PROF. EN MATEMÁTICA
Profesores: Lagraña C. - Moreno A.

Álgebra II

Trabajo Práctico N^o 1
Trigonometría

Terminología: si un observador está viendo un objeto, entonces la recta que va de sus ojos al objeto se llama **línea de visión** (ver figura 1). Si el objeto que es observado está arriba de la horizontal, entonces el ángulo entre la línea de visión y la horizontal recibe el nombre de **ángulo de elevación**; si está debajo de la horizontal, entonces el ángulo entre la línea de visión y la horizontal se denomina **ángulo de depresión**. En muchos casos prácticos, los ángulos de elevación y de depresión se dan para un observador hipotético al nivel del suelo. Si la línea de visión sigue un objeto físico, por ejemplo un plano inclinado o una ladera, usamos el término **ángulo de inclinación**.

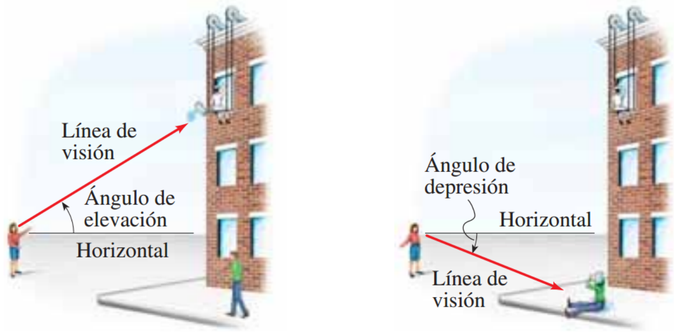


Figura 1: Referencia de los términos usados comúnmente en los problemas de trigonometría.

Ejercicios:

1. Expresar los siguientes ángulos en el sistema circular:

   a) $30°12'14''$
   b) $57°32''$
   c) $110^g 3^m 55^s$
   d) $37^g 7^s$

2. Expresar los siguientes ángulos en el sistema sexagesimal:

   a) $\frac{12}{9}\pi$
   b) $4,5\pi$
   c) $46^g 3^m$
   d) $410^g 65^s$

3. Expresar los siguientes ángulos en el sistema centesimal:

   a) $\frac{5}{3}\pi$
   b) $\frac{\pi}{30}$
   c) $47°36''$
   d) $40'22''$

4. Se sabe que la diagonal del cuadrado mide 7 cm. ¿Cuál es la longitud del lado?.

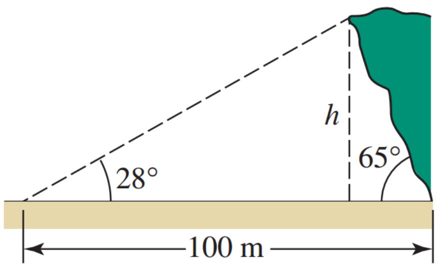


Figura 2: Problema del alcantilado.

5. Calcular el perímetro y el área del triángulo isósceles ABC en el que se sabe que: $\overline{AB} = \overline{BC}$, $\overline{AC} = 24cm$ y $h = 5cm$ es la altura correspondiente al vértice B.

6. La hipotenusa de un triángulo rectángulo mide 10 cm y uno de los catetos mide el triple que el otro. (a) ¿Cuánto miden los catetos? (b) Calcular el área.

7. Un campo de fútbol tiene una portería que mide 7.32 m de ancho. Si la distancia de la portería a la esquina del campo (corner) es de 10 m y desde esta esquina caminamos por la banda lateral del campo 20 m, calcula el valor que tiene que tener el ángulo para que al golpear al balón, en línea recta, entre en el interior de la portería.

8. Un topógrafo está a 100 m de la base de un acantilado volado, y mide un ángulo de elevación de 28° desde su lugar hasta la parte superior del acantilado. Vea la figura 2. Si el acantilado forma un ángulo de 65° con la horizontal, calcule su altura h.

9. Se lanza un cohete desde el nivel del piso, con un ángulo de elevación de 43°. Si el cohete hace blanco en un avión autómata que vuela a 20 000 pies de altura, calcule la distancia horizontal entre el sitio de lanzamiento y el punto directamente abajo del avión cuando es tocado. ¿Cuál es la distancia en línea recta entre el lugar de lanzamiento y el avión?

10. El ángulo entre dos lados de un paralelogramo es de 40°. Si las longitudes de los lados son 5 y 10 cm, calcule las longitudes de las dos diagonales.

11. Desde un punto en el suelo a 500 pies de la base de un edificio, un observador encuentra que el ángulo de elevación a lo alto del edificio es 24° y que el ángulo de elevación a lo alto de una astabandera que está en el edificio es de 27° (ver figura 3). Encuentre la altura del edificio y la longitud de la astabandera.

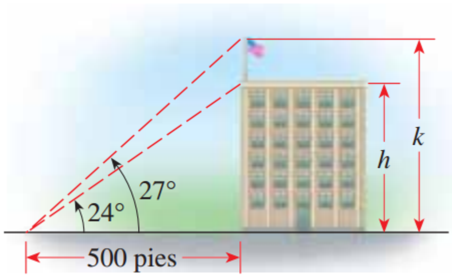


Figura 3: Problema del edificio con una bandera.

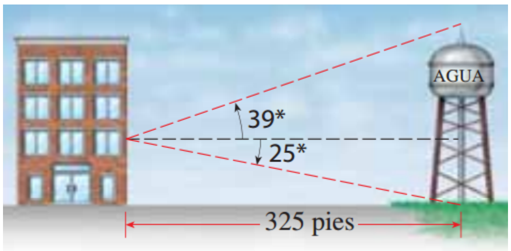


Figura 4: Problema del tanque de agua.

12. Desde lo alto de un faro de 200 pies, el ángulo de depresión a un barco en el océano es de 23°. ¿A qué distancia está el barco desde la base del faro?

13. Una torre de agua está situada a 325 pies de un edificio (vea la figura 4). Desde una ventana del edificio, un observador ve que el ángulo de elevación a la parte superior de la torre es 39° y que el ángulo de depresión de la parte inferior de la torre es 25°. ¿Cuál es la altura de la torre? ¿Cuál es la altura de la ventana?

14. Un globo de aire caliente está flotando sobre una carretera recta. Para estimar la altura a la que se encuentran los tripulantes del globo, éstos simultáneamente miden el ángulo de depresión a dos señalamientos consecutivos de kilometraje situados en la carretera, en el mismo lado del globo. Se encuentra que los ángulos de depresión son 20° y 22°. ¿A qué altura está el globo?

15. Un ángulo central determina un arco de 6 cm en una circunferencia de 30 cm de radio. Expresar el ángulo central θ en radianes y en grados.

16. Una vía férrea ha de describir un arco de circunferencia. ¿Qué radio hay que utilizar si la vía tiene que cambiar su dirección en 25° en un recorrido de 120 m?

17. Trace un triángulo que tenga ángulo agudo θ, y encuentre las otras cinco relaciones trigonométricas de θ.

    a) $\sin\theta = \frac{3}{5}$
    b) $\cot\theta = 1$
    c) $\sec\theta = \frac{7}{2}$
    d) $\cos\theta = \frac{9}{40}$
    e) $\tan\theta = \sqrt{3}$
    f) $\csc\theta = \frac{13}{12}$

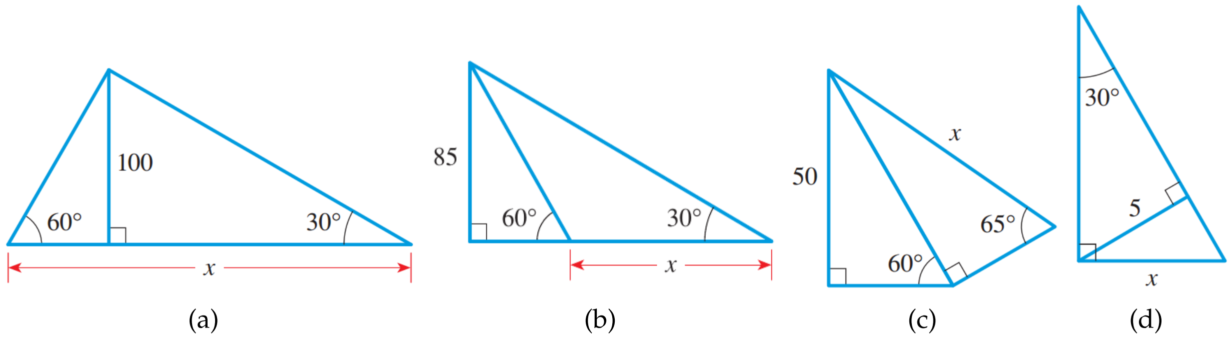
18. En un círculo trigonométrico, señalar los segmentos trigonométricos de cada uno de los siguientes ángulos:

    a) $60°$
    b) $150°$
    c) $210°$
    d) $330°$

19. Evalúe la expresión sin usar calculadora.

    a) $\sin\frac{\pi}{6} + \cos\frac{\pi}{6}$
    b) $\sin 30° \cdot \csc 30°$
    c) $\sin 30° \cdot \cos 60° + \sin 60° \cdot \cos 30°$
    d) $(\sin 60°)^2 + (\cos 60°)^2$
    e) $(\cos 30°)^2 - (\sin 30°)^2$
    f) $\left(\sin\frac{\pi}{3} \cdot \cos\frac{\pi}{4} - \sin\frac{\pi}{4} \cdot \cos\frac{\pi}{3}\right)$

20. Encuentre "x" redondeada a un lugar decimal.



21. Calcular:

   a) $\cos 1230° \cdot \tan(-1500°)$
   b) $\sin 760° \cdot \csc 750°$
   c) $\sin 1440° / \cos -777°$
   d) $(\tan -315°)^2$

22. Encontrar los valores de:

   a) $\sin\theta$ y $\cos\theta$, dada la $\tan\theta = -\frac{3}{4}$
   b) $\sin\theta$, sabiendo que $\cos\theta = -\frac{4}{5}$ y $\tan\theta > 0$.

23. Demostrar que cuando θ es un ángulo del segundo cuadrante, tal que $\tan\theta = -2/3$, entonces:

   a) $\dfrac{\sin(90° - \theta) - \cos(180° - \theta)}{\tan(270° + \theta) + \cot(360° - \theta)} = -\dfrac{2}{\sqrt{13}}$
   b) $\dfrac{\tan(90° + \theta) + \cos(180° + \theta)}{\sin(270° - \theta) - \cot(-\theta)} = \dfrac{2 + \sqrt{13}}{2 - \sqrt{13}}$

24. Demostrar las siguientes identidades trigonométricas:

   a) $(1 + \tan^2\beta) \cdot \cos^2\beta = 1$
   b) $\cos^2\phi - \sin^2\phi = 2\cos^2\phi - 1$
   c) $\sin\theta + \cos\theta = \dfrac{\cos\theta}{1 - \tan\theta} + \dfrac{\sin\theta}{1 - \cot\theta}$
   d) $1 - 2\sin^2 x = 2\cos^2 x - 1$
   e) $(1 - \cos^2\phi) \cdot (1 + \cot^2\phi) = 1$
   f) $\dfrac{\sec x \cdot \csc x}{\tan x + \cot x} = 1$
   g) $(\sec^2\beta)^{-1} + (\csc^2\beta)^{-1} = 1$
   h) $\dfrac{\sin\alpha}{1 + \cos\alpha} + \dfrac{1 + \cos\alpha}{\sin\alpha} = 2\csc\alpha$
   i) $\tan^2\alpha \cdot \csc^2\alpha \cot^2\alpha \cdot \sin^2\alpha = 1$
   j) $\dfrac{\sin x + \tan x}{\cot x + \csc x} = \sin x \cdot \tan x$

25. Resolver las siguientes ecuaciones para $x \in [0, 2\pi[$:

   a) $\sin x + \cos x = 0$
   b) $3\sin^2 x + \cos^2 x = 2$
   c) $\sin x + 2\cos x = 1$
   d) $\sin^2 x + \tan^2 x = 0$
   e) $2\sin x + \sqrt{3}\tan x = 0$
   f) $\sin^4 x - \cos^4 x = 1/2$

g) $\sin 2x + \cos x = 0$

h) $\tan x - \sin 2x = 0$

i) $\tan\left(\frac{\pi}{4} - x\right) + \tan x - 1 = 0$

j) $\sin(x+30°) + \cos(x+60°) = 1 + \cos 2x$

26. Un edificio está al lado de una colina que baja formando un ángulo de 15° (ver figura 5). El Sol está sobre la colina, y desde el edificio tiene un ángulo de elevación de 42°. Calcular la altura del edificio, si su sombra mide 36 pies de longitud.

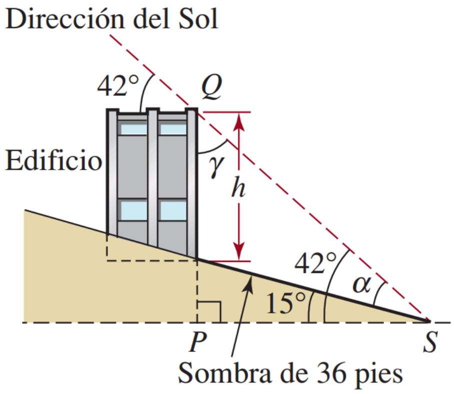


Figura 5: Problema del edificio en la colina.

27. Dos puntos, A y B, están en las orillas opuestas de un río. Otro punto, C, está en la misma orilla del río que B, a una distancia de 230 pies de él. Si el ángulo ABC es de 105° y el ángulo ACB es de 20°, calcule la distancia de A a B a través del río.

28. Los ángulos de elevación hacia un avión se miden desde la parte superior y la base de un edificio que tiene 20 m de altura. El ángulo desde la azotea es de 38°, y desde la base es de 40°. Calcule la altitud del avión.

29. Dos torres vigía están situadas en las cumbres de las montañas A y B, a 4 millas de distancia. Un equipo de bomberos en helicóptero está en un valle en el punto C, a 3 millas de A y a 2 millas de B. Usando la línea entre A y B como referencia, un vigía ve un incendio en un ángulo de 40° de la torre A, y a 82° de la torre B. Véase la figura 6. ¿A qué ángulo, medido a partir de $\overline{CB}$, debe volar el helicóptero para dirigirse hacia el incendio?

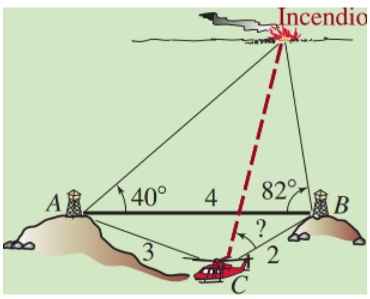


Figura 6: Problema del incendio.

30. Use la ley de cosenos para derivar la fórmula de Herón

$$A = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$$

del área de un triángulo con lados de longitud a, b, c y $s = \frac{a+b+c}{2}$.

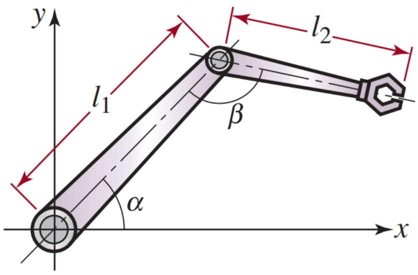


Figura 7: Problema del brazo del robot

31. Un brazo robótico bidimensional "sabe"dónde está, porque mantiene registro del ángulo α de su "hombroz del ángulo β de su "codo". Como se ve en la figura 7, este brazo tiene un punto fijo de rotación en el origen. El ángulo del hombro se mide en sentido contrario al de las manecillas del reloj a partir del eje x, y el ángulo del codo se mide en sentido contrario al de las manecillas del reloj, desde el brazo hasta el antebrazo. Suponga que el brazo y el antebrazo tienen 2 de longitud, y que el ángulo β del codo no puede "dislocarse"más allá de 180°. Calcule los ángulos α y β que pongan la mano del robot en el punto $(1, 2)$.

32. Construir las gráficas de las siguientes funciones:

    a) $y = \sin 2x$
    b) $y = \cos 0{,}5x$
    c) $y = 3\sin 2x$
    d) $y = \cos(3x - 1)$
    e) $y = \sin(2x + \pi/4)$
    f) $y = \sin x + \cos x$
    g) $y = 2\sin(\frac{1}{2}x - \frac{\pi}{4})$

33. Evaluar:

    a) $\cos(\arcsin 3/5)$
    b) $\sin(\arccos(-2/3))$
    c) $\tan(\arctan(-3/4))$
    d) $\cos(\arcsin 3/5)$

34. Demostrar que:

    a) $\arcsin \frac{1}{\sqrt{5}} + \arcsin \frac{2}{\sqrt{5}} = \frac{\pi}{2}$
    b) $\arctan \frac{1}{2} + \arctan \frac{1}{5} + \arctan \frac{1}{8} = \frac{\pi}{4}$