TRABAJO PRÁCTICO Nº 3. Ejercicios Resueltos

<u>Ejercicio N° 1</u>: Aplicando la definición de adición en **N**, halle la suma de:

a) 5 y 0. b) 5 y 1. c) 5 y 2.

<u>Solución</u>:

c) 5 y 2.

Aplicando la definición de adición en N se tiene:

$$5+2=5+s(1)=s(5+1)=s(6)=7$$

<u>Ejercicio N° 2</u>: Aplicando la definición de multiplicación en **N**, halle el producto entre:

a) 5 y 0. b) 5 y 1. c) 5 y 2.

<u>Solución</u>:

b) 5 y 1.

Aplicando la definición de multiplicación en N se tiene:

$$5\cdot 1=5\cdot s(0)=5\cdot 0+5=0+5=5$$

<u>Ejercicio N° 3</u>: Demuestre las siguientes propiedades

a) Ley asociativa de la adición en **N**: $m+(n+p)=(m+n)+p, \quad \forall\, m, n, p \in \boldsymbol{N}$

b) Demuestre que: $n+0=0+n\ , \quad \forall\, n\in \boldsymbol{N}$

c) Demuestre la ley conmutativa: $m+n=n+m \quad \forall\, m, n\in \boldsymbol{N}$

<u>Solución:</u>

a) Ley asociativa de la adición en **N**: $x+(y+z)=(x+y)+z, \quad \forall\, x, y, z \in \boldsymbol{N}$

Asociatividad: $\forall x \in$N, $\forall y \in$N, $\forall z \in$N: (x + y) + z = x + (y + z)

Por recursividad sobre z:

Si consideramos: z = 0

(x + y) + 0 = x + (y + 0)

Por definición de suma: x + y = x + y la propiedad se verifica.

z = h

(x + y) + h = x + (y + h) Verdadera. Hipótesis de recurrencia

z = h + 1 = s(h)

(x + y) + s(h) = x + (y + s(h))

1° miembro: (x + y) + s(h) = s[(x + y) + h] por definición de suma

= s[x + (y + h)] por hipótesis de recurrencia

2° miembro: $x + (y + s(h)) = x + s(y + h) = s[x + (y + h)]$ por definición de suma

Entonces: $(x + y) + s(h) = x + (y + s(h))$

Queda demostrada la propiedad asociativa de la adición en N.

b) Demuestre que: $n + 0 = 0 + n$, $\forall\, n \in N$

Por definición de la adición, 0 es ya elemento neutro a derecha. Se demuestra, por recurrencia sobre n, que:

(1) $0 + n = n$.

Si $n = 0$:

$0 + 0 = 0$, pues 0 es elemento neutro a derecha.

(2) Se supone (1) verdadera para x, y se debe demostrar que lo es para s(x).

Se tiene

$0 + s(x) = s(0 + x)$ (definición de adición)

$s(0 + x) = s(x)$ (hipótesis de recurrencia).

(1) queda entonces demostrado por recurrencia para todo $n \in N$.

<u>Ejercicio N° 4</u>: Demuestre que

a) $1.n = n.1 = n \quad \forall n \in N$

b) Demuestre las leyes asociativa y conmutativa de la multiplicación en **N**.

c) Demuestre la ley distributiva: $(n + p).m = n.m + p.m \quad \forall\, m,n,p \in N$

<u>Solución:</u>

b) Ley asociativa de la multiplicación en N.

Asociatividad: $\forall x \in N, \forall y \in N, \forall z \in N: (x \cdot y) \cdot z = x \cdot (y \cdot z)$

Por recursividad sobre z:

Si consideramos: $z = 0$

$(x \cdot y) \cdot 0 = x \cdot (y \cdot 0)$

Por definición de multiplicación: $0 = x \cdot 0$

$0 = 0$ la propiedad se verifica

$z = h$

$(x \cdot y) \cdot h = x \cdot (y \cdot h)$ Verdadera. Hipótesis de recurrencia.

$z = h + 1 = s(h)$

$(x \cdot y) \cdot s(h) = x \cdot (y \cdot s(h))$

1° miembro: $(x \cdot y) \cdot s(h) = \mathbf{(x \cdot y) \cdot h} + (x \cdot y)$ por definición de multiplicación

$= \mathbf{x \cdot (y \cdot h)} + x \cdot y$ por hipótesis de recurrencia

2° miembro: $x \cdot (y \cdot s(h)) = x \cdot (y \cdot h + y)$ por definición de multiplicación

$= x \cdot (y \cdot h) + x \cdot y$ por distributividad de la multiplicación con respecto a la adición

Queda demostrada la propiedad asociativa de la adición en N.

b) Ley conmutativa de la multiplicación en N.

Se demostrará en dos partes:

I) Consideramos la siguiente igualdad $\forall x \in N$: $x \cdot 0 = 0 \cdot x$

Recurrencia sobre x:

1º) Para x=0: $0 \cdot 0 = 0 \cdot 0$

$0 = 0$. Se verifica.

2º Consideramos x = h: $h \cdot 0 = 0 \cdot h$ Verdadera. Hip. de recurrencia.

3º Para $x = h+1 = s(h)$: $s(h) \cdot 0 = 0 \cdot s(h)$ Veremos si se cumple..

En el 1er Miembro: $s(h) \cdot 0 = 0$ por definición de multiplicación

En el 2do Miembro: $0 \cdot s(h) = 0 \cdot h + 0$ Por definición de Multiplicación

$= h \cdot 0 + 0$ Por hip de recurrencia

$= 0 + 0$ Por definición de Multiplicación

$= 0$

Por lo tanto, se cumple que $x \cdot 0 = 0 \cdot x$

II) Ahora consideramos la conmutatividad $\forall x \in N, \forall y \in N$: $x \cdot y = y \cdot x$

Realizamos recurrencia sobre y:

1º) Para y=0: $x \cdot 0 = 0 \cdot x$ Se cumple por I)

2º) Para y = h: $x \cdot h = h \cdot x$ Verdadera. Hipótesis de recurrencia

3º) Para y = s(h) $x \cdot s(h) = s(h) \cdot x$

Partimos de primer miembro: $x \cdot s(h) = x \cdot h + x$ Por definición de Multiplicación

$= h \cdot x + x$ Por hip de recurrencia

$= h \cdot x + 1 \cdot x$ Por definición de Multiplicación

$= (h+1) \cdot x$ Por prop. Distr. Multipl/ Adición

$= s(h) \cdot x$

Por lo tanto se cumple la conmutatividad de la multiplicación en N

c) Demuestre la ley distributiva: $(n + p).m = n.m + p.m$ $\quad \forall$ m,n, p$\in$ N

Por recursividad sobre m:

Considerando m=0

$(n + p) \cdot 0 = n \cdot 0 + p \cdot 0$ Por definición de multiplicación se tiene 0 = 0

Para m = h

$(n + p) \cdot h = n \cdot h + p \cdot h$ Verdadera. Hipótesis de recurrencia.

Para m = h + 1 = s(h)

$(n + p) \cdot s(h) = n \cdot s(h) + p \cdot s(h)$ Veremos si es verdadero..

Partiendo del 1º miembro:

$(n + p) \cdot s(h) = (n + p) \cdot h + (n + p)$	Por definición de producto.
$= n \cdot h + p \cdot h + n + p$	Por hipótesis de recurrencia.
$= (n \cdot h + n) + (p \cdot h + p)$	Por conmutatividad y asociatividad en N.
$= n \cdot s(h) + p \cdot s(h)$	Por definición de producto

Y esto es el 2º miembro de la igual. Por lo tanto se cumple la propiedad.

<u>Ejercicio N° 5</u>: Probar si se cumple:

a) $\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+...+\frac{1}{2^n}=1-\frac{1}{2^n}$. $\quad \forall\, n \in \mathbf{N^*}$

b) $1 + 3 + 5 +\ldots+ (2n-1) = n^2 \quad \forall\, n \in \mathbf{N^*}$

c) $\frac{1}{1.2}+\frac{1}{2.3}+...+\frac{1}{n\,(n+1)}=\frac{n}{n+1}$. $\quad \forall\, n \in \mathbf{N^*}$

d) $1^2 + 2^2 + 3^2 +\ldots+ n^2 = n\,(n+1)(2n+1)/6 \quad \forall\, n \in \mathbf{N}$

e) $1^3 + 2^3 + 3^3 +\ldots+ n^3 = n^2\,(n+1)^2/4 \quad \forall\, n \in \mathbf{N}$

f) $2 + 6 + 16 + 40 +\ldots+ (n+1)\,2^{n-1} = n\,2^n \quad \forall\, n \in \mathbf{N^*}$

<u>Solución:</u>

a) $\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+...+\frac{1}{2^n}=1-\frac{1}{2^n}$. $\quad \forall\, n \in \mathbf{N^*}$

1°) Verificar que la propiedad se cumple para n = 1

Si n = 1: $\frac{1}{2} = 1 - \frac{1}{2^1} = \frac{1}{2}$ se verifica.

2°) Suponemos que se cumple para n = h

$\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \cdots + \frac{1}{2^h} = 1 - \frac{1}{2^h}$ es verdadera por hipótesis inductiva

3°) Demostrar que se cumple para n = h + 1

$\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \cdots + \frac{1}{2^{h+1}} = 1 - \frac{1}{2^{h+1}}$ no sabemos es verdadera o no. [A]

Para demostrar que esta última expresión es verdadera, partiendo de la hipótesis inductiva:

$\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \cdots + \frac{1}{2^h} = 1 - \frac{1}{2^h}$ que es verdadera

Sumamos miembro a miembro el término que se encuentra en la posición h + 1

$\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \cdots + \frac{1}{2^h} + \frac{1}{2^{h+1}} = 1 - \frac{1}{2^h} + \frac{1}{2^{h+1}}$ que es verdadera [B]

Comparando los primeros miembros de [A] y [B], son iguales, por lo tanto, si los segundos miembros también lo son, como [B] es verdadera, [A] también lo es.

$1 - \frac{1}{2^{h+1}} = 1 - \frac{1}{2^h} + \frac{1}{2^{h+1}}$

Operando el segundo miembro convenientemente: $1 - \frac{1}{2^{h+1}} = 1 - \frac{2-1}{2^{h+1}}$

$1 - \frac{1}{2^{h+1}} = 1 - \frac{1}{2^{h+1}}$

Son iguales. Queda demostrado que: $\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \ldots + \frac{1}{2^n} = 1 - \frac{1}{2^n}$ $\forall$ n $\in$ **N***

d) $1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + n^2 = n(n+1)(2n+1)/6$ $\forall$ n $\in$ **N**

1°) Verificar que la propiedad se cumple para n = 1

Si n = 1 $1^2 = \frac{1\,(1+1)(2x1+1)}{6}$

1 = 1 se verifica.

2°) Suponemos que se cumple para n = h

$1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + h^2 = \frac{h\,(h+1)(2h+1)}{6}$ es verdadera por hipótesis inductiva

3°) Demostrar que se cumple para n = h + 1

$1^2 + 2^2 + \cdots + (h+1)^2 = \frac{(h+1)[(h+1)+1]\,[(2(h+1)+1)]}{6}$ no sabemos es verdadera o no. [A]

Para demostrar que esta última expresión es verdadera, partiendo de la hipótesis inductiva:

$$1^2+2^2+3^2+\cdots+h^2=\frac{h\,(h+1)(2h+1)}{6}$$ que es verdadera

Sumamos miembro a miembro el término que se encuentra en la posición h + 1

$$1^2+2^2+\cdots+h^2+(h+1)^2=\frac{h\,(h+1)(2h+1)}{6}+(h+1)^2$$ que es verdadera [B]

Comparando los primeros miembros de [A] y [B], son iguales, por lo tanto, si los segundos miembros también lo son, como [B] es verdadera, [A] también lo es.

$$\frac{(h+1)[(h+1)+1]\,[(2(h+1)+1)]}{6} = \frac{h\,(h+1)(2h+1)}{6}+(h+1)^2$$

1° miembro: $\frac{(h+1)[(h+1)+1]\,[(2(h+1)+1)]}{6}=\frac{(h+1)(h+2)(2h+3)}{6}$

2° miembro: $\frac{h\,(h+1)(2h+1)}{6}+(h+1)^2=\frac{h\,(h+1)(2h+1)+6(h+1)^2}{6}$

$$=\frac{(h+1)[h(2h+1)+6(h+1)]}{6}$$

$$=\frac{(h+1)[\,2h^2+h+6h+6]}{6}$$

$$=\frac{(h+1)[\,2h^2+7h+6]}{6}$$

Ahora, si en cálculos auxiliares, haciendo $2h^2+7h+6=0$, se buscan las correspondientes raíces: h_1 = -2 y $h_2=-\frac{3}{2}$: $2h^2+7h+6=2\,(h+2)\left(h+\frac{3}{2}\right)=(h+2)(2h+3)$

$$\frac{h\,(h+1)(2h+1)}{6}+(h+1)^2=\frac{(h+1)(h+2)(2h+3)}{6}$$

Los segundos miembros son iguales. Queda demostrado que:

$1^2 + 2^2 + 3^2 +\ldots+ n^2 = n\,(n+1)(2n+1)/6 \quad \forall\, n \in$ **N***

e) $1^3 + 2^3 + 3^3 +\ldots+ n^3 = n^2\,(n+1)^2/4 \quad \forall\, n \in$ **N***

1°) Verificar que la propiedad se cumple para n = 1

Si n = 1 $1^3=\frac{1^2\,(1+1)^2}{4}$

1 = 1 se verifica.

2°) Suponemos que se cumple para n = h

$$1^3+2^3+3^3+\cdots+h^3=\frac{h^2\,(h+1)^2}{4}$$ es verdadera por hipótesis inductiva

3°) Demostrar que se cumple para n = h + 1

$1^3+2^3+3^3+\cdots+(h+1)^3=\frac{(h+1)^2\,[(h+1)+1]^2}{4}$ no sabemos es verdadera o no. [A]

Para demostrar que esta última expresión es verdadera, partiendo de la hipótesis inductiva:

$$1^3 + 2^3 + 3^3 + \cdots + h^3 = \frac{h^2\,(h+1)^2}{4}$$ que es verdadera

Sumamos miembro a miembro el término que se encuentra en la posición h + 1

$$1^3 + 2^3 + 3^3 + \cdots + h^3 + (h+1)^3 = \frac{h^2\,(h+1)^2}{4} + (h+1)^3$$ que es verdadera [B]

Comparando los primeros miembros de [A] y [B], son iguales, por lo tanto, si los segundos miembros también lo son, como [B] es verdadera, [A] también lo es.

$$\frac{(h+1)^2\,[(h+1)+1]^2}{4} = \frac{h^2\,(h+1)^2}{4} + (h+1)^3$$

1° miembro: $\frac{(h+1)^2\,[(h+1)+1]^2}{4} = \frac{(h+1)^2\,(h+2)^2}{4}$

2° miembro: $\frac{h^2\,(h+1)^2}{4} + (h+1)^3 = \frac{h^2\,(h+1)^2 + 4(h+1)^3}{4}$

$$= \frac{(h+1)^2[h^2 + 4(h+1)]}{4}$$

$$= \frac{(h+1)^2[h^2 + 4h + 4]}{4}$$

Ahora, la expresión entre corchetes, factorizado es: $h^2 + 4h + 4 = (h+2)^2$

$$\frac{h^2\,(h+1)^2}{4} + (h+1)^3 = \frac{(h+1)^2(h+2)^2}{4}$$

Los segundos miembros son iguales. Queda demostrado que:

$$1^3 + 2^3 + 3^3 + \ldots + n^3 = n^2\,(n+1)^2/4 \quad \forall\, n \in \mathbf{N^*}$$

<u>Ejercicio N° 6</u>: Demuestre si $\sum_{i=1}^{n} (2i+1)3^{i-1} = n\,3^n$ es válida para cualquier número natural

<u>Solución:</u>

Recordemos que $\sum_{i=1}^{n} (2i+1)\,3^{i-1} = n3^n$ es equivalente decir:

$$(2\cdot 1+1)\,3^{1-1} + (2\cdot 2+1)\,3^{2-1} + (2\cdot 3+1)\,3^{3-1} + \cdots + (2n+1)\,3^{n-1} = n3^n$$

La fórmula del i-esimo término es: $(2i+1)\,3^{i-1}$

1°) Verificar que la propiedad se cumple para n = 1

Si n = 1 En el primer miembro:

$$\sum_{i=1}^{1} (2i+1)\,3^{i-1} = (2\cdot 1+1)\cdot 3^{1-1} = 3\cdot 1 = 3$$

En el segundo miembro: $1 \cdot 3^1 = 3$

$3 = 3$ se verifica.

2°) Suponemos que se cumple para n = h

$\sum_{i=1}^{h}(2i+1)\,3^{i-1} = h3^h$ Hipótesis Inductiva

3°) Demostrar que se cumple para n = h + 1

$\sum_{i=1}^{h+1}(2i+1)\,3^{i-1} = (h+1)3^{h+1}$ no sabemos es verdadera o no. [A]

Para demostrar que esta última expresión es verdadera, partiendo de la hipótesis inductiva:

$$\sum_{i=1}^{h}(2i+1)\,3^{i-1} = h3^h$$

Sumamos miembro a miembro el término que se encuentra en la posición h + 1

$\sum_{i=1}^{h}(2i+1)\,3^{i-1} + (2(h+1)+1)\,3^{h+1-1} = h3^h + (2(h+1)+1)\,3^{h+1-1}$ [B]

Comparando los primeros miembros de [A] y [B], son iguales:

$$\sum_{i=1}^{h+1}(2i+1)\,3^{i-1} = \sum_{i=1}^{h}(2i+1)\,3^{i-1} + (2(h+1)+1)\,3^{h+1-1}$$

Por lo tanto, si los segundos miembros también lo son, como [B] es verdadera, [A] también lo es.

$$(h+1)3^{h+1} = h3^h + (2(h+1)+1)\,3^{h+1-1}$$

1° miembro: $(h+1)3^{h+1} = h\,3^{h+1} + 3^{h+1} = h \cdot 3^h \cdot 3 + 3^h \cdot 3 = 3^h(3h+3)$

2° miembro: $h3^h + (2(h+1)+1)\,3^{h+1-1} = h3^h + (2h+2+1)3^h = h3^h + (2h+3)3^h =$

$$= 3^h(h+2h+3) = 3^h(3h+3)$$

Los segundos miembros son iguales. Queda demostrado que:

$$\sum_{i=1}^{n}(2i+1)3^{i-1} = n\,3^n$$

<u>Ejercicio N° 7</u>: Pruebe la validez de las siguientes proposiciones:

a) $\sum_{i=1}^{n} 2^i = 2^{n+1} - 2$

b) $\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{2}{3}\right)^{i} = 2 - \frac{2^{n+1}}{3^{n}}$

<u>Solución b):</u>

$\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{2}{3}\right)^{i} = 2 - \frac{2^{n+1}}{3^{n}}$

Recordemos que $\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{2}{3}\right)^{i} = 2 - \frac{2^{n+1}}{3^{n}}$

Es equivalente a decir: $\frac{2}{3} + \frac{4}{9} + \frac{8}{27} + \cdots + \left(\frac{2}{3}\right)^{n} = 2 - \frac{2^{n+1}}{3^{n}}$

La fórmula del i-ésimo término es: $\left(\frac{2}{3}\right)^{i}$

1°) Verificar que la propiedad se cumple para n = 1

Si n = 1 $\quad \sum_{i=1}^{1}\left(\frac{2}{3}\right)^{i} = 2 - \frac{2^{1+1}}{3^{1}}$

$\frac{2}{3} = \frac{2}{3}$ se verifica.

2°) Suponemos que se cumple para n = h

$\sum_{i=1}^{h}\left(\frac{2}{3}\right)^{i} = 2 - \frac{2^{h+1}}{3^{h}}$ es verdadera por hipótesis inductiva

3°) Demostrar que se cumple para n = h + 1

$\sum_{i=1}^{h+1}\left(\frac{2}{3}\right)^{i} = 2 - \frac{2^{(h+1)+1}}{3^{(h+1)}}$ no sabemos es verdadera o no. [A]

Para demostrar que esta última expresión es verdadera, partiendo de la hipótesis inductiva:

$\sum_{i=1}^{h}\left(\frac{2}{3}\right)^{i} = 2 - \frac{2^{h+1}}{3^{h}}$ que es verdadera

Sumamos miembro a miembro el término que se encuentra en la posición h + 1

$\sum_{i=1}^{h}\left(\frac{2}{3}\right)^{i} + \left(\frac{2}{3}\right)^{h+1} = 2 - \frac{2^{h+1}}{3^{h}} + \left(\frac{2}{3}\right)^{h+1}$ que es verdadera [B]

Comparando los primeros miembros de [A] y [B], son iguales:

$$\sum_{i=1}^{h}\left(\frac{2}{3}\right)^{i} + \left(\frac{2}{3}\right)^{h+1} = \sum_{i=1}^{h+1}\left(\frac{2}{3}\right)^{i}$$

Por lo tanto, si los segundos miembros también lo son, como [B] es verdadera, [A] también lo es.

$$2 - \frac{2^{(h+1)+1}}{3^{(h+1)}} = 2 - \frac{2^{h+1}}{3^{h}} + \left(\frac{2}{3}\right)^{h+1}$$

1° miembro: $2 - \frac{2^{(h+1)+1}}{3^{(h+1)}} = 2 - \frac{2^{h+2}}{3^{h+1}}$

2° miembro: $2 - \frac{2^{h+1}}{3^{h}} + \left(\frac{2}{3}\right)^{h+1} = 2 - \frac{2^{h+1}}{3^{h}} + \frac{2^{h+1}}{3^{h+1}}$

$$= 2 - \frac{2^{h+1}\,3 - 2^{h+1}}{3^{h+1}}$$

$$= 2 - \frac{2^{h+1}\,2}{3^{h+1}}$$

$$= 2 - \frac{2^{h+2}}{3^{h+1}}$$

Los segundos miembros son iguales. Queda demostrado que:

$$\sum_{i=1}^{n} \left(\frac{2}{3}\right)^{i} = 2 - \frac{2^{n+1}}{3^{n}}$$

<u>Ejercicio N° 8</u>: Pruebe que:

a) $\forall\, n \in \mathbf{N}^*$, $4^n - 1$ es divisible por 3.

b) $2 \mid n^2 + n$, $\forall\, n \in \mathbf{N}$.

<u>Solución a):</u>

a) $\forall\, n \in \mathbf{N}^*$, $4^n - 1$ es divisible por 3.

$4^n - 1$ es divisible por 3 es $3 \mid 4n - 1$ $\forall\, n \in N^*$

Si $3 \mid 4^n - 1 \quad \Rightarrow \quad \exists\, k \in N^*, \forall\, n \in N^* : 4^n - 1 = 3k$

1°) Verificar que la propiedad se cumple para n = 1

Si n = 1 $\qquad 4^1 - 1 = 3x1 \qquad$ siendo k = 1

$\qquad 3 = 3 \qquad$ se verifica.

2°) Suponemos que se cumple para n = h

$4^h - 1 = 3k$ $\qquad$ es verdadera por hipótesis inductiva

3°) Demostraremos que se cumple para n = h + 1

$4^{(h+1)} - 1 = 3k$ $\qquad$ no sabemos es verdadera o no. $\qquad$ [A]

Considerando el 1º miembro $4^{(h+1)} - 1 = 4^h \cdot 4 - 1$

$= (3k + 1) \cdot 4 - 1$ Por hipótesis inductiva

$= 12k + 4 - 1$ Por distrib. Del producto/suma

$= 12k + 3$

$= 3 (4k + 1)$

Esta expresión es divisible por 3 para cualquier $k \in N$. Por lo tanto se verifica la propiedad enunciada.

$\forall\, n \in N^*,\ 4^n - 1$ es divisible por 3.