Problemas de Posición y Magnitud

TRABAJO PRÁCTICO Nº 6

Posiciones entre rectas

1- ¿Cuál es la posición relativa entre las siguientes rectas?

a) $l_1: \frac{x-3}{4} = \frac{y}{10} = \frac{z-1}{-8}$ y $l_2: \frac{x-1}{2} = \frac{y-3}{5} = \frac{z}{-4}$.?

b) $s_1: \frac{x-3}{1} = \frac{y+8}{-2} = \frac{z+6}{-11}$ y $s_2: \frac{x+4}{5} = \frac{y-1}{-3} = \frac{z-3}{1}$

2- Dada la recta $r_1: (x; y; z) = (0; -2; 3) + \lambda(-4; -6; 10)$. Analizar cuál de las siguientes rectas, es paralela r_1 y cuál es perpendicular a ella. Luego, representarlas a todas en el mismo sistema de ejes coordenadas con GeoGebra.

$r_2: \frac{x+1}{2} = \frac{y-2}{3} = \frac{z+1}{-4}$ $r_3: \frac{x-2}{-3} = \frac{y-1}{2} = \frac{z}{-4}$ $r_4: \begin{cases} x = 2 + 2t \\ y = 1 + \frac{8}{3}t \\ z = 3t \end{cases}$

3- Analizar si las rectas: $R_1: (x; y; z) = (0; -2; 3) + \lambda(-4; -6; 10)$ recta $R_3: \begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = 3t \\ z = 4 - 5t \end{cases}$ son o no alabeadas. Luego represente gráficamente a ambas rectas en GeoGebra.

4- Estudiar si las rectas $L_1: \begin{cases} x = -1 + 2h \\ y = 5 + 3h \\ z = 7 - h \end{cases}$ y $L_2: \frac{x-1}{4} = \frac{y-8}{6} = \frac{z-6}{-2}$ son coincidentes o no.

Posiciones entre planos

5- Determinar si los planos son paralelos o perpendiculares entre sí. Comprobarlo gráficamente con GeoGebra.

a) $\alpha: 2x - y + 3z = 8$ y $\beta: x + 3y - z = 5$

b) $\gamma: 2x + 6y - 2z = 8$ y $\beta: x + 3y - z = 5$

6- Dados los planos $\sigma_1: 4x + 5y + 2z - 3 = 0$ y $\sigma_2: x + 3y + 4z - 5 = 0$, estudiar la posición relativa entre ambos.

7- a) Graficar en GeoGebra los planos $\pi_1: 7x - 3y + z - 5 = 0$ y $\pi_2: 4x - y - z + 9 = 0$ y al plano δ que es perpendicular a ambos y pasa por el punto M(3, -2, 4).

b) Determinar la ecuación segmentaria del plano δ.

8- Calcular m y n para que los planos $\alpha: mx + y - 3z - 1 = 0$ y $\beta: 2x + ny - z - 3 = 0$ sean paralelos. ¿Pueden ser coincidentes?

Posiciones entre rectas y planos

9- Determinar la posición relativa entre la recta m y el plano π, sabiendo que:

a) $m: \frac{x-1}{5} = \frac{y}{1} = \frac{z+2}{1}$ $\quad \pi: -x + 3y + 2z + 5 = 0$
b) $r: \frac{x+1}{2} = \frac{y}{1} = \frac{z}{-1}$ $\quad \delta: x - 2y + 3z + 1 = 0$

10- Hallar las ecuaciones vectorial y paramétrica de la recta que pasa por el punto P(2 , 1 , -3) y es perpendicular al plano π: 3x – 5y + 2z + 4 = 0

11- Estudiar la posición relativa entre la recta $r: \frac{x+1}{3} = y - 2 = \frac{z}{2}$ y el plano determinado por los puntos A(1,3,2), B(2,0,1) y C(1,4,3) de manera analítica y corroborar sus cálculos gráficamente con GeoGebra.

12- Considerar la recta $r: \begin{cases} 5x - y + z = 0 \\ x - y - z = 4 \end{cases}$ y el plano $\pi: ax - 6y + 4z = 5$. Determinar el valor de a para que:

a) la recta y el plano sean paralelos. b) la recta sea perpendicular al plano.

Posición: Intersecciones

13- a) Dados los planos son: $\propto: x - z - 2 = 0$ y $\beta: y + 3z - 1 = 0$. Escribir la ecuación paramétrica de la recta, r, que resulta de la intersección entre ambos planos.

b) Encontrar el punto de intersección entre la recta r y el plano $\pi: x - 2y - 7 = 0$.

14- Hallar la intersección entre la recta $r: \begin{cases} x = 2t \\ y = 3t + 1 \\ z = t \end{cases}$ y el plano $\propto: 3x + 2y - 11z - 5 = 0$.

15- Dadas $r: \begin{cases} x - y - z + 8 = 0 \\ 5x + y + z + 10 = 0 \end{cases}$ y $s: \begin{cases} x + y + z = 2 \\ 2x + y - 3z = -9 \end{cases}$. Encontrar de ser posible, su intersección.

16- ¿Cuál debe ser el valor de "b" para que las rectas $r: \frac{x-1}{2} = \frac{y+5}{-3} = \frac{z+1}{2}$ y $s: \frac{x}{4} = \frac{y-b}{-1} = \frac{z-1}{2}$ se corten en un punto? Determinar el punto de intersección.

Magnitud: Ángulo

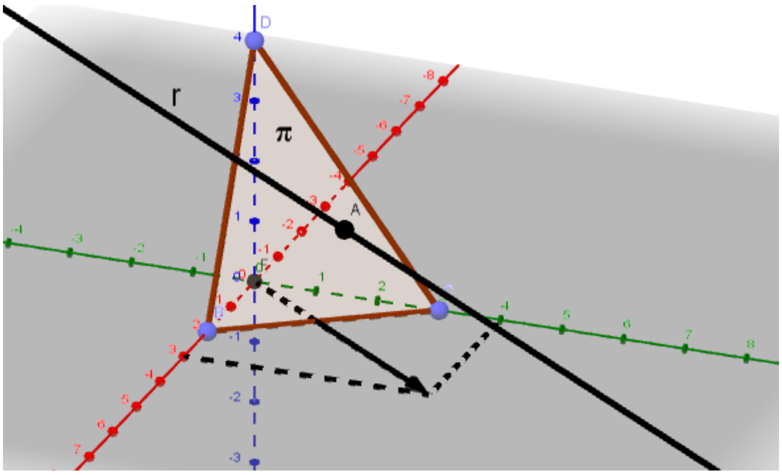
17- Calcular el ángulo comprendido entre:

a) los planos $\pi_1: 3x - y + 2z + 1 = 0$ y $\pi_2: 2x + y + 5z - 1 = 0$

b) entre la recta $r: \begin{cases} x = 3 + \lambda \\ y = -2 + \lambda \\ z = 5 \end{cases}$ y el plano $\gamma: 3x - 4y + 5z - 1 = 0$

c) entre las rectas $r: \frac{x-1}{2} = \frac{y+5}{-3} = \frac{z+1}{2}$ y $s: \frac{x}{4} = \frac{y-1}{-1} = \frac{z-1}{2}$.

18- Hallar el ángulo entre la recta r y el plano π dados en el gráfico.



19- a) Calcular el ángulo que forman los planos $\gamma: x + y + z - 1 = 0$ y $\delta: x - 2y + 3z = 1$.

b) Encontrar la ecuación simétrica de la recta que resulta de la intersección de γ y δ.

c) Hallar la ecuación del plano que pasa por el punto P(1;-2;1) y es perpendicular a los planos γ y δ.

Magnitud: Distancia

Nota: recuerde que en todos los casos antes de calcular una distancia, se deberá analizar posiciones relativas.

20- Calcular la distancia entre:

a) el punto T(1 ; 1; 1) y la recta r: $\frac{x+1}{2} = \frac{y-2}{4} = \frac{z-3}{6}$.

b) el plano $\pi: 2x - 3y - 6z - 14 = 0$ y el punto $Q(-1; 2; 3)$

21- Hallar la distancia entre los planos $\sigma: 3x + 6y + 2z - 22 = 0$ y $\varepsilon: 3x + 6y + z - 27 = 0$.

22- Hallar la distancia entre el punto P(1; 1; -2) a la recta que pasa por el punto Q(2 , 1 , 2) y es paralela al vector $\vec{v} = (-4; 2; 2)$.

23- Calcular la distancia entre la recta $r_1: (x, y, z) = (1,0,3) + \mu\left(1, -\frac{1}{2}, -2\right)$ y la recta $r_2: (x, y, z) = (3,1,0) + \tau(-2,1,4)$.

Posición y Magnitud integrados

24- a) Encontrar la ecuación paramétrica y la ecuación simétrica de la recta que pasa por R(0;6;8) y S(-1;4;7).

b) ¿En qué puntos la recta que pasa por R y S se interseca con el plano XY?

c) Calcular la distancia del punto P(1;1;1) a la recta que pasa por R y S.

25- a) Dadas las rectas $r: \frac{x+1}{2} = \frac{y-2}{4} = \frac{z-3}{6}$ y $s: \frac{x-1}{a} = \frac{y-1}{3} = \frac{z-2}{5}$ determinar el valor de a para que las mismas sean alabeadas.

b) De ser posible, calcular la distancia entre las rectas r y s.

26- a) Hallar la ecuación del plano θ paralelo al plano $\pi: 2x - 3y - 6z - 14 = 0$ y que equidista del origen de coordenadas en 5 unidades.

b) Calcular la distancia entre los planos θ y π

c) El punto A(1;2;-1) ¿pertenece al plano π? De no ser así calcule la distancia que existe entre el punto A y el plano π .

27- Dados los planos $\alpha: 3x + 6y + 2z - 22 = 0$ y $\beta: -3x + 6y + z - 27 = 0$,

a) Estudiar la posición relativa entre ellos.

b) Determinar la distancia entre α y β, o el ángulo comprendido entre estos planos, según corresponda.

28- Sean las rectas $r_1: 2x + 5y + 3 = 0$ y $r_2: x - 3y - 7 = 0$.

a) Calcular el ángulo comprendido entre r_1 y r_2.

b) Hallar la ecuación de la recta perpendicular a $s: 4x + y - 1 = 0$ y que pasa por el punto de intersección entre r_1 y r_2.