INTRODUCCIÓN A LA LÓGICA

Karl J. Smith

Traductor:

M. en C. Eduardo M. Ojeda Peña
Universidad Autónoma de Guadalajara (UAG),
Guadalajara, México

Revisor General:

Ing. Francisco Paniagua Bocanegra
Universidad Nacional Autónoma de México (UNAM)

S.A. de C.V.
Grupo Editorial Iberoamérica
Río Ganges 64 - 06500 México D.F. - Tels. 5112517 - 2087681 - 2087741 - Fax 5147024

Versión en español de la obra Introduction to Symbolic Logic por Karl J. Smith
Edición original en inglés publicada por Wadsworth, Inc.

ISBN 0-534-14931-6

ISBN 968-7270-82-9
Impreso en México

Editor: Nicolás Grepe P.
Productor: Enrique Fradera T.
Cubierta: Rafael Mendoza

Grupo Editorial Iberoamérica, S.A. de C.V.
Rio Ganges No. 64 — Col. Cuauhtémoc — 06500 México, D.F.
Apdo. 5-192, Tels. 511-25-17, 208-77-41 Fax 514-70-24
Reg. CNIEM 1382

PRÓLOGO

Como lo indica su título, este libro tiene por objeto proporcionar una introducción a la lógica simbólica. Puesto que casi no se requiere de ningún conocimiento previo de la materia, la obra puede utilizarse como un texto suplementario en una amplia variedad de cursos. También se puede emplear como base para un curso breve, o bien puede estudiarse de manera independiente, razón por la cual las respuestas a todos los problemas se incluyen en una parte final.

El propósito principal de este libro consiste en establecer una base para evaluar argumentos lógicos —no solamente en un contexto formal proposición— demostración en matemáticas, sino también en consideraciones cotidianas. Se estudian ejemplos tomados de las matemáticas, de información periodística, anuncios radiofónicos y de televisión, y de otras fuentes contemporáneas, en un esfuerzo para proporcionar al lector un curso de utilidad real. Al estudiar la lógica simbólica se puede agudizar la percepción personal de validez, la aptitud de reconocer falacias y la facultad de evaluar argumentos extensos.

El Cap. 10 supone un conocimiento de las propiedades de cerradura, conmutatividad, asociatividad, identidad, existencia de inversos y distributividad, lo mismo que conjuntos y operaciones con conjuntos.

Deseo expresar mi agradecimiento a las siguientes personas que fueron revisores de esta obra, sus comentarios y sugerencias: William Ash, SUNY-Tech College; Carl Hall, University of Texas, El Paso; Rick Patrick, Adirondack Community College; y Marcella Laddon, Monterey Peninsula College.

En particular, extiendo mi especial aprecio a Carol Kublin, por verificar la exactitud de todos los ejemplos y las respuestas a los problemas.

Karl J. Smith
Sebastopol, CA

CONTENIDO

CAPÍTULO 4

Operadores Adicionales 27

CAPÍTULO 5

Tautologías 33

CAPÍTULO 6

Falacias Lógicas 43

CAPÍTULO 7

Cuantificadores y Círculos de Euler 49

CAPÍTULO 8

Naturaleza de una Demostración 59

*CAPÍTULO 9

Rompecabezas de Lógica 65

*CAPÍTULO 10

Circuitos Lógicos 71

*CAPÍTULO 11

Análisis de Proposiciones 79

* Capítulos opcionales

CAPÍTULO 1

FUNDAMENTOS

1.1 ¿Qué es la lógica simbólica?

Todos estamos familiarizados con la lógica y con la idea de que algunas personas poseen una "mentalidad lógica" mientras que otras no. ¿Cómo podemos entonces llegar a ser lógicos? No siempre resulta sencillo seguir razonamientos o argumentos extensos para obtener conclusiones válidas. El propósito de la lógica simbólica consiste en establecer un lenguaje simbólico artificial que se pueda utilizar para simplificar los argumentos lógicos complicados. El gran matemático alemán Gottfried Leibniz (1646-1716) fue el primero en concebir este planteamiento cuando a la edad de 14 años intentó reformar la lógica clásica. Leibniz llamó a la lógica simbólica *característica universal* y escribió en 1666 que deseaba crear

> un método general en el cual todas las verdades de la razón serían reducidas a una especie de cálculos. Al mismo tiempo, esto constituiría un tipo de lenguaje o escritura universal, pero infinitamente distinto de todos los proyectados hasta ahora, ya que los símbolos, e incluso las palabras contenidas en él, dirigirían la razón; y los errores, excepto los de facto, serían meras equivocaciones en los cálculos. Sería muy difícil formar o inventar este lenguaje o característica, pero muy fácil de entenderlo sin necesidad de diccionarios.

Este sueño no se realizó hasta que el matemático inglés George Boole (1815-1864) separó los símbolos de las operaciones matemáticas de los conceptos sobre los cuales operaban y estableció un sistema factible y sencillo de lógica simbólica. En 1859, Boole expuso sus ideas en su obra *An investigation of the Laws of Thought* (Investigación de las leyes del pensamiento). Desgraciadamente, este trabajo no recibió buena aceptación, y no fue hasta que Bertrand Russell (1872-1970) y Alfred North Whitehead (1861-1947) utilizaron la lógica simbólica en su obra *Principia Mathematica* que el mundo de la matemática dio importancia a las ideas propuestas inicialmente por Leibniz alrededor de 250 años antes.

En este libro se tratará de responder a la pregunta, "¿Cómo podemos llegar a ser más lógicos?". Se pretende aplicar la lógica no solamente en el trabajo formal ordinario sino también en la vida diaria. Es necesario poder comunicarse de manera inteligente con los demás; se requiere adquirir capacidad para analizar los argumentos de nuestros legisladores y dirigentes; necesitamos ser consumidores inteligentes para analizar las afirmaciones de los anunciantes. Bien sea que nos agrade o no, la lógica es una parte importante del mundo que nos rodea, y en este libro sentaremos las bases que nos ayudarán a ser más "lógicos".

1.2 Proposiciones

La lógica es un método de razonamiento que no acepta conclusiones, excepto las que son inevitables. Esto se puede lograr debido a la forma estricta en que se define cada uno de los conceptos. Esto es, todo debe definirse de manera que no dé lugar a dudas o imprecisiones en su significado. Nada puede darse por supuesto, y las definiciones de diccionario no son normalmente suficientes. Por ejemplo, en el lenguaje ordinario un enunciado u oración se puede definir como "una palabra, o grupo de palabras, que declara, pregunta, ordena, solicita, o exclama algo; unidad convencional del habla o escritura coherente, que normalmente contiene un sujeto y un predicado, que empieza con letra mayúscula y termina con un punto." Sin embargo, en lógica simbólica una oración tiene un significado mucho más limitado y se llama proposición.

PROPOSICIÓN Una **proposición** es una oración que es verdadera o falsa, pero no verdadera y falsa a la vez.

Si la oración es una pregunta o una orden, o si es demasiado imprecisa (o carece de sentido), entonces no se puede clasificar como verdadera o falsa, así que no se llamaría proposición.

EJEMPLO 1 1. Neil Armstrong caminó sobre la luna.
2. $3 + 2 = 7$.
3. El Pato Donald es presidente.
Todas estas oraciones son proposiciones, ya que son verdaderas o falsas. Por otro lado, consideremos las expresiones
4. ¡Márchate!
5. $3 + x = 7$.
6. ¿Qué estás haciendo?

Estas no son proposiciones en virtud de la definición dada, ya que no se pueden clasificar satisfactoriamente como verdaderas o falsas □

Pueden surgir dificultades al simplificar argumentos debido a su extensión, a la imprecisión de las palabras que se utilizan, al estilo literario, o al posible impacto emocional de las palabras de que constan. Consideremos los dos argumentos siguientes.

1. Si George Washington fue asesinado, está muerto.
   Por lo tanto, si está muerto, fue asesinado.

2. Si consumes heroína, primeramente consumiste marihuana.
   Por lo tanto, si primero consumiste marihuana, consumes heroína.

Lógicamente, estos dos argumentos son exactamente iguales, y ambos son formas *no válidas* de razonamiento. Casi todo mundo admitiría que el primer argumento es absurdo, pero muchos aceptan el segundo argumento debido al aspecto emocional de las palabras empleadas en él.

Para evitar estas dificultades y ayudar a la simplificación de los argumentos lógicos complicados, puede establecerse el lenguaje simbólico artificial a que nos referimos anteriormente. El lenguaje que se inventa aquí es necesariamente más simple que cualquier lenguaje natural; es una especie de taquigrafía notacional. Se denotan las *proposiciones simples* con literales, tales como $p, q, r, s, \ldots,$ *y luego se definen ciertos conectivos. Nuestra meta, en la medida en que sea posible, consiste en*

1. traducir las proposiciones del lenguaje ordinario a la forma simbólica
2. simplificar la forma simbólica.
3. traducir la forma simplificada de nuevo a proposiciones del lenguaje ordinario.

Para los fines de este libro, se supondrá que la traducción en un sentido y en otro entre el lenguaje ordinario y el simbólico se puede efectuar de manera sencilla. En realidad, no siempre sucede así, desafortunadamente. El lenguaje ordinario puede tener relaciones sutiles que sobrepasan el significado exacto de las palabras de una oración simple. Se deben tener presentes las interpretaciones que se dan a los símbolos de un problema particular. Al traducir, debemos preguntarnos qué significa la oración en el lenguaje natural, y luego se debe tratar de encontrar una proposición en lenguaje simbólico que tenga, hasta donde sea posible, el mismo significado.

Se puede evitar el problema de la extensión considerando solamente proposiciones simples unidas por ciertos conectivos bien definidos, tales como *no, y, o, ni...ni, si...entonces, a menos que, debido a que,* y así sucesivamente.

Una *proposición compuesta* se forma combinando proposiciones simples con operadores, o conectivos. De la definición básica de proposición, vemos que el *valor de verdad* de cualquier proposición puede ser o verdadero (T) o falso (F).*

VALOR DE VERDAD El **valor de verdad** de una *proposición simple* puede ser verdadero (T) o bien falso (F).

El **valor de verdad** de una *proposición compuesta* es verdadero o *falso y depende* sólo de los valores de verdad de sus partes componentes simples. Se determina empleando la regla de conexión de dichas partes por medio de operadores bien definidos, tales como *y, o, no, si...entonces, ni...ni, a menos que, y debido a que.*

No podemos suponer que se conocen los significados de los conectivos *y, o, no,* y así sucesivamente, aunque parecen obvios y sencillos. La fuerza de la lógica radica

* *(N. del R.)* Por conveniencia y a fin de evitar confusiones con el símbolo de la disyunción, se utiliza en esta versión en español el símbolo T (del inglés *true*) para representar lo verdadero.

en que no deja ningún significado al azar o a la interpretación individual. No obstante, al definir los valores de verdad correspondientes a dichos conectivos, trataremos de ajustarnos al uso común.

1.3 Conjunción

Si p y q representan dos proposiciones simples, entonces la proposición compuesta "p y q" utiliza el operador llamado **conjunción.** La palabra *y* se simboliza con $\wedge$. Por ejemplo, la proposición

Tengo una moneda de 1000 pesos en mi bolsillo y tengo una moneda de 5000 pesos en mi bolsillo.

es una proposición compuesta. ¿Cuándo será verdadera esta proposición? Existen cuatro posibilidades concretas:

1. Tengo una moneda de 1000 pesos en mi bolsillo. Tengo una moneda de 5000 pesos en mi bolsillo.
2. Tengo una moneda de 1000 pesos en mi bolsillo. No tengo una moneda de 5000 pesos en mi bolsillo.
3. No tengo una moneda de 1000 pesos en mi bolsillo. Tengo una moneda de 5000 pesos en mi bolsillo
4. No tengo una moneda de 1000 pesos en mi bolsillo. No tengo una moneda de 5000 pesos en mi bolsillo.

Representemos con p y q las proposiciones simples, de manera que:

p: Tengo una moneda de 1000 pesos en mi bolsillo.
q: Tengo una moneda de 5000 pesos en mi bolsillo.

Estas cuatro posibilidades se pueden resumir como sigue:

	p	q
1.	T	T
2.	T	F
3.	F	T
4.	F	F

Vemos que la única ocasión en que la proposición original

Tengo una moneda de 1000 pesos en mi bolsillo, y tengo una moneda de 5000 pesos en mi bolsillo.

resulta verdadera es cuando p y q son ambas verdaderas; de lo contrario, resulta ser falsa. Así que definimos $p \wedge q$ según la Tabla 1.

Tabla 1 DEFINICIÓN DE CONJUNCIÓN

p	q	$p \wedge q$
T	T	T
T	F	F
F	T	F
F	F	F

Es importante notar que no se requiere que las proposiciones p y q estén relacionadas. Por ejemplo,

Los peces nadan y Neil Armstrong caminó sobre la luna.

es una proposición compuesta verdadera.

1.4 Disyunción

El operador *o*, denotado por $\vee$, se llama **disyunción.** El significado de esta palabra es ambiguo cuando se la utiliza en el lenguaje cotidiano, como puede verse considerando los ejemplos siguientes. Sean

p: Juan tiene una moneda de 1000 pesos en su bolsillo.
q: Juan tiene una moneda de 5000 pesos en su bolsillo.
r: Juan está en Rusia.
s: Juan está en España.

Ahora Juan formula las dos proposiciones:

I. Tengo una moneda de 1000 pesos o una de 5000 en mi bolsillo.
II. Estoy en Rusia o en España.*

Consideraremos la intención de estas proposiciones.

En la proposición I, Juan parece afirmar que por lo menos una de las proposiciones es verdadera, pero quizás ambas sean verdaderas. Por otro lado, la intención de la proposición II es que una y sólo una de las proposiciones es verdadera. Juan no tendría la intención de decir que se encuentra a la vez en Rusia y en España.

La proposición I ilustra uno de los usos del conectivo *o* que se llama *o incluyente* y se denota por $\vee$. Si p y q son dos proposiciones, a $p \vee q$ se le llama *disyunción;* y para determinar su veracidad o falsedad, debe considerarse la veracidad o falsedad de p y q. Por lo tanto, consideremos de nuevo las cuatro posibilidades para determinar si Juan dijo la verdad en su afirmación

Tengo una moneda de 1000 pesos o una de 5000 en mi bolsillo.

* Aquí se ha hecho uso de la abreviación literaria. Estas oraciones se deben interpretar como "tengo una moneda de 1000 pesos en mi bolsillo, o tengo una moneda de 5000 pesos en mi bolsillo" y, "estoy en Rusia, o estoy en España". Este tipo de abreviatura se empleará a lo largo del libro siempre que no dé lugar a ambigüedades.

Caso 1 (p es T; q es T): Juan tiene una moneda de 1000 pesos en su bolsillo.
Juan tiene una moneda de 5000 pesos en su bolsillo.

En estas condiciones no diríamos que Juan es mentiroso, así que decimos que la proposición compuesta también es verdadera.

Caso 2 (p es T; q es F): Juan tiene una moneda de 1000 pesos en su bolsillo.
Juan no tiene una moneda de 5000 pesos en su bolsillo.

Caso 3 (p es F; q es T): Juan no tiene una moneda de 1000 pesos en su bolsillo.
Juan tiene una moneda de 5000 pesos en su bolsillo.

En los casos 2 y 3 no diríamos que Juan está mintiendo, así que se expresa que la proposición compuesta también es verdadera.

Caso 4 (p es F; q es F): Juan no tiene una moneda de 1000 pesos en su bolsillo.
Juan no tiene una moneda de 5000 pesos en su bolsillo.

En este caso diríamos que Juan ha mentido y decimos que su afirmación es falsa.
Así que definimos $p \vee q$ según la tabla 2.

Tabla 2
DEFINICIÓN DE DISYUNCIÓN

p	q	$p \vee q$
T	T	T
T	F	T
F	T	T
F	F	F

Una disyunción es falsa sólo si ambas de sus proposiciones componentes son falsas.
La proposición II ilustra uno de los usos del conectivo *o* que se llama *o excluyente*. Consideremos ahora si Juan dice la verdad al formular la aserción

Estoy en Rusia o en España.

Obviamente no es posible que Juan se encuentre en ambos lugares al mismo tiempo. Si Juan está en Rusia, entonces no puede estar en España; si está en España, no puede estar en Rusia. Por lo tanto la intención de la proposición II es

Estoy o en Rusia o en España.

y la proposición es verdadera si una y sólo una de las componentes separadas es verdadera. La tabla de verdad en este caso es la siguiente:

r	s	r o s
T	T	F
T	F	T
F	T	T
F	F	F

En este libro utilizaremos la disyunción indicada con la *o incluyente*. Si la intención de la proposición requiere la *o excluyente,* se enunciará la proposición empleando el conectivo *o...o*. **Recuérdese:** *la o incluyente* significa *cualquiera de las dos o ambas, mientras que la o excluyente* significa *cualquiera de las dos pero no* ambas.

1.5 Negación

La negativa de cualquier proposición p se llama *negación* y se simboliza mediante $\sim p$. La Tabla 3 proporciona una definición clara de la negación.

Tabla 3
DEFINICIÓN DE LA NEGACIÓN

p	$\sim p$
T	F
F	T

EJEMPLO 2 Si t: Octavio está diciendo la verdad, entonces
$\sim t$: Octavio no está diciendo la verdad.

También se puede traducir $\sim t$ como "no ocurre que Octavio está diciendo la verdad", o bien, "no es cierto que Octavio está diciendo la verdad".

Cualquier proposición puede ser negada, pero se requiere tener cuidado con la manera en que se forme la negación de una proposición compuesta. La negación de

Tengo una moneda de 1000 pesos y una de 5000 en mi bolsillo.

se simboliza mediante $(p \wedge q)$ y se traduce como

No es cierto que tengo una moneda de 1000 pesos y una de 5000 en mi bolsillo.

La negación no se forma denegando cada una de las proposiciones simples. Al negar una proposición, no se debe alterar dicha proposición. Por ejemplo, sean

b: El carro de Juan es azul.
c: El carro de Juan es rojo.

La proposición c no es la negación de la proposición b, aunque no pueda ser que ambas sean verdaderas. La negación de b es

$\sim$ *b:* El carro de Juan no es azul.

y la negación de c es la proposición

$\sim$ *c:* El carro de Juan no es rojo.

Se debe tener cuidado al negar proposiciones que contienen las palabras *todos, ninguno, o algunos.*

EJEMPLO 3 Escribir la negación de

Todos los estudiantes tienen lápices.

Solución Veamos si son respuestas correctas las proposiciones "Ningún estudiante tiene lápices", o bien "Todos los estudiantes carecen de lápices". Recuérdese que si una proposición es falsa, entonces su negación debe ser verdadera. La negación correcta es

No todos los estudiantes tienen lápices.

o bien

Por lo menos un estudiante no tiene lápiz.

o bien

Algunos estudiantes no tienen lápices. □

En matemáticas, la palabra *algunos* se emplea en el sentido de "por lo menos unos". La Tabla 4 proporciona alguna de las negaciones comunes.

Tabla 4
NEGACIÓN DE *TODOS*, *ALGUNOS* y *NINGUNO*

Proposición	Negación
Todos	Algunos...no
Algunos	Ningún
Algunos...no	Todos
Ningún	Algunos

EJEMPLO 4 Escribir la negación de cada una de las proposiciones siguientes

a. Todas las personas tienen compasión.
b. Algunos animales son sucios.
c. Algunos estudiantes no llevan el curso de matemáticas I.
d. Ningún estudiante es entusiasta.

Solución

a. Algunas personas no tienen compasión.
b. Ningún animal es sucio.
c. Todos los estudiantes llevan el curso de matemáticas I.
d. Algunos estudiantes son entusiastas. □

En el siguiente capítulo consideraremos la negación de proposiciones compuestas.

1.6 Traducción y combinación de conectivos

El trabajar con los argumentos lógicos requiere la aptitud de traducirlos del lenguaje ordinario al simbólico y del simbólico de nuevo al lenguaje ordinario. Por ejemplo, la proposición

Bertha y Claudia son atractivas.

se puede traducir como sigue. Sean

b: Bertha es atractiva.
c: Claudia es atractiva.

Entonces tenemos que

$b \wedge c$ Bertha es atractiva y Claudia es atractiva.

así que $b \wedge c$ es la proposición simbólica.

EJEMPLO 5 Traducir la proposición compuesta

O Bertha es atractiva o Claudia es atractiva.

a la forma simbólica.

Solución Vemos que el conectivo *o...o* se traduce como la *o excluyente*. La oración se puede reescribir como

Bertha es atractiva o Claudia es atractiva, pero no ambas.

La proposición se traduce en la forma
$(b \vee c) \wedge [\sim(b \wedge c)]$.

Obsérvese que en este ejemplo se emplean los paréntesis exactamente como en álgebra: para indicar el orden de las operaciones. Por consiguiente, $\sim(b \wedge c)$ significa la negación de la proposición b y c.

No solamente se requiere traducir del lenguaje ordinario a los símbolos lógicos, sino que también de los símbolos lógicos al lenguaje ordinario.

EJEMPLO 6 Supongamos que:

p: Como espinacas.
q: Estoy fuerte.

Se desea traducir las siguientes proposiciones al lenguaje ordinario:

a. $p \wedge q$ **d.** $\sim p \vee q$.
b. $\sim p$ **e.** $\sim (\sim q)$
c. $\sim (p \vee p)$ **f.** $p \wedge \sim q$

Solución Traducciones serían las siguientes:

a. Como espinacas y estoy fuerte.
b. No como espinacas.
c. No es cierto que como espinacas o que estoy fuerte.
d. No como espinacas, o estoy fuerte.
e. No es cierto que no estoy fuerte [lo que significa, desde luego, que estoy fuerte].
f. Como espinacas y no estoy fuerte.

1.7 CONJUNTO DE PROBLEMAS 1

A

1. Según la definición, ¿cuáles de las siguientes expresiones son proposiciones?
  a. Esta fruta está verde.
  b. 3 + 7 = 10.
  c. La diferencia entre dos números naturales es un número natural.
  d. Si gasto 1000 pesos al día durante 2000 años, no habré gastado 1000 millones de pesos.
  e. ¿Estas contenta?

2. De acuerdo con la definición, ¿cuáles de las siguientes expresiones son proposiciones?
  a. ¡Mañana se acabará el mundo!
  b. Tomás debe pagar sus deudas a menos que quiera ir a la cárcel.
  c. Thomas Jefferson fue el vigésimo tercer presidente de los Estados Unidos.
  d. Siéntate y estate quieto.
  e. Shakespeare es el más grande escritor que el mundo haya conocido.

3. De acuerdo con la definición, ¿cuáles de las siguientes expresiones son proposiciones?
  a. La división entre cero es imposible.
  b. Si a Octavio no le gusta realizar la división larga, entonces es perfectamente normal.
  c. Si Fernando descubriera una fórmula para encontrar números primos, sería famoso.
  d. La abstracción cambia lo borroso en amarillo.
  e. La lógica no es tan difícil como yo lo había esperado.

4. De acuerdo con la definición, ¿cuáles de las siguientes expresiones son proposiciones?
  a. Tic, toc, tic, toc, el ratón trepó al reloj.
  b. ¿Es feo Juan?
  c. Juan tiene una verruga en la punta de la nariz.
  d. Daniel y María se casaron el 3 de agosto de 1989.
  e. ¿Estás resfriado?

5. Defina la conjunción.
6. Defina la disyunción.
7. Defina la negación.

Escriba la negación de cada proposición de los problemas 8-10.

8. **a.** Todos los matemáticos son ogros.
  b. Algunos enteros son negativos.
  c. Algunas personas no pagan impuestos.
  d. Ningún entero par es divisible entre 5.

9. **a.** Todos los enteros no negativos son divisibles por 1.
  b. Algunas manzanas están podridas.
  c. Algunos enteros no son impares.
  d. Ningún triángulo es cuadrado.

10. **a.** Todas las mujeres son inteligentes.
  b. Algunos rectángulos son cuadrados.
  c. Algunos rectángulos no son cuadrados.
  d. Ninguna persona amable es peligrosa.

Representemos con p la proposición "Bertha es atractiva", y con q, la proposición "Claudia es atractiva". Traduzca cada una de las proposiciones de los Problemas 11-15 a la forma simbólica. (Suponga que feo y atractivo son opuestos; esto es, ser "no feo" es lo mismo que ser atractivo.)

EJEMPLO 7 Tanto Bertha como Claudia son feas.

Solución $\sim p$: Bertha es fea.
$\sim q$: Claudia es fea.
De modo que $(\sim p) \wedge (\sim q)$.

11. Tanto Bertha como Claudia son atractivas.
12. No es verdad que tanto Bertha como Claudia son atractivas.
13. Bertha es atractiva o Claudia es fea.
14. Bertha es atractiva y Claudia es fea.
15. O Bertha es atractiva o Claudia es atractiva, pero no ambas.

Traduzca cada una de las proposiciones de los Problemas 16-20 al lenguaje ordinario. Sean

p: Pablo es extraño.
q: A Pablo le gusta leer libros de matemáticas.

EJEMPLO 8 $(\sim p) \wedge q$

Solución $\sim p$: Pablo no es extraño. Así que la proposición es "Pablo no es extraño y le gusta leer libros de matemáticas".

16. $p \wedge q$
17. $\sim p \wedge q$
18. $\sim (p \wedge q)$
19. $p \vee (\sim q)$
20. $\sim p \vee (\sim q)$

Traduzca las proposiciones de los Problemas 21-25 a la forma simbólica. Para cada proposición simple, asegúrese de indicar los significados de los símbolos que utilice.

21. Patricia está comiendo, bebiendo y divirtiéndose.
22. Samuel no aceptará el nombramiento.
23. No irás hoy en la noche y no irás mañana.
24. El gordo Alberto vive para comer y no come para vivir.
25. La decisión dependerá del juicio o la intuición, no de quién pagó más.

Escriba T (verdadero) o F (falso) para cada proposición de los Problemas 26-31. Modifique cada proposición falsa para convertirla en verdadera.

26. Para todo número real x, $|x| > 0$.
27. Para todo número real x, $\sqrt{x^2} = x$.
28. Para algún número real x, $x^2 \leq 0$.
29. Para algún número real x, $(x + 3)^2 = x^2 + 6x + 9$.
30. No existe ningún número real x tal que $|x + 4| \leq 0$.
31. No existe ningún número real x tal que x, $x^2 < 0$.

CAPÍTULO 2

TABLAS DE VERDAD

2.1 Definición y ejemplo

Gran parte de lo que se ha dicho acerca de la lógica y las relaciones entre proposiciones de razonamiento, se puede ilustrar por medio de *tablas de verdad*. Una tabla de verdad es un esquema que muestra cómo los valores de verdad de proposiciones compuestas, dependen de los conectivos usados y de los valores de verdad de las proposiciones componentes simples. Las Tablas 1, 2 y 3 del Cap. 1 son fundamentales para elaborar o construir tablas de verdad. Se las resume en las Tablas 5 y 6.

Tabla 5
CONECTIVOS FUNDAMENTALES

Conectivo	Símbolo	Nombre	Proposición Simbólica	Ejemplo
y	$\wedge$	conjunción	$p \wedge q$	Los peces nadan *y* las aves vuelan.
o	$\vee$	disyunción	$p \vee q$	Los peces nadan *o* las aves vuelan.
no	$\sim$	negación	$\sim p$	Los peces *no* nadan.

Tabla 6
TABLA DE VERDAD CORRESPONDIENTE A LOS CONECTIVOS FUNDAMENTALES

p	q	$p \wedge q$	$p \vee q$	$\sim p$	$\sim q$
T	T	T	T	F	F
T	F	F	T	F	T
F	T	F	T	T	F
F	F	F	F	T	T

EJEMPLO 1 Construir la tabla de verdad de la proposición compuesta:

Alfredo no vino anoche y no recogió su dinero.

Solución *Sea p*: Alfredo vino anoche.
q: Alfredo recogió su dinero.

Entonces la proposición se puede escribir $(\sim p) \wedge (\sim q)$. Para empezar, se enumeran todas las combinaciones posibles de valores de verdad de las proposiciones simples p y q.

p	q
T	T
T	F
F	T
F	F

Luego se incluyen los valores de verdad de $\sim p$ y $\sim q$.

p	q	$\sim p$	$\sim q$
T	T	F	F
T	F	F	T
F	T	T	F
F	F	T	T

Por último, se anotan los valores de verdad de $(\sim p) \wedge (\sim q)$. Para realizar esto, se marca una columna "$(\sim p) \wedge (\sim q)$" en la parte superior, y luego se comparan las columnas $\sim p$ y $\sim q$ según la definición de conjunción para encontrar los valores de verdad de $(\sim p) \wedge (\sim q)$, como se indica mediante las flechas:

conjunción

p	q	$\sim p$	$\sim q$	$(\sim p) \wedge (\sim q)$
T	T	F	F	F
T	F	F	T	F
F	T	T	F	F
F	F	T	T	T

Comparar estos valores con la definición de *conjunción* para obtener los valores de que consta la última columna. □

EJEMPLO 2 Construir la tabla de verdad de $\sim (\sim p)$.

Solución Empezamos con p:

p
T
F

En seguida se anotan los valores de $\sim p$ de acuerdo con la definición de la negación:

p	$\sim p$
T	F
F	T

Por último, se anotan los valores de $\sim (\sim p)$. Las flechas muestran cómo se obtienen los elementos de esta columna.

negación

p	$\sim p$	$\sim (\sim p)$
T	F	T
F	T	F

Examínese esta columna. Úsese la definición de *negación* para todos los valores de verdad de dicha columna. □

Nótese que $\sim (\sim p)$ y p tienen los mismos valores de verdad. Si dos proposiciones tienen los mismos valores de verdad, una puede reemplazar a la otra en cualquier expresión lógica. Esto significa que la doble negación de una proposición es igual a la proposición original.

LEY DE LA DOBLE NEGACIÓN

$\sim (\sim p)$ se puede reemplazar por p en cualquier expresión lógica.

EJEMPLO 3 Construir una tabla de verdad para determinar cuándo es verdadera la siguiente proposición:

$$\sim (p \wedge q) \wedge [(p \vee q) \wedge q]$$

Solución Se empieza como antes y se hace un recorrido de izquierda a derecha, fijando la atención solamente en dos columnas a la vez (véase en la Tabla 5 cómo obtener los valores correctos).

Paso 1. Primeramente se tienen en cuenta los paréntesis. Se examinan las columnas A y B que se indican a continuación, junto con la definición de conjunción, para anotar los valores de la columna C.

Paso 2. Se utiliza la columna C y la definición de negación para anotar los valores de la columna D.

Paso 3. Se utilizan las columnas A y B y la definición de disyunción para anotar los valores de la columna E.

Paso 4. Se emplean las columnas E y B y la definición de conjunción para anotar los valores de la columna F.

Paso 5. Se utilizan las columnas D y F, que son las partes izquierda y derecha de la operación final, y la definición de conjunción para obtener los valores de la columna G.

A	B	C	D	E	F	G
p	q	$p \wedge q$	$\sim (p \wedge q)$	$p \vee q$	$(p \vee q) \wedge q$	$\sim (p \wedge q) \wedge [(p \vee q) \wedge q]$
T	T	T	F	T	T	F
T	F	F	T	T	F	F
F	T	F	T	T	T	T
F	F	F	T	F	F	F

□

2.2 CONJUNTO DE PROBLEMAS 2

A

Obtener la tabla de verdad de las proposiciones dadas en los problemas 1-16.

1. $\sim p \wedge (\sim q)$
2. $\sim (p \wedge q)$
3. $\sim p \vee (\sim q)$
4. $p \wedge (p \vee q)$
5. $r \wedge (\sim s)$
6. $s \vee (\sim s)$
7. $(r \wedge s) \vee (\sim s)$
8. $(\sim r) \vee (\sim s)$
9. $(p \vee q) \vee (p \wedge q)$
10. $(\sim p \wedge q) \vee (\sim q)$
11. $[p \wedge (\sim q)] \wedge p$
12. $\{p \wedge [q \vee (\sim p)]\} \vee [p \wedge (\sim q)]$
13. $(p \wedge q) \wedge r$
14. $(p \wedge q) \wedge (\sim r)$
15. $[(p \vee q) \wedge (\sim r)] \wedge r$
16. $\{p \wedge [q \vee (\sim p)]\} \vee r$

17. Sean p: $2 + 3 = 5$.
q: La Luna está hecha de queso fresco.
Determine cuáles de las proposiciones de los Problemas 1-4 son verdaderas.
18. Sean r: La humanidad contamina el medio ambiente.
s: La humanidad sobrevivirá.
Traduzca cada una de las proposiciones de los Problemas 5-8 al lenguaje ordinari y determine en qué condiciones cada una resultará verdadera.
19. Si r es T y s es F, ¿es verdadera la proposición del Problema 7?
20. Si r es F y s es T, ¿es verdadera la proposición del Problema 8?
21. Si p es T y s es T, ¿es verdadera la proposición del Problema 9?
22. Si p es F y q es F, ¿es verdadera la proposición del Problema 10?
23. a. ¿Cuántos valores de verdad resultantes hay en una tabla de verdad correspondiente a una proposición?
b. ¿Cuántos valores de verdad resultantes hay en una tabla de verdad correspondiente a dos proposiciones?
c. ¿Cuántos valores de verdad resultantes hay en una tabla de verdad correspondiente a tres proposiciones (véase el Problema 13)?
24. ¿Cuántos valores de verdad resultantes hay en una tabla de verdad correspondie a cuatro proposiciones?
25. 25. Considere las respuestas obtenidas en los Problemas 23 y 24. ¿Cuántos valo de verdad resultantes hay en una tabla de verdad correspondiente a n proposicion

CAPÍTULO 3

LA CONDICIONAL

3.1 Si—Entonces

La proposición "si p, entonces q" se llama **condicional.** Se simboliza por medio de $p \rightarrow q$; p se llama *hipótesis* o **antecedente,** y q se denomina *conclusión* o **consecuente.** La situación de la condicional es semejante a la que se encontró en el caso de la palabra *o*. Esto es, en el lenguaje común utilizamos el conectivo si—entonces en varias formas. Considérese el ejemplo siguiente que ilustra los diferentes sentidos de la condicional.

1. Se puede utilizar si—entonces para indicar una relación *lógica*, es decir, una en la que el consecuente se deduce lógicamente del antecedente:

   Si $\sim(\sim p)$ tiene el mismo valor de verdad que p, entonces p puede reemplazar a $\sim(\sim p)$.

2. Se puede emplear si—entonces para indicar una relación de causa:

   Si Juan deja caer esa piedra, entonces me golpeará el pie.

3. Se puede usar si—entonces para comunicar una decisión de parte de la persona que habla:

   Si Juan me lanza esa piedra, entonces lo golpearé.

4. Se puede utilizar si—entonces cuando el consecuente se deduce del antecedente por la propia definición de las palabras empleadas:

   Si Juan conduce un Oldsmobile, entonces Juan guía un automóvil.

5. Por último, se puede emplear si—entonces para efectuar una *implicación material.* A veces la condicional se usa cuando no hay una relación lógica; de causa o de definición, entre el antecedente y el consecuente. A menudo se utiliza en forma humorística o enfática:

   Si Juan obtuvo la máxima nota en ese examen, entonces yo soy tío de un mono.

El consecuente es obviamente falso y la persona que habla desea poner énfasis en que el antecedente también es falso.

Nuestra tarea consiste en tratar de idear una definición de la condicional que se aplique en todos estos tipos de proposiciones de la forma si—entonces. Plantearemos el problema preguntando en qué circunstancias una condicional dada sería falsa. Consideremos otro ejemplo.

Supongamos que una persona le hace una promesa a otra. "Si gano el concurso, entonces te daré 10 000 pesos." Si cumple su promesa, decimos que la proposición es verdadera; si la incumple, decimos que es falsa. Sean

p: Gana el concurso.
q: Te dará 10 000 pesos.

La promesa se simboliza con $p \rightarrow q$. Hay cuatro posibilidades:

	p	q	
Caso 1:	T	T	Gana el concurso; dará 10 000 pesos.
Caso 2:	T	F	Gana concurso; no dará 10 000 pesos.
Caso 3:	F	T	No gana el concurso; dará 10 000 pesos.
Caso 4:	F	F	No gana el concurso; no dará 10 000 pesos.

¿Cuándo se habrá quebrantado la promesa?

La única ocasión en que se puede decir que ello ha ocurrido es en el caso 2. La prueba de una condicional consiste en determinar cuándo es falsa. En símbolos,

$p \rightarrow q$ es falsa siempre que $p \wedge (\sim q)$ sea verdadera. *Esto proviene del caso 2.*

o bien

$p \rightarrow q$ es verdadera siempre que $p \wedge (q)$ sea falsa

Esto equivale a decir que

$p \rightarrow q$ es verdadera siempre que $\sim [p \wedge (\sim q)]$ es verdadera.

Construyamos una tabla de verdad para $\sim [p \wedge (\sim q)]$.

p	q	$\sim q$	$p \wedge (\sim q)$	$\sim [p \wedge (\sim p)]$
T	T	F	F	T
T	F	T	T	F
F	T	F	F	T
F	F	T	F	T

Usamos esta tabla de verdad para definir la condicional $p \rightarrow q$, como se muestra en la Tabla 7.

Tabla 7
DEFINICIÓN DE LA CONDICIONAL

p	q	$p \rightarrow q$
T	T	T
T	F	F
F	T	T
F	F	T

Los ejemplos siguientes ilustran la definición de la condicional dada en la Tabla 7.

EJEMPLO 1 *Caso 1:* T → T

Si $7 < 14$, *entonces* $7 + 2 < 14 + 2$.

Esta es una proposición verdadera, ya que ambas componentes son también verdaderas ☐

EJEMPLO 2 *Caso 2:* T → F

Si $7 + 5 = 12$, *entonces* $7 + 10 = 15$.

Esta es una proposición falsa, puesto que el antecedente es verdadero pero el consecuente es falso ☐

EJEMPLO 3 *Caso 3:* F → T

Si tú tienes seis piernas, entonces George Washington fue presidente.

Verdadera, ya que el consecuente es verdadero (y si el consecuente es verdadero, la implicación completa es verdadera, sea o no verdadero el antecedente). ☐

El Ejemplo 3 muestra que la condicional, en matemáticas, no implica ninguna relación causa-efecto. Dos proposiciones *cualesquiera* se pueden unir por medio del conectivo condicional, y el resultado debe ser T o F.

EJEMPLO 4 *Caso 4:* F → F

Si $16 = 8$, *entonces* $8 = 4$.

Esta es una proposición verdadera, ya que ambas componentes son falsas. ☐

No es necesario enunciar primero la parte *si* de una implicación. Todas las proposiciones siguientes tienen el *mismo significado:*

1. Si gana el concurso, entonces dará 10 000 pesos.

2. Que gane el concurso implica que dará 10 000 pesos.
3. Dará 10 000 pesos si gana el concurso.
4. Gana el concurso sólo si dará 10 000 pesos.
5. Para que dé 10 000 pesos, es suficiente que gane el concurso.
6. Que gane el concurso hace necesario que dé 10 000 pesos.
7. Dará 10 000 pesos con la condición de que gane el concurso.
8. Dará 10 000 pesos cuando gane el concurso.
9. Daré 10 000 pesos siempre que gane el concurso.

Podemos ahora formular estas nueve proposiciones equivalentes en forma simbólica como sigue:

1. si p, entonces q
2. $p \to q$
3. q si p
4. p sólo si q
5. p es suficiente para q
6. q es necesario para p
7. q con la condición de que p
8. q cuando p
9. q siempre que p

Algunas proposiciones que no estén escritas originalmente como condicionales, se pueden expresar en la forma si—entonces. Por ejemplo, "Todos los patos son aves" se puede reexpresar como "Si es un pato, entonces es un ave". Así que agregamos una forma adicional a la lista:

10. todos los p son a *Traducción: Todos los patos son aves.*

EJEMPLO 5 Traducir la siguiente oración, tomada de una forma fiscal, al lenguaje simbólico.

Si no especifica deducciones en la lista A y tiene donativos deducibles, entonces complete la hoja de trabajo de la página 14 y declare la partida autorizada en el renglón 34b.

Solución **Paso 1.** Se separan las proposiciones simples y se les asignan variables. Sean

d: Especifica deducciones en la lista A.
c: Tiene donativos deducibles.
w: Completa la hoja de trabajo de la página 14.
b: Declara la partida autorizada en el renglón 34b.

Paso 2. Se reescribe la oración, efectuando sustituciones con las variables.

Si $\sim d \wedge c$, entonces $(w \wedge b)$

Paso 3. Se completa la traducción al lenguaje simbólico.

$(\sim d \wedge c) \to (w \wedge b)$ □

La proposición si—entonces puede tener varios significados, pero la $\to$ tiene solamente uno, el que se definió en la Tabla 7. Lo que la proposición $p \to p$ *significa es* $\sim [p \wedge (\sim q)]$. No obstante, en la práctica empleamos $p \to p$ para representar proposiciones del lenguaje ordinario de la forma si—entonces o de implicación. ¿Cómo se puede justificar lo anterior? Como hemos visto, parte de la dificultad de traducir del lenguaje ordinario al simbólico radica en eliminar la ambigüedad del lenguaje ordinario. Sin embargo, se *preserva* la validez de todos los argumentos válidos del tipo si entonces empleados en este libro, incluso si se ignoran los significados adicionales de la condicional. Posteriormente analizaremos este punto con más detalle, cuando se consideren los conceptos de validez y argumentos válidos. Por ahora traduciremos todas las diversas formas si entonces de acuerdo con la proposición $p \to q$ definida en la Tabla 7.

3.2 Recíproca, inversa y contrarrecíproca

Existen otras proposiciones relacionadas con la implicación $p \to q$, las cuales se definen a continuación.

VARIACIONES DE LA CONDICIONAL

Dada la condicional $p \to q$, se definen:

1. La *recíproca:* $q \to p$
2. La *inversa:* $\sim p \to \sim q$
3. La *contrarrecíproca* (*o contraposición*): $\sim q \to \sim p$

EJEMPLO 6 Sean p: Este animal es un ave.
q: Este animal tiene alas.
Dada $p \to q$, escribir su recíproca, su inversa y su contrarrecíproca.

Solución

PROPOSICIÓN: Si este animal es un ave, entonces tiene alas.
RECÍPROCA: Si este animal tiene alas, entonces es un ave.
INVERSA: Si este animal no es un ave, entonces no tiene alas.
CONTRARRECÍPROCA: Si este animal no tiene alas, entonces no es un ave. □

No es necesario que la proposición original sea de la forma $p \to q$, y el antecedente o el consecuente pueden ser cualquier proposición. Cuando se escribe la recíproca, la inversa, o la contrarrecíproca, puede resultar una doble negación. En este caso esta última se debe reemplazar por la proposición original, utilizando la ley de la doble negación.

EJEMPLO 7 Dada $p \to \sim \omega$, escribir su recíproca, su inversa y su contrarrecíproca

Solución

RECÍPROCA: $\sim q \to p$
INVERSA: $\sim p \to q$
CONTRARRECÍPROCA: $q \to (\sim p)$ □

EJEMPLO 8 Dada $\sim p \to \sim q$, escribir su recíproca, su inversa y su contrarrecíproca.

Solución RECÍPROCA: $\sim q \to (\sim p)$
INVERSA: $p \to q$

CONTRARRECÍPROCA: $q \to p$ □

No todas estas proposiciones son equivalentes en significado, como se puede ver considerando el Ejemplo 9.

EJEMPLO 9 Escribir la recíproca, la inversa y la contrarrecíproca de la proposición: Si es un Oldsmobile, entonces es un automóvil.

Solución Sean p: Es un Oldsmobile.
q: Es un automóvil.

Entonces la proposición dada se escribe $p \to q$

RECÍPROCA: $q \to p$: Si es un automóvil, entonces es un Oldsmobile.

INVERSA: $\sim p \to (\sim q)$: Si no es un Oldsmobile, entonces no es un automóvil.

CONTRARRECÍPROCA: $\sim q \to (\sim p)$: Si no es un automóvil, entonces no es un Oldsmobile. Esta es una proposición verdadera, *siempre que* la proposición original sea verdadera. □

El Ejemplo 9 ilustra que la recíproca de una proposición verdadera no es necesariamente verdadera. Puede serlo, pero no es necesario que lo sea. Obsérvese en la Tabla 8 que la contrarrecíproca y la proposición directa siempre tienen el mismo valor de verdad, tal como sucede con la recíproca y la inversa. Por consiguiente una implicación puede ser siempre reemplazada por su contrarrecíproca, sin afectar su veracidad o falsedad.

Tabla 8 TABLA DE VERDAD DE LA RECÍPROCA, LA INVERSA Y LA CONTRARRECÍPROCADE UNA PROPOSICIÓN DADA

p	q	$\sim p$	$\sim q$	Proposición $p \to q$	Recíproca $q \to p$	Inversa $\sim p \to (\sim q)$	Contrarrecíproca $\sim q \to (\sim p)$
T	T	F	F	T	T	T	T
T	F	F	T	F	T	T	F
F	T	T	F	T	F	F	T
F	F	T	T	T	T	T	T

LEY DE LA CONTRARRECÍPROCA

> Una proposición puede ser reemplazada por su contrarrecíproca sin que se afecte su valor de verdad.

EJEMPLO 10 Sean p: Juan obedece la ley.
q: Juan va a la cárcel.

PROPOSICION: Si Juan obedece la ley, entonces no va a la cárcel.

La proposición $p \to (\sim q)$ puede ser reemplazada por su contrarrecíproca, $q \to (\sim p)$, en cualquier expresión lógica.

CONTRARRECÍPROCA: Si Juan va a la cárcel, entonces no obedece la ley.

La proposición *no puede* ser reemplazada por la recíproca o la inversa.

RECÍPROCA: Si Juan no va a la cárcel, entonces obedece la ley.

INVERSA: Si Juan no obedece la ley, entonces va a la cárcel. □

3.3 CONJUNTO DE PROBLEMAS 3

A

Traduzca las oraciones de los problemas 1-14 a la forma si—entonces (en lenguaje común) y luego a la forma simbólica. Asegúrese de indicar las literales que utilice para cada proposición simple.

1. Tendrás éxito solamente si aprecias la opinión de los demás.
2. Iré el sábado si me pagan.
3. Todo le sucede a todo mundo tarde o temprano si hay tiempo suficiente. (G. B. Shaw)
4. Todo trabajo es noble. (Thomas Carlyle)
5. $| f(x) - L | < \varepsilon$ siempre que $| x - a | < \delta$.
6. La presencia del oxígeno es necesaria para la combustión.
7. La combustión es una condición suficiente para la presencia del oxígeno.
8. Juan es razonable sólo si sabe todos los hechos.
9. No somos débiles si hacemos uso apropiado de los medios que el Dios de la Naturaleza ha puesto bajo nuestro dominio. (Patrick Henry)
10. $x < 5$ siempre que x sea no negativo.
11. $y^2 = 4$ es una condición necesaria para que $y = 2$.
12. Para que un polígono sea cuadrado, es necesario que sea rectángulo.
13. Todos los triángulos son polígonos.
14. Todos los números primos mayores que 2 son primos impares.

Examinando la veracidad de las proposiciones simples, determine si cada una de las proposiciones compuestas de los problemas 15-19 es verdadera.

15. Si $7 + 9 = 16$, entonces $16 - 9 = 7$.

16. Si $(-2)(-3) = -6$ entonces $(2)(3) = -6$.
17. Tu eres millonario sólo si el ratón Mickey tiene menos de 65 años.
18. $15 + 3 = 18$, si $72 - (-10) = 82$.
19. $3 \times 5 = 15$, si $58 - (-8) = 50$.

En los Problemas 20-24, sean

p: Te gustan las matemáticas.
q: Te gusta este libro.

Traduzca cada una de las siguientes proposiciones al lenguaje común.

20. $p \rightarrow q$
21. $\sim p \vee q$
22. $\sim q \rightarrow (\sim p)$
23. $[p \vee (\sim p)] \rightarrow q$
24. $\sim p \rightarrow q$

Escriba la tabla de verdad de cada proposición de los Problemas 25-37.

25. $p \rightarrow (\sim p \rightarrow p)$
26. $(p \vee q) \vee [p \wedge (\sim q)]$
27. $(p \wedge q) \wedge [p \rightarrow (\sim q)]$
28. $(p \wedge q) \rightarrow p$
29. $(p \rightarrow p) \rightarrow [q \rightarrow (\sim q)]$
30. $\sim p \rightarrow [\sim (p \wedge q)]$
31. $(p \rightarrow q) \rightarrow [\sim q \rightarrow (\sim p)]$
32. $(p \wedge q) \rightarrow (p \vee q)$
33. $(p \rightarrow q) \rightarrow [(p \vee q) \rightarrow q]$
34. $[(p \rightarrow q) \rightarrow p] \rightarrow (p \rightarrow q)$
35. $[(p \rightarrow q) \rightarrow r] \rightarrow [(q \rightarrow p) \rightarrow r]$
36. $[p \vee (\sim p \wedge q)] \rightarrow (p \vee q)$
37. $(p \vee q) \rightarrow [p \vee (\sim p \wedge q)]$

Escriba la recíproca, la inversa y la contrarrecíproca de cada proposición de los Problemas 38-46.

38. Si quebrantas la ley, entonces vas a la cárcel.
39. Si p, entonces q.
40. $\sim p \rightarrow (\sim q)$
41. El sol brilla sólo si estás feliz.
42. Si tu automóvil no tiene aire acondicionado, no tendrás amigos.
43. Iré el sábado, si me pagan.
44. Si los deseos fueran caballos, entonces los mendigos cabalgarán.
45. Si te cepillas los dientes con el dentrífico Sonrisas, tendrás entonces menos caries.
46. Tus nietos no sobrevivirán si no detenemos la contaminación del ambiente.

La siguiente proposición fue hallada en el cuestionario de residencia del sistema de la Universidad Estatal de California:

"Llene y presente este cuestionario de residencia sólo si su respuesta al artículo 34a de la parte A fue distinta a 'California' o su respuesta al artículo 37 fue 'no'."

Los Problemas 47-51 se refieren a esta proposición.

47. Escriba la proposición en forma simbólica.
48. ¿Están correctamente formuladas las instrucciones del cuestionario?
49. Expresemos con otras palabras la proposición inicial en la forma "Si su respuesta al artículo 34a de la parte A fue distinta a 'California' o su respuesta al artículo 37 'no', entonces llene y presente este cuestionario de residencia". Traduzca esta proposición a la forma simbólica.
50. Continuación del Problema 49. Las dos siguientes preguntas determinan si el cuestionario de residencia debe llenarse.

		Respuestas	
Pregunta 34a:	¿Nació usted en California	Si	No
Pregunta 37:		Si	No

Hay solamente cuatro respuestas posibles a las dos preguntas; enúncielas. Empleando la proposición simbólica del Problema 49 elabore una tabla de verdad donde p sea verdadera si la respuesta de la pregunta 34a es "si", y falsa si es "no"; y q sea verdadera si la respuesta a la pregunta 37 es "si", y falsa si es "no".

51. Continuación de los Problemas 49-50. Exprese de nuevo (en lenguaje común) la proposición del cuestionario de residencia, de manera que resulte más sencillo decidir si se llena o no la forma.

CAPÍTULO 4

OPERADORES ADICIONALES

4.1 La Bicondicional

En el Cap. 3 se tuvo especial cuidado en señalar que una proposición $p \rightarrow q$ y su recíproca $q \rightarrow p$ no tienen los mismos valores de verdad. Sin embargo, puede suceder que $p \rightarrow q$ *y también* $q \rightarrow p$. En este caso se escribe

$$p \leftrightarrow q$$

y al conectivo se le llama **bicondicional.** Para determinar los valores de verdad de la proposición bicondicional, se debe construir la tabla de verdad de $(p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow p)$.

p	q	$p \rightarrow q$	$q \rightarrow p$	$(p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow p)$
T	T	T	T	T
T	F	F	T	F
F	T	T	F	F
F	F	T	T	T

Esto lleva a definir la bicondicional de manera que sea verdadera sólo cuando ambas p y q sean verdaderas, o cuando ambas p y q *sean falsas (esto es, siempre que tengan* valores de verdad iguales). Lo anterior se ilustra en la Tabla 9.

Tabla 9
DEFINICIÓN DE LA BICONDICIONAL

p	q	$p \leftrightarrow q$
T	T	T
T	F	F
F	T	F
F	F	T

En matemáticas, $p \leftrightarrow q$ se traduce de varias maneras, todas las cuales tienen el mismo significado:

TRADUCCIONES DE LA BICONDICIONAL

1. p sí y sólo si q
2. q sí y sólo si p
3. Si p, entonces q, y recíprocamente
4. Si q, entonces p, y recíprocamente
5. p es una condición necesaria y suficiente para q
6. p es una condición necesaria y suficiente para p

EJEMPLO 1 Reexpresar lo siguiente en una sola proposición:

1. Si un polígono tiene tres lados, entonces es un triángulo.
2. Si un polígono es un triángulo, entonces tiene tres lados.

Solución Un polígono es un triángulo *sí y sólo si* tiene tres lados. □

Existe otra forma de denotar la bicondicional. Si dos proposiciones tienen iguales valores de verdad, decimos que son equivalentes. Nótese que $p \leftrightarrow q$ es verdadera siempre que ambas p y q tengan valores de verdad iguales. De manera que agregamos a la lista otra forma de escribir la bicondicional:

EQUIVALENCIA Si p y q tiene valores de verdad iguales, se dice que p es equivalente a q y se escribe $p \leftrightarrow q$.

EJEMPLO 2 Demostrar que $p \rightarrow q$ es equivalente a $\sim p \vee q$.

Solución Para establecer la equivalencia, se debe demostrar que $(p \rightarrow q) \leftrightarrow (\sim p \vee q)$ es siempre verdadera.

p	q	$p \rightarrow q$	$\sim p$	$\sim p \vee q$	$(p \rightarrow q) \leftrightarrow (\sim p \vee q)$
T	T	T	F	T	T
T	F	F	F	F	T
F	T	T	T	T	T
F	F	T	T	T	T

Puesto que el resultado muestra que todos los valores obtenidos son T (verdaderos), se expresa que las dos proposiciones son equivalentes. □

4.2 Operadores diversos

Ocasionalmente se hallan otros conectivos que también requieren definiciones precisas. Se les define en términos de los conectivos anteriores, como se indica en la Tabla 10.

Tabla 10 OPERADORES DIVERSOS

Conectivo	Definición	Comentarios
O p o q	$(p \vee q) \wedge [\sim (p \wedge q)$	Esta es la *o excluyente* considerada anteriormente, que dice que p ocurre o q ocurre, pero *no ambas*.
Ni p ni q	$\sim p \wedge (\sim q)$	Ni p ni tampoco q.
p a menos que q	$\sim q \rightarrow p$	*Esto expresa desde luego que* p a menos que q. Si q no ocurre, entonces p ocurrirá.
p debido a que q	$q \rightarrow p$	*Esta es la recíproca de la proposición* $p \rightarrow q$. Significa que q implica p.
Ningún p es q	$p \rightarrow (\sim q)$	Esto expresa que, si p, entonces no puede ser q.

La tabla de verdad de cada uno de estos nuevos conectivos se muestra en la Tabla 11.

Tabla 11 TABLA DE VERDAD DE LOS OPERADORES ADICIONALES

p	q	O p o q $(p \vee q) \wedge [(p \wedge q)]$	Ni p ni q $\sim p \wedge (\sim q)$	p a menos que q $\sim q \rightarrow p$	p debido a que q $q \rightarrow p$	Ningún p es q $p \rightarrow (\sim q)$
T	T	F	F	T	T	F
T	F	T	F	T	T	T
F	T	T	F	T	F	T
F	F	F	T	F	T	T

4.3 CONJUNTO DE PROBLEMAS 4

En los Problemas 1-6 escriba cada par de proposiciones dadas como una proposición, empleando el conectivo apropiado.

EJEMPLO 3

i. Si el señor Casimiro Plata esta en condiciones de comprar un coche nuevo, entonces puede costeárselo.
ii. Si el señor Casimiro Plata puede costearse un coche nuevo, entonces puede comprarlo.

Solución El señor Plata puede comprar un coche nuevo si y sólo si puede costeárselo. □

1. i. Si Δ ABC es un triángulo rectángulo, entonces $a^2 + b^2 = c^2$.
   ii. Si $a^2 + b^2 = c^2$, entonces Δ ABC es un triángulo rectángulo.
2. i Si el fiscal puede probar la culpabilidad de Octavio, entonces el juez lo sentencia.
   ii. Si el juez sentencia a Octavio, entonces el fiscal puede probar su culpabilidad.
3. i Si $x \times y = 0$, entonces $x = 0$ o $y = 0$.
   ii. Si $x = 0$ o $y = 0$, entonces $x \times y = 0$.
4. i. Si P es un número primo, entonces es un número natural que tiene exactamente dos divisores.
   ii. Si P es un número natural que tiene exactamente dos divisores, entonces es un número primo.
5. i. Si Estados Unidos desarrolla armas estratégicas importantes, entonces Rusia hará lo mismo.
   ii. Si Rusia desarrolla armas estratégicas importantes, entonces Estados Unidos hará lo mismo.
6. i. Si un triángulo es equilátero, entonces es equiángulo.
   ii. Si un triángulo es equiángulo, entonces es equilátero.

Escriba cada una de las oraciones de los Problemas 7-11 en forma simbólica, donde p: Este problema se puede resolver; y q: A Rogelio le agrada este problema.

7. A Rogelio le agrada este problema, a menos que no se pueda resolver.
8. A Rogelio no le agrada este problema, porque no se puede resolver.
9. No es cierto que este problema se puede resolver y a Rogelio le agrade este problema.
10. Este problema no se puede resolver y a Rogelio le agrada este problema.
11. Si este problema se puede resolver, entonces a Rogelio le agrada este problema y este problema se puede resolver; por lo tanto a Rogelio le agrada este problema.

Traduzca las proposiciones simbólicas de los Problemas 12-16 al lenguaje común. Sean p y q definidas como en los problemas 7-11.

12. $p \rightarrow q$
13. $q \rightarrow p$
14. $\sim q \wedge (\sim q)$
15. $(p \vee q) \wedge [\sim (\sim p \wedge q)]$
16. $[(p \rightarrow q) \wedge (\sim q)] \rightarrow (\sim p)$
17. Usando tablas de verdad, demuestre que $(p \rightarrow q)$ es equivalente a $(\sim p \vee q)$.
18. Usando tablas de verdad, demuestre que $[p \rightarrow (\sim p)]$ *es equivalente a* $[\sim p \vee (\sim q)]$.

Determine el valor de verdad de cada proposición de los Problemas 19-21.

19. $6 \times 9 = 15$ sí y sólo si el hombre caminó sobre la Luna.
20. $7 \times 5 = 35$ sí y sólo si el agua corre cuesta arriba.
21. $\sim p \leftrightarrow (p \vee q)$ cuando p es T (verdadera) y q es F (falsa).
22. Verifique los resultados de la Tabla 11 para el conectivo *a menos que* empleando la definición dada en la Tabla 10.
23. Verifique los resultados de la Tabla 11 para el conectivo *ni...ni* empleando la definición dada en la Tabla 10.

24. Verifique los resultados de la Tabla 11 para el conectivo *o...o* empleando la definición dada en la Tabla 10.
25. Un operador un poco menos conocido llamado *raya de Sheffer* se expresa "$p|q$" y se define por $\sim p \vee (\sim q)$. Construya una tabla de verdad para $p|q$.
26. Todos los demás conectivos se pueden definir en términos del operador raya de Sheffer (véase el Problema 25). Escriba *y*, *o* y *no* en términos del operador raya de Sheffer.

Traduzca las proposiciones de los Problemas 23-37 a la forma simbólica.

27. $x = 10$ sí y sólo si $2x = 20$.
28. $3x - 2 = 11$ es equivalente a $x = 3$.
29. Ni fumar ni beber es bueno para la salud.
30. No compraré una casa nueva a menos que todas las condiciones de venta estén claramente entendidas.
31. Ningún hombre es isla.
32. Una condición necesaria y suficiente para que una función sea diferenciable es que sea continua.
33. No puedo ir contigo, porque tengo un compromiso previo.
34. O invierto mi dinero en acciones o lo pongo en una cuenta de ahorros.
35. Si un triángulo tiene dos lados iguales, entonces es isósceles y recíprocamente.
36. Nadie que haya reído alguna vez sincera y totalmente puede ser incorregiblemente malo. (Thomas Carlyle)
37. Desde un punto de vista moral, una revolución se justifica si por la mera fuerza de la superioridad numérica una mayoría privara a una minoría de cualquier derecho constitucional claramente establecido. (Abraham Lincoln)
38. Indique cuáles de las siguientes proposiciones son equivalentes a la proposición

Si Heriberto gana el concurso, entonces hizo trampa.

(Suponga que "Heriberto es honrado" equivale a "Heriberto no es tramposo".)

a. Heriberto gana el concurso y es tramposo.
b. Heriberto, una persona honrada, no ganó el concurso.
c. Si Heriberto es honrado entonces no ganó el concurso.
d. No es cierto que: Heriberto gana o es tramposo.
e. Si Heriberto es tramposo, entonces gana el concurso.

39. Indique cuáles de las siguientes proposiciones son equivalentes a la proposición

Si Irma es culpable, entonces estuvo en el escenario del crimen.

(Suponga que "Irma no es culpable" equivale a "Irma es inocente").

a. Si Irma estuvo en el escenario del crimen, entonces es inocente.
b. Irma es inocente o estuvo en el escenario del crimen.
c. Si Irma no estuvo en el escenario del crimen, entonces es inocente.
d. Si Irma estuvo en el escenario del crimen, entonces es culpable.
e. Irma es culpable y no estuvo en el escenario del crimen.
f. Si Irma es inocente, entonces no estuvo en el escenario del crimen.

CAPÍTULO 5

TAUTOLOGÍAS

5.1 Definición

Muchas proposiciones en lógica simbólica son siempre verdaderas. Por ejemplo, la proposición compuesta

$$p \vee (\sim p)$$

es siempre verdadera, sin importar el valor de verdad de p. Las proposiciones que son siempre verdaderas se llaman tautologías.

TAUTOLOGÍA Una **tautología** es una proposición que es verdadera en todos los casos de su tabla de verdad.

Para probar que una proposición dada es una tautología se construye su tabla de verdad y se verifica que la última columna (que representa a la proposición dada) consta solamente de valores T o verdaderos. Si aparece aunque sea un valor F, no se trata de una tautología. Si todos los valores de la última columna son F, la proposición dada se llama **contradicción.**

EJEMPLO 1 Demostrar que $(p \wedge q) \vee [p \rightarrow (\sim q)]$ es una tautología.

Solución Se construye la tabla de verdad.

p	q	$p \wedge q$	$\sim q$	$p \rightarrow \sim q$	$(p \wedge q) \vee [p \rightarrow (\sim q)]$
T	T	T	F	F	T
T	F	F	T	T	T
F	T	F	F	T	T
F	F	F	T	T	T

De esta manera, la proposición es una tautología, ya que es verdadera en todos los casos de su tabla de verdad. □

EJEMPLO 2 Es $(p \vee q) \rightarrow (\sim q \rightarrow p)$ es una tautología?

Solución Se construye la tabla de verdad.

p	q	$p \vee q$	$\sim q$	$\sim q \rightarrow p$	$(p \vee q) \rightarrow (\sim q \rightarrow p)$
T	T	T	F	T	T
T	F	T	T	T	T
F	T	T	F	T	T
F	F	F	T	F	T

□

Así que sí es una tautología.

5.2 Implicación

Si una condicional es tautología, como en el Ejemplo 2, entonces se llama **implicación** y se simboliza por $\Rightarrow$. Esto es, el Ejemplo 2 se puede escribir

$$(p \vee q) \Rightarrow (\sim q \Leftrightarrow p)$$

El símbolo de implicación $p \Rightarrow q$ se pronuncia "p implica q".
Una proposición bicondicional, $p \leftrightarrow q$ que es también tautología se llama **equivalencia lógica**, se escribe $p \Leftrightarrow q$ y se lee "p es lógicamente equivalente a q".

EJEMPLO 3 Demostrar que $(p \rightarrow q) \Leftrightarrow [\sim p \wedge (\sim q)]$.

Solución Se construye la tabla de verdad.

p	q	$p \rightarrow q$	$\sim q$	$p \wedge (\sim q)$	$\sim [\ \wedge (\sim q)]$	$(p \rightarrow q) \leftrightarrow [\sim p \wedge (\sim q)]$
T	T	T	F	F	T	T
T	F	F	T	T	F	T
F	T	T	F	F	T	T
F	F	T	T	F	T	T

Puesto que todas las posibilidades son verdaderas, es una equivalencia lógica y se escribe

$$(p \rightarrow q) \Leftrightarrow [\sim p \wedge (\sim q)].$$ □

Nótese la diferencia entre los símbolos $\rightarrow$ y $\Rightarrow$, lo mismo que entre $\leftrightarrow$ y $\Leftrightarrow$. La condicional ($\rightarrow$) y la bicondicional ($\leftrightarrow$) se usan como conectivos lógicos, y el valor de verdad para estos casos puede ser verdadero o falso. Si, como consecuencia de las proposiciones que se conectan, las tablas de verdad proporcionan *solamente valores verdaderos*, entonces se emplean los símbolos $\Rightarrow$ y $\Leftrightarrow$ en vez de $\rightarrow$ y $\leftrightarrow$, y se les llama implicación ($\Rightarrow$) o equivalencia lógica ($\Leftrightarrow$), respectivamente.

5.3 Leyes de la lógica

Las tautologías son muy importantes en lógica y matemáticas. En lo que resta de esta sección consideraremos ocho tautologías, o leyes de la lógica; el lector debe familiarizarse con ellas de manera que pueda referirse a cada una por su nombre. Estas leyes formarán la base sobre la cual se pueden fundar ciertos métodos de demostración que son importantes en lógica y matemáticas. Primeramente enumeraremos las ocho tautologías, y luego se considerará y probará cada una de ellas.

TAUTOLOGÍA	FORMA SIMBÓLICA
1. Tautología trivial	1. $p \Leftrightarrow p$
2. Ley de la doble negación	2. $p \Leftrightarrow \sim(\sim p)$
3. Ley del medio excluído	$p \vee \sim \cancel{q}$ p
4. Razonamiento directo	$[(p \rightarrow q) \wedge p] \Rightarrow q$
5. Razonamiento indirecto	5. $(p \rightarrow q) \wedge \sim q] \Rightarrow \sim p$
6. Ley de transitividad	$[(p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow r)] \Rightarrow (p \rightarrow r)$
7. Ley de la contrarrecíproca	$(p \rightarrow q) \Leftrightarrow (\sim q \rightarrow \sim p)$
8. Silogismo disyuntivo	$[(p \vee q) \wedge \sim p] \Rightarrow$

5.4 La tautología trivial, $p \Leftrightarrow p$

La tautología trivial establece que cualquier proposición es equivalente a sí misma. La demostración se da por medio de una tabla de verdad:

p	$p \leftrightarrow p$
T	T
F	T

Puesto que la última columna contiene solamente valores T, el resultado queda probado.

5.5 Ley de la doble negación, $p \Leftrightarrow \sim (\sim p)$

En el Cap. 2 se demostró que $\sim (\sim p)$ podía ser reemplazada por p sin afectar los valores de verdad de las proposiciones involucradas. Probaremos ahora la tautología repitiendo la tabla de verdad de p y $\sim (\sim p)$ dada en el Cap. 2.

p	$\sim p$	$\sim (\sim p)$	$p \leftrightarrow \sim (\sim p)$
T	F	T	T
F	T	F	T

LEY DE LA DOBLE NEGACIÓN

$p \leftrightarrow [\sim(\sim p)]$

EJEMPLO 4 Sea *p:* Ello es concebible.

Ello es concebible. $\leftrightarrow$ Ello no es inconcebible. □

5.6 Ley del medio excluído, $p \vee (\sim p)$

Esta tautología dice que cualquier proposición es o verdadera o falsa. La demostración se da por medio de la tabla de verdad siguiente:

p	$\sim p$	$p \vee (\sim p)$
T	F	T
F	T	T

EJEMPLO 5 Sea *p:* Alberto es culpable

Alberto es culpable, o Alberto no es culpable.

LEY DEL MEDIO EXCLUIDO

$p \wedge \sim p$

5.7 Razonamiento directo, $[(p \rightarrow q) \wedge p] \Rightarrow q$

Este razonamiento se conoce también con el nombre de *modus ponens,* con el de *ley de separación,* o razonamiento de *suposición del antecedente.* Dado que esta tautología es un poco más complicada, comenzaremos por considerar el ejemplo siguiente:

$p \rightarrow q$ Si Alvaro obtien la máxima calificación en el examen final, entonces pasará el curso

p Alvaro obtiene la máxima calificación en el examen final.

$\therefore \cancel{p}\ q$ Por lo tanto Alvaro pasa el curso.

Recuérdese de la geometría que $\therefore$ es un antiguo símbolo que se emplea para representar la frase *por lo tanto. El argumento anterior consta de dos* **premisas,** o **hipótesis,** y una **conclusión.** El argumento es válido si

$$[(p \rightarrow q) \wedge p] \rightarrow q$$

es una tautología. Por medio de la Tabla 12, se puede ver que el argumento resulta válido.

Tabla 12 DEMOSTRACIÓN DE LA LEY DE RAZONAMIENTO DIRECTO

p	q	$p \rightarrow q$	$(p \rightarrow q) \wedge p$	$[(p \rightarrow q) \wedge p] \rightarrow q$
T	T	T	T	T
T	F	F	F	T
F	T	T	F	T
F	F	T	F	T

El modelo del razonamiento directo es muy importante y se debe memorizar. Se ilustra como sigue.

RAZONAMIENTO DIRECTO

Premisa mayor:	$p \rightarrow q$
Premisa menor:	p
Conclusión:	$\therefore \cancel{p}\ q$

EJEMPLO 6 Si Víctor juega ajedrez, entonces es inteligente.
Víctor juega ajedrez.

Por lo tanto, Víctor es inteligente.

Si Judith es una persona lógica, entonces entenderá este ejemplo.
Judith es una persona lógica.

Por lo tanto, Judith entiende este ejemplo.

Decimos que estos argumentos son válidos, puesto que se identifican como ejemplos de razonamiento directo. □

5.8 Razonamiento indirecto, $[(p \rightarrow q) \wedge (\sim q)] \Rightarrow (\sim p)$

Este razonamiento también se llama *modus tollens o* razonamiento de *negación del consecuente.* El ejemplo que sigue ilustra lo que llamamos razonamiento indirecto.

$p \rightarrow q$ Si Alvaro obtiene la máxima calificación en el examen final, entonces pasa el curso.

$\sim q$ Alvaro no pasa el curso.

$\therefore \sim p$ Por lo tanto, Alvaro no obtiene la máxima calificación en el examen final.

Se puede razonar como sigue: $\sim p$ debe ser verdadera, ya que si fuera falsa, entonces p sería verdadera; pero si p es verdadera, entonces q es verdadera; esto es imposible debido a la premisa menor. La forma simbólica del argumento debe ser memorizada.

RAZONAMIENTO INDIRECTO

Premisa mayor:	$p \rightarrow q$
Premisa menor:	$\sim p$
Conclusión:	$\therefore \sim p$

Se puede probar la tautología considerando la tabla de verdad (véase la Tabla 13).

Tabla 13
DEMOSTRACIÓN DE LA LEY DE RAZONAMIENTO INDIRECTO

p	q	$(p \rightarrow q)$	$\sim q$	$(p \rightarrow q) \wedge \sim q$	$\sim p$	$[(p \rightarrow q) \wedge \sim q] \rightarrow \sim p$
T	T	T	F	F	F	T
T	F	F	T	F	F	T
F	T	T	F	F	T	T
F	F	T	T	T	T	T

EJEMPLO 7 Si el gato atrapa al ratón, entonces el ratón toma el queso.
El ratón no toma el queso.

Por lo tanto, el gato no atrapa al ratón.

Si Alvaro obtiene la máxima calificación en ese examen, entonces yo soy Napoleón.
Yo no soy Napoleón.

Por lo tanto, Alvaro no obtiene la máxima calificación en ese examen. □

5.9 Ley de transitividad, $[(p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow r)] \Rightarrow (p \rightarrow r)$

Esta tautología nos permite considerar cadenas de razonamiento más largas y complicadas. La demostración se deja al lector.

LEY DE TRANSITIVIDAD

$p \rightarrow q$
$q \rightarrow r$
$\therefore p \rightarrow r$

EJEMPLO 8 Sean p: Linda asiste a clases.
q: Linda pasará el curso.
r: Linda se graduará.

Si Linda asiste a clases, entonces pasará el curso.
Si Linda pasa el curso, entonces se graduará.

Por lo tanto, si Linda asiste a clases, entonces se graduará. □

La transitividad se puede extender de manera que queden conectadas en cadena varias proposiciones de la forma si—entonces. Por ejemplo, podríamos continuar:

Si Linda se gradúa, entonces obtendrá un buen empleo.
Si Linda obtiene un buen empleo, entonces se relacionará con personas importantes.
Si Linda se relaciona con personas importantes, entonces llegará a ser muy conocida.

Por lo tanto, si Linda asiste a clases, entonces llegará a ser muy conocida.

Recuérdese el famoso grito del rey en la escena culminante del drama *Ricardo III:*

"Por falta de un clavo se perdió un reino". Aquí se empleó este tipo de razonamiento para concluir: "Si pierdo un clavo, entonces perderé un reino."

5.10 Ley de la contrarrecíproca, $(p \rightarrow q) \Leftrightarrow (\sim q \rightarrow \sim p)$

En la Secc. 3.2 se demostró que una proposición podía ser reemplazada siempre por su contrarrecíproca sin afectar su veracidad o falsedad. (Los valores de verdad se muestran en la Tabla 8, de la página 19).

En la siguiente proposición simbólica, podemos reemplazar cualquier elemento de una columna con el correspondiente elemento de la otra columna, y no afectar la veracidad o falsedad del argumento.

LEY DE LA CONTRARRECÍPROCA (O CONTRAPOSICIÓN)

Columna 1	*Columna 2*
$p \rightarrow q$	$\sim q \rightarrow \sim p$
$p \rightarrow \sim q$	$q \rightarrow \sim p$
$\sim p \rightarrow q$	$\sim q \rightarrow p$
$\sim p \rightarrow \sim q$	$q \rightarrow p$

5.11 Silogismo disyuntivo, $[(p \vee q) \wedge (\sim p)] \Rightarrow q$

Supóngase que se sabe que $p \vee q$ es verdadera. Supóngase además, que posteriormente se averigua que p es falsa (esto es $\sim p$ es verdadera). ¿Qué se puede decir acerca de q? Esta pregunta se responde por medio de lo que se llama silogismo disyuntivo.

SILOGISMO DISYUNTIVO

$p \vee q$
$\sim p$
$\therefore q$

Esto se puede probar empleando una tabla de verdad (véase la Tabla 14).

Tabla 14
DEMOSTRACIÓN DEL SILOGISMO DISYUNTIVO

p	q	$p \vee q$	$\sim q$	$(p \vee q \wedge (\sim p)$	$[(p \vee q) \wedge (\sim p)] \rightarrow q$
T	T	T	F	F	T
T	F	T	F	F	T
F	T	T	T	T	T
F	F	F	T	F	T

EJEMPLO 9 Sean p: El gran premio se encuentra detrás de la puerta 1.
q: El gran premio se encuentra detrás de la puerta 2.

El gran premio se encuentra detrás de la puerta 1 o de la puerta 2.
El gran premio no está detrás de la puerta 1.

Por lo tanto el gran premio está detrás de la puerta 2. □

5.12 CONJUNTO DE PROBLEMAS 5

1. Escriba la tautología trivial y explíquela con sus propias palabras.
2. Escriba la ley de la doble negación y explíquela con sus propias palabras.
3. Escriba la ley del medio excluído y explíquela con sus propias palabras.
4. Escriba el razonamiento directo y explíquelo con sus propias palabras.
5. Escriba el razonamiento indirecto y explíquelo con sus palabras.
6. Escriba la ley de transitividad y explíquela con sus propias palabras.
7. Escriba la ley de contraposición y explíquela con sus propias palabras.
8. Escriba el silogismo disyuntivo y explíquelo con sus propias palabras.

Cada uno de los casos de los Problemas 9-33 ilustra una de las tautologías consideradas en este capítulo. Mencione la tautología que se aplica.

9. Si Octavio va a la iglesia o templo, entonces canta himnos. Por lo tanto, si Octavio no canta himnos, entonces no va a la iglesia.
10. Una rosa es una rosa.
11. O voy o no voy.
12. Si 2 divide a un entero positivo N, entonces N es par. Se tiene que N no es par. Por lo tanto, 2 no divide a N.
13. "A nadie le desagrada Sara Lemus"; por lo tanto "a todo mundo le agrada Sara Lemus".
14. Si el alumno Santiago hace desorden, entonces no aprende matemáticas. Santiago aprende matemáticas, por lo tanto no hace desorden.
15. $x > 0$ o $x > 0$.
16. Si ello no es imposible, entonces es posible.
17. Si Rafael es inteligente, entonces está al tanto de algunas injusticias sociales en nuestra sociedad. Si Rafael está al tanto de algunas injusticias sociales en nuestra sociedad, entonces tiene la obligación de tratar de corregir dichas injusticias. Por lo tanto, si Rafael es inteligente, entonces tiene la obligación de tratar de corregir injusticias sociales.

18. Si Javier estudia duro, entonces obtiene la máxima calificación. Javier estudia duro. Por lo tanto Javier obtiene la máxima calificación.
19. Un buen negocio es un buen negocio.
20. Voy a ingresar al club de matemáticas o ir a trabajar. No ingreso al club de matemáticas. Por lo tanto iré a trabajar.
21. Si Juan tiene una demostración de la conjetura de Goldbach, entonces yo soy tío de un mono. Yo no soy tío de un mono. Por lo tanto Juan no tiene una demostración de la conjetura de Goldbach.
22. Roberto corta el césped el viernes o el sábado. Roberto no corta el césped el viernes. Por lo tanto Roberto corta el césped el sábado.
23. Si el coche se descompuso, entonces no fuimos de vacaciones. Por lo tanto, si fuimos de vacaciones, entonces el coche no se descompuso.
24. Si a^2 es par, entonces a debe ser par. Se tiene que a es impar. (Considérese que "a es impar" = "a no es par"). Por lo tanto a^2 es impar.
25. El tesoro se encuentra en la esquina norte o en el sector oriental. El tesoro no se encuentra en el sector oriental. Por lo tanto el tesoro se encuentra en la esquina norte.
26. Si ello no es inverosímil, entonces es verosímil.
27. Si es un sabro, entonces es un fripo. Si es un fripo, entonces es feo. Por lo tanto, si es un sabro, entonces es feo.
28. Si es un sabro, entonces es un fripo. Por lo tanto si no es un fripo, entonces no es un sabro.
29. Si recibo una herencia de un millón de pesos, le compraré una galleta a Carlitos. Recibo una herencia de un millón de pesos. Por lo tanto le compraré una galleta a Carlitos.
30. Si la zorra veloz salta sobre el perro lento, entonces se tropieza. Por lo tanto, si la zorra veloz no se tropieza, entonces no salta sobre el perro lento.
31. El hombre es justo o injusto.
32. Suficiente es suficiente.
33. Están detenidos Juan o Gregorio. Gregorio no está detenido. Por lo tanto Juan está detenido.

Construya una tabla de verdad para los Problemas 34-42. Estas son leyes de lógica muy conocidas.

34. Ley de transitividad.
35. Ley de De Morgan: $\sim (p \wedge q) \Leftrightarrow [\sim p \vee (\sim q)]$
36. Ley de De Morgan: $\sim (p \vee q) \Leftrightarrow [\sim p \wedge (\sim q)]$
37. Ley de contradicción: $\sim [p \wedge (\sim p)]$
38. Ley de implicación y disyunción: $(p \rightarrow q) \Leftrightarrow (\sim p \vee q)$
39. Propiedad idempotente: $(p \wedge p) \Leftrightarrow p$
40. Propiedad idempotente: $(p \vee p) \Leftrightarrow p$
41. Ley de reducción: $[p \vee (p \wedge q)] \Leftrightarrow p$
42. Ley de reducción: $[p \wedge (p \vee q)] \Leftrightarrow p$

CAPÍTULO 6

FALACIAS LÓGICAS

6.1 Validez

La lógica simbólica se ocupa de analizar *argumentos válidos;* no nos puede decir si la información contenida en una hipótesis es verdadera o falsa. Los términos *válido* y *no válido* se refieren a la forma del argumento, no a la veracidad o falsedad de las proposiciones. Un argumento válido afirma que la conclusión se deduce de la hipótesis de acuerdo con una o más tautologías. En el capítulo anterior estudiamos algunas de las tautologías más comunes.

Podemos tener la seguridad de que, *si* aquello con lo que se empieza es verdadero (o se supone verdadero), entonces, —sabiendo cómo aplicar las tautologías—, se obtendrán conclusiones correctas. Esto es, es imposible partir de premisas verdaderas y obtener una conclusión falsa utilizando las reglas apropiadas de la lógica. El punto importante a recordar es que la veracidad o falsedad de las premisas y la conclusión no determinan la **validez** del argumento.

A veces se presentan *argumentos no válidos.* En lo que resta de este capítulo, consideraremos algunos argumentos no válidos comunes, o sea *falacias lógicas.*

6.2 Falacia de afirmación del consecuente

EJEMPLO 1 Analizar la validez del argumento siguiente:

Si una persona lee el periódico *Times,* entonces está bien informada.
Esta persona está bien informada.
___
Por lo tanto esta persona lee el *Times.*

Solución Este argumento tiene la forma siguiente:

$$\begin{array}{l} p \rightarrow q \\ \underline{q\quad\quad} \\ \therefore p \end{array}$$

Considerando la tabla de verdad asociada, se puede analizar la validez del argumento:

p	q	$p \to q$	$(p \to q) \wedge q$	$[(p \to q) \wedge q] \to p$
T	T	T	T	T
T	F	F	F	T
F	T	T	T	F
F	F	T	F	T

Vemos que el resultado no siempre es verdadero; así que el argumento no es válido (o bien, no es válido). □

Si $p \to q$ se reemplazara por $q \to q$, el argumento del ejemplo anterior sería válido. Esto es, el argumento sería válido si la proposición directa y la recíproca tuvieran iguales valores de verdad, lo cual no sucede en general. Por esta razón el argumento se llama a veces **falacia de la recíproca.**

A menudo se puede demostrar que un argumento dado es no válido hallando un **contraejemplo.** En el ejemplo anterior se obtuvo encontró un contraejemplo examinando la tabla de verdad. El valor presente en el tercer renglón es falso, así que puede demostrarse que el argumento es falso en el caso en el que p sea falsa y q verdadera. En términos de este ejemplo, podría ser que una persona nunca leyera el periódico *Times* (p falsa) y todavía estar bien informada leyendo el periódico *Tribune* (q verdadera).

EJEMPLO 2 Analizar la validez del argumento siguiente.

Si una persona es drogadicta, entonces fuma marihuana.
Esta persona fuma marihuana.

Por lo tanto esta persona es drogadicta.

Solución Puesto que este argumento es de la misma forma que el primer ejemplo, vemos que corresponde a un caso de razonamiento no válido. □

6.3 Falacia de negación del antecedente

Consideremos el argumento siguiente:

Si una persona lee el periódico *Times*, entonces está bien informada.
Esta persona no lee el *Times*.

Por lo tanto esta persona no está bien informada.

Como hemos visto, una persona que lea el *Tribune* podría estar bien informada también. Esta línea de razonamiento se llama **falacia de negación del antecedente** (a veces denominada también **falacia de la inversa**). **La tabla de verdad de**

$$[(p \to q) \wedge (\sim p)] \to (\sim q)$$

muestra que la falacia de negación del antecedente no es válida. (La tabla de verdad se deja como ejercicio). □

EJEMPLO 3 Analizar la validez del argumento siguiente.

Si una persona va a la universidad, llegará a ganar mucho dinero.
Tú no vas a la universidad

Por lo tanto, tú no llegarás a ganar mucho dinero.

Solución Este argumento tiene la forma siguiente:

$$\begin{array}{l} p \to q \\ \underline{\sim p} \\ \therefore \sim q \end{array}$$

Vemos que tal razonamiento corresponde a la falacia de negación del antecedente. □

6.4 Esquema de cadena falso

En ciertas regiones, se tiene la creencia de que las tormentas ocasionan que la leche se agrie o corte. Tal creencia es un ejemplo de la falacia que llamaremos **esquema de cadena falso.** Se puede ilustrar como sigue:

El clima cálido y húmedo favorece las tormentas.
El clima cálido y húmedo favorece el crecimiento de bacterias, lo que ocasiona que la leche se agrie o corte.

Por lo tanto las tormentas ocasionan que la leche se corte.

El esquema de cadena falsa se ilustra mediante

$$\begin{array}{l} p \to q \\ \underline{p \to r} \\ \therefore p \to r \end{array}$$

y se puede probar que es válido construyendo una tabla de verdad apropiada.

Los tres tipos de falacias comunes que hemos considerado se pueden resumir como sigue:

Falacia de afirmación del consecuente	*Falacia de negación del antecedente*	*Esquema de cadena falso*
$p \to q$	$p \to q$	$p \to q$
q	$\sim p$	$p \to r$
$\therefore p$	$\therefore \sim q$	$\therefore q \to r$

Estúdiense estas falacias y obsérvese cómo difieren de las tautologías del capítulo anterior.

6.5 CONJUNTO DE PROBLEMAS 6

1. Construyendo una tabla de verdad, demuestre que

$$[(p \rightarrow q) \wedge (p \rightarrow r)] \rightarrow (q \rightarrow r)$$

es un argumento no válido. ¿Cómo se llama esta falacia?

2. Pruebe que $[(p \rightarrow q) \wedge \sim p] \rightarrow \sim q$ es un argumento no válido. ¿Cómo se llama esta falacia?

En los Problemas 3-18, analice la validez de cada uno de los argumentos siguientes. En caso de no ser válido alguno, determine el error en el razonamiento.

3. Si el congreso asigna los fondos, el proyecto se puede llevar a cabo.
El congreso asigna los fondos.
Por lo tanto el proyecto se puede llevar a cabo.

4. Si Alicia bebe de la botella que dice "veneno", enfermará.
Alicia bebe de una botella que no dice "veneno".
Por lo tanto no enfermará.

5. Las acciones ficha azul son una inversión segura.
Las acciones que pagan una tasa de interés alta son inversiones seguras.
Por lo tanto las acciones ficha azul pagan una tasa de interés alta.

6. Si el país construye un sistema antimisiles, sus principales ciudades estarán protegidas contra posibles ataques.
El país no construye un sistema antimisiles.
Por lo tanto, las principales ciudades no estarán protegidas contra un posible ataque.

7. Si Alberto entiende lógica, entonces disfruta de esta clase de problemas.
Alberto no entiende lógica.
Por lo tanto, Alberto no disfruta de esta clase de problemas.

8. Si Alberto entiende un problema, entonces es un problema sencillo.
Este problema no es sencillo.
Por lo tanto Alberto no entiende este problema.

9. Si no obtengo un aumento de sueldo, renunciaré.
No obtengo un aumento de sueldo
Por lo tanto renunciaré.

10. María tiene un corderito o un gran oso.
María no tiene un gran oso.
Por lo tanto María tiene un corderito.

11. Si $2x - 4 = 0$, entonces $x = 2$.
$x \neq 2$
Por lo tanto $2x - 4 \neq 0$.

12. Si Toño come el cereal Palín, entonces tiene "energía extra".
Toño tiene "energía extra".
Por lo tanto Toño come el cereal Palín.

13. Si Rogelio utiliza el lubricante Resbalín, entonces su auto funciona bien.
El auto de Rogelio funciona bien.
Por lo tanto Rogelio utiliza el lubricante Resbaladín.

14. Si llenas el tanque de combustible, obtienes un lavado de coche gratis.
Llenas el tanque de combustible.
Por lo tanto obtienes un lavado de coche gratis.

15. Si los 49s de San Francisco pierden, entonces los Vaqueros de Dallas ganan.
Si los Vaqueros de Dallas ganan, entonces irán al Super Tazón.
Por lo tanto si los 49s de San Francisco pierden, entonces los Vaqueros de Dallas irán al Super Tazón.

16. Si Rosita utiliza la crema dental Sonrisas, entonces tiene pocas caries.
Por lo tanto, si Rosita tiene pocas caries, entonces utiliza la crema dental Sonrisas.

17. (Para este argumento suponga que x es un entero y y es un entero distinto de cero).
Si Q es un número racional, entonces $Q = x/y$, donde x/y es una fracción reducida.
$Q \neq x/y$ es una fracción reducida.
Por lo tanto, Q no es un número racional.

18. Si el crimen ocurrió después de las 4:00 AM, entonces Sánchez no pudo haberlo cometido.
Si el crimen ocurrió a las 4:00 AM o antes, entonces Gómez no pudo haberlo cometido.
El crimen involucra a dos personas, si Gómez no lo cometió.
Por lo tanto, si Sánchez cometió el crimen, el crimen involucra a dos personas.

CAPÍTULO 7

CUANTIFICADORES Y CÍRCULOS DE EULER (DIAGRAMA DE VENN)

7.1 Cuantificadores universal y existencial

Hasta ahora hemos estado considerando solamente la inferencia lógica de la estructura de proposiciones que son clasificadas como verdaderas o falsas. Sin embargo, en matemáticas se requiere a veces considerar tres tipos de frases o expresiones: (1) verdaderas, (2) falsas y (3) indistintas o abiertas. En seguida se proporcionan ejemplos de cada uno de estos tipos.

1. Expresiones verdaderas
   - **a.** $2 + 3 = 5$
   - **b.** $6 < q$
   - **c.** George Washington fue el primer presidente de Estados Unidos.
2. Expresiones falsas
   - **a.** $2 + 3 = 9$
   - **b.** $5 < 2$
   - **c.** Alfred E. Newman fue el primer presidente de Estados Unidos.
3. Expresiones abiertas o indistintas
   - **a.** $2x^2 + 3x = 5$
   - **b.** $5y < 20$
   - **c.** El fue el primer presidente de Estados Unidos.

Vemos que estas expresiones abiertas pueden ser verdaderas o falsas, dependiendo de las sustituciones que se hagan para *x*, *y* y *él*, mientras que las oraciones verdaderas deben ser *siempre verdaderas y las oraciones falsas deben ser siempre* falsas.

Se desea aplicar ahora el estudio de la lógica a las expresiones abiertas. Para este fin debemos restringir o *cuantificar* la variable (x, y o *él* en los ejemplos anteriores), diciendo que la expresión es verdadera para todos o algunos de sus valores posibles.

Por ejemplo, $2x - 3x = 5x$ es una expresión abierta que es verdadera para todos los valores posibles de x; así que tal expresión abierta se cambia por una verdadera diciendo

Para todo x, $2x + 3x = 5x$.