矩阵理论 2007 年考试参考答案

一、判断题（40 分）（对者打∨，错者打×）

1、设 $A, B\in C^{n\times n}$ 的奇异值分别为 $\sigma_1\ge\sigma_2\ge\cdots\ge\sigma_n>0$，$\sigma_1^{'}\ge\sigma_2^{'}\ge\cdots\ge\sigma_n^{'}>0$，

如果 $\sigma_i>\sigma_i^{'}\ (i=1,2,\cdots,n)$，则 $\|A^{+}\|_2>\|B^{+}\|_2$.　　(×)

2、设 $A\in C^{n\times n}$ 为正规矩阵，则矩阵的谱半径 $r(A)=\|A\|_2$.　　(∨)

3、设 $A\in C^{n\times n}$ 可逆，$B\in C^{n\times n}$，若对算子范数有 $\|A^{-1}\|\cdot\|B\|<1$，则 $A+B$ 可逆.

(∨)

4、设 $A=\begin{pmatrix}0 & -a_3 & a_2\\ a_3 & 0 & -a_1\\ -a_2 & a_1 & 0\end{pmatrix}$ 为一非零实矩阵，则 $-(a_1^2+a_2^2+a_3^2)^{-1}A$ 为 A 的一个广义逆矩阵　　(∨)

5、设 A 为 $m\times n$ 矩阵，P 为 m 阶酉矩阵, 则 PA 与 A 有相同的奇异值.　　(∨)

6、设 $A\in C^{n\times n}$，且 A 的所有列和都相等，则 $r(A)=\|A\|_\infty$.　　(×)

7、如果 $x=(x_1,x_2,\cdots,x_n)^T\in C^n$，则 $\|x\|=\min\limits_{1\le i\le n}|x_i|$ 是向量范数.　　(×)

8、$A=\begin{bmatrix}0&0&1&0\\1&4&0&1\\1&0&6&2\\0&1&1&8\end{bmatrix}$ 至少有 2 个实特征值.　　(∨)

9、设 $A\in C^{n\times n}$, 则矩阵范数 $\|A\|_{m_\infty}$ 与向量的 1-范数相容.　　(∨)

10、设 $A\in C^{n\times n}$ 是不可逆矩阵，则对任一自相容矩阵范数 $\|\square\|$ 有 $\|I-A\|\ge 1$, 其中 I 为单位矩阵.　　(∨)

二、计算与证明（60 分）

1. (10 分)设矩阵 $A\in C^{n\times n}$ 可逆, 矩阵范数 $\|\cdot\|$ 是 C^n 上的向量范数 $\|\cdot\|_v$ 诱导出的算子范数, 令 $L(x)=Ax$, 证明:

$$\frac{\max\limits_{\|x\|_v=1}\|L(x)\|_v}{\min\limits_{\|y\|_v=1}\|L(y)\|_v}=\|A\|\cdot\|A^{-1}\|.$$

证明: 根据算子范数的定义, 有 $\max\limits_{\|x\|=1}\|L(x)\|=\|A\|$,

$$\|A^{-1}\|=\max_{x\neq 0}\frac{\|A^{-1}x\|}{\|x\|}\overset{y=A^{-1}x}{=}\max_{y\neq 0}\frac{\|y\|}{\|Ay\|}=\frac{1}{\min\limits_{y\neq 0}\dfrac{\|Ay\|}{\|y\|}}=\frac{1}{\min\limits_{\|y\|=1}\|Ay\|}=\frac{1}{\min\limits_{\|y\|=1}\|L(y)\|},$$

结论成立.

2.(10 分) 已知矩阵 $A=\begin{pmatrix}1&1&0&1\\0&1&1&0\\1&2&1&1\end{pmatrix},b=\begin{pmatrix}3\\1\\4\end{pmatrix}$,

(1) 求矩阵 A 的最大秩分解;

(2) 求 A^+;

(3) 用广义逆矩阵方法判断方程组 $Ax=b$ 是否有解?

(4) 求方程组 $Ax=b$ 的最小范数解或最佳逼近解?(要求指出所求的是哪种解)

解: (1) $A=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\\1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&1&0&1\\0&1&1&0\end{pmatrix}=BD$,

(2) $B^+=(B^TB)^{-1}B^T=\frac{1}{3}\begin{pmatrix}2&-1&1\\-1&2&1\end{pmatrix}$, $D^+=D^T(DD^T)^{-1}=\frac{1}{5}\begin{pmatrix}2&-1\\1&2\\-1&3\\2&-1\end{pmatrix}$,

$$A^+=D^+B^+=\frac{1}{15}\begin{pmatrix}5&-4&1\\0&3&3\\-5&7&2\\5&-4&1\end{pmatrix},$$

(3) $AA^+b=b=\begin{pmatrix}3\\1\\4\end{pmatrix}$, 方程组 $Ax=b$ 有解;

(5) 最小范数解: $x_0=A^+b=\begin{pmatrix}1&1&0&1\end{pmatrix}^T$.

3. (10 分) 设矩阵 $A\in C^{n\times n}$ 为单纯矩阵, 证明: A 的特征值都是实数的充分必要条件是存在正定矩阵 $H\in C^{n\times n}$, 使得 HA 为 Hermite 矩阵.

证明: (充分性) $Ax=\lambda x(x\neq 0)$, $x^HHAx=\lambda x^HHx\in R$, ($x^HHx>0$, $x^HHAx\in R$), $\lambda\in R$.

(必要性) A 为单纯矩阵, 所以 $A=P^{-1}DP,\ D=diag(\lambda_1,\cdots,\lambda_n),\lambda_i\in R$,

令 $H=P^HP$, 则 $HA=P^HPP^{-1}DP=P^HDP$ 为 Hermite 矩阵.

4. (10 分) 设矩阵 $A\in C^{n\times n}$ 为行严格对角占优矩阵, 用 Gerschgorin 圆盘定理证明:

(1) 矩阵 A 为可逆矩阵;

(2) 如果矩阵A的所有主对角元均为负数，证明A的所有特征值都有负实部.

证明：(1)A 行严格对角占优$\Rightarrow R_i=\sum_{j\neq i}|a_{ij}|<|a_{ii}|$

$$\Rightarrow \lambda_i\in\bigcup_{i=1}^{n}S_i\quad (S_i=\{z\in C:|z-a_{ii}|<|a_{ii}|\})\Rightarrow 0\notin S_i\Rightarrow 0\notin\bigcup_{i=1}^{n}S_i$$

$(2)a_{ii}<0,|\lambda-a_{ii}|<|a_{ii}|\Rightarrow A$ 的特征值都有负实部

5. (10 分)

(1) 设矩阵$A\in C^{m\times n}(m<n)$，且$AA^H=I_m$，其中I_m为单位矩阵，证明A^HA酉相似于对角矩阵，并求此对角矩阵.

证明: 由于矩阵A^HA和$AA^H=I_m$的非零特征值相同，所以矩阵A^HA的特征值为 1(m个)和 0($n-m$个)，同时由于矩阵A^HA为 Hermite 矩阵，所以矩阵A^HA酉相似于对角矩阵

$$D=\begin{pmatrix} I_m & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}_{n\times n}$$

(2) 设矩阵$A\in C_n^{m\times n}$，证明: $\|AA^+\|_2=1$.

证明：令 $B=AA^+\Rightarrow B^2=B$．设 B 的特征值为 λ，则 $\lambda^2=\lambda$，即 $\lambda=0,1$．设 $x\in C^n,x\neq 0\Rightarrow Ax\neq 0$，所以有$B(Ax)=AA^+Ax=1\cdot(Ax)$，即 1 是矩阵$B$的特征值，故 $r(B)=1$，$\Rightarrow\|B\|_2=[r(B^HB)]^{1/2}=r(B)=1$.

6. (10 分) (1) 设矩阵$A=(a_{ij})_{n\times n}$，则

$$\|A\|_a=n\cdot\max_{i,j}|a_{ij}|$$

是矩阵范数.

(2) 设$x,y,p,q\in C^n$为非零列向量，矩阵$A=xp^H+yq^H$,其中$x\perp y,p\perp q$，求$\|A\|_{m_2}$.

解：(1) $A\neq 0\Rightarrow a_{ij}$不全为零$\Rightarrow\|A\|_a=n\cdot\max_{i,j}|a_{ij}|>0$;

$$\|kA\|_a=n\cdot\max_{i,j}|ka_{ij}|=|k|n\cdot\max_{i,j}|a_{ij}|=|k|\|A\|_a;$$

$$\|A+B\|_a=n\cdot\max_{i,j}|a_{ij}+b_{ij}|\le n\cdot\max_{i,j}|a_{ij}|+n\cdot\max_{i,j}|b_{ij}|=\|A\|_a+\|B\|_a$$

(2) $A=xp^H+yq^H$,其中$x\perp y,p\perp q\Rightarrow$

$$A^HA=(xp^H+yq^H)^H(xp^H+yq^H)=\|x\|_2^2\,pp^H+\|y\|_2^2\,qq^H\Rightarrow$$

$\|x\|_2^2\|p\|_2^2+\|x\|_2^2\|q\|_2^2 p,q$ 为矩阵 $A^H A$ 对应于 $\|x\|_2^2\|p\|_2^2$,

$\|x\|_2^2\|q\|_2^2$ 的特征向量.

又因为 $rank(A^H A)=rank(A)\le 2 \Rightarrow rank(A^H A)=rank(A)=2 \Rightarrow$

$\|x\|_2^2\|p\|_2^2, \|x\|_2^2\|q\|_2^2$ 为 $A^H A$ 全部非零特征值

所以 $\|A\|_{m_2}{}^2=\sum_{i=1}^{n}\lambda_i(A^H A)=\|x\|_2^2\|p\|_2^2+\|x\|_2^2\|q\|_2^2 \Rightarrow \|A\|_{m_2}=\sqrt{\|x\|_2^2\|p\|_2^2+\|x\|_2^2\|q\|_2^2}$