TRABAJO PRÁCTICO Nº 6: Introducción a las Ecuaciones Diferenciales Parciales

Ejercicio Nº1: Compruebe que la función dada es una solución de la ecuación diferencial parcial correspondiente.

a) $z = 3x - 2y \quad para \quad 2z_x + 3z_y = 0$

b) $z = e^{x-y} \quad para \quad z_x + z_y = 0$

c) $z = x^2 - y^2 \quad para \quad z_{xx} + z_{yy} = 0$

d) $z = e^x \cos y \quad para \quad z_{xx} + z_{yy} = 0$

Ejercicio Nº2: Sea *f(x)*=*x* para -π<x<π. Escriba la serie de Fourier de *f* en [-π,π].

Ejercicio Nº3: Sea $f(x) = \begin{cases} 0 & para \quad -3 \le x \le 0 \\ x & para \quad 0 \le x \le 3 \end{cases}$. Escriba la serie de Fourier de *f* en [-3,3].

Ejercicio Nº4: Demuestre que $u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n sen\left(\frac{n\pi x}{L}\right) e^{-\beta\left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 t}$ es solución del problema de flujo de calor:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \beta \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \qquad 0<x<L, \quad t>0$$

$$u(0,t) = u(L,t) = 0 \quad t>0$$

$$u(x,0) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n sen\left(\frac{n\pi x}{L}\right)$$

Ejercicio Nº5: Determine si la ecuación de segundo orden dada es parabólica, hiperbólica o elíptica:

a) $5z_{xx} + 7z_{yy} = 0$

b) $3z_{xx} - 2z_{yy} = 0$

c) $z_{xx} + z_{xy} + z_{yy} = 0$

d) $y^2 z_{xx} + xyz_{xy} + x^2 z_{yy} = 0$

Ejercicio Nº6:

Encuentre la solución *u*(*x*,*t*) del problema con valores de frontera:

$$\begin{cases} u_{xx} - u_t = 0 & 0 < x < \pi, \; 0 < t < \infty \\ u(0,t) = u(\pi,t) = 0 \\ u(x,0) = f(x) \end{cases}$$

para f(x) dado, y trace la gráfica *u*(*x*,0), *u*(*x*,1) y *u*(*x*,2) como funciones de *x*.

a) $f(x) = \operatorname{sen} 3x$

b) $f(x) = \operatorname{sen} x + 3\operatorname{sen} 2x$

c) $f(x) = x \quad para \quad 0 \le x \le \pi/2$

d) $f(x) = \begin{cases} 1 & para \;\; \pi/3 \le x \le 2\pi/3, \\ 0 & para \;\; otro \; caso \end{cases}$

Ejercicio Nº7: Encuentre la solución *u*(*x*,*t*) del problema con valores de frontera:

a) $\begin{cases} 4u_{xx} - u_{tt} = 0 & 0 < x < \pi, \; 0 < t < \infty \\ u(0,t) = u(\pi,t) = 0 \\ u(x,0) = \frac{1}{10} sen 2x \\ u_t(x,0) = 0 \end{cases}$

b) $\begin{cases} u_{xx} - u_{tt} = 0 & 0 < x < 1, \; 0 < t \\ u(0,t) = u(1,t) = 0 \\ u(x,0) = \frac{1}{10} sen \pi x - \frac{1}{20} sen 3\pi x \\ u_t(x,0) = 0 \end{cases}$

c) $\begin{cases} 4u_{xx} - u_{tt} = 0 & 0 < x < \pi, \; 0 < t < \infty \\ u(0,t) = u(\pi,t) = 0 \\ u(x,0) = u_t(x,0) = \frac{1}{10} sen x \end{cases}$

Ejercicio Nº8: En cada uno de los casos, resuelva el problema de Dirichlet para el rectángulo 0< *x* < *a*, 0< y < *b*, consistente en la ecuación de Laplace $u_{xx} + u_{yy} = 0$ y las condiciones en la frontera dada.

a) $u(x,0) = u(x,b) = u(0,y) = 0, \; u(a,y) = g(y)$

b) $u(x,0) = u(x,b) = u(a,y) = 0, \; u(0,y) = g(y)$

c) $u(x,0) = u(a,y) = u(0,y) = 0, \; u(x,b) = f(x)$