§3 算子范数

程光辉

2020 年 3 月 28 日

定义 1 设 $\|\bullet\|_a$ 是 $\mathbf{P}^n$ 上的向量范数，$\|*\|_m$ 是 $\mathbf{P}^{n\times n}$ 上的矩阵范数，且

$$\|\boldsymbol{Ax}\|_a \le \|\boldsymbol{A}\|_m \|\boldsymbol{x}\|_a,$$

则称 $\|*\|_m$ 为与向量范数 $\|\bullet\|_a$ 相容的矩阵范数.

例 1 设 $\boldsymbol{x} \in \mathbf{P}^n$，$\boldsymbol{A} = (a_{ij}) \in \mathbf{P}^{n\times n}$，则

$$\|\boldsymbol{A}\|_{m_1} = \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{n} |a_{ij}|$$

是与向量范数 $\|\bullet\|_1$ 相容的矩阵范数.

证明：因为

$$\begin{aligned}
\|\boldsymbol{Ax}\|_1 &= \sum_{i=1}^{n}\left|\sum_{k=1}^{n} a_{ik}x_k\right| \\
&\le \sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} |a_{ik}x_k| \\
&= \sum_{k=1}^{n}\sum_{i=1}^{n} |a_{ik}|\,|x_k| \\
&= \sum_{k=1}^{n}\left(|x_k| \cdot \sum_{i=1}^{n} |a_{ik}|\right) \\
&\le \sum_{k=1}^{n}\left(\sum_{k=1}^{n} |x_k| \cdot \sum_{i=1}^{n} |a_{ik}|\right) \\
&= \left(\sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} |a_{ik}|\right) \cdot \sum_{k=1}^{n} |x_k| \\
&= \|\boldsymbol{A}\|_{m_1} \bullet \|\boldsymbol{x}\|_1,
\end{aligned}$$

所以，$\|\boldsymbol{A}\|_{m_1}$ 是与向量范数 $\|\bullet\|_1$ 相容的矩阵范数.

例 2 设 $\boldsymbol{x} \in \mathbf{P}^n, \boldsymbol{A} = (a_{ij}) \in \mathbf{P}^{n\times n}$，则 $\|\boldsymbol{A}\|_{m_2}$ 是与 $\|\boldsymbol{x}\|_2$ 相容的矩阵范数.

证明：因为

$$\begin{aligned}
\|\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}\|_2^2 &= \sum_{i=1}^n |a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \cdots + a_{in}x_n|^2 \\
&\leq \sum_{i=1}^n \left(\sum_{j=1}^n |a_{ij}|^2\right) \cdot \left(\sum_{j=1}^n |x_j|^2\right) \\
&= \left(\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n |a_{ij}|^2\right) \cdot \sum_{j=1}^n |x_j|^2 \\
&= \|\boldsymbol{A}\|_{m_2}^2 \cdot \|\boldsymbol{x}\|_2^2,
\end{aligned}$$

所以，$\|\boldsymbol{A}\|_{m_2}$ 是与 $\|\boldsymbol{x}\|_2$ 相容的矩阵范数.

对任意向量范数，是否存在与之相容的矩阵范数？

定理 1 设 $\|\boldsymbol{x}\|_a$ 是 $\mathbf{P}^n$ 上的向量范数，$\boldsymbol{A} \in \mathbf{P}^{n\times n}$，则

$$\|\boldsymbol{A}\|_a = \max_{x\neq 0} \frac{\|\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}\|_a}{\|\boldsymbol{x}\|_a} \left(= \max_{\|u\|_a=1} \|\boldsymbol{A}\boldsymbol{u}\|_a\right)$$

是与向量范数 $\|\boldsymbol{x}\|_a$ 相容的矩阵范数。

证明：

(1) 正定性: 因为 $\boldsymbol{A} \neq \boldsymbol{0}$ ，则 $\mathbf{P}^n$ 中存在 $\boldsymbol{x}_0 \neq \boldsymbol{0}$，使 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}_0 \neq \boldsymbol{0}$，那么有 $\|\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}_0\|_a > 0, \|\boldsymbol{x}_0\|_a > 0$ ，则

$$\|\boldsymbol{A}\|_a \geq \frac{\|\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}_0\|_a}{\|\boldsymbol{x}_0\|_a} > 0.$$

(2) 齐次性:

$$\begin{aligned}
\|\lambda\boldsymbol{A}\|_a &= \max_{x\neq 0} \frac{\|\lambda\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}\|_a}{\|\boldsymbol{x}\|_a} \\
&= \max_{x\neq 0} \frac{|\lambda| \cdot \|\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}\|_a}{\|\boldsymbol{x}\|_a} \\
&= |\lambda| \cdot \max_{x\neq 0} \frac{\|\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}\|_a}{\|\boldsymbol{x}\|_a} \\
&= |\lambda| \cdot \|\boldsymbol{A}\|_a.
\end{aligned}$$

(3) 三角不等式:

$$\|\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}\|_a = \max_{x\neq 0} \frac{\|(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})\boldsymbol{x}\|_a}{\|\boldsymbol{x}\|_a}$$

$$
\begin{aligned}
&\le \max_{x\neq 0}\frac{\|\boldsymbol{Ax}\|_a+\|\boldsymbol{Bx}\|_a}{\|\boldsymbol{x}\|_a}\\
&\le \max_{x\neq 0}\frac{\|\boldsymbol{Ax}\|_a}{\|\boldsymbol{x}\|_a}+\max_{x\neq 0}\frac{\|\boldsymbol{Bx}\|_a}{\|\boldsymbol{x}\|_a}\\
&=\|\boldsymbol{A}\|_a+\|\boldsymbol{B}\|_a.
\end{aligned}
$$

相容性：

因为

$$\|\boldsymbol{A}\|_a=\max_{x\neq 0}\frac{\|\boldsymbol{Ax}\|_a}{\|\boldsymbol{x}\|_a},$$

则

$$\|\boldsymbol{A}\|_a\ge\frac{\|\boldsymbol{Ax}\|_a}{\|\boldsymbol{x}\|_a},$$

故

$$\|\boldsymbol{Ax}\|_a\le\|\boldsymbol{A}\|_a\cdot\|\boldsymbol{x}\|_a.$$

推论 1 设 $\|\boldsymbol{x}\|_a$ 是 $\mathbf{P}^n$ 上的向量范数，$\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}\in\mathbf{P}^{n\times n}$，$\|\boldsymbol{A}\|_a$ 是从属于 $\|\boldsymbol{x}\|_a$ 的算子范数，则它是相容的矩阵范数，即

$$\|\boldsymbol{AB}\|_a\le\|\boldsymbol{A}\|_a\cdot\|\boldsymbol{B}\|_a.$$

证明：因为

$$
\begin{aligned}
\|\boldsymbol{AB}\|_a&=\max_{x\neq 0}\frac{\|\boldsymbol{ABx}\|_a}{\|\boldsymbol{x}\|_a}\\
&\le\max_{x\neq 0}\frac{\|\boldsymbol{A}\|_a\cdot\|\boldsymbol{Bx}\|_a}{\|\boldsymbol{x}\|_a}\\
&=\|\boldsymbol{A}\|_a\cdot\max_{x\neq 0}\frac{\|\boldsymbol{Bx}\|_a}{\|\boldsymbol{x}\|_a}\\
&=\|\boldsymbol{A}\|_a\cdot\|\boldsymbol{B}\|_a,
\end{aligned}
$$

得证.

算子范数的特性

(1) 它是所有与向量范数 $\|\boldsymbol{x}\|_a$ 相容的矩阵范数中最小的.

证明：因为

$$\|\boldsymbol{Ax}\|_a\le\|\boldsymbol{A}\|\cdot\|\boldsymbol{x}\|_a\quad(\forall \boldsymbol{x}\in\mathbf{P}^n),$$

则

$$\frac{\|\boldsymbol{Ax}\|_a}{\|\boldsymbol{x}\|_a}\le\|\boldsymbol{A}\|\quad(\forall \boldsymbol{0}\neq\boldsymbol{x}\in\mathbf{P}^n),$$

故

$$\|\boldsymbol{A}\|_a=\max_{x\neq 0}\frac{\|\boldsymbol{Ax}\|_a}{\|\boldsymbol{x}\|_a}\le\|\boldsymbol{A}\|.$$

(2) 它的两种表达形式

$$\|A\|_a = \max_{x\neq 0} \frac{\|Ax\|_a}{\|x\|_a} \left(= \max_{\|u\|_a=1} \|Au\|_a \right).$$

(3) 它是自相容矩阵范数 (由推论 1).

定理 2 设 $\|\bullet\|_m$ 是相容的矩阵范数，则存在向量范数 $\|x\|$，使

$$\|Ax\| \leq \|A\|_m \cdot \|x\|.$$

证明：定义如下映射，证明此映射为向量范数即可.

$$\|x\| = \left\|xa^H\right\|_m, \quad 0 \neq a \in \mathbf{P}^n, \forall x \in \mathbf{P}^n$$

(1) 因为 $a \neq 0$，对任意非零向量 $x \in \mathbf{P}^n$，则有 $xa^H \neq 0$，即 $\|x\| = \left\|xa^H\right\|_m > 0$.

(2) $\|\lambda x\| = \left\|\lambda xa^H\right\|_m = |\lambda| \cdot \left\|xa^H\right\|_m$.

(3) $\|x+y\| = \left\|(x+y)a^H\right\|_m = \left\|xa^H + ya^H\right\|_m \leq \left\|xa^H\right\|_m + \left\|ya^H\right\|_m = \|x\| + \|y\|$.

(4) $\|Ax\| = \left\|Axa^H\right\|_m \leq \|A\|_m \cdot \left\|xa^H\right\|_m = \|A\|_m \cdot \|x\|$.

例 3 取 $a = (1, 0, \cdots, 0)^T, x = (x_1, x_2, \cdots, x_n)^T$，则

$$\|x\| = \left\|xa^H\right\|_{m_2} = \left\| \begin{bmatrix} x_1 & 0 & \cdots & 0 \\ x_2 & 0 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ x_n & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix} \right\|_{m_2} = \left(\sum_{i=1}^n |x_i|^2 \right)^{1/2} = \|x\|_2.$$

定理 3 如果 $\|\bullet\|_m : \mathbf{C}^{n\times n} \to \mathbf{R}$ 是一相容的矩阵范数，则对任意 $A \in \mathbf{C}^{n\times n}$，有

$$|\lambda| \leq \|A\|_m,$$

其中 λ 是 A 的特征值.

证明： 因为 $Ax = \lambda x$，则

$$|\lambda| \cdot \|x\| = \|\lambda x\| = \|Ax\| \leq \|A\|_m \|x\|,$$

故

$$|\lambda| \leq \|A\|_m.$$

例 4 设 $A \in \mathbf{C}^{m\times n}$，则从属于向量范数 $\|x\|_1$ 的算子范数为

$$\|A\|_1 = \max_{1\leq j\leq n} \left\{ \sum_{i=1}^n |a_{ij}| \right\},$$

称为极大列和范数.

证明：设 $\boldsymbol{A}=[\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\cdots,\boldsymbol{a}_n]$，则

$$\begin{aligned}\|\boldsymbol{Ax}\|_1&=\|x_1\boldsymbol{a}_1+x_2\boldsymbol{a}_2+\cdots+x_n\boldsymbol{a}_n\|_1\\&\le\sum_{i=1}^n\|x_i\boldsymbol{a}_i\|_1\\&=\sum_{i=1}^n|x_i|\cdot\|\boldsymbol{a}_i\|_1\\&\le\sum_{i=1}^n|x_i|\left(\max_{1\le i\le n}\{\|\boldsymbol{a}_i\|_1\}\right)\\&=\max_{1\le i\le n}\{\|\boldsymbol{a}_i\|_1\}\|\boldsymbol{x}\|_1,\end{aligned}$$

既有

$$\|\boldsymbol{A}\|_1=\max_{x\ne0}\frac{\|\boldsymbol{Ax}\|_1}{\|\boldsymbol{x}\|_1}\le\max_{1\le i\le n}\{\|\boldsymbol{a}_i\|_1\},\tag{1}$$

不妨令

$$\|\boldsymbol{a}_k\|_1=\max_{1\le i\le n}\{\|\boldsymbol{a}_i\|_1\}=\max_{1\le i\le n}\left\{\sum_{i=1}^n|a_{ij}|\right\},$$

若取 $\tilde{\boldsymbol{x}}=\begin{bmatrix}0&\cdots&0&\lambda&0&\cdots&0\end{bmatrix}^T$ ($\boldsymbol{\lambda}$ 位于第 $\boldsymbol{k}$ 个位置), 则

$$\max_{x\ne0}\|\boldsymbol{Ax}\|_1\ge\|\boldsymbol{A}\tilde{\boldsymbol{x}}\|_1=\|\boldsymbol{\lambda a}_k\|_1=\|\boldsymbol{a}_k\|_1\cdot\|\tilde{\boldsymbol{x}}\|_1,$$

因此，

$$\|\boldsymbol{A}\|_1=\max_{x\ne0}\frac{\|\boldsymbol{Ax}\|_1}{\|\boldsymbol{x}\|_1}\ge\frac{\|\boldsymbol{A}\tilde{\boldsymbol{x}}\|_1}{\|\tilde{\boldsymbol{x}}\|_1}=\|\boldsymbol{a}_k\|_1=\max_{1\le i\le n}\left\{\sum_{i=1}^n|a_{ij}|\right\}.\tag{2}$$

所以，由 **(1), (2)** 得证.

例 5 设 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})\in\mathbf{C}^{m\times n}$，则从属于 $\|\boldsymbol{x}\|_\infty$ 的算子范数

$$\|\boldsymbol{A}\|_\infty=\max_{1\le i\le m}\left(\sum_{j=1}^n|a_{ij}|\right),$$

称为极大行和范数.

证明：令 $\boldsymbol{x}\in\mathbf{C}^n$，因为

$$\begin{aligned}\|\boldsymbol{Ax}\|_\infty&=\max_{1\le i\le m}\left\{\left|\sum_{j=1}^n a_{ij}x_j\right|\right\}\\&\le\max_{1\le i\le m}\left\{\sum_{j=1}^n|a_{ij}|\cdot|x_j|\right\}\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&\le \max_{1\le i\le m}\left\{\sum_{j=1}^{n}|a_{ij}|\cdot \max_{1\le j\le n}|x_j|\right\}\\
&= \max_{1\le i\le m}\left\{\sum_{j=1}^{n}|a_{ij}|\right\}\cdot \max_{1\le j\le n}\{|x_j|\}
\end{aligned}
$$

则

$$
\|A\|_\infty = \max_{x\ne 0}\frac{\|Ax\|_\infty}{\|x\|_\infty} \le \max_{1\le i\le m}\left\{\sum_{j=1}^{n}|a_{ij}|\right\}. \tag{3}
$$

不妨令

$$
\sum_{j=1}^{n}|a_{kj}| = \max_{1\le i\le m}\left(\sum_{j=1}^{n}|a_{ij}|\right).
$$

若 $A=0$，显然.

假设 $A\ne 0$, $\lambda>0$, 令 $z=(z_1,z_2,\cdots,z_n)^T\in \mathrm{C}^n$，其中

$$
\begin{cases}
z_j=\frac{\lambda|a_{kj}|}{a_{kj}}, & (a_{kj}\ne 0)\\
z_j=\lambda, & (a_{kj}=0)
\end{cases}
$$

则 $\|z\|_\infty=\lambda,\quad a_{kj}z_j=\lambda\,|a_{kj}|,\quad (j=1,\cdots,n)$.

因为

$$
\begin{aligned}
\max_{x\ne 0}\|Ax\|_\infty &\ge \|Az\|_\infty\\
&= \max_{1\le i\le m}\left|\sum_{j=1}^{n}a_{ij}z_j\right|\\
&\ge \left|\sum_{j=1}^{n}a_{kj}z_j\right|\\
&= \lambda\sum_{j=1}^{n}|a_{kj}|\\
&= \|z\|_\infty\cdot\sum_{j=1}^{n}|a_{kj}|,
\end{aligned}
$$

所以

$$
\|A\|_\infty = \max_{x\ne 0}\frac{\|Ax\|_\infty}{\|x\|_\infty} \ge \frac{\|Az\|_\infty}{\|z\|_\infty} \ge \sum_{j=1}^{n}|a_{kj}| = \max_{1\le i\le m}\left\{\sum_{j=1}^{n}|a_{ij}|\right\}. \tag{4}
$$

综上，由 (3), (4) 得证.

定义 2 设 $A\in \mathrm{C}^{n\times n}$, λ_i 是 A 的特征值，则 $r(A)=\max\limits_{1\le i\le n}\{|\lambda_i|\}$ 称为 A 的谱半径.

例 6 设 $\boldsymbol{A} \in \mathbf{P}^{m \times n}$，则从属于 $\|\boldsymbol{x}\|_2$ 的算子范数 *(又称为谱范数)* 为

$$\|\boldsymbol{A}\|_2 = \sqrt{r\left(\boldsymbol{A}^H \boldsymbol{A}\right)}.$$

证明：因为对任意非零向量 $\boldsymbol{X} \in \mathbf{C}^n$，都有

$$f(\boldsymbol{X}) = \boldsymbol{X}^H \left(\boldsymbol{A}^H \boldsymbol{A}\right) \boldsymbol{X} = (\boldsymbol{A}\boldsymbol{X})^H \boldsymbol{A}\boldsymbol{X} \geq 0,$$

则 $\boldsymbol{A}^H \boldsymbol{A}$ 为半正定 Hermitian 矩阵，特征值非负.

令矩阵 $\boldsymbol{A}^H \boldsymbol{A}$ 的特征值为 $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \cdots \geq \lambda_n \geq 0$，$\boldsymbol{X}_i$ 是对应 λ_i 的单位正交特征向量，对 $\forall \boldsymbol{u} \in \mathbf{P}^n$ 且 $\|\boldsymbol{u}\|_2 = 1$，有

$$\boldsymbol{u} = a_1 \boldsymbol{X}_1 + a_2 \boldsymbol{X}_2 + \cdots + a_n \boldsymbol{X}_n,$$

那么

$$\|\boldsymbol{u}\|_2^2 = \boldsymbol{u}^H \boldsymbol{u} = |a_1|^2 + |a_2|^2 + \cdots + |a_n|^2 = 1.$$

又

$$\boldsymbol{A}^H \boldsymbol{A} \boldsymbol{u} = a_1 \lambda_1 \boldsymbol{X}_1 + a_2 \lambda_2 \boldsymbol{X}_2 + \cdots + a_n \lambda_n \boldsymbol{X}_n,$$

即

$$\begin{aligned}
\|\boldsymbol{A}\boldsymbol{u}\|_2^2 &= \boldsymbol{u}^H \boldsymbol{A}^H \boldsymbol{A} \boldsymbol{u} \\
&= \lambda_1 |a_1|^2 + \lambda_2 |a_2|^2 + \cdots + \lambda_n |a_n|^2 \\
&\leq \lambda_1 \left(|a_1|^2 + |a_2|^2 + \cdots + |a_n|^2\right) \\
&= \lambda_1.
\end{aligned}$$

因此

$$\max_{\|\boldsymbol{u}\|_2 = 1} \|\boldsymbol{A}\boldsymbol{u}\|_2 \leq \sqrt{\lambda_1}.$$

又因为

$$\|\boldsymbol{A}\boldsymbol{X}_1\|_2^2 = \boldsymbol{X}_1^H \boldsymbol{A}^H \boldsymbol{A} \boldsymbol{X}_1 = \boldsymbol{X}_1^H \lambda_1 \boldsymbol{X}_1 = \lambda_1,$$

故

$$\|\boldsymbol{A}\|_2 = \max_{\|\boldsymbol{u}\|_2 = 1} \|\boldsymbol{A}\boldsymbol{u}\|_2 = \sqrt{\lambda_1} = \sqrt{r\left(\boldsymbol{A}^H \boldsymbol{A}\right)}.$$

谱范数的性质

定理 4 设 $\boldsymbol{A} \in \mathbf{C}^{n \times n}$, 则

(1) $\|\boldsymbol{A}\|_2 = \left\|\boldsymbol{A}^H\right\|_2 = \left\|\boldsymbol{A}^T\right\|_2 = \|\overline{\boldsymbol{A}}\|_2$.

(2) $\left\|\boldsymbol{A}^H \boldsymbol{A}\right\|_2 = \left\|\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^H\right\|_2 = \|\boldsymbol{A}\|_2^2$.

(3) 对任意 n 阶酉矩阵 U 及 V 都有

$$\|UA\|_2 = \|AV\|_2 = \|UAV\|_2 = \|A\|_2.$$

证明: (1) 由 $A^HAx = \lambda x$，若 $\lambda = 0$，则 A^HA 非满秩，那么 AA^H 也非满秩，即 $\lambda = 0$ 也是 AA^H 的特征值.

若 $\lambda \neq 0$，则 $y = Ax \neq 0$，那么

$$AA^Hy = AA^HAx = A(\lambda x) = \lambda Ax = \lambda y,$$

则 λ 也是 AA^H 的特征值.

同理可证： AA^H 的特征值也是 A^HA 的特征值.

$$\|A\|_2 = \sqrt{r\left(A^HA\right)} = \sqrt{r\left(AA^H\right)} = \left\|A^H\right\|_2.$$

又因为

$$\begin{aligned}\left|\lambda E - \left(A^T\right)^H A^T\right| &= \left|\lambda E - \left(AA^H\right)^T\right| \\ &= \left|\lambda E - AA^H\right|,\end{aligned}$$

即 $\left(A^T\right)^H A^T$ 和 AA^H 的特征值相同.

故

$$\|A\|_2 = \left\|A^H\right\|_2 = \left\|A^T\right\|_2 = \|\overline{A}\|_2.$$

(2) 因为

$$\left\|A^HA\right\|_2^2 = r\left[\left(A^HA\right)^H\left(A^HA\right)\right] = r\left[\left(A^HA\right)^2\right] = \left[r\left(A^HA\right)\right]^2,$$

所以

$$\left\|A^HA\right\|_2 = \left\|AA^H\right\|_2 = \|A\|_2^2.$$

(3) $\|UA\|_2^2 = r\left[(UA)^H(UA)\right] = r\left[A^HU^HUA\right] = r\left(A^HA\right).$

定理 5 设 $A \in \mathbf{C}^{n\times n}$，则

(1) $\|A\|_2 = \max\limits_{\|x\|_2=\|y\|_2=1}\left|y^HAx\right|$,

(2) $\|A\|_2^2 \leq \|A\|_1\|A\|_\infty.$

证明： (1) 因为

$$\left|y^HAx\right| \leq \|y\|_2\|Ax\|_2 \leq \|y\|_2\|A\|_2\|x\|_2 = \|A\|_2,$$

所以，

$$\max_{\|x\|_2=\|y\|_2=1}\left|y^H A x\right| \leq \|A\|_2.$$

又因为

$$\|A\|_2=\max_{\|x\|_2=1}\|Ax\|_2,$$

则存在单位向量 x_0，使得

$$\|A\|_2=\|Ax_0\|_2>0.$$

取

$$y_0=\frac{Ax_0}{\|Ax_0\|_2},$$

因此

$$\left|y_0^H A x_0\right|=\left|\frac{(Ax_0)^H}{\|Ax_0\|_2}Ax_0\right|=\|Ax_0\|_2=\|A\|_2,$$

故

$$\max_{\|x\|_2=\|y\|_2=1}\left|y^H A x\right|=\|A\|_2.$$

(2) $\|A\|_2^2=r\left(A^H A\right)\leq\left\|A^H A\right\|_1\leq\left\|A^H\right\|_1\|A\|_1=\|A\|_1\|A\|_\infty$.

广义算子范数

定理 6 设 $\|\cdot\|_a,\|\cdot\|_b$ 都是向量范数，$A\in\mathbf{P}^{n\times n}$，则

$$\|A\|_{a,b}=\max_{x\neq 0}\frac{\|Ax\|_a}{\|x\|_b}\quad\left(=\max_{\|u\|_b=1}\|Au\|_a\right)$$

叫做 $\mathbf{P}^{n\times n}$ 上的广义算子范数.

定理 7 设 $\|\cdot\|_a,\|\cdot\|_b$ 与 $\|\cdot\|_c$ 都是向量范数，则

$$\|AB\|_{a,c}\leq\|A\|_{a,b}\|B\|_{b,c}.$$