考试科目：矩阵理论
考试形式：闭卷
考试日期：2017 年秋
考试时长：2 小时

一. 判断题（正确的打“✓”，错误的打“X”，每题 3 分，共 15 分）

1. 矩阵序列 $\{A^{(k)}\}$ 收敛于 A 的充分必要条件是以任意范数 $\lim_{k\to\infty}||A^{(k)}|| = ||A||$ (______)
2. 若 n 阶方阵 A 的存在某矩阵范数 $||\bullet||$ 使得 $||A|| < 1$，则 A 为收敛矩阵. (______)
3. 设 u 为 n 维单位列向量, E 为单位矩阵, $A = E - 2uu^H$: 若 $Aa = b$, 则 $||a||_2 = ||b||_2, (a,b) = (b,a)$. (______)
4. 若 $A = (a_{ij})$ 是 n 阶正定矩阵，则有 $\det(A) \le a_{11}a_{22}\dots a_{nn}$. (______)
5. A 为正规矩阵，则 $A^+A = AA^+$. (______)

二. 选择题（每题 3 分，共 15 分）

1. 设 A 为 n 阶可逆矩阵，$r(A)$ 是其谱半径，$||\bullet||$ 为自相容矩阵范数，则必有 .... (______)
   A. $||A^{-1}|| \le 1/||A||$ B. $r(A^n) \le ||A||^n$ C. $||A^n|| \ge ||A||^n$ D. $||A|| \ge r(A^HA)$
2. 下列命题错误的是 .... (______)
   A. 若 $A^2 = A(\ne 0)$ 且 $A = BC$ 为满秩分解，则 $CB = E$（E 为单位矩阵）.
   B. $A \in C^{m\times n}, b \in C^m$，则 $A^HAx = A^Hb$ 一定有解.
   C. $N(A^-A) \ne N(A)$.
   D. $A \in C_r^{m\times n}(r > 0)$，则 AA^+ 的正奇异值之和为 r.
3. 下列命题错误的是 .... (______)
   A. 矩阵 A 的每个行盖尔圆盘不一定包含 A 的特征值.
   B. 严格对角占优的矩阵一定是可逆矩阵.
   C. 若 n 阶实矩阵 A 的 n 个圆盘两两互不相交，则 A 一定相似于对角矩阵.
   D. 若 A 为 $Hermite$ 矩阵，则 A 的特征值都为非负实数.
4. 下列结论“错误”的是 .... (______)
   A. 若 A 和 B 分别是列满秩和行满秩矩阵，则 $(AB)^+ = B^+A^+$.
   B. 实反对称矩阵，一定能够酉相似对角化.
   C. 对任意矩阵 A，A^HA 和 AA^H 具有相似的特征值.
   D. 设 $A \in C^{m\times n}$ 和 $B \in C^{n\times m}$，则 AB 和 BA 有相同的非零特征值.
5. 设 σ_i 为矩阵 A 的奇异值，下列结论“正确”的是 .... (______)
   A. $(AB)^+ = B^+A^+$ B. $||A^+||_F^2 = \sum_n^{i=1}\sigma_i^2$ C. $rank(A) = rank(A^+)$ D. $(A^-)^- = A$

三. 计算和证明题（共 70 分）

1. （10 分） 设 $||A||_a$ 是 $C^{n\times m}$ 上的矩阵范数，D 为 n 阶可逆矩阵，证明：对任意 $A \in C^{n\times n}$，$||A||_b = ||D^{-1}AD||_a$ 为 $C^{n\times n}$ 上的矩阵范数.

.

2. （10 分） 设 $A \in C^{n\times n}$ 是单纯矩阵，则 A 可分解为一系列幂等矩阵 A_i 的加权和，即 $A = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i A_i$，其中 $\lambda_i (i = 1, 2, \ldots, n)$ 是 A 的特征值.

3. （10 分）（Rayleigh-Ritz 定理）设 $A \in C^{n\times n}$ 为 Hermite 矩阵，证明：A 的最小特征值 $\lambda_{\min} = \min_{x^H x=1} x^H Ax$.

4. （10 分） 设 $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -8 & 1 \end{pmatrix}$，$B = \frac{1}{6}A$，完成下列计算：（1）$\sum_{k=0}^{\infty} B^k$；（2）$\sin(At)$.

.

5. （15 分） 设矩阵 $A=\begin{pmatrix}1&2&2&1\\1&1&1&1\\2&1&1&2\end{pmatrix},b=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$，（1）求矩阵 A 的最大秩分解；（2）求矩阵 A 的 $M-P$ 逆 A^+；（3）判断方程组 $Ax=b$ 是否有解；（4）求方程组 $Ax=b$ 的通解及最小范数解或最小二乘解通解及其最佳逼近解（指出所求的是哪种解）.

6. （9 分） 设 $A \in C^{n\times n}$ 为正规矩阵，(1）证明：A 的奇异值等于 A 的特征值的模；(2）证明：A^+ 为正规矩阵.

7. （6 分） 设 $A \in C_r^{m\times n}$，E 为 n 阶单位矩阵，证明：$rank(E - A^+A) = n - r$.

电子科技大学研究生试卷

（考试时间：10:00-12:00 共：2 小时）

课程名称：矩阵理论　　教师：刘福体　　学时：60　　学分：3

教学方式：堂上教学　　考试日期：2014 年 12 月 31 日　　成绩：___

考核方式：________（学生选填）

一、　　选择题（每题 4 分，共 20 分）

1、若 A、B 为 n 阶方阵，下列结论错误的是……………………………………（　　）

A. $(\mathrm{A}\otimes\mathrm{B})^{H}=A^{H}\otimes B^{H}$　　B. $\det(\mathrm{A}\otimes B)=\det(\mathrm{A})\det(\mathrm{B})$

C. $\mathrm{tr}(\mathrm{A}\otimes\mathrm{B})=tr(A)tr(B)$　　D. $(\mathrm{A}\otimes\mathrm{B})^{+}=A^{+}\otimes B^{+}$

2. A 是正规矩阵，则下列说法错误的是……………………………………（　　）

A. A 的不同特征值对应的特征向量正交　　B. A^{+} 是正规矩阵

C. A 的特征值为 A 的奇异值　　D. 若 A 的特征值为 λ_i，则 $\|A\|_F^2=\sum_{i=1}^{n}|\lambda_i|^2$

3. 下列命题错误的是……………………………………（　　）

A. $AB=AC\Leftrightarrow A^{+}AB=A^{+}AC$

B. $\mathrm{rank}(\mathrm{AB})=\mathrm{rank}(\mathrm{A})$，则 $R(\mathrm{AB})=\mathrm{R}(\mathrm{A})$。

C. A 正规，则 A 的特征向量也是 A^{H} 的特征向量。

D. $A^2=A$，且 $A=BC$，则 $CB=E$（单位矩阵）。

4. 设 $A=\begin{bmatrix} c & 0 \\ c & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$，若 $\sum_{k=0}^{\infty}A^k$ 收敛，则 c 为……………………………………（　　）

A. $c\ge\frac{1}{2}$　　B. $|\mathrm{c}|\ge 1$　　C. $|\mathrm{c}|\le 1$　　D. $|\mathrm{c}|<1$

5.下列结论正确的是……………………………………（　　）

A. $(\mathrm{AB})^{+}=B^{+}A^{+}$　　B. $\|\mathrm{A}\|_F^2=\sum_{i=1}^{n}\sigma_i^2$

C. $rank(\mathrm{A})=\mathrm{rank}(\mathrm{A}^{+})$　　D. $(\mathrm{A}^{-})^{-}=A$

二、计算和证明（共 80 分）

1、（9 分）设 A、$B \in C^{n\times n}$，证明：$\|AB\|_{m2} \le \|A\|_{m2}\|B\|_{m2}$

2、（9 分）设 $A=(a_{ij})\in C^{n\times n}$ 既是正规矩阵，又是上三角矩阵，证明：A 一定是对角矩阵。

3、（8 分）求矩阵 $A=\begin{bmatrix}1 & 1\\ 4 & 1\end{bmatrix}$ 的谱分解。

4、（8 分）设 $A=(a_{ij})\in C^{n\times n}$，证明：$A$ 的任一特征值 $\lambda \in S=\bigcup_{i=1}^{n} S_i$，其中 $S_i=\{z\in C: |z-a_{ii}| < R_i=\sum_{j\ne i}|a_{ij}|\}$.

5.（8 分）若 $A=\begin{bmatrix}3 & 1\\1 & 3\end{bmatrix}$ ，计算 $\sin(\mathrm{A})$.

6.（8 分）设 A 是秩为 1 的 n 阶矩阵，$tr(\mathrm{A})$ 为 A 的迹。证明：$A^n=(trA)^{n-1}A$.

7.（8 分）设 $A\in C^{m\times n}$，证明：$\|\mathrm{A}^{+}\mathrm{A}\|_{m2}^{2}=m$.

8.（15 分）已知 $A=\begin{bmatrix}0 & 1 & -1\\-1 & 0 & 1\\1 & -1 & 0\\0 & 1 & -1\end{bmatrix}$ ，$b=\begin{bmatrix}1\\-1\\0\\1\end{bmatrix}$。

（1）求矩阵 A 的最大秩分解；

（2）求 A^{+}；

（3）判断方程组 $Ax=b$ 是否有解；

（4）求方程组 $Ax=b$ 的最小范数解及通解或最小二乘解通解及最佳范数解？（指出所求的是哪种解）

9.若 $A \in C^{m \times n}$， A^{-} 是 A 的广义逆矩阵，则 A^{-} 是 A 的自反广义逆矩阵的充要条件是

$rank(\mathrm{A}) = \mathrm{rank}(\mathrm{A}^{-})$ 。

电子科技大学研究生试卷

（考试时间：16:20 至 18:20，共 2 小时）

课程名称 矩阵理论 教师________ 学时 60 学分 3

教学方式 课堂讲授 考核日期 2013 年 12 月 27 日 成绩________

考核方式：________（学生填写）

学院________ 姓名________ 学号________

密封线以内答题无效

符号说明： E 表示单位矩阵，Vec(A)表示矩阵 A 向量化算符，λ_i 和 σ_i 分别表示矩阵的第 i 个特征值和奇异值，$N(A)$ 和 $R(A)$ 分别表示矩阵 A 的核和值域，rank(A)表示矩阵 A 的秩。

一． 判断题，对的打 √，错得打×。(每题 4 分，共 20 分)

1. 矩阵 A 为 n 阶方阵，则 $\|A\|_{m_2}^2=\sum_{i=1}^{n}|\lambda_i|^2$。……………………………………………( )

2. 若 $A^H=\begin{bmatrix}0&1&0\\1&1&0\end{bmatrix}$，$B=\begin{bmatrix}0&1&0\\1&2&1\end{bmatrix}$，则 $(AB)^+=B^+A^+$。………………………( )

3. 设 $A=\begin{bmatrix}2\pi&0&0\\0&0&2\\0&0&0\end{bmatrix}$，则 $\cos A=\begin{bmatrix}0&0&0\\0&1&1\\0&0&1\end{bmatrix}$。……………………………………... ( )

4. 设 A,B 为任意矩阵，则 $(A\otimes B)^+=A^+\otimes B^+$。…………………………………….( )

5. 设 $A\in C^{n\times n}$，其奇异值为 $\sigma_1\ge\cdots\ge\sigma_n$，特征值为 $\lambda_1,\cdots,\lambda_n$，则 $\sigma_n\le|\lambda_i|\le\sigma_1$。….( )

二． 选择题（每题 4 分，共 20 分）

1. 若 $A\in C^{n\times n}$ 是幂等矩阵，则下列说法***错误***的是………………………………… ( )

   A. rank(A)等于非零特征值的个数. B. 矩阵 A 可对角化.

   C. $N(A)=R(E-A)$. D. $C^n=R(A)\oplus N(A)$.

2. 设 $A,B\in C^{n\times n}$，下列说法***错误***的是……………………………………………….（ ）

   A. $\mathbf{tr}(A\otimes B)=\mathbf{tr}(A)\mathbf{tr}(B)$. B. $\mathbf{rank}(A\otimes B)=\mathbf{rank}(A)\mathbf{rank}(B)$.

   C. $\mathbf{Vec}(AXB)=(B\otimes A)\mathbf{Vec}(X)$. D. 若 rank($AB$)=rank($A$)，则 $R(A)=R(AB)$.

3.下列结论***错误***的是 ……………………………………………………………………………(　　)

A．n 阶矩阵 A 的 n 个盖尔圆两两互不相交，则 A 为单纯矩阵.

B．λ 为 n 阶酉矩阵 U 的特征值,则 $|\lambda|=1$.

C. 正规矩阵的特征值与奇异值相同.

D. n 阶方阵 A 有零特征值,则 A 不是严格对角占优矩阵.

4．下列结论***正确***的是………………………………………………………………………. (　　)

A. A 为 n 阶方阵， 则 $r(A^H A)\geq\|A\|_1\bullet\|A\|_\infty$.

B. 设 A 为正定 Hermite 矩阵，则 $A=R^H R$ 分解唯一，其中 R 为正线上三角复矩阵.

C. 若 n 阶方阵 A 满足 $A^H=A$， 则 $\sqrt{x^H Ax}$ 为 C^n 上的向量范数.

D. A 为 n 方阵,则 $(A^2)^+=(A^+)^2$.

5.关于收敛矩阵 A **等价**说法***错误***的是 ……………………………..…............................（　　）

A. $\|A\|_2<1$.　B. 谱半径 $r\left(A\right)<1$.　C. $\sum_{k=0}^{\infty}A^k$ 收敛.　D. $\lim_{k\to 0}A^k=O$.

三．计算和证明（共 60 分）

1. 设 $A\in P^{m\times n}$，**证明**：从属于向量 2 范数 $\|x\|_2$ 的算子范数为 $\|A\|_2=\sqrt{r(A^H A)}$, 其中 $r(A^H A)$ 是矩阵 $A^H A$ 的谱半径.（10 分）

2. 设 $A\in C^{n\times n}$，$A^H=A$， $f(x)=x^H Ax, x\in C^n$，**证明**：在 $\|x\|_2=1$ 的情况下 $f(x)$ 有界,并求出最大值和最小值。(即证明 Rayleigh-Ritz 定理)。 (10 分)

3. 已知矩阵 $A=\begin{pmatrix}1&1&0\\1&1&2\\0&0&2\end{pmatrix},b=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$,

(1) 求矩阵 A 的最大秩分解; **(2)** 求 A^{+}; **(3)**判断方程组 $Ax=b$ 是否有解?

(4) 求方程组 $Ax=b$ 的最小范数解及通解或最小二乘解通解及其最佳逼近解?(指出所求的是哪种解) . (15 分)

学号＿＿＿＿＿ 姓名＿＿＿＿＿ 学院＿＿＿＿＿

密……封……线……以……内……答……题……无……效

4. 设 $A\in C_r^{m\times n}$ (*r*>0)的正奇异值为 $\sigma_1\geq\cdots\geq\sigma_r$， $B=\begin{bmatrix}A^{+}, & A^{+}\end{bmatrix}$ 的正奇异值为 $\eta_1\geq\cdots\geq\eta_r$，证明：$\sum_{i=1}^{r}\eta_i^2=2\sum_{i=1}^{r}\frac{1}{\sigma_i^2}$。（10 分）

5. 设 d_i 为 m 个非零常数，$P=\left(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m\right)\in C^{n\times m}$，

$$A=d_1\alpha_1\alpha_1^H+d_2\alpha_2\alpha_2^H+\cdots+d_m\alpha_m\alpha_m^H,$$

证明：矩阵 P 列满秩的**充要条件**是 rank(A) =m. (10 分)

6. 设 $A\in C^{n\times n}$，且 $\|A\|_2<1$，证明：$\left(E+A\right)$ 可逆，且 $\left\|\left(E+A\right)^{-1}\right\|_2\le\dfrac{1}{1-\|A\|_2}$. (5 分)

学院________ 姓名________ 学号________

……密……封……线……以……内……答……题……无……效……

电子科技大学研究生试卷

（考试时间： 14:00 至 16:00 ，共 2 小时）

课程名称 矩阵理论 教师__________ 学时 60 学分 3

教学方式__________ 考核日期 2011 年 12 月 22 日 成绩__________

考核方式：__________（学生填写）

一. 选择题（每题 4 分，共 20 分）

1. 设 A 为 n 阶可逆矩阵，$r(A)$是其谱半径，$\|\bullet\|$是一种相容矩阵范数，则必有….（ ）

A. $\|A^{-1}\|\le 1/\|A\|$. B. $\|A^n\|\le\|A\|^n$. C. $\|A^n\|\ge\|A\|^n$. D. $\|A\|\ge r\left(A^H A\right)$.

2. 设 $A\in C^{m\times n}$，U 为 n 阶酉矩阵，下列说法***错误***的是…………………………（ ）

A. $\|A\|_F=\|AU\|_F$ B. A 和 AU 的特征值相同

C. A 和 AU 的正奇异值相同 D. rank(A)=rank(AU)

3. 下列命题***错误***的是……………………………………………………………（ ）

A. 任何矩阵范数都存在与之相容的向量范数.

B. 正规矩阵一定是单纯矩阵.

C. 设 $A\in C_r^{m\times n}$ 的一个广义逆矩阵为 G，$A=BD$ 为 A 的最大秩分解，则 rank(DGB)=r.

D. 若存在某种算子范数$\|\bullet\|$使得$\|A\|<1$，则 A 为收敛矩阵，其中 A 为 n 阶方阵.

4.设 $A=\begin{bmatrix}\frac{1}{4} & 0\\ 0 & \frac{1}{2}\end{bmatrix}$，则 $\sum_{k=1}^{\infty}kA^{k-1}$ 为………………………………………………...（ ）

A. $\begin{bmatrix}\frac{1}{12} & 0\\ 0 & 2\end{bmatrix}$ B. $\begin{bmatrix}\frac{4}{9} & 0\\ 0 & \frac{1}{4}\end{bmatrix}$ C. $\begin{bmatrix}\frac{16}{9} & 0\\ 0 & 4\end{bmatrix}$ D. $\begin{bmatrix}\frac{8}{9} & 0\\ 0 & 2\end{bmatrix}$

5. 设 A 为 n 阶单纯矩阵，则下列结论***正确***的是…………………………………….（ ）

A. A 有 n 个正交的特征向量 B. $\|A\|_{m_2}^2=\sum_{i=1}^{n}|\lambda_i|^2$

C. $A^H=A$ D. A 的特征值的几何重数之和为 n.

二．判断题，对的打 √，错得打×。（每题 4 分，共 20 分）

1. 设 $A\in C_n^{n\times n}$，且方程组(A+B)x=0 有非零解，则对 $C^{n\times n}$ 中任意算子范数都有 $\|A^{-1}B\|\le 1$。…(　　)

2. 设 $A\in C_n^{m\times n}$，$\|\bullet\|$ 是 $C_n^{m\times n}$ 上某种相容矩阵范数，若 $\|A\|<1$，则 $\|A^{+}\|>1$。…………………..(　　)

3. 设 $A=\begin{bmatrix}\pi & 0 & 0\\ 0 & 0 & 2\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix}$，则 cos$A$=$\begin{bmatrix}0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$。…………….……………………………………... (　　)

4. 设 $A\in C^{m\times n}$ 是左可逆矩阵，A_L^{-1} 是 A 的一个左逆矩阵，则 $R(A)=N(E_m-AA_L^{-1})$。…….(　　)

5. **设** $A=\begin{bmatrix}0 & 1 & 0\\ 1 & 0 & 1\end{bmatrix}$，则 $\|A^{+}A\|_2=1$。……………………………………………………………(　　)

三．计算和证明（共 60 分）

1. 设 $A=(a_{ij})\in P^{m\times n}$，证明：$\|A\|=(m+n)\max\limits_{i,j}\{|a_{ij}|\},(1\le i\le m,1\le j\le n)$ 是矩阵范数，并且证明当 m=n 时是相容矩阵范数。（10 分）

2. 证明：矩阵 $A=\begin{pmatrix}2 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2^2} & \frac{1}{2^3} & \frac{1}{2^4}\\ -\frac{2}{3} & 4 & \frac{2}{3^2} & \frac{2}{3^3} & \frac{2}{3^4}\\ -\frac{3}{4} & -\frac{3}{4^2} & 6 & \frac{3}{4^3} & \frac{3}{4^4}\\ -\frac{4}{5} & -\frac{4}{5^2} & -\frac{4}{5^3} & 8 & \frac{4}{5^4}\\ -\frac{5}{6} & -\frac{5}{6^2} & -\frac{5}{6^3} & -\frac{5}{6^4} & 10\end{pmatrix}$ 的特征值为两两不相等的正实数.（10 分）

3. 已知矩阵 $A=\begin{pmatrix}0 & 2 & 0\\ 1 & 0 & 2\\ 0 & 1 & 0\end{pmatrix}, b=\begin{pmatrix}1\\ 1\\ 1\end{pmatrix}$,

(1) 求矩阵 A 的最大秩分解; (2) 求 A^{+}; (3)判断方程组 $Ax=b$ 是否有解?

(4) 求方程组 $Ax=b$ 的最小范数解及通解或最小二乘解通解及其最佳逼近解?(指出所求的是哪种解) . (15 分)

4. 设 $A\in C_r^{m\times n}$ (r>0)的正奇异值为 $\sigma_1\geq\cdots\geq\sigma_r$， $B=\left[A^{+}，\ A^{+}\right]$ 的正奇异值为 $\eta_1\geq\cdots\geq\eta_r$，证明：$\sum_{i=1}^{r}\eta_i^2=2\sum_{i=1}^{r}\frac{1}{\sigma_i^2}$。（10 分）

5. 设 $A \in C^{n\times n}$, A 有 k 个相异特征值 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_k$ ，证明：A 是正规矩阵的充要条件是存在 k 个矩阵 A_i 使其满足(1) $A_iA_j = O(i \neq j), A_iA_i = A_i$; (2) $\sum_{i=1}^{k} A_i = E_n$; (3) $A = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i A_i$; (4) $A_i^H = A_i$. $(i = 1,\cdots k)$。 (10 分)

6. 设 $A \in C_r^{m\times n}, Y \in C^{n\times r}, Z \in C^{r\times m}$，且 $ZAY = E_r$, 证明：$G = YZ$ 是 A 的自反广义逆矩阵. (5 分)