Análisis Matemático II

PROFESORADO EN MATEMÁTICA – PROFESORADO EN FÍSICA

PROF. MORENO ALEJANDRO D.

Sucesión Numérica

Una sucesión de números reales es una colección ordenada de números reales. Al considerar una sucesión se conoce cuál es el lugar que ocupa cada uno. Hay un primer elemento, al que podríamos llamar a_1, un segundo a_2, un elemento n-ésimo o general, a_n, etc.

Notaremos a las sucesiones por

$$\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}} = \{a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots\} ,$$

donde si bien utilizamos llaves, hacemos hincapié en que consideramos el orden en el que los elementos son presentados.

Ejemplos:

1. $\{a_n\}_n = \{1, 2, 3, \ldots, n, \ldots\} = \{n\}_n$, *donde, para cada* $n \in \mathbb{N}$, $a_n = n$.
2. $\{b_n\}_n = \{-2, -4, -6, \ldots - 2n, \ldots\}$, *tal que* $b_n = -2n$.
3. $\{a_n\}_n = \{1, \frac{1}{2}, , \frac{1}{3}, \ldots, \frac{1}{n}, \ldots\} = \{\frac{1}{n}\}_n$, *donde, para cada* $n \in \mathbb{N}$, $a_n = \frac{1}{n}$.
4. $\{b_n\}_n = \{-\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, -\frac{1}{8}, \ldots\}$, *tal que* $b_n = \left(-\frac{1}{2}\right)^n$.
5. *Sucesión de Fibonacci:* $f_1 = 1$, $f_2 = 2$, $f_{n+2} = f_n + f_{n+1}$ *para* $n \in \mathbb{N}$.

Definición:

Una sucesión numérica (real) es una función cuyo dominio es el conjunto de los números naturales, y su codominio el de los números reales,

$$a : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$$

$$a(n) = a_n \ .$$

Teniendo en vista esta definición, las sucesiones son funciones, todas con los mismos conjuntos dominio y codominio. Dos sucesiones serán iguales si sus respectivos términos lo son. Esto es,

$$\{a_n\}_n = \{b_n\}_n \ \Leftrightarrow \ a_n = b_n \ , \ \text{ para todo } n \in \mathbb{N} \ .$$

Sucesiones acotadas

Una sucesión $\{a_n\}_n$ *se dice acotada superiormente, si existe un valor real* M*, tal que se verifica, para todo* n*,*

$$a_n \leq M \ .$$

y está acotada inferiormente, si existe m *tal que*

$$m \leq a_n \ ,$$

para cualquier n*.*

Esto es, el recorrido de la sucesión es un subconjunto acotado[1]*, superiormente o inferiormente, según sea el caso.*

Ejemplos:

1. $\{a_n\}_n = \{1,2,3,4,...,n,...\}$, *está acotada inferiormente por 1, y no está acotada superiormente.*
2. $\{b_n\}_n = \{-2,-4,-6,...,-2n,...\}$, *no está acotada inferiormente, y está acotada superiormente por* -2.
3. $\{c_n\}_n = \{1, \frac{1}{2},, \frac{1}{3}, ..., \frac{1}{n}, ...\} = \{\frac{1}{n}\}_n$, *está acotada inferiormente por 0 y superiormente por 1.*

Sucesión convergente

Una sucesión numérica $\{a_n\}$ tiene límite finito ℓ, si para cualquier número positivo ε, existe un número natural $N \in \mathbb{N}$, tal que se verifica

$$n > N \;\Rightarrow\; |a_n - \ell| < \varepsilon\,.$$

Si este es el caso, decimos que la sucesión es convergente, o que la sucesión converge a ℓ y lo notaremos

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \ell \quad o \quad a_n \longrightarrow \ell\,.$$

Gráficamente, si dado $\varepsilon > 0$, es posible encontrar N, tal que, todos los a_n siguientes se encuentren en el entorno $(\ell - \varepsilon, \ell + \varepsilon)$.

Sucesión divergente u oscilante

Se dice que una sucesión $\{a_n\}$ *diverge a* $+\infty$ *(resp.* $-\infty$*), si para cualquier* $M > 0$*, existe* $N \in \mathbb{N}$*, donde*

$$n > N \;\Rightarrow\; a_n > M \qquad (n > N \;\Rightarrow\; a_n < -M)\ .$$

La sucesión diverge, si lo hace a $+\infty$ *o a* $-\infty$*.*

Finalmente, una sucesión se dice oscilante si no es convergente ni divergente.

Ejemplos:

1. *La sucesión* $\{\frac{1}{n}\}$ *es convergente a 0. En efecto, dado* $\varepsilon > 0$, *basta tomar un número natural* $N > \frac{1}{\varepsilon}$ *(Propiedad Arquimedeana*[2]*), para obtener*

$$n > N \Rightarrow n > \frac{1}{\varepsilon} \Rightarrow \frac{1}{n} < \varepsilon \Rightarrow \left|\frac{1}{n} - 0\right| < \varepsilon \, .$$

2. *La sucesión* $\{\frac{1}{n+1}\}$ *es convergente a 0. Nota anterior. Lo mismo con la sucesión* $\{\frac{1}{n+p}\}$, *con* $p \in \mathbb{Z}$.

3. *La sucesión* $\{\frac{1}{n^2}\}$ *es convergente a 0. Basta tomar, para* $\varepsilon > 0$, $N > \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}$.

4. *En general, si* $p \in \mathbb{N}$, *la sucesión* $\{\frac{1}{n^p}\}$ *es convergente a 0, tomando* $N > \frac{1}{\sqrt[p]{\varepsilon}}$.

5. *Las sucesiones* $\{n\}$, $\{2n\}$, $\{n^2\}$, *etc., divergen a* $+\infty$.

6. *Las sucesiones* $\{(-1)^n\}$ *y* $\{(-1)^n n\}$ *son oscilantes. La primera está acotada, y la segunda no.*

Límites

Sea f una función real y $\{a_n\}$ una sucesión tal que $a_n = f(n)$.

- *Si* $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \ell$, *entonces resulta* $a_n \longrightarrow \ell$
- *Si* $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \pm\infty$, *entonces resulta* $a_n \longrightarrow \pm\infty$

Teoremas:

1. *El límite de una sucesión numérica, si existe, es único.*

2. *Si* $a_n \to \ell$, *entonces* $|a_n| \to |\ell|$.

3. *Si* $a_n \to 0$, *y* $\{b_n\}$ *está acotada,* $a_n \cdot b_n \to 0$

4. *Si* $a_n \to \ell_1$, $b_n \to \ell_2$, *y* $c \in \mathbb{R}$,

$$a_n \pm b_n \longrightarrow \ell_1 \pm \ell_2\,, \quad c\,a_n \longrightarrow c\,\ell\,, \quad a_n \cdot b_n \longrightarrow \ell_1 \cdot \ell_2\,,$$

   y si $\ell_2 \neq 0$ *y* $b_n \neq 0$, $\forall n \in \mathbb{N}$,

$$\frac{a_n}{b_n} \longrightarrow \frac{\ell_1}{\ell_2}\,.$$

5. *Si para* $n > N$, $a_n \leqq b_n \leqq c_n$, *y además valen* $a_n \to \ell$ *y* $c_n \to \ell$, *entonces* $b_n \to \ell$.

Sucesión p^n

Dado $p > 0$,

$$\lim_{n\to\infty} p^n = \begin{cases} 0 & \text{si } 0 < p < 1 \\ 1 & \text{si } p = 1 \\ \infty & \text{si } p > 1 \end{cases}$$

Sucesiones monótonas

Una suceción $\{a_n\}$ *se dice*

1. *creciente, si* $a_n \leq a_{n+1}$, $\forall n \in \mathbb{N}$,
2. *decreciente, si* $a_n \geq a_{n+1}$, $\forall n \in \mathbb{N}$.
3. *estrictamente creciente, si* $a_n < a_{n+1}$, $\forall n \in \mathbb{N}$,
4. *estrictamente decreciente, si* $a_n > a_{n+1}$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

para todo $\in \mathbb{N}$. *Si una sucesión es creciente o decreciente, se dice que es monótona.*

Teoremas:

Si una sucesión $\{a_n\}$ *es convergente, entonces está acotada (sup. e inferiormente).*

Si una sucesión monótona $\{a_n\}$ *está acotada, entonces es convergente.*

Observación:

Una sucesión numérica $\{a_n\}$ tiene límite finito ℓ, si para cualquier número positivo ε, existe un número natural $N \in \mathbb{N}$, tal que se verifica

$$n > N \Rightarrow |a_n - \ell| < \varepsilon .$$

Si volvemos a leer la definición de sucesión convergente, parece que para estudiar la convergencia de una sucesión $\{x_n\}$ debemos ser capaces de "adivinar", de alguna manera, su posible límite. De hecho, una idea bastante extendida consiste en pensar que es lo mismo probar la convergencia de una sucesión que calcular su límite. Esto no es del todo correcto; son relativamente pocas las sucesiones convergentes cuyo límite puede efectivamente calcularse. Cuando se estudia la convergencia de una sucesión $\{x_n\}$, la mayoría de las veces, lo que conocemos es, justamente, la sucesión y, naturalmente, se desconoce su posible límite el cual pudiera, incluso, no existir. Por ello interesa tener *criterios de convergencia intrínsecos a la sucesión*, es decir, que no hagan intervenir a un objeto en principio *extraño* a ella como es su posible límite. Co-

Condición de Cauchy

(Sucesiones de Cauchy). *Una sucesión* $\{a_n\}$ *es de Cauchy si para todo* $\varepsilon > 0$ *existe* $N \in \mathbb{N}$

$$n, m \geq N \Rightarrow |a_n - a_m| < \varepsilon.$$

Una sucesión de números reales es convergente si, y sólo si, verifica la condición de Cauchy.

Ejemplo:

Demostrar que

$$\sqrt{n+1}-\sqrt{n}$$

es sucesión de Cauchy.

Demostración