Дискретная математика
II семестр

Лектор: Станкевич Андрей Сергеевич

зима/весна 2024

_scarleteagle **imkochelorov** **AberKadaber**

Оглавление

Надеюсь, сессия прошла нормально

— Станкевич Андрей Сергеевич

1. Дискретная теория вероятностей

1.1. Введение

> Случайности и вероятности давно интересовали людей, *в основном в азартных играх*. Первые теоремы дискретной теории вероятностей появились задолго до появления первого конечного автомата. Но философы всех времён задаются вопросом — “существует ли случайность?” Философская мысль делится на 2 направления — считающих, что случайности существуют, и ~~остальных~~ детерминистов, считающих, что случайностей не существует, просто у нас недостаточно данных о мире

Это всё мы с вами изучать не будем

1.2. Аксиоматическая теория вероятностей

by *Андрей Николаевич Колмогоров*

Бытовое восприятие случайностей мешает в понимании формальной модели

Определение: множество элементарных исходов

Ω — множество всех возможных элементарных исходов случайного эксперимента, который может закончиться ровно одним из них
Ω может быть не более чем счётным, счётным, или не счётным. Но мы будем рассматривать дискретное множество элементарных исходов
$|\Omega|$ — конечно или счётно

Определение: элементарный исход

Элемент $\omega \in \Omega$

Определение: дискретная плотность вероятности

$p : \Omega \to \mathbb{R} : p(\omega \geq 0), \sum\limits_{\omega \in \Omega} p(\omega) = 1$

Если Ω несчётна, то требуется другая теория

Определение: дискретное вероятностное пространство

Пара из множества элементарных исходов и дискретной плотности вероятностей (Ω, p)

Примеры дискретных вероятностных пространств:

1. *Честная монета:*
   $\Omega = \{0, 1\},\ p(0) = p(1) = \frac{1}{2}$
2. *Нечестная монета (распределение Бернулли):*
   $\Omega = \{0, 1\},\ p(1) = p,\ p(0) = 1 - p$
3. *Честная игральная кость* (1d6)*:*
   $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\},\ p(i) = \frac{1}{6}$
   - *“Честная” игральная кость (1d20):*
     $\Omega = \{1, ..., 20\},\ p(20) = 1$
4. *Колода карт:*
   $\Omega = \{\langle r, s \rangle \mid r = \{\spadesuit, \heartsuit, \diamondsuit, \clubsuit\}, s = \{2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, J, Q, K, A\}\},\ p(\langle i, j \rangle) = \frac{1}{52}$

Определение: случайное событие

Подмножество элементарных исходов $A \subset \Omega, \quad P(A) = \sum\limits_{a \in A} p(a)$

> Бытовое понимание случайного события отличается от его формального определения. Большинству людей бытовое мышление говорит, что случайное событие — это, собственно, событие, которое либо произойдёт, либо не произойдёт. Но формально, случайное событие — это набор элементарных исходов

Примеры случайных событий:

1. *Пустое событие:*
   $P(\varnothing) = 0$
2. *Достоверное событие:*
   $P(\Omega) = 1$
3. *Случайные события над честной монетой:*
   $P(\{0\}) = \frac{1}{2}, \quad P(\{1\}) = \frac{1}{2}$
4. *Случайные события над честной костью 1d6:*
   $P(\{1, 3, 5\}) = \frac{1}{6} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6} = \frac{1}{2}, \quad P(\{5, 6\}) = \frac{1}{3}, \quad P(\{1, 2, 3\}) = \frac{1}{2}$

1.3. Независимость событий

> Мы узнали формальное определение случайного события. Теперь давайте формализуем независимость нескольких событий. Бытовая логика нам говорит, что независимые события — это такая пара событий, в которой вероятность наступление одного никак не влияет на наступление другого.
> Но формально определение звучит так: случайные события являются независимыми, если вероятность наступления их пересечения равна вероятности их наступления по отдельности

Определение: независимые случайные события

A и B независимы друг от друга, если $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$

Примеры независимости событий: *(честная игральная кость d6)*

$$\text{Even} = \{2, 4, 6\}, \quad \text{Big} = \{5, 6\}, \quad \text{Small} = \{1, 2, 3\}$$

- $P(\text{Even} \cap \text{Big}) = P(\{6\}) = \frac{1}{6} \qquad P(\text{Even}) \cdot P(\text{Big}) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{6} \quad \Rightarrow P(\text{Even})$ и $P(\text{Big})$ — независимы
- $P(\text{Even} \cap \text{Small}) = P(\{2\}) = \frac{1}{6} \qquad P(\text{Even}) \cdot P(\text{Small}) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$
- $P(\text{Big} \cap \text{Small}) = P(\varnothing) = 0 \qquad P(\text{Big}) \cdot P(\text{Small}) = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{6}$

Определение: события, независимые в совокупности

$A_1, A_2, ..., A_k$ – независимы в совокупности, если

$$\forall I \subset \{1, 2, ..., k\} \quad P\left(\bigcap_{i \in I} A_i\right) = \prod_{i \in I} P(A_i)$$

Пример: *(бросок двух разных честных монет)*

$\Omega = \{00, 01, 10, 11\}, \quad p(i \cdot j) = \frac{1}{4}$

$A = \{01, 00\}, \quad B = \{10, 00\}, \quad C = \{11, 00\}$ — не независимы в совокупности

1.4. Прямое произведение вероятностных пространств

Определение: прямое произведение вероятностей пространств

$\langle \Omega_1, p_1 \rangle, \quad \langle \Omega_2, p_2 \rangle$, прямое произведение пространств $\Omega = \Omega_1 \times \Omega_2 : \quad p(\langle u_1, u_2 \rangle) = p_1(\omega_1) \cdot p_2(\omega_2)$

$\sum\limits_{\langle \omega_1, \omega_2 \rangle \in \Omega_1 \times \Omega_2} p(\langle \omega_1, \omega_2 \rangle) = \sum p_1(\omega_1) \cdot p_2(\omega_2) = \sum\limits_{\omega_1} \left(p_1(\omega_1) \cdot \sum\limits_{\omega_2} p_2(\omega_2) \right) = 1$

Пример:

$A_1 \subset \Omega_1,\ A_2 \subset \Omega_2 \Rightarrow A_1 \times \Omega_2$ и $\Omega_1 \times A_2$ — независимы
$(A_1 \times \Omega_2) \cap (\Omega_1 \times A_2) = A_1 \times A_2$

1.5. Условная вероятность

имеет смысл, если $P(B) \neq \varnothing$

$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}, \quad P(B) \neq 0$

если A и B независимы, то
$P(A|B) = \frac{P(A) \cdot P(B)}{P(B)} = P(A)$

$p_B(\omega) = \frac{p(\omega)}{P(B)}, \quad P_B(A) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)})$

Теорема: (*Формула полной вероятности*)
$\Omega = \underbrace{A_1 \cup A_2 \cup ... \cup A_k}_{\text{полная система событий}}, \quad A_i \cap A_j = \varnothing$ при $i \neq j$

$B \qquad P(B|A_i)$
$P(B) = \sum\limits_{i=1}^{n} P(B|A_i) P(A_i)$
$\sum\limits_{i=1}^{k} P(B|A_i) P(A_i) = \sum\limits_{i=1}^{k} \frac{P(B \cap A_i)}{P(A_i)} \cdot P(A_i) = \sum\limits_{i=1}^{k} P(B \cap A_i) = P(B)$

Задача:
Две урны, в одной 3 черных и 2 белых, в другой 4 черных и 1 белый шар. С какой вероятностью можно вынуть черный шар?
$A_1 \quad A_2 \quad \frac{1}{2}$
$P(B|A_1) = \frac{3}{5} \quad P(B|A_2) = \frac{4}{5} \quad P(B) = \frac{3}{5} \cdot \frac{1}{2} + \frac{4}{5} \cdot \frac{1}{2} = \frac{7}{10}$

Задача:
$P(B|A_i) \quad P(A_i) \quad$ найти $P(A_i|B) = ?$
Достоверность = 1 - $P(B|A_2)$ = 99%
Надёжность = $P(B|A_1)$ = 95%
A_1 — болен ($\frac{1}{100}$)

A_2 — здоров ($\frac{99}{100}$)

$P(A_1|B) = \frac{0{,}95 \cdot 0{,}01}{0{,}95 \cdot 0{,}01 + 0{,}01 \cdot 0{,}99}$

$P(B|A_i) = \frac{P(A_i \cap B)}{P(A_i)}$

Определение: формула Байеса

$P(A_i|B) = \frac{P(A_i \cap B)}{P(B)} = \frac{P(B|A_i) P(A_i)}{\sum\limits_{j=1}^{k} P(B|A_j) P(A_j)}$

Определение: Байесовский спам-фильтр
A_1 — спам
A_2 — не спам
B — критерий
$P(B|A_1)$ — вероятность выполнения критерия, если письмо спам *(можно посчитать)*
$P(B|A_2)$ — вероятность выполнения критерия, если письмо не спам *(можно посчитать)*

Сам фильтр: $P(A_1|B)$ — вероятность спама при выполнении критерия *(можно вычислить, используя значения выше)*

1.6. Случайная величина

Определение: случайная величина
$\langle\Omega,\ p\rangle$ — вероятностное пространство
$\xi : \Omega \to \mathbb{R}$ — *случайная величина (численная характеристика вероятностного эксперимента)*

Примеры:
Игральная кость
$\Omega = \{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6\}$
$\xi(\omega) = \omega$
η — выигрыш Васи

Пример 1:
Вася получает 1 монету, если игральная кость падает нечётным числом и теряет 1 монету в ином случае:

ω	1	2	3	4	5	6
η	1	-1	1	-1	1	-1

Пример 2:
Вася получает число монет, равное 2 в степени числа бросков кости, которые потребовались, чтобы выпало определённое число

ω	1	01	001	0001	...
η	2	4	8	16	...

Операции над случайными величинами:
Произведение с числом:
$\xi = c \cdot \eta \quad c \in \mathbb{R}$
Сумма случайных величин:
$\xi = \eta + \zeta$
Произведение случайных величин:
$\xi = \eta \cdot \zeta$
Возведение в степень случайной величины:
$\xi = \eta^{\zeta}$
Можно даже рассмотреть синус случайной величины:
$\xi = \sin \zeta$

Определение: дискретная плотность распределения
ξ — случайная величина
$f_{\xi} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ — *дискретная плотность распределения*
$f_{\xi}(a) = P(\xi = a) = P(\{\omega \mid \xi(\omega) = a\})$

Определение: функция распределения
ξ — случайная величина
$F_{\xi} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ — *функция распределения*
$F_{\xi}(a) = P(\xi \leq a)$

Пример:
Подбросим 10 монет
$\Omega = \mathbb{B}^{10}$
$\xi(\omega)$ — число единиц

$P(\xi = a) = \frac{\binom{10}{a}}{2^{10}}$

$f(a) = F(a) - F(a - \delta)$
$F(a) = \sum\limits_{b \leq a} f(b)$

1.7. Математическое ожидание

Определение: математическое ожидание
$\xi : \Omega \to \mathbb{R}$ — случайная величина
$\mathrm{E}\xi = \sum\limits_{\omega \in \Omega} \xi(\omega) \cdot p(\omega)$ — *математическое ожидание*

Пример:
Игральная кость
$\Omega = \{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6\}$
$\xi(\omega) = \omega$
$\mathrm{E}\xi = 1 \cdot \frac{1}{6} + 2 \cdot \frac{1}{6} + 3 \cdot \frac{1}{6} + 4 \cdot \frac{1}{6} + 4 \cdot \frac{1}{6} + 5 \cdot \frac{1}{6} + 6 \cdot \frac{1}{6} = 3.5$

Легко заметить, что 3.5 никогда не выпадает на игральной кости
Математическое ожидание не означает наиболее вероятные исход

Пример 1:
Вася получает 1 монету, если игральная кость падает нечётным числом и теряет 1 монету в ином случае:

ω	1	2	3	4	5	6
η	1	-1	1	-1	1	-1

$E\xi = 0$
Математическое ожидание равно 0, но при этом, после 1 игры, Вася либо получит монету, либо потеряет

Пример 2:
Вася получает число монет, равное 2 в степени числа бросков кости, которые потребовались, чтобы выпало определённое число

ω	1	01	001	0001	...
η	2	4	8	16	...

$\mathrm{E}_{\xi} = +\infty$
Математическое ожидание может равняться $+\infty$

$\mathrm{E}c = c$
Математическое ожидание константы равняется константе

Линейность математического ожидания:
Теорема:
$\xi = c \cdot \eta \quad \mathrm{E}\xi = c \cdot \mathrm{E}\eta$
$\xi = \eta + \zeta \quad \mathrm{E}\xi = \mathrm{E}\eta + \mathrm{E}\zeta$

$\mathrm{E}(\eta + \zeta) = \sum\limits_{\omega \in \Omega} (\eta + \zeta)(\omega) = \sum\limits_{\omega \in \Omega} (\eta(\omega) + \zeta(\omega)) = \mathrm{E}\eta + \mathrm{E}\zeta$

Примечание:
Если $|\Omega| = +\infty$, то $\exists \mathrm{E}\xi \ \Leftrightarrow \exists \mathrm{E}(|\xi|)$

Пример:
ξ — выпало на верхней грани игральной кости D6
η — выпало на нижней грани
$\mathrm{E}\xi = 3.5, \mathrm{E}\eta = 3.5$
$\mathrm{E}(\xi + \eta) = 7$
Вне зависимости от расположения значений на игральной кости относительно друг друга

Пример:
$\Omega = S_n$ — перестановки n элементов
$|\Omega| = n!$
$\xi(\sigma) = |\{i \mid \sigma_i = i\}|$ — количество неподвижных точек
$n = 3 \quad \xi(\langle 1, 3, 2\rangle) = 1$
$\mathrm{E}\xi = 1$
Мы можем посчитать математическое ожидание, не зная распределение

$\xi_i = \begin{cases} 1, & \sigma_i = i \\ 0, & \text{иначе} \end{cases}$
$\xi_1(1\ 3\ 2) = 1$
$\xi_2(1\ 3\ 2) = 0$
$\xi_3(1\ 3\ 2) = 0$

$\xi = \sum\limits_{i=1}^{n} \xi_i$
$P(\xi_i = 1) = \frac{1}{n}$
$\mathrm{E}\xi_i = 1 \cdot P(\xi_i = 1) + 0 \cdot P(\xi_i = 0) = \frac{1}{n}$
$\mathrm{E}\xi = \sum\limits_{i=1}^{n} \frac{1}{n} = 1$

Теорема:
$\mathrm{E}\xi = \sum\limits_{a} a \cdot P(\xi = a)$
$\sum\limits_{\omega \in \Omega} \xi(\omega) p(\omega) = \sum\limits_{a} \sum\limits_{\omega : \xi(\omega) = a} \xi(\omega) p(\omega) = \sum\limits_{a} a \sum\limits_{\omega : \xi(\omega) = a} p(\omega) = \sum\limits_{a} a \cdot P(\xi = a)$

Определение: независимые случайные величины
ξ и η — *независимы*, если
$\forall a, b \in \mathbb{R} \quad [\xi \leq a]$ и $[\eta \leq b]$ — *независимые случайные события*
$P(\xi \leq a \wedge \eta \leq b) = P(\eta \leq a) \cdot P(\eta \leq b)$

Замечание:
ξ и η — независимые, если
$\forall a, b \in \mathbb{R} \quad [\xi = a]$ и $[\eta = b]$ — независимые
Работает за исключением патологических случаев, которые мы не будем рассматривать

Пример 1:
$P(\xi = 1) = \frac{1}{2}$ — вероятность того, что Вася выиграл 1 монету

$P(\eta = 2) = \frac{1}{6}$ — вероятность выпадения на игральной кости 2

$P(\xi = 1 \wedge \eta = 2) = 0$

Пример 2:

ξ / η	-1	1
0	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$
1	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$

Теорема:
ξ и η независимы $\Rightarrow \mathrm{E}(\xi \cdot \eta) = \mathrm{E}(\xi) \cdot \mathrm{E}(\eta)$

$\mathrm{E}(\xi \cdot \eta) = \sum\limits_{a} a \cdot P(\xi \cdot \eta = a) = \sum\limits_{a} \sum\limits_{b} \sum\limits_{c : b \cdot c = a} bc \cdot P(\xi = b \wedge \eta = c) = \sum\limits_{a} \sum\limits_{b} \sum\limits_{c : b \cdot c = a} bcP(\xi = b)P(\eta = c) == \sum\limits_{b} b \sum\limits_{c} cP(\xi = b)P(\eta = c) = \mathrm{E}\xi \cdot \mathrm{E}\eta$

1.8. Дисперсия

Вступление:
Давайте посчитаем математическое ожидание отклонения этой случайной величины от ее математического ожидания. Внезапно обнаружим, что оно равняется 0
$\mathrm{E}(\xi - \mathrm{E}\xi) = \mathrm{E}\xi - \mathrm{E}\mathrm{E}\xi = \mathrm{E}\xi - \mathrm{E}\xi = 0$ 😞

Определение: дисперсия
$\mathrm{D}\xi = \mathrm{E}(\xi - \mathrm{E}\xi)^2$ — *дисперсия*
$\mathrm{E}(\xi - \mathrm{E}\xi)^2 = \mathrm{E}\left(\xi^2 - 2\xi\mathrm{E}\xi + (\mathrm{E}\xi)^2\right) = \mathrm{E}\xi^2 - 2\mathrm{E}\xi\mathrm{E}\xi + (\mathrm{E}\xi)^2 = \mathrm{E}\xi^2 - (\mathrm{E}\xi)^2$
На английском: $\mathrm{Var}\ \xi$

$\mathrm{D}c\xi = c^2\mathrm{D}\xi$
$\mathrm{D}(\xi + \eta) = \mathrm{E}(\xi + \eta)^2 - (\mathrm{E}(\xi + \eta))^2 = \mathrm{E}\xi^2 + 2\mathrm{E}\xi\eta + \mathrm{E}\eta^2 - (\mathrm{E}\xi)^2 - 2\mathrm{E}\xi\mathrm{E}\eta - (\mathrm{E}\xi)^2 = \mathrm{D}\xi + \mathrm{D}\eta + 2(\mathrm{E}\xi\eta - \mathrm{E}\xi\mathrm{E}\eta)$

Определение: ковариация
$\mathrm{E}\xi\eta - \mathrm{E}\xi\mathrm{E}\eta = \mathrm{Cov}(\xi,\ \eta)$ — *ковариация*

$\Omega,\ p$ — вероятностное пространство

$\xi : \Omega \to \mathbb{R}$ — случайная величина *(численная характеристика вероятностного эксперимента)*

$E\xi = \sum\limits_{\omega \in \Omega} \xi(\omega) \cdot p(\omega) = \sum\limits_{a} a \cdot p(\xi = a)$ — мат ожидание

$E(\xi + \eta) = E\xi + E\eta$ — мат ожидание суммы равно сумме мат ожиданий

$F_\xi(a) = P(\xi \leq a)$ — функция распределения случайной величины

$f_\xi(a) = P(\xi = a)$ — плотность случайной величины

ξ и η — независимые для $\forall \alpha\ \beta$, если $[\xi = \alpha]$ и $[\eta = \beta]$

ξ и η — независимые $\Rightarrow E(\xi, \eta) = E\xi \cdot E\eta$

$D\xi = E(\xi - E\xi)^2 = E\xi^2 - (E\xi)^2$ — дисперсия

ξ и η независимые $\Rightarrow D(\xi + \eta) = D\xi + D\eta$

$D(\xi + \eta) = D\xi + D\eta + 2(E\xi\eta - E\xi \cdot E\eta)$

$\mathrm{Cov}(\xi,\ \eta) = E\xi\eta - E\xi \cdot E\eta$ — коварицация

ξ и η независимые $\Rightarrow \mathrm{Cov}(\xi,\ \eta) = 0$

$\mathrm{Cov}(\xi, \xi) = E(\xi \cdot \xi) - E\xi \cdot E\xi = D\xi$

$\mathrm{Cov}(\xi, -\xi) = -E\xi^2 + (E\xi)^2 = -D\xi$ — коварицация может быть отрицательной

Теорема:
$\mathrm{Cov}(\xi, \eta)^2 \leq D\xi \cdot D\eta$

Определение: корреляция
$\mathrm{Corr}(\xi, \eta) = \frac{\mathrm{Cov}(\xi, \eta)}{\sqrt{D\xi \cdot D\eta}}$ — *корреляция*

$-1 \leq \mathrm{Corr}(\xi, \eta) \leq 1$

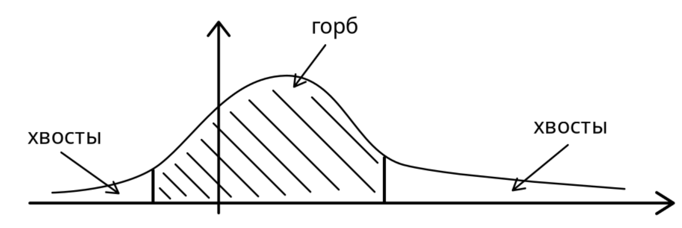
$D\xi = 0 \Leftrightarrow E(\xi - E\xi)^2 = 0 \Leftrightarrow p(\omega) > 0 \Rightarrow \xi(\omega) = E\xi$

Корреляции с константой не бывает, иначе в формуле деление на ноль

Теорема:
$\mathrm{Corr}(\xi, \eta) = 1 \quad \Leftrightarrow \quad \xi = c \cdot \eta,\ c > 0$
$\qquad\qquad = -1 \qquad\qquad\qquad c < 0$

Корреляция не означает причинно-следственной связи

1.9. Хвостовые неравенства



Задача:
Средняя зарплата 10 опрошенных человек — 50 тысяч. Сколько максимум человек может иметь зарплату больше или равную 250 тысяч рублей?
Максимум 2 человека, в случае, если 8 остальных имеют нулевую зарплату

Неравенство Маркова *"очень богатых не может быть очень много"*

$\xi > 0 \quad E\xi$

$P(\xi \geq c \cdot E\xi) \leq \frac{1}{c}$

Доказательство:

$P(\xi \geq c \cdot E\xi) = \sum\limits_{\omega : \xi \geq c \cdot E\xi} p(\omega)$

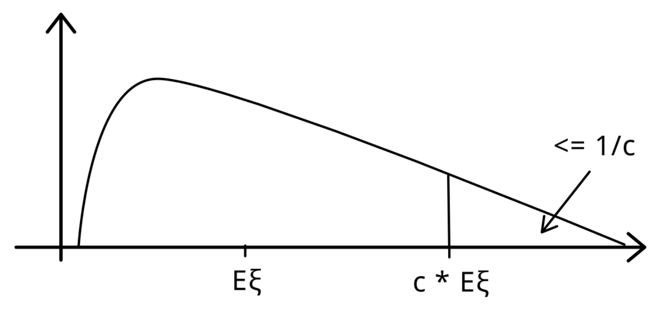
$E\xi = \sum\limits_{\omega} p(\omega) \cdot \xi(\omega) =$

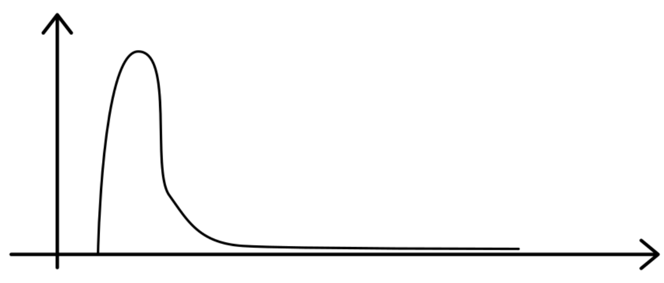
$= \sum\limits_{\omega : \xi(\omega) \geq c \cdot E\xi} p(\omega) \cdot \xi(\omega) + \sum\limits_{\omega : \xi(\omega) < c \cdot E\xi} p(\omega) \cdot \xi(\omega) \geq$

$\geq \sum\limits_{\omega : \xi(\omega) \geq c \cdot E\xi} p(\omega) \cdot c \cdot E\xi$

$E\xi \geq c \cdot E\xi \cdot P(\xi \geq c \cdot E\xi)$

$P(\xi \geq c \cdot E\xi) \leq \frac{1}{c}$





$D\xi = E(\xi - E\xi)^2$

$\eta = (\xi - e\xi)^2$

$P(\eta \geq c^2 E\eta) \leq \frac{1}{c^2}$

$P\big((\xi - E\xi)^2 \geq c^2 D\xi\big) \leq \frac{1}{c^2}$

$P(|\xi - E\xi|) \geq c \cdot \sqrt{D\xi}) \leq \frac{1}{c^2}$

Определение: среднеквадратическое отклонение

$\sigma = \sqrt{D\xi}$

Теорема: неравенство Чебышева

$P(|\xi - E\xi| \geq c \cdot \sigma) \leq \frac{1}{c^2}$

$P(\eta \geq \alpha) \quad \alpha^2 = c^2 E\eta \quad c^2 = \frac{\alpha^2}{D\xi}$

$P(|\eta - E\eta| \leq \alpha) \leq \frac{D\xi}{\alpha^2}$

$\xi \quad n$ раз $\frac{1}{n} \sum\limits_{i=1}^{n} \xi_i = \eta$

ξ_i — о. р. незав. сл. величины

$E\eta = E\xi$

$D\eta = \frac{1}{n^2} \cdot nD\xi = \frac{1}{n} D\xi$

нет. м. о. μ

$P(|\xi - \mu| \geq \alpha) \leq \frac{D\xi}{\alpha^2} = \varepsilon$

$P(|\eta - \mu| \geq \alpha) \leq \frac{D\eta}{\alpha^2} = \frac{\varepsilon}{n}$

Для какого α
$P(|\xi - \mu| \geq \alpha) \leq \varepsilon$

$\frac{D\xi}{\alpha^2} \leq \varepsilon$

$\alpha^2 \geq \frac{1}{\varepsilon} \cdot D\xi$

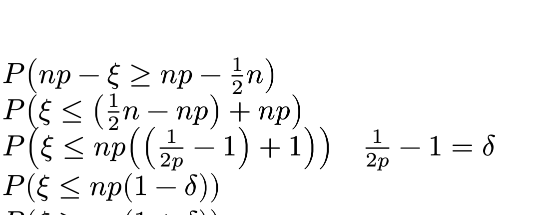
$\alpha \geq \sqrt{\frac{1}{\varepsilon} \cdot D\xi} = N_0$

$\alpha \geq \sqrt{\frac{1}{\varepsilon} D \cdot \eta} = \frac{1}{\sqrt{n}} \cdot N_0$

Определение: распределение Бернулли
$0, 1 \quad p(1) = p,\ p(0) = q, \quad \xi_i$

$\xi = \sum\limits_{i=1}^{n} \xi_i \quad E\xi = np$

$P\big(|\xi - np| \geq |\frac{1}{2}n - np|\big)$



$P_{\text{err}} \leq P\big(|\xi - np| \geq |\frac{1}{2}n - np|\big)$

$P\big(np - \xi \geq np - \frac{1}{2}n\big)$
$P\big(\xi \leq (\frac{1}{2}n - np) + np\big)$
$P\Big(\xi \leq np\big((\frac{1}{2p} - 1) + 1\big)\Big) \quad \frac{1}{2p} - 1 = \delta$
$P(\xi \leq np(1 - \delta))$
$P(\xi \geq np(1 + \delta))$ — симметричная ситуация

Теорема: граница Чернова

$P(\xi \leq np(1 - \delta))$

$\qquad\qquad\qquad \leq e^{-\frac{\delta^2}{2} np}$

$P(\xi \geq np(1 + \delta))$

$e^{-\frac{1}{54} n} \leq \varepsilon$

$-\frac{1}{54} n \leq \ln \varepsilon$

$n \geq 54 \ln \frac{1}{\varepsilon}$

$\xi \quad t \quad \eta = e^{t\xi}$

$P(\eta \geq e^{t\alpha}) \leq \frac{E\eta}{e^{t\alpha}}$

$E\eta = Ee^{t\xi} - Ee^{t \sum\limits_{i=1}^{n} \xi_i} = E \prod\limits_{i=1}^{n} e^{t\xi_i} = \prod\limits_{i=1}^{n} Ee^{t\xi_i} = \prod\limits_{i=1}^{n} (p \cdot e^t + 1 - p)$

> Сегодня будет не так весело, как на вчерашней лекции парадигм
>
> — Станкевич Андрей Сергеевич

Что такое информация?

1.10. Энтропия

информация = -неопределённость

Определение: энтропия случайнго источника

Количество информации, приходящейся на одно сообщение источника

$\Omega = \{1, 2, ..., n\}$ — *вероятностное пространство (случайный источник)*

Вероятности $p_1, p_2, ..., p_n$

$H(p_1, p_2, ..., p_n)$ — *энтропия случайного источника*

Свойства:

1. H непрерывна
2. $H\left(\frac{1}{n}, \frac{1}{n}, ... \frac{1}{n}\right)$ возрастает при росте n
3. Закон аддитивности

   $\Omega = \{(i, j),\ i = 1...n,\ j = 1...m_i\}$

   $p_i = P(w.\text{first} = i)$

   $\sum\limits_{i=1}^{n} p_i = 1$

   $q_{ij} = p(w.\text{second} = j \mid w.\text{first} = i)$

   $\sum\limits_{j=1}^{m_i} q_{ij} = 1$

   $p((i, j)) = p(w.\text{first} = \text{i}) \cdot p(w.\text{second} = j \mid w.\text{first} = i) = p_i \cdot q_{ij}$

   $H\left(p_1 q_{11}, p_1 q_{12}, ..., p_1 q_{1 m_1}, p_2 q_{21}, \cdot, p_n q_{nm}\right) = H(p_1, p_2, ..., p_n) + \sum\limits_{i=1}^{n} p_i \cdot H\left(q_{i1}, q_{i2}, ..., q_{i m_i}\right)$

$h(n) = H\left(\frac{1}{n}, \frac{1}{n}, ... \frac{1}{n}\right) \quad h : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$

$h(n) \nearrow$

$p_i = \frac{1}{n},\ q_{ij} = \frac{1}{m}$

$h(m \cdot n) = h(n)$

Такая функция единственна — логарифм. Докажем это

$h(n) =\ ?$

$i \quad h(n^i) = i \cdot h(n)$

$2^k \leq n^i \leq 2^{k+1} \qquad k = \lfloor \log_2 n^i \rfloor = \lfloor i \cdot \log_2 n \rfloor$

$k \cdot h(2) \leq i \cdot h(n) \leq (k+1) h(2)$

$$h(2) \frac{\lfloor i \cdot \log_2 n \rfloor}{i} \leq h(n) \leq h(2) \frac{\lfloor i \cdot \log_2 n \rfloor + 1}{i}$$

$$\forall i \left| h(n) - \frac{\lfloor i \cdot \log_2 n \rfloor}{i} \right| < \frac{1}{i}$$

$\lfloor i \cdot \log_2 n \rfloor = i \cdot \log_2 n = \{i \cdot \log_2 n\}$

$$\left| \frac{h(n)}{h(2)} - \log_2 n + \frac{\{i \cdot \log_2 n\}}{i} \right| < \frac{1}{i}$$

$$\frac{h(n)}{h(2)} = \log_2 n \qquad h(2) = c$$

$h(n) = c \cdot \log_2 n$

Бит, если $c = 1$

$$p_i = \frac{a_i}{b} \qquad q_{ij} = \frac{1}{a_i} \quad m_i = a_i$$

$H\left(p_i q_{ij}\right) = H(p_i) + \sum p_I H\left(q_{ij}\right)$

$h(b) = H(p_1 ... p_n) + \sum (p_i h(a_i))$

$\sum\limits_{i=1}^{n} p_i \cdot \log_2 b = H(p_1 ... p_n) + \sum\limits_{i=1}^{n} p_i \cdot \log_2 a_i$

$-\sum\limits_{i=1}^{n} \left(p_{i(\log_2 a_i - \log_2 b)}\right) = H(p_1 ... p_n)$

$H(p_1 ... p_n) = -\sum\limits_{i=1}^{n} p_i \cdot \log p_i$

Пример 1:

Возьмём TeX исходник учебника математического анализа, представимый в виде строки. Рассмотрим все символы в нём и вероятность получить конкретный символ, взяв случайный. Получим энтропию учебника математического анализа — количество информации. Но это не лучшая оценка информации учебника математического анализа, потому что после случайной перестановки символов энтропия (количество информации) не изменится, но количество информации по математическому анализу приравняется к 0

Пример 2:

Возьмём случайную строку длинной в миллион символов (число информации несколько миллионов бит). Лучший способ передать её (информацию о ней) — передать весь миллион символов (несколько миллионов бит *возможно после небольшого сжатия*)
Если мы захотим передать эту строку по телефонному звонку, нам придётся диктовать весь миллион символов. Но если мы просто захотим передать не фиксированную случайную строку в миллион символов, достаточно сказать "запиши случайную строку в миллион символов". В обоих случаях количество переданной информации равно, но усилия для передачи не равны

Определение: сложность по Колмогорову

$S \in \Sigma^*$

$K(S)$ — наименьшая длина программы, выводящей S на пустом входе

$\left| K_{\text{c++}}(S) - K_{\text{java}}(S) \right| \leq C_{\text{c++, java}}$

Можно написать на языке программирования Java интерпретатор язык программирования C++
Его размер не зависит ни от размера программы на C++, ни от S — константа

$K(S) \quad S$ случайнвя строка длины n

$K(S) = \Omega(n)$ "почти наверное"

$S = (01)^n \quad K(S) = O(\log_2 n)$

> C++ плохо выбирать, потому что он такой. Немного мерзкий язык. Выберем математическую модель C++
>
> — Станкевич Андрей Сергеевич

Пример 1:

Колмогоровская сложность учебника по математическому анализу меньше, чем колмогоровская сложность случайной строки. *Доказательства не будет*

Кодирование Хаффмана — оптималльный префиксный код, независимо кодирует $\forall$ символ

Арифметическое кодирование —

$L \quad f_i$

$\frac{p}{z^q} \quad q \simeq -L \sum\limits_{i=1}^{n} \frac{f_i}{L} \log_2 \frac{f_i}{L} = L \cdot H\left(\frac{f_1}{L}, ..., \frac{f_n}{L}\right)$ — *энтропийный барьер*

Арифметическое кодироание — оптимальный алгоритм кодирования, не учитывающего взаимного расположения символов

Доказательство минимальной асимптотики алгоритма сортировки с помощью энтропийного барьера:

$h(n!) = \log_2(n!) \simeq \log_2\left(\frac{n^n}{e^n} \sqrt{2\pi n}\right) = n \cdot \log_2 n - n \cdot \log_2 e + \log \sqrt{2\pi n} = \Sigma(n \cdot \log n)$

1.11. Марковские цепи

Определение: Марковский процесс
Процесс, дальшийшее происходящее которого зависит от текущего состояния и не зависит от истории

Пример:
Не марковские процессы:
1. Ваше обучение в ВУЗе
2. обход графа в ширину и глубину

Если состояний Марковского процесса конечное число, а выбор нового состояния осуществляется случайно,

Определение: Марковская цепь
Математичский объект состоящий из:

1. Множество состояний $S = \{1, 2, ..., n\}$ — *конечное множество*
2. Матрица переходов $P_{n \times n}$ $P_{ij} = P(v_{t+1} = j \mid v_T = i)$ — вероятность перейти из $i_{\text{ого}}$ состояния в $j_{\text{ое}}$
3. Начальное распределение вероятностей $c^{(0)} = \left(c_1^{(0)} ... c_n^{(0)}\right)$

$$c^{(t)} = \left(c_1^{(t)}, c_2^{(t)}, ..., c_n^{(t)}\right) \quad \sum_{i=1}^{n} c_i^{(0)} = 1$$

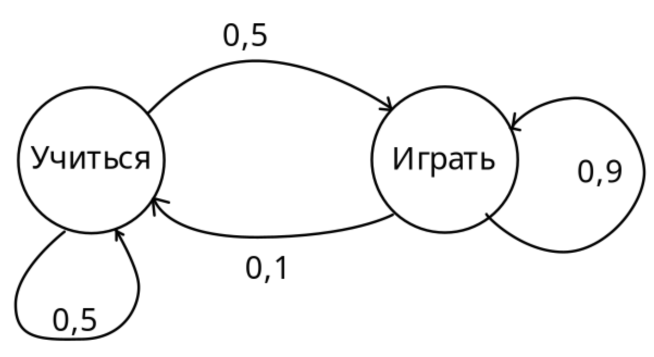
$$c_j^{(t+1)} = \sum_{j=1}^{n} P(v_{t+1} = j | v_t = i) = \sum_{i=1}^{n} p_{ij} c_i^{(t)}$$

Основное уравнение Марковских цепей:

$$c^{(t+1)} = c^{(t)} \cdot P = c^{(t-1)} \cdot P \cdot P$$

В общем случае на t — ом шаге: $c^{(t)} = c^{(0)} P^t$

Пример:
Студент решает, пойти ему в ВУЗ или нет. Рассмотрим его решения, как Марковскую цепь с 2 состояниями — **учиться** и **играть**. Из состояния учиться он с вероятностью 0.5 остается учиться и с вероятностью 0.5 уходит играть. Из состояния играть он с вероятность 0.9 остается играть и с вероятностью 0.1 идет учиться



Марковский граф

Состояние 1 - учиться, состояние 2 - играть

$$P = \begin{pmatrix} 0.5 & 0.5 \\ 0.1 & 0.9 \end{pmatrix}$$

Определение: Компонента сильной связности (эргодический класс)

Компонента сильной связности - множество вершин, из каждой вершины которой можно попасть в любую другую вершину

Определение: Эргодическая Марковская цепь

Марковская цепь, состоящая из одного эргодического класса

Определение: Диаграмма порядка

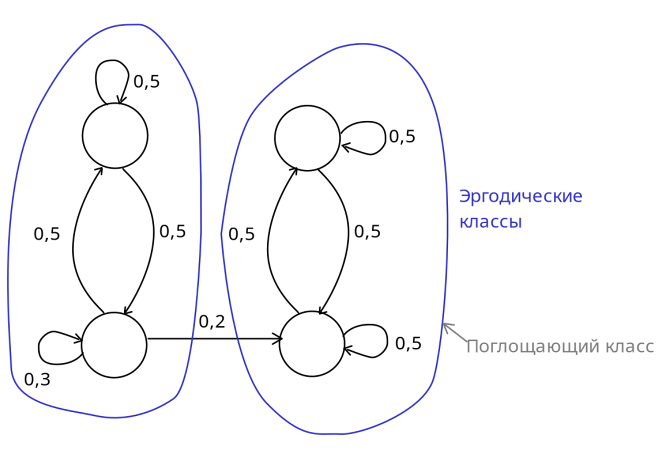
Диаграмма порядка — граф, получаемый при "объединении" эргодических классов в одну вершину

Определение: Поглощающие (существенные) эргодические классы в диаграмме порядка

Поглощающие эргодические классы — классы из которых нельзя выйти

Определение: Поглощающее состояние

Если поглощающий класс состоит из одного состояния, то это состояние называется поглощающим



Эргодическая Марковская цепь
НОД длинн всех циклов — d

1. $d > 1$ Марковская цель периодическая
2. $d = 1$ Марковская цель апериодческая

Теорема: (о поглощении)
Любая цепь поглотится — "рано или поздно цепь придёт в поглощающее состояние"

Теорема: (Эргодическая теорема или теорема о забывании)
Если Марковская цепь не периодическая, существует предельное распределение (эргодическое), не зависящее от начального состояния

Поглощающие Марковские цепи

Жизнь Поглощающей Марковской цепи состоит из 2 этапов: до поглощения и после

1. Все поглощающие эргодические классы состоят из 1 состояния
2. $\forall$ состояния $\exists$ путь до поглощающего состояния

$\underbrace{1...m}_{\text{непогл}}, \ \underbrace{m+1...n}_{\text{погл}}$

1. почему обязательно произойдёт поглощение?
2. $a_j, \ j = m+1...n$ — вероятность поглощения в j
3. g — время до поглощения

Пример:
Задача о пьянице (доказательство неизбежности поглощения)

Q	R
O	$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ ... & ... & ... & ... \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$

$Q_{m \times n} \quad R_{m \times (n-m)}$

$z = \max$ длина кратчайшего пути до поглощаюшего состояния

$$c^{(z)} = c^{(0)} \cdot P^Z$$

$$\sum_{i=1}^{m} c_i^{(z)} \leq S < 1$$

$$c_i^{(0)} = \begin{cases} c_i^{(z)} / \ S, & i \leq m \\ 0, & \text{иначе} \end{cases}$$

$$t \to \infty$$

$$\lim_{t \to \infty} \sum_{i=1}^{m} c_i^{(t)} \to 0$$

$$c_{1...m}^{(0)}$$

$$c^{(0)} Q$$

После t шагов $c^{(0)} Q^t$

$$P(\text{поглотиться в состоянии } j) = \sum_{t=0}^{\infty} \text{поглотиться в стотоянии } j \text{ после } t \text{ шагов} =$$

$$\sum_{t=0}^{\infty} \sum_{i=1}^{n} P(\text{поглотиться в } j \text{ после } t \mid \text{перед этим в } i) P(\text{через } t \text{ шагов в } i) =$$

$$\sum_{t=0}^{\infty} \sum_{i=1}^{n} r_{ij} \left(c^{(0)} Q^t\right)_i = \sum_{i=1}^{m} r_{ij} \left(c^{(0)} \cdot \left(\sum_{t=0}^{\infty} Q^t\right)\right)_i = \left(c^{(0)} NR\right)_j, \qquad a = c^{(0)} NR$$

Лемма: если $Q^t \to 0$, то $\sum_{t=0}^{\infty} Q^t = (I - Q)^{-1}, \qquad I$ — единичная матрица

Доказательство:

$$\sum_{t=0}^{\infty} Q^t (I - Q) = I - Q + Q - Q^2 + Q^2 - Q^3 + ... = I$$

Определение: Фундаментальная матрица Марковской цепи
$N = (I - Q)^{-1}$

g — время до поглощения

Найдём математическое ожидание g

$$g = \sum_{i=1}^{m} g_i, \quad g_i \text{ — число посещений вершины i}$$

$$g_i = \sum_{t=0}^{\infty} g_{it}$$

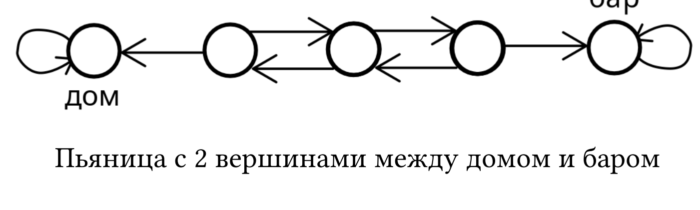
$$g_{it} = \begin{cases} 1, \ \text{если } v_t = i \\ 0, \ \text{иначе} \end{cases}$$

$$E_{g_{it}} = \left(c^{(0)} Q^t\right)_i$$

$$E_{g_i} = \sum_{t=0}^{\infty} \left(c^{(0)} Q^t\right)_i = c^{(0)} N$$

$$E_g = c^{(0)} N \vec{1}$$

Пример:



Пьяница с 2 вершинами между домом и баром

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 0.5 & 0.5 & 0 \\ 0.5 & 0 & 0 & 0.5 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow Q = \begin{pmatrix} 0 & 0.5 \\ 0.5 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow I - Q = \begin{pmatrix} 1 & -0.5 \\ -0.5 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow N = (I - Q)^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{4}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} & \frac{4}{3} \end{pmatrix}$$

$$c^{(0)} = (1 \ 0 \ 0 \ 0)$$

$$a = (1 \ 0) \begin{pmatrix} \frac{4}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} & \frac{4}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} = \left(\frac{4}{3} \ \frac{2}{3}\right) \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} = \left(\frac{2}{3} \ \frac{1}{3}\right)$$

> С вероятностью две третьих мы закончим свой путь дома, с вероятностью одна третья мы закончим свой путь в баре, не так уж и плохо
>
> — Станкевич Андрей Сергеевич

Лектор: Дмитрий Юрьевич

Вопросы, которые мы хотим изучить, изучая марковские цепи:

- С какой вероятностью марковская цепь окажется в том, или ином поглощающем эргодиеском классе
- Какое среднее время жизни марковской цепи перед поглощением

P_{ij} — вероятность $i \mapsto j$

$\begin{pmatrix} Q & R \\ O & I \end{pmatrix}$

P^n_{ij} — вероятность $i \mapsto j$

$b^0 = \underbrace{a^0}_{m}$____

$a^0 Q^n$

$N = (I - Q)^{-1}$

$a^0 N \vec{1}$

Эргодическая теорема:
Не циклический эргодический класс $\Rightarrow \exists b$ — стац. распределение i

$\forall b^0 \quad b^0 P \to b$

Следствие:
$b = bP$

Докажем для регулярных цепей: Регулярная цепь: $P_{ij} > 0$

$? \, \exists N : P^N$ — регулярная

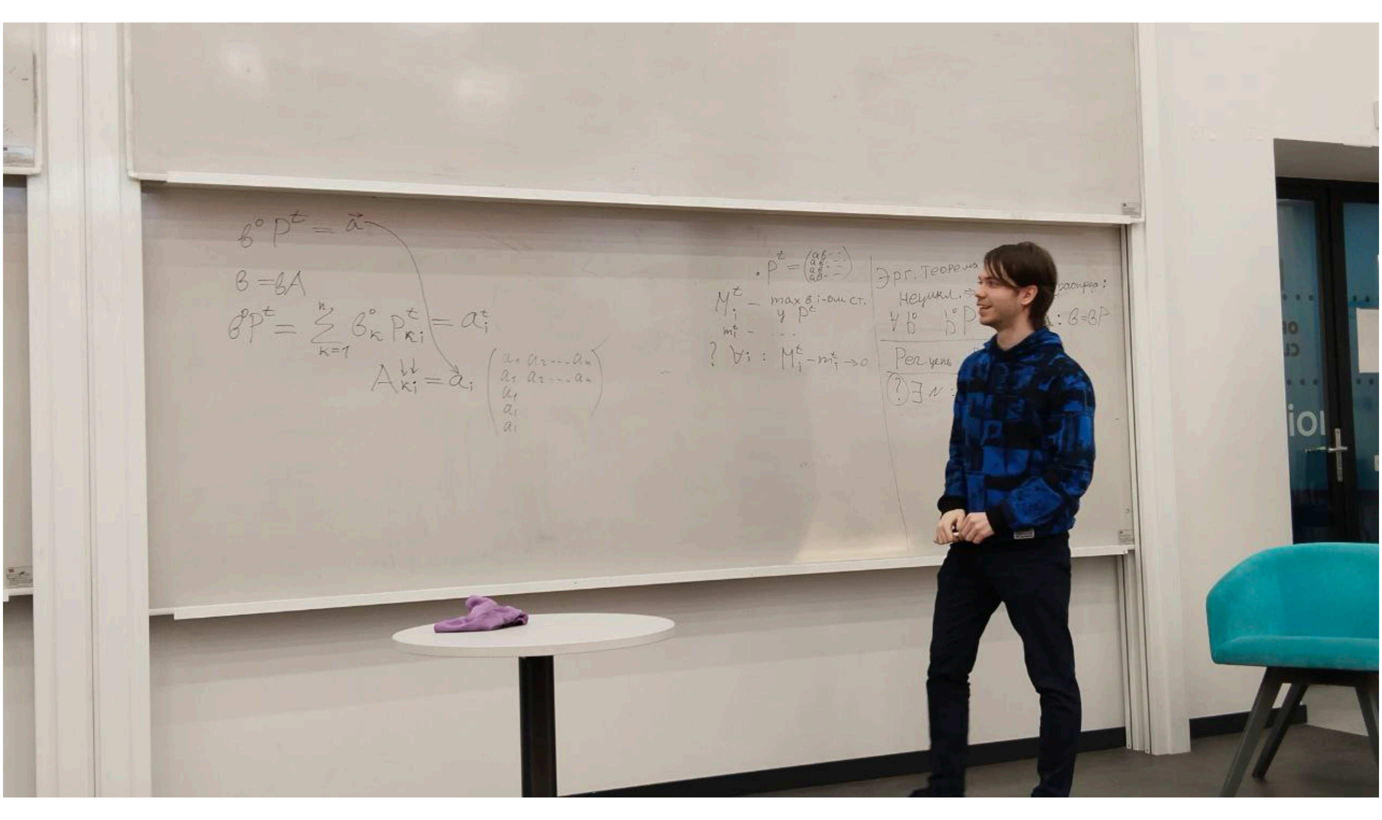
Доказательство:

$b = bP$
$b = (I - P) = 0$
$b > 0, \ \sum b_i = 1$

$b = bA$
$bP = \sum_{k=1}^{n} b_k A_{ki}$
$A_{ki} = a_i \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \dots & a_n \\ a_1 & a_2 & \dots & a_n \\ a_1 & & \dots & \\ a_1 & & \dots & \end{pmatrix}$

M^t_i — max в i-том столбце p^t

m^t_i — min в i-том столбце p^t

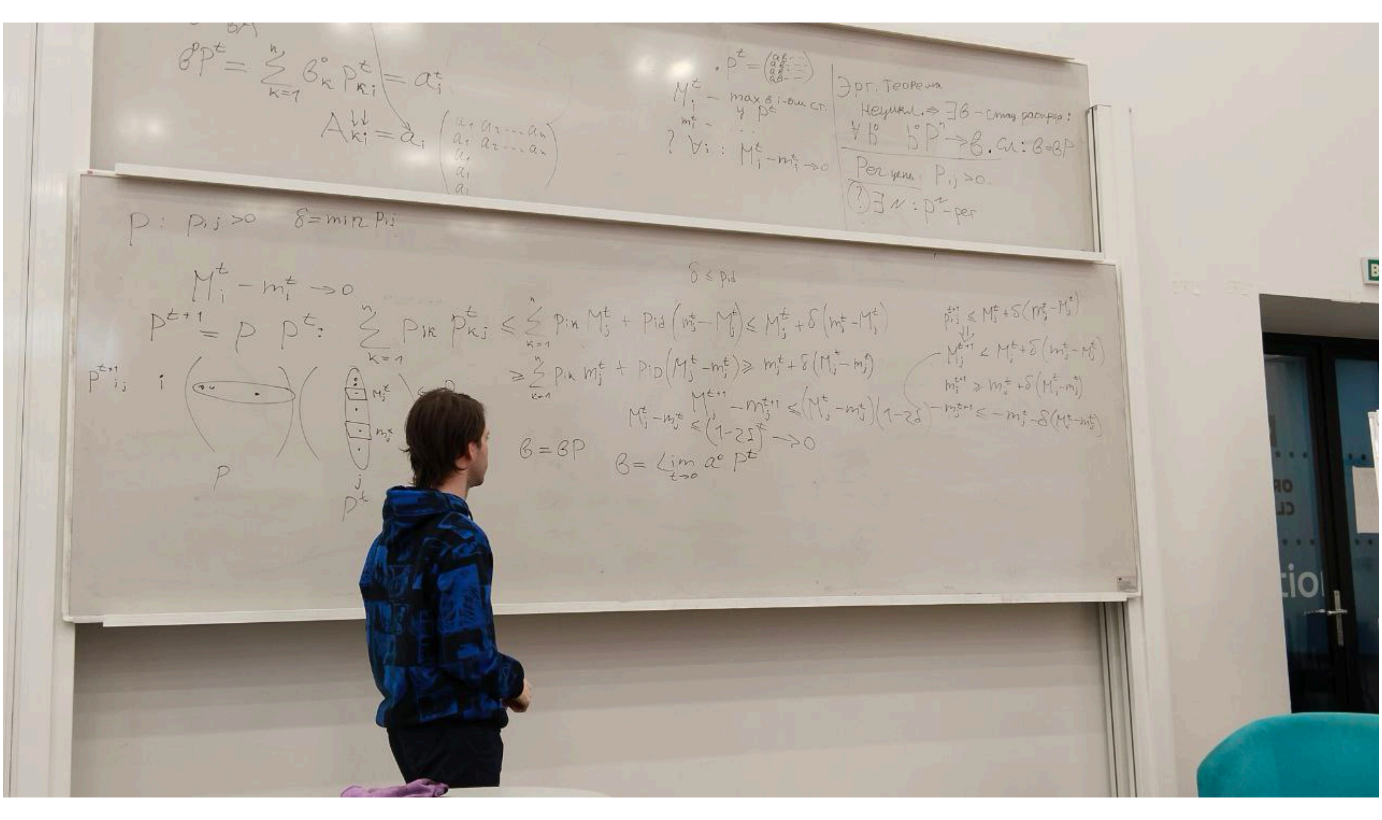


$M^t_i - m^t_i \to 0$

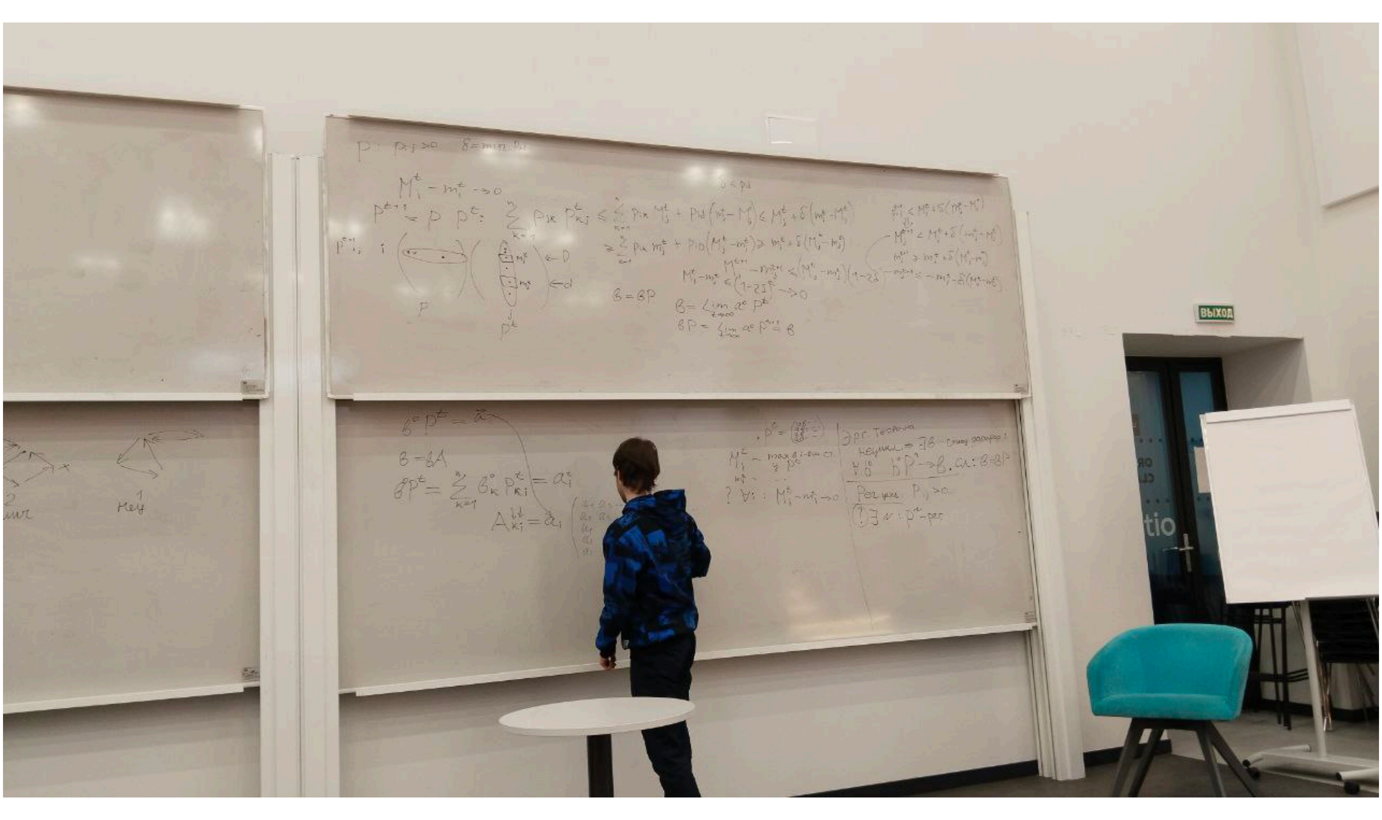
$$p^{t+1} = p \cdot p^t : \quad \sum_{k=1}^{n} p_{ik} \cdot p^t_{kj} \quad \le \quad \sum_{k=1}^{n} p_{ik} M^t_j + p_{id}\left(m^t_j - M^t_j\right) \quad \le \quad M^t_j + \delta\left(m^t_j - M^t_j\right)$$
$$\ge \quad \sum_{k=1}^{n} p_{ik} m^t_j + p_{iD}\left(M^t_j - m^t_j\right) \quad \ge \quad m^t_j + \delta\left(M^t_j - m^t_j\right)$$

d — номер строчки, в которой достигается минимум
D — номер строчки, в которой достигается максимум

$p^{t+1}_{ij} \le M^t_j + \delta\left(m^t_j - M^t_j\right)$
$\Downarrow$
$M^{t+1}_j \le M^t_j + \delta\left(m^t_j - M^t_j\right)$



дописать



Что мы знаем про цепи?

$a^0 N$ — ср. пос. сост.
$a^0 NR$ — распр. в погл.

$c = \sum_{l=1}^{3} \sum_{r=1}^{3} a^{lr}_{rl}$

2. Теория формальных языков

Что такое русский язык?
- Алфавит
- Слова, несущие смысл
- Предложения, состоящие из слов

Что такое язык C++?
- Конструкции { ;)
- Команды `for`, `if`, `const`...
- Названия переменных `a`
- Ключевые слова `int`

Язык - набор слов, каждое из которых состоит из символов и может являться частью предложения

Формальный язык -

Определение:

1. Алфавит — конечное конечное множество символов
   - Обозначение: Σ
2. Слово — конечная последовательность символов алфавита
   - Обозначение: Σ^k — все слова длины k
3. Формальный язык — набор слов, каждое из которых состоит из конечного числа символов
   - Обозначение: $\bigcup_{k=0}^{\infty} \Sigma^k = \Sigma^*$

Описание языка — конечная строка
Число всех языков: 2^{Σ^*} — несчётное

2.1. Действия над языками

- Теоретико множественные операции: $\cup \quad \cap \ / \ \bar{L}(U = \Sigma^*)$
  Пусть $\alpha, \ \beta$ — слова над Σ, тогда конкатенация слов $\alpha\beta = \gamma \in \Sigma^*$
  Если $\alpha \in \Sigma^K, \ \beta \in \Sigma^n \ \Rightarrow \gamma \in \Sigma^{k+n}$
  $(\alpha\beta)\gamma = \alpha(\beta\gamma)$
  $\alpha\beta \ne \beta\gamma$
  ε — нейтральное слово: $\varepsilon\alpha = \alpha\varepsilon = \alpha$
- Конкатенация языков
  A, B — формальные языки
  $AB = \{\alpha\beta \mid \alpha \in A, \beta \in B\}$
  $\gamma \in AB$
  $\gamma = \alpha\beta, \alpha \in A, \beta \in B$

  $|A|, \ |B|$
  $|AB| \le |A| \cdot |B|$
  Конкатенация различных слов может дава одинаковый результат
  Пример:
  $A = \{0, 00\}$
  $B = \{0, 00\}$
  $AB = \{00, 000, 0000\}$
- A^* — замыкание Клини $A^* = \bigcup_{k=0}^{\infty} A^k$
  $AAA = A^3$
  $\alpha \in A^* - \alpha$ можно разложить на k подстрок, каждая из которых принадлежит A
  $\Sigma = \{'0', '1', '\_'\}$
  $00\_\_1 - \in \Sigma^5$
  $A^0 = \{\varepsilon\}$
  $A^0 \cdot A = A$

Регулярные операции

- $A \cup B$
- AB
- A^*

$\exists$ базовый набор языков. С помощью регулярных операций над ними можно получать новые языки, которые называются **регулярными**

Базовый язык — $c_i \in \Sigma$
$\mathrm{Reg}_0 = \{\varnothing, \{\varepsilon\}, \{c_1\}, \{c_2\}, \dots\}$
$\mathrm{Reg}_{k+1} = \mathrm{Reg}_k \cup \{AB \mid A, B \in \mathrm{Reg}_k\} \cup \{A \cup B \mid A, B \in \mathrm{Reg}_k\} \cup \{A^* \mid A \in \mathrm{Reg}_k\}$
$\mathrm{Reg} = \bigcup_{k=0}^{\infty} \mathrm{Reg}_k$

Пример:
$\Sigma = \{0, 1\}$
$\mathrm{Reg}_0 = \{\varnothing, \{\varepsilon\}, \{0\}, \{1\}\}$

$\mathrm{Reg}_1 = \{\varnothing, \{\varepsilon\}, \{0\}, \{1\}, \{\varepsilon, 0\}, \{\varepsilon, 1\}, \{0, 1\}, \{0, 0\}, \{01\}, \{11\}, \{10\},$
$\{\varepsilon, 0, 00, 000, \dots\}$ — на этом моменте (замыкание 0) язык уже становится бесконечным
$\{\varepsilon, 1, 11, 111, \dots\} \qquad \},$
$\mathrm{Reg}_2 = \{\dots, \{0, 01, 011, \dots,$
$1, 11, \dots\}, \dots\}$

Регулярные выражения (академические)
Reg_0
$\varnothing \to \varnothing$
$\{\varepsilon\} \to \varepsilon$
$\{c_i\} \to c_i$

L
$L = \underset{\alpha}{A}\underset{\beta}{B}$
$L \to \alpha\beta$

$L = \underset{\alpha}{A} \cup \underset{\beta}{B}$
$L \to \alpha \mid \beta$

$L = A^*$
$L \to \alpha^*$
$\alpha^* \quad \alpha\beta \ \alpha \mid \beta$
макс ср мин

Пример:
$\left(0 \ |^2 \ 11^1\right)^{*^3} \in \mathrm{Reg}_3$
$0 \to \{0\}$
$1 \to \{1\}$
$11 \to \{1\}\{1\} = \{11\}$
$0 \mid 11 \to \{0\} \cup \{11\} = \{0, 11\}$
$(0 \mid 11)^* \to \{0, 11\}^*$
Программистам удобнее пользоваться расширенными регулярными выражениями
Например:
$A^k = \underbrace{AA \dots A}_{k}$
$A^+ = AA^*$

Иерархия формальных языков *(каждая следующая ступень полностью включает в себя предыдущую)*:
- Конечные — самые простые для работы: их легко можно перебирать, переворачивать многое другое
- Регулярные
- Контекстно свободные — пример: ПСП
- Вычислимые
- Перечислимые

L — вычислимый язык $\Rightarrow \exists p : w \in L \to p(w) = 1, \ w \notin L \to p(w) = 0$

Генерация ПСП
ε — ПСП
A — ПСП $\Rightarrow (A)$ — ПСП
A, B — ПСП $\Rightarrow AB$ — ПСП

Проверка ПСП:
Проверка баланса скобок
- `b[0] >= 0`
- `b[2n -1] = 0`

Пример построения регулярного выражения, для получения строки
$\Sigma = \{0, 1\}$ чётное число '1'.

00001000100010001000

$0^*(10^*10^*)^*$

2.2. Детерминированные конечные автоматы:

Определение:
ДКА — набор из пяти элементов: $\langle \Sigma, \ Q, \ s \in Q, \ T \subset Q, \ \delta : Q \times \Sigma \to Q \rangle$
Σ — алфавит
Q — множество состояний
s — начальное состояние
T — множество допускающих (терминальных) состояний
δ — функция переходов

Процесс допуска слова автоматом
Изначально автомат находится в состоянии s
Автомат считывает символы слова по очереди
При считывании символа p_i автомат переходит в состояние $\delta(q, p_i)$, где q — текущее состояние автомата
Процесс продолжается, пока слово не кончится

Автомат **допускает** слово, если после окончания *процесса допуска* автомат окажется в конечном состоянии

Лектор: Андрей Сергеевич Станкевич

2.2.1. Напоминание:

Регулярные языки:
Регулярный язык в 0 поколении $\mathrm{Reg}_0 = \{\ \varnothing, \{\varepsilon\}, \{c_i\}\ \}$

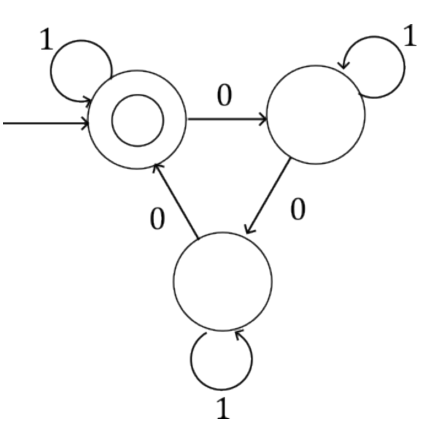
$\mathrm{Reg}_i = \{A | A = B \cup C, A = BC, A = B^*, B, C \in \mathrm{Reg}_{i-1}\}$

$\mathrm{Reg} = \bigcup_{i=0}^{\infty} \mathrm{Reg}_i$

$\underset{\min}{|}$ $\underset{\max}{*}$

$a|bc^*$ $a|(b(c^*))$

Конечные автоматы



визуальное представление конечного автомата

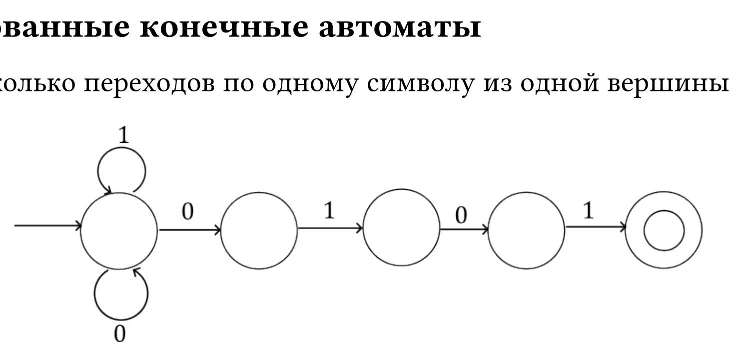
Состояния и переходы между ними
Терминальные состояния обозначаются кружком в центре ноды.

Описание текущей конфигурации автомата состоит из состояния и оставшейся (нескушанной) строки
$\langle p, \alpha \rangle \vdash \langle q, \beta \rangle$
$\alpha = c\beta$
$q = \delta(p, c)$

ДКА — набор из пяти элементов: $\langle \Sigma,\ Q,\ s \in Q,\ T \subset Q,\ \delta : Q \times \Sigma \to Q \rangle$
Σ — алфавит
Q — множество состояний
s — начальное состояние
T — множество допускающих (терминальных) состояний
δ — функция переходов

2.3. Недетерминированные конечные автоматы

Может существовать несколько переходов по одному символу из одной вершины



автомат, допускающий слова, заканчивающиеся на “0101”

Недетерминированные вычисления: *исключительно математическая концепция*
Имеется желаемый результат *(например допуск конечным автоматом)*, и вычисление считается успешным, если существует способ достичь результата.

Недетерминированный вычислитель допускает, если существует последовательность недетерминированных выборов которая приводит к допуску

Недетерминированный вычислитель не допускает, если любая последовательность недетерминированных выборов приводит к недопуску

Пример недетерминированных вычислений:
Игрок Мерлин хочет получить допуск
Игрок Артур хочет узнать правду (допускается объект или нет)

На приведённом выше автомате:
010101 оба получают true
01010 Артур получает true

Функция переходов недетерминированного конечного автомата
$\delta : Q \times \Sigma \to \mathbb{P}(Q)$
$\mathbb{P}(A) = 2^A$

На приведённом выше автомате:

$$\begin{cases} \delta(0,0) = \{0,1\} \\ \delta(4,0) = \varnothing \\ \delta(1,1) = \{2\} \end{cases}$$

$\langle p, \alpha \rangle \vdash \langle q, \beta \rangle$

$\alpha = c\beta, q \in \delta(p, c)$

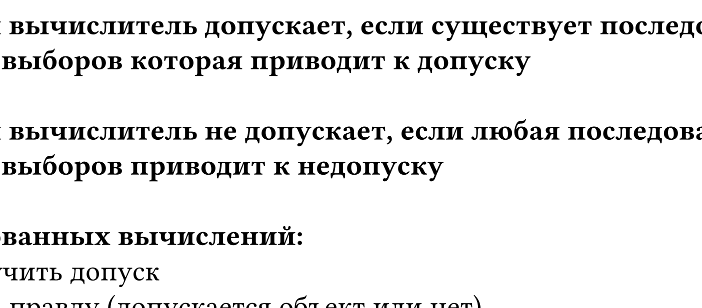
A допускает x, если
$\langle s, x \rangle \overset{*}{\vdash} \langle t, \varepsilon \rangle$
$t \in T$

Пример:

$\langle \mathbf{0}, \mathbf{010101} \rangle \vdash \langle \mathbf{0}, \mathbf{10101} \rangle \vdash \langle \mathbf{0}, \mathbf{0101} \rangle \vdash \langle 0, 101 \rangle \vdash \langle 0, 01 \rangle \vdash \langle 0, 1 \rangle \vdash \langle 0, \varepsilon \rangle$
$\qquad \swarrow \qquad\qquad\qquad\qquad \swarrow \langle \mathbf{1}, \mathbf{101} \rangle \vdash \langle \mathbf{2}, \mathbf{01} \rangle \swarrow \langle 1, 1 \rangle \vdash \langle 2, \varepsilon \rangle$
$\qquad \langle 1, 10101 \rangle \vdash \langle 2, 0101 \rangle \vdash \langle 3, 101 \rangle \vdash \langle 4, 01 \rangle \qquad \swarrow \langle \mathbf{3}, \mathbf{1} \rangle \vdash \langle \mathbf{4}, \boldsymbol{\varepsilon} \rangle$

$\langle 0, 010101 \rangle \vdash^* \langle 0, \varepsilon \rangle$
$\qquad\qquad \vdash^* \langle 3, \varepsilon \rangle$
$\qquad\qquad \vdash^* \langle 4, \varepsilon \rangle$

Но конечный автомат простое устройство. Для проверки на его допуск можно воспользоваться следующим способом



Такую табличку можно получить динамикой:

```
reach[i][u] #можно ли оказаться в u, сделав i переходов

#Просчёт динамики
reach[0][s]=true
for i in range(n):
  for u in Q:
    if reach[i][u]:
      for v in delta(u,x[i]):
        reach[i+1][v]=true

#Проверка на допуск
for t in T:
  if reach[n][t]:
    return True
return False
```

Асимтотика проверки на допуск:
- Недетерминированный автомат $O(q^2 \cdot n)$
- Детерминированный автомат $O(n)$

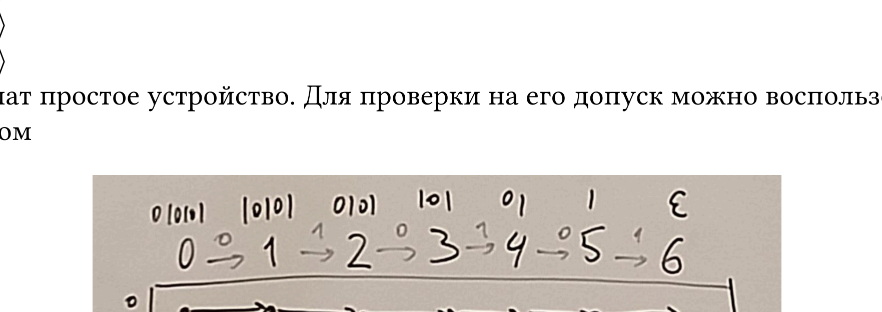
Теорема: $\forall$ НКА $\exists$ эквив. ДКА.

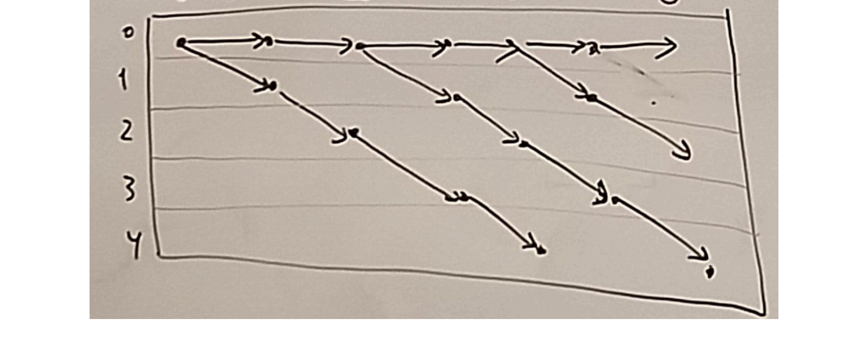
$\Sigma, Q, s \in Q, T \subset Q, \delta$

$\Sigma, 2^Q, \{s\}, T' = \{A \subset Q : A \cap T \neq \varnothing\}, \delta'$

$\delta'(A, c) = \{v : \exists u \in A, v \in \delta(u, c)\}$

Такой процесс называется детерминацией
Пример

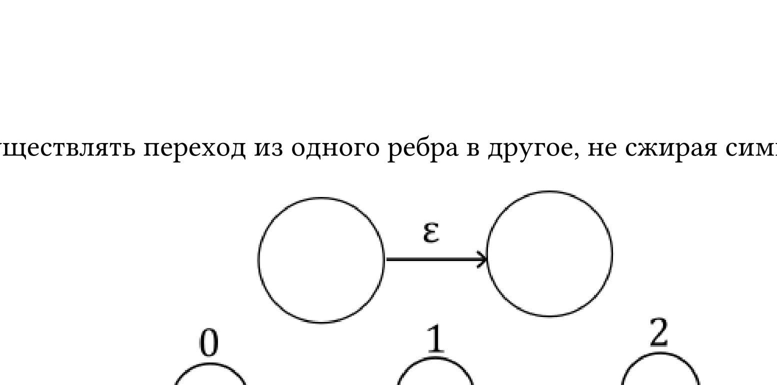




$$\begin{cases} 0 \mid 1 \to 1 \\ 0 \mid 0 \to 01 \\ 01 \mid 0 \to 01 \\ 01 \mid 1 \to 02 \\ 02 \mid 1 \to 0 \\ 02 \mid 0 \to 013 \\ 013 \mid 0 \to 01 \\ 013 \mid 1 \to 1 \\ 024 \mid 0 \to 013 \\ 024 \mid 1 \to 0 \end{cases}$$

2.4. ε-НКА

Разрешим автомату осуществлять переход из одного ребра в другое, не сжирая символ

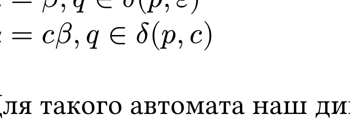


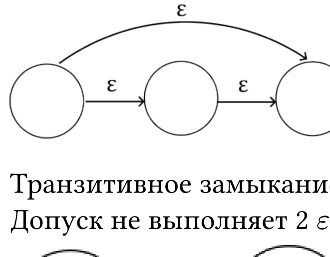
$\delta : Q \times (\Sigma \cup \{\varepsilon\}) \to \mathbb{P}(Q)$
$\langle p, \alpha \rangle \vdash \langle q, \beta \rangle$
$\alpha = \beta, q \in \delta(p, \varepsilon)$
$\alpha = c\beta, q \in \delta(p, c)$

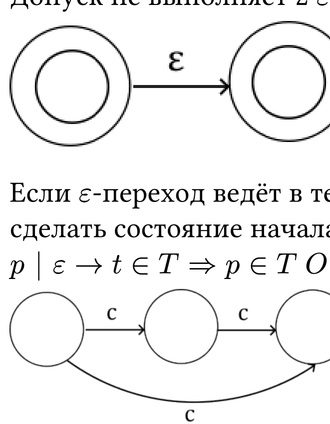
Для такого автомата наш динамический алгоритм перестаёт работать :(

Теорема: $\forall$ ε-НКА $\exists$ эквив НКА

1.

   Транзитивное замыкание
   Допуск не выполняет 2 ε-перехода подряд. $O(n^3)$
2. 

   Если ε-переход ведёт в терминальное состояние,
   сделать состояние начала перехода терминальным
   $p \mid \varepsilon \to t \in T \Rightarrow p \in T$ $O(n^2)$
3. 

   Транзитивное замыкание ε+c перехода в c переход
   $p \mid \varepsilon \to q, q \mid c \to r \Rightarrow p \mid c \to r$ $O(n^3\sigma)$
4. 

   убрать все ε-переходы. $O(n^2)$

2.5. Теорема Клини

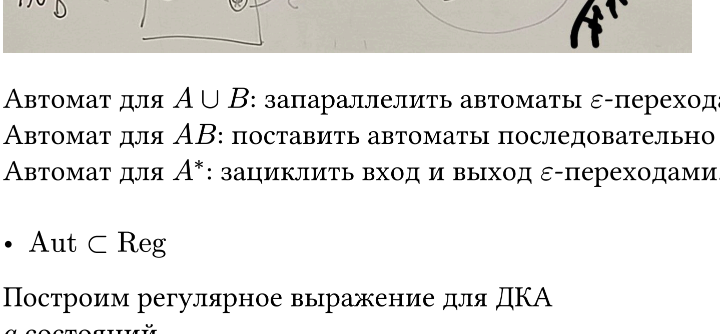
Рег. выр $\equiv$ ДКА.
Регулярный язык можно задать тогда и только тогда, когда существует ДКА для допуска слов в нём
$\mathrm{Reg} = \mathrm{Aut}$

Доказательство:

- $\mathrm{Reg} \subset \mathrm{Aut}$

$\forall i\ \ \mathrm{Reg}_i \subset \mathrm{Aut}$
Для удобства, все автоматы имеют одну точку входа и одну точку выхода.
Индукция:
База - $\mathrm{Reg}_0 \subset \mathrm{Aut}$

Индукционный переход:



Автомат для $A \cup B$: запараллелить автоматы ε-переходами
Автомат для AB: поставить автоматы последовательно и соединить ε-переходом
Автомат для A^*: зациклить вход и выход ε-переходами.

- $\mathrm{Aut} \subset \mathrm{Reg}$

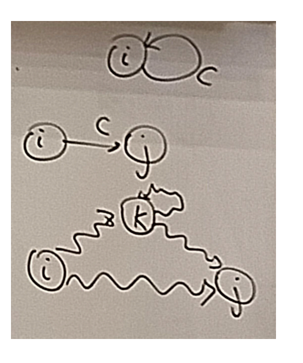
Построим регулярное выражение для ДКА
q состояний
q^3 регулярных выражений.

$$\xi_{ijk} \left| \begin{array}{l} i = 1..q \\ j = 1..q \\ k = 0..q \end{array} \right.$$

$L(\xi_{ijk}) = \left\{ x \mid \langle i, x \rangle \overset{*}{\vdash} \langle k, \varepsilon \rangle, \text{промежуточные состояния имебт номер} \le k \right\}$

$$k = 0 : \begin{cases} \xi_{ij0} = \varepsilon \mid c \mid \dots \text{ if } i \mid c \to i \\ \xi_{ij0} = c | \dots \qquad \text{if } i \mid c \to j \end{cases}$$

$k > 0 : \{\xi_{ijk} = \xi_{ijk-1} \mid \xi_{ikk-1}\xi^*_{kkk-1}\xi_{kjk-1}$



$\varphi = \xi_{s,t_1,q} \mid \xi_{st_2,q} \mid \dots$

$$\begin{cases} \xi_{110} = \varepsilon \mid 1 \\ \xi_{120} = 0 \\ \xi_{210} = 0 \\ \xi_{2,2,0} = \varepsilon|1 \qquad\qquad = (1^*01^*01^*)^* \\ \xi_{111} = \varepsilon|1|(\varepsilon|1)(\varepsilon|1)^*(\varepsilon|1) = 1^* \\ \xi_{121} = 0|(\varepsilon|1)(\varepsilon|1)^*(0) = 1^*0 \\ \dots \end{cases}$$

2.6. Регулярные языки

2.6.1. Минимизация ДКА

$L = \{$строки из $0, 1$: $\#0 = \#1 \bmod 2\}$

Примеры автоматов для такого языка:

Автоматы эквивалентны друг другу, но правый в 2 раза меньше левого

Определение: эквивалентные состояния
A - ДКА
$u, v \in Q$
$u \sim v$, если $\forall s \in \Sigma^* : [\delta(u, s) \in T] = [\delta(v, s) \in T]$

! $\sim$ — *отношение эквивалентности:*
1. Рефлексивность: $u \sim u$ — очевидно
2. Симметричность: $u \sim v \Leftrightarrow v \sim u$ — очевидно.
3. Транзитивность: $u \sim v \wedge v \sim w \Rightarrow u \sim w$
   Доказательство: (от противного)
   Из u приходим в терминальное состояние. Из w приходим в не терминальное состояние. Тогда, посмотрим на v. если v приходит в терминальное состояние то $v \nsim w$, в другом случае $u \nsim v$

Занимательный факт:
Для минимизации ДКА необходимо выделить все эквивалентные состояния и объединить их между собой

Так как $\sim$ — отношение эквивалентности, мы можем выделять классы эквивалентности – вершины минимизированного автомата
Если до перестройки автомата между вершинами классов u и v было проведено ребро s_1, то оно должно быть проведено между классами $K(u)$ и $K(v)$

Утверждение:
$u \sim v, c \in \Sigma \Rightarrow \delta(u, c) \sim d(v, c)$

Доказательство:
Если $\delta(u, c)$ и $\delta(v, c)$ отличаются строкой s, то u и v отличаются строкой cs

Алгоритм выделения классов эквивалентности $(O(n^2 \cdot |\Sigma|))$
- $u \nsim v \wedge \delta(a, c) = u \wedge \delta(b, c) = v \Rightarrow a \nsim b$

$$\text{used}[n][n]$$
$$\text{used}[u][v] = \text{True} \Rightarrow u \nsim v$$

```
for x in T:
  for y !in T:
    used[x][y] = used[y][x] = True
    queue.add((x, y))
    queue.add((y, x))
while queue:
  u,v=queue.next()
  for c in Sigma:
    for x in Nodes.where(x=> u in x.at(c)):
      for y in Nodes.where(y=> v in y.at(c)):
        if not used[x][y]:
          used[x][y]=True
          queue.add((x,y))
```

- $\text{used}[x][y] = \text{False} \Rightarrow x \sim y$
- Строим новый автомат A

Теорема: A - ДКА, $\forall u, v \in Q, u \nsim v$, все вершины A достижимы из SA. тогда
1. $\forall B$ - ДКА $L(A) = L(B), |Q_B| \geq L(Q_A)$
2. $\forall B$ - ДКА $L(A) = L(B), |Q_B| = L(Q_A) \Rightarrow A$ и B изоморфны

Доказательство:
1. - Запишем ватомат A и автомат B как один большой автомат *с двумя стартовыми вершинами*
   - $S_A \sim S_B$
   - $\forall v \in Q_A \exists u \in Q_B : v \sim u$
   - Предположим, что $Q_B < Q_A \Rightarrow \exists x, y \in Q_A : x \sim z, y \sim z \Rightarrow x \sim y$ — противоречие
2. $|Q_A| = |Q_B|$ — биекция
   $\Pi : Q_A \to Q_B$
   $x \in \Pi(x) \Rightarrow \delta_A(x, c) \sim \delta_B(\Pi(X), c)$

2.7. Нерегулярные языки

Классический пример нерегулярного языка:
L - язык ПСП. {"", "()", "(())", "()()", ...}

Для того, чтобы проверить, является ли строка ПСП, необходимо пройтись по строке, поддерживая баланс скобочек. Если во время прохода баланс окажется отрицательным или будет не равен 0 после прохода по сторке, строка не ПСП

Чтобы создать автомат для проверки ПСП, необходимо создать по состоянию на каждое значение баланса скобок, что не получится сделать за конечное число вершин

Доказательство:

$L \notin \text{Reg}$, от противного:
$\sqsupset \exists L \in \text{Reg} \Rightarrow \exists A$ - ДКА, $L(A)$=ПСП, $|Q_A| = n$
Построим последовательность
$s_1 =$ "(", $s_2 =$ "((", ..., $s_{n+1} = s_n +$ (

Тогда, по принципу Дирихле, будет хотя бы одно совпадение состояний.

Лемма о разрастании (boost) (о накачке (pumping)):

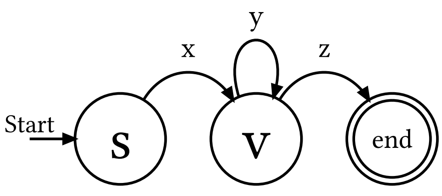
$L \in \text{Reg} \Rightarrow \exists n > 0 : \forall w \in L, |w| \geq n, \exists x, y, z : w = xyz, |xy| \leq n, y \neq \varepsilon \Rightarrow \forall k \geq 0, xy^k z \in L$

Отрицание леммы о разрастании:

$\forall n > 0 \exists w \in L, |w| \geq n : \forall x, y, z : w = xyz, |xy| \leq n, y \neq \varepsilon \exists k \geq 0 : xy^k z \notin L \Rightarrow L \notin \text{Reg}$

Пример:
$L = \{0^n 1^n\} = \{\varepsilon, 01, 0011, ...\}$
$!L \in \text{Reg}$
1. $n > 0$
2. выбирем $w = 0^n 1^n$
3. $x = 0^a, y = 0^b, z = 0^{n-a-b} 1^n$
4. $k = 0 \Rightarrow xk^k z = 0^a 0^{n-a-b} 1^n = 0^{n-b} 1^n$

$L \in \text{Reg} \Rightarrow \exists A$ - ДКА, $n = |Q_A|$

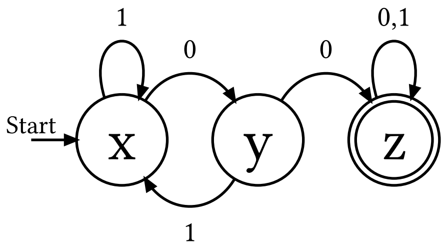


2.8. Система линейных уравнений в регулярных выражениях

$L = \alpha L + \beta$, где L — язык, α, β - регулярные выражения, $+ \equiv |$

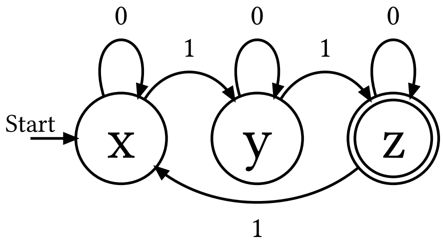
Пример: $L = aL + b = a^* b$
Докажем единственность решения:
Существует минимальный контрпример:
$x \in L, x \notin a^* b$
$\left.\begin{array}{l} x{=}b \\ x{\neq}\varepsilon \\ x{\neq}a \end{array}\right| \Rightarrow |x| \geq 2$
$x = ay, y \in L, y \notin a^* b \Rightarrow x$ - не минимальный контрпример. $\Rightarrow \nexists x : x \in L, x \notin a^* b$

Пример:



L_i - язык слов, которые допускаются из состояния i
$\begin{cases} x=1x+0y \\ y=1x+0z \\ z=0z+1z+\varepsilon \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} z=(0|1)^* \\ y=1x+0(0|1)^* \\ x=1x+0(1x+0(0|1)^*)=(1|01)x+00(0|1)^* \end{cases} \Rightarrow x = (1|01)^* 00(0|1)^*$
Замечание: $x_1 = \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \alpha_3 x_3 + \ldots + \beta = \alpha_1 x_1 + \beta'$
Правила: $x = ax + b = a^* b$
x - терминальный - $x = ax + b + \varepsilon$
$L = \alpha L + \beta$
$\alpha^* \beta \subset L$
- $x \in \beta \Rightarrow x \in L$
- $x \in \alpha, y \in \beta, \Rightarrow xy \in L \Leftrightarrow \alpha\beta \in L$
- $x \in \alpha^k, y \in \beta, \Rightarrow xy \in L \Leftrightarrow \alpha^k \beta \in L$

1. $\varepsilon \notin \alpha \Rightarrow \alpha^* \beta$ - ед. решение. x - мин. решение $x \in L, x \notin \alpha^* \beta$
   - $x \in \beta - x \in \alpha^* \beta$
   - $x \in \alpha L - x = yz, y \in \alpha, z \in L$
     $|y| \geq 1 \Rightarrow |z| < |x|, z \notin \alpha^* \beta$ ($w \in \alpha^* \beta \Rightarrow \alpha w \in \alpha^* \beta$)
2. $\varepsilon \in \alpha \Rightarrow \forall N \in \Sigma^* : \alpha^* \beta \cup N$ — решение Ответ - $\alpha^* \beta \cup A$, (A - язык)
   Пример: $3 \nmid \#1$



$\begin{cases} x=0x+1y \\ y=\varepsilon+0y+1z \\ z=\varepsilon+0z+1x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} z=0^*(1x+\varepsilon) \\ y=0^*(10^*(1x+\varepsilon)+\varepsilon) \\ x=0x+10^*(10^*(1x+\varepsilon)+\varepsilon)=(0|10^*10^*1)x+(10^*(10^*+\varepsilon)) \end{cases} \Rightarrow x = (0|10^*10^*1)^* 10^*(10^* + \varepsilon)$

2.9. Операции над регулярными языками

$A, B \in \mathrm{Reg}$

- $A \cup B, AB, A^*$
- $A \cap B = Q = Q_A \times Q_B, \delta(\langle a, b\rangle, c) = \langle \delta_A(a, c), \delta_B(b, c)\rangle, S = \langle S_A, S_B\rangle, T = \{\langle a, b\rangle \mid a \in T_A, b \in T_B\}$
  Произведение автоматов
- $A \oplus B = \{w \mid w \in A \oplus w \in B\}$ **Следствие:**
  $A_1, \ldots, A_n \in \mathrm{Reg}, f : \mathbb{B}^n \to \mathbb{B}, L = \{w | f(w \in A_1, \ldots, w \in A_n) = 1\}, L \in \mathrm{Reg}$
- $\overline{A} = \Sigma^* \setminus A : T' = \overline{T}$
- $\varphi \in \mathrm{Hom}, \varphi(\alpha\beta) = \varphi(\alpha)\varphi(\beta)$
  $\varphi_0 : \Sigma \to \Sigma^*$
  $\varphi : \Sigma^* \to \Sigma^* \quad \varphi(c_1 c_2 \ldots c_n) = \varphi(c_1)\varphi(c_2)\ldots\varphi(c_n)$
  $A \in \mathrm{Reg} \Rightarrow \varphi(A) \in \mathrm{Reg}, \varphi^{-1}(A) \in \mathrm{Reg}$
  $\varphi(A) \notin \mathrm{Reg} \Rightarrow A \notin \mathrm{Reg}$
  Пример:
  $a^n b^n \notin \mathrm{Reg}, \varphi_0 : \begin{cases} a \mapsto a \\ b \mapsto b \\ c \mapsto b \end{cases} \Rightarrow a^n b^n c^{n-k} \notin \mathrm{Reg}$
  Пример:
  $a^n b^n \notin \mathrm{Reg}, \varphi_0^{-1} : \begin{cases} a \mapsto aa \\ b \mapsto b \end{cases} \Rightarrow a^{2n} b^n \notin \mathrm{Reg}$
  φ может переводить ДКА в ε-НКА

3. Формальные языки

Определение: <u>формальная грамматика</u>

Описание формального языка с помощью четырёх элементов:
$\Gamma = \langle \Sigma,\ N,\ S \in N,\ P \subset ((\Sigma \cup N)^* N (\Sigma \cup N)^*) \times (\Sigma \cup N)^* \rangle$
Σ – алфавит (множество терминалов)
N – множество нетерминалов
S – начальный символ
P – правила продукции $\alpha \to \beta$

3.1. Контекстно-свободные грамматики

(КС-грамматики, CFG)

Пример:

Алфавит – $\Sigma = \{"(", ")"\}$

Нетерминалы (переменные) – $N = \{ \underbrace{S}_{\text{П.С.П}} \}$

Правила продукции – $P = \begin{cases} S \to \varepsilon \\ S \to (S) \\ S \to SS \end{cases}$

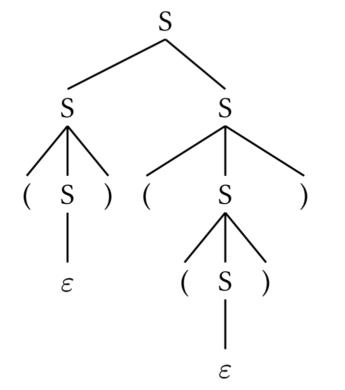
Стартовый нетерминал – S - старт

$\begin{cases} E \to T \\ E \to E + T \\ T \to F \\ F \to T * F \\ F \to n \\ F \to (E) \end{cases}$
$\Sigma = \{n, (,), +, *\}$
$N = \{E, T, F\}$
E – старт.
Разбор выражений

1. $()(())$
   Пример линейного вывода Вывод – $S \Rightarrow SS \Rightarrow (S)(S) \Rightarrow ()((S)) \Rightarrow ()(())$

2. $()()()$
   Неоднозначность записи вывода
   $S \Rightarrow SS \Rightarrow SSS$

3. Дерево разбора



Определение контекстно-свободная грамматика

$P = \langle \underbrace{\Sigma}_{\text{Терминалы}},\ \underbrace{N}_{\text{нетерминалы}},\ \underbrace{S}_{\text{старт}} \in N,\ \underbrace{P}_{\text{правила}} \subset N \times (N \cup \Sigma)^* \rangle$

$(N \cup \Sigma)^*$ – сентенциальные формы (предложения)

(Контекстно-зависимые грамматики – $\alpha A \beta \to \alpha \gamma \beta$: α, β – контекст)

Стандартные обозначения
A, B, C, X, Y, Z - нетерминалы
a, b, c, d, f - символы
s, t, x, y, z - строки из символов, Σ^*
i, j, k, m, n - числа
$\alpha, \beta, \xi, \omega$ - строки из терминалов и нетерминалов $(\Sigma \cup N)^*$
$(N \cup \Sigma)^* \Rightarrow$
$\alpha \underset{k}{\Rightarrow} \beta \Leftrightarrow \alpha = \xi A \eta, A \to \gamma \in P, \beta = \xi \gamma \eta$
$\alpha \underset{k}{\Rightarrow} \beta, \overset{*}{\Rightarrow} = \cup_{k=0}^{\infty} \Rightarrow$
Левосторонний вывод: $\underset{l}{\Rightarrow} \Leftrightarrow \xi \in \Sigma^*$
Правосторонний вывод: $\underset{r}{\Rightarrow} \Leftrightarrow \eta \in \Sigma^*$

Определение: однозначная граммитика

$\forall$ строка ≤ 1 дерева разбора
Однозначная граммитика для правильных скобочных последовательностей:
$\begin{cases} S \to \varepsilon \\ S \to S(S) \end{cases}$

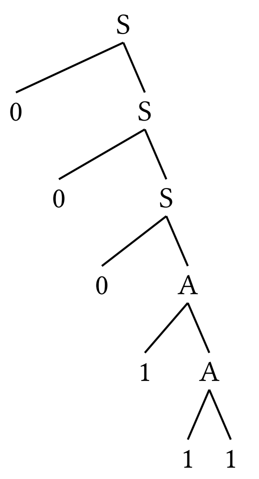
Определение: язык контекстно-свободной грамматики:

$L(\Gamma) = \{x \mid S \Rightarrow^* x\}$
A – к.с. язык, если $\exists$ к.с. гр. Γ
$A = L(\Gamma)$
Язык $0^a 1^b 2^b 3^a \cup 0^a 1^a 2^b 3^b$ - существенно неоднозначный (не имеет однозначной грамматики)

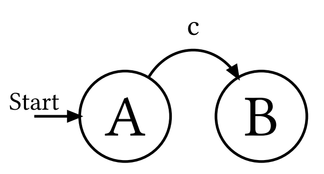
3.1.1. Reg vs CF?

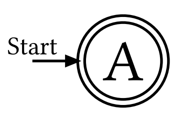
Определение: Праволинейная граммитика $\begin{cases} A \to aB \\ A \to a \\ A \to \varepsilon \end{cases}$

Пример $\begin{cases} S \to 0S \\ S \to 1A \\ S \to \varepsilon \\ A \to 1A \\ A \to \varepsilon \end{cases} = 0^* 1^*$



Теорема: праволинейные грамматики задают регулярные языки
$N = Q$
S – стартовое состояние





$A \to \varepsilon$

$A \to cB$

$\langle s, \alpha\beta \rangle \mid -^* \langle p, \beta \rangle \Leftrightarrow S \Rightarrow^* \alpha P$
$Q = N \cup \{t\}$

Следствие: Reg $\subsetneq$ CF

Регулярные языки - языки третьего класса по Хомскому
КСГ - языки второго класса по Хомскому

Нормальная форма хомского
$\begin{cases} A \to BC \\ A \to a \\ S \to \varepsilon \text{ для языков принимающих } \varepsilon. \text{ если есть, то } S \text{ не встречается в правых частях грамматик} \end{cases}$
Любую грамматику можно перевести в нормальную форму хомского.

Бесполезные символы:
$S \to a$
$S \to aA$
$A \to aA$
$A \to aB$
$B \to bA$
$C \to b$

Непорождающий символ $A \overset{*}{\nRightarrow} x, x \in \Sigma^*$

Недостижимый символ $S \overset{*}{\nRightarrow} \alpha C \beta$

Избавление от бесполезных символов
1. Удалить непорождающие
2. Удалить недостижимые