TRABAJO PRÁCTICO Nº 5: Sistemas Lineales de Ecuaciones Diferenciales

I. CUESTIONES TEÓRICO PRÁCTICAS

1. a) Demuestre que las funciones vectoriales:

$$\vec{x}_1(t) = \begin{bmatrix} t \\ t^2 \end{bmatrix} \qquad \vec{x}_2(t) = \begin{bmatrix} t^2 \\ t^3 \end{bmatrix}$$

son linealmente independientes en la recta real. b) ¿Por qué no puede existir una matriz continua **P**(t) tal que $\mathbf{x_1}$ y $\mathbf{x_2}$ sean ambas soluciones de **x'**=**P**(t)**x** ?

2. Sea $\vec{x}_p$ una solución particular del sistema no homogéneo

$$\vec{x}'(t) = A(t).\vec{x}(t) + \vec{f}(t) \quad (1)$$

en el intervalo I y sea $\{\vec{x}_1, \vec{x}_2, ..., \vec{x}_n\}$ un conjunto fundamental de soluciones en I para el sistema homogéneo correspondiente $\vec{x}'(t) = A(t).\vec{x}(t)$. Entonces toda solución de (1) se puede expresar en la forma:

$\vec{x}(t) = \vec{x}_p(t) + c_1\vec{x}_1(t) + c_2\vec{x}_2(t) + ...c_n\vec{x}_n(t)$ donde $c_1, c_2, ..., c_n$ son constantes.

3. Demuestre que el operador definido por $L[\vec{x}] = \vec{x}' - A\vec{x}$ donde A es una función matricial $n \times n$ y $\vec{x}$ es una función vectorial diferenciable $n \times 1$, es un operador lineal.

4. Demuestre que si X(t) e Y(t) son dos matrices fundamentales para el mismo sistema $\vec{x}' = A\,\vec{x}$, entonces existe una matriz constante C, tal que X(t)=Y(t).C.

5. Se Sabe que una solución general de la ecuación $x'(t) = a\,x(t)$, donde a es una constante, es $x(t) = c\,e^{a\,t}$. De manera análoga, se demuestra que una solución del sistema normal **x**'=**A**(t)**x,** donde **A** es una matriz constante $n \times n$, es **x**(t) = $e^{\mathbf{A}t}$ **c**.

Si **A** es una matriz constante $n \times n$, se define la exponencial matricial $e^{\mathbf{A}t}$, considerando el desarrollo en serie para $e^{a\,t}$, reemplazando a por **A**, es decir:

$$e^{\mathbf{A}t} := \mathbf{I} + \mathbf{A}t + \mathbf{A}^2\frac{t^2}{2!} + \ldots + \mathbf{A}^n\frac{t^n}{n!} + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} \mathbf{A}\frac{t^n}{n!}$$

a) Demostrar que $\frac{d}{dt}(e^{\mathbf{A}t}) = \mathbf{A}\,e^{\mathbf{A}t}$
b) Demostrar que **x**(t) = $e^{\mathbf{A}t}$ **c** es una solución de **x**'=**A**.**x**(t)
c) Use la propiedad dada en 4 para demostrar que $e^{\mathbf{A}t} = \mathbf{X}(t).\mathbf{X}^{-1}(\mathbf{0})$, donde **X**(t) es una matriz fundamental conocida de **x**'=**A**(t)**x** (tener en cuenta la siguiente propiedad: $e^{\mathbf{A}.0} = e^{\mathbf{0}} = \mathbf{I}$).

6. Sea **X(t)** una matriz fundamental para el sistema **x'**=**Ax**(t)**.** Muestre que $\mathbf{x(t)} = \mathbf{X}(t).\mathbf{X}^{-1}(t_0).\mathbf{x_0}$ es la solución del problema con valores iniciales **x'**=**Ax**(t) $\mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x_0}$.

II. CUESTIONES TÉCNICAS

Ejercicio Nº 1: Compruebe que las funciones dadas definen una solución del sistema dado:

a) $x = \operatorname{sen}3t,\ y = \cos 3t$ para $\dfrac{dx}{dt} = 3y\ ,\ \dfrac{dy}{dt} = -3x$

b) $x = 1+3t,\ y = t^2$ para $\dfrac{dx}{dt} = x^2 - 9y - 6t\ ,\ \dfrac{dy}{dt} = tx - 3y + t$

c) $x = 3e^{2t},\ y = e^{2t}\ ,\ z = e^{2t}$ para $\dfrac{dx}{dt} = x + 2y + z\ ,\ \dfrac{dy}{dt} = 2x - 3y - z\ ,\ \dfrac{dz}{dt} = y + z$

Ejercicio Nº 2: En los siguientes ejercicios escribir el sistema dado en la forma $\vec{x}' = \vec{P}(t).\vec{x} + \vec{f}(t)$:

a) $\begin{array}{l} x' = -3y \\ y' = 3x \end{array}$

c) $\begin{array}{l} x' = 2x + 4y + 3e^t \\ y' = 5x - y - t^2 \end{array}$

b) $\begin{array}{l} x' = y + z \\ y' = z + x \\ z' = x + y \end{array}$

d) $\begin{array}{l} x' = 3x - 4y + z + t \\ y' = x - 3z - t^2 \\ z' = 6y - 7z + t^3 \end{array}$

Ejercicio Nº 3: Escriba las siguientes ecuaciones como un sistema de ecuaciones diferenciales de primer orden:

a) $x'' - 3x' + 5x = 5\operatorname{sen}2t$
b) $x''' + x'' - x = 0$
c) $x' - 5x + y = 0\ ,\ \ y'' + 3y' + 2x + 4y = 0$
d) $2x' + 3y' + x - y = 0\ ,\ \ x' + 2y' - x + 2y = 0$

Ejercicio Nº 4: Verificar que **X**(t) es una matriz fundamental para el sistema dado, calcular **X**$^{-1}$ (t). Usar el resultado hallado I-6 para hallar la solución del problema con valores iniciales dado:

a) $\dfrac{d\mathbf{x}}{dt} = \begin{pmatrix} 0 & 6 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}\mathbf{x}\ ;\ \ \mathbf{x}(0) = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix};\ \mathbf{X}(\mathrm{t}) = \begin{pmatrix} 6e^{-t} & -3e^{-2t} & 2e^{3t} \\ -e^{-t} & e^{-2t} & e^{3t} \\ -5e^{-t} & e^{-2t} & e^{3t} \end{pmatrix}$

b) $\dfrac{d\mathbf{x}}{dt} = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}\mathbf{x}\ ;\quad \mathbf{x}(0) = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix};\quad \mathbf{X}(\mathrm{t}) = \begin{pmatrix} e^{-t} & e^{5t} \\ -e^{-t} & e^{5t} \end{pmatrix}$

Ejercicio Nº 5: Encuentre la solución general de cada ecuación diferencial.

a) $\dfrac{d\mathbf{x}}{dt} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 12 & -1 \end{pmatrix}\mathbf{x}$

b) $\dfrac{d\mathbf{x}}{dt} = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}\mathbf{x}$

c) $\dfrac{d\mathbf{x}}{dt} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ -1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}\mathbf{x}$

d) $\dfrac{d\mathbf{x}}{dt} = \begin{pmatrix} 9 & 4 & 2 \\ -11 & -4 & -4 \\ -5 & -3 & 1 \end{pmatrix}\mathbf{x}$

e) $\dfrac{d\mathbf{x}}{dt} = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 5 & -1 \end{pmatrix}\mathbf{x}$ f) $\dfrac{d\mathbf{x}}{dt} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}\mathbf{x}$

Ejercicio Nº 6: Encuentre la exponencial matricial $e^{\mathbf{A}t}$ para los siguientes problemas de valor inicial:

a) $\dfrac{d\mathbf{x}}{dt} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ -1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}\mathbf{x}$; $\mathbf{x}(0) = \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$ b) $\dfrac{d\mathbf{x}}{dt} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 12 & -1 \end{pmatrix}\mathbf{x}$; $\mathbf{x}(0) = \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \end{pmatrix}$

Sugerencia: usar el resultado hallado en I-6-c

Ejercicio Nº 7: Con ayuda de las respuestas al ejercicio Nº5, encuentre la solución general de:

a) $\dfrac{d\mathbf{x}}{dt} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 12 & -1 \end{pmatrix}\mathbf{x} + \begin{pmatrix} e^t \\ 2e^t \end{pmatrix}$ b) $\dfrac{d\mathbf{x}}{dt} = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}\mathbf{x} + \begin{pmatrix} te^{5t} \\ e^{-5t} \end{pmatrix}$

c) $\dfrac{d\mathbf{x}}{dt} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ -1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}\mathbf{x} + \begin{pmatrix} 1-t \\ 1+t \\ t \end{pmatrix}$ d) $\dfrac{d\mathbf{x}}{dt} = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 5 & -1 \end{pmatrix}\mathbf{x} + \begin{pmatrix} \operatorname{sen} t \\ \cos t \end{pmatrix}$

Ejercicio Nº 8: (a) Use el método de coeficientes indeterminados para determinar la solución particular de $\dfrac{d\mathbf{x}}{dt} = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}\mathbf{x} + \begin{pmatrix} -7 \\ 5 \end{pmatrix}$, suponga que la solución particular es de la forma $\mathbf{x}_p = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$. (b) Halle la solución general. (c) Repita lo realizado en (a) y (b) para el sistema $\dfrac{d\mathbf{x}}{dt} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}\mathbf{x} + \begin{pmatrix} 3 \\ -5 \end{pmatrix}$. (d) Demuestre que el segundo sistema no tiene un solución de la forma $\mathbf{x}_p = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ con a y b constantes. ¿Cuál es la diferencia entre ambos sistemas? Conjeture cuál sería la forma de la solución particular para el segundo sistema. Determínela.

Ejercicio Nº 9: Con ayuda de las respuestas al ejercicio Nº7, encuentre una solución que satisfaga la condición inicial dada.

a) $\mathbf{x}(0) = \mathbf{0}$ en 6(a) b) $\mathbf{x}(0) = \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \end{pmatrix}$ en 6(a) c) $\mathbf{x}(0) = \mathbf{0}$ en 6(c)

Ejercicio Nº 10: Resuelva cada uno de los sistemas lineales para determinar si el punto crítico (0,0) es estable o inestable.

a) $\dfrac{dx}{dt} = -2x$, $\dfrac{dy}{dt} = -2y$ b) $\dfrac{dx}{dt} = 2x$, $\dfrac{dy}{dt} = -2y$

c) $\dfrac{dx}{dt} = 2y$, $\dfrac{dy}{dt} = -2x$ d) $\dfrac{dx}{dt} = y$, $\dfrac{dy}{dt} = -5x - 4y$

Ejercicio Nº 11: En cada caso investigar el tipo de estabilidad del punto crítico (0,0) del sistema no lineal dado. Linealizar cada sistema de ecuaciones diferenciales y hallar la solución general.

a) $\dfrac{dx}{dt} = x - 3y + 2xy \ , \quad \dfrac{dy}{dt} = 4x - 6y - xy$

b) $\dfrac{dx}{dt} = 6x - 5y + x^2 \ , \quad \dfrac{dy}{dt} = 2x - y + y^2$

c) $\dfrac{dx}{dt} = 3x - 2y - x^2 - y^2 \ , \quad \dfrac{dy}{dt} = 2x - y + 3xy$

Ejercicio Nº 12: Determinar la solución del siguiente sistema lineal de ecuaciones diferenciales, utilizando el método de coeficientes indeterminados y el método de la transformada de Laplace:

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}\mathbf{x} + \begin{pmatrix} 3 \\ 2t \end{pmatrix} \qquad \mathbf{x}(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Utilice luego el método de coeficientes indeterminados y corrobore la solución hallada.

Bibliografía:

Blanchard P., Devaney R., Hall G. (1998). "*Ecuaciones diferenciales*". México: Thomson

Boyce, W. y Diprima, R. (2000). *"Ecuaciones Diferenciales y problemas con valores en la frontera"*. 4° ed. México: Limusa.

Edwards H., Penney D. (2001). "*Ecuaciones diferenciales*". México: Prentice Hall

Nagle K., Saff, E., Snider A. (2001). "*Ecuaciones diferenciales y problemas con valores en la frontera*". México: Addison Wesley

Trench, W. (2002) "*Ecuaciones Diferenciales con problemas de valores en la frontera"*. México: Thomson Learning

Zill D. (1986) *"Ecuaciones Diferenciales con aplicaciones"*. México: Iberoamérica

Zill D., Cullen M. (2002) "*Ecuaciones Diferenciales con problemas de valores en la frontera*". México: Thomson