迭代法的一般理论

- 不动点迭代法
- 不动点迭代的收敛性
- 迭代序列的收敛速度
- 序列收敛加速方法

➢不动点迭代法

将一个计算过程反复进行称为迭代，迭代法是一类常见常用的计算技术。

一种圆周率计算方案：

$$\frac{\pi}{4}=1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\cdots$$

初值：$x_0=1$

迭代格式：$$x_n=x_{n-1}+\frac{(-1)^n}{2n+1}$$ （$n=1,2,3,\cdots\cdots$ ）

➢不动点迭代法

实验：在Python中反复计算 $\mathrm{x} = \mathrm{math.sqrt}(1+\mathrm{x})$

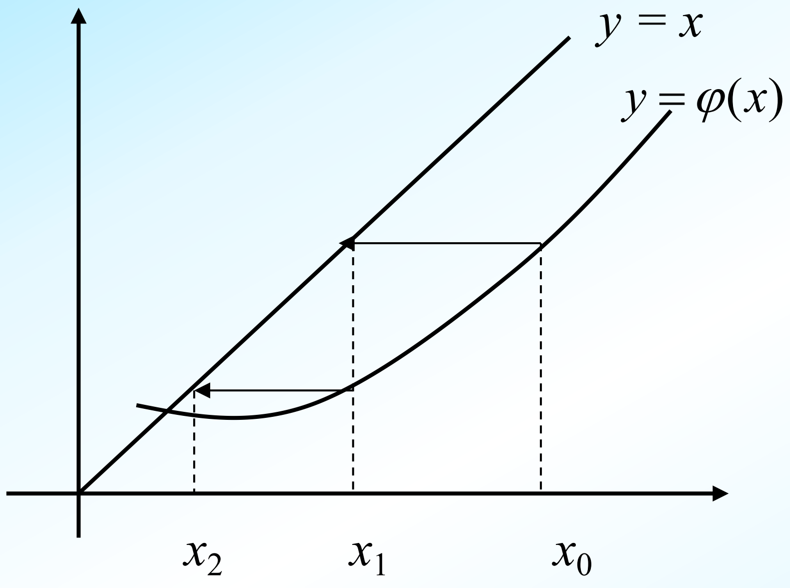
实际是计算: $x = \sqrt{1+x}$

为方程： $f(x) = x^2 - x - 1$ 的一个根： $x = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$

$f(x) = x^2 - x - 1 \xrightarrow{?} x = \sqrt{1+x} \quad ? \quad x = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$

$$f(x)=0 \quad \Rightarrow \quad x=\varphi(x)$$

若存在 x^*,使得 $x^*=\varphi(x^*)$,则称x^*为**不动点。**



$\varphi(x)$ —— 迭代函数

$$x=\varphi(x) \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} y=x \\ y=\varphi(x) \end{cases}$$

迭代格式: $x_{n+1}=\varphi(x_n)$ $(n=0, 1, 2, \cdots\cdots)$

例2.1 方程 $x^3 + 4x^2 - 10 = 0$ 在 $[1, 2]$ 上有一个根，将方程变换成另一形式：

(1) $x = \sqrt{10 - x^3} / 2$ $\qquad \varphi(x) = \sqrt{10 - x^3} / 2$

$$x_{n+1} = \varphi(x_n) \qquad (n = 0, 1, 2, \cdots\cdots)$$

$$x_0 = 1.5$$

(2) $x = \sqrt{10 / (x + 4)}$ $\qquad \varphi(x) = \sqrt{10 / (x + 4)}$

$$x_{n+1} = \varphi(x_n) \qquad (n = 0, 1, 2, \cdots\cdots)$$

$$x_0 = 1.5$$

```
import math
def f(x):
  return 0.5*math.sqrt(10-x*x*x)

x0=1.5; er=1; k=0;
while er>0.00001:
  x=f(x0)
  er=abs(x-x0)
  x0=x
  k=k+1
  print('迭代次数',"{0:.0f}".format(k),'方程的根为x=',"{0:.6f}".format(x0))
```

$$x^3 + 4x^2 - 10 = 0$$

$x_1, x_2 =$

-2.6826 + 0.3583i

-2.6826 - 0.3583i

1.3652

k=16

x_0=1.3652

```python
import math
def f(x):
  return 0.5*math.sqrt(10/(4+x))

x0=1.5; er=1; k=0;
while er>0.00001:
  x=f(x0)
  er=abs(x-x0)
  x0=x
  k=k+1
  print('迭代次数',"{0:.0f}".format(k),'方程的根为x=',"{0:.6f}".format(x0))
```

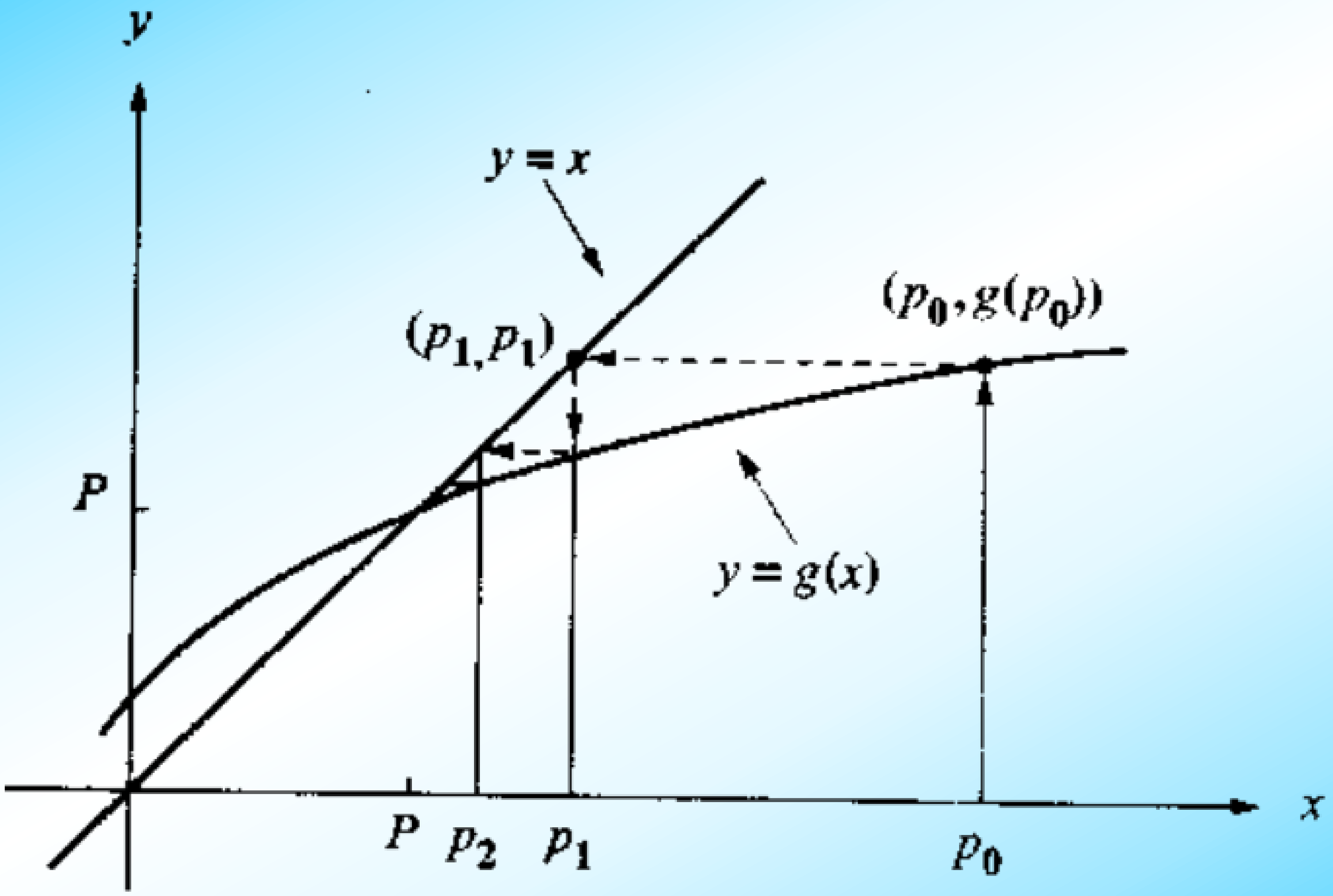
$x^3 + 4x^2 - 10 = 0$

$x_1, x_2 =$
-2.6826 + 0.3583i
-2.6826 - 0.3583i
1.3652

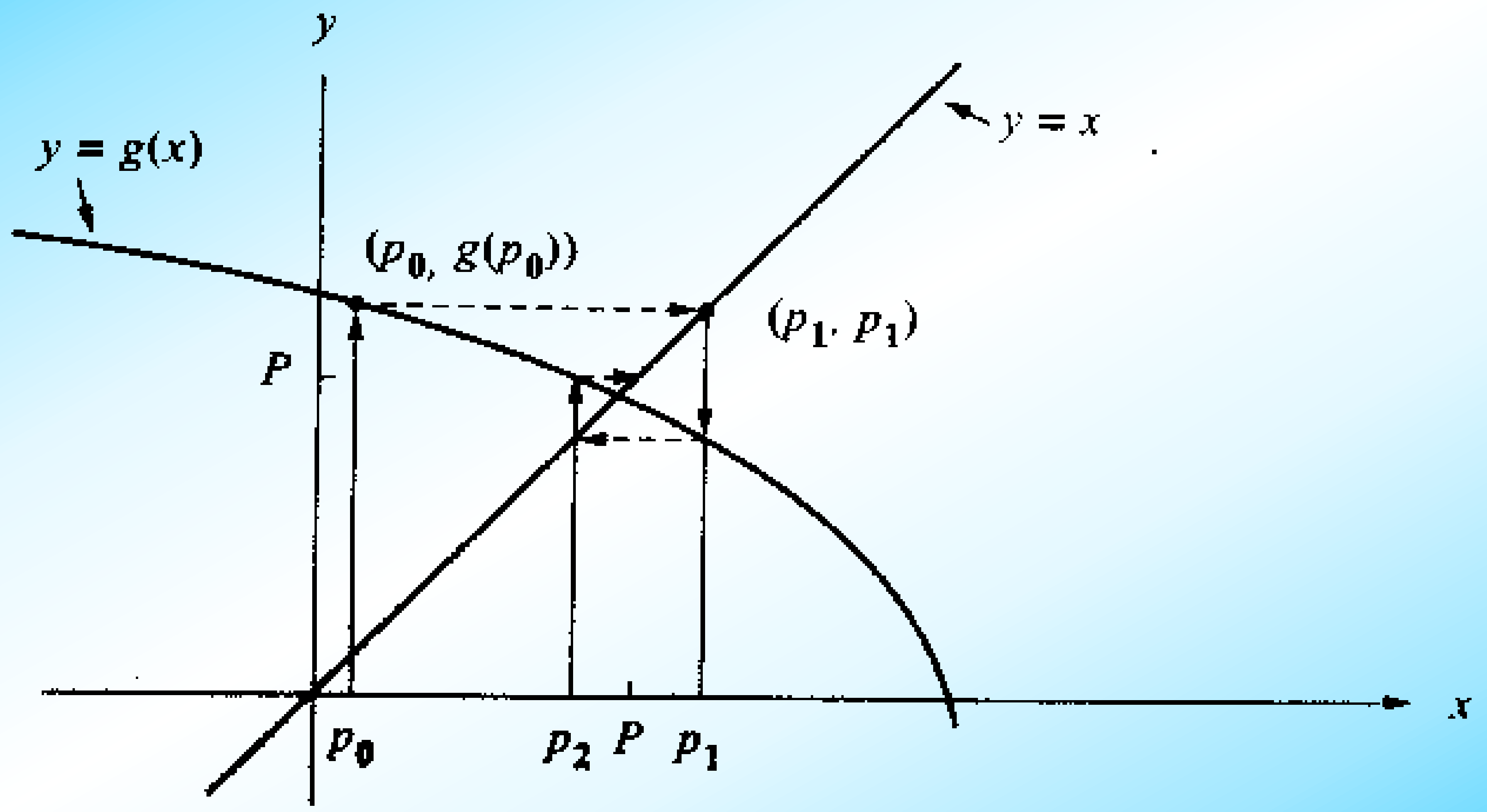
$k=6$
$x_0=1.3652$

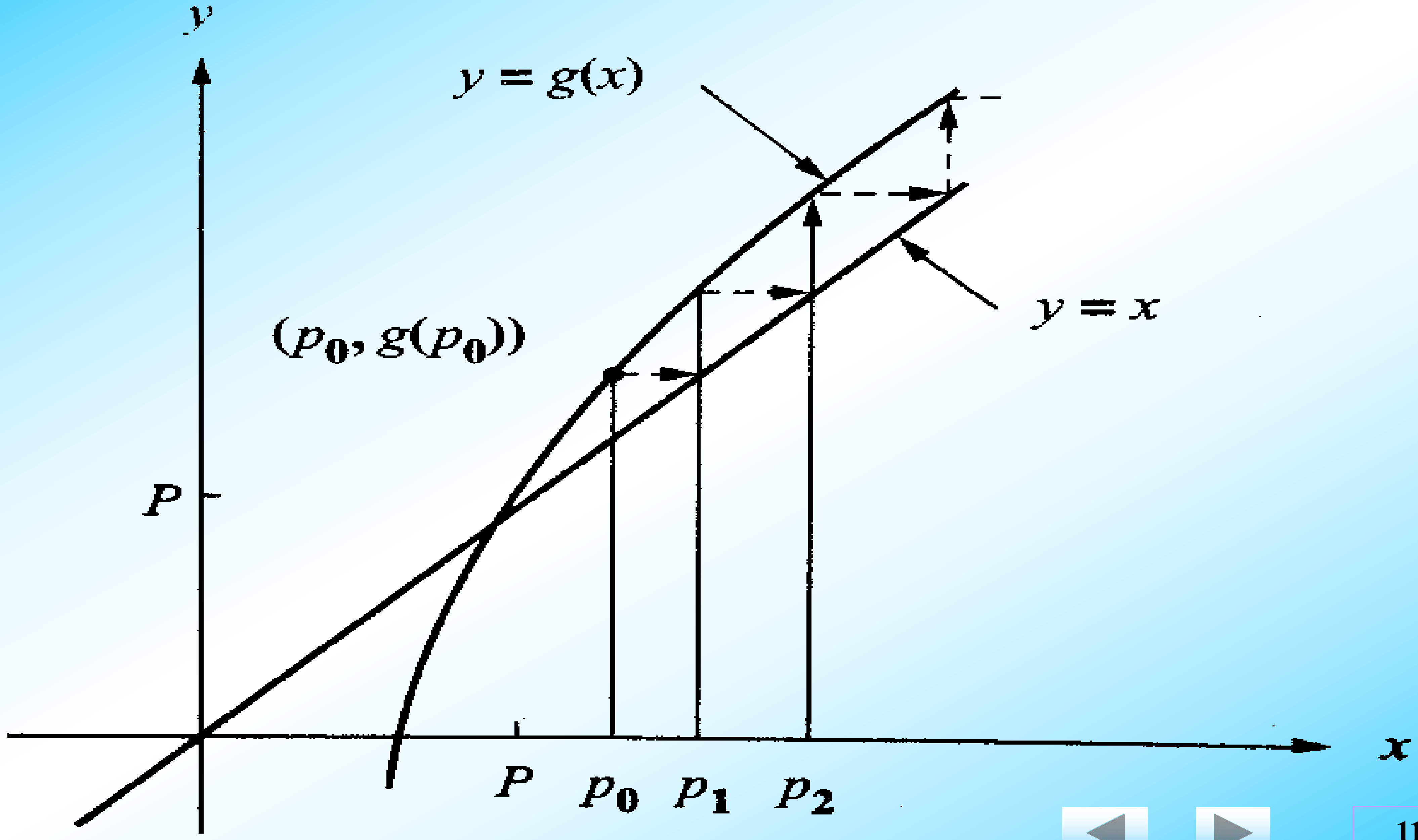
➢不动点迭代法需要研究的问题

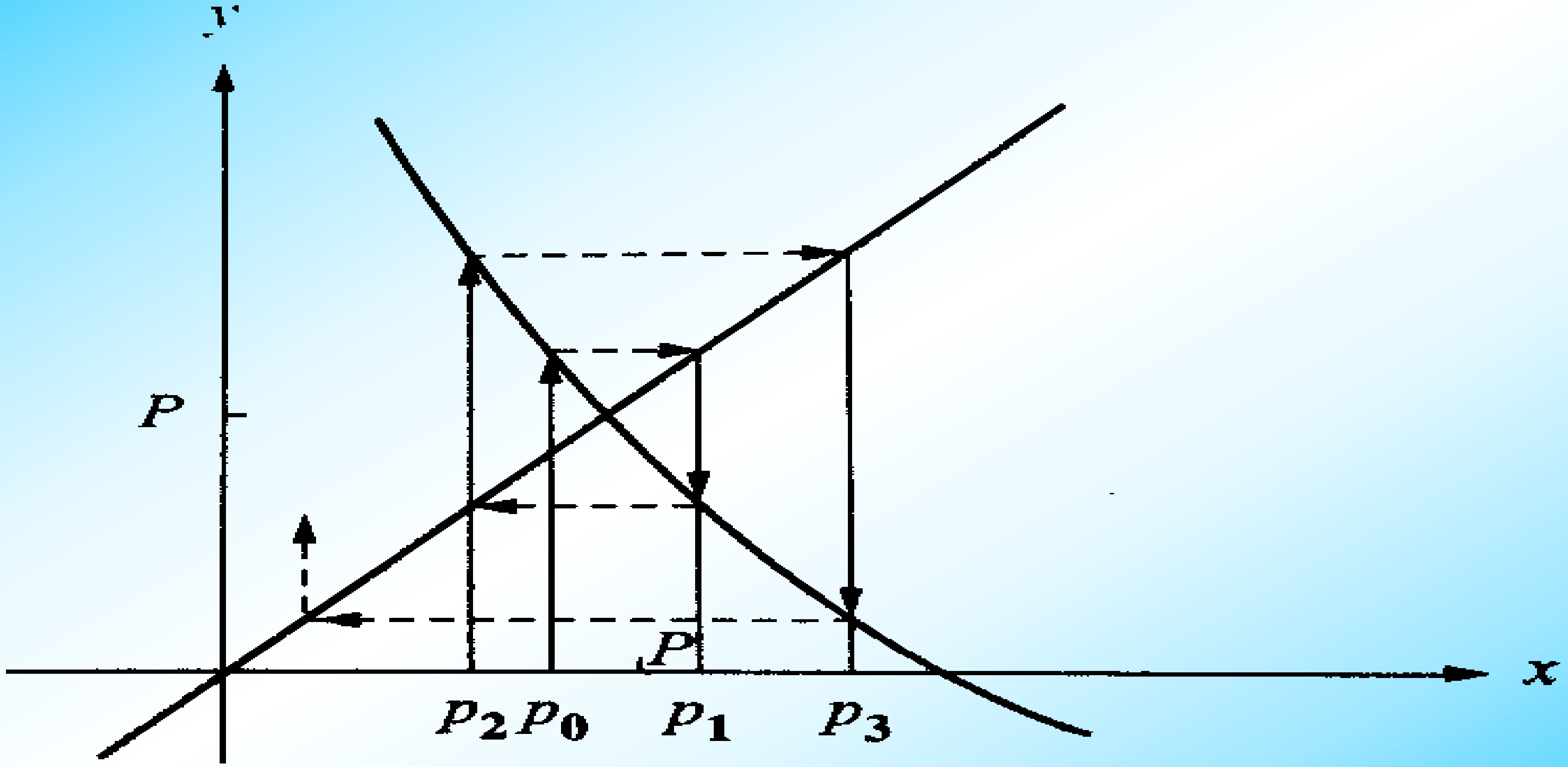
- 构造有效的迭代格式
- 选取合适的迭代初值
- 对迭代格式进行收敛性分析



y
y = x
$(p_0, g(p_0))$
(p_1, p_1)
P
y = g(x)
x
P
p_2
p_1
p_0


y
y = x
y = g(x)
(p0, g(p0))
(p1, p1)
P
x
p0
p2
P
p1


y
y = g(x)
y = x
(p0, g(p0))
P
x
P
p0
p1
p2


y
P
P
x
p_2 p_0
p_1
p_3

➢不动点迭代序列的收敛速度

引理2.1 如果 $\varphi(x)\in C[a,\ b]$,满足条件:

$$a\le\varphi(x)\le b;$$

压缩映射

则 $\varphi(x)$ 在 $[a, b]$ 有的不动点 x^*.

证 若$\varphi(a)=a$ 或 $\varphi(b)=b$,显然 $\varphi(x)$ 有不动点.

设 $\varphi(a)\ne a$, $\varphi(b)\ne b$ 则有 $\varphi(a)>a$, $\varphi(b)<b$

记 $\psi(x)=\varphi(x)-x$ 则有 $\psi(a)\cdot\psi(b)<0$

所以,存在x^*,使得 $\psi(x^*)=0$

即 $\varphi(x^*)=x^*$ ， x^*即为不动点.

定理2.4 如果 $\varphi(x)\in C^1[a,\ b]$,满足条件:

(1) $a\le\varphi(x)\le b$ (2) $|\varphi'(x)|\le L<1$

则对任意的 $x_0\in[a,b]$, 迭代格式 $x_{n+1}=\varphi(x_n)$ 产生的序列

$\{x_n\}$收敛到不动点 x^*,且有

$$|x^*-x_n|\le\frac{1}{1-L}|x_{n+1}-x_n|.$$

证 $\begin{cases}x_n=\varphi(x_{n-1})\\ x^*=\varphi(x^*)\end{cases}\rightarrow |x_n-x^*|=|\varphi(x_{n-1})-\varphi(x^*)|$

$$=|\varphi'(\xi)||x_{n-1}-x^*|$$

$$|x_n-x^*|\le L|x_{n-1}-x^*|$$

$$|x_n - x^*| \le L^n |x_0 - x^*|$$

$$\lim_{n\to\infty} |x_n - x^*| \le \lim_{n\to\infty} L^n |x_0 - x^*| = 0 \qquad (0<L<1)$$

所以, $\lim_{n\to\infty} x_n = x^*$ 故迭代格式收敛

$$|x_n - x^*| = |x_n - x_{n+1} + x_{n+1} - x^*|$$

$$\le |x_n - x_{n+1}| + |x_{n+1} - x^*|$$

$$\le |x_n - x_{n+1}| + L|x_n - x^*|$$

$\rightarrow$ $(1-L)|x_n - x^*| \le |x_n - x_{n+1}|$

$\rightarrow$ $|x^* - x_n| \le \dfrac{1}{1-L}|x_{n+1} - x_n|$

➢不动点迭代序列的收敛速度

数列的 r 阶收敛概念

设 $\lim_{n\to\infty} x_n = x^*$ ，若存在 $a>0$，$r>0$ 使得

$$\lim_{n\to\infty}\frac{|x_{n+1}-x^*|}{|x_n-x^*|^r}=a$$

则称数列$\{x_n\}$ r 阶收敛.

特别: (1) 收敛阶$r=1$时,称为线性收敛;

(2) 收敛阶$r>1$时,称为超收敛;

(3) 收敛阶$r=2$ 时,称为平方收敛。

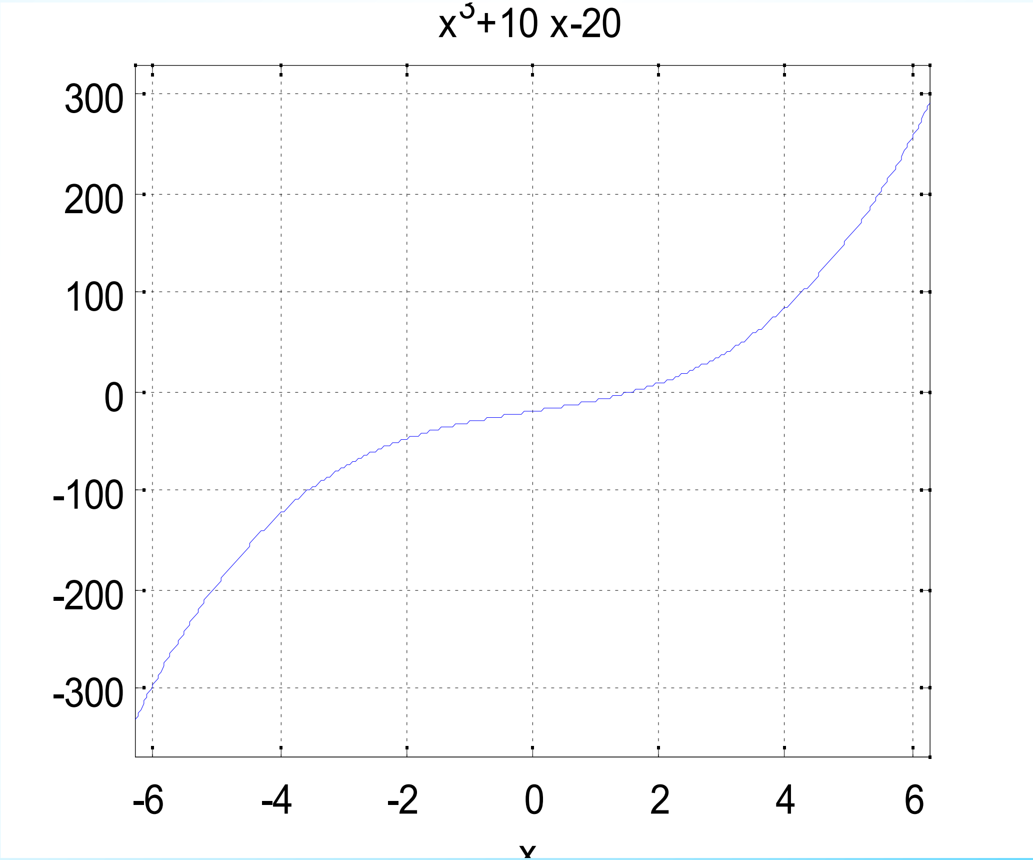
序列的收敛阶数越高, 收敛速度越快。

例2.2 方程 $x^3+10x-20=0$,取 $x_0=1.5$, 证明迭代法

$$x_{n+1}=20/(x_n^2+10)$$ 是线性收敛

证:令 $f(x)=x^3+10x-20$,

绘出 $y=f(x)$ 图形



可知方程的根 $x^*\approx1.5$, 令

$$\varphi(x)=20/(x^2+10)$$

$$\varphi'(x)=-40x/(x^2+10)^2$$

$$\varphi'(x^*)\approx\varphi'(1.5)=0.3998$$

显然,在x^*附近

$$|\varphi'(x)|<1 \qquad \varphi'(x)\neq 0$$

利用**Lagrange中值定理**, 有

$$|x_{n+1}-x^*|=|\varphi(x_n)-\varphi(x^*)|=|\varphi'(\xi_n)||x_n-x^*|$$

其中, ξ_n 介于x_n和x^*之间. 所以

$$\lim_{n\to\infty}\frac{|x_{n+1}-x^*|}{|x_n-x^*|}=\lim_{n\to\infty}|\varphi'(\xi_n)| =|\varphi'(x^*)|$$

由此可知,这一序列的收敛阶数为1,即迭代法是线性收敛.

定理2.6 设x^*是 $\varphi(x)$ 的不动点,且

$$\varphi'(x^*)=\varphi''(x^*)=\cdots=\varphi^{(p-1)}(x^*)=0$$

而 $\varphi^{(p)}(x^*)\neq 0$ 则 $x_{n+1}=\varphi(x_n)$ p阶收敛。

证：由Taylor公式

$$|x_{n+1}-x^*|=|\varphi(x_n)-\varphi(x^*)|=\frac{|x_n-x^*|^p}{p!}|\varphi^{(p)}(\xi_n)|$$

其中，ξ_n 介于x_n和x^*之间。 所以

$$\lim_{n\to\infty}\frac{|x_{n+1}-x^*|}{|x_n-x^*|^p}=\frac{1}{p!}\lim_{n\to\infty}|\varphi^{(p)}(\xi_n)|=\frac{1}{p!}|\varphi^{(p)}(x^*)|$$

故迭代法p阶收敛。

数列收敛加速原理

线性收敛数列 $$\lim_{n\to\infty}\frac{|x_{n+1}-x^*|}{|x_n-x^*|}=a$$

$$\Rightarrow \quad \frac{x_{n+1}-x^*}{x_n-x^*}\approx\frac{x_{n+2}-x^*}{x_{n+1}-x^*}$$

$$\Rightarrow \quad x^*\approx x_{n+2}-\frac{(x_{n+2}-x_{n+1})^2}{x_{n+2}-2x_{n+1}+x_n}$$

Aitkin加速收敛序列

$$y_{n+2} = x_{n+2} - \frac{(x_{n+2} - x_{n+1})^2}{x_{n+2} - 2x_{n+1} + x_n}$$

Steffensen迭代法

$$y_n = \varphi(x_n), \qquad z_n = \varphi(y_n),$$

$$x_{n+1} = z_n - \frac{(z_n - y_n)^2}{z_n - 2y_n + x_n} \qquad (n = 0,1,2,\ldots).$$

例2.3 数列 $x_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{2k+1}$ 收敛于 $\frac{\pi}{4}$ 速度慢

```
x0=1; f=1; n=1;

k=0; error=1;
while error>0.00001:
  f=-f;  n=n+2;  x=x0+f/n;

  error=abs(x-x0);

  x0=x; k=k+1;

print('迭代次数',"{0:.0f}".format(k),'pi的近似值为
x=',"{0:.6f}".format(4*x))
```

k = 50000

ans = 3.1416

迭代加速方法:

$$y_{n+2} = x_{n+2} - \frac{(x_{n+2} - x_{n+1})^2}{x_{n+2} - 2x_{n+1} + x_n}$$

```
x1=1;x2=x1-1/3;
x3=x2+1/5;
y0=x3;
k=3;n=5;
f=1;error=1;
while error>0.00001:
  y=x3-(x3-x2)*(x3-x2)/(x3-2*x2+x1);
  error=abs(y-y0);
  y0=y; k=k+1;
  x1=x2;x2=x3;
  f=-f;n=n+2;x3=x3+f/n;

print('迭代次数',"{0:.0f}".format(k),'pi的近似值为x=',"{0:.6f}".format(4*y))
```

```
k =    26

ans =    3.1416
```