§1 特征值的估计

程光辉

2020 年 4 月 28 日

1　特征值界的估计

定理 1. *(*Schur *不等式) 设* $\boldsymbol{A}=(a_{ij})\in \mathbf{C}^{n\times n}$ *的特征值为* $\boldsymbol{\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n}$*，则*

$$\sum_{i=1}^{n}|\boldsymbol{\lambda}_i|^2\leq\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}|a_{ij}|^2=\|\boldsymbol{A}\|_F^2,$$

且等号成立当且仅当 $\boldsymbol{A}$ *为正规矩阵.*

证明： 由 **Schur** 分解知，存在上三角矩阵 $\boldsymbol{R}=(r_{ij})$ 和酉矩阵 $\boldsymbol{U}$，使得 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{URU^H}$. 又由 **Frobenius** 范数的酉不变性，知

$$\sum_{i=1}^{n}|\boldsymbol{\lambda}_i|^2=\sum_{i=1}^{n}|r_{ii}|^2\leq\sum_{i=1}^{n}|r_{ii}|^2+\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=i+1}^{n}|r_{ij}|^2=\|\boldsymbol{R}\|_F^2=\|\boldsymbol{A}\|_F^2,$$

证毕.

令

$$\boldsymbol{B}=(b_{ij})=\frac{1}{2}\left(\boldsymbol{A^H}+\boldsymbol{A}\right),\quad \boldsymbol{C}=(c_{ij})=\frac{1}{2}\left(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{A^H}\right),$$

$\boldsymbol{A,B,C}$ 的特征值分别为 $\{\boldsymbol{\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n}\},\{\boldsymbol{\mu_1,\mu_2,\cdots,\mu_n}\},\{i\gamma_1,i\gamma_2,\cdots,i\gamma_n\}$，且满足

$$\begin{aligned}|\boldsymbol{\lambda_1}|\geq|\boldsymbol{\lambda_2}|\geq\cdots\geq|\boldsymbol{\lambda}_n|,\\ \boldsymbol{\mu_1}\geq\boldsymbol{\mu_2}\geq\cdots\geq\boldsymbol{\mu}_n,\\ \gamma_1\geq\gamma_2\geq\cdots\geq\gamma_n.\end{aligned}$$

定理 2. *(*Hirsch*) 设* $\boldsymbol{A}\in\mathbf{C}^{n\times n}$ *的特征值为* $\boldsymbol{\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n}$*，则*

(1) $|\boldsymbol{\lambda}_i|\leq n\max\limits_{i,j}\{|a_{ij}|\}$,

(2) $|\mathbf{Re}\boldsymbol{\lambda}_i|\leq n\max\limits_{i,j}\{|b_{ij}|\}$,

(3) $|\mathbf{Im}\,\boldsymbol{\lambda}_i| \le n \max\limits_{i,j}\{|c_{ij}|\}$.

证明：(1) 由

$$|\boldsymbol{\lambda}_i|^2 \le \sum_{i=1}^{n} |\boldsymbol{\lambda}_i|^2 \le \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} |a_{ij}|^2 \le n^2 \max_{i,j}\left\{|a_{ij}|^2\right\},$$

得 $|\boldsymbol{\lambda}_i| \le n \max\limits_{i,j}\{|a_{ij}|\}$.

(2)(3) 因为 $\boldsymbol{A} \in \mathbf{C}^{n\times n}$，存在上三角矩阵 $\boldsymbol{R}$ 和酉矩阵 $\boldsymbol{U}$，使得 $\boldsymbol{U^H A U} = \boldsymbol{R}$，$\boldsymbol{U^H A^H U} = \boldsymbol{R^H}$，那么

$$\begin{cases} \boldsymbol{U^H B U} = \frac{1}{2}\boldsymbol{U^H}\left(\boldsymbol{A^H}+\boldsymbol{A}\right)\boldsymbol{U} = \frac{1}{2}\left(\boldsymbol{R^H}+\boldsymbol{R}\right) \\ \boldsymbol{U^H C U} = \frac{1}{2}\boldsymbol{U^H}\left(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{A^H}\right)\boldsymbol{U} = \frac{1}{2}\left(\boldsymbol{R}-\boldsymbol{R^H}\right) \end{cases},$$

由 **Frobenius** 范数酉的不变性，可得

$$\begin{cases} \sum\limits_{i=1}^{n}\left|\frac{\lambda_i+\bar{\lambda}_i}{2}\right|^2 + \sum\limits_{j=1}^{n}\sum\limits_{i=1}^{j-1}\frac{|r_{ij}|^2}{2} = \sum\limits_{i=1}^{n}\sum\limits_{j=1}^{n}|b_{ij}|^2 \\ \sum\limits_{i=1}^{n}\left|\frac{\lambda_i-\bar{\lambda}_i}{2}\right|^2 + \sum\limits_{j=1}^{n}\sum\limits_{i=1}^{j-1}\frac{|r_{ij}|^2}{2} = \sum\limits_{i=1}^{n}\sum\limits_{j=1}^{n}|c_{ij}|^2 \end{cases},$$

所以有

$$\begin{cases} |\mathbf{Re}\,\boldsymbol{\lambda}_i|^2 \le \sum\limits_{i=1}^{n}|\mathbf{Re}\,\boldsymbol{\lambda}_i|^2 \le \sum\limits_{i=1}^{n}\sum\limits_{j=1}^{n}|b_{ij}|^2 \le n^2\max\limits_{i,j}\{|b_{ij}|^2\} \\ |\mathbf{Im}\,\boldsymbol{\lambda}_i|^2 \le \sum\limits_{i=1}^{n}|\mathbf{Im}\,\boldsymbol{\lambda}_i|^2 \le \sum\limits_{i=1}^{n}\sum\limits_{j=1}^{n}|c_{ij}|^2 \le n^2\max\limits_{i,j}\{|c_{ij}|^2\} \end{cases},$$

因此，

$$\begin{cases} |\,\mathbf{Re}\,\boldsymbol{\lambda}_i| \le n\max\limits_{i,j}\{|b_{ij}|\} \\ |\,\mathbf{Im}\,\boldsymbol{\lambda}_i| \le n\max\limits_{i,j}\{|c_{ij}|\} \end{cases}$$

证毕.

另证：$\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{\lambda x}$，$\|\boldsymbol{x}\|_2 = 1$，则 $\mathbf{Re}\,\boldsymbol{\lambda} = \boldsymbol{x^H B x}$，由于 $\boldsymbol{B}$ 为 **Hermitian** 矩阵，酉相似于对角矩阵，即有

$$|\,\mathbf{Re}\,\boldsymbol{\lambda}| = |\boldsymbol{x^H B x}| \le \max_i\{|\mu_i|\} \le n\max_{i,j}\{|b_{ij}|\}.$$

定理 3. *(Bendixson)* 设 $\boldsymbol{A} \in \mathbf{R}^{n\times n}$，则 $\boldsymbol{A}$ 的任一特征值 $\boldsymbol{\lambda}_i$ 满足

$$|\mathbf{Im}\,\boldsymbol{\lambda}_i| \le \sqrt{\frac{n(n-1)}{2}}\max_{i,j}\{|c_{ij}|\}.$$

证明：因为

$$\sum_{i=1}^{n}|\mathbf{Im}\,\boldsymbol{\lambda}_i|^2 \le \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}|c_{ij}|^2 = \sum_{\substack{i,j\\ i\ne j}}|c_{ij}|^2 \le n(n-1)\max_{i,j}\{|c_{ij}|^2\}.$$

令互为共轭的特征值一共 s 对，再根据实矩阵复特征值出现一定是成对 (互为共轭)，有

$$2\left|\mathrm{Im}\,\lambda_i\right|^2 \leq 2\sum_{i=1}^{s}\left|\mathrm{Im}\,\lambda_i\right|^2 = \sum_{i=1}^{n}\left|\mathrm{Im}\,\lambda_i\right|^2 \leq n(n-1)\max_{i,j}\{\left|c_{ij}\right|^2\},$$

整理即可得证.

定理 4. 设 $A \in \mathbf{C}^{n\times n}, B, C, \lambda_i, \mu_i, \gamma_i$ 定义同上, 则

$$\mu_n \leq \mathrm{Re}\lambda_i \leq \mu_1, \gamma_n \leq \mathrm{Im}\lambda_i \leq \gamma_1.$$

证明： 由 B 为正规矩阵，存在酉矩阵 U 使得

$$U^H B U = \mathrm{diag}\left(\mu_1, \mu_2, \cdots, \mu_n\right) = D.$$

因为 $Ax = \lambda_i x \,(\|x\|_2 = 1)$，$(x, Ax) = (x, \lambda_i x) = \lambda_i(x, x) = \lambda_i$，有 $x^H A x = \lambda_i$ 和 $x^H A^H x = \bar{\lambda}_i$.

于是有

$$\mathrm{Re}\,\lambda_i = \left(x, \frac{A^H + A}{2}x\right) = (x, Bx) = \left(x, UDU^H x\right)$$

$$= x^H UDU^H x = y^H D y = \sum_{i=1}^{n}\mu_i\left|y_i\right|^2,$$

其中 $y = U^H x$，$\|y\|_2 = \|x\|_2 = 1$. 进而可得

$$\sum_{i=1}^{n}\mu_n\left|y_i\right|^2 \leq \mathrm{Re}\,\lambda_i \leq \sum_{i=1}^{n}\mu_1\left|y_i\right|^2,$$

故

$$\mu_n \leq \mathrm{Re}\lambda_i \leq \mu_1.$$

同理，可证 $\gamma_n \leq \mathrm{Im}\lambda_i \leq \gamma_1$.

定理 5. *(Browne)* 设 $A \in \mathbf{C}^{n\times n}$ 的特征值为 $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$，奇异值为 $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \cdots \geq \sigma_n$，则

$$\sigma_n \leq |\lambda_i| \leq \sigma_1, \quad (i = 1, 2, \cdots, n).$$

证明： 因 $A^H A$ 为 Hermitian 矩阵，存在酉矩阵 U 使得

$$U^H A^H A U = \mathrm{diag}\left(\sigma_1^2, \sigma_2^2, \cdots, \sigma_n^2\right) = D.$$

令 $Ax = \lambda_i x$，$(\|x\|_2 = 1)$，则

$$x^H A^H = \bar{\lambda}_i x^H,$$

进而

$$\boldsymbol{x}^H\boldsymbol{A}^H\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=|\boldsymbol{\lambda}_i|^2\,\boldsymbol{x}^H\boldsymbol{x}=|\boldsymbol{\lambda}_i|^2\,.$$

又因为

$$|\boldsymbol{\lambda}_i|^2=\boldsymbol{x}^H\boldsymbol{A}^H\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{x}^H\boldsymbol{U}\boldsymbol{D}\boldsymbol{U}^H\boldsymbol{x}=\sum_{i=1}^{n}\sigma_i^2|y_i|^2,$$

其中 $\boldsymbol{y}=\boldsymbol{U}^H\boldsymbol{x}=(y_1,\cdots,y_n)^T$，由范数的酉不变性知 $\|\boldsymbol{y}\|_2=\|\boldsymbol{x}\|_2=1$，因此

$$\sigma_n^2=\sigma_n^2\sum_{i=1}^{n}|y_i|^2\le|\boldsymbol{\lambda}_i|^2\le\sigma_1^2\sum_{i=1}^{n}|y_i|^2=\sigma_1^2,$$

两边开方即得证.

定理 6. *(Hadamard 不等式)* 设 $\boldsymbol{A}=(\boldsymbol{a}_1,\cdots,\boldsymbol{a}_n)\in\mathbf{C}^{n\times n}$, 则

$$\prod_{i=1}^{n}|\boldsymbol{\lambda}_i(\boldsymbol{A})|=|\det\boldsymbol{A}|\le\left[\prod_{j=1}^{n}\left(\sum_{i=1}^{n}|a_{ij}|^2\right)\right]^{1/2}=\prod_{j=1}^{n}\|\boldsymbol{a}_j\|_2,$$

且等号成立当且仅当 $\boldsymbol{A}$ 的某一列全为 $\boldsymbol{O}$, 或 $\boldsymbol{A}$ 的列向量彼此正交.

证明： 1) 设 $\boldsymbol{A}=(\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\cdots,\boldsymbol{a}_n)$，若 $\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\cdots,\boldsymbol{a}_n$ 线性相关，则 $|\det\boldsymbol{A}|=0$，则成立.

2) 若 $\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\cdots,\boldsymbol{a}_n$ 线性无关，对其正交化有

$$\left.\begin{aligned}&\boldsymbol{a}_1=\boldsymbol{b}_1\\&\boldsymbol{a}_2=\boldsymbol{b}_2+p_{12}\boldsymbol{b}_1\\&\boldsymbol{a}_3=\boldsymbol{b}_3+p_{13}\boldsymbol{b}_1+p_{23}\boldsymbol{b}_2\\&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\&\boldsymbol{a}_n=\boldsymbol{b}_n+p_{1n}\boldsymbol{b}_1+\cdots+p_{n-1,n}\boldsymbol{b}_{n-1}\end{aligned}\right\},$$

即

$$\boldsymbol{A}=(\boldsymbol{b}_1,\boldsymbol{b}_2,\cdots,\boldsymbol{b}_n)\begin{bmatrix}1&p_{12}&\cdots&p_{1n}\\0&1&\cdots&p_{2n}\\\vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\0&0&\cdots&1\end{bmatrix},$$

两边取行列式有

$$\det\boldsymbol{A}=\det(\boldsymbol{b}_1,\boldsymbol{b}_2,\cdots,\boldsymbol{b}_n)=\det\boldsymbol{B},$$

进而

$$\begin{aligned}\|\boldsymbol{a}_i\|_2^2&=\|\boldsymbol{b}_i+p_{1i}\boldsymbol{b}_1+\cdots+p_{i-1,i}\boldsymbol{b}_{i-1}\|_2^2\\&=\|\boldsymbol{b}_i\|_2^2+|p_{i1}|\,\|\boldsymbol{b}_1\|_2^2+\cdots+|p_{i,i-1}|\,\||\boldsymbol{b}_{i-1}\|_2^2\\&\ge\|\boldsymbol{b}_i\|_2^2\,.\end{aligned}$$

又

$$|\det \boldsymbol{B}|^2 = \det \boldsymbol{B}^H \cdot \det \boldsymbol{B} = \det \boldsymbol{B}^H\boldsymbol{B} = \prod_{j=1}^{n} \|\boldsymbol{b}_j\|_2^2 \leq \left(\prod_{j=1}^{n} \|\boldsymbol{a}_j\|_2\right)^2,$$

故

$$\prod_{i=1}^{n} |\boldsymbol{\lambda}_i(\boldsymbol{A})| = |\det \boldsymbol{A}| \leq \left[\prod_{j=1}^{n}\left(\sum_{i=1}^{n} |\boldsymbol{a}_{ij}|^2\right)\right]^{1/2} = \prod_{j=1}^{n} \|\boldsymbol{a}_j\|_2.$$

另解: 若 $\boldsymbol{A}$ 满秩, 则存在酉矩阵 $\boldsymbol{U}$ 和正线上三角矩阵 $\boldsymbol{R}$, 使得 $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{U}\boldsymbol{R}$. 因 Frobenius 范数的酉不变性，知 $\|\boldsymbol{a}_i\|_2 = \|\boldsymbol{r}_i\|_2$，$i = 1, 2, \cdots, n$. 又因

$$|\det \boldsymbol{A}| = |\det \boldsymbol{U}\boldsymbol{R}| = |\det \boldsymbol{U}| \cdot |\det \boldsymbol{R}| = |\det \boldsymbol{R}| \leq \prod_{j=1}^{n} \|\boldsymbol{r}_j\|_2 = \prod_{j=1}^{n} \|\boldsymbol{a}_j\|_2,$$

故

$$\prod_{i=1}^{n} |\boldsymbol{\lambda}_i(\boldsymbol{A})| = |\det \boldsymbol{A}| \leq \left[\prod_{j=1}^{n}\left(\sum_{i=1}^{n} |\boldsymbol{a}_{ij}|^2\right)\right]^{1/2} = \prod_{j=1}^{n} \|\boldsymbol{a}_j\|_2.$$