《数值分析》 期末复习

- 重点知识点复习

第一部分 非线性方程求根方法

- ➔不动点迭代的一般理论
- ➔牛顿迭代法迭代格式
- ➔牛顿迭代法误差估计和收敛速度分析
- ➔非线性方程组迭代法

不动点迭代的一般理论

$f(x) = 0 \quad \rightarrow \quad x = \varphi(x)$

若存在 x^*, 使得 $x^* = \varphi(x^*)$ 则称 x^* 为 $\varphi(x)$ 的不动点

$\varphi(x)$ —— 迭代函数

$$x_{n+1} = \varphi(x_n)$$

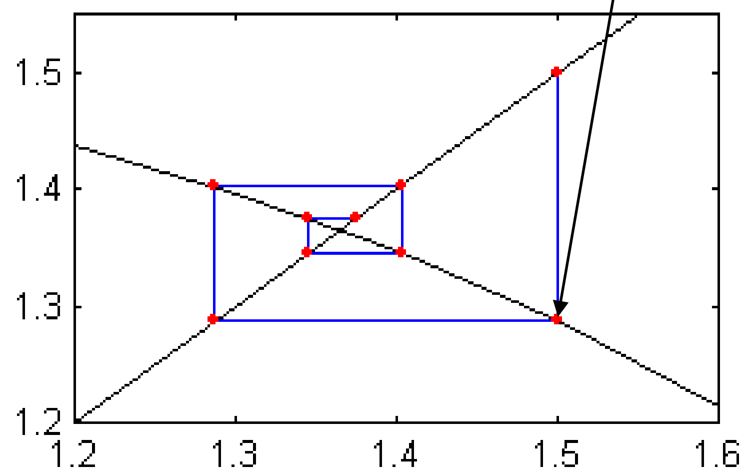
$$\rightarrow \begin{cases} y_n = \varphi(x_n) \\ x_{n+1} = y_n \end{cases}$$

$(x_n, y_n) \rightarrow (x_{n+1}, y_n)$

$\rightarrow (x_{n+1}, y_{n+1})$

…………

$$\varphi(x) = \sqrt{10 - x^3} / 2$$



不动点迭代蛛网图

举例1： 方程 $x^3 + 4x^2 - 10 = 0$ 在 $[1, 2]$ 上有一个根，将方程变换成另一形式

(1) $x = \sqrt{10 - x^3} / 2 \qquad \varphi(x) = \sqrt{10 - x^3} / 2$

$x_{n+1} = \varphi(x_n) \quad (n = 0, 1, 2, \cdots\cdots)$

$x_0 = 1.5$

(2) $x = \sqrt{10/(x+4)} \qquad \varphi(x) = \sqrt{10/(x+4)}$

$x_{n+1} = \varphi(x_n) \quad (n = 0, 1, 2, \cdots\cdots)$

$x_0 = 1.5$

唯一性？构造规律？构造有效？

$$x_{n+1} = \frac{1}{2}\sqrt{10 - x_n^3}$$

n	x_n	$\| x_{n+1} - x_n \|$
0	1.5000	
1	1.2870	2.1e-1
2	1.4025	1.1e-1
3	1.3455	5.7e-2
4	1.3752	2.9e-2
5	1.3601	1.5e-2
6	1.3678	7.7e-3
7	1.3639	3.9e-3
8	1.3659	2.0e-3
9	1.3649	1.0e-3
10	1.3654	5.3e-4

$$x_{n+1} = \sqrt{\frac{10}{x_n + 4}}$$

n	x_n	$\| x_{n+1} - x_n \|$
0	1.5000	
1	1.3484	1.5e-1
2	1.3674	1.8e-2
3	1.3650	2.4e-3
4	1.3653	3.0e-4
5	1.3652	3.9e-5
6	1.3652	4.9e-6

引理2.1 如果 $\varphi(x)\in C^1[a,\ b]$,满足条件:

(1) $a\le\varphi(x)\le b$; (2) $|\varphi'(x)|\le L<1$

则 $\varphi(x)$在 $[a, b]$ 有**唯一**的**不动点** x^*

证: 1)若$\varphi(a)=a$或$\varphi(b)=b$,显然 $\varphi(x)$有不动点

设 $\varphi(a)\ne a, \varphi(b)\ne b$ 则有 $\varphi(a)>a, \varphi(b)<b$

记 $\psi(x)=\varphi(x)-x$ 则有 $\psi(a)\cdot\psi(b)<0$

所以, 存在 x^*, 使得 $\psi(x^*)=0$

即 $x^*=\varphi(x^*)$故 x^* 是$\varphi(x)$的不动点.

2) 如果 $\varphi(x)$ 有两个不同的不动点 $x_1^* \neq x_2^*$ 则有

$$x_1^* = \varphi(x_1^*) \qquad x_2^* = \varphi(x_2^*)$$

两式相减得

$$x_1^* - x_2^* = \varphi(x_1^*) - \varphi(x_2^*)$$

由拉格朗日中值定理知, 存在 ξ 介于 x_1^* x_2^* 之间, 使

$$x_1^* - x_2^* = \varphi(x_1^*) - \varphi(x_2^*) = \varphi'(\xi)(x_1^* - x_2^*)$$

➔ $|x_1^* - x_2^*| = |\varphi'(\xi)| \cdot |x_1^* - x_2^*|$

➔ $|x_1^* - x_2^*| \le L \cdot |x_1^* - x_2^*|$

➔ $1 \le L$ （与 *L*<1 条件矛盾 ）

故不动点唯一。

定理2.4 如果$\varphi(x)\in C^1[a,\ b]$,满足条件:

(1) $a\le\varphi(x)\le b$; (2) $|\varphi'(x)|\le L<1$

则对任意的$x_0\in[a,b]$,迭代格式$x_{n+1}=\varphi(x_n)$产生的**序列$\{x_n\}$收敛到不动点 x^***,且有

$$|x^*-x_n|\le\frac{1}{1-L}|x_{n+1}-x_n|$$

证:

$$\begin{cases}x_n=\varphi(x_{n-1})\\ x^*=\varphi(x^*)\end{cases}\ \Rightarrow\ \begin{aligned}|x_n-x^*|&=|\varphi(x_{n-1})-\varphi(x^*)|\\&=|\varphi'(\xi)|\cdot|x_{n-1}-x^*|\end{aligned}$$

$$\Rightarrow\ |x_n-x^*|\le L|x_{n-1}-x^*|$$

$$|x_n - x^*| \le L^n |x_0 - x^*|$$

$$\lim_{n\to\infty} |x_n - x^*| \le \lim_{n\to\infty} L^n |x_0 - x^*| = 0$$ （0<L<1）

所以， $\lim_{n\to\infty} x_n = x^*$ 故迭代格式收敛

$$|x_n - x^*| = |x_n - x_{n+1} + x_{n+1} - x^*|$$

$$\le |x_n - x_{n+1}| + |x_{n+1} - x^*| \le |x_n - x_{n+1}| + L|x_n - x^*|$$

➔ $$(1-L)|x_n - x^*| \le |x_n - x_{n+1}|$$

➔ $$|x^* - x_n| \le \frac{1}{1-L} |x_{n+1} - x_n|$$

不动点迭代序列的收敛速度

数列的 r 阶收敛(概念)：

设 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x^*$，若存在 $a>0$，$r>0$ 使得

$$\lim_{n\to\infty}\frac{|x_{n+1}-x^*|}{|x_n-x^*|^{r}}=a$$

则称数列$\{x_n\}$ r 阶收敛.

特别: (1) 收敛阶$r=1$时,称为**线性收敛**；（$a<1$）

(2) 收敛阶$r>1$时,称为**超收敛**;

(3) 收敛阶$r=2$时,称为**平方收敛**

序列的收敛**阶数越高**, 收敛速度**越快**

例2.3 方程 $x^3+10x-20=0$,取 $x_0 = 1.5$, 证明迭代法在[1, 2]上，$x_{n+1} = 20/(x_n^2+10)$ 是线性收敛

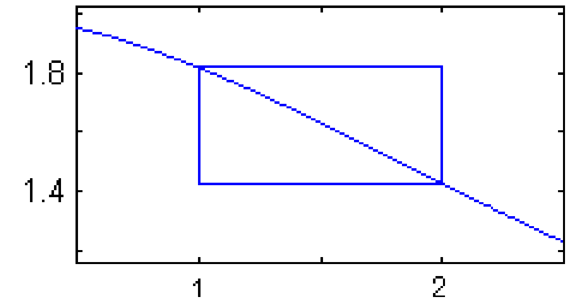
证:令 $\varphi(x) = 20/(x^2+10)$

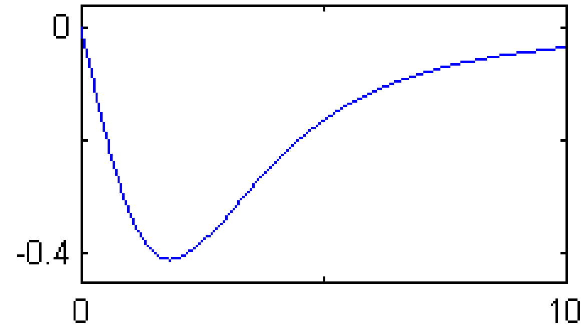
$\Rightarrow$ $\varphi(1) \approx 1.82 \quad \varphi(2) \approx 1.43$

$$\Rightarrow \begin{cases} \varphi'(x) = -40x/(x^2+10)^2 \\ \varphi''(x) = 40\dfrac{3x^2-10}{(x^2+10)^3} \end{cases}$$

$\varphi''(x) = 0 \Rightarrow \hat{x} = \sqrt{10/3}$

$\varphi'(\hat{x}) \approx -0.4108 \Rightarrow |\varphi'(x)| \le 0.411$





显然,在x^*附近 $|\varphi'(x)|<1 \quad \varphi'(x)\neq 0$

利用Lagrange中值定理, 有

$$|x_{n+1}-x^*|=|\varphi(x_n)-\varphi(x^*)|=|\varphi'(\xi_n)||x_n-x^*|$$

其中, ξ_n 介于x_n和x^*之间. 所以

$$\lim_{n\to\infty}\frac{|x_{n+1}-x^*|}{|x_n-x^*|}=\lim_{n\to\infty}|\varphi'(\xi_n)|=|\varphi'(x^*)|$$

由此可知,这一序列的收敛阶数为1,即迭代法是线性收敛.

定理2.6 设x^*是 $\varphi(x)$的不动点,且

$$\varphi'(x^*)=\varphi''(x^*)=\cdots=\varphi^{(p-1)}(x^*)=0$$

而 $\varphi^{(p)}(x^*)\neq 0$**则** $x_{n+1}=\varphi(x_n)$ **p阶收敛**

由Taylor公式

$$|x_{n+1}-x^*|=|\varphi(x_n)-\varphi(x^*)|=\frac{|x_n-x^*|^p}{p!}|\varphi^{(p)}(\xi_n)|$$

其中, ξ_n **介于x_n和x^*之间. 所以**

$$\lim_{n\to\infty}\frac{|x_{n+1}-x^*|}{|x_n-x^*|^p}=\frac{1}{p!}\lim_{n\to\infty}|\varphi^{(p)}(\xi_n)|=\frac{1}{p!}|\varphi^{(p)}(x^*)|$$

故迭代法p阶收敛.

牛顿迭代法迭代格式

牛顿迭代格式 $x_{n+1} = x_n - \dfrac{f(x_n)}{f'(x_n)}$ $(n = 0, 1, 2, \cdots\cdots)$

给定初值 x_0，迭代产生数列

$$x_0, x_1, x_2, \cdots\cdots\cdots, x_n, \cdots\cdots\cdots$$

应用——求正数平方根算法

设 $C > 0$, $x = \sqrt{C}$ $\Rightarrow$ $x^2 - C = 0$

令 $f(x) = x^2 - C$，则 $f'(x) = 2x$

$$x_{n+1} = x_n - \frac{x_n^2 - C}{2x_n} \qquad x_{n+1} = \frac{1}{2}[x_n + \frac{C}{x_n}]$$

牛顿迭代法误差估计和收敛速度分析

Newton迭代法的局部收敛性

定理2.7： 设 $f(x)$ 在点x^*的<u>某邻域内</u>具有二阶连续导数, 且设 $f(x^*)=0$, $f'(x^*) \neq 0$, 则对<u>充分靠近点x^*的初值x_0</u>, Newton迭代法<u>至少平方</u>收敛.

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} \quad \rightarrow \quad \varphi(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)}$$

$$\varphi'(x^*) = f(x^*) f''(x^*)/[f'(x^*)]^2 = 0$$

$$\varphi''(x^*) = \frac{f''(x^*)}{f'(x^*)}$$

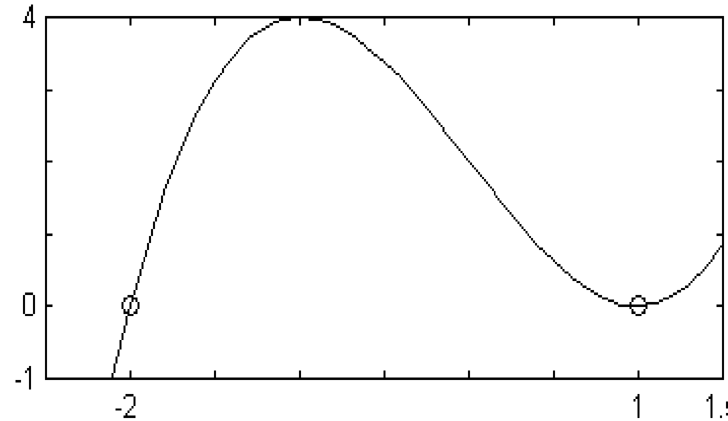
所以, Newton迭代法至少平方收敛 (第3讲定理2.6)

缺陷

1.被零除错误

$f(x)=x^3-3x+2=0$

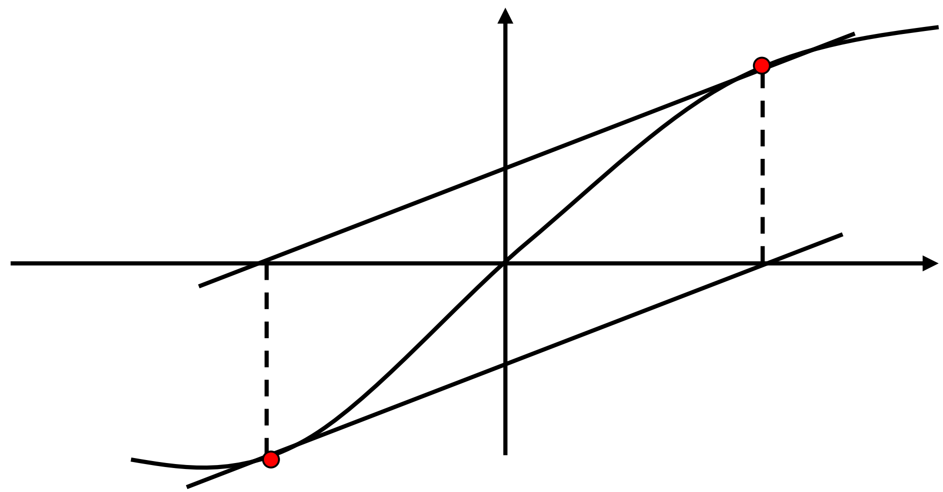
在$x^*=1$附近，$f'(x)\approx 0$



2.程序死循环

对 $f(x)=\arctan x$

存在 x_0, 使Newton迭代法陷入死循环



$y=\arctan x$

3.其它

定理： 若函数$f(x)$ 在$[a，b]$ 上满足条件

（1）$f(a) f(b) < 0$；

（2）$f'(x)$，$f''(x)$ 在$[a，b]$上<u>连续且不变号</u>（恒为正或恒为负）；

（3）取$x_0 \in [a，b]$ 使得 $f(x_0)f''(x_0) > 0$。

则方程 $f(x) = 0$ 在$[a，b]$ 上有<u>唯一根 x^*</u>，且由初值x_0按牛顿迭代公式求得的序列$\{x_n\}$<u>二阶收敛</u>于x^*。

$$f(x^*) = f(x_k) + f'(x_k)(x^* - x_k) + \frac{1}{2} f''(\xi_k)(x^* - x_k)^2 = 0$$

$$x^* - [x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}] = -\frac{f''(\xi_k)}{2f'(x_k)}(x^* - x_k)^2$$

$$x^* - x_{k+1} = -\frac{f''(\xi_k)}{2f'(x_k)}(x^* - x_k)^2$$

$$\lim_{k\to\infty} \frac{|x_{k+1} - x^*|}{(x_k - x^*)^2} = \lim_{k\to\infty} \frac{|f''(\xi_k)|}{2|f'(x_k)|} = \frac{|f''(x^*)|}{2|f'(x^*)|}$$

引理1 设 x^*是 $f(x)=0$ 的二重根, 则牛顿迭代法只具有一阶收敛

证: x^*是二重根 ➔ $f(x)=(x-x^*)^2g(x)$

$$f'(x)=(x-x^*)[2g(x)+(x-x^*)g'(x)]$$

$$\varphi(x)=x-\frac{(x-x^*)g(x)}{2g(x)+(x-x^*)g'(x)}$$

➔ $$\varphi'(x^*)=1-\frac{1}{2}$$ 牛顿迭代法只是一阶收敛.

表明：当有重根时，传统牛顿法二阶收敛性质不成立！

怎么办？

引理2 若 x^*是 $f(x)=0$ 的 m 重根,修正的牛顿迭代法

$$x_{n+1} = x_n - m\frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

为至少二阶收敛

$m = 2$ ➔ $$x_{n+1} = x_n - 2\frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

表5 x^*为二重根时修正的牛顿迭代实验 (例3)

n	x_n	$\vert e_n \vert$	$\vert e_{n+1} \vert / \vert e_n \vert^2$
0	1.5	5.00e-001	
1	1.03333333333	3.33e-002	0.1333
2	1.00018214936	1.85e-004	0.1639
3	1.00000000552	5.52e-009	0.1667

非线性方程组迭代法

问题：　n个方程的n元非线性方程组F(x) = 0

$$\begin{cases} f_1(x_1,x_2\dots,x_n)=0 \\ f_2(x_1,x_2\dots,x_n)=0 \\ \dots\dots \\ f_m(x_1,x_2\dots,x_n)=0 \end{cases}$$

令 $x=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \cdots \\ x_n \end{pmatrix}$，$F(x)=\begin{pmatrix} f_1(x) \\ f_2(x) \\ \cdots \\ f_m(x) \end{pmatrix}$，则方程组可以表示为 $F(x)=\theta$

1）不动点方法 （x = G(x)）

构造 x = x-F(x)的迭代格式

2）牛顿法: x = x – F(x)/F’(x)

$$\vec{x}_{n+1}=\vec{x}_n-(DF(\vec{x}_n))^{-1}\vec{f}(\vec{x}_n)$$

其中： $$DF(\vec{x})=\begin{bmatrix} \frac{\partial f_1(\vec{x})}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1(\vec{x})}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_1(\vec{x})}{\partial x_n} \\ \frac{\partial f_2(\vec{x})}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2(\vec{x})}{\partial x_2} & & \frac{\partial f_2(\vec{x})}{\partial x_n} \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_n(\vec{x})}{\partial x_1} & \frac{\partial f_n(\vec{x})}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_n(\vec{x})}{\partial x_n} \end{bmatrix}$$

第二部分 线性方程组的直接法

- 高斯消元法进行LU分解
- 列主元消元法
- Doolittle法进行LU分解
- 向量范数（三种）定义性质及其计算
- 矩阵范数（三种）定义性质及其计算

高斯消元法进行LU分解

举例： **用高斯消元法对如下系数矩阵A进行三角分解**

$$A=\begin{bmatrix}2&3&4\\3&5&2\\4&3&30\end{bmatrix}\xrightarrow[(-2)r_1+r_3]{(-3/2)r_1+r_2}\quad F_1=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\-\frac{4}{2}&0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&0&0\\-\frac{3}{2}&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}$$

$$\rightarrow A^{(1)}=F_1A=\begin{bmatrix}2&3&4\\0&\frac{1}{2}&-4\\0&-3&22\end{bmatrix}\xrightarrow{6r_2+r_3}\quad F_2=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&\frac{3}{0.5}&1\end{bmatrix}$$

$$\rightarrow A^{(2)}=F_2A^{(1)}=\begin{bmatrix}2&3&4\\0&\frac{1}{2}&-4\\0&0&-2\end{bmatrix}\rightarrow\quad F_2F_1A=A^{(2)}$$

$$\rightarrow A=(F_2F_1)^{-1}A^{(2)}=\overset{L}{\boxed{F_1^{-1}F_2^{-1}}}\overset{U}{\boxed{A^{(2)}}}$$

列主元消元法

例 列主元法

(8位浮点数)

$$\begin{bmatrix} 10^{-8} & 2 & 3 \\ -1 & 3.712 & 4.623 \\ -2 & 1.072 & 5.643 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$$

第一列中绝对值最大为-2，取-2为主元

$$\begin{bmatrix} 10^{-8} & 2 & 3 & 1 \\ -1 & 3.712 & 4.623 & 2 \\ -2 & 1.072 & 5.643 & 3 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} -2 & 1.072 & 5.643 & 3 \\ -1 & 3.712 & 4.623 & 2 \\ 10^{-8} & 2 & 3 & 1 \end{bmatrix}$$

不选主元

$$\begin{bmatrix} 10^{-8} & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 0.2\times 10^{9} & 0.3\times 10^{9} & 0.1\times 10^{9} \\ 0 & 0.4\times 10^{9} & 0.6\times 10^{9} & 0.2\times 10^{9} \end{bmatrix} \rightarrow \text{Error}$$

$$\rightarrow \begin{bmatrix} -2 & 1.072 & 5.643 & 3 \\ 0 & 0.3176\times 10 & 0.18015\times 10 & 0.5 \\ 0 & 0.2\times 10 & 0.3\times 10 & 0.1\times 10 \end{bmatrix}$$

$$\rightarrow \begin{bmatrix} -2 & 1.072 & 5.643 & 3 \\ 0 & 0.3176\times 10 & 0.18015\times 10 & 0.5 \\ 0 & 0 & 0.18655541\times 10 & 0.68513854\times 10 \end{bmatrix}$$

回代计算

x_1=-0.49105820, x_2=-0.050886075, x_3=0.367257384

MATLAB计算

-0.49105816158235　-0.05088609088002　0.3672574102886

Doolittle法进行LU分解

例3.5 求矩阵的Doolittle分解

$$A=\begin{bmatrix} 2 & 4 & 4 & 2 \\ 3 & 3 & 12 & 6 \\ 2 & 4 & -1 & 2 \\ 4 & 2 & 1 & 1 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 2 & 4 & 4 & 2 \\ 3/2 & 3 & 12 & 6 \\ 1 & 4 & -1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 & 1 \end{bmatrix} \rightarrow$$

$$\begin{bmatrix} 2 & 4 & 4 & 2 \\ 3/2 & -3 & 6 & 3 \\ 1 & 0 & -1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 & 1 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 2 & 4 & 4 & 2 \\ 3/2 & -3 & 6 & 3 \\ 1 & 0 & -5 & 0 \\ 2 & 2 & 19/5 & -9 \end{bmatrix}$$

$$L=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0 & 0\\ 3/2 & 1 & 0 & 0\\ 1 & 0 & 1 & 0\\ 2 & 2 & 19/5 & 1\end{bmatrix}\quad U=\begin{bmatrix}2 & 4 & 4 & 2\\ 0 & -3 & 6 & 3\\ 0 & 0 & -5 & 0\\ 0 & 0 & 0 & -9\end{bmatrix}$$

直接分解的运算特点：

①旧元素减去左边行与顶上列向量的点积

②计算行不用除法

③计算列要除主对角元

向量范数（三种）定义性质及其计算

定义3.1： 设 R^n是n维向量空间,如果对任意$x\in R^n$,都有一个实数与之对应,且满足如下三个条件:

(1)正定性: $\|x/\|\geq 0$,且$\|x\|=0 \iff x=0$;

(2)齐次性: $\|\lambda x\|=|\lambda|\,\|x\|$ λ为任意实数

(3)三角不等式: $\|x+y\|\leq\|x\|+\|y\| \quad (y\in R^n)$

则称$\|x\|$为向量x的范数.

三种范数:

$$\|x\|_1=\sum_{i=1}^{n}|x_i|=|x_1|+|x_2|+\cdots+|x_n|$$

$$\|x\|_2=\sqrt{\sum_{i=1}^{n}x_i^2}=\sqrt{x_1{}^2+x_2{}^2+\cdots+x_n{}^2}$$

$$\|x\|_\infty=\max_{1\leq i\leq n}|x_i|=\max(|x_1|,|x_2|,\cdots,|x_n|)$$

定义：如果R^n中有两个范数 $\|x\|_s$ 与 $\|x\|_t$ ，存在常数m, M>0，使对任意n维向量x，有

$$m\|x\|_s \le \|x\|_t \le M\|x\|_s$$ 则称这两个范数等价.

例2. 设$x=(x_1, x_2, \cdots, x_n)^T$,证明

$$\|x\|_\infty \le \|x\|_1 \le n\|x\|_\infty$$

证明: $$\|x\|_1 = |x_1| + |x_2| + \cdots + |x_n|$$

$$\max_{1\le k\le n}|x_k| \le \|x\|_1 \le n \times \max_{1\le k\le n}|x_k|$$

所以 $$\|x\|_\infty \le \|x\|_1 \le n\|x\|_\infty$$

三角不等式的变形: $$\|x-y\| \ge \big|\|x\| - \|y\|\big|$$

矩阵范数（三种）定义性质及其计算

定义3.2 对 $A\in R^{n\times n}$,存在实数||A||满足:

(1)正定性: $\|A\|\geq 0$,且$\|A\|=0 \Leftrightarrow A=0$;

(2)齐次性: $\|\lambda A\|=|\lambda|\,\|A\|$　λ为任意实数

(3)三角不等式: $\|A+B\|\leq\|A\|+\|B\|$ $(B\in R^{n\times n})$

(4)相容性: $\|A\cdot B\|\leq\|A\|\cdot\|B\|$ $(\forall A,B\in R^{n\times n})$

则称 $\|A\|$ 是矩阵 A 的一个范数.

Frobenius范数　$$\|A\|_F=\left(\sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{n}a_{ij}^2\right)^{1/2}$$

矩阵算子范数的概念

设 ||x||是R^n上的向量范数,$A\in R^{n\times n}$,则A的非负函数

$$\|A\| = \max_{x\neq 0}\frac{\|Ax\|}{\|x\|}$$

称为矩阵A的算子范数

注1:矩阵算子范数由向量范数诱导出, 如

$$\|A\|_2 = \max_{x\neq 0}\frac{\|Ax\|_2}{\|x\|_2} \quad \text{或} \quad \|A\|_2 = \max_{\|x\|_2=1}\|Ax\|_2$$

注2: A^{-1}的算子范数可表示为 $\left(\min_{x\neq 0}\frac{\|Ax\|}{\|x\|}\right)^{-1}$

$$\|A^{-1}\| = \max_{x\neq 0}\frac{\|A^{-1}x\|}{\|x\|} = \max_{y\neq 0}\frac{\|y\|}{\|Ay\|} = \frac{1}{\min_{y\neq 0}\frac{\|Ay\|}{\|y\|}}$$

第三部分 线性方程组的迭代解法

- ➔雅可比迭代和高斯-赛德尔迭代的计算格式、收敛性判断方法
- ➔迭代向量序列的误差估计方法
- ➔极小化方法的基本思想、等价性定理
- ➔最速下降的基本思想

$$\|A\|_1 = \max_{1\le j\le n}\sum_{i=1}^{n}|a_{ij}|$$ “1-范数”(列和范数)

$$\|A\|_\infty = \max_{1\le i\le n}\sum_{j=1}^{n}|a_{ij}|$$ 无穷大范数(行和范数)

$$\|A\|_2 = \sqrt{\lambda_{\max}(A^T A)}$$

雅可比迭代和高斯-赛德尔迭代的计算格式

雅可比迭代法

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases} \Longleftrightarrow \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j = b_i$$

$(i = 1,2,\ldots,n)$

$$x_i^{(k+1)} = \frac{1}{a_{ii}}\left[b_i - \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij}x_j^{(k)} - \sum_{j=i+1}^{n} a_{ij}x_j^{(k)}\right]$$

$(i = 1,2,\ldots n;\ k=1,2,\ldots\ldots)$

取初始向量$X^{(0)}=[x_1^{(0)}\ x_2^{(0)}\ \cdots\ x_n^{(0)}]^T$, 迭代计算

总结：雅可比迭代法的矩阵表示

将方程组$AX = b$ 的系数矩阵 A 分解

$$A = D - U - L$$

$$D = \begin{bmatrix} a_{11} & & & \\ & a_{22} & & \\ & & \ddots & \\ & & & a_{nn} \end{bmatrix} \quad L = -\begin{bmatrix} 0 & & & \\ a_{21} & 0 & & \\ \vdots & \ddots & \ddots & \\ a_{n1} & \cdots & a_{n,n-1} & 0 \end{bmatrix} \quad U = -\begin{bmatrix} 0 & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ & \ddots & \ddots & \vdots \\ & & 0 & a_{n-1,n} \\ & & & 0 \end{bmatrix}$$

$$AX = b \quad \Rightarrow \quad DX^{(k+1)} = (U+L)X^{(k)} + b$$

$$X^{(k+1)} = D^{-1}(U+L)X^{(k)} + D^{-1}b$$

记$B_J = D^{-1}(U+L)$ $\qquad X^{(k+1)} = B_J X^{(k)} + f_J$

高斯–赛德尔迭代法的矩阵表示

$$a_{ii}x_i^{(k+1)} = [b_i - \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij}x_j^{(k+1)} - \sum_{j=i+1}^{n} a_{ij}x_j^{(k)}]$$

$$\sum_{j=1}^{i} a_{ij}x_j^{(k+1)} = b_i - \sum_{j=i+1}^{n} a_{ij}x_j^{(k)} \quad (i = 1,2,\dots,n)$$

$$\begin{bmatrix} a_{11} & & & \\ a_{21} & a_{22} & & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1^{(k+1)} \\ x_2^{(k+2)} \\ \vdots \\ x_n^{(k+1)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ & 0 & \ddots & \vdots \\ & & \ddots & a_{n-1,n} \\ & & & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1^{(k)} \\ x_2^{(k)} \\ \vdots \\ x_n^{(k)} \end{bmatrix}$$

$$(D - L)X^{(k+1)} = b + UX^{(k)}$$

$$X^{(k+1)} = (D - L)^{-1}b + (D - L)^{-1}UX^{(k)}$$

迭代向量序列的误差估计方法

$$A\,X = b \rightarrow (M-N)X = b \rightarrow M\,X = N\,X + b$$

计算格式: $X^{(k+1)} = B\,X^{(k)} + f \quad (B = M^{-1}N)$

设方程组的精确解为 X^*,则有

$$X^* = B\,X^* + f \quad \rightarrow$$

$$X^{(k+1)} - X^* = B(X^{(k)} - X^*)$$

记 $\varepsilon^{(k)} = X^{(k)} - X^* \quad (k = 0, 1, 2, 3, \cdots\cdots)$

则有 $\varepsilon^{(k+1)} = B\,\varepsilon^{(k)}$

$$\varepsilon^{(k)} = B\,\varepsilon^{(k-1)} \quad (k = 1, 2, 3, \cdots\cdots)$$

收敛性小结(6个定理)

定理1: 若$||B||<1$, 则迭代法 $X^{(k+1)} = B X^{(k)} + f$ 收敛

定理2: 迭代格式 $X^{(k+1)} = B X^{(k)} + f$ 序列收敛的充分必要条件是:

$$\lim_{k\to\infty} B^k = 0$$

定理3: 若$Ax=b$的系数矩阵 A 是严格对角占优矩阵, 则Jacobi和GS迭代收敛.

定理4: 迭代法 $X^{(k+1)} = B X^{(k)} + f$ 收敛

$\Leftrightarrow$ 谱半径$\rho(B) < 1$

定理5: 方程组 $Ax=b$ 中, 若 A 是实对称正定矩阵,则Gauss-Seidel迭法收敛

定理6: 设X^*为方程组 $AX=b$ 的解

若$||B||<1$,则对迭代格式 $X^{(k+1)} = B X^{(k)} + f$ 有

$$(1)\quad \|X^{(k)} - X^*\| \le \frac{\|B\|}{1-\|B\|} \|X^{(k)} - X^{(k-1)}\|$$

$$(2)\quad \|X^{(k)} - X^*\| \le \frac{\|B\|^k}{1-\|B\|} \|X^{(1)} - X^{(0)}\|$$

若: $B_J = D^{-1}(U+L)$ $\qquad B_{G\text{-}S} = (D-L)^{-1}U$

小结(大规模稀疏线性系统迭代法求解)

三种迭代格式：

雅克比、高斯赛德尔、超松弛(高斯赛德尔为基础)。

收敛性分析(五个角度去思考):

- 是否迭代矩阵B的范数小于1？
- 是否迭代矩阵B的极限为零矩阵？
- 是否系数矩阵A为严格对角占优？
- 是否迭代矩阵B的谱半径小于1？
- 是否系数矩阵A为实对称正定？（针对GS迭代）

极小化方法的基本思想、等价性定理

初等变分原理

I 方程组问题: Ax = b

II 极值问题: $$\min_{x\in R^n} \quad f(x)=\frac{1}{2}x^T Ax-b^T x$$

定理4.10 设$A=(a_{ij})_{n\times n}$为实对称正定矩阵,

则 x 使二次函数

$$f(x)=\frac{1}{2}(Ax,x)-(b,x)$$

取极小值 ⇔ x 是线性方程组 Ax = b 的解。

最速下降法思想： 解对称正定方程组$Ax = b$

从初值点 $x^{(0)}$ 出发,以负梯度方向 r 为搜索方向

选择步长 t_0, 使 $x^{(1)} = x^{(0)} + t_0 r$ 为 $f(x)$ 极小值点

在 x 处,梯度方向是 $f(x)$ 增长最快方向

负梯度方向是 $f(x)$ 下降最快方向

梯度：$\nabla f = \mathrm{grad} f(x) = [\, f_{x1},\ f_{x2}, \cdots,\ f_{xn}\,]^T$

$$\boxed{\nabla f = Ax - b}$$

解对称正定方程组 $Ax = b$ 的最速下降算法:

第一步: 取初值 $x^{(0)} \in R^{(n)}$, $\varepsilon > 0$,计算

$$r_0 = b - Ax^{(0)} \quad , k \leftarrow 0;$$

第二步: 计算 $t_k = (r_k, r_k) / (Ar_k, r_k)$

$$x^{(k+1)} = x^{(k)} + t_k r_k; \qquad r_{k+1} = b - Ax^{(k+1)} \quad ;$$

第三步: $k \leftarrow k+1$, 如果 $\|r_k\| \geq \varepsilon$,转第二步;

否则,输出: $x^{(k)}$,结束.

第四部分 数据插值方法

- 拉格朗日插值公式以及拉格朗日插值基函数构造方法
- Hermite插值(导数插值)及插值余项
- 分段线性插值
- 均差计算方法以及牛顿插值公式的计算方法
- 样条插值

拉格朗日插值公式以及拉格朗日插值基函数构造方法

定理5.1 若插值结点$x_0, x_1,\cdots, x_n$ 是 $(n+1)$个互异点,则满足插值条件 $P(x_k)= y_k \quad (k = 0,1,\ldots,n)$ 的 n 次插值多项式

$$P(x)=a_0 + a_1x +\ldots\ldots+ a_nx^n$$

存在而且是唯一的。

证明: 由插值条件

$$\boxed{\begin{array}{l} P(x_0)= y_0 \\ P(x_1)=y_1 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ P(x_n)=y_n \end{array}} \Rightarrow \begin{cases} a_0+a_1x_0+\cdots+a_nx_0^n=y_0 \\ a_0+a_1x_1+\cdots+a_nx_1^n=y_1 \\ \cdots\cdots \\ a_0+a_1x_n+\cdots+a_nx_n^n=y_n \end{cases}$$

方程组系数矩阵取行列式

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & x_0 & \cdots & x_0^n \\ 1 & x_1 & \cdots & x_1^n \\ \cdots\cdots & & & \\ 1 & x_n & \cdots & x_n^n \end{vmatrix} = \prod_{n \ge i > j \ge 0} (x_i - x_j) \ne 0$$

故方程组有唯一解.

从而插值多项式 $P(x)$ 存在而且是唯一的.

例5.1 误差函数表可构造6次插值函数

x	0	0.5000	1.0000	1.5000	2.0000	2.5000	3.0000
y	0	0.5205	0.8427	0.9661	0.9953	0.9996	1.0000

拉格朗日插值公式

插值条件:$L(x_k)= y_k \quad (k = 0,1,\dots,n)$

$$L_n(x) = l_0(x)y_0 + l_1(x)y_1 + \cdots + l_n(x)y_n$$

其中,第k (k=0,1,…, n)个插值基函数

$$l_k(x) = \frac{(x-x_0)\cdots(x-x_{k-1})(x-x_{k+1})\cdots(x-x_n)}{(x_k-x_0)\cdots(x_k-x_{k-1})(x_k-x_{k+1})\cdots(x_k-x_n)}$$

或: $$l_k(x) = \prod_{\substack{j=0 \\ j\neq k}}^{n} \frac{(x-x_j)}{(x_k-x_j)}$$

定理5.2 设 $f(x)\in C[a, b]$, 且 $f(x)$ 在(a, b)内具有 $n+1$阶导数, 取插值结点

$$a\le x_0 < x_1 < \cdots\cdots < x_n \le b$$

则对任何$x\in[a , b]$, 满足 $L_n(x_k) = f(x_k)$ 的 n 次插值多项式$L_n(x)$ 的误差

$$R_n(x) = f(x) - L_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi_n)}{(n+1)!}\omega_{n+1}(x)$$

其中, $\omega_{n+1}(x) = (x - x_0)(x - x_1)\cdots(x - x_n)$

$\xi_n \in (a, b)$ 且与x有关

均差计算方法以及牛顿插值公式的计算方法

牛顿插值问题

取x_0, x_1, x_2,求二次函数

$$P(x)=a_0 + a_1(x-x_0) + a_2(x-x_0)(x-x_1)$$

满足条件

$$P(x_0)=f(x_0),\ P(x_1)=f(x_1),\ P(x_2)=f(x_2)$$

插值条件引出关于a_0, a_1, a_2方程

$$\begin{cases} a_0 = f(x_0) \\ a_0 + a_1(x_1 - x_0) = f(x_1) \\ a_0 + a_1(x_2 - x_0) + a_2(x_2 - x_0)(x_2 - x_1) = f(x_2) \end{cases}$$

解下三角方程组过程中引入符号

$$f[x_0,x_1]=\frac{f(x_1)-f(x_0)}{x_1-x_0}\qquad f[x_1,x_2]=\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}$$

$$f[x_0,x_1,x_2]=\frac{f[x_1,x_2]-f[x_0,x_1]}{x_2-x_0}$$

$$a_0=f(x_0),\quad a_1=f[x_0,x_1],\quad a_2=f[x_0,x_1,x_2]$$

牛顿插值公式:

$$\begin{aligned}P(x)=\ & f(x_0)+f[x_1,x_2](x-x_0)\\ & +f[x_0,x_1,x_2](x-x_0)(x-x_1)\end{aligned}$$

定义5.3 若已知函数 $f(x)$ 在点 $x_0, x_1, \cdots, x_n$ 处的值 $f(x_0), f(x_1), \cdots, f(x_n)$.如果 $i \neq j$,则

一阶均差 $$f[x_j, x_{j+1}] = \frac{f(x_{j+1}) - f(x_j)}{x_{j+1} - x_j} \quad (j = 0,1,\ldots,n-1)$$

二阶均差 $$f[x_j, x_{j+1}, x_{j+2}] = \frac{f[x_{j+1}, x_{j+2}] - f[x_j, x_{j+1}]}{x_{j+2} - x_j}$$

$(j = 0,1,\ldots,n-2)$

n阶均差 $$f[x_0, x_1, \cdots, x_n] = \frac{f[x_1, \cdots, x_n] - f[x_0, \cdots x_{n-1}]}{x_n - x_0}$$

例 由函数表求各阶均差

x	-2	-1	0	1	3
y	-56	-16	-2	-2	4

解:按公式计算一阶均差、二阶均差、三阶均差

x	$f(x)$	一阶均差	二阶均差	三阶均差
-2	-56			
-1	-16	40		
0	-2	14	-13	
1	-2	0	-7	2
3	4	3	1	2

$$N_3(x) = -56 + 40(x+2) - 13(x+2)(x+1) + 2(x+2)(x+1)\,x$$

Hermite插值(导数插值)及插值余项

插值条件中除函数值插值条件外，还有导数值插值条件，即:

已知2n+2个条件

x_i	x_0	x_1	$\cdots$	x_n
$y_i=f(x_i)$	y_0	y_1	$\cdots$	y_n
$y'_i=f'(x_i)$	y'_0	y'_1	$\cdots$	y'_n

求:一个次数不超过2n+1的多项式$H_{2n+1}(x)$

三次Hermite插值，采用基函数方式构造*H*(*x*)：

$$\boxed{H(x) = \alpha_0(x)y_0 + \alpha_1(x)y_1 + \beta_0(x)m_0 + \beta_1(x)m_1}$$

插值条件：

$$\boxed{\begin{array}{ll} H(x_0) = y_0 & H(x_1) = y_1 \\ H'(x_0) = m_0 & H'(x_1) = m_1 \end{array}}$$

插值条件表

	函数值		导数值	
	x_0	x_1	x_0	x_1
$\alpha_0(x)$	1	0	0	0
$\alpha_1(x)$	0	1	0	0
$\beta_0(x)$	0	0	1	0
$\beta_1(x)$	0	0	0	1

最终求得所有4个基函数（针对三次Hermite插值）

$$\alpha_0(x)=\left(1+2\frac{x-x_0}{x_1-x_0}\right)\left(\frac{x-x_1}{x_0-x_1}\right)^2 \qquad \beta_0(x)=(x-x_0)\left(\frac{x-x_1}{x_0-x_1}\right)^2$$

$$\alpha_1(x)=\left(1+2\frac{x-x_1}{x_0-x_1}\right)\left(\frac{x-x_0}{x_1-x_0}\right)^2 \qquad \beta_1(x)=(x-x_1)\left(\frac{x-x_0}{x_1-x_0}\right)^2$$

代入4个基函数即可得：三次Hermite插值多项式

$$\boxed{H(x)=\alpha_0(x)y_0+\alpha_1(x)y_1+\beta_0(x)m_0+\beta_1(x)m_1}$$

定理：两点三次Hermite插值的误差估计式

$$R(x)=f(x)-H_3(x)=\frac{f^{(4)}(\xi)}{4!}[(x-x_0)(x-x_1)]^2$$

分段插值

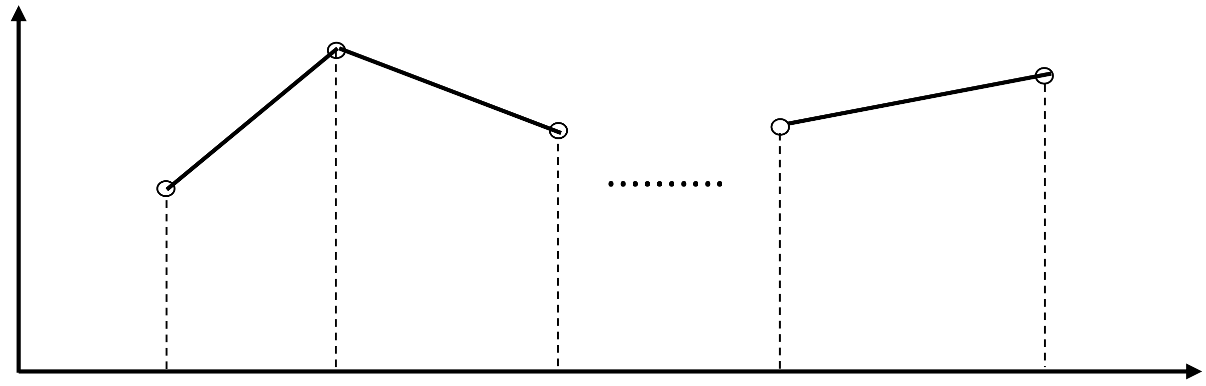
分段线性插值

插值节点满足: $x_0<x_1<\cdots\cdots<x_n$ 已知

$$y_j=f(x_j) \qquad (j=0,1,2,\cdots,n)$$

$x\in[x_j,\ x_{j+1}]$时, 线性插值函数

$$L_h(x)=\frac{x_{j+1}-x}{x_{j+1}-x_j}y_j+\frac{x-x_j}{x_{j+1}-x_j}y_{j+1} \quad (j=0,1,\cdots,n-1)$$



分段三次Hermite插值

已知函数值和导数值 $y_j = f(x_j),\ m_j = f'(x_j)$

$$H_h(x) = \left(1+2\frac{x-x_j}{x_{j+1}-x_j}\right)\left(\frac{x_{j+1}-x}{x_{j+1}-x_j}\right)^2 y_j \quad (j=0,1,2,\cdots,n)$$

$$+\left(1+2\frac{x_{j+1}-x}{x_{j+1}-x_j}\right)\left(\frac{x-x_j}{x_{j+1}-x_j}\right)^2 y_{j+1}$$

$$+(x-x_j)\left(\frac{x_{j+1}-x}{x_{j+1}-x_j}\right)^2 m_j + (x-x_{j+1})\left(\frac{x-x_j}{x_{j+1}-x_j}\right)^2 m_{j+1}$$

$x\in[x_j,\ x_{j+1}]$ $(j=0,1,2,\cdots,n-1)$

样条插值(含一阶导数刻画的样条函数)

定义 5.4： 给定区间$[a,b]$上的一个分划:

$$a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$$

已知$f(x_j) = y_j \quad (j = 0,1,\cdots,n)$, 如果

$$S(x) = \begin{cases} S_1(x), x \in [x_0, x_1] \\ S_2(x), x \in [x_1, x_2] \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ S_n(x), x \in [x_{n-1}, x_n] \end{cases}$$

满足: (1) $S(x)$在$[x_j, \ x_{j+1}]$上为三次多项式;

(2) $S''(x)$在区间$[a, \ b]$上连续;

(3) $S(x_j) = y_j \ (j = 0,1,\cdots,n)$.

则称$S(x)$为三次样条插值函数.

n个三次多项式(每个三次多项式是4个待定系数), 待定系数共$4n$个！！

当$x \in [x_j, x_{j+1}]$ (j= 0,1,…n-1)时

$$S_j(x)= a_j + b_j x + c_j x^2 + d_j x^3$$

由样条定义,可建立方程(4n-2)个！！ Why?

插值条件: $S(x_j) = y_j \quad (j = 0,1,\cdots,n)$

连续性条件: $S(x_j+0) = S(x_j-0) \quad (j = 1,\cdots,n-1)$

$$S'(x_j+0) = S'(x_j-0) \quad (j = 1,\cdots,n-1)$$

$$S''(x_j+0) = S''(x_j-0) \quad (j = 1,\cdots,n-1)$$

方程数少于未知数个数？？

(1)自然边界条件: $S''(x_0)=0,\ S''(x_n)=0$

(2)周期边界条件: $S'(x_0)=S'(x_n),\ \ S''(x_0)=S''(x_n)$

(3)固定边界条件: $S'(x_0)=f\,'(x_0),\ \ S'(x_n)=f\,'(x_n)$

即可计算所有未知量!

举例：分段Hermite插值公式导出的样条方法

已知函数表

x	x_0	x_1	……	x_n
$f(x)$	y_0	y_1	……	y_n

设 $f(x)$ 在各插值节点 x_j 处的一阶导数为 m_j (未知)

取 $x_{j+1}-x_j=h$，$(j=0,1,2,\cdots,n)$.当 $x\in[x_j, x_{j+1}]$时,

分段Hermite插值

$$S(x)=\left(1+2\frac{x-x_j}{h}\right)\left(\frac{x_{j+1}-x}{h}\right)^2 y_j+\left(1+2\frac{x_{j+1}-x}{h}\right)\left(\frac{x-x_j}{h}\right)^2 y_{j+1}$$

$$+(x-x_j)\left(\frac{x_{j+1}-x}{h}\right)^2 m_j+(x-x_{j+1})\left(\frac{x-x_j}{h}\right)^2 m_{j+1}$$

由$S''(x)$连续：有等式：$S''(x_j+0)=S''(x_j-0)$

考虑 $S''(x)$ 在区间$[x_j, x_{j+1}]$和$[x_{j-1}, x_j]$上表达式.

当 $x\in[x_j, x_{j+1}]$时, $S(x)$ 由基函数组合而成

$$\alpha_j(x)=(1+2\frac{x-x_j}{h})(\frac{x_{j+1}-x}{h})^2$$

$$\alpha_{j+1}(x)=(1+2\frac{x_{j+1}-x}{h})(\frac{x-x_j}{h})^2$$

$$\beta_j(x)=(x-x_j)(\frac{x_{j+1}-x}{h})^2$$

$$\beta_{j+1}(x)=(x-x_{j+1})(\frac{x-x_j}{h})^2$$

$$\begin{cases} \alpha_j''(x_j) = [\dfrac{-8}{h^3}(x_{j+1} - x) + (1 + 2\dfrac{x - x_j}{h})\dfrac{2}{h^2}]_{x=x_j} = -\dfrac{6}{h^2} \\ \alpha_{j+1}''(x_j) = [-\dfrac{8}{h^3}(x - x_j) + (1 + 2\dfrac{x_{j+1} - x}{h})\dfrac{2}{h^2}]_{x=x_j} = \dfrac{6}{h^2} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \beta_j''(x_j) = [\dfrac{4}{h^2}(x - x_{j+1}) + (x - x_j)\dfrac{2}{h^2}]_{x=x_j} = -\dfrac{4}{h} \\ \beta_{j+1}''(x_j) = [\dfrac{4}{h^2}(x - x_j) + (x - x_{j+1})\dfrac{2}{h^2}]_{x=x_j} = -\dfrac{2}{h} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \quad \begin{aligned} S''(x_j + 0) = {} & \alpha_j''(x_j)y_j + \alpha_{j+1}''(x_j)y_{j+1} \\ & + \beta_j''(x_j)m_j + \beta_{j+1}''(x_j)m_{j+1} \end{aligned}$$

$$S''(x_j+0)=-\frac{6}{h^2}y_j+\frac{6}{h^2}y_{j+1}-\frac{4}{h}m_j-\frac{2}{h}m_{j+1}$$

同理, 有

$$S''(x_j-0)=\frac{6}{h^2}y_{j-1}-\frac{6}{h^2}y_j+\frac{2}{h}m_{j-1}+\frac{4}{h}m_j$$

联立得:
$$-\frac{6}{h^2}y_j+\frac{6}{h^2}y_{j+1}-\frac{4}{h}m_j-\frac{2}{h}m_{j+1}$$
$$=\frac{6}{h^2}y_{j-1}-\frac{6}{h^2}y_j+\frac{2}{h}m_{j-1}+\frac{4}{h}m_j$$

➔

$$m_{j-1}+4m_j+m_{j+1}=\frac{3}{h}(y_{j+1}-y_{j-1})$$

(j=1, 2, ……, n-1)

设自然边界条件成立, 即

$$S''(x_0+0) = -\frac{6}{h^2}y_0 + \frac{6}{h^2}y_1 - \frac{4}{h}m_0 - \frac{2}{h}m_1 = 0$$

$$S''(x_n-0) = \frac{6}{h^2}y_{n-1} - \frac{6}{h^2}y_n + \frac{2}{h}m_{n-1} + \frac{4}{h}m_n = 0$$

自然样条的导数值满足:

$$\boxed{2m_0 + m_1 = \frac{3}{h}[y_1 - y_0]} \qquad \boxed{m_{n-1} + 2m_n = \frac{3}{h}[y_n - y_{n-1}]}$$

$$m_{j-1} + 4m_j + m_{j+1} = \frac{3}{h}(y_{j+1} - y_{j-1})$$

(j=1, 2, ……, n-1)

第五部分 数据拟合与函数逼近

- ➔ 曲线拟合的最小二乘法
- ➔ 求解超定方程组的最小二乘法
- ➔ 正交多项式及性质

求解超定方程组的最小二乘法

离散数据的线性拟合

x	x_1	x_2	…………	x_m
$f(x)$	y_1	y_2	…………	y_m

求拟合函数: $\varphi(x)=c_1+c_2x$

$$\begin{cases} c_1+c_2x_1=y_1 \\ c_1+c_2x_2=y_2 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ c_1+c_2x_m=y_m \end{cases} \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & x_1 \\ 1 & x_2 \\ \vdots & \vdots \\ 1 & x_m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_m \end{bmatrix} \rightarrow GX=F$$

超定方程组

$$GX = F$$

最小二乘问题 $$\min_{X\in R2} \| GX - F \|_2$$

$$\Leftrightarrow \quad (G^T G)X = (G^T F)$$

超定方程组: *GX=F* ➔

正规方程组: *G^TGX=G^TF*

引例3 实验数据3次多项式拟合。

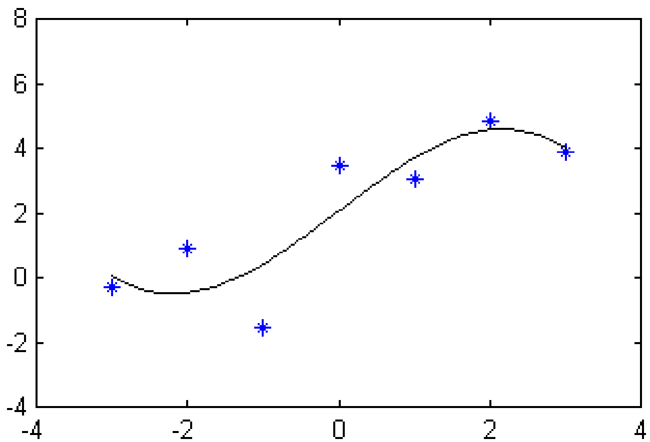
-3	-2	-1	0	1	2	3
-0.277	0.895	-1.565	3.456	3.060	4.856	3.898

解: 设 $$\varphi(x) = c_1 + c_2 x + c_2 x^2 + c_3 x^3$$

$$\begin{bmatrix} 1 & -3 & 9 & -27 \\ 1 & -2 & 4 & -8 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 & 8 \\ 1 & 3 & 9 & 27 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \\ c_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0.277 \\ 0.895 \\ -1.565 \\ 3.456 \\ 3.060 \\ 4.856 \\ 3.898 \end{bmatrix} \rightarrow$$

$$c_1 = 2.0563, c_2 = 1.7531$$

$$c_3 = -0.0025, c_4 = -0.1225$$



残差2范数: $||r||_2 = 2.9007$

正交多项式及性质

定义6.3 设 $f(x)$, $g(x)\in C[a, b]$, $\rho(x)$是区间$[a,b]$上的权函数,若等式

$$(f,g)=\int_a^b \rho(x)f(x)g(x)dx=0$$

成立,则称$f(x)$, $g(x)$在$[a, b]$上带权$\rho(x)$正交.
当$\rho(x)=1$时,简称正交。

例1 验证 $\varphi_0(x)=1$, $\varphi_1(x)=x$ 在$[-1, 1]$上正交,

并求二次多项式 $\varphi_2(x)$ 使之与$\varphi_0(x)$, $\varphi_1(x)$正交

解: $$\int_{-1}^{1}\varphi_0(x)\varphi_1(x)dx=\int_{-1}^{1}1\cdot xdx=0$$

设 $\varphi_2(x) = x^2 + a_{21}x + a_{22}$

$$\int_{-1}^{1} 1\cdot\varphi_2(x)dx = 0 \qquad \int_{-1}^{1} x\varphi_2(x)dx = 0$$

$$\int_{-1}^{1}(x^2 + a_{21}x + a_{22})dx = 0 \quad \int_{-1}^{1} x(x^2 + a_{21}x + a_{22})dx = 0$$

$2/3+2a_{22} = 0$	$a_{22}= -1/3$
$2a_{21}/3=0$	$a_{21}=0$

所以, $\varphi_2(x) = x^2 - \dfrac{1}{3}$

2.切比雪夫多项式的正交性

$$\int_0^{\pi}\cos(m\theta)\cos(n\theta)d\theta = 0 \qquad (m \neq n)$$

$$(T_m, T_n) = \int_{-1}^{1}\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}T_m(x)T_n(x)dx$$

$$= \int_0^{\pi}\cos m\theta \cos n\theta d\theta = 0$$

所以, 切比雪夫多项式在[-1 , 1]上带权

$\rho(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$正交

勒让德(Legendre)多项式

1.表达式 $P_0(x) = 1,\ P_1(x) = x$

$$P_n(x) = \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n}{dx^n} [(x^2 - 1)^n] \qquad (n \geq 1)$$

2. 正交性

$$\int_{-1}^{1} P_m(x) P_n(x) dx = \begin{cases} 0, & m \neq n \\ \dfrac{2}{2n+1}, & m = n \end{cases}$$

3.递推式

$$\begin{cases} p_0 = 1, \quad p_1 = x, \\ p_{n+1} = \dfrac{2n+1}{n+1} x p_n - \dfrac{n}{n+1} p_{n-1} \end{cases}$$

$$p_2(x) = \frac{1}{2}(3x^2 - 1) \qquad p_3(x) = \frac{1}{2}(5x^3 - 3x)$$

4.零点分布

$P_n(x)$ 的n 个零点,落入区间[–1, 1]中

$P_2(x)$的两个零点: $x_1 = -\dfrac{1}{\sqrt{3}}$ $x_2 = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$

$P_3(x)$的三个零点: $x_1 = -\sqrt{\dfrac{3}{5}}$ $x_2 = 0$ $x_3 = \sqrt{\dfrac{3}{5}}$

用正交多项式作最佳平方逼近

设$P_0(x)$, $P_1(x)$, $\cdots$,$P_n(x)$为区间$[a , b]$上的正交多项式, 即

$$(P_k, P_j) = \int_a^b P_k(x)P_j(x)dx = 0$$

$$(k \neq j\ ,\ \ k,\ j = 0,1,\cdots, n\ )$$

求 $P(x) = a_0P_0(x) + a_1P_1(x) + \cdots + a_nP_n(x)$

使 $$L = \int_a^b [P(x) - f(x)]^2 dx = \min$$

$$L(a_0, a_1, \cdots, a_n) = \int_a^b [\sum_{j=0}^{n} a_j P_j(x) - f(x)]^2 dx$$

$$\frac{\partial L}{\partial a_k} = 2\int_a^b P_k(x)[\sum_{j=0}^{n} a_j P_j(x) - f(x)]dx$$

由于 $(P_k, P_j) = \int_a^b P_k(x)P_j(x)dx = 0,\ (k \neq j)$

令 $\frac{\partial L}{\partial a_k} = 0$ 记 $(P_k, f) = \int_a^b P_k(x) f(x)dx$

则有 $(P_k, P_k)a_k = (P_k, f)$ $(k = 0, 1, 2, \cdots, n)$

$$a_k = \frac{(P_k, f)}{(P_k, P_k)} \qquad (k = 0, 1, 2, \cdots, n)$$

$f(x)$的平方逼近 $$P(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(P_k, f)}{(P_k, P_k)} P_k(x)$$

例　求二次多项式 $P(x)=a_0+a_1x+a_2x^2$ 使

$$\int_0^1 [P(x)-\sin(\pi x)]^2 dx = \min$$

构造区间[0，1]上的正交多项式

$P_0(x)=1$，$P_1(x)=x-1/2$，$P_2(x)=x^2-x+1/6$

$$\sin(\pi x) \approx \frac{(P_0,\sin(\pi x))}{(P_0,P_0)} + \frac{(P_1,\sin(\pi x))}{(P_1,P_1)} P_1(x) + \frac{(P_2,\sin(\pi x))}{(P_2,P_2)} P_2(x)$$

$$\frac{(P_0,\sin(\pi x))}{(P_0,P_0)} = \frac{2/\pi}{1} \qquad \frac{(P_1.\sin(\pi x))}{(P_1,P_1)} = \frac{0}{1/12}$$

$$\frac{(P_2.\sin(\pi x))}{(P_2,P_2)} = \frac{(\pi^2-12)/3\pi^3}{1/180}$$

第六部分 数值积分和数值微分

- 梯形公式、辛卜生求积公式
- 复合求积公式及算法
- 插值型求积公式的误差估计方法
- 高斯积分法
- 差商计算数值微分方法

梯形公式、辛卜生求积公式

梯形公式:

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{b-a}{2}[f(a)+f(b)]$$

Simpson 公式:

$$\int_a^b f(x)dx = \frac{b-a}{6}[f(a)+4f(\frac{a+b}{2})+f(b)]+R[f]$$

复合求积公式及算法

如何判断代数精度？

复合梯形求积公式

将积分区间$[a,b]$ n 等分.取 $h=(b-a)/n$. $x_j=a+jh$

$$\int_a^b f(x)dx=\sum_{j=0}^{n-1}\int_{x_j}^{x_{j+1}} f(x)dx \approx \frac{h}{2}\sum_{j=0}^{n-1}[f(x_j)+f(x_{j+1})]$$

$$=\frac{h}{2}[f(a)+f(b)+2\sum_{j=1}^{n-1} f(x_j)]$$

插值型求积公式的误差估计方法

插值型求积公式

对 $[a, b]$做分划: $a \le x_0 < x_1 < x_2 < \dots\dots < x_n \le b$

Lagrange插值 $f(x) \approx \sum_{j=0}^{n} l_j(x) f(x_j)$

$$\int_a^b f(x)dx \approx \sum_{j=0}^{n} [\int_a^b l_j(x)dx] f(x_j)$$

令 $A_j = \int_a^b l_j(x)dx, (j = 0,1,2,\cdots,n)$

$$\int_a^b f(x)dx = \sum_{j=0}^{n} A_j f(x_j) + R[f]$$

插值型求积公式的余项

$$R[f]=\int_a^b [f(x)-L_n(x)]dx=\int_a^b \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}\omega_{n+1}(x)dx$$

例2. 用线性插值公式推导梯形公式

$$A_0=\int_a^b \frac{b-x}{b-a}dx=\frac{1}{2}(b-a) \qquad A_1=\int_a^b \frac{x-a}{b-a}dx=\frac{1}{2}(b-a)$$

$$\Rightarrow \quad \int_a^b f(x)dx=\frac{b-a}{2}[f(a)+f(b)]+R[f]$$

$$R[f]=\int_a^b \frac{f''(\xi)}{2}(x-a)(x-b)dx$$

高斯积分法

定义 如果求积结点$x_0, x_1,\cdots\cdots,x_n$,使插值型求积公式

$$\int_{-1}^{1} f(x)dx \approx \sum_{k=0}^{n} A_k f(x_k)$$

的代数精度为$2n+1$,则称该求积公式为Gauss型求积公式. 称这些求积结点为Gauss点.

定理7.2 如果多项式$w_{n+1}(x)=(x-x_0)(x-x_1)\cdots(x-x_n)$与任意的不超过$n$次的多项式$P(x)$ 正交，即

$$\int_{-1}^{1} w_{n+1}(x)P(x)dx = 0$$

则, $w_{n+1}(x)$的所有零点$x_0, x_1,\cdots\cdots, x_n$ 是Gauss点

举例：验证多项式$w_2(x)=x^2-\dfrac{1}{3}$是[−1, 1]上正交多项式.

$$\int_{-1}^{1}(a_0+a_1x)w_2(x)dx=a_0\int_{-1}^{1}w_2(x)dx+a_1\int_{-1}^{1}xw_2(x)dx=0$$

得Gauss点 $x_0=-\dfrac{1}{\sqrt{3}}$，$x_1=\dfrac{1}{\sqrt{3}}$

插值公式: $f(x)\approx\dfrac{x_1-x}{x_1-x_0}f(x_0)+\dfrac{x-x_0}{x_1-x_0}f(x_1)$

$$\int_{-1}^{1}\frac{x_1-x}{x_1-x_0}dx=\frac{2x_1}{x_1-x_0}=1 \qquad \int_{-1}^{1}\frac{x-x_0}{x_1-x_0}dx=\frac{-2x_0}{x_1-x_0}=1$$

两点Gauss公式 $\displaystyle\int_{-1}^{1}f(x)dx\approx f(-\frac{1}{\sqrt{3}})+f(\frac{1}{\sqrt{3}})$

Legendre多项式递推式 $\begin{cases} p_0 = 1, \;\; p_1 = x, \\ p_{n+1} = \dfrac{2n+1}{n+1} x p_n - \dfrac{n}{n+1} p_{n-1} \end{cases}$

$$p_2(x) = \frac{1}{2}(3x^2 - 1) \qquad p_3(x) = \frac{1}{2}(5x^3 - 3x)$$

$$p_3(x) = \frac{1}{2}(5x^3 - 3x) = 0$$

$$x_{0,\,2} = \mp\sqrt{\frac{3}{5}} \approx -0.7745067 \qquad x_1 = 0$$

三点Gauss数值求积公式 $\int_{-1}^{1} f(x)dx \approx$

$$0.5556 f(-0.7745) + 0.8889 f(0) + 0.5556 f(0.7745)$$

差商计算数值微分方法

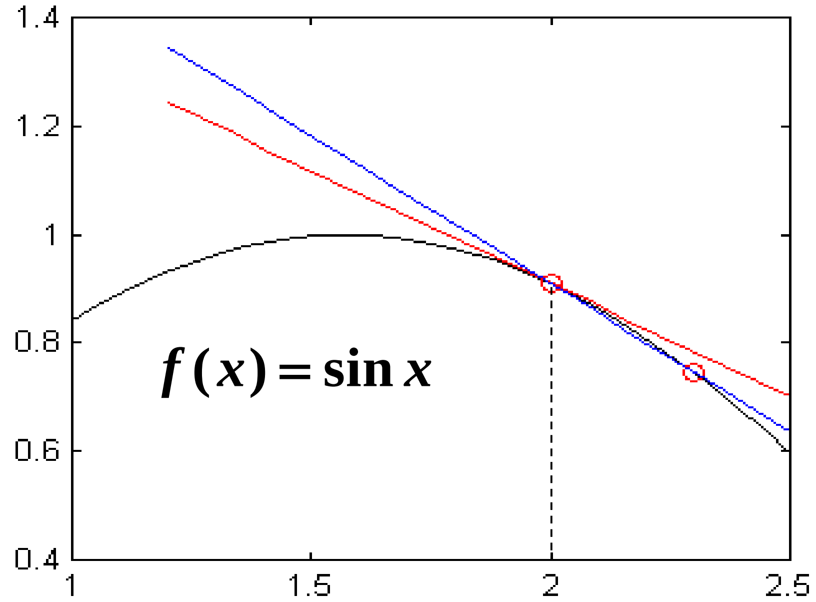
Taylor级数展开

$$f(a+h)=f(a)+hf'(a)+\frac{h^2}{2}f''(a)+\frac{h^3}{3!}f^{(3)}(a)+O(h^4)$$

一阶向前差商

$$f'(a)=\frac{f(a+h)-f(a)}{h}+O(h)$$

h	误差
0.5	-0.2055
0.4	-0.1684
0.3	-0.1292
0.2	-0.0879
0.1	-0.0447



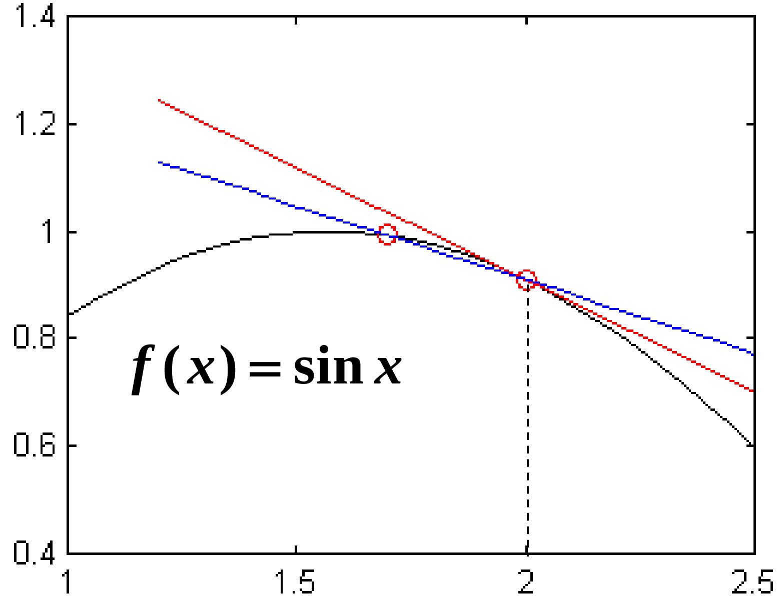
$a=2$

$$f(a-h) = f(a) - hf'(a) + \frac{h^2}{2} f''(a) - \frac{h^3}{3!} f^{(3)}(a) + O(h^4)$$

一阶向后差商

$$f'(a) = \frac{f(a) - f(a-h)}{h} + O(h)$$

h	误差
0.5	0.2398
0.4	0.1905
0.3	0.1416
0.2	0.0934
0.1	0.0461



$a = 2$

$$f(a+h)=f(a)+hf'(a)+\frac{h^2}{2}f''(a)+\frac{h^3}{3!}f^{(3)}(a)+\cdots$$

$$f(a-h)=f(a)-hf'(a)+\frac{h^2}{2}f''(a)-\frac{h^3}{3!}f^{(3)}(a)+\cdots$$

$$f(a+h)-f(a-h)=2hf'(a)+O(h^3)$$

一阶中心差商 $$f'(a)=\frac{f(a+h)-f(a-h)}{2h}+O(h^2)$$

$$f(a+h)+f(a-h)=2f(a)+h^2f''(a)+O(h^4)$$

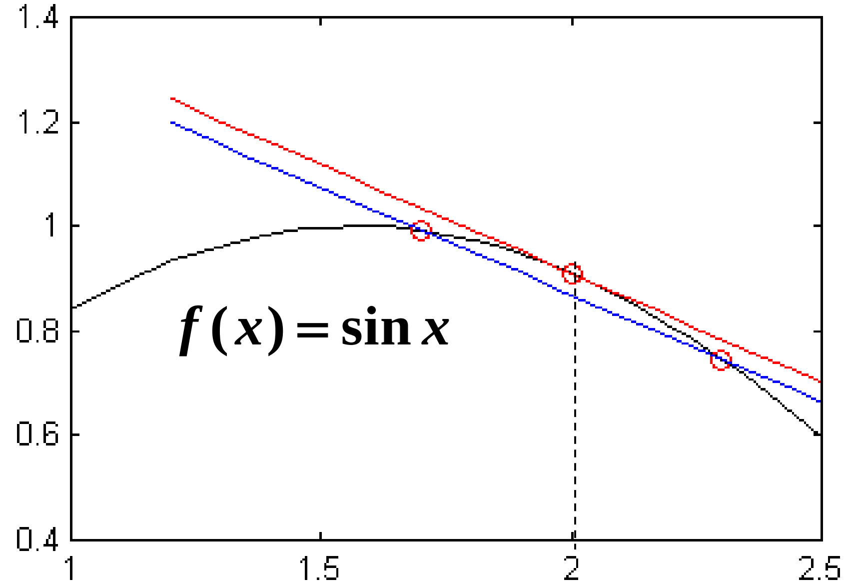
二阶中心差商 $$f''(a)=\frac{f(a+h)-2f(a)+f(a-h)}{h^2}+O(h^2)$$

三种一阶差商与导数误差比较

h	0.5	0.4	0.3	0.2	0.1
误差1	-0.2055	-0.1684	-0.1292	-0.0879	-0.0447
误差2	0.2398	0.1905	0.1416	0.0934	0.0461
误差	0.0171	0.0110	0.0062	0.0028	0.00073

二阶差商与二阶导数误差

h	误差
0.5	0.0188
0.4	0.0121
0.3	0.0068
0.2	0.0030
0.1	0.0008



$a = 2$

Lagrange插值函数方法

二次多项式插值

$$f(x) \approx \sum_{j=0}^{2} l_j(x) f(x_j)$$

$$f'(x) \approx \sum_{j=0}^{2} l'_j(x) f(x_j)$$

$$f'(x_k) \approx \sum_{j=0}^{2} l'_j(x_k) f(x_j)$$

$$l_0(x) = \frac{(x-x_1)(x-x_2)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)}$$

$$l'_0(x) = \frac{(x-x_1)+(x-x_2)}{2h^2}$$

$$l_1(x) = \frac{(x-x_0)(x-x_2)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)}$$

$$l'_1(x) = \frac{(x-x_0)+(x-x_2)}{-h^2}$$

$$l_2(x) = \frac{(x-x_0)(x-x_1)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)}$$

$$l'_2(x) = \frac{(x-x_0)+(x-x_1)}{2h^2}$$

$$l_0'(x_0) = -\frac{3}{2h} \qquad l_1'(x_0) = \frac{2}{h} \qquad l_2'(x_0) = -\frac{1}{2h}$$

$$f'(x_0) \approx \frac{1}{2h}[-3f(x_0) + 4f(x_1) - f(x_2)]$$

$$l_0'(x_1) = -\frac{1}{2h} \qquad l_1'(x_1) = 0 \qquad l_2'(x_1) = \frac{1}{2h}$$

$$f'(x_1) \approx \frac{1}{2h}[-f(x_0) + f(x_2)]$$

$$l_0'(x_2) = \frac{1}{2h} \qquad l_1'(x_0) = \frac{-2}{h} \qquad l_2'(x_0) = \frac{3}{2h}$$

$$f'(x_2) \approx \frac{1}{2h}[f(x_0) - 4f(x_1) + 3f(x_2)]$$

二次多项式插值导出的二阶导数计算公式

$$f''(x_j) \approx \frac{f(x_{j-1}) - 2f(x_j) + f(x_{j+1})}{h^2}$$

四次多项式插值导出的二阶导数计算公式

$$f''(x_j) \approx \frac{1}{h^2}[-f_{j-2} + 16f_{j-1} - 30f_j + 16f_{j+1} - f_{j+2}]$$

第七部分 常微方程的数值解法

- 一阶常微分方程的欧拉方法、修正的欧拉法
- 局部截断误差和计算格式的精度阶概念
- 龙格库塔方法
- 常微分方程组和高阶常微分方程的数值法
- 有限差分法

一阶常微分方程的欧拉方法、修正的欧拉法

近似解求法（Euler法）:

❖ 问题：
$$\begin{cases} \dfrac{dy}{dx} = f(x, y), x > x_0 \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$$

1) 区域离散：取定步长 h, 记

$$x_n = x_0 + nh, \quad (n = 1,2, \cdots, N)$$

2) 格式：Euler公式（法），

$$y_{n+1} = y_n + h f(x_n, y_n)$$

近似解求法（修正-Euler法）：

$$y_{n+1} - y_n = \frac{h}{2}[f(x_n, y_n) + f(x_{n+1}, y_{n+1})]$$

$$\rightarrow \begin{cases} \tilde{y}_{n+1} = y_n + hf(x_n, y_n) \\ y_{n+1} = y_n + \frac{h}{2}[f(x_n, y_n) + f(x_{n+1}, \tilde{y}_{n+1})] \end{cases}$$

预−校方法又称为修正的Euler法,算法如下

$k_1 = f(x_n , y_n)$,

$k_2 = f(x_{n+1} , y_n + h k_1)$,

$$y_{n+1} = y_n + \frac{h}{2}[k_1 + k_2]$$

局部截断误差和计算格式的精度阶概念

设 $y_n = y(x_n)$, 称 $R_{n+1} = y(x_{n+1}) - y_{n+1}$为局部截断误差.

由泰勒公式

$$y(x_{n+1}) = y(x_n) + (x_{n+1} - x_n)y'(x_n) + \frac{(x_{n+1} - x_n)^2}{2} y''(\xi)$$

即 $$y(x_{n+1}) = y(x_n) + hf(x_n, y_n) + \frac{h^2}{2} y''(\xi)$$

Euler公式: $y_{n+1} = y_n + hf(x_n, y_n)$ 的局部截断误差

$$y(x_{n+1}) - y_{n+1} = y(x_n) - y_n + O(h^2) = O(h^2)$$

Euler公式的局部截断误差记为: $O(h^2)$

称Euler公式具有1阶精度。

若局部截断误差为 $O(h^{p+1})$，则称显式单步法（如欧拉法）具有 p 阶精度。<u>(计算格式的精度概念)</u>

例 3. 证明修正的Euler法具有2阶精度

$$y_{n+1} = y_n + \frac{h}{2}[f(x_n, y_n) + f(x_{n+1}, \tilde{y}_{n+1})]$$

其中： $$\tilde{y}_{n+1} = y_n + hf(x_n, y_n)$$

龙格库塔方法（推导方法）

将改进欧拉法推广为：

$$\begin{cases} y_{i+1} = y_i + h[\lambda_1 K_1 + \lambda_2 K_2] \\ K_1 = f(x_i, y_i) \\ K_2 = f(x_i + p_1 h, y_i + p_2 \end{cases}$$

$$y''(x) = \frac{d}{dx} f(x, y)$$

$$= f_x(x, y) + f_y(x, y)\frac{dy}{dx}$$

$$= f_x(x, y) + f_y(x, y) f(x, y)$$

首先希望能确定系数 λ_1、λ_2、p_1、p_2，

的前提假设下，使得 $y_i = y(x_i)$

$$R_i = y(x_{i+1}) - y_{i+1}$$

Step 1: 将 K_2 在 (x_i, y_i) 点作 Taylor 展 数泰勒展开)

$$K_2 = f(x_i + ph, y_i + phK_1)$$

$$= f(x_i, y_i) + phf_x(x_i, y_i) + phK_1 f_y(x_i, y_i) + O(h^2)$$

Step 2: 将 K_2 代入第1式，得到

$$y_{i+1} = y_i + (\lambda_1 + \lambda_2)hy'(x_i) + \lambda_2 h^2[p_1 f_x(x_i, y_i)$$

$$+ p_2 f(x_i, y_i) f_y(x_i, y_i)] + O(h^3)$$

Step 3: 将 y_{i+1} 与 $y(x_{i+1})$ 在 x_i 点的泰勒展开作比较

$$y_{i+1} = y_i + (\lambda_1 + \lambda_2) h y'(x_i) + \lambda_2 h^2 [p_1 f_x(x_i, y_i) + p_2 f(x_i, y_i) f_y(x_i, y_i)] + O(h^3)$$

$$y(x_{i+1}) = y(x_i) + h y'(x_i) + \frac{h^2}{2} y''(x_i) + O(h^3)$$

要求 $R_i = y(x_{i+1}) - y_{i+1} = O(h^3)$，则必须有：

$$\lambda_1 + \lambda_2 = 1;$$
$$\lambda_2 p_1 = \frac{1}{2};\quad \lambda_2 p_2 = \frac{1}{2};$$

这里有 *4* 个未知数，*3* 个方程。

满足上述方程的<u>一族公式</u>称为二阶龙格 - 库塔格式。

注意到，当**$p_1=p_2$**，$\lambda_1 = \lambda_2 = \frac{1}{2}; p_1 = p_2 = 1$ 就是改进的欧拉法。

问题: 为获得更高的精度，应该如何进一步推广?

二阶龙格 - 库塔格式推广得到更高精度格式

$$
\begin{cases}
y_{i+1} = y_i + h[\lambda_1 K_1 + \lambda_2 K_2 + \dots + \lambda_m K_m] \\
K_1 = f(x_i, y_i) \\
K_2 = f(x_i + \alpha_2 h, y_i + \beta_{21} hK_1) \\
K_3 = f(x_i + \alpha_3 h, y_i + \beta_{31} hK_1 + \beta_{32} hK_2) \\
\quad \dots\dots \\
K_m = f(x_i + \alpha_m h, y + \beta_{m1} hK_1 + \beta_{m2} hK_2 + \dots + \beta_{m\,m-1} hK_{m-1})
\end{cases}
$$

其中λ_i ($i = 1, \dots, m$)， α_i ($i = 2, \dots, m$) 和 β_{ij} ($i = 2, \dots, m; j = 1, \dots, i-1$) 均为待定系数，确定这些系数的步骤与前面相似。

- 最常用为四阶经典龙格-库塔法 /* Classical Runge-Kutta Method */：

$$
\begin{cases}
y_{i+1} = y_i + \frac{h}{6}(K_1 + 2K_2 + 2K_3 + K_4) \\
K_1 = f(x_i, y_i) \\
K_2 = f(x_i + \frac{h}{2}, y_i + \frac{h}{2}K_1) \\
K_3 = f(x_i + \frac{h}{2}, y_i + \frac{h}{2}K_2) \\
K_4 = f(x_i + h, y_i + hK_3)
\end{cases}
$$

常微分方程组和高阶常微分方程的数值法

例1：一阶常微分方程组初值问题

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = f_1(t,x,y) & x(t_0) = x_0 \\ \dfrac{dy}{dt} = f_2(t,x,y) & y(t_0) = y_0 \end{cases}$$

一阶常微分方程组的向量表示

记 $Y = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ $\quad F(t,Y) = \begin{bmatrix} f_1(t,Y) \\ f_2(t,Y) \end{bmatrix}$

$$\begin{cases} \dfrac{dY}{dt} = F(t,Y) \quad t > t_0 \\ Y(t_0) = Y_0 \end{cases}$$

欧拉公式:$Y_{n+1} = Y_n + hF(t_n, Y_n)$

$(n = 0,1,\cdots, N-1)$

$$Y_0 = [x_0, y_0]^T$$

例2：高阶常微分方程组初值问题

$$\begin{cases} y'' = f(x, y, y') \\ y(x_0) = y_0, \quad y'(x_0) = m_0 \end{cases}$$

令 $\begin{cases} y_1(x) = y(x) \\ y_2(x) = y'(x) \end{cases}$

一阶常微分方程组:

$$\begin{cases} y_1' = y_2 \\ y_2' = f(x, y_1, y_2) \end{cases}$$

初值条件:

$$y_1(x_0) = y_0,$$

$$y_2(x_0) = m_0$$

$$Y(x) = \begin{bmatrix} y_1(x) \\ y_2(x) \end{bmatrix} \quad F(x, Y) = \begin{bmatrix} y_2(x) \\ f(x, y_1, y_2) \end{bmatrix} \quad Y_0 = \begin{bmatrix} y_0 \\ m_0 \end{bmatrix}$$

常微分方程组

$$\begin{cases} \dfrac{dY}{dx} = F(x, Y) \\ Y(x_0) = Y_0 \end{cases}$$

有限差分法

二阶常微分方程边值问题一般形式

$$-\frac{d}{dx}(p\frac{du}{dx})+r\frac{du}{dx}+qu=f(x), \qquad a\le x\le b$$

$$u(a)=\alpha,\ u(b)=\beta$$

将边值问题离散化为代数方程分三个步骤：

第一步:将求解区域离散化；
第二步:将微分方程离散化；
第三步:处理边界条件.

微分方程离散化方法——有限差分法

（finite difference method）

用差商替代微分方程中的导数项

有限差分法的基本问题是研究对微分算子的各阶逼近格式（即差分格式）。

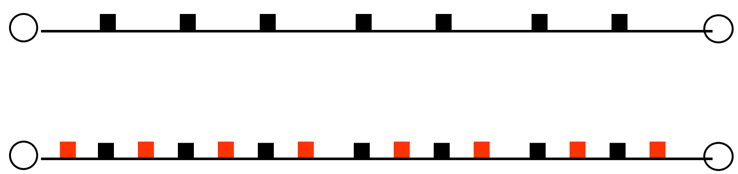
第一步:求解区域离散化，均匀剖分构造均匀网格，取正整数n，步长$h = (b - a)/(n+1)$，得

$$x_j = a + jh \quad （j = 0，1，\cdots，n+1）$$

求解区域

$$\Omega = \{x \mid a < x < b\}$$

➔ $$\Omega_h = \{x_j \mid x_j = a + jh, j = 1, \cdots, n\}$$



第二步:微分方程离散化

考虑微分方程 $\begin{cases} -u'' + qu = f(x), \ a \le x \le b \\ u(a) = \alpha, \ u(b) = \beta \end{cases}$

差分逼近

$$u''(x_j) = \frac{1}{h^2}[u(x_{j+1}) - 2u(x_j) + u(x_{j-1})] + \frac{h^2}{12}u^{(4)}(\xi_j)$$

$$\Rightarrow \quad -\frac{1}{h^2}(u_{j+1} - 2u_j + u_{j-1}) + qu_j = f_j$$

三点差分格式 $\quad -u_{j-1} + (2 + qh^2)u_j - u_{j+1} = h^2 f_j$

（ $j = 1, \cdots\cdots, n$ ）

第三步：边界条件处理

第一类边界条件　　$u(a)=\alpha,\ u(b)=\beta$

$$u_0=\alpha,\ u_{n+1}=\beta$$

$$\begin{bmatrix} 2+qh^2 & -1 & & \\ -1 & 2+qh^2 & -1 & \\ & \ddots & \ddots & \ddots \\ & & -1 & 2+qh^2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_n \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ \vdots \\ F_n \end{bmatrix}$$

$$F_1=h^2 f_1+u_0$$

$$F_j=h^2 f_j \qquad (\ j=1,2,\cdots,n\ )$$

$$F_n=h^2 f_n+u_{n+1}$$

第八部分 矩阵的特征值与特征向量

➔计算实矩阵的按模最大（小）的特征值及其相应的特征向量的乘幂法(反幂法)

（刚讲，自复习）

乘幂法求矩阵的特征值及特征向量的方法可归纳如下：

输入：矩阵A, 初始向量 x_0, 误差限 e, 最大迭代次数 N， $k \leftarrow 0$， $\lambda_0 = 0$

1） 规范化计算得到：

$$z_k = \frac{x_k}{\|x_k\|_\infty}$$

2） 递归计算：

$$x_{k+1} = Az_k$$

3) 计算最大值： $\lambda = \|x_{k+1}\|_\infty$ （即： $\lambda = \max\{x_{k+1}\}$)

4) 如果 $|\lambda-\lambda_0|< e$, 则输出：

λ (特征值)， z_{k+1} 或 x_{k+1}(特征向量)

最终计算得 λ_1

5) 否则($|\lambda-\lambda_0|>=e$):

如果k<N，则 $k \leftarrow k+1$， $\lambda_0 \leftarrow \lambda$;

转1)

反幂法求矩阵的特征值及特征向量的方法可归纳如下：

输入： 矩阵A, 初始向量x_0, 误差限e, 最大迭代次数N, $k \leftarrow 0$, $\lambda_0 = 0$

1) 规范化计算得到：

$$z_k = \frac{x_k}{\|x_k\|_\infty}$$

2) 对A作三角分解A=LU

即: $x_{k+1} = A^{-1} z_k$(与乘幂法不同)

3) 解方程组: $\boxed{LU x_{k+1} =} z_k$, (两步：$L w_k = z_k$, $U x_{k+1} = w_k$) (对比乘幂法 $x_{k+1} = A z_k$)

4) 计算最大值：$a = \|x_{k+1}\|_\infty$ (即 $a = \max\{|x_{k+1}|\}$ 为A^{-1}的最大特征值近似)

5) 如果 $|a-\lambda_0| < e$, 则输出：

<u>$\lambda=1/a$ (特征值)</u>, z_{k+1} 或 x_{k+1} (对应的特征向量)

6) 否则 $|a-\lambda_0| >= e$:

如果: $k<N$, 则 $k \leftarrow k+1$, $\lambda_0 \leftarrow a$;