PROF. EN MATEMÁTICA
Profesores: Lagraña C. - Moreno A.

Álgebra II

Trabajo Práctico N° 2
Números Complejos

1. Expresar el resultado de las siguientes operaciones como números imaginarios puros:

   a) $\sqrt{-\frac{3}{4}}$
   b) $\sqrt{-49}$
   c) $\sqrt{-\frac{4}{9}}$
   d) $\sqrt{-72}$
   e) $\sqrt{-75}$
   f) $\sqrt{-\frac{27}{100}}$

2. Calcular las siguientes potencias de la unidad imaginaria:

   a) i^{14}
   b) i^{20}
   c) i^{16}
   d) $(-i^5)^5$
   e) i^{13}
   f) i^{-10}

3. Calcular la parte real e imaginaria de $\dfrac{\overline{z}}{1+z^2}$. ¿A qué subconjunto de $\mathbb{C}$ pertenece z?

4. Calcular $\left|\dfrac{(2+\sqrt{5}i)(1+\sqrt{3}i)^3}{\sqrt{5}+\sqrt{3}i}\right|$.

5. Calcular las números complejos z tales que $w = \dfrac{2z-i}{2+iz}$ es:

   a) un número real;
   b) un número imaginario puro.

6. Calcular los números complejos z tales que $w = \dfrac{z-1-i}{z+1+i}$ es:

   a) un número real;
   b) tiene módulo 1.

7. Simplificar $\dfrac{a-bi}{c+di} + \dfrac{a+bi}{c-di}$.

8. Determine los reales a y b que satisfacen:

$$(-1+i)a + (1+2i)b = 1$$

9. Resolver el siguiente sistema:

$$\begin{cases} (1+i)x - iy &= 2+i \\ (2+i)x + (2-i)y &= 2i \end{cases}$$

10. Resolver las ecuaciones dadas completando cuadrados.

a) $x^2 + 5x + 7 = 0$

b) $2x^2 + 10x + 15 = 0$

c) $x^2 - x + 1 = 0$

d) $3x^2 - 8x + 7 = 0$

e) $2x^2 - 6x + 5 = 0$

f) $3x^2 - 2x + 1 = 0$

11. Determinar k, tal que el conjunto solución de la ecuación dada en x contenga: (a) dos números reales; (b) dos números complejos de la forma $a + bi$ y $a - bi$, donde a y $b \neq 0$ son números reales.

    a) $x^2 + 4x + k = 0$

    b) $x^2 - kx + 9 = 0$

12. Si z y w son complejos, se consideran los tres números:

$$x = \frac{z + w}{1 + zw} \qquad y = i\frac{w - z}{1 + zw}, \qquad z = \frac{1 - zw}{1 + zw}$$

    Demostrar que:

    a) $x^2 + y^2 + z^2 = 1$

    b) si $\overline{w} = z$, entonces x, y, z son reales.

13. Expresar en forma polar los siguientes números complejos:

    a) $-1 + i$

    b) $\dfrac{-\sqrt{3} + i}{1 + i}$

    c) $\dfrac{1}{-1 + \sqrt{3}i}$

14. Calcular los números complejos z tales que $w = \dfrac{2z - 1}{z - 2}$

    a) tiene argumento igual a $\pi/2$;

    b) tiene argumento igual a $-\pi/2$;

15. Calcular las soluciones de las ecuaciones:

    a) $z^4 + (1 + i)z^2 + 5i = 0$

    b) $z^4 + (5 + 4i)z^2 + 10i = 0$

16. Dada la siguiente igualdad:

$$|z + w|^2 + |z - w|^2 = 2(|z|^2 + |w|^2)$$

    a) Demostrar la identidad para todo $z, w \in \mathbb{C}$.

    b) Interpretar su significado geométrico.

17. Expresar en forma binómica los números:

    a) $(1 + i)^{25}$

    b) $\left(\frac{1+\sqrt{3}i}{-1+i}\right)^{24}$

    c) $(\sqrt{3} + i)^{37}$

18. Haciendo uso de la fórmula de De Moivre, probar que:

a) $\operatorname{sen}(3\phi) = 3\operatorname{sen}\phi - 4\operatorname{sen}^3\phi$

b) $\cos(4\phi) = 8\cos^4\phi - 8\cos^2\phi + 1$

c) $\operatorname{sen}(5\phi) = 5\operatorname{sen}\phi - 20\operatorname{sen}^3\phi + 16\operatorname{sen}^5\phi$

19. Encontrar las raíces cúbicas de $z = -i$ y representarlas gráficamente.

20. Calcular y representar gráficamente la solución:

    a) $\sqrt{1 + i\sqrt{3}}$

    b) $\sqrt[4]{1 - i}$

    c) $\sqrt[3]{-8}$

    d) $\sqrt[3]{-i}$

    e) $\sqrt[4]{8i}$

    f) $\sqrt[3]{\sqrt{3} + i}$

21. Resolver las ecuaciones $|z| = 4$ y $(\overline{z})^2 = z^2$. Hallar los puntos de intersección de los lugares geométricos que representan las soluciones de dichas ecuaciones.

22. Demostrar que:

    a) $\dfrac{z-1}{1-z} = 1$

    b) $|1 - z| = |1 - \overline{z}|$ e interpretar geométricamente.

23. Describa geométricamente la región determinada por cada una de las siguientes condiciones:

    a) $Im(z) \geq 2$

    b) $|Im(z)| < 2$

    c) $|z| \leq 1$

    d) $|z + 3| = 5$

    e) $|z - 3i| > 5$

    f) $|z - (1 + 2i)| \leq 2$

24. Hallar el lugar geométrico de $z = \dfrac{a+i}{1+2a+i}$, sabiendo que $a \in \mathbb{R}$.

25. Expresar en términos de la exponencial compleja:

    a) $(1 + i)^3$

    b) $(-3 + i\sqrt{3})^4$

    c) $(5 - 5i)^{-6}$

26. Utilizando la forma exponencial de un complejo, calcular el $\ln(i)$.

27. Resolver las siguientes ecuaciones en $\mathbb{C}$:

    a) $\operatorname{sen}(z) = 4$

    b) $4\operatorname{sen}(z) = 3i$

28. La suma de dos números complejos es $3+2i$, el cociente es un número imaginario puro y la parte real de uno de ellos es 2. Hallar dichos números complejos.

29. Analizar e indicar donde está el error:

$$-1 = i^2 = i \cdot i = \sqrt{-1} \cdot \sqrt{-1} = \sqrt{(-1)\cdot(-1)} = \sqrt{1} = 1$$