



01 수열의 극한

예제 1 수열의 수렴과 발산

1. 다음 수열의 수렴, 발산을 조사하고 수렴하는 경우에는 극한값을 구하시오.

- (1) $\left\{ \frac{1}{n} \right\}$
- (2) $\{2n-1\}$
- (3) $\{1-2n\}$

2. 다음 수열의 수렴, 발산을 조사하고 수렴하는 경우에는 극한값을 구하시오.

- (1) $\{2\}$
- (2) $\{1+(-1)^n\}$

예제 2 수열의 극한에 대한 기본성질

3. 두 수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ 에 대하여 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 2$, $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = \frac{1}{3}$ 일 때,

$\lim_{n \rightarrow \infty} (4a_n + 3b_n)$ 의 값은?

- ① 6 ② 7 ③ 8
④ 9 ⑤ 10

4. 두 수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ 에 대하여 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = -\frac{1}{2}$, $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = 4$ 일 때,

$\lim_{n \rightarrow \infty} (4a_n + 5b_n)$ 의 값을 구하시오.

5. 두 수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ 에 대하여

$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 2$, $\lim_{n \rightarrow \infty} (2a_n - 3b_n) = -20$ 일 때, $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n$ 의 값을 구하시오.



예제 3 수열의 극한값의 계산(1)

6. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(3n+1)(n-2)-n^2}{(n-1)(n+1)}$ 의 값을 구하시오.

8. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(3n+1)(an-1)}{n^2+1} = 6$ 을 만족시키는 상수 a 의 값을 구하시오.

7. $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n^2+1}{2n-1} - \frac{2n^3-1}{4n^2+1} \right)$ 의 값을 구하시오.

예제 4 수열의 극한값의 계산(2)

9. $\lim_{n \rightarrow \infty} n(\sqrt{n^2+1} - \sqrt{n^2-1})$ 의 값을 구하시오.

11. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a}{\sqrt{n^2+3n}-n} = 2$ 를 만족시키는 상수 a 의 값은?

- ① 2 ② $\frac{5}{2}$ ③ 3
④ $\frac{7}{2}$ ⑤ 4

10. $\lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{9n^2+n} - an) = \frac{1}{6}$ 을 만족시키는 양수 a 의 값은?

- ① $\frac{1}{3}$ ② $\frac{1}{2}$ ③ 1
④ 2 ⑤ 3

예제 5 수열의 극한의 대소관계

12. 수열 $\{a_n\}$ 이 모든 자연수 n 에 대하여

$\frac{3n+1}{2n+1} \leq a_n \leq \frac{3n+1}{2n-1}$ 을 만족시킬 때, $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ 의 값은?

- ① 2 ② $\frac{3}{2}$ ③ $\frac{4}{3}$
④ $\frac{5}{4}$ ⑤ $\frac{6}{5}$

13. 수열 $\{a_n\}$ 이 모든 자연수 n 에 대하여

$3n^2 - 2n < a_n < 3n^2 + 2n + 1$ 을 만족시킬 때, $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{n^2}$ 의 값은?

- ① $\frac{1}{3}$ ② $\frac{1}{2}$ ③ 1
④ 2 ⑤ 3

14. 수열 $\{a_n\}$ 이 모든 자연수 n 에 대하여 $3n - 2 < a_n < 3n + 4$ 를

만족시킬 때, $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{2n+1}}{n}$ 의 값은?

- ① $\frac{9}{2}$ ② 5 ③ $\frac{11}{2}$
④ 6 ⑤ $\frac{13}{2}$

예제 6 등비수열의 극한

15. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^{2n}}{3^{n-1} + 4^{n+1}}$ 의 값은?

- ① $\frac{1}{5}$ ② $\frac{1}{4}$ ③ $\frac{1}{3}$
④ $\frac{1}{2}$ ⑤ 1

16. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^{n+1}(3^n - 1)}{6^{n-1} + 3^n}$ 의 값은?

- ① 12 ② 14 ③ 16
④ 18 ⑤ 20

17. 수열 $\left\{ \frac{(2x+1)^n}{2^{n-1} + 3^n} \right\}$ 이 수렴하도록 하는 모든 정수 x 의 값의

합은?

- ① -2 ② -1 ③ 0
④ 1 ⑤ 2

예제 7 r^n 을 포함하는 식의 극한

18. 수열 $\left\{ \frac{r^n}{1+r^n} \right\}$ 의 극한을 조사하시오. (단, $r \neq -1$)

19. 수열 $\left\{ \frac{r^{n+1}+1}{r^n+1} \right\}$ 의 극한을 조사하시오. (단, $r > 0$)

20. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{r^{2n}-1}{r^{2n}+1}$ 의 값을 구하시오.

기본핵심문제

21. 수열 $\{a_n\}$ 에 대하여 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n + 2}{3a_n + 4} = 5$ 일 때, $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ 의 값은?

- ① $-\frac{10}{7}$ ② $-\frac{9}{7}$ ③ $-\frac{8}{7}$
④ -1 ⑤ $-\frac{6}{7}$

22. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2}{n^3 + 2n + 3}$ 의 값은?

- ① $\frac{1}{5}$ ② $\frac{1}{4}$ ③ $\frac{1}{3}$
④ $\frac{1}{2}$ ⑤ 1

23. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{an + b}{\sqrt{n^2 + n} - n} = 5$ 일 때, 두 상수 a, b 에 대하여 $a + b$ 의 값은?

- ① 1 ② $\frac{3}{2}$ ③ 2
④ $\frac{5}{2}$ ⑤ 3

24. 수열 $\{a_n\}$ 이 모든 자연수 n 에 대하여 $\left| a_n - \frac{1}{3}n \right| \leq 2$ 를

만족시킬 때, $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{2n}}{2n}$ 의 값은?

- ① $\frac{1}{3}$ ② $\frac{1}{2}$ ③ 1
④ 2 ⑤ 3

25. 공비가 2인 등비수열 $\{a_n\}$ 의 첫째항부터 제 n 항까지의 합을

S_n 이라 할 때, $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{S_n}$ 의 값은? (단, $a_1 \neq 0$)

- ① $\frac{1}{10}$ ② $\frac{1}{8}$ ③ $\frac{1}{6}$
④ $\frac{1}{4}$ ⑤ $\frac{1}{2}$

26. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3r^{n+1} + 1}{r^n - 2} = 5$ 를 만족시키는 실수 r 의 값은? (단, $r > 0$)

- ① $\frac{4}{3}$ ② $\frac{5}{3}$ ③ 2
④ $\frac{7}{3}$ ⑤ $\frac{8}{3}$



02 급수

예제 1 급수의 수렴, 발산

27. 급수 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$ 의 합을 구하시오.

28. 수열 $\{a_n\}$ 의 첫째항부터 제 n 항까지의 합 S_n 이 $S_n = \frac{n+1}{3n-2}$ 일

때, 급수 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 의 합을 구하시오.

예제 2 급수와 수열의 극한 사이의 관계

29. 수열 $\{a_n\}$ 에 대하여 $\sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n - \frac{2n}{n+1}\right) = 3$ 일 때, $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ 의 값을 구하시오.

30. 수열 $\{a_n\}$ 에 대하여 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n - 2n}{3n-1} = 4$ 일 때, $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{n}$ 의 값을 구하시오.

31. 수열 $\{a_n\}$ 에 대하여 $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n - 4) = 2$ 일 때, $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2 + 2n}{n^2 a_n - 3n}$ 의 값을 구하시오. (단, 모든 자연수 n 에 대하여 $n^2 a_n - 3n \neq 0$ 이다.)

예제 3 급수의 성질

32. 두 급수 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ 이 수렴하고,

$\sum_{n=1}^{\infty} 2a_n = 12$, $\sum_{n=1}^{\infty} (3a_n - 2b_n) = 16$ 일 때, 급수 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ 의 합을
구하시오.

33. 두 급수 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ 이 수렴하고

$\sum_{n=1}^{\infty} 3a_n = 21$, $\sum_{n=1}^{\infty} (2a_n + 5b_n) = 24$ 일 때, 급수 $\sum_{n=1}^{\infty} (5a_n - 2b_n)$ 의
합을 구하시오.

34. 두 수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ 에 대하여

$\sum_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n) = 12$, $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n - b_n) = 6$ 일 때, 급수 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 의 합을
구하시오.



예제 4 등비급수의 수렴 발산

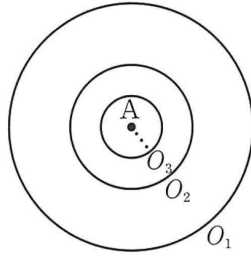
35. 첫째항이 20이고 공비가 $\frac{1}{2}$ 인 등비수열 $\{a_n\}$ 에 대하여 급수

$\sum_{n=1}^{\infty} (a_n + a_{n+1})$ 의 합을 구하시오

36. 급수 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{n-1} + (-1)^n}{3^{n+1}}$ 의 합을 구하시오

예제 5 등비급수의 활용

37. 그림과 같이 점 A를 중심으로 하고 반지름의 길이가 32인 원을 O_1 이라 하자. 점 A를 중심으로 하고 반지름의 길이가 O_1 의 반지름의 길이의 $\frac{1}{2}$ 인 원을 O_2 , 점 A를 중심으로 하고 반지름의 길이가 원 O_2 의 반지름의 길이의 $\frac{1}{2}$ 인 원을 O_3 라 하자. 이와 같은 과정을 계속할 때, 그려지는 모든 원의 둘레의 길이의 합을 구하시오.



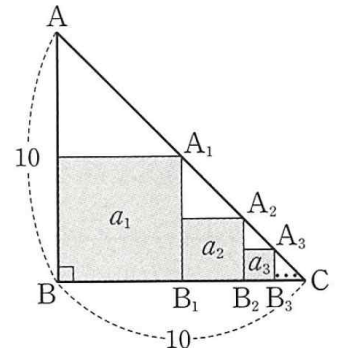
38. 그림과 같이 $\overline{AB} = \overline{BC} = 10$ 인

직각이등변삼각형 ABC에서 선분 AC의 중점을 A_1 , 선분 BC의 중점을 B_1 이라 하고 선분 A_1B_1 을 한 변으로 하는

정사각형의 넓이를 a_1 이라 하자. 선분 A_1C 의 중점을 A_2 , 선분 B_1C 의 중점을 B_2 라 하고 선분 A_2B_2 를 한 변으로 하는

정사각형의 넓이를 a_2 라 하자. 선분 A_2C 의 중점을 A_3 , 선분 B_2C 의 중점을 B_3 라 하고 선분 A_3B_3 를 한 변으로 하는 정사각형의 넓이를 a_3 라 하자. 이와 같은 과정을 계속하여 n 번째 얻은 정사각형의 넓이를

a_n 이라 할 때, 급수 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 의 합을 구하시오.



기본핵심문제

39. 첫째항이 10이고 공차가 2인 등차수열 $\{a_n\}$ 에 대하여 급수

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{a_n} - \frac{1}{a_{n+1}} \right) \text{의 합은?}$$

- ① $\frac{1}{3}$ ② $\frac{1}{2}$ ③ 1
④ 2 ⑤ 3

40. 수열 $\{a_n\}$ 에 대하여 $\sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n - \frac{n^2 - n + 1}{2n^2 + 1} \right) = 5$ 일 때,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (2a_n + 3) \text{의 값은?}$$

- ① 4 ② $\frac{9}{2}$ ③ 5
④ $\frac{11}{2}$ ⑤ 6

41. 두 급수 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ 이 수렴하고

$$\sum_{n=1}^{\infty} (2a_n + 3b_n) = 23, \quad \sum_{n=1}^{\infty} (3a_n - 2b_n) = 2 \text{일 때, 급수}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2}a_n + \frac{1}{5}b_n \right) \text{의 합은?}$$

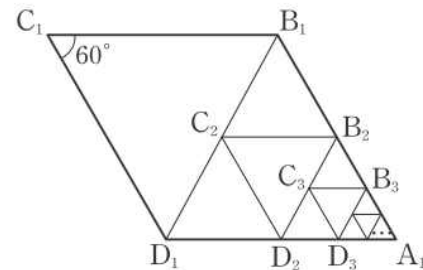
- ① 1 ② $\frac{3}{2}$ ③ 2
④ $\frac{5}{2}$ ⑤ 3

42. 첫째항이 3이고 공비가 $\frac{1}{5}$ 인 등비수열 $\{a_n\}$ 에 대하여 급수

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n a_{2n}}{a_{2n+1}} \text{의 합은?}$$

- ① $\frac{71}{4}$ ② $\frac{75}{4}$ ③ $\frac{79}{4}$
④ $\frac{83}{4}$ ⑤ $\frac{87}{4}$

43. 그림과 같이 모든 변의 길이가 1이고 $\angle B_1 C_1 D_1 = 60^\circ$ 인
평행사변형 $A_1 B_1 C_1 D_1$ 이 있다. 두 꼭짓점 B_1, D_1 을 이어 삼각형
 $B_1 C_1 D_1$ 을 만든다. 세 선분 $A_1 B_1, B_1 D_1, A_1 D_1$ 의 중점을 각각 $B_2,$
 C_2, D_2 라 하고 삼각형 $B_2 C_2 D_2$ 를 만든다. 다시 세 선분 $A_1 B_2,$
 $B_2 D_2, A_1 D_2$ 의 중점을 각각 B_3, C_3, D_3 라 하고 삼각형 $B_3 C_3 D_3$ 를
만든다. 이와 같은 과정을 계속하여 n 번째 얻은 삼각형 $B_n C_n D_n$ 의
넓이를 a_n 이라 할 때, 급수 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 의 합은?



- ① $\frac{\sqrt{3}}{5}$ ② $\frac{\sqrt{3}}{4}$ ③ $\frac{\sqrt{3}}{3}$
④ $\frac{\sqrt{3}}{2}$ ⑤ $\sqrt{3}$

단원종합문제

44. 수렴하는 수열 $\{a_n\}$ 에 대하여 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3a_n + 2}{1 + 2a_n} = \frac{8}{5}$ 일 때,

$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{2}a_n + 3 \right)$ 의 값은?

- ① $\frac{7}{2}$ ② 4 ③ $\frac{9}{2}$
④ 5 ⑤ $\frac{11}{2}$

45. 수열 $\{a_n\}$ 의 첫째항부터 제 n 항까지의 합을 S_n 이라 하자.

$S_n = n(n+3)$ 일 때, $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4S_n + na_n}{3n^2 + n - 1}$ 의 값은?

- ① $\frac{1}{4}$ ② $\frac{1}{2}$ ③ 1
④ 2 ⑤ 4

46. 두 수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ 에 대하여

$a_n + b_n = \frac{n}{n+1}$, $a_n b_n = \frac{n^2}{3n^2 + 2n + 1}$ 을 만족시킬 때,

$\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n - b_n)^2$ 의 값은?

- ① $-\frac{1}{2}$ ② $-\frac{1}{3}$ ③ 1
④ $\frac{1}{3}$ ⑤ $\frac{1}{2}$

47. 수열 $\{a_n\}$ 이 모든 자연수 n 에 대하여

$n(n+1) < a_n - n^2 < (n+2)(n+3)$ 을 만족시킬 때, $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{2n^2}$ 의

값은?

- ① $\frac{1}{5}$ ② $\frac{1}{4}$ ③ $\frac{1}{3}$
④ $\frac{1}{2}$ ⑤ 1

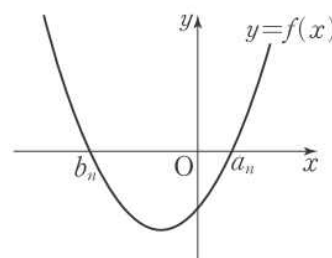
48. 자연수 n 에 대하여 x 에 대한 다항식 $x^n + 2x$ 를 일차식 $3x - 1$ 로

나눈 나머지를 a_n 이라 할 때, $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{9a_n + 1}{3a_n}$ 의 값은?

- ① $\frac{5}{2}$ ② 3 ③ $\frac{7}{2}$
④ 4 ⑤ $\frac{9}{2}$

49. 자연수 n 에 대하여 함수 $f(x)$ 를 $f(x) = x^2 + x - (4n^2 - 1)$ 이라 하자. 함수 $y = f(x)$ 의 그래프와 x 축이 만나는 두 점의 x 좌표를 각각

a_n , b_n ($a_n > b_n$)이라 할 때, 급수 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n + b_n}{a_n b_n}$ 의 합은?



- ① $\frac{1}{4}$ ② $\frac{1}{2}$ ③ 1
④ 2 ⑤ 4

50. 수열 $\{a_n\}$ 에 대하여 급수 $\sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n - \frac{4n^2 - 3n + 1}{2n^2 - 5} \right)$ 이 수렴할 때,

$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(a_n + 3)n^2 - n}{2n^2 + 3}$ 의 값은?

- ① 1 ② $\frac{3}{2}$ ③ 2
④ $\frac{5}{2}$ ⑤ 3

51. 등비수열 $\{a_n\}$ 에 대하여 $a_1 = 2$, $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = 6$ 일 때, $\sum_{n=1}^{\infty} a_{2n}$ 의

값은?

- ① $\frac{8}{5}$ ② $\frac{9}{5}$ ③ 2
④ $\frac{11}{5}$ ⑤ $\frac{12}{5}$

52. 두 등비수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ 의 첫째항이 각각 2, 40이고 두 급수

$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ 이 모두 수렴한다.

$\sum_{n=1}^{\infty} (a_n + 3b_n) = 20$, $\sum_{n=1}^{\infty} (9a_n - 6b_n) = 4$ 를 만족시킬 때, 급수

$\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ 의 합은?

- ① $\frac{62}{7}$ ② $\frac{64}{7}$ ③ $\frac{66}{7}$
④ $\frac{68}{7}$ ⑤ 10

53. 좌표평면에서 직선 $y = 3x$ 위의 점 $A_1(1, 3)$ 이 있다. 점 A_1 을

지나고 x 축에 평행한 직선이 직선 $y = \frac{1}{3}x$ 와 만나는 점을 B_1 , 점

B_1 을 지나고 y 축에 평행한 직선이 직선 $y = 3x$ 와 만나는 점을 A_2 ,

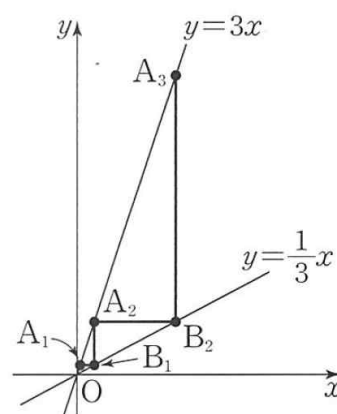
점 A_2 를 지나고 x 축에 평행한 직선이 직선 $y = \frac{1}{3}x$ 와 만나는 점을

B_2 , 점 B_2 를 지나고 y 축에 평행한 직선이 직선 $y = 3x$ 와 만나는

점을 A_3 이라 하자. 이와 같은 과정을 계속하여 점

$B_3, A_4, B_4, \dots, A_n, B_n, \dots$ 을 정할 때, 급수 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{A_n B_n}$ 의

합은?



- ① 9 ② 10 ③ 11
④ 12 ⑤ 13

54. 자연수 k 에 대하여 $a_k = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\left(\frac{2}{k}\right)^n}{\left(\frac{2}{k}\right)^{n-1} + 2}$ 이라 할 때, $\sum_{k=1}^5 k a_k$ 의

값을 구하시오.

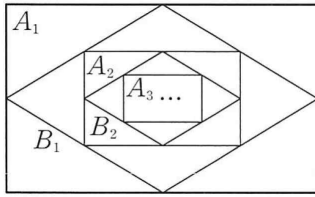
55. 첫째항이 6이고 공비가 r ($0 < r < 1$)인 등비수열 $\{a_n\}$ 의
첫째항부터 제 n 항까지의 합을 S_n 이라 하자.

$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{S_n} - \frac{1}{S_{n+1}} \right) = \frac{1}{18}$ 일 때, 공비 r 의 값을 구하시오.

기출문항 변형 수능 맛보기

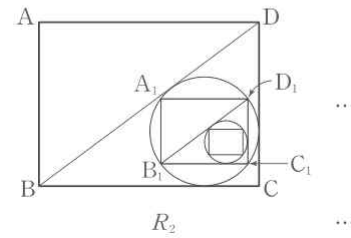
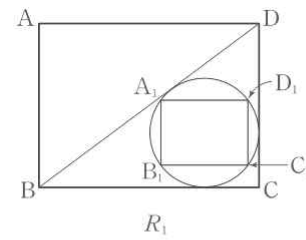
56. 그림과 같이 가로와 세로의 길이가 10이고 세로의 길이가 6인 직사각형 A_1 이 있다. 직사각형 A_1 의 각 변의 중점을 연결하여 마름모 B_1 을 그리고 마름모 B_1 의 각 변의 중점을 연결하여 직사각형 A_2 의 각 변의 중점을 연결하여 마름모 B_2 를 그리고 마름모 B_2 의 각 변의 중점을 연결하여 직사각형 A_3 를 그린다. 이와 같은 방법으로 얻은 직사각형

A_n 의 넓이를 S_n 이라 할 때, $\sum_{n=1}^{\infty} S_n$ 의 값을 구하시오.



57. 그림과 같이 $\overline{AB}=3$, $\overline{AD}=4$ 인 직사각형 ABCD에 대하여 삼각형 BCD에 내접하는 원을 그린 후 그 원에 내접하고 직사각형 ABCD와 닮은 직사각형 $A_1B_1C_1D_1$ 을 그리고, 원의 내부와 직사각형 $A_1B_1C_1D_1$ 의 외부의 공통부분에 색칠하여 얻은 그림을 R_1 이라 하자. 그림 R_1 에서 새로 그려진 직사각형 $A_1B_1C_1D_1$ 에 그림 R_1 과 같은 방법으로 내접하는 원과 직사각형을 그린 후 원의 내부와 직사각형의 외부의 공통부분에 색칠하여 얻은 그림을 R_2 라 하자. 이와 같은 과정을 계속하여 n 번째 얻은 그림 R_n 에 색칠되어 있는 부분의 넓이를 S_n 이라 할 때, $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n$ 의 값은?

(단, 그림 R_n 의 모든 직사각형들은 대각선 중 하나가 직선 BD와 평행하다.)



- ① $\frac{25\pi - 46}{21}$ ② $\frac{25\pi - 47}{21}$ ③ $\frac{25\pi - 48}{21}$
④ $\frac{25\pi - 47}{20}$ ⑤ $\frac{25\pi - 48}{20}$

[빠른 정답]

- 1) **정답** (1) 수렴, 0 (2) 발산 (3) 발산
- 2) **정답** (1) 수렴, 2 (2) 발산(진동)
- 3) **정답** ④
- 4) **정답** 18
- 5) **정답** 8
- 6) **정답** 2
- 7) **정답** $\frac{1}{4}$
- 8) **정답** 2
- 9) **정답** 1
- 10) **정답** ⑥
- 11) **정답** ③
- 12) **정답** ②
- 13) **정답** ⑤
- 14) **정답** ④
- 15) **정답** ②
- 16) **정답** ①
- 17) **정답** ③
- 18) **정답** $-1 < r < 1$ 일 때 0에 수렴, $r = 1$ 일 때 $\frac{1}{2}$ 에 수렴,
 $r < -1$ 또는 $r > 1$ 일 때 1에 수렴
- 19) **정답** $0 < r \leq 1$ 일 때 1에 수렴, $r > 1$ 일 때 r 에 수렴
- 20) **정답** $-1 < r < 1$ 일 때 -1 , $r = -1$ 또는 $r = 1$ 일 때 0,
 $r < -1$ 또는 $r > 1$ 일 때 1
- 21) **정답** ②
- 22) **정답** ③
- 23) **정답** ④
- 24) **정답** ①
- 25) **정답** ⑤
- 26) **정답** ②
- 27) **정답** 1
- 28) **정답** $\frac{1}{3}$
- 29) **정답** 2
- 30) **정답** 2
- 31) **정답** $\frac{1}{4}$
- 32) **정답** 1
- 33) **정답** 31
- 34) **정답** 9
- 35) **정답** 6
- 36) **정답** $\frac{1}{4}$
- 37) **정답** 128π
- 38) **정답** $\frac{100}{3}$

- 39) **정답** ③
- 40) **정답** ①
- 41) **정답** ⑤
- 42) **정답** ②
- 43) **정답** ③
- 44) **정답** ②
- 45) **정답** ④
- 46) **정답** ②
- 47) **정답** ⑤
- 48) **정답** ③
- 49) **정답** ②
- 50) **정답** ④
- 51) **정답** ⑤
- 52) **정답** ②
- 53) **정답** ①
- 54) **정답** $\frac{8}{3}$
- 55) **정답** $\frac{1}{3}$
- 56) **정답** 80
- 57) **정답** ③

정답 및 풀이

1) **정답** (1) 수렴, 0 (2) 발산 (3) 발산

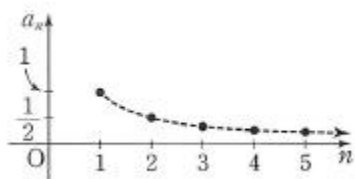
(1) 수열 $\{a_n\}$ 에서 $a_n = \frac{1}{n}$ 이면

$a_1 = 1, a_2 = \frac{1}{2}, a_3 = \frac{1}{3}, a_4 = \frac{1}{4}, \dots$ 이므로 n 이 한없이 커질 때,

a_n 의 값은 일정한 수 0에 한없이

가까워진다. 즉, 수열 $\left\{\frac{1}{n}\right\}$ 은

수렴하고 그 극한값은 0이다.



(2) 수열 $\{a_n\}$ 에서 $a_n = 2n - 1$ 이면

$a_1 = 1, a_2 = 3, a_3 = 5, a_4 = 7, \dots$ 이므로 n 이 한없이 커질 때 수열 $\{a_n\}$ 은 양의 무한대로 발산한다.

(3) 수열 $\{a_n\}$ 에서 $a_n = 1 - 2n$ 이면

$a_1 = -1, a_2 = -3, a_3 = -5, a_4 = -7, \dots$ 이므로 n 이 한없이 커질 때 a_n 은 음수이면서 그 절댓값은 한없이 커지므로 수열 $\{a_n\}$ 은 음의 무한대로 발산한다.

2) **정답** (1) 수렴, 2 (2) 발산(진동)

(1) 수열 $\{a_n\}$ 에서 $a_n = 2$ 이면

$a_1 = 2, a_2 = 2, a_3 = 2, a_4 = 2, \dots$ 이므로 n 이 한없이 커질 때

a_n 의 값은 항상 2이므로 수렴한다.

즉, 수열 $\{2\}$ 은 수렴하고 그 극한값은 2이다.

(2) 수열 $\{a_n\}$ 에서 $a_n = 1 + (-1)^n$ 이면

$$a_1 = 1 + (-1)^1 = 0$$

$$a_2 = 1 + (-1)^2 = 2$$

$$a_3 = 1 + (-1)^3 = 0$$

$$a_4 = 1 + (-1)^4 = 2$$

\vdots

따라서 수열 $\{a_n\}$ 은 0, 2, 0, 2, 0, 2, ...이므로 진동, 즉 발산한다.

3) **정답** ④

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 2 \text{에서 } \lim_{n \rightarrow \infty} 4a_n = 4 \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 4 \times 2 = 8$$

즉, 수열 $\{4a_n\}$ 은 8에 수렴한다.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = \frac{1}{3} \text{에서 } \lim_{n \rightarrow \infty} 3b_n = 3 \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = 3 \times \frac{1}{3} = 1$$

즉, 수열 $\{3b_n\}$ 은 1에 수렴한다.

따라서 수열의 극한에 대한 기본 성질에 의하여

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (4a_n + 3b_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} 4a_n + \lim_{n \rightarrow \infty} 3b_n$$

$$= 8 + 1 = 9$$

4) **정답** 18

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = -\frac{1}{2} \text{에서}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} 4a_n = 4 \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 4 \times \left(-\frac{1}{2}\right) = -2$$

즉, 수열 $\{4a_n\}$ 은 -2에 수렴한다.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = 4 \text{에서}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} 5b_n = 5 \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = 5 \times 4 = 20$$

즉, 수열 $\{5b_n\}$ 은 20에 수렴한다.

따라서 수열의 극한에 대한 기본 성질에 의하여

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} (4a_n + 5b_n) &= \lim_{n \rightarrow \infty} 4a_n + \lim_{n \rightarrow \infty} 5b_n \\ &= -2 + 20 = 18 \end{aligned}$$

5) **정답** 8

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 2 \text{에서 } \lim_{n \rightarrow \infty} 2a_n = 2 \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 2 \times 2 = 4$$

즉, 수열 $\{2a_n\}$ 은 4에 수렴한다.

$$\text{또, } \lim_{n \rightarrow \infty} (2a_n - 3b_n) = -20 \text{이므로 수열 } \{2a_n - 3b_n\} \text{은 } -20 \text{에}$$

수렴한다.

따라서 수열의 극한에 대한 기본 성질에 의하여

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} 3b_n &= \lim_{n \rightarrow \infty} \{2a_n - (2a_n - 3b_n)\} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} 2a_n - \lim_{n \rightarrow \infty} (2a_n - 3b_n) \\ &= 4 - (-20) = 24 \end{aligned}$$

이므로

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} b_n &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{3} \times 3b_n\right) = \frac{1}{3} \lim_{n \rightarrow \infty} 3b_n \\ &= \frac{1}{3} \times 24 = 8 \end{aligned}$$

6) **정답** 2

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(3n+1)(n-2)-n^2}{(n-1)(n+1)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n^2-5n-2}{n^2-1}$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2 - \frac{5}{n} - \frac{2}{n^2}}{1 - \frac{1}{n^2}} = \frac{2-0-0}{1-0} = 2$$

7) **정답** $\frac{1}{4}$

$$\begin{aligned} & \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n^2+1}{2n-1} - \frac{2n^3-1}{4n^2+1} \right) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n^2+1)(4n^2+1) - (2n^3-1)(2n-1)}{(2n-1)(4n^2+1)} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n^3+5n^2+2n}{8n^3-4n^2+2n-1} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2+\frac{5}{n}+\frac{2}{n^2}}{8-\frac{4}{n}+\frac{2}{n^2}-\frac{1}{n^3}} \\ &= \frac{2+0+0}{8-0+0-0} = \frac{1}{4} \end{aligned}$$

8) **정답** 2

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(3n+1)(an-1)}{n^2+1} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3an^2+(a-3)n-1}{n^2+1} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3a+\frac{a-3}{n}-\frac{1}{n^2}}{1+\frac{1}{n^2}} \\ &= \frac{3a+0-0}{1+0} = 3a \end{aligned}$$

또, $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(3n+1)(an-1)}{n^2+1} = 6$ 에서
 $3a = 6, a = 2$

9) **정답** 1

$$\begin{aligned} & \lim_{n \rightarrow \infty} n(\sqrt{n^2+1} - \sqrt{n^2-1}) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n(\sqrt{n^2+1} - \sqrt{n^2-1})(\sqrt{n^2+1} + \sqrt{n^2-1})}{\sqrt{n^2+1} + \sqrt{n^2-1}} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n}{\sqrt{n^2+1} + \sqrt{n^2-1}} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2}{\sqrt{1+\frac{1}{n^2}} + \sqrt{1-\frac{1}{n^2}}} \\ &= \frac{2}{1+1} = 1 \end{aligned}$$

10) **정답** ⑥

$$\begin{aligned} & \lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{9n^2+n} - an) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(\sqrt{9n^2+n} - an)(\sqrt{9n^2+n} + an)}{\sqrt{9n^2+n} + an} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(9-a^2)n^2+n}{\sqrt{9n^2+n} + an} \end{aligned}$$

이때 $a \neq 3$ 이면,

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{9n^2+n} - an) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(9-a^2)n^2+n}{\sqrt{9n^2+n} + an} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(9-a^2)n+1}{\sqrt{9+\frac{1}{n}} + a} \end{aligned}$$

이므로 수열 $\{\sqrt{9n^2+n} - an\}$ 은 양의 무한대 또는 음의 무한대로 발산한다.

즉, $\lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{9n^2+n} - an) = \frac{1}{6}$ **을** 만족시키지 않는다.

따라서 $a = 3$

{참고}

$a = 3$ 이면,

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{9n^2+n} - 3n) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{\sqrt{9n^2+n} + 3n} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{9+\frac{1}{n}} + 3} \\ &= \frac{1}{3+3} = \frac{1}{6} \end{aligned}$$

11) **정답** ③

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a}{\sqrt{n^2+3n} - n} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a(\sqrt{n^2+3n} + n)}{(\sqrt{n^2+3n} - n)(\sqrt{n^2+3n} + n)} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a(\sqrt{n^2+3n} + n)}{3n} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a\left(\sqrt{1+\frac{3}{n}} + 1\right)}{3} \\ &= \frac{a(1+1)}{3} = \frac{2a}{3} \end{aligned}$$

또, $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a}{\sqrt{n^2+3n} - n} = 2$ 에서

$$\frac{2a}{3} = 2, 2a = 6, a = 3$$

12) **정답** ②

모든 자연수 n 에 대하여 $\frac{3n+1}{2n+1} \leq a_n \leq \frac{3n+1}{2n-1}$ 이므로

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3n+1}{2n+1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3+\frac{1}{n}}{2+\frac{1}{n}} = \frac{3+0}{2+0} = \frac{3}{2}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3n+1}{2n-1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3+\frac{1}{n}}{2-\frac{1}{n}} = \frac{3+0}{2-0} = \frac{3}{2}$$

따라서 수열의 극한의 대소 관계에 의하여 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \frac{3}{2}$

13) **정답** ⑤

모든 자연수 n 에 대하여 $3n^2 - 2n < a_n < 3n^2 + 2n + 1$ 이므로 각
변을 n^2 ($n^2 > 0$)으로 나누면

$$\frac{3n^2 - 2n}{n^2} < \frac{a_n}{n^2} < \frac{3n^2 + 2n + 1}{n^2}$$

이고

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3n^2 - 2n}{n^2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(3 - \frac{2}{n} \right) = 3 - 0 = 3$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3n^2 + 2n + 1}{n^2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(3 + \frac{2}{n} + \frac{1}{n^2} \right) = 3 + 0 + 0 = 3$$

따라서 수열의 극한의 대소 관계에 의하여

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{n^2} = 3$$

14) **정답** ④

모든 자연수 n 에 대하여 $3n - 2 < a_n < 3n + 4$ 이므로

$$3(2n+1) - 2 < a_{2n+1} < 3(2n+1) + 4$$

$$6n + 1 < a_{2n+1} < 6n + 7$$

이고 각 변을 n ($n > 0$)으로 나누면

$$\frac{6n + 1}{n} < \frac{a_{2n+1}}{n} < \frac{6n + 7}{n}$$

이고

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{6n + 1}{n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(6 + \frac{1}{n} \right) = 6 + 0 = 6$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{6n + 7}{n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(6 + \frac{7}{n} \right) = 6 + 0 = 6$$

따라서 수열의 극한의 대소 관계에 의하여

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{2n+1}}{n} = 6$$

15) **정답** ②

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^{2n}}{3^{n-1} + 4^{n+1}}$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4^n}{\frac{1}{3} \times 3^n + 4 \times 4^n}$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\frac{1}{3} \times \left(\frac{3}{4} \right)^n + 4}$$

$$= \frac{1}{0 + 4} = \frac{1}{4}$$

16) **정답** ①

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^{n+1}(3^n - 1)}{6^{n-1} + 3^n} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^{n+1} \times 3^n - 2^{n+1}}{6^{n-1} + 3^n} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2 \times 6^n - 2 \times 2^n}{\frac{1}{6} \times 6^n + 3^n} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2 - 2 \times \left(\frac{1}{3} \right)^n}{\frac{1}{6} + \left(\frac{1}{2} \right)^n} \\ &= \frac{2 - 0}{\frac{1}{6} + 0} = 12 \end{aligned}$$

17) **정답** ③

수열 $\left\{ \frac{(2x+1)^n}{2^{n-1} + 3^n} \right\}$ 에서

$$\begin{aligned} \frac{(2x+1)^n}{2^{n-1} + 3^n} &= \frac{(2x+1)^n}{\frac{1}{2} \times 2^n + 3^n} \\ &= \frac{\left(\frac{2x+1}{3} \right)^n}{\frac{1}{2} \times \left(\frac{2}{3} \right)^n + 1} \end{aligned}$$

이므로 수열 $\left\{ \frac{(2x+1)^n}{2^{n-1} + 3^n} \right\}$ 이 수렴하려면 등비수열 $\left(\frac{2x+1}{3} \right)^n$ 이

수렴해야 한다. 즉,

$$-1 < \frac{2x+1}{3} \leq 1, \quad -3 < 2x+1 \leq 3, \quad -4 < 2x \leq 2, \quad -2 < x \leq 1$$

따라서 조건을 만족시키는 정수 x 의 값은 $-1, 0, 1$ 이고 그 합은 0 이다.

18) **정답** $-1 < r < 1$ 일 때 0 에 수렴, $r = 1$ 일 때 $\frac{1}{2}$ 에 수렴,

$r < -1$ 또는 $r > 1$ 일 때 1 에 수렴

$-1 < r < 1$, $r = 1$, $r < -1$ 또는 $r > 1$ 의 세 경우로 나누어 수열

$\left\{ \frac{r^n}{1+r^n} \right\}$ 의 극한을 조사하면 다음과 같다.

(1) $-1 < r < 1$ ($|r| < 1$)일 때, $\lim_{n \rightarrow \infty} r^n = 0$ 이므로

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{r^n}{1+r^n} = \frac{0}{1+0} = 0 \text{ (수렴)}$$

(2) $r = 1$ 일 때, $\lim_{n \rightarrow \infty} r^n = \lim_{n \rightarrow \infty} 1^n = \lim_{n \rightarrow \infty} 1 = 1$ 이므로

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{r^n}{1+r^n} = \frac{1}{1+1} = \frac{1}{2} \text{ (수렴)}$$

(3) $r < -1$ 또는 $r > 1$ ($|r| > 1$)일 때, $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{r} \right)^n = 0$ 이므로

$\frac{r^n}{1+r^n}$ 의 분모, 분자를 각각 r^n 으로 나누면

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{r^n}{1+r^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\left(\frac{1}{r}\right)^n + 1} = \frac{1}{0+1} = 1 \text{ (수렴)}$$

19) **정답** $0 < r \leq 1$ 일 때 1에 수렴, $r > 1$ 일 때 r 에 수렴
 $r > 0$ 이므로 $0 < r < 1$, $r = 1$, $r > 1$ 의 세 경우로 나누어 수열 $\left\{ \frac{r^{n+1} + 1}{r^n + 1} \right\}$ 의 극한을 조사하면 다음과 같다.

(i) $0 < r < 1$ 일 때
 $\lim_{n \rightarrow \infty} r^n = 0$ 이고 $\lim_{n \rightarrow \infty} r^{n+1} = \lim_{n \rightarrow \infty} r \times r^n = r \times \lim_{n \rightarrow \infty} r^n = 0$ 이므로
 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{r^{n+1} + 1}{r^n + 1} = \frac{0+1}{0+1} = 1$ (수렴)

(ii) $r = 1$ 일 때
 $\lim_{n \rightarrow \infty} r^n = \lim_{n \rightarrow \infty} 1^n = \lim_{n \rightarrow \infty} 1 = 1$ 이고
 $\lim_{n \rightarrow \infty} r^{n+1} = \lim_{n \rightarrow \infty} 1^{n+1} = \lim_{n \rightarrow \infty} 1 = 1$ 이므로
 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{r^{n+1} + 1}{r^n + 1} = \frac{1+1}{1+1} = 1$ (수렴)

(iii) $r > 1$ 일 때
 $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{r}\right)^n = 0$ 이므로 $\frac{r^{n+1} + 1}{r^n + 1}$ 의 분모, 분자를 각각 r^n 으로 나누면

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{r^{n+1} + 1}{r^n + 1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{r + \left(\frac{1}{r}\right)^n}{1 + \left(\frac{1}{r}\right)^n} = \frac{r+0}{1+0} = r \text{ (수렴)}$$

20) **정답** $-1 < r < 1$ 일 때 -1 , $r = -1$ 또는 $r = 1$ 일 때 0 ,
 $r < -1$ 또는 $r > 1$ 일 때 1
 $-1 < r < 1$, $r = -1$ 또는 $r = 1$, $r < -1$ 또는 $r > 1$ 의 세 경우로 나누어 수열 $\left\{ \frac{r^{2n} - 1}{r^{2n} + 1} \right\}$ 의 극한을 조사하면 다음과 같다.

(i) $-1 < r < 1$ 일 때
 $\lim_{n \rightarrow \infty} r^{2n} = 0$ 이므로
 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{r^{2n} - 1}{r^{2n} + 1} = \frac{0-1}{0+1} = -1$ (수렴)

(ii) $r = -1$ 또는 $r = 1$ 일 때
 $\lim_{n \rightarrow \infty} r^{2n} = 1$ 이므로
 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{r^{2n} - 1}{r^{2n} + 1} = \frac{1-1}{1+1} = 0$ (수렴)

(iii) $r < -1$ 또는 $r > 1$ 일 때
 $\lim_{n \rightarrow \infty} r^{2n} = \infty$ 이고 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{r^{2n}} = 0$ 이므로

$\frac{r^{2n} - 1}{r^{2n} + 1}$ 의 분모, 분자를 각각 r^{2n} 으로 나누면

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{r^{2n} - 1}{r^{2n} + 1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 - \frac{1}{r^{2n}}}{1 + \frac{1}{r^{2n}}} = \frac{1-0}{1+0} = 1 \text{ (수렴)}$$

21) **정답** ②

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n + 2}{3a_n + 4} = 5 \text{에서}$$

$$\frac{a_n + 2}{3a_n + 4} = b_n \text{ 으로 놓으면 } \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = 5$$

$$a_n + 2 = 3a_n b_n + 4b_n \text{에서}$$

$$(3b_n - 1)a_n = 2(1 - 2b_n)$$

$$b_n \neq \frac{1}{3} \text{ 이므로 } a_n = \frac{2(1 - 2b_n)}{3b_n - 1}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2(1 - 2b_n)}{3b_n - 1}$$

$$= \frac{2(1 - 2 \times 5)}{3 \times 5 - 1} = -\frac{9}{7}$$

[참고]

$$b_n = \frac{1}{3} \text{ 이면 } \frac{a_n + 2}{3a_n + 4} = \frac{1}{3} \text{에서}$$

$$3a_n + 6 = 3a_n + 4$$

즉, $6 = 4$ 가 되어 모순이므로 $b_n \neq \frac{1}{3}$ 이다.

22) **정답** ③

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

$$= \frac{1}{3}n^3 + \frac{1}{2}n^2 + \frac{1}{6}n$$

이므로

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2}{n^3 + 2n + 3} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{3}n^3 + \frac{1}{2}n^2 + \frac{1}{6}n}{n^3 + 2n + 3}$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{3} + \frac{1}{2} \times \frac{1}{n} + \frac{1}{6} \times \frac{1}{n^2}}{1 + \frac{2}{n^2} + \frac{3}{n^3}}$$

$$= \frac{\frac{1}{3} + 0 + 0}{1 + 0 + 0} = \frac{1}{3}$$

23) **정답** ④

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{an + b}{\sqrt{n^2 + n} - n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(an + b)(\sqrt{n^2 + n} + n)}{(\sqrt{n^2 + n} - n)(\sqrt{n^2 + n} + n)}$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(an+b)(\sqrt{n^2+n}+n)}{n} \dots\dots ㉑$$

에서 $a \neq 0$ 이면 수열 $\left\{ \frac{an+b}{\sqrt{n^2+n}-n} \right\}$ 는 양의 무한대 또는 음의

무한대로 발산하므로 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{an+b}{\sqrt{n^2+n}-n} = 5$ 를 만족시키지 않는다.

따라서 $a = 0$

㉑에서

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{an+b}{\sqrt{n^2+n}-n} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(an+b)(\sqrt{n^2+n}+n)}{n} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{b(\sqrt{n^2+n}+n)}{n} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} b \left(\sqrt{1+\frac{1}{n}} + 1 \right) \\ &= b(\sqrt{1+0}+1) = 2b \end{aligned}$$

이고 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{an+b}{\sqrt{n^2+n}-n} = 5$ 이므로

$$2b = 5, \quad b = \frac{5}{2}$$

따라서

$$a+b=0 \Rightarrow a = -\frac{5}{2}$$

24) **정답** ①

모든 자연수 n 에 대하여 $\left| a_n - \frac{1}{3}n \right| \leq 2$ 이므로

$$-2 \leq a_n - \frac{1}{3}n \leq 2$$

$$\frac{1}{3}n - 2 \leq a_n \leq \frac{1}{3}n + 2$$

$$\frac{1}{3} \times 2n - 2 \leq a_{2n} \leq \frac{1}{3} \times 2n + 2$$

각 변을 $2n$ ($2n > 0$)으로 나누면

$$\frac{1}{3} - \frac{1}{n} \leq \frac{a_{2n}}{2n} \leq \frac{1}{3} + \frac{1}{n}$$

이고

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{n} \right) = \frac{1}{3}, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{n} \right) = \frac{1}{3}$$

따라서 수열의 극한의 대소 관계에 의하여

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{2n}}{2n} = \frac{1}{3}$$

25) **정답** ⑤

등비수열 $\{a_n\}$ 의 첫째항을 a ($a \neq 0$)라 하면 공비가 2이므로 일반항 a_n 은

$$a_n = a \times 2^{n-1}$$

이고, 첫째항부터 제 n 항까지의 합 S_n 은

$$S_n = \frac{a(2^n - 1)}{2 - 1} = a(2^n - 1)$$

따라서

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{S_n} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a \times 2^{n-1}}{a(2^n - 1)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^{n-1}}{2^n - 1} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{2} \times 2^n}{2^n - 1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{2}}{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n} \\ &= \frac{\frac{1}{2}}{1 - 0} = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

26) **정답** ②

$r > 0$ 이므로 $0 < r < 1$, $r = 1$, $r > 1$ 의 세 경우로 나누어 수열

$\left\{ \frac{3r^{n+1}+1}{r^n-2} \right\}$ 의 극한을 조사하면 다음과 같다.

(i) $0 < r < 1$ 일 때

$\lim_{n \rightarrow \infty} r^n = 0$ 이므로

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3r^{n+1}+1}{r^n-2} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3r \times r^n + 1}{r^n - 2} \\ &= \frac{0+1}{0-2} = -\frac{1}{2} \neq 5 \end{aligned}$$

(ii) $r = 1$ 일 때

$\lim_{n \rightarrow \infty} r^n = \lim_{n \rightarrow \infty} 1^n = \lim_{n \rightarrow \infty} 1 = 1$ 이고

$\lim_{n \rightarrow \infty} r^{n+1} = \lim_{n \rightarrow \infty} 1^{n+1} = \lim_{n \rightarrow \infty} 1 = 1$ 이므로

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3r^{n+1}+1}{r^n-2} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3 \times 1^{n+1} + 1}{1^n - 2} \\ &= \frac{3+1}{1-2} = -4 \neq 5 \end{aligned}$$

(iii) $r > 1$ 일 때

$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{r} \right)^n = 0$ 이므로 $\frac{3r^{n+1}+1}{r^n-2}$ 의 분모, 분자를 각각 r^n 으로 나누면

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3r^{n+1}+1}{r^n-2} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3r \times r^n + 1}{r^n - 2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3r + \left(\frac{1}{r}\right)^n}{1 - 2 \times \left(\frac{1}{r}\right)^n} \\ &= \frac{3r+0}{1-0} = 3r \end{aligned}$$

$$3r = 5 \text{에서 } r = \frac{5}{3}$$

따라서 (i), (ii), (iii)에서 구하는 실수 r 의 값은 $\frac{5}{3}$ 이다.

27) **정답** 1

주어진 급수 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$ 의 제 n 항까지의 부분합을 S_n 이라 하면

$$\begin{aligned} S_n &= \sum_{k=1}^n \frac{1}{k(k+1)} = \sum_{k=1}^n \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} \right) \\ &= \left(1 - \frac{1}{2} \right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3} \right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4} \right) + \dots \\ &\quad + \left(\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n} \right) + \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \right) \\ &= 1 - \frac{1}{n+1} \end{aligned}$$

이고 $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{n+1} \right) = 1$

따라서 수열 $\{S_n\}$ 이 수렴하므로 주어진 급수는 수렴하고 그 합은

1이다. 즉, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} = 1$

28) **정답** $\frac{1}{3}$

주어진 급수 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 의 제 n 항까지의 부분합 S_n 이

$S_n = \frac{n+1}{3n-2}$ 이므로

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} S_n &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+1}{3n-2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 + \frac{1}{n}}{3 - \frac{2}{n}} \\ &= \frac{1+0}{3-0} = \frac{1}{3} \end{aligned}$$

따라서 수열 $\{S_n\}$ 이 수렴하므로 주어진 급수는 수렴하고 그 합은 $\frac{1}{3}$ 이다.

즉, $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \frac{1}{3}$

29) **정답** 2

$\sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n - \frac{2n}{n+1} \right) = 3$ 에서 급수 $\sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n - \frac{2n}{n+1} \right)$ 이 수렴하므로 급수와

수열의 극한 사이의 관계에 의하여 $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(a_n - \frac{2n}{n+1} \right) = 0$

이때

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} a_n &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ \left(a_n - \frac{2n}{n+1} \right) + \frac{2n}{n+1} \right\} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(a_n - \frac{2n}{n+1} \right) + \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n}{n+1} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(a_n - \frac{2n}{n+1} \right) + \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2}{1 + \frac{1}{n}} \\ &= 0 + \frac{2}{1+0} = 2 \end{aligned}$$

30) **정답** 2

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n - 2n}{3n-1} = 4$ 에서 급수 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n - 2n}{3n-1}$ 이 수렴하므로 급수와 수열의 극한 사이의 관계에 의하여

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n - 2n}{3n-1} = 0$$

한편

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n - 2n}{3n-1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{a_n}{n} - 2}{3 - \frac{1}{n}} = 0 \text{이고}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(3 - \frac{1}{n} \right) = 3 - 0 = 3 \text{이므로}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{a_n}{n} - 2 \right) = 0$$

따라서

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{n} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ \left(\frac{a_n}{n} - 2 \right) + 2 \right\} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{a_n}{n} - 2 \right) + \lim_{n \rightarrow \infty} 2 \\ &= 0 + 2 = 2 \end{aligned}$$

31) **정답** $\frac{1}{4}$

$\sum_{n=1}^{\infty} (a_n - 4) = 2$ 에서 급수 $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n - 4)$ 가 수렴하므로 급수와 수열의 극한 사이의 관계에 의하여

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n - 4) = 0$$

이때

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} a_n &= \lim_{n \rightarrow \infty} \{ (a_n - 4) + 4 \} = \lim_{n \rightarrow \infty} (a_n - 4) + \lim_{n \rightarrow \infty} 4 \\ &= 0 + 4 = 4 \end{aligned}$$

따라서

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2 + 2n}{n^2 a_n - 3n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 + \frac{2}{n}}{a_n - \frac{3}{n}} = \frac{1+0}{4-0} = \frac{1}{4}$$

32) **정답** 1

두 급수 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ 이 수렴하므로 급수의 성질에 의하여

$$\sum_{n=1}^{\infty} 2a_n = 12 \text{에서 } \sum_{n=1}^{\infty} 2a_n = 2 \sum_{n=1}^{\infty} a_n = 12 \text{이므로 } \sum_{n=1}^{\infty} a_n = 6 \text{이고}$$

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{\infty} (3a_n - 2b_n) &= 16 \text{에서 } \sum_{n=1}^{\infty} (3a_n - 2b_n) = \sum_{n=1}^{\infty} 3a_n - \sum_{n=1}^{\infty} 2b_n \\ &= 3 \sum_{n=1}^{\infty} a_n - 2 \sum_{n=1}^{\infty} b_n \\ &= 3 \times 6 - 2 \sum_{n=1}^{\infty} b_n \\ &= 18 - 2 \sum_{n=1}^{\infty} b_n = 16\end{aligned}$$

즉, $2 \sum_{n=1}^{\infty} b_n = 20$ 이므로 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n = 10$

33) **정답** 31

두 급수 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ 이 수렴하므로 급수의 성질에 의하여

$$\sum_{n=1}^{\infty} 3a_n = 21 \text{에서}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} 3a_n = 3 \sum_{n=1}^{\infty} a_n = 21 \text{이므로 } \sum_{n=1}^{\infty} a_n = 7$$

이고

$$\sum_{n=1}^{\infty} (2a_n + 5b_n) = 24 \text{에서}$$

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{\infty} (2a_n + 5b_n) &= \sum_{n=1}^{\infty} 2a_n + \sum_{n=1}^{\infty} 5b_n = 2 \sum_{n=1}^{\infty} a_n + 5 \sum_{n=1}^{\infty} b_n \\ &= 2 \times 7 + 5 \sum_{n=1}^{\infty} b_n = 14 + 5 \sum_{n=1}^{\infty} b_n = 24\end{aligned}$$

즉, $5 \sum_{n=1}^{\infty} b_n = 10$, $\sum_{n=1}^{\infty} b_n = 2$

따라서

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{\infty} (5a_n - 2b_n) &= \sum_{n=1}^{\infty} 5a_n - \sum_{n=1}^{\infty} 2b_n = 5 \sum_{n=1}^{\infty} a_n - 2 \sum_{n=1}^{\infty} b_n \\ &= 5 \times 7 - 2 \times 2 = 31\end{aligned}$$

34) **정답** 9

$$\sum_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n) = 12, \quad \sum_{n=1}^{\infty} (a_n - b_n) = 6 \text{이므로}$$

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{\infty} a_n &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2} \{ (a_n + b_n) + (a_n - b_n) \} \\ &= \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \{ (a_n + b_n) + (a_n - b_n) \} \\ &= \frac{1}{2} \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n) + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n - b_n) \right\} \\ &= \frac{1}{2} (12 + 6) = 9\end{aligned}$$

35) **정답** 6

등비수열 $\{a_n\}$ 의 첫째항이 2이고 공비가 $\frac{1}{2}$ 이므로

$$a_n = 2 \times \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} = \left(\frac{1}{2}\right)^{n-2} \text{이고, } a_{n+1} = \left(\frac{1}{2}\right)^{(n+1)-2} = \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$$

따라서 $a_n + a_{n+1} = \left(\frac{1}{2}\right)^{n-2} + \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$

$$= \left(\frac{1}{2}\right)^{n-2} + \frac{1}{2} \times \left(\frac{1}{2}\right)^{n-2}$$

$$= \left(1 + \frac{1}{2}\right) \times \left(\frac{1}{2}\right)^{n-2}$$

$$= \frac{3}{2} \times \left(\frac{1}{2}\right)^{n-2}$$

이므로 $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n + a_{n+1}) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3}{2} \times \left(\frac{1}{2}\right)^{n-2} = \frac{3}{1 - \frac{1}{2}} = 6$

36) **정답** $\frac{1}{4}$

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{n-1} + (-1)^n}{3^{n+1}} &= \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \frac{2^{n-1}}{3^{n+1}} + \frac{(-1)^n}{3^{n+1}} \right\} \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \frac{2^{n-1}}{9 \times 3^{n-1}} + \frac{(-1)^n}{3 \times 3^n} \right\} \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \frac{1}{9} \times \left(\frac{2}{3}\right)^{n-1} + \frac{1}{3} \times \left(-\frac{1}{3}\right)^n \right\} \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{9} \times \left(\frac{2}{3}\right)^{n-1} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3} \times \left(-\frac{1}{3}\right)^n \\ &= \frac{1}{9} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^{n-1} + \frac{1}{3} \sum_{n=1}^{\infty} \left(-\frac{1}{3}\right)^n \\ &= \frac{1}{9} \times \frac{1}{1 - \frac{2}{3}} + \frac{1}{3} \times \frac{-\frac{1}{3}}{1 - \left(-\frac{1}{3}\right)} \\ &= \frac{1}{9} \times 3 + \frac{1}{3} \times \left(-\frac{1}{4}\right) = \frac{1}{3} - \frac{1}{12} = \frac{1}{4}\end{aligned}$$

37) **정답** 128π

원 O_1, O_2, O_3, \dots 의 둘레의 길이를 각각 l_1, l_2, l_3, \dots 라 하자.

$$l_1 = 2 \times \pi \times 32 = 64\pi, \quad l_2 = 2 \times \pi \times 16 = 32\pi, \quad l_3 = 2 \times \pi \times 8 = 16\pi,$$

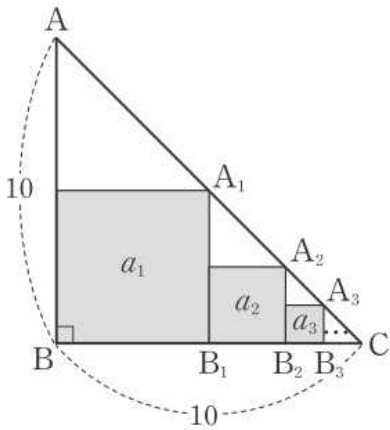
$$l_4 = 2 \times \pi \times 4 = 8\pi, \quad \dots$$

수열 $\{l_n\}$ 은 첫째항이 64π 이고 공비가 $\frac{1}{2}$ 인 등비수열이고

$0 < \frac{1}{2} < 1$ 이므로 급수 $\sum_{n=1}^{\infty} l_n$ 은 수렴한다. 따라서 그 합은

$$\sum_{n=1}^{\infty} l_n = \frac{64\pi}{1 - \frac{1}{2}} = 128\pi$$

38) 정답 $\frac{100}{3}$



$\overline{AB} = \overline{BC} = 10$ 인 직각이등변삼각형 ABC에서 선분 AC의 중점이 A_1 , 선분 BC의 중점이 B_1 이므로

$\overline{A_1B_1} = 5$ 이고 $a_1 = 5 \times 5 = 25$

$\overline{A_1B_1} = \overline{B_1C} = 5$ 인 직각이등변삼각형 A_1B_1C 에서 선분 A_1C 의 중점이 A_2 , 선분 B_1C 의 중점이 B_2 이므로

$\overline{A_2B_2} = \frac{5}{2}$ 이고 $a_2 = \frac{5}{2} \times \frac{5}{2} = \left(\frac{5}{2}\right)^2 = 25 \times \frac{1}{4}$

$\overline{A_2B_2} = \overline{B_2C} = \frac{5}{2}$ 인 직각이등변삼각형 A_2B_2C 에서 선분 A_2C 의

중점이 A_3 , 선분 B_2C 의 중점이 B_3 이므로

$\overline{A_3B_3} = \frac{5}{4}$ 이고 $a_3 = \frac{5}{4} \times \frac{5}{4} = \left(\frac{5}{4}\right)^2 = 25 \times \left(\frac{1}{4}\right)^2$

$\overline{A_3B_3} = \overline{B_3C} = \frac{5}{4}$ 인 직각이등변삼각형 A_3B_3C 에서 선분 A_3C 의

중점이 A_4 , 선분 B_3C 의 중점이 B_4 이므로

$\overline{A_4B_4} = \frac{5}{8}$ 이고 $a_4 = \frac{5}{8} \times \frac{5}{8} = \left(\frac{5}{8}\right)^2 = 25 \times \left(\frac{1}{4}\right)^3$

⋮

수열 $\{a_n\}$ 은 첫째항이 25이고 공비가 $\frac{1}{4}$ 인 등비수열이고

$0 < \frac{1}{4} < 1$ 이므로 급수 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 은 수렴한다. 따라서 그 합은

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \frac{25}{1 - \frac{1}{4}} = \frac{100}{3}$$

39) 정답 ③

등차수열 $\{a_n\}$ 의 첫째항이 1이고 공차가 2이므로

$$a_n = 1 + 2(n-1) = 2n-1$$

이고

$$a_{n+1} = 2(n+1) - 1 = 2n+1$$

주어진 급수 $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{a_n} - \frac{1}{a_{n+1}} \right) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n+1} \right)$ 의

제 n 항까지의 부분합을 S_n 이라 하면

$$\begin{aligned} S_n &= \sum_{k=1}^n \left(\frac{1}{2k-1} - \frac{1}{2k+1} \right) \\ &= \left(1 - \frac{1}{3} \right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{5} \right) + \left(\frac{1}{5} - \frac{1}{7} \right) + \cdots + \left(\frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n+1} \right) \\ &= 1 - \frac{1}{2n+1} \end{aligned}$$

이고

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{2n+1} \right) = 1$$

따라서 수열 $\{S_n\}$ 이 수렴하므로 주어진 급수는 수렴하고 그 합은 1이다.

$$\text{즉, } \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{a_n} - \frac{1}{a_{n+1}} \right) = 1$$

40) 정답 ①

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n - \frac{n^2 - n + 1}{2n^2 + 1} \right) = 5 \text{에서 급수 } \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n - \frac{n^2 - n + 1}{2n^2 + 1} \right) \text{이}$$

수렴하므로 급수와 수열의 극한 사이의 관계에 의하여

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(a_n - \frac{n^2 - n + 1}{2n^2 + 1} \right) = 0$$

이때

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} a_n &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ a_n - \frac{n^2 - n + 1}{2n^2 + 1} + \frac{n^2 - n + 1}{2n^2 + 1} \right\} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(a_n - \frac{n^2 - n + 1}{2n^2 + 1} \right) + \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2 - n + 1}{2n^2 + 1} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(a_n - \frac{n^2 - n + 1}{2n^2 + 1} \right) + \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 - \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2}}{2 + \frac{1}{n^2}} \\ &= 0 + \frac{1 - 0 + 0}{2 + 0} = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

따라서

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} (2a_n + 3) &= \lim_{n \rightarrow \infty} 2a_n + \lim_{n \rightarrow \infty} 3 = 2 \lim_{n \rightarrow \infty} a_n + \lim_{n \rightarrow \infty} 3 \\ &= 2 \times \frac{1}{2} + 3 = 4 \end{aligned}$$

41) 정답 ⑤

두 급수 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ 이 수렴하므로

$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = S$, $\sum_{n=1}^{\infty} b_n = T$ (S , T 는 실수)라 하면 급수의 성질에 의하여

$$\sum_{n=1}^{\infty} (2a_n + 3b_n) = 23 \text{에서}$$

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} (2a_n + 3b_n) &= \sum_{n=1}^{\infty} 2a_n + \sum_{n=1}^{\infty} 3b_n \\ &= 2 \sum_{n=1}^{\infty} a_n + 3 \sum_{n=1}^{\infty} b_n \\ &= 2S + 3T = 23 \quad \cdots \textcircled{5} \end{aligned}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} (3a_n - 2b_n) = 2 \text{에서}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} (3a_n - 2b_n) = \sum_{n=1}^{\infty} 3a_n - \sum_{n=1}^{\infty} 2b_n$$

$$= 3 \sum_{n=1}^{\infty} a_n - 2 \sum_{n=1}^{\infty} b_n$$

$$= 3S - 2T = 2 \quad \dots \textcircled{L}$$

㉠, ㉡에서 $S=4$, $T=5$ 이므로

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = 4, \quad \sum_{n=1}^{\infty} b_n = 5$$

따라서

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2}a_n + \frac{1}{5}b_n \right) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2}a_n + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{5}b_n$$

$$= \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} a_n + \frac{1}{5} \sum_{n=1}^{\infty} b_n$$

$$= \frac{1}{2} \times 4 + \frac{1}{5} \times 5 = 3$$

42) **정답** ②

등비수열 $\{a_n\}$ 의 첫째항이 3이고 공비가 $\frac{1}{5}$ 이므로

$$a_n = 3 \times \left(\frac{1}{5} \right)^{n-1}$$

이고

$$a_{2n} = 3 \times \left(\frac{1}{5} \right)^{2n-1}$$

$$a_{2n+1} = 3 \times \left(\frac{1}{5} \right)^{(2n+1)-1} = 3 \times \left(\frac{1}{5} \right)^{2n}$$

따라서

$$\frac{a_n a_{2n}}{a_{2n+1}} = \frac{3 \times \left(\frac{1}{5} \right)^{n-1} \times 3 \times \left(\frac{1}{5} \right)^{2n-1}}{3 \times \left(\frac{1}{5} \right)^{2n}} = 3 \times \left(\frac{1}{5} \right)^{n-2}$$

$$= 15 \times \left(\frac{1}{5} \right)^{n-1}$$

이므로

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n a_{2n}}{a_{2n+1}} = \sum_{n=1}^{\infty} 15 \times \left(\frac{1}{5} \right)^{n-1} = \frac{15}{1 - \frac{1}{5}} = \frac{15}{\frac{4}{5}} = \frac{75}{4}$$

43) **정답** ③

정삼각형 $B_n C_n D_n$ 의 한 변의 길이를 l_n , 넓이를 a_n 이라 하자.

정삼각형 $B_1 C_1 D_1$ 의 한 변의 길이가 10이므로

$$a_1 = \frac{\sqrt{3}}{4} \times 1^2 = \frac{\sqrt{3}}{4}$$

이웃한 두 정삼각형 $B_n C_n D_n$ 과 $B_{n+1} C_{n+1} D_{n+1}$ 의 닮음비는

$$l_n : l_{n+1} = 1 : \frac{1}{2}$$

이므로 이웃한 두 정삼각형의 넓이의 비는

$$a_n : a_{n+1} = 1^2 : \left(\frac{1}{2} \right)^2 = 1 : \frac{1}{4}$$

이때 수열 $\{a_n\}$ 은 첫째항이 $\frac{\sqrt{3}}{4}$, 공비가 $\frac{1}{4}$ 인 등비수열이고

$0 < \frac{1}{4} < 1$ 이므로 급수 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 은 수렴한다. 따라서 그 합은

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \frac{\frac{\sqrt{3}}{4}}{1 - \frac{1}{4}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

44) **정답** ②

수열 $\{a_n\}$ 이 수렴하므로 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \alpha$ (단, α 는 상수)로 놓으면 수열의

극한에 대한 기본 성질에 의하여

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3a_n + 2}{1 + 2a_n} = \frac{8}{5} \text{에서}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3a_n + 2}{1 + 2a_n} = \frac{3\alpha + 2}{1 + 2\alpha} = \frac{8}{5}$$

$$5(3\alpha + 2) = 8(1 + 2\alpha)$$

$$15\alpha + 10 = 8 + 16\alpha$$

$$\alpha = 2$$

$$\text{즉, } \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 2$$

따라서

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{2}a_n + 3 \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2}a_n + \lim_{n \rightarrow \infty} 3$$

$$= \frac{1}{2} \lim_{n \rightarrow \infty} a_n + \lim_{n \rightarrow \infty} 3$$

$$= \frac{1}{2} \times 2 + 3 = 4$$

45) **정답** ④

$S_n = n(n+3)$ 에서

$$a_n = S_n - S_{n-1} = n(n+3) - (n-1)(n+2)$$

$$= 2(n+1) \quad (n \geq 2)$$

또한 $S_1 = a_1 = 4$ 이므로

$$a_n = 2(n+1) \quad (n \geq 1)$$

따라서

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4S_n + na_n}{3n^2 + n - 1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4n(n+3) + n \times 2(n+1)}{3n^2 + n - 1}$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{6n^2 + 15n}{3n^2 + n - 1}$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{6 + \frac{15}{n}}{3 + \frac{1}{n} - \frac{1}{n^2}}$$

$$= \frac{6+0}{3+0-0} = 2$$

46) **정답** ②

두 수열 $\{a_n\}, \{b_n\}$ 에 대하여

$$a_n + b_n = \frac{n}{n+1} \text{에서}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n + b_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{n+1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{1 + \frac{1}{n}} = \frac{1}{1+0} = 1$$

$$a_n b_n = \frac{n^2}{3n^2 + 2n + 1} \text{에서}$$

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} a_n b_n &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2}{3n^2 + 2n + 1} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{3 + \frac{2}{n} + \frac{1}{n^2}} \\ &= \frac{1}{3+0+0} = \frac{1}{3} \end{aligned}$$

따라서

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} (a_n - b_n)^2 &= \lim_{n \rightarrow \infty} \{(a_n + b_n)^2 - 4a_n b_n\} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} (a_n + b_n)^2 - \lim_{n \rightarrow \infty} 4a_n b_n \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} (a_n + b_n)^2 \times \lim_{n \rightarrow \infty} (a_n + b_n) - 4 \lim_{n \rightarrow \infty} a_n b_n \\ &= 1 \times 1 - 4 \times \frac{1}{3} = -\frac{1}{3} \end{aligned}$$

47) **정답** ⑤

모든 자연수 n 에 대하여

$$n(n+1) < a_n - n^2 < (n+2)(n+3) \text{에서}$$

$$n^2 + n < a_n - n^2 < n^2 + 5n + 6$$

$$2n^2 + n < a_n < 2n^2 + 5n + 6$$

각 변을 $2n^2$ ($2n^2 > 0$)으로 나누면

$$\frac{2n^2 + n}{2n^2} < \frac{a_n}{2n^2} < \frac{2n^2 + 5n + 6}{2n^2}$$

이고

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n^2 + n}{2n^2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2 + \frac{1}{n}}{2} = \frac{2+0}{2} = 1$$

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n^2 + 5n + 6}{2n^2} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2 + \frac{5}{n} + \frac{6}{n^2}}{2} \\ &= \frac{2+0+0}{2} = 1 \end{aligned}$$

따라서 수열의 극한의 대소 관계에 의하여

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{2n^2} = 1$$

48) **정답** ③

자연수 n 에 대하여 x 에 대한 다항식 $x^n + 2x$ 를 $f(x)$ 로 놓으면

$$f(x) = x^n + 2x$$

이고, 다항식 $f(x)$ 를 일차식 $3x-1$ 로 나눈 나머지가 a_n 이므로

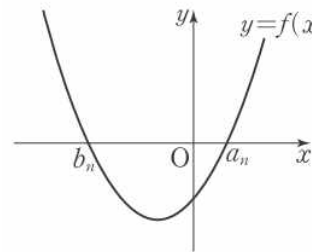
나머지정리에 의하여

$$a_n = f\left(\frac{1}{3}\right) = \left(\frac{1}{3}\right)^n + 2 \times \frac{1}{3} = \left(\frac{1}{3}\right)^n + \frac{2}{3}$$

따라서

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{9a_n + 1}{3a_n} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{9 \times \left\{ \left(\frac{1}{3}\right)^n + \frac{2}{3} \right\} + 1}{3 \times \left\{ \left(\frac{1}{3}\right)^n + \frac{2}{3} \right\}} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{9 \times \left(\frac{1}{3}\right)^n + 7}{3 \times \left(\frac{1}{3}\right)^n + 2} \\ &= \frac{0+7}{0+2} = \frac{7}{2} \end{aligned}$$

49) **정답** ②



함수 $f(x) = x^2 + x - (4n^2 - 1)$ 에 대하여 $y = f(x)$ 의 그래프와 x 축이 만나는 두 점의 x 좌표 a_n, b_n ($a_n > b_n$)은 방정식

$x^2 + x - (4n^2 - 1) = 0$ 의 서로 다른 두 근이므로 근과 계수의 관계에 의하여

$$a_n + b_n = -\frac{1}{1} = -1$$

$$a_n b_n = -\frac{4n^2 - 1}{1} = 1 - 4n^2$$

이므로

$$\frac{a_n + b_n}{a_n b_n} = \frac{-1}{1 - 4n^2} = \frac{1}{4n^2 - 1} = \frac{1}{(2n-1)(2n+1)}$$

따라서 주어진 급수 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n + b_n}{a_n b_n}$ 의 제 n 항까지의 부분합을 S_n 이라

하면

$$\begin{aligned} S_n &= \sum_{k=1}^n \frac{1}{(2k-1)(2k+1)} \\ &= \sum_{k=1}^n \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2k-1} - \frac{1}{2k+1} \right) \\ &= \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n \left(\frac{1}{2k-1} - \frac{1}{2k+1} \right) \\ &= \frac{1}{2} \left\{ \left(1 - \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{5}\right) + \left(\frac{1}{5} - \frac{1}{7}\right) + \dots \right\} \end{aligned}$$

$$\cdots + \left(\frac{1}{2n-3} - \frac{1}{2n-1} \right) + \left(\frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n+1} \right) \\ = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{2n+1} \right)$$

이고

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{2n+1} \right) \\ = \frac{1}{2} \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{2n+1} \right) = \frac{1}{2}$$

따라서 수열 $\{S_n\}$ 이 수렴하므로 주어진 급수는 수렴하고 그 합은 $\frac{1}{2}$ 이다.

$$\text{즉, } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n + b_n}{a_n b_n} = \frac{1}{2}$$

50) **정답** ④

급수 $\sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n - \frac{4n^2 - 3n + 1}{2n^2 - 5} \right)$ 이 수렴하므로 급수와 수열의 극한

사이의 관계에 의하여

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(a_n - \frac{4n^2 - 3n + 1}{2n^2 - 5} \right) = 0$$

이때

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ \left(a_n - \frac{4n^2 - 3n + 1}{2n^2 - 5} \right) + \frac{4n^2 - 3n + 1}{2n^2 - 5} \right\} \\ = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(a_n - \frac{4n^2 - 3n + 1}{2n^2 - 5} \right) + \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4n^2 - 3n + 1}{2n^2 - 5} \\ = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(a_n - \frac{4n^2 - 3n + 1}{2n^2 - 5} \right) + \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4 - \frac{3}{n} + \frac{1}{n^2}}{2 - \frac{5}{n^2}} \\ = 0 + \frac{4 - 0 + 0}{2 - 0} = 2$$

따라서

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(a_n + 3)n^2 - n}{2n^2 + 3} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(a_n + 3) - \frac{1}{n}}{2 + \frac{3}{n^2}} \\ = \frac{2 + 3 - 0}{2 + 0} = \frac{5}{2}$$

51) **정답** ⑤

$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = 6$ 이므로 등비수열 $\{a_n\}$ 의 공비를 r ($-1 < r < 1$)라 하면

$a_1 = 2$ 이고

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \frac{a_1}{1-r} = \frac{2}{1-r} = 6$$

$$6(1-r) = 2, \quad r = \frac{2}{3}$$

이므로 수열 $\{a_{2n}\}$ 은 첫째항이 a_2 이고 공비가 r^2 인 등비수열이다. 즉,

$$a_2 = a_1 \times r = 2 \times \frac{2}{3} = \frac{4}{3}$$

$$r^2 = \left(\frac{2}{3} \right)^2 = \frac{4}{9}$$

이고 $-1 < r^2 < 1$ 이므로 급수 $\sum_{n=1}^{\infty} a_{2n}$ 은 수렴한다.

따라서 그 합은

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_{2n} = \frac{\frac{4}{3}}{1 - \frac{4}{9}} = \frac{12}{5}$$

52) **정답** ②

두 급수 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n, \sum_{n=1}^{\infty} b_n$ 이 모두 수렴하므로

$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \alpha, \sum_{n=1}^{\infty} b_n = \beta$ (α, β 는 상수)로 놓으면

$\sum_{n=1}^{\infty} (a_n + 3b_n) = 20$ 에서

$$\sum_{n=1}^{\infty} (a_n + 3b_n) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n + \sum_{n=1}^{\infty} 3b_n \\ = \sum_{n=1}^{\infty} a_n + 3 \sum_{n=1}^{\infty} b_n \\ = \alpha + 3\beta = 20 \quad \cdots \cdots \textcircled{7}$$

$\sum_{n=1}^{\infty} (9a_n - 6b_n) = 4$ 에서

$$\sum_{n=1}^{\infty} (9a_n - 6b_n) = \sum_{n=1}^{\infty} 9a_n - \sum_{n=1}^{\infty} 6b_n \\ = 9 \sum_{n=1}^{\infty} a_n - 6 \sum_{n=1}^{\infty} b_n \\ = 9\alpha - 6\beta = 4 \quad \cdots \cdots \textcircled{8}$$

⑦, ⑧에서 $\alpha = 4, \beta = \frac{16}{3}$

두 등비수열 $\{a_n\}, \{b_n\}$ 의 첫째항이 각각 2, 4이므로 두 등비수열의 공비를 각각 r_1, r_2 라 하면

$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \alpha$ 에서 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \frac{2}{1-r_1} = 4$ 이므로

$$4(1-r_1) = 2, \quad r_1 = \frac{1}{2}$$

$\sum_{n=1}^{\infty} b_n = \beta$ 에서 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n = \frac{4}{1-r_2} = \frac{16}{3}$ 이므로

$$1(1-r_2) = 12, \quad r_2 = \frac{1}{4}$$

따라서

$$a_n = 2 \times \left(\frac{1}{2} \right)^{n-1} = \left(\frac{1}{2} \right)^{n-2}$$

$$b_n = 4 \times \left(\frac{1}{4} \right)^{n-1} = \left(\frac{1}{4} \right)^{n-2}$$

이고

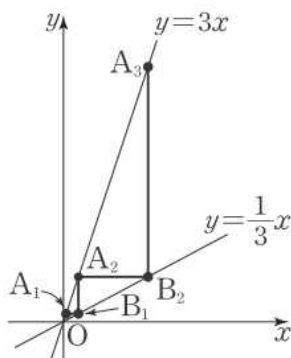
$$a_1 b_1 = \left(\frac{1}{2}\right)^{-1} \times \left(\frac{1}{4}\right)^{-1} = 2 \times 4 = 8$$

$$\begin{aligned} a_n b_n &= \left(\frac{1}{2}\right)^{n-2} \times \left(\frac{1}{4}\right)^{n-2} = \left(\frac{1}{2} \times \frac{1}{4}\right)^{n-2} \\ &= \left(\frac{1}{8}\right)^{n-2} = 8 \times \left(\frac{1}{8}\right)^{n-1} \end{aligned}$$

따라서

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n = \frac{8}{1 - \frac{1}{8}} = \frac{64}{7}$$

53) **정답** ①



$A_1(1, 3), B_1(9, 3)$ 이므로

$$\overline{A_1 B_1} = \sqrt{(9-1)^2 + (3-3)^2} = 8$$

직선 $y=3x$ 의 기울기가 3이므로

$$\frac{\overline{B_1 A_2}}{\overline{A_1 B_1}} = \frac{\overline{B_2 A_3}}{\overline{A_2 B_2}} = \frac{\overline{B_3 A_4}}{\overline{A_3 B_3}} = \dots = \frac{\overline{B_n A_{n+1}}}{\overline{A_n B_n}} = 3 \quad \dots \textcircled{A}$$

직선 $y=\frac{1}{3}x$ 의 기울기가 $\frac{1}{3}$ 이므로

$$\frac{\overline{B_1 A_2}}{\overline{A_2 B_2}} = \frac{\overline{B_2 A_3}}{\overline{A_3 B_3}} = \frac{\overline{B_3 A_4}}{\overline{A_4 B_4}} = \dots = \frac{\overline{B_n A_{n+1}}}{\overline{A_{n+1} B_{n+1}}} = \frac{1}{3} \quad \dots \textcircled{B}$$

①, ②에서

$$\frac{\overline{B_1 A_2}}{\overline{A_1 B_1}} = \frac{\overline{B_2 A_3}}{\overline{A_2 B_2}} = \frac{\overline{B_3 A_4}}{\overline{A_3 B_3}} = \dots = \frac{\overline{B_n A_{n+1}}}{\overline{A_n B_n}} = \frac{3}{\frac{1}{3}} = 9$$

$$\frac{\overline{A_2 B_2}}{\overline{A_1 B_1}} = \frac{\overline{A_3 B_3}}{\overline{A_2 B_2}} = \frac{\overline{A_4 B_4}}{\overline{A_3 B_3}} = \dots = \frac{\overline{A_{n+1} B_{n+1}}}{\overline{A_n B_n}} = 9$$

즉, $\overline{A_{n+1} B_{n+1}} = 9 \times \overline{A_n B_n}$ 이므로

$$\begin{aligned} \overline{A_n B_n} &= 9 \times \overline{A_{n-1} B_{n-1}} = 9^2 \times \overline{A_{n-2} B_{n-2}} = 9^3 \times \overline{A_{n-3} B_{n-3}} \\ &= \dots = 9^{n-1} \times \overline{A_1 B_1} = 9^{n-1} \times 8 \end{aligned}$$

따라서

$$\begin{aligned} 64 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\overline{A_n B_n}} &= 64 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{8 \times 9^{n-1}} = 64 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{8} \times \left(\frac{1}{9}\right)^{n-1} \\ &= 8 \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{9}\right)^{n-1} = 8 \times \frac{1}{1 - \frac{1}{9}} = 9 \end{aligned}$$

54) **정답** $\frac{8}{3}$

$$a_k = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\left(\frac{2}{k}\right)^n}{\left(\frac{2}{k}\right)^{n-1} + 2} \text{에서}$$

(i) $0 < \frac{2}{k} < 1$ 일 때,

자연수 k 에 대하여 $0 < \frac{2}{k} < 1$ 이므로 $k > 2$ 이고

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{2}{k}\right)^n = 0, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{2}{k}\right)^{n-1} = 0$$

이므로

$$a_k = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\left(\frac{2}{k}\right)^n}{\left(\frac{2}{k}\right)^{n-1} + 2} = \frac{0}{0+2} = 0$$

따라서 $k > 2$ 일 때 즉, $k=3, 4, 5$ 일 때

$$ka_k = k \times 0 = 0$$

(ii) $\frac{2}{k} = 1$ 일 때,

자연수 k 에 대하여 $\frac{2}{k} = 1$ 이므로 $k = 2$ 이고

$$a_k = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\left(\frac{2}{k}\right)^n}{\left(\frac{2}{k}\right)^{n-1} + 2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1^n}{1^{n-1} + 2} = \frac{1}{1+2} = \frac{1}{3}$$

따라서 $k=2$ 일 때

$$ka_k = 2 \times a_2 = 2 \times \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$$

(iii) $\frac{2}{k} > 1$ 일 때

자연수 k 에 대하여 $\frac{2}{k} > 1$ 이므로 $k < 2$ 이고

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{2}{k}\right)^n = \infty$$

이므로

$$a_k = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\left(\frac{2}{k}\right)^n}{\left(\frac{2}{k}\right)^{n-1} + 2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{2}{k}}{1 + \frac{2}{\left(\frac{2}{k}\right)^{n-1}}} = \frac{2}{1+0} = \frac{2}{k}$$

따라서 $k < 2$ 일 때 즉, $k=1$ 일 때

$$ka_k = 1 \times a_1 = 1 \times \frac{2}{1} = 2$$

(i), (ii), (iii)에서

$$\sum_{k=1}^5 ka_k = 1 \times a_1 + 2 \times a_2 + \sum_{k=3}^5 ka_k = 2 + \frac{2}{3} + 0 = \frac{8}{3}$$

55) **정답** $\frac{1}{3}$

$$\begin{aligned} & \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{S_n} - \frac{1}{S_{n+1}} \right) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \left(\frac{1}{S_k} - \frac{1}{S_{k+1}} \right) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ \left(\frac{1}{S_1} - \frac{1}{S_2} \right) + \left(\frac{1}{S_2} - \frac{1}{S_3} \right) + \left(\frac{1}{S_3} - \frac{1}{S_4} \right) + \cdots + \left(\frac{1}{S_n} - \frac{1}{S_{n+1}} \right) \right\} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{S_1} - \frac{1}{S_{n+1}} \right) \end{aligned}$$

이고, 등비수열 $\{a_n\}$ 의 첫째항부터 제 n 항까지의 합이 S_n 이므로

$$S_1 = a_1 = 6$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{S_1} = \frac{1}{6}$$

또,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_{n+1} = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \frac{6}{1-r}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{S_{n+1}} = \frac{1-r}{6}$$

이므로

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{S_n} - \frac{1}{S_{n+1}} \right) = \frac{1}{18} \text{ 에서}$$

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{S_n} - \frac{1}{S_{n+1}} \right) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{S_1} - \frac{1}{S_{n+1}} \right) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{S_1} - \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{S_{n+1}} \\ &= \frac{1}{6} - \frac{1-r}{6} = \frac{r}{6} = \frac{1}{18} \end{aligned}$$

따라서 $r = \frac{1}{3}$

56) **정답** 80

$$S_1 = 10 \times 6 = 60$$

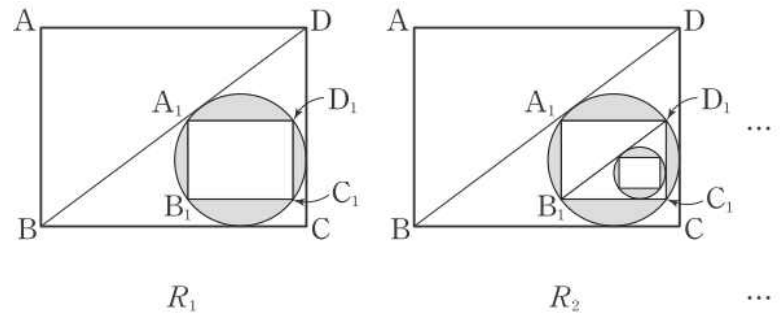
그림에서 직사각형 A_n 과 A_{n+1} 의 닮음비는 2:1이므로 넓이의 비는

4:1, 즉 $1 : \frac{1}{4}$ 이다.

따라서 수열 $\{S_n\}$ 은 첫째항이 60이고, 공비가 $\frac{1}{4}$ 인 등비수열이므로

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} S_n &= 60 \left\{ 1 + \frac{1}{4} + \left(\frac{1}{4} \right)^2 + \cdots \right\} \\ &= \frac{60}{1 - \frac{1}{4}} = 80 \end{aligned}$$

57) **정답** ③



직사각형 ABCD에서 $\overline{AB} = 3$, $\overline{AD} = 4$ 이므로

$$\overline{BD} = \sqrt{4^2 + 3^2} = 5$$

이고 삼각형 BCD에 내접하는 원의 반지름의 길이를 r 라 하면

$$\frac{1}{2} \times \overline{BC} \times \overline{CD} = \frac{1}{2} \times r \times (3 + 4 + 5)$$

$$\frac{1}{2} \times 4 \times 3 = \frac{1}{2} \times r \times 12, \quad r = 1$$

또한 반지름의 길이가 1인 원에 내접하고 직사각형 ABCD와 닮은 직사각형 $A_1B_1C_1D_1$ 의 대각선의 길이는 $2r$, 즉 2이므로 닮음비는

5:2이고 넓이의 비는 25:4, 즉 $1 : \frac{4}{25}$ 이다.

따라서 그림 R_1 에 색칠되어 있는 부분의 넓이를 S_1 이라 하면,

$$S_1 = 1 \times 1 \times \pi - 3 \times 4 \times \frac{4}{25} = \pi - \frac{48}{25} \text{ 이므로}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \frac{\pi - \frac{48}{25}}{1 - \frac{4}{25}} = \frac{25\pi - 48}{21}$$