

§7 广义逆矩阵的应用

程光辉

2020 年 1 月 1 日

1 矩阵方程的通解

定理 1 设 $A \in \mathbb{C}^{m \times n}$, $B \in \mathbb{C}^{p \times q}$, $D \in \mathbb{C}^{m \times q}$, 则矩阵方程

$$AXB = D$$

有解的充要条件是存在 A^- 和 B^- , 使得

$$AA^-DB^-B = D$$

成立. 在有解的条件下, 矩阵方程 $AXB = D$ 的通解为

$$X = A^-DB^- + Y - A^-AYBB^-, \quad \forall Y \in \mathbb{C}^{n \times p}.$$

证明: (必要性) 设 X 为 $AXB = D$ 的解, 因为 $AA^-A = A$, $BB^-B = B$, 则有

$$D = AXB = AA^-AXBB^-B = AA^-DB^-B.$$

(充分性) 因为 $D = AA^-DB^-B$, 故 $X = A^-DB^-$ 是 $AXB = D$ 的解.

下面证明在有解情况下的通解. 因为

$$\begin{aligned} A(A^-DB^- + Y - A^-AYBB^-)B &= AA^-DB^-B + AYB - AA^-AYBB^-B \\ &= D + AYB - AYB \\ &= D, \end{aligned}$$

因此, $X = A^-DB^- + Y - A^-AYBB^-$ 是 $AXB = D$ 的解.

设 G 是 $AXB = D$ 的任一解, 即 $AGB = D$, 进而

$$G = A^-DB^- + G - A^-DB^- = A^-DB^- + G - A^-AGBB^-,$$

故矩阵方程 $AXB = D$ 的通解为

$$X = A^-DB^- + Y - A^-AYBB^-, \quad \forall Y \in \mathbb{C}^{n \times p}.$$

推论 1 设 $A \in \mathbb{C}^{m \times n}$, $D \in \mathbb{C}^{m \times p}$, 则矩阵方程 $AX = D$ 有解的充要条件是存在 A^- , 使得

$$AA^-D = D$$

成立. 在有解的条件下, 矩阵方程 $AX = D$ 的通解为

$$X = A^-D + Y - A^-AY, \quad \forall Y \in \mathbb{C}^{n \times p}.$$

推论 2 设 $B \in \mathbb{C}^{m \times n}$, $D \in \mathbb{C}^{p \times n}$, 则矩阵方程 $XB = D$ 有解的充要条件是存在 B^- , 使得

$$DB^-B = D$$

成立. 在有解的条件下, 矩阵方程 $XB = D$ 的通解为

$$X = DB^- + Y - YBB^-, \quad \forall Y \in \mathbb{C}^{p \times m}.$$

推论 3 设 $A \in \mathbb{C}^{m \times n}$, $b \in \mathbb{C}^m$, 则线性方程组 $Ax = b$ 有解的充要条件是存在 A^- , 使得

$$AA^-b = b$$

成立. 在有解的条件下, 线性方程组 $Ax = b$ 的通解为

$$x = A^-b + (E_n - A^-A)u, \quad \forall u \in \mathbb{C}^n.$$

2 相容方程的最小范数解

定义 1 方程组 $Ax = b$ 有解, 则称此方程组为相容方程组; 否则, 称为不相容方程组.

定义 2 设方程组 $Ax = b$ 有解, 将所有的解中范数最小的解称为最小范数解.

令 $A\{1, 3\} = \{G | AGA = A, (GA)^H = GA\}$.

定理 2 设 $A \in \mathbb{C}^{m \times n}$, $D \in A\{1, 3\}$, 则 Db 是相容方程组 $Ax = b$ 的最小范数解, 并且方程组的最小范数解唯一.

证明: 设 x_0 是 $Ax = b$ 的任意解, $D \in A\{1, 3\}$, 则有 $ADA = A$, 进而

$$b = Ax_0 = ADAx_0 = ADb,$$

于是有 Db 是 $Ax = b$ 的解. 根据定理 1 的推论 3 知, $Ax = b$ 的通解为

$$x = Db + (E - DA)u, \quad \forall u \in \mathbb{C}^n.$$

对任意解 x_0 有,

$$\begin{aligned}\|x_0\|_2^2 &= \|Db + (E - DA)u\|_2^2 \\ &= (Db + (E - DA)u)^H (Db + (E - DA)u) \\ &= \|Db\|_2^2 + \|(E - DA)u\|_2^2 + (Db)^H (E - DA)u + u^H (E - DA)^H Db. \quad (1)\end{aligned}$$

又由 $Ax_0 = b$ 得

$$\begin{aligned}(Db)^H (E - DA)u &= (DAx_0)^H (E - DA)u \\ &= x_0^H (DA)^H (E - DA)u \\ &= x_0^H DA(E - DA)u \\ &= x_0^H (DA - DADA)u \\ &= 0,\end{aligned}$$

所以由 (1) 式可得

$$\|x_0\|_2^2 = \|Db\|_2^2 + \|(E - DA)u\|_2^2 \geq \|Db\|_2^2,$$

则 Db 是相容方程组 $Ax = b$ 的最小范数解.

唯一性显然.

定理 3 设 $A \in C^{m \times n}$, $D \in C^{n \times m}$, $\forall b \in C^m$, 则 Db 是相容方程组 $Ax = b$ 的最小范数解, 则必有 $D \in A\{1, 3\}$.

证明: 设 $A = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$, 则 $\alpha_i \in R(A)$. 设 $G \in A\{1, 3\}$, 则 $G\alpha_i$ 是 $Ax = \alpha_i$ 的最小范数解. 由定理 2 知最小范数解是唯一的, 则有

$$D\alpha_i = G\alpha_i, \quad \forall i = 1, 2, \dots, n,$$

即 $DA = GA$, 进而 $ADA = AGA = A$, $(DA)^H = (GA)^H = GA = DA$, 于是有 $D \in A\{1, 3\}$.

3 不相容方程组的解

如果 $Ax = b$ 是不相容方程组, 令 $f(x) = \|Ax - b\|_2^2$, 存在 x_0 使得 $f(x_0)$ 最小, 称 x_0 为方程组的最小二乘解, 这种问题称为最小二乘解问题.

令 $A\{1, 4\} = \{G | AGA = A, (AG)^H = AG\}$.

定理 4 设 $A \in C^{m \times n}$, $G \in A\{1, 4\}$, 则 Gb 是不相容方程组 $Ax = b$ 的最小二乘解.

证明：因为

$$\begin{aligned}
\|Ax - b\|_2^2 &= \|Ax - AGb + AGb - b\|_2^2 \\
&= (Ax - AGb + AGb - b)^H (Ax - AGb + AGb - b) \\
&= \|Ax - AGb\|_2^2 + \|AGb - b\|_2^2 \\
&\quad + (Ax - AGb)^H (AGb - b) + (AGb - b)^H (Ax - AGb). \quad (2)
\end{aligned}$$

又由 $(AG)^H = AG$, 有

$$\begin{aligned}
(AGb - b)^H (Ax - AGb) &= (b^H (AG)^H - b^H) (Ax - AGb) \\
&= (b^H AG - b^H) (Ax - AGb) \\
&= b^H AGAx - b^H Ax - b^H AGAGb + b^H AGb \\
&= 0,
\end{aligned}$$

因此, 由式 (2) 可得

$$\|Ax - b\|_2^2 = \|Ax - AGb\|_2^2 + \|AGb - b\|_2^2 \geq \|AGb - b\|_2^2,$$

即 Gb 是不相容方程组 $Ax = b$ 的最小二乘解.

引理 1 设 $A \in \mathbb{C}^{m \times n}$, x 是不相容方程组 $Ax = b$ 的最小二乘解的充要条件是 $Ax = AGb$, $\forall G \in A\{1, 4\}$.

证明：(必要性) 对 $\forall G \in A\{1, 4\}$, $\forall x \in \mathbb{C}^n$, 由定理 4 证明知,

$$\|Ax - b\|_2^2 = \|Ax - AGb\|_2^2 + \|AGb - b\|_2^2 = \|AGb - b\|_2^2,$$

则 $Ax = AGb$.

(充分性) 若 $Ax = AGb$, 则 $\|Ax - b\|_2^2 = \|AGb - b\|_2^2$, 即 x 是不相容方程组 $Ax = b$ 的最小二乘解.

定理 5 设 $A \in \mathbb{C}^{m \times n}$, $G \in A\{1, 4\}$, 不相容方程组 $Ax = b$ 的最小二乘解的通解是 $x = Gb + (E - A^-A)u$, $\forall u \in \mathbb{C}^n$.

证明：令 x 是不相容方程组 $Ax = b$ 的最小二乘解, 则有 $Ax = AGb$, 即 x 是相容方程组 $A(x - Gb) = 0$ 的解. 再由推论 3, 知通解为

$$x - Gb = (E - A^-A)u, \quad \forall u \in \mathbb{C}^n,$$

即

$$x = Gb + (E - A^-A)u, \quad \forall u \in \mathbb{C}^n.$$

定义 3 设 x_0 是不相容方程组 $Ax = b$ 的最小二乘解, 若对方程组的任意最小二乘解 \bar{x} , 均有

$$\|x_0\|_2 \leq \|\bar{x}\|_2,$$

则称 x_0 是不相容方程组 $Ax = b$ 的最佳最小二乘解, 简称最佳逼近解.

定理 6 设 $A \in \mathbb{C}^{m \times n}$, 不相容方程组 $Ax = b$ 的最佳逼近解是 $x = A^+b$.

例 1 用广义逆矩阵方法判断线性方程组

$$\begin{cases} 2x_1 + 4x_2 + x_3 + x_4 = 3 \\ x_1 + 2x_2 - x_3 + 2x_4 = 0 \\ -x_1 - 2x_2 - 2x_3 + x_4 = 3 \end{cases}$$

是否有解? 如果有解, 求通解和最小范数解; 如果无解, 求最小二乘解和最佳逼近解.

解: 令系数矩阵和右端向量为

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 & 2 \\ -1 & -2 & -2 & 1 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix},$$

则线性方程组即为 $Ax = b$.

因为 $A^+ \in A\{1, 3\}$ 且 $A^+ \in A\{1, 4\}$, 再由定理 2 和定理 4 知, 可利用 A^+b 判断方程组解的类型, 所以首先计算 A^+b .

矩阵 A 的最大秩分解为 $A = BD$, 其中

$$B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

则

$$A^+ = D^H(DD^H)^{-1}(B^HB)^{-1}B^H = \frac{1}{33} \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 4 & 2 & -2 \\ 1 & -5 & -6 \\ 1 & 6 & 5 \end{pmatrix}.$$

又因为

$$AA^+b = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \neq b,$$

故 $Ax = b$ 是不相容方程组.

于是有不相容方程组 $\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}$ 的最小二乘解的通解为

$$\mathbf{x} = \mathbf{A}^+\mathbf{b} + (\mathbf{E} - \mathbf{A}^+\mathbf{A})\mathbf{u} = \frac{1}{11} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -5 \\ 6 \end{pmatrix} + (\mathbf{E} - \mathbf{A}^+\mathbf{A})\mathbf{u}, \quad \forall \mathbf{u} \in \mathbb{C}^4,$$

最佳逼近解为

$$\mathbf{x} = \mathbf{A}^+\mathbf{b} = \frac{1}{11} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -5 \\ 6 \end{pmatrix}.$$