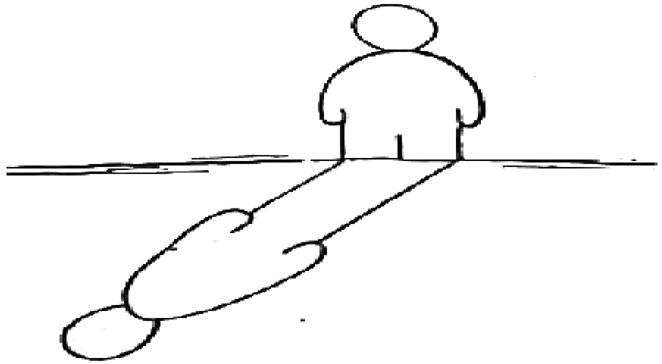
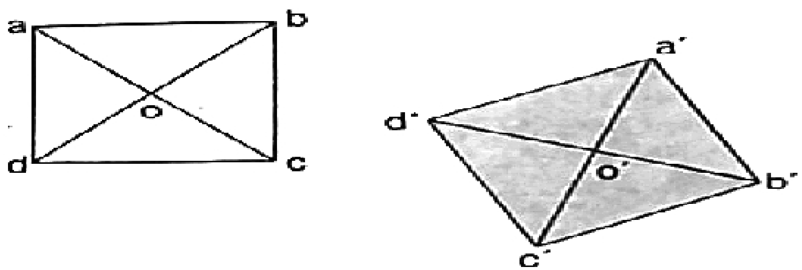
3 Transformaciones del plano en sí mismo

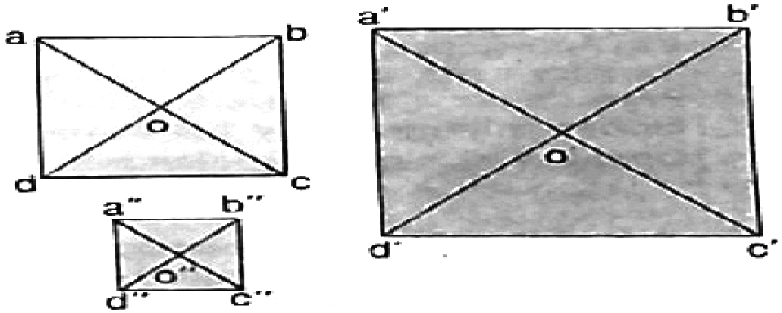


Este "hombrecito de baja estatura" contempla la sombra de su figura transformada en una silueta alargada y afinada.
En muchas oportunidades observamos transformaciones de figuras. Así, por ejemplo, en el cine aparecen las imágenes de la película ampliadas en la pantalla; en los espejos de los parques de diversiones vemos las imágenes deformadas y en los cuadros contemplamos las figuras proyectadas en perspectiva.
Los matemáticos se interesan por estudiar las transformaciones de las figuras y analizar cuáles son las propiedades que se mantienen en dichas transformaciones.

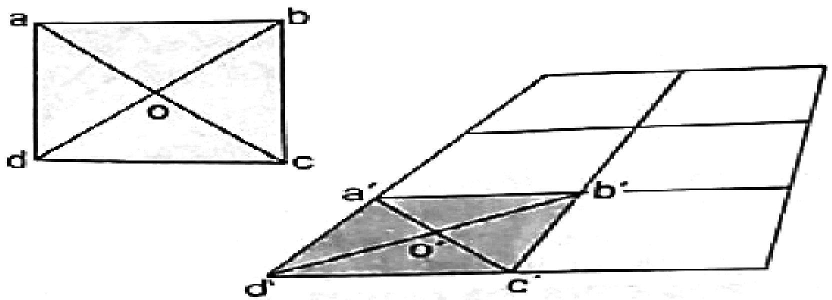
Veamos, por ejemplo, algunas de las transformaciones que podemos realizar con un cuadrado.



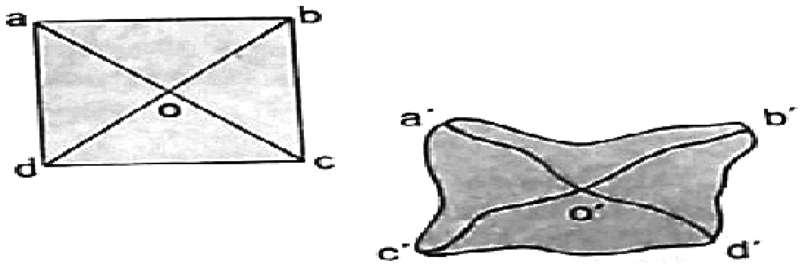
1 – Podemos moverlo y cambiar su posición.



2 – Podemos ampliarlo o reducirlo.



3 – Podemos proyectarlo en perspectiva sobre el papel.



4 – Podemos dibujarlo en una lámina elástica y estirarla hasta deformarlo arbitrariamente.

¿En cuáles de estas transformaciones se mantienen las longitudes?
¿En cuáles se mantienen los ángulos?
¿En cuáles se mantienen los puntos alineados?
¿En cuáles se mantiene el ordenamiento de los puntos?

Las longitudes se mantienen solamente en la primera.

$\overline{a'b'} \cong \overline{ab}$ en 1

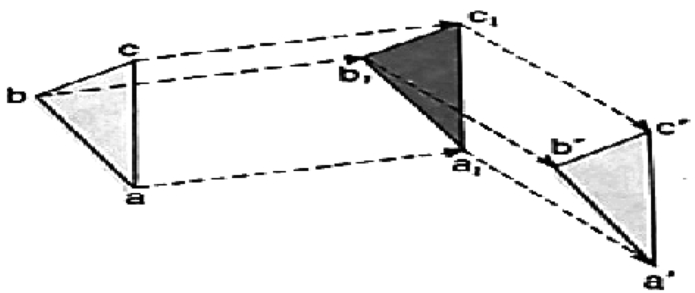
Los ángulos se mantienen en la primera y en la segunda.

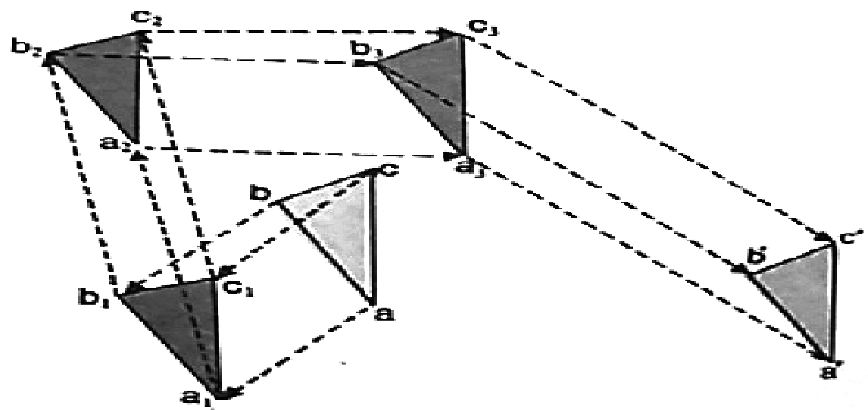
$a'\hat{o}'b' \cong a\hat{o}b$ en 1 y en 2

La alineación se mantiene en las tres primeras; **a', o' y c'** están alineados en 1, 2 y 3.
El ordenamiento de los puntos se mantiene en las cuatro transformaciones. a, o, c y sus transformados a', o' y c' figuran en el mismo orden.

Movimientos en el plano

Nosotros estudiamos especialmente los movimientos de figuras en el plano. En un movimiento la única transformación que se observa es el cambio de posición; es decir, que la figura no se deforma. Por eso llamamos a estas transformaciones **movimientos rígidos.**
La figura pasa de una posición inicial a una posición final, llamada transformada de la primera, por el movimiento.
Para llegar a la posición final la figura pasa por una sucesión de posiciones intermedias y las trayectorias recorridas pueden ser distintas.
Observa el siguiente ejemplo:

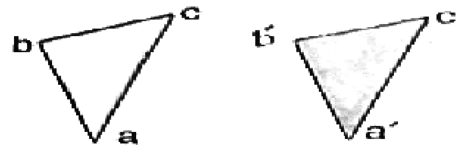




Aunque la posición final es la misma, las trayectorias son distintas.
Al físico le importan las sucesivas posiciones en el transcurso del tiempo. Pero al matemático no le interesan las posiciones intermedias ni el tiempo transcurrido; solamente le importan la posición inicial, la posición final y la correspondencia que puede establecerse entre los puntos de una figura y su transformada. Es decir, que el matemático considera el movimiento como una correspondencia de puntos.

a $\longleftrightarrow$ **a'** **b** $\longleftrightarrow$ **b'** **c** $\longleftrightarrow$ **c'**

A cada punto de la figura inicial corresponde uno y sólo uno de la segunda, llamado **imagen** o **transformado** del primero.
Estas transformaciones son, pues, **funciones puntuales**.

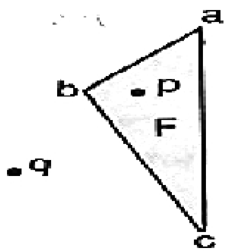


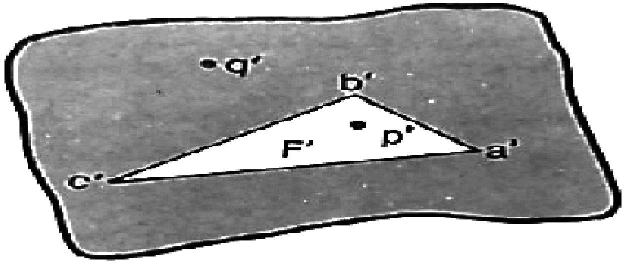
a' es la **imagen** o **transformado** de a

$f : a \longrightarrow a'$ o $f(a) = a'$
$f : b \longrightarrow b'$ o $f(b) = b'$
$f : c \longrightarrow c'$ o $f(c) = c'$

$f : F \longrightarrow F'$
F y F' son conjuntos de puntos.

Dibuja una figura F en la hoja de tu cuaderno; cálcala en un papel transparente y luego desplaza el papel. La figura F' dibujada en él es la transformada de F. Pero solidariamente con los puntos de la figura se han desplazado todos los puntos del papel.



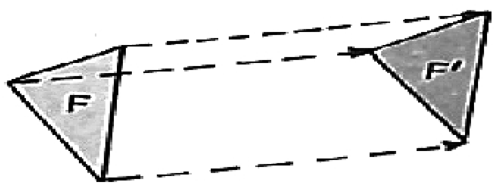


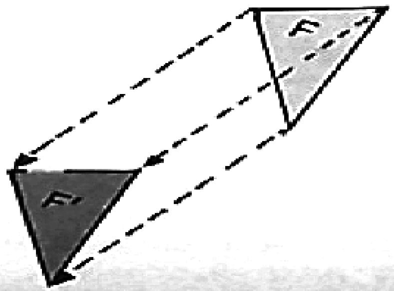
Al punto p interior al $\hat{abc}$ corresponde el punto p' interior al $\hat{a'b'c'}$.
Al punto **q** exterior al $\hat{abc}$ corresponde el punto q' exterior al $\hat{a'b'c'}$.

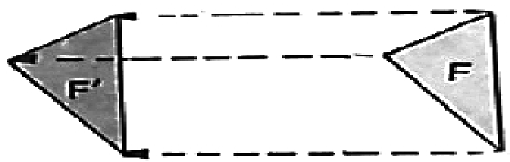
Si consideramos que el trozo de papel representa el plano, resulta que a todo punto de éste corresponde como transformado otro punto del mismo plano.
Decimos que **el plano se transforma en sí mismo.**
Estudiaremos ahora los distintos tipos de movimientos.

I Traslación

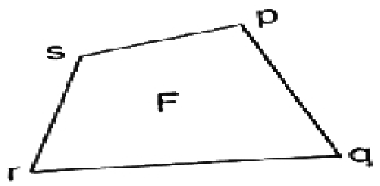
El profesor dijo:
— Trasladen 3 cm la figura F.
¿Son suficientes estos datos para determinar la figura transformada F'?
Éstos son algunos de los trabajos que mostraron los alumnos.







— En cada caso, la posición de la imagen F′ es distinta.
¿Cuáles son, entonces, los elementos que determinan una traslación? Es decir, ¿qué datos necesitamos para obtener una imagen única y bien determinada?



Supongamos que se quiere trasladar la figura F, de modo que el punto **p** tenga como imagen el punto **p′**.
¿Cómo determinamos la imagen de los puntos restantes?

Dado el par ordenado de puntos (**p**, **p′**) quedan determinados: la distancia, la dirección y el sentido de la traslación (de **p** hacia **p′**). En consecuencia, es suficiente conocer el segmento $\overrightarrow{pp'}$ orientado de **p** hacia **p′**.

DEFINICIÓN: Todo segmento orientado se llama **vector**.

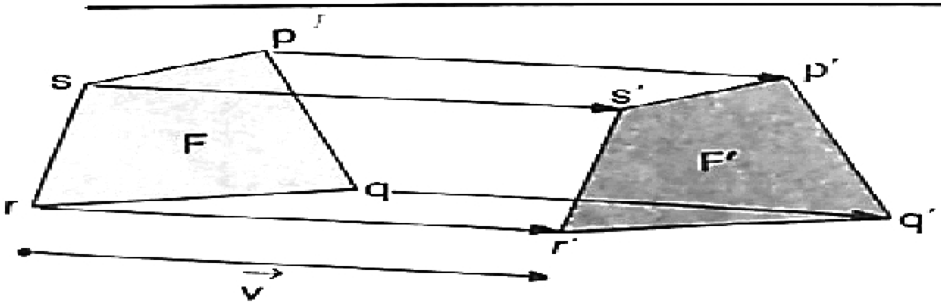
Observa que:

Un vector pp′ queda determinado por un par ordenado de puntos: (p, p′).

El vector pp′ se anota: $\overrightarrow{pp'}$ o simplemente con una letra minúscula $\vec{v}$, $\vec{u}$, $\vec{x}$, $\vec{y}$, . . .

p se llama **origen** del vector.
p′ se llama **extremo** o **punta** del vector.

DEFINICIÓN: Dos vectores congruentes, paralelos y del mismo sentido se llaman **equipolentes**.



Por lo tanto para obtener la imagen de F, se trazan vectores equipolentes a $\overrightarrow{pp'}$ por cada vértice y se unen ordenadamente los puntos obtenidos.
Es decir, que la traslación queda determinada por el vector v.

$\overrightarrow{pp'} \uparrow\uparrow \overrightarrow{qq'} \uparrow\uparrow \overrightarrow{rr'} \uparrow\uparrow \overrightarrow{ss'}$,
$\uparrow\uparrow$ se lee: "es equipolente a"

En consecuencia, podemos dar la siguiente

DEFINICIÓN: Se llama **traslación** de vector **v** a la transformación del plano en sí mismo, que a cada punto **p** de éste hace corresponder como imagen otro punto **p′** del mismo plano, tal que: $\overrightarrow{pp'} = \vec{v}$.

Notación: Puesto que la traslación es una función puntual, la notación es similar a la que usamos para funciones.

$T_{\vec{v}} : p \longrightarrow p' \quad \vec{v} = \overrightarrow{pp'}$

se lee: "la traslación T de vector $\vec{v}$, aplica o transforma el punto **p** en **p'**.

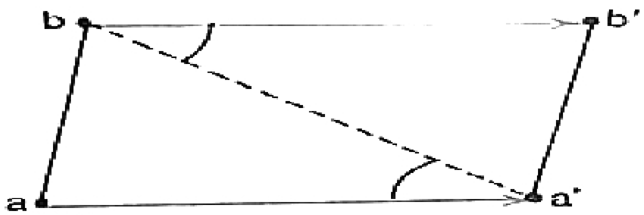
o bien:

$p' = T(p) \quad \overrightarrow{pp'} = \vec{v}$

que se lee: **p'** es la imagen de **p** por la traslación T de vector $\vec{v}$.

EJERCICIOS

1 Demuestra que en una traslación el transformado de un segmento ab es otro segmento a'b' congruente al dado.



"congruente a" se anota: $\cong$

Unimos b con a'.

Comparamos los triángulos $a\hat{b}a'$ y $b'\hat{a}'b$

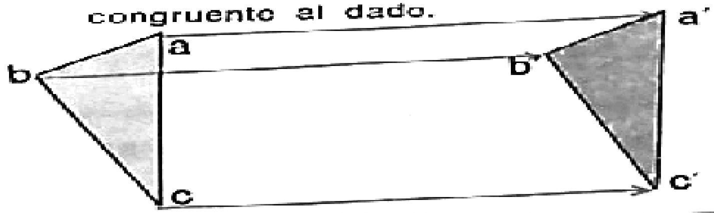
$$a\hat{b}a' \text{ y } b'\hat{a}'b \left\{ \begin{array}{ll} \overline{aa'} \cong \overline{bb'} & (aa' \text{ y } bb' \text{ son vectores equipolentes}). \\ \overline{ba'} \cong \overline{ba'} & \text{prop. reflexiva.} \\ a\hat{a'}b \cong b'\hat{b}a' & \text{alternos internos entre rectas paralelas.} \end{array} \right.$$

Entonces $a\hat{b}a' \cong b'\hat{a}'b$ y $\boxed{\overline{ab} \cong \overline{a'b'}}$

Esto equivale a decir que:

Las traslaciones conservan las distancias.

2 Demuestra que en una traslación el transformado de un triángulo es otro triángulo congruente al dado.



$$\left. \begin{array}{l} \overline{a'b'} \cong \overline{ab} \\ \overline{b'c'} \cong \overline{bc} \\ \overline{c'a'} \cong \overline{ca} \end{array} \right\} \text{Segmentos correspondientes en la traslación } T_{\vec{v}}$$

$\Rightarrow a'\hat{b}'c' \cong a\hat{b}c$

$$\Rightarrow \boxed{a'\hat{b'}c' \cong a\hat{b}c \; ; \; b'\hat{c'}a' \cong b\hat{c}a \; ; \; c'\hat{a'}b' \cong c\hat{a}b}$$

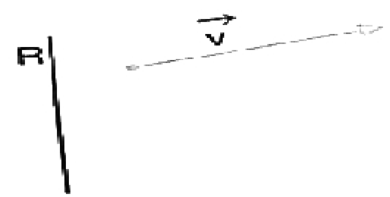
Es decir que:

Las traslaciones conservan los ángulos. (2)

De (1) y (2) resulta como consecuencia que:

Toda figura F y su transformada por una traslación son congruentes.

3



Determina la imagen de R por la traslación $T_{\vec{v}}$.

a) ¿Cuántos puntos necesitas trasladar para determinar la recta transformada de R?

b) Demuestra que la transformada de R es una recta R' // R. (Sugerencia: La demostración del ejercicio 1 puede ayudarte.)

De los ejercicios 1 y 3 resulta que:

Un segmento y su transformado por una traslación son congruentes y paralelos.

Vector nulo. Traslación idéntica

DEFINICIÓN: Se llama vector nulo al vector cuyo origen coincide con su extremo.

Se anota:

$\vec{aa}$ o $\vec{bb}$ o $\vec{o}$

Observa: Si $T_{\vec{aa}} : a \longrightarrow a'$ entonces $T_{\vec{aa}} : a \longrightarrow a$

La traslación de vector nulo transforma a todo punto en sí mismo.

DEFINICIÓN: La traslación que transforma todo punto del plano en sí mismo se llama **traslación idéntica** o **identidad**.

Se anota:

$T_{\vec{aa}}$, o $T_{\vec{o}}$, o I ; $T_{\vec{aa}} = I$ $I : a \longrightarrow a$

DEFINICIÓN: Todo punto que se transforma en sí mismo **se llama punto doble o unido.**

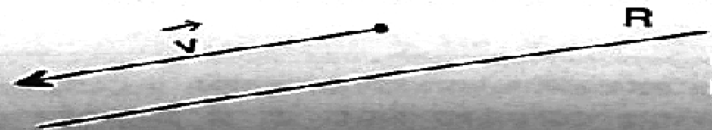
De la misma manera decimos que una figura es unida cuando se transforma en sí misma.

En la traslación idéntica todos los puntos son unidos.

EJERCICIOS

---

4 Aplica a la recta R una traslación de vector $\vec{v}$ paralelo a ella.

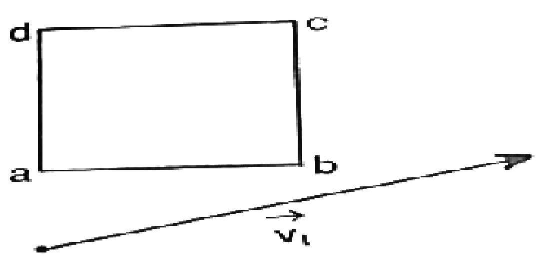


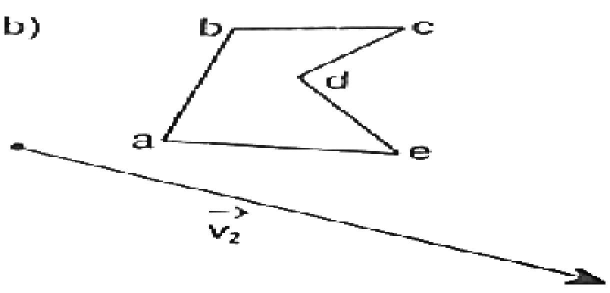
a) ¿Cuál es la recta transformada de R?

b) ¿Existe algún punto unido en la traslación?

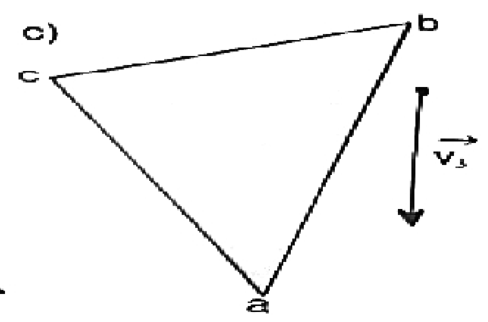
5 Aplica a cada figura la traslación indicada por el vector correspondiente.

a)





c)



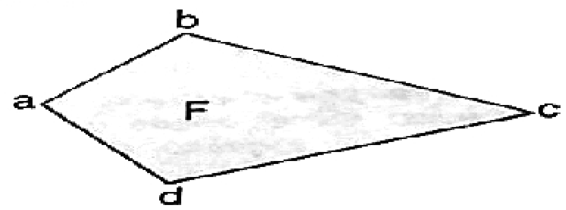
6 Aplica a la figura F cada una de las traslaciones cuyo vector se indica.

a) $\vec{v}_1 = \vec{bc}$

b) $\vec{v}_2 = \vec{bd}$

c) $\vec{v}_3 = \vec{ac}$

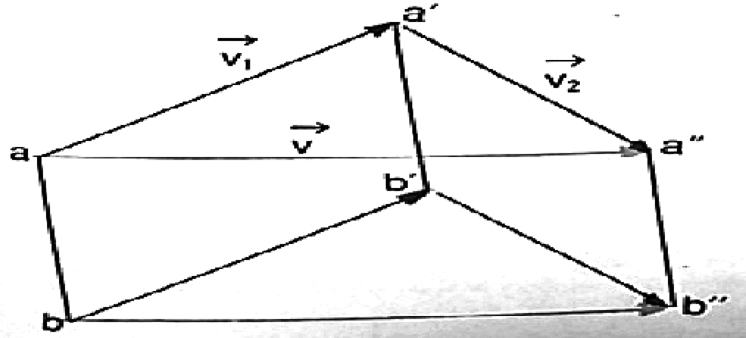
Dibuja una figura para cada caso.



7 ¿Se puede pasar de F a F' por una traslación? Justifica la respuesta.

Composición de traslaciones

Si aplicamos al segmento $\overline{ab}$ una traslación T_1 de vector $\vec{v}_1$, y luego aplicamos a su transformado $\overline{a'b'}$ otra traslación T_2 de vector $\vec{v}_2$ que transforma $\overline{a'b'}$ en $\overline{a''b''}$, ¿podemos pasar de $\overline{ab}$ a $\overline{a''b''}$ por una traslación? Si es así, ¿cuál es el vector correspondiente a dicha traslación?



$T_1 : \overline{ab} \longrightarrow \overline{a'b'}$ $\qquad T_2 : \overline{a'b'} \longrightarrow \overline{a''b''}$

Se puede demostrar que $\vec{aa''}$ y $\vec{bb''}$ son vectores equipolentes.

$$\vec{aa''} \uparrow\uparrow \vec{bb''}$$

Entonces existe una traslación T que transforma $\overline{ab}$ en $\overline{a''b''}$. El vector de la traslación es $\vec{v} = \vec{aa''}$.

$T : \overline{ab} \longrightarrow \overline{a''b''}$ $\qquad \vec{v} = \vec{aa''}$

La traslación T se llama **compuesta** de T_1 y T_2, y se anota:

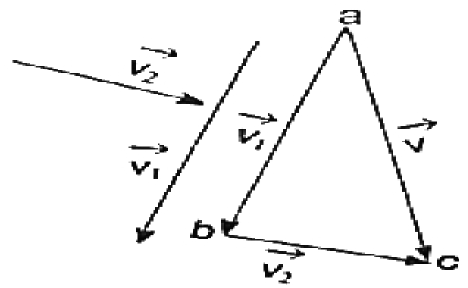
$$\boxed{T_1 \circ T_2 = T}$$

Que se lee: **T_1 "cerito" T_2 o T_1 "compuesta con" T_2 o T_1 por T_2**.
La notación indica que al resultado de T_1 se aplica T_2.

El vector $\vec{v}$ se llama **suma** de los vectores $\vec{v_1}$ y $\vec{v_2}$, y se anota:

$$\boxed{\vec{v_1} + \vec{v_2} = \vec{v}} \quad \text{o} \quad \overrightarrow{aa'} + \overrightarrow{a'a''} = \overrightarrow{aa''}$$

Observa: El origen del segundo vector coincide con el extremo del primero. En consecuencia: para obtener la suma de dos vectores $\vec{v_1}$ y $\vec{v_2}$ se construye un vector equipolente a $\vec{v_2}$, tal que el origen de $\vec{v_2}$ coincida con el extremo de $\vec{v_1}$. El vector formado por el origen del primero y el extremo del segundo es el vector suma.



$\overrightarrow{ab} \uparrow\uparrow \vec{v_1}$

$\overrightarrow{bc} \uparrow\uparrow v_2$

$\overrightarrow{ab} + \overrightarrow{bc} = \overrightarrow{ac}$

$\vec{v_1} + \vec{v_2} = \vec{v}$

La composición de traslaciones es un caso particular de la composición de funciones.

Propiedades de la adición de vectores y de la composición de traslaciones

Puesto que la traslación queda determinada por un vector, podemos deducir las propiedades de la composición de traslaciones de las propiedades de la adición de vectores.

Propiedad conmutativa

Aplicamos dos traslaciones a un punto a: T_1 de vector $\vec{v_1}$ y T_2 de vector $\vec{v_2}$. Trataremos de verificar si el resultado de la composición depende del orden en que se consideren las traslaciones.

Apliquemos T_1 y a continuación T_2.

$$a \xrightarrow{T_1} a_1' \xrightarrow{T_2} a''$$

$$T_1 \circ T_2 : a \longrightarrow a''$$

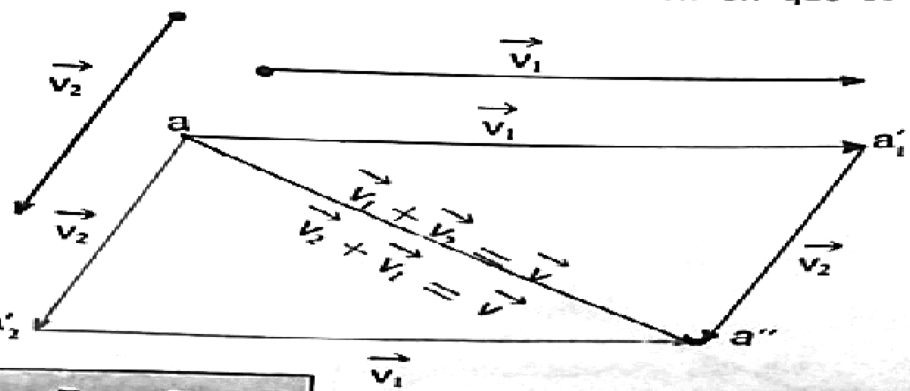
$$\vec{v_1} + \vec{v_2} = \vec{v}$$

Apliquemos T_2 y a continuación T_1.

$$a \xrightarrow{T_2} a_2' \xrightarrow{T_1} a''$$

$$T_2 \circ T_1 : a \longrightarrow a''$$

$$\vec{v_2} + \vec{v_1} = \vec{v}$$



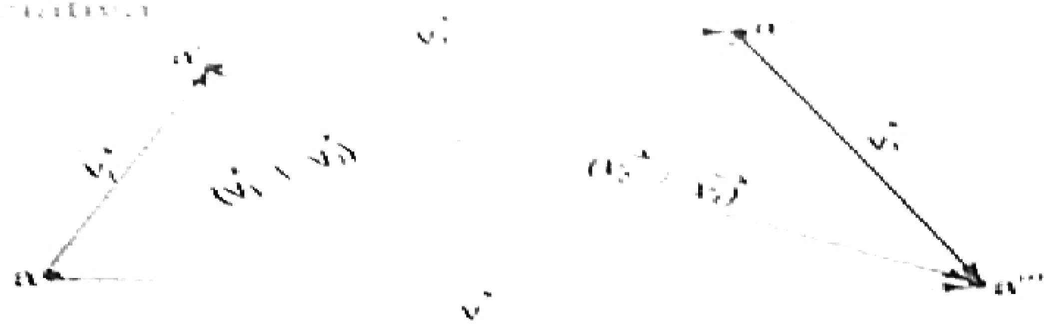
Los resultados coinciden.

$$\boxed{\vec{v_1} + \vec{v_2} = \vec{v_2} + \vec{v_1}} \quad \text{y} \quad \boxed{T_1 \circ T_2 = T_2 \circ T_1}$$

Es decir que:

- La adición de vectores es conmutativa.
- La composición de traslaciones es conmutativa.

Propiedad asociativa



Observa la figura:

$\vec{aa''} = \vec{v_1} + \vec{v_2}$

$\vec{aa''} + \vec{a''a'''} = \vec{aa'''}$

o sea: $(\vec{v_1} + \vec{v_2}) + \vec{v_3} = \vec{v}$

$\vec{a'a'''} = \vec{v_2} + \vec{v_3}$

$\vec{aa'} + \vec{a'a'''} = \vec{aa'''}$

o sea: $\vec{v_1} + (\vec{v_2} + \vec{v_3}) = \vec{v}$

Entonces:

$\boxed{(\vec{v_1} + \vec{v_2}) + \vec{v_3} = \vec{v_1} + (\vec{v_2} + \vec{v_3})}$ y $\boxed{(T_1 \circ T_2) \circ T_3 = T_1 \circ (T_2 \circ T_3)}$

- La adición de vectores es asociativa.
- La composición de traslaciones es asociativa.

Elemento neutro

¿Cuál es el resultado de sumar un vector $\vec{v}$ y el vector nulo?

$\vec{ab} + \vec{bb} = \vec{ab}$ $\quad\quad$ $\vec{aa} + \vec{ab} = \vec{ab}$

Generalizando:

$\boxed{\vec{v} + \vec{o} = \vec{o} + \vec{v}}$

Notarás que la suma de un vector $\vec{v}$ y el vector nulo es el vector $\vec{v}$.
Por eso decimos que:

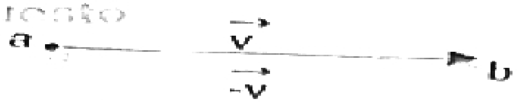
La traslación de vector nulo es la traslación idéntica o identidad. ¿Cuál es el resultado de componer una traslación T con la identidad?
Como en la identidad los puntos permanecen invariantes resulta:

$\boxed{T \circ I = I \circ T = T}$

Es decir, que la composición de una traslación T y la identidad da nuevamente la traslación T.

- El vector nulo es elemento neutro para la adición de vectores.
- La traslación idéntica es elemento neutro para la composición de traslaciones.

Vector opuesto



Puesto que un vector es un segmento orientado,

$$\vec{ab} \;\uparrow\downarrow\; \vec{ba}$$

pues estos vectores tienen sentido contrario. Cada uno de ellos es **opuesto** del otro.

Decimos que:

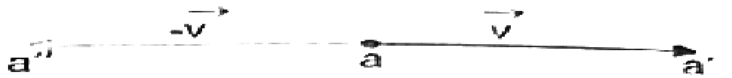
$\boxed{\vec{ab} \text{ y } \vec{ba} \text{ son vectores opuestos}}$

Si designamos con $\vec{v}$ a uno de los vectores, el vector opuesto se designa con $-\vec{v}$.

[illegible]

La traslación de vector $\vec{v}$ transforma el punto a en a'.

La traslación de vector $-\vec{v}$, transforma el punto a en a''.



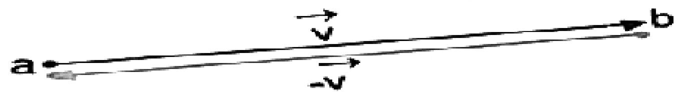
Las traslaciones cuyos vectores son opuestos se llaman **traslaciones inversas.** Cada una es inversa de la otra.

$\boxed{T_{\vec{v}} \text{ y } T_{-\vec{v}} \text{ son traslaciones inversas.}}$

La traslación inversa de T se anota T^{-1}.

Adición de vectores opuestos

Sumamos dos vectores opuestos.



Observa:

$$\vec{ab} + \vec{ba} = \vec{aa} \quad \text{(aa vector nulo)}$$

o bien: $\boxed{\vec{v} + \vec{o} = \vec{o} + \vec{v} = \vec{v}}$

Composición de traslaciones inversas

Componemos dos traslaciones inversas. Al resultado de T aplicamos T^{-1}.

$T : a \longrightarrow a'$ $\quad T^{-1} : a' \longrightarrow a$

$T \circ T^{-1} : a \longrightarrow a$ (Traslación idéntica)

Entonces: $\boxed{T \circ T^{-1} = T^{-1} \circ T = I}$

- La suma de un vector y su opuesto es el **vector nulo.**
- La composición de una traslación y su inversa es la **identidad.**

Estructura del conjunto de vectores del plano, con la adición.

En el conjunto V, de vectores del plano, hemos definido la operación de adición. Como la suma de dos vectoros es siempre otro vector, la operación es cerrada.

Estructura del conjunto de traslaciones en el plano con la composición.

En el conjunto $\mathcal{T}$, de traslaciones del plano, hemos definido la operación de composición.

Como la composición de dos traslaciones es siempre otra traslación, la operación es cerrada.

Según hemos visto, la adición de vectores y la composición de traslaciones cumplen las siguientes propiedades:

1 – Ley de cierre.
2 – Ley asociativa.
3 – Existe elemento neutro.
4 – Todo elemento tiene un inverso.
5 – Ley conmutativa.

En consecuencia, el conjunto **V** con la adición y el conjunto $\mathcal{T}$ con la composición tienen estructura de grupo conmutativo.

(V, +) es grupo conmutativo.

($\mathcal{T}$, $\circ$) es grupo conmutativo.

EJERCICIOS

8 Simplifica las siguientes expresiones:

a) $T_1 \circ T_2 \circ T_1^{-1} =$

b) $T \circ I \circ T^{-1} =$

9 Indica si cada expresión es V o F:

a) $T^{-1} \circ T^{-1} = I$

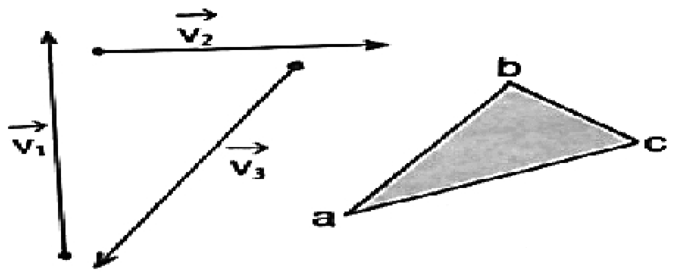
b) $(T^{-1})^{-1} = I$

c) $T^{-1} \circ T^{-1} = T$

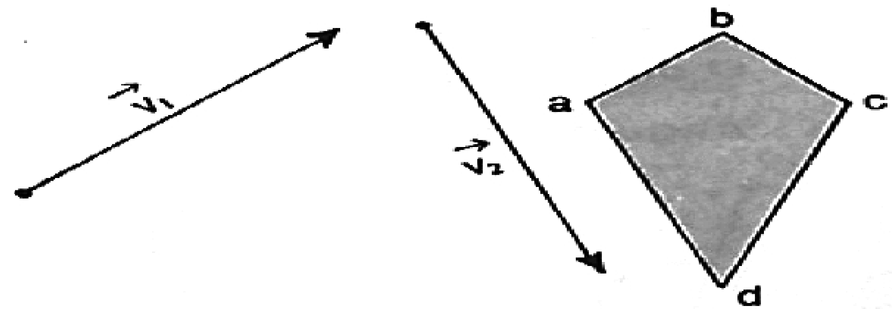
d) $(T^{-1})^{-1} = T$

Elige un punto **a** y un vector $\vec{v}$ y muestra que tus respuestas son correctas.

10 Aplica al triángulo $\hat{abc}$ la composición de traslaciones $T_{\vec{v}_1} \circ T_{\vec{v}_2} \circ T_{\vec{v}_3}$



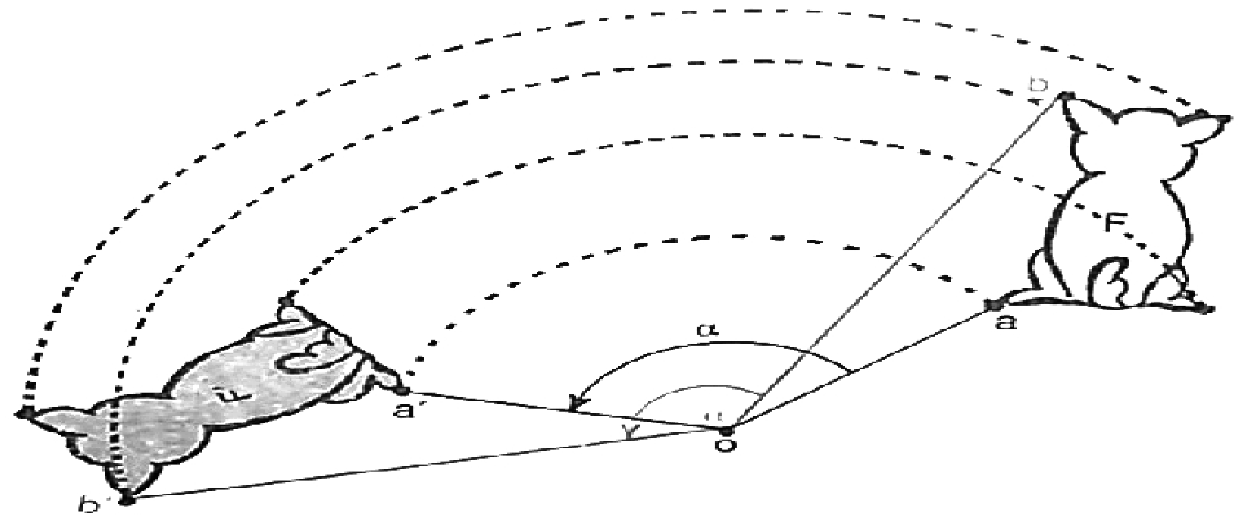
11 Aplica a la siguiente figura la composición de traslaciones $T_{\vec{v}_1} \circ T_{\vec{v}_2}$, siendo $\vec{v}_1 /\!/ \overline{ab}$ y $\vec{v}_2 /\!/ \overline{ad}$.



II Rotación

Frecuentemente observamos objetos que giran alrededor de un punto o de un eje fijos. Así, por ejemplo, un disco, una calesita, las aspas de un ventilador, una rueda, una puerta giratoria, las agujas de un reloj.

También vemos otros objetos que describen lo que llamamos comúnmente un movimiento de "vaivén". Por ejemplo: el péndulo de un reloj, el limpiaparabrisas, etc.
Todos estos ejemplos corresponden a los movimientos que llamamos **giros** o **rotaciones.**

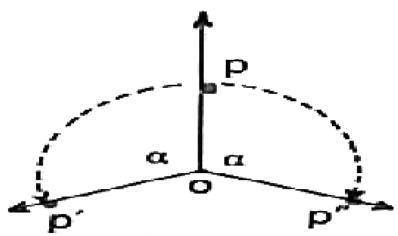


Dibuja una figura en tu cuaderno y un punto **o** fuera de ella.
Calca en un papel transparente la figura y el punto. Abrocha el papel a la hoja por el punto **o.** Si haces girar el papel un ángulo α, la figura F pasa a la posición F'.
Analicemos los elementos que determinan una rotación. En este movimiento el punto **o** permanece fijo. Se llama **centro** de la rotación.
Cada punto se mueve sobre un arco de circunferencia de centro **o.** Es decir, que para cada punto la distancia al centro permanece constante.

$$\overline{ao} = \overline{a'o} \qquad \overline{bo} = \overline{b'o}$$

El ángulo girado: $a\hat{o}a' = b\hat{o}b' = \hat{\alpha}$, se llama **amplitud** de la rotación o **ángulo de giro.**
El punto **o** es el único punto unido en la rotación.

Angulo orientado



Si tratamos de aplicar a un punto **p** una rotación de amplitud $\hat{\alpha}$ y centro **o**, se presentan dos posibilidades.

Según el sentido que elijamos para la rotación obtendremos como transformado el punto p' o el punto p''.

Es decir, que además de la amplitud es necesario conocer el sentido del ángulo de giro: de $\overrightarrow{ox}$ hacia $\overrightarrow{oy}$ o de $\overrightarrow{oy}$ hacia $\overrightarrow{ox}$.
Un ángulo provisto de un sentido se llama **ángulo orientado**, y lo simbolizamos: $\overset{\curvearrowright}{xoy}$.

Si $\overset{\curvearrowright}{xoy}$ es un ángulo orientado, entonces $\overset{\curvearrowright}{xoy} \neq \overset{\curvearrowright}{yox}$.

Observa que:

Un ángulo orientado $\overset{\curvearrowright}{xoy}$ queda determinado por un par ordenado de semirrectas del mismo origen $(\overrightarrow{ox}, \overrightarrow{oy})$.

$$(\overrightarrow{ox}, \overrightarrow{oy}) \neq (\overrightarrow{oy}, \overrightarrow{ox})$$

$\overrightarrow{ox}$ se llama **lado origen** de $\overset{\curvearrowright}{xoy}$ $\overrightarrow{oy}$ se llama **lado extremo** de $\overset{\curvearrowright}{xoy}$

En consecuencia, el **ángulo de giro** es un **ángulo orientado.**
Es decir, que cuando hablamos de ángulo de giro se sobreentiende que nos referimos a un ángulo orientado.
Disponemos ahora de los elementos necesarios para definir la **rotación.**

DEFINICIÓN: Se llama **rotación** de centro o y ángulo de giro $\overset{\curvearrowright}{xoy}$ a la transformación del plano en sí mismo, que a todo punto p de éste le hace corresponder como imagen otro punto p′ del mismo plano, tal que:

$$\overline{op} = \overline{op'} \quad y \quad \overset{\curvearrowright}{pop'} = \overset{\curvearrowright}{xoy}$$

Notación:

Puesto que la rotación es una función puntual, podemos utilizar notaciones similares a las de funciones.

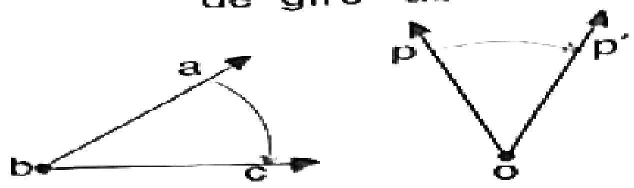
$$R_{(o,\overset{\curvearrowright}{xoy})} : p \longrightarrow p' \quad \text{tal que} \quad \overset{\curvearrowright}{pop'} = \overset{\curvearrowright}{xoy}$$

Se lee: "La rotación de centro **o** y ángulo de giro $\overset{\curvearrowright}{xoy}$ transforma p en p′."

$p \xrightarrow{R_{(o,\overset{\curvearrowright}{xoy})}} p'$ se lee: "El punto **p** se transforma en **p′** por la rotación de centro **o** y ángulo de giro $\overset{\curvearrowright}{xoy}$."

$p' = R(p)$ se lee: p′ es la imagen de p por la rotación R.

Ejemplo 1: Aplicamos al punto p una rotación de centro o y ángulo de giro $\overset{\frown}{abc}$.



$\boxed{p\overset{\frown}{o}p' = a\overset{\frown}{b}c}$

Con centro **b** y radio $\overline{op}$ se traza un arco orientado $\overset{\frown}{ac}$.
Con centro **o** e igual radio se traza otro arco orientado en el mismo sentido.

Se transporta sobre el segundo arco, $\overset{\frown}{pp'} \cong \overset{\frown}{ac}$.

p' es el transformado de p por la rotación $R_{(o,\overset{\frown}{abc})}$

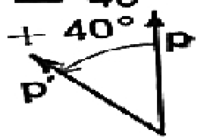
Ejemplo 2: A veces se da como dato el valor del ángulo de giro. Por ejemplo: $\hat{\alpha} = 40°$.
En estos casos es necesario adoptar una convención para conocer el sentido de la rotación.

CONVENCIÓN:

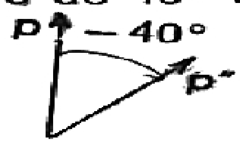
Se llama **sentido positivo** al sentido contrario al de las agujas del reloj.
Se llama **sentido negativo** al sentido de las agujas del reloj.

$\hat{\alpha} = +\ 40°$ indica un ángulo de giro de 40° en sentido positivo.

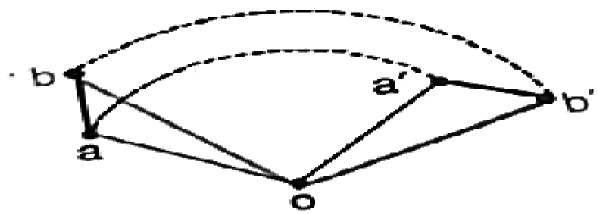
$\hat{\alpha} = -\ 40°$ indica un ángulo de giro de 40° en sentido negativo.



$\boxed{R_{(o,+40°)}}$



$\boxed{R_{(o,-40°)}}$



Aplicamos al segmento ab una rotación de centro **o** y ángulo de giro $\hat{\alpha} = -120°$

$\boxed{a\overset{\frown}{o}a' = b\overset{\frown}{o}b' = -120°}$

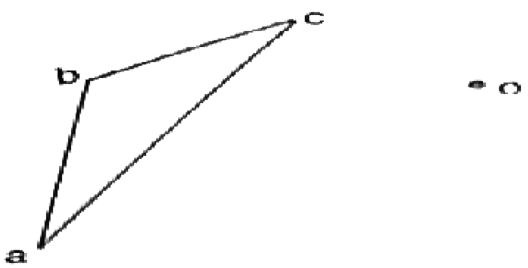
Determinamos el transformado de **a**. Determinamos el transformado de **b**.
Unimos a' con b'. $\overline{a'b'}$ es la imagen de $\overline{ab}$ por la rotación dada.

$R_{(o,-120°)} : \overline{ab} \longrightarrow \overline{a'b'}$

EJERCICIOS

12 **Utiliza la figura del ejemplo anterior para demostrar que un segmento y su transformado por una rotación son congruentes.**

13



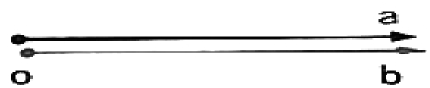
a) Aplica al triángulo $\hat{abc}$ la rotación $R_{(o,+100°)}$.

b) Demuestra que: $a'\hat{b'}c \cong a\hat{b}c$.

Angulo nulo - Rotación idéntica

DEFINICIÓN: Se llama ángulo nulo al ángulo cuyos lados coinciden.

Si $\vec{oa}$ coincide con $\vec{ob}$, $a\widehat{o}b$ es un **ángulo nulo.**



Se anota: $a\hat{o}a$ o $b\hat{o}b$ o $\hat{o}$

La rotación cuyo ángulo de giro es nulo transforma a todo punto en sí mismo.

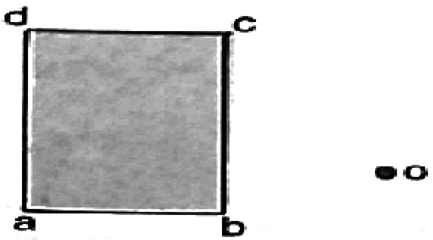
$$\boxed{R_{(o,\widehat{pop})} : p \longrightarrow p}$$

DEFINICIÓN: La rotación, que transforma todo punto del plano en sí mismo se llama **rotación idéntica** o **identidad.**

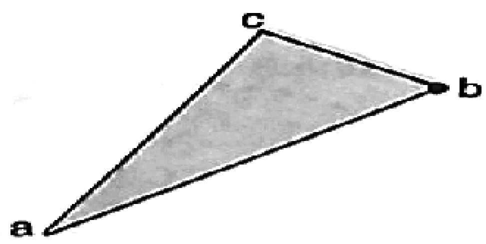
Se anota: $R_{(o,\widehat{pop})}$ o I $\qquad$ $I : p \longrightarrow p$

EJERCICIOS

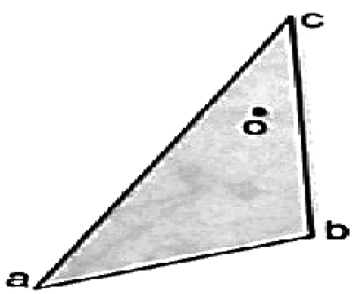
14 Aplica a cada figura la rotación indicada.



$R_{(o,-90°)}$

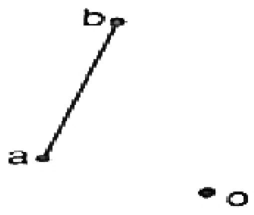


$R_{(b,+110°)}$



$R_{(o,-50°)}$

15



a) Aplica al segmento $\overline{ab}$ una rotación $R_{(o,+180°)}$

$R_{(o,+180°)}$: $\overline{ab} \longrightarrow \overline{a'b'}$

b) Aplica al segmento $\overline{ab}$ una rotación $R_{(o,-180°)}$

$R_{(o,-180°)}$: $\overline{ab} \longrightarrow \overline{a''b''}$

c) ¿Qué puedes decir de $\overline{a'b'}$ y de $\overline{a''b''}$?

d) De ahora en adelante, cuando se trate de una rotación de 180° no indicaremos el sentido. ¿Por qué?

Anotaremos: $R_{(o,180°)}$

16

a) Aplica a la recta S la rotación $R_{(o,-70°)}$

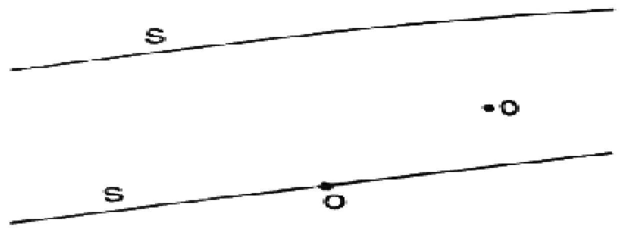
$o \notin S$

¿Cuántos puntos necesitas transformar para obtener la imagen de S?

b) Aplica a la recta S la rotación $R_{(o,+50°)}$

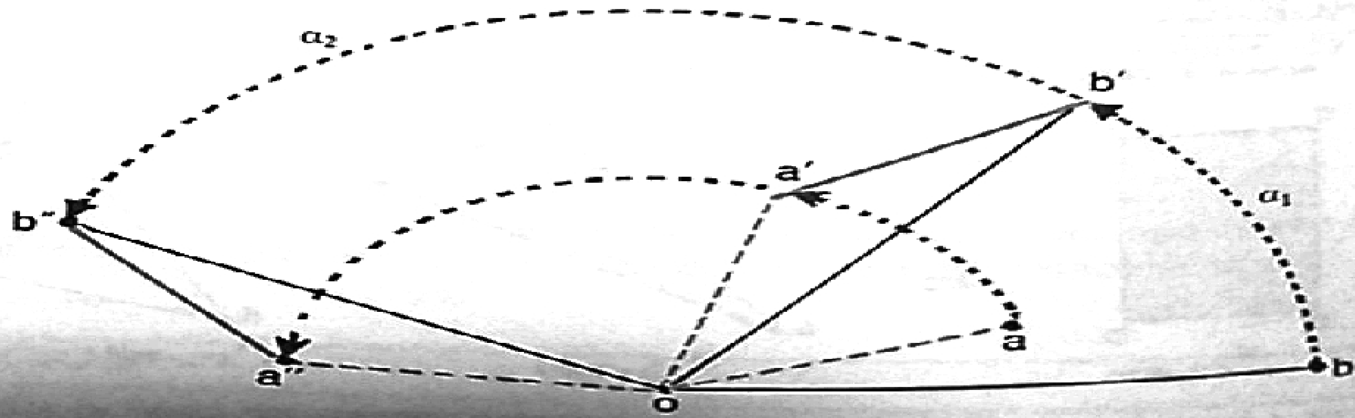
$o \in S$

¿Cuántos puntos necesitas en este caso para obtener la imagen de S? ¿Por qué?



Composición de rotaciones del mismo centro

Si aplicamos al segmento $\overline{ab}$ una rotación R_1 de centro **o** y ángulo de giro $\widehat{\alpha_1}$, y a continuación aplicamos a su transformado $\overline{a'b'}$ otra rotación del mismo centro y amplitud $\widehat{\alpha_2}$, que transforma $\overline{a'b'}$ en $\overline{a''b''}$, ¿podemos pasar de $\overline{ab}$ a $\overline{a''b''}$ por una rotación?



$R_1 : \overline{ab} \longrightarrow \overline{a'b'}$ $\qquad$ $R_2 : \overline{a'b'} \longrightarrow \overline{a''b''}$

$\overset{\frown}{aoa'} = \overset{\frown}{bob'} = \overset{\frown}{\alpha_1}$ $\qquad$ $\overset{\frown}{a'oa''} = \overset{\frown}{b'ob''} = \overset{\frown}{\alpha_2}$

Es evidente que se puede llevar $\overline{ab}$ a $\overline{a''b''}$ por una rotación R, del mismo centro o, y cuyo ángulo de giro es la suma de $\overset{\frown}{\alpha_1}$ y $\overset{\frown}{\alpha_2}$.

$$
\begin{array}{lll}
R_1 : \overline{ab} \longrightarrow \overline{a'b'} & \qquad & \overset{\frown}{\alpha_1} = \overset{\frown}{aoa'} = \overset{\frown}{bob'} \\
R_2 : \overline{a'b'} \longrightarrow \overline{a''b''} & & \overset{\frown}{\alpha_2} = \overset{\frown}{a'oa''} = \overset{\frown}{b'ob''} \\
\hline
R_1 \circ R_2 : \overline{ab} \longrightarrow \overline{a''b''} & & \overset{\frown}{\alpha_1} + \overset{\frown}{\alpha_2} = \overset{\frown}{aoa'} + \overset{\frown}{a'oa''} = \overset{\frown}{bob'} + \overset{\frown}{b'ob''} \\
\Downarrow & & \Downarrow \qquad\qquad \Downarrow \qquad\qquad \Downarrow \\
R : \overline{ab} \longrightarrow \overline{a''b''} & & \overset{\frown}{\alpha} = \overset{\frown}{aoa''} \qquad \overset{\frown}{bob''}
\end{array}
$$

La rotación R se llama **producto** o **compuesta** de R_1 y R_2, y se anota:

$$R_1 \circ R_2 = R$$

que se lee: "R_1 por R_2" o "R_1 cerito R_2" o "R_1 compuesta con R_2".

La composición de dos rotaciones R_1 y R_2, del mismo centro, es otra rotación del mismo centro y cuyo ángulo de giro es la suma de los ángulos de giro de las rotaciones dadas.

Hemos definido una operación, en el conjunto de rotaciones del mismo centro, que cumple la ley de cierre.

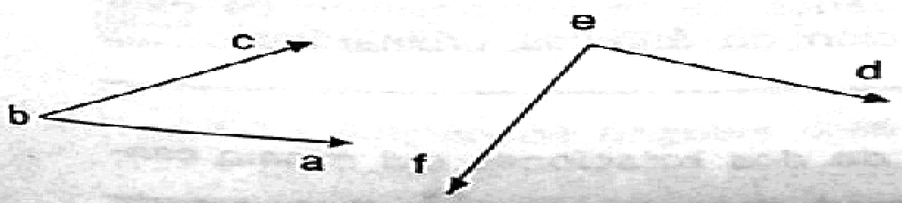
Suma de ángulos orientados

En la composición de rotaciones que tomamos como ejemplo se pudo calcular fácilmente la suma de ángulos, porque están orientados en el mismo sentido.

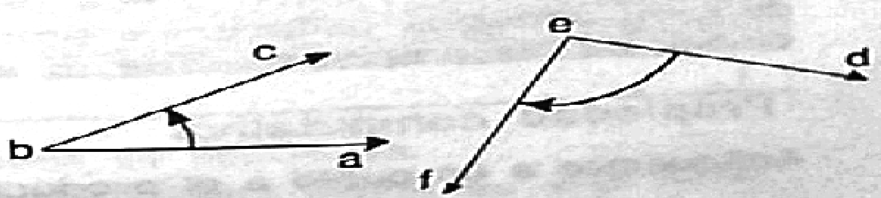
Pero tendremos que dar una definición de suma de ángulos orientados que considere las distintas posibilidades.

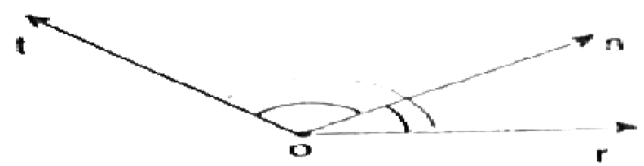
Observa la diferencia entre la suma de ángulos estudiada en el primer curso y la suma de ángulos orientados.

Suma de ángulos



Suma de ángulos orientados

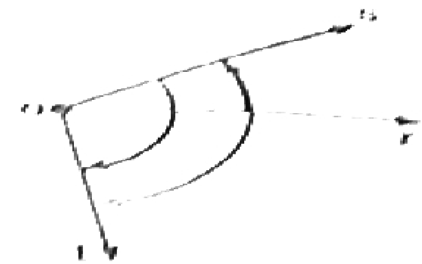




Se construyen dos ángulos consecutivos, respectivamente congruentes a $\hat{abc}$ y a $\hat{def}$.

$$\hat{abc} + \hat{def} = \hat{ros} + \hat{sot} = \hat{rot}$$

El ángulo suma está determinado por los lados no comunes y contiene a los ángulos dados.



Se construye un ángulo equivalente a $\overset{\frown}{abc}$. Luego se construye otro ángulo equivalente al $\overset{\frown}{def}$, de modo que el lado origen del segundo coincide con el lado extremo del primero.

El ángulo suma está determinado por el lado origen del primero y el lado extremo del segundo.

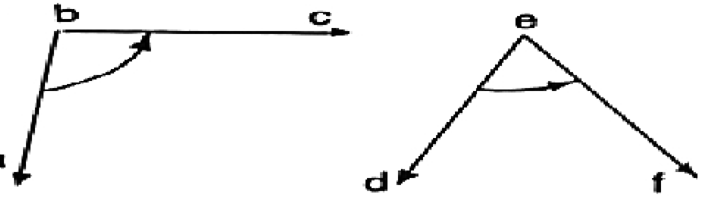
$$\overset{\frown}{abc} + \overset{\frown}{def} = \overset{\frown}{ros} + \overset{\frown}{sot} = \overset{\frown}{rot}$$

En este caso, el ángulo suma no contiene a los ángulos sumados.

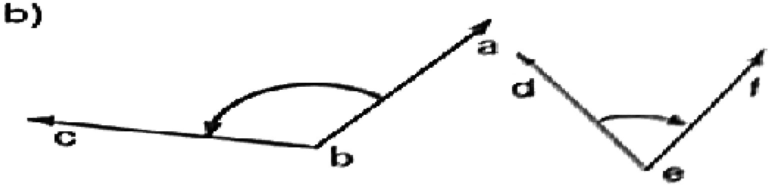
EJERCICIOS

17 Halla la suma de los siguientes ángulos orientados.

a)



b)

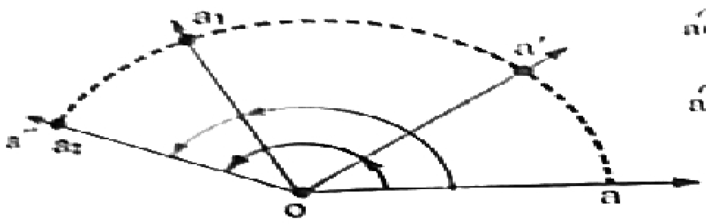


Propiedades de la adición de ángulos orientados y de la composición de rotaciones del mismo centro.

Puesto que una rotación queda determinada por el centro y el ángulo de giro, podemos deducir las propiedades de la composición de rotaciones de las propiedades de la adición de ángulos orientados.

Propiedad conmutativa

Apliquemos a un punto a el producto de dos rotaciones del mismo centro: R_1 de ángulo de giro $\overset{\frown}{\alpha_1}$ y R_2 de ángulo de giro $\overset{\frown}{\alpha_2}$. Tratemos de verificar si el resultado depende o no del orden en que se consideren las rotaciones.



$\widehat{aoa'} = \widehat{a_1oa_2} = \widehat{\alpha_1}$ $\widehat{a'oa''} = \widehat{aoa_1} = \widehat{\alpha_2}$

$\widehat{aoa''} = \widehat{\alpha_1} + \widehat{\alpha_2}$ $\widehat{aoa_2} = \widehat{\alpha_2} + \widehat{\alpha_1}$

$\widehat{aoa''} = \widehat{aoa_2}$

Como a_2 y a'' coinciden resulta que:

$\boxed{\widehat{\alpha_1} + \widehat{\alpha_2} = \widehat{\alpha_2} + \widehat{\alpha_1}}$ $\boxed{R_1 \circ R_2 = R_2 \circ R_1}$

- La adición de ángulos orientados es conmutativa.
- La composición de rotaciones del mismo centro es conmutativa.

Pruébalo con otro ejemplo de rotaciones cuyos ángulos de giro tengan sentido contrario.

Propiedad asociativa

Si aplicamos a un punto a la composición de tres rotaciones del mismo centro: R_1, R_2 y R_3, cuyos ángulos de giro son, respectivamente, $\widehat{\alpha_1}$, $\widehat{\alpha_2}$ y $\widehat{\alpha_3}$, podemos verificar que el resultado no depende de la forma en que se asocien las rotaciones.

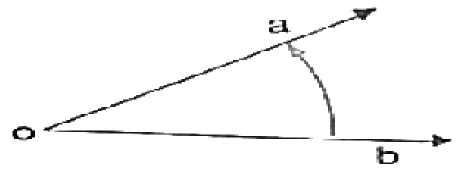
$\boxed{(\widehat{\alpha_1} + \widehat{\alpha_2}) + \widehat{\alpha_3} = \widehat{\alpha_1} + (\widehat{\alpha_2} + \widehat{\alpha_3})}$ $\boxed{(R_1 \circ R_2) \circ R_3 = R_1 \circ (R_2 \circ R_3)}$

- La adición de ángulos orientados es asociativa.
- La composición de rotaciones del mismo centro es asociativa.

Verifícalo con un ejemplo.

Elemento neutro

Observa: La suma del ángulo $\overset{\frown}{aob}$ y el ángulo nulo es el ángulo $\overset{\frown}{aob}$.



$$\overset{\frown}{aob} + \overset{\frown}{bob} = \overset{\frown}{aob} \qquad (\overset{\frown}{bob} \text{ áng. nulo})$$
$$\overset{\frown}{aoa} + \overset{\frown}{aob} = \overset{\frown}{aob} \qquad (\overset{\frown}{aoa} \text{ áng. nulo})$$

Generalizando:

$$\boxed{\overset{\frown}{\alpha} + \hat{o} = \hat{o} + \overset{\frown}{\alpha} = \overset{\frown}{\alpha}}$$

El ángulo nulo es elemento neutro para la adición de ángulos.

Ángulos opuestos

Los ángulos orientados $\overset{\frown}{aob}$ y $\overset{\frown}{boa}$ son congruentes y de sentido contrario.

$$\overset{\frown}{aob} \neq \overset{\frown}{boa}$$

Decimos que $\overset{\frown}{aob}$ y $\overset{\frown}{boa}$ son **ángulos opuestos.**
Cada uno de ellos es opuesto del otro.

Si designamos con $\overset{\frown}{\alpha}$ un ángulo orientado, entonces designamos con $-\overset{\frown}{\alpha}$ al ángulo opuesto.

$\boxed{\overset{\frown}{\alpha} \text{ y } -\overset{\frown}{\alpha} \text{ son ángulos opuestos}}$

Adición de ángulos opuestos

Sumamos dos ángulos opuestos.

La rotación de ángulo nulo es la rotación idéntica. Si componemos la rotación R con la identidad se obtiene como resultado la rotación R, porque en la identidad los puntos del plano son invariantes.

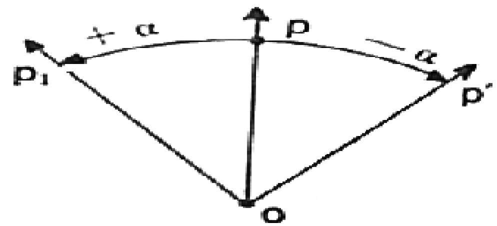
En símbolos:

$$\boxed{R \circ I = I \circ R = R}$$

La rotación idéntica es elemento neutro para la composición de rotaciones.

Rotaciones inversas

Las rotaciones del mismo centro cuyos ángulos de giro son opuestos se llaman **rotaciones inversas.**



$R_{(o,-\overset{\frown}{\alpha})}$ transforma p en p'

$R_{(o,+\overset{\frown}{\alpha})}$ transforma p en p_1

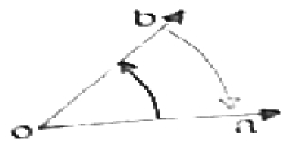
La rotación inversa de R se anota R^{-1}.

$\boxed{R \text{ y } R^{-1} \text{ son rotaciones inversas}}$

Composición de rotaciones inversas

Componemos dos rotaciones inversas.

$\widehat{aob} + \widehat{boa} = \widehat{aoa}$



o bien:

$$\boxed{\widehat{a} + (-\widehat{a}) = (-\widehat{a}) + \widehat{a} = \hat{o}}$$

La suma de dos ángulos opuestos es el ángulo nulo

Dos ángulos opuestos se dicen inversos para la adición.

$-\widehat{a}$ es el inverso aditivo de $+\widehat{a}$.

Estructura del conjunto de ángulos orientados con la adición.

En el conjunto G_o de ángulos orientados se ha definido la operación de adición, que cumple las siguientes propiedades.

$(G_o, +)$

1 – **Ley de cierre.**

2 – **Ley asociativa.**

3 – **Existe un elemento neutro (ángulo nulo).**

4 – **Cada elemento tiene un inverso (ángulo opuesto).**

5 – **Ley conmutativa.**

En consecuencia:

$\boxed{(G_o, +)}$ **es grupo conmutativo.**

$R : a \longrightarrow a'$ $\quad R^{-1} : a' \longrightarrow a$

$R \circ R^{-1} : a \longrightarrow a$

Entonces:

$$\boxed{R \circ R^{-1} = R^{-1} \circ R = 1}$$

La composición de dos rotaciones inversas es la identidad.

Estructura del conjunto de rotaciones del mismo centro con la composición.

En el conjunto $\mathcal{R}_o$ de rotaciones del mismo centro se ha definido la operación de composición, que cumple las siguientes propiedades.

$(\mathcal{R}_o, \circ)$

1 – **Ley de cierre.**

2 – **Ley asociativa.**

3 – **Existe un elemento neutro (rotación idéntica).**

4 – **Cada elemento tiene un inverso (rotación inversa).**

5 – **Ley conmutativa.**

En consecuencia:

$\boxed{(\mathcal{R}_o, \circ)}$ **es grupo conmutativo.**

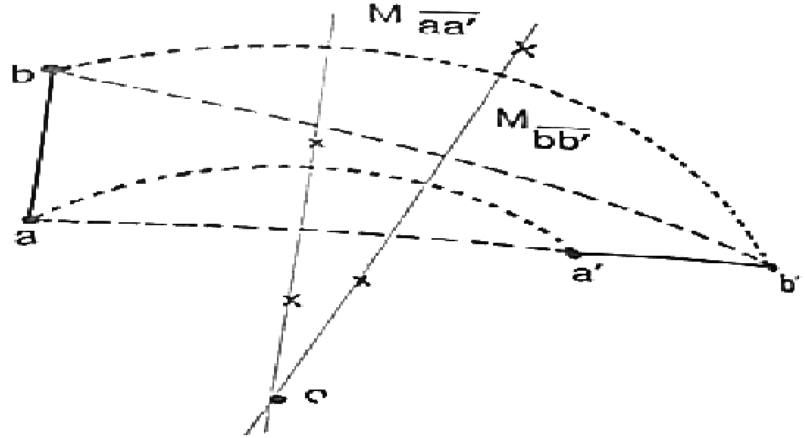
Determinación del centro de una rotación

Una rotación transforma $\overline{ab}$ en $\overline{a'b'}$.
¿Cómo determinamos su centro?
Sabemos que el centro **o** equidista de a y a'.

$$\overline{oa} \cong \overline{oa'}$$

Entonces **o** pertenece a la mediatriz de $\overline{aa'}$. El centro **o** equidista de b y b'. Entonces **o** pertenece a la mediatriz de $\overline{bb'}$. Esto significa que **o** es la intersección de las mediatrices de $\overline{aa'}$ y de $\overline{bb'}$.

$$\{ o \} = M_{\overline{aa'}} \cap M_{\overline{bb'}}$$



Por lo tanto: Unimos **a** con **a'** y **b** con **b'**. Trazamos la mediatriz de $\overline{aa'}$ y la mediatriz de $\overline{bb'}$. Ambas mediatrices se cortan en **o**.
o es el centro de la rotación.

EJERCICIOS

18 Calcula la suma de los siguientes ángulos orientados. Construye los ángulos y verifica el

a) $\hat{\alpha}_1 = +30°$ $\hat{\alpha}_2 = +75°$ c) $\hat{\alpha}_1 = -135°$ $\hat{\alpha}_2 = +50°$

b) $\hat{\alpha}_1 = -65°$ $\hat{\alpha}_2 = -80°$ d) $\hat{\alpha}_1 = -45°$ $\hat{\alpha}_2 = +140°$

19 Simplifica las siguientes expresiones.

a) $R_1 \circ R_2^{-1} \circ I \circ R_2 =$ b) $R_1^{-1} \circ (R_1^{-1})^{-1} \circ R_2 =$

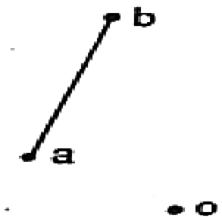
20 Completa con una rotación, conveniente para que se verifique la igualdad

a) $R_{(+32°)} \circ R_{(+25°)} \circ \ldots\ldots\ldots\ldots = I$

b) $R_{(-74°)} \circ R_{(+18°)} \circ \ldots\ldots\ldots\ldots = R_{(-56°)}$

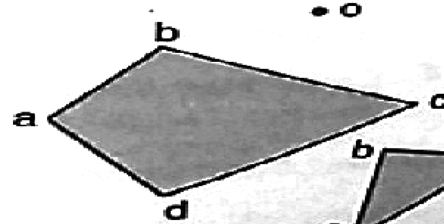
21 Aplica al segmento $\overline{ab}$ el producto de rotaciones.

$R_{(o,-65°)} \circ R_{(o,-140°)} =$
Indica el resultado de la operación.



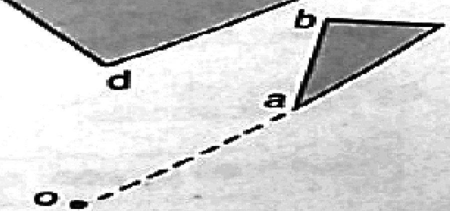
22 Aplica a la figura abcd el producto de rotaciones.

$R_{(a,\widehat{bad})} \circ R_{(a,\widehat{bad})} \circ R_{(a,\widehat{bad})} =$
Indica el resultado de la composición.



23 Aplica al triángulo $\widehat{abc}$ la composición de rotaciones.

$R_{(o,90°)} \circ R_{(o,90°)} \circ R_{(o,90°)} \circ R_{(o,90°)} =$
Indica el resultado de la composición.

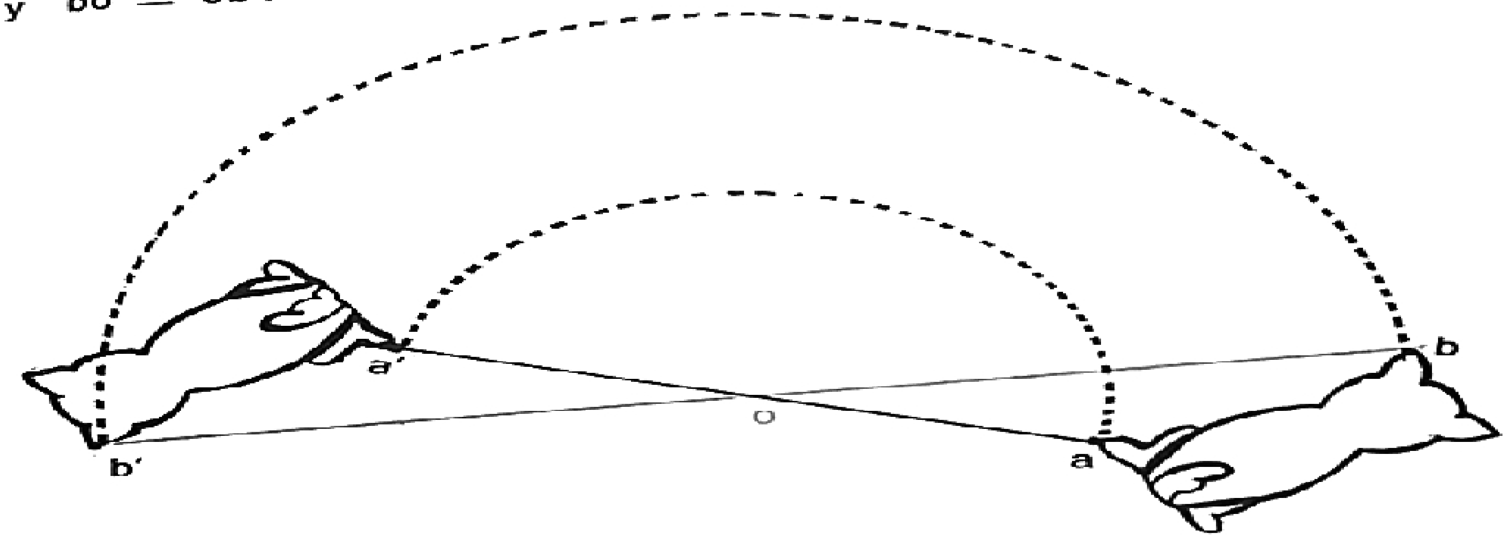


III Simetría Central

Si aplicamos a la figura F una rotación de 180° notarás que los pares de puntos homólogos aparecen alineados con el centro.

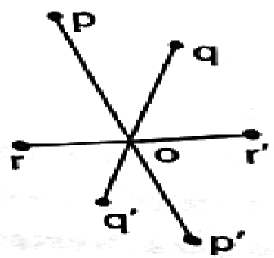
a, o y a' / b, o y b' } están alineados — $\overrightarrow{oa}$ y $\overrightarrow{oa'}$ / $\overrightarrow{ob}$ y $\overrightarrow{ob'}$ } son semirrectas opuestas

o es punto medio de los segmentos $\overline{aa'}$ y $\overline{bb'}$; es decir, que $\overline{ao} = \overline{oa'}$ y $\overline{bo} = \overline{ob'}$.



Estas relaciones nos permiten definir otra transformación de los puntos del plano.

DEFINICIÓN: Se llama **simetría de centro o** a la transformación del plano en sí mismo, que a cada punto **p** de éste hace corresponder otro punto p' del mismo plano, tal que las semirrectas $\overrightarrow{op}$ y $\overrightarrow{op'}$ son opuestas y $\overline{op} \cong \overline{op'}$.



Los puntos p y p' se llaman simétricos con respecto al centro o.

Notación:

$S_o : p \longrightarrow p'$ **se lee: "Simetría de centro o que transforma p en p'."**

o bien: $p' = S_o(p)$ se lee: p' es la imagen de p por la simetría de centro o.

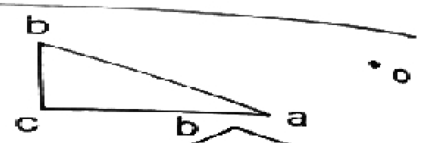
De la definición se deduce que para obtener el simétrico de un punto p respecto a un centro o se traza la recta op, y sobre la semirrecta opuestas a $\overrightarrow{op}$ se transporta $\overline{op'} \cong \overline{op}$.

Hemos visto que una figura y su transformada por una rotación son

congruentes. En consecuencia, siendo la simetría central una rotación de 180°, resulta que dos figuras simétricas con respecto a un centro son congruentes.

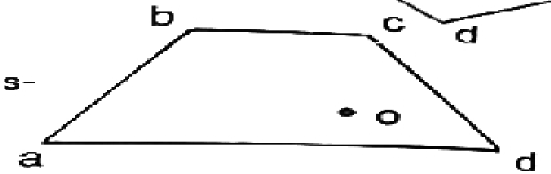
EJERCICIOS

24 Construye la figura simétrica de $\hat{abc}$ con respecto al centro o.



25 Construye la figura simétrica de abcd con respecto al punto d.

26 Construye la figura simétrica abcd con respecto al punto o.

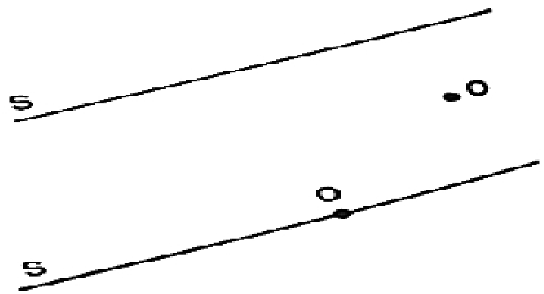


27 *¿CUÁL ES TU CONCLUSIÓN?*

a) Construye la simétrica de la recta S con respecto al centro o no perteneciente a ella.

b) La simétrica de una recta con respecto a un centro o no perteneciente a ella es ....

c) Construye la simétrica de la recta S con respecto al centro o perteneciente a ella.



d) La simétrica de una recta S con respecto a un centro o perteneciente a ella es ....

e) ¿Hay elementos unidos en alguna de las dos simetrías?

Composición de simetrías centrales

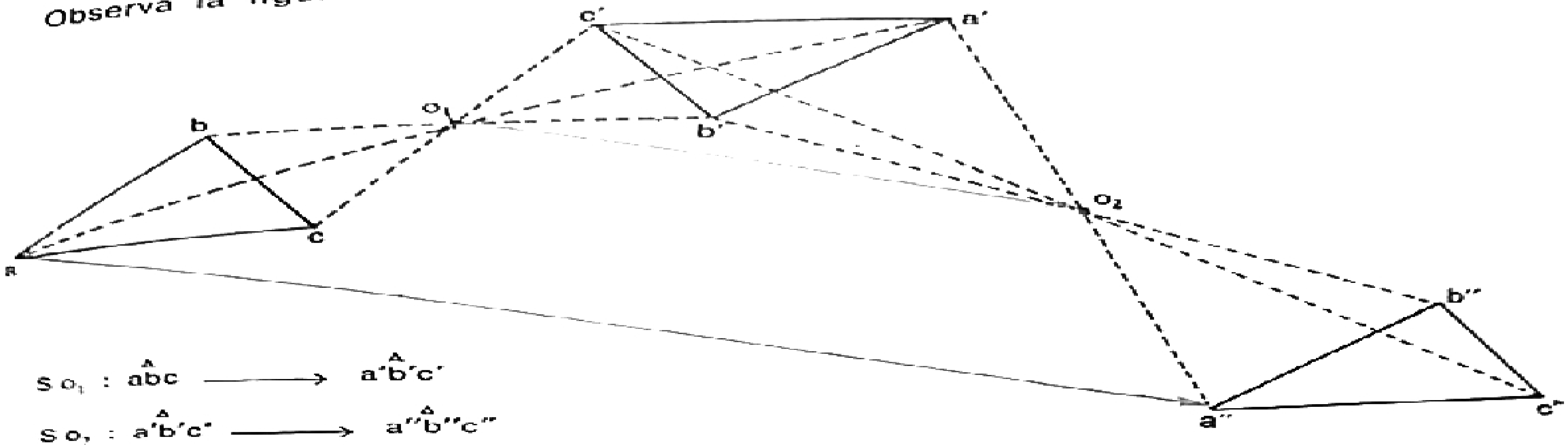
Si aplicamos al triángulo $\hat{abc}$ una simetría de centro o_1 y a continuación aplicamos al triángulo transformado $a'\hat{b}'c'$ otra simetría de centro o_2, ¿podemos pasar del triángulo $\hat{abc}$ al $a''\hat{b}''c''$ por una simetría central?

Hemos visto que: La composición de dos traslaciones es otra traslación.

La composición de dos rotaciones del mismo centro es otra rotación del mismo centro.

Parece natural pensar que la composición de dos simetrías centrales es otra simetría central.

Observa la figura



$S_{o_1} : a\hat{b}c \longrightarrow a'\hat{b}'c'$

$S_{o_2} : a'\hat{b}'c' \longrightarrow a''\hat{b}''c''$

$S_{o_1} \circ S_{o_2} : a\hat{b}c \longrightarrow a''\hat{b}''c''$

Notarás que cuando se aplica $a\hat{b}c$ en $a'\hat{b}'c'$ los segmentos determinados por los pares de puntos homólogos $\overline{aa'}$, $\overline{bb'}$ y $\overline{cc'}$ se cortan en o_1.

Análogamente, al pasar de $a\hat{b}c$ a $a''\hat{b}''c''$, los segmentos $\overline{aa'}$, $\overline{bb'}$ y $\overline{cc'}$ se cortan en o_2.

En cambio, al pasar de $a\hat{b}c$ a $a''\hat{b}''c''$, los segmentos $\overline{aa''}$, $\overline{bb''}$ y $\overline{cc''}$ no se cortan. Se demuestra que son congruentes y paralelos.

$\overrightarrow{aa'} \uparrow\uparrow \overrightarrow{bb'} \uparrow\uparrow \overrightarrow{cc'}$ son vectores equipolentes.

Es decir, que la transformación que aplica $a\hat{b}c$ en $a''\hat{b}''c''$ es una traslación de vector $\overrightarrow{aa''} = \vec{v}$.

Toma una tira de papel de longitud igual a $\overline{aa''}$.

Dóblala por la mitad y compárala con $\overline{oo'}$. Comprobarás que $\overline{aa''}$ es el duplo de la distancia de los centros.

En consecuencia:

El producto de dos simetrías de centros o_1 y o_2 es una traslación de vector $\vec{v}$, de longitud igual al duplo de la distancia de los centros.

$$\boxed{S_{o_1} \circ S_{o_2} = T_{\vec{v}} \quad ; \quad \vec{v} = 2\,\overrightarrow{o_1o_2}}$$

Esta propiedad que has comprobado experimentalmente será demostrada más adelante. Por lo tanto:

La composición de simetrías no cumple la ley de cierre.

EJERCICIOS

Aplica al segmento $\overline{ab}$ [illegible] composición de [illegible] simetrías centrales:
[illegible]

El movimiento M que transforma ab en a'''b''', ¿es una traslación o una simetría central?
Si es una traslación, ¿cómo determinas el vector?
Si es una simetría central, ¿cómo determinas el centro?

$$\overline{ab} \xrightarrow{S_{O_1}} \overline{a'b'} \xrightarrow{S_{O_2}} \overline{a''b''} \xrightarrow{S_{O_3}} \overline{a'''b'''}$$

Verifica, con el siguiente ejemplo, que la composición de simetrías centrales no es conmutativa.

Procede de la siguiente forma:

1º) Aplica al segmento $\overline{ab}$ el producto de simetrías
$S_{O_1} \circ S_{O_2} : \overline{ab} \longrightarrow \overline{a''b''}$.

Determina la transformación resultante: $S_{O_1} \circ S_{O_2}$.

2º) Calca en un papel transparente el segmento $\overline{ab}$.
Aplica el producto de simetrías $S_{O_2} \circ S_{O_1} : \overline{ab} \longrightarrow \overline{a_2b_2}$

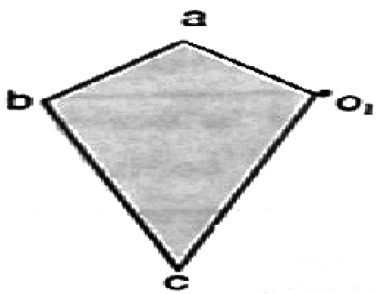
Determina la transformación resultante: $S_{O_2} \circ S_{O_1}$.

Si superpones el papel sobre la primera figura notarás que $\overline{a_2b_2}$ no coincide con a''b''.

En consecuencia:

La composición de simetrías no es conmutativa.

30



Aplica a la siguiente figura la composición de simetrías $S_{O_1} \circ S_{O_2}$.

O_2

Composición de dos simetrías del mismo centro

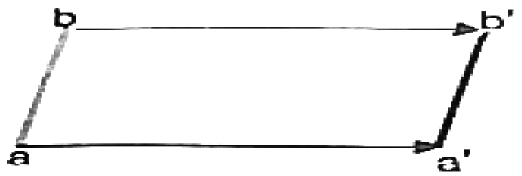
Compara los resultados de la composición de traslaciones, de rotaciones y de simetrías que se dan a continuación:

Si $T : \overline{ab} \longrightarrow a'b'$
¿Cuál es la traslación que aplica $\overline{a'b'}$ en $\overline{ab}$?
$T^{-1} : \overline{a'b'} \longrightarrow \overline{ab}$

Entonces:

$\boxed{T \circ T^{-1} = I}$

T^{-1} **es la inversa de T**

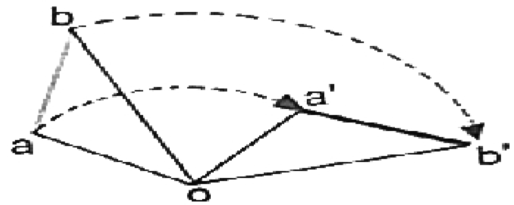


Si $R : \overline{ab} \longrightarrow \overline{a'b'}$
¿Cuál es la rotación que aplica $\overline{a'b'}$ en $\overline{ab}$?
$R^{-1} : \overline{a'b'} \longrightarrow \overline{ab}$

Entonces:

$\boxed{R \circ R^{-1} = I}$

R^{-1} **es la inversa de R**

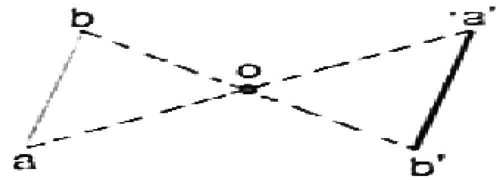


Si $S_o : \overline{ab} \longrightarrow a'b'$
¿Cuál es la simetría central que aplica $\overline{a'b'}$ en $\overline{ab}$?
$S_o : \overline{a'b'} \longrightarrow \overline{ab}$

Entonces:

$\boxed{S_o \circ S_o = I}$

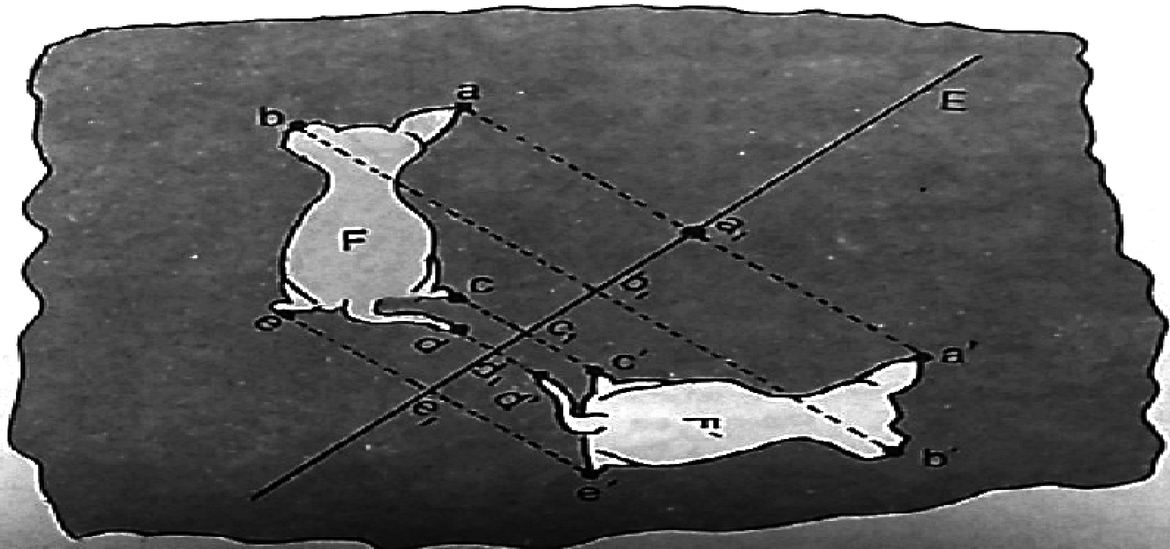
S_o **es inversa de sí misma**



Toda transformación que aplicada dos veces sucesivas da como resultado la identidad se llama **transformación involutiva.**
La simetría central es un movimiento involutivo del plano.

IV Simetría axial

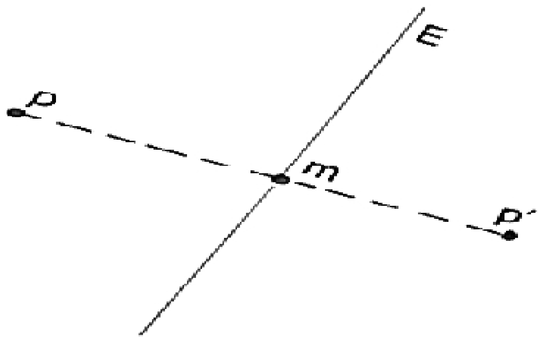
Toma una hoja de papel transparente y dibuja en ella una figura. Dobla el pápel de modo que la figura quede en una de las partes y la otra parte tape la figura. Marca bien el doblez, y calca la figura en la otra parte del papel.
La figura calcada se llama simétrica de la dada con respecto a la recta representada por el doblez.



Si unes los pares de puntos correspondientes que determinan los segmentos $\overline{aa'}$, $\overline{bb'}$, $\overline{cc'}$ . . . etc., y pliegas el papel, notarás que la recta E corta a cada segmento en su punto medio y determina ángulos adyacentes congruentes. En consecuencia, E es perpendicular a los segmentos $\overline{aa'}$, $\overline{bb'}$ . . . etc., por su punto medio.

E es la mediatriz de los segmentos determinados por pares de puntos correspondientes. Con estos elementos definimos la nueva transformación.

DEFINICION: Se llama simetría axial, de eje E, a la transformación del plano en sí mismo, que a todo punto p de éste le hace corresponder otro punto p' del mismo plano, tal que el eje E es la mediatriz del segmento $\overline{pp'}$.



Si E es mediatriz de $\overline{pp'}$, entonces:

$\overline{pp'} \perp E \qquad \overline{pm} = \overline{mp'}$

p' es **simétrico** de **p** respecto de E.

Notaciones:

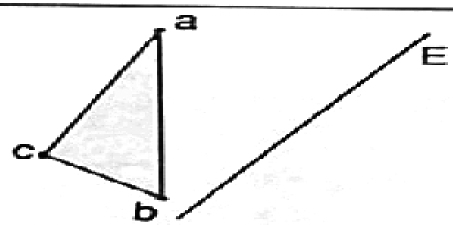
$S_E : p \longrightarrow p'$ se lee: la simetría de eje E transforma p en p'.

$p \xrightarrow{S_E} p'$ se lee: p se transforma en p' por la simetría de eje E.

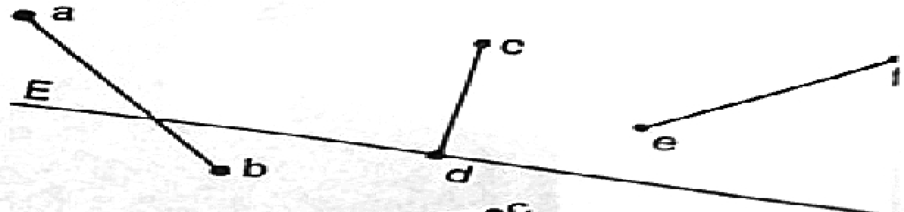
$p' = S_E\,(p)$ se lee: p' es la imagen de p por la simetría de eje E.

EJERCICIOS

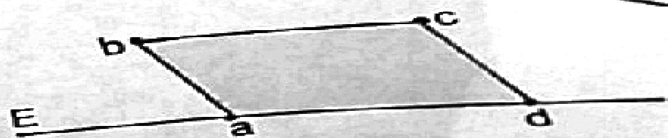
31 Construye la figura simétrica de $\hat{abc}$ con respecto al eje E.



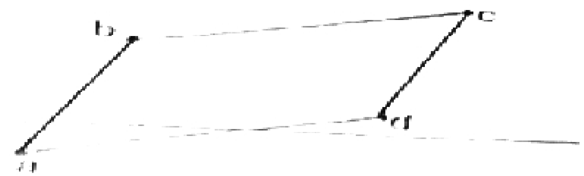
32 Construye los simétricos de $\overline{ab}$, $\overline{cd}$ y $\overline{ef}$ con respecto al eje E. Marca en color los puntos unidos.



33 Construye la figura simétrica de abcd con respecto al eje E. Marca en color los puntos unidos.



34 Construye la figura simétrica de abcd con respecto al eje E. Marca en color los puntos unidos.



35 ¿CUAL ES TU CONCLUSION?

a) Construye la simétrica de la recta S con respecto al eje E paralelo a ella.

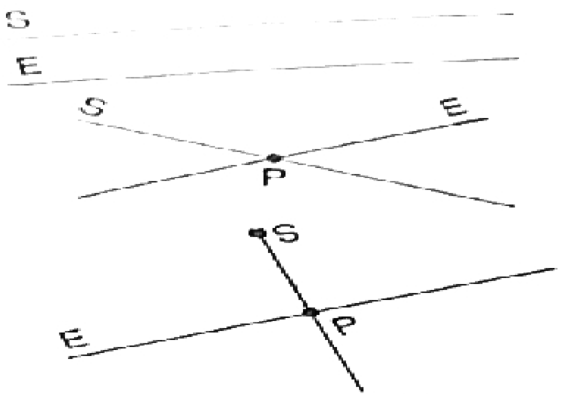
S ∥ E

b) Construye la simétrica de la recta S oblicua al eje E.

S ∠ E

c) Construye la simétrica de la recta S perpendicular al eje E.

S ⊥ E



d) Indica cuáles son los elementos unidos o dobles, en cada caso.

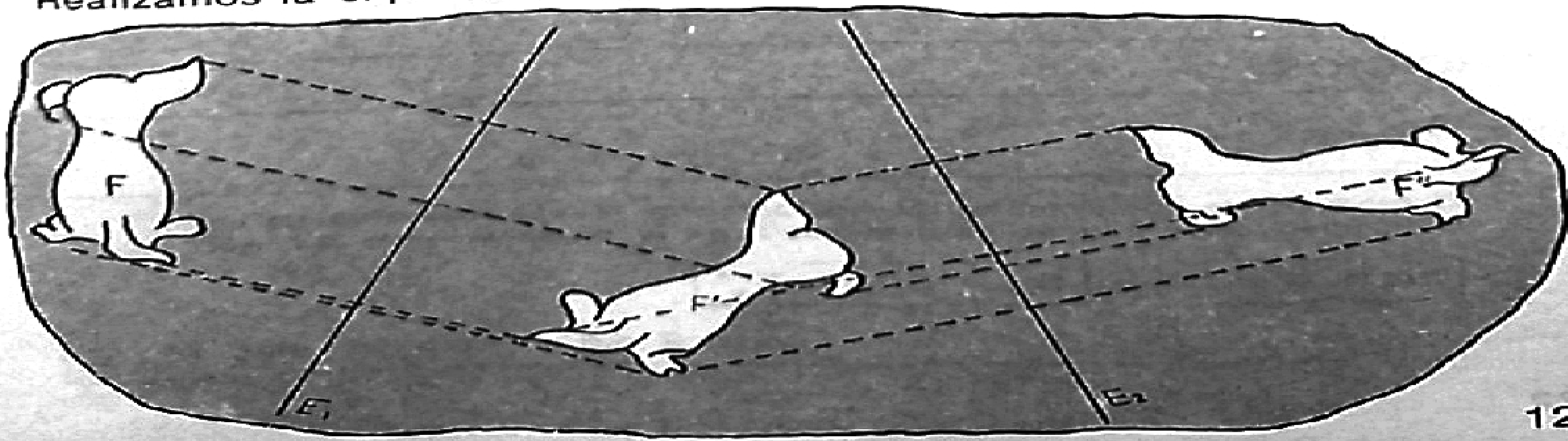
e) Enuncia tu conclusión.

1. En la simetría axial son unidos los puntos ....
....

2. En la simetría axial son unidas las rectas ....
....

Composición de simetrías axiales

Si aplicamos a una figura F una simetría de eje E_1 y a continuación aplicamos a su transformada F′ una simetría de eje E_2, ¿podemos pasar de F a F″ por una simetría axial?
Realizamos la experiencia con papel de calcar.



Dibuja una figura F. Dobla el papel y calca la figura F. Designamos con E_1 el doblez y con F′ la figura obtenida.

F′ es simétrica de F con respecto a E_1.

$$S_{E_1} : F \longrightarrow F'$$

Dobla nuevamente el papel y calca la figura F′.

Designamos con E_2 al segundo doblez y con F″ la figura obtenida.

F″ es simétrica de F′ con respecto a E_2.

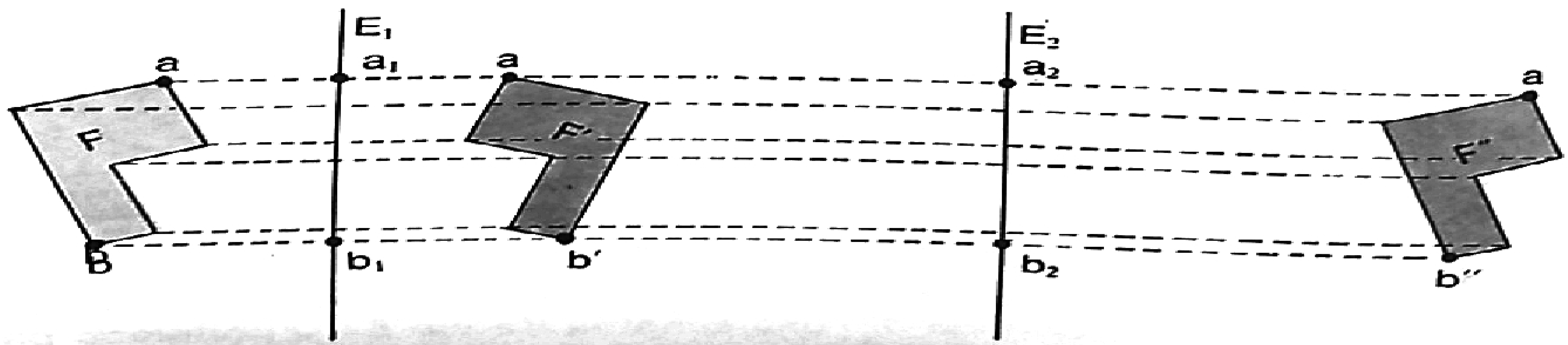
$$S_{E_2} : F' \longrightarrow F''$$

Se trata de determinar cuál es la transformación resultante de la composición de simetrías axiales.

$$S_{E_1} \circ S_{E_2} : F \longrightarrow F''$$

Para analizar el problema conviene considerar las distintas posiciones que pueden tener los ejes E_1 y E_2.

1º) $\boxed{E_1 \parallel E_2}$



$S_{E_1} : F \longrightarrow F'$ $\quad S_{E_2} : F' \longrightarrow F''$ $\quad S_{E_1} \circ S_{E_2} : F \longrightarrow F''$