电子科技大学 2003 级硕士研究生《矩阵理论》试题

一、判断题（40 分）（对者打∨，错者打×）

1、设 $x\in C^n, U$ 为n阶酉矩阵 ，则 $\|Ux\|_2=\|x\|_2$. （ ）

$\because$ $\|Ux\|_2^2=\left(Ux \quad Ux\right)=x^H U^H U x=x^H x=\|x\|_2^2$

2、设 $A\in C^{n\times n}$, 则 $\|A\|_{m_2}^2\ge\sum_{i=1}^{n}|\lambda_i|^2$. （ ）

$\because$ $A\in C^{n\times n}\to A=URU^H\to\|A\|_{m_2}^2=\|URU^H\|_{m_2}^2=\|R\|_{m_2}^2\ge\|R^2\|_{m_2}=\sum_{i=1}^{n}|\lambda_i|^2$

3、如果 $x=(x_1,x_2,\cdots,x_n)^T\in C^n$，则 $\|x\|=|x_1|^2$ 为向量范数. （ ）

$\because$ 例如 $x=(0,1,0,\cdots,0)\neq 0$，但 $\|x\|=0$

4、$\|x\|_\infty\le\|x\|_1\le n\|x\|_\infty$. （ ）

$\because$ $\|x\|_\infty=\max_i|x_i|\le\sum_{i=1}^{n}|x_i|=\|x\|_1\le n\max_i|x_i|=n\|x\|_\infty$

5、设 A 为 n 阶酉矩阵，则 $AA^+=A^+A=E$. （ ）

$\because$ 因为 $A^+=A^H$，故结论成立

6、若 $A\in C_r^{m\times r}$，则 $A_L^{-1}=(AA^H)^{-1}A^H$. （ ）

$\because$ $A_L^{-1}=(A^HA)^{-1}A^H$，故结论不成立

7、若 $\|\cdot\|$ 为算子范数，则 $\|A\|^{-1}\ge\|A^{-1}\|$. （ ）

$\because$ $1=\|AA^{-1}\|\le\|A\|\|A^{-1}\|$，故结论不成立

8、$\begin{bmatrix}1 & i\\ i & 1\end{bmatrix}$和$\begin{bmatrix}i & i\\ i & 1\end{bmatrix}$都是复对称矩阵 $(A^T=A)$，故均为正规矩阵. （ ）

$\because$ $\begin{bmatrix}1 & i\\ i & 1\end{bmatrix}$为正规矩阵而$\begin{bmatrix}i & i\\ i & 1\end{bmatrix}$非正规,因为$\begin{bmatrix}i & i\\ i & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-i & -i\\ -i & 1\end{bmatrix}\neq\begin{bmatrix}-i & -i\\ -i & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}i & i\\ i & 1\end{bmatrix}$

9、设 $\rho(A)$ 为矩阵 A 的谱半径，则 $\rho(A)\le\|A\|_{m_\infty}$. （ ）

$\because$ $A=\begin{bmatrix}0 & 1\\ 1 & 1\end{bmatrix}$, 则 $\|A\|_{m_\infty}=1$, 而 $\rho(A)=1.618$

10、设$\|\cdot\|_m$为自相容矩阵范数，则$\|x\|=\|xa^H\|_m$是与$\|\cdot\|_m$相容的向量范数

( )

二、设A是幂等矩阵$(A^2=A)$，但$A\neq E$，证明A不是严格对角占优矩阵.（10 分）

证：如果A是严格对角占优矩阵$\rightarrow A$可逆$\rightarrow A=E$，矛盾

三、设$A=(a_{ij})\in C^{n\times n}$, λ是$B=(|a_{ij}|)$的特征值，且存在向量$x=(x_1,\cdots,x_n)^T$ $(\forall x_i>0)$

使得$Bx=\lambda x$，记$D=diag(x_1,x_2,\cdots,x_n)$. 证明$D^{-1}BD$的每个 Gerschgorin 圆都经过$\lambda$.（10 分）

证：

$$D^{-1}BD=\begin{pmatrix}\frac{1}{x_1}&&&\\&\frac{1}{x_2}&&\\&&\ddots&\\&&&\frac{1}{x_n}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}|a_{11}|&|a_{12}|&\cdots&|a_{1n}|\\|a_{21}|&|a_{22}|&\cdots&|a_{2n}|\\\cdots&\cdots&\cdots&\cdots\\|a_{n1}|&|a_{n2}|&\cdots&|a_{nn}|\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1&&&\\&x_2&&\\&&\ddots&\\&&&x_n\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}\frac{|a_{11}|}{x_1}&\frac{|a_{12}|}{x_1}&\cdots&\frac{|a_{1n}|}{x_1}\\\frac{|a_{21}|}{x_2}&\frac{|a_{22}|}{x_2}&\cdots&\frac{|a_{2n}|}{x_2}\\\cdots&\cdots&\cdots&\cdots\\\frac{|a_{n1}|}{x_n}&\frac{|a_{n2}|}{x_n}&\cdots&\frac{|a_{nn}|}{x_n}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1&&&\\&x_2&&\\&&\ddots&\\&&&x_n\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}|a_{11}|&\frac{|a_{12}|x_2}{x_1}&\cdots&\frac{|a_{1n}|x_n}{x_1}\\\frac{|a_{21}|x_1}{x_2}&|a_{22}|&\cdots&\frac{|a_{2n}|x_n}{x_2}\\\cdots&\cdots&\cdots&\cdots\\\frac{|a_{n1}|x_1}{x_n}&\frac{|a_{n2}|x_2}{x_n}&\cdots&|a_{nn}|\end{pmatrix}$$

$\rightarrow D^{-1}BD$的每个 Gerschgorin 圆为$S_i=\{z\in C:|z-|a_{ii}||\leq R_i\}$, $R_i=\frac{1}{x_i}\sum_{\substack{j=1\\j\neq i}}^{n}|a_{ij}|x_j$，

又 $Bx=\lambda x\rightarrow|\lambda-|a_{ii}||=\frac{1}{x_i}\sum_{\substack{j=1\\j\neq i}}^{n}(|a_{ij}|x_j)=R_i$ $\quad i=1,2,\cdots,n$，所以结论成立.

四、如果A为正规矩阵，且对所有$x\in C^n$，有$x^HAx\leq 0$，那么A的所有特征值非正. 如果有$tr(A)=0$，那么$A=0$.（10 分）

证：A为正规矩阵$\rightarrow A=Udiag(\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n)U^H\rightarrow diag(\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n)=U^HAU$

$\rightarrow\lambda_i=u_i^HAu_i\leq 0$；又因为$tr(A)=\lambda_1+\lambda_2+\cdots+\lambda_n=0\rightarrow\lambda_i=0\rightarrow A=0$

五、求 $A=\begin{bmatrix}1 & 0 & 1\\ -1 & 1 & -1\\ 1 & -1 & 1\end{bmatrix}$的最大秩分解，并求 A^{+}. （10 分）

解：$A=BD=\begin{bmatrix}1 & 0\\ -1 & 1\\ 1 & -1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 0\end{bmatrix}$ ，$B^{H}B=\begin{bmatrix}3 & -2\\ -2 & 2\end{bmatrix}$，$DD^{H}=\begin{bmatrix}2 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}$

$(B^{H}B)^{-1}=\begin{bmatrix}1 & 1\\ 1 & 1.5\end{bmatrix}$，$(DD^{H})^{-1}=\begin{bmatrix}0.5 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}$，$A^{+}=\begin{bmatrix}0.5 & 0.5 & -0.5\\ 0.5 & 1 & -1\\ 0.5 & 0.5 & -0.5\end{bmatrix}$

六、求矩阵 $A=\begin{bmatrix}4 & 6 & 0\\ -3 & -5 & 0\\ -3 & -6 & 1\end{bmatrix}$的谱分解，并计算 A^{10}.（10 分）

解：$|\lambda E-A|=(\lambda+2)(\lambda-1)^{2}$，$P=\begin{bmatrix}-1 & -2 & 0\\ 1 & 1 & 0\\ 1 & 0 & 1\end{bmatrix}$，$P^{-1}=\begin{bmatrix}1 & 2 & 0\\ -1 & -1 & 0\\ -1 & -2 & 1\end{bmatrix}$，

$A_{1}=\begin{bmatrix}-1\\ 1\\ 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 2 & 0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-1 & -2 & 0\\ 1 & 2 & 0\\ 1 & 2 & 0\end{bmatrix}$，$A_{2}=\begin{bmatrix}-2 & 0\\ 1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-1 & -1 & 0\\ -1 & -2 & 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2 & 2 & 0\\ -1 & -1 & 0\\ -1 & -2 & 1\end{bmatrix}$

$A=-2A_{1}+A_{2}$，$A^{10}=\begin{bmatrix}-1022 & -2046 & 0\\ 1023 & 2047 & 0\\ 1023 & 2046 & 1\end{bmatrix}$

七、(1).设 $A\in C^{n\times n}$，$B=\begin{bmatrix}0 & A\\ A^{H} & 0\end{bmatrix}$，则$\|B\|_{2}=\|A\|_{2}$. （5 分）

证：$B=\begin{bmatrix}0 & A\\ A^{H} & 0\end{bmatrix}\to B^{H}=\begin{bmatrix}0 & A\\ A^{H} & 0\end{bmatrix}\to BB^{H}=\begin{bmatrix}AA^{H} & 0\\ & A^{H}A\end{bmatrix}\to r(BB^{H})=r(AA^{H})$

$\to \quad \|B\|_{2}=\|A\|_{2}$

(2).设 $A,B\in C^{n\times n}$, A是非奇异矩阵，B是奇异矩阵,如果$\|\cdot\|$是任意自相容矩阵范数，证明$\|A-B\|\ge 1/\|A^{-1}\|$.（5 分）

$B=A-(A-B)=A[E-A^{-1}(A-B)]\to E-A^{-1}(A-B)$奇异$\to$

$1\le r[A^{-1}(A-B)]\le\|A^{-1}\|\|(A-B)\|$