# §2 矩阵的范数

程光辉

2020 年 3 月 28 日

**定义 1** 设 $A=(a_{ij})\in \mathbf{P}^{m\times n}$, 若映射 $\|\cdot\|: \mathbf{P}^{m\times n}\to \mathbf{R}$ 满足:

*(1)* 正定性 $\|A\|\geq 0$，当且仅当 $A=0$ 时，$\|A\|=0$;

*(2)* 齐次性 $\|\lambda A\|=|\lambda|\|A\|,\quad \forall \lambda\in \mathbf{P}$, $\forall A\in \mathbf{P}^{m\times n}$;

*(3)* 三角不等式 $\|A+B\|\leq \|A\|+\|B\|, \forall A, B\in \mathbf{P}^{m\times n}$,

则称映射 $\|\cdot\|$ 为 $\mathbf{P}^{m\times n}$ 上的矩阵范数.

**例 1** 设 $A\in \mathbf{P}^{m\times n}$，则

$$\|A\|_{m_1}=\sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{m}|a_{ij}|,$$

$$\|A\|_{m_2}=\left(\sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{m}|a_{ij}|^2\right)^{\frac{1}{2}},$$

$$\|A\|_{m_\infty}=\max_{i,j}\{|a_{ij}|\},\quad 1\leq i\leq m,\quad 1\leq j\leq n,$$

都是矩阵范数.

显然，$\|A\|_{m_1}$，$\|A\|_{m_2}$，$\|A\|_{m_\infty}$ 是向量范数 $\|\cdot\|_1$，$\|\cdot\|_2$，$\|\cdot\|_\infty$ 的自然推广.

**定理 1** $\mathbf{P}^{m\times n}$ 上的任意两个矩阵范数均等价。

**定义 2** 设 $\|\cdot\|_a: \mathbf{P}^{m\times l}\to \mathbf{R},\quad \|\cdot\|_b: \mathbf{P}^{l\times n}\to \mathbf{R},\quad \|\cdot\|_c: \mathbf{P}^{m\times n}\to \mathbf{R}$ 是矩阵范数，如果

$$\|AB\|_c\leq \|A\|_a\cdot\|B\|_b,$$

则称矩阵范数 $\|\cdot\|_a,\quad \|\cdot\|_b$ 和 $\|\cdot\|_c$ 相容. 如果

$$\|AB\|\leq \|A\|\cdot\|B\|,$$

则称 $\|\cdot\|$ 是自相容矩阵范数.

**例 2** 设 $A \in \mathbf{P}^{n\times n}$，矩阵范数 $\|A\|_{m_\infty} = \max\limits_{i,j}\{|a_{ij}|\}$， $(1 \le i,\ j \le n)$ 是不相容的矩阵范数.

**解：** 取

$$A = B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix},$$

则

$$AB = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix},$$

即有

$$\|AB\|_{m_\infty} = 2 \nleq \|A\|_{m_\infty}\|B\|_{m_\infty} = 1,$$

因此，矩阵范数 $\|\cdot\|_{m_\infty}$ 是不相容的矩阵范数.

**例 3** $\|\cdot\|_{m_1}$ 和 $\|\cdot\|_{m_2}$ 是相容的矩阵范数.

**证明：** 设 $A \in \mathbf{P}^{m\times l}$， $B \in \mathbf{P}^{l\times n}$，则

$$\begin{aligned}
\|AB\|_{m_1} &= \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{m}\left|\sum_{k=1}^{l} a_{ik}b_{kj}\right| \\
&\le \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{m}\sum_{k=1}^{l} |a_{ik}|\cdot|b_{kj}| \\
&= \sum_{k=1}^{l}\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} |a_{ik}|\cdot|b_{kj}| \\
&= \sum_{k=1}^{l}\left(\sum_{i=1}^{m}|a_{ik}|\cdot\sum_{j=1}^{n}|b_{kj}|\right) \\
&\le \sum_{k=1}^{l}\left(\sum_{i=1}^{m}\sum_{k=1}^{l}|a_{ik}|\cdot\sum_{j=1}^{n}|b_{kj}|\right) \\
&= \left(\sum_{i=1}^{m}\sum_{k=1}^{l}|a_{ik}|\right)\cdot\left(\sum_{k=1}^{l}\sum_{j=1}^{n}|b_{kj}|\right) \\
&= \|A\|_{m_1}\cdot\|B\|_{m_1}.
\end{aligned}$$

$$\|AB\|_{m_2} = \left(\sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{m}\left|\sum_{k=1}^{l} a_{ik}b_{kj}\right|^2\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$
\begin{aligned}
&\leq \left[\sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{m}\left(\sum_{k=1}^{l}|a_{ik}|\cdot|b_{kj}|\right)^{2}\right]^{\frac{1}{2}} \\
&\leq \left[\sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{m}\left(\sum_{k=1}^{l}|a_{ik}|^{2}\right)\cdot\left(\sum_{k=1}^{l}|b_{kj}|^{2}\right)\right]^{\frac{1}{2}} \\
&= \left\{\sum_{j=1}^{n}\left(\sum_{k=1}^{l}|b_{kj}|^{2}\right)\cdot\left[\sum_{i=1}^{m}\left(\sum_{k=1}^{l}|a_{ik}|^{2}\right)\right]\right\}^{\frac{1}{2}} \\
&= \left(\sum_{i=1}^{m}\sum_{k=1}^{l}|a_{ik}|^{2}\right)^{\frac{1}{2}}\cdot\left(\sum_{k=1}^{l}\sum_{j=1}^{n}|b_{kj}|^{2}\right)^{\frac{1}{2}} \\
&= \|A\|_{m_2}\cdot\|B\|_{m_2}.
\end{aligned}
$$

得证.

**例 4** 设 $A\in \mathbf{P}^{n\times n}$，则

$$
\|A\|_a = n\max_{i,j}\{|a_{ij}|\}, \quad 1\leq i,j\leq n,
$$

是相容的矩阵范数。

**证明：** $\|\cdot\|_a$ 是矩阵范数很显然.

下面证明相容性，令 $A, B\in \mathbf{P}^{n\times n}$，

$$
\begin{aligned}
\|AB\|_a &= n\max_{i,j}\left\{\left|\sum_{k=1}^{n}a_{ik}b_{kj}\right|\right\} \\
&\leq n\max_{i,j}\left\{\sum_{k=1}^{n}|a_{ik}||b_{kj}|\right\} \\
&\leq n\max_{i,j}\left\{n\max_{k}|a_{ik}||b_{kj}|\right\} \\
&\leq n\max_{i,k}\{|a_{ik}|\}\cdot n\max_{k,j}\{|b_{kj}|\} \\
&= \|A\|_a\cdot\|B\|_a,
\end{aligned}
$$

得证.

**定理 2** 设 $A\in \mathbf{P}^{n\times n}$，

*(1)* 若 $A=(a_1, a_2, \cdots, a_n)$，则

$$
\|A\|_F^2 = \|A\|_{m_2}^2 = \sum_{i=1}^{n}\|a_i\|_2^2
$$

其中 $\|a_i\|_2^2 = a_i^H a_i$.

*(2)* $\|\boldsymbol{A}\|_{m_2}^2 = \mathbf{tr}\left(\boldsymbol{A}^H\boldsymbol{A}\right) = \sum_{i=1}^{n} \boldsymbol{\lambda}_i\left(\boldsymbol{A}^H\boldsymbol{A}\right)$.

*(3)* 对任意的酉矩阵 $\boldsymbol{U}, \boldsymbol{V} \in \mathbf{C}^{n\times n}$，有 $\|\boldsymbol{A}\|_{m_2}^2 = \left\|\boldsymbol{U}^H\boldsymbol{A}\boldsymbol{V}\right\|_{m_2}^2 = \left\|\boldsymbol{U}\boldsymbol{A}\boldsymbol{V}^H\right\|_{m_2}^2$.

**证明：** (1)，(2) 比较显然.

下面只对 (3) 进行证明.

$$
\begin{aligned}
\|\boldsymbol{A}\|_{m_2}^2 &= \mathbf{tr}\left(\boldsymbol{A}^H\boldsymbol{A}\right) \\
&= \mathbf{tr}\left(\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^H\right) \\
&= \mathbf{tr}\left(\boldsymbol{A}\boldsymbol{V}\boldsymbol{V}^H\boldsymbol{A}^H\right) \\
&= \mathbf{tr}\left[\boldsymbol{A}\boldsymbol{V}(\boldsymbol{A}\boldsymbol{V})^H\right] \\
&= \mathbf{tr}\left[(\boldsymbol{A}\boldsymbol{V})^H\boldsymbol{A}\boldsymbol{V}\right] \\
&= \mathbf{tr}\left(\boldsymbol{V}^H\boldsymbol{A}^H\boldsymbol{A}\boldsymbol{V}\right) \\
&= \mathbf{tr}\left(\boldsymbol{V}^H\boldsymbol{A}^H\boldsymbol{U}\boldsymbol{U}^H\boldsymbol{A}\boldsymbol{V}\right) \\
&= \mathbf{tr}\left[\left(\boldsymbol{U}^H\boldsymbol{A}\boldsymbol{V}\right)^H\left(\boldsymbol{U}^H\boldsymbol{A}\boldsymbol{V}\right)\right] \\
&= \left\|\boldsymbol{U}^H\boldsymbol{A}\boldsymbol{V}\right\|_{m_2}^2,
\end{aligned}
$$

得证.

**推论 1** 设 $\boldsymbol{A} \in \mathbf{C}^{n\times n}$，对任意的酉矩阵 $\boldsymbol{U}, \boldsymbol{V} \in \mathbf{C}^{n\times n}$，有

$$\|\boldsymbol{A}\|_{m_2} = \|\boldsymbol{U}\boldsymbol{A}\|_{m_2} = \|\boldsymbol{A}\boldsymbol{V}\|_{m_2} = \|\boldsymbol{U}\boldsymbol{A}\boldsymbol{V}\|_{m_2}.$$