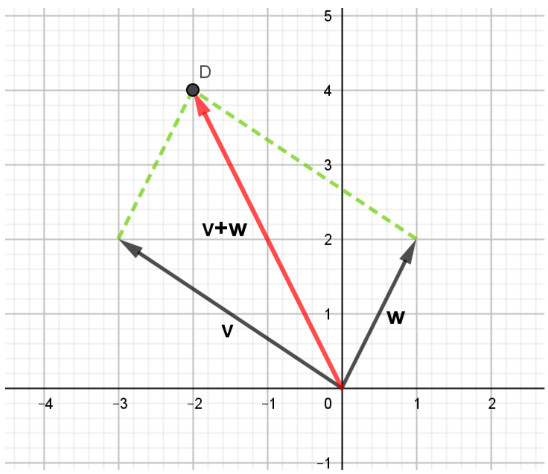
VECTORES

TRABAJO PRÁCTICO Nº2: OPERACIONES ENTRE VECTORES

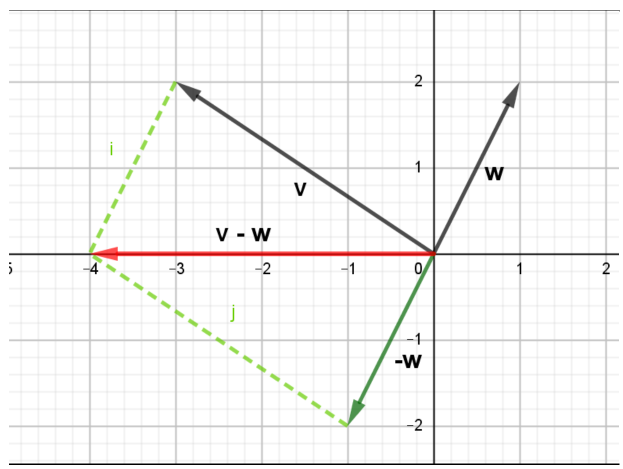
A- Adición entre vectores

***Consigna 1**: Dados los vectores $\vec{v} = (-3; 2)$ y $\vec{w} = (1; 2)$ utilizar la regla del paralelogramo para resolver gráficamente las siguientes operaciones entre vectores:*

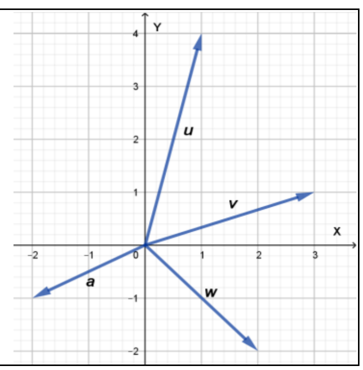
a) $\vec{v} + \vec{w}$



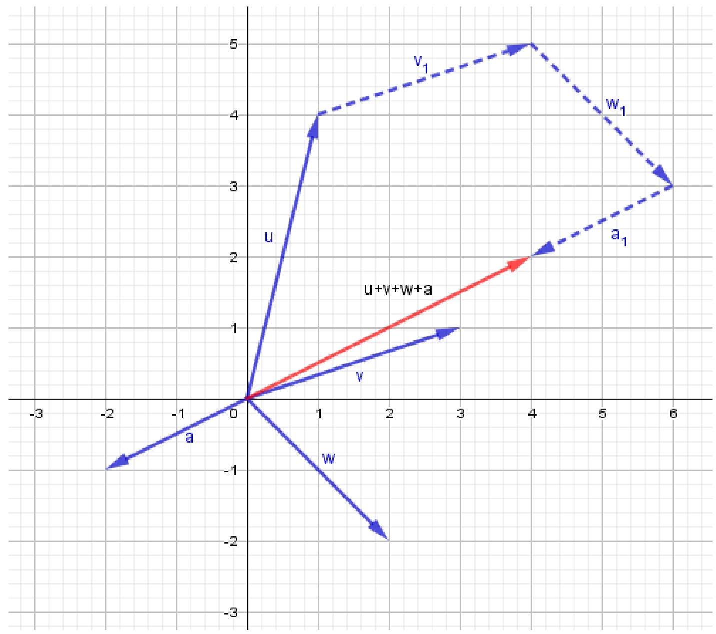
b) $\vec{v} - \vec{w}$



***Consigna 2**:* Dados los siguientes vectores fijos en forma gráfica, utilizar el método de la poligonal encontrar el vector solución de la suma: $\vec{u} + \vec{v} + \vec{w} + \vec{a}$



En forma gráfica:



En forma analítica:

En el gráfico podemos leer que las componentes de los vectores dados son:

$$\vec{u} = (1\,,4)\ \ ,\ \ \vec{v} = (3\,,1)\ \ \ ,\ \ \vec{w} = (2\,,-2)\ \ \text{y}\ \ \vec{a} = (-2\,,-1)$$

Entonces: $\vec{u} + \vec{v} + \vec{w} + \vec{a} = = (1\,,4)\ +\ (3\,,1)\ \ +\ \ (2\,,-2)\ +\ (-2\,,-1)$

$$\vec{u} + \vec{v} + \vec{w} + \vec{a} = = (1 + 3 + 2 + (-2)\ \ ,\ \ 4 + 1 + (-2) + (-1))$$

$$\vec{u} + \vec{v} + \vec{w} + \vec{a} = = (4\ \ ,\ \ 2)$$

Consigna 4*:* Dados los vectores $\vec{a} = (4; 2{,}7)$, $\vec{b} = (\sqrt{2}; 0)$ y $\vec{c} = (3; 1/2)$ y $\vec{d} = (-1/2; 1)$. Resolver las siguientes opeaciones entre vectores de manera analítica y expresar la solución en forma binómica.

Para efectuar la suma (o resta) analítica entre vectores, debemos sumar (o restar) las componentes homónimas de los mismos.

a) $\vec{a} + \vec{c} + \vec{d} = (4; 2{,}7) + \left(3; \frac{1}{2}\right) + \left(-\frac{1}{2}; 1\right) = \left(4 + 3 + \left(-\frac{1}{2}\right); 2{,}7 + \frac{1}{2} + 1\right) =$
$\left(\frac{13}{2}; \frac{21}{5}\right)$

b) $\vec{d} - \vec{b}$

$$\vec{d}-\vec{b}=\left(-\frac{1}{2};1\right)-(\sqrt{2};0)=\left(-\frac{1}{2};+1\right)+(-\sqrt{2};0)=\left(-\frac{1}{2}-\sqrt{2};1+0\right)$$
$$=\left(-\frac{1}{2}-\sqrt{2};1\right)$$

c) $\overrightarrow{(a+\vec{d})}-(\vec{c}-\vec{b})$

$$\overrightarrow{(a+\vec{d})}-(\vec{c}-\vec{b})=\left((4;2{,}7)+\left(-\frac{1}{2};1\right)\right)-\left(\left(3;\frac{1}{2}\right)-(\sqrt{2};0)\right)$$
$$=\left(4+\left(-\tfrac{1}{2}\right);2{,}7+1\right)-\left(3-\sqrt{2};\tfrac{1}{2}-0\right)=\left(\tfrac{7}{2};3{,}7\right)+\left(-3+\sqrt{2};-\tfrac{1}{2}\right)=$$
$$\left(\tfrac{7}{2}+(-3+\sqrt{2});3{,}7+\left(-\tfrac{1}{2}\right)\right)=\left(\tfrac{1}{2}+\sqrt{2};\tfrac{16}{5}\right)$$

d) La diferencia entre, el opuesto del vector b y la adición entre, el vector c y el vector nulo.

Lo solicitado en la consigna, en signos sería:

$$\left(-\vec{b}\right)-(\vec{c}+\vec{o})=$$

cómo, $\vec{b}=(\sqrt{2};0)$; $\vec{c}=\left(3;\frac{1}{2}\right)$; $\vec{0}=(0;0)$

$$=\left(-(\sqrt{2};0)\right)-\left(\left(3;\frac{1}{2}\right)+(0;0)\right)$$
$$=(-\sqrt{2};0)-\left(3+0;\frac{1}{2}+0\right)$$
$$=(-\sqrt{2};0)-\left(3;\frac{1}{2}\right)$$
$$=\left(-\sqrt{2}-3;0-\frac{1}{2}\right)$$
$$\boxed{\left(-\vec{b}\right)-(\vec{c}+\vec{o})=\left(-\sqrt{2}-3;-\frac{1}{2}\right)}$$

***Consigna 6**:* Sean los vectores $\vec{a}=2\check{\imath}-3\check{\jmath}+5\check{k}$, $\vec{b}=4\check{\imath}+\check{\jmath}-\frac{1}{2}\check{k}$ y $\vec{c}=-\check{\imath}+4\check{\jmath}+\check{k}$

a) Resolver las operaciones que se indican a continuación y expresar los resultados como ternas ordenadas: a.1) $\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}$ a.2) $\vec{c}-\vec{a}$

b) Analizar, por medio de los cálculos correspondientes, si se cumplen las siguientes igualdades: b.1) $\vec{a}-\vec{b}=\vec{b}-\vec{a}$ b.2) $(\vec{a}+\vec{b})+\vec{c}=\vec{a}+(\vec{b}+\vec{c})$ b.3) $(\vec{a}-\vec{b})+\vec{c}=\vec{a}-(\vec{b}+\vec{c})$ b.4) $(\vec{a}-\vec{b})-\vec{c}=\vec{a}-(\vec{b}-\vec{c})$

Los vectores se pueden expresar, en función de sus componentes, en forma trinómica o en forma de terna ordenada

Así, $\vec{a}=2\breve{\imath}-3\breve{\jmath}+5\breve{k}$ o bien $\vec{a}=(2,-3,5)$

$\vec{b}=4\breve{\imath}+\breve{\jmath}-\frac{1}{2}\breve{k}$ o bien $\vec{b}=(4,1,-\frac{1}{2})$

$\vec{c}=-\breve{\imath}+4\breve{\jmath}+\breve{k}$ o bien $\vec{c}=(-1,4,1)$

a.1) $\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}=(2\breve{\imath}-3\breve{\jmath}+5\breve{k})+(4\breve{\imath}+\breve{\jmath}-\frac{1}{2}\breve{k})+(-\breve{\imath}+4\breve{\jmath}+\breve{k})$

$$=(2+4-1)\breve{\imath}+(-3+1+4)\breve{\jmath}+(5-\frac{1}{2}+1)\breve{k}$$

Entonces: $\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}=5\,\breve{\imath}+2\,\breve{\jmath}+\frac{11}{2}\breve{k}$ o bien $\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}=(5,2,\frac{11}{2})$

a.2) $\vec{c}-\vec{a}=(-\breve{\imath}+4\breve{\jmath}+\breve{k})-(2\breve{\imath}-3\breve{\jmath}+5\breve{k})$

$$=(-1-2)\breve{\imath}+(4-(-3))\breve{\jmath}+(1-5)\breve{k}$$

Entonces: $\vec{c}-\vec{a}=-3\,\breve{\imath}+7\,\breve{\jmath}-4\breve{k}$ o bien $\vec{c}-\vec{a}=(-3,\ 7,-4)$

b) Deben realizar las operaciones indicadas con los vectores dados y ver si se verifica la igualdad.

b.1)

$$\vec{a}-\vec{b}=\vec{b}-\vec{a}$$

$$(2\breve{\imath}-3\breve{\jmath}+5\breve{k})-\left(4\breve{\imath}+\breve{\jmath}-\frac{1}{2}\breve{k}\right)=\left(4\breve{\imath}+\breve{\jmath}-\frac{1}{2}\breve{k}\right)-(2\breve{\imath}-3\breve{\jmath}+5\breve{k})$$

$$\left(2\breve{\imath}-4\breve{\imath}-3\breve{\jmath}-\breve{\jmath}+5\breve{k}-\left(-\frac{1}{2}\breve{k}\right)\right)=\left(4\breve{\imath}-2\breve{\imath}+\breve{\jmath}-(-3\breve{\jmath})-\frac{1}{2}\breve{k}-5\breve{k}\right)$$

$$\boxed{\left(-2\breve{\imath}-4\breve{\jmath}+\frac{11}{2}\breve{k}\right)\neq\left(2\breve{\imath}+4\breve{\jmath}-\frac{11}{2}\breve{k}\right)}$$

Cómo se evidencia en los cálculos realizados, la diferencia entre vectores no es conmutativa.

b.2)

$$(\vec{a}+\vec{b})+\vec{c}=\vec{a}+(\vec{b}+\vec{c})$$

$$\left((2\breve{\imath}-3\breve{\jmath}+5\breve{k})+(4\breve{\imath}+\breve{\jmath}-\frac{1}{2}\breve{k})\right)+(-\breve{\imath}+4\breve{\jmath}+\breve{k})=(2\breve{\imath}-3\breve{\jmath}+5\breve{k})+((4\breve{\imath}+\breve{\jmath}-\frac{1}{2}\breve{k})+(-\breve{\imath}+4\breve{\jmath}+\breve{k}))$$

$$\left(2\breve{\imath}+4\breve{\imath}-3\breve{\jmath}+\breve{\jmath}+5\breve{k}-\frac{1}{2}\breve{k}\right)+(-\breve{\imath}+4\breve{\jmath}+\breve{k})=(2\breve{\imath}-3\breve{\jmath}+5\breve{k})+(4\breve{\imath}-\breve{\imath}+\breve{\jmath}+4\breve{\jmath}-\frac{1}{2}\breve{k}+\breve{k})$$

$$\left(6\breve{\imath}-2\breve{\jmath}+\frac{9}{2}\breve{k}\right)+(-\breve{\imath}+4\breve{\jmath}+\breve{k})=(2\breve{\imath}-3\breve{\jmath}+5\breve{k})+(3\breve{\imath}+5\breve{\jmath}+\frac{1}{2}\breve{k})$$

$$\left(6\breve{\imath}-\breve{\imath}-2\breve{\jmath}+4\breve{\jmath}+\frac{9}{2}\breve{k}+\breve{k}\right)=(2\breve{\imath}+3\breve{\imath}-3\breve{\jmath}+5\breve{\jmath}+5\breve{k}+\frac{1}{2}\breve{k})$$

$$\left(5\breve{\imath}+2\breve{\jmath}+\frac{11}{2}\breve{k}\right)=(5\breve{\imath}+2\breve{\jmath}+\frac{11}{2}\breve{k})$$

Cómo se evidencia en los cálculos realizados, la suma entre vectores verifica la propiedad asociativa.

B- Producto de un escalara por un vector

Consigna 7: Sean los vectores del plano cartesiano: $\vec{u}=\left(\frac{2}{3};\ -1\right)$ y $\vec{v}=\left(\frac{1}{2};\ -\sqrt{3}\right)$.

Verificar a través de los cálculos pertinentes las siguientes igualdades.

a) $3\cdot(\vec{u}+\ \vec{v})=(3\cdot\vec{u}\ )+(3\cdot\vec{v})$

b) $(-2\cdot 3)\cdot\vec{u}=-2\cdot(3\cdot\vec{u}\ )$

c) $0\cdot\vec{v}=\vec{0}$

d) $(-2+3)\cdot\vec{v}=(-2\cdot\vec{v})+(3\cdot\vec{v}\ )$

Solución a):

$$3\cdot(\vec{u}+\ \vec{v})=(3\cdot\vec{u}\ )+(3\cdot\vec{v})$$

$$3\cdot\left(\left(\frac{2}{3};\ -1\right)+\ \left(\frac{1}{2};\ -\sqrt{3}\right)\right)=\left(3\cdot\left(\frac{2}{3};\ -1\right)\right)+\left(3\cdot\left(\frac{1}{2};\ -\sqrt{3}\right)\right)$$

$$3\cdot\left(\frac{2}{3}+\frac{1}{2};\ -1+(\ -\sqrt{3})\right)\ =\left(3.\frac{2}{3};\ 3.(-1)\right)+\left(3.\frac{1}{2};3.(\ -\sqrt{3})\right)$$

$$3\cdot\left(\frac{7}{6};\ -1-\sqrt{3}\right)\ =(2;\ -3)+\left(\frac{3}{2};(\ -3\sqrt{3})\right)$$

$$\left(3.\frac{7}{6};\ 3.(-1-\sqrt{3})\right) = \left(2+\frac{3}{2};\ -3+(-3\sqrt{3})\right)$$

$$\left(\frac{7}{2};\ -3-3.\sqrt{3}\right) = \left(\frac{7}{2};\ -3\ -3\sqrt{3}\right)$$

Como se puede observar, ambos miembros de la igualdad son iguales, es decir, se está verificando la igualdad planteada en la consigna.

> ***Consigna 8**:* Dados los vectores $\vec{v} = (-1; 2; -3)$ y $\vec{w} = (-2; 1; 5)$, resolver en forma analítica las siguientes operaciones entre vectores, expresando las soluciones en forma trinómica.

a) $2\vec{v} + \frac{1}{2}\vec{w}$

En primer lugar, se deben efectuar los productos escalares, es decir, multiplicar a cada componente del vector con el escalar que antecede:

$$2.(-1; 2; -3) + \frac{1}{2}(-2; 1; 5) =$$

$$\left(2.(-1); 2.2; 2.(-3)\right) + \left(\frac{1}{2}.(-2); \frac{1}{2}.1; \frac{1}{2}.5\right) =$$

$$(-2; 4; -6) + \left(-1; \frac{1}{2}; \frac{5}{2}\right) =$$

Una vez hecho esto, se deberán realizar las sumas entre los dos vectores resultantes, es decir, sumar las componentes homónimas entre sí como se aprecia a continuación:

$$\left(-2+(-1); 4+\frac{1}{2}; -6+\frac{5}{2}\right)$$

$$\boxed{2\vec{v} + \frac{1}{2}\vec{w} = \left(-3; \frac{9}{2}; -\frac{7}{2}\right)}$$

Expresar al vector en forma canónica significa multiplicar cada componente por el versor fundamental que le corresponde:

$$2\vec{v} + \frac{1}{2}\vec{w} = \left(-3\breve{\imath} + \frac{9}{2}\breve{\jmath} - \frac{7}{2}\breve{k}\right)$$

b) $3\vec{v} - \vec{w}$

En primer lugar, efectuamos el producto escalar lo que significa multiplicar a cada componente del vector por el escalar que le antecede;

$$3.(-1; 2; -3) - (-2; 1; 5) =$$

$$\left(3.(-1); 3.2; 3.(-3)\right) - (-2; 1; 5) =$$

$$(-3; 6; -9) - (-2; 1; 5) =$$

En segundo lugar, realizar la resta de dos vectores significa sumarle al primero el vector opuesto del segundo;

$$(-3;6;-9)+(2;-1;-5)=$$

Por último, efectuamos la suma de ambos vectores;

$$\big(-3+2;6+(-1);-9+(-5)\big)=(-1;5;-14)$$

Ahora, sí expresamos el vector resultante en forma canónica tendremos:

$$\boxed{3.\vec{v}-\vec{w}=\big(-1\breve{\imath}+5\breve{\jmath}-14\breve{k}\big)}$$

Consigna 9*:* Sea el vector $\overrightarrow{AB}$ cuyos extremos son A(3;2;1) y B(-2;-1;2). Hallar las coordenadas del punto M, sabiendo que $\overrightarrow{AM}=\frac{2}{5}\overrightarrow{AB}$.

En primer lugar, para encontrar el punto $M(x_m;y_m;z_m)$, vamos a armar la ecuación que relaciona los vectres $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{AM}$.

$$\overrightarrow{AM}=\frac{2}{5}\overrightarrow{AB}$$

$$(x_m-3;y_m-2;\mathrm{z}_m-1)=\frac{2}{5}(-2-3;-1-2;2-1)$$

$$(x_m-3;y_m-2;\mathrm{z}_m-1)=\frac{2}{5}(-5;-3;1)$$

$$(x_m-3;y_m-2;\mathrm{z}_m-1)=\left(\frac{2}{5}(-5);\frac{2}{5}(-3);\frac{2}{5}.1\right)$$

$$(x_m-3;y_m-2;\mathrm{z}_m-1)=\left(-2;-\frac{6}{5};\frac{2}{5}\right)$$

Igualando las componenetes homónimas obtendríamos tres ecuaciones simples de resolver

$$\begin{cases}x_m-3=-2\\ y_m-2=-\frac{6}{5}\\ \mathrm{z}_m-1=\frac{2}{5}\end{cases}\rightarrow\begin{cases}x_m=-2+3\\ y_m=-\frac{6}{5}+2\\ \mathrm{z}_m=\frac{2}{5}+1\end{cases}\rightarrow\begin{cases}\boxed{x_m=1}\\ \boxed{y_m=\frac{4}{5}}\\ \boxed{\mathrm{z}_m=\frac{7}{5}}\end{cases}$$

El punto M tiene coordenadas: $M\left(1,\frac{4}{5},\frac{7}{5}\right)$.