Trabajo Práctico N° 4

Integrales sobre curvas

1. Sean $f(x, y) = xy$ y $\vec{r}(t) = (2\cos t, 2\operatorname{sen} t)$ con $t \in [0, 2\pi]$ la ecuación de una circunferencia γ. Hallar el valor de $\displaystyle\int_\gamma f dr$.
2. Sean $f(x, y, z) = x+y+z$ y $\vec{r}(t) = (\cos t, \operatorname{sen} t, t)$ con $t \in [0, 2\pi]$ la ecuación de una hélice γ. Calcular el valor de la integral de linea de f a lo largo de γ.
3. Sean $\mathbf{F}(x, y, z) = (-x, y, 2z)$ un campo vectorial en $\mathbb{R}^3$ y $\vec{r}(t) = (1 + t, 1 - t, 2t)$ con $t \in [-1, 2]$ la ecuación de un segmento γ. Calcular $\displaystyle\int_\gamma \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$.
4. Calcular $\displaystyle\int_C -ydx + xdy$ donde C es la circunferencia de radio 1 orientada en sentido antihorario.
5. Hallar la masa de un alambre:
   (a) en forma de un cuarto de circunferencia $x^2 + y^2 = 64$ ($x > 0$,$y > 0$) y función de densidad $\rho(x, y) = x + y$.
   (b) en forma de hélice $x = 2\operatorname{sen} t$, $y = 2\cos t$, $z = 3t$ con $0 \leqslant t \leqslant 2\pi$ y función de densidad $\rho = 5$.
6. Hallar el valor de $\displaystyle\int_C yzdx + xzdy + xydz$, donde C es la línea poligonal que va desde $(0, 0, 0)$ a $(2, 0, 0)$, desde $(2, 0, 0)$ a $(1, 3, -1)$ y desde $(1, 3, -1)$ a $(1, 3, 0)$.
7. Dado el campo vectorial $\mathbf{F}(x, y) = (y, x + 2y)$:
   (a) calcular $\displaystyle\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$, donde C es la circunferencia centrada en $(1, 0)$ de radio 2.
   (b) demostrar que $\mathbf{F}$ es un campo vectorial conservativo y hallar la función potencial f.
   (c) utilice la función potencial para calcular la integral de línea del item a y compruebe sus resultados.

Ejercicios complementarios

1. Suponer que el semicírculo $\rho : [0, \pi] \to R^3, \theta \to (0, a\operatorname{sen}\theta, a\cos\theta)(a > 0)$ está hecho de alambre con densidad uniforme de 2 gramos por unidad de longitud.
   (a) ¿Cuál es la masa total del alambre?

(b) ¿Donde está el centro de masa de esta configuración de alambre?

2. Halle la masa total de un alambre en "v", cuya forma es la de la curva $y = |x|$, comprendida entre $x_1 = -1$ y $x_2 = 1$, si la densidad en cada punto de él es igual al valor absoluto del producto de las coordenadas del punto.

3. (a) Calcular la masa M de un muelle que tiene forma de hélice cuya trayectoria $\sigma(t) : [0, 2\pi] \to R^3$ es:

$$\sigma(t) = a\cos t\hat{\imath} + a \operatorname{sen} t\hat{\jmath} + bt\hat{k}$$

si la densidad en (x, y, z) es $x^2 + y^2 + z^2$.

(b) Determinar las coordenadas $\overline{x}$, $\overline{y}$ y $\overline{z}$ del centro de gravedad del muelle.

4. Una partícula de masa m se mueve a lo largo de una curva bajo la acción de un campo de fuerzas F. Si la velocidad de la partícula en el instante t es $v(t)$, su energía cinética está definida por $\frac{1}{2}mv^2(t)$. Demostrar que la variación de energía cinética en cualquier intervalo de tiempo es igual al trabajo realizado por F durante dicho intervalo de tiempo. Es decir, demostrar que:

$$\int_{r(a)}^{r(b)} \mathbf{F}\, d\mathbf{r} = \frac{1}{2}mv^2(b) - \frac{1}{2}mv^2(a)$$

5. Considerar el campo de fuerza gravitacional (con $G = m = M = 1$) definido para $(x, y, z) \neq (0, 0, 0)$ por

$$\mathbf{F}(x, y, z) = \frac{-1}{(x^2 + y^2 + z^2)^{(3/2)}}(x\hat{\imath} + y\hat{\jmath} + z\hat{k})$$

Mostrar que el trabajo realizado por la fuerza gravitacional conforme una partícula se mueve de (x_1, y_1, z_1) a (x_2, y_2, z_2) a lo largo de cualquier trayectoria, depende sólo de los radios $R_1 = \sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2}$ y $R_2 = \sqrt{x_2^2 + y_2^2 + z_2^2}$.