TRABAJO PRÁCTICO Nº6: DERIVADAS

1. Determinar la razón de cambio promedio de la función f(x)=3x+1 en el intervalo [3;7]
2. La siguiente tabla exhibe la posición de un ciclista.

t (en segundos)	0	1	2	3	4	5
d (en metros)	0	1,4	5,1	10,7	17,7	25,8

   a) Hallar la velocidad promedio para los intervalos: i) [1;3] ii) [2;5]

   b) Utilizar el gráfico de d como una función del tiempo (t) para estimar la velocidad instantánea cuando t=3 s.
3. Si se lanza una pelota al aire con una velocidad de 40pies/s, su altura en pies, después de t segundos, se expresa por $y = 40t - 16t^2$.
   a) Encontrar la velocidad promedio para el periodo que se inicia cuando t=2 y dura 0,5s.
   b) Determinar la velocidad instantánea cuando t=2.
4. El costo (en dólares) de producir x unidades de cierto artículo es: $C(x) = 5000 + 10x + 0{,}05x^2$

   a) Hallar la razón de cambio promedio de C con respecto a x, cuando se cambia el nivel de producción: i) de x= 100 a x=105 ii) de x=100 a x=101

   b) Encontrar la razón de cambio instantánea de C con respecto a x cuando x=100 (conocida como costo marginal).
5. Encontrar la función derivada de las siguientes funciones en el punto a través de la definición de derivada:
   a) $f(x) = 3 - 2x + 4x^2$ b) $f(x) = \frac{2x+1}{x+3}$ c) $f(x) = x^4 - 5x$
   d) $f(x) = \frac{x^2+1}{x-2}$ e) $f(x) = \sqrt{3x+1}$ f) $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x+2}}$
6. Analizar si existe la derivada de las siguientes funciones en el punto indicado.
   a) $f(x) = \begin{cases} x\ sen\left(\frac{1}{x}\right) & si\ x \neq 0 \\ 0 & si\ x = 0 \end{cases}$ en x=0 b) $f(x) = |x - 6\,|$ en x=6
   c) $f(x) = \sqrt[3]{(x+1)^2}$ en x=-1
7. Derivar aplicando reglas
   a) $y = -\pi + x^2$ b) $y = 5x^4 - \sqrt[3]{x^2} + \frac{1}{x^5}$ c) $y = 3x \cdot sen\ x$
   d) $y = \sqrt{x} \cdot \ln x$ e) $y = \frac{\tan x}{\ln x}$
8. Determinar los valores de a y b para la función $h(x) = \begin{cases} x^3 - x & si\ x < 0 \\ ax + b & si\ x \geq 0 \end{cases}$ se continua y derivable en x=0
9. Derivar las siguientes funciones compuestas.
   a) $y = cos^{-2}(x^3)$ b) $y = \sqrt[5]{cosx}$ c) $y = \sqrt{x \cdot \ln(7x)}$ d) $y = ln\left(\sqrt{3x} - \frac{1}{2}x^2\right)$
   e) $y = tg[x^2 \cdot (8 - 5x)^{-1}]$ f) $y = \sqrt{\frac{\cos x - 1}{sen\ x}}$ g) $y = \left(\frac{3x^{-2}}{e^x - 9}\right)^4$
   h) $y = ln\left[\frac{5x - x^2}{\sqrt{10x}}\right] + \tan(2x + 7)$ i) $y = \sqrt{\frac{1 - sen\ x}{1 + sen\ x}}$ j) $y = \cos\left(\frac{x+1}{2x-1}\right)$

10. Aplicar el método de derivación logarítmica

a) $y = e^{(x^2+3)}$ b) $y = x^{\sqrt{x}}$ c) $y = [sen\ (5x)]^{cosx}$ e) $y = \frac{e^{\left(-\frac{5x}{2}\right)}}{x^2}$

f) $y = x^3 \cdot (2x-1)^{(-3x)}$

11. Encontrar las derivadas de las siguientes funciones a través de sus funciones inversas.

a) $y = arc\,cos\,x$ b) $y = arc\,tg\,x$ c) $y = Arg\,Sh\,x$ d) $y = \sqrt{2x+5}$

12. a) Encontrar las derivadas segundas de las funciones:

a.1) $f(x) = 3sen(5x)$ a.2) $g(x) = \sqrt{x^2 - 3}$

b) Hallar la derivada de tercer orden de $f(x) = 3x^3 + 7x^2 - 5x + 4$

c) Dada la función $f(x) = \ln\left(\frac{x}{4}\right)$, hallar la derivada de orden cuatro

13. Aplicaciones físicas de la derivada:

I) El espacio recorrido por un móvil viene dado por la función $e(t) = 3t^2 - t + 1$. El espacio se mide en metros y el tiempo en segundos.

a) Hallar la ecuación de la velocidad

b) ¿Cuál es la velocidad al inicio del recorrido? ¿y para t=2,5s?

c) Encontrar la ecuación de la aceleración

14. Aplicaciones geométricas de la derivada:

a) Calcular los puntos en que la tangente a la curva $y = x^3 - 3x^2 - 9x + 5$ es paralela al eje OX.

b) Se ha trazado una recta tangente a la curva y= x3, cuya pendiente es 3 y pasa por el punto (0,–2). Hallar el punto de tangencia.

c) Hallar los puntos de la curva $f(x) = x^4 + 7x^3 + 13x^2 + x + 1$, para los cuales la recta tangente a ella forma un ángulo de 45º con el eje de abscisas.

15. Encontrar las derivadas de las siguientes funciones dadas de manera implícitas.

a) $x^2 + xy = 1$ b) $y^2 = x\sqrt{x^2+1}$ c) $x^2 = \frac{x-y}{x+y}$ d) $e^x \sin y + e^y \cos x = 1$

e) $\tan(2x - 5y) = \sqrt{3x} + y^4$ f) $\operatorname{sen}(x - 2y) = \cos(3x + y^2)$

16. Hallar las derivadas de las siguientes funciones paramétricas.

a) $f(t) = \begin{cases} x = e^t \\ y = 2e^{-t} \end{cases}$ b) $f(t) = \begin{cases} x = sen(2t) \\ y = \cos(t^3) \end{cases}$ c) $f(t) = \begin{cases} x = 8\cos^3 t \\ y = 8sen^3 t \end{cases}$

Ejercicios Complementarios

1. El tamaño de una población de un centro minero al tiempo t (medido en años), está dado por la función: $P(t) = 1000 + 100\,t - 120\,t^2$. Determinar la tasa de crecimiento promedio entre los tiempos t y (t+Δt).

2. Un estanque de cría de peces que ha sido atacado por una enfermedad y la cantidad de peces muertos en función al tiempo (en semanas) viene dada por la expresión: $N(t) = 400(t-4)^2$. Calcular la tasa de mortalidad en el instante t_0=3,5 semanas

3. Sean f y g dos funciones cualesquiera derivables en x = 0. Sabiendo que: $f(0)=2$, $g(0)=1$, $f'(0)=1$ y $g'(0)=0$, determinar: $(g-f)'(0)=2$, $(f \cdot g)'(0)$ y $\left(\frac{1}{4}f\right)(0)=2$

4. Analizar la derivabilidad de las siguientes funciones en el punto indicado.

   a) $y = |x-2|$ en x=2   b) $y = x^{2/3}$ en x=0   c) $y = \begin{cases} -x & x<0 \\ x^2 & x \geq 0 \end{cases}$ en x=0

5. Derivar aplicando reglas:

   a) $h(t) = t^2 - \frac{4}{t^3}$ b) $y = \frac{4x^3+3x^2}{x}$ c) $y = \frac{x^3(3x^2+4)}{x^2}$ d) $y = x(x^2+1)$

   e) $y = 2\sqrt{x} - \frac{5}{6}\sqrt[3]{x}$ f) $y = 5\sqrt{x} + 5\cos x$ g) $y = (x^2+2x)(x+1)$

   h) $y = x^3 \cdot \operatorname{tg} x$ i) $y = \sqrt{x}(x^2-1)$ j) $y = \sec x \cdot (x^2+1)$ k) $y = \frac{sen\ x}{x^2}$

6. Analizar la derivabilidad de las siguientes funciones, indicando en qué puntos no son derivables y explicar por qué.

   a) $y = \frac{x}{|x|}$ b) $f(x) = \begin{cases} -7{,}5x + 4{,}5 & si\ x \leq 4 \\ x^2 - 1 & si\ x \geq 4 \end{cases}$

7. Derivar las siguientes funciones compuestas.

   a) $y = sen^{-1}(x)$ b) $y = \ln(3x-2)$ c) $y = (x^2 - 2x^3 + 5)^4$

   d) $y = ln\left[\frac{(4x+7)^3}{\sqrt{2x-1}}\right]$ e) $y = tg\left(\frac{x^2}{2x+1}\right)$ f) $y = \sqrt[3]{sen\ x}$ g) $y = ctg(3-7x)$

   h) $y = \cos\left(\frac{x+1}{2x-1}\right)$ i) $y = \ln\left(\frac{x-e^2}{3x^2}\right)$ j) $y = [\ln(3x)]^5$ k) $y = \sqrt[4]{x^2-2x+3}$

   l) $y = (3x^4 + x - 2)^{-3}$ m) $y = \ln[\cos(x^5+3x)]$ n) y = $x^3 \tan^2(5x)$ ñ) y = $\frac{e^{x^3}\text{sen x}}{3x^2-1}$

   o) y= $\sqrt{x+\sqrt{x}}$ p) y = $\sqrt{2x+1} \cdot \sqrt[3]{3x-1}$ q) y = $\sec\frac{x^2+1}{x^2-1}$ r) y = cos ($6x^2$ + 1)

8. La función $f(t) = 70\left(t^{1/3}+1\right)$, donde f(t) se mide en cantidad de personas y t en horas representa la forma en que propaga una noticia. Calcular la velocidad con que se está propagando la misma, a las dos horas desde el inicio del evento.

9. Hallar la función derivada de cada una de las siguientes funciones y redúzcala a la mínima expresión:

   a) f(x) = $\sqrt{\frac{x+3}{x+2}}$ b) f(x) = $\frac{3x+8}{(2x+4)^2}$

10. Utilizar derivación logarítmica para hallar las derivadas de las siguientes funciones:

a) y = $3+e^{2x}$ b) y = $(sen x)^{(\cos x+1)}$ c) y = $(\ln x)^{x^2+3}$

11. Halle las derivadas de las siguientes funciones a través de sus inversas:

    a) y = $\sqrt{5x}$ b) y = $arc\,sen\,x$ c) y = $Arg\,Ch\,x$

12. a) Dada la función y = 2x2 – 3 x3 + 4x, halle su derivada de cuarto orden.

    b) Halle la derivada de orden tres de la función y = sen (πx)

    c) Halle la función derivada segunda de las siguientes funciones: i) $y=(x+3)^3$ ii) $y=\sqrt{x^5-5}$

13. Calculen los valores de a, b, c y d en f(x) = ax^3+bx^2+cx+d si se verifica que f(0) = 4, f´(0) = 2, f´´(0) = -3 y f´´´(0) = 8.

14. Encontrar la pendiente de la recta tangente a la gráfica de la función en el punto dado.

    a) f(x) = 3 – 5x en (–1; 8) b) g(x) = x^2 – 9 en (2; –5)

15. Se bombea gas a un globo esférico a razón de 6m3/min. Si la presión se mantiene constante. ¿Cuál es la velocidad con la que cambia el radio del globo cuando el diámetro mide 120 cm?