学院__________ 姓名__________ 学号__________

密封线以内答题无效

电子科技大学研究生试卷

（考试时间：________至______，共 2 小时）

课程名称 **矩阵理论** 教师__________ 学时 60 学分 3

教学方式 课堂讲授 考核日期 2009 年 1 月___日 成绩__________

考核方式：__________（学生填写）

一、选择题（20 分）

1、设 $x=\frac{1}{\sqrt{n}}\begin{pmatrix}1\\ \vdots\\ 1\end{pmatrix}\in R^n(n>1), B=I-xx^T$，其中 I 为单位矩阵，则下面正确的选项为 (   )

A. $\|B\|_1=$；*B.* $\|B\|_\infty=$；*C.* $\|B\|_2=$；*D.* $\|B\|_{m_2}=$

2、设 G 为矩阵 $A\in C_r^{m\times n}(r<n)$ 的一个广义逆 A^-，$A=BD$ 为 A 的最大秩分解，则

$\|DGB\|_{m_1}=$ (   ).

A. 1; *B.* *r*; *C.* 0; *D.* *n*.

3、 下列说法错误的是(   )

A. 矩阵 A 与 A^H 有相同的奇异值； *B.* 矩阵收敛的充分必要条件是其谱半径小于 1;

C. 矩阵 A 的右逆 A_R^{-1} 是 A 的自反广义逆； *D.* $\|AB\|_{m_\infty}\le\|A\|_{m_\infty}\|B\|_{m_\infty}$.

4、设 n 阶矩阵 A 满足 $A^2=A$，但 A 不是单位矩阵，则下列说法正确的是(   ).

A. 矩阵 A 不是严格对角占优； *B.* 矩阵 A 为严格对角占优;

C. 矩阵 A 左可逆； *D.* 矩阵 A 的 M-P 广义逆 $A^+=A$.

5、设 $A\in C^{n\times n}$ 且矩阵 A 的谱半径 $r(A)<1$，则 $\sum_{k=0}^{\infty}kA^k=$ (   ).

A. $A(I-A)$； *B.* $A(I-A)^2$； *C.* $A(I-A)^{-1}$； *D.* $A(I-A)^{-2}$.

二、填空题（20 分）

1、设 A 为三阶矩阵且 $Ax=0$、$(3I-A)x=0$ 和 $(I+3A)x=0$ 都有非零解，其中 I 为

三阶单位矩阵，则矩阵 A 的谱半径 $r(A)=$________________ .

2、设 $A=\begin{pmatrix}\pi & 0\\ 0 & \dfrac{\pi}{2}\end{pmatrix}$，则 $\|\sin A\|_2=$________________ .

3、$A=\begin{pmatrix}1/4 & 1/4 & 1/4 & 1/4\\ 1/5 & 2/5 & 1/5 & 1/5\\ 1/6 & 1/6 & 3/6 & 1/6\\ 1/7 & 1/7 & 1/7 & 4/7\end{pmatrix}$ 的谱半径 $r(A)=$___________________ .

4、设 $A\in C^{n\times n}$ 是可逆矩阵，0 是 n 阶零矩阵，则 $\begin{pmatrix}A & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}^{+}=$_________________ .

5、设 $A\in C_n^{m\times n}$ 且 $\| A(A^T A)^{-1}A^T \|_2=$_________________________ .

二、计算与证明（60 分）

1. (10 分) 设 $A=(a_{ij})\in C^{m\times n}$，定义实数 $\|A\|_G=\sqrt{mn}\max\limits_{i,j}\left|a_{ij}\right|$，$1\le i\le m,\ 1\le j\le n$．证明：$\|A\|_G$ 是 $C^{m\times n}$ 上的矩阵范数.

学号________ 姓名________ 学院________

密……封……线……以……内……答……题……无……效

2. (10 分) 设矩阵 $A=(a_{ij})\in C^{n\times n}$ 满足 $A^2=A$，求矩阵函数 e^{At} .

3. (8 分) 设矩阵 $A\in C^{n\times n}$ 是正规矩阵，其特征值为 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$，满足 $|\lambda_1|\geq|\lambda_2|\geq\cdots\geq|\lambda_n|$，$B=AU$，其中 U 为酉矩阵，B 的特征值为 $\mu_1,\mu_2,\cdots,\mu_n$，证明

(1) 如果 $A^2=0$，则 $A=0$；

(2) $|\lambda_1|\geq|\mu_i|\geq|\lambda_n|$.

4. (8 分) 设矩阵 $A=(a_{ij})_{n\times n}$ 非奇异，其奇异值为 $\sigma_1,\sigma_2,\cdots,\sigma_n$， $A=UDV$ 是矩阵 A 的奇异值分解, det$A$ 表示矩阵 A 的行列式，A^H 表示矩阵 A 的共扼转置矩阵，证明

(1) 矩阵 U 的任意一个列向量都是矩阵 AA^H 的一个特征向量;

(2) $|\det A|=\sigma_1\sigma_2\cdots\sigma_n$.

5. (6 分) 设矩阵 $A,B\in C^{n\times n}$，若 $ABA=A,\ (BA)^H=BA,\ AGA=A,\ (AG)^H=AG$，

证明：$A^{+}=BAG$.

6.(10 分) 已知矩阵 $A=\begin{pmatrix}1&0&1\\0&1&1\\1&1&2\end{pmatrix}, b=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$,

(1). 求矩阵 A 的最大秩分解;

(2). 求 A^{+};

(3). 用广义逆矩阵方法判断方程组 $Ax=b$ 是否有解?

(4). 求方程组 $Ax=b$ 的最小范数解或最佳逼近解?(要求指出所求的是哪种解)

7. (8 分) 设矩阵 $A, B \in C^{n\times n}$, $A = A^H$, $r(B)$ 为矩阵 B 的谱半径,

(1) 如果矩阵 $A, A - B^H AB$ 均为正定矩阵，则 $r(B) < 1$；

(2) 如果矩阵 B 的谱半径 $r(B) < 1$，证明：存在正定矩阵 A，使得 $A - B^H AB$ 为正定矩阵.