域P上的线性空间(或 向量空间).

1) $\alpha+\beta=\beta+\alpha$

2) $(\alpha+\beta)+\gamma=\alpha+(\beta+\gamma)$

3) $\exists\ 0\in V,\forall\alpha\in V,$有$\alpha+0=\alpha$

4) $\forall\alpha\in V,\exists\ \beta\in V,s.t\ \ \alpha+\beta=0$

5) $k(l\alpha)=(kl)\alpha.$

6) $k(\alpha+\beta)=k\alpha+k\beta.$

7) $(k+l)\alpha=k\alpha+l\alpha.$

8) $1\alpha=\alpha.$

当P=R或C时, V称为实空间或复空间.

P中的元素统称为 数.

返回

不唯一

唯一

2.线性空间的基和维数　　(有限维的线性空间.)

定义:在线性空间V中存在n个线性无关的向量$\alpha_1,\cdots,\alpha_n$,而V中任意$n+1$个向量都线性相关,则称V是n维的线性空间,向量组$\alpha_1,\cdots,\alpha_n$称为V的一组基,向量α_j称为基向量,

非负整数n称为V的维数.记为$\dim V$.

泛函分析

若不∃有限整数,则线性空间V称为无限维的线性空间.

若$n=0$时,则线性空间V没有基,称为平凡线性空间.或零线性空间.

3.子空间的定义

定义：设V是一个线性空间，W是V的一非空子集若W本身关于V的向量的加法和数乘也构成一个线性空间，则称W是V的线性子空间或子空间.

非零的线性子空间至少有两个子空间.

零子空间$\{0\}$与它自身. $\Rightarrow$ 平凡子空间.

零子空间无基. 零子空间的维数是0.

其余的子空间称为真子空间. $\dim W \le \dim V$.

子空间判别法 设V是线性空间，$\Phi \ne W \subset V$，W是V子空间 $\Leftrightarrow \forall k \in P, \alpha, \beta \in W$，有$\alpha+\beta \in W$与$k\alpha \in W$.

子空间中必然有0元素.

例1 最常见的线性空间.

(1) $\{0\}$是任何数域P上的线性空间.

(2) 任何数域P按照其加法和乘法构成本身上的一维线性空间,任何非零元均构成P的一组基.

R是C的子集且本身是线性空间,因此R是C的实线性子空间,但R不是复线性空间C的子空间. Why??

(3) 任何数域P上的$m\times n$矩阵全体按矩阵加法和数乘矩阵作成P上的mn维线性空间,其一组基为全体基本矩阵$E_{ij}, 1\le i\le m,$
$1\le j\le n.$

(4) 设A是一个$m\times n$矩阵,则齐次线性方程组$Ax=0$的所有解构成一个线性空间.

例2 判断下列集合是否构成线性空间.

1) 空间中不平行于一已知向量c的全体向量所构成的集合. N

2)数域P中次数等于定数$n(n \geq 1)$的多项式全体所构成的集合. N

3)设多项式集合

$$P_n[x]=\{a_n x^n + \cdots + a_i x^i + \cdots + a_1 x + a_0 \mid a_i \in P, i = 0,1,\cdots n\}.$$

按照通常多项式的加法和数乘法. Y

4)设$C[a,b]$={$[a,b]$上的连续函数全体}, $P = R$,

对于函数的加法“+”以及实数与函数乘法“•”. Y

返回

(5)设$V=\{$所有正实数$\}$, $P=R$是实数域, 定义V中的加法：$x\oplus y=xy$; 定义V中元素与P中数的数乘运算：

$k\bullet x=x^k$，则 $(V,\oplus,\bullet)$ 是实线性空间.

证明：$\forall x,y,z\in V=\{$所有正实数$\}$

$$\boxed{x\oplus y=xy}$$

(1)结合律: $\because (x\oplus y)\oplus z=xy\oplus z=xyz,$

$$x\oplus(y\oplus z)=x\oplus yz=xyz,$$

$$\therefore (x\oplus y)\oplus z=x\oplus(y\oplus z).$$

(2)交换律: $\because x\oplus y=xy=yx=y\oplus x.$

（$A3$）有零元素：$\exists$元素$0, \forall \alpha \in V, \alpha + 0 = \alpha$;

(3)零元素: $\because x \oplus 1 = x1 = x$. 故1是$V$的零元素.

(4)负元素: $\because x \oplus \dfrac{1}{x} = x\dfrac{1}{x} = 1$. 故$\dfrac{1}{x}$是$V$的负元素.

(5)数乘的结合律：$k\bullet(l\bullet x) = k\bullet x^{l} = (x^{l})^{k} = x^{lk} = x^{kl} = (kl)\bullet x$.

$l\bullet x = x^{l}$,

(6)$\because k\bullet(x \oplus y) = k\bullet(xy) = (xy)^{k} = x^{k}y^{k} = x^{k} \oplus y^{k} = k\bullet x \oplus k\bullet y$.

(7)$\because (k+l)\bullet x = x^{k+l} = x^{k}x^{l} = x^{k} \oplus x^{l} = k\bullet x \oplus l\bullet x$.

(8) $1\bullet x = x^{1} = x$. 证毕.

（$A4$）有负元素：$\forall \alpha \in V, \exists$元素$-\alpha$, $\alpha + (-\alpha) = 0$;

例3.求下列线性空间的维数和一组基.　$A=A^T, i.e. a_{ij}=a_{ji}, \forall i,j.$

1)数域R上全体n阶方阵构成的空间$R^{n\times n}$.

2)数域R上全体n阶对称矩阵构成的空间V.

解:1)$R^{n\times n}$的基为 $E_{ij}, i,j=1,2,\cdots n.$ $\dim(R^{n\times n})=n^2.$

2)令$F_{ij}=\begin{cases} E_{ij}+E_{ji} \\ E_{ii} \end{cases}$ $1\le i\le j\le n,$ $\dim(V)=\dfrac{n(n+1)}{2}.$

$A=-A^T, i.e. a_{ij}=-a_{ji}, \forall i,j.$ 反对称

$A=A^H, i.e. a_{ij}=\overline{a_{ji}}, \forall i,j.$ Hermite矩阵

$A=-A^H, i.e. a_{ij}=-\overline{a_{ji}}, \forall i,j.$ 反Hermite矩阵

$A\bullet A^T=E$,则A为正交矩阵.　$A\bullet A^H=E$,则A为酉矩阵.

$A^2=A$,则A为幂等矩阵.　$A^2=E$,则A为对合矩阵.

子空间判别法　设V是线性空间,$\Phi \neq W \subset V$,W是V子空间$\Leftrightarrow \forall k \in P, \alpha, \beta \in W$,有$\alpha+\beta \in W$与$k\alpha \in W$.

例4　设$A \in R^{n\times n}$,证明：全体与A可交换的矩阵组成的一个子空间记为$C(A)$.

证：$AE = EA \quad \Rightarrow E \in C(A)$.

$\forall A_1, A_2 \in C(A) \Rightarrow A_1A = AA_1, A_2A = AA_2$

1)　$(A_1 + A_2)A \quad = A_1A + A_2A \quad = AA_1 + AA_2 = A(A_1 + A_2)$

2)　$(kA_1)A \ = k(A_1A) \ = k(AA_1) \ = A(kA_1)$

$C(A)$是$R^{n\times n}$的子空间.

例5 设V_1、V_2是线性空间V的两个非平凡子空间,则V中存在向量α,使$\alpha \notin V_1$、$\alpha \notin V_2$同时成立.

证: $\because V_1$是非平凡子空间, $\therefore$ 存在向量$\alpha \notin V_1$,

$\therefore$ 如果$\alpha \notin V_2$,则结论成立.

如果: $\alpha \in V_2$,

$\because V_2$是非平凡子空间, $\therefore$ 存在向量$\beta \notin V_2$,

$\therefore$ 如果$\beta \notin V_1$,则结论成立.

$\therefore$ 如果$\beta \in V_1$,就有 $\alpha \notin V_1, \beta \in V_1; \alpha \in V_2, \beta \notin V_2$

$\therefore \gamma = \alpha + \beta \notin V_1, \gamma = \alpha + \beta \notin V_2.$

传递性：若U是V的子空间, W是U的子空间, 则W也是V的子空间.

任意多个子空间的交集仍是子空间. 特别地,两个子空间U与W的交$U\cap W$仍是子空间.

两个子空间的并集$U\cup W$还是子空间吗？为什么？ 例5

V是包含U和W的子空间.

包含U和W的最小的子空间存在？

$$\alpha+\beta, \forall\alpha\in U, \forall\beta\in W$$

$$U+W=\{\alpha+\beta \mid \forall\alpha\in U, \forall\beta\in W\}.$$

2 空间分解及维数定理

定义1 设U,W是线性空间V的子空间,则U与W的和为

$$U+W=\{\alpha+\beta\mid\forall\alpha\in U,\forall\beta\in W\}.$$

定理 $U+W$是V的子空间.

推广 设$U_1,U_2,\cdots,U_s$是线性空间V的子空间,则集合

$\{\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_s$: $\alpha_j\in U_j,1\le j\le s\}$也是子空间.

如何生成线性子空间?

返回

如何生成线性子空间？

设$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$是数域$P$上的线性空间$V$的一组向量，他所有可能组合的集合

$$W=\{k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+\cdots+k_s\alpha_s:\ k_j\in P,1\le j\le s\}.$$

W是V的线性子空间吗？

称W是由$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$生成（或张成）的子空间.

记为 $W=L(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s)=\{k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+\cdots+k_s\alpha_s\}.$

$$\therefore U+W=L(U\cup W).$$

例　设$V=M_n(R)$是n阶实矩阵构成的线性空间. 令
$D=\{$全体对角矩阵$\}$，$U=\{$全体上三角矩阵$\}$，
$W=\{$全体下三角矩阵$\}$，则D，U与W均是V的子空间，且$U+W=V$；$U\cap W=D$；$U\cup W$不是子空间.

其中D的维数等于n，U与W的维数均等于$n(n+1)/2$；
$U+W=V$的维数等于n^2，即

$$(\dim U+\dim W)-\dim(U+W)=\dim(U\cap W).$$

普通集合的计数公式：$|A\cup B|=|A|+|B|-|A\cap B|$).

即：$|A|+|B|-|A\cup B|=|A\cap B|$

维数定理 设V是线性空间, U与W是V的两个子空间,

则 $\dim(U+W)=\dim(U)+\dim(W)-\dim(U\cap W)$.

思路：设$\dim(U)=s,\dim(W)=t,\dim(U\cap W)=r$.

任取$U\cap W$的一组基$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r$.

故U的一组基$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r,\beta_1,\cdots\beta_{s-r}$.

W的一组基$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r,\gamma_1,\cdots\gamma_{t-r}$.

则$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r,\beta_1,\cdots\beta_{s-r},\gamma_1,\cdots\gamma_{t-r}$是$U+W$的一组基.

(1)和空间的维数往往比空间维数的和要小.

(2)欲使子空间$U+W$的维数最大, 当且仅当$U\cap W=0$.

设V是线性空间，U与W是V的两个子空间，当且仅当$U\cap W=0$时，称$U+W$为V的直和，记为$U\oplus W$.

则 $\dim(U\oplus W)=\dim(U)+\dim(W)$.

例 二维平面R^2是x轴与y轴的直和；

R^3是x轴与yoz面的直和.

如何判定直和？

设U与W是V的两个子空间,则下列命题等价:

(1) $U+W$是直和($U\cap W=0$);

(2) $\forall\alpha\in U+W$,分解式$\alpha=u+w$,其中$u\in U,w\in W$
是唯一的;

(3) 零向量的分解式唯一,即$0=u+w,u\in U,w\in W$
则$u=w=0$;

(4) $\dim(U+W)=\dim(U)+\dim(W)$.

设$W_1,W_2,\cdots W_s$是V的子空间，则下列命题等价：

(1) $\sum_{i=1}^{s} W_i$是直和，即$\dim(\sum_{i=1}^{s} W_i)=\sum_{i=1}^{s}\dim(W_i)$;

(2) $W_j\cap\sum_{k\neq j} W_k=0, 1\le j\le s, 1\le k\le s$;

(3) $\forall\alpha\in\sum_{i=1}^{s} W_i$的分解式唯一;

(4) 零向量的分解式唯一.

例　设$\alpha_1,\alpha_2,\cdots\alpha_n$是$n$维线性空间$V$的一组基，则

$$V=L(\alpha_1)\oplus L(\alpha_2)\oplus\cdots\oplus L(\alpha_n)$$

矩阵的值域和核空间理论

设$A=(a_{ij})\in R^{m\times n}$,以$\alpha_i$表示$A$的第$i$例向量,称子空间$L(\alpha_1,\alpha_2,\cdots\alpha_n)$为矩阵$A$的值域(列空间),记为

$$R(A)=L(\alpha_1,\alpha_2,\cdots\alpha_n).$$

$$R(A)=\{Ax\mid x\in R^n\}\subset R^m.$$

$$rank(A)=\dim R(A).$$

$R(A^T)=\{A^Tx\mid x\in R^m\}\subset R^n.$ A^T的值域(行空间).

$$rank(A)=\dim R(A)=\dim R(A^T).$$

设$A=(a_{ij})\in R^{m\times n}$,称集合$\{x\mid Ax=0\}$为$A$的核空间(零空间),记为$N(A)$,即$N(A)=\{x\mid Ax=0\}$.

$N(A)$维数称为A的零度,记为$n(A)=\dim N(A)$.

$\dim N(A)+\dim R(A^T)=n$;

$\dim N(A^T)+\dim R(A)=m$.

$V=U\oplus W$ W叫U的补子空间.

补子空间唯一吗?