TRABAJO PRÁCTICO Nº 3

CUESTIONES TEÓRICO PRÁCTICAS

1. Sean f, g funciones cuyas transformadas de Laplace existen para $s > \alpha$ y sean a y b dos constantes cualesquiera. Demuestre, para $s > \alpha$, la **Linealidad de las transformadas de Laplace.** Es decir , demuestre que si a y b son constantes, entonces

$$\mathcal{L}[a\,f(t) + b\,g(t)] = a\,\mathcal{L}[f(t)] + b\mathcal{L}g(t)$$

para todo s tal que las transformadas de las funciones f y g existan a la vez.

2. Para las transformadas $F(s)$ de la tabla, ¿qué se puede decir acerca de $\lim\limits_{s\to\infty} F(s)$?

3. **Traslación en s:**

a) Demuestre que si la transformada de Laplace $\mathcal{L}$ [f(t)](s)=F(s) existe para $s > \alpha$, entonces $\mathcal{L}\left[e^{at}.f(t)\right](s) = F(s-a)$

b) Observar las conclusiones anteriores en gráficos de $f(t) = t$, $\mathcal{L}[f(t)]$, $h(t) = e^{at}.f(t)$ y $\mathcal{L}[h(t)]$.

4. **Derivadas de la transformada de Laplace:**

a) Sea F(s) =$\mathcal{L}[f(t)]$ y suponga que $f(t)$ es continua por partes en $[0,\infty)$ y de orden exponencial. Demuestre que para $s > \alpha$ se cumple que:

$$\mathcal{L}\left[t^n f(t)\right] = (-1)^n \frac{d^n}{ds^n} F(s)$$

b) Use la propiedad anterior para determinar:

i) $\mathcal{L}[t\cos bt] =$ ii) $\mathcal{L}\left[t^2 \cos bt\right] =$

c) Partiendo de la transformada $\mathcal{L}[1] = \frac{1}{s}$, use la propiedad anterior para demostrar que $\mathcal{L}\left[t^n\right] = \frac{n!}{s^{n+1}}$.

5. Demostrar la siguiente identidad para funciones continuas $f(t)$ (suponiendo que la transformada existe)

$$\mathcal{L}\left[\int_0^t f(t)\,dt\right] = \frac{1}{s} F(s)$$

6. **Traslación en t:**

a) Demuestre que, si $\mathcal{L}$[f(t)](s)=F(s) existe para $s > \alpha \geq 0$ y a es una constante positiva, entonces:

$$\mathcal{L}\left[f(t-a).u_a(t)\right] = e^{-as}.F(s)$$

b) Use la propiedad anterior para demostrar que $\mathcal{L}^{-1}\left[e^{-3s}.F(s)\right] = f(t-3).u_3(t)$

7. **Transformadas de funciones periódicas:**

Demuestre que si la función $f(t)$ con período p es continua por partes para $t \geq 0$, entonces, la transformada de Laplace $\mathcal{L}$[f(t)](s)=F(s) existe para $s > 0$ y
está dada por

$$\mathcal{L}\left[f(t) \right] = \frac{1}{1-e^{-ps}} \int_0^p f(t) e^{-st} dt$$

Es decir, de debe demostrar que:

$$si\ f(t) = f(t+p) \Rightarrow \mathcal{L}[f(t)] = \frac{1}{1-e^{-ps}} \int_0^p f(t) e^{-st}\, dt$$

8. **Convolución:** sean $f(t)$ y $g(t)$ funciones continuas por partes en $[0,\infty)$. La convolución de $f(t)$ y $g(t)$, que se denota $f * g$, se define como

$$(f*g)(t) := \int_0^t f(t-v) g(v)\, dv.$$

Sean $f(t)$ y $g(t)$ continuas por partes en $[0,\infty)$ y de orden exponencial α; sean $F(s) = \mathcal{L}[f]$ y $G(s) = \mathcal{L}[g]$

Demuestre que $\mathcal{L}[f*g] = F(s).G(s)$, o, de manera equivalente,

$$\mathcal{L}^{-1}\left[F(s).G(s) \right] = (f*g)(t)$$

CUESTIONES TECNICAS

1. Hallar la transformada de Laplace de cada función:

a) $f(t) = 3t+1$ b) $f(t) = \cos 2t$ e) $f(t) = \begin{cases} t, & para\ 0 \le t \le 1 \\ 1, & para\ 1 \le t \end{cases}$

c) $f(t) = e^{2t}$ d) $f(t) = 5 + t^2$

2. Con ayuda de las propiedades y tabla de transformadas, obtener:

a) $\mathcal{L}\left\{3t^2 - e^{2t}\right\}$ b) $\mathcal{L}\left\{t^2 + e^t sen 3t\right\}$

c) $\mathcal{L}\left\{3t^4 - 2t^2 + 1\right\}$ d) $\mathcal{L}\left\{e^{3t}t^2 + e^{-2t}\cos(5t+1)\right\}$

3. Use la transformada de Laplace para calcular el valor de las siguientes integrales impropias:

a) $\int_0^\infty \frac{\cos(t\,x)}{x^2+1} dx$ b) $\int_0^\infty t.e^{-2t}\cos t dt =$

4. Hallar $f(t)$ para cada $F(s)$ dada:

a) $F(s) = \frac{1}{(s-1)(s-2)}$ b) $F(s) = \frac{s}{s^2-4}$ c) $F(s) = \frac{3s-1}{s^2+9}$

d) $F(s) = \frac{9s-6}{(s-1)(s^2-4)}$ e) $F(s) = \frac{s+12}{s^2+4s}$ f) $F(s) = \frac{3s}{s^2+2s-8}$

5. Resolver las siguientes ecuaciones diferenciales aplicando transformadas de Laplace:

a) $y'' + y = 0$ $y(0) = 1,\ \ y'(0) = -1$

b) $4y'' + \pi^2 y = 0$ $y(0) = 2,\ \ y'(0) = 0$

c) $y'' + 2y' + 2y = 0$ $y(0) = 0,\ \ y'(0) = 1$

d) $y'' - ky = 0$ $\quad y(0) = 2,\ \ y'(0) = k$

e) $y'' + y = 2$ $\quad y(0) = 0,\ \ y'(0) = 3$

f) $y'' + y = 3\cos 2t$ $\quad y(0) = 1,\ \ y'(0) = 1,\ y''(0) = 3$

g) $y''' + 3y'' + 3y' + y = 0$ $\quad y(0) = -4,\ \ y'(0) = 4,\ y''(0) = -2$

h) $y''' + 4y'' + y' - 6y = -12$ $\quad y(0) = 1,\ \ y'(0) = 4,\ y''(0) = -2$

i) $y''' + y'' + 3y' - 5y = 16e^{-t}$ $\quad y(0) = 0,\ \ y'(0) = 2,\ y''(0) = -4$

j) $y'' + 4y = g(t)$ donde $g(t) = \begin{cases} sent, 0 \le t \le 2\pi \\ 0, 2\pi < t \end{cases}$ $\quad y(0) = 1; y'(0) = 3$

6. Resolver las siguientes ecuaciones diferenciales aplicando transformadas de Laplace cuando las condiciones iniciales no están dadas en el origen:

a) $y'' - y = t - 2$ $\quad y(2) = 3,\ \ y'(2) = 0$

b) $y'' - 2y' + 2y = 6t - 2$ $\quad y(-1) = 3,\ \ y'(-1) = 7$

c) $y'' + y = t$ $\quad y(\pi) = 0,\ \ y'(\pi) = 0$

d) $y'' - y' - 2y = -8\cos t\ -\ 2\,\mathrm{sen}\,t$ $\quad y(\pi/2) = 1,\ \ y'(\pi/2) = 0$

7. Encontrar la solución los problemas de valor inicial:

a) $y'' + 3t\,y' - 6y = 1$ $\quad y(0) = 0,\ \ y'(0) = 0$

b) $t\,y'' - 2y' + t\,y = 0$ $\quad y(0) = 1,\ \ y'(0) = 0$

Sugerencia: $\mathcal{L}^{-1}\left\{ \dfrac{1}{\left(s^2+1\right)^2} \right\}(t) = \dfrac{1}{2}(sent - t\cos t)$

c) $t\,y'' - t\,y' + y = 2$ $\quad y(0) = 2,\ \ y'(0) = -1$

d) $y'' + t\,y' - y = 0$ $\quad y(0) = 0,\ \ y'(0) = 3$

8. Determinar $\mathcal{L}\{f\}$ donde $f(t)$ es periódica. Trazar la gráfica de $f(t)$.

a) $f(t) = t \quad 0 < t < 2,\ \ p = 2$

b) $f(t) = e^t \quad 0 < t < 1,\ \ p = 1$

c) $f(t) = \begin{cases} e^{-t} & 0 < t < 1 \\ 1 & 1 < t < 2 \end{cases} \quad p = 2$

Ejercicios adicionales: Resolver algunos de los ejercicios que aparecen en la bibliografía citada a continuación:

Zill, D. (1986). *"Ecuaciones Diferenciales con aplicaciones"*. México: Iberoamérica. Páginas 271, 272, 287, 288, 289, 299

Edwards H., Penney D. (2001) "*Ecuaciones diferenciales"* México: Prentice Hall.. Páginas 455, 456, 467, 476, 477, 487, 488, 499.

Bibliografía

Edwards H., Penney D. (2001). "*Ecuaciones diferenciales*". México: Prentice Hall

López Rodriguez, M. (2007). "*Problemas resueltos de Ecuaciones Diferenciales"*. España: Thomson.

Nagle K., Saff, E., Snider A. (2001). "*Ecuaciones diferenciales y problemas con valores en la frontera*". México: Addison Wesley

Zill D. (1986) *"Ecuaciones Diferenciales con aplicaciones"*. México: Iberoamérica

Zill D., Cullen M. (2002) "*Ecuaciones Diferenciales con problemas de valores en la frontera*". México: Thomson