常微分方程数值解

Euler法与修正的Euler法

误差分析

Range-Kutta公式

Euler法与修正的Euler法

一阶常微分方程初值问题: $\begin{cases} \dfrac{dy}{dx} = f(x, y), \ x > x_0 \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$

其中, $y = y(x)$ 是未知函数,

右端函数 $f(x, y)$是已知函数, 初值 y_0 是已知数据。

数值方法——取定离散点: $x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_N$

求未知函数 $y(x)$ 在离散点处的近似值

$$y_1, \quad y_2, \quad y_3, \quad \cdots\cdots, \quad y_N$$

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y) \quad \rightarrow \quad \frac{y_{n+1} - y_n}{h} = f(x_n, y_n)$$

求解常微分方程初值问题的Euler方法

取定步长: h,记 $x_n = x_0 + nh$, $(n = 1,2,\cdots,N)$

称计算格式: $y_{n+1} = y_n + hf(x_n, y_n)$ 为**Euler公式**。

对应的求初值问题数值解的方法称为**Euler方法**。

例2 用Euler法求初值问题 $\begin{cases} \dfrac{dy}{dx} = y - xy^2, & 0 < x < 2 \\ y(0) = 1 \end{cases}$ 的数值解。

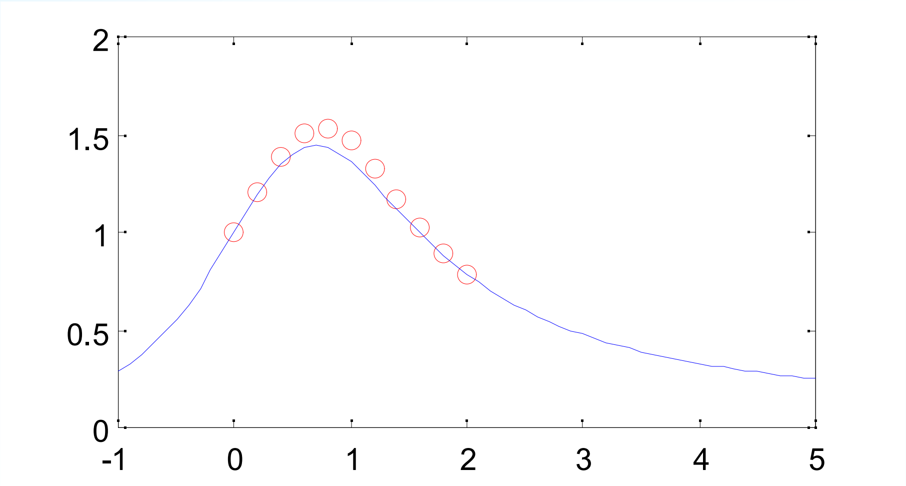
解: 记 $f(x, y) = y - xy^2$, $x_n = nh$ $(n = 0, 1, 2, \cdots, N)$

由Euler公式得:

$$y_{n+1} = y_n + h(y_n - x_n y_n^2) \quad (n = 0, 1, \cdots, N)$$

取步长 $h=2/10,\ 2/20,\ 2/30,\ 2/40$, 用Euler法求解的数值实验结果如下.

N	10	20	30	40
h	0.2	0.1	0.0667	0.05
误差	0.1059	0.0521	0.0342	0.0256



o —— 数值解

---- —— 准确解

解析解:

$$y(x)=\frac{1}{x-1+2e^{-x}}$$

用数值积分方法离散化常微分方程

$$y' = f(x, y) \quad \rightarrow \quad \int_{x_n}^{x_{n+1}} y'(x)dx = \int_{x_n}^{x_{n+1}} f(x, y(x))dx$$

$$y(x_{n+1}) - y(x_n) = \int_{x_n}^{x_{n+1}} f(x, y(x))dx$$

左矩形公式 $\int_{x_n}^{x_{n+1}} f(x, y(x))dx \approx hf(x_n, y_n)$

$$y_{n+1} - y_n = hf(x_n, y_n)$$

梯形公式:

$$\int_{x_n}^{x_{n+1}} f(x, y(x))dx \approx \frac{h}{2}[f(x_n, y_n) + f(x_{n+1}, y_{n+1})]$$

$$y_{n+1} - y_n = \frac{h}{2}[f(x_n, y_n) + f(x_{n+1}, y_{n+1})]$$

由梯形公式推出的预-校方法:

$$y_{n+1}-y_n=\frac{h}{2}[f(x_n,y_n)+f(x_{n+1},y_{n+1})]$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \tilde{y}_{n+1}=y_n+hf(x_n,y_n) \\ y_{n+1}=y_n+\dfrac{h}{2}[f(x_n,y_n)+f(x_{n+1},\tilde{y}_{n+1})] \end{cases}$$

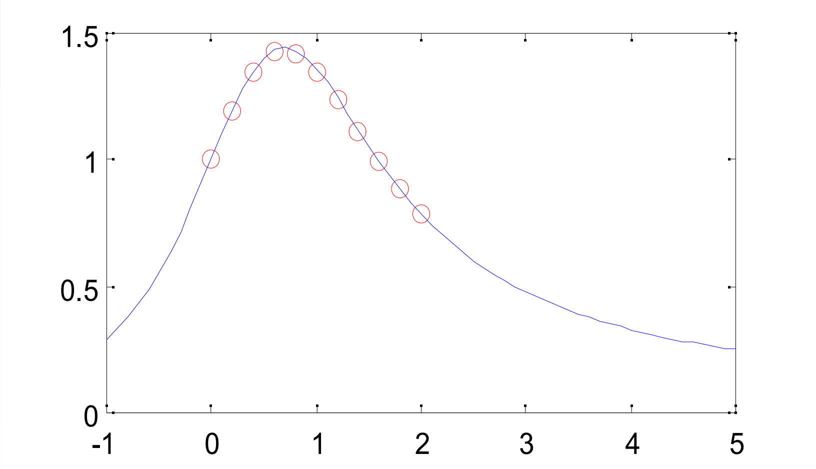
预-校方法又称为修正的Euler法,算法如下

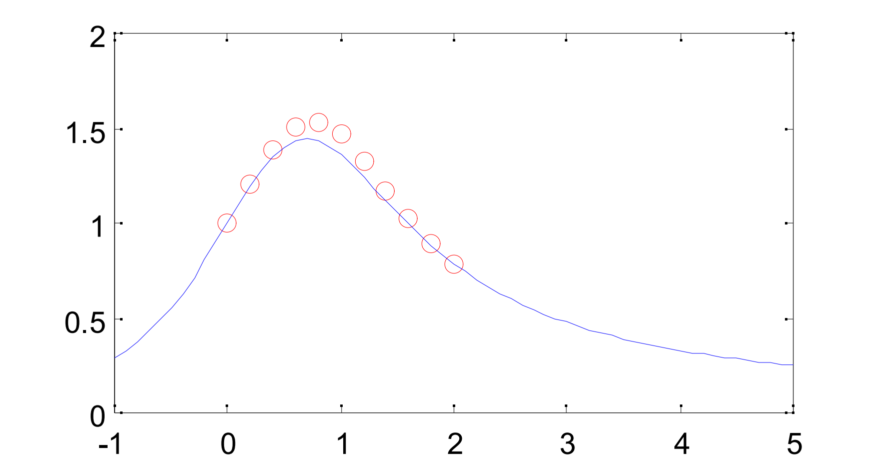
$$k_1=f(x_n,y_n),$$

$$k_2=f(x_{n+1},y_n+hk_1),$$

$$y_{n+1}=y_n+\frac{h}{2}[k_1+k_2]$$

n	10	20	30	40
h	0.2	0.1	0.0667	0.05
误差2	0.0123	0.0026	0.0011	5.9612e-004
误差1	0.1059	0.0521	0.0342	0.0256





预-校方法， h=0.2时

误差最大值：0.0123

欧拉方法， h=0.2时

误差最大值：0.1059

局部截断误差

设 $y_n = y(x_n)$, 称 $R_{n+1} = y(x_{n+1}) - y_{n+1}$ 为**局部截断误差**.

由泰勒公式

$$y(x_{n+1}) = y(x_n) + (x_{n+1} - x_n) y'(x_n) + \frac{(x_{n+1} - x_n)^2}{2} y''(\xi)$$

即

$$y(x_{n+1}) = y(x_n) + hf(x_n, y_n) + \frac{h^2}{2} y''(\xi)$$

Euler公式: $y_{n+1} = y_n + hf(x_n, y_n)$

Euler公式的局部截断误差

$$y(x_{n+1}) - y_{n+1} = y(x_n) - y_n + O(h^2) = O(h^2)$$

收敛性分析

$y(x_{n+1})-y_{n+1}=y(x_n)-y_n+O(h^2)$

定义：若一种数值方法对于任意固定的$x_n=x_0+nh$，当$h\to 0$（同时$n\to\infty$）时，有$y_n\to y(x_n)$，则称该方法是**收敛**的. 下面分析欧拉显式公式的**收敛性**：

$$y_{n+1}=y_n+hf(x_n,y_n)$$

设 $\overline{y}_{n+1}=y(x_n)+hf(x_n,y(x_n))$

单步计算的**局部截断**误差 $y(x_{n+1})-\overline{y}_{n+1}$ 为：

$$y(x_{n+1})-\overline{y}_{n+1}=\frac{h^2}{2}y''(\xi)$$

即存在常数C使 $e_{n+1}<Ch^2$.

考虑无 $y_n=y(x_n)$条件下的整体截断误差：

$$e_{n+1}=\left|y(x_{n+1})-y_{n+1}\right|$$

由于

$$\left|y(x_{n+1})-y_{n+1}\right|<\left|y(x_{n+1})-\overline{y}_{n+1}\right|+\left|\overline{y}_{n+1}-y_{n+1}\right|$$

而

$$\left|\overline{y}_{n+1}-y_{n+1}\right|=\left|y(x_n)-y_n+hf(x_n,y(x_n))-h(f(x_n,y_n))\right|$$

若常微分方程的右端项 f（x,y）关于y满足李普希茨条件，则有

$$\left|y_{n+1}-\overline{y}_{n+1}\right|\leq\left|y(x_n)-y_n\right|+hL\left|(y(x_n)-y_n)\right|$$

$$=(1+hL)\left|(y(x_n)-y_n)\right|$$

从而有

$$e_{n+1} \le (1+hL)e_n + Ch^2$$

递推得

$$e_n \le (1+hL)^n e_0 + \frac{Ch}{L}[(1+hL)^n - 1]$$

由于 $1+hL \le e^{hL}$ 则

$$(1+hL)^n \le e^{nhL}$$

则有

$$e_n \le e^{nhL} e_0 + \frac{C}{L}(e^{nhL} - 1)h$$

这样一来，若初值准确，则$h\to 0$时，$e_n \to 0$.

即欧拉公式是收敛的.

收敛阶分析

n	10	20	30	40
h	0.2	0.1	0.0667	0.05
误差2	0.0123	0.0026	0.0011	5.9612e-004
误差1	0.1059	0.0521	0.0342	0.0256

定理1 设 f 为李普希茨连续，L为常数，并假定对于某些$T>t_0$，解 $y\in C^2[t_0,T]$,则有

$$\max_{t_k\le T}\left|y(t_k)-y_k\right|\le C_0\left|y(t_0)-y_0\right|+Ch\left\|y''\right\|_{\infty,[t_0,T]}$$

其中 $C_0=e^{L(T-t_0)},C=\dfrac{e^{L(T-t_0)}-1}{2L}.$

收敛阶分析

定理1 设 f 为李普希茨连续，L为常数，并假定对于某些$T>t_0$，解 $y\in C^2[t_0,T]$,则有

$$\max_{t_k\le T}\left|y(t_k)-y_k\right|\le C_0\left|y(t_0)-y_0\right|+Ch\left\|y''\right\|_{\infty,[t_0,T]}$$

其中 $C_0=e^{L(T-t_0)},C=\dfrac{e^{L(T-t_0)}-1}{2L}.$

分析： 利用Talor公式和欧拉公式，我们有

$$y(t_{n+1})=y(t_n)+hf(t_n,y(t_n))+\frac{1}{2}h^2y''(\theta_n)$$

$$y_{n+1}=y_n+hf(t_n,y_n)$$

将上面两者相减，得到：

$$y(t_{n+1})-y_{n+1}=y(t_n)-y_n$$

$$+hf(t_n,y(t_n))-hf(t_n,y_n)+\frac{1}{2}h^2y''(\theta_n)$$

将上式取绝对值并应用f的李普希茨连续性得到

$$|y(t_{n+1})-y_{n+1}|\le|y(t_n)-y_n|+Lh|y(t_n)-y_n|+\frac{1}{2}h^2|y''(\theta_n)|$$

记

$$e_n=|y(t_n)-y_n|\ ,\ e_{n+1}=|y(t_{n+1})-y_{n+1}|$$

则得到

$$e_{n+1}\le\gamma e_n+R_n$$

其中 $\gamma=1+Lh\ ,\ R_n=\frac{1}{2}h^2|y''(\theta_n)|$

递推有

$$\gamma = 1 + Lh\ ,\quad R_n = \frac{1}{2}h^2\left|y''(\theta_n)\right|$$

$$e_1 \le \gamma e_0 + R_0,$$

$$e_2 \le \gamma e_1 + R_1 \le \gamma^2 e_0 + \gamma R_0 + R_1,$$

$$e_3 \le \gamma e_2 + R_2 \le \gamma^3 e_0 + \gamma^2 R_0 + \gamma R_1 + R_2 \ldots$$

从而有

$$e_n \le \gamma^n e_0 + \frac{1}{2}h^2 \sum_{k=0}^{n-1} \gamma^k \left|y''(\theta_{n-1-k})\right|.$$

进一步有

$$e_n \le \gamma^n e_0 + \left(\frac{1}{2}h^2 \left\|y''\right\|_{\infty,[t_0,T]}\right)\left(\sum_{k=0}^{n-1}\gamma^k\right).$$

这对e_n进行求和，得到

$$e_n \le \gamma^n e_0 + \frac{1}{2} h^2 \|y''\|_{\infty,[t_0,T]} \frac{\gamma^n - 1}{\gamma - 1}$$

从而有

$$e_n \le \gamma^n e_0 + \frac{\gamma^n - 1}{2L} h \|y''\|_{\infty,[t_0,T]}.$$

由e^x的泰勒公式有

$$(1+x)^n \le e^{nx}, \quad x > -1$$

从而有

$$\gamma^n = (1+Lh)^n \le e^{nLh} = e^{L(nh)} = e^{L(t_n - t_0)} \le e^{L(T-t_0)}.$$

最后得到

$$\max_{t_k \le T} \left| y(t_k) - y_k \right| \le C_0 \left| y(t_0) - y_0 \right| + Ch \|y''\|_{\infty,[t_0,T]}$$

Euler公式的局部截断误差

$$y(x_{n+1}) - y_{n+1} = y(x_n) - y_n + O(h^2) = O(h^2)$$

$$\max_{t_k \le T} \left| y(t_k) - y_k \right| \le C_0 \left| y(t_0) - y_0 \right| + Ch \left\| y'' \right\|_{\infty, [t_0, T]}$$

Euler公式的局部截断误差记为：$O(h^2)$，称Euler公式具有1阶精度。

若局部截断误差为：$O(h^{p+1})$则称显式单步法具有 p 阶精度 。

结论： 修正的Euler法具有2阶精度。

若局部截断误差为：$O(h^{p+1})$则称显式单步法具有 p 阶精度 。

例 3 证明修正的Euler法具有2阶精度

$$y_{n+1} = y_n + \frac{h}{2}[f(x_n, y_n) + f(x_{n+1}, \tilde{y}_{n+1})]$$

将预测公式 $\tilde{y}_{n+1} = y_n + hf(x_n, y_n)$ 代入

得 $y_{n+1} = y_n + 0.5h[f(x_n, y_n) + f(x_{n+1}, \underline{y_n + hf(x_n, y_n)})]$

$$y_{n+1} = y_n + 0.5h[f(x_n,y_n)+\underline{f(x_{n+1}, y_n+hf(x_n, y_n))}]$$

$$f(x_{n+1}, y_n+hf(x_n, y_n))= f(x_n+h, y_n+hf(x_n, y_n))$$

$$= \underline{f(x_n, y_n)}+h[f_x']_n + hf(x_n,y_n)\ [f_y']_n + O(h^2)$$

$$y' = f(x, y)$$

$$y'(x_n) = f(x_n, y_n)$$

$$\Rightarrow \quad y''(x_n) = \frac{d}{dx} f(x_n, y_n)$$

$$0.5h[\underline{f(x_n,y_n)}+f(x_{n+1}, y_n+hf(x_n, y_n))]$$

$$=\underline{hf(x_n,y_n)}+0.5h^2[f_x']_n+0.5h^2 f(x_n,y_n)[f_y']_n+ O(h^3)$$

$$\boxed{\begin{cases} \dfrac{dy}{dx} = f(x, y),\ x > x_0 \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}}$$

$$y_{n+1} = y_n + \underline{0.5h[f(x_n,y_n)+f(x_{n+1}, y_n+hf(x_n, y_n))]}$$

$$0.5h[f(x_n,y_n)+f(x_{n+1}, y_n+hf(x_n, y_n))]$$

$$=hf(x_n,y_n)+0.5h^2[f_x']_n+0.5h^2f(x_n,y_n)[f_y']_n+ O(h^3)$$

$$=hy'(x_n)+0.5h^2y''(x_n)+0.5h^2y'(x_n)\ [f_y']_n+ O(h^3)$$

$$y_{n+1} = y_n + hy'(x_n)+0.5h^2(y''(x_n)+y'(x_n)[f_y']_n)+O(h^3)$$

局部截断误差：$y(x_{n+1}) - y_{n+1} = O(h^3)$

故修正的Euler法具有2阶精度。

Range-Kutta公式

改进欧拉法可以写成

$$\begin{cases} y_{n+1} = y_n + \dfrac{h}{2}(k_1 + k_2) \\ k_1 = f(x_n, y_n) \\ k_2 = f(x_n + h, y_n + hk_1) \end{cases}$$

取如下的线性组合形式:

$$y_{n+1} = y_n + h\sum_{i=1}^{\gamma} w_i k_i$$

其中

$$k_i = f\left(x_n + b_i h, y_n + h\sum_{j=1}^{i-1} a_{ij} k_j\right)$$

即

$$\begin{cases} k_1 = f(x_n, y_n) \\ k_2 = f(x_n + b_2 h, y_n + h a_{21} k_1) \\ k_3 = f(x_n + b_3 h, y a_{31} k_1 + h a_{32} k_2) \\ \cdots\cdots \end{cases}$$

$$y_{n+1} = y_n + h\sum_{i=1}^{\gamma} w_i k_i \qquad (*)$$

- 当 $\gamma = 1$时，就是欧拉公式.
- 当 $\gamma = 2$时:

将k_1, k_2在同一点（x_n, y_n）泰勒展开

$$k_1 = f(x_n, y_n)$$

$$k_2 = f(x_n + b_2 h, y_n + h a_{21} k_1)$$

$$= f(x_n, y_n) + h\left(b_2 \cdot \left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{(x_n, y_n)} + a_{21} k_1 \cdot \left.\frac{\partial f}{\partial y}\right|_{(x_n, y_n)} \right) + O(h^2)$$

将k_1,k_2的展开式代入(*)式，有:

$$y_{n+1}=y_n+hw_1k_1+hw_2k_2$$

$$y_{n+1}=y_n+hw_1f(x_n,y_n)$$
$$+hw_2\left\{f(x_n,y_n)+h\left(b_2\cdot\frac{\partial f}{\partial x}\bigg|_{(x_n,y_n)}+a_{21}f\cdot\frac{\partial f}{\partial y}\bigg|_{(x_n,y_n)}\right)+O(h^2)\right\}$$

$y(x_{n+1})$在x_n点的泰勒展开式为：

$$y(x_{n+1})=y(x_n)+hy'(x_n)+\frac{h^2}{2}y''(x_n)+\ldots.$$

$$y'=f\equiv f^{(0)},\ y''=\frac{\partial f^{(0)}}{\partial x}+f\frac{\partial f^{(0)}}{\partial y}\equiv f^{(1)}$$

$$\frac{dy}{dx}=f(x,y)$$

$$y'''=\frac{\partial f^{(1)}}{\partial x}+f\frac{\partial f^{(1)}}{\partial y}\equiv f^{(2)}$$

$$y_{n+1} = y_n + hw_1k_1 + hw_2k_2$$

$$y_{n+1} = y_n + hw_1 f(x_n, y_n) + hw_2\left\{ f(x_n, y_n) + h\left(b_2 \cdot \left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{(x_n, y_n)} + a_{21} f \cdot \left.\frac{\partial f}{\partial y}\right|_{(x_n, y_n)} \right) + O(h^2) \right\}$$

$y(x_{n+1})$在x_n点的泰勒展开式为：

$$y(x_n + h) = y(x_n) + hf(x_n, y_n) + \frac{h^2}{2}\left(\left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{(x_n, y_n)} + f(x_n, y_n) \cdot \left.\frac{\partial f}{\partial y}\right|_{(x_n, y_n)} \right) + O(h^3)$$

逐项比较，令h，h^2项的系数相等，便得到

$$w_1 + w_2 = 1, w_2 b_2 = \frac{1}{2}, w_2 a_{21} = \frac{1}{2}.$$

如取$b_2 = 1$，则$w_1 = w_2 = 1/2$，$a_{21} = 1$，这时

$$\boxed{y_{n+1} = y_n + hw_1 k_1 + hw_2 k_2}$$

变为：

$$y_{n+1} = y_n + h\frac{1}{2}k_1 + h\frac{1}{2}k_2$$

$$= y_n + \frac{h}{2}\left(k_1 + k_2\right).$$

正好就是改进的欧拉方法.

- 当 $\gamma=3$时:

$$y_{n+1}=y_n+hw_1k_1+hw_2k_2+hw_3k_3$$

将k_1, k_2, k_3在同一点（x_n, y_n）泰勒展开，再比较有:

$$\begin{cases} w_1+w_2+w_3=1 \\ b_2w_2+b_3w_3=\dfrac{1}{2} \\ a_{21}w_2(a_{31}+a_{32})w_3=\dfrac{1}{2} \\ b_2^2w_2+b_3^2w_3=\dfrac{1}{3} \end{cases} \qquad \begin{cases} b_2a_{21}w_2+b_2(a_{31}+a_{32})w_3=\dfrac{1}{3} \\ a_{21}^2w_2+(a_{31}+a_{32})^2w_3=\dfrac{1}{3} \\ b_2a_{32}w_2=\dfrac{1}{6} \\ a_{21}a_{32}w_3=\dfrac{1}{6} \end{cases}$$

● 当 $\gamma = 3$时:

$$y_{n+1} = y_n + hw_1k_1 + hw_2k_2 + + hw_3k_3$$

比较简单的一组解为:

$$\begin{cases} b_2 = \dfrac{1}{2}, b_3 = 1, \\ a_{21} = \dfrac{1}{2}, a_{31} = -1, a_{32} = 2, \\ w_1 = \dfrac{1}{6}, w_2 = \dfrac{4}{6}, w_3 = \dfrac{1}{6} \end{cases} \qquad \begin{cases} y_{n+1} = y_n + \dfrac{h}{6}(k_1 + 4k_2 + k_3) \\ k_1 = f(x_n, y_n) \\ k_2 = f\left(x_n + \dfrac{h}{2}, y_n + \dfrac{k_1}{2}\right) \\ k_3 = f(x_n + h, y_n - k_1 + 2k_2) \end{cases}$$

Range-Kutta公式

三阶Range-Kutta公式一般形式

$$y_{n+1}=y_n+h[k_1+4k_2+k_3]/6$$

$$k_1=f(x_n,y_n),$$

$$k_2=f(x_n+0.5h,\ y_n+0.5hk_1)$$

$$k_3=f(x_n+h,\ y_n-hk_1+2hk_2)$$

四阶Range-Kutta公式一般形式

$$y_{n+1}=y_n+h[k_1+2k_2+2k_3+k_4]/6$$

$$k_1=f(x_n,y_n),$$

$$k_2=f(x_n+0.5h,\ y_n+0.5hk_1)$$

$$k_3=f(x_n+0.5h,\ y_n+0.5hk_2),$$

$$k_4=f(x_n+h,\ y_n+hk_3)$$

例4 $\begin{cases} \dfrac{dy}{dx} = y - xy^2, & 0 < x \le 2 \\ y(0) = 1 \end{cases}$

$$y(x) = \frac{1}{x - 1 + 2e^{-x}}$$

数值实验:几种不同求数值解公式的误差比较

n	10	20	30	40
h	0.2	0.1	0.0667	0.05
RK4	6.862e-005	3.747e-006	7.071e-007	2.186e-007
RK3	0.0012	1.529e-004	4.517e-005	1.906e-005
RK2	0.0123	0.0026	0.0011	5.9612e-004
Euler	0.1059	0.0521	0.0342	0.0256