电子科技大学研究生试卷

（考试时间：___至___，共 2 小时）

课程名称 矩阵理论 教师________ 学时 60 学分 3

教学方式 课堂讲授 考核日期 2019 年 1 月 2 日 成绩________

考核方式：________（学生填写）

一、选择题（每题 5 分，共 20 分）

1.设子空间 $U=\left\{(x,y,z)^T\in R^3 \mid x+y+z=0\right\}, W=\left\{(x,y,z)^T\in R^3 \mid x=y=\frac{z}{-2}\right\}$，

则 $\dim(U+W)-\dim U=$（ ）

A、0 B、1 C、2 D、3

2.下列选项**错误**的是（ ）

$|\lambda|\le\|A\|$

A、 $A^H=A\in C^{n\times n}$，则 $\|A\|_1=\|A\|_\infty$

B、 $A\in C^{n\times n}$ 为可逆矩阵，λ 为其任一特征值，$\|\bullet\|$ 为任意的算子范数，则 $|\lambda|\ge\frac{1}{\|A^{-1}\|}$

C、 $A=E-2uu^H, u\in C^n$，且 $\|u\|_2=1$，则 $\|A\|_2=\sqrt{n}$

D、设 $A\in C^{m\times n}$，$X\in C^{n\times r}$，$B\in C^{r\times s}$，则 $\mathrm{Vec}(AXB)=\left(B^T\otimes A\right)\mathrm{Vec}\,X$

3. 设 A 为 n 阶可逆矩阵，r(A) 是其谱半径，$\|\bullet\|$ 是任意算子范数，则必有（ ）

A、$\|A^{-1}\|=1/\|A\|$ B、$\|A^5\|\le\|A\|^5$ C、$\|A^5\|\ge\|A\|^5$ D、$\|A\|\ge r\left(A^HA\right)$

4. 下列选项**错误**的是（ ）

A、$A\in C^{n\times n}$ 且 $\|A\|_{m_\infty}<1$，则 r(A)<1

B、$A\in C_r^{n\times n}$ 为正规矩阵，$\lambda_i(i=1,2\cdots r)$ 为其非零特征值，则 $\|A^+\|_2=\frac{1}{\min_{1\le i\le r}|\lambda_i|}$

C、$A\in C^{n\times n}$，λ 为其任一特征值，$\|\bullet\|$ 为任意算子范数，则 $|\lambda|\le\sqrt[m]{\|A^m\|}$

D、$\sigma_1 \ge \sigma_2 \ge \cdots \ge \sigma_r$ 为 A 的所有正奇异值，则 $\|A\|_F^2 = \sum_{i=1}^{r} \sigma_i^2$

5. 设 $M = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$,则不存在(　　　)

A、奇异值分解　B、最大秩分解　C、QR 分解（其中 Q 是正交矩阵）D、谱分解

二、判断题（20 分）

6. $A \in C^{n\times n}$ 为酉矩阵,则 $\|A\|_{m_2}^2 = n$。(　　)

7. $A \in C^{n\times n}$,. 则 $\|A\|_1 \bullet \|A\|_\infty < \|A\|_2^2$　　(　　)

8. 设 $A \in C^{n\times n}$,则 $\|e^A\| > e^{\|A\|}$。(　　)

9. 设 $A \in C_m^{m\times n}, B \in C_m^{n\times m}$，则 $(AB)^+ = B^+ A^+$。(　　)

10. 若 rank(A) 表示矩阵 A 的秩,R(A) 表示矩阵 A 的值域. 如果 rank(A)=rank(AB), 则 R(A)=R(AB).(　　)

三（10 分）设 $A \in C^{n\times n}$ 可逆，$B \in C^{n\times n}$ 不可逆，$\|\cdot\|$ 为相容矩阵范数，证明：$\|A-B\|_2 \ge \dfrac{1}{\|A^{-1}\|}$

四（10 分）设 $A \in C_r^{m\times n}$ 的奇异值分解为 $A = U\begin{pmatrix} D & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}V^H$，其中 $D = \mathrm{diag}(\sigma_1, \sigma_2, \cdots, \sigma_r)$。

证明: V 的列向量是 $A^H A$ 的特征向量.

五（10 分）$A \in C^{n\times n}$ 且 $\lambda_i (i = 1, 2, \cdots, n)$ 为其特征值,证明: $\|A\|_F^2 = \sum_{i=1}^{n} |\lambda_i|^2$ 的充要条件是 A 为正规矩阵.

六（10 分）设 $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$,求 $\cos A$.

七（15 分）设 $A=\begin{pmatrix}1&1&0&2&2\\2&2&3&2&2\\1&1&1&1&1\end{pmatrix}, b=\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}$.(1) 求 A 的最大秩分解；(2) 求 A^{+}；(3)用广义逆矩阵方法判断线性方程组 $Ax=b$ 是否有解；(4) 线性方程组 $Ax=b$ 如有解,求通解和最小范数解;如无解,求最小二乘解和最佳逼近解.

八（5 分）设 $A^2=A$, E 为单位矩阵且 $A=BC$ 是 A 的最大秩分解,证: $CB=E$.

矩阵理论2017-2018学年期末考试试题

一、选择题(每题5分，共25分)

1.下列命题错误的是(　)

(A)$(A\otimes B)^H=A^H\otimes B^H$

(B)若$A\in C^{n\times n}$，且$A^2=A$，则$rank(A)=tr(A)$

(C)设$\mu\in C^n$且$\mu^H\mu=1$，令$H=E-2\mu\mu^H$，则H的谱半径为1

(D)设V_1,V_2为空间V的任意子空间，则$dim(V_1+V_2)=dim(V_1)+dim(V_2)$

2.下列命题错误的是(　)

(A)若$A^H=A,A^2=A$，则$A^+=A$

(B)若$AA^H=A^HA$,则$(A^m)^+=(A^+)^m$

(C)若$x\in C^n$，则$\|x\|_\infty\le\|x\|_2\le\|x\|_1$

(D)设$A,B\in C^{n\times n}$的奇异值分别为$\sigma_1\ge\sigma_2\ge\cdots\ge\sigma_n>0$，$\sigma_1'\ge\sigma_2'\ge\cdots\ge\sigma_n'>0$，如果$\sigma_i>\sigma_i'(i=1,2,\cdots,n)$，则$\|A^+\|_2>\|B^+\|_2$

3.下列说法正确的是(　)

(A)若$A=\begin{bmatrix}\pi&0&0\\0&\pi&1\\0&0&\pi\end{bmatrix}$，则$sinA=\begin{bmatrix}0&0&0\\0&0&sin1\\0&0&0\end{bmatrix}$

(B)若A为收敛矩阵，则$E-A$一定可逆

(C)矩阵函数e^A对任何矩阵A均有定义，无论A为实矩阵还是复矩阵

(D)对任意方阵A,B，均有$e^Ae^B=e^{A+B}$

4.下列选项中正确的是(　)

(A)$A\in C^{n\times n}$且$\|A\|_m<1$，则A为收敛矩阵；

(B)$A\in C^{n\times n}$为正规矩阵，则$r(A)=\|A\|_2$

(C)$A\in C_r^{m\times n}(r>0)$，则$\|AA^+\|_F=\sqrt{r}$

(D)$\sigma_1\ge\sigma_2\ge\cdots\ge\sigma_r$为$A$的所有正奇异值，$\|A^+\|_2=\frac{1}{\sigma_1}$

5.下列结论错误的是(　)

(A)若A和B分别是列满秩和行满秩矩阵，则$(AB)^+=B^+A^+$

(B)若矩阵A为行满秩矩阵，则AA^H是正定$Hermite$矩阵

(C)设$A=(a_{ij})\in C^{n\times n}(n>1)$为严格对角占优矩阵，$D=diag(a_{11},a_{22},\cdots,a_{nn})$，则$E-D^{-1}A$的谱半径$r(E-D^{-1}A)\ge1$

(D)任何可相似对角化的矩阵，皆可分解为幂等矩阵$A_i(i=1,2,\cdots,n)$的加权和，即$A=\sum_{i=1}^n\lambda_iA_i$

二、判断题(15分)(正确的打√，错误的打×)

1.若$A\in C^{m\times n}$，且$A\neq0$，$(AA^-)^H=AA^-$，则$\|AA^-\|_2=n$　(　)

2.若$A\in C^{m\times n}$，$G\in C^{n\times m}$且$AGA=A$，则$y=AGx,\forall x\in C^m$为C^m到A的值域上的正交投影　(　)

3.设$A,B\in C^{n\times n}$都是可逆矩阵、且齐次线性方程组$(A+B)x=0$有非零解，$\|\cdot\|$为算子范数，则$\|AB^{-1}\|\ge1$　(　)

4.$\forall(x,y)\in R^2$，定义$f(x,y)=\sqrt{2x^2+3y^2-4xy}$，则$f(x,y)$是$R^2$上的范数　(　)

5.设矩阵A的最大秩分解为$A=BD$，则$Ax=0$当且仅当$Dx=0$　(　)

6

三、(10分)

设$A=(a_{ij})\in C^{n\times n}$的特征值为$\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$，证明：

$$\sum_{i=1}^{n}|\lambda_i|^2\le\|A\|_F^2$$

四、(10分)

(1).设$\lambda_i(i=1,2,\cdots,n)$为正规矩阵$A\in C^{n\times n}$的特征值，证明：$|\lambda_i|^2(i=1,2,\cdots,n)$是$A^HA$的特征值；

(2).设$A=(a_{ij})_{n\times n}$和$B=(b_{ij})_{n\times n}$酉等价，证明：

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}|b_{ij}|^2=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}|a_{ij}|^2$$

五、(10分)

设$A \in C^{n\times n}$为可逆矩阵，λ为A的任意一个特征值，$\|\cdot\|$为任意的算子范数，证明：

$$\frac{1}{\|A^{-1}\|} \le |\lambda| \le \sqrt[m]{\|A^m\|}$$

六、(13分)

已知矩阵$A = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$，$b = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$

(1).求矩阵A的最大秩分解；

(2).求A^+；

(3).用广义逆矩阵方法判断方程组$Ax = b$是否有解?

(4).求方程组$Ax = b$的最小范数解或最佳逼近解?（要求指出所求的是哪种解）

8

6

七、(10分)

设$A=\begin{bmatrix} \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} \\ 0 & \frac{1}{3} & 0 \end{bmatrix}$，计算：

(1).$\sum_{k=0}^{\infty} A^k$；

(2).e^{At}

八、(7分)

设$A \in C^{n\times n}$为$Hermite$矩阵，λ_1, λ_n分别是A的最大和最小特征值，证明：

$$\lambda_n \le a_{kk} \le \lambda_1 \ \ (k=1,2,\cdots,n)$$

2015年《矩阵理论》期末试题

一、判断题（15分，每小题3分）（对者打∨，错者打×）

1. $A\in R^{n\times n}$ 的奇异值为 $\sigma_1\ge\sigma_2\ge\cdots\ge\sigma_n$，$R(x)=\dfrac{x^T A^T Ax}{x^T x}$，则 $\max\limits_{0\ne x\in R^n} R(x)=\sigma_1$ （　　）

2. 设 A 为 n 阶矩阵，则 $AA^+=A^+A$． （　　）

3. 设 $A^2=A, B^2=B$，则 $(A\otimes B)^2=A\otimes B$． （　　）

4. 设 $\rho(A)$ 为矩阵 A 的谱半径，则 $\rho(A)\le\|A\|_m$． （　　）

5. 设 $A\in C^{n\times n}$ 的行列式 $\det A=0$，则 $\|E-A\|_2\ge 1$．其中 E 为单位矩阵． （　　）

二、选择题（每题3分，共15分）

1. 若 A,B 均为 n 阶方阵，下列结论**错误**的是……………………………………（　　）

A. $(A\otimes B)^{-1}=A^{-1}\otimes B^{-1}$．　B. 若$A,B$为正规矩阵，则$A\otimes B$也为正规矩阵．

C. $Vec(AXB)=(A^T\otimes B)VecX$．　D. $rank(A\otimes B)=rank\ A\bullet rank\ B$．

2. 下列命题**正确**的是……………………………………………………………………（　　）

A. 若 A 为正规矩阵，则 $A^H=A$．　B. 若矩阵 A 对角占优，则 A 一定可逆．

C. 设 $A\in C^{n\times n}$ 满足 $\sum\limits_{i=1}^{n}|a_{ij}|<1(j=1,2,\cdots,n)$，则 A 的谱半径 $\rho(A)<1$．

D. 若 n 阶方阵 A 存在矩阵范数 $\|\bullet\|$ 使得 $\|A\|<1$，则 A 为收敛矩阵

3. 下列命题**错误**的是…………………………………………………………………（　　）

A. $R(A^+)=R(A)$（$R(A)$表示矩阵A的值域）

B. 设 $A\in C^{n\times n}$，$B=\begin{pmatrix}0 & A\\ A^H & 0\end{pmatrix}$，则 $\|B\|_2=\|A\|_2$．

C. A 为正规矩阵，则 A 的特征向量也是 A^H 的特征向量．

D. $A^2=A$ 且 $A\ne E$（E 为单位矩阵），则 A 不是严格对角占优矩阵．

4. 设 $A^2=A\ne O$，$B=cA$．若 $\sum\limits_{k=0}^{\infty}B^k$ 收敛，则 c 为…………………………………（　　）

A. $c>1$　　B. $|c|\ge 1$　　C. $|c|\le 1$　　D. $|c|<1$

5. 下列结论<u>正确</u>的是……………………………………………………(　　　)

A. $\frac{1}{\sqrt{n}}\|A\|_{m_2} \le \|A\|_2$　B. A 是列满秩矩阵，则 $A^{+} = A_{L}^{-1}$　C. $rank(A) = rank(A^{-})$

D. $\sum_{i=1}^{k}\lambda_i A_i$ 是单纯矩阵 $A \in C_r^{n\times n}(r<n)$ 的谱分解，则 $\sum_{i=1}^{k} rank(A_i) = r$.

二. 计算和证明（共 70 分）

1. (12 分)设 $A \in C^{n\times n}$，E 为单位矩阵，$\|A\|_a$ 为从属于向量范数 $\|x\|_a$ 的算子范数，则当 $\|A\|_a < 1$，证明:(1) $E-A$ 可逆；(2) $\|(E-A)^{-1}\|_a \le (1-\|A\|_a)^{-1}$.

2. (13 分) (1)设 $A \in C^{m\times n}$，证明：$rank(A) = rank(A^H A)$；(2)设 $\lambda_i (i=1,2,\cdots,n)$ 是正规矩阵 $A \in C^{n\times n}$ 的特征值，证明：$|\lambda_i|^2\ (i=1,2,\cdots,n)$ 为 AA^H 的特征值.

3. (10 分) 设 $A \in C^{m\times n}$，证明：A 是右可逆矩阵的充要条件是 A 是行满秩矩阵.

4.(10 分) 证明矩阵 A 为单纯矩阵且 A 的特征值都为实数.

5. (15 分)已知 $A=\begin{pmatrix}1 & 1 & -1\\ -1 & 0 & 1\\ 1 & 2 & -1\\ 0 & 1 & -1\end{pmatrix}$，$b=\begin{pmatrix}1\\1\\2\\1\end{pmatrix}$. (1) 求矩阵 A 的最大秩分解; (2) 求 A^{+}; (3) 判断方程组 $Ax=b$ 是否有解? (4) 求方程组 $Ax=b$ 的最小范数解及通解或最小二乘解通解及其最佳逼近解?(指出所求的是哪种解).

6. (10 分) (1) 设 $A=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 2 & 1\end{pmatrix}$，求 $\cos At$;

(2) 证明: $\lim\limits_{k\to+\infty} A^{(k)}=0$的充分必要条件是 $\lim\limits_{k\to+\infty} A^{(k)}x=0$, $\forall x\in R^{n}$.