CONJUNTOS NUMÉRICOS

NÚMEROS NATURALES

AXIOMAS DE PÉANO (1858-1932)

Axioma 1. Cero es un número natural.

Axioma 2. Existe una biyección $\varphi : N \to N^*$ que, a todo número natural x, asocia un número natural x^φ, denominado el siguiente de x.

Axioma 3, o axioma de recurrencia (inducción). Sea A una parte de N tal que A contiene al cero, y que, si A contiene a x, entonces A también contiene al siguiente x^φ. Entonces A coincide con el conjunto N de todos los números naturales.

Sea $A \subset$ **N.** $\begin{pmatrix} 0 \in A \\ x \in A \to x^\varphi \in A \end{pmatrix} \to A = N$

La proposición $x \in A$ se denomina *hipótesis de recurrencia*.

Las propiedades de N son:

1. Es **infinito** (∞).

2. Tiene primer elemento: cero. No tiene último elemento.

3. Todo número natural tiene un **sucesor.** Un número natural y su sucesor se dicen **consecutivos**.

4. Todo número (excepto cero) tiene un **antecesor**.

5. El sucesor **c** de un número natural **b** es mayor que él y su antecesor **a** es menor. Simbólicamente: **a < b < c**

6. Entre dos números naturales existe siempre un número finito de números naturales. Por eso se dice que es un conjunto discreto.

Definida la operación suma en N, esta operación verifica:

- La suma es interna en N
- Es asociativa
- Tiene elemento neutro: el cero.
- Es conmutativa

N es un *monoide aditivo conmutativo.*

Definida la operación multiplicación en N, esta operación verifica:

- La multiplicación es interna en N
- Es asociativa
- Tiene elemento neutro: el uno.
- Es conmutativa

N es un *monoide multiplicativo conmutativo.*

La relación ≤ es un ***orden total*** en **N**.

NÚMEROS ENTEROS

La ecuación x + b = a no es siempre resoluble en el conjunto de los números naturales, si bien, cuando tiene solución, ésta es única. La resta es una "operación parcialmente definida" en N.

El problema de la simetrización de la adición en **N** conduce a la introducción de nuevos símbolos, denominados ***enteros negativos*** $\mathbf{Z}^-$ **,**(los enteros naturales se denominan entonces ***enteros positivos,*** $\mathbf{Z}^+$).

A todo número natural $x \in \mathbf{N}$, se asocia un entero negativo, denotado -x (-x es distinto de x salvo para x = 0). Se tiene así una biyección $x \to -x$ de **N** sobre $\mathbf{N}^-$ con -0 = 0. Si se toma $\mathbf{Z} = \mathbf{N} \cup \mathbf{Z}^-$ **,** la biyección $x \to -x$ es una extensión de una involución de **Z** por la convección –(–x) = x.

Las propiedades de Z son:

1. Es infinito (∞).
2. No tiene primero ni último elemento.
3. Todo número entero tiene un sucesor. Un número entero y su sucesor se dicen consecutivos.
4. Todo número entero tiene un antecesor.
5. El sucesor **c** de un número natural **b** es mayor que él y su antecesor **a** es menor. Simbólicamente: **a** < **b** < **c**
6. Entre dos números enteros existe siempre un número finito de números enteros. Por eso, el conjunto de números enteros es discreto.

Desde el punto de vista de las estructuras, Z, respecto de las operaciones suma y producto, es un ***anillo conmutativo, íntegro.***

Es un anillo conmutativo porque:

(Z, + , .)

(Z , +)	(Z , .)	
+ es interna en Z	. es interna en Z	la segunda ley (.) es
+ es asociativa	. es asociativa	distributiva respecto
Tiene elemento neutro: el cero	Tiene elemento neutro: el uno	a la primera ley (+).
Existen elementos simétricos: x ; –x	. es conmutativa	
+ es conmutativa		
(Z , +) es un grupo conmutativo		

Un anillo A ≠ {0} es sin divisores de cero si para cualesquiera dos elementos a, b de A se verifica que: a ≠ 0, b ≠ 0, ab ≠ 0.

Un anillo es íntegro si es distinto de {0} y no posee divisores de cero.

La relación ≤ es un ***orden total*** en **Z**.

Isomorfismo de los Números Enteros no negativos con los Números Naturales

Sea Z_0^+ el conjunto de los enteros no negativos. Se define: $f : Z_0^+ \to N$

Mediante la asignación f(+a) = a

Se verifica

i) F es inyectiva, pues

$$+a \neq +b \Rightarrow a \neq b \Rightarrow F(+a) \neq F(+b)$$

ii) F es sobreyectiva, ya que

$$\forall a \in \mathbf{N}, \exists +a \in \mathbf{Z}^+ \ / \ F(+a) = a$$

iii) F es un morfismo respecto de la adición en $\mathbf{Z}^+$ y en **N**.

$$F[(+a) + (+b)] = F[+(a+b)] =$$
$$= a + b = F(+a) . F(+b)$$

iv) F es un morfismo respecto de la multiplicación en $\mathbf{Z}^+$ y en **N**.

$$F[(+a) . (+b)] = F[+(a . b)] =$$
$$= a . b = F(+a) . F(+b)$$

En consecuencia, F es un isomorfismo de $\mathbf{Z}^+$ en **N**, es decir, ambos conjuntos son indistinguibles algebraicamente y pueden identificarse.

Rojo. Álgebra I, pág.285

Desde ésta concepción, podemos decir que:

Conjunto de los números Naturales $\subset$ Conjunto de los números Enteros

N $\subset$ Z

NÚMEROS RACIONALES

La ecuación bx = a no es siempre resoluble en el conjunto de los números enteros, si bien, cuando tiene solución, ésta es única. El cociente es una “operación parcialmente definida” en Z.

Sabemos que **Z** es un anillo conmutativo. Que la multiplicación no define en **Z** una estructura de grupo (los únicos elementos inversibles de **Z** son +1 y -1). El problema que se plantea para **Z** es el de hacer una extensión de **Z** a un *conjunto más vasto que sea un grupo conmutativo*. La solución de este problema conduce a la construcción del cuerpo **Q** de los números racionales.

$$Q = \{(a,b)/ \ \ a \in Z \ \ y \ \ b \in Z - \{0\}\}$$

$$Q = \left\{\frac{a}{b}/ \ \ a \in Z \ \ y \ \ b \in Z - \{0\}\right\}$$

Equivalencia de fracciones:

Dos fracciones (a , b) y (c , d) se dicen equivalentes sii ad = bc. Se denota: (a , b) ≡ (c , d) ⇔ ad = bc

El conjunto cociente Z x Z* por esta relación de equivalencia será denotado Q. Una clase de equivalencia será denotada por [a , b] si se desea poner en evidencia a un representante (a, b) de la clase [a , b].

Las propiedades de Q son:

1. Es infinito (∞).
2. No tiene primero ni último elemento.
3. Entre dos números racionales existen infinitos racionales. Por ello, se dice que el conjunto de números racionales es denso.
4. Como consecuencia de la propiedad anterior, ningún número racional tiene sucesor ni antecesor.
5. Q es un conjunto ordenado por la relación menor o igual.
6. Q es numerable.

Desde el punto de vista de las estructuras, Q, respecto de las operaciones suma y producto, es un ***cuerpo conmutativo.*** Esto es así porque:

(Q, + , .)

(Q , +)	(Q –{0} , .)	
+ es interna en Q	. es interna en Q	la segunda ley (.) es
+ es asociativa	. es asociativa	distributiva respecto
Tiene elemento neutro: el cero	Tiene elemento neutro: el uno	a la primera ley (+).
Existen elementos simétricos: x ; –x	Existen elementos simétricos: x ; x^{-1}	
+ es conmutativa	. es conmutativa	
(Q , +) es un grupo conmutativo	(Q –{0}, .) es un grupo conmutativo	

Isomorfismo de una parte de Q en Z

Sea Q_1 el conjunto de los números racionales de denominador 1, es decir, todas las clases del tipo [a , 1] = $\frac{a}{1}$, con a ∈ Z. Se define: f : Q_1 → Z, mediante la asignación $f\left(\frac{a}{1}\right)$ = a

F es un morfismo biyectivo respecto a la adición y a la multiplicación.

f es un morfismo para la adición pues, para todo a y b de A,

$$[(a+b)m, m] = [am, m] + [bm, m] \Rightarrow f(a+b) = f(a) + f(b) .$$

f es un morfismo para la multiplicación, pues:

$$[abm, m] = [am,m]\cdot[bm, m] \Rightarrow f(ab) = f(a)\cdot f(b)$$

Esto significa que los conjuntos Q_1 y Z son isomorfos y, en consecuencia, identificables algebraicamente.

Desde ésta concepción, podemos decir que:

Conjunto de los números Naturales $\subset$ Conjunto de los números Enteros $\subset$ Conjunto de los números Racionales

N $\subset$ Z $\subset$ Q

NÚMEROS REALES

La ecuación $x^2 - 2 = 0$ no tiene solución en el campo de los números racionales. No existe un número racional cuyo cuadrado sea 2. Es decir, el conjunto de los números racionales es insuficiente para proporcionar soluciones a todas las ecuaciones de segundo grado. La solución a esta ecuación requiere la descripción de los **números irracionales**.
Los números irracionales son aquellos cuya expresión decimal es infinita y no tiene un período.

Definición

Intervalo cerrado racional de extremos a y b (siendo $a \leq b$), es el conjunto

$$[a, b] = \{x \in \mathbf{Q} \;/\; a \leq x \leq b\}$$

De acuerdo con 9.18.2, el conjunto $[a, b] \subset \mathbf{Q}$ es infinito, porque entre dos racionales distintos existe otro, salvo el caso $a = b$ en que el intervalo se llama degenerado y se reduce a un único elemento.

Amplitud del intervalo cerrado $[a, b]$ es el número racional $b - a$.

Sucesión de intervalos cerrados racionales es toda función f, con dominio $\mathbf{N}$, y cuyo codominio es el conjunto de todos los intervalos cerrados racionales.

Una tal sucesión queda determinada por el conjunto de las imágenes

$$[a_1, a_1'], [a_2, a_2'], \ldots, [a_n, a_n'], \ldots$$

donde $f(n) = [a_n, a_n'] \subset \mathbf{Q}$

Axioma del Supremo:

Sea E un conjunto ordenado y A una parte no vacía y acotada superiormente de E.

Si el conjunto de las cotas superiores de A admite un mínimo m (la menor de las cotas superiores de A), entonces m se llama supremo de A, y se denota SupA. Si toda parte no vacía y acotada superiormente posee esta propiedad se dice que E satisface el ***axioma del supremo.***

Es decir: Toda parte no vacía y acotada superiormente de un conjunto ordenado E tiene supremo.

Definición

Encaje de intervalos cerrados racionales es toda sucesión de intervalos cerrados racionales $[a_i, a'_i] \subset \mathbf{Q}$, con $i \in \mathbf{N}$, que satisface las siguientes condiciones:

i) Es decreciente, en el sentido de que cada intervalo contiene al siguiente

$$i \in \mathrm{N} \Rightarrow [a_i, a'_i] \supset [a_{i+1}, a'_{i+1}]$$

O bien

$$i \in \mathbf{N} \Rightarrow \mathrm{I}_{i+1} \subset \mathrm{I}_i \text{ siendo } \mathrm{I}_i = [a_i, a'_i]$$

ii) La sucesión de amplitudes es convergente a 0.

$$\forall \varepsilon > 0, \exists n_o(\varepsilon) \;/\; n > n_o \Rightarrow a'_n - a_n < \varepsilon$$

Es decir, prefijado cualquier número positivo ε, es posible determinar un número n_0 que depende de ε, tal que para todo índice de la sucesión que supere a n_0 ocurre que la amplitud del intervalo correspondiente es menor que ε.

Relación de equivalencia en el conjunto de los encajes de intervalos cerrados racionales. El número real.

Sea A el conjunto de todos los encajes de intervalos cerrados racionales. Cada elemento de A es una sucesión decreciente de intervalos encajados, que denotamos con $[a_i, a'_i]$.

En A se define la relación ~ mediante

$$[a_i, a'_i] \sim [b_j, b'_j] \Leftrightarrow a_i \leq b'_j \;\wedge\; b_j \leq a'_i \qquad \forall i\, \forall j \qquad (1)$$

Es decir, dos encajes de intervalos cerrados racionales están relacionados si y sólo si las aproximaciones por defecto de cada uno no superan a las aproximaciones por exceso del otro.

La relación definida en (1) es una relación de equivalencia.

Definición

Número real es toda clase de equivalencia determinada por la relación (1) en el conjunto de todos los encajes de intervalos cerrados racionales.

Conjunto de los números reales es el cociente de A por la relación de equivalencia.

La notación $\alpha = K_{[a_i, a'_i]}$ denota el número real asociado a la clase de equivalencia del encaje $[a_i , a'_i]$.

Un real se llama racional si y sólo si el encaje representativo de su clase tiene intersección no vacía. Si tal intersección es vacía, el real se llama irracional.

Definición

Número real 0 es la clase de equivalencia de todo encaje cuyas aproximaciones por defecto no son positivas, y cuyas aproximaciones por exceso no son negativas.

El encaje $\left[-\frac{1}{i} , \frac{1}{i}\right]$, y todos los equivalentes a él, definen el número real 0 es decir

$$0 = K_{\left[-\frac{1}{i} , \frac{1}{i}\right]}$$

Definición

Un número real es positivo si y sólo si todos los encajes de su clase admiten alguna aproximación por defecto positiva.

Un número real es negativo si y sólo si alguna aproximación por exceso de todos los encajes de su clase es negativa.

En símbolos

$$\alpha < 0 \Leftrightarrow \alpha = K_{[a_i, a'_i]} \,/\, \exists\, a'_i < 0$$

$$\alpha > 0 \Leftrightarrow \alpha = K_{[a_i, a'_i]} \,/\, \exists\, a_i > 0$$

Rojo. Álgebra I, pág.315.

Las propiedades de R son:

1. Es infinito (∞).
2. $\mathbb{R}$ no tiene ni primer ni último elemento.
3. Es un conjunto totalmente ordenado: dados dos números reales distintos, siempre se puede establecer entre ellos una relación de menor o mayor.

4. Ley de Tricotomía Dado cualquier par de números reales a y b, se verifica necesariamente una y solamente una de las siguientes: a < b ; a = b ó a > b

5. Los números reales completan la recta numérica. Es decir, a todo número real le corresponde un punto sobre la recta y a todo punto sobre la recta le corresponde un número real.

6. R es completo. Es decir, todo subconjunto no vacío y acotado de R tiene extremo superior en R.

7. Entre dos números reales existen infinitos números reales, es decir, **R** es un conjunto **denso**. Como además completa la recta, decimos que **R** es **denso** y **continuo**.

Desde el punto de vista de las estructuras, **R** satisface las tres condiciones siguientes:

1. R es un cuerpo conmutativo

2. Existe un orden total sobre R, que confiere a R, la estructura de cuerpo ordenado.

3. Toda parte no vacía y mayorada de R admite un supremo (la menor de las cotas superiores - verifica el Axioma del Supremo). Y, como consecuencia del Axioma del Supremo, toda parte no vacía y acotada inferiormente de R admite un ínfimo (la mayor de las cotas inferiores).

Isomorfismo de una parte de R en Q

Sea R_Q el conjunto de los números reales definidos por clases de equivalencia asociadas a encajes de intervalos son intersección no vacía en Q. La función: f : $R_Q \rightarrow$ Q, que asigna a cada elemento de R_Q el número racional correspondiente es un morfismo biyectivo respecto a la adición y a la multiplicación, y en consecuencia, es un isomorfismo que permite identificar algebraicamente a los conjuntos R_Q y Q.

Desde ésta concepción, podemos decir que:

$$\textit{Números Reales}\begin{cases} \textit{Racionales}\begin{cases} \textit{Enteros}\begin{cases}\textit{Enteros positivos}\\ \textit{cero}\\ \textit{Enteros negativos}\end{cases} \\ \left.\begin{matrix}\textit{Decimales exactos}\\ \textit{Decimales periódicos}\end{matrix}\right\} \textit{Cocientes de dos enteros}\end{cases} \\ \textit{Irracionales (infinitas cifras no periódicas)}\end{cases}$$

Conjunto de los números Naturales $\subset$ Conjunto de los números Enteros $\subset$ Conjunto de los números Racionales $\subset$ Conjunto de los números Reales

N $\subset$ Z $\subset$ Q $\subset$ R