UNIVERSIDAD NACIONAL DE MISIONES – UNaM

Facultad de Ciencias Exactas, Químicas y Naturales

Profesorado en Matemáticas - Profesorado en Física

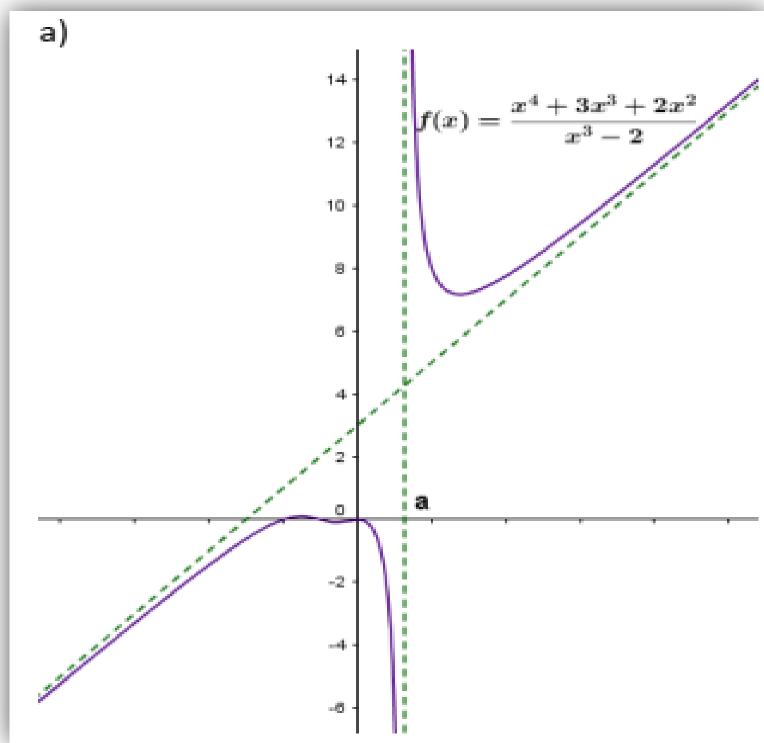
ANÁLISIS MATEMÁTICO I

Ejercicios Resueltos

TRABAJO PRÁCTICO N°3: Continuidad

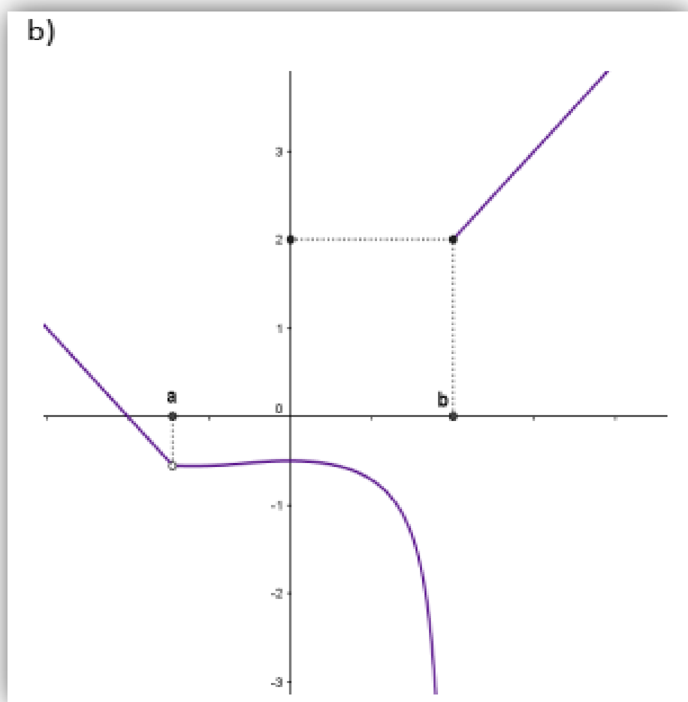
Consigna 2: Determinar si las funciones representadas en los siguientes gráficos son continuas en a y en b. En los valores que sean discontinuas, clasifique el tipo de discontinuidad.

Solución:



A partir del gráfico de la función puede apreciarse que la misma es discontinua en x=a debido a que la curva se corta en valor de x.

Se observa que en x=a la función tiene una asíntota vertical, es decir que x=a no pertenece al dominio de la función. Por lo expresado es posible afirmar que no existe f(a) y tampoco existe el límite finito de f cuando x tiende al valor x=a, por lo tanto, se concluye que la función presenta una discontinuidad inevitable en x=a.



Solución:

- Se analiza la continuidad de la función y=f(x) representada gráficamente, **en x=*a***

1) ¿∃ f(a)?

Existe la imagen de a a través de esta función f y vale 0 (cero). Esto es: f(a)= 0

2) ¿∃ $\lim_{x \to a} f(x)$?

Se observa que a medida que x tiende a a, las imágenes de estos puntos tienden a -0,5. Por lo tanto existe el límite finito de f cuando x tiende a a.

$$\text{Esto es } \lim_{\to a} f(x) = -0{,}5$$

3) ¿ f(a) = $\lim_{x \to a} f(x)$?

f(a) ≠ $\lim_{\to a} f(x)$ (no se cumple la tercera condición de continuidad)

Por lo tanto, la función presenta una discontinuidad evitable en x=a.

- Se analiza la continuidad de la función **en x=b**

1) ¿∃ f(b)?

Existe la imagen de b a través de esta función f y vale 2(dos). Esto es: f(b)=2.

2) ¿∃ $\lim_{x \to b} f(x)$?

Para analizar la existencia del límite finito de la función cuando x tiende al punto x=b, se debe recurrir a estudiar la existencia y unicidad de los límites laterales.

Límite lateral por izquierda:

$L_1 = \lim_{x \to b^-} f(x) = -\infty$ se observa que a medida que x se aproxima al valor b, por la izquierda, las imágenes de estos puntos tienden hacia el menos infinito, es decir, no se acercan a un número real en particular, por lo cual se interpreta que no existe este límite lateral.

Límite lateral por derecha:

$L_2 = \lim_{x \to b^+} f(x) = 2$

Al no cumplirse la condición de existencia de los límites laterales, no existe el límite finito de la función cuando x tiende a b.

3) ¿ $f(b) = \lim_{x \to b} f(x)$?

Claramente esta condición no se cumple puesto que no se cumple la segunda condición de continuidad.

Consigna 4: Analizar la continuidad de las siguientes funciones en los puntos indicados. En caso de discontinuidad, identificar de qué tipo es la misma, y redefinirla para que sea continua, si fuese posible.

c) $h(x) = \cosh\left(\frac{x}{2}\right)$ en $x = \frac{7}{2}$

Solución:

$$h(x) = \cosh\left(\frac{x}{2}\right) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$

Dom h = R, $x = \frac{7}{2} \in Dom\ h$

Analizamos si h es continua e $x = \frac{7}{2}$:

i) $\exists\ h\left(\frac{7}{2}\right) = \frac{e^{\frac{7}{2}} + e^{-\frac{7}{2}}}{2} \approx 16{,}57$

ii) $\lim_{x \to \frac{7}{2}} \frac{e^x + e^{-x}}{2} \approx 16{,}57$

iii) $h\left(\frac{7}{2}\right) = \lim_{x\to\frac{7}{2}} h(x)$

h es continua e $x = \frac{7}{2}$.

d) $t(x) = \begin{cases} \sin x & |x| \leq \sqrt{2} \\ \ln(x^2-1) & |x| > \sqrt{2} \end{cases}$ en $x = -\sqrt{2}$ y en $x = \sqrt{2}$

Solución:

Dom t = R, $-\sqrt{2} \in Dom\ t, \sqrt{2} \in Dom\ t$

Analizamos si t es continua e $x = -\sqrt{2}$:

i) $\exists\ t(-\sqrt{2})$ = $sen\ (-\sqrt{2})$ ≈ -0,9878

ii) $\lim_{x\to-\sqrt{2}} t(x) = \lim_{x\to-\sqrt{2}} sen(x)$ ≈ -0,9878

iii) $t(-\sqrt{2}) = \lim_{x\to-\sqrt{2}} t(x)$

t es continua e $x = -\sqrt{2}$.

Analizamos si t es continua e $x = \sqrt{2}$:

i) $\exists\ t(\sqrt{2})$ = $sen\ (\sqrt{2})$ ≈ 0,9878

ii) $\lim_{x\to\sqrt{2}} t(x)$

para calcular este límite, se deben calcular los límites laterales:

$\lim_{x\to(\sqrt{2})^-} t(x) = \lim_{x\to(\sqrt{2})^-} sen(x)$ ≈ 0,9878

$\lim_{x\to(\sqrt{2})^+} t(x) = \lim_{x\to(\sqrt{2})^+} [\ln(x^2-1)] = 0$

$\nexists \lim\limits_{x\to\sqrt{2}} t(x)$ porque los límites laterales son distintos.

iii) No se verifica, $t(\sqrt{2}) \neq \lim_{x\to\sqrt{2}} t(x)$

t es discontinua inevitable en $x = \sqrt{2}$.

g) $g(x) = \begin{cases} \cos x & x < 0{,}7 \\ \frac{e^x - e^{-x}}{2} & x \geq 0{,}7 \end{cases}$ en $x = 0{,}7$

Solución:

Dom g = R, 0,7 $\in Dom\ g$.

Analizamos si t es continua e $x = 0,7$:

i) $\exists\ g(0,7) = \frac{e^{0,7} - e^{-0,7}}{2} \approx 0,7586$

ii) $\lim_{x\to 0,7} g(x)$

para calcular este límite, se deben calcular los límites laterales:

$\lim_{x\to (0,7)^-} g(x) = \lim_{x\to (0,7)^-} cos(x) = 0,7648$

$\lim_{x\to (0,7)^+} g(x) = \lim_{x\to (0,7)^+} \frac{e^x - e^{-x}}{2} \approx 0,7586$

$\nexists \lim_{x\to 0.7} g(x)$ porque los límites laterales son distintos.

iii) No se verifica. $g(0,7) \neq \lim_{x\to 0,7} g(x)$

g es discontinua inevitable en $x = 0,7$

Consigna 6: Estudiar la continuidad de cada función en el intervalo dado.

a) $g(x) = \sqrt{9 - x^2}$ en $[-3; 3]$

Solución:

Para analizar la continuidad de la función en un intervalo cerrado, debemos analizar la continuidad en todo el intervalo y además analizar la continuidad lateral de cada uno de los extremos del intervalo.

En primer lugar, deberemos hallar el dominio de la función en cuestión, al ser una función irracional, su dominio serán todos los números reales que hagan al radicando no negativo:

$$9 - x^2 \geq 0$$

$$(3 - x)(3 + x) \geq 0$$

1. $(3 - x) \geq 0 \ \wedge \ (3 + x) \geq 0$
   $3 \geq x \ \wedge \ x \geq -3$
   $S_1 = [-3; 3]$
2. $(3 - x) \leq 0 \ \wedge \ (3 + x) \leq 0$
   $3 \leq x \ \wedge \ x \leq -3$
   $S_2 = \emptyset$

En conclusión, el dominio de la función será el intervalo entre -3 y 3

$Dom\ g = [-3; 3]$

Ahora, vamos a analizar lo que ocurre en el intervalo $(-3;3)$. Como la función dada es una función irracional, cuyo dominio coincide con el intervalo dado, sabemos que no tendrá saltos ni huecos en su dominio y, por lo tanto, tampoco lo tendrá en el intervalo dado. Tendremos asegurado que será continua en el intervalo $(-3;3)$.

Quedará estudiar qué ocurre en los extremos del intervalo. Por un lado, en el extremo izquierdo del intervalo, es decir, en $x=-3$; deberemos verificar las tres condiciones de continuidad:

1) Se deberá estudiar si existe imagen a través de la función g para $x=-3$

$$g(-3)=\sqrt{9-(-3)^2}=\sqrt{9-9}=0$$

Por lo tanto, existe imagen y será $g(-3)=0$

2) Se deberá estudiar el límite de la función cuando x tiende al valor -3, pero solamente se analizará por derecha:

$$\lim_{x\to -3^+}\sqrt{9-x^2}=\sqrt{9-(-3)^2}=\sqrt{9-9}=0$$

Por lo tanto, existe límite lateral derecho de la función cuando x tiende a -3 cuyo valor es 0.

3) Por último se debe comparar los valores hallados y si coinciden se podrá concluir que la función es continua:

$$g(-3)=\lim_{x\to -3^+}\sqrt{9-x^2}$$

$$0=0$$

Por lo tanto, como ambos valores son cero, se puede concluir que la función será continua a derecha de $x=-3$

Ahora, si analizamos qué ocurre en el extremo derecho del intervalo, es decir, en $x=3$

1) Se deberá estudiar si existe imagen a través de la función g para $x=3$

$$g(3)=\sqrt{9-3^2}=\sqrt{9-9}=0$$

Por lo tanto, existe imagen y será $g(3)=0$

2) Se deberá estudiar el límite de la función cuando x tiende al valor 3, pero a izquierda:

$$\lim_{x\to 3^-}\sqrt{9-x^2}=\sqrt{9-3^2}=\sqrt{9-9}=0$$

Por lo tanto, existe límite lateral izquierdo de la función cuando x tiende a 3 cuyo valor es 0.

3) Por último se debe comparar los valores hallados y si coinciden se podrá concluir que la función es continua:

$$g(3)=\lim_{x\to 3^-}\sqrt{9-x^2}$$

$$0=0$$

Por lo tanto, como ambos valores son cero, se puede concluir que la función será continua a izquierda de $x=3$

En conclusión, como la función es continua en el intervalo abierto (-3;3), es continua a derecha en el extremo $x = -3$ y además, es continua a izquierda en el extremo $x = 3$; la función g será continua en el intervalo $[-3; 3]$.

b)$\mathrm{f}(x) = \begin{cases} x^2 - 3 & x < 2 \\ 1 & x \geq 2 \end{cases}$ en (-1;1)

Solución:

Para analizar la continuidad de una función en un intervalo abierto, se deberá estudiar qué ocurre dentro del intervalo en cuestión. En este caso, la regla de definición de la función está dada por tramos, observen que el cambio de regla está en x=2 y el intervalo en el que se debe estudiar la continuidad es (-1;1) que se encuentra dentro del primer tramo solamente.

Como la regla del primer tramo es una expresión polinómica de segundo grado, y sabemos que este tipo de funciones tiene un comportamiento amigable y no presentan ningún tipo de saltos ni hueco, podemos asegurar que la función será continua en el intervalo $(-1; 1)$

Consigna 7.a: Analizar si se verifican las condiciones del teorema de Bolzano para las siguientes funciones en los intervalos que se consideran: $f(x) = x^3 - 3x^2 + 3x$ en $[-1; 2]$

Solución:

Las condiciones del teorema de Bolzano son: La función es continua en un intervalo cerrado y que f(a) y f (b) tengan distintos signos.

Se cumple que la función f es continua en el intervalo cerrado [-1, 2], ya que es una función polinómica y las funciones polinómicas son continuas en todo su dominio.

Ahora probamos si f(-1) y si f(2) son de diferentes signos:

$$f(-1) = (-1)^3 - 3.(-1)^2 + 3.(-1) = -7$$

$$-7 < 0$$

$$f(2) = (2)^3 - 3.(2)^2 + 3.2 = 2$$

$$2 > 0$$

Por lo tanto se cumplen las condiciones del Teorema de Bolzano.

Consigna 8: Probar el teorema del valor intermedio: $f(x) = x^3 - 2x^2$ en $[-3; 0]$ con $\mathrm{k} = -3$

El teorema del valor intermedio dice que c es la pre-imagen de k a través de f, siempre que f sea continua en el intervalo cerrado [a;b], siendo c interior al intervalo cerrado. Sabemos que esta función es continua en el intervalo cerrado [-3,0] ya que es una función polinómica las funciones polinómicas son continuas en todo su dominio.

Se puede ver que:

$$f(-3) = (-3)^3 - 2(-3)^2 = -45$$

$$f(0) = 0^3 - 2(0)^2 = 0$$

k=-3 es un valor comprendido entre f(-3) y f(0), por lo tanto va a existir un valor c, interior al intervalo [-3,0], donde la función alcanza el valor k.