TRABAJO PRÁCTICO Nº 1

CUESTIONES TEÓRICO PRÁCTICAS

1. Considere el siguiente problema de valor inicial (PVI): $\frac{dy}{dx} = xy^{1/2}$; $y(0) = 0$

(a) Compruebe que $y_1(x) \equiv 0$ es una solución para toda x. (b) Demuestre que $y_2(x) = \frac{1}{16}x^4$ es una solución. (c) Verifique que $y_1(0) = y_2(0)$ pero $y_1(x) \neq y_2(x)$ para toda x. ¿Por qué esto no contradice el teorema de existencia y unicidad?

2. Demuestre que en el intervalo:

(a)[0,π] las funciones $y_1(x) \equiv 1$ e $y_2(x) = \cos x$ satisfacen el PVI: $\frac{dy}{dx} + \sqrt{1-y^2} = 0$; $y(0) = 1$

(b) [0,+∞[las funciones $y_1(x) \equiv 0$ e $y_2(x) = \frac{1}{9}x^3$ satisfacen el PVI: $\frac{dy}{dx} = \sqrt{x.y}$; $y(0) = 0$

(c) ¿Por qué los PVI dados en (a) y en (b) no contradicen el teorema de existencia y unicidad?

3. Determine en cada caso si el teorema de existencia y unicidad garantiza o no la existencia de una solución para el problema de valor inicial dado. Si la existencia está garantizada, entonces determine si el teorema asegura o no la unicidad de la solución dada. Determine los intervalos de existencia y unicidad.

a) $y' = 2x^2y^2;\quad y(1) = -1$

b) $y' = x\ln y;\quad y(1) = 1$

c) $y' = y^{1/3};\quad y(0) = 1$

d) $y' = y^{1/3};\quad y(0) = 0$

e) $y' = \frac{x}{y};\quad y(1) = 0$

f) $y' = \ln(1+y^2);\quad y(0) = 0$

4. Soluciones que no pueden expresarse en términos de funciones elementales.

Ciertas integrales indefinidas (antiderivadas) tales como $\int e^{x^2}\,dx$ no pueden expresarse en términos finitos usando funciones elementales. Cuando se encuentra una integral de este tipo al resolver ecuaciones diferenciales, a veces resulta útil usar integración definida con límite superior variable. Por ejemplo, considérese el PVI: $\frac{dy}{dx} = e^{x^2}.y^2$; $y(2) = 1$

(a) Demostrar que se puede expresar la solución del problema mediante $y(x) = \left\{1 - \int_2^x e^{t^2}\,dt\right\}^{-1}$.

(b) Use integración definida para encontrar la solución explícita de: $\frac{dy}{dx} = e^{x^2}$; $y(0) = 0$

5. Soluciones formales. El método de separación de variables normalmente produce una solución implícita de la ecuación, la cual en ciertos casos se puede resolver para obtener una solución explícita. Este problema ilustra que el método proporciona expresiones que "formalmente" satisfacen la ecuación, pero se requiere cierto cuidado cuando se elige la constante arbitraria, si en verdad se va obtener una solución implícita.

a) Resuelva la ecuación $x + y\,dy/dx = 0$.

b) Demuestre que cuando $C = -1$, no hay valores reales de *x* y *y* que satisfagan $x^2 + y^2 = C$.

c) Si bien *C* es una constante arbitraria de integración, demuestre que solamente para $C > 0$ se obtiene una relación implícita entre *x* y *y*.

6. División por cero y soluciones singulares
Al desarrollar el método de separación de variables, cuando se divide por un factor en x o por un factor en y, se supone tácitamente que éstos son distintos de cero. Este hecho puede ocasionar que se pierdan soluciones.

a) Para la ecuación $y' = (x-3)(y+1)^{2/3}$, use separación de variables para deducir la solución $y = -1 + \left(\frac{1}{6}x^2 - x + C\right)^3$.

b) Demuestre que $y \equiv -1$ satisface la ecuación original.

c) Demuestre que no existe elección de la constante C que haga que la solución del inciso (a) dé lugar a la solución $y \equiv -1$. De modo que se perdió ésta cuando se dividió por $(y+1)^{2/3}$.

7. Investigue en qué casos es posible que la solución de una ecuación diferencial de primer orden esté dada por tramos. ¿Qué significado tiene una solución singular de una ecuación diferencial?

8. Coeficientes discontinuos: hay ocasiones en que el coeficiente P(x) de una ecuación lineal no es continuo debido a las discontinuidades de salto. Sin embargo, se puede obtener una solución "razonable" de la ecuación diferencial. Por ejemplo, considere el problema con valor inicial:

$$\frac{dy}{dx} + P(x).y = x \qquad y(0) = 1$$

donde $P(x) = \begin{cases} 1, si\ 0 \le x \le 2 \\ 3, si\ x > 2 \end{cases}$

a. Determine la solución general para $0 \le x \le 2$.
b. Elija la constante en la solución de la parte (a) de manera que se satisfaga la condición inicial.
c. Determine la solución general para x>2.
d. Seleccionar la constante en la solución de la parte (c) de modo que la solución de la parte (a) y (b) coincidan en x=2 (al pegar las dos soluciones, podemos obtener una función continua que satisface la ecuación diferencial en x=2, punto donde su derivada no está definida).

9. Si el lado derecho de la ecuación (1): $\frac{dy}{dx} = f(x,y)$ se puede expresar como una ecuación que solo depende del cociente y/x, entonces decimos que la ecuación es **homogénea.** Demuestre que la sustitución $v = \frac{y}{x}$ transforma la ecuación homogénea (1) en una ecuación de variables separables.

10. Demuestre que la sustitución $v = ax + by + c$ transforma la ecuación diferencial $y' = F(ax + by + c)$ en una ecuación separable.

11. ¿Bajo qué condiciones se cumple el teorema de existencia y unicidad para las ecuaciones diferenciales lineales?

12. a) Demuestre que $y_c(x) = Ce^{-\int P(x)dx}$ es una solución general de $\frac{dy}{dx} + P(x).y = 0$.

c) Suponga que $y_c(x)$ es cualquier solución general de $\frac{dy}{dx} + P(x).y = 0$ y $y_p(x)$ es una solución particular cualquiera de $\frac{dy}{dx} + P(x).y = Q(x)$. Demuestre que $y(x) = y_c(x) + y_p(x)$ es una solución general de $\frac{dy}{dx} + P(x).y = Q(x)$.

d) ¿Qué relación mantiene esto con la solución de sistemas de ecuaciones lineales algebraicas?

13. (a) Algunas ecuaciones no lineales se pueden transformar en ecuaciones lineales cambiando la variable dependiente. Demuestre que si $g'(y)y' + p(x)g(y) = f(x)$, donde *y* es una función de *x* y *g* es una función de *y*, entonces la nueva variable dependiente $z = g(y)$ satisface la ecuación diferencial $z' + p(x)z = f(x)$.

(c) En base a estos resultados, encuentre la solución de

i) $(\sec^2 y)y' - \tan y = -1$ *ii)* $e^{y^2}\left(2y\,y' + \dfrac{2}{x}\right) = \dfrac{1}{x^2}$

iii) $\dfrac{xy'}{y} + 2\ln y = 4x^2$ *iv)* $\dfrac{y'}{(1+y)^2} - \dfrac{1}{x(1+y)} = -\dfrac{3}{x^2}$

14. . Ecuaciones Exactas

Indicar bajo qué condiciones son exactas las siguientes ecuaciones diferenciales:

a) $(ax+by)dx + (kx+ly)dy = 0$ b) $(x^3 + xy^2)dx + [ax^2y + h(x,y)]dy = 0$

c) $[f(x) + g(y)]dx + [h(x) + l(y)]dy = 0$ d) $f(x)g(y)dx + h(y)dy = 0$

15. Ecuación de Bernoulli.

Una ecuación de primer orden que puede escribirse en la forma $\dfrac{dy}{dx} + P(x).y = Q(x)y^n$ donde $P(x)$ y $Q(x)$ son continuas en un intervalo (a,b) y n es un número real, es una ecuación de Bernoulli.

Demuestre que la sustitución $z = y^{1-n}$ transforma la ecuación de Bernoulli en una ecuación lineal en z:

$$\frac{dz}{dx} + (1-n)P(x).z = (1-n).Q(x).$$

16. Ecuación de Riccati.

a) Una ecuación de primer orden que puede escribirse en la forma (1): $\dfrac{dy}{dx} = P(x).y^2 + Q(x)y + R(x)$ es una ecuación de Riccati.

Si se conoce una solución $u(x)$ de (1), muestre que la sustitución $y(x) = u(x) + \dfrac{1}{v(x)}$ reduce la ecuación (1) a una ecuación lineal en v.

b) Dado que $u(x) = x$ es una solución de $\dfrac{dy}{dx} = x^3.(y-x)^2 + \dfrac{y}{x}$, use el resultado de la parte a) para hallar todas las demás soluciones de esta ecuación.

<u>CUESTIONES TÉCNICAS:</u>

1. En cada uno de los problemas dados verifique por sustitución que cada función considerada es una solución de la ecuación diferencial correspondiente.

a) $y' = 3x^2$; $y = x^3 + 7$

c) $y' + 2xy^2 = 0$; $y = \dfrac{1}{1+x^2}$

b) $y'' + 4y = 0$; $y_1 = \cos 2x,\ y_2 = \operatorname{sen} 2x$

2. En cada uno de los problemas compruebe que $y(x)$ satisface la ecuación diferencial dada y luego determine un valor de la constante C de modo que $y(x)$ satisfaga la condición inicial dada.

a) $y' + y = 0; \quad y(x) = Ce^{-x}, \; y(0) = 2$

b) $e^y y' = 1; \quad y = \ln(x + C), \; y(0) = 0$

c) $y' + y\tan x = \cos x; \quad y(x) = (x + C)\cos x, \; y(\pi) = 0$

3. Hallar la solución de las siguientes ecuaciones diferenciales:

a) $y' = \dfrac{x^2 - 1}{y^2}$

b) $x v' = \dfrac{1 - 4v^2}{3v}$

c) $y' = y(2 + senx)$

d) $y\, senx\, e^{\cos x}\, dx + y^{-1} dy = 0$

e) $(x^2 + y^2)dx + 2xydy = 0$

f) $(y^2 - xy)dx + x^2 dy = 0$

g) $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{y^2 + x\sqrt{x^2 + y^2}}{xy}$

h) $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{x^2 - y^2}{3xy}$

i) $\dfrac{dy}{dx} - \dfrac{y}{x} = xe^x \qquad y(1) = e - 1$

j) $y'\, senx + y\cos x = xsenx \qquad y(\pi/2) = 2$

k) $(t + y + 1)dt - dy = 0$

l) $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{y^2 + x\sqrt{x^2 + y^2}}{xy} \quad y(2) = 0$

4. Aplicando sustituciones adecuadas, resolver las siguientes ED:

a) $(2y + x + 1)dx - (2x + 4y + 3)dy = 0$

b) $(1 + y + x)y' = 1 - 4y - 4x$

c) $y' = \cos(x + y)$

d) $y' = (x + y + 2)^2$

e) $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{1}{e^{4y} + 2x}$

5. Resolver las siguientes *"Ecuaciones de Bernoulli"*:

a) $y' - y = e^{2x} y^3$

b) $\dfrac{dy}{dx} + \dfrac{y}{x} = x^2 y^2$

c) $\dfrac{dy}{dx} + \dfrac{y}{x - 2} = 5(x - 2)y^{1/2}$

d) $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{y^2 + 2xy}{x^2}$

6. En cada caso encontrar un factor integrante de la ecuación diferencial dada. Hallar la solución general.

a) $4ydx + xdy = 0$

b) $(4x + 3y^3)dx + 3xy^2 dy = 0$

c) $2xydx + (y^2 - x^2)dy = 0$

d) $(4x^2 + 3\cos y)dx - x\,\mathrm{sen}\, y dy = 0$

e) $(y\ln y + ye^x)dx + (x + y\cos y)dy = 0$

f) $(4xy^2 + y)dx + (6y^3 - x)dy = 0$

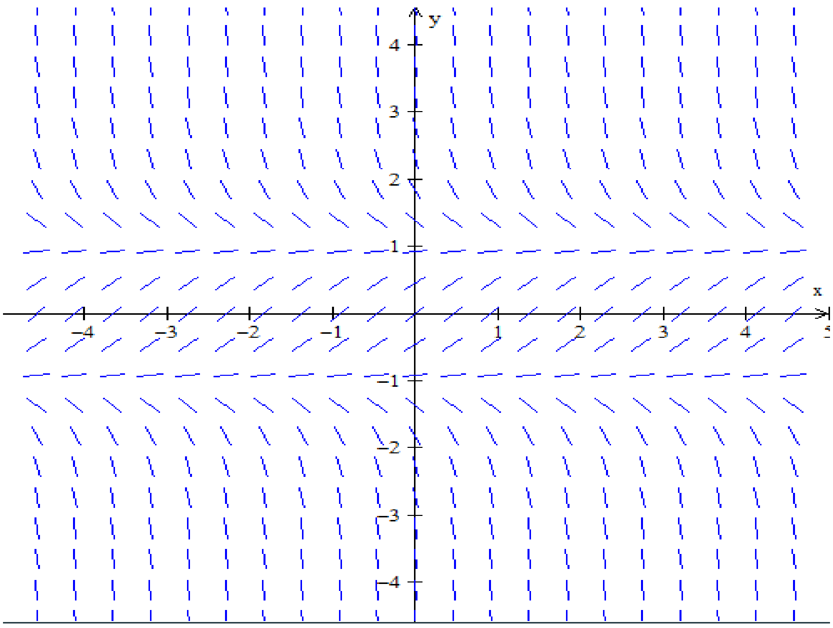
7. Trazar buenos campos direccionales para las ecuaciones diferenciales dadas y graficar varias curvas soluciones aproximadas.

a) $y' = 2x$ b) $y' = y$

c) $y' = x + y$ d) $y' = y / x$

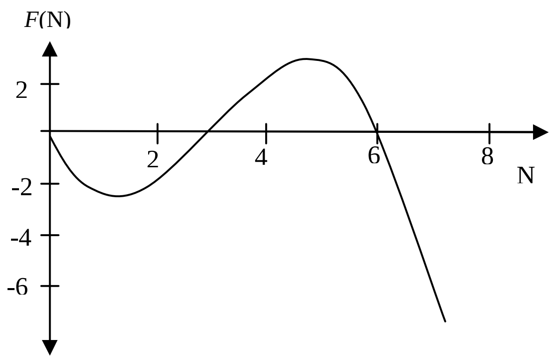
8. Para las Ecuaciones Diferenciales dadas en el punto anterior, encontrar una aproximación mediante el método numérico de Euler. En todos los casos considere la condición inicial $y(1) = 2$. Compare los resultados que obtuvo por ambos enfoques.

9. El campo de direcciones de la ecuación diferencial $y' = 1 - y^2$ es:



a) Dibujar a mano la solución del PVI:
$y' = 1 - y^2 \quad y(0) = 3$
Analizar el comportamiento de la solución cuando $x \to \infty$
b) La ecuación diferencial dada ¿tiene soluciones de equilibrio? Si es afirmativa su respuesta, identifíquelas y determine si son estables o inestables (fundamentar la respuesta).
c) Resuelva la ecuación diferencial en forma analítica.
d) Resuelva la ecuación diferencial usando el método de Euler.
Compare los resultados que obtuvo a través de los tres enfoques.

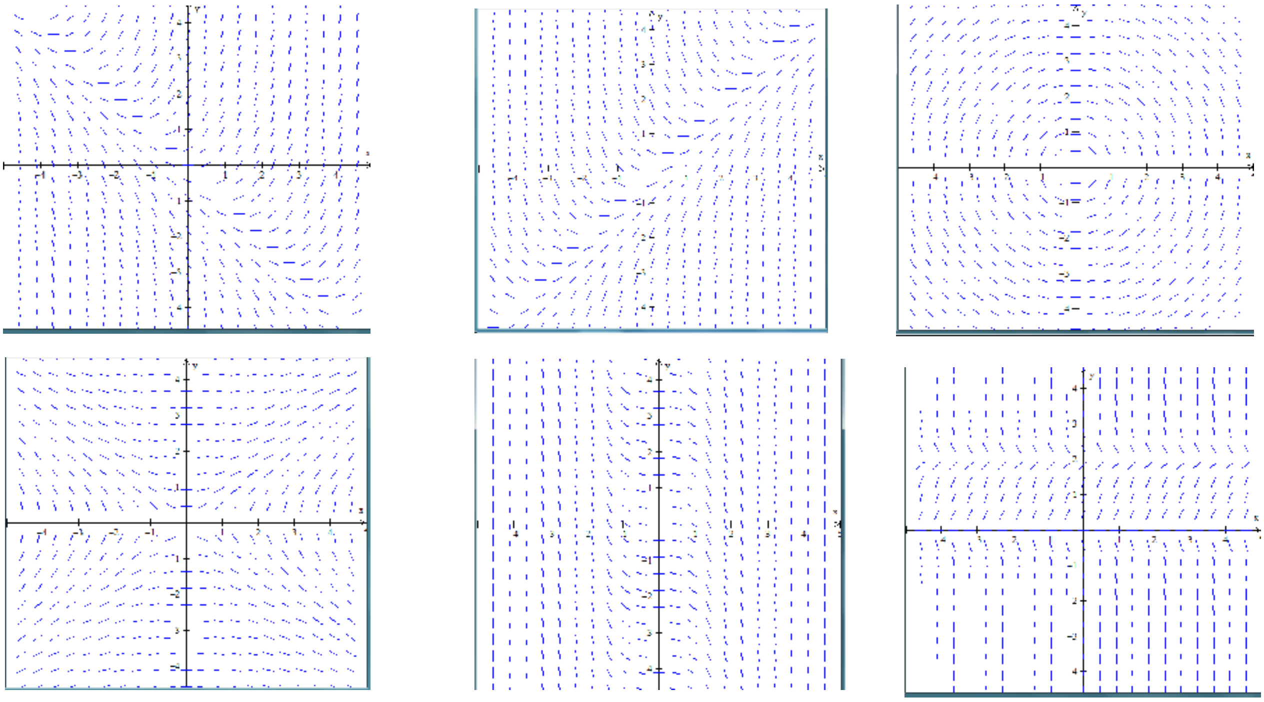
10. Suponga que una población es modelada por la ecuación autónoma
$\frac{dN}{dt} = f(N) \; donde \; f(N) = -4N\left(1 - \frac{N}{3}\right)\left(1 - \frac{N}{6}\right)$
el gráfico de $f(N)$ se muestra en la figura adjunta.



a) ¿Cuáles son las soluciones de equilibrio? ¿Cuál de las soluciones de equilibrio es asintóticamente estable? ¿Cuál es inestable?
b) Para los siguientes valores de la población inicial N(0) ¿cuál es la población límite?
(i) N(0)=2 (ii) N(0)=3 (iii) N(0)= 4 (iv) N(0)=7
c) Realice un bosquejo de la forma global de las soluciones del problema.

11. Dada la ecuación diferencial $y' = y^2 + 1$. Mediante consideraciones cualitativas (sin resolver la ecuación diferencial) decida si existe una solución que pase por los puntos $y(1) = 5$ e $y(8) = 3$.

12. **E**n los siguientes gráficos se ha proporcionado el campo de direcciones de diversas ecuaciones diferenciales. Señale cuáles son las ecuaciones diferenciales que corresponden a cada campo de direcciones.



$a)\dfrac{dy}{dx}=x+y$ $\quad b)\dfrac{dy}{dx}=6y-3y^2$ $\quad c)\dfrac{dy}{dx}=-\dfrac{x}{y}$ $\quad d)\dfrac{dy}{dx}=x-y$ $\quad e)\dfrac{dy}{dx}=-x^2$ $\quad d)\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{x}{2y}$

PROBLEMAS DE APLICACIÓN

Vamos a presentar algunos problemas que se modelan usando ecuaciones diferenciales de primer orden.

1. Un cultivo tiene una cantidad inicial P_0 de bacterias. Cuando t=1h, la cantidad medida de bacterias es $3/2P_0$. Si la rapidez de crecimiento es proporcional a la cantidad de bacterias presentes $P(t)$ en el tiempo t, obtener la ecuación diferencial que modela el crecimiento de la población de bacterias y luego calcular el tiempo para triplicar la cantidad inicial de microorganismos.

2. Cuando pasa un haz de luz por una sustancia transparente, la rapidez con que decrece su intensidad I es proporcional a $I(t)$, donde t representa el espesor, en metros, del medio. En agua de mar clara, la intensidad a 0,92m bajo la superficie es 25% de la intensidad inicial I_0 del haz incidente. ¿Cuál es la intensidad del haz a 4,5m bajo la superficie?

3. En una población, un estudio inicial de crecimiento revela que es aproximadamente exponencial; al cabo de un tiempo, aparece la competencia entre algunos miembros de la población por algún recurso crítico y la tasa de crecimiento disminuye; finalmente, en la madurez, el crecimiento se detiene. Este comportamiento de la población queda descrito por el modelo logístico $\dfrac{dP}{dt}=(a-bP)P \quad P(t_0)=P_0$ donde a y b son dos constantes estrictamente positivas. Use las técnicas de análisis cualitativo para describir el comportamiento de la población para diferentes valores de a y b. Obtenga la solución general de la ecuación logística y analice el comportamiento de la misma cuando el tiempo tiende a infinito. ¿Qué puede decir del comportamiento de la solución?

4. La población del mundo fue cercana a 5.3 miles de millones en 1990. La tasa de nacimientos en la década de 1990 varió de 35 a 40 millones por año y la frecuencia de mortalidad varió de 15 a 20 millones por año. Suponga que la

capacidad de soporte para la población mundial es 100.000 millones. i) Escriba la ecuación diferencial logística para estos datos (debido a que la población inicial es pequeña comparada con la capacidad de soporte, se puede tomar k como una estimación de la rapidez de crecimiento relativo inicial) ii) Use el modelo logístico para estimar la población mundial en el año 2000, y compare con la población real de 6.100 millones. iii) Use el modelo logístico para estimar la población mundial en los años 2.100 y 2.500. iv) ¿Cuáles son sus predicciones si la capacidad de soporte es 50 000 millones?

5. Una medicina se inyecta en el torrente sanguíneo de una paciente a razón constante de *r* gramos por segundo. Al mismo tiempo, esa medicina desaparece con una rapidez proporcional a la cantidad *x(t)* presente al tiempo *t*. Formule una expresión matemática que describa la cantidad *x(t)*.

6. Según la ley empírica de Newton acerca del enfriamiento, la razón con que cambia la temperatura de un objeto es proporcional a la diferencia entre su temperatura y la del medio que lo rodea, que es la temperatura ambiente. i) Si *T(t)* representa la temperatura del objeto al tiempo *t*, T_m es la temperatura constante del medio que lo rodea y *dT/dt* es la razón con que cambia la temperatura del cuerpo, proponga un modelo matemático que describa la situación dada. ii) De acuerdo al modelo planteado en i), y la situación problemática dada a continuación: Al sacar una torta del horno, su temperatura es 150ºC. Después de 3 minutos, de 94ºC. ¿En cuánto tiempo se enfriará hasta la temperatura ambiente de 21ºC?

7. Encuentre curvas *y=y(x)* tales que cada punto $P=(x_0, y(x_0))$ sobre la curva es el punto medio del segmento de recta con puntos extremos en los ejes coordenados y tangente a la curva en $(x_0, y(x_0))$.

8. Un objeto cae en el aire hacia la Tierra. Suponiendo que las únicas fuerzas que actúan sobre el objeto son la gravedad y la resistencia del aire (suponga que esta última es proporcional a la velocidad), use el análisis cualitativo para determinar el comportamiento global de las soluciones y luego determine la velocidad del objeto como una función del tiempo (resolución analítica). Determine la posición en función del tiempo.

9. Una gota de agua que inicialmente tiene una masa de M gramos se va evaporando a velocidad uniforme de m gramos por segundo mientras cae libremente en el aire. Considere que la resistencia que ofrece el aire a la caída es proporcional a la velocidad de la gota. (i) Formule un modelo matemático adecuado para esta situación (Sugerencia: use la segunda ley de Newton en la forma $\sum \vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt}$). (ii) determine la velocidad con que cae el objeto en función del tiempo.

Ejercicios Adicionales: resolver algunos de los ejercicios que aparecen en la bibliografía citada a continuación:
Zill D. (1986) *"Ecuaciones Diferenciales con aplicaciones"*. México: Iberoamérica. Páginas 42, 43, 49, 50, 56, 67, 68.
Edwards H., Penney D. (2001) "*Ecuaciones diferenciales"*. México: Prentice Hall. Páginas 40, 52, 53, 70, 71

Bibliografía:

Blanchard P., Devaney R., Hall G. (1998). "*Ecuaciones diferenciales*". México: Thomson

Boyce, W. y Diprima, R. (2000). *"Ecuaciones Diferenciales y problemas con valores en la frontera"*. 4° ed. México: Limusa.

Edwards H., Penney D. (2001). "*Ecuaciones diferenciales*". México: Prentice Hall

López Rodriguez, M. (2007). "*Problemas resueltos de Ecuaciones Diferenciales"*. España: Thomson.

Nagle K., Saff, E., Snider A. (2001). "*Ecuaciones diferenciales y problemas con valores en la frontera*". México: Addison Wesley

Zill D. (1986) *"Ecuaciones Diferenciales con aplicaciones"*. México: Iberoamérica

Zill D., Cullen M. (2002) "*Ecuaciones Diferenciales con problemas de valores en la frontera*". México: Thomson