Análisis Matemático III

Teoremas Integrales del Análisis Vectorial

Teorema de Stokes
(Demostración 1)

El Teorema de Stokes relaciona la integral de línea de un Campo Vectorial alrededor de una curva cerrada simple C en $\mathbb{R}^3$, con la integral sobre una superficie S de la cual C es la frontera.

Consideremos una superficie S que sea la gráfica de una función $f(x,y)$, de modo que S está parametrizada por:

$$\begin{cases} x = u \\ y = v \\ z = f(u,v) = f(x,y) \end{cases}$$

para (u,v) en algún dominio D. La integral de un Campo Vectorial $\mathbf{F}$ sobre S se sabe que es:

$$\int\int_S \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} = \int\int_D \left[F_1 \left(-\frac{\partial z}{\partial x} \right) + F_2 \left(-\frac{\partial z}{\partial y} \right) + F_3 \right] dxdy \tag{1}$$

donde $F = F_1\hat{\mathbf{i}} + F_2\hat{\mathbf{j}} + F_3\hat{\mathbf{k}}$.

En este artículo, supondremos que D es una región cuya frontera es una curva cerrada simple a la cual se puede aplicar el Teorema de Green. Según se sabe, para aplicar el Teorema de Green se necesita escoger una orientación de la frontera de D, la orientación que haga que se cumpla se llamará *positiva*. Recordemos que si D es del tipo III, entonces la orientación positiva es en sentido contrario a las agujas del reloj.

Suponer que $\sigma : [a,b] \to \mathbb{R}^2$, $\sigma(t) = (x(t), y(t))$ es una parametrización de ∂D en dirección positiva. Definimos entonces curva frontera ∂S como la curva cerrada simple orientada que es la imagen de la funcion $\eta : t \to (x(t), y(t), f(x(t), y(t)))$ con la orientación inducida por η.

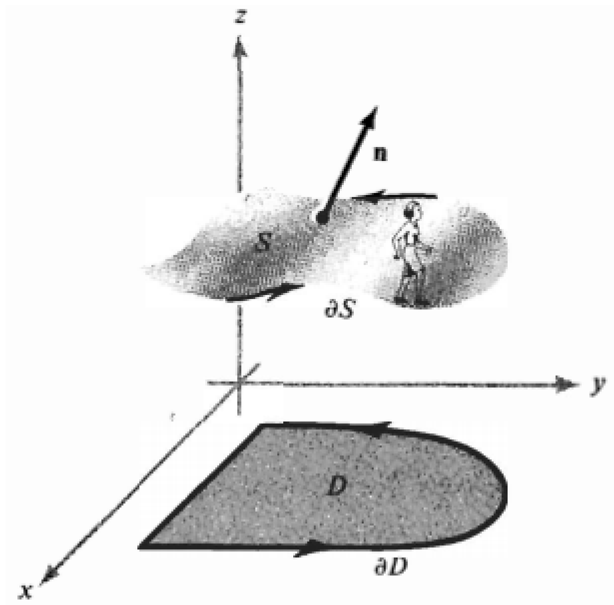

Figura 1. Orientación inducida en ∂S: Conforme se camina alrededor de la frontera, la superficie debe estar a la izquierda

TEOREMA DE STOKES PARA GRÁFICAS.

Sea S la superficie orientada por una funcion C^2, $z = f(x, y)$, $(x, y) \in D$, y sea F un campo vectorial C^1 en S. Entonces, si ∂S denota la curva frontera orientada de S según se definió antes, tenemos

$$\boxed{\int\int_S \text{rot } \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} = \int\int_S (\nabla \times \mathbf{F}) \cdot d\mathbf{S} = \int_{\partial S} \mathbf{F} \cdot ds}$$

El Teorema de Stokes dice que la integral de la *componente normal del rotacional de un campo vectorial* ***F*** *sobre una superficie S, es igual a la integral de la componente tangencial de* ***F*** *alrededor de la frontera* ∂S.

DEMOSTRACIÓN.

Si $\mathbf{F} = F_1\hat{\mathbf{i}} + F_2\hat{\mathbf{j}} + F_3\hat{\mathbf{k}}$, entonces

$$\text{rot } \mathbf{F} = \left(\frac{\partial F_3}{\partial y} - \frac{\partial F_2}{\partial z}\right)\hat{\mathbf{i}} + \left(\frac{\partial F_1}{\partial z} - \frac{\partial F_3}{\partial x}\right)\hat{\mathbf{j}} + \left(\frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y}\right)\hat{\mathbf{k}}$$

Por lo tanto, usamos la fórmula (1) para escribir

$$\int\int_S \textbf{rot F}\cdot d\mathbf{S} = \int\int_D \left[\left(\frac{\partial F_3}{\partial y} - \frac{\partial F_2}{\partial z}\right)\left(-\frac{\partial z}{\partial x}\right) + \left(\frac{\partial F_1}{\partial z} - \frac{\partial F_3}{\partial x}\right)\left(\frac{-\partial z}{\partial y}\right) + \left(\frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y}\right)\right] dA. \tag{2}$$

Por otro lado,

$$\int_{\partial S} \mathbf{F} \cdot ds = \int_\eta \mathbf{F} \cdot ds = \int_\eta F_1 dx + F_2 dy + F_3 dz$$

donde $\eta : [a, b] \to \mathbb{R}^3, \eta(t) = (x(t), y(t), f(x(t), y(t)))$ es la parametrización que preserva la orientación de la curva cerrada simple orientada ∂S. Así,

$$\int_{\partial S} F \cdot ds = \int_a^b \left(F_1 \frac{dx}{dt} + F_2 \frac{dy}{dt} + F_3 \frac{dz}{dt} \right) dt \tag{3}$$

Pero, por la regla de la cadena

$$\frac{dz}{dt} = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{dy}{dt}$$

Sustituyendo esta expresión en (3), obtenemos:

$$\begin{aligned}
\int_{\partial S} F \cdot ds &= \int_a^b \left[\left(F_1 + F_3 \frac{\partial z}{\partial x} \right) \frac{dx}{dt} + \left(F_2 + F_3 \frac{\partial z}{\partial y} \right) \frac{dy}{dt} \right] dt \\
&= \int_\sigma \left(F_1 + F_3 \frac{\partial z}{\partial x} \right) dx + \left(F_2 + F_3 \frac{\partial z}{\partial y} \right) dy \\
&= \int_{\partial D} \left(F_1 + F_3 \frac{\partial z}{\partial x} \right) dx + \left(F_2 + F_3 \frac{\partial z}{\partial y} \right) dy
\end{aligned}$$

Aplicando el Teorema de Green a esta última expresión, se obtiene (Suponemos que el Teorema de Green se aplica a D):

$$\int\int_D \left[\frac{\partial \left(F_2 + F_3 \frac{\partial z}{\partial y} \right)}{\partial x} - \frac{\partial \left(F_1 + F_3 \frac{\partial z}{\partial x} \right)}{\partial y} \right] dA.$$

Usamos ahora la regla de la cadena, recordando que F_1, F_2 y F_3 son funciones de x, y y z, y que z es una función de x y y, para obtener

$$\begin{aligned}
\int\int_D \Bigg[&\left(\frac{\partial F_2}{\partial x} + \frac{\partial F_2}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial F_3}{\partial x}\frac{\partial z}{\partial y} + \frac{\partial F_3}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial z}{\partial y} + F_3 \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} \right) \\
&- \left(\frac{\partial F_1}{\partial y} + \frac{\partial F_1}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial y} + \frac{\partial F_3}{\partial y}\frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial F_3}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial z}{\partial x} + F_3 \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} \right) \Bigg] dA
\end{aligned}$$

Por el Teorema de Clairaut, los últimos dos miembros de cada paréntesis se cancelan:

$$\int\int_D \left[\left(\frac{\partial F_2}{\partial x} + \frac{\partial F_2}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial F_3}{\partial x}\frac{\partial z}{\partial y} \right) - \left(\frac{\partial F_1}{\partial y} + \frac{\partial F_1}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial y} + \frac{\partial F_3}{\partial y}\frac{\partial z}{\partial x} \right) \right] dA$$

Ordenamos y arreglamos los términos de la siguiente manera:

$$\int\int_D \left[\left(\frac{\partial F_2}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial x} - \frac{\partial F_3}{\partial y}\frac{\partial z}{\partial x} \right) + \left(\frac{\partial F_3}{\partial x}\frac{\partial z}{\partial y} - \frac{\partial F_1}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial y} \right) + \left(\frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y} \right) \right] dA.$$

$$\int\int_D \left[\left(\frac{\partial F_3}{\partial y} - \frac{\partial F_2}{\partial z} \right) \left(-\frac{\partial z}{\partial x} \right) + \left(\frac{\partial F_1}{\partial z} - \frac{\partial F_3}{\partial x} \right) \left(-\frac{\partial z}{\partial y} \right) + \left(\frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y} \right) \right] dA.$$

Esta última expresión es igual a (2), lo cual completa la demostración.

Q.E.D.

Bibliografía:

- Tromba Anthony J., Marsden Jerrold E., *"Cálculo Vectorial 3 ed."*, ADDISON-WESLEY IBEROAMERICANA, 1991.