收敛性分析初步

向量序列的收敛性

迭代法的收敛性分析

迭代误差估计定理

平面温度场计算

平面点列: $\begin{bmatrix} x_1^{(1)} \\ x_2^{(1)} \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} x_1^{(2)} \\ x_2^{(2)} \end{bmatrix} \quad \cdots\cdots \begin{bmatrix} x_1^{(k)} \\ x_2^{(k)} \end{bmatrix} \quad \cdots\cdots$

$$\lim_{k\to\infty}\begin{bmatrix} x_1^{(k)} \\ x_2^{(k)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1^{*} \\ x_2^{*} \end{bmatrix} \quad \Longleftrightarrow \quad \lim_{k\to\infty}\sqrt{(x_1^{(k)}-x_1^{*})^2+(x_2^{(k)}-x_2^{*})^2}=0$$

$$X^{(k)} \in R^n: \quad X^{(1)}, X^{(2)}, \cdots, X^{(k)}, \cdots\cdots$$

$$\lim_{k\to\infty} X^{(k)} = X^{*} \quad \Longleftrightarrow \quad \lim_{k\to\infty} \| X^{(k)} - X^{*} \|_2 = 0$$

利用向量范数等价性, 对任意范数 $\|\cdot\|$

$$\lim_{k\to\infty} X^{(k)} = X^{*} \quad \Longleftrightarrow \quad \lim_{k\to\infty} \| X^{(k)} - X^{*} \| = 0$$

$$AX=b \Rightarrow (M-N)X=b \Rightarrow MX=NX+b$$

计算格式: $X^{(k+1)}=BX^{(k)}+f \quad (B=M^{-1}N)$

设方程组的精确解为 X^*,则有

$$X^*=BX^*+f \quad \Rightarrow$$

$$X^{(k+1)}-X^*=B(X^{(k)}-X^*)$$

记 $\varepsilon^{(k)}=X^{(k)}-X^* \quad (k=0,1,2,3,\cdots\cdots)$

则有 $\varepsilon^{(k+1)}=B\,\varepsilon^{(k)}$

$$\varepsilon^{(k)}=B\,\varepsilon^{(k-1)} \quad (k=1,2,3,\cdots\cdots)$$

$$\varepsilon^{(k)} = B\,\varepsilon^{(k-1)} = B^2\,\varepsilon^{(k-2)} = \cdots = B^k\,\varepsilon^{(0)}$$

(1) $$\lim_{k\to\infty} \varepsilon^{(k)} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \lim_{k\to\infty} B^k = 0$$

$$\begin{pmatrix} \lambda & \\ & \lambda \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} \lambda & \\ & \lambda \end{pmatrix}^k = \begin{pmatrix} \lambda^k & \\ & \lambda^k \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ & \lambda \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ & \lambda \end{pmatrix}^k = \begin{pmatrix} \lambda^k & k\lambda^{k-1} \\ & \lambda^k \end{pmatrix}$$

(2) $$\lim_{k\to\infty} \varepsilon^{(k)} = 0 \quad \Leftarrow \quad \|B\| < 1$$

$$\lim_{k\to\infty} [X^{(k)} - X^*] = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad \lim_{k\to\infty} X^{(k)} = X^*$$

迭代格式 $X^{(k+1)} = B\,X^{(k)} + f$ 收敛

命题 若$\|B\|<1$,则迭代法 $X^{(k+1)}=B X^{(k)}+f$ 收敛

证：由$\varepsilon^{(k)}=B\,\varepsilon^{(k-1)}$,得

$$\|\varepsilon^{(k)}\|\le\|B\|\,\|\varepsilon^{(k-1)}\| \qquad (k=1,2,3,\cdots\cdots)$$

$$\Rightarrow \quad \|\varepsilon^{(k)}\|\le\|B\|^{k}\,\|\varepsilon^{(0)}\|$$

$$\|B\|<1 \quad \Rightarrow \quad \lim_{k\to\infty}\|\varepsilon^{(k)}\|\le\lim_{k\to\infty}\|B\|^{k}\|\varepsilon^{(0)}\|=0$$

所以 $$\lim_{k\to\infty}\varepsilon^{(k)}=0$$

注1: 若 $\lim\limits_{k\to\infty} B^k = 0$ 则

$$(I - B)^{-1} = I + B + B^2 + \cdots\cdots + B^k + \cdots\cdots$$

事实上

$$(I - B)(I + B + B^2 + \cdots\cdots + B^k) = I - B^{k+1}$$

注2: $X^{(k)} = B X^{(k-1)} + f = B(B X^{(k-2)} + f) + f = \cdots\cdots$

$$= B^k X^{(0)} + (I + B + \cdots\cdots + B^{k-1})f$$

$$\approx (I - B)^{-1} f$$

定义4.1 $A=(a_{ij})_{n\times n}$，如果 $$|a_{ii}|>\sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n}|a_{ij}|$$

则称A为严格对角占优阵.

例1 常微分方程边值问题 $$\begin{cases}-y''+y=x & x\in(0,1)\\ y(0)=0,y(1)=0.\end{cases}$$

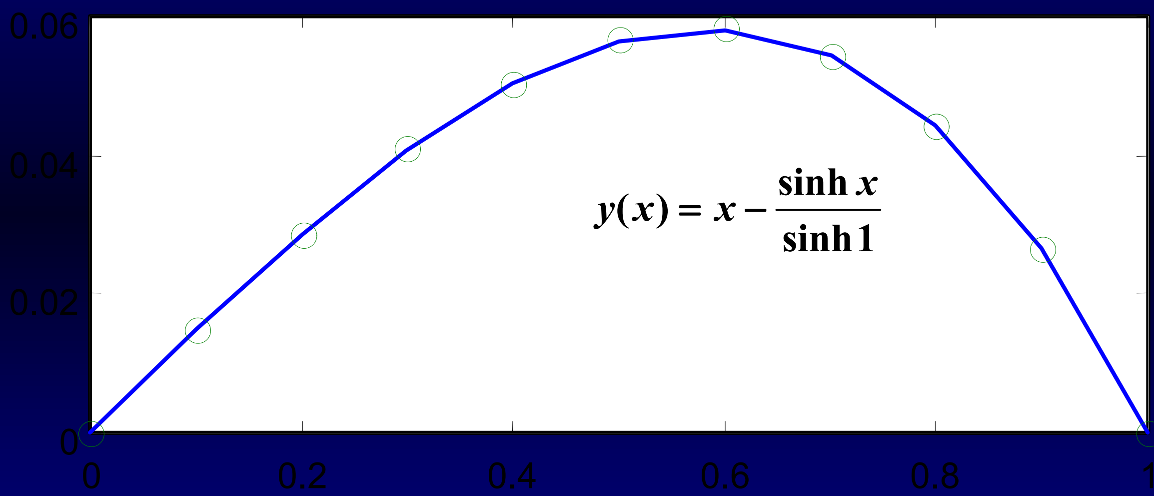
求在 $x_1=0.1,\ x_2=0.2,\ \cdots,\ x_9=0.9$ 处的数值解

$$-y_{j-1}+(2+h^2)\,y_j-y_{j+1}=x_j\,h^2\qquad(j=1,2,\cdots,9)$$

$$\begin{bmatrix}2+h^2 & -1 & & \\ -1 & 2+h^2 & -1 & \\ & \ddots & \ddots & \ddots \\ & & -1 & 2+h^2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}y_1\\ y_2\\ \vdots\\ y_9\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}x_1h^2\\ x_2h^2\\ \vdots\\ x_9h^2\end{bmatrix}$$

高斯-赛德尔迭代格式:

$$y_j^{(k+1)} = \frac{1}{2+h^2}[y_{j-1}^{(k+1)} + y_{j+1}^{(k)} + x_j h^2]$$



误差限设置：10^{-5}。

迭代次数k=60，error0 = 1.2742e-004

定理4.3 若$Ax=b$的系数矩阵A是严格对角占优矩阵,则Jacobi迭代和Seidel迭代均收敛

证: 由于矩阵A严格对角占优

$$|a_{ii}| > \sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n} |a_{ij}| \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{|a_{ii}|}\sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n} |a_{ij}| < 1$$

由A矩阵构造Jacobi迭代矩阵$B_J = D^{-1}(D-A)$

第 i 行绝对值求和 $\boxed{\frac{1}{|a_{ii}|}\sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n} |a_{ij}|}$

所以 $$\|B_J\|_\infty = \max_{1\le i\le n}\{\frac{1}{|a_{ii}|}\sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n} |a_{ij}|\} < 1$$

矩阵B 的谱

设n阶方阵B 的n个特征值为：$\lambda_1 ,\lambda_2 ,\cdots,\lambda_n$

则称集合 $\{\lambda_1 ,\lambda_2 ,\cdots,\lambda_n\}$

为B 的谱. 记为 **ch B**

特征值取模最大

矩阵B的谱半径 $\rho(B)=\max\limits_{1\le k\le n}|\lambda_k|$

注1: 当B是**对称矩阵**时, $\|B\|_2 = \rho(B)$

注2: 对 $R^{n\times n}$ 中的范数$\|\cdot\|$,有

$$\rho(B)\le\|B\|$$

定理4.1 迭代法 $X^{(k+1)} = B X^{(k)} + f$ 收敛

$\Leftrightarrow$ 谱半径$\rho(B) < 1$

例2 线性方程组 $A X = b$, 分别取系数矩阵为

$$A_1 = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \end{bmatrix} \qquad A_2 = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{bmatrix}$$

分析Jacobi 迭代法和 Seidel 迭代法的敛散性

Jacobi $X^{(k+1)}=D^{-1}(U+L)X^{(k)}+D^{-1}b$

Seidel $X^{(k+1)} = (D-L)^{-1}b + (D-L)^{-1}UX^{(k)}$

A1=[1,2,-2;1,1,1;2,2,1]

```
D=diag(diag(A1));
B1=D\(D-A1);
max(abs(eig(B1)))
```

Ans= 1.2604e-005

$\rho(B_J)<1$ 收敛

A2=[2,-1,1;1,1,1;1,1,-2]

```
D=diag(diag(A2))
B2=D\(D-A2)
max(abs(eig(B2)))
```

Ans= 1.1180

$\rho(B_J)=1.1180$ 发散

```
DL=tril(A1)
B1=DL\(DL-A1)
max(abs(eig(B1)))
```

Ans= 2

$\rho(B_S)=2$ 发散

```
DL=tril(A2)
B2=DL\(DL-A2)
max(abs(eig(B2)))
```

Ans= 1/2

$\rho(B_S)=1/2$ 收敛

定理4.2 :设X^*为方程组 $AX=b$ 的解

若||B||<1,则对迭代格式 $X^{(k+1)} = B X^{(k)} + f$ 有

$$(1)\ \| X^{(k)} - X^* \| \le \frac{\| B \|}{1-\| B \|} \| X^{(k)} - X^{(k-1)} \|$$

$$(2)\ \| X^{(k)} - X^* \| \le \frac{\| B \|^k}{1-\| B \|} \| X^{(1)} - X^{(0)} \|$$

证 由||B||<1,有 $\lim_{k\to\infty} X^{(k)} = X^*$

$$\boxed{X^{(k+1)} - X^* = B(X^{(k)} - X^*)}$$

$$\boxed{\| X^{(k+1)} - X^* \| \le \|B\| \, \| X^{(k)} - X^* \|}$$

$$\|X^{(k+1)} - X^{(k)}\| = \|(X^* - X^{(k)}) - (X^* - X^{(k+1)})\|$$

$$\geq \|(X^* - X^{(k)})\| - \|(X^* - X^{(k+1)})\|$$

$$\geq \|(X^* - X^{(k)})\| - \|B\| \, \|(X^* - X^{(k)})\|$$

$$= (1 - \|B\|) \, \|(X^* - X^{(k)})\|$$

$$\boxed{\|X^{(k+1)} - X^*\| \leq \|B\| \, \|X^{(k)} - X^*\|}$$

$$\Rightarrow \quad \|X^{(k)} - X^*\| \leq \frac{1}{1 - \|B\|} \|X^{(k+1)} - X^{(k)}\|$$

$$\Rightarrow \quad \|X^{(k)} - X^*\| \leq \frac{\|B\|}{1 - \|B\|} \|X^{(k)} - X^{(k-1)}\|$$

数值微分–有限差分法

一阶向前差商 $$f'(a)=\frac{f(a+h)-f(a)}{h}+O(h)$$

一阶向后差商 $$f'(a)=\frac{f(a)-f(a-h)}{h}+O(h)$$

一阶中心差商 $$f'(a)=\frac{f(a+h)-f(a-h)}{2h}+O(h^2)$$

二阶中心差商 $$f''(a)=\frac{f(a+h)-2f(a)+f(a-h)}{h^2}+O(h^2)$$