TRABAJO PRÁCTICO Nº 4: Ecuaciones Diferenciales y Sistemas no Lineales

CUESTIONES TEÓRICO PRÁCTICAS

1. Sea $(x(t), y(t))$ una solución no trivial del sistema no autónomo

$$\frac{dx}{dt} = y \ , \ \frac{dy}{dt} = tx$$

Suponga que $\phi(t) = x(t+\gamma)$ y $\psi(t) = y(t+\gamma)$, donde $\gamma \neq 0$. Muestre que $(\phi(t), \psi(t))$ no es una solución del sistema.

2. Dado el siguiente sistema de ecuaciones diferenciales:

$$\frac{dx}{dt} = f(x,y), \frac{dy}{dt} = g(x,y)$$

Las funciones $f(x,y)$ *y* $g(x,y)$ son continuamente diferenciables en una región R, de modo que para cada número a y cada punto (x_0, y_0), existe una única solución con $x(a) = x_0$ *y* $y(a) = y_0$.
Suponga que $(x(t), y(t))$ es una solución del sistema autónomo y que $\gamma \neq 0$. Defina $\phi(t) = x(t+\gamma)$ y $\psi(t) = y(t+\gamma)$. Muestre que $(\phi(t), \psi(t))$ también es una solución. Así los sistemas autónomos tienen la propiedad de que una "traslación en t" de una solución también es una solución.

3. En cada uno de los problemas, exprese primero explícitamente a $x(t)$ en términos de t y de la condición inicial $x_0 = x(0)$. Después haga un bosquejo que muestre la naturaleza de las trayectorias para una amplia variedad de valores posibles para x_0. Por último determine la estabilidad o inestabilidad de cada punto crítico:

a) $\frac{dx}{dt} = -x$ b) $\frac{dx}{dt} = x - 2$

c) $\frac{dx}{dt} = x^2 - 2x$ d) $\frac{dx}{dt} = (x-1)^2$

4. Resuelva la ecuación logística $\frac{dx}{dt} = ax - bx^2$, $x(0) = x_0$ en forma explícita (con a, b >0) para demostrar que el punto crítico x=0 es inestable, en tanto el punto x= a/b es estable.

5. Bifurcaciones:

a) Considere el sistema lineal autónomo:

$$\frac{dx}{dt} = \varepsilon x - y \ , \quad \frac{dy}{dt} = x + \varepsilon y$$

Muestre que el punto crítico (0,0) es: (i) un punto espiral estable si ε <0; (ii) un centro si ε = 0; (iii) un punto espiral inestable si ε >0. Así, las pequeñas perturbaciones del sistema $x' = -y$, $y' = x$ pueden cambiar el tipo y estabilidad del punto crítico.

b) Considere el sistema lineal autónomo:

$$\frac{dx}{dt} = -x + \varepsilon y \ , \quad \frac{dy}{dt} = x - y$$

Muestre que el punto crítico (0,0) es: (i) un punto espiral estable si ε <0; (ii) un nodo estable si 0< ε <1. Así, las pequeñas perturbaciones del sistema $x' = -x$, $y' = x - y$ pueden cambiar el tipo del punto crítico (0,0) sin alterar su estabilidad

CUESTIONES TECNICAS

Ejercicio Nº 1: Encuentre los puntos críticos de los sistemas bidimensionales dados:

a) $\frac{dx}{dt}=3x-y\ ,\quad \frac{dy}{dt}=x+3y$ b) $\frac{dx}{dt}=x-2y\ ,\quad \frac{dy}{dt}=2x+4y$

c) $\frac{dx}{dt}=x-3x^2+xy\ ,\quad \frac{dy}{dt}=4y-y^2-2xy$ d) $\frac{dx}{dt}=y\ ,\quad \frac{dy}{dt}=-\operatorname{sen}x$

Ejercicio Nº 2: (a) muestre que el origen es el único punto crítico de la ecuación diferencial no lineal $x''+(x')^2+x=0$. (b) Muestre que el método del plano de fase conduce a la ED de Bernoulli $\frac{dy}{dx}=-y-xy^{-1}$.(c) Muestre que la solución que satisface $x(0)=\frac{1}{2}, x'(0)=0$ no es periódica.

Ejercicio Nº 3: En cada uno de los problemas dados, escriba la ED de segundo orden como un sistema de ED de primer orden. Encuentre las soluciones de equilibrio y determine la naturaleza de las mismas.

a) $x''+x-x^3=0$ b) $x''+2x'+x+4x^3=0$

c) $x''+3x'+4\operatorname{sen}x=0$ d) $x''+(x^2-1)x'+x=0$

Ejercicio Nº 4: En cada caso resuelva la ecuación en el plano fase, luego bosqueje algunas trayectorias representativas.

a) $\frac{dx}{dt}=y\ ,\quad \frac{dy}{dt}=-x$ b) $\frac{dx}{dt}=y(1+x^2+y^2)\ ,\quad \frac{dy}{dt}=x(1+x^2+y^2)$

c) $\frac{dx}{dt}=y^3e^{x+y}\ ,\quad \frac{dy}{dt}=-x^3e^{x+y}$ d) $\frac{dx}{dt}=2y\ ,\quad \frac{dy}{dt}=2x$

e) $\frac{dx}{dt}=\frac{3}{y}\ ,\quad \frac{dy}{dt}=\frac{2}{x}$ f) $\frac{dx}{dt}=x^2-1\ ,\quad \frac{dy}{dt}=xy$

Ejercicio Nº 5: En cada caso encontrar todos los puntos críticos del sistema no lineal dado e investigar el tipo de estabilidad de cada uno.

a) $\frac{dx}{dt}=x-y\ ,\quad \frac{dy}{dt}=x^2-y$ b) $\frac{dx}{dt}=y-1\ ,\quad \frac{dy}{dt}=x^2-y$

c) $\frac{dx}{dt}=y^2-1,\quad \frac{dy}{dt}=x^3-y$ d) $\frac{dx}{dt}=xy-2,\quad \frac{dy}{dt}=x-2y$

Aplicaciones de las ED autónomas y de los sistemas de ED

Crecimiento de una población de peces

Suponga que se observa una población de peces en un lago y que la misma puede describirse considerando las tasas de nacimiento, muerte y captura. Si se mide la población de peces y(t) en el instante t, la tasa de cambio neta es expresada como $\frac{dy(t)}{dt}=y'$.

Entonces:

$$y'=\text{tasa de nacimiento}-\text{tasa de muerte}-\text{tasa de captura}$$

Donde se ha supuesto que las tasas de peces inmigrantes y emigrantes de los ríos que se comunican con el lago se anulan entre sí. De la observación minuciosa de numerosas especies durante muchos años se sabe que la cantidad de peces que nacen y mueren es proporcional al tamaño de la población:

$$\text{tasa de nacimiento en el instante t} = by(t)$$

$$\text{tasa de mortalidad en el instante t} = (m + cy(t))y(t)$$

Donde m, b y c son constantes de proporcionalidad no negativas. Observe que al coeficiente de mortalidad natural m se le ha sumado el término cy(t) que explica la sobrepoblación, puesto que a medida que la población crece en un hábitat estable, la tasa de mortalidad suele crecer mucho más rápido de lo que puede explicarse con un solo coeficiente constante m. El término de "sobrepoblación" cy(t) es necesario para modelar este factor de mortalidad acelerado.
Si H es la tasa de captura. Entonces $y' = by(t) - (m + cy(t))y(t) - H$ ó bien:

$$y' = (b - m)y - cy^2 - H$$

$$y' = ay - cy^2 - H$$

Consigna N° 1: Si por el momento se omite el término de captura, el modelo puede ser representado por el siguiente problema de valor inicial:

$$y' = ay - cy^2 \qquad y(0) = y_0 \qquad y_0 = \text{varios valores positivos}$$

a) ¿Cómo describiría que sucede con la población de peces a medida que pasa el tiempo?
b) ¿Para qué valores de y_0 la población de peces aumenta? ¿Para qué valores de y_0 la población de peces disminuye? ¿Para qué valores de y_0 la población de peces se mantiene constante en el tiempo?
c) Esboce un gráfico que represente la población de peces a medida que pasa el tiempo para diferentes poblaciones iniciales.

Consigna N° 2: considere el siguiente problema de valor inicial que describe el comportamiento de una población de peces:

$$y' = y - \frac{1}{12}y^2 \qquad y(0) = y_0$$

a) ¿Qué significa en el contexto del problema que y = 0 ó bien que y =12? ¿Qué relación tienen estos valores de y con las soluciones de la ecuación diferencial?
b) Esboce un gráfico que represente lo discutido en el punto anterior para diferentes poblaciones iniciales.
c) Resuelva el problema en forma analítica y determine que sucede con la población de peces a medida que pasa el tiempo. ¿Cómo podría relacionarlo con lo que se encontró anteriormente?

APLICACIONES ECOLÓGICAS: depredadores y competidores

Algunas de las aplicaciones más interesantes de la teoría de la estabilidad se refieren a las interacciones entre dos o más poblaciones biológicas que ocupan el mismo ambiente. Consideremos una situación de **depredador-presa** en que intervienen dos especies. Una especie, los depredadores, se alimentan de otra especie, la presa, que a su vez se nutre de un tercer alimento disponible en ese ambiente. Un ejemplo puede ser las poblaciones de tiburones (depredadores) y los peces alimento (presa).

El modelo matemático clásico para estas situaciones fue ideado en los años 20 por el matemático italiano Vito Volterra (1860-1940) para analizar las variaciones cíclicas observadas en las poblaciones de tiburones y sus peces alimento en el mar Adriático. Para construir el modelo, denotemos el número de presas como $x(t)$, el número de depredadores como $y(t)$ en el tiempo t y hagamos las siguientes conjeturas simplificadoras:

1. En ausencia de depredadores, la población de las presas crecería a una tasa natural con $dx/dt = ax,\ a > 0.$
2. En ausencia de presas, la población depredadora declinaría a una tasa natural con $dy/dt = -cy,\ c > 0.$
3. Cuando tanto los depredadores como las presas están presentes, ocurre una combinación de estas tasas naturales de crecimiento y declinación, en la que la población de las presas disminuye y la población de depredadores aumenta, cada una en proporción a la frecuencia de los encuentros entre individuos de las dos especies. Supongamos además que la frecuencia de los encuentros es proporcional al producto *xy*, razonando que al duplicarse cualquiera de las dos poblaciones se duplica la frecuencia de los encuentros. En consecuencia, el efecto de que los depredadores devoren a las presas es una tasa de interacción decreciente $-bxy$ en la población x de presas y una tasa de interacción creciente en la población y de los depredadores dxy, siendo b y d constantes positivas.

Cuando sumamos las tasas natural y de interacción descritas antes, obtenemos las ecuaciones de **presa-depredador**

$$\frac{dx}{dt} = ax - bxy \qquad \frac{dy}{dt} = -cy + dxy$$

cuyas constantes son todas positivas. Este sistema es un sistema casi lineal.

Consigna:

En los siguientes modelos de población depredador-presa, x representa la presa e y representa los depredadores.

$$i) \quad \frac{dx}{dt} = 5x - 3xy \qquad\qquad ii) \quad \frac{dx}{dt} = x - 8xy$$

$$\frac{dy}{dt} = -2y + \frac{1}{2}xy \qquad\qquad \frac{dy}{dt} = -2y + 6xy$$

a. ¿En qué sistema se reproduce más rápidamente la presa cuando no hay depredadores e igual número de presas?
b. ¿En qué sistema tienen los depredadores más éxito de cazar presas? En otras palabras, si el número de depredadores y presas son iguales para los dos sistemas, ¿en qué sistema los depredadores tienen un mayor efecto sobre la razón de cambio de las presas?
c. ¿Qué sistema requiere más presas para que los depredadores logren una tasa de crecimiento dada (suponiendo números idénticos de depredadores en ambos casos?)
d. Con ayuda de software, trace las trayectorias de cada sistema en el plano de fase. A partir de la información que brinda el plano de fase, esboce la gráfica para cada una de las poblaciones de ambos sistemas.

Bibliografía:

Blanchard P., Devaney R., Hall G. (1998). "*Ecuaciones diferenciales*". México: Thomson

Borelli, R.; Coleman, C. (2002). "*Ecuaciones diferenciales. Una perspectiva de modelación".* México: Oxford University Press

Boyce, W. y Diprima, R. (2000). *"Ecuaciones Diferenciales y problemas con valores en la frontera"*. 4° ed. México: Limusa.

Edwards H., Penney D. (2001). "*Ecuaciones diferenciales*". México: Prentice Hall

Nagle K., Saff, E., Snider A. (2001). "*Ecuaciones diferenciales y problemas con valores en la frontera*". México: Addison Wesley

Zill D. (1986) *"Ecuaciones Diferenciales con aplicaciones"*. México: Iberoamérica

Zill D., Cullen M. (2002) "*Ecuaciones Diferenciales con problemas de valores en la frontera*". México: Thomson