

01 수열의 극한

예제 1 수열의 수렴과 발산

1. 다음 수열의 수렴, 발산을 조사하고 수렴하는 경우에는 극한값을 구하시오.

- (1) $\left\{ \frac{1}{n} \right\}$
- (2) $\{2n - 1\}$
- (3) $\{1 - 2n\}$

2. 다음 수열의 수렴, 발산을 조사하고 수렴하는 경우에는 극한값을 구하시오.

- (1) $\{2\}$
- (2) $\{1 + (-1)^n\}$

예제 2

수열의 극한에 대한 기본성질

3. 두 수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ 에 대하여 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 2$, $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = \frac{1}{3}$ 일 때,

$\lim_{n \rightarrow \infty} (4a_n + 3b_n)$ 의 값은?

- ① 6 ② 7 ③ 8
④ 9 ⑤ 10

5. 두 수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ 에 대하여

$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 2$, $\lim_{n \rightarrow \infty} (2a_n - 3b_n) = -20$ 일 때, $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n$ 의 값을 구하시오.

4. 두 수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ 에 대하여 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = -\frac{1}{2}$, $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = 4$ 일 때,

$\lim_{n \rightarrow \infty} (4a_n + 5b_n)$ 의 값을 구하시오.

예제 3

수열의 극한값의 계산(1)

6. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(3n+1)(n-2)-n^2}{(n-1)(n+1)}$ 의 값을 구하시오.

8. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(3n+1)(an-1)}{n^2+1}=6$ 을 만족시키는 상수 a 의 값을 구하시오.

7. $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n^2+1}{2n-1} - \frac{2n^3-1}{4n^2+1} \right)$ 의 값을 구하시오.

예제 4

수열의 극한값의 계산(2)

9. $\lim_{n \rightarrow \infty} n(\sqrt{n^2+1} - \sqrt{n^2-1})$ 의 값을 구하시오.

11. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a}{\sqrt{n^2+3n}-n} = 2$ 를 만족시키는 상수 a 의 값은?

- ① 2 ② $\frac{5}{2}$ ③ 3
④ $\frac{7}{2}$ ⑤ 4

10. $\lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{9n^2+n} - an) = \frac{1}{6}$ 을 만족시키는 양수 a 의 값은?

- ① $\frac{1}{3}$ ② $\frac{1}{2}$ ③ 1
④ 2 ⑤ 3

예제 5 수열의 극한의 대소관계

12. 수열 $\{a_n\}$ 이 모든 자연수 n 에 대하여

$\frac{3n+1}{2n+1} \leq a_n \leq \frac{3n+1}{2n-1}$ 을 만족시킬 때, $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ 의 값은?

- ① 2 ② $\frac{3}{2}$ ③ $\frac{4}{3}$
④ $\frac{5}{4}$ ⑤ $\frac{6}{5}$

13. 수열 $\{a_n\}$ 이 모든 자연수 n 에 대하여

$3n^2 - 2n < a_n < 3n^2 + 2n + 1$ 을 만족시킬 때, $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{n^2}$ 의 값은?

- ① $\frac{1}{3}$ ② $\frac{1}{2}$ ③ 1
④ 2 ⑤ 3

14. 수열 $\{a_n\}$ 이 모든 자연수 n 에 대하여 $3n-2 < a_n < 3n+4$ 를

만족시킬 때, $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{2n+1}}{n}$ 의 값은?

- ① $\frac{9}{2}$ ② 5 ③ $\frac{11}{2}$
④ 6 ⑤ $\frac{13}{2}$

예제 6 등비수열의 극한

15. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^{2n}}{3^{n-1} + 4^{n+1}}$ 의 값은?

- ① $\frac{1}{5}$ ② $\frac{1}{4}$ ③ $\frac{1}{3}$
④ $\frac{1}{2}$ ⑤ 1

16. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^{n+1}(3^n - 1)}{6^{n-1} + 3^n}$ 의 값은?

- ① 12 ② 14 ③ 16
④ 18 ⑤ 20

17. 수열 $\left\{ \frac{(2x+1)^n}{2^{n-1} + 3^n} \right\}_0^\infty$ 이 수렴하도록 하는 모든 정수 x 의 값의 합은?

- ① -2 ② -1 ③ 0
④ 1 ⑤ 2

예제 7

 r^n 을 포함하는 식의 극한

18. 수열 $\left\{ \frac{r^n}{1+r^n} \right\}$ 의 극한을 조사하시오. (단, $r \neq -1$)

20. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{r^{2n}-1}{r^{2n}+1}$ 의 값을 구하시오.

19. 수열 $\left\{ \frac{r^{n+1}+1}{r^n+1} \right\}$ 의 극한을 조사하시오. (단, $r > 0$)

기본핵심문제

21. 수열 $\{a_n\}$ 에 대하여 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n + 2}{3a_n + 4} = 5$ 일 때, $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ 의 값은?

- | | | |
|-------------------|------------------|------------------|
| ① $-\frac{10}{7}$ | ② $-\frac{9}{7}$ | ③ $-\frac{8}{7}$ |
| ④ -1 | ⑤ $-\frac{6}{7}$ | |

22. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2}{n^3 + 2n + 3}$ 의 값은?

- | | | |
|-----------------|-----------------|-----------------|
| ① $\frac{1}{5}$ | ② $\frac{1}{4}$ | ③ $\frac{1}{3}$ |
| ④ $\frac{1}{2}$ | ⑤ 1 | |

23. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{an+b}{\sqrt{n^2+n-n}} = 5$ 일 때, 두 상수 a, b 에 대하여 $a+b$ 의 값은?

- | | | |
|-----------------|-----------------|-----|
| ① 1 | ② $\frac{3}{2}$ | ③ 2 |
| ④ $\frac{5}{2}$ | ⑤ 3 | |

24. 수열 $\{a_n\}$ 이 모든 자연수 n 에 대하여 $\left|a_n - \frac{1}{3}n\right| \leq 2$ 를 만족시킬 때, $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{2n}}{2n}$ 의 값은?

- | | | |
|-----------------|-----------------|-----|
| ① $\frac{1}{3}$ | ② $\frac{1}{2}$ | ③ 1 |
| ④ 2 | ⑤ 3 | |

25. 공비가 2인 등비수열 $\{a_n\}$ 의 첫째항부터 제 n 항까지의 합을

S_n 이라 할 때, $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{S_n}$ 의 값은? (단, $a_1 \neq 0$)

- | | | |
|------------------|-----------------|-----------------|
| ① $\frac{1}{10}$ | ② $\frac{1}{8}$ | ③ $\frac{1}{6}$ |
| ④ $\frac{1}{4}$ | ⑤ $\frac{1}{2}$ | |

26. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3r^{n+1} + 1}{r^n - 2} = 5$ 를 만족시키는 실수 r 의 값은? (단, $r > 0$)

- | | | |
|-----------------|-----------------|-----|
| ① $\frac{4}{3}$ | ② $\frac{5}{3}$ | ③ 2 |
| ④ $\frac{7}{3}$ | ⑤ $\frac{8}{3}$ | |

02 급수

예제 1

급수의 수렴, 발산

27. 급수 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$ 의 합을 구하시오.

28. 수열 $\{a_n\}$ 의 첫째항부터 제 n 항까지의 합 S_n 이 $S_n = \frac{n+1}{3n-2}$ 일 때, 급수 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 의 합을 구하시오.

예제 2 급수와 수열의 극한 사이의 관계

29. 수열 $\{a_n\}$ 에 대하여 $\sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n - \frac{2n}{n+1} \right) = 3$ 일 때, $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ 의 값을 구하시오.

31. 수열 $\{a_n\}$ 에 대하여 $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n - 4) = 2$ 일 때, $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2 + 2n}{n^2 a_n - 3n}$ 의 값을 구하시오. (단, 모든 자연수 n 에 대하여 $n^2 a_n - 3n \neq 0$ 이다.)

30. 수열 $\{a_n\}$ 에 대하여 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n - 2n}{3n - 1} = 4$ 일 때, $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{n}$ 의 값을 구하시오.

예제 3 급수의 성질

32. 두 급수 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ 이 수렴하고,

$\sum_{n=1}^{\infty} 2a_n = 12$, $\sum_{n=1}^{\infty} (3a_n - 2b_n) = 16$ 일 때, 급수 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ 의 합을 구하시오.

34. 두 수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ 에 대하여

$\sum_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n) = 12$, $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n - b_n) = 6$ 일 때, 급수 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 의 합을 구하시오.

33. 두 급수 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ 이 수렴하고

$\sum_{n=1}^{\infty} 3a_n = 21$, $\sum_{n=1}^{\infty} (2a_n + 5b_n) = 24$ 일 때, 급수 $\sum_{n=1}^{\infty} (5a_n - 2b_n)$ 의 합을 구하시오.

예제 4

등비급수의 수렴 발산

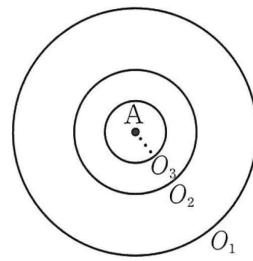
35. 첫째항이 20이고 공비가 $\frac{1}{2}$ 인 등비수열 $\{a_n\}$ 에 대하여 급수

$$\sum_{n=1}^{\infty} (a_n + a_{n+1})$$
의 합을 구하시오

36. 급수 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{n-1} + (-1)^n}{3^{n+1}}$ 의 합을 구하시오

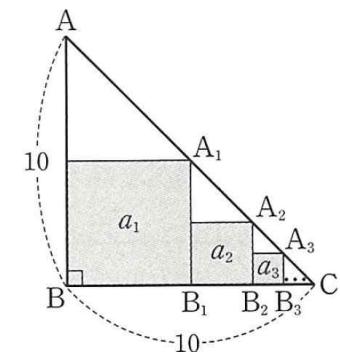
예제 5 등비급수의 활용

37. 그림과 같이 점 A를 중심으로 하고 반지름의 길이가 32인 원을 O_1 이라 하자. 점 A를 중심으로 하고 반지름의 길이가 O_1 의 반지름의 길이의 $\frac{1}{2}$ 인 원을 O_2 , 점 A를 중심으로 하고 반지름의 길이가 원 O_2 의 반지름의 길이의 $\frac{1}{2}$ 인 원을 O_3 라 하자. 이와 같은 과정을 계속할 때, 그려지는 모든 원의 둘레의 길이의 합을 구하시오.



38. 그림과 같이 $\overline{AB} = \overline{BC} = 10$ 인

직각이등변삼각형 ABC에서 선분 AC의 중점을 A_1 , 선분 BC의 중점을 B_1 이라 하고 선분 A_1B_1 을 한 변으로 하는 정사각형의 넓이를 a_1 이라 하자. 선분 A_1C 의 중점을 A_2 , 선분 B_1C 의 중점을 B_2 라 하고 선분 A_2B_2 를 한 변으로 하는 정사각형의 넓이를 a_2 라 하자. 선분 A_2C 의 중점을 A_3 , 선분 B_2C 의 중점을 B_3 라 하고 선분 A_3B_3 를 한 변으로 하는 정사각형의 넓이를 a_3 라 하자. 이와 같은 과정을 계속하여 n 번째 얻은 정사각형의 넓이를 a_n 이라 할 때, 급수 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 의 합을 구하시오.



기본핵심문제

39. 첫째항이 10이고 공차가 2인 등차수열 $\{a_n\}$ 에 대하여 급수

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{a_n} - \frac{1}{a_{n+1}} \right)$$

- 의 합은?
- ① $\frac{1}{3}$ ② $\frac{1}{2}$ ③ 1
 ④ 2 ⑤ 3

40. 수열 $\{a_n\}$ 에 대하여 $\sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n - \frac{n^2 - n + 1}{2n^2 + 1} \right) = 5$ 일 때,

$\lim_{n \rightarrow \infty} (2a_n + 3)$ 의 값은?

- ① 4 ② $\frac{9}{2}$ ③ 5
 ④ $\frac{11}{2}$ ⑤ 6

41. 두 급수 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ 이 수렴하고

$$\sum_{n=1}^{\infty} (2a_n + 3b_n) = 23, \quad \sum_{n=1}^{\infty} (3a_n - 2b_n) = 2$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2}a_n + \frac{1}{5}b_n \right)$$

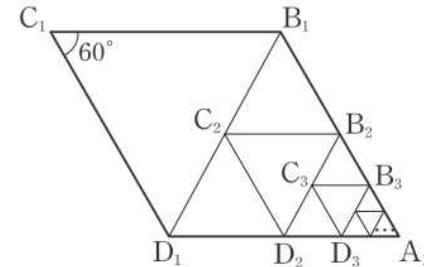
- 의 합은?
- ① 1 ② $\frac{3}{2}$ ③ 2
 ④ $\frac{5}{2}$ ⑤ 3

42. 첫째항이 3이고 공비가 $\frac{1}{5}$ 인 등비수열 $\{a_n\}$ 에 대하여 급수

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n a_{2n}}{a_{2n+1}}$$

- 의 합은?
- ① $\frac{71}{4}$ ② $\frac{75}{4}$ ③ $\frac{79}{4}$
 ④ $\frac{83}{4}$ ⑤ $\frac{87}{4}$

43. 그림과 같이 모든 변의 길이가 1이고 $\angle B_1 C_1 D_1 = 60^\circ$ 인 평행사변형 $A_1 B_1 C_1 D_1$ 이 있다. 두 꼭짓점 B_1, D_1 을 이어 삼각형 $B_1 C_1 D_1$ 을 만든다. 세 선분 $A_1 B_1, B_1 D_1, A_1 D_1$ 의 중점을 각각 B_2, C_2, D_2 라 하고 삼각형 $B_2 C_2 D_2$ 를 만든다. 다시 세 선분 $A_1 B_2, B_2 D_2, A_1 D_2$ 의 중점을 각각 B_3, C_3, D_3 라 하고 삼각형 $B_3 C_3 D_3$ 를 만든다. 이와 같은 과정을 계속하여 n 번째 얻은 삼각형 $B_n C_n D_n$ 의 넓이를 a_n 이라 할 때, 급수 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 의 합은?



- ① $\frac{\sqrt{3}}{5}$ ② $\frac{\sqrt{3}}{4}$ ③ $\frac{\sqrt{3}}{3}$
 ④ $\frac{\sqrt{3}}{2}$ ⑤ $\sqrt{3}$

단원종합문제

44. 수렴하는 수열 $\{a_n\}$ 에 대하여 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3a_n + 2}{1 + 2a_n} = \frac{8}{5}$ 일 때,

$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{2}a_n + 3 \right)$ 의 값은?

- | | | |
|-----------------|------------------|-----------------|
| ① $\frac{7}{2}$ | ② 4 | ③ $\frac{9}{2}$ |
| ④ 5 | ⑤ $\frac{11}{2}$ | |

45. 수열 $\{a_n\}$ 의 첫째항부터 제 n 항까지의 합을 S_n 이라 하자.

$S_n = n(n+3)$ 일 때, $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4S_n + na_n}{3n^2 + n - 1}$ 의 값은?

- | | | |
|-----------------|-----------------|-----|
| ① $\frac{1}{4}$ | ② $\frac{1}{2}$ | ③ 1 |
| ④ 2 | ⑤ 4 | |

46. 두 수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ 에 대하여

$a_n + b_n = \frac{n}{n+1}$, $a_n b_n = \frac{n^2}{3n^2 + 2n + 1}$ 을 만족시킬 때,

$\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n - b_n)^2$ 값은?

- | | | |
|------------------|------------------|-----|
| ① $-\frac{1}{2}$ | ② $-\frac{1}{3}$ | ③ 1 |
| ④ $\frac{1}{3}$ | ⑤ $\frac{1}{2}$ | |

47. 수열 $\{a_n\}$ 이 모든 자연수 n 에 대하여

$n(n+1) < a_n - n^2 < (n+2)(n+3)$ 을 만족시킬 때, $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{2n^2}$ 의 값은?

- | | | |
|-----------------|-----------------|-----------------|
| ① $\frac{1}{5}$ | ② $\frac{1}{4}$ | ③ $\frac{1}{3}$ |
| ④ $\frac{1}{2}$ | ⑤ 1 | |

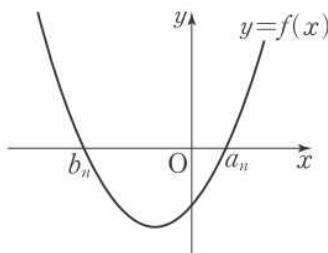
48. 자연수 n 에 대하여 x 에 대한 다항식 $x^n + 2x$ 를 일차식 $3x - 1$ 로

나눈 나머지를 a_n 이라 할 때, $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{9a_n + 1}{3a_n}$ 的 값은?

- | | | |
|-----------------|-----------------|-----------------|
| ① $\frac{5}{2}$ | ② 3 | ③ $\frac{7}{2}$ |
| ④ 4 | ⑤ $\frac{9}{2}$ | |

49. 자연수 n 에 대하여 함수 $f(x)$ 를 $f(x) = x^2 + x - (4n^2 - 1)0$ 이라 하자. 함수 $y = f(x)$ 의 그래프와 x 축이 만나는 두 점의 x 좌표를 각각

a_n , b_n ($a_n > b_n$)이라 할 때, 급수 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n + b_n}{a_n b_n}$ 的 합은?



- | | | |
|-----------------|-----------------|-----|
| ① $\frac{1}{4}$ | ② $\frac{1}{2}$ | ③ 1 |
| ④ 2 | ⑤ 4 | |

50. 수열 $\{a_n\}$ 에 대하여 급수 $\sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n - \frac{4n^2 - 3n + 1}{2n^2 - 5} \right)$ 이 수렴할 때,

$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(a_n+3)n^2 - n}{2n^2 + 3}$ 의 값은?

- | | | |
|-----------------|-----------------|-----|
| ① 1 | ② $\frac{3}{2}$ | ③ 2 |
| ④ $\frac{5}{2}$ | ⑤ 3 | |

51. 등비수열 $\{a_n\}$ 에 대하여 $a_1 = 2$, $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = 6$ 일 때, $\sum_{n=1}^{\infty} a_{2n}$ 의 값은?

- | | | |
|------------------|------------------|-----|
| ① $\frac{8}{5}$ | ② $\frac{9}{5}$ | ③ 2 |
| ④ $\frac{11}{5}$ | ⑤ $\frac{12}{5}$ | |

52. 두 등비수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ 의 첫째항이 각각 2, 4이고 두 급수

$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ 이 모두 수렴한다.

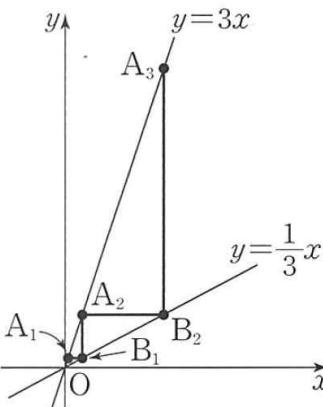
$\sum_{n=1}^{\infty} (a_n + 3b_n) = 20$, $\sum_{n=1}^{\infty} (9a_n - 6b_n) = 4$ 를 만족시킬 때, 급수

$\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ 의 합은?

- | | | |
|------------------|------------------|------------------|
| ① $\frac{62}{7}$ | ② $\frac{64}{7}$ | ③ $\frac{66}{7}$ |
| ④ $\frac{68}{7}$ | ⑤ 10 | |

53. 좌표평면에서 직선 $y = 3x$ 위의 점 $A_1(1, 3)$ 이 있다. 점 A_1 을 지나고 x 축에 평행한 직선이 직선 $y = \frac{1}{3}x$ 와 만나는 점을 B_1 , 점 B_1 을 지나고 y 축에 평행한 직선이 직선 $y = 3x$ 와 만나는 점을 A_2 , 점 A_2 를 지나고 x 축에 평행한 직선이 직선 $y = \frac{1}{3}x$ 와 만나는 점을 B_2 , 점 B_2 를 지나고 y 축에 평행한 직선이 직선 $y = 3x$ 와 만나는 점을 A_3 이라 하자. 이와 같은 과정을 계속하여 점

B_3 , A_4 , B_4 , …, A_n , B_n , …을 정할 때, 급수 $64 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{A_n B_n}$ 의 합은?



- | | | |
|------|------|------|
| ① 9 | ② 10 | ③ 11 |
| ④ 12 | ⑤ 13 | |

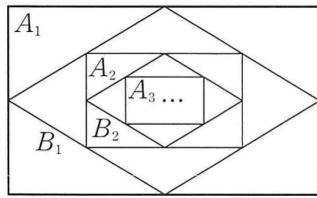
54. 자연수 k 에 대하여 $a_k = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\left(\frac{2}{k}\right)^n}{\left(\frac{2}{k}\right)^{n-1} + 2}$ 이라 할 때, $\sum_{k=1}^5 ka_k$ 의 값을 구하시오.

55. 첫째항이 6이고 공비가 $r (0 < r < 1)$ 인 등비수열 $\{a_n\}$ 의 첫째항부터 제 n 항까지의 합을 S_n 이라 하자.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{S_n} - \frac{1}{S_{n+1}} \right) = \frac{1}{18} \text{ 일 때, 공비 } r \text{의 값을 구하시오.}$$

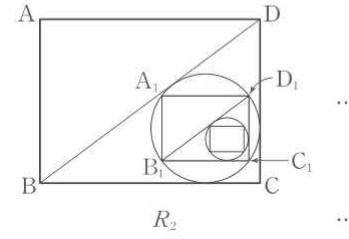
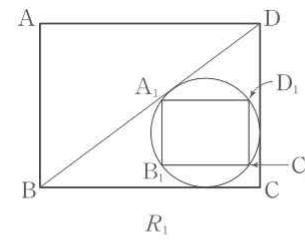
기출문항 변형 수능 맛보기

56. 그림과 같이 가로의 길이가 10이고 세로의 길이가 6인 직사각형 A_1 이 있다. 직사각형 A_1 의 각 변의 중점을 연결하여 마름모 B_1 을 그리고 마름모 B_1 의 각 변의 중점을 연결하여 직사각형 A_2 의 각 변의 중점을 연결하여 마름모 B_2 를 그리고 마름모 B_2 의 각 변의 중점을 연결하여 직사각형 A_3 를 그린다. 이와 같은 방법으로 얻은 직사각형 A_n 의 넓이를 S_n 이라 할 때, $\sum_{n=1}^{\infty} S_n$ 의 값을 구하시오.



57. 그림과 같이 $\overline{AB}=3$, $\overline{AD}=4$ 인 직사각형 ABCD에 대하여 삼각형 BCD에 내접하는 원을 그린 후 그 원에 내접하고 직사각형 ABCD와 닮은 직사각형 $A_1B_1C_1D_1$ 을 그리고, 원의 내부와 직사각형 $A_1B_1C_1D_1$ 의 외부의 공통부분에 색칠하여 얻은 그림을 R_1 이라 하자. 그림 R_1 에서 새로 그려진 직사각형 $A_2B_2C_2D_2$ 에 그림 R_1 과 같은 방법으로 내접하는 원과 직사각형을 그린 후 원의 내부와 직사각형의 외부의 공통부분에 색칠하여 얻은 그림을 R_2 라 하자. 이와 같은 과정을 계속하여 n 번째 얻은 그림 R_n 에 색칠되어 있는 부분의 넓이를 S_n 이라 할 때, $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n$ 의 값을?

(단, 그림 R_n 의 모든 직사각형들은 대각선 중 하나가 직선 BD와 평행하다.)



- ① $\frac{25\pi - 46}{21}$ ② $\frac{25\pi - 47}{21}$ ③ $\frac{25\pi - 48}{21}$
 ④ $\frac{25\pi - 47}{20}$ ⑤ $\frac{25\pi - 48}{20}$

[빠른 정답]

- 1) **정답** (1) 수렴, 0 (2) 발산 (3) 발산
- 2) **정답** (1) 수렴, 2 (2) 발산(진동)
- 3) **정답** ④
- 4) **정답** 18
- 5) **정답** 8
- 6) **정답** 2
- 7) **정답** $\frac{1}{4}$
- 8) **정답** 2
- 9) **정답** 1
- 10) **정답** ⑥
- 11) **정답** ③
- 12) **정답** ②
- 13) **정답** ⑤
- 14) **정답** ④
- 15) **정답** ②
- 16) **정답** ①
- 17) **정답** ③
- 18) **정답** $-1 < r < 1$ 일 때 0에 수렴, $r = 1$ 일 때 $\frac{1}{2}$ 에 수렴,
 $r < -1$ 또는 $r > 1$ 일 때 1에 수렴

19) **정답** $0 < r \leq 1$ 일 때 1에 수렴, $r > 1$ 일 때 r 에 수렴

20) **정답** $-1 < r < 1$ 일 때 -1 , $r = -1$ 또는 $r = 1$ 일 때 0,
 $r < -1$ 또는 $r > 1$ 일 때 1

- 21) **정답** ②
- 22) **정답** ③
- 23) **정답** ④
- 24) **정답** ①
- 25) **정답** ⑤
- 26) **정답** ②
- 27) **정답** 1
- 28) **정답** $\frac{1}{3}$
- 29) **정답** 2
- 30) **정답** 2
- 31) **정답** $\frac{1}{4}$
- 32) **정답** 1
- 33) **정답** 31
- 34) **정답** 9
- 35) **정답** 6
- 36) **정답** $\frac{1}{4}$
- 37) **정답** 128π
- 38) **정답** $\frac{100}{3}$

- 39) **정답** ③
- 40) **정답** ①
- 41) **정답** ⑤
- 42) **정답** ②
- 43) **정답** ③
- 44) **정답** ②
- 45) **정답** ④
- 46) **정답** ②
- 47) **정답** ⑤
- 48) **정답** ③
- 49) **정답** ②
- 50) **정답** ④
- 51) **정답** ⑤
- 52) **정답** ②
- 53) **정답** ①
- 54) **정답** $\frac{8}{3}$
- 55) **정답** $\frac{1}{3}$
- 56) **정답** 80
- 57) **정답** ③

정답 및 풀이

- 1) 정답 (1) 수렴, 0 (2) 발산 (3) 발산

(1) 수열 $\{a_n\}$ 에서 $a_n = \frac{1}{n}$ 이면

$a_1 = 1, a_2 = \frac{1}{2}, a_3 = \frac{1}{3}, a_4 = \frac{1}{4}, \dots$ 이므로 n 이 한없이 커질 때,

a_n 의 값은 일정한 수 0에 한없이

가까워진다. 즉, 수열 $\left\{\frac{1}{n}\right\}$ 은

수렴하고 그 극한값은 0이다.

(2) 수열 $\{a_n\}$ 에서 $a_n = 2n - 1$ 이면

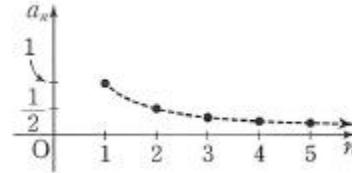
$a_1 = 1, a_2 = 3, a_3 = 5, a_4 = 7, \dots$ 이므로 n 이 한없이 커질 때 수열

$\{a_n\}$ 은 양의 무한대로 발산한다.

(3) 수열 $\{a_n\}$ 에서 $a_n = 1 - 2n$ 이면

$a_1 = -1, a_2 = -3, a_3 = -5, a_4 = -7, \dots$ 이므로 n 이 한없이 커질 때

때 a_n 은 음수이면서 그 절댓값은 한없이 커지므로 수열 $\{a_n\}$ 은 음의 무한대로 발산한다.



- 2) 정답 (1) 수렴, 2 (2) 발산(진동)

(1) 수열 $\{a_n\}$ 에서 $a_n = 2$ 이면

$a_1 = 2, a_2 = 2, a_3 = 2, a_4 = 2, \dots$ 이므로 n 이 한없이 커질 때

a_n 의 값은 항상 2이므로 수렴한다.

즉, 수열 {2}는 수렴하고 그 극한값은 2이다.

(2) 수열 $\{a_n\}$ 에서 $a_n = 1 + (-1)^n$ 이면

$$a_1 = 1 + (-1)^1 = 0$$

$$a_2 = 1 + (-1)^2 = 2$$

$$a_3 = 1 + (-1)^3 = 0$$

$$a_4 = 1 + (-1)^4 = 2$$

⋮

따라서 수열 $\{a_n\}$ 은 0, 2, 0, 2, 0, 2, …이므로 진동, 즉

발산한다.

- 3) 정답 ④

$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 2$ 에서 $\lim_{n \rightarrow \infty} 4a_n = 4\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 4 \times 2 = 8$

즉, 수열 $\{4a_n\}$ 은 8에 수렴한다.

$\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = \frac{1}{3}$ 에서 $\lim_{n \rightarrow \infty} 3b_n = 3\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = 3 \times \frac{1}{3} = 1$

즉, 수열 $\{3b_n\}$ 은 1에 수렴한다.

따라서 수열의 극한에 대한 기본 성질에 의하여

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (4a_n + 3b_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} 4a_n + \lim_{n \rightarrow \infty} 3b_n$$

$$= 8 + 1 = 9$$

- 4) 정답 18

$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = -\frac{1}{2}$ 에서

$$\lim_{n \rightarrow \infty} 4a_n = 4\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 4 \times \left(-\frac{1}{2}\right) = -2$$

즉, 수열 $\{4a_n\}$ 은 -2에 수렴한다.

$\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = 4$ 에서

$$\lim_{n \rightarrow \infty} 5b_n = 5\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = 5 \times 4 = 20$$

즉, 수열 $\{5b_n\}$ 은 20에 수렴한다.

따라서 수열의 극한에 대한 기본 성질에 의하여

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} (4a_n + 5b_n) &= \lim_{n \rightarrow \infty} 4a_n + \lim_{n \rightarrow \infty} 5b_n \\ &= -2 + 20 = 18 \end{aligned}$$

- 5) 정답 8

$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 2$ 에서 $\lim_{n \rightarrow \infty} 2a_n = 2\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 2 \times 2 = 4$

즉, 수열 $\{2a_n\}$ 은 4에 수렴한다.

또 $\lim_{n \rightarrow \infty} (2a_n - 3b_n) = -20$ 이므로 수열 $\{2a_n - 3b_n\}$ 은 -20에 수렴한다.

따라서 수열의 극한에 대한 기본 성질에 의하여

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} 3b_n &= \lim_{n \rightarrow \infty} \{2a_n - (2a_n - 3b_n)\} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} 2a_n - \lim_{n \rightarrow \infty} (2a_n - 3b_n) \\ &= 4 - (-20) = 24 \end{aligned}$$

이므로

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} b_n &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{3} \times 3b_n\right) = \frac{1}{3} \lim_{n \rightarrow \infty} 3b_n \\ &= \frac{1}{3} \times 24 = 8 \end{aligned}$$

- 6) 정답 2

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(3n+1)(n-2)-n^2}{(n-1)(n+1)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n^2-5n-2}{n^2-1}$$

$$\begin{aligned} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{2}{n}-\frac{5}{n^2}-\frac{2}{n^2}}{1-\frac{1}{n^2}} = \frac{\frac{2}{1}-\frac{0}{1}-\frac{0}{1}}{1-\frac{1}{0}} = 2 \end{aligned}$$

- 7) 정답 $\frac{1}{4}$

$$\begin{aligned}
 & \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n^2+1}{2n-1} - \frac{2n^3-1}{4n^2+1} \right) \\
 &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n^2+1)(4n^2+1) - (2n^3-1)(2n-1)}{(2n-1)(4n^2+1)} \\
 &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n^3+5n^2+2n}{8n^3-4n^2+2n-1} \\
 &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2+\frac{5}{n}+\frac{2}{n^2}}{8-\frac{4}{n}+\frac{2}{n^2}-\frac{1}{n^3}} \\
 &= \frac{2+0+0}{8-0+0-0} = \frac{1}{4}
 \end{aligned}$$

8) 정답 2

$$\begin{aligned}
 \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(3n+1)(an-1)}{n^2+1} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3an^2 + (a-3)n - 1}{n^2+1} \\
 &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3a + \frac{a-3}{n} - \frac{1}{n^2}}{1 + \frac{1}{n^2}} \\
 &= \frac{3a+0-0}{1+0} = 3a
 \end{aligned}$$

또, $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(3n+1)(an-1)}{n^2+1} = 6$ 에서

$$3a = 6, \quad a = 2$$

9) 정답 1

$$\begin{aligned}
 \lim_{n \rightarrow \infty} n(\sqrt{n^2+1} - \sqrt{n^2-1}) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n(\sqrt{n^2+1} - \sqrt{n^2-1})(\sqrt{n^2+1} + \sqrt{n^2-1})}{\sqrt{n^2+1} + \sqrt{n^2-1}} \\
 &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n}{\sqrt{n^2+1} + \sqrt{n^2-1}} \\
 &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2}{\sqrt{1 + \frac{1}{n^2}} + \sqrt{1 - \frac{1}{n^2}}} \\
 &= \frac{2}{1+1} = 1
 \end{aligned}$$

10) 정답 ⑥

$$\begin{aligned}
 \lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{9n^2+n} - an) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(\sqrt{9n^2+n} - an)(\sqrt{9n^2+n} + an)}{\sqrt{9n^2+n} + an} \\
 &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(9-a^2)n^2 + n}{\sqrt{9n^2+n} + an}
 \end{aligned}$$

0 때 $a \neq 3$ 이면,

$$\begin{aligned}
 \lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{9n^2+n} - an) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(9-a^2)n^2 + n}{\sqrt{9n^2+n} + an} \\
 &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(9-a^2)n + 1}{\sqrt{9 + \frac{1}{n}} + a}
 \end{aligned}$$

이므로 수열 $\{\sqrt{9n^2+n} - an\}$ 은 양의 무한대 또는 음의 무한대로 발산한다.

즉, $\lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{9n^2+n} - an) = \frac{1}{6}$ 을 만족시키지 않는다.

따라서 $a = 3$

{참고}

$a = 30$ 이면,

$$\begin{aligned}
 \lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{9n^2+n} - 3n) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{\sqrt{9n^2+n} + 3n} \\
 &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{9 + \frac{1}{n}} + 3} \\
 &= \frac{1}{3+3} = \frac{1}{6}
 \end{aligned}$$

11) 정답 ③

$$\begin{aligned}
 \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a}{\sqrt{n^2+3n-n}} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a(\sqrt{n^2+3n}+n)}{(\sqrt{n^2+3n}-n)(\sqrt{n^2+3n}+n)} \\
 &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a(\sqrt{n^2+3n}+n)}{3n} \\
 &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a\left(\sqrt{1+\frac{3}{n}}+1\right)}{3} \\
 &= \frac{a(1+1)}{3} = \frac{2a}{3}
 \end{aligned}$$

또, $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a}{\sqrt{n^2+3n-n}} = 20$ 에서

$$\frac{2a}{3} = 2, \quad 2a = 6, \quad a = 3$$

12) 정답 ②

모든 자연수 n 에 대하여 $\frac{3n+1}{2n+1} \leq a_n \leq \frac{3n+1}{2n-1}$ 이므로

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3n+1}{2n+1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3 + \frac{1}{n}}{2 + \frac{1}{n}} = \frac{3+0}{2+0} = \frac{3}{2}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3n+1}{2n-1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3 + \frac{1}{n}}{2 - \frac{1}{n}} = \frac{3+0}{2-0} = \frac{3}{2}$$

따라서 수열의 극한의 대소 관계에 의하여 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \frac{3}{2}$

13) 정답] ⑤

모든 자연수 n 에 대하여 $3n^2 - 2n < a_n < 3n^2 + 2n + 1$ 이므로 각 변을 n^2 ($n^2 > 0$)으로 나누면

$$\frac{3n^2 - 2n}{n^2} < \frac{a_n}{n^2} < \frac{3n^2 + 2n + 1}{n^2}$$

이고

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3n^2 - 2n}{n^2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(3 - \frac{2}{n}\right) = 3 - 0 = 3$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3n^2 + 2n + 1}{n^2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(3 + \frac{2}{n} + \frac{1}{n^2}\right) = 3 + 0 + 0 = 3$$

따라서 수열의 극한의 대소 관계에 의하여

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{n^2} = 3$$

14) 정답] ④

모든 자연수 n 에 대하여 $3n - 2 < a_n < 3n + 4$ 이므로

$$3(2n+1) - 2 < a_{2n+1} < 3(2n+1) + 4$$

$$6n + 1 < a_{2n+1} < 6n + 7$$

이고 각 변을 n ($n > 0$)으로 나누면

$$\frac{6n+1}{n} < \frac{a_{2n+1}}{n} < \frac{6n+7}{n}$$

이고

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{6n+1}{n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(6 + \frac{1}{n}\right) = 6 + 0 = 6$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{6n+7}{n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(6 + \frac{7}{n}\right) = 6 + 0 = 6$$

따라서 수열의 극한의 대소 관계에 의하여

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{2n+1}}{n} = 6$$

15) 정답] ②

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^{2n}}{3^{n-1} + 4^{n+1}}$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4^n}{\frac{1}{3} \times 3^n + 4 \times 4^n}$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\frac{1}{3} \times \left(\frac{3}{4}\right)^n + 4}$$

$$= \frac{1}{0+4} = \frac{1}{4}$$

16) 정답] ①

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^{n+1}(3^n - 1)}{6^{n-1} + 3^n} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^{n+1} \times 3^n - 2^{n+1}}{6^{n-1} + 3^n} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2 \times 6^n - 2 \times 2^n}{\frac{1}{6} \times 6^n + 3^n} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2 - 2 \times \left(\frac{1}{3}\right)^n}{\frac{1}{6} + \left(\frac{1}{2}\right)^n} \\ &= \frac{2 - 0}{\frac{1}{6} + 0} = 12 \end{aligned}$$

17) 정답] ③

수열 $\left\{ \frac{(2x+1)^n}{2^{n-1} + 3^n} \right\}$ 에서

$$\begin{aligned} \frac{(2x+1)^n}{2^{n-1} + 3^n} &= \frac{(2x+1)^n}{\frac{1}{2} \times 2^n + 3^n} \\ &= \frac{\left(\frac{2x+1}{3}\right)^n}{\frac{1}{2} \times \left(\frac{2}{3}\right)^n + 1} \end{aligned}$$

이므로 수열 $\left\{ \frac{(2x+1)^n}{2^{n-1} + 3^n} \right\}$ 이 수렴하려면 등비수열 $\left(\frac{2x+1}{3}\right)^n$ 이

수렴해야 한다. 즉,

$$-1 < \frac{2x+1}{3} \leq 1, \quad -3 < 2x+1 \leq 3, \quad -4 < 2x \leq 2, \quad -2 < x \leq 1$$

따라서 조건을 만족시키는 정수 x 의 값은 $-1, 0, 1$ 이고 그 합은 0이다.

18) 정답] $-1 < r < 1$ 일 때 0에 수렴, $r = 1$ 일 때 $\frac{1}{2}$ 에 수렴,

$r < -1$ 또는 $r > 1$ 일 때 1에 수렴

$-1 < r < 1, r = 1, r < -1$ 또는 $r > 1$ 의 세 경우로 나누어 수열

$\left\{ \frac{r^n}{1+r^n} \right\}$ 의 극한을 조사하면 다음과 같다.

(1) $-1 < r < 1$ ($|r| < 1$)일 때, $\lim_{n \rightarrow \infty} r^n = 0$ 이므로

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{r^n}{1+r^n} = \frac{0}{1+0} = 0 \text{ (수렴)}$$

(2) $r = 1$ 일 때, $\lim_{n \rightarrow \infty} r^n = \lim_{n \rightarrow \infty} 1^n = \lim_{n \rightarrow \infty} 1 = 1$ 이므로

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{r^n}{1+r^n} = \frac{1}{1+1} = \frac{1}{2} \text{ (수렴)}$$

(3) $r < -1$ 또는 $r > 1$ ($|r| > 1$)일 때, $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{r}\right)^n = 0$ 이므로

$\frac{r^n}{1+r^n}$ 의 분모, 분자를 각각 r^n 으로 나누면

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{r^n}{1+r^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\left(\frac{1}{r}\right)^n + 1} = \frac{1}{0+1} = 1 \text{ (수렴)}$$

19) 정답] $0 < r \leq 1$ 일 때 1에 수렴, $r > 1$ 일 때 r 에 수렴

$r > 0$ 이므로 $0 < r < 1$, $r = 1$, $r > 1$ 의 세 경우로 나누어 수열

$\left\{ \frac{r^{n+1} + 1}{r^n + 1} \right\}$ 의 극한을 조사하면 다음과 같다.

(i) $0 < r < 1$ 일 때

$$\lim_{n \rightarrow \infty} r^n = 0 \text{이고 } \lim_{n \rightarrow \infty} r^{n+1} = \lim_{n \rightarrow \infty} r \times r^n = r \times \lim_{n \rightarrow \infty} r^n = 0 \text{이므로}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{r^{n+1} + 1}{r^n + 1} = \frac{0+1}{0+1} = 1 \text{ (수렴)}$$

(ii) $r = 1$ 일 때

$$\lim_{n \rightarrow \infty} r^n = \lim_{n \rightarrow \infty} 1^n = \lim_{n \rightarrow \infty} 1 = 1 \text{이고}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} r^{n+1} = \lim_{n \rightarrow \infty} 1^{n+1} = \lim_{n \rightarrow \infty} 1 = 1 \text{이므로}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{r^{n+1} + 1}{r^n + 1} = \frac{1+1}{1+1} = 1 \text{ (수렴)}$$

(iii) $r > 1$ 일 때

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{r} \right)^n = 0 \text{이므로 } \frac{r^{n+1} + 1}{r^n + 1} \text{의 분모, 분자를 각각 } r^n \text{으로}$$

나누면

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{r^{n+1} + 1}{r^n + 1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{r + \left(\frac{1}{r} \right)^n}{1 + \left(\frac{1}{r} \right)^n} = \frac{r+0}{1+0} = r \text{ (수렴)}$$

20) 정답] $-1 < r < 1$ 일 때 -1 , $r = -1$ 또는 $r = 1$ 일 때 0 , $r < -1$ 또는 $r > 1$ 일 때 1

$-1 < r < 1$, $r = -1$ 또는 $r = 1$, $r < -1$ 또는 $r > 1$ 의 세 경우로

나누어 수열 $\left\{ \frac{r^{2n} - 1}{r^{2n} + 1} \right\}$ 의 극한을 조사하면 다음과 같다.

(i) $-1 < r < 1$ 일 때

$$\lim_{n \rightarrow \infty} r^{2n} = 0 \text{이므로}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{r^{2n} - 1}{r^{2n} + 1} = \frac{0-1}{0+1} = -1 \text{ (수렴)}$$

(ii) $r = -1$ 또는 $r = 1$ 일 때

$$\lim_{n \rightarrow \infty} r^{2n} = 1 \text{이므로}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{r^{2n} - 1}{r^{2n} + 1} = \frac{1-1}{1+1} = 0 \text{ (수렴)}$$

(iii) $r < -1$ 또는 $r > 1$ 일 때

$$\lim_{n \rightarrow \infty} r^{2n} = \infty \text{이고 } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{r^{2n}} = 0 \text{이므로}$$

$\frac{r^{2n} - 1}{r^{2n} + 1}$ 의 분모, 분자를 각각 r^{2n} 으로 나누면

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{r^{2n} - 1}{r^{2n} + 1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 - \frac{1}{r^{2n}}}{1 + \frac{1}{r^{2n}}} = \frac{1-0}{1+0} = 1 \text{ (수렴)}$$

21) 정답] ②

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n + 2}{3a_n + 4} = 5 \text{에서}$$

$$\frac{a_n + 2}{3a_n + 4} = b_n \text{ 으로 놓으면 } \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = 5$$

$$a_n + 2 = 3a_n b_n + 4b_n \text{에서}$$

$$(3b_n - 1)a_n = 2(1 - 2b_n)$$

$$b_n \neq \frac{1}{3} \text{이므로 } a_n = \frac{2(1-2b_n)}{3b_n - 1}$$

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} a_n &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2(1-2b_n)}{3b_n - 1} \\ &= \frac{2(1-2 \times 5)}{3 \times 5 - 1} = -\frac{9}{7} \end{aligned}$$

[참고]

$$b_n = \frac{1}{3} \text{ 이면 } \frac{a_n + 2}{3a_n + 4} = \frac{1}{3} \text{에서}$$

$$3a_n + 6 = 3a_n + 4$$

$$\text{즉, } 6 = 4 \text{가 되어 모순이므로 } b_n \neq \frac{1}{3} \text{이다.}$$

22) 정답] ③

$$\begin{aligned} 1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2 &= \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \\ &= \frac{1}{3}n^3 + \frac{1}{2}n^2 + \frac{1}{6}n \end{aligned}$$

이므로

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2}{n^3 + 2n + 3} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{3}n^3 + \frac{1}{2}n^2 + \frac{1}{6}n}{n^3 + 2n + 3} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{3} + \frac{1}{2} \times \frac{1}{n} + \frac{1}{6} \times \frac{1}{n^2}}{1 + \frac{2}{n^2} + \frac{3}{n^3}} \\ &= \frac{\frac{1}{3} + 0 + 0}{1 + 0 + 0} = \frac{1}{3} \end{aligned}$$

23) 정답] ④

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{an+b}{\sqrt{n^2+n}-n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(an+b)(\sqrt{n^2+n}+n)}{(\sqrt{n^2+n}-n)(\sqrt{n^2+n}+n)}$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(an+b)(\sqrt{n^2+n}+n)}{n} \quad \dots\dots \textcircled{7}$$

에서 $a \neq 0$ 이면 수열 $\left\{ \frac{an+b}{\sqrt{n^2+n}-n} \right\}$ 는 양의 무한대 또는 음의

무한대로 발산하므로 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{an+b}{\sqrt{n^2+n}-n} = 5$ 를 만족시키지 않는다.

따라서 $a = 0$

⑤에서

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{an+b}{\sqrt{n^2+n}-n} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(an+b)(\sqrt{n^2+n}+n)}{n} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{b(\sqrt{n^2+n}+n)}{n} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} b \left(\sqrt{1+\frac{1}{n}} + 1 \right) \\ &= b(\sqrt{1+0}+1) = 2b \end{aligned}$$

이제 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{an+b}{\sqrt{n^2+n}-n} = 5$ 이므로

$$2b = 5, \quad b = \frac{5}{2}$$

따라서

$$a+b = 0 + \frac{5}{2} = \frac{5}{2}$$

24) 정답 ①

모든 자연수 n 에 대하여 $\left| a_n - \frac{1}{3}n \right| \leq 20$ 이므로

$$-2 \leq a_n - \frac{1}{3}n \leq 2$$

$$\frac{1}{3}n - 2 \leq a_n \leq \frac{1}{3}n + 2$$

$$\frac{1}{3} \times 2n - 2 \leq a_{2n} \leq \frac{1}{3} \times 2n + 2$$

각 변을 $2n$ ($2n > 0$)으로 나누면

$$\frac{1}{3} - \frac{1}{n} \leq \frac{a_{2n}}{2n} \leq \frac{1}{3} + \frac{1}{n}$$

이제

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{n} \right) = \frac{1}{3}, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{n} \right) = \frac{1}{3}$$

따라서 수열의 극한의 대소 관계에 의하여

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{2n}}{2n} = \frac{1}{3}$$

25) 정답 ⑤

등비수열 $\{a_n\}$ 의 첫째항을 $a(a \neq 0)$ 라 하면 공비가 2이므로 일반항

a_n 은

$$a_n = a \times 2^{n-1}$$

이제, 첫째항부터 제 n 항까지의 합 S_n 은

$$S_n = \frac{a(2^n - 1)}{2-1} = a(2^n - 1)$$

따라서

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{S_n} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a \times 2^{n-1}}{a(2^n - 1)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^{n-1}}{2^n - 1} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{2} \times 2^n}{2^n - 1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{2}}{1 - \left(\frac{1}{2} \right)^n} \\ &= \frac{\frac{1}{2}}{1-0} = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

26) 정답 ②

$r > 0$ 이므로 $0 < r < 1, r = 1, r > 1$ 의 세 경우로 나누어 수열

$$\left\{ \frac{3r^{n+1} + 1}{r^n - 2} \right\}$$
 의 극한을 조사하면 다음과 같다.

(i) $0 < r < 1$ 일 때

$$\lim_{n \rightarrow \infty} r^n = 0$$
이므로

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3r^{n+1} + 1}{r^n - 2} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3r \times r^n + 1}{r^n - 2} \\ &= \frac{0+1}{0-2} = -\frac{1}{2} \neq 5 \end{aligned}$$

(ii) $r = 1$ 일 때

$$\lim_{n \rightarrow \infty} r^n = \lim_{n \rightarrow \infty} 1^n = \lim_{n \rightarrow \infty} 1 = 1$$
이므로

$$\lim_{n \rightarrow \infty} r^{n+1} = \lim_{n \rightarrow \infty} 1^{n+1} = \lim_{n \rightarrow \infty} 1 = 1$$
이므로

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3r^{n+1} + 1}{r^n - 2} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3 \times 1^{n+1} + 1}{r^n - 2} \\ &= \frac{3+1}{1-2} = -4 \neq 5 \end{aligned}$$

(iii) $r > 1$ 일 때

$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{r} \right)^n = 0$ 이므로 $\frac{3r^{n+1} + 1}{r^n - 2}$ 의 분모, 분자를 각각 r^n 으로 나누면

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3r^{n+1} + 1}{r^n - 2} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3r \times r^n + 1}{r^n - 2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3r + \left(\frac{1}{r} \right)^n}{1 - 2 \times \left(\frac{1}{r} \right)^n} \\ &= \frac{3r+0}{1-0} = 3r \end{aligned}$$

$$3r = 5 \text{에서 } r = \frac{5}{3}$$

따라서 (i), (ii), (iii)에서 구하는 실수 r 의 값은 $\frac{5}{3}$ 이다.

27) 정답 1

주어진 급수 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$ 의 제 n 항까지의 부분합을 S_n 이라 하면

$$\begin{aligned} S_n &= \sum_{k=1}^n \frac{1}{k(k+1)} = \sum_{k=1}^n \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} \right) \\ &= \left(1 - \frac{1}{2} \right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3} \right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4} \right) + \dots \\ &\quad + \left(\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n} \right) + \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \right) \\ &= 1 - \frac{1}{n+1} \end{aligned}$$

이제 $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{n+1} \right) = 1$

따라서 수열 $\{S_n\}$ 이 수렴하므로 주어진 급수는 수렴하고 그 합은 1이다. 즉, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} = 1$

28) 정답 $\frac{1}{3}$

주어진 급수 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 의 제 n 항까지의 부분합 S_n 이

$$S_n = \frac{n+1}{3n-2} \text{ 이므로}$$

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} S_n &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+1}{3n-2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 + \frac{1}{n}}{3 - \frac{2}{n}} \\ &= \frac{1+0}{3-0} = \frac{1}{3} \end{aligned}$$

따라서 수열 $\{S_n\}$ 이 수렴하므로 주어진 급수는 수렴하고 그 합은 $\frac{1}{3}$ 이다.

즉, $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \frac{1}{3}$

29) 정답 2

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n - \frac{2n}{n+1} \right) = 3 \text{에서 급수 } \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n - \frac{2n}{n+1} \right) \text{이 수렴하므로 급수와}$$

$$\text{수열의 극한 사이의 관계에 의하여 } \lim_{n \rightarrow \infty} \left(a_n - \frac{2n}{n+1} \right) = 0$$

이때

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} a_n &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ \left(a_n - \frac{2n}{n+1} \right) + \frac{2n}{n+1} \right\} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(a_n - \frac{2n}{n+1} \right) + \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n}{n+1} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(a_n - \frac{2n}{n+1} \right) + \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2}{1 + \frac{1}{n}} \\ &= 0 + \frac{2}{1+0} = 2 \end{aligned}$$

30) 정답 2

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n - 2n}{3n-1} = 4$ 에서 급수 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n - 2n}{3n-1}$ 이 수렴하므로 급수와 수열의 극한 사이의 관계에 의하여

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n - 2n}{3n-1} = 0$$

한편

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n - 2n}{3n-1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{a_n}{n} - 2}{3 - \frac{1}{n}} = 0 \text{이고}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(3 - \frac{1}{n} \right) = 3 - 0 = 3 \text{이므로}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{a_n}{n} - 2 \right) = 0$$

따라서

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{n} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ \left(\frac{a_n}{n} - 2 \right) + 2 \right\} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{a_n}{n} - 2 \right) + \lim_{n \rightarrow \infty} 2 \\ &= 0 + 2 = 2 \end{aligned}$$

31) 정답 $\frac{1}{4}$

$\sum_{n=1}^{\infty} (a_n - 4) = 2$ 에서 급수 $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n - 4)$ 이 수렴하므로 급수와 수열의 극한 사이의 관계에 의하여

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n - 4) = 0$$

이때

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} a_n &= \lim_{n \rightarrow \infty} \{(a_n - 4) + 4\} = \lim_{n \rightarrow \infty} (a_n - 4) + \lim_{n \rightarrow \infty} 4 \\ &= 0 + 4 = 4 \end{aligned}$$

따라서

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2 + 2n}{n^2 a_n - 3n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 + \frac{2}{n}}{a_n - \frac{3}{n}} = \frac{1+0}{4-0} = \frac{1}{4}$$

32) 정답 1

두 급수 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ 이 수렴하므로 급수의 성질에 의하여

$$\sum_{n=1}^{\infty} 2a_n = 12 \text{에서 } \sum_{n=1}^{\infty} 2a_n = 2 \sum_{n=1}^{\infty} a_n = 12 \text{이므로 } \sum_{n=1}^{\infty} a_n = 6 \text{이고}$$

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} (3a_n - 2b_n) &= 16 \text{에서 } \sum_{n=1}^{\infty} (3a_n - 2b_n) = \sum_{n=1}^{\infty} 3a_n - \sum_{n=1}^{\infty} 2b_n \\ &= 3 \sum_{n=1}^{\infty} a_n - 2 \sum_{n=1}^{\infty} b_n \\ &= 3 \times 6 - 2 \sum_{n=1}^{\infty} b_n \\ &= 18 - 2 \sum_{n=1}^{\infty} b_n = 16 \end{aligned}$$

$$\therefore 2 \sum_{n=1}^{\infty} b_n = 20 \text{으로 } \sum_{n=1}^{\infty} b_n = 1$$

33) **정답** 31

두 급수 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ 이 수렴하므로 급수의 성질에 의하여

$$\sum_{n=1}^{\infty} 3a_n = 21 \text{에서}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} 3a_n = 3 \sum_{n=1}^{\infty} a_n = 21 \text{으로 } \sum_{n=1}^{\infty} a_n = 7$$

이고

$$\sum_{n=1}^{\infty} (2a_n + 5b_n) = 24 \text{에서}$$

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} (2a_n + 5b_n) &= \sum_{n=1}^{\infty} 2a_n + \sum_{n=1}^{\infty} 5b_n = 2 \sum_{n=1}^{\infty} a_n + 5 \sum_{n=1}^{\infty} b_n \\ &= 2 \times 7 + 5 \sum_{n=1}^{\infty} b_n = 14 + 5 \sum_{n=1}^{\infty} b_n = 24 \end{aligned}$$

$$\therefore 5 \sum_{n=1}^{\infty} b_n = 10, \quad \sum_{n=1}^{\infty} b_n = 2$$

따라서

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} (5a_n - 2b_n) &= \sum_{n=1}^{\infty} 5a_n - \sum_{n=1}^{\infty} 2b_n = 5 \sum_{n=1}^{\infty} a_n - 2 \sum_{n=1}^{\infty} b_n \\ &= 5 \times 7 - 2 \times 2 = 31 \end{aligned}$$

34) **정답** 9

$$\sum_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n) = 12, \quad \sum_{n=1}^{\infty} (a_n - b_n) = 60 \text{으로}$$

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} a_n &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2} \{(a_n + b_n) + (a_n - b_n)\} \\ &= \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \{(a_n + b_n) + (a_n - b_n)\} \\ &= \frac{1}{2} \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n) + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n - b_n) \right\} \\ &= \frac{1}{2} (12 + 6) = 9 \end{aligned}$$

35) **정답** 6

등비수열 $\{a_n\}$ 의 첫째항이 2이고 공비가 $\frac{1}{2}$ 이므로

$$\begin{aligned} a_n &= 2 \times \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} = \left(\frac{1}{2}\right)^{n-2} \text{이고, } a_{n+1} = \left(\frac{1}{2}\right)^{(n+1)-2} = \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} \\ \text{따라서 } a_n + a_{n+1} &= \left(\frac{1}{2}\right)^{n-2} + \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} \\ &= \left(\frac{1}{2}\right)^{n-2} + \frac{1}{2} \times \left(\frac{1}{2}\right)^{n-2} \\ &= \left(1 + \frac{1}{2}\right) \times \left(\frac{1}{2}\right)^{n-2} \\ &= \frac{3}{2} \times \left(\frac{1}{2}\right)^{n-2} \end{aligned}$$

$$\text{이므로 } \sum_{n=1}^{\infty} (a_n + a_{n+1}) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3}{2} \times \left(\frac{1}{2}\right)^{n-2} = \frac{3}{1 - \frac{1}{2}} = 6$$

36) **정답** $\frac{1}{4}$

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{n-1} + (-1)^n}{3^{n+1}} &= \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \frac{2^{n-1}}{3^{n+1}} + \frac{(-1)^n}{3^{n+1}} \right\} \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \frac{2^{n-1}}{9 \times 3^{n-1}} + \frac{(-1)^n}{3 \times 3^n} \right\} \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \frac{1}{9} \times \left(\frac{2}{3}\right)^{n-1} + \frac{1}{3} \times \left(-\frac{1}{3}\right)^n \right\} \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{9} \times \left(\frac{2}{3}\right)^{n-1} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3} \times \left(-\frac{1}{3}\right)^n \\ &= \frac{1}{9} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^{n-1} + \frac{1}{3} \sum_{n=1}^{\infty} \left(-\frac{1}{3}\right)^n \\ &= \frac{1}{9} \times \frac{1}{1 - \frac{2}{3}} + \frac{1}{3} \times \frac{-\frac{1}{3}}{1 - \left(-\frac{1}{3}\right)} \\ &= \frac{1}{9} \times 3 + \frac{1}{3} \times \left(-\frac{1}{4}\right) = \frac{1}{3} - \frac{1}{12} = \frac{1}{4} \end{aligned}$$

37) **정답** 128π

원 O_1, O_2, O_3, \dots 의 둘레의 길이를 각각 l_1, l_2, l_3, \dots 라 하자.

$$l_1 = 2 \times \pi \times 32 = 64\pi, \quad l_2 = 2 \times \pi \times 16 = 32\pi, \quad l_3 = 2 \times \pi \times 8 = 16\pi,$$

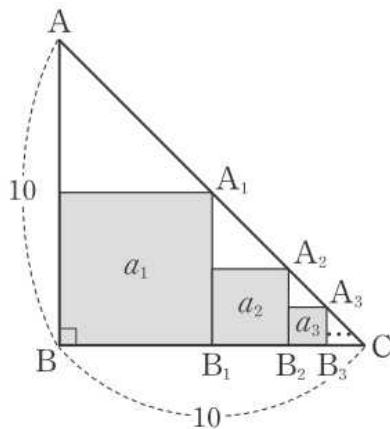
$$l_4 = 2 \times \pi \times 4 = 8\pi, \dots$$

수열 $\{l_n\}$ 은 첫째항이 64π 이고 공비가 $\frac{1}{2}$ 인 등비수열이고

$0 < \frac{1}{2} < 10$ 으로 급수 $\sum_{n=1}^{\infty} l_n$ 은 수렴한다. 따라서 그 합은

$$\sum_{n=1}^{\infty} l_n = \frac{64\pi}{1 - \frac{1}{2}} = 128\pi$$

38) 정답 $\frac{100}{3}$



$\overline{AB} = \overline{BC} = 10$ 인 직각이등변삼각형 ABC에서 선분 AC의 중점이 A_1 , 선분 BC의 중점이 B_1 이므로

$$\overline{A_1B_1} = 50 \text{이고 } a_1 = 5 \times 5 = 25$$

$\overline{A_1B_1} = \overline{B_1C} = 5$ 인 직각이등변삼각형 A_1B_1C 에서 선분 A_1C 의 중점이 A_2 , 선분 B_1C 의 중점이 B_2 이므로

$$\overline{A_2B_2} = \frac{5}{2} \text{이고 } a_2 = \frac{5}{2} \times \frac{5}{2} = \left(\frac{5}{2}\right)^2 = 25 \times \frac{1}{4}$$

$\overline{A_2B_2} = \overline{B_2C} = \frac{5}{2}$ 인 직각이등변삼각형 A_2B_2C 에서 선분 A_2C 의

중점이 A_3 , 선분 B_2C 의 중점이 B_3 이므로

$$\overline{A_3B_3} = \frac{5}{4} \text{이고 } a_3 = \frac{5}{4} \times \frac{5}{4} = \left(\frac{5}{4}\right)^2 = 25 \times \left(\frac{1}{4}\right)^2$$

$\overline{A_3B_3} = \overline{B_3C} = \frac{5}{4}$ 인 직각이등변삼각형 A_3B_3C 에서 선분 A_3C 의

중점이 A_4 , 선분 B_3C 의 중점이 B_4 이므로

$$\overline{A_4B_4} = \frac{5}{8} \text{이고 } a_4 = \frac{5}{8} \times \frac{5}{8} = \left(\frac{5}{8}\right)^2 = 25 \times \left(\frac{1}{4}\right)^3$$

⋮

수열 $\{a_n\}$ 은 첫째항이 25이고 공비가 $\frac{1}{4}$ 인 등비수열이고

$0 < \frac{1}{4} < 1$ 이므로 급수 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 은 수렴한다. 따라서 그 합은

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \frac{25}{1 - \frac{1}{4}} = \frac{100}{3}$$

39) 정답 ③

등차수열 $\{a_n\}$ 의 첫째항이 10이고 공차가 20이므로

$$a_n = 1 + 2(n-1) = 2n-1$$

이고

$$a_{n+1} = 2(n+1)-1 = 2n+1$$

주어진 급수 $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{a_n} - \frac{1}{a_{n+1}} \right) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n+1} \right)$ 의

제 n 항까지의 부분합을 S_n 이라 하면

$$\begin{aligned} S_n &= \sum_{n=1}^n \left(\frac{1}{2k-1} - \frac{1}{2k+1} \right) \\ &= \left(1 - \frac{1}{3} \right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{5} \right) + \left(\frac{1}{5} - \frac{1}{7} \right) + \cdots + \left(\frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n+1} \right) \\ &= 1 - \frac{1}{2n+1} \end{aligned}$$

이고

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{2n+1} \right) = 1$$

따라서 수열 $\{S_n\}$ 이 수렴하므로 주어진 급수는 수렴하고 그 합은 1이다.

$$\text{즉, } \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{a_n} - \frac{1}{a_{n+1}} \right) = 1$$

40) 정답 ①

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n - \frac{n^2-n+1}{2n^2+1} \right) = 5 \text{에서 급수 } \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n - \frac{n^2-n+1}{2n^2+1} \right) \text{이}$$

수렴하므로 급수와 수열의 극한 사이의 관계에 의하여

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(a_n - \frac{n^2-n+1}{2n^2+1} \right) = 0$$

이때

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} a_n &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ a_n - \frac{n^2-n+1}{2n^2+1} + \frac{n^2-n+1}{2n^2+1} \right\} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(a_n - \frac{n^2-n+1}{2n^2+1} \right) + \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2-n+1}{2n^2+1} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(a_n - \frac{n^2-n+1}{2n^2+1} \right) + \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 - \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2}}{2 + \frac{1}{n^2}} \\ &= 0 + \frac{1 - 0 + 0}{2 + 0} = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

따라서

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} (2a_n + 3) &= \lim_{n \rightarrow \infty} 2a_n + \lim_{n \rightarrow \infty} 3 = 2\lim_{n \rightarrow \infty} a_n + \lim_{n \rightarrow \infty} 3 \\ &= 2 \times \frac{1}{2} + 3 = 4 \end{aligned}$$

41) 정답 ⑤

두 급수 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ 이 수렴하므로

$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = S$, $\sum_{n=1}^{\infty} b_n = T$ (S , T 는 실수)라 하면 급수의 성질에 의하여

$$\sum_{n=1}^{\infty} (2a_n + 3b_n) = 23 \text{에서}$$

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} (2a_n + 3b_n) &= \sum_{n=1}^{\infty} 2a_n + \sum_{n=1}^{\infty} 3b_n \\ &= 2 \sum_{n=1}^{\infty} a_n + 3 \sum_{n=1}^{\infty} b_n \\ &= 2S + 3T = 23 \quad \dots \dots \quad \textcircled{1} \end{aligned}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} (3a_n - 2b_n) = 2 \text{에서}$$

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} (3a_n - 2b_n) &= \sum_{n=1}^{\infty} 3a_n - \sum_{n=1}^{\infty} 2b_n \\ &= 3 \sum_{n=1}^{\infty} a_n - 2 \sum_{n=1}^{\infty} b_n \\ &= 3S - 2T = 2 \quad \dots \quad \textcircled{D} \end{aligned}$$

⑤, ⑥에서 $S = 4, T = 5$ 이므로

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = 4, \quad \sum_{n=1}^{\infty} b_n = 5$$

따라서

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2}a_n + \frac{1}{5}b_n \right) &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2}a_n + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{5}b_n \\ &= \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} a_n + \frac{1}{5} \sum_{n=1}^{\infty} b_n \\ &= \frac{1}{2} \times 4 + \frac{1}{5} \times 5 = 3 \end{aligned}$$

42) **정답** ②

등비수열 $\{a_n\}$ 의 첫째항이 3이고 공비가 $\frac{1}{5}$ 이므로

$$a_n = 3 \times \left(\frac{1}{5}\right)^{n-1}$$

이고

$$\begin{aligned} a_{2n} &= 3 \times \left(\frac{1}{5}\right)^{2n-1} \\ a_{2n+1} &= 3 \times \left(\frac{1}{5}\right)^{(2n+1)-1} = 3 \times \left(\frac{1}{5}\right)^{2n} \end{aligned}$$

따라서

$$\begin{aligned} \frac{a_n a_{2n}}{a_{2n+1}} &= \frac{3 \times \left(\frac{1}{5}\right)^{n-1} \times 3 \times \left(\frac{1}{5}\right)^{2n-1}}{3 \times \left(\frac{1}{5}\right)^{2n}} = 3 \times \left(\frac{1}{5}\right)^{n-2} \\ &= 15 \times \left(\frac{1}{5}\right)^{n-1} \end{aligned}$$

이므로

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n a_{2n}}{a_{2n+1}} = \sum_{n=1}^{\infty} 15 \times \left(\frac{1}{5}\right)^{n-1} = \frac{15}{1 - \frac{1}{5}} = \frac{15}{\frac{4}{5}} = \frac{75}{4}$$

43) **정답** ③

정삼각형 $B_n C_n D_n$ 의 한 변의 길이를 l_n , 넓이를 a_n 이라 하자.

정삼각형 $B_1 C_1 D_1$ 의 한 변의 길이가 10이므로

$$a_1 = \frac{\sqrt{3}}{4} \times 1^2 = \frac{\sqrt{3}}{4}$$

이웃한 두 정삼각형 $B_n C_n D_n$ 과 $B_{n+1} C_{n+1} D_{n+1}$ 의 닮음비는

$$l_n : l_{n+1} = 1 : \frac{1}{2}$$

이므로 이웃한 두 정삼각형의 넓이의 비는

$$a_n : a_{n+1} = 1^2 : \left(\frac{1}{2}\right)^2 = 1 : \frac{1}{4}$$

이때 수열 $\{a_n\}$ 은 첫째항이 $\frac{\sqrt{3}}{4}$, 공비가 $\frac{1}{4}$ 인 등비수열이고

$0 < \frac{1}{4} < 1$ 이므로 급수 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 은 수렴한다. 따라서 그 합은

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \frac{\frac{\sqrt{3}}{4}}{1 - \frac{1}{4}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

44) **정답** ②

수열 $\{a_n\}$ 이 수렴하므로 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \alpha$ (단, α 는 상수)로 놓으면 수열의 극한에 대한 기본 성질에 의하여

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3a_n + 2}{1 + 2a_n} = \frac{8}{5} \text{에서}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3a_n + 2}{1 + 2a_n} = \frac{3\alpha + 2}{1 + 2\alpha} = \frac{8}{5}$$

$$5(3\alpha + 2) = 8(1 + 2\alpha)$$

$$15\alpha + 10 = 8 + 16\alpha$$

$$\alpha = 2$$

$$\text{즉, } \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 2$$

따라서

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{2}a_n + 3 \right) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2}a_n + \lim_{n \rightarrow \infty} 3 \\ &= \frac{1}{2} \lim_{n \rightarrow \infty} a_n + \lim_{n \rightarrow \infty} 3 \\ &= \frac{1}{2} \times 2 + 3 = 4 \end{aligned}$$

45) **정답** ④

$S_n = n(n+3)$ 에서

$$\begin{aligned} a_n &= S_n - S_{n-1} = n(n+3) - (n-1)(n+2) \\ &= 2(n+1) \quad (n \geq 2) \end{aligned}$$

또한 $S_1 = a_1 = 4$ 이므로

$$a_n = 2(n+1) \quad (n \geq 1)$$

따라서

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4S_n + na_n}{3n^2 + n - 1} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4n(n+3) + n \times 2(n+1)}{3n^2 + n - 1} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{6n^2 + 15n}{3n^2 + n - 1} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{6 + \frac{14}{n}}{3 + \frac{1}{n} - \frac{1}{n^2}} \\ &= \frac{6 + 0}{3 + 0 - 0} = 2 \end{aligned}$$

46) 정답) ②

두 수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ 에 대하여

$$a_n + b_n = \frac{n}{n+1} \text{에서}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n + b_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{n+1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{1 + \frac{1}{n}} = \frac{1}{1+0} = 1$$

$$a_n b_n = \frac{n^2}{3n^2 + 2n + 1} \text{에서}$$

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} a_n b_n &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2}{3n^2 + 2n + 1} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{3 + \frac{2}{n} + \frac{1}{n^2}} \\ &= \frac{1}{3+0+0} = \frac{1}{3} \end{aligned}$$

따라서

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} (a_n - b_n)^2 &= \lim_{n \rightarrow \infty} \{(a_n + b_n)^2 - 4a_n b_n\} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} (a_n + b_n)^2 - \lim_{n \rightarrow \infty} 4a_n b_n \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} (a_n + b_n)^2 \times \lim_{n \rightarrow \infty} (a_n + b_n) - 4 \lim_{n \rightarrow \infty} a_n b_n \\ &= 1 \times 1 - 4 \times \frac{1}{3} = -\frac{1}{3} \end{aligned}$$

47) 정답) ⑤

모든 자연수 n 에 대하여

$$n(n+1) < a_n - n^2 < (n+2)(n+3) \text{에서}$$

$$n^2 + n < a_n - n^2 < n^2 + 5n + 6$$

$$2n^2 + n < a_n < 2n^2 + 5n + 6$$

각 변을 $2n^2$ ($2n^2 > 0$)으로 나누면

$$\frac{2n^2 + n}{2n^2} < \frac{a_n}{2n^2} < \frac{2n^2 + 5n + 6}{2n^2}$$

이므로

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n^2 + n}{2n^2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2 + \frac{1}{n}}{2} = \frac{2+0}{2} = 1$$

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n^2 + 5n + 6}{2n^2} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2 + \frac{5}{n} + \frac{6}{n^2}}{2} \\ &= \frac{2+0+0}{2} = 1 \end{aligned}$$

따라서 수열의 극한의 대소 관계에 의하여

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{2n^2} = 1$$

48) 정답) ③

자연수 n 에 대하여 x 에 대한 다항식 $x^n + 2x$ 를 $f(x)$ 로 놓으면

$$f(x) = x^n + 2x$$

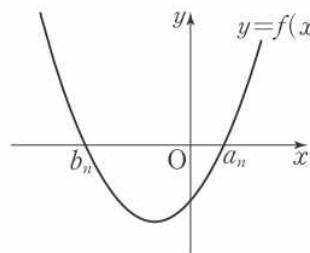
이고, 다항식 $f(x)$ 를 일차식 $3x - 1$ 로 나눈 나머지가 a_n 이므로 나머지정리에 의하여

$$a_n = f\left(\frac{1}{3}\right) = \left(\frac{1}{3}\right)^n + 2 \times \frac{1}{3} = \left(\frac{1}{3}\right)^n + \frac{2}{3}$$

따라서

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{9a_n + 1}{3a_n} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{9 \times \left\{ \left(\frac{1}{3}\right)^n + \frac{2}{3} \right\} + 1}{3 \times \left\{ \left(\frac{1}{3}\right)^n + \frac{2}{3} \right\}} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{9 \times \left(\frac{1}{3}\right)^n + 7}{3 \times \left(\frac{1}{3}\right)^n + 2} \\ &= \frac{0+7}{0+2} = \frac{7}{2} \end{aligned}$$

49) 정답) ②

함수 $f(x) = x^2 + x - (4n^2 - 1)$ 에 대하여 $y = f(x)$ 의 그래프와 x 축이 만나는 두 점의 x 좌표 a_n , b_n ($a_n > b_n$)은 방정식 $x^2 + x - (4n^2 - 1) = 0$ 의 서로 다른 두 근이므로 근과 계수의 관계에 의하여

$$a_n + b_n = -\frac{1}{1} = -1$$

$$a_n b_n = -\frac{4n^2 - 1}{1} = 1 - 4n^2$$

이므로

$$\frac{a_n + b_n}{a_n b_n} = \frac{-1}{1 - 4n^2} = \frac{1}{4n^2 - 1} = \frac{1}{(2n-1)(2n+1)}$$

따라서 주어진 급수 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n + b_n}{a_n b_n}$ 의 제 n 행까지의 부분합을 S_n 이라

하면

$$\begin{aligned} S_n &= \sum_{k=1}^n \frac{1}{(2k-1)(2k+1)} \\ &= \sum_{k=1}^n \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2k-1} - \frac{1}{2k+1} \right) \\ &= \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n \left(\frac{1}{2k-1} - \frac{1}{2k+1} \right) \\ &= \frac{1}{2} \left\{ \left(1 - \frac{1}{3} \right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{5} \right) + \left(\frac{1}{5} - \frac{1}{7} \right) + \dots \right\} \end{aligned}$$

$$\cdots + \left(\frac{1}{2n-3} - \frac{1}{2n-1} \right) + \left(\frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n+1} \right) \right\}$$

$$= \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{2n+1} \right)$$

이고

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{2n+1} \right)$$

$$= \frac{1}{2} \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{2n+1} \right) = \frac{1}{2}$$

따라서 수열 $\{S_n\}$ 이 수렴하므로 주어진 급수는 수렴하고 그 합은 $\frac{1}{2}$ 이다.

즉, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n + b_n}{a_n b_n} = \frac{1}{2}$

50) **정답** ④

급수 $\sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n - \frac{4n^2 - 3n + 1}{2n^2 - 5} \right)$ 이 수렴하므로 급수와 수열의 극한 사이의 관계에 의하여

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(a_n - \frac{4n^2 - 3n + 1}{2n^2 - 5} \right) = 0$$

이때

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} a_n &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ \left(a_n - \frac{4n^2 - 3n + 1}{2n^2 - 5} \right) + \frac{4n^2 - 3n + 1}{2n^2 - 5} \right\} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(a_n - \frac{4n^2 - 3n + 1}{2n^2 - 5} \right) + \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4n^2 - 3n + 1}{2n^2 - 5} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(a_n - \frac{4n^2 - 3n + 1}{2n^2 - 5} \right) + \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4 - \frac{3}{n} + \frac{1}{n^2}}{2 - \frac{5}{n^2}} \\ &= 0 + \frac{4 - 0 + 0}{2 - 0} = 2 \end{aligned}$$

따라서

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(a_n + 3)n^2 - n}{2n^2 + 3} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(a_n + 3) - \frac{1}{n}}{2 + \frac{3}{n^2}} \\ &= \frac{2+3-0}{2+0} = \frac{5}{2} \end{aligned}$$

51) **정답** ⑤

$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = 6$ 이므로 등비수열 $\{a_n\}$ 의 공비를 r ($-1 < r < 1$)라 하면

$a_1 = 20$ 이고

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} a_n &= \frac{a_1}{1-r} = \frac{2}{1-r} = 6 \\ 6(1-r) &= 2, \quad r = \frac{2}{3} \end{aligned}$$

이므로 수열 $\{a_{2n}\}$ 은 첫째항이 a_2 이고 공비가 r^2 인 등비수열이다. 즉,

$$\begin{aligned} a_2 &= a_1 \times r = 2 \times \frac{2}{3} = \frac{4}{3} \\ r^2 &= \left(\frac{2}{3} \right)^2 = \frac{4}{9} \end{aligned}$$

이고 $-1 < r^2 < 1$ 이므로 급수 $\sum_{n=1}^{\infty} a_{2n}$ 은 수렴한다.

따라서 그 합은

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_{2n} = \frac{\frac{4}{3}}{1 - \frac{4}{9}} = \frac{12}{5}$$

52) **정답** ②

두 급수 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ 이 모두 수렴하므로

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \alpha, \quad \sum_{n=1}^{\infty} b_n = \beta \quad (\alpha, \beta \text{는 상수}) \text{로 놓으면}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} (a_n + 3b_n) = 20 \text{에서}$$

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} (a_n + 3b_n) &= \sum_{n=1}^{\infty} a_n + \sum_{n=1}^{\infty} 3b_n \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} a_n + 3 \sum_{n=1}^{\infty} b_n \\ &= \alpha + 3\beta = 20 \quad \dots\dots \textcircled{T} \end{aligned}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} (9a_n - 6b_n) = 4 \text{에서}$$

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} (9a_n - 6b_n) &= \sum_{n=1}^{\infty} 9a_n - \sum_{n=1}^{\infty} 6b_n \\ &= 9 \sum_{n=1}^{\infty} a_n - 6 \sum_{n=1}^{\infty} b_n \\ &= 9\alpha - 6\beta = 4 \quad \dots\dots \textcircled{L} \end{aligned}$$

$$\textcircled{T}, \textcircled{L} \text{에서 } \alpha = 4, \beta = \frac{16}{3}$$

두 등비수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ 의 첫째항이 각각 2, 4이므로 두 등비수열의 공비를 각각 r_1 , r_2 라 하면

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \alpha \text{에서 } \sum_{n=1}^{\infty} a_n = \frac{2}{1-r_1} = 40 \text{이므로}$$

$$4(1-r_1) = 2, \quad r_1 = \frac{1}{2}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n = \beta \text{에서 } \sum_{n=1}^{\infty} b_n = \frac{4}{1-r_2} = \frac{16}{3} \text{이므로}$$

$$1(1-r_2) = 12, \quad r_2 = \frac{1}{4}$$

따라서

$$a_n = 2 \times \left(\frac{1}{2} \right)^{n-1} = \left(\frac{1}{2} \right)^{n-2}$$

$$b_n = 4 \times \left(\frac{1}{4} \right)^{n-1} = \left(\frac{1}{4} \right)^{n-2}$$

이고

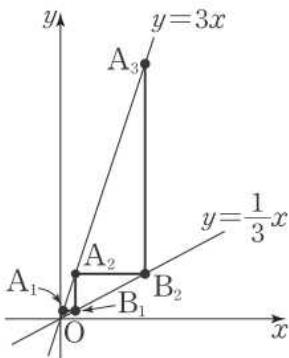
$$a_1 b_1 = \left(\frac{1}{2}\right)^{-1} \times \left(\frac{1}{4}\right)^{-1} = 2 \times 4 = 8$$

$$\begin{aligned} a_n b_n &= \left(\frac{1}{2}\right)^{n-2} \times \left(\frac{1}{4}\right)^{n-2} = \left(\frac{1}{2} \times \frac{1}{4}\right)^{n-2} \\ &= \left(\frac{1}{8}\right)^{n-2} = 8 \times \left(\frac{1}{8}\right)^{n-1} \end{aligned}$$

따라서

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n = \frac{8}{1 - \frac{1}{8}} = \frac{64}{7}$$

53) 정답) ①



$A_1(1, 3), B_1(9, 3)$ 이므로

$$\overline{A_1 B_1} = \sqrt{(9-1)^2 + (3-3)^2} = 8$$

직선 $y = 3x$ 의 기울기가 3이므로

$$\frac{\overline{B_1 A_2}}{\overline{A_1 B_1}} = \frac{\overline{B_2 A_3}}{\overline{A_2 B_2}} = \frac{\overline{B_3 A_4}}{\overline{A_3 B_3}} = \dots = \frac{\overline{B_n A_{n+1}}}{\overline{A_n B_n}} = 3 \quad \text{..... ①}$$

직선 $y = \frac{1}{3}x$ 의 기울기가 $\frac{1}{3}$ 이므로

$$\frac{\overline{B_1 A_2}}{\overline{A_2 B_2}} = \frac{\overline{B_2 A_3}}{\overline{A_3 B_3}} = \frac{\overline{B_3 A_4}}{\overline{A_4 B_4}} = \dots = \frac{\overline{B_n A_{n+1}}}{\overline{A_{n+1} B_{n+1}}} = \frac{1}{3} \quad \text{..... ②}$$

①, ②에서

$$\begin{aligned} \frac{\overline{B_1 A_2}}{\overline{A_1 B_1}} &= \frac{\overline{B_2 A_3}}{\overline{A_2 B_2}} = \frac{\overline{B_3 A_4}}{\overline{A_3 B_3}} = \dots = \frac{\overline{B_n A_{n+1}}}{\overline{A_n B_n}} = \frac{3}{1} = 9 \\ \frac{\overline{B_1 A_2}}{\overline{A_2 B_2}} &= \frac{\overline{B_2 A_3}}{\overline{A_3 B_3}} = \frac{\overline{B_3 A_4}}{\overline{A_4 B_4}} = \dots = \frac{\overline{B_n A_{n+1}}}{\overline{A_{n+1} B_{n+1}}} = \frac{1}{3} \end{aligned}$$

즉, $\overline{A_{n+1} B_{n+1}} = 9 \times \overline{A_n B_n}$ 이므로

$$\begin{aligned} \overline{A_n B_n} &= 9 \times \overline{A_{n-1} B_{n-1}} = 9^2 \times \overline{A_{n-2} B_{n-2}} = 9^3 \times \overline{A_{n-3} B_{n-3}} \\ &= \dots = 9^{n-1} \times \overline{A_1 B_1} = 9^{n-1} \times 8 \end{aligned}$$

따라서

$$\begin{aligned} 64 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\overline{A_n B_n}} &= 64 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{8 \times 9^{n-1}} = 64 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{8} \times \left(\frac{1}{9}\right)^{n-1} \\ &= 8 \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{9}\right)^{n-1} = 8 \times \frac{1}{1 - \frac{1}{9}} = 9 \end{aligned}$$

54) 정답) $\frac{8}{3}$

$$a_k = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\left(\frac{2}{k}\right)^n}{\left(\frac{2}{k}\right)^{n-1} + 2} \text{에서}$$

(i) $0 < \frac{2}{k} < 1$ 일 때,

자연수 k 에 대하여 $0 < \frac{2}{k} < 1$ 이므로 $k > 20$ 이고

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{2}{k}\right)^n = 0, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{2}{k}\right)^{n-1} = 0$$

이므로

$$a_k = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\left(\frac{2}{k}\right)^n}{\left(\frac{2}{k}\right)^{n-1} + 2} = \frac{0}{0+2} = 0$$

따라서 $k > 2$ 일 때 즉, $k = 3, 4, 5$ 일 때

$$ka_k = k \times 0 = 0$$

(ii) $\frac{2}{k} = 1$ 일 때,

자연수 k 에 대하여 $\frac{2}{k} = 1$ 이므로 $k = 20$ 이고

$$a_k = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\left(\frac{2}{k}\right)^n}{\left(\frac{2}{k}\right)^{n-1} + 2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1^n}{1^{n-1} + 2} \frac{1}{1+2} = \frac{1}{3}$$

따라서 $k = 2$ 일 때

$$ka_k = 2 \times a_2 = 2 \times \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$$

(iii) $\frac{2}{k} > 1$ 일 때

자연수 k 에 대하여 $\frac{2}{k} > 1$ 이므로 $k < 20$ 이고

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{2}{k}\right)^n = \infty$$

이므로

$$a_k = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\left(\frac{2}{k}\right)^n}{\left(\frac{2}{k}\right)^{n-1} + 2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{2}{k}}{1 + \frac{2}{\left(\frac{2}{k}\right)^{n-1}}} \frac{2}{1+0} = \frac{2}{k}$$

따라서 $k < 2$ 일 때 즉, $k = 1$ 일 때

$$ka_k = 1 \times a_1 = 1 \times \frac{2}{1} = 2$$

(i), (ii), (iii)에서

$$\sum_{k=1}^5 ka_k = 1 \times a_1 + 2 \times a_2 + \sum_{k=3}^5 ka_k = 2 + \frac{2}{3} + 0 = \frac{8}{3}$$

55) 정답) $\frac{1}{3}$

$$\begin{aligned} & \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{S_n} - \frac{1}{S_{n+1}} \right) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \left(\frac{1}{S_k} - \frac{1}{S_{k+1}} \right) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ \left(\frac{1}{S_1} - \frac{1}{S_2} \right) + \left(\frac{1}{S_2} - \frac{1}{S_3} \right) + \left(\frac{1}{S_3} - \frac{1}{S_4} \right) + \cdots + \left(\frac{1}{S_n} - \frac{1}{S_{n+1}} \right) \right\} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{S_1} - \frac{1}{S_{n+1}} \right) \end{aligned}$$

이고, 등비수열 $\{a_n\}$ 의 첫째항부터 제 n 항까지의 합이 S_n 이므로

$S_1 = a_1 = 6$

$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{S_1} = \frac{1}{6}$

또,

$\lim_{n \rightarrow \infty} S_{n+1} = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \frac{6}{1-r}$

$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{S_{n+1}} = \frac{1}{6}$

이므로

$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{S_n} - \frac{1}{S_{n+1}} \right) = \frac{1}{18}$ 에서

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{S_n} - \frac{1}{S_{n+1}} \right) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{S_1} - \frac{1}{S_{n+1}} \right) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{S_1} - \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{S_{n+1}} \\ &= \frac{1}{6} - \frac{1-r}{6} = \frac{r}{6} = \frac{1}{18} \end{aligned}$$

따라서 $r = \frac{1}{3}$

56) 정답) 80

$S_1 = 10 \times 6 = 60$

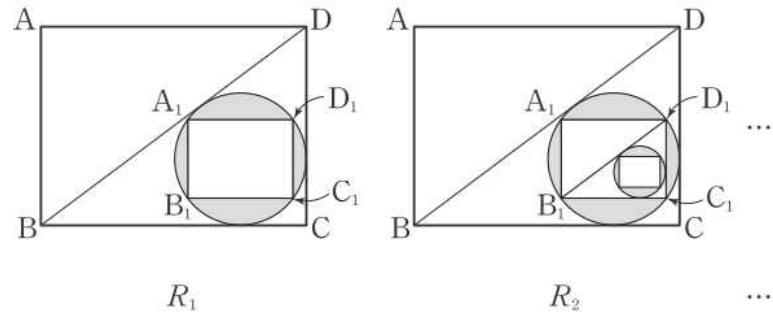
그림에서 직사각형 A_n 과 A_{n+1} 의 넓은비는 2:1이므로 넓이의 비는

4:1, 즉 $1:\frac{1}{4}$ 이다.

따라서 수열 $\{S_n\}$ 은 첫째항이 60이고, 공비가 $\frac{1}{4}$ 인 등비수열이므로

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} S_n &= 60 \left\{ 1 + \frac{1}{4} + \left(\frac{1}{4} \right)^2 + \cdots \right\} \\ &= \frac{60}{1 - \frac{1}{4}} = 80 \end{aligned}$$

57) 정답) ③

직사각형 ABCD에서 $\overline{AB} = 3$, $\overline{AD} = 4$ 이므로

$\overline{BD} = \sqrt{4^2 + 3^2} = 5$

이고 삼각형 BCD에 내접하는 원의 반지름의 길이를 r 라 하면

$\frac{1}{2} \times \overline{BC} \times \overline{CD} = \frac{1}{2} \times r \times (3+4+5)$

$\frac{1}{2} \times 4 \times 3 = \frac{1}{2} \times r \times 12, r = 1$

또한 반지름의 길이가 1인 원에 내접하고 직사각형 ABCD와 닮은 직사각형 $A_1B_1C_1D_1$ 의 대각선의 길이는 $2r$, 즉 2이므로 닮음비는

5:20이고 넓이의 비는 25:4, 즉 $1:\frac{4}{25}$ 이다.

따라서 그림 R_1 에 색칠되어 있는 부분의 넓이를 S_1 이라 하면,

$S_1 = 1 \times 1 \times \pi - 3 \times 4 \times \frac{4}{25} = \pi - \frac{48}{25}$ 이므로

$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \frac{\pi - \frac{48}{25}}{1 - \frac{4}{25}} = \frac{25\pi - 48}{21}$