TRABAJO PRÁCTICO Nº 2. Parte III. Ejercicios Resueltos

Ejercicio N° 21: Sea A = {1, 2, 3, 4, 12}. Examínese el orden parcial de divisibilidad de A: ¿se trata de un orden amplio o estricto? Dibuje el diagrama de Hasse del conjunto con respecto a dicha relación.

Solución:

El orden parcial de divisibilidad del conjunto A es un orden amplio. Veamos a continuación:

Por definición, una relación definida en un conjunto A, $R \subseteq AxA$, es de orden amplio si cumple las propiedades de Reflexividad, Antisimetría y Transitividad.

Reflexividad: $\forall x \in A: xRx \leftrightarrow x|\mathrm{x}$

Como todo número es divisible por sí mismo, entonces se cumple la reflexividad.

Debido a que la relación es reflexiva, no se cumple la arreflexividad. Por lo tanto ya podemos asegurar que la relación NO es de orden estricto.

Antisimetría: $\forall x \in A, \forall y \in A: x|\mathrm{y} \wedge y|\mathrm{x} \rightarrow \mathrm{x} = \mathrm{y}$

$$x|\mathrm{y} \leftrightarrow \exists\, \mathrm{k}_1 \in \mathrm{Z}^+ \;/\; \mathrm{y} = \mathrm{x} \cdot k_1$$

$$y|\mathrm{x} \leftrightarrow \exists\, \mathrm{k}_2 \in \mathrm{Z}^+ \;/\; \mathrm{x} = \mathrm{y} \cdot k_2$$

Sustituyendo la segunda ecuación en la primera:

$$\mathrm{y} = \mathrm{y} \cdot k_2 \cdot k_1$$

Esto se cumple si y solo si $k_2 \cdot k_1 = 1$

Y este producto se cumple en Z^+ si y solo si $k_2 = k_1 = 1$

Consecuentemente, x=y

En efecto, se cumple que la relación es Antisimétrica.

Transitividad: $\forall x \in A, \forall y \in A, \forall z \in A: x|\mathrm{y} \wedge y|\mathrm{z} \rightarrow \mathrm{x}|\mathrm{z}$

$$x|\mathrm{y} \leftrightarrow \exists\, \mathrm{k}_1 \in \mathrm{Z}^+ \;/\; \mathrm{y} = \mathrm{x} \cdot k_1$$

$$y|\mathrm{z} \leftrightarrow \exists\, \mathrm{k}_2 \in \mathrm{Z}^+ \;/\; \mathrm{z} = \mathrm{y} \cdot k_2$$

Sustituyendo la primera ecuación en la segunda: $\mathrm{z} = \mathrm{x} \cdot k_1 \cdot k_2$

Si llamamos $k_3 = k_1 \cdot k_2$

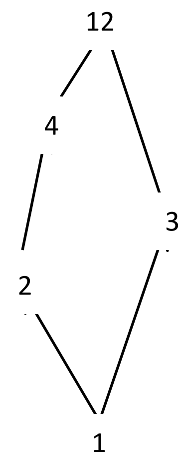
$$\mathrm{z} = \mathrm{x} \cdot k_3$$

Como $k_1 \in Z^+$ y $k_2 \in Z^+$ entonces k_3 también pertenece a Z^+. Por lo tanto $x|z$

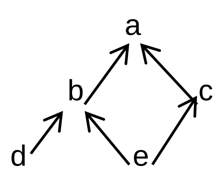
De esta manera se prueba que la relación es transitiva.

En consecuencia, la relación es de orden amplio y parcial.

Su correspondiente diagrama de Hasse:



<u>Ejercicio N° 23</u>: Sea E = {a, b, c, d, e} ordenado según lo indica el siguiente diagrama:



Determine si define un orden total. En caso de ser un orden parcial identifique los pares de elementos no comparables.

<u>Solución:</u>
Una relación de orden es total cuando todos los elementos del conjunto sobre el que está definida son comparables por dicha relación.
En este caso existen elementos que no son comparables: los elementos **b** y **c no son comparables**, y los elementos **d** y **e tampoco son comparables.**
Por lo tanto se puede asegurar que la relación de orden es parcial porque

$$\exists \boldsymbol{x} \in \boldsymbol{E}, \exists \boldsymbol{y} \in \boldsymbol{E} : \boldsymbol{x} \npreceq \boldsymbol{y} \wedge \boldsymbol{y} \npreceq \boldsymbol{x}$$

<u>Ejercicio N° 24</u>: En el conjunto de subconjuntos de S = {a, b, c} considere la relación "⊆". Pruebe, que es de orden parcial.

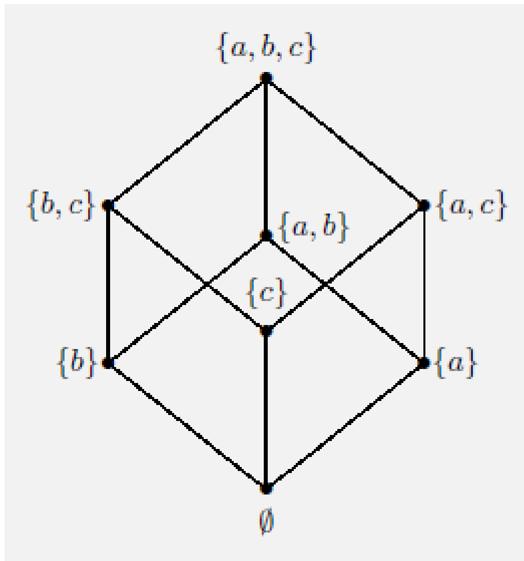
<u>Solución</u>

El conjunto de subconjuntos de S = {a, b, c}, es el conjunto de partes de S:

$$P(S) = \{ \emptyset , \{a\} , \{b\} , \{c\} , \{a , b\} , \{a , c\} , \{b , c\} , \{a , b , c\} \}$$

La relación inclusión amplia “$\subseteq$” es un subconjunto de P(S) x P(S).

El diagrama de Hasse de la relación de inclusión definido en S es:



Se pide probar que la relación “$\subseteq$” que es de orden parcial.

Sabemos que una relación es de orden parcial cuando existen pares de elementos que no son comparables.

$\subseteq$ es una relación de orden parcial en P(S) $\Leftrightarrow$ $\exists$ X $\in$ P(S), $\exists$ Y $\in$ P(S) / X $\not\subseteq$ Y $\wedge$ Y $\not\subseteq$ X

Note que X e Y están en mayúscula, esto se debe a que los elementos de P(S) son conjuntos.

Por definición de orden parcial, alcanza con encontrar dos subconjuntos de S (elementos de P(S)) que no estén incluidos uno en otro.

Considerando, por ejemplo, los conjuntos {a} y { b , c}

{a} $\in$ P(S) y { b , c} $\in$ P(S) , {a} $\not\subseteq$ { b , c} y {b , c} $\not\subseteq$ { a}. Por lo tanto, $\subseteq$ es una relación de orden parcial en P(S)

<u>Ejercicio N° 28</u>: La relación “x divide a y” en **N*** es un orden parcial, ¿cuáles de los siguientes subconjuntos de **N** son totalmente ordenados?:

A = {4, 3, 15}. B = {2, 4, 8, 16}. C = {1, 2, 3}. D = {4,12}. E = {7}.

<u>Solución</u>

Ya se demostró en la teoría que la relación de divisibilidad es una relación de orden amplio.

Las relaciones de

R_1: x | y en A: $R_1 = \{(4, 4), (3, 3), (15, 15), (3, 15)\}$

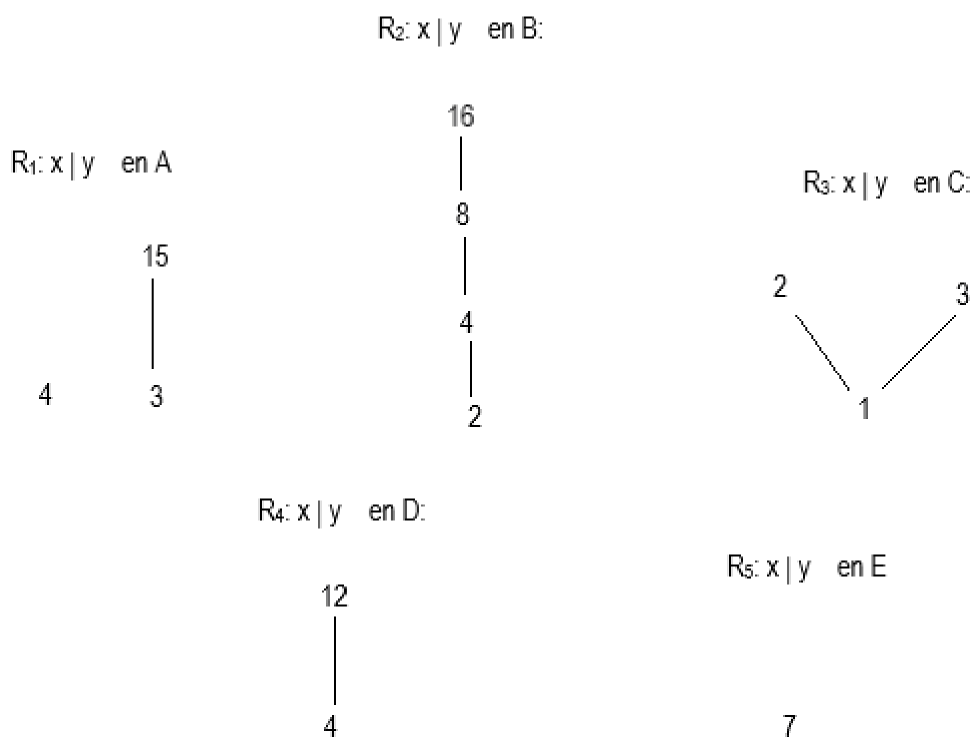
R_2: x | y en B: $R_2 = \{(2, 2), (4, 4), (8, 8), (16, 16), (2, 4), (2, 8), (2, 16), (4, 8), (4, 16), (8, 16)\}$

R_3: x | y en C: $R_3 = \{(1, 1), (2, 2), (3, 3), (1, 2), (1, 3)\}$

R_4: x | y en D: $R_4 = \{(4, 4), (12, 12), (4, 12)\}$

R_5: x | y en E: $R_5 = \{(7, 7)\}$

Los correspondientes diagramas de Hasse son:



Sabemos que una relación es de orden total cuando cualquier par de elementos del conjunto son comparables de acuerdo a la relación de ordena dada.

" | " es una relación de orden total en A $\Leftrightarrow \forall x \in A, \forall y \in A : x \mid y \vee y \mid x$

Observando los diagramas de Hasse, R_2 , R_4 y R_5 son órdenes totales en los conjuntos en los que están definidos.

R1 no es de orden total en A porque $4 \nmid 3$ y $3 \nmid 4$.

R2 es de orden total en B porque: 2 | 4 , 2 | 8 , 2 | 16 , 4 | 8 , 4 | 16 , 8 | 16. Todos los elementos de B son comparables por la relación de divisibilidad.

R3 no es de orden total en C porque $2 \nmid 3$ y $3 \nmid 2$.

R4 es de orden total en D porque: 4 | 12. Todos los elementos de D son comparables por la relación de divisibilidad.

R5 es de orden total en E porque: 7 | 7. Todos los elementos de E son comparables por la relación de divisibilidad.

<u>Ejercicio N° 30</u>: En **R**, ordenado por la relación de menor o igual se considera:

$$A = \{ x \in \mathbf{R} \ / \ x = \frac{1}{n} \wedge n \in \mathbf{N^*} \}$$

Investigue si A tiene primero y/o último elemento, si está bien ordenado y si admite cotas, ínfimo o supremo.

<u>Solución</u>

La relación "$\leq$ " en R (conjunto de los números reales) es una relación de orden amplio total, A $\subseteq$ R. A también está totalmente ordenado por la relación de orden amplio " $\leq$ ".

N* representa el conjunto de los números naturales a partir del 1. **N* =** $\boldsymbol{Z}^{+}$

A es un conjunto infinito, si escribimos A por extensión, algunos de sus elementos son:

$$A = \left\{ 1\, , \frac{1}{2}\, , \frac{1}{3}\, , \frac{1}{4}\, , \frac{1}{5}\, , \frac{1}{6}\, , \frac{1}{7}\, , \ldots \right\}$$

Se observa que los elementos de A son números de una sucesión que converge a 0.

Son números que están entre 0 (0 no es un elemento de A) y 1 (1 es un elemento de A).

Primer elemento o mínimo de un conjunto, es aquel elemento del conjunto que es anterior en el orden a todos los elementos de ese conjunto. En este caso, no hay elemento en A que cumpla esta definición. No hay primer elemento o mínimo.

Último elemento o máximo de un conjunto, es aquel elemento del conjunto que es precedido en el orden por todos los elementos de ese conjunto. En este caso, 1 es último elemento o máximo de A.

Cotas inferiores o minorantes de A, son los elementos de R que preceden en el orden a todos los elementos de A: Son todos los números reales el intervalo:] - $\propto$, 0]

Cotas superiores o mayorantes de A, son los elementos de R que son precedidos en el orden por todos los elementos de A: Son todos los números reales el intervalo: $[1 , \propto [$

Ínfimo de A es el elemento máximo de las cotas inferiores: 0

Supremo de A es el elemento mínmo de las cotas superiores: 1

Un conjunto se dice que está **bien ordenado** por una relación de orden si y sólo si está totalmente ordenado y además, todo subconjunto no vacío tiene primer elemento.

Ya dijimos que A está totalmente ordenado por "$\leq$", pero A no está bien ordenado, porque entre todos los posibles subconjuntos no vaciós de A, está A mismo, $A \subseteq A$, pero A, no tiene primer elemento.