TRABAJO PRÁCTICO Nº 2 – Parte II: Ejercicios Resueltos

Ejercicio N° 11: Sea en E = {a, b, c, d} la relación: *R* = {(a,a),(a,b),(b,b),(b,d),(c,c),(d,d),(b,a),(d,b)}

Pruebe si *R* es de equivalencia.

Solución:

R será una relación de equivalencia si cumple con las propiedades de la Reflexividad, Simetría y Transitividad. Verifiquemos el cumplimiento de estas propiedades.

Reflexividad: R es reflexiva si y solo si $\forall x \in E: (x,x) \in R$

R es reflexiva porque cada elemento de E está relacionado consigo mismo

$$(a,a) \in R \ ; \ (b,b) \in R \ ; \ (c,c) \in R \ ; \ (d,d) \in R$$

Simetría: R es simetrica si y solo si $\forall x \in E, \forall y \in E: (x,y) \in R \longrightarrow (y,x) \in R$

R es simétrica ya que si un par pertenece a la relación, el par que resulta de permutar sus componentes también pertenece a R

$$(a,b) \in R \ ; \ (b,a) \in R$$

$$(b,d) \in R \ ; \ (d,b) \in R$$

Transitividad: R es transitiva si y solo si $\forall\, x \epsilon\, E, \forall\, y \epsilon\, E, \forall\, z \epsilon\, E : (x,y) \in R \ \wedge \ (\mathrm{y},\mathrm{z}) \in \mathrm{R} \rightarrow (x,z) \in R$

Si consideramos el elemento (a, b) que pertenece a R, el elemento (b, d) también pertenece a R, sin embargo el elemento (a, d) no pertenece a R

$$(a,b) \in R \wedge (b,d) \in R, pero\ (a,d) \notin R$$

Esto basta para decir que R no verifica la transitividad.

Por lo tanto, *R* **no** es una relación de equivalencia.

<u>Ejercicio N° 12</u>: Dado E = {a, b, c, d}, pruebe si alguno de los siguientes conjuntos es una partición de E y obtenga la correspondiente relación de equivalencia:

a) {{a, b, c}, {d} }   b) {{a}, {b, c}, {c, d} }

Solución para a):

Según la definición de partición de un conjunto, los elementos de una partición de un conjunto A son subconjuntos no vacíos, disjuntos (esto quiere decir que la intersección de dos subconjuntos cualesquiera de A debe ser vacío) y la unión de todos los subconjuntos deben formar el conjunto A.

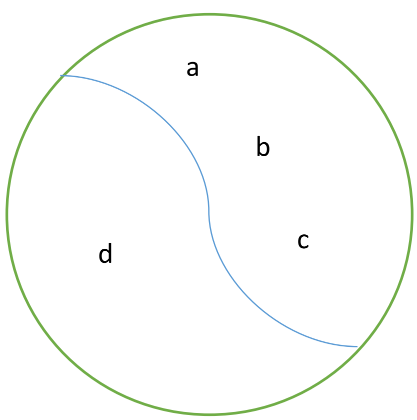
Para el ítem a) tenemos dos subconjuntos de E que no son vacíos: si llamamos K_a = {a, b, c} y K_d = {d} podemos verificar que cada subconjunto tiene al menos un elemento, eso indica que son no vacíos.

Por otro lado, la intersección entre esos dos subconjuntos es vacío (no tienen elementos en común): $K_a \cap K_d = \emptyset$

Y además, $K_a \cup K_d = E$

Por lo tanto, podemos asegurar que {{a, b, c}, {d} } es una partición de E.

Gráficamente esta partición queda determinada de la siguiente manera:



De la partición de un conjunto queda definida sobre el conjunto una relación de equivalencia donde las clases coinciden con los elementos de la partición dada. La relación de equivalencia en este caso:

$$R = \{(a,a),(b,b),(c,c),(a,b),(a,c),(b,a),(c,a),(b,c),(c,b),(d,d)\}$$

<u>Ejercicio N° 14</u>: Defina *R* por extensión, pruebe si es de equivalencia y determine la correspondiente partición de A.

a) En A= {1, 2, 4, 6, 8} se define la siguiente relación:

$R = \{(x, y) \in \mathbf{A^2} \,/\, 3 \mid x+y \}.$

b) En A= {1, 2, 3, 4} se considera la relación:

$R = \{(x, y) \in \mathbf{A^2} \,/\, x = y \vee x+y = 3 \}$

Solución

a) Si bien no es necesario, podemos escribir el producto A x A:

A x A = {(1 , 1) , (1 , 2) , (1 , 4) , (1 , 6) , (1 , 8) , (2 , 1) , (2 , 2) , (2 , 4) , (2 , 6) , (2 , 8) , (4 , 1) , (4 , 2) , (4 , 4) , (4 , 6) , (4 , 8) , (6 , 1) , (6 , 2) , (6 , 4) , (6 , 6) , (6 , 8) , (8 , 1) , (8 , 2) , (8 , 4) , (8 , 6) , (8 , 8) }

$3 \mid x+y$ se lee: 3 divide a x+y, la barra vertical significa “divide a” o “es divisor de”.

De entre estos 25 pares ordenados, son elementos del conjunto relación aquellos cuya suma de componentes son divisibles por 3:

R = { (1 , 2) , (1 , 8) , (2 , 1) , (2 , 4) , (4 , 2) , (4 , 8), (6 , 6) , (8 , 1) , (8 , 4) }

Verifiquemos el cumplimiento de las propiedades de una relación de equivalencia:

Reflexividad: R es reflexiva si y sólo si $\forall\, x : x \in A \rightarrow x\, R\, x$

No se verifica. Esta relación es **no reflexiva** porque $\exists x /\, x \in A \wedge (x, x) \notin R$, como ser $1 \in A \wedge (1, 1) \notin R$.

Por lo tanto, no es una relación de equivalencia.

b) A= {1, 2, 3, 4}

A x A = {(1 , 1) , (1 , 2) , (1 , 3) , (1 , 4) , (2 , 1) , (2 , 2) , (2 , 3) , (2 , 4) , (3 , 1) , (3 , 2) , (3 , 3) , (3 , 4) , (4 , 1) , (4 , 2) , (4 , 3) , (4 , 4) }

$R = \{(x, y) \in \mathbf{A^2} \,/\, x = y \vee x+y = 3 \}$

El conjunto relación R está formado por los pares donde el primer elemento y el segundo, son iguales, más aquellos donde la suma da 3. Presten atención al nexo lógico "v" es una disjunción incluyente.

R = {(1 , 1) , (1 , 2) , (2 , 1) , (2 , 2) , (3 , 3) , (4 , 4) }

Verifiquemos el cumplimiento de las propiedades de una relación de equivalencia:

Reflexividad: R es reflexiva si y sólo si $\forall\, x : x \in A \;\rightarrow x\; R\; x$

Todos los elementos de A están relacionados consigo mismo. A saber: (1, 1), (2, 2), (3, 3) y (4, 4). La relación es reflexiva porque una parte de la definición de R es: x = y.

Simetría: R es simétrica si y sólo si $\forall\, x \in A, \forall\, y \in A: x\; R\; y \;\rightarrow\; y\; R\; x$

La relación es simétrica porque una parte de la definición de R es: x = y, eso hace que los pares que hacen que esta proposición sea verdadera sean simétricos, y la otra condición es que x+y = 3, la suma es conmutativa, por lo tanto en este ejercicio, primera y segunda componentes son inversibles. La relación dada verifica la propiedad simétrica.

Transitividad: R es transitiva si y sólo si $\forall\, x \in A, \forall\, y \in A, \forall\, z \in A :$ $x\; R\; y \;\wedge\; y\, \mathrm{R}\, z \rightarrow x\; R\; z$

Por un lado, x = y e y = z , reemplazando "y" convenientemente, x = z, verifica la transitividad. Se cumple la transitividad para x = y, además la disjunción presente indica que con que una de las proposiciones sea verdadera la proposición compuesta también será verdadera. La relación dada verifica la propiedad transitiva.

Por lo tanto, R es una relación de equivalencia.

El **conjunto cociente** es A/R ={ {1 , 2} , {3} , {4} }

<u>Ejercicio N° 15</u>: Verifique si las siguientes relaciones son de equivalencia en los conjuntos dados:

a) **N** : a *R* b si y solo si a + b = 10
b) **Q** : x *R* y si y solo si x – y ϵ **Z**

En caso de que lo sean halle la clase de equivalencia de uno de sus elementos.

Solución

a) En **N** : a *R* b si y solo si a + b = 10

Reflexividad: R es reflexiva si y sólo si $\forall\, a : a \in A \rightarrow a\, R\, a$

a R a sii a + a = 10 esto se cumple en N solo si a = 5, no se cumple para todo número natural, así que la relación es **no reflexiva**.

Simetría: R es simétrica si y sólo si $\forall\, a \in A, \forall\, b \in A: a\, R\, b \rightarrow b\, R\, a$

a R b $\rightarrow$ a + b = 10

$\rightarrow$ b + a = 10

$\rightarrow$ b R a La relación es **simétrica.**

Transitividad: R es transitiva si y sólo si $\forall\, a \in A, \forall\, b \in A, \forall\, c \in A :$ $a\, R\, b \wedge b\, R\, c \rightarrow a\, R\, c$

a R b y b R c $\rightarrow$ a + b = 10 y b + c = 10

$\rightarrow$ a + (10 – c) = 10

$\rightarrow$ a = c La relación es **no transitiva.**

Se cumple solo si a y c son iguales.

Por lo tanto, no es una relación de equivalencia.

<u>Ejercicio N° 19</u>: Sea *R* la relación en **N** x **N** definida por (a, b) = (c, d) $\Leftrightarrow$ a+d = b+c. Demuestre que *R* es una relación de equivalencia y halle la clase de equivalencia del elemento (1, 5).

Solución

R es una relación definida en **N** x **N.** Entiendase que los elementos del conjunto en el que se define la relación R son pares ordenados de números naturales.

R $\subseteq$ (**N** x **N**) x (**N** x **N**) / R: (a, b) = (c, d) $\Leftrightarrow$ a+d = b+c.

Para demostrar que R es una relación de equivalencia debemos demostrar que cumple las propiedades reflexiva, simétrica y transitiva.

Reflexividad: R es reflexiva si y sólo si $\forall (a,b) : (a,b) \epsilon NxN \rightarrow (a,b)\ R\ (a,b)$

$(a,b)\ R\ (a,b) \quad \rightarrow$ (a, b) = (a, b) $\Leftrightarrow$ a+b = b+a

Como a y b son números naturales y la suma en N es conmutativa, se verifica la igualdad.

La relación R **es reflexiva**.

Simetría: R es simétrica si y sólo si

$$\forall (a,b) \epsilon NxN, \forall (c,d) \epsilon NxN : (a,b)\ R\ (c,d) \rightarrow (c,d)\ R\ (a,b)$$

$(a,b)\ R\ (c,d)$ $\Leftrightarrow$ a + d = b + c.

$\Leftrightarrow$ b + c = a + d

$\Leftrightarrow$ c + b = d + a

$\Leftrightarrow$ $(c,d)\ R\ (a,b)$ La relación es **simétrica.**

Transitividad: R es transitiva si y sólo si $\forall (a,b) \epsilon NxN, \forall (c,d) \epsilon NxN, \forall (e,f) \epsilon NxN :$

$$(a,b)\ R\ (c,d) \wedge (c,d)\ R\ (e,f) \rightarrow (a,b)\ R\ (e,f)$$

$(a,b)\ R\ (c,d) \wedge (c,d)\ R\ (e,f)$ $\Leftrightarrow$ a + d = b + c $\wedge$ c + f = d + e

$\Leftrightarrow$ a + d + c + f = b + c + d +e

$\Leftrightarrow$ a + f = b + e

$\Leftrightarrow$ $(a,b)\ R\ (e,f)$ La relación es **transitiva.**

Por lo tanto, R es una relación de equivalencia.

<u>Clase de equivalencia</u> del elemento (1, 5): $[(1,5)] = \{(a,b) \epsilon R / (1,5)\ R(a,b)\}$

$(1,5)R(a,b)$ $\Leftrightarrow$ 1 + b = 5 + a

$\Leftrightarrow$ b = 4 + a

$$[(1\ , 5)] = \{(a, b)\ \epsilon\ R/\ b = a + 4\}$$