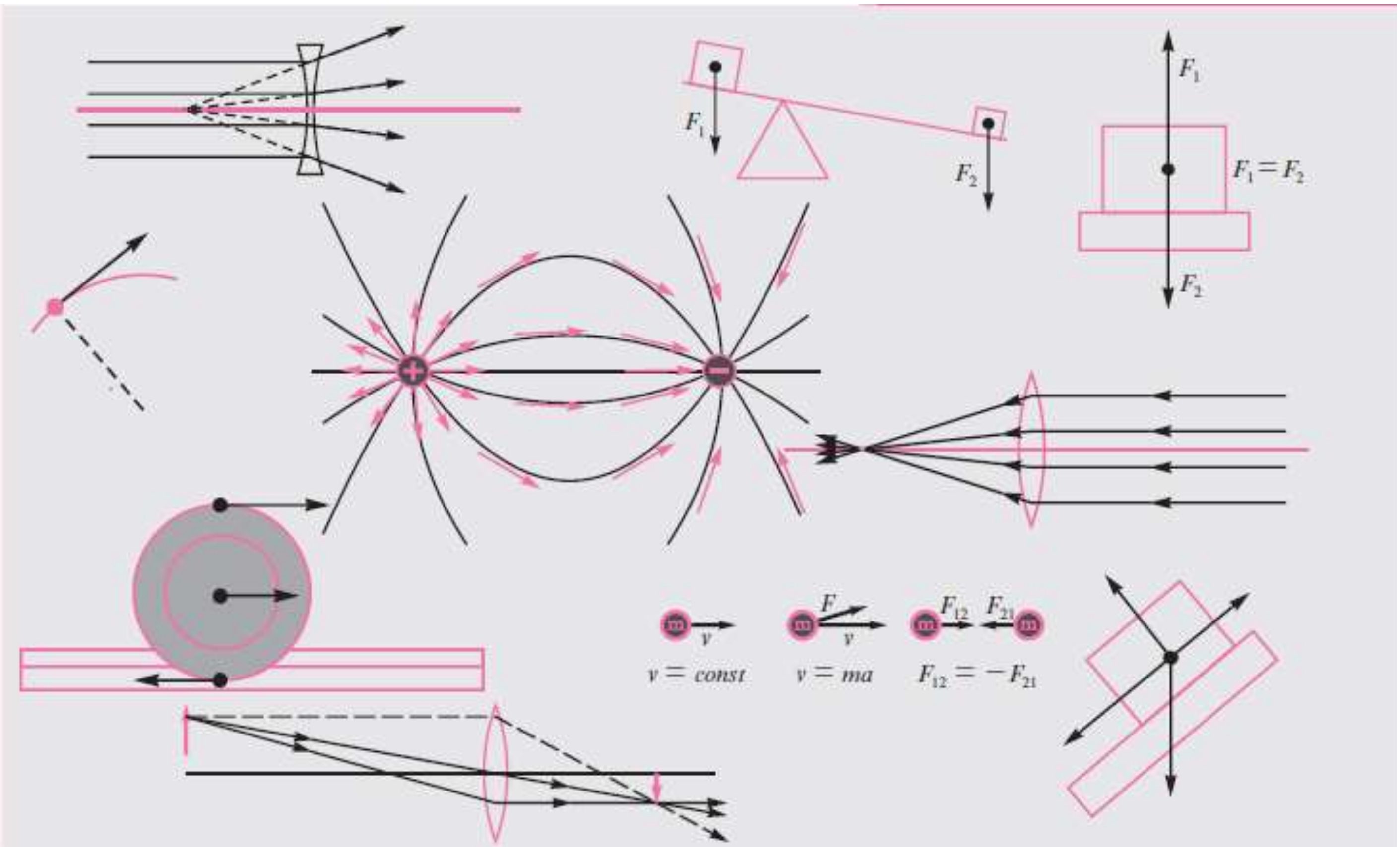
Vectores



▲ Los vectores en dos y tres dimensiones se emplean en todos los ámbitos de la física para representar diversos fenómenos en disciplinas como mecánica, electricidad y magnetismo, óptica y mecánica de fluidos, sólo por mencionar algunas.

Magnitudes escalares y vectoriales

En Matemática o en Física es muy común el trabajo con magnitudes. Llamamos *magnitud* a cualquier cualidad o atributo que posee un cuerpo factible de ser medido, como ser su peso, su largo, su densidad, su velocidad. Estas se pueden clasificar en *escalares* y *vectoriales*.

Magnitudes escalares son aquellas que quedan perfectamente determinadas por un número real y una unidad de medida, por ejemplo: de la magnitud longitud, 4 metros, o de la magnitud volumen, 16 litros. Las magnitudes vectoriales son las que no quedan determinadas únicamente con un número y la unidad de medida; necesitan además tener en cuenta una dirección. Por ejemplo: de la magnitud velocidad, 4 m/s hacia el sur.

Desde el enfoque geométrico:

Se llama vector a todo segmento orientado. El primer punto que lo determina se llama *origen* (O) y, el segundo punto, *extremo* del vector (P). Todo vector está contenido en una recta (r) que determina la *dirección* del mismo. El origen y el extremo del vector, en ese orden determinan el *sentido*, que se indica con la punta de la flecha. El *módulo* del vector es la longitud del segmento orientado. Su representación gráfica sería:

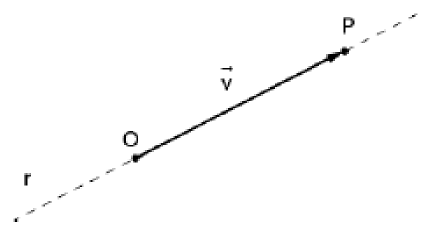


Figura 1.

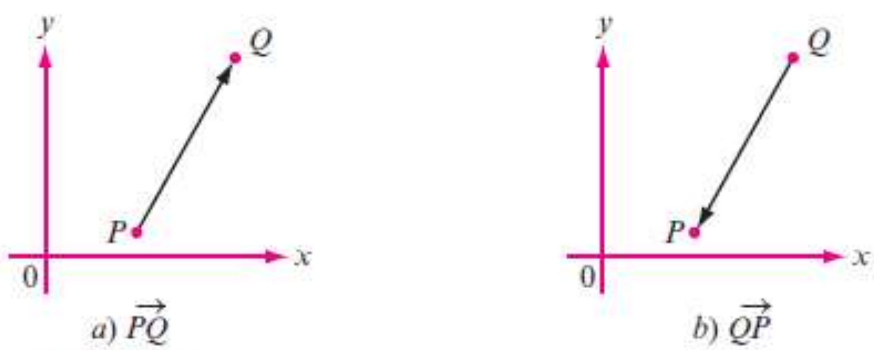


Figura 4.1

Los segmentos de recta dirigidos $\overrightarrow{PQ}$ y $\overrightarrow{QP}$ apuntan hacia direcciones opuestas.

Definición geométrica de un vector

El conjunto de todos los segmentos de recta dirigidos equivalentes a un segmento de recta dirigido dado se llama **vector**. Cualquier segmento de recta en ese conjunto se denomina **representación** del vector.

Se dice que dos o más vectores tienen la misma dirección cuando están situados sobre la misma recta o sobre rectas paralelas. Sobre cada recta hay dos sentidos posibles, llamados sentidos opuestos entre sí. Para el ejemplo anterior, se tienen el vector $\overrightarrow{OP}$ y el vector $\overrightarrow{PO}$.

<u>Vectores libres</u>: son aquellos cuyos puntos "origen" y "extremo" son puntos cualesquiera del espacio (o del plano).

<u>Vectores fijos</u>: son aquellos cuyo "origen" coincide con el origen de coordenadas y cuyo extremo es cualquier punto del plano o del espacio.

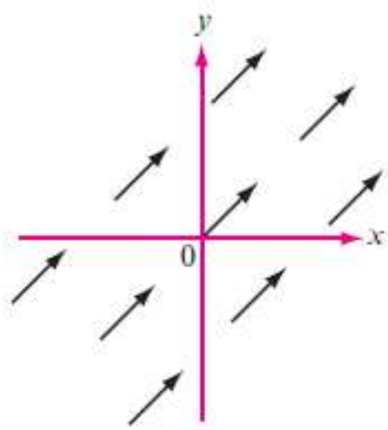
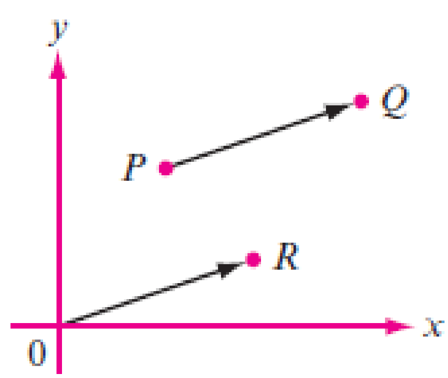


Figura 4.2
Un conjunto de segmentos de recta dirigidos equivalentes.



Desde el enfoque algebraico

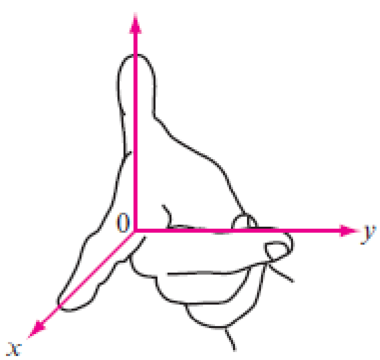
Un vector es un conjunto ordenado de n números, llamados componentes del vector, o bien, es un arreglo de n números. Si denominamos v a un vector, se representa en símbolos así: $\vec{v}$. Si las componentes del vector son los números $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n$, se representa:

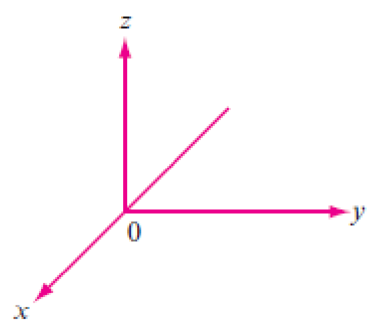
$$\vec{v} = (x_1;\ x_2;\ x_3;\ \ldots;\ x_n)$$

En particular, en $\mathbb{R}^2$ el vector es un par ordenado $(x_1;\ x_2)$ o $(x; y)$, y en $\mathbb{R}^3$ es una terna ordenada $(x_1;\ x_2; x_3)$ o $(x; y; z)$, siendo x_1: primera componente, x_2: segunda componente, x_3: tercera componente.

Ubicación de puntos en sistemas de ejes coordenados R^2 y R^3.

R^3





Planos coordenados: los tres ejes en el sistema determinan tres planos coordenados, que se denominan plano xy, plano xz y plano yz. El plano xy contiene a los ejes x e y , es simplemente el plano con el que usted ha trabajado como plano real. Lo mismo con los otros dos planos y ejes.

Al tener la estructura construida de ejes coordenados y planos, se puede escribir cualquier punto P en R^3 de la siguiente manera:

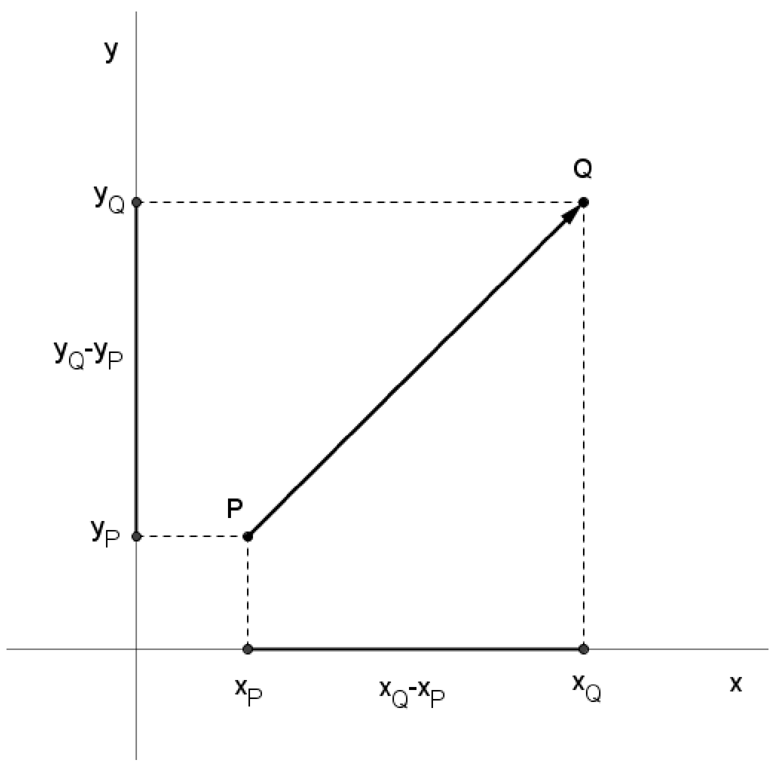
P (x , y , z)

Donde x, y , z con las coordenadas del punto P. Son las distancias del punto a los planos coordenados. x es la distancia del punto P al plano yz, y es la distancia del punto P al plano xz, z es la distancia del punto P al plano xy.

Componentes de un vector

Si puntos del espacio o del plano se proyectan sobre los ejes cartesianos, se tienen las coordenadas de dichos puntos. Hemos dicho que dos puntos definen un vector. Por lo tanto, si se proyectan los puntos *origen* y *extremo* de un vector dado, obtenemos las coordenadas de los puntos en cada uno de los ejes, generando un segmento entre ellas. La longitud de ese segmento representa la componente del vector dado (*fig.2*). En otras palabras, las componentes de un vector representan la proyección del vector sobre cada uno de los ejes.

En R^2, sea el vector $\overrightarrow{PQ}$: $P(x_p; y_p)$ y $Q(x_q; y_q)$



$a = x_Q - x_P$ proyección del vector $\overrightarrow{PQ}$ sobre el eje x $proy_x\overrightarrow{PQ}$

$b = y_Q - y_P$ proyección del vector $\overrightarrow{PQ}$ sobre el eje y $proy_y\overrightarrow{PQ}$

$$\overrightarrow{PQ} = (a\,, b)$$

P(1 , 2) Q (6 , 5)

$\overrightarrow{PQ}$

Q - P Esto está mal. No se restan puntos.

a = 6 – 1 = 5

b = 5 -2 = 3

$\overrightarrow{PQ} = (5\,,3)$ lo represento con origen en origen de coordenadas O (0 , 0) y extremo en el punto indicado por las componentes del vector A (5 , 3).

M (7 , 5) y N (12 , 2)

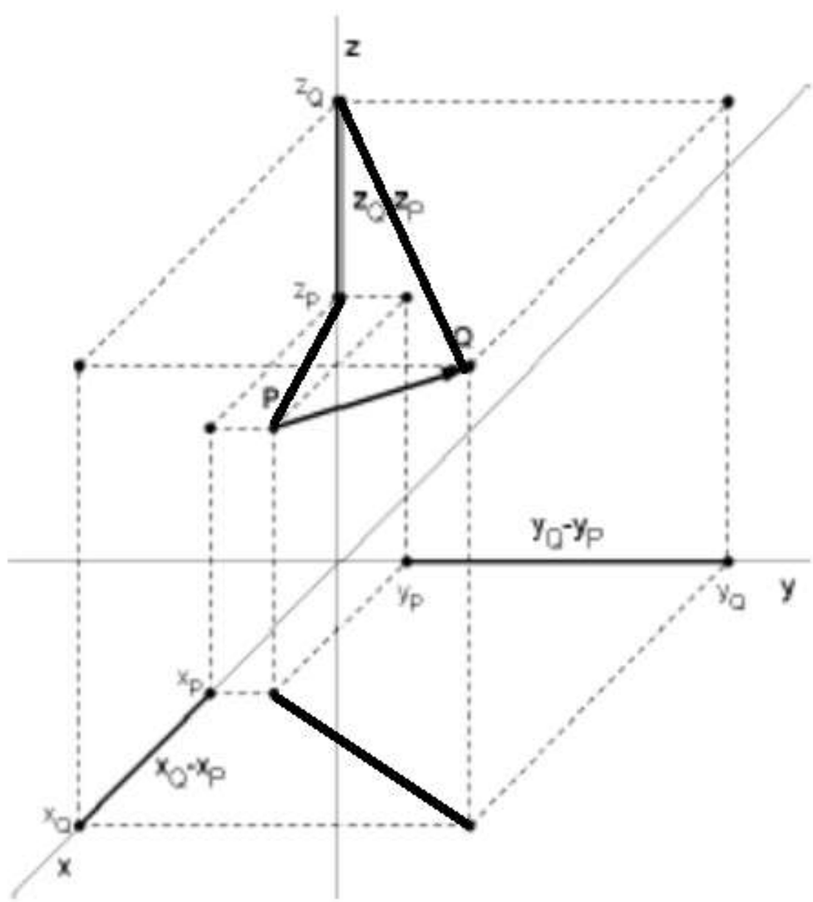
$\overrightarrow{MN}$

a = 12 – 7 = 5

b = 2 – 5 = -3

$\overrightarrow{MN} = (\,5\,,-3)$

En R^3, sea el vector $\overrightarrow{PQ}$:



$a = x_Q - x_P$ proyección del vector $\overrightarrow{PQ}$ sobre el eje x $proy_x\overrightarrow{PQ}$

$b = y_Q - y_P$ proyección del vector $\overrightarrow{PQ}$ sobre el eje y $proy_y\overrightarrow{PQ}$

$c = z_Q - z_P$ proyección del vector $\overrightarrow{PQ}$ sobre el eje z $proy_z\overrightarrow{PQ}$

$$\overrightarrow{PQ} = (a\,, b, c)$$

P (1 , -2 , 4) Q (-2 , 0 , 5)

$$\overrightarrow{PQ} = (a\,, b\,, c) = (-2-1\,, 0-(-2)\,, 5-4) = (\,-3\,, 2\,, 1)$$

Ejemplo:

Encontrar las componentes del vector definido por el origen P(2, 1, 3) y el extremo Q (5 , 3 , 5).

Por definición:

$$a = x_q - x_p = 5 - 2 = 3$$

$$b = y_q - y_p = 3 - 1 = 2$$

$$c = z_q - z_p = 5 - 3 = 2$$

Se obtiene así el vector $\overrightarrow{PQ}$=(3;2;2).

Elementos de un vector

Los elementos de un vector son: módulo, dirección y sentido.

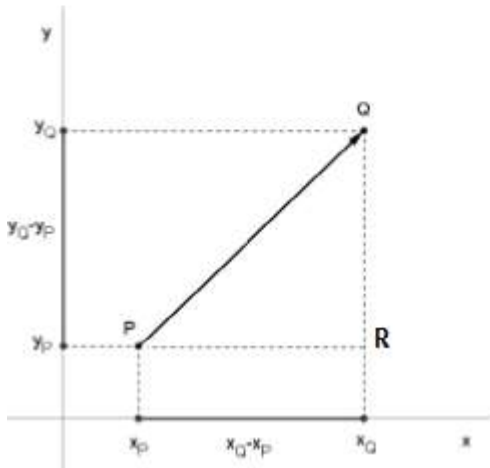
Módulo: El módulo de un vector es la distancia entre los puntos origen y extremo del vector, es la longitud del segmento orientado.

en $\mathbb{R}^2$ si se consideran dos puntos $P(x_p; y_p)$ y $Q(x_q; y_q)$, queda

$$\overrightarrow{PQ} = (x_q - x_p; y_q - y_p)$$

En el triángulo rectángulo (por construcción) PRQ, aplicando el Teorema de Pitágoras:

Cateto = 3 cateto= 4 hipotenusa = 5 $3^2 + 4^2 = 5^2$



$$|\overrightarrow{PQ}| = \sqrt{(x_q - x_p)^2 + (y_q - y_p)^2}$$

O bien, dado el vector $\overrightarrow{PQ} = (\,a\,, b)$ el módulo se calcula haciendo: $|\overrightarrow{PQ}| = \sqrt{a^2 + b^2}$

En R^3:

Módulo de un vector: dado el vector $\vec{a} = (a_1; a_2; a_3)$, su módulo es igual a la raíz cuadrada de la suma de los cuadrados de las componentes del vector. En símbolos:

$$|\vec{a}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}$$

En $\mathbb{R}^3$, dados dos puntos $P(x_p; y_p; z_p)$ y $Q(x_q; y_q; z_q)$, con P como origen y Q como extremo, queda determinado el vector, cuyas componentes se obtienen restando las coordenadas homónimas del extremo menos el origen:

$$\overrightarrow{PQ} = (x_q - x_p; y_q - y_p; z_q - z_p)$$

El módulo del vector $\overrightarrow{PQ}$ se calcula de la siguiente manera:

$$|\overrightarrow{PQ}| = \sqrt{(x_q - x_p)^2 + (y_q - y_p)^2 + (z_q - z_p)^2}$$

Sentido: El sentido de un vector está definido por los puntos origen y extremo del vector.

$$\overrightarrow{PQ} \neq \overrightarrow{QP}$$

$\vec{v} = (2 \,. -4\,, 7)$

Origen: coordenadas del punto origen de coordenadas O (0, 0 , 0)

Extremo: en el punto Q (2 , -4 , 7) coordenadas de un punto indicados por las componentes del vector $\vec{v}$.

Dirección: La dirección de un vector es el o los ángulos, medidos en radianes, que forma el vector con el lado positivo de los ejes coordenados.

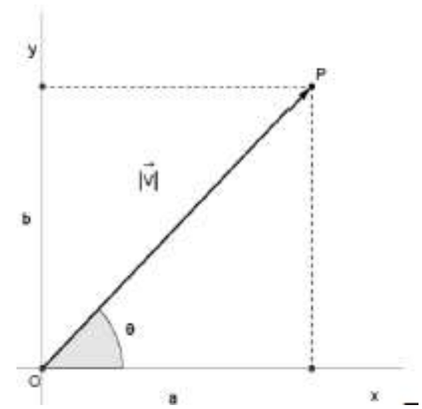
En R^2:

Dado el vector $\vec{m} = (a; b)$, dijimos que su dirección venía dada por la recta de acción, por ello, conociendo la dirección de la recta podemos establecer la dirección del vector.

La dirección de la recta está relacionada con su inclinación, con su pendiente. Para ello basta con conocer el ángulo que forma la recta con el eje x positivo.

En particular, tomemos al vector fijo $\overrightarrow{OP}=\vec{m}$. Su recta de acción contiene al origen y forma con el eje x un ángulo θ; con $0 \leq \theta \leq 2\pi\, rad$. Este ángulo estará relacionado con las componentes del vector mediante relaciones trigonométricas (por determinarse un triángulo rectángulo, *fig.4*). Se tiene así que la tangente del ángulo θ es el cociente entre b y a. En símbolos:

$$tg\ \theta = \frac{b}{a} \Longrightarrow \theta = arc\ tg\,\frac{b}{a}$$



$\vec{v} = (5\ ,3)$ dirección: $\hat{\theta} = act\tan\left(\frac{3}{5}\right) = 30°57'\,49''$

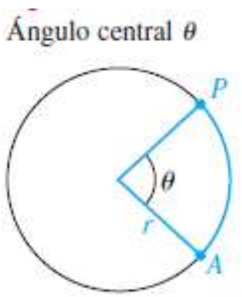
$$\hat{\theta} = act\tan\left(\frac{3}{5}\right) = 0{,}54\ rad$$

REVISIÓN TRIGONOMETRÍA

MEDICIÓN DE ÁNGULO

Sistema Circular de medición de ángulos

En aplicaciones científicas que requieren cálculo integral, se acostumbra usar medidas de ángulos en radianes. Consideremos una circunferencia de radio r. En ángulo central de un círculo es un ángulo cuyo vértice está en el centro del círculo. Si $\hat{\theta}$ es el ángulo central, decimos que el arco AP, $\widehat{AP}$, del círculo, subtiende a $\hat{\theta}$, o que $\hat{\theta}$ está subtendido por $\widehat{AP}$.



Un **radián** es la medida del ángulo central de un círculo subtendido por un arco igual en longitud al radio del círculo.

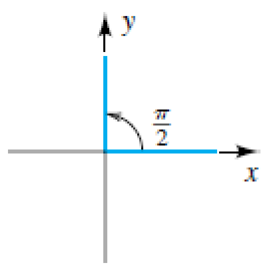
$$\hat{\theta}\ medido\ en\ radianes = \frac{longitud\ de\ arco}{longitud\ de\ radio}$$

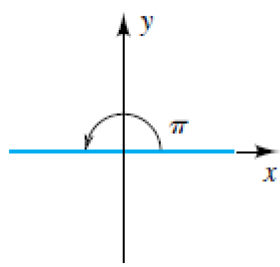
Perímetro de una circunferencia = $2\pi r$

La medida del ángulo correspondiente a una circunferencia completa, medida en radianes es:

$\frac{2\pi r}{r} = 2\pi$

Ángulo recto $\rightarrow \frac{\pi}{2}$	Ángulo llano $\rightarrow \pi$





Equivalencia entre el sistema Sexagesimal y el Circular

Se puede establecer una equivalencia entre estos sistemas, considerando el cociente (en radianes) entre la longitud de una semicircunferencia de perímetro (π radio) y el radio. Este sector circular corresponde a un ángulo llano que mide 180 º (sexagesimales), por lo que se obtiene la relación:

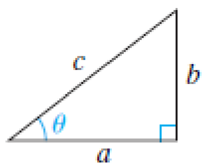
$$\pi \text{ radianes} = 180°$$

En general, si α° es un ángulo en el sistema sexagesimal y α_r es un ángulo en radianes, se tienen las siguientes expresiones:

$$\alpha^{\circ} = \frac{180}{\pi}.\alpha_r \qquad \alpha_r = \frac{\pi}{180}.\alpha^{\circ}$$

Razones Trigonométricas definidas en un triángulo rectángulo

Consideremos un triángulo rectángulo:



Sea $\hat{\theta}$ uno de los ángulos agudos:

$0° < \hat{\theta} < 90°$ o $0 < \hat{\theta} < \frac{\pi}{2}$

Se pueden establecer seis razones usando las longitudes a , b y c de los lados del triángulo rectángulo.

Se definen las razones trigonométricas:

sen θ = $\dfrac{longitud\ de\ cateto\ opuesto\ a\ \theta}{longitud\ de\ hipotenusa} = \dfrac{b}{c}$ se lee “seno de tita”

cos θ = $\dfrac{longitud\ de\ cateto\ adyacente\ a\ \theta}{longitud\ de\ hipotenusa} = \dfrac{a}{c}$ se lee “coseno de tita”

tan θ = $\dfrac{longitud\ de\ cateto\ opuesto\ a\ \theta}{longitud\ de\ cateto\ adyacente\ a\ \theta} = \dfrac{b}{a}$ se lee “tangente de tita”

cotan θ = $\dfrac{longitud\ de\ cateto\ adyacente\ a\ \theta}{longitud\ de\ cateto\ opuesto\ a\ \theta} = \dfrac{a}{b}$ se lee “cotangente de tita”

sec θ = $\dfrac{longitud\ de\ hipotenusa}{longitud\ de\ cateto\ adyacente\ a\ \theta} = \dfrac{c}{a}$ se lee “secante de tita”

cosec θ = $\dfrac{longitud\ de\ hipotenusa}{longitud\ de\ cateto\ opuesto\ a\ \theta} = \dfrac{c}{b}$ se lee “cosecante de tita”

Tabla con los valores de sen α, cos α y tan α para algunos ángulos más utilizados, del primer cuadrante:

	0° ~ 0 rad	**30° ~ $\frac{\pi}{6}$ rad**	**45° ~ $\frac{\pi}{4}$ rad**	**60° ~ $\frac{\pi}{3}$ rad**	**90° ~ $\frac{\pi}{2}$ rad**
	$\frac{\sqrt{0}}{2}$	$\frac{\sqrt{1}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{4}}{2}$
seno	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
coseno	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
tangente	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	∞

Grados	-180	-135	-90	-45	0	30	45	60	90	120	135	150	180	270	360
θ (radianes)	$-\pi$	$\frac{-3\pi}{4}$	$\frac{-\pi}{2}$	$\frac{-\pi}{4}$	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
sen θ	0	$\frac{-\sqrt{2}}{2}$	-1	$\frac{-\sqrt{2}}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	-1	0
cos θ	-1	$\frac{-\sqrt{2}}{2}$	0	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$\frac{-\sqrt{2}}{2}$	$\frac{-\sqrt{3}}{2}$	-1	0	1
tan θ	0	1		-1	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$		$-\sqrt{3}$	-1	$\frac{-\sqrt{3}}{3}$	0		0

Ejemplo: Hallar la dirección de los vectores $\vec{v}=(1;\sqrt{3})$ y $\vec{w}=(-2;2)$

$$\text{Para el vector } \vec{v}\text{, } \theta=arctg\frac{\sqrt{3}}{1}=\frac{\pi}{3}rad\,.$$

$$\text{Para el vector } \vec{w}\text{, } \theta=arctg\frac{2}{-2}=\frac{3\pi}{4}rad\,.$$

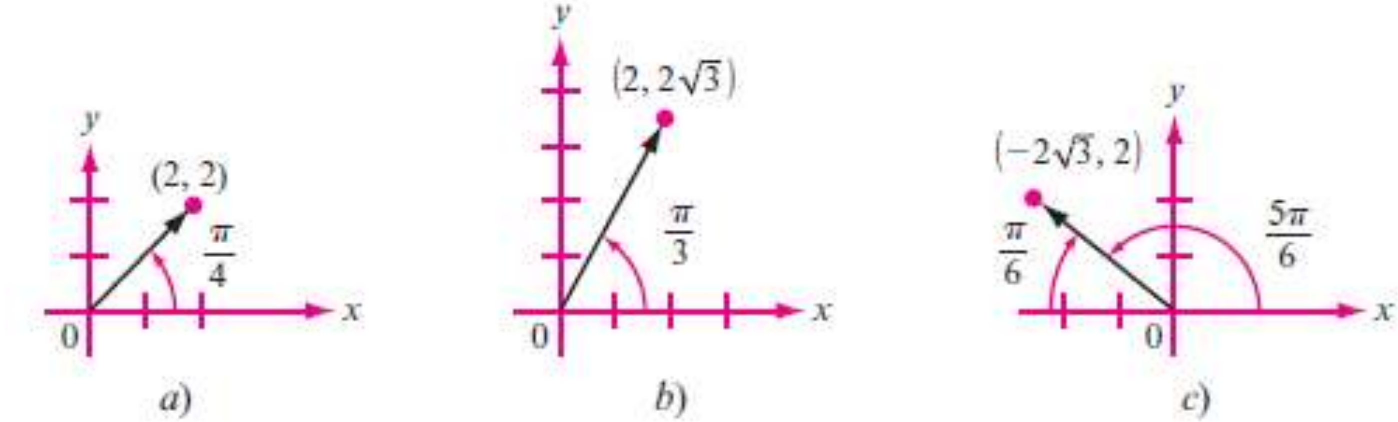
Advertencia: en el caso del uso de calculadora, para el $arc\,tg\,(-1)$, arroja como resultado $-\frac{\pi}{4}rad$. De acuerdo a las componentes dadas, el ángulo debiera corresponder al segundo cuadrante, entonces el cálculo correcto es:

$$\theta=\pi-\frac{\pi}{4}=\frac{3\pi}{4}rad$$

En general, para el caso en que la primera componente es negativa y la segunda positiva, para calcular el ángulo, se realiza la diferencia: $\theta=\pi\,rad-arctg(b/a)$. Cuando las dos componentes son negativas, se halla: $\theta=\pi\,rad+arctg(b/a)$

Ejemplo: Calcular las direcciones de

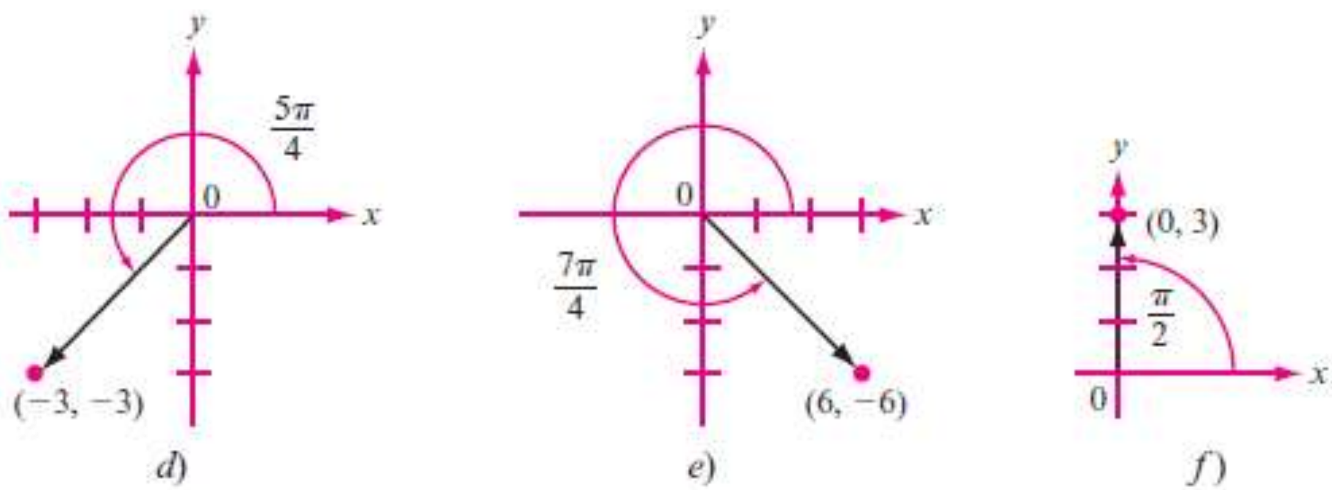
i) $\mathbf{v} = (2, 2)$; ii) $\mathbf{v} = (2, 2\sqrt{3})$; iii) $\mathbf{v} = (-2\sqrt{3}, 2)$;



iii) $\widehat{\theta} = arc\tan\left(\frac{2}{-2\sqrt{3}}\right) = arc\tan\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = arc\tan\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\right)$= 150°

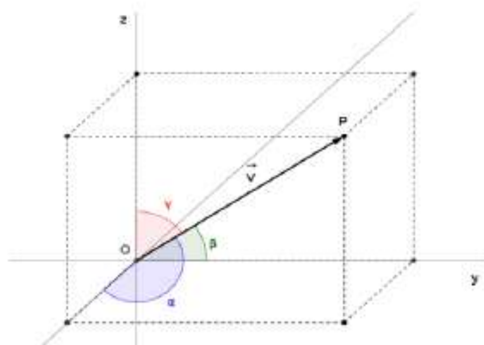
$\widehat{\theta}$ = - 30° $\qquad$ $\widehat{\theta}$ = - 30° + 360° = 330° $\qquad$ $\widehat{\theta}$ = 330° - 180° = 150°

iv) $\mathbf{v} = (-3, -3)$; v) $\mathbf{v} = (6, -6)$; vi) $\mathbf{v} = (0, 3)$.



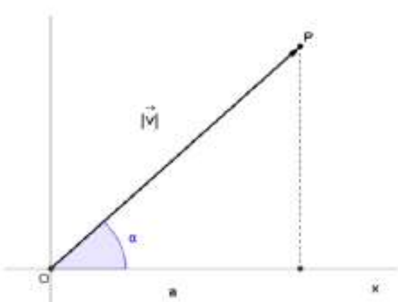
En R^3:

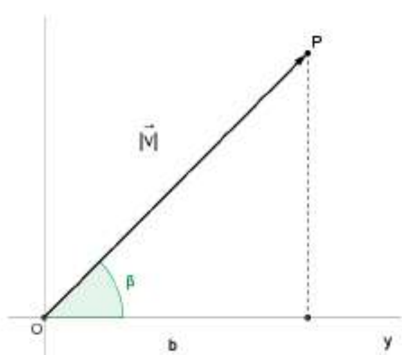
Dado el vector fijo $\vec{v}=\overrightarrow{OP}=(a;b;c)$, si se proyecta el extremo del vector sobre cada eje coordenado, se obtienen triángulos rectángulos, contenidos en los planos determinados por la dirección del vector y los ejes (recordando que dos rectas concurrentes definen un plano).

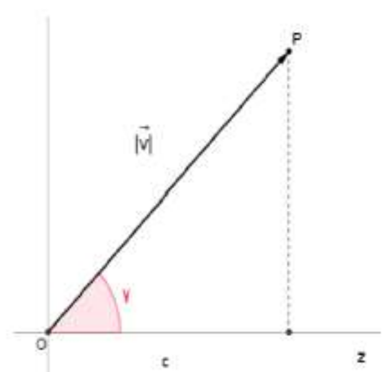


Si además designamos α, β y γ los ángulos que forma el vector con cada semieje positivo x, y, z, respectivamente, los valores de esos ángulos determinan la dirección del vector. Para cada terna de valores de α, β y γ, se obtiene una dirección particular. Por ello, se denominan *ángulos directores* de $\vec{v}$.

Por otra parte, al observar a la representación espacial (*fig.5*) desde vistas adecuadas (serían las que permiten visualizar el ángulo recto en su verdadera magnitud), se tienen las siguientes representaciones planas:







Utilizamos trigonometría para encontrar relaciones entre los ángulos directores, las componentes y el módulo del vector (*fig.5*). Hallamos que:

$$\cos\hat{\alpha} = \frac{a}{|\vec{v}|} \qquad \cos\hat{\beta} = \frac{b}{|\vec{v}|} \qquad \cos\hat{\gamma} = \frac{c}{|\vec{v}|}$$

De donde:

$$a = |\vec{v}|\cos\alpha\ ; \quad b = |\vec{v}|\cos\beta \ \text{ y } \ c = |\vec{v}|\cos\gamma\ .$$

De estas igualdades, es evidente que para un módulo dado (fijo), las componentes del vector dependen del ángulo que forma su dirección con el eje correspondiente. La modificación de la amplitud del ángulo produciría el cambio del valor de la componente respectiva.

Ejemplo: Encontrar la dirección del vector $\vec{v} = (3\ ;2\ ;2)$.

$$\cos\alpha = \frac{3}{\sqrt{3^2+2^2+2^2}}\ ; \ \cos\beta = \frac{2}{\sqrt{3^2+2^2+2^2}} \text{ y } \cos\gamma = \frac{2}{\sqrt{3^2+2^2+2^2}}.$$

Entonces:

$$\alpha = \arccos\frac{3}{\sqrt{17}} = 43^\circ 18'\ ; \ \beta = \arccos\frac{2}{\sqrt{17}} = 60^\circ 59' \text{ y } \gamma = \arccos\frac{2}{\sqrt{17}} = 60^\circ 59'.$$

Sin embargo, también la modificación de un ángulo director provoca la modificación de los otros dos. O sea, hay una dependencia entre ellos, que analizamos a continuación.

Propiedad

fundamental entre los cosenos directores:

Si a las expresiones $\cos\hat{\alpha}$, $\cos\hat{\beta}$ y $\cos\hat{\gamma}$ denominamos *cosenos directores* del vector $\vec{v}$, existe una propiedad que asegura que "la suma de los cuadrados de los cosenos directores de un vector dado, siempre es igual a uno". En símbolos:

$$cos^2\hat{\alpha} + cos^2\hat{\beta} + cos^2\hat{\gamma} = 1$$

Justificación

En efecto: Se sabe que :

$$a = |\vec{v}| \cos\alpha \; ; \quad b = |\vec{v}| \cos\beta \quad y \quad c = |\vec{v}| \cos\gamma$$

si cada igualdad se eleva al cuadrado, se tiene:

$$a^2 = (|\vec{v}|)^2 \cos^2\alpha \; ; \quad b^2 = (|\vec{v}|)^2 \cos^2\beta \quad y \quad c^2 = (|\vec{v}|)^2 \cos^2\gamma$$

Sumando cada igualdad, miembro a miembro:

$$a^2 + b^2 + c^2 = (|\vec{v}|)^2 [\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma]$$

de donde:

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = \frac{a^2 + b^2 + c^2}{\left(\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}\right)^2} \Rightarrow \cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1$$

y queda demostrada la propiedad.

Ejemplo: Decidir si los ángulos $\alpha = \frac{\pi}{4}, \beta = \frac{\pi}{3}, \gamma = \frac{2}{3}\pi$, son *directores* de algún vector.

Solución: Por propiedad

$\cos^2\frac{\pi}{4} + \cos^2\frac{\pi}{3} + \cos^2\frac{2\pi}{3} = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(-\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = 1$ Se cumple; por lo tanto, corresponden a ángulos directores de un vector.

Hay que tener en cuenta que los ángulos directores pueden variar entre 0 y $\pi\ rad$; cuando el ángulo es superior al recto, el coseno tiene signo negativo, provocando así que la componente sea un número real negativo. Cuando uno de los ángulos directores es recto, el coseno es igual a 0, entonces la componente respectiva es 0; en ese caso, la dirección del vector es perpendicular al eje al que corresponda el ángulo, y el vector está contenido en el plano determinado por los otros dos ejes coordenados.

Por ejemplo, el vector $\vec{w} = (0; 2; 3)$ tiene la primera componente nula. Quiere decir que el ángulo $\alpha = \frac{\pi}{2} rad$. La dirección del vector es perpendicular al eje x, entonces está contenida en el plano coordenado (yz).

Cuando dos de los ángulos directores son rectos, el tercer ángulo sólo puede valer 0 o $\pi\ rad$ (¿por qué?), entonces la dirección del vector coincide con la dirección de los ejes cartesianos.

Ejemplo: ¿Cuánto debe valer β para que $\alpha = \frac{\pi}{4}$ y $\gamma = \frac{\pi}{4}$ sean ángulos directores de un vector dado?

Solución: se debe cumplir que:

$$\cos^2 \frac{\pi}{4} + \cos^2 \beta + \cos^2 \frac{\pi}{4} = 1$$

Entonces: $\frac{1}{2} + \cos^2 \beta + \frac{1}{2} = 1 \Rightarrow \cos^2 \beta = 0 \Rightarrow \beta = \frac{\pi}{2} rad$

Por lo tanto, el vector está contenido en el plano coordenado (xz).

Igualdad entre vectores (relación entre vectores)

Sean los vectores $\vec{a} = (a_1 , a_2 , a_3)$ y $\vec{b} = (b_1 , b_2 , b_3)$. Estos vectores son iguales cuando sus componentes homónimas son iguales.

En símbolos: $\vec{a} = \vec{b} \Leftrightarrow a_1 = b_1 \quad , \quad a_2 = b_2 \quad , \quad a_3 = b_3$

Ejemplo: Dado el vector $\vec{u} = (-3 , 6 , \ 2)$, si $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$, determine las coordenadas de A si B(5 , -2 ,-1)

Solución:

$a = x_B - x_A \;\rightarrow\; x_A = x_B - a \quad \rightarrow \quad x_A = 5 - (-3) = 8$

$b = y_B - y_A \;\rightarrow\; y_A = y_B - b \quad \rightarrow \quad y_A = -2 - 6 = -8$

$c = z_B - z_A \;\rightarrow\; z_A = z_B - c \quad \rightarrow \quad z_A = -1 - 2 = -3$

$$A(8 , -8 , -3)$$

"Dos o más vectores son <u>iguales</u> o <u>equipolentes</u> cuando tienen el mismo módulo (por tener las mismas componentes), la misma dirección (contenidos en la misma recta o en rectas paralelas) y el mismo sentido."

Se forma así un conjunto de infinitos pares de puntos, que determinan vectores equipolentes entre sí. Este conjunto constituye una familia de vectores y, cuando se considera uno de estos vectores, se lo llama "*representante*" de la familia.

Operaciones entre vectores

Suma

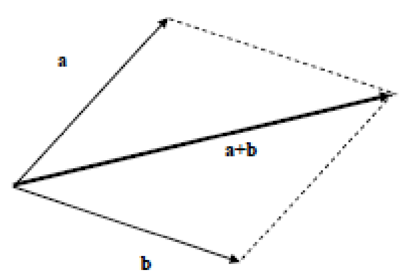
Adición: Sean los vectores $\vec{a} = (a_1; a_2; a_3)$ y $\vec{b} = (b_1; b_2; b_3)$, el *vector suma* se obtiene sumando las componentes homónimas de los vectores dados:

$$\vec{a} + \vec{b} = (a_1 + b_1\ ;\ a_2 + b_2\ ;\ a_3 + b_3)$$

Ejemplo: Hallar el vector suma, siendo $\vec{a} = (3; -5; 1)$ y $\vec{b} = (2; 4; -7)$.

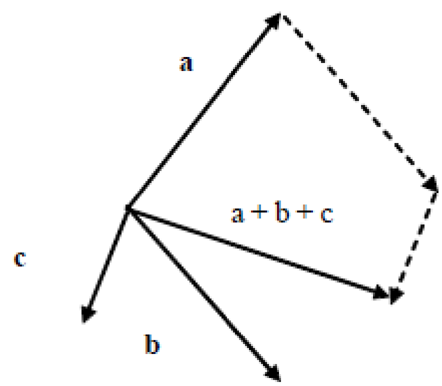
Solución: $\vec{a} + \vec{b} = (3; -5; 1) + (2; 4; -7) = (3 + 2; -5 + 4; 1 + (-7)) = (5;\ -1;\ -6)$

En general, dados los vectores $\vec{a}$ y b, el vector suma $\vec{a} + b$ ocupa la diagonal del paralelogramo que se forma cuando los dos vectores tienen el mismo origen



Método del paralelogramo

En el caso de tener más de dos vectores, es más práctico obtener la suma por el método del polígono: trasladando cada uno de los vectores a continuación del otro, es decir, gráficamente, coinciden el origen del segundo con el extremo del primero, y así sucesivamente hasta llegar al último vector. El "vector *suma*" será quien tenga como origen, al origen del primer vector y como extremo, el extremo del último vector



Método del polígono

Suma: $\boldsymbol{R^3} + \boldsymbol{R^3} \rightarrow \boldsymbol{R^3}$ **es una operación interna en $\boldsymbol{R^3}$**

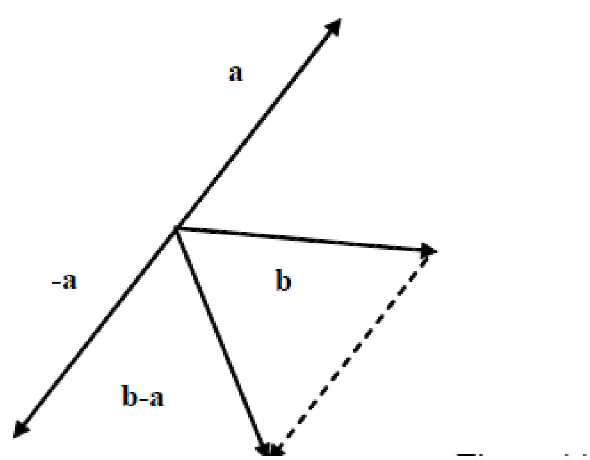
Resta

Diferencia: Sean los vectores $\vec{a} = (a_1; a_2; a_3)$ y $\vec{b} = (b_1; b_2; b_3)$, se halla la diferencia entre ellos, sumando al vector $\vec{a}$ el opuesto del vector $\vec{b}$.

$$\vec{a} + (-\vec{b}) = (a_1 + (-b_1);\ a_2 + (-b_2);\ a_3 + (-b_3))$$

$\vec{a} = (1\,,2\,,3)$ $\vec{b} = (-2\,,0\,,5)$ $\vec{a} - \vec{b}$ = (1 – (-2) , 2 – 0 , 1 – 5) = (3 , 2 , -4)

Para la diferencia, por ejemplo $\vec{b} - \vec{a}$, al vector $\vec{b}$ se le suma el opuesto de $\vec{a}$



Producto de un vector por un escalar

$\boldsymbol{R^3 \times R \rightarrow R^3}$ **es una operación externa entre $\boldsymbol{R^3}$ y R**

Multiplicación de un vector por un escalar: Sea el vector $\vec{a} = (a_1; a_2; a_3)$ y el escalar $\lambda \in \mathbb{R}$. Este producto da como resultado otro vector, cuyas componentes se multiplican por el escalar dado:

$$\lambda \cdot \vec{a} = \lambda \cdot (a_1; a_2; a_3) = (\lambda a_1; \lambda a_2; \lambda a_3)$$

El vector $\lambda.\vec{a}$ se denomina "múltiplo de $\vec{a}$".

Ejemplo: Hallar el producto entre $\vec{a} = (3; -5; 1)$ y

i) $\lambda = 2$ ii) $\lambda = \dfrac{2}{5}$

Solución:

i) $\lambda \cdot \vec{a} = 2 \cdot (3; -5; 1) = (2.3; 2.(-5); 2.1) = (6; -10; 2)$

ii) $\lambda \cdot \vec{a} = \dfrac{2}{5} \cdot (3; -5; 1) = (\dfrac{2}{5}.3; \dfrac{2}{5}.(-5); \dfrac{2}{5}.1) = (\dfrac{6}{5}; -2; \dfrac{2}{5})$

Vector opuesto: En particular, si $\lambda = -1$, se obtiene el vector opuesto al dado.

$$-\vec{a} \text{ es opuesto de } \vec{a} \Leftrightarrow -\vec{a} = (-1) \cdot \vec{a} = (-1) \cdot (a_1; a_2; a_3) = (-a_1; -a_2; -a_3)$$

Ejemplo: Hallar el opuesto de $\vec{b} = (2; 4; -7)$. Solución: $-\vec{b} = (-1) \cdot (2; 4; -7) = (-2; -4; 7)$

Propiedades

Dados los vectores $\vec{a}, \vec{b}$ y $\vec{c}$, los escalares α, β, λ, se cumplen las siguientes propiedades:

1) $\vec{a} + \vec{0} = \vec{a}$
2) $0 \cdot \vec{a} = \vec{0}$
3) $\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$
4) $\vec{a} + (\vec{b} + \vec{c}) = (\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c}$
5) $\lambda \cdot (\vec{a} + \vec{b}) = \lambda\vec{a} + \lambda\vec{b}$
6) $(\alpha + \beta)\vec{a} = \alpha\vec{a} + \beta\vec{a}$
7) $(\alpha\beta)\vec{a} = \alpha(\beta\vec{a})$

Vector unitario o Versor

Si un vector tiene "módulo igual a 1 (uno)", se denomina *vector unitario* o *versor* (se simboliza $\breve{a}$).

$\vec{v} = (1, 1)$ ¿*es un versor*? *no, no es porque* $|\vec{v}| = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2} \neq 1$

Ejemplo: Probar si el vector $\vec{v} = (\frac{\sqrt{2}}{2}; \frac{\sqrt{2}}{2}; 0)$ es o no unitario.

Solución: se halla el módulo de $\vec{v}$:

$$|\vec{v}| = \sqrt{\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 + 0} = \sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}} = \sqrt{1} = 1$$

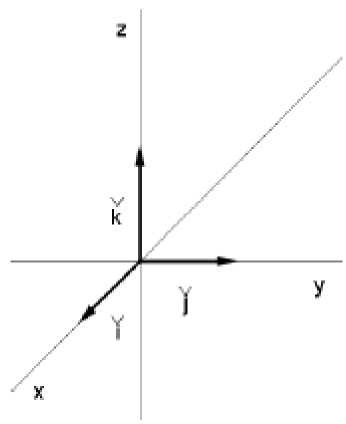
Por lo tanto, concluimos que el vector es unitario.

Versores Fundamentales

Habíamos dicho que si dos ángulos directores son rectos, el tercer ángulo debe ser nulo (o bien llano) y la dirección del vector coincide con la dirección de los ejes cartesianos. Si en especial consideramos vectores fijos y de módulo uno, para que cumplan con esto, dos componentes valdrán cero y la tercera tendrá que valer uno. Estos versores se denominan "*versores fundamentales*", se denotan $\breve{i}$, $\breve{j}$ y $\breve{k}$ y sus componentes son:

$$\breve{\imath} = (1; 0; 0) \qquad \breve{\jmath} = (0; 1; 0) \qquad \breve{k} = (0; 0; 1)$$

Se representan gráficamente como vectores fijos, y con sentido hacia los valores positivos de los ejes, por ello, se dice que los versores fundamentales "dirigen a los ejes cartesianos" (*fig.7*):



<u>Descomposición canónica de un vector:</u> Sea el vector $\vec{v} = (a\,;\,b\,;\,c)$. Por definición de suma de vectores, es posible expresar a $\vec{V}$ como suma de tres vectores con dos componentes nulas:

$$\vec{v} = (a; b\,; c) = (a\,; 0\,; 0) + (0; b; 0) + (0\,; 0\,; c)$$

estos a su vez, por multiplicación por un escalar, se pueden expresar como:

$$\vec{v} = (a; b; c) = (a; 0; 0) + (0; b; 0) + (0; 0; c)$$

$$\vec{v} = a(1; 0; 0) + b(0; 1; 0) + c(0; 0; 1)$$

Se observa que en ésta última suma, cada término es el producto de un escalar por las componentes de los versores fundamentales, entonces:

$$\vec{v} = (a; b\,; c) = a.\breve{i} + b.\breve{j} + c.\breve{k}$$

Esta es una forma alternativa de denotar un vector, ya no como una terna, sino en forma "trinómica". Para el caso de un vector en el plano, $\vec{v} = (a; b\,) = a.\breve{i} + b.\breve{j}$ y se dice que el vector esta dado en forma binómica.

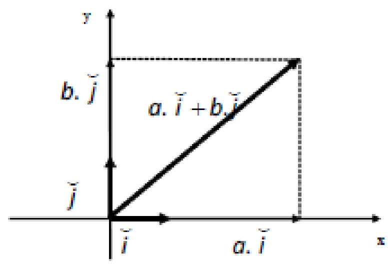
Podemos notar que en la forma canónica, un vector se obtiene como suma de dos vectores (en $\mathbb{R}^3$): el vector fijo $a.\breve{i}$ sobre el eje x con sentido positivo y el vector fijo $b.\breve{j}$ sobre

$$\vec{v} = (2\,, -3\,, 4) = 2\breve{\imath} - 3\breve{\jmath} + 4\breve{k} = 4\breve{k} + 2\breve{\imath} - 3\breve{\jmath}$$

$$\vec{u} = -\breve{\imath} + 4\breve{k} = (-1\,, 0\,, 4)$$

$\vec{w} = -\breve{\jmath}$ si está en R^2 : $\vec{w} = (0\,, -1)$ si está en R^3 : $\vec{w} = (0\,, -1\,, 0)$

el eje y con sentido positivo. En la representación gráfica (*fig.8*) se observa que $\vec{v}$ ocupa la diagonal del paralelogramo cuyos lados consecutivos son los vectores $a.\breve{i}$ y $b.\breve{j}$.



Vector unitario en una dirección dada

Dado un vector $\vec{v} \neq \vec{0}$, se quiere encontrar un vector múltiplo de $\vec{v}$. El problema se resuelve si se encuentra un escalar λ, que al multiplicar por el vector de un nuevo vector de módulo uno.

$\vec{w} = (1, 1)$ **$\vec{u}_{\vec{w}}$: se lee "vector unitario en la dirección del vector $\vec{w}$".**

$$\vec{u}_{\vec{w}} = \frac{1}{\sqrt{2}}(1, 1) = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$$

Verificación: $|\vec{u}_{\vec{w}}| = \sqrt{\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 + \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2} = \sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}} = 1$

$$|\vec{w}| = \sqrt{2}$$

En símbolos:

$$\vec{u}_{\vec{v}} = \lambda\vec{v} \quad \wedge \quad |\vec{u}_{\vec{v}}| = 1$$

El módulo de $\overrightarrow{u_{\vec{v}}}$ será: $\left|\overrightarrow{u_{\vec{v}}}\right| = |\lambda.\vec{v}|$

$$|\vec{u}_{\vec{v}}| = |\lambda \vec{v}| = |\lambda||\vec{v}| = 1$$

$$|\lambda| = \frac{1}{|\vec{v}|} \Longrightarrow \lambda = \frac{1}{|\vec{v}|}$$

Por lo tanto, ese debe ser el valor del escalar λ para que el múltiplo del vector sea unitario:

$$\vec{u}_{\vec{v}} = \lambda \vec{v} = \frac{1}{|\vec{v}|}\vec{v}$$

Es decir, un vector unitario en una dirección dada se obtiene al multiplicar al vector dado por el inverso de su módulo.

Ejemplo: Hallar un vector unitario en la dirección de $\vec{v} = (3; 2; 2)$.

Solución: Primero encontramos el módulo del vector: $|\vec{v}| = \sqrt{3^2 + 2^2 + 2^2} = \sqrt{17}$. Entonces $\lambda = \frac{1}{|\vec{v}|} = \frac{1}{\sqrt{17}}$. Se obtiene el vector unitario $\vec{U}_{\vec{v}} = \left(\frac{3}{\sqrt{17}} ; \frac{2}{\sqrt{17}} ; \frac{2}{\sqrt{17}} \right)$.

Producto entre vectores

Producto Escalar o producto punto

$$\boldsymbol{vector} \,.\, \boldsymbol{vector} \;\rightarrow\; \boldsymbol{escalar}\; (\boldsymbol{n}\acute{u}\boldsymbol{mero\ real})$$

Producto Vectorial o producto cruz

$$\boldsymbol{vector} \times \boldsymbol{vector} \;\rightarrow\; \boldsymbol{vector}$$

Producto Mixto

$$(\boldsymbol{vector} \times \boldsymbol{vector}).\boldsymbol{vector} \rightarrow \boldsymbol{escalar}$$

$$\cancel{(\boldsymbol{vector} \, . \, \boldsymbol{vector}) \boldsymbol{x} \, \boldsymbol{vector} \rightarrow \boldsymbol{no\ está\ definido}}$$

Producto Escalar o producto punto

Dados dos vectores $\vec{a} = (a_1; a_2; a_3)$ y $\vec{b} = (b_1; b_2; b_3)$, *se define al producto escalar como el número que resulta de la suma de los productos de las componentes homónimas.* En símbolos:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = (a_1; a_2; a_3) \cdot (b_1; b_2; b_3) = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 + b_3$$

Ejemplo: Encontrar el producto escalar entre $\vec{u} = (2; -3; 1)$ y $\vec{v} = (0{,}5; 2; -4)$

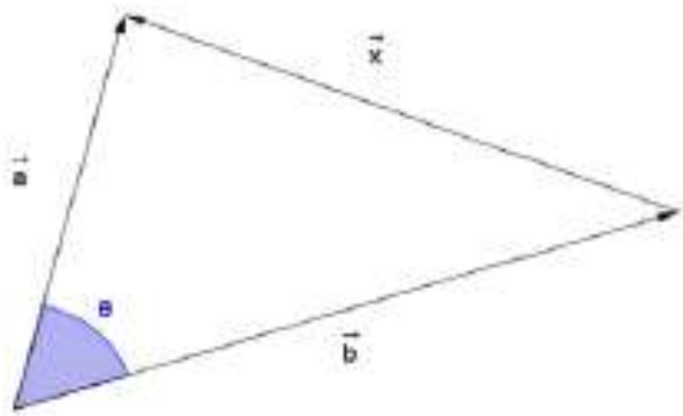
Solución: $\vec{u}\ \vec{v} = 2.0{,}5 + (-3).2 + 1.(-4) = -9$.

Aplicaciones del Producto Escalar

- **Ángulo entre vectores**

Dados dos vectores $\vec{a}$ y $\vec{b}$, cuyas direcciones son concurrentes, determinan entre sí dos pares de ángulos opuestos por el vértice. Consideremos a uno de ellos, designado como θ .

En el gráfico, observamos que es posible encontrar un nuevo vector $\vec{x}$ que, sumado al vector $\vec{b}$, de cómo resultado el vector $\vec{a}$.



$\vec{a} = \vec{b} + \vec{x} \Rightarrow \vec{x} = \vec{a} - \vec{b}$

Queda formado un triángulo cuyos lados son los módulos de los vectores. Utilizando el teorema del coseno, obtenemos:

Para triángulos cualesquiera, el cuadrado de la longitud de un lado es igual a la suma de los cuadrados de los otros lados menos el doble producto de las longitudes de esos lados por el coseno del ángulo opuesto

$$b^2 = a^2 + x^2 - 2ax\cos\alpha$$

$$|\vec{x}|^2 = |\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2 - 2|\vec{a}|\,|\vec{b}|\cos\theta$$

O también:

$$|\vec{a} - \vec{b}|^2 = |\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2 - 2|\vec{a}|\,|\vec{b}|\cos\theta$$

Teniendo en cuenta la propiedad $\vec{a}\cdot\vec{a} = |\vec{a}|^2$:

$$(\vec{a} - \vec{b})\cdot(\vec{a} - \vec{b}) = \vec{a}\cdot\vec{a} + \vec{b}\cdot\vec{b} - 2|\vec{a}|\,|\vec{b}|\cos\theta$$

Demostración de $\vec{a}\,.\,\vec{a} = |\vec{a}|^2$

$\vec{a} = (a_1, a_2\,, a_3)$ $\qquad |\vec{a}|^2 = \left(\sqrt{(a_1)^2 + (a_2)^2 + (a_3)^2}\right)^2 = (a_1)^2 + (a_2)^2 + (a_3)^2$

$$\vec{a}\,.\,\vec{a} = (a_1, a_2\,, a_3).(a_1, a_2\,, a_3) = a_1a_1 + a_2\,a_2 + a_3a_3 = (a_1)^2 + (a_2)^2 + (a_3)^2$$

Desarrollando el primer miembro queda:

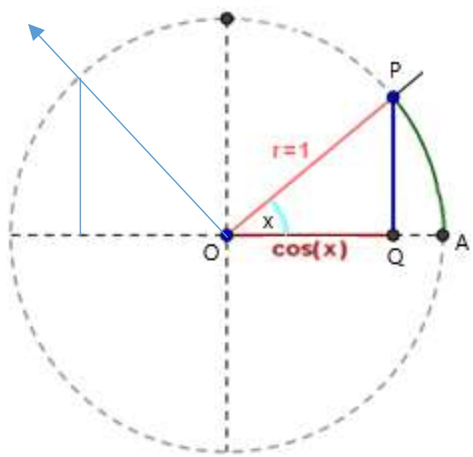
$$\underline{\vec{a}\cdot\vec{a}} - \vec{a}\cdot\vec{b} - \vec{b}\cdot\vec{a} + \overline{\vec{b}\cdot\vec{b}} = \underline{\vec{a}\cdot\vec{a}} + \overline{\vec{b}\cdot\vec{b}} - 2|\vec{a}|\left|\vec{b}\right|\cos\theta$$

Aplicando propiedad cancelativa: $-2\,\vec{a}\cdot\vec{b} = -2|\vec{a}|\left|\vec{b}\right|\cos\theta$

Entonces:

$$\boxed{\cos\theta = \frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}|\left|\vec{b}\right|}}$$

Esta expresión permite encontrar el ángulo θ formado entre los dos vectores. Si $\cos\theta$ es positivo, es $0 < \theta < 90^\circ$, cuando es negativo, $90^\circ < \theta < 180^\circ$.



Ejemplo: Encontrar el ángulo formado entre $\vec{u} = (2; -3\,;\,1)$ y $\vec{v} = (0{,}5; 2\,;\,-4)$.

Solución: por un lado sabemos que $\vec{u}\cdot\vec{v} = -9$; $|\vec{u}| = \sqrt{2^2 + (-3)^2 + 1^2} = \sqrt{14}$ y $|\vec{v}| = \sqrt{0{,}5^2 + 2^2 + (-4)^2} = \sqrt{20{,}25}$.

Por lo tanto:

$$\cos\theta = \frac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{|\vec{u}||\vec{v}|} = \frac{-9}{\sqrt{14}\,.\,\sqrt{20{,}25}} = -0{,}53452248\text{ . Entonces } \theta = 122^\circ\,18'\,42''$$

Dados dos vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$ se denomina *producto escalar* de $\vec{u}$ y $\vec{v}$ al *número real* que se obtiene de la siguiente manera:

$$\vec{u}\,.\,\vec{v} = \begin{cases} 0 \quad \text{si} \quad \vec{u} = \vec{0} \vee \vec{v} = \vec{0} \\ \left|\vec{u}\right| . \left|\vec{v}\right| . \cos\left(\widehat{\vec{u}\,,\,\vec{v}}\right) \quad \text{si} \quad \vec{u} \neq \vec{0} \wedge \vec{v} \neq \vec{0} \end{cases}$$

Sean $\vec{a}$ y $\vec{b}$ dos vectores y θ el ángulo entres ellos: $\vec{a}\,.\,\vec{b} = |\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta$

Trabajando con las componentes:

En R^2: Sean $\vec{u} = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix}$ y $\vec{v} = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix}$

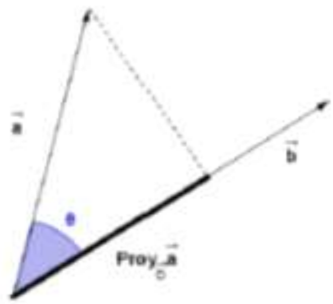
$$\vec{u}\,.\,\vec{v} = \left|\vec{u}\right| . \left|\vec{v}\right| \cos\left(\widehat{\vec{u}, \vec{v}}\right) = \left|\vec{u}\right| . \left|\vec{v}\right| . \frac{u_1 v_1 + u_2 v_2}{\left|\vec{u}\right| . \left|\vec{v}\right|} = u_1 v_1 + u_2 v_2$$

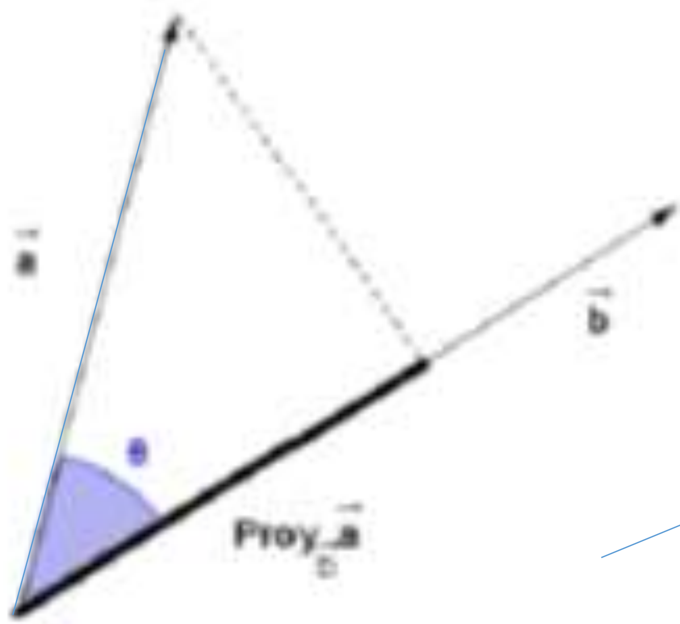
Por lo tanto, $\vec{u}\,.\,\vec{v} = u_1 v_1 + u_2 v_2$

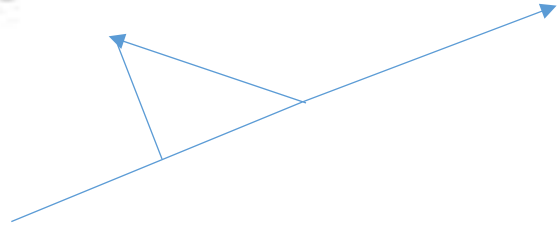
En R^3: si $\vec{u} = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix}$ y $\vec{v} = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix} \Rightarrow \vec{u}\,.\,\vec{v} = u_1 v_1 + u_2 v_2 + u_3 v_3$

- **Proyección de un vector sobre la dirección de otro**

Dados dos vectores $\vec{a}$ y $\vec{b}$, la proyección de $\vec{a}$ sobre $\vec{b}$ es un segmento sobre la dirección de $\vec{b}$, que se obtiene al trazar la perpendicular por el extremo de $\vec{a}$ hasta la dirección de $\vec{b}$. Este segmento representa el cateto adyacente al ángulo θ de un triángulo rectángulo, y el módulo del vector $\vec{a}$ su hipotenusa.







Por relaciones trigonométricas:

$$\cos\theta = \frac{Proy_{\vec{b}}\,\vec{a}}{|\vec{a}|}, \text{ de donde:}$$

$$Proy_{\vec{b}}\vec{a} = |\vec{a}|\cos\theta = |\vec{a}|\frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}|\left|\vec{b}\right|} = \frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{\left|\vec{b}\right|}$$

$$proy_{\vec{a}}\vec{b} = \frac{\vec{a}.\vec{b}}{|\vec{a}|}$$

La proyección escalar de un vector en la dirección de otro dado es igual al número real que se obtiene haciendo el cociente entre el producto escalar entre los vectores y el módulo del vector sobre el que se hace la proyección.

En caso de que éste resultado sea negativo, la proyección del primer vector se está obteniendo sobre el opuesto del segundo vector; el signo negativo proviene del signo del coseno del ángulo que es mayor que 90°.

Ejemplo: Encontrar la proyección de un vector sobre otro utilizando los vectores del ejemplo anterior.

Solución: $\vec{u} = (2; -3\ ; 1)$ y $\vec{v} = (0{,}5; 2\ ; -4)$; además $\vec{u} \cdot \vec{v} = -9$ y $|\vec{u}| = \sqrt{2^2 + (-3)^2 + 1^2} = \sqrt{14}$ y $|\vec{v}| = \sqrt{0{,}5^2 + 2^2 + (-4)^2} = \sqrt{20{,}25}$.

a) $\text{Pr}oy_{\vec{v}}\,\vec{u} = \dfrac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{|\vec{v}|} = \dfrac{-9}{\sqrt{20{,}25}} = -2$

b) $\text{Pr}oy_{\vec{u}}\,\vec{v} = \dfrac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{|\vec{u}|} = \dfrac{-9}{\sqrt{14}} \cong -2{,}4$

Estas son **proyecciones escalares** de un vector en la dirección de otro.

Proyección escalar del vector $\vec{u}$ en la dirección del vector $\vec{v}$: $\overline{\text{proy}}_{\vec{u}}\,\vec{v} = \frac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{|\vec{u}|}$

También se puede hallar el vector que proyecta el vector $\vec{u}$ en la dirección del vector $\vec{v}$. Esta es la denominada "**proyección vectorial**" de un vector en la dirección de otro dado.

$$\overrightarrow{\text{proy}}_{\vec{u}}\,\vec{v} = \frac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{|\vec{u}|}\,\frac{\vec{u}}{|\vec{u}|} \qquad \overrightarrow{\text{proy}}_{\vec{u}}\,\vec{v} = \frac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{|\vec{u}|^2}\,\vec{u} \qquad \overrightarrow{\text{proy}}_{\vec{u}}\,\vec{v} = \frac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{|\vec{u}||\vec{u}|}\vec{u}$$

$$\overrightarrow{\text{proy}}_{\vec{u}}\,\vec{v} = \frac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{|\vec{u}|}\,\vec{U}_{\vec{u}}$$

En el ejemplo:

$$\overrightarrow{\text{proy}}_{\vec{u}}\,\vec{v} = (-2{,}4)\left(\frac{2}{\sqrt{14}}\,,\frac{-3}{\sqrt{14}}\,,\frac{1}{\sqrt{14}}\right)$$

$\vec{u} = (2\,,2)\qquad \vec{v} = (2\,,-3)\qquad |\vec{v}| = \sqrt{4+9} = \sqrt{13}$

$proy_{\vec{v}}\,\vec{u} = \frac{\vec{u}.\vec{v}}{|\vec{v}|}\qquad proy_{\vec{v}}\,\vec{u} = \frac{4-6}{\sqrt{13}} = -\frac{2}{\sqrt{13}} \approx -0{,}55$

$\overrightarrow{\text{proy}}_{\vec{v}}\,\vec{u} = \frac{\vec{u}.\vec{v}}{|\vec{v}|}\frac{\vec{v}}{|\vec{v}|}\qquad \overrightarrow{\text{proy}}_{\vec{v}}\,\vec{u} = -\frac{2}{\sqrt{13}}\left(\frac{2}{\sqrt{13}}\,,-\frac{3}{\sqrt{13}}\right) = \left(-\frac{4}{13}\,,\frac{6}{13}\right) = (-0{,}3\,;0{,}46)$

$$\overrightarrow{\text{proy}}_{\vec{u}}\,\vec{v} = (-1{,}28\ ;\ 1{,}92\ ;\ -0{,}64)$$

- **Vectores paralelos**

Dos o más vectores del plano o del espacio son paralelos si sus direcciones (rectas que los contienen) son paralelas.

Dados los vectores $\vec{a} = (a_1; a_2; a_3)$ y $\vec{b} = (b_1; b_2; b_3)$, si $\vec{a} \,//\, \vec{b}$, la razón entre las componentes homónimas es una constante. En simbolos:

$$\vec{a} \,//\, \vec{b} \text{ entonces } \lambda = \frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} = \frac{a_3}{b_3}$$

Demostración: Sean $\hat{\alpha}_1$, $\hat{\beta}_1$ y $\hat{\gamma}_1$ los ángulos directores de $\vec{a}$ y $\hat{\alpha}_2$, $\hat{\beta}_2$ y $\hat{\gamma}_2$ los ángulos directores de $\vec{b}$. Como $\vec{a} \,//\, \vec{b}$, sus direcciones son paralelas, es decir los ángulos directores son iguales:

$$\widehat{\alpha_1} = \widehat{\alpha_2}, \widehat{\beta_1} = \widehat{\beta_2} \text{ y } \widehat{\gamma_1} = \widehat{\gamma_2}$$

y también lo serán sus cosenos directores:

$$\cos\hat{\alpha}_1 = \cos\hat{\alpha}_2, \quad \cos\hat{\beta}_1 = \cos\hat{\beta}_2 \quad \text{y} \quad \cos\hat{\gamma}_1 = \cos\hat{\gamma}_2$$

Teniendo en cuenta la definición de coseno director, se tienen las siguientes igualdades

$$\frac{a_1}{|\vec{a}|} = \frac{b_1}{|\vec{b}|} \wedge \frac{a_2}{|\vec{a}|} = \frac{b_2}{|\vec{b}|} \wedge \frac{a_3}{|\vec{a}|} = \frac{b_3}{|\vec{b}|} \Rightarrow a_1 = \frac{|\vec{a}|}{|\vec{b}|} b_1 \wedge a_2 = \frac{|\vec{a}|}{|\vec{b}|} b_2 \wedge a_3 = \frac{|\vec{a}|}{|\vec{b}|} b_3$$

El cociente de los módulos de los dos vectores es un escalar. Haciendo $\frac{|\vec{a}|}{|\vec{b}|} = \lambda$, entonces

$$a_1 = \lambda b_1 \wedge a_2 = \lambda b_2 \wedge a_3 = \lambda b_3 \Rightarrow \lambda = \frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} = \frac{a_3}{b_3}$$

Aceptamos esta última expresión como una forma práctica de indicar las tres igualdades, donde cada cociente es λ. De no ocurrir, se dice que los vectores no son paralelos.

Por ejemplo, los vectores $\vec{a} = (4\,;\,-2\,;\,0{,}5)$ y $\vec{b} = (2\,;\,-1\,;\,0{,}25)$ son paralelos dado que

$$\frac{4}{2} = \frac{-2}{-1} = \frac{0{,}5}{0{,}25} = 2 = \lambda$$

Por otra parte, como $a_1 = \lambda b_1$, $a_2 = \lambda b_2$ y $a_3 = \lambda b_3$, es posible reescribir al vector $\vec{a}$ de la siguiente forma:

$$\vec{a} = (a_1; a_2; a_3) = (\lambda b_1; \lambda b_2; \lambda b_3) = \lambda \vec{b}$$

Entonces, si dos vectores $\vec{a}$ y $\vec{b}$ son paralelos, existe un escalar λ tal que $\vec{a} = \lambda \vec{b}$.

- **Vectores perpendiculares**

Dados dos vectores $\vec{a}$ y $\vec{b}$, si son perpendiculares entonces el ángulo formado entre ellos es igual a $90°$.

$$\theta = 90° \Rightarrow \cos\theta = \frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|} = 0 \Rightarrow \vec{a}\cdot\vec{b} = 0$$

Por ello, dos vectores son perpendiculares cuando el producto escalar es igual a 0.

$$\vec{a} \perp \vec{b}$$

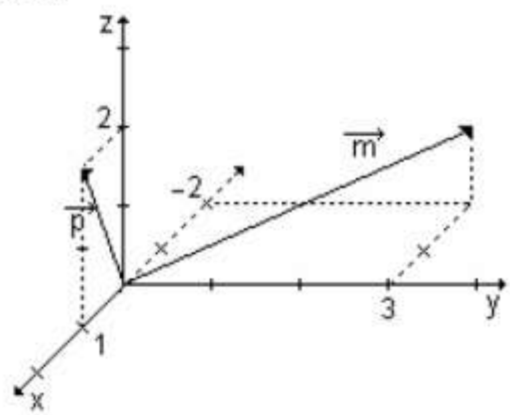
Ejemplo: Calcule el valor de β para que los vectores $\vec{m} = (-2\,,3\,,1)$ y $\vec{p} = (1\,,0\,,\beta)$ sean perpendiculares.

Planteando el producto escalar y resolviendo:

$\vec{m}.\vec{p} = 0 \quad \Rightarrow \quad -2.1 + 3.0 + 1.\beta = 0$

$\Rightarrow \quad \Rightarrow \quad -2 + 0 + \beta = 0 \quad \Rightarrow \quad \beta = 2.$

Gráficamente:



Producto Vectorial o producto cruz

Sean los vectores $\vec{a} = (a_1\,,a_2\,,a_3)$ y $\vec{b} = (b_1\,,b_2\,,b_3)$, el producto cruz o producto vectorial entre estos dos vectores es otro vector, que se simboliza de la siguiente manera:

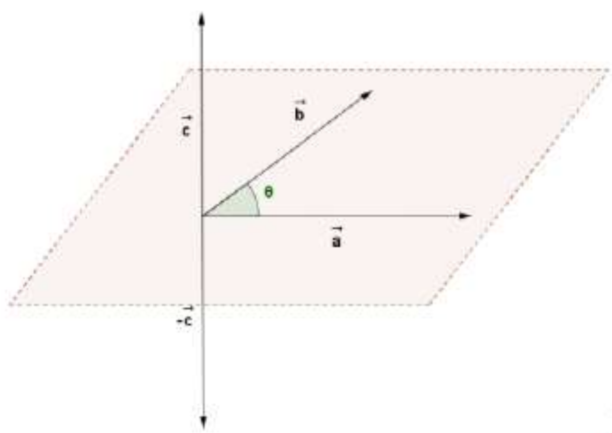
$$\vec{a}x\vec{b} = \vec{c}$$

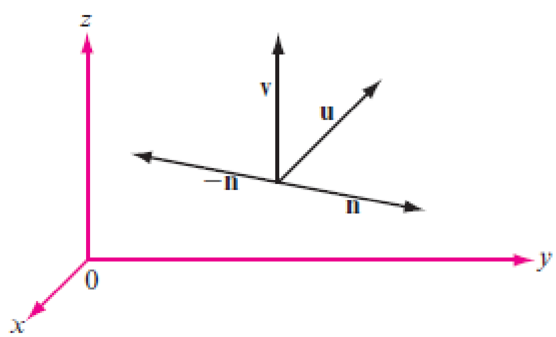
con:

<u>Dirección</u>: Perpendicular a la dirección de ambos vectores. $\vec{a} \times \vec{b}$ es un vector ortogonal a $\vec{a}$ y a $\vec{b}$.

$\vec{a} \times \vec{b} \perp \vec{a} \quad \wedge \quad \vec{a} \times \vec{b} \perp \vec{b}$

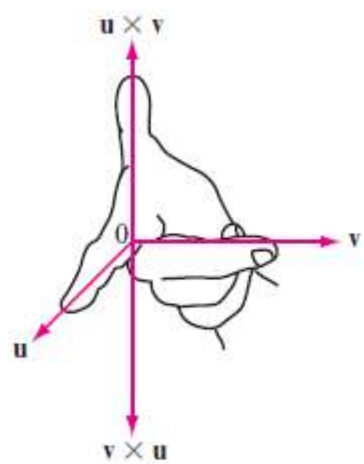
El producto cruz tiene la propiedad de ser anticonmutativo, es decir, el orden de los factores altera el sentido del resultado. Si se realiza cuando se permutan los factores, $\vec{a} \times \vec{b}$ y $\vec{b} \times a$, son vectores con igual dirección pero sentidos opuestos.





<u>Sentido</u>: el sentido de $\vec{a} \times \vec{b}$ sigue la "regla de la mano derecha".

Para saber cuál es el sentido, entre los dos sentidos posibles que tiene el producto vectorial, se utiliza la regla de "la mano derecha". En ella, el dedo índice sigue la dirección y sentido del vector $\vec{a}$, el mayor, la dirección y sentido del vector $\vec{b}$ y el dedo pulgar la dirección de $\vec{a}\times\vec{b}$.



Módulo:

$$|\vec{u} \times \vec{v}| = |\vec{u}||\vec{v}| sen\ \theta$$

Propiedad: $|\vec{u} \times \vec{v}|^2 = |\vec{u}|^2|\vec{v}|^2 - (\vec{u} \cdot \vec{v})^2$

$$= |\vec{u}|^2|\vec{v}|^2 - (|\vec{u}||\vec{v}|\ cos\ \theta)^2$$

$$= |\vec{u}|^2|\vec{v}|^2 - (|\vec{u}|)^2\ (|\vec{v}|\ )^2 cos^2\ \theta$$

$$= |\vec{u}|^2|\vec{v}|^2(1 - cos^2\ \theta)$$

$$= |\vec{u}|^2|\vec{v}|^2 sen^2\ \theta$$

Calculando la raíz cuadrada de ambos miembros: $|\vec{u} \times \vec{v}| = |\vec{u}||\vec{v}| sen\ \theta$

(ver propiedad 3)

El producto vectorial es una operación definida únicamente para vectores de R^3.

Para hallar las componentes del vector se utiliza el método de determinantes:

$$\vec{a} x \vec{b} = \begin{vmatrix} \breve{\imath} & \breve{\jmath} & \breve{k} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} = (a_2b_3 - a_3b_2)\breve{\imath} - (a_1b_3 - a_3b_1)\breve{\jmath} + (a_1b_2 - a_2b_1)\breve{k}$$

Que surge de hacer:

$$\begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{vmatrix} = \mathbf{i}\begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{vmatrix} - \mathbf{j}\begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix} + \mathbf{k}\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}$$

$$= (b_1c_2 - c_1b_2)\mathbf{i} + (c_1a_2 - a_1c_2)\mathbf{j} + (a_1b_2 - b_1a_2)\mathbf{k}$$

O bien:

$$\vec{a}\mathrm{x}\vec{b} = \begin{vmatrix} \breve{\imath} & \breve{\jmath} & \breve{k} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} = (\boldsymbol{a_2b_3} - \boldsymbol{a_3b_2})\breve{\imath}$$

$$\vec{a}\mathrm{x}\vec{b} = \begin{vmatrix} \breve{\imath} & \breve{\jmath} & \breve{k} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} = (a_2b_3 - a_3b_2)\breve{\imath} - (\boldsymbol{a_1b_3} - \boldsymbol{a_3b_1})\breve{\jmath}$$

$$\vec{a}\mathrm{x}\vec{b} = \begin{vmatrix} \breve{\imath} & \breve{\jmath} & \breve{k} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} = (a_2b_3 - a_3b_2)\breve{\imath} - (a_1b_3 - a_3b_1)\breve{\jmath} + (\boldsymbol{a_1b_2} - \boldsymbol{a_2b_1})\breve{k}$$

$$\vec{a}\mathrm{x}\vec{b} = \begin{vmatrix} \breve{\imath} & \breve{\jmath} & \breve{k} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} = \underbrace{(a_2b_3 - a_3b_2)\breve{\imath}} - \underbrace{(a_1b_3 - a_3b_1)\breve{\jmath}} + \underbrace{(a_1b_2 - a_2b_1)\breve{k}}$$

$$c_1\breve{\imath} \quad - \quad c_2\breve{\jmath} \quad + \quad c_3\breve{k} = \vec{c}$$

Ejemplo: Sean los vectores $\vec{u} = 2\breve{\imath} + 3\breve{\jmath} - \breve{k}$ y $\vec{v} = -2\breve{\imath} + \breve{\jmath} - 2\breve{k}$, hallar un vector $\vec{n}$ que sea perpendicular a $\vec{u}$ y $\vec{v}$.

$\vec{v}$ x $\vec{u}$ = $\begin{vmatrix} i & j & k \\ -2 & 1 & -2 \\ 2 & 3 & -1 \end{vmatrix}$ = (-1 – (-6)) i – (2 – (-4)) j + (-6 – 2) k = 5 **i** - 6 **j** -8 **k**

$\vec{v}$ x $\vec{u}$ = (5 , -6 , -8)

<u>Propiedades</u>

1) $\vec{a}x\vec{b} = -(\vec{b}x\vec{a})$

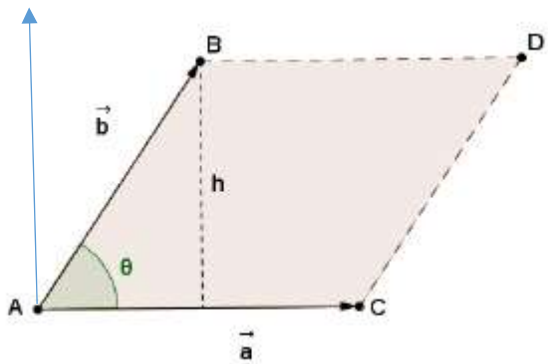
2) $(\vec{a}x\vec{b}) \cdot \vec{a} = 0 \quad \wedge \quad (\vec{a}x\vec{b}) \cdot \vec{b} = 0$

3) $|\vec{a}x\vec{b}|^2 = |\vec{a}|^2|\vec{b}|^2 - (\vec{a} \cdot \vec{b})^2$

4) $|\vec{a}x\vec{b}| = |\vec{a}||\vec{b}| \sin\hat{\theta}$

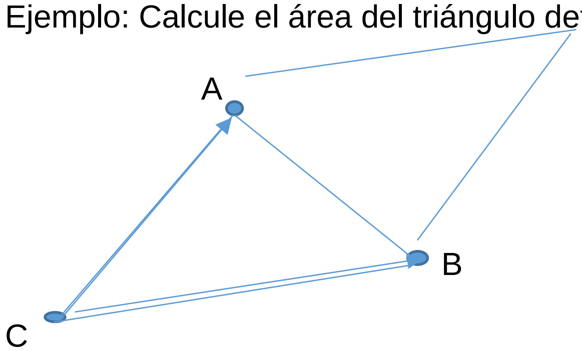
Aplicaciones del Producto vectorial

- **Área de un paralelogramo**



$$\text{Área } ABDC = |\vec{a}|.h = |\vec{a}||\vec{b}|\text{sen}\,\theta = |\vec{a}x\vec{b}|$$

Ejemplo: Calcule el área del triángulo determinado por los puntos A(1, -2 , 4) , B(-3, 2, 5) y C(2 , 0 -1)



$\overrightarrow{CA}$ =(-1 , -2 , 5) $\overrightarrow{CB}$ = (-5 , 2 , 6)

$\overrightarrow{CA}$ X $\overrightarrow{CB}$ = $\begin{vmatrix} i & j & k \\ -1 & -2 & 5 \\ -5 & 2 & 6 \end{vmatrix}$ = -22 i – 19 j -12 k

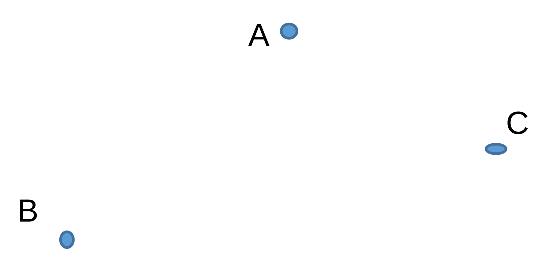
$\left|\overrightarrow{CA} \text{ X } \overrightarrow{CB}\right| = \sqrt{(-22)^2 + (-19)^2 + (-12)^2}$ = 31,44 área del paralelogramo determinado por CA y CB

Área del triángulo ABC = $\frac{|\overrightarrow{CA} \text{ X } \overrightarrow{CB}|}{2}$ = 15,72

- **Determinación de vector perpendicular a un plano.**

Ejemplo: Halle un vector perpendicular al plano determinado por los puntos no alineados

A(1, -2 , 4) , B(-3, 2, 5) y C(2 , 0 -1).



$\overrightarrow{AB}$ = (-4 , 4 , 1)

$\overrightarrow{AC}$ = (1 , 2 , -5) $\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = \begin{vmatrix} \breve{\imath} & \breve{\jmath} & \breve{k} \\ -4 & 4 & 1 \\ 1 & 2 & -5 \end{vmatrix} = (-20-2)\breve{\imath} - (20-1)\breve{\jmath} + (-8-4)\breve{k}$

$= -22\,\breve{\imath} - 19\,\breve{\jmath} - 12\breve{k}$

Producto Mixto

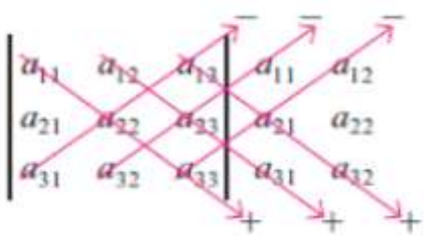
Dados tres vectores $\vec{a} = (a_1; a_2; a_3)$, $\vec{b} = (b_1; b_2; b_3)$ y $\vec{c} = (c_1; c_2; c_3)$, el producto mixto es una combinación entre el producto vectorial y el producto escalar. Se define como el producto vectorial de dos vectores por el producto escalar con un tercer vector; en símbolos:

$$\left(\vec{a}x\vec{b}\right) \cdot \vec{c} = \lambda$$

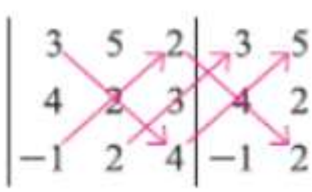
Se observa que el resultado del producto mixto es un escalar.

Para realizar el cálculo, se puede optar por realizar cada operación por separado o utilizar el método de determinantes adaptado para este caso:

$$\left(\vec{a}x\vec{b}\right) \cdot \vec{c} = \begin{vmatrix} c_1 & c_2 & c_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} = (a_2b_3 - a_3b_2)c_1 - (a_1b_3 - a_3b_1)c_2 + (a_1b_2 - a_2b_1)c_3$$



$$[(4\,,2\,,3) \times (-1\,,2\,,4)]\,.\,(3\,,5,\,2) = \begin{vmatrix} 3 & 5 & 2 \\ 4 & 2 & 3 \\ -1 & 2 & 4 \end{vmatrix}$$

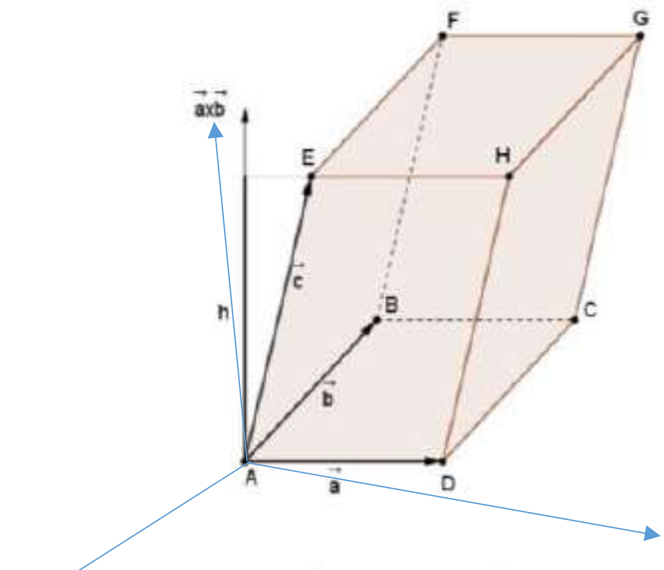


$$= (3)(2)(4) + (5)(3)(-1) + (2)(4)(2) - (-1)(2)(2) - (2)(3)(3) - (4)(4)(5)$$

$$= 24 - 15 + 16 + 4 - 18 - 80 = -69$$

Aplicaciones del Producto mixto

- **Volumen de un paralelepípedo (interpretación geométrica del resultado del producto mixto entre tres vectores)**
  “El valor absoluto el producto mixto representa el volumen del paralelepípedo determinado por los tres vectores en producto”



$$Volumen = superficie\ base\ .\ altura$$

$$Volumen = |\vec{a}x\vec{b}|.\,h = |\vec{a}x\vec{b}|\,.\,Proy_{\vec{a}x\vec{b}}\,\vec{c} = |\vec{a}x\vec{b}|.\frac{\left(\vec{a}x\vec{b}\right)\cdot\vec{c}}{|\vec{a}x\vec{b}|} = \left(\vec{a}x\vec{b}\right)\cdot\vec{c}$$

- **Determinación de la coplanaridad de vectores.**

$$Volumen = \mathbf{0} \Rightarrow \left(\vec{a}x\vec{b}\right)\cdot\vec{c} = \mathbf{0} \Rightarrow \left(\vec{a}x\vec{b}\right) \perp \vec{c} \Rightarrow \vec{a}, \vec{b}\ y\ \vec{c}\ son\ coplanares$$

Se dice que son coplanares cuando pertenecen al mismo plano

Ejemplo: obtener el volumen del paralelepípedo cuyas aristas representan a los vectores (1;1;1) (1;2;2) y (1;3;3).

Solución: las aristas del cubo corresponden a los vectores

$$\vec{a} = (1; 1; 1) \text{ ; } \vec{b} = (1; 2; 2) \text{ y } \vec{c} = (1; 3; 3)$$

$$Volumen = (\vec{a}x\vec{b}) \cdot \vec{c} = \begin{vmatrix} \breve{\imath} & \breve{\jmath} & \breve{k} \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \end{vmatrix} \cdot (1; 3; 3) = (0; -1; 1) \cdot (1; 3; 3) = 0$$

Como el producto mixto de los tres vectores es igual a cero, entonces los mismos son vectores coplanares, es decir, se encuentran en un mismo plano.

$$\vec{v} = (1, 1, 2)$$

¿es un vector unitario? No es un versor, porque el módulo es distinto de 1.

$$|\vec{v}| = \sqrt{1^2 + 1^2 + 2^2} = \sqrt{6}$$

¿cómo buscamos otro vector que tenga módulo 1 y que tenga la misma dirección y sentido que $\vec{v}$?

$$\breve{u}_{\vec{v}} = \frac{(1, 1, 2)}{\sqrt{6}} = \frac{1}{\sqrt{6}} (1, 1, 2) = (\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{2}{\sqrt{6}})$$