BINOMIO DE NEWTON

Basado en

Álvarez, E.; Oliver, M. y Vecino, M. (2016) Temas de Álgebra. Euden Libros de Grado.. Pág. 139

Antes de desarrollar el Binomio de Newton, necesitaremos tres conceptos previos: factorial, número combinatorio y sumatoria.

Factorial de un número Natural

Sea n un número natural, el factorial es una función con dominio en N e imagen en N, tal que:

$$n! = \begin{cases} 0! = 1 \\ 1! = 1 \\ (n+1)! = n!\,(n+1) \end{cases}$$

Por ejemplo: 3! = 3 . 2 . 1 = 6 5! = 5 . 4 . 3 . 2 . 1 = 120

De acuerdo a la definición: 5! = 5 . 4! = 5 . 4 .3!

Número Combinatorio

Sean n y m dos números naturales, m ≤ n, se llama número combinatorio de n tomados de a n,

${}_nC_m = C_{n,m} = \binom{n}{m}$, al número:

$${}_nC_m = C_{n,m} = \binom{n}{m} = \frac{n!}{m!(n-m)!}$$

Ejemplo:

$$C_{2,1} = \binom{2}{1} = \frac{2!}{1!.1!} = \frac{2}{1} = 2$$

$$C_{10,7} = \binom{10}{7} = \frac{10!}{7!.3!} = \frac{10.9.8.7!}{7!.3!} = \frac{10.9.8}{6} = 10.3.4 = 120$$

Sumatoria

Sea $a_1, a_2, a_3, a_4, \ldots, a_n, \ldots$ una sucesión de números reales. Queremos definir la suma de los n primeros términos de esa sucesión, para cualquier $n \in \mathbb{N}$.

La notación que indica esa suma es $\sum_{i=1}^{n} a_i$, y debemos definirla de manera tal que obtengamos lo que pretendemos: que sume los $a_1, a_2, a_3, a_4, \ldots,$ hasta a_n.

Definición: Se llama *sumatoria* de los n primeros términos de la sucesión $a_1, a_2, a_3, a_4, \ldots, a_n, \ldots$, y se la simboliza con $\sum_{i=1}^{n} a_i$, a la suma definida por :

$$\sum_{i=1}^{n} a_i =: \begin{cases} \sum_{i=1}^{1} a_i = a_1 \\ \sum_{i=1}^{n+1} a_i = \sum_{i=1}^{n} a_i + a_{n+1} \end{cases}$$

BINOMIO DE NEWTON

Son desarrollos de potencias n-ésimas de binomios.

En el siguiente conocido desarrollo: $(a+b)^2 = a^2 + 2\,ab + b^2$

El primero miembro recibe el nombre de "cuadrado de un binomio", y el segundo miembro, "trinomio cuadrado perfecto".

En el caso del "cubo de un binomio", su desarrollo es el cuatrinomio cubo perfecto:

$$(a+b)^3 = a^3 + 3\,a^2b + 3\,ab^2 + b^3$$

Si observamos la parte literal de cada término del segundo miembro, las potencias del primer término son decrecientes de n a 0 y las potencias del segundo término son crecientes de o a n.

En cuanto a los coeficientes, en el cuadrado del binomio son: 1 2 1

Y en el caso del cubo del binomio: 1 3 3 1

$$(a+b)^4 = a^4 + 4\,a^3b + 6\,a^2b^2 + 4ab^3 + b^4$$

TRIÁNGULO DE PASCAL (1623-1662)
(Fig.1)

$$\begin{array}{c}
\binom{0}{0}\\
\binom{1}{0}\ \binom{1}{1}\\
\binom{2}{0}\ \binom{2}{1}\ \binom{2}{2}\\
\binom{3}{0}\ \binom{3}{1}\ \binom{3}{2}\ \binom{3}{3}\\
\binom{4}{0}\ \binom{4}{1}\ \binom{4}{2}\ \binom{4}{3}\ \binom{4}{4}\\
\binom{5}{0}\ \binom{5}{1}\ \binom{5}{2}\ \binom{5}{3}\ \binom{5}{4}\ \binom{5}{5}\\
\cdots\cdots\cdots\cdots
\end{array}$$

TRIÁNGULO DE TARTAGLIA (1500-1557)
(Fig.2)

$$\begin{array}{c}
1\\
1\quad 1\\
1\quad 2\quad 1\\
1\quad 3\quad 3\quad 1\\
1\quad 4\quad 6\quad 4\quad 1\\
1\quad 5\quad 10\quad 10\quad 5\quad 1\\
\cdots\cdots\cdots\cdots
\end{array}$$

La tabla de la Fig.2, es conocida como Triángulo de Tartaglia (Niccolò Fontana (1499-1557), apodado Tartaglia debido a su tartamudez). Sin embargo, fue Blaise Pascal (1623-1662) quien relacionó los coeficientes del desarrollo de la potencia de un binomio con los números combinatorios, por lo cual, expresado en la forma de la Fig.1 se conoce también como Triángulo de Pascal.

Binomio de Newton

$\forall$ a $\in$ R, $\forall$ b $\in$ R:

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k} \qquad \text{con n} \in \text{N}$$

***Demostración*:** La haremos por inducción sobre n.

Para $n = 1$ $(a+b)^1 = a + b$; $\sum_{k=0}^{1}\binom{1}{k} a^k b^{1-k} = \binom{1}{0} a^0 b^1 + \binom{1}{1} a^1 b^0 = b + a$

y como $a + b = b + a$, la proposición es verdadera para $n = 1$.

Supongamos, como Hipótesis Inductiva, que la proposición sea verdadera para n, o sea que:

$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \cdot a^k \cdot b^{n-k}$. Queremos ver si lo es para $n+1$. Para ello debemos probar que

$(a+b)^{n+1} = \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} a^k\, b^{n+1-k}$.

Comencemos por el primer miembro de la igualdad:

$$(a+b)^{n+1} = (a+b).(a+b)^n = a.(a+b)^n + b.(a+b)^n =$$

$$= a.\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \cdot a^k \cdot b^{n-k} + b.\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \cdot a^k \cdot b^{n-k} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{k+1} \cdot b^{n-k} + \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k \cdot b^{(n-k)+1} =$$

$$= a^{n+1} + b^{n+1} + \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n}{k} a^{k+1} \cdot b^{n-k} + \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} a^k \cdot b^{n+1-k} =$$

$$= a^{n+1} + b^{n+1} + \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k-1} a^k \cdot b^{n-(k-1)} + \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} a^k \cdot b^{n+1-k} =$$

$$= a^{n+1} + b^{n+1} + \sum_{k=1}^{n} \left[\binom{n}{k-1} + \binom{n}{k} \right] a^k \cdot b^{n+1-k} =$$

Por la Ley de Recurrencia de Pascal $\binom{n+1}{k} = \binom{n}{k} + \binom{n}{k-1}$

$$= a^{n+1} + b^{n+1} + \sum_{k=1}^{n} \binom{n+1}{k} a^k \cdot b^{n+1-k} = \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} a^k\, b^{n+1-k}$$

dado que $a^{n+1} = \binom{n+1}{n+1} a^{n+1} \cdot b^{n+1-(n+1)}$ y $b^{n+1} = \binom{n+1}{0} a^0 \cdot b^{n+1-0}$.

Así, la proposición es verdadera para $n+1$; luego se verifica $\forall n \in \mathbb{N}$.

Ejemplo: $(3x-2y)^6 = \sum_{k=0}^{6} \binom{6}{k} (3x)^k (-2y)^{6-k}$

$$= \binom{6}{0} (3x)^6 + \binom{6}{1} (3x)^5(-2y) + \binom{6}{2} (3x)^4(-2y)^2 + \binom{6}{3} (3x)^3(-2y)^3$$

$$+ \binom{6}{4} (3x)^2(-2y)^4 + \binom{6}{5} 3x\,(-2y)^5 + \binom{6}{6} (-2y)^6$$

$$= 729\,x^6 - 2916\,x^5y + 4860x^4y^2 - 4320\,x^3y^3 + 2160x^2y^4 - 576x\,y^5 + 64\,y^6$$