# EJERCICIOS RESUELTOS DEL TRABAJO PRÁCTICO N°2:

## Límite de una Función

1- A partir de la gráfica de la función $f$, analizar la existencia de los límites indicados.

a) $\lim_{x\to -2^-} f(x)$= -1

b) $\nexists \lim\limits_{x\to -2^+} f(x)$ No existe límite lateral por derecha, ya que a medida que x se aproxima a 2 desde la derecha los valores de las imágenes de estos puntos no se aproximan a un número real en particular sino tiende a +∞.

c) $\nexists \lim_{x\to -2} f(x)$ ya que no se cumple la existencia de ambos límites laterales.

d) f(-2)= -1

e) $\lim_{x\to -1^-} f(x) = 3$

f) $\lim_{x\to -1^+} f(x) = 3$

g) $\lim_{x\to -1} f(x) = 3$ porque se cumple la existencia y la unicidad de los límites laterales de la función cuando x tiende a 3.

h) f(-1)= 3

i) $\lim_{x\to 2^+} f(x) = 0$

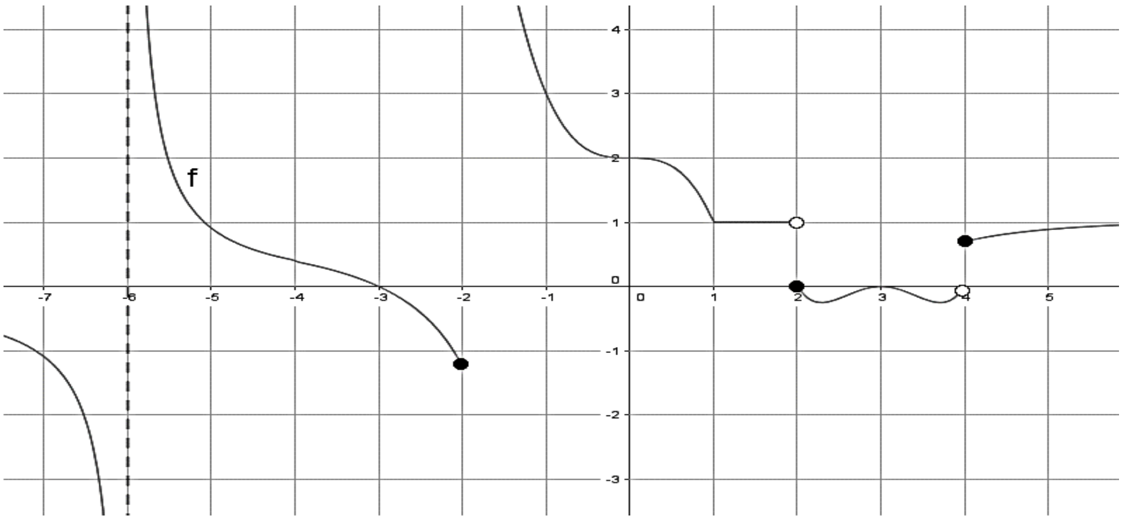
j)$\lim_{x\to 2^-} f(x) = 1$

k) $\nexists \lim\limits_{x\to 2} f(x)$ si bien existen ambos límites laterales, estos no verifican la condición de unicidad.

l) f(2) = 0

m) $\lim_{x\to 3} f(x) = 0$

n) $\lim_{x\to -6} f(x) = \infty$



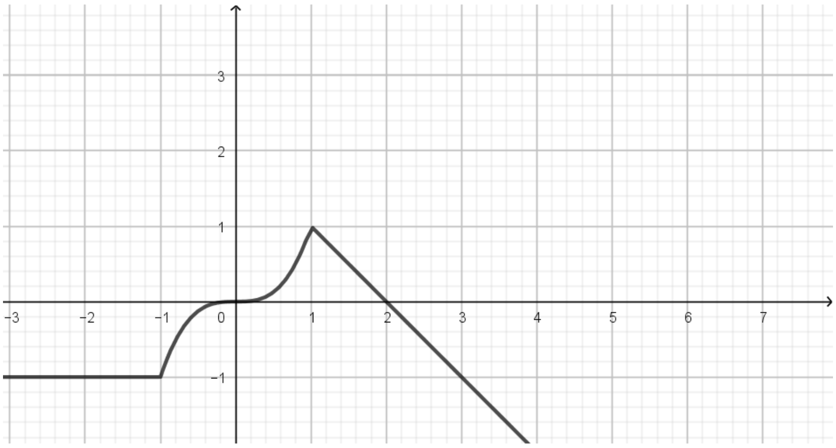

**Ejercicio 3:**

Graficar las siguientes funciones y, si existen, establecer el valor de los límites solicitados. Justificar

$f(x) = \begin{cases} x^2 & si\ x < 2 \\ 4 & si\ x > 2 \end{cases}$ Hallar: $\lim_{x\to 2^+} f(x))$ $\lim_{x\to 2^-} f(x)$ $\lim_{x\to 2} f(x)$

Solución

$g(x) = \begin{cases} -1 & si\ x \le -1 \\ x^3 & si\ -1 < x \le 1 \\ -x+2 & si\ \ x \ge 1 \end{cases}$ Hallar: $\lim_{x\to -1} g(x) = -1$ $\lim_{x\to 1} g(x)$ = 1




h(x)= $\begin{cases} -\mathrm{x} & si\ x < 0 \\ 9 - x^2 & si\ 0 < x \le 3 \\ x - 2 & si\ \ x > 3 \end{cases}$ Hallar: $\lim_{x\to 0^-} h(x)$ $\lim_{x\to 0^+} \mathrm{h}(x)$ $\lim_{x\to 0} h(x)$

$\lim_{x\to 3^-} h(x)$ $\lim_{x\to 3^+} \mathrm{h}(x)$ $\lim_{x\to 3} h(x)$

**Ejercicio 4:**

Calcular el valor de los siguientes límites:

b) $lim_{x\to -3}\left(\frac{-\pi}{9-x^2}\right) = \frac{lim_{x\to -3} -\pi}{lim_{x\to -3}(9-x^2)} = \frac{-\pi}{9-(-3)^2} = \frac{-\pi}{0} = \infty$

Aplicando propiedades, el límite del cociente de dos funciones es igual al cociente de los límites de esas funciones.

c) $\lim_{x\to\infty}(2x^5 - 3x^2 - 3x) = \lim_{x\to\infty} 2x^5 + \lim_{x\to\infty} 3x^2 + \lim_{x\to\infty} 3x$ (1)

$= 2\lim_{x\to\infty} x^5 + 3\lim_{x\to\infty} x^2 + 3\lim_{x\to\infty}$ (2)

$= 2\infty^5 + 3\infty^2 + 3\infty$

$= \infty$

(1)El límite de la suma de funciones es igual a la suma de los límites de esas funciones

(2)El límite de una constante por una función es igual a la constante por el límite de la función

4.d) $\lim_{x\to\infty} \frac{3}{(2x+4)} = \frac{\lim\limits_{x\to\infty} 3}{\lim\limits_{x\to\infty}(2x+4)} = \frac{\lim\limits_{x\to\infty} 3}{2.\lim\limits_{x\to\infty} x + \lim\limits_{x\to\infty} 4} = \frac{3}{2.\infty+4} = \frac{3}{\infty} = 0$

Para efectuar el cálculo del límite aplicamos propiedades:

En primer lugar el límite de un cociente es el cociente de los límites.

Luego, el límite de una suma es la suma de los límites.

Como estamos hablando de límites, al tener en el resultado una fracción donde el numerador es un número entero y el denominador tiende a infinito, el resultado del límite será cero. Recordar que al dividir un número por un número mucho más grande, el resultado se acercará a cero.

**Ejercicio 5:**

Halle los límites de funciones del tipo $\lim_{x\to 0} \frac{sen(x)}{x}$ y $\lim_{x\to 0} \frac{tg(x)}{x}$

5. d) $\lim_{x\to 0} \frac{tg\, x - sen\, x}{x}$

Teniendo en cuenta que $\lim_{x\to 0} \frac{sen\, x}{x} = 1$ y $\lim_{x\to 0} \frac{tan\, x}{x} = 1$, podremos trabajar algebraicamente la expresión y luego aplicar propiedades de límites como se observa a continuación:

$$\lim_{x\to 0} \frac{tg\, x - sen\, x}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{tg\, x}{\mathrm{x}} - \lim_{x\to 0} \frac{sen\, x}{\mathrm{x}} = 1 - 1 = 0$$

**Ejercicio 6:**

Encontrar los siguientes límites indeterminados:

I. del tipo $0/0$

g) $\lim_{x\to 2} \frac{x-\sqrt{x+2}}{\sqrt{4x+1}-3}$

Solución

$\lim_{x\to 2} \frac{x-\sqrt{x+2}}{\sqrt{4x+1}-3} = \frac{2-\sqrt{2+2}}{\sqrt{4.2+1}-3} = \frac{2-\sqrt{4}}{\sqrt{9}-3} = \frac{0}{0}$ Indeterminado

Para salvar este tipo de indeterminación es necesario realizar procedimientos algebraicos. En este caso, como tanto en el numerador como en el denominador encontramos expresiones irracionales, se deberá multiplicar y dividir por el conjugado de cada una de las expresiones irracionales y luego realizar los cálculos algebraicos correspondientes

$\lim_{x\to2} \frac{x-\sqrt{x+2}}{\sqrt{4x+1}-3} = \lim_{x\to2} \frac{x-\sqrt{x+2}}{\sqrt{4x+1}-3}.\frac{\sqrt{4x+1}+3}{\sqrt{4x+1}+3}.\frac{x+\sqrt{x+2}}{x+\sqrt{x+2}} = \lim_{x\to2} \frac{\left(x^2-\left(\sqrt{x+2}\right)^2\right).\left(\sqrt{4x+1}+3\right)}{\left(\left(\sqrt{4x+1}\right)^2-3^2\right)(x+\sqrt{x+2})} =$
$\lim_{x\to2} \frac{(x^2-(x+2)).(\sqrt{4x+1}+3)}{(4x+1-9)(x+\sqrt{x+2})} = \lim_{x\to2} \frac{(x^2-x-2).(\sqrt{4x+1}+3)}{(4x-8)(x+\sqrt{x+2})}$

Una vez llegado a este punto, cómo ya no hay procedimientos algebraicos disponibles para "acomodar" la expresión, procedemos a resolver el límite para ver si se ha salvado la indeterminación o no:

$$\lim_{x\to2} \frac{(x^2-x-2).\left(\sqrt{4x+1}+3\right)}{(4x-8)\left(x+\sqrt{x+2}\right)} = \frac{(2^2-2-2).\left(\sqrt{4.2+1}+3\right)}{(4.2-8)\left(2+\sqrt{2+2}\right)} = \frac{(4-4).\left(\sqrt{9}+3\right)}{(8-8)\left(2+\sqrt{4}\right)} = \frac{0.6}{0.4} = \frac{0}{0}$$

Como se observa, sigue habiendo una indeterminación del tipo 0/0, sin embargo, se podrá salvar utilizando los casos de factores dado que la indeterminación ya no se produce por la presencia de expresiones irracionales. La expresión del denominador se podrá factorear utilizando el caso de factor común, y la expresión del denominador podrem/os factorearla por el método de ruffini o bien aplicando la formula resolvente

$$\lim_{x\to2} \frac{(x^2-x-2).\left(\sqrt{4x+1}+3\right)}{(4x-8)\left(x+\sqrt{x+2}\right)} = \lim_{x\to2} \frac{(x-2)(x+1).\left(\sqrt{4x+1}+3\right)}{4(x-2)\left(x+\sqrt{x+2}\right)} = \lim_{x\to2} \frac{(x+1).\left(\sqrt{4x+1}+3\right)}{4\left(x+\sqrt{x+2}\right)}$$
$$= \frac{(2+1).\left(\sqrt{4.2+1}+3\right)}{4\left(2+\sqrt{2+2}\right)} = \frac{(3).\left(\sqrt{9}+3\right)}{4\left(2+\sqrt{4}\right)} = \frac{3.6}{4.4} = \frac{18}{16} = \frac{9}{8}$$

$$\boxed{\lim_{x\to2} \frac{x-\sqrt{x+2}}{\sqrt{4x+1}-3} = \frac{9}{8}}$$

j) $\lim_{x\to2} \frac{x^2-4x-5}{x^3-3x^2-13x+15}$

## Solución

En primer lugar se debe verificar si el límite es una indeterminación o no, para ello se resuelve el límite:

$\lim_{x\to2} \frac{x^2-4x-5}{x^3-3x^2-13x+15} = \frac{2^2-4.2-5}{2^3-3.2^2-13.2+15} = \frac{4-8-5}{8-3.4-26+15} = \frac{-9}{-15} = \frac{9}{15}$

Como se puede observar, es un límite determinado cuyo valor es 9/15

$$\boxed{\lim_{x\to2} \frac{x^2-4x-5}{x^3-3x^2-13x+15} = 9/15}$$

II. del tipo $\infty/\infty$

a) $\lim_{x\to\infty} \frac{x^4-x^3+2}{x^5+8x^3-1}$

Solución

$\lim_{x\to\infty} \frac{x^4-x^3+2}{x^5+8x^3-1} = \frac{\infty}{\infty}$ indeterminado.

Se debe dividir numerador y denominador por x elevado a la máxima potencia, que en este caso es 5. Así que dividiremos numerador y denominador por $x^5$.

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x^4-x^3+2}{x^5+8x^3-1} = \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{x^4-x^3+2}{x^5}}{\frac{x^5+8x^3-1}{x^5}} = \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{x^4}{x^5}-\frac{x^3}{x^5}+\frac{2}{x^5}}{\frac{x^5}{x^5}+\frac{8x^3}{x^5}-\frac{1}{x^5}} = \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}+\frac{2}{x^5}}{1+\frac{8}{x^2}-\frac{1}{x^5}} = \frac{\frac{1}{\infty}-\frac{1}{\infty^2}+\frac{2}{\infty^5}}{1+\frac{8}{\infty^2}-\frac{1}{\infty^5}} =$$
$$\frac{0-0+0}{1+0-0} = \frac{0}{1} = 0$$

$$\boxed{\lim_{x\to\infty} \frac{x^4-x^3+2}{x^5+8x^3-1} = 0}$$

d) $\lim_{x\to\infty} \frac{7x}{4x+1+\sqrt{16x^2+3x-2}}$

Solución

$\lim_{x\to\infty} \frac{7x}{4x+1+\sqrt{16x^2+3x-2}} = \frac{\infty}{\infty}$ indeterminado.

Se debe dividir numerador y denominador por x elevado a la máxima potencia. Si bien se observa $x^2$, es parte del radicando de una raíz de índice 2, así que la máxima potencia es 1. Conviene dividir numerador y denominador por x.

$$\lim_{x\to\infty} \frac{7x}{4x+1+\sqrt{16x^2+3x-2}} = \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{7x}{x}}{\frac{4x+1+\sqrt{16x^2+3x-2}}{x}} = \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{7x}{x}}{\frac{4x}{x}+\frac{1}{x}+\frac{\sqrt{16x^2+3x-2}}{x}} =$$
$$=\lim_{x\to\infty} \frac{\frac{7x}{x}}{\frac{4x}{x}+\frac{1}{x}+\sqrt{\frac{16x^2+3x-2}{x^2}}} = \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{7x}{x}}{\frac{4x}{x}+\frac{1}{x}+\sqrt{\frac{16x^2}{x^2}+\frac{3x}{x^2}-\frac{2}{x^2}}} = \lim_{x\to\infty} \frac{7}{4+\frac{1}{x}+\sqrt{16+\frac{3}{x}-\frac{2}{x^2}}}$$
$$= \frac{7}{4+\frac{1}{\infty}+\sqrt{16+\frac{3}{\infty}-\frac{2}{\infty^2}}} = \frac{7}{4+0+\sqrt{16+0-0}} = \frac{7}{8}$$

$$\boxed{\lim_{x\to\infty} \frac{7x}{4x+1+\sqrt{16x^2+3x-2}} = \frac{7}{8}}$$

g) $\lim_{x\to\infty} \left(x+\frac{1}{x}\right)$

Solución

$$\boxed{\lim_{x\to\infty} \left(x+\frac{1}{x}\right) = \infty + \frac{1}{\infty} = \infty + 0 = \infty}$$

III. del tipo $\infty - \infty$

c) $\lim_{x\to\infty}\left[\sqrt{x+\sqrt{x}}-\sqrt{x-\sqrt{x}}\right]$

Solución

$\lim_{x\to\infty}\left[\sqrt{x+\sqrt{x}}-\sqrt{x-\sqrt{x}}\right] = \infty - \infty$ indeterminado

Para "salvar" este tipo de indeterminación se recomienda transformarla primeramente en la indeterminación $\frac{\infty}{\infty}$, para ello se divide numerador y denominador por el conjugado de la expresión.

$$\lim_{x\to\infty}\left[\sqrt{x+\sqrt{x}}-\sqrt{x-\sqrt{x}}\right] = \lim_{x\to\infty}\left[\sqrt{x+\sqrt{x}}-\sqrt{x-\sqrt{x}}\right]\frac{\left[\sqrt{x+\sqrt{x}}+\sqrt{x-\sqrt{x}}\right]}{\left[\sqrt{x+\sqrt{x}}+\sqrt{x-\sqrt{x}}\right]}$$

$$= \lim_{x\to\infty}\frac{\left(\sqrt{x+\sqrt{x}}\right)^2-\left(\sqrt{x-\sqrt{x}}\right)^2}{\left[\sqrt{x+\sqrt{x}}+\sqrt{x-\sqrt{x}}\right]} = \lim_{x\to\infty}\frac{(x+\sqrt{x})-(x-\sqrt{x})}{\left[\sqrt{x+\sqrt{x}}+\sqrt{x-\sqrt{x}}\right]} = \lim_{x\to\infty}\frac{x+\sqrt{x}-x+\sqrt{x}}{\left[\sqrt{x+\sqrt{x}}+\sqrt{x-\sqrt{x}}\right]} = \lim_{x\to\infty}\frac{2\sqrt{x}}{\left[\sqrt{x+\sqrt{x}}+\sqrt{x-\sqrt{x}}\right]}$$

Calculando el límite, queda:

$\lim_{x\to\infty}\frac{2\sqrt{x}}{\left[\sqrt{x+\sqrt{x}}+\sqrt{x-\sqrt{x}}\right]} = \frac{\infty}{\infty}$ indeterminado

De acuerdo al tipo de indeterminación, va a funcionar para "salvar" la misma, dividir numerador y denominador por x a la máxima potencia, que en este caso es $\frac{1}{2}$. Así que se debe dividir numerador y denominador por $\sqrt{x}$.

$$\lim_{x\to\infty}\frac{2\sqrt{x}}{\left[\sqrt{x+\sqrt{x}}+\sqrt{x-\sqrt{x}}\right]} = \lim_{x\to\infty}\frac{\frac{2\sqrt{x}}{\sqrt{x}}}{\left[\frac{\sqrt{x+\sqrt{x}}+\sqrt{x-\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}\right]} = \lim_{x\to\infty}\frac{\frac{2\sqrt{x}}{\sqrt{x}}}{\frac{\sqrt{x+\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}+\frac{\sqrt{x-\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}} = \lim_{x\to\infty}\frac{\frac{2\sqrt{x}}{\sqrt{x}}}{\sqrt{\frac{x}{x}+\frac{\sqrt{x}}{x}}+\sqrt{\frac{x}{x}-\frac{\sqrt{x}}{x}}}$$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{2\sqrt{x}}{\sqrt{x}}}{\sqrt{\frac{x}{x}+\sqrt{\frac{x}{x^2}}}+\sqrt{\frac{x}{x}-\sqrt{\frac{x}{x^2}}}} = \lim_{x\to\infty}\frac{2}{\sqrt{1+\sqrt{\frac{1}{x}}}+\sqrt{1-\sqrt{\frac{1}{x}}}} = \frac{2}{\sqrt{1+\sqrt{\frac{1}{\infty}}}+\sqrt{1-\sqrt{\frac{1}{\infty}}}} = \frac{2}{\sqrt{1+\sqrt{0}}+\sqrt{1-\sqrt{0}}} = \frac{2}{1+1} = 1$$

$$\boxed{\lim_{x\to\infty}\left[\sqrt{x+\sqrt{x}}-\sqrt{x-\sqrt{x}}\right] = 1}$$

**Ejercicio 7:**

En cada función propuesta:

Determinar su dominio y analizar la existencia de asíntotas.

c) $f(x) = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}-1}$

i- Dom f = {x ∈ R / $\sqrt{1+x^2}-1 \neq 0$}    Dom f = R*

**Asíntota vertical**: x = a es asíntota vertical de f ⇔ $\lim_{x\to a} f(x) = \infty$

En este caso, podría haber asíntota horizontal en x = 0:

$\lim_{x\to 0} \frac{x}{\sqrt{1+x^2}-1} = \frac{0}{0}$ indeterminado

Racionalizando:

$\lim_{x\to 0} \frac{x}{\sqrt{1+x^2}-1} = \lim_{x\to 0} \frac{x}{(\sqrt{1+x^2}-1)} \frac{(\sqrt{1+x^2}+1)}{(\sqrt{1+x^2}+1)} = \lim_{x\to 0} \frac{x(\sqrt{1+x^2}+1)}{(1+x^2)-1} = \lim_{x\to 0} \frac{x(\sqrt{1+x^2}+1)}{x^2} =$

$= \lim_{x\to 0} \frac{(\sqrt{1+x^2}+1)}{x} = \frac{2}{0} = \infty$ → x = 0 es asíntota vertical.

**Asíntota horizontal**: y = b es asíntota horizontal de f ⇔ $\lim_{x\to\infty} f(x) = b$

Se debe analizar el límite cuando $x \to +\infty$ y cuando $x \to -\infty$.

$\lim_{x\to+\infty} \frac{x}{\sqrt{1+x^2}-1} = \frac{\infty}{\infty}$ indeterminado

$\lim_{x\to+\infty} \frac{x}{\sqrt{1+x^2}-1} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{x^2}+1}-\frac{1}{x}} = \frac{1}{\sqrt{1}} = \frac{1}{1} = 1$ → y = 1 es asíntota horizontal cuando $x \to +\infty$.

$\lim_{x\to-\infty} \frac{x}{\sqrt{1+x^2}-1} = \frac{-\infty}{\infty}$ indeterminado

$\lim_{x\to-\infty} \frac{x}{\sqrt{1+x^2}-1} = \lim_{x\to-\infty} \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{x^2}+1}-\frac{1}{x}} = \frac{1}{\sqrt{1}} = \frac{1}{-1} = -1$ → y = -1 es asíntota horizontal cuando $x \to -\infty$.

Aclaración: cuando $x \to +\infty$ se considera $\sqrt{1}$ = 1, cuando $x \to -\infty$ se considera $\sqrt{1}$ = -1, en el contexto de cálculo de límite en el infinito.

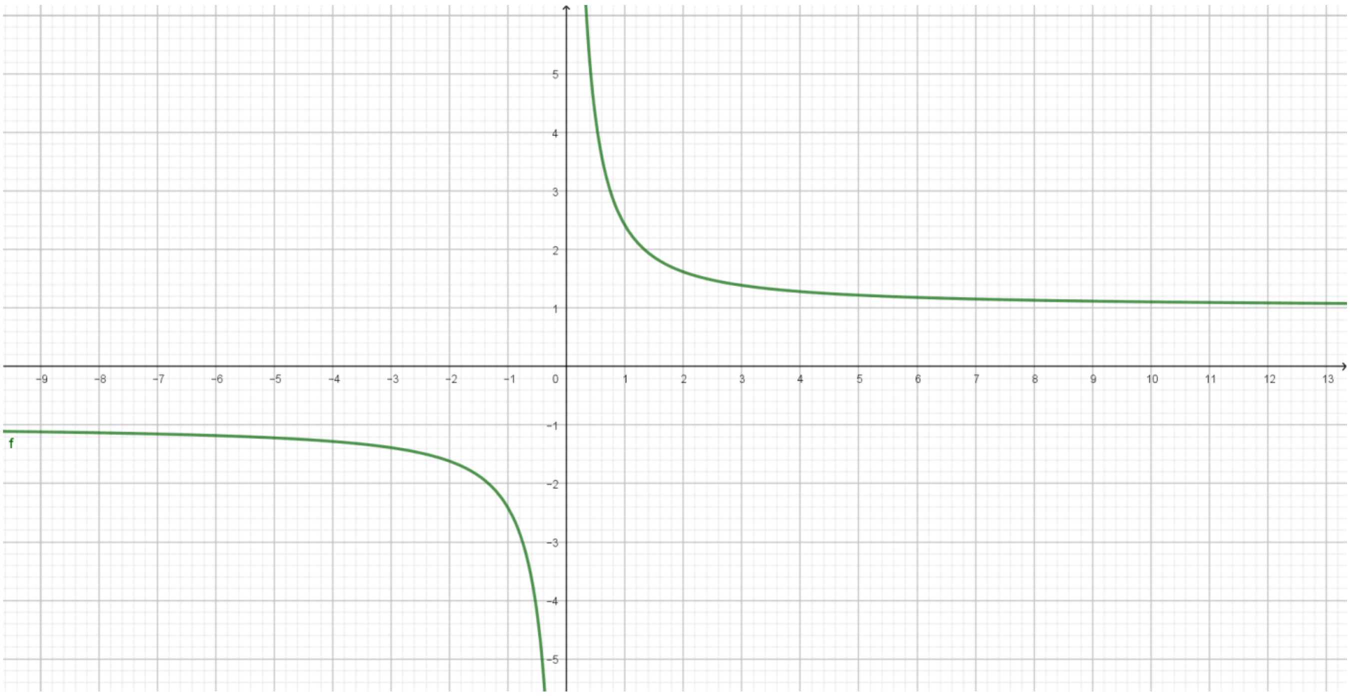
**Asíntota oblicua**: y = ax+b es asíntota oblícua de f ⇔ $\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = a$ , a ∊ R y b= $\lim_{x\to\infty} [f(x) - ax]$

$a = \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{x}{\sqrt{1+x^2}-1}}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{\sqrt{1+x^2}-1} = \frac{1}{\infty} = 0$ (pendiente de recta horizontal) → no hay asítonta oblícua.

ii - $f(x) = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}-1}$

Cero: f(x) = 0 si x = 0

Ordenada al origen: 0 ∉ Df → f no tiene ordenada al origen.




d) $f(x) = \begin{cases} |x| & x < -4 \quad \vee \quad x > 4 \\ \frac{x+2}{x} & -4 < x < 4 \end{cases}$

i- Dom f = {x $\in$ R / $x \neq 0$}        Dom f = R*

**Asíntota vertical**: x = a es asíntota vertical de f $\Leftrightarrow$ $\lim_{x \to a} f(x) = \infty$

En este caso, podría haber asíntota horizontal en x = 0:

$\lim_{x \to 0} f(x) = \lim_{x \to 0} \frac{x+2}{x} = \frac{2}{0} = \infty$        $\rightarrow$ x = 0 es asíntota vertical.

**Asíntota horizontal**: y = b es asíntota horizontal de f $\Leftrightarrow$ $\lim_{x \to \infty} f(x) = b$

Se debe analizar el límite cuando $x \to +\infty$ y cuando $x \to -\infty$.

$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} x = +\infty$ $\rightarrow$ f no tiene asíntota horizontal en el $+\infty$.

$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{x \to -\infty} (-x) = +\infty$ $\rightarrow$ f no tiene asíntota horizontal en el $-\infty$.

**Asíntota oblicua**: no corresponde porque la regla de definición de f cuando $x \to +\infty$ y $x \to -\infty$, corresponde a tramos del valor absoluto, son partes de recta.

ii – Ceros: $f(x) = 0$ si $x + 2 = 0 \rightarrow x = -2$

Ordenada al origen: $0 \notin Df \rightarrow$ f no tiene ordenada al origen.