Negación de los cuantificadores

NEGACIÓN DEL CUANTIFICADOR UNIVERSAL ($\forall$)

La negación de una proposición cuantificada con el cuantificador universal es equivalente a una proposición cuantificada por el existencial y cuya propiedad es la negación del esquema proposicional que constituye la propiedad de la proposición original.

En el lenguaje simbólico: $\sim [\forall x: P(x)] \Leftrightarrow \exists x \,/\, \sim P(x)$

$\forall x: P(x)$

$\sim [\forall x: P(x)]$: no es cierto que todos los elementos cumplen con la propiedad P

$[\exists x \,/\, \sim P(x)]$: algunos elementos no tienen la propiedad P

EJEMPLO

Sea la proposición:

$\forall x \in Z: P(x)$: " Todos los números enteros son pares"

donde la función proposicional es $P(x)$: "x es par", con universo $U = \mathbf{Z}$

<u>Negación de la proposición</u>:

$\sim [\forall x \in Z: P(x)]$: "No todos los números enteros son pares"

$$\sim [\forall x \in Z: P(x)] \Leftrightarrow [\exists\, x \in Z / \sim P(x)]$$

$[\exists x \in Z / \sim P(x)]$: "Algunos números enteros no son pares"

NEGACIÓN DEL CUANTIFICADOR EXISTENCIAL (∃)

La negación de una proposición cuantificada con el cuantificador existencial es equivalente a una proposición cuantificada por el universal y cuya propiedad es la negación del esquema proposicional que constituye la propiedad de la proposición original.

En el lenguaje simbólico:

$$\sim [\exists\, x/\ P(x)] \Leftrightarrow \forall\, x: \sim P(x)$$

$\exists\, x/\ P(x)$ $\sim [\exists\, x/\ P(x)]$: no es cierto que algunos elementos tiene la propiedad P
$[\forall\, x: \sim P(x)]$: todo elemento del universo no cumple la propiedad P
$[\forall\, x: \sim P(x)]$: ningún elemento tiene la propiedad P

NEGACIÓN DEL CUANTIFICADOR EXISTENCIAL ($\exists$)

Los enunciados universales con negaciones, es decir expresiones del tipo $\forall\ x: \sim P(x)$ que equivalen a la negación de una proposición cuantificada con un existencial se identifican con palabras como: *ningún* – *ninguno* – *nada* – *nadie*.

Es decir, no se refieren a expresiones del tipo $\sim [\forall\ x: P(x)]$

EJEMPLO “Ningún deportista es olímpico.”

$\sim [\forall\ x: P(x)]$: “No es cierto que todos los deportistas son olímpicos.”

$\forall\ x: \sim P(x)$: “Todo deportista no es olímpico”

$$\boxed{\forall\ x: \sim P(x) \Leftrightarrow \sim [\exists\ x / P(x)]}$$

Propiedades de los cuantificadores

PROPIEDADES DE LOS CUANTIFICADORES

- Equivalencia lógica del universal:

$$\forall x: [P(x) \wedge Q(x)] \Leftrightarrow \forall x: P(x) \wedge \forall x : Q(x)]$$

- Equivalencia lógica del existencial:

$$\exists x / \ [P(x) \vee Q(x)] \Leftrightarrow \exists x / \ P(x) \vee \exists x / \ Q(x)$$

- Implicaciones lógicas del universal:

$$\forall x: P(x) \vee \forall x : Q(x) \Rightarrow \forall x: [P(x) \vee Q(x)]$$

$$\forall x: [P(x) \Rightarrow Q(x)] \Rightarrow [\forall x: P(x) \Rightarrow \forall x : Q(x)]$$

- Implicación lógicas del existencial:

$$\exists x / \ [P(x) \wedge Q(x)] \Rightarrow \exists x / \ P(x) \wedge \exists x / \ Q(x)]$$