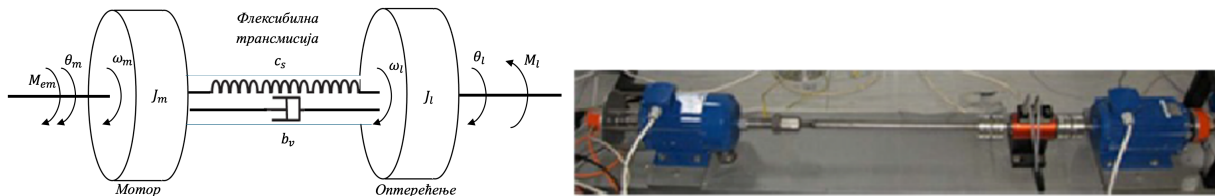


# КОРИШЋЕЊЕ СОФТВЕРСКИХ АЛАТА ЗА АНАЛИЗУ, СИНТЕЗУ И СИМУЛАЦИЈУ ДИНАМИЧКИХ СИСТЕМА

## Рачунска лабораторијска вежба ЕМП\_Т1

Управљачка променљива је момент  $M_{em}$ , а означена угаона померања излази динамичког система:



Параметри			
$J_m=0.000620;$	%	$[kg \cdot m^2]$	
$J_l=0.000220;$	%	$[kg \cdot m^2]$	
$J=J_m+J_l;$			
		$c_s=350;$	% $[Nm/rad]$
		$b_v=0.004;$	% $[Nms/rad]$
		$Mem_{MAX}=24;$	% $[Nm]$

Периода одабирања је  $T_s=0.0005$  секунди, или  $0.5$  ms. Тј. фреквенција одабирања је  $F_s=2000$  Hz.

Момент од стране оптерећења је  $M_l$ - поремећај (сигнал поремећаја).

Спрега мотор – оптерећење је флексибилна (што је ближе реалности од апроксимације да су мотор и оптерећење спојени идеално, крутим вратилом и преносним механизмом).

**Задатак 1.** Одредити модел система (момент  $M_{em}$  је улазна променљива, и угаона померања са слике су излазне променљиве), и то следеће форме модела

- Математички модел у форми диференцијалних једначина
- Математички модел у форми функција преноса.  $(\frac{\theta_l(s)}{M_{em}(s)}=?; \frac{\theta_m(s)}{M_{em}(s)}=?; )$
- Математички модел у форми простора стања
- Симулациони блок дијаграм система. Направити СИМУЛИНК модел (и можете урадити више одзива на хармонијску (синусну) промену улазне променљиве (момента), као што је то показано на следећим снимцима

<https://youtu.be/MUNGjY0jfMw>

Illustration of sinusoidal transient and steady-state in time-response of LTI systems

<https://youtu.be/9IbinJGYfVs>

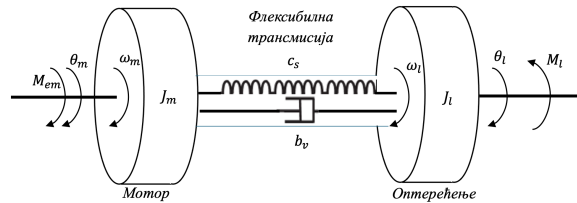
Frequency response and frequency response function - Physical and grapho-analytical interpretation

Напомена: Претходна два кратка видео садржаја су важна ради схватања Бодевих дијаграма, тако да их треба пажљиво погледати (тим пре, јер је следећи захтев да се нацртају Бодеови дијаграми, као непараметарски модели датог система)

- Бодеои дијаграми (написати програм који ће на основу претходно направљеног СИМУЛИНК модела нацртати **Бодеои дијаграме**. Исти програм треба да на основу СИМУЛИНК модела **израчунава** и модел у форми матрице **функција преноса** и **модел простору стања** (имати у виду да модел у простору стања није јединствен јер је могућ различити избор и означавање координата стања) )

Који су од претходних модела параметарски модели а који су непараметарски модели ?  
Можемо прокоментарисати предности и мане горе поменутих типова модела динамичких система ?

РЕШЕЊЕ:



- Математички модел у форми диференцијалних једначина

$$J_m \ddot{\theta}_m = -c_s(\theta_m - \theta_l) - b_v(\dot{\theta}_m - \dot{\theta}_l) + M_{em}$$

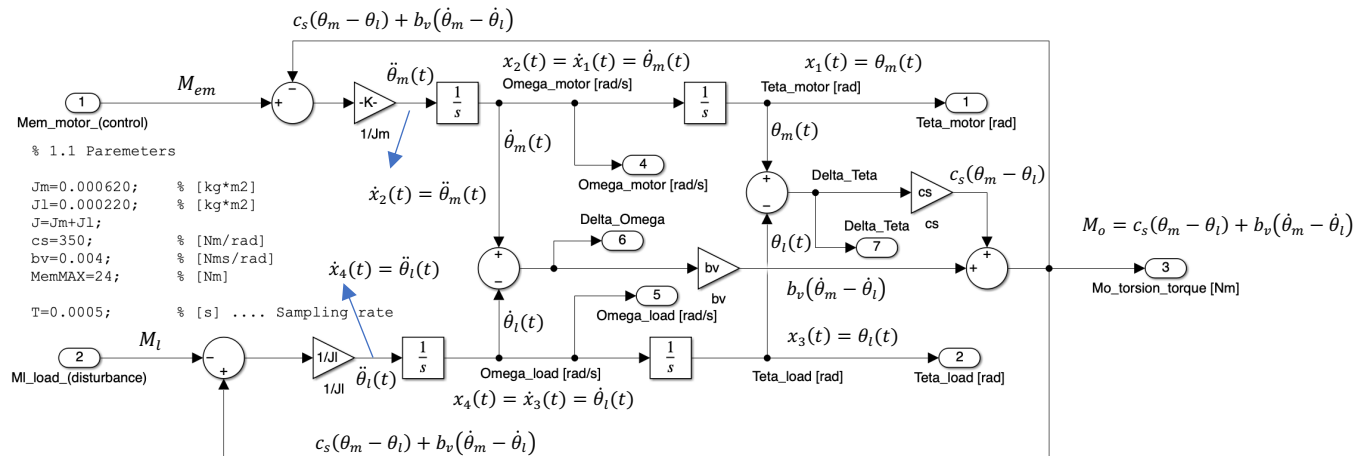
$$J_l \ddot{\theta}_l = c_s(\theta_m - \theta_l) + b_v(\dot{\theta}_m - \dot{\theta}_l) - M_l$$

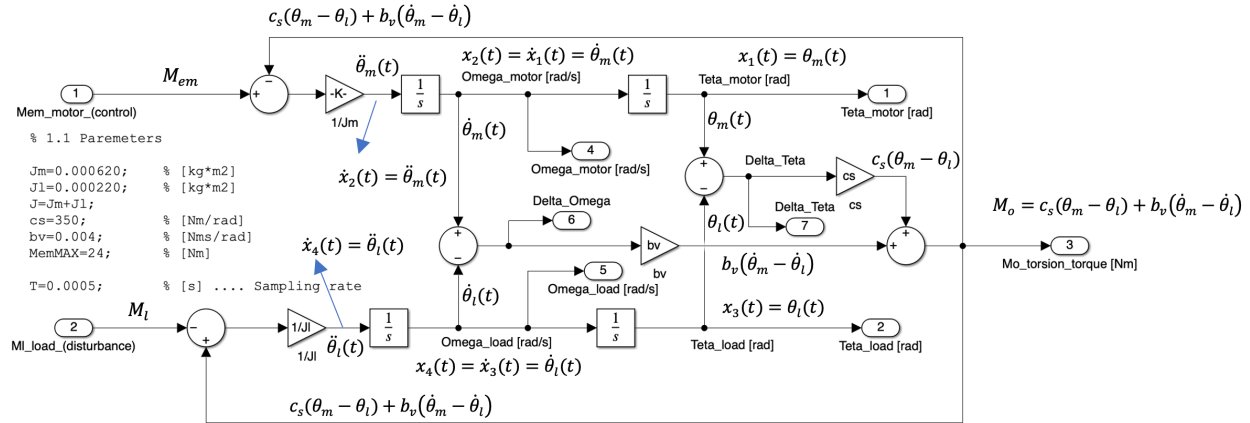
Да ли знате да изведете или да образложите овај математички модел ?

$$\ddot{\theta}_m = \frac{1}{J_m} [-c_s(\theta_m - \theta_l) - b_v(\dot{\theta}_m - \dot{\theta}_l) + M_{em}]$$

$$\ddot{\theta}_l = \frac{1}{J_l} [c_s(\theta_m - \theta_l) + b_v(\dot{\theta}_m - \dot{\theta}_l) - M_l]$$

На основу последњих диференцијалних једначина – расписујемо симулациони блок дијаграм и правимо СИМУЛИНК МОДЕЛ.





Пратимо слику горе, и расписујемо модел у простору стања, који се састоји из једначине стања и једначине излаза (излаз модела су управо стања  $x_1$  и  $x_2$  у конкретном случају ...)

$$\begin{Bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \\ \dot{x}_4 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\frac{c_s}{J_m} & -\frac{b_v}{J_m} & \frac{c_s}{J_m} & \frac{b_v}{J_m} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ \frac{c_s}{J_l} & \frac{b_v}{J_l} & -\frac{c_s}{J_l} & -\frac{b_v}{J_l} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{J_m} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} M_{em} \\ M_l \end{Bmatrix}$$

$$y = \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_3 \end{Bmatrix} = [1 \ 0 \ 1 \ 0] \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{Bmatrix}$$

Заправо, форму модела

$$\ddot{\theta}_m = \frac{1}{J_m} [-c_s(\theta_m - \theta_l) - b_v(\dot{\theta}_m - \dot{\theta}_l) + M_{em}]$$

$$\ddot{\theta}_l = \frac{1}{J_l} [c_s(\theta_m - \theta_l) + b_v(\dot{\theta}_m - \dot{\theta}_l) - M_l]$$

трансформишемо у форму у простору стања

$$\dot{x}_1 = x_2$$

$$\dot{x}_2 = \frac{1}{J_m} [-c_s(x_1 - x_3) - b_v(x_2 - x_4) + M_{em}]$$

$$\dot{x}_3 = x_4$$

$$\dot{x}_4 = \frac{1}{J_l} [c_s(x_1 - x_3) + b_v(x_2 - x_4) - M_l]$$

Ако се за модел

$$\begin{aligned} J_m \ddot{\theta}_m &= -c_s(\theta_m - \theta_l) - b_v(\dot{\theta}_m - \dot{\theta}_l) + M_{em} \\ J_l \ddot{\theta}_l &= c_s(\theta_m - \theta_l) + b_v(\dot{\theta}_m - \dot{\theta}_l) - M_l \end{aligned}$$

примени Лапласова трансформација, али тако да се занемаре сви почетни услови, добио би се резултат

$$\begin{aligned} J_m \theta_m(s)s^2 + b_v \theta_m(s)s + c_s \theta_m(s) &= M_{em} + b_v \theta_l(s)s + c_s \theta_l(s) \\ J_l \theta_l(s)s^2 + b_v \theta_l(s)s + c_s \theta_l(s) &= b_v \theta_m(s)s + c_s \theta_m(s) - M_l \end{aligned}$$

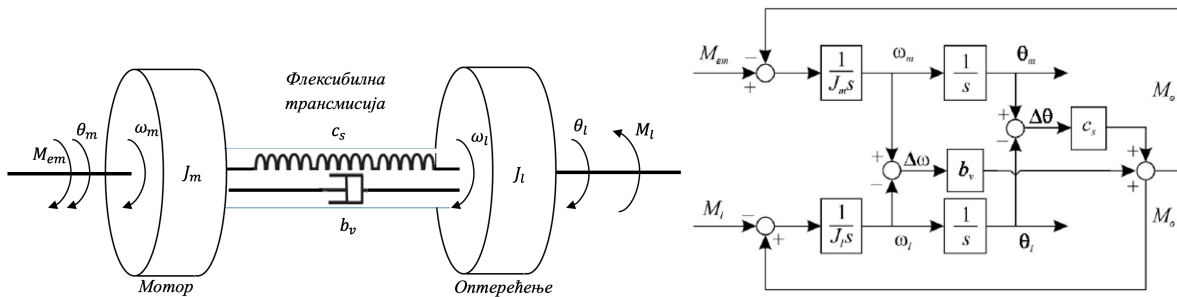
Одавде, сада можемо израчунати функције преноса (улаз  $M_l$  разматрамо као премећај, па ћемо га привремено занемарити)

$$G_l(s) = \frac{\theta_m(s)}{M_{em}(s)}; \quad G_m(s) = \frac{\theta_l(s)}{M_{em}(s)};$$

Односно, матрицу функција преноса  $G(s)$

$$\begin{Bmatrix} \theta_l(s) \\ \theta_m(s) \end{Bmatrix} = G(s) M_{em}(s) = \begin{bmatrix} G_l(s) \\ G_m(s) \end{bmatrix} M_{em}(s)$$

Дакле, за флексибилно спрегнут систем мотор – оптерећење



израчунавамо следеће функције преноса

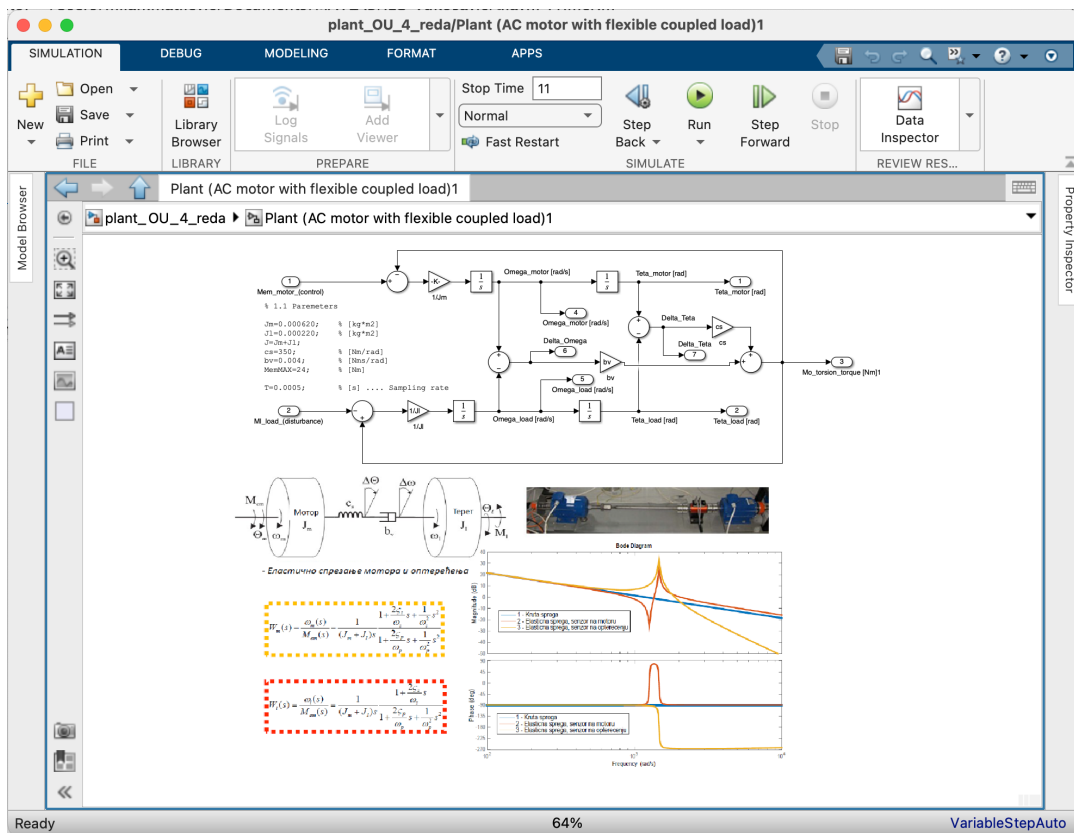
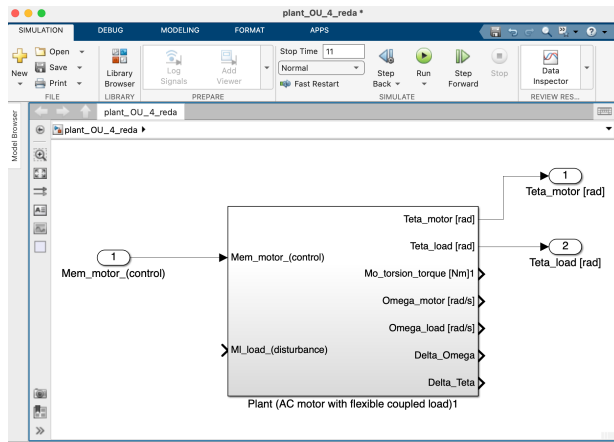
$$\begin{aligned} G_m(s) = \frac{\theta_m(s)}{M_{em}(s)} &= \frac{1}{(J_m + J_l)s^2} \frac{1 + \frac{2\zeta_z}{\omega_z}s + \frac{1}{\omega_z^2}s^2}{1 + \frac{2\zeta_p}{\omega_p}s + \frac{1}{\omega_p^2}s^2} \\ G_l(s) = \frac{\theta_l(s)}{M_{em}(s)} &= \frac{1}{(J_m + J_l)s^2} \frac{1 + \frac{2\zeta_z}{\omega_z}s}{1 + \frac{2\zeta_p}{\omega_p}s + \frac{1}{\omega_p^2}s^2} \end{aligned}$$

где су  $\omega_p$  и  $\omega_z$  резонантна и антирезонантна непригушена природна учестаност, и где су  $\zeta_p$  и  $\zeta_z$  коефицијенти релативног пригушења

$$\omega_p = \sqrt{\frac{c_s(J_m + J_l)}{J_m J_l}}, \quad \omega_z = \sqrt{\frac{c_s}{J_l}},$$

$$\zeta_p = \sqrt{\frac{b_v^2(J_m + J_l)}{4c_s J_m J_l}}, \quad \zeta_z = \sqrt{\frac{b_v^2}{4c_s J_l}}$$

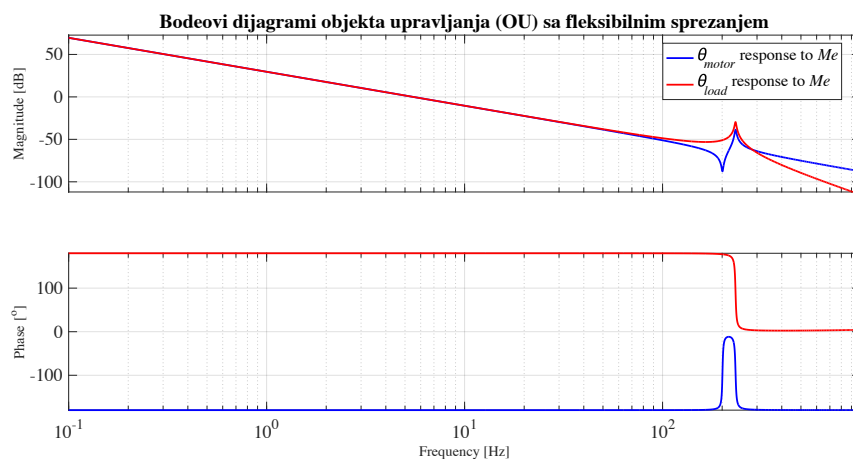
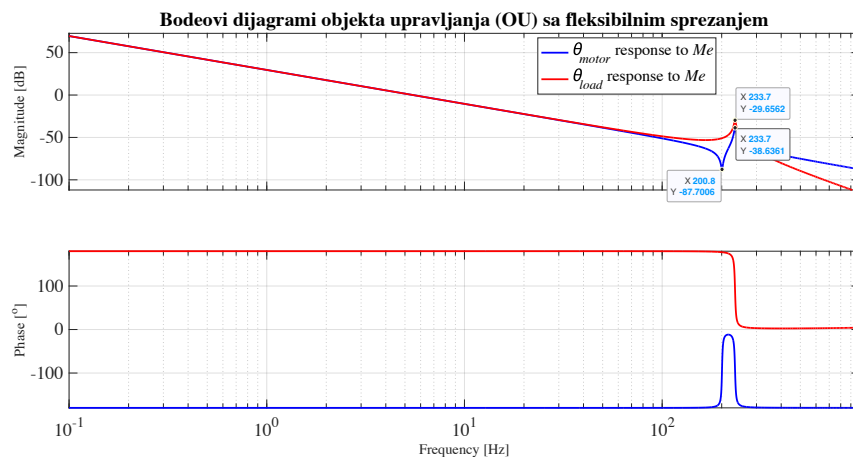
## СИМУЛИНК МОДЕЛ



Самостално урадити симулацију рада система када на њега делује синусни улаз –  $M_{em}$

(какви су ефекти учестаности  $M_{em}$  на учестаности, појачање или слабљење амплитуде излаза  $\theta_m(s)$  и  $\theta_l(s)$ ?).

Бодеои дијаграми (решење)



Коришћени програми	Коментар
plant_OU_4_reda.slx	дат на претходној страни
Init_parametri.m	Следи листинг (доле)
Modeli_odzivi_Bodeovi_dijagrami.m	Следи листинг (доле)

```
% init_parametri.m
% Датум: Јун, 2023, АУТОРИ: М.С.М, Д.К.
% Параметри за Симулинк модел: plant_OU_4_reda.slx

clear all; close all; clc

%% ПАРАМЕТРИ
Jm=0.000620; % [kg*m2]
Jl=0.000220; % [kg*m2]
J=Jm+Jl;
cs=350; % [Nm/rad]
bv=0.004; % [Nms/rad]
```

```

MemMAX=24;      % [Nm]

%% Изведени параметри modela

% непригушене природне учestanosti wp и wz
wp=sqrt(cs*(Jm+Jl)/(Jm*Jl)); % урезонантна учestanost wp
wz=sqrt(cs/Jl);              % антирезонантна учestanost wz

% коефицијенти релативног пригушења
zetz=sqrt((bv^2)/(4*cs*Jl));
zetp=sqrt((bv^2)*(Jm+Jl)/(4*cs*Jm*Jl));

% резонантни однос (resonant ratio)
Rr=wp/wz;
% периода пригушених (квази)осцилација услед резонантног пара полова
Tosc=2*pi/(wp*sqrt(1-zetp^2));

%% ПЕРИОДА ОДАБИРАЊА

% Ts=Tosc/8; % периода одабирања [s] *** SAMPLE TIME ***
% Fs=1/Ts;   % фреквенција одабирања

% изабрана периода одабирања
Fs = 2000;   % [Hz]
Ts = 1/ Fs;  % [s]

```

```

%% Modeli_Bodeovi_dijagrami.m
% Датум: Јун, 2023, АУТОРИ: М.С.М, Д.К.

close all; clear all; clc;

%% Incijalizacija parametara modela
Init_parametri

%% Frekvencijske kke na osnovu SIMULINK modela

Hstruct = linmod('plant_OU_4_reda'); % konverzija u LIN model u SS
H_sfs_system = ss(Hstruct.a, Hstruct.b, Hstruct.c, Hstruct.d);
freq = linspace(0.1,0.5/Ts,1e4);    % [Hz]
W = 2 * pi * freq;                  % [rad/s]
[resp_P, resp_W] = freqresp(H_sfs_system,W);
f = resp_W / (2*pi);
P_Me_to_motor = transpose(squeeze(resp_P(1,:))); % AFF od Me do Theta_motor
mag_P_Me_to_motor = abs(P_Me_to_motor);
pha_P_Me_to_motor = unwrap(angle(P_Me_to_motor));
P_Me_to_load = transpose(squeeze(resp_P(2,:))); % AFF od Me do Theta_load
mag_P_Me_to_load = abs(P_Me_to_load);
pha_P_Me_to_load = unwrap(angle(P_Me_to_load));

figure_position=[0.3 1.5 40 18];
fig_num = 1;
figure(fig_num)
set(gcf, 'units', 'centimeters', 'pos', figure_position)
subplot(2,1,1)
semilogx(f,20*log10(mag_P_Me_to_motor),'LineWidth',2,'Color','b','LineStyle','-');
hold
semilogx(f,20*log10(mag_P_Me_to_load),'LineWidth',2,'Color','r','LineStyle','-');
set(gca,'FontSize',20, 'FontName','Times New Roman','DefaultTextColor','black','xscale','log')
legend({'\it{\theta}_{\it{motor}} response to {\it{Me}}','\it{\theta}_{\it{load}} response to {\it{Me}}'})
set(gca,'XTickLabel',{''})
ylabel('Magnitude [dB]','FontName','Times New Roman','FontSize',16)
title('Bodeovi dijagrami objekta upravljanja (OU) sa fleksibilnim sprezanjem')
axis('tight')
grid on
subplot(2,1,2)
semilogx(f,rad2deg(pha_P_Me_to_motor),'LineWidth',2,'Color','b','LineStyle','-');
hold
semilogx(f,rad2deg(pha_P_Me_to_load),'LineWidth',2,'Color','r','LineStyle','-');
set(gca,'FontSize',20, 'FontName','Times New Roman','DefaultTextColor','black','xscale','log')
ylabel('Phase [°]','FontName','Times New Roman','FontSize',16)
xlabel('Frequency [Hz]','FontName','Times New Roman','FontSize',16)
axis('tight')
grid on

```

```
set(fig_num,'Color','white')
```