EL PLANO

Introducción

De todas las figuras que se pueden estudiar en geometría del espacio, entre las más sencillas se tiene al plano. Se define plano como un conjunto de infinitos puntos del espacio. Es habitual que se nombre o designe a los planos con letras griegas: $\alpha;\beta;\gamma;\pi....etc.$

También se puede designar como superficie plana y aparecen en general en algunos cuerpos, constituyendo las caras del mismo, por ejemplo en un prisma de base cuadrada, sus seis caras son partes de diferentes planos. Lo que hace que sean diferentes es la posición distinta que ocupan sus puntos en el espacio. En el ejemplo del prisma, si tomamos los planos que forman sus bases, observamos que ningún punto de la base superior está en la base inferior (o viceversa), entonces podemos decir que el plano de la base inferior es distinto al plano de la base superior. En particular, cuando ocurre esto, decimos que los planos son paralelos. (fig. 1)

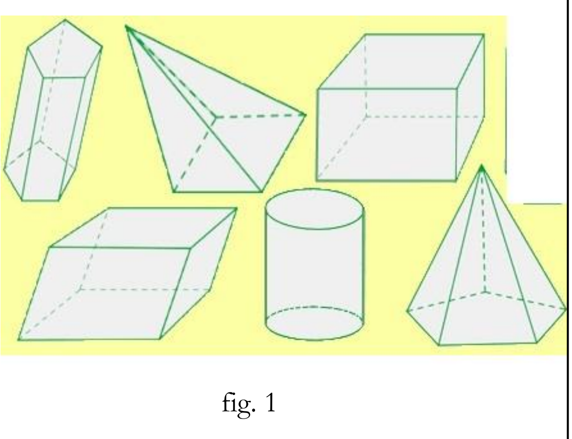


fig. 1

Estos dibujos representan (de izquierda a derecha): 1) un prisma de base pentagonal, 2) una pirámide de base cuadrada, 3) un prisma recto de base rectangular, 4) un prisma oblicuo de base rectangular, 5) un cilindro recto de base circular y 6) una pirámide de base pentagonal. En 1), 3), 4) y 5), las "bases" son partes de planos paralelos. En 3) y 4) las caras opuestas son planos paralelos. En 6) se tienen la base plana en forma de pentágono y la superficie lateral formada por planos con forma triangular.

En cambio, si dos planos tienen más de un punto en común, todos los puntos formarán una línea, llamada recta, y será la intersección de los dos planos, entonces los planos son secantes. (fig.2):

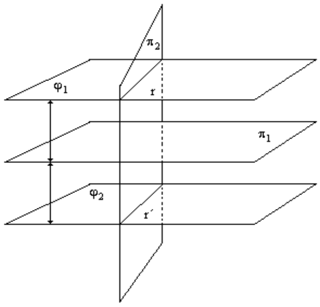


fig. 2

En la fig. 2 se observan tres planos paralelos, φ_1, φ_2 y π_1, cortados por un plano secante π_2 y también las rectas r y r' que son las intersecciones respectivas con los planos φ_1 y φ_2.

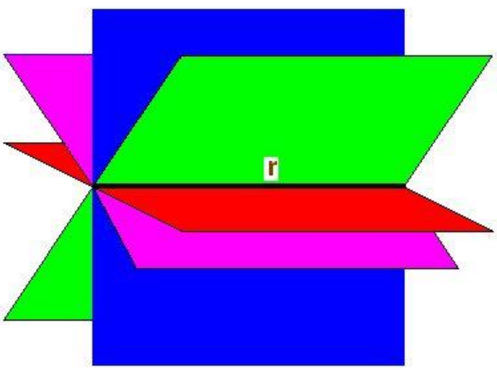
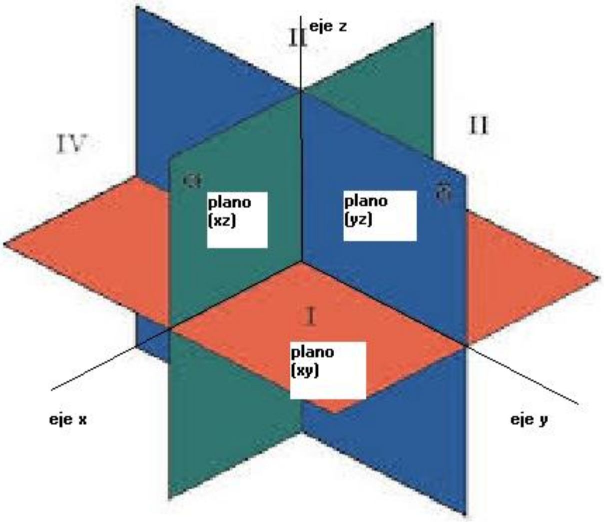


fig. 3

En la fig. 3 se tienen varios planos secantes entre sí, formando una única recta de intersección r.

Otro caso particular, es que todos los puntos de un plano también están en el otro plano, se dice que los planos son coincidentes. (en símbolos $\alpha \equiv \beta$)



En la fig. 4, un caso especial lo constituyen los planos coordenados cartesianos, son tres planos secantes, perpendiculares entre sí, donde sus intersección son rectas (los ejes cartesianos) y la intersección de los tres planos es un punto (el origen de coordenadas).

fig. 4

En geometría elemental, se dice que se puede determinar un plano si se conocen:

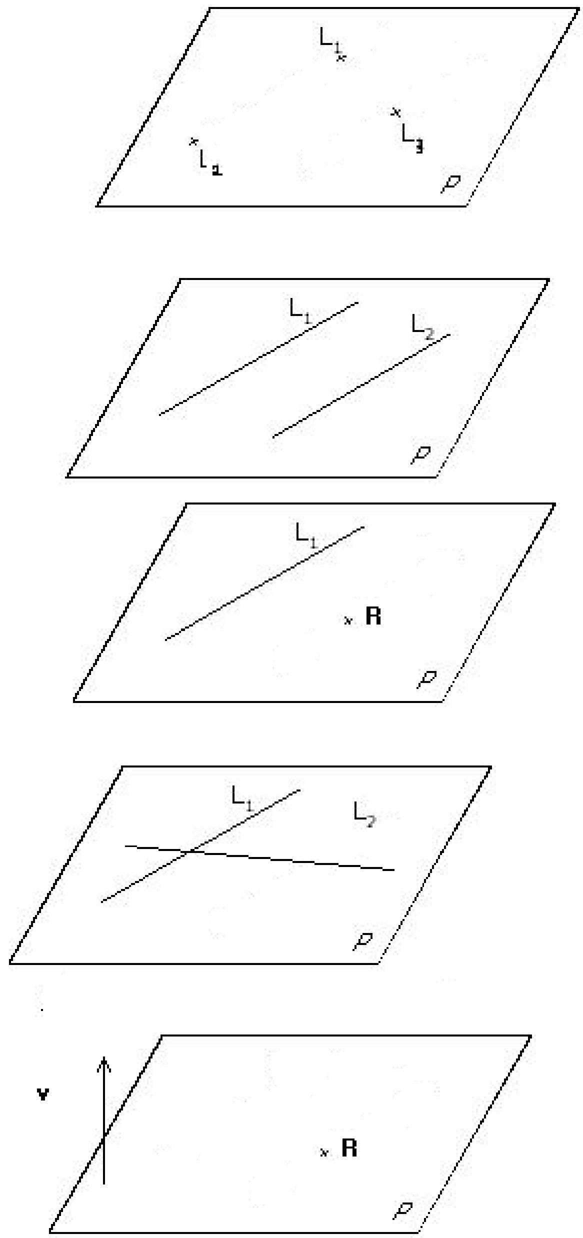
a) tres puntos del espacio, no alineados

b) dos rectas paralelas

c) una recta y un punto exterior a la misma,

d) dos rectas concurrentes y

e) conociendo un punto del espacio y un vector (que es el caso del que nos vamos a ocupar ahora). (fig. 5)



a) tres puntos del espacio, no alineados, b) dos rectas paralelas, c) una recta y un punto exterior a la misma.

d) dos rectas concurrentes

e) un punto del espacio y un vector.

fig. 5

En geometría analítica, uno de los problemas principales consiste en encontrar un modelo algebraico (ecuación) que represente a un plano geométricamente. Es decir, dado un determinado plano, hallar la ecuación que lo represente. Y así, a cada plano le corresponde una ecuación y cada ecuación representará a un único plano.

Para hallar la ecuación de un plano denominado π, partiremos de considerar como datos iniciales el caso e): un punto del espacio $P(x_p, y_p, z_p)$ y un vector $\vec{n} = (a, b, c)$ que tendrá que ser normal (o sea perpendicular) al mismo. Estos datos son suficientes para determinar un único plano, porque debemos recordar que: a) por un punto dado pueden pasar infinitos planos, pero sólo uno será perpendicular a un vector dado, b) se podrán tener infinitos planos perpendiculares a un vector dado, pero sólo uno pasará por un punto establecido. (fig. 6 y 7)

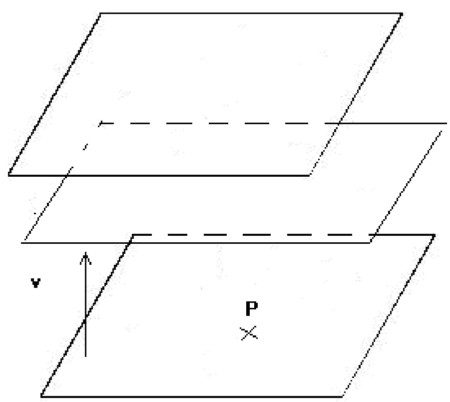


Fig. 7

Como hemos dicho, un plano está formado por infinitos puntos, entonces podemos considerar un punto genérico $X(x, y, z)$, que representara a cualquiera de los infinitos puntos de π. Como el punto P y el punto X pertenecen al plano, van a determinar un vector contenido en el plano, cuyas componentes se podrán hallar, siendo $\overrightarrow{PX} = (x - x_p, y - y_p, z - z_p)$ y por consiguiente, perpendicular a $\vec{n}$. (fig. 8)

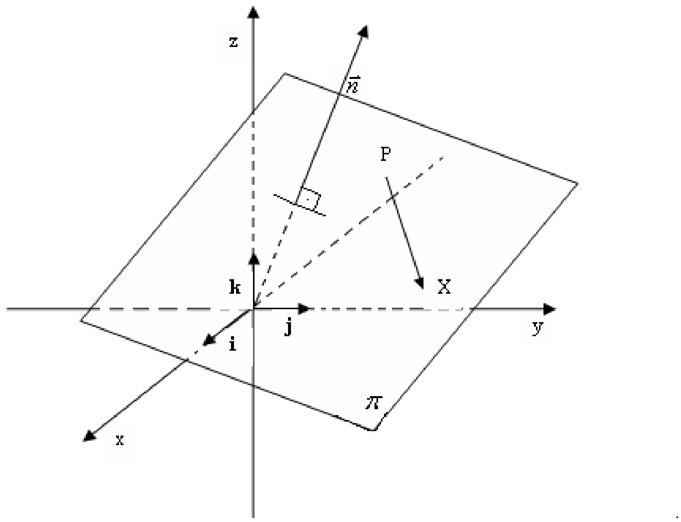


fig. 8

Por lo tanto, el producto escalar de los dos vectores $\overrightarrow{PX}$ y $\vec{n}$ será nulo:

$$\boxed{\overrightarrow{PX} \cdot \vec{n} = 0}$$

Conociendo ésta expresión como "**ecuación vectorial del plano π**", dado que al ser X un punto variable y que representa a cualquiera de los infinitos puntos del plano, se tendrán infinitos vectores $\overrightarrow{PX}$ y todos serán normales al vector $\vec{n}$.

La ecuación anterior se puede reescribir incorporando las componentes de ambos vectores:

$$\left(x - x_p, y - y_p, z - z_p\right) \cdot (a, b, c) = 0$$

Los valores conocidos son los números reales x_P ; y_P ; z_P ; a ; b y c.   Las variables son: x, y y z

La terna (a, b, c) que define a un vector normal al plano recibe el nombre de sistema de números directores del plano π .

Efectuando el producto escalar, se obtiene:

$(x - x_p)a + (y - y_p)b + (z - z_p)c = 0$, aplicando propiedad distributiva:

$ax - ax_p + by - by_p + cz - cz_p = 0$; ordenando:

$ax + by + cz - (ax_p + by_p + cz_p) = 0$. (Los tres primeros términos son lineales y los tres últimos son términos independientes, por ello se podrán reagrupar).

La expresión obtenida se puede comparar con una ecuación de primer grado con tres variables, del tipo:

$$\boxed{\boldsymbol{Ax + By + Cz + D = 0}}$$

donde $a = A$; $b = B$; $c = C$ y $-(ax_P + by_P + cz_P) = D$.

Entonces se obtiene una nueva forma de la ecuación del plano, llamada "**ecuación general del plano $\boldsymbol{\pi}$** ".

$$\boxed{\pi: \boldsymbol{Ax + By + Cz + D = 0}}$$

Ejercicio 1: Encontrar las ecuaciones vectorial y general del plano que pasa por el punto $P(3;\ 2;\ 2)$ y es normal al vector $\vec{v} = (2; 1; -2)$.

Solución: Para la ecuación vectorial se necesita un punto genérico $X(x, y, z)$ y el dato P, con ellos se hallan las componentes del vector $\overrightarrow{PX}$:

$\overrightarrow{PX} = (x-3; y-2; z-2)$. Así, la ecuación vectorial $\overrightarrow{\boldsymbol{PX}} \cdot \vec{\boldsymbol{n}} = \mathbf{0}$, quedará:

$$\pi : (x-3; y-2; z-2).(2;1;-2) = 0 .$$

Para encontrar la ecuación general, se realiza el producto escalar:

$(x-3).2 + (y-2).1 + (z-2).(-2) = 0$, distribuyendo:

$2x - 6 + y - 2 - 2z + 4 = 0$, por último se ordena:

$\pi : 2x + y - 2z - 4 = 0$, que es la ecuación general del plano.

Ejercicio 2: Hallar la ecuación general de un plano que pasa por los puntos $P\ (2; 1; -2)$, $Q\ (1; -3; 0)$ y $R\ (1; 2; 3)$.

Solución: En este caso no es un dato el vector normal al plano, pero mediante el producto vectorial entre los vectores $\overrightarrow{PQ}$ y $\overrightarrow{PR}$, se podrá obtener el vector $\vec{n}$.

$$\vec{n} = \overrightarrow{PQ} \times \overrightarrow{PR} = \begin{vmatrix} \breve{i} & \breve{j} & \breve{k} \\ -1 & -4 & 2 \\ -1 & 1 & 5 \end{vmatrix} = -22\,\breve{i} + 3\,\breve{j} - 5\breve{k} = (-22;\ 3; -5)$$

Se utilizan, uno de los puntos dados y el punto genérico *X* para hallar el vector $\overrightarrow{PX}$:

$\overrightarrow{PX} = (x-2\,;\, y-1;\; z+2)$. (Advertencia: también se podría haber utilizado el punto *Q* o el punto *R*)

Así, la ecuación vectorial $\overrightarrow{\boldsymbol{PX}} \cdot \vec{\boldsymbol{n}} = \boldsymbol{0}$, quedará:

$$\pi : (x-2; y-1; z+2).(-22; 3; -5) = 0\,.$$

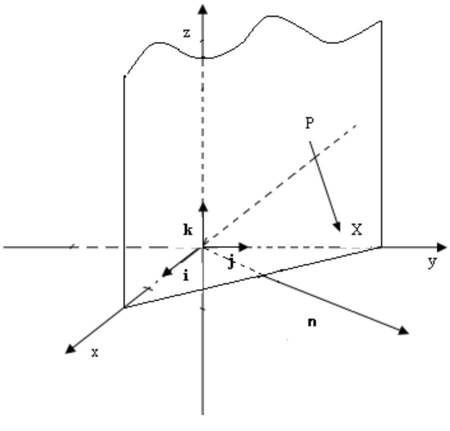
(Queda en manos del lector hallar la ecuación general del plano)

Ecuación de un plano en posición particular

Hasta aquí hemos considerado planos en posición general. No obstante, existen planos en posiciones que llamamos "particulares", como ser paralelos a un eje coordenado, perpendiculares a un eje coordenado o que contenga al origen de coordenadas.

- **Plano paralelo a un eje coordenado.**

Sea el plano α , con $\vec{n} = (a; b; c)$. Si α es paralelo al eje *z*, entonces:



$$\breve{k} \mathbin{//} \alpha \Rightarrow \breve{k} \perp \vec{n} \Rightarrow \breve{k} \cdot \vec{n} = 0 \Rightarrow (0;\ 0;\ 1).\,(a;\, b;\, c) = 0 \Rightarrow c = 0$$

Tomando un punto P que pertenezca al plano, la ecuación vectorial $\overrightarrow{\boldsymbol{PX}} \cdot \vec{\boldsymbol{n}} = \mathbf{0}$, quedará:

$$\alpha : (x - x_P\,;\ y - y_P\,;\ z - z_P).(a;\, b; 0) = 0.$$

En consecuencia, para la ecuación general del plano α se obtiene:

$\alpha : (x - x_P).a + (y - y_P).b + (z - z_P).\,0 = 0$. Distribuyendo y ordenando queda:

$a.x + b.y - (a.x_P + b.y_P) = 0$, que al comparar con una ecuación de primer grado da la expresión:

$\boxed{\boldsymbol{Ax + By + D = 0}}$

que corresponde a la ecuación general del plano paralelo al eje z. Observamos que en la misma, no aparece el término con la variable z. Además, la ecuación obtenida representa a una recta en el plano xy (tema que se desarrollará más adelante).

Con un razonamiento similar, se obtiene:

Si α es paralelo al eje x: $\alpha\colon By + Cz + D = 0$

Si α es paralelo al eje y : $\alpha\colon Ax + Cz + D = 0$

Conclusión: si un plano α es paralelo a uno de los ejes coordenados, su ecuación carece de la variable correspondiente al eje coordenado a quien es paralelo.

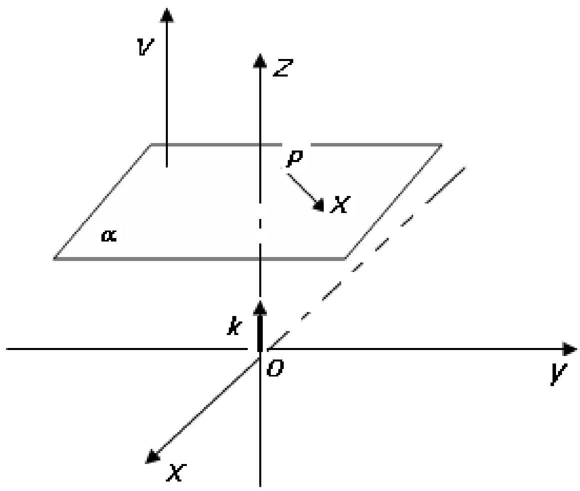
- **Plano perpendicular a un eje coordenado (o paralelo a un plano coordenado)**

Sea el plano α , con $\vec{n} = (A, B, C)$. Si α es perpendicular al eje z, entonces:

$$\breve{k} \perp \alpha \Longrightarrow \breve{k} \parallel \vec{n} \Longrightarrow \vec{n} = \lambda \breve{k} \Longrightarrow (A, B, C) = \lambda(0,0,1) \Longrightarrow \begin{cases} A = 0 \\ B = 0 \\ C = \lambda \end{cases}$$

En consecuencia, la ecuación general del plano α se reduce a:

$$Cz + D = \mathbf{0}$$



Con un razonamiento similar, se obtiene:

Si α es perpendicular al eje x

$$\breve{\imath} \perp \alpha \Longrightarrow \breve{\imath} \parallel \vec{n} \Longrightarrow \vec{n} = \lambda \breve{\imath} \Longrightarrow (A, B, C) = \lambda(1,0,0) \Longrightarrow \begin{cases} A = \lambda \\ B = 0 \\ C = 0 \end{cases}$$

$$\alpha\text{:}\ Ax + D = \mathbf{0}$$

Si α es perpendicular al eje y

$$\breve{j} \perp \alpha \Longrightarrow \breve{j} \parallel \vec{n} \Longrightarrow \vec{n} = \lambda\breve{j} \Longrightarrow (A, B, C) = \lambda(0,1,0) \Longrightarrow \begin{cases} A = 0 \\ B = \lambda \\ C = 0 \end{cases}$$

$$\alpha: \ By + D = 0$$

- **Plano que contiene al origen de coordenadas.**

Sea el plano α, con $\vec{n} = (A, B, C)$, que contiene al origen de coordenadas, es decir, al punto $(0,0,0)$. Por lo tanto, sus coordenadas satisfacen la ecuación general del plano:

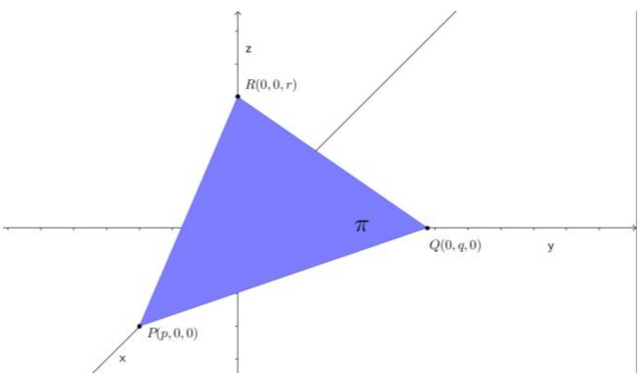
$$A.0 + B.0 + C.0 + D = 0 \Rightarrow D = 0$$

La ecuación de α se reduce a:

$$Ax + By + Cz = 0$$

Ecuación segmentaria de un plano

Sea un plano π que no es paralelo a ningún eje, ni a planos coordenados y además que no contenga al origen de coordenadas.



Los puntos $P(p,0,0), Q(0,q,0)$ y $R(0,0,r)$ determinan los siguientes vectores:

$$\overrightarrow{QR} = (0,-q,r)$$

$$\overrightarrow{QP} = (-p,q,0)$$

Entonces el vector normal al plano se puede obtener a través del producto vectorial:

$$\vec{n} = \overrightarrow{QR} x \overrightarrow{QP} = \begin{vmatrix} \breve{\imath} & \breve{\jmath} & \breve{k} \\ 0 & -q & r \\ -p & q & 0 \end{vmatrix} = qr\breve{\imath} + pr\breve{\jmath} + pq\breve{k} = (qr, pr, pq)$$

De esta manera, la ecuación vectorial de π es:

$$\overrightarrow{PX} \cdot \vec{n} = 0 \Longrightarrow (x-p, y, z) \cdot (qr, pr, pq) = 0$$

Operando:

$$(x-p)qr + pry + pqz = 0$$

$$xqr - pqr + pry + pqz = 0$$

Al dividir miembro a miembro por pqr:

$$\frac{xqr - pqr + pry + pqz}{pqr} = \frac{0}{pqr}$$

$$\frac{x}{p} + \frac{y}{q} + \frac{z}{r} - 1 = 0$$

$$\boxed{\boldsymbol{\frac{x}{p} + \frac{y}{q} + \frac{z}{r} = 1}}$$

Esta es la "**ecuación segmentaria del plano π**".

<u>Ejercicio 3</u>: Encontrar la ecuación segmentaria del plano hallado en el ejercicio nº 2.

Ecuación normal de un plano

Es sabido que para determinar la ecuación de un plano es necesario conocer las coordenadas de un punto y las componentes de un vector normal. Si se elige como vector normal al versor que tiene la misma dirección, se obtiene:

$$\breve{n} = \frac{1}{|\vec{n}|}\vec{n} = \left(\frac{A}{|\vec{n}|}, \frac{B}{|\vec{n}|}, \frac{C}{|\vec{n}|}\right) = (\cos\hat{\alpha}, \cos\hat{\beta}, \cos\hat{\gamma})$$

Entonces la ecuación del plano resulta:

$$\overrightarrow{PX} \cdot \vec{n} = 0 \Longrightarrow \left(x - x_p, y - y_p, z - z_p\right) \cdot (\cos\hat{\alpha}, \cos\hat{\beta}, \cos\hat{\gamma}) = 0$$

$$\left(x - x_p\right)\cos\hat{\alpha} + \left(y - y_p\right)\cos\hat{\beta} + \left(z - z_p\right)\cos\hat{\gamma} = 0$$

$$\cos\hat{\alpha}\, x - \cos\hat{\alpha}\, x_p + \cos\hat{\beta}\, y - \cos\hat{\beta}\, y_p + \cos\hat{\gamma}\, z - \cos\hat{\gamma}\, z_p = 0$$

$$\cos\hat{\alpha}\, x + \cos\hat{\beta}\, y + \cos\hat{\gamma}\, z - (\cos\hat{\alpha}\, x_p + \cos\hat{\beta}\, y_p + \cos\hat{\gamma}\, z_p) = 0$$

$$\boxed{\boldsymbol{\cos\hat{\alpha}\, x + \cos\hat{\beta}\, y + \cos\hat{\gamma}\, z - \delta = 0}}$$

Esta es la "**ecuación normal del plano π**".

<u>Análisis del término δ</u>:

$$\delta = \cos\hat{\alpha}\, x_p + \cos\hat{\beta}\, y_p + \cos\hat{\gamma}\, z_p = \left(x_p, y_p, z_p\right) \cdot \left(\cos\hat{\alpha}, \cos\hat{\beta}, \cos\hat{\gamma}\right) = \overrightarrow{OP} \cdot \breve{n}$$
$$= Proy_{\breve{n}}\overrightarrow{OP}$$

Es decir que $\delta = d(\pi, O)$, es la distancia que existe entre el plano π y el origen de coordenadas.

Cuando la ecuación conocida del plano es la general, entonces para hallar la ecuación normal se tendrá que obtener el versor normal, multiplicando al vector normal $\vec{v} = (A\,;B\,;C)$ por el inverso de su módulo:

$$\breve{v} = \frac{1}{|\vec{v}|}.\ \vec{v} = \left(\frac{A}{\sqrt{A^2+B^2\,C^2}}\,;\frac{B}{\sqrt{A^2+B^2\,C^2}}\,;\frac{C}{\sqrt{A^2+B^2\,C^2}}\right)$$

El signo de la raíz cuadrada se toma de la siguiente manera:

Si la ecuación general tiene término independiente D, la raíz cuadrada se toma con signo contrario al signo de D.

Es decir:

$$\pi : Ax + By + Cz + D = 0 \Rightarrow$$

$$\pi : \frac{A}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}x + \frac{B}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}y + \frac{C}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}z + \frac{D}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}} = 0$$

Entonces: $\dfrac{D}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}} = -\delta \Rightarrow \operatorname{sgn} D \neq \operatorname{sgn}\sqrt{}$

<u>Ejemplo</u>: $\pi : 3x + 1y - 2z + 4 = 0$

Se toma: $\operatorname{sgn} D > 0 \Rightarrow \operatorname{sgn}\sqrt{} < 0 \Rightarrow \delta = \dfrac{4}{-\sqrt{3^2+1^2+(-2)^2}} = -\dfrac{4}{\sqrt{14}}$

$\Rightarrow$

$$\pi: \frac{3}{-\sqrt{3^2+1^2+(-2)^2}}x + \frac{1}{-\sqrt{3^2+1^2+(-2)^2}}\,y - \frac{2}{-\sqrt{3^2+1^2+(-2)^2}}\,z + \frac{4}{-\sqrt{3^2+1^2+(-2)^2}} = 0$$

Queda: $\pi: -\frac{3}{\sqrt{14}}\,x - \frac{1}{\sqrt{14}}\,y + \frac{2}{\sqrt{14}}\,z - \frac{4}{\sqrt{14}} = 0$

Si la ecuación general tiene término independiente D= 0 , la raíz cuadrada se toma con signo igual al signo de C.

<u>Ejemplo</u>: $\beta: 3x + 1y - 2z = 0$

Como C es negativo, el signo de la raíz cuadrada será negativo: $-\sqrt{3^2+1^2+(-2)^2} = -\sqrt{14}$.

La ecuación normal del plano es: $\beta: -\frac{3}{\sqrt{14}}x - \frac{1}{\sqrt{14}}y + \frac{2}{\sqrt{14}}z = 0$

<u>Ejercicio 4</u>: Encontrar la ecuación normal del plano hallado en el ejercicio nº 2.