Juan Martínez Tarrazó

# Resolución de problemas

## P. Puig Adam. *Curso de geometría métrica. Tomo I. Fundamentos.*

October 12, 2013

Springer

# Contents

# Part I
# Enlace, ordenación y sentido en el plano

# Chapter 1
# Las relaciones de incidencia

## Problems

**1.1.** ¿Cuántas rectas determinan $n$ puntos no alineados tres a tres?

**1.2.** ¿Cuántos planos determinan $n$ puntos no coplanarios cuatro a cuatro?

**1.3.** Llámase *cuadrilátero completo* a la figura formada por cuatro rectas secantes entre sí dos a dos, sin que tres de ellas pasen por un punto. Estas rectas se llaman *lados* del cuadrilátero, y sus puntos de intersección *vértices*. Se llaman *diagonales* del cuadrilátero las rectas que unen vértices no situados en un mismo lado. ¿Cuántos vértices y cuántas diagonales tiene el cuadrilátero completo?

**1.4.** Llámase *cuadrivértice completo* a la figura formada por cuatro puntos coplanarios no alineados tres a tres, llamados *vértices*, y las rectas que los unen dos a dos llamados *lados*. Llámanse *puntos diagonales* del cuadrivértice los puntos de intersección de lados no concurrentes en un vértice. ¿Cuántos lados tiene el cuadrivértice? ¿Cuántos puntos diagonales tiene a lo sumo? ¿Podemos asegurar su existencia?

# Part II
# Congruencia y paralelismo en el plano

# Chapter 2
# Los giros en el plano

## Problems

**2.1.** Lugar geométrico de los centros de los giros que transforman una recta dada en otra dada. Caso en que sean paralelas.

**2.2.** Dados dos giros de centros $A$ y $B$ y amplitudes $\alpha$ y $\beta$, coloquemos dos ángulos $ab = \alpha$, $mn = \beta$, de modo que tengan por bisectrices respectivas las semirrectas $AB$ y $BA$ si son $ab$ y $mn$ del mismo sentido; o $AB$ y $AB \rightarrow$ si son de sentido opuesto. Demostrar que el punto de intersección $an$, cuando existe, es el centro de giro del producto de los giros dados en el orden indicado. ¿Cuál es el centro al variar el orden de los giros componentes?

# Chapter 3
# Ejercicios referentes a cuestiones diversas de este capítulo

## Ejercicios referentes a cuestiones diversas de este capítulo

Demostrar:

**3.1.** Dos triángulos de lados respectivamente paralelos tienen ángulos respectivamente iguales. (Hay que probar la igualdad u oposición de sentido en los tres lados.)

**3.2.** Todo movimiento inverso del plano puede reducirse de infinitos modos al producto de una traslación por una simetría axial.

**3.3.** Todo movimiento inverso del plano puede reducirse de infinitos modos al producto de una simetría central por una simetría axial.

**3.4.** El producto de tres simetrías axiales respecto de tres ejes concurrentes (paralelos) es una simetría axial respecto de un eje concurrente (paralelo) con ellos.

**3.5.** Dadas tres simetrías $s$, $s'$, $s''$ respecto de tres ejes concurrentes o paralelos, la transformación $(ss's'')^2$ es la identidad. Se expresa $(ss's'')^2 = 1$.

**3.6.** Si $g$ es un giro de centro $O$ y $s$ una simetría respecto de un eje que pasa por $O$, se verifica $sgs = g^{-1}$ ($g^{-1}$ significa el giro recíproco de $g$).

**3.7.** El producto de dos simetrías centrales respecto de dos centros $O_1$ y $O_2$ es una traslación equivalente al producto de dos traslaciones iguales a $\overrightarrow{O_1O_2}$.

**3.8.** El producto de una simetría de centro $O$ por una traslación $\overrightarrow{BB'}$ es otra simetría de centro $O'$ punto medio de $OO_1$, siendo $O_1$ el homólogo de $O$ en la traslación $\overrightarrow{BB'}$.

**3.9.** El producto de una traslación $\overrightarrow{BB'}$ por una simetría de centro $O$ es una simetría de centro $O''$, punto medio de $OO_2$, siendo $O_2$ el homólogo de $O$ en la traslación inversa $\overrightarrow{B'B}$.

**3.10.** Todas las simetrías [centrales] del plano, juntamente con todas las traslaciones del mismo, forman un grupo. Este grupo no es abeliano.

**3.11.** El producto de tres simetrías respecto de tres centros $O_1 O_2 O_3$ es otra simetría central de centro $O_4$, tal que $\overrightarrow{O_3 O_4}$ es igual y paralelo al $\overrightarrow{O_2 O_1}$ y de igual sentido.

**3.12.** Dadas tres simetrías centrales cualesquiera, $s_1$, $s_2$, $s_3$, la transformación $(s_1 s_2 s_3)^2$ es la identidad.

**3.13.** Dado el segmento $AB$, si se traslada $B$ a $B'$ dejando fijo $A$, el punto medio $O$ de $AB$ se traslada a $O'$, tal que $OO'$ es la mitad de $BB'$. (V. ej. 8.)

**3.14.** Hallar el lugar geométrico de los puntos medios de las cuerdas iguales de una circunferencia. Idem de las cuerdas paralelas.

**3.15.** Lugar geométrico de los puntos medios de las cuerdas de una circunferencia situadas en rectas concurrentes en un punto $P$ distinto del centro.

**3.16.** El producto de $2n$ simetrías centrales es una traslación (ocasionalmente identidad).

**3.17.** El producto de $2n+1$ simetrías centrales es una simetría.

**3.18.** Llévense arcos iguales $AB = A'B' = \alpha$ sobre dos circunferencias iguales, a partir de sendos puntos $A$ y $A'$ fijos en ellas. Hallar el lugar geométrico de los puntos medios de los segmentos $BB'$ que unen los extremos, al variar $\alpha$, 1.º, cuando los arcos se llevan en igual sentido; 2.º, cuando se llevan en sentidos opuestos. (Trasládese una circunferencia sobre la otra y después de aplicar el ej. 14, deshágase la traslación aplicando el ej. 13.)

**3.19.** Sean $c$ y $c'$ dos circunferencias secantes en $P$ y $Q$. Tracemos por $P$ una recta variable y sean $A$ y $A'$ sus puntos de intersección con $c$ y $c'$. Unamos $A$ y $A'$, respectivamente, con dos puntos fijos $B$ y $B'$ de $c$ y $c'$ distintos de $Q$. Hallar el lugar geométrico de las intersecciones de $BA$ y $B'A'$. Posición que ocupa $Q$ respecto de este lugar cuando $B$ y $B'$ están alineados con $P$.

# Part III
# Primeras relaciones métricas en las figuras planas

# Chapter 4
# Distancias en el plano

## Problems

**4.1.** Demostrar que la distancia de un punto $P$ a otro $M$ interior a un segmento $AB$, es menor que $PA$ o que $PB$.

**4.2.** Demostrar que todo segmento interior a un triángulo es menor que su lado mayor.

**4.3.** Demostrar que todo segmento interior a un polígono es menor que su lado o diagonal mayor.

**4.4.** Demostrar que de dos cuerdas desiguales la mayor es la que dista menos del centro.

**4.5.** Demostrar que la altura sobre el lado mayor de un triángulo es interior a él y menor que las otras dos.

**4.6.** La suma de distancias de un punto interior de un triángulo a los vértices es menor que el perímetro y mayor que el semiperímetro.

**4.7.** La suma de las diagonales de un cuadrilátero convexo está comprendida entre el perímetro y el semiperímetro del mismo.

**4.8.** La suma de las distancias de los puntos de la base de un triángulo isósceles a los lados es constante.

**4.9.** La suma de distancias de un punto cualquiera interior de un triángulo equilátero a sus tres lados es constante.

**4.10.** ¿Cuántos lados debe tener un polígono convexo para que la suma de sus ángulos interiores: 1.º, exceda en $m$ rectos a la suma de los exteriores; 2.º, sea $k$ veces la suma de los exteriores?

**4.11.** Sea $i$ el ángulo de incidencia de un rayo luminoso sobre una de las caras de un prisma óptico; sea $r$ el ángulo de refracción correspondiente; sea, a su vez, $i'$ el ángulo de incidencia interior del rayo refractado sobre la otra cara del prisma y, finalmente, $r'$ el ángulo de refracción correspondiente (ángulo del rayo saliente con la normal a la segunda cara). Demostrar las relaciones $\delta = i - r' + \alpha$ y $-r + i' = \alpha$, en la que $\delta$ es el ángulo de desviación (entre el primer rayo incidente y el segundo refractado) y $\alpha$ es el ángulo diedro de las caras del prisma.

(El rayo incidente se supone en un plano normal a la arista, plano en el que se sitúan asimismo los restantes rayos, razón por la cual el problema es de Geometría plana.)

**4.12.** Calcular en función de los ángulos $B$ y $C$ de un triángulo $ABC$, el ángulo que forman la altura y la bisectriz por $A$.

**4.13.** Calcular en función de los ángulos agudos de un triángulo rectángulo, el ángulo que forman la altura y la mediana que parten del vértice del ángulo recto.

**4.14.** Expresar en función de los ángulos de un triángulo, los ángulos del triángulo formado por las bisectrices exteriores; y aquéllos en función de éstos.

**4.15.** Expresar los ángulos que forman las bisectrices de dos ángulos de un cuadrilátero convexo en función de los otros dos ángulos de este cuadrilátero.

**4.16.** Lugar geométrico de los puntos $B'$ de la figura del §9 de la lec. 10, si $A$ y $B$ permanecen fijos y $C$ varía conservando el valor del ángulo en $C$.

**4.17.** Trazar por un punto dado una circunferencia equidistante de tres puntos dados no alineados.

**4.18.** Sea una poligonal $ABCDEFG\ldots$ de lados iguales cuyos vértices pares $BDF\ldots$ están, en este orden, sobre uno de los lados de un ángulo $\alpha$ de vértice $A$ y los impares $ACEG\ldots$ ordenados sobre el otro lado. Demostrar que $\measuredangle DBC = 2\alpha$; $\measuredangle DCE = 3\alpha$; $\measuredangle FDE = 4\alpha$; ...

**4.19.** Fundado en la propiedad anterior, idear un aparato que realice la multiplicación y división de ángulos por un entero; en particular un aparato para *trisecar* ángulos.

**4.20.** Demostrar que la condición necesaria y suficiente para que el producto de dos giros no concéntricos sea una traslación es que los ángulos de giro sean iguales y de opuesto sentido. (V. ej. 2.º, lec. 8.ª)

**4.21.** Hallar el centro de giro resultante de multiplicar una traslación dada por un giro, dado por su centro y su ángulo. ¿Qué variación experimenta este centro al permutar las operaciones componentes? ¿Cuál es el ángulo de giro resultante?

**4.22.** Se definen en el plano dos giros por sus centros $O_1$ y $O_2$ y sus ángulos de giro $\alpha_1$ y $\alpha_2$. Hallar el lugar geométrico de los puntos cuya distancia a sus homólogos respectivos en el producto de ambos giros, en el orden dado, sea un segmento dado.

**4.23.** Sobre los lados de un triángulo cualquiera $ABC$ se construyen tres triángulos equiláteros $ABC'$, $BCA'$, $CAB'$ hacia el exterior de $ABC$. Demostrar que: 1.º $AA' = BB' = CC'$. 2.º Las rectas $AA'$, $BB'$ y $CC'$ son concurrentes y cada una de ellas es bisectriz de las otras dos. 3.º Por el punto de concurso de las tres pasan también las circunferencias determinadas por $ABC'$, $BCA'$ y $CAB'$.

# Chapter 5
# Los cuadriláteros planos

## Problems

**5.1.** ¿Qué figuras limitan las bisectrices de los ángulos de un paralelogramo (no rombo)?

**5.2.** Idem de un rectángulo.

**5.3.** Demostrar que los puntos medios de los lados de un cuadrilátero cualquiera son vértices de un paralelogramo.

**5.4.** Demostrar que el producto de cuatro simetrías respecto de los vértices consecutivos de un paralelogramo es la identidad.

**5.5.** Trazar por un punto $P$ interior a un ángulo un segmento limitado por sus lados y bisecado por $P$.

**5.6.** Dadas dos fajas de plano secantes (lecc. 7, §12), trazar por un punto una recta que intercepte en ellas dos segmentos iguales.

**5.7.** Expresar en función de las bases de un trapecio la distancia entre los puntos medios de las diagonales.

**5.8.** Demostrar que los tres segmentos que unen los puntos medios de los lados opuestos de un cuadrilátero y los de sus diagonales concurren en el punto medio de los tres.

**5.9.** Sea $ABCD$ un paralelogramo; $E$ y $F$ los puntos medios de los lados opuestos $AB$ y $CD$. Demostrar que $DE$ y $FB$ dividen en tres partes iguales a la diagonal $AC$.

**5.10.** Lugar geométrico de los puntos medios de los segmentos que unen los puntos homólogos de dos rectas homólogas en un movimiento.

# Part IV
# Continuidad y construcciones fundamentales con regla y compás

# Chapter 6
# Construcciones elementales

## Problems

**6.1.** Calcular la carrera de un émbolo accionado por una excéntrica de diámetro exterior 25 cm, sobre un árbol de 10 cm, sabiendo que el espesor mínimo entre ambas circunferencias es de 3 cm.

**6.2.** Si $O''$ es circunferencia tangente en $A$ a la circunferencia $O$ y en $B$ a la $O'$ y la recta $AB$ corta a $O'$ en $A'$ los radios $OA$ y $O'A'$ son paralelos. Demostración.

**6.3.** Dadas dos circunferencias tangentes exteriormente, la que tiene por diámetro la porción de tangente común exterior comprendida entre sus puntos de contacto, es tangente a la recta de centros en el punto de contacto de ambas circunferencias. Demostración.

**6.4.** Trazar por un punto $A$ de una recta $r$ una circunferencia tangente que pase por $B$, exterior a $r$.

**6.5.** Trazar una circunferencia que sea tangente a dos rectas paralelas y que pase por un punto.

**6.6.** Trazar una circunferencia de radio dado que pase por un punto y sea tangente a una recta dada o a una circunferencia dada.

**6.7.** Trazar una circunferencia de radio dado que sea tangente a dos rectas dadas.

**6.8.** Trazar una circunferencia de radio dado que sea tangente a una recta y a una circunferencia dadas.

**6.9.** Trazar una circunferencia de radio dado tangente a dos circunferencias dadas.

**6.10.** Trazar una circunferencia tangente en $A$ a otra dada, y que pase por otro punto $B$.

**6.11.** Trazar una circunferencia tangente en $A$ a una recta $r$ y además tangente a otra circunferencia dada.

**6.12.** Aplicaciones de los problemas anteriores al dibujo. Enlace de dos rectas mediante un arco circular, dando: 1.º, el radio del arco de enlace; 2.º, uno de sus puntos de tangencia. Enlace de una recta y una circunferencia: 1.º, dado el radio del arco de enlace; 2.º, dado uno de los puntos de tangencia. Enlace de dos circunferencias ídem íd.

**6.13.** Por un punto $A$ de intersección de dos circunferencias $c$ y $c'$, trazar una cuerda de $c$ que sea bisecada por $c'$.

**6.14.** Por el punto $A$ del ejemplo anterior, trazar una secante $BAC$ entre ambas circunferencias de longitud dada.

**6.15.** Dadas dos paralelas, un punto $A$ en una de ellas y un punto $P$ exterior, trazar por $P$ una secante que corte a ambas paralelas en dos puntos equidistantes de $A$.

**6.16.** Dados tres puntos $A$, $B$ y $C$ no alineados, trazar por $A$ una recta cuya suma de distancias a $B$ y $C$ sea dada. Idem para la diferencia.

**6.17.** Trazar una recta tangente a una circunferencia dada y que intercepte en otra una cuerda dada.

**6.18.** Trazar una recta que intercepte en dos circunferencias dadas cuerdas dadas.

**6.19.** Trazar por un punto $A$ una recta que intercepte entre dos paralelas dadas un segmento dado.

**6.20.** Idear una construcción de la perpendicular por un punto $A$ a una recta $r$ que diste de $A$ más de lo que alcanza la abertura del compás.

**6.21.** Hallar la bisectriz de un ángulo de vértice inaccesible.

**6.22.** Construir un triángulo conociendo $ah_am_a$.

**6.23.** Idem dados $ch_am_a$.

**6.24.** Idem dados $h_am_a\measuredangle A$. (Construir el paralelogramo doble de diagonal $2m_a$; de él se conocen los ángulos y la recta que contiene la otra diagonal.)

**6.25.** Idem dados $h_am_a\measuredangle B$.

**6.26.** Idem dados $ah_a\measuredangle B-C$.

**6.27.** Idem dados $a$, $b$, $b+c$.

**6.28.** Idem dados $a$, $b$, $b-c$.

**6.29.** Idem dados $a+b$, $b-c$, $c$.

**6.30.** Idem dados $a+b$, $c$, $\measuredangle C$.

**6.31.** Construir un paralelogramo conocidas las dos diagonales y el ángulo que forman.

**6.32.** Idem conocidos un lado, una diagonal y el ángulo de las diagonales.

**6.33.** Construir un trapecio conocidas las bases y las diagonales.

**6.34.** Construir un cuadrilátero dados los cuatro lados y una diagonal.

**6.35.** Idem dados tres lados y las dos diagonales.

**6.36.** Idem dados los cuatro lados y un ángulo.

**6.37.** Idem dados tres lados, una diagonal y el ángulo que forman los dos lados concurrentes con la diagonal.

**6.38.** Idem dados dos lados, el ángulo que forman, otro ángulo contiguo a uno de los lados dados y la diagonal concurrente con los lados.

**6.39.** Idem dados tres lados y dos ángulos opuestos.

**6.40.** Inscribir un cuadrado en un rombo dado.

**6.41.** Demostrar el fundamento del instrumento trisector de ángulos que indica la figura 6.1. Dado un ángulo $aVb$, y colocado el borde $r$ apoyado en $V$ mientras el punto $A$ se apoya en un lado $a$ y la circunferencia en el otro, el borde $r$ marca la división de la tercera parte.

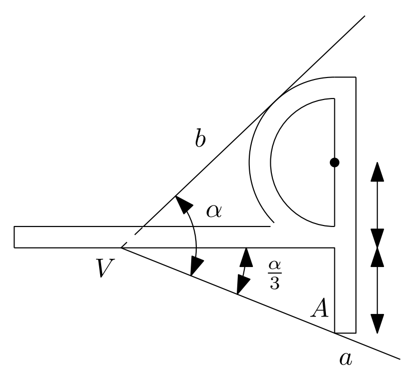



**Fig. 6.1** Problema 41. Trisector de ángulos.

# Chapter 7
# Ángulos y polígonos en la circunferencia

## Problems

**7.1.** Sin más elementos que una escuadra y un lápiz, hallar el centro de un disco circular.

**7.2.** Demostrar que los arcos limitados en una circunferencia por dos rectas secantes paralelas son iguales. Recíproco.

**7.3.** Demostrar que si $A$, $B$, $C$, $A'$, $B'$, $C'$ son puntos ordenados de una circunferencia y es $AB$ paralela a $A'B'$ y $BC$ paralela a $B'C'$, también es $AC'$ paralela a $A'C$.

**7.4.** Sean $AB$ y $CD$ dos arcos de una circunferencia. ¿Cuál es el lugar geométrico del punto de intersección de $AC$ y $BD$ al permanecer fijos $A$ y $B$ y girar el arco $CD$ sobre la circunferencia?

**7.5.** Demostrar que si los extremos de un segmento $AB$ de longitud fija se deslizan sobre dos rectas secantes fijas $OX$, $OY$, la circunferencia circunscrita $AOB$ tiene radio invariable.

**7.6.** Lugar geométrico de los vértices de una escuadra cuya hipotenusa se desliza apoyándose en los lados de un ángulo recto.

**7.7.** Dadas dos rectas fijas secantes $m$ y $n$ y en ellas dos puntos fijos $M$ y $N$ consideremos dos circunferencias $c_1$ y $c_2$ respectivamente tangentes a $m$ y $n$ en $M$ y $N$ y además tangentes entre sí en $P$. Hallar el lugar geométrico de $P$.

**7.8.** Dividir un arco en dos partes cuyas cuerdas tengan suma o diferencia dada. (Véase ejercicio 30, lecc. 14.)

**7.9.** Si dos fuerzas de intensidad constante giran del mismo ángulo alrededor de sus respectivos puntos de aplicación, supuestos fijos, la resultante gira del mismo ángulo y pasa constantemente por un punto fijo. ¿Cuál? Demostración para fuerzas no paralelas.

**7.10.** Demostrar que las bisectrices de un cuadrilátero cualquiera (no rombo ni romboide) limitan un cuadrilátero inscriptible.

**7.11.** Construir un cuadrado cuyos lados pasen por cuatro puntos dados.

**7.12.** Construir un rombo cuyos lados pasen por cuatro puntos dados conociendo uno de sus ángulos.

**7.13.** Condición necesaria y suficiente para que un trapecio sea inscriptible.

**7.14.** Construir un trapecio circunscriptible dado su perímetro y los ángulos en una base.

**7.15.** Demostrar que en un cuadrilátero no convexo, limitado por cuatro rectas tangentes a una circunferencia, son iguales las sumas de los pares de lados concurrentes con la diagonal exterior. (Compárese con la propiedad del cuadrilátero circunscriptilble convexo.)

**7.16.** Construir un cuadrilátero circunscriptible conociendo tres lados y el ángulo que forman dos de ellos.

**7.17.** Idem conociendo dos lados consecutivos, el ángulo que forman y uno de los ángulos consecutivos a éste.

**7.18.** Construir un cuadrilátero conociendo dos lados, el ángulo que forman y los ángulos que la diagonal concurrente con ellos forma con los otros dos lados.

**7.19.** Expresar en ángulos rectos el ángulo de un polígono regular en función del número de lados $n$.

**7.20.** Idem íd. el ángulo en un vértice de un polígono estrellado de $n$ lados conocida la especie del polígono.

**7.21.** Dígase si es posible formar mosaico con losetas pentagonales regulares. Idem octogonales.

**7.22.** Idem con cuadrados y octógonos regulares. Idem con pentágonos y triángulos equiláteros.

**7.23.** Demostrar que los puntos que se obtienen llevando la mitad de la diagonal de un cuadrado sobre los lados a partir de los vértices, son vértices de un octógono regular.

**7.24.** Demostrar que hay un solo octógono regular estrellado, un solo decágono y tres pentadecágonos. Hallar sus especies.

**7.25.** Cuántos y cuáles son los polígonos regulares inscriptibles con regla y compás de menos de 300 lados. (Aplíquese el teorema de Gauss. Son 38 polígonos.)

# Chapter 8
# Puntos y rectas notables en el triángulo

## Problems

**8.1.** Demostrar que las paralelas a dos lados de un triángulo por el baricentro dividen al tercer lado en tres segmentos iguales.

**8.2.** Demostrar que la recta que une un vértice $A$ de un triángulo $ABC$ con el incentro $I$ corta a la circunferencia circunscrita en un punto $P$ equidistante de $B$, de $I$ y de $C$.

**8.3.** Demostrar que los cuatro lados de un cuadrilátero completo (v. ejercicio 3.º, lecc. 1.ª) determinan tres a tres cuatro triángulos, cuyas circunferencias circunscritas pasan por un mismo punto $M$.

**8.4.** Demostrar que los circuncentros de los cuatro triángulos en que un cuadrilátero convexo queda dividido por sus dos diagonales, son vértices de un paralelogramo.

**8.5.** La circunferencia que pasa por el vértice $A$ de un triángulo $ABC$ y es tangente en $V_a$ al lado opuesto, es tangente en $A$ a la circunferencia circunscrita. Demostración.

**8.6.** Los arcos simétricos de los $AB$, $BC$ y $CA$ de circunferencia circunscrita a un triángulo $ABC$ respecto de sus lados respectivos pasan por el ortocentro. Demostración.

**8.7.** En un triángulo $ABC$ las circunferencias que pasan, respectivamente, por $A$, $B$, $C$, y son tangentes en $B$, $C$, $A$, a los lados opuestos $BC$, $CA$, $AB$ se cortan en un punto. Demostración.

**8.8.** Sean $r$ y $r'$ dos rectas no paralelas, cuya intersección cae fuera de los límites del dibujo. Sea $AB$ una secante de ambas y $A$ y $B$ los puntos de intersección. Demostrar que las bisectrices de los ángulos colaterales se cortan en puntos de la bisectriz del ángulo $rr'$. Dedúzcase una construcción de la bisectriz de ángulos de vértice inaccesible.

**8.9.** Lugar de los ortocentros de los triángulos con un lado fijo y el ángulo opuesto constante.

**8.10.** Idem íd. de los incentros.

**8.11.** Idem íd. de los exincentros.

**8.12.** Construir un triángulo dados un lado, el ángulo opuesto y el radio de la circunferencia inscrita o de una de las exinscritas.

**8.13.** Construir un triángulo conociendo el radio del círculo circunscrito, un ángulo y la suma de uno de los lados que lo forman con el opuesto.

**8.14.** Construir un triángulo conociendo el radio de la circunferencia circunscrita, una altura $h_a$ y la diferencia entre los ángulos $B-C$.

**8.15.** Construir un triángulo conocidos un lado y dos medianas.

**8.16.** Construir un triángulo dados los puntos medios de sus lados. Idem un pentágono. Idem un heptágono ... ¿Es determinado el problema cuando el polígono tiene un número par de lados?

**8.17.** Los pies de las perpendiculares a dos lados $AB$ y $AC$ de un triángulo trazadas desde el punto medio de cada uno de los arcos $BC$ de circunferencia circunscrita están alineados con el punto medio del lado $BC$.

**8.18.** Demostrar que el triángulo de los exincentros es siempre acutángulo.

**8.19.** Demostrar que la recta de Simson relativa al punto $P$ equidista de $P$ y del ortocentro.

# Part V
# Medida y proporcionalidad

# Part VI
# Homotecia y semejanza

# Chapter 9
# Proporcionalidad de segmentos

## Problems

**9.1.** Construir dos segmentos conocidas su razón y su suma o diferencia.

**9.2.** Trazar por un punto una recta cuya razón de distancias a dos puntos dados sea conocida.

**9.3.** Demostrar que la distancia del baricentro de un triángulo a cualquier recta es la media aritmética de las distancias de ésta a los vértices.

**9.4.** Calcular la longitud del segmento interceptado en un trapecio de bases $a$ y $b$ por una paralela a ellas, sabiendo que divide a los lados en la razón $m : n$. Aplicación al triángulo.

**9.5.** Demostrar que las diagonales de un trapecio se dividen mutuamente en partes proporcionales a las bases.

**9.6.** El segmento interior de la paralela a las bases de un trapecio por el punto de intersección de las diagonales es bisecado por dicho punto. Demostración de dicha proposición y calcular la longitud de tal segmento en un función de las bases.

**9.7.** El punto de intersección de las prolongaciones de los lados de un trapecio y el de las diagonales están alineados con los puntos medios de las bases y están armónicamente separados por ellos. Demostración.

**9.8.** Dedúzcase del ejercicio 9.7 construcciones para bisecar y duplicar los segmentos de una recta supuesta trazada otra paralela a ella, *haciendo sólo uso de la regla.*

**9.9.** Idem id. para multiplicar y dividir los segmentos de ambas rectas por un número natural.

Consecuencia. *Supuestas trazadas dos paralelas en el plano y elegido en una cualquiera de ellas un segmento unidad* $U$ *es posible construir CON EL SIMPLE USO DE LA REGLA cualquier otro segmento cuya medida con la unidad* $U$ *sea un número racional dado.*

**9.10.** Lugar geométrico de los puntos medios de los segmentos interceptados en un triángulo por un sistema de rectas paralelas. Caso en que lo sean a uno de los lados.

**9.11.** Ídem íd. para un cuadrilátero. Caso en que sea paralelogramo. Caso en que las paralelas trazadas lo sean a una de las diagonales del cuadrilátero.

**9.12.** Ídem íd. para un polígono.

**9.13.** Trazar por un punto una recta que concurra con otras dos cuyo punto de intersección sea inaccesible.

# Chapter 10
# Ejercicios referentes a cuestiones diversas de este capítulo

**10.1.** Conocidos los cuatro lados de un trapecio, calcular los de los triángulos que limitan los lados prolongados con las bases.

**10.2.** Se divide un lado de un triángulo equilátero en tres segmentos iguales, y, desde el vértice opuesto, se proyectan los puntos de división sobre la semicircunferencia construída exteriormente sobre dicho lado como diámetro. Probar que esta semicircunferencia queda también dividida en tres partes iguales.

**10.3.** Es preciso empalmar dos tubos de ejes paralelos, distantes entre sí 3 m, y cuyas bocas distan entre sí 5 m, mediante dos tubos iguales, en codo circular, tangentes, respectivamente, a aquellos y entre sí (es decir, formando S). Calcular el radio de estos arcos (en su línea de centros).

**10.4.** Determinar gráficamente los lados de un triángulo de perímetro dado, semejante a un triángulo dado $ABC$.

**10.5.** Hallar la relación que existe entre la potencia y la resistencia en un plano inclinado de pendiente dada, supuesta la potencia: 1.º, en dirección de la máxima pendiente del plano; 2.º, en dirección horizontal.

**10.6.** Demostrar que la relación entre la potencia y la resistencia en una polea móvil es igual a la que existe entre el radio y la *cuerda* (geométrica) del arco abrazado por la cuerda (física).

**10.7.** Enunciar criterios de semejanza de paralelogramos; de rombos, de trapecios.

**10.8.** Demostrar que el paralelogramo obtenido uniendo los puntos medios consecutivos de los lados de un cuadrilátero cualquiera, y el que resulta de trazar por los extremos de cada diagonal paralelas a la otra, son homotéticos, y averiguar cuál es el centro de homotecia.

**10.9.** Si dos circunferencias son tangentes entre sí exteriormente el segmento de tangente exterior a ambas, comprendido entre los puntos de contacto, es medio proporcional entre los dos diámetros.

**10.10.** Hallar el lugar geométrico del baricentro de un triángulo que tiene dos vértices fijos $A$ y $B$ y cuyo tercer vértice $C$ describe una circunferencia dada.

**10.11.** Calcular, en función de los radios de dos circunferencias y de la distancia entre los centros, la que existe entre éstos y los centros de homotecia de ambas circunferencias. Distancia que separa dichos centros de homotecia.

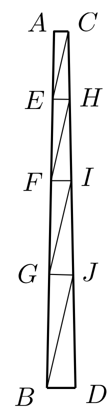



**Fig. 10.1** Problema 10.12.

**10.12.** Triangular un trapecio $ABCD$ (cara de un poste) en la forma que indica la Fig. 10.1; es decir, $EH$, $FI$, $GJ$ paralelas a las bases ($AC$, $BD$); $CE$, $HF$, $IG$, $JB$ paralelos entre sí. Calcular las longitudes de todas estas barras sabiendo que $AB = CD$=10 m, $AC$=40 cm, $BD$=80 cm.[1]

**10.13.** Sea $MNP$ un triángulo inscrito en otro $ABC$, inscribir en $MNP$ otro triángulo semejante al $ABC$.

**10.14.** Demostrar que si una circunferencia es tangente a un arco $BAC$ y a su cuerda $BC$, respectivamente en los puntos $A$ y $D$, la recta $AD$ es bisectriz del ángulo $BAC$.

**10.15.** Construir un triángulo conocidos un ángulo, la mediana que parte de su vértice y la razón entre los lados que forman dicho ángulo.

**10.16.** Ídem íd. conocidos un ángulo, la razón entre los lados que lo forman y el radio de la circunferencia circunscrita.

**10.17.** Ídem íd. conocidos dos ángulos y una bisectriz.

[1] Para el cálculo de las oblicuas hace falta aplicar el teorema de Pitágoras.

**10.18.** Ídem íd. conocidos un ángulo, la razón entre las alturas sobre los lados que lo forman y el radio de la circunferencia inscrita.

**10.19.** Construir un cuadrilátero que sea inscriptible y circunscriptible, dados: un ángulo, la razón entre los lados que lo forman y la diagonal que une sus extremos.

**10.20.** Construir un cuadrilátero conociendo un ángulo, la diagonal que parte de su vértice y las razones entre los cuatro lados.

# Solutions

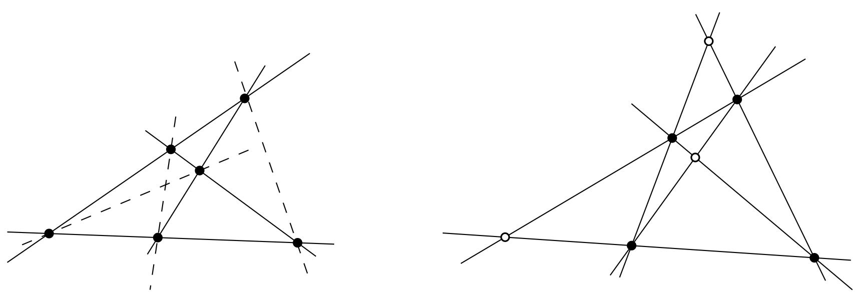
## Problems of Chapter 1

**1.1** The solution is revealed here.

$$\binom{n}{2} = \frac{n(n-1)}{2}\,.$$

**1.2**

$$\binom{n}{3} = \frac{n(n-1)(n-2)}{6}\,.$$



(a) Problema 1.3.  (b) Problema 1.4.

**Fig. 10.2**

**1.3** Hay $\binom{4}{2} = 6$ vértices y 3 diagonales.

**1.4** Hay $\binom{4}{2} = 6$ lados. Tiene 3 puntos diagonales a lo sumo. No, pues aún no podemos admitir la existencia de rectas paralelas hasta que no se introduzcan los axiomas de movimiento, la simetría central asegura la existencia de rectas sin puntos comunes (paralelas).

## Problems of Chapter 2

**2.1** En las bisectrices. En la paralela media.

**2.2**

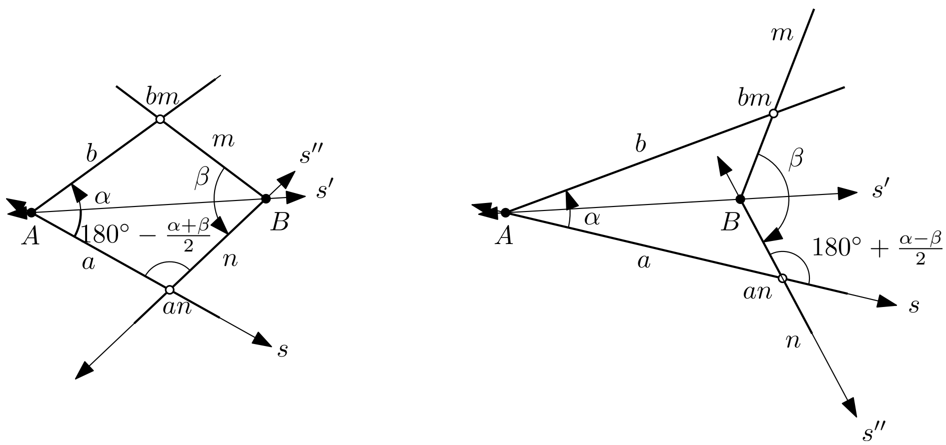



**Fig. 10.3** Problema 2.2.

Suponemos que primero se aplica la rotación de centro $A$ y ángulo $\alpha$ y después la rotación de centro $B$ y ángulo $\beta$. A su vez, cada rotación se puede expresar como la composición de dos simetrías axiales cuyos ejes se cortan en el centro de rotación y forman un ángulo igual a la mitad del ángulo de rotación. Así pues

$$rot_A(\alpha) = ss' \qquad \text{y} \qquad rot_B(\beta) = s's''$$

donde la composición de simetrías opera de izquierda a derecha. Como

$$ss's's'' = ss'',$$

pues la simetría axial es involutiva $s's' = Id$ donde $Id$ expresa la aplicación identidad.

Por tanto:

- Si $s$ y $s''$ son secantes, se trata de la rotación de centro $an$.
- Si $s$ y $s''$ no son secantes, se trataría de una traslación.

Si se cambia el orden de los giros, se trataría de un giro (si no es traslación) de centro $bm$.

## Problems of Chapter 3

**3.1** Pues se corresponden en una traslación o simetría central.

**3.2**

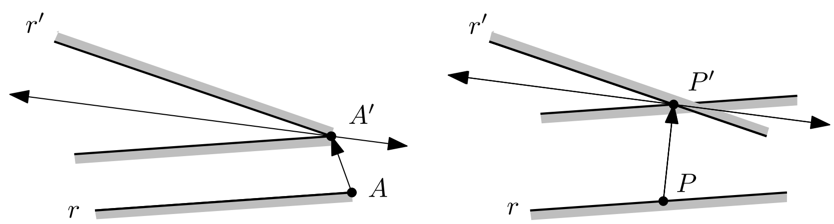



**Fig. 10.4** Problema 3.2.

Supongamos que $r$ y $r'$ se corresponden por un movimiento inverso. Este movimiento se reduce a

- Traslación de vector $\overrightarrow{AA'}$ seguida de una simetría axial respecto de la bisectriz.
- Traslación de vector $\overrightarrow{PP'}$ seguida de una simetría axial respecto de la bisectriz.

Estos son sólo dos de los infinitos productos posibles pues hay infinitos pares de puntos correspondientes sobre las rectas $r$ y $r'$.

**3.3**

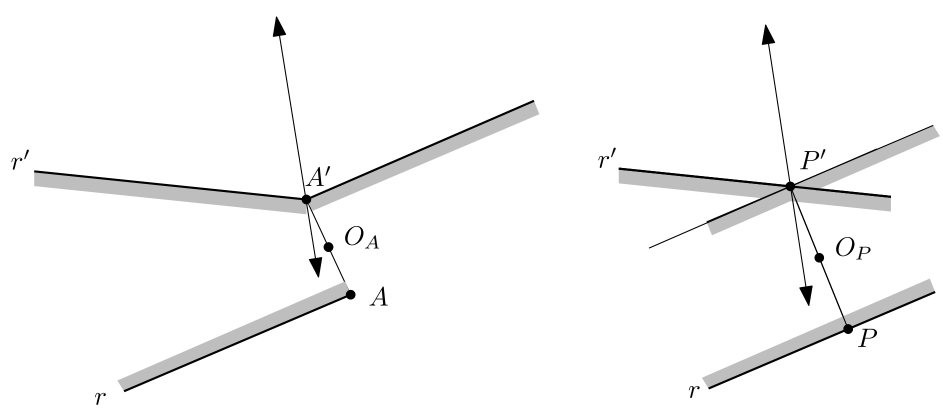



**Fig. 10.5** Problema 3.3.

Supongamos que $r$ y $r'$ se corresponden por un movimiento inverso. Este movimiento se reduce a

- Simetría central de centro $O_A$ seguida de una simetría axial respecto de la bisectriz.
- Simetría central de centro $O_P$ seguida de una simetría axial respecto de la bisectriz.

Estos son sólo dos de los infinitos productos posibles pues hay infinitos pares de puntos correspondientes sobre las rectas $r$ y $r'$.

**3.4** El punto de concurrencia es doble e invierte el sentido del plano.

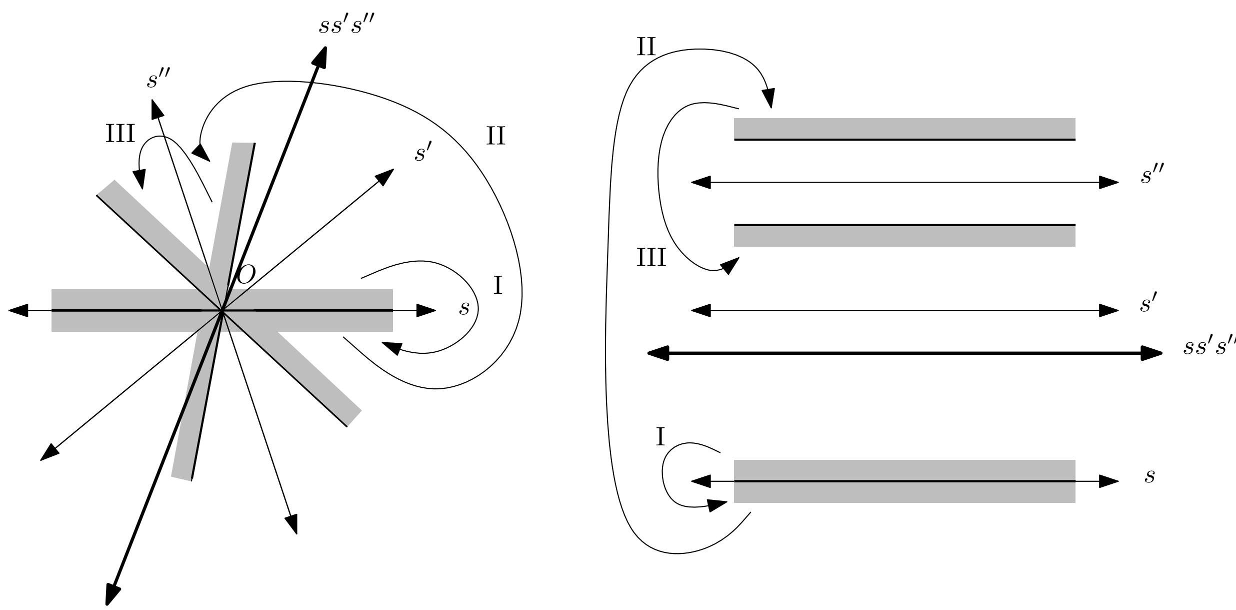



**Fig. 10.6** Problema 3.4.

- I representa la tranformación por la simetría axial $s$.
- II representa la tranformación por la simetría axial $s'$.
- III representa la tranformación por la simetría axial $s''$.

**3.5** $ss's''$ es simetría axial (ejercicio 4) y toda simetría axial es involutiva.

**3.6** Probemos que $(sgs)g = g(sgs) = 1$. Pues como $g = s's''$ ($s'$, $s''$ simetrías que pasan por $O$).

Por el ejercicio 5

$$sg = ss's''$$
$$gs = s's''s$$

tenemos que

$$(sgs)g = (sg)(sg) = (ss's'')^2 = 1$$
$$g(sgs) = (gs)(gs) = (s's''s)^2 = 1$$

Así que

$$sgs = g^{-1} .$$

**3.7**

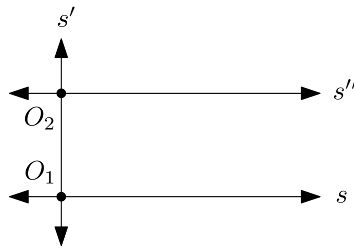



**Fig. 10.7** Problema 3.7.

$$s \underbrace{s's'}_{1} s'' = ss''$$

ejes paralelos equivalentes a una traslación doble al segmento de perpendicular entre ellos de vector $\overrightarrow{O_1O_2}$ .

**3.8**

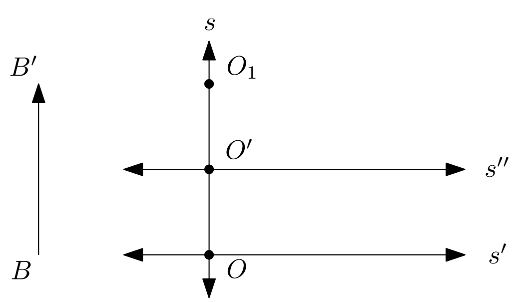



**Fig. 10.8** Problema 3.8.

$$ss' \qquad \text{(simetría de centro } O\text{)}$$
$$s's'' \qquad \text{(traslación de vector } \overrightarrow{BB'}\text{)}$$

Así que

$$s\underbrace{s's'}_{1}s'' = ss'' \qquad \text{(simetría de centro } O'\text{)}$$

**3.9**

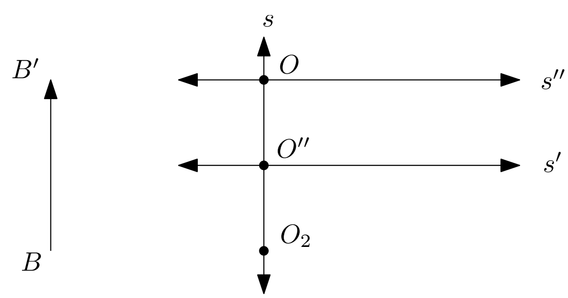



**Fig. 10.9** Problema 3.9.

$$s's'' \qquad \text{(traslación } \overrightarrow{BB'}\text{)}$$

$$(s's'')^{-1} = (s'')^{-1}(s')^{-1} = s''s' \qquad \text{(traslación } \overrightarrow{B'B}\text{)}$$

$$s''s \qquad \text{(simetría de centro } O\text{)}$$

Así que

$$s'\underbrace{s''s''}_{1}s = s's \qquad \text{(simetría de centro } O''\text{)}$$

**3.10** Consecuencia de los ejercicios 7, 8 y 9. No es abeliano:

- Por el ejercicio 7, el producto de simetrías centrales no es conmutativo, $\overrightarrow{O_1O_2} \neq \overrightarrow{O_2O_1}$, salvo si $O_1 = O_2$.
- Por los ejercicios 8 y 9, no es abeliano el producto de simetría central y traslación pues los puntos medios resultantes se encuentran a distinto lado de $O$.

**3.11** Por los ejercicios 7 y 9, $O_4$ resulta ser el punto medio de $O_3$ y su homólogo por la traslación $2\overrightarrow{O_2O_1}$, de donde

$$2\overrightarrow{O_3O_4} = 2\overrightarrow{O_2O_1} \iff \overrightarrow{O_3O_4} = \overrightarrow{O_2O_1}$$

**3.12** Por el ejercicio 11 y ser la simetría central involutiva.

**3.13** Llamemos $C_O$ a la simetría central de centro $O$, por el ejercicio 8, tenemos que

$$C_O\overrightarrow{BB'} = C_{O'}$$

y por ser la simetría central involutiva

$$C_O\overrightarrow{BB'}C_{O'} = 1$$

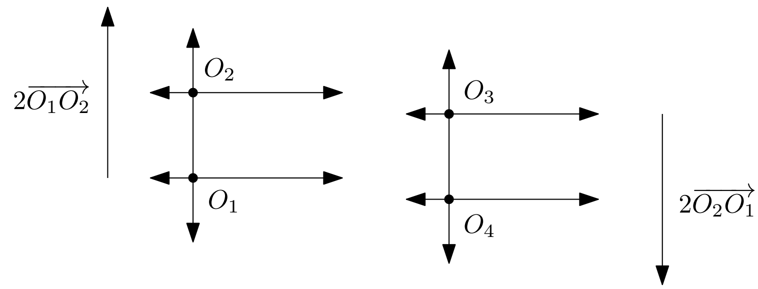



**Fig. 10.10** Problema 3.11.

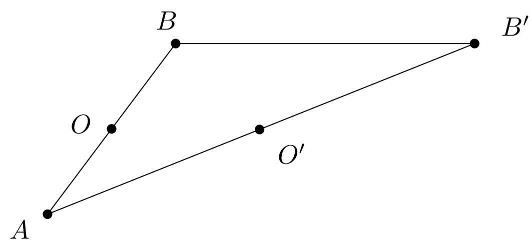



**Fig. 10.11** Problema 3.13.

multiplicando a la izquierda por $C_O$ y a la derecha por $C_{O'}$, tenemos que

$$\underbrace{C_OC_O}_{1}\overrightarrow{BB'}\underbrace{C_{O'}C_{O'}}_{1} = C_OC_{O'}$$

de donde

$$\overrightarrow{BB'} = C_OC_{O'}$$

y por el ejercicio 7

$$\overrightarrow{BB'} = 2\overrightarrow{OO'}.$$

**3.14** Circunferencia de centro el de la circunferencia original y radio el segmento del centro al punto medio. Diámetro.

**3.15** Circunferencia de diámetro $OP$, por el lugar geométrico de Thales.

**3.16** Por el ejercicio 7 y formar las traslaciones grupo.

**3.17** Por el ejercicio 16 y los ejercicios 8 y 9.

**3.18** 1.º. Traslademos la circunferencia de centro $O'$ sobre la circunferencia de centro $O$ mediante la traslación $\overrightarrow{O'O}$ por lo que $A''$ y $B''$ son los homólogos de $A'$ y $B'$ respectivamente.

Vemos que los arcos

$$BB'' = AB'' - AB = AA'' + A''B'' - AB = AA'' + A'B' - AB = AA''$$

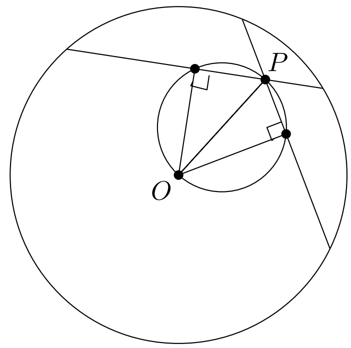



**Fig. 10.12** Problema 3.15.

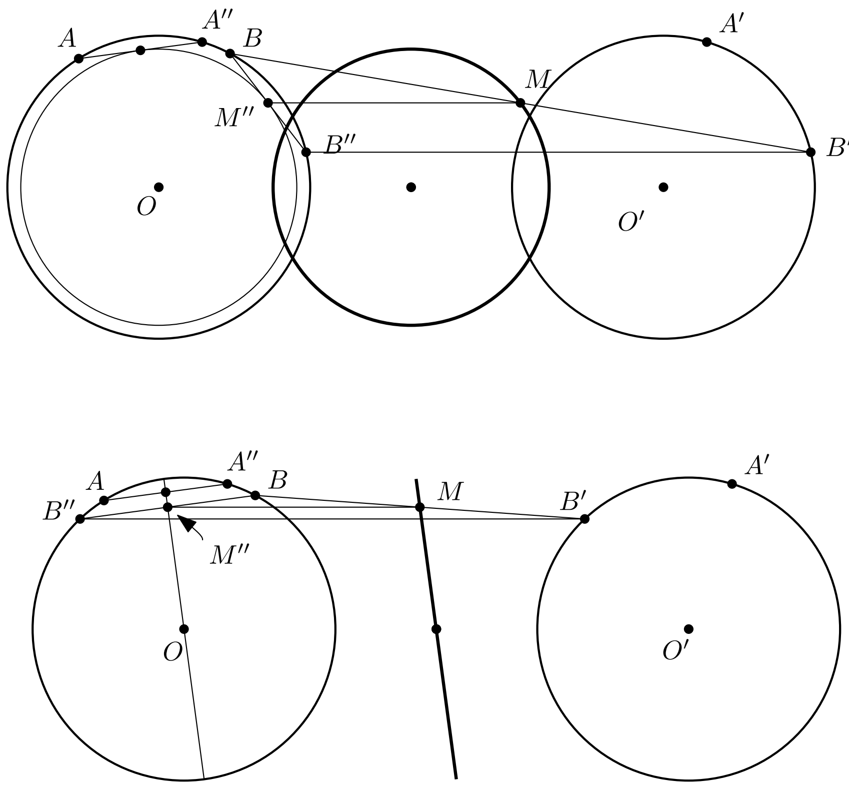



**Fig. 10.13** Problema 3.18.

son iguales al variar $\alpha$, por tanto, también son iguales sus correspondientes cuerdas y por el ej. 14 el lugar geométrico de sus puntos medios es una circunferencia de centro $O$ y radio el segmento que va desde $O$ hasta el punto medio de la cuerda $AA''$. Deshaciendo la traslación aplicando su inversa, $\overrightarrow{OO''}$ y por el ej. 13, $B$ se queda fijo pero $B''$ se transforma en $B'$ y $M''$ en $M$ mediante una traslación de vector $\frac{1}{2}\overrightarrow{OO''}$ con lo que el lugar geométrico buscado resulta ser la circunferencia de trazo grueso.

2.º. Procedemos igual pero en este caso las cuerdas $AA''$ y $BB''$ resultan ser paralelas con lo que el lugar geométrico de sus puntos medios es el diámetro dibujado. Al deshacer el cambio, el lugar geométrico buscado es el transformado del diámetro señalado mediante la traslación $\frac{1}{2}\overrightarrow{OO''}$ resultando el segmento dibujado de trazo grueso.

**3.19**

Se trata del arco capaz de segmento $BB'$ y de ángulo triplemente rayado y del arco capaz del mismo segmento y ángulo suplementario del anterior y en el otro semiplano, es decir, de una circunferencia. En cualquier caso, tanto si $B$ y $B'$ están alineados con $P$ como si no, $Q$ forma parte del arco capaz, lugar geométrico del problema dibujado con trazo grueso.

## Problems of Chapter 4

**4.1** Supongamos lo contrario

$$\left.\begin{array}{l} PM \geq PA \\ PM \geq PB \end{array}\right\}$$

Consideremos los triángulos $APM$ y $MPB$. Como en todo triángulo a mayor lado se opone mayor ángulo (Lecc. 10 §9) y por las propiedades del triángulo isósceles (esto justifica los casos $PM = PA$ o $PM = PB$), tenemos que

$$\left.\begin{array}{l} \alpha \geq \gamma \\ \delta \geq \alpha + \beta \end{array}\right\}$$

Sea el triángulo $APB$, evidentemente

$$\alpha + \delta + \beta + \delta' > \alpha + \delta \tag{10.1}$$

y por el segundo sistema.

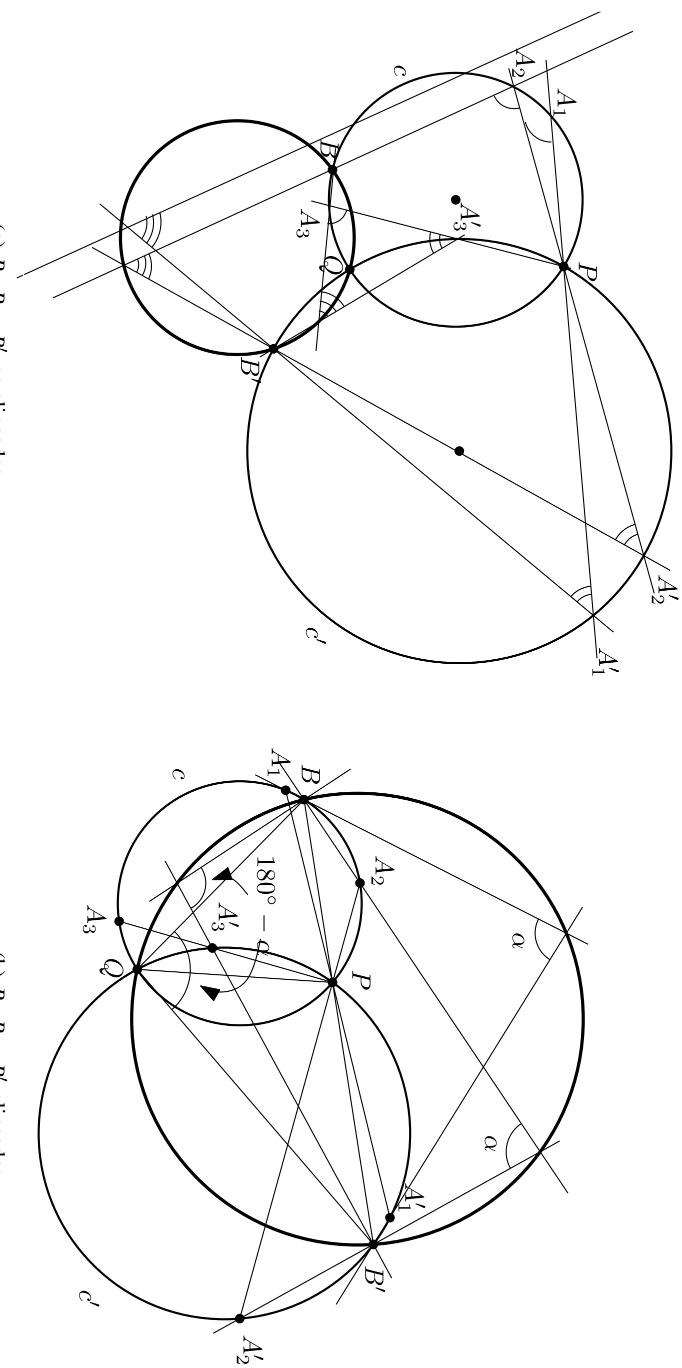
$$\alpha + \delta \geq \alpha + \beta + \gamma$$

pero $\alpha + \beta + \gamma$ suma un llano pues son los ángulos interiores del triángulo $APM$.

En consecuencia, debido a la última relación y a (10.1), $APB$ es un triángulo cuyos ángulos interiores suman más de un llano, lo que es contradictorio (Lecc. 10 §7).

**4.2** Sea $ABC$ el triángulo y $PQ$ el segmento interior al triángulo. Suponemos

$$AC \geq AB, \quad AC \geq BC. \tag{10.2}$$




(a) $B$, $P$ y $B'$ no alineados.

(b) $B$, $P$ y $B'$ alineados.

**Fig. 10.14** Problema 3.19.

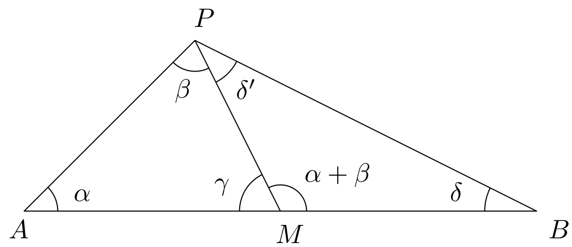



**Fig. 10.15** Problema 4.1. Pues $\measuredangle PMB$ es exterior al triángulo $APM$ (Lecc. 10 §7).

Distinguimos los siguientes casos:

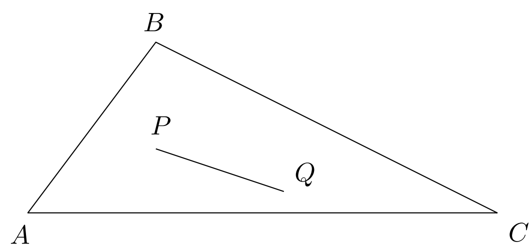



**Fig. 10.16** Problema 4.2.

- $B$, $P$ y $Q$ están alineados (Fig. 10.17(a)). Por las propiedades de las figuras convexas (Lecc. 2 §13), la recta $PQ$ corta al contorno en dos puntos, siendo $B$ uno de ellos, el otro es $P'$, $P'$ interior a $AC$ (de lo contrario $P$ y $Q$— no serían interiores pues serían puntos del contorno. También se llega a la misma conclusión, $P'$ interior, ya que el rayo interior $BP$ al ángulo $\measuredangle ABC$ debe cortar al segmento $AC$ en un punto interior (Lecc. 2 §9)).
  Como $P$ y $Q$ son interiores al segmento $BP'$ (de lo contrario tendríamos dos puntos del triángulo en distintos semiplanos respecto de la rectas de sus lados, en particular $AC$, en contra de la definición de triángulo y de figura convexa en general).
  Por tanto,
  $$PQ < BP + PQ + QP' = BP'$$
  pero por el ejercicio 1
  $$BP' < AB \quad \text{o} \quad BP' < BC$$
  y por (10.2)
  $$BP' < AC$$
  de donde
  $$PQ < AC\,.$$
- $B$, $P$ y $Q$ no están alineados (Fig. 10.17(b)).

Por el ejercicio 1

$$P'Q < P'Q' \quad \text{o} \quad P'Q < P'B$$

pero

$$P'Q' < AC$$

y también por el ejercicio 1

$$P'B < AB \quad \text{o} \quad P'B < BC$$

y por (10.2)

$$P'B < AC$$

o sea

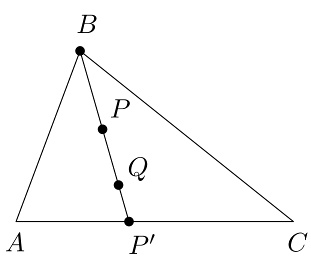
$$P'Q < AC \tag{10.3}$$

Además $PQ < P'Q$ o $PQ < BQ$ pero $P'Q < AC$ (por (10.3)), como $BQ < BQ'$ y por el ejercicio 1, $BQ' < AB$ o $BQ' < BC$ y por (10.2)

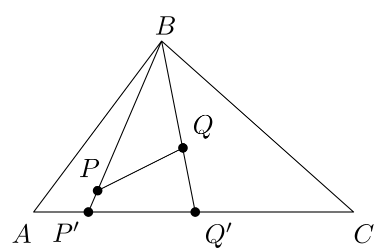
$$BQ < BQ' < AC\,. \tag{10.4}$$

Por tanto, de (10.3) y de (10.4), tenemos que

$$PQ < AC\,.$$



(a) $B$, $P$ y $Q$ están alineados.



(b) $B$, $P$ y $Q$ no están alineados.

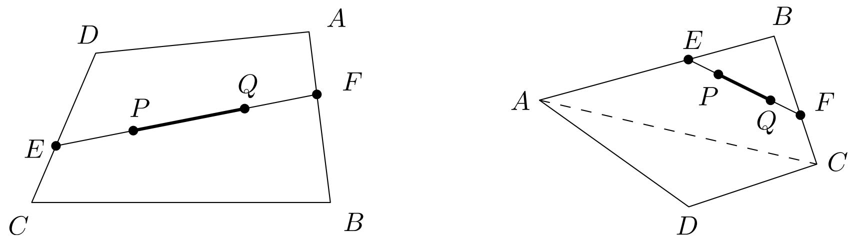
**Fig. 10.17** Problema 4.2. Distinción de casos.

**4.3** Se demostrará por inducción.

- Si $n = 3$. Ver ej. 2.
- Si $n = 4$. Distinguimos dos casos
  - La recta $PQ$ corta en lados no consecutivos al cuadrilátero. Ver Fig. 10.18(a). Tenemos que

$$PQ < EF$$

por el ej. 1, tenemos




(a) La recta $PQ$ corta lados no consecutivos.

(b) La recta $PQ$ corta lados consecutivos.

**Fig. 10.18** Problema 4.3. $n = 4$

$$\begin{array}{ccc} EF < EA & \text{o} & EF < EB \\ AE < AD & \text{o} & AE < AC \\ BE < BC & \text{o} & BE < BD \end{array}$$

o sea

$$EF < AD \quad \text{o} \quad EF < AC \quad \text{o} \quad EF < BC \quad \text{o} \quad EF < BD\,,$$

lo que demuestra el resultado para $n = 4$.

– La recta $PQ$ corta en lados consecutivos al cuadrilátero. Ver Fig. 10.18(b). Se reduce a $n = 3$.

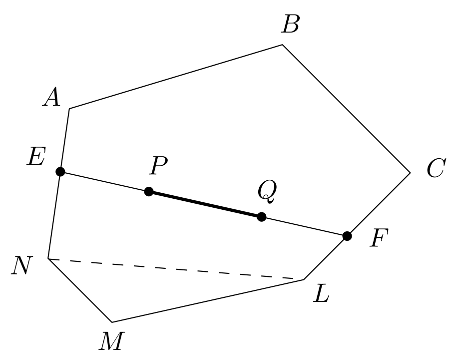



**Fig. 10.19** Problema 4.3. Polígono $ABC \ldots LMN$ de $n+1$ lados.

- Lo suponemos válido para $n \geq 4$. Demostrémoslo para $n+1$.
  Sea $ABC \ldots LMN$ un polígono de $n+1$ lados.
  La recta $PQ$ separa los vértices en dos semiplanos donde en uno de ellos hay al menos 3 vértices (pues si hubiera como máximo dos, entonces el polígono tendría como máximo 4 lados y volveríamos a los casos $n = 3$ o $n = 4$ ya

demostrados) $LMN$, por tanto el segmento $LN$ no corta al segmento $PQ$ y da lugar a un polígono con un lado menos y aplicando la hipótesis de inducción al polígono de $n$ lados $ABC\dots LN$ donde uno de sus lados es la diagonal $LN$ del de $n+1$ lados y los demás lados y diagonales son las del polígono $ABC\dots LNM$ de $n+1$ lados se sigue el resultado.

**4.4** Si $2a > 2b \leftrightarrow a > b$, por el teorema de los triángulos incongruentes,

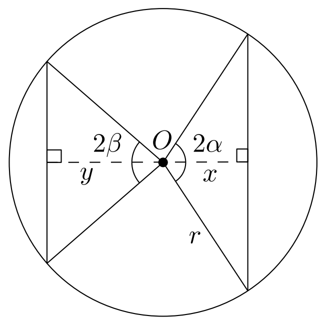



**Fig. 10.20** Problema 4.4.

$$2\alpha > 2\beta \leftrightarrow \alpha > \beta\,.$$

Dispongámoslo así: Por estar $P$, $Q$ y $S$ sobre la circunferencia, no estan alin-

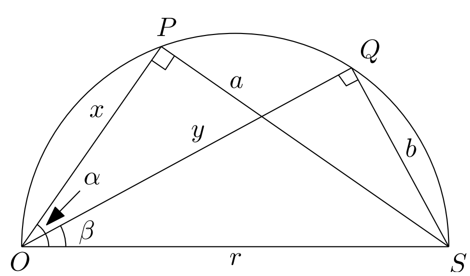



**Fig. 10.21** Problema 4.4.

eados, y $\measuredangle PQS$ no es nulo ni igual a un llano ($PQS$ forman triángulo). Por tanto, en el triángulo $OPQ$ a $y$ se le opone un ángulo obtuso y a $x$ uno agudo de donde se sigue el teorema.

**4.5**

- Si $AC$ es el mayor lado y el pie de su altura, $P$, (Fig. 10.22) estuviera en $AC\rightarrow$, por el §3 (propiedades de los segmentos oblicuos)

$$AC < AP < AB\,,$$

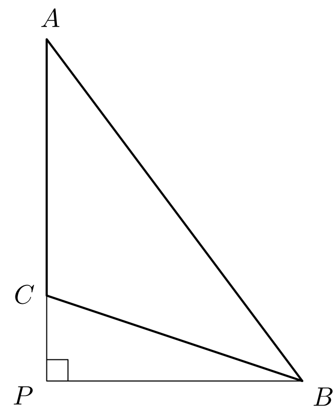



**Fig. 10.22** Problema 4.5. Demostracion de que el pie de la altura, $P$, sobre el lado mayor es interior a él.

contra la hipótesis.

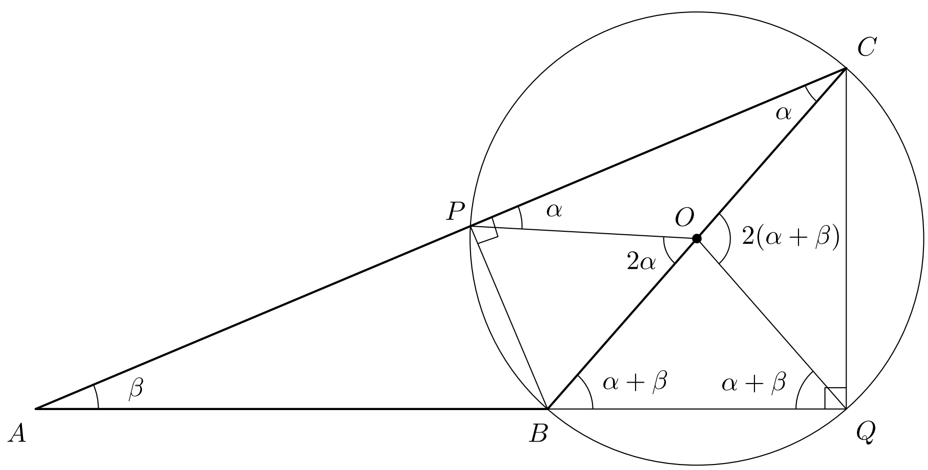



**Fig. 10.23** Problema 4.5. Demostracion de que la altura correspondiente al lado mayor es menor que las otras dos.

- Sea $O$ el punto medio de $BC$ y construyamos la circunferencia de centro $O$ y radio $OB = OC$. Por las propiedades del lugar geométrico de Thales (la circunferencia), las propiedades de los triángulos isósceles (igualdad de ángulos opuestos a lados iguales) y que el ángulo exterior de un triángulo es igual a la suma de los internos no adyacentes a él, completamos la Fig. 10.23.
  Como $2\alpha < 2(\alpha + \beta)$ por el teorema de los triángulos incongruentes aplicado a $OPB$ y a $OQC$, tenemos
$$PB < QC\,,$$

tomando el lado $AB$ y repitiendo la construcción anterior tendríamos que la altura correspondiente es mayor que $PB$, lo que demuestra el teorema.

**4.6**

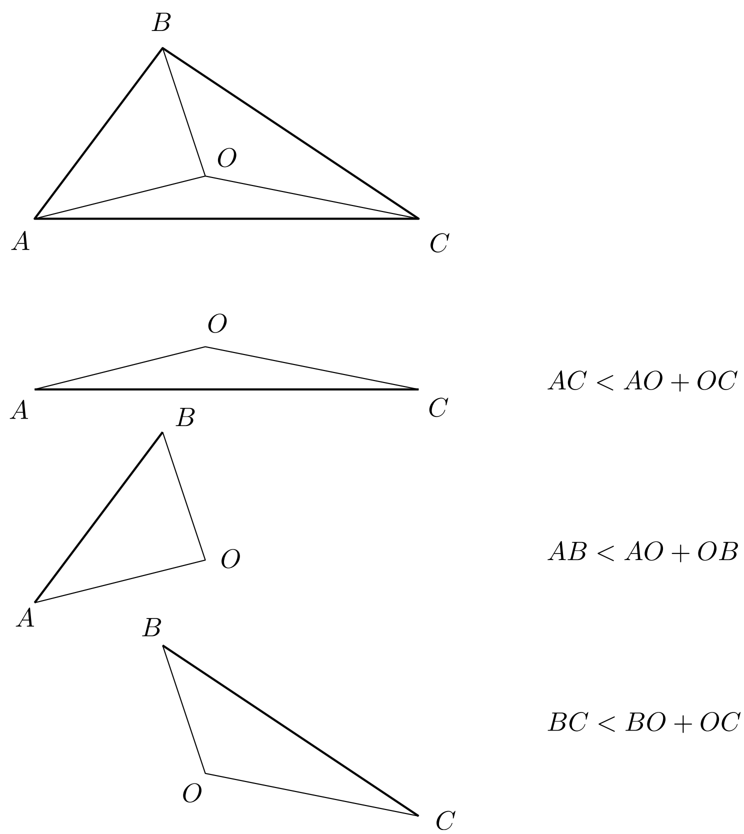



**Fig. 10.24** Problema 4.6. La suma de las distancias de un punto interior a los vértices es mayor que el semiperímetro.

- Según §1, el lado de un triángulo es menor que la suma de los otros dos, con lo que (Fig. 10.24)

$$AC < AO + OC$$
$$AB < AO + OB$$
$$BC < BO + OC$$

sumando y dividiendo por dos, tenemos

$$\frac{AB + AC + BC}{2} < AO + OB + OC \tag{10.5}$$

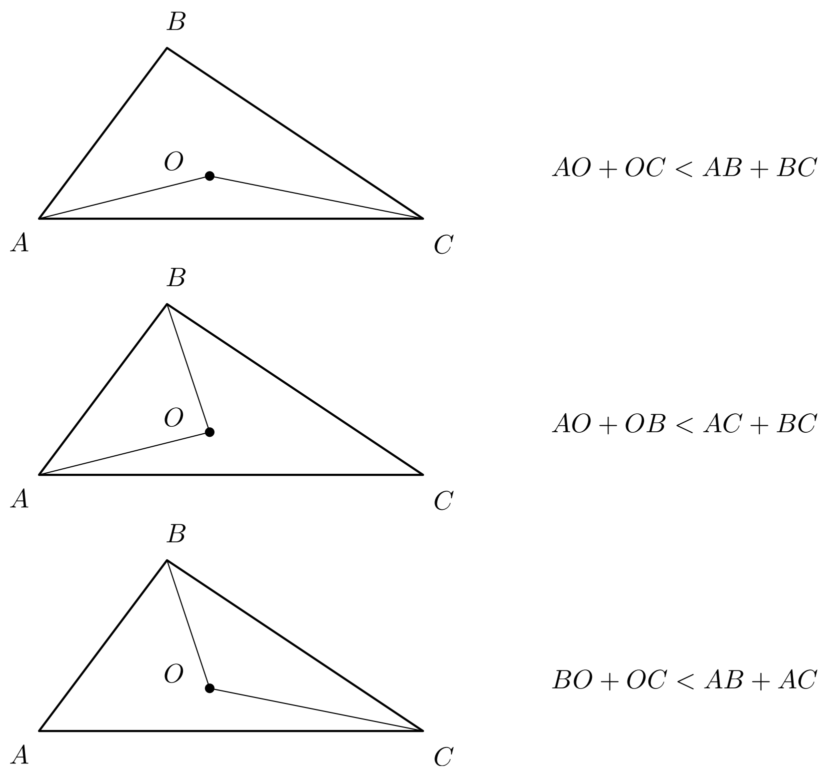



**Fig. 10.25** Problema 4.6. La suma de las distancias de un punto interior a los vértices es menor que el perímetro.

- Según §2, la suma de los lados de la envolvente es mayor que la suma de los lados de la envuelta si esta determina un polígono convexo. El triángulo es convexo. De la Fig. 10.25, tenemos

$$\begin{aligned} AO+OC &< AB+BC \\ AO+OB &< AC+BC \\ BO+OC &< AB+AC \end{aligned}$$

  sumando y dividiendo por dos, tenemos

$$AO+BO+OC < AB+AC+BC\,. \tag{10.6}$$

  De (10.5) y de (10.6), resulta

$$\frac{AB+BC+CA}{2} < OA+OB+OC < AB+BC+CA\,.$$

**4.7** Por la Fig. 10.26, tenemos

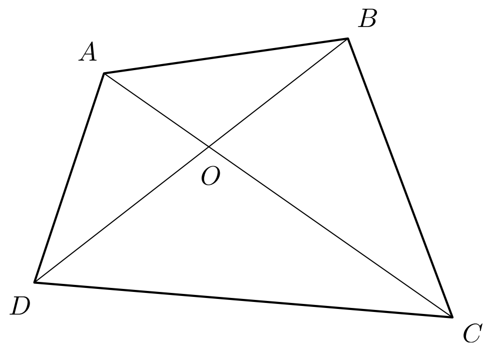



**Fig. 10.26** Problema 4.7.

$$AB < AO + OB$$
$$BC < BO + OC$$
$$CD < CO + OD$$
$$DA < DO + OA$$

Sumando y teniendo en cuenta que $AO + OC = AC$ y que $OB + OD = BD$

$$AB + BC + CD + DA < 2(AO + OB + OC + OD) = 2(AC + BD),$$

dividiendo por dos resulta

$$\frac{AB + BC + CD + DA}{2} < AC + BD, \tag{10.7}$$

por otra parte

$$AC < AB + BC$$
$$AC < AD + DC$$
$$BD < BA + AD$$
$$BD < BC + CD$$

sumando y dividiendo por dos

$$AC + BD < AB + BC + CD + DA. \tag{10.8}$$

En resumen, de (10.7) y de (10.8), resulta

$$\frac{AB + BC + CD + DA}{2} < AC + BD < AB + BC + CD + DA.$$

**4.8** Si al triángulo isósceles $ABC$ le aplicamos una simetría respecto de su base resulta la Fig. 10.27

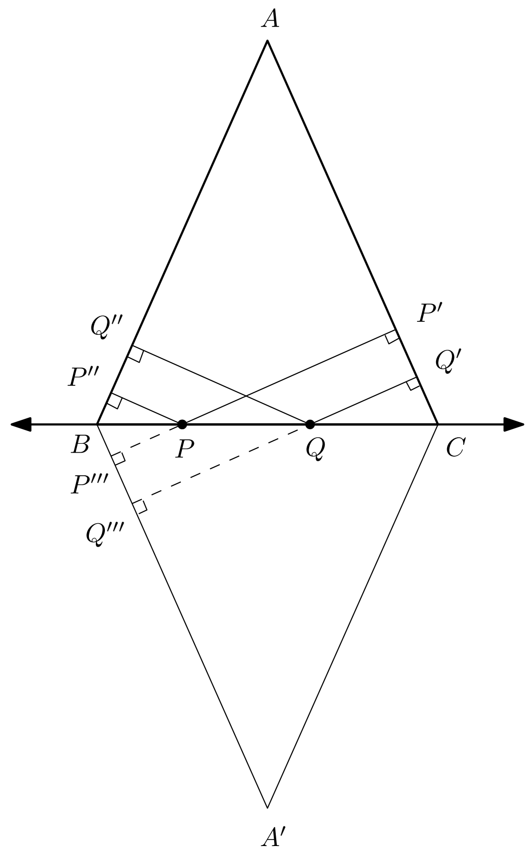



**Fig. 10.27** Problema 4.8

- Por la simetría respecto de la base y ser el triángulo isósceles

$$PP'' = PP'''$$

$$\measuredangle BPP'' = \measuredangle BPP''' = \measuredangle CPP'$$

$$QQ'' = QQ'''$$

$$\measuredangle BQQ'' = \measuredangle BQQ''' = \measuredangle CQQ'$$

  Por tanto $P'$, $P$ y $P'''$ estan alineados así como $Q'$, $Q$ y $Q'''$ y las rectas que los contienen son paralelas.
- Como $AC$ y $BA'$ son paralelas por la simetría y segmentos de paralelas entre paralelas son iguales, resulta

$$P'P''' = Q'Q'''$$

  lo que demuestra el resultado.

**4.9** Podemos obtener tres triángulos isósceles donde $O$ está en la base, por el ejercicio anterior (ver Fig. 10.28)

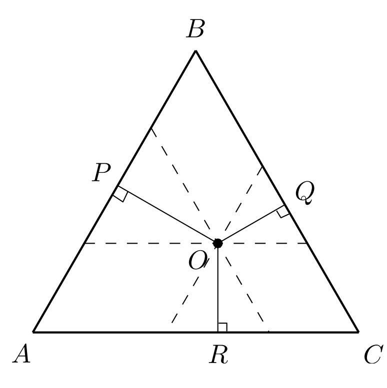



**Fig. 10.28** Problema 4.9.

$$OP + OQ = k_1$$
$$OP + OR = k_2$$
$$OQ + OR = k_3$$

donde $k_1$ , $k_2$ y $k_3$ son constantes, sumando y dividiendo por dos, obtenemos

$$OP + OQ + OR = \frac{k_1 + k_2 + k_3}{2} = k$$

donde $k$ es una constante que no depende del punto $O$ elegido.

**4.10** Por la Lecc. 10§8 y tomando como unidad el ángulo llano:
1.º, $n - 2 = 2 + \frac{m}{2} \to n = 4 + \frac{m}{2}$ si $m$ es par, en caso contrario no existe.
2.º, $n - 2 = k \cdot 2 \to n = 2(k+1)$ .

**4.11** De la Fig. 10.29 tenemos

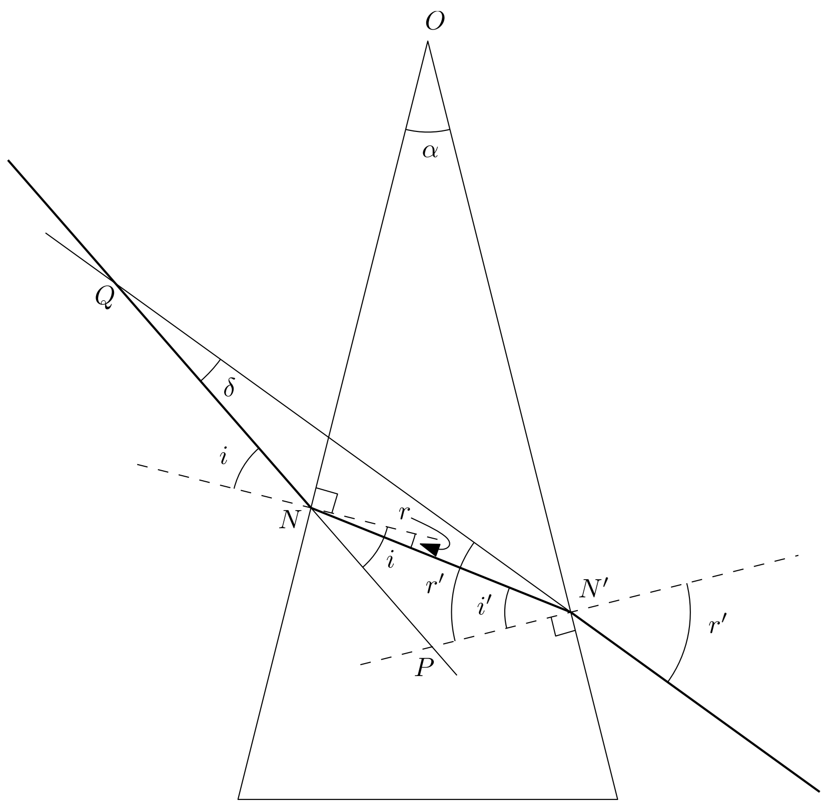



**Fig. 10.29** Problema 4.11.

- Del cuadrilátero $ONPN'$ tenemos

$$\measuredangle NPN' = 180^\circ - i - \alpha$$

y del triángulo $PQN'$

$$\begin{aligned}\delta &= \measuredangle PQN' \\ &= i - r' + \alpha\,.\end{aligned}$$

- Del triángulo $ONN'$ tenemos

$$\alpha = -r + i'\,.$$

**4.12** La Fig. 10.30 presenta los cuatro casos posibles.

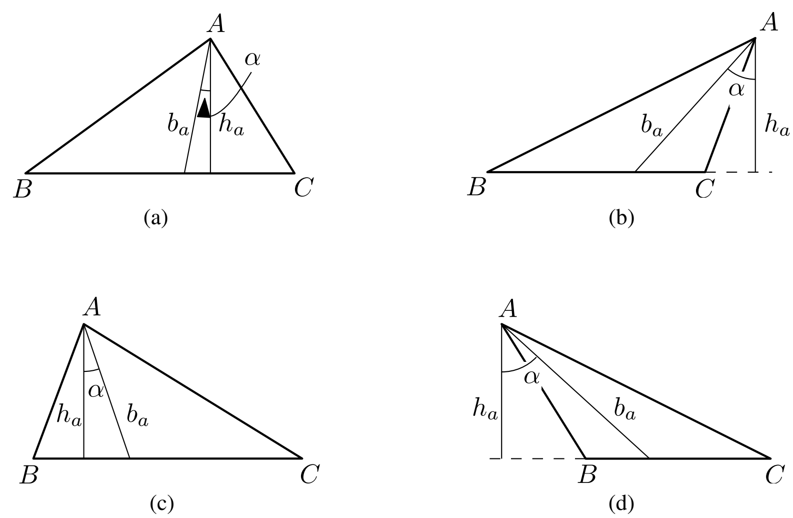



**Fig. 10.30** Problema 4.12.

Los casos de la Fig. 10.30(a) y de la Fig. 10.30(b) conducen a

$$\alpha = \frac{-B+C}{2} \tag{10.9}$$

Los casos de la Fig. 10.30(c) y de la Fig. 10.30(d) conducen a

$$\alpha = \frac{B-C}{2} \tag{10.10}$$

En resumen, de (10.9) y de (10.10), se obtiene

$$\alpha = \frac{|B-C|}{2}\,.$$

**4.13** Ver Fig. 10.31.

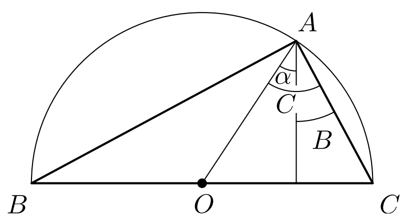



**Fig. 10.31** Problema 4.13. $O$ es el punto medio de la hipotenusa $BC$, por las propiedades del triángulo isósceles $\measuredangle OAC = C$ de donde $\alpha = C - B$.

**4.14** Los cuadriláteros $AIBQ$, $AICR$ y $BICP$ de la Fig. 10.32 presentan todos

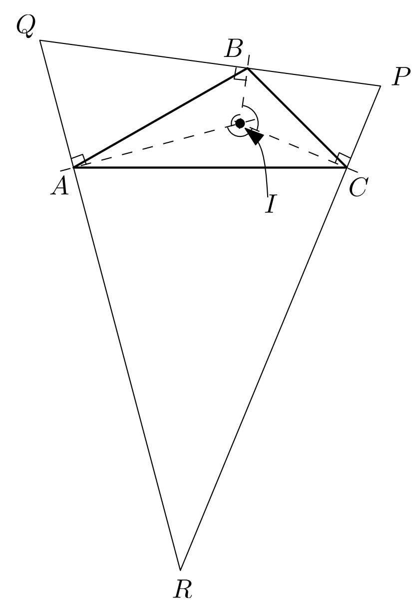



**Fig. 10.32** Problema 4.14. Es fácil ver que:

$$\measuredangle AIB = 180^\circ - \frac{A+B}{2}$$
$$\measuredangle AIC = 180^\circ - \frac{A+C}{2}$$
$$\measuredangle BIC = 180^\circ - \frac{B+C}{2}.$$

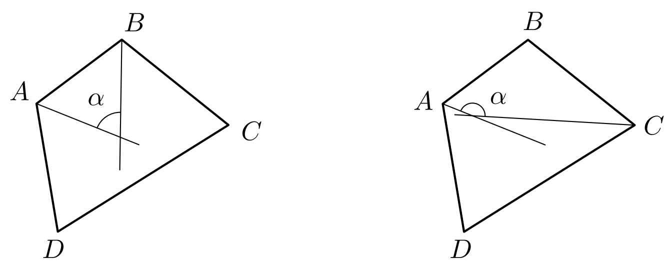
ellos un par de ángulos opuestos rectos siendo suplementarios los otros dos, lo que conduce a que

$$P = \frac{B+C}{2}$$
$$Q = \frac{A+B}{2}$$
$$R = \frac{A+C}{2}$$

Por otra parte, resolviendo el sistema anterior

$$A = -P + Q + R$$
$$B = P + Q - R$$
$$C = P - Q + R.$$

**4.15** Tenemos dos casos, Fig. 10.33




(a) Ángulos consecutivos.

(b) Ángulos no consecutivos.

**Fig. 10.33** Problema 4.15.

- Si las bisectrices corresponden a ángulos consecutivos, tienen intersección no vacía pues las bisectrices forman ángulos internos a un mismo lado cuya suma es menor que dos rectos. De los cuatro ángulos (dos pares opuestos por el vértice y dos pares suplementarios) es suficiente conocer uno de ellos. De la Fig. 10.33(a)

$$\alpha + \frac{A}{2} + \frac{B}{2} = 180^\circ$$
$$A + B + C + D = 360^\circ$$

de donde

$$\alpha = \frac{C + D}{2}.$$

- Si las bisectrices no corresponden a ángulos consecutivos, no podemos asegurar su intersección en un único punto (pueden ser paralelas o coincidentes). De la Fig. 10.33(b), tenemos

$$\alpha + \frac{A}{2} + B + \frac{C}{2} = 360^\circ$$
$$A + B + C + D = 360^\circ$$

de donde

$$180^\circ - \alpha = \frac{B - D}{2}.$$

En la figura hemos supuesto $B > D$ si fuera $B < D$ se intercambiarían, en cualquier caso $\frac{|B-D|}{2}$

En resumen, *si las bisectrices corresponden a ángulos consecutivos, el ángulo que forman es igual a la semisuma de los otros dos; si corresponden a ángulos no consecutivos, es igual a la semidiferencia de los otros dos.*

**4.16** $C$ describe el arco capaz de segmento $AB$ y ángulo $C$ (curva a trazos de la Fig. 10.34). Por ser el triángulo $BCB'$ isósceles el ángulo $\measuredangle BB'C = 90° - \frac{C}{2}$ es constante así como su suplementario. Así pues, $B'$ recorre el arco capaz de segmento $AB$ y ángulo $\measuredangle AB'B = 90° + \frac{C}{2}$, curva gruesa de la Fig. 10.34.

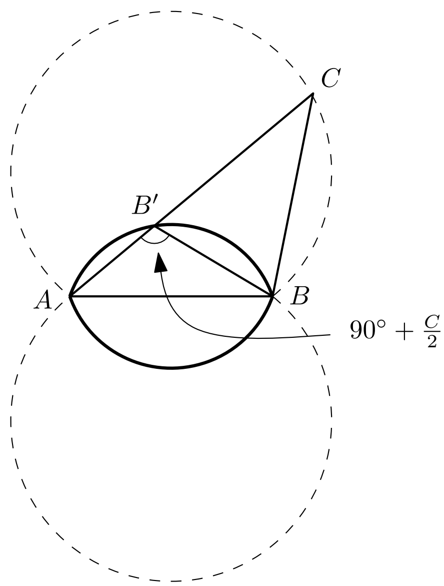



**Fig. 10.34** Problema 4.16.

**4.17** Sea $P$ el punto dado por el que ha de pasar la circunferencia y $A$, $B$ y $C$ los puntos dados no alineados (ver Fig. 10.35). Tracemos las mediatrices de los segmentos $AB$ y $BC$ que se cortan en $O$, este será el centro de la circunferencia buscada y su radio $OP = r$. Además $OA = OB = OC = d$. Por tanto, las distancias de los puntos a la circunferencia son iguales, pues

$$AN_a = BN_b = CN_c = r - d\,.$$

**4.18** De la Fig. 10.36 obtenemos

$$\begin{aligned}
\measuredangle DBC &= 2\alpha \quad \text{(por ser exterior a } ABC\text{)}\\
\measuredangle DCE &= 3\alpha \quad \text{(por ser exterior a } ACD\text{)}\\
\measuredangle FDE &= 4\alpha \quad \text{(por ser exterior a } ADE\text{)}
\end{aligned}$$

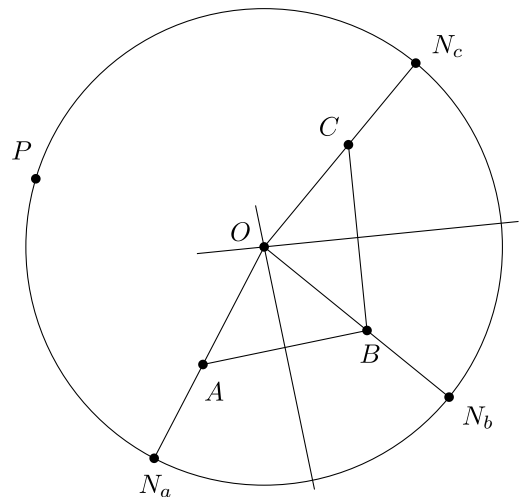



**Fig. 10.35** Problema 4.17.

y así sucesivamente.

**4.19** Para construir el aparato tomemos una poligonal de varillas iguales y articuladas por sus extremos y otro par de varillas articuladas en un extremo y donde podamos insertar la anterior poligonal articulada, Fig. 10.37.

- Para multiplicar un ángulo por $n$, dispongamos el ángulo entre la primera varilla de la poligonal y la otra varilla que contiene los extremos de la poligonal, ver Fig. 10.38(a), el resultado es el ángulo entre la $n$-ésima varilla de la poligonal y la varilla que contiene las articulaciones de la poligonal opuesta al segundo extremo (el que la une a la $n+1$-ésima) de la $n$-ésima varilla
- Para dividir un ángulo por $n$, situémoslo entre la $n$-ésima varilla de la poligonal y la varilla que contiene las articulaciones de la poligonal opuesta al segundo extremo de la $n$-ésima varilla , Fig. 10.38(b).

Para trisecar ángulos es suficiente con una poligonal articulada de tres varillas iguales. Ver Fig. 10.39.

**4.20**

$$_A g_B = ss's's'' = s\underbrace{s's'}_{1}s'' = ss''$$

Será una traslación sii los ejes de las simetrías axiales son paralelos lo que equivale a que los giros sean iguales y opuestos, ver Fig. 10.40.

**4.21** De la Fig. 10.41, tenemos que

$$ss's's'' = ss''$$

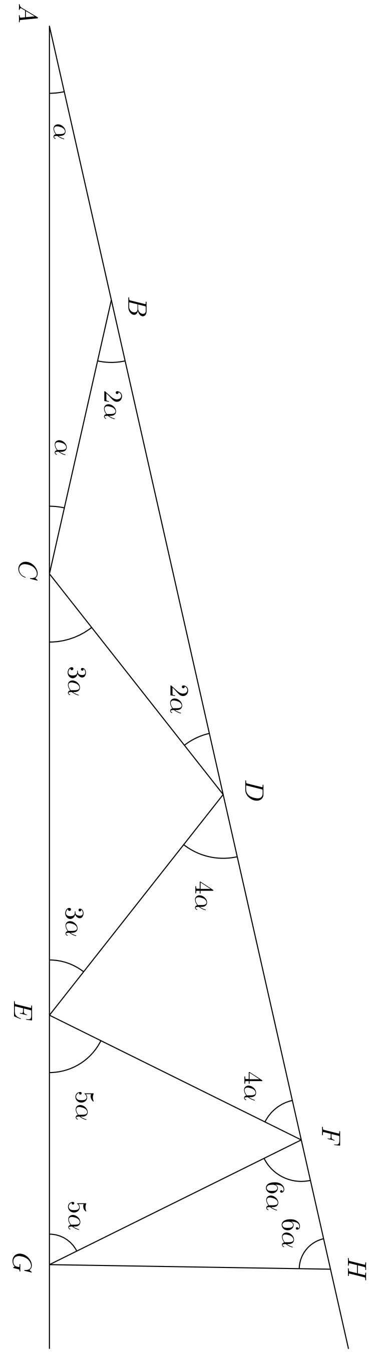



**Fig. 10.36** Problema 4.18.

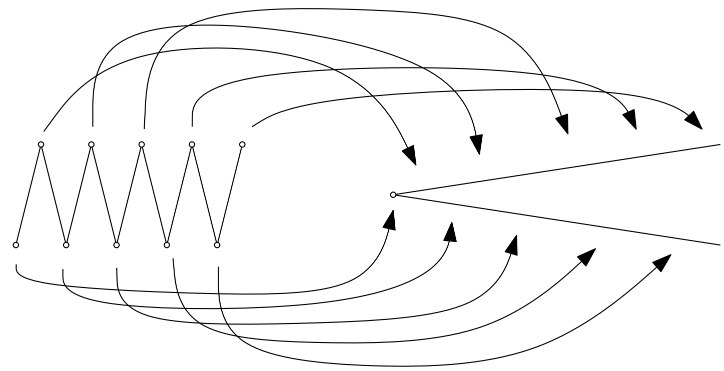


**Fig. 10.37** Problema 4.19. Construcción del aparato.

El giro resultante tiene centro en $O'$ y el ángulo de giro es el mismo y de igual sentido.

Al permutar el orden de las operaciones cambia el centro

$$s^{IV}s's's''' = s^{IV}s'''$$

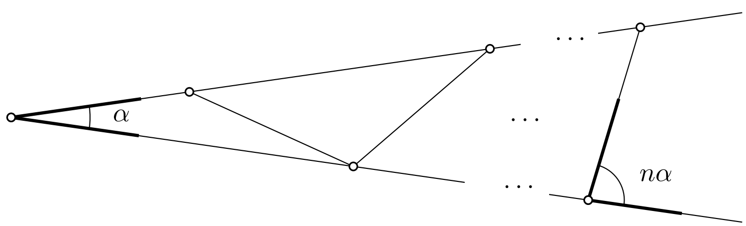
resulta pues un giro de centro $O''$ y el ángulo es el mismo y del mismo sentido.

**4.22** La composición de los giros produce, ver Fig. 10.42

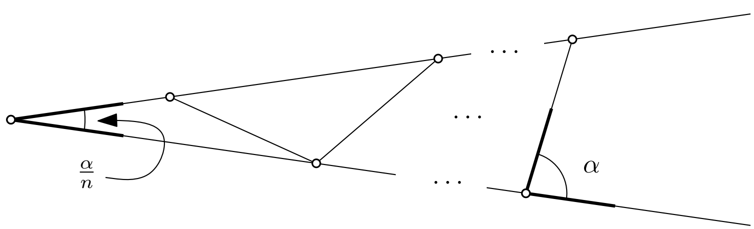
$$ss's's'' = ss''$$

- Si $s$ y $s''$ tienen ejes paralelos, tenemos una traslación de vector el doble del segmento de perpendicular del eje correspondiente a $s$ al eje correspondiente a $s''$ cuya medida puede coincidir o no con la del segmento dado $AB$; si coincide el lugar geométrico es todo el plano; en caso contrario, el conjunto vacío.
- Si los ejes no son paralelos, resulta un giro de centro $O_3$ y ángulo $\alpha_1 + \alpha_2$. Para hallar el lugar geométrico, situamos el segmento dado $AB$ en la posición $A'B'$ perpendicular al eje de la simetría $s''$ con su punto medio $M'$ sobre él, si trasladamos paralelamente el segmento hasta que $A'$ (o $B'$) encuentre el eje de $s$, $H$, en la figura, siendo $H'$ su homólogo que dista de $H$ el segmento dado cuyo ángulo central es $360° - (\alpha_1 + \alpha_2)$. Por tanto, el lugar geométrico es una circunferencia de centro $O_3$ a cuyas cuerdas de longitud el segmento dado les corresponde un ángulo central $360° - (\alpha_1 + \alpha_2)$, dibujo grueso de la figura.

**4.23** Ver COXETER. *Introduction to Geometry. 2nd edition.* Concretamente *Fermat's Problem*, págs. 21–22.




(a) Multiplicación de un ángulo.




(b) División de un ángulo.

**Fig. 10.38** Problema 4.19.

## Problems of Chapter 5

**5.1** De la Fig. 10.43, como $2\alpha + 2\beta = 180^\circ$, resulta $\alpha + \beta = 90^\circ$ , con lo que

$$\measuredangle MQP = \measuredangle AQD = 180^\circ - (\alpha + \beta) = 90^\circ\,.$$

Además, como segmentos de paralelas entre paralelas son iguales

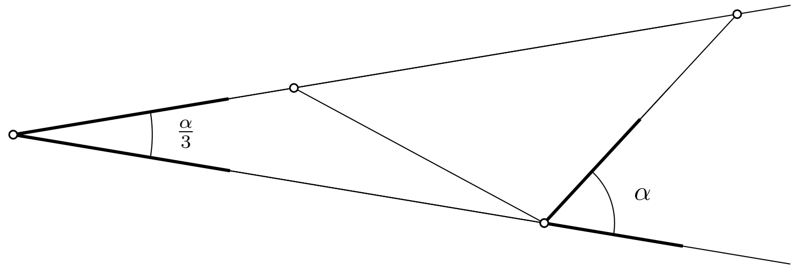



**Fig. 10.39** Problema 4.19. Construcción del trisector de ángulos y su uso.

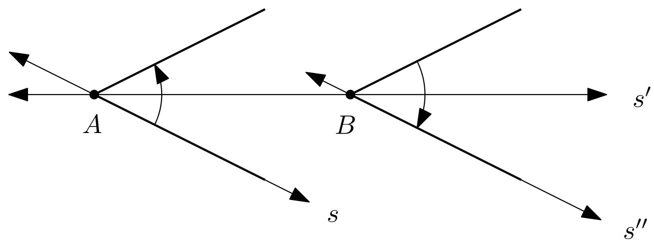



**Fig. 10.40** Problema 4.20.

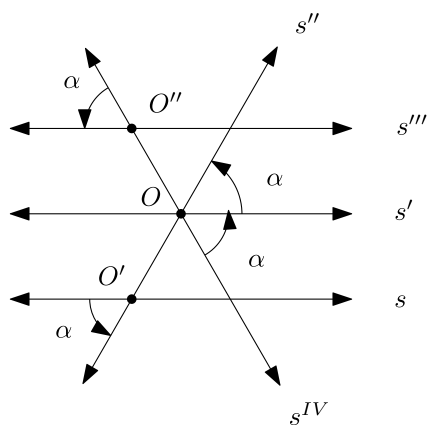



**Fig. 10.41** Problema 4.21.

$$MQ = NP\,, \quad MN = QP\,,$$

tenemos que $MNPQ$ es un rectángulo (trazado grueso de la figura).

**5.2** Como el rectángulo resultante es simétrico respecto de las paralelas medias (que coinciden con las diagonales del rectángulo delimitado por las bisectrices), se trata pues de un cuadrado. Ver Fig. 10.44

**5.3** Por la propiedad de que la paralela media de un triángulo es paralela a la base,

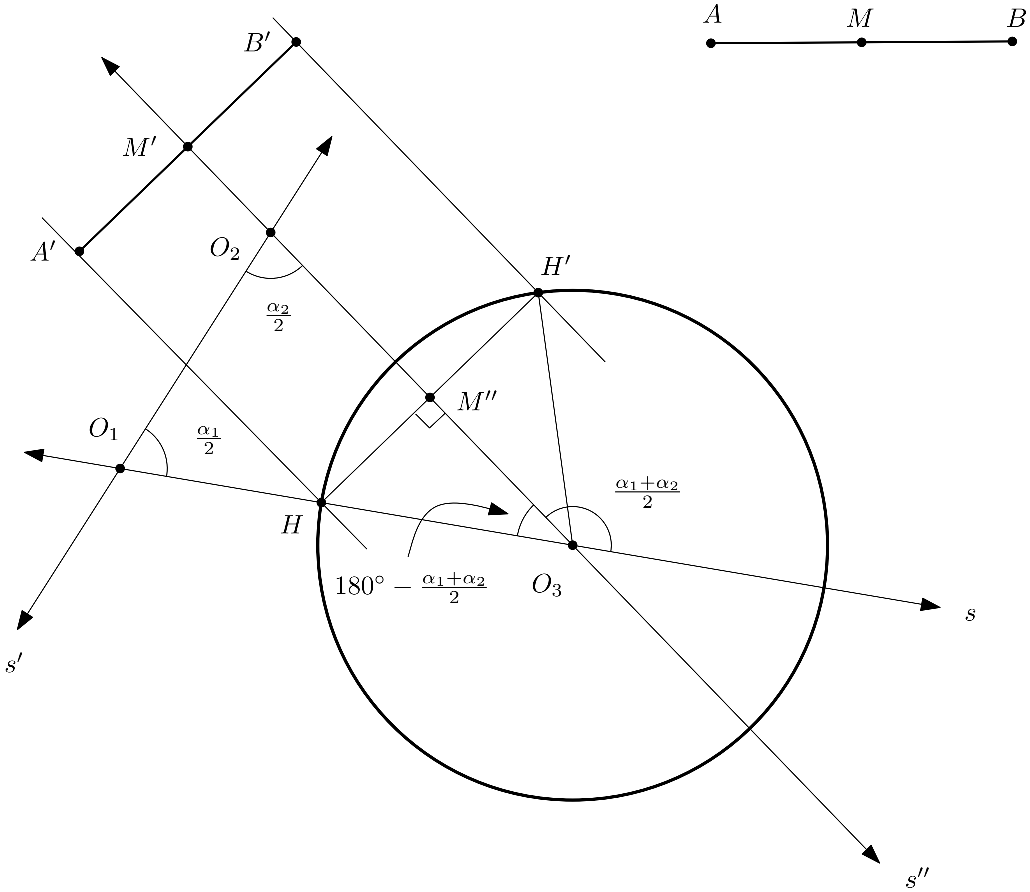



**Fig. 10.42** Problema 4.22.

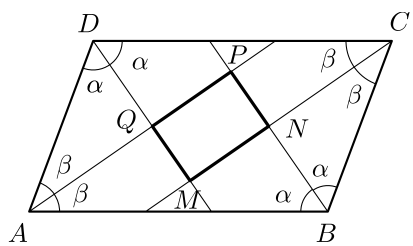



**Fig. 10.43** Problema 5.1. Las bisectrices delimitan un rectángulo.

dividimos el cuadrilátero en dos triángulos de dos formas distintas usando, en cada caso, una de las dos diagonales y aplicamos dicha propiedad. Ver Fig. 10.45.

**5.4** Sea *ABCD* el paralelogramo. Por el ej. 7 lecc. 9, la composición de dos simetrías centrales se reduce a una traslación

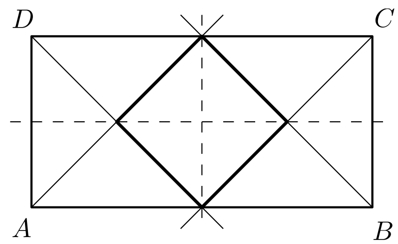
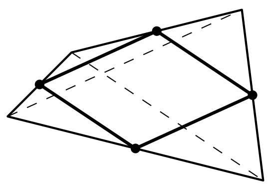
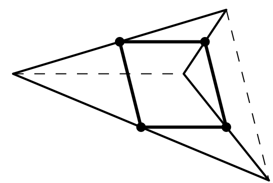



**Fig. 10.44** Problema 5.2. Las bisectrices delimitan un cuadrado.



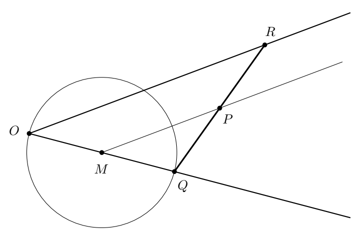
(a) Cuadrilátero convexo.



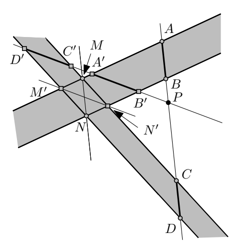
(b) Cuadrilátero no convexo.

**Fig. 10.45** Problema 5.3. Los puntos medios de un cuadrilátero son los vértices de un paralelogramo.

$$C_A C_B C_C C_D = T_{2\overrightarrow{AB}} T_{2\overrightarrow{CD}} = T_{2\overrightarrow{AB}+2\overrightarrow{CD}} = T_{\overrightarrow{0}} = 1\,.$$




(a) Problema 5.5.




(b) Problema 5.6.

**Fig. 10.46**

**5.5** Se traza una paralela por $P$ a uno de los lados que corta al otro lado en $M$, sobre este lado hallamos un punto $Q$ tal que $OM = MQ$ y trazamos la recta $PQ$ que corta al otro lado en $R$. Como la paralela trazada inicialmente resulta ser la paralela media del triángulo $QOR$, tenemos que $QP = PR$ y, por tanto, $QR$ es el segmento buscado. Ver Fig. 10.46(a).

**5.6** Como segmentos de paralelas entre paralelas son iguales, tenemos dos soluciones, ver Fig. 10.46(b).

$$AB = MN = CD, \quad A'B' = M'N' = C'D'.$$

**5.7** Sean $P$ y $Q$ los puntos medios de las diagonales. La paralela media $MN$ pasa

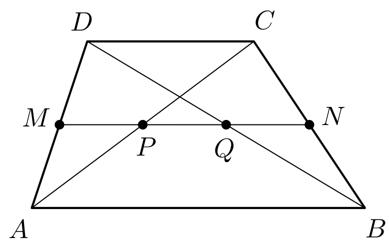



**Fig. 10.47** Problema 5.7.

por ellos. Ver Fig. 10.47

En el triángulo $ACD$ tenemos

$$MP = \frac{CD}{2}$$

y en el triángulo $ABD$

$$MQ = \frac{AB}{2},$$

por tanto

$$PQ = MQ - MP = \frac{AB - CD}{2}.$$

**5.8** Sea $ABCD$ el cuadrilátero dado (ver Fig. 10.48), por el ej. 3 los puntos medios de sus lados son los vértices de un paralelogramo $MNPQ$ cuyas diagonales $MP$ y $NQ$ se cortan en su punto medio $O$.

Por otra parte, $QR$ es paralela media del triángulo $ACD$ y $NS$ es paralela media del triángulo $BCD$, por tanto, paralelos al lado $CD$ del cuadrilátero y paralelos entre sí. Lo mismo podemos afirmar de $QS$ y $NR$ respecto del lado $AB$ del cuadrilátero, siendo, pues, $QRNS$ un paralelogramo cuyas diagonales $NQ$ y $RS$ se cortan en su punto medio, que por lo dicho más arriba es $O$, pues ambos cuadriláteros tienen una diagonal en común.

Las diagonales de ambos paralelogramos son los segmentos de los que trata el enunciado cuya tesis acabamos de demostrar.

**5.9** En $AB \rightarrow$ señalemos el punto $G$, (ver Fig. 10.49), tal que

$$AE = EB = BG,$$

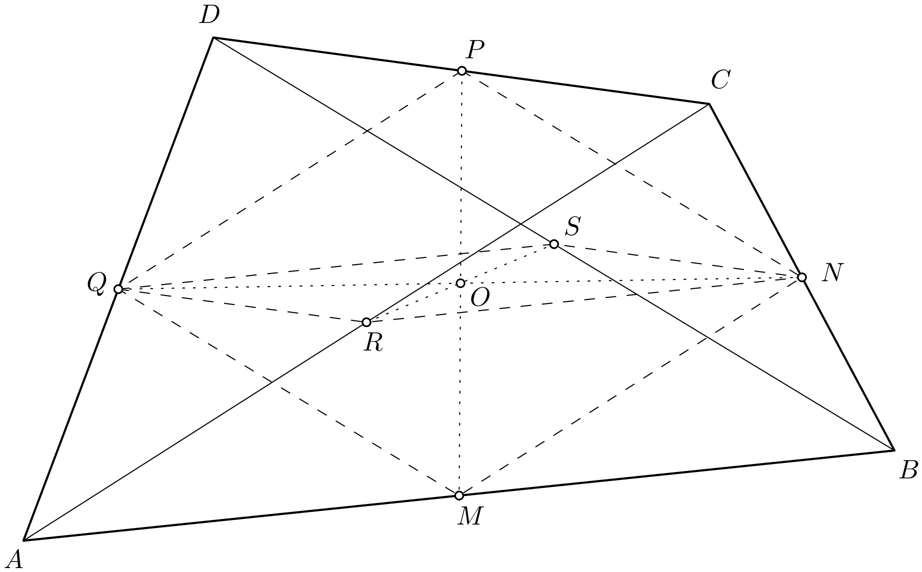



**Fig. 10.48** Problema 5.8.

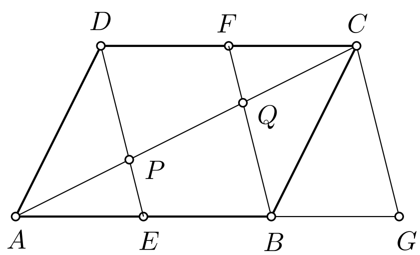



**Fig. 10.49** Problema 5.9.

como $EB = DF$ y son paralelos también lo seran las rectas $DE$ y $FB$. También $BG = FC$ son paralelos y lo serán las rectas $FB$ y $CG$. Por tanto, por §8

$$AP = PQ = QC.$$

**5.10** Sean las semirrectas $Or$ y $O'r'$ homólogas, ver Fig. 10.50. Aplicamos una traslación de vector $\overrightarrow{OO'}$ a $Or$ que se transforma en $O'r''$ los puntos medios de los homólogos de esta y $O'r'$ se encuentran en la bisectriz, luego se aplica la traslación de vector $\dfrac{\overrightarrow{O'O}}{2}$ y el lugar geométrico es la semirrecta de trazado grueso.

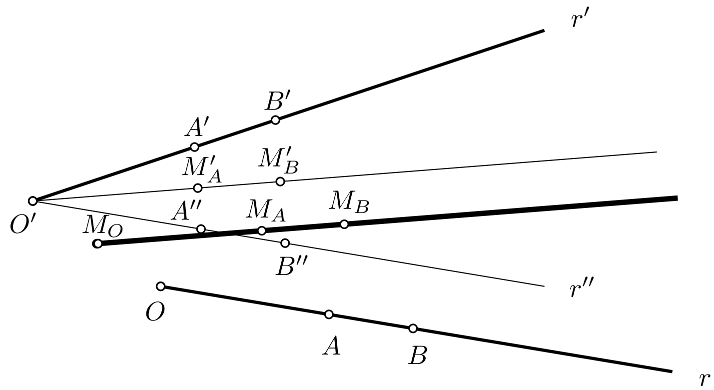
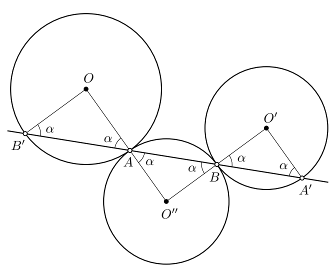


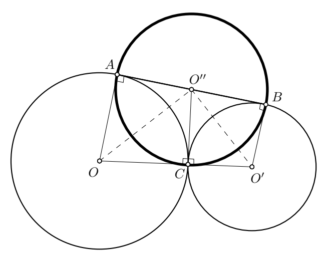

**Fig. 10.50** Problema 5.10.

## Problems of Chapter 6

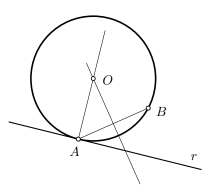
### 6.1



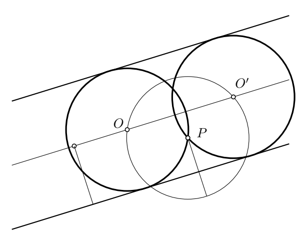

(a) Problema 6.2.




(b) Problema 6.3




(c) Problema 6.4.




(d) Problema 6.5.

**Fig. 10.51**

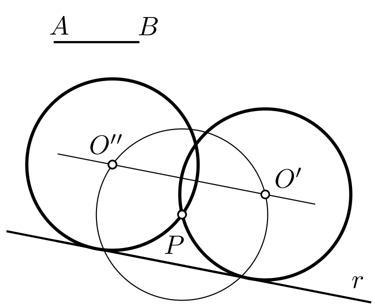
**6.2** Ver Fig. 10.51(a). Los triángulos isósceles $B'AO$ y $BO'A'$ tienen los mismos ángulos, concretamente, $\measuredangle B'AO = \measuredangle BA'O'$, ambos ángulos tienen sendos lados sobre la misma recta, por tanto los otros dos, $OA$ y $O'A'$, deben ser paralelos.

**6.3** Ver Fig. 10.51(b). La perpendicular por $C$ a la línea de centros corta a $AB$ en $O''$ que será el centro de la circunferencia de diámetro $AB$ pues los triángulos $CO'O''$ y $O'BO''$ son congruentes ($O'C = O'B$ y la misma hipotenusa $O'O''$). Por el mismo motivo, también son congruentes $OAO''$ y $OO''C$. Como $AO'' = O''C = O''B$ es el radio, se sigue el enunciado.

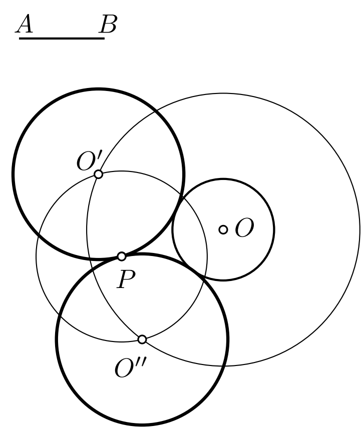
**6.4** Ver Fig. 10.51(c), el centro $O$ es la intersección de la perpendicular por $A$ a $r$ y de la mediatriz del segmento $AB$.

**6.5** Ver Fig. 10.51(d). Tiene dos soluciones, El centro está en la paralela media y su radio es la mitad del segmento de perpendicular. Haciendo centro en $P$, con dicho radio, obtenemos los centros $O$ y $O'$ buscados.

**6.6** Sea $AB$ el radio dado y $P$ el punto por el que pasa la circunferencia.



(a) Circunferencias de radio $AB$ que pasan por $P$ tangentes a $r$.



(b) Circunferencias de radio $AB$ que pasan por $P$ tangentes a $O$.

**Fig. 10.52** problema 6.6.

- Si ha de ser tangente a la recta $r$, tomemos una paralela a $r$, en el semiplano en que está $P$, que diste el radio dado $AB$; con este radio, con centro en $P$, tracemos una circunferencia que cortará a la paralela en $O'$ y en $O''$, estos son los centros de las circunferencias buscadas (dos soluciones). Ver Fig. 10.52(a).
- Tracemos con centro en $O$ una circunferencia de radio la suma de los radios dado, $AB$, y el de la circunferencia $O$; luego, con centro en $P$, tracemos una circunferencia de radio $AB$; las intersecciones de ambas circunferencias, $O'$ y $O''$, nos dan los centros de las circunferencias buscadas. Ver Fig. 10.52(b).

**6.7** Se toman paralelas a las rectas dadas $r$ y $s$, ver Fig. 10.53, que disten el radio

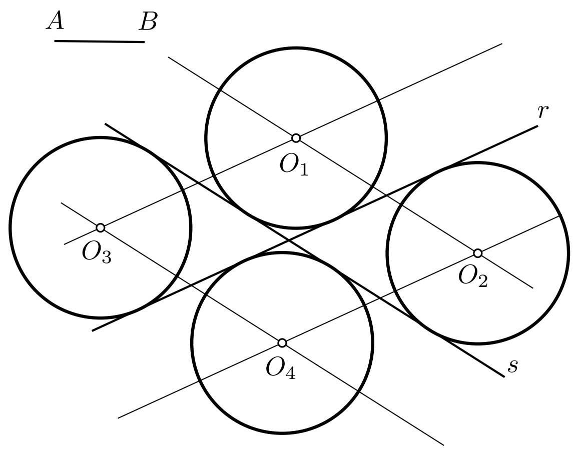



**Fig. 10.53** Problema 6.7.

dado $AB$ de ellas; las cuatro intersecciones nos dan cuatro soluciones.

**6.8** Sea $AB$ el radio dado; trazamos una paralela a la recta dada, $r$, a una distancia $AB$ de la misma y una circunferencia con centro en $O$, centro de la circunferencia dada, y radio la suma de los radios de la dada y $AB$. Sus intersecciones $O_1$ y $O_2$ son los centros de las circunferencias buscadas. Ver Fig. 10.54(a).

**6.9** Ver Fig. 10.54(b).

**6.10** Ver Fig. 10.54(c).

**6.11** Ver Fig. 10.54(d).

**6.12** Ver Figs. 10.55.

**6.13** Por el ej. 15 de la lecc. 9, los puntos medios de las cuerdas que pasan por $A$ se encuentran en la circunferencia de diámetro $OA$ de la Fig. 10.56(a).

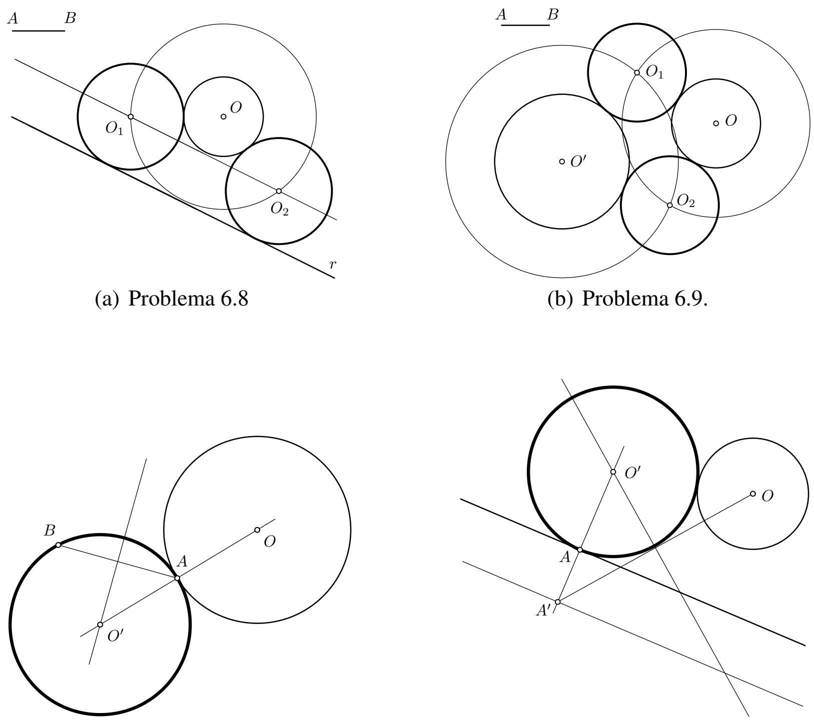
**6.14** Trazar por $O'$ una circunferencia de radio la mitad de la secante, trazar la tangente a esta por $O$, trazar la recta que pasa por el punto de tangencia y $O'$. Hallar la paralela por $A$. Ver Fig. 10.56(b).

**6.15** Por la propiedad de la paralela media a un trapecio, lecc. 12§7,

$$P_1M = MP_2 \qquad Q_1N = NQ_2$$

y por las propiedades de los segmentos oblicuos, lecc. 11§3

$$AP_1 = AP_2 \qquad AQ_1 = AQ_2\,.$$




(a) Problema 6.8

(b) Problema 6.9.

(c) Problema 6.10.

(d) Problema 6.11.

**Fig. 10.54**

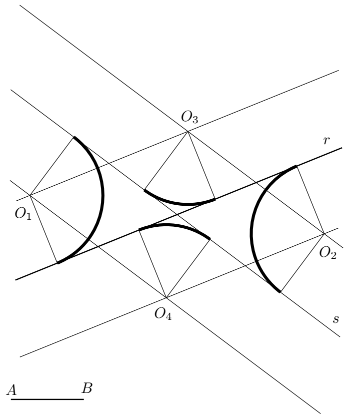
Puede haber dos, una o ninguna solución. Ver Fig. 10.57.

**6.16**

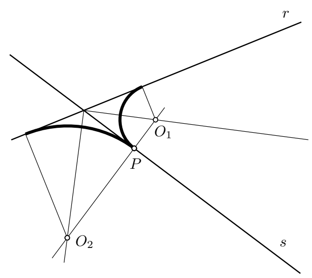
- Si conocemos la suma de distancias, ver Fig. 10.58(a), hallamos el punto medio $M$ de $BC$ y con centro en este punto trazamos la circunferencia de radio $\frac{D}{2}$. Hallamos la recta tangente desde $A$ a esta circunferencia. Esta es la recta buscada pues en el trapecio $BCFE$ la paralela media tiene longitud la mitad de la suma de las bases y estas son las distancias de $B$ y $C$ a la recta.
- Si conocemos la diferencia de distancias, ver Fig. 10.58(b), hallamos el punto medio $M$ de $BC$, con centro en este punto trazamos la circunferencia de radio $\frac{d}{2}$. Hallamos la tangente desde $A$. Esta es la recta buscada pues en el trapecio $BECF$ la distancia entre los puntos medios de sus diagonales, $MT = \frac{d}{2}$, es la mitad de lo que miden las bases según el ej. 7 de la lecc. 12. Las bases son las distancias de $B$ y $C$ a la recta.

**6.17** Ver Fig. 10.59(a).

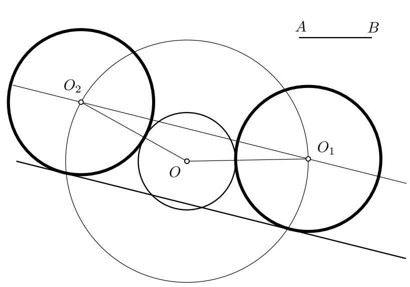
**6.18** Ver Fig. 10.59(b).



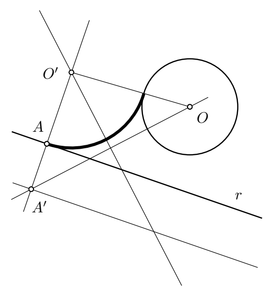

(a) Dado el radio de enlace.



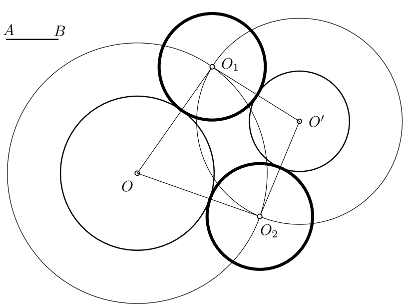

(b) Dado un punto de tangencia.



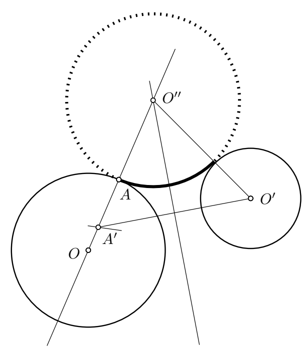

(c) Dado el radio de enlace.




(d) Dado un punto de tangencia.

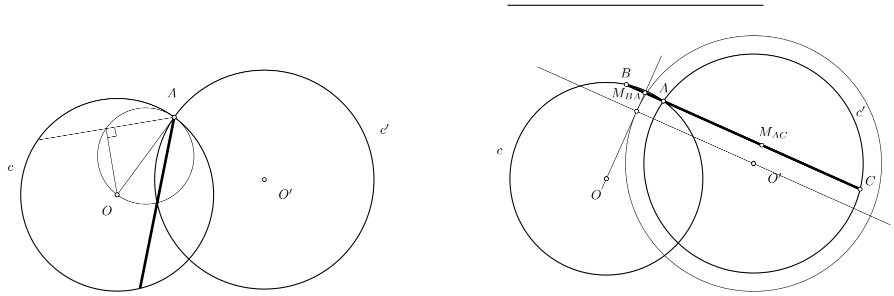



(e) Dado el radio de enlace.




(f) Dado un punto de tangencia.

**Fig. 10.55** Problema 6.12.




(a) Problema 6.13. (b) Problema 6.14

**Fig. 10.56**

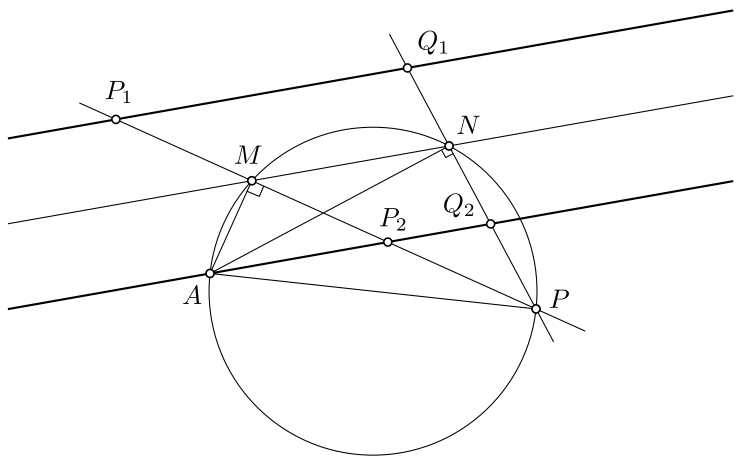



**Fig. 10.57** Problema 6.15.

**6.19** Ver Fig. 10.60.

**6.20** Ver Fig. 10.61(a).

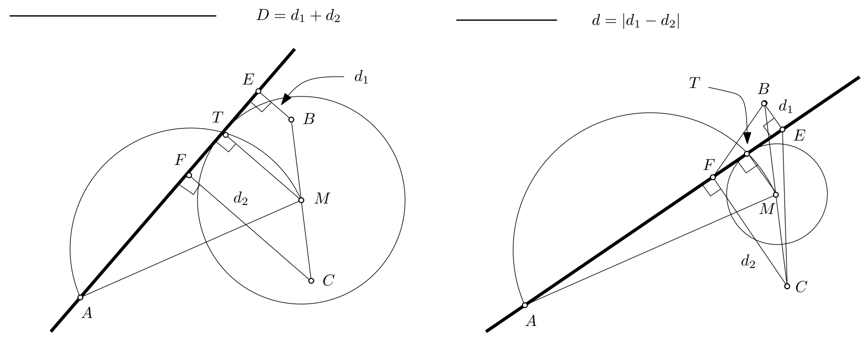
**6.21** Ver Fig. 10.61(b).

**6.22** Ver Fig. 10.62(a). Hay dos soluciones simétricas respecto de la mediatriz de $a$ .

**6.23** Ver Fig. 10.62(b).

**6.24** Ver Fig. 10.63(a). Se ha construido el arco capaz de segmento $AA'$ y ángulo el suplementario de $\measuredangle A$ , ver lecc. 15§4.

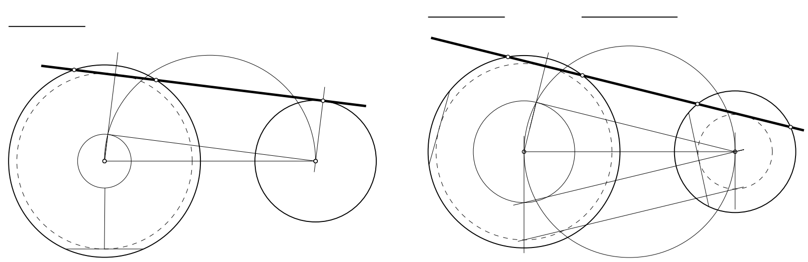
**6.25** Ver Fig. 10.63(b).




(a) Suma de distancias dada $D = d_1 + d_2$ .

(b) Diferencia de distancias dada $d = |d_1 - d_2|$ .

**Fig. 10.58** Problema 6.16.



(a) Problema 6.17.

(b) Problema 6.18.

**Fig. 10.59**

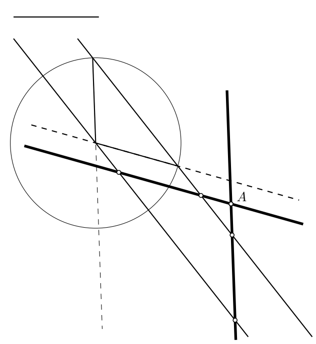
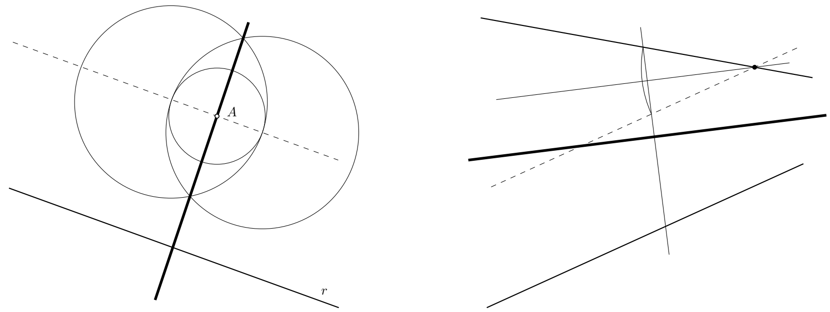


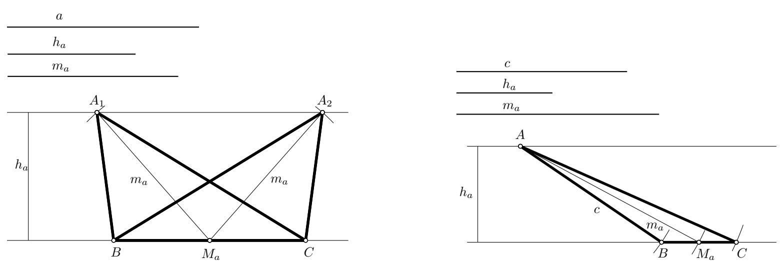

**Fig. 10.60** Problema 6.19.

**6.26** Ver Fig. 10.64(a). Hallaremos $B$ y $C$ teniendo en cuenta la altura $h_a$ y el arco capaz de ángulo $\measuredangle B - C$ y segmento $x$ que hemos de determinar, tenemos que



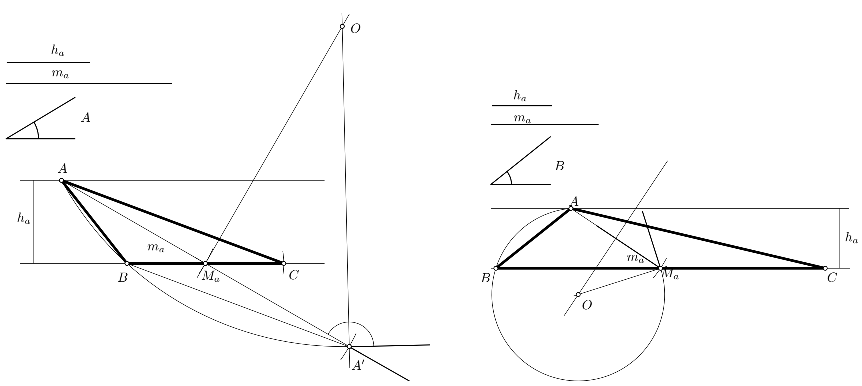

(a) Problema 6.20. (b) Problema 6.21.

**Fig. 10.61**




(a) Problema 6.22. (b) Problema 6.23

**Fig. 10.62**




(a) Problema 6.24 (b) Problema 6.25.

**Fig. 10.63**

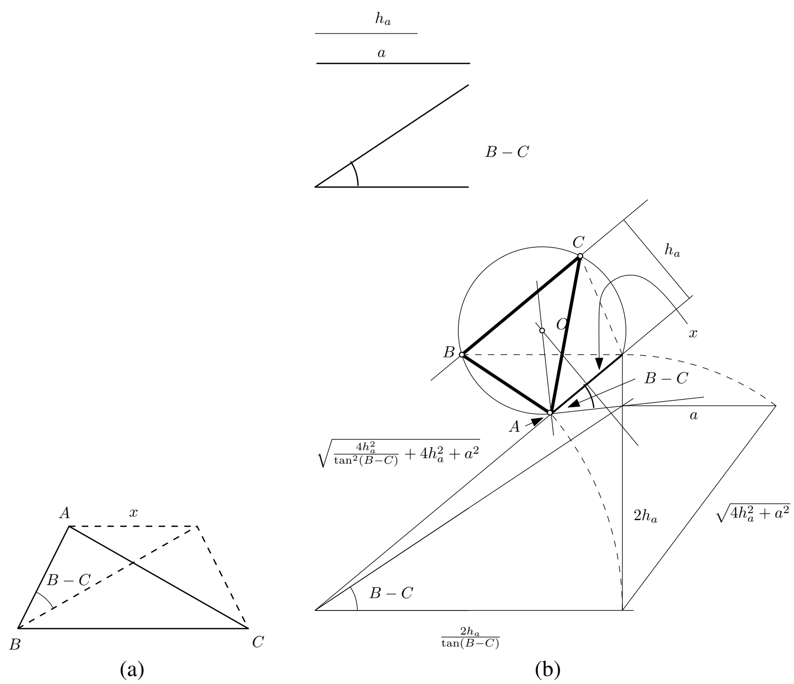



**Fig. 10.64** Problema 6.26.

$$\tan B = \frac{2h_a}{a-x} \qquad \tan C = \frac{2h_a}{a+x}$$

como

$$\tan(B-C) = \frac{4h_a x}{a^2 - x^2 + 4h_a^2}$$

obtenemos la ecuación

$$x^2 + \frac{4h_a}{\tan(B-C)}x - (a^2 + 4h_a^2) = 0$$

cuya solución es

$$x = -\frac{2h_a}{\tan(B-C)} + \sqrt{\frac{4h_a^2}{\tan^2(B-C)} + a^2 + 4h_a^2}.$$

Para construirlo aplicamos la definición de tangente de un ángulo y el teorema de Pitágoras tantas veces como sea necesario. Ver Fig. 10.64(b).

Otra solución se puede obtener considerando que el trapecio isósceles $ABCD$, ver Fig. 10.65, es homotético (homotecia de centro $H$) al trapecio $A'B'C'D'$ inscrito en el arco capaz de ángulo $\measuredangle B-C$ y segmento $A'D'$.

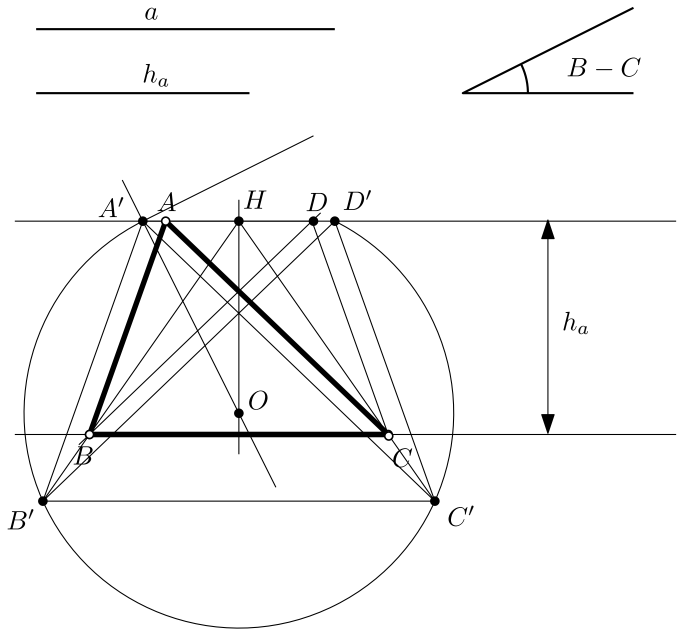
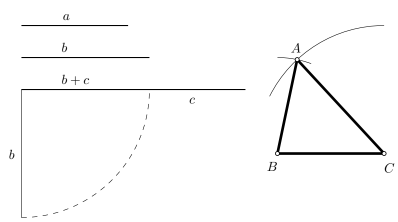
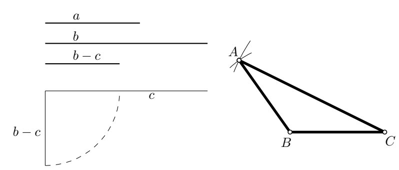


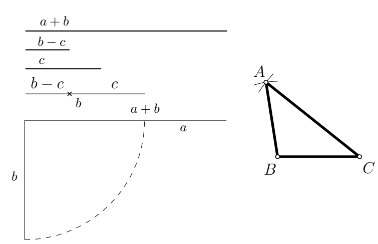

**Fig. 10.65** Problema 6.26. Solución alternativa.




(a) Problema 6.27.




(b) Problema 6.28.




(c) Problema 6.29.

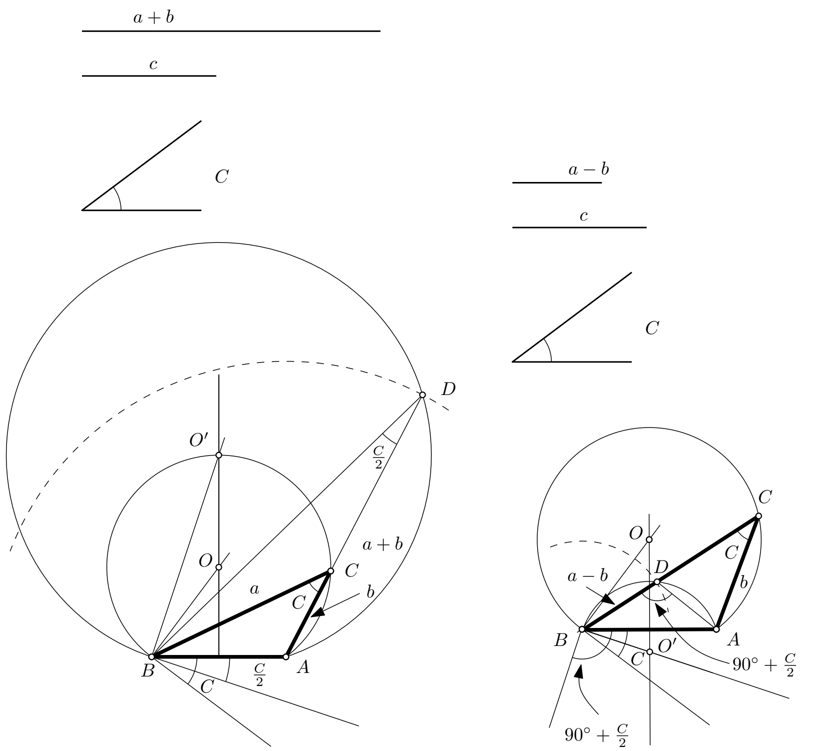
**Fig. 10.66**

**6.27** Ver Fig. 10.66(a)

**6.28** Ver Fig. 10.66(b)

**6.29** Ver Fig. 10.66(c)

**6.30**

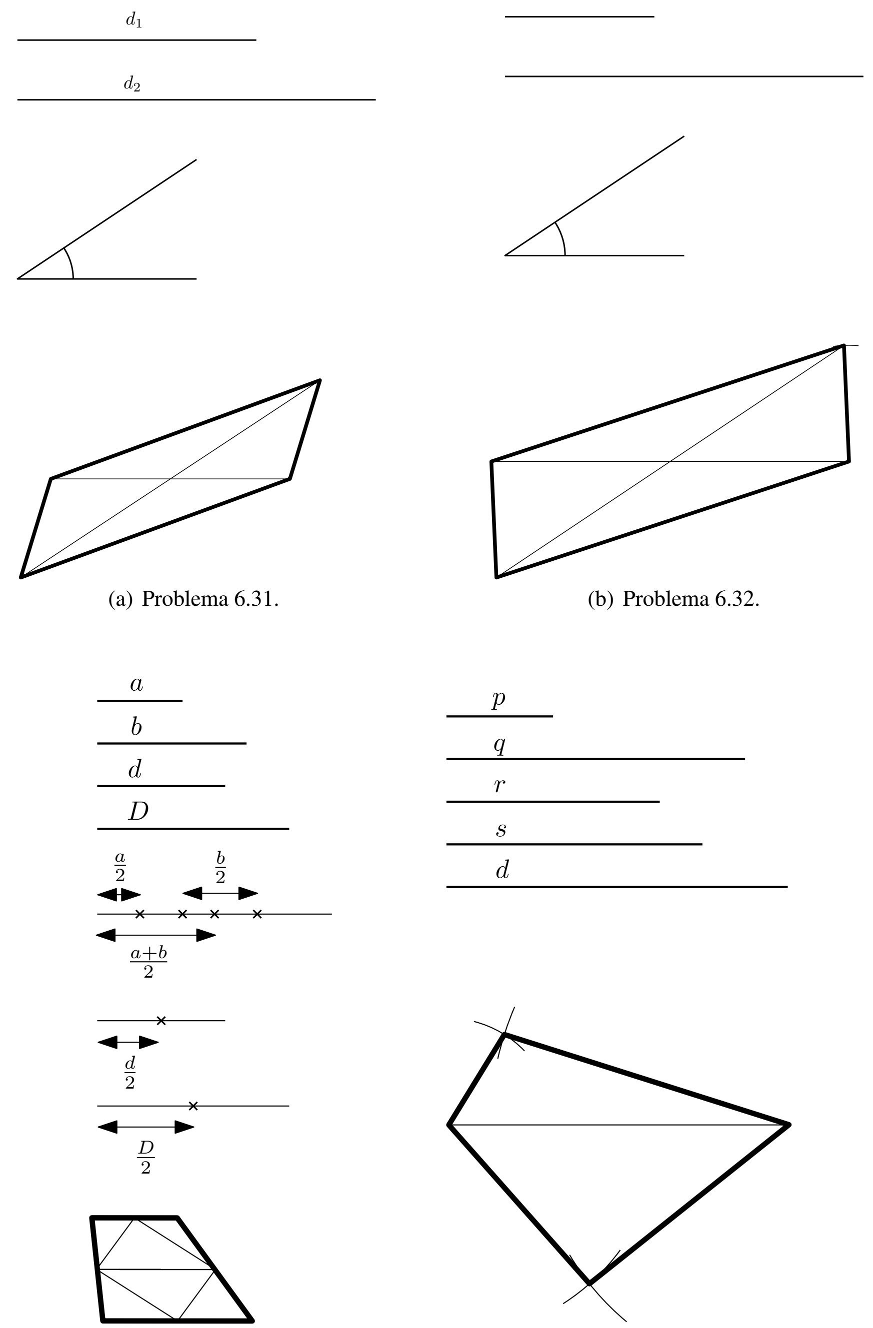



(a) Datos $a+b$, $c$, $\measuredangle C$. (b) Datos $a-b$, $c$, $\measuredangle C$.

**Fig. 10.67** Problema 6.30.

- Datos $a+b$, $c$, $\measuredangle C$. $C$, ver Fig. 10.67(a), se encuentra en el arco capaz de ángulo $C$ y segmento $c$. Como el triángulo $BCD$ es isósceles y el ángulo en $D$ es $\frac{C}{2}$ construimos el arco capaz de ángulo $\frac{C}{2}$ y localizamos $D$ intersectando este arco capaz con la circunferencia de centro $A$ y radio $a+b$, $C$ se encuentra intersectando el primer arco capaz con la recta $AD$.
- Podemos completar el problema suponiendo que los datos son $a-b$, $c$, $\measuredangle C$. Ver Fig. 10.67(b), para localizar $C$.

**6.31** Ver Fig. 10.68(a).




(a) Problema 6.31.

(b) Problema 6.32.

(c) Problema 6.33.

(d) Problema 6.34.

**Fig. 10.68**

**6.32** Ver Fig. 10.68(b).

**6.33** Los puntos medios de los lados son los vértices de un paralelogramo cuyos lados son la mitad de las diagonales por la propiedad de la paralela media de un triángulo y la paralela media del trapecio es la mitad de la suma de sus bases. Ver Fig. 10.68(c).

**6.34** Ver Fig. 10.68(d).

**6.35** Ver Fig. 10.69(a).

**6.36** Ver Fig. 10.69(b).

**6.37** Ver Fig. 10.69(c).

**6.38** Ver Fig. 10.69(d).

**6.39** Se construye el arco capaz de ángulo doblemente rayado, ver Fig. 10.70(a).

**6.40** Si $a$ es el lado del rombo, $D$ y $d$ sus diagonales. Si $x$ es el lado del cuadrado, ver Fig. 10.70(b), tenemos por semejanza

$$\frac{x}{D} = \frac{y}{a}$$
$$\frac{x}{d} = \frac{a-y}{a}$$

que conduce a

$$\frac{D}{d+D} = \frac{x}{d}.$$

**6.41** Hay tres triángulos rectángulos congruentes.

## Problems of Chapter 7

**7.1** Ver Fig. 10.71(a).

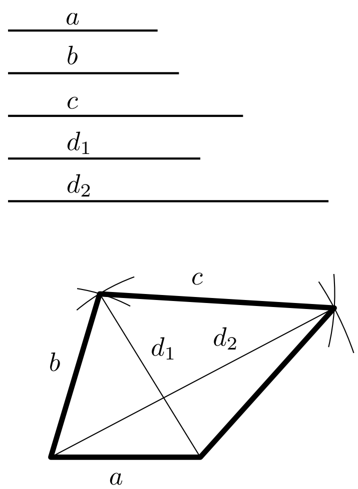
**7.2** Por simetría respecto del diámetro perpendicular a ambas paralelas.

Recíprocamente, si suponemos que ambas rectas se cortan en un punto exterior (si es interior el recíproco no es cierto) por ser el ángulo exterior no nulo y, además la semidiferencia de los centrales que abarcan dichos arcos, estos no pueden ser iguales. Si el punto está en la circunferencia, uno de los arcos se reduce a un punto y no podrían ser iguales.

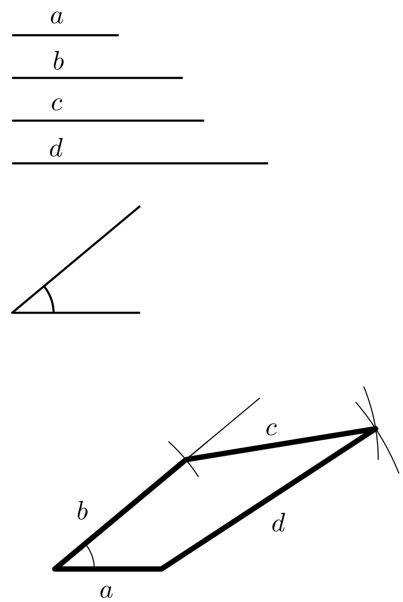
**7.3** Ver Fig. 10.71(b). Como consecuencia del ej. 2, del paralelismo de $AB$ y $A'B'$, tenemos

$$\measuredangle BOC + \measuredangle COA' = \measuredangle B'OC' + \measuredangle C'OA \tag{10.11}$$

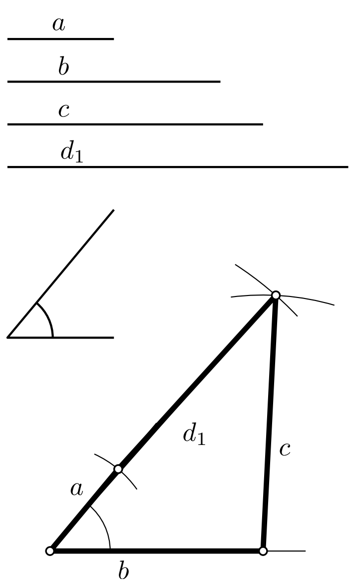
y del paralelismo de $BC$ y $B'C'$



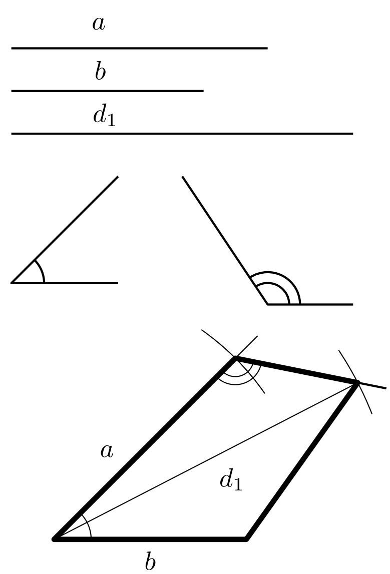

(a) Problema 6.35.




(b) Problema 6.36.

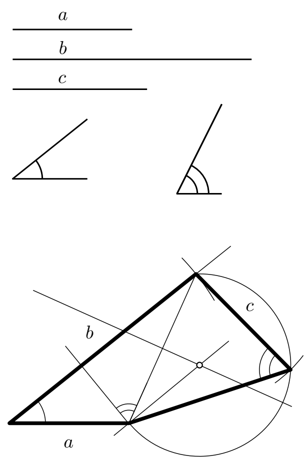



(c) Problema 6.37.

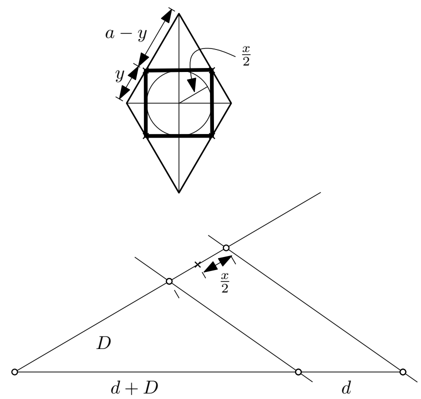



(d) Problema 6.38.

**Fig. 10.69**

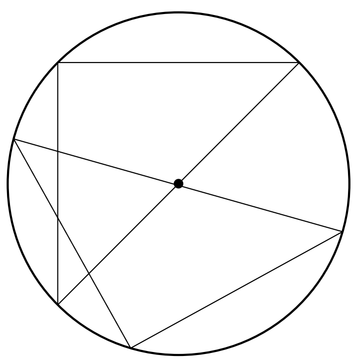



(a) Problema 6.39.

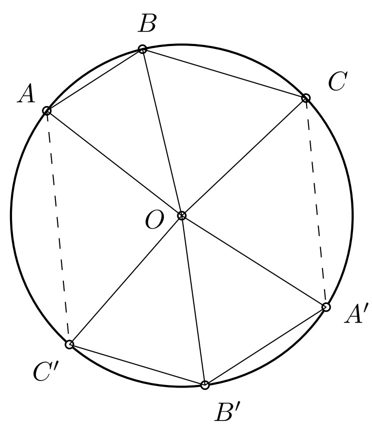



(b) Problema 6.40.

**Fig. 10.70**



(a) Problema 7.1.




(b) Problema 7.3.

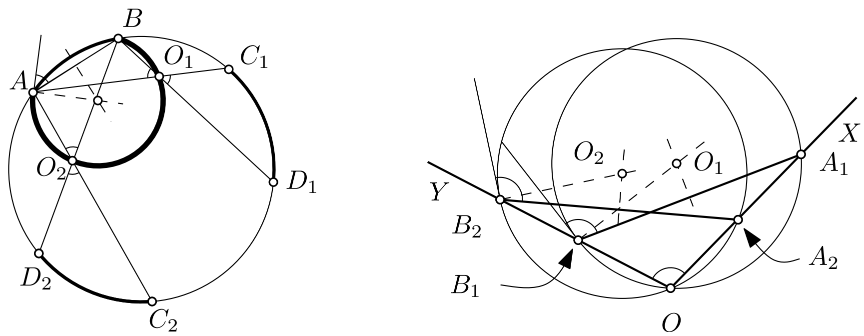
**Fig. 10.71**

$$\measuredangle AOB + \measuredangle AOC' = \measuredangle A'OB' + \measuredangle COA' . \tag{10.12}$$

Sumando y simplificando 10.11 y 10.12, tenemos

$$\measuredangle AOB + \measuredangle BOC = \measuredangle B'OC' + \measuredangle A'OB'$$

por el recíproco del ej. 2, concluimos que $AC'$ es paralelo a $A'C$.



(a) Problema 7.4. (b) Problema 7.5.

**Fig. 10.72**

**7.4** Como los ángulos interiores de vértices $O_1$, $O_2$ abarcan arcos iguales o congruentes, ver Fig. 10.72(a), son iguales. Por tanto, el lugar geométrico es el arco capaz de segmento $AB$ y ángulo $\measuredangle AO_1B$.

**7.5** De la Fig. 10.72(b), se trata de las circunferencias que completan los arcos capaces de ángulo $XOY$ y segmentos $A_1B_1$, $A_2B_2$ congruentes con $AB$, por tanto también lo son los susodichos arcos capaces y las circunferencias que los completan.

**7.6** El cuadrilátero $OABC$ tiene ángulos opuestos suplementarios, ver Fig. 10.73.

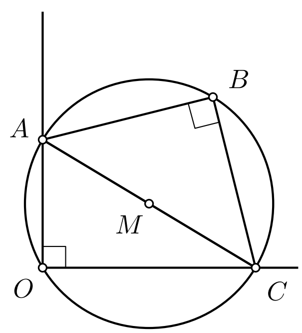



**Fig. 10.73** Problema 7.6.

Por tanto, está inscrito en la circunferencia de centro $M$, punto medio de la hipotenusa y diámetro $AC$ que pasa por el punto fijo $O$. $M$ recorre el cuadrante de radio la mitad de la hipotenusa y centro $O$.

**7.7** Ver Fig. 10.74. En el pentágono $QMOO'N$ la suma de los ángulos interiores es $3 \cdot 180°$

$$\theta + 90° + 2\alpha + 2\beta + 90° = 3 \cdot 180°$$

obtenemos

$$\alpha + \beta = 180^\circ - \frac{\theta}{2}$$

que es constante. Por tanto, $P$ se encuentra en el arco capaz de segmento $MN$ y ángulo $180^\circ - \frac{\theta}{2}$ .

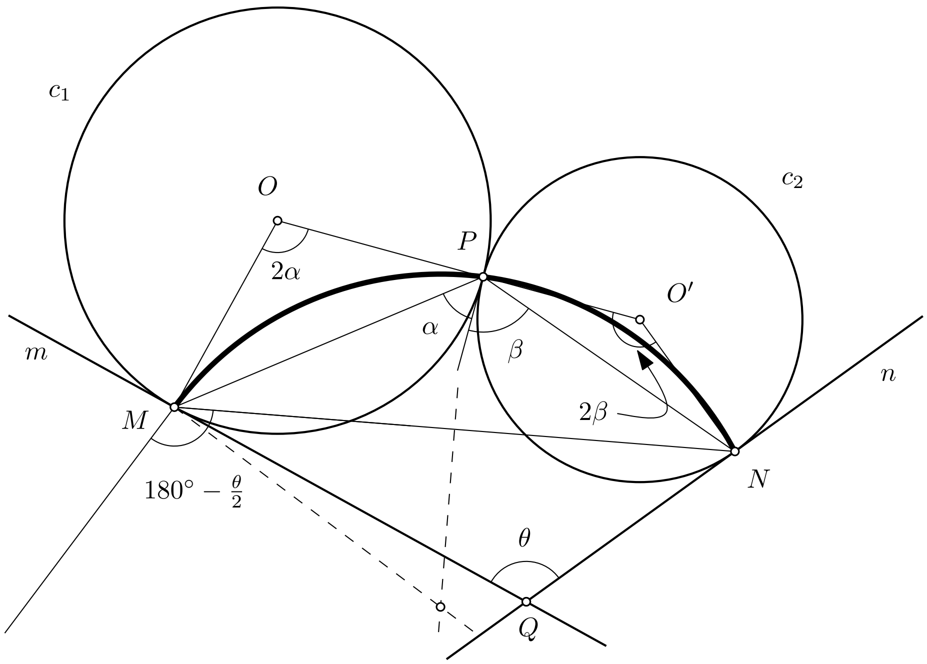



**Fig. 10.74** Problema 7.7.

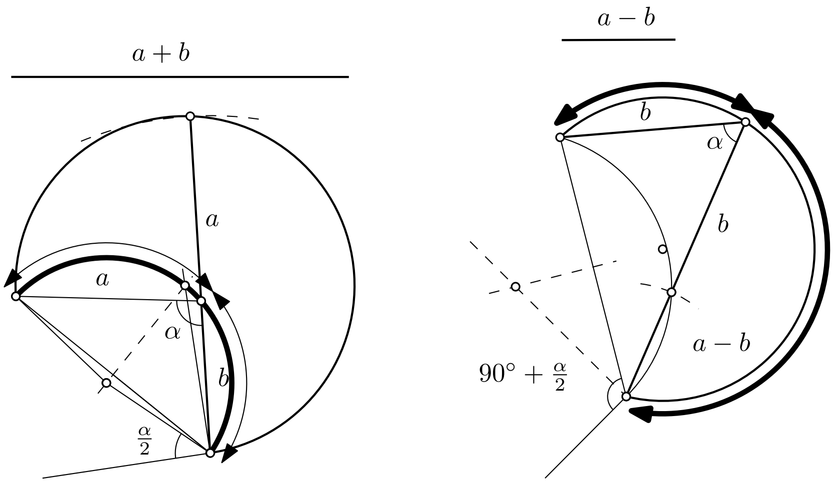
**7.8** Ver Fig. 10.75.

**7.9** El paralelogramo de fuerzas gira en conjunto un ángulo $\theta$ el mismo que $\mathbf{F}_1$ y $\mathbf{F}_2$ con lo que la resultante $\mathbf{R}$ también girará el mismo ángulo. Fig. 10.76(a).

El punto de aplicación de la resultante se encuentra en el arco capaz de extremos los puntos de aplicación de las fuerzas y ángulo el que forman los vectores. Por otra parte, el punto fijo por el que pasa la resultante se encuentra en el arco capaz de extremos los puntos de aplicación de las fuerzas, en el semiplano opuesto, y ángulo el ángulo de giro. Fig. 10.76(b).

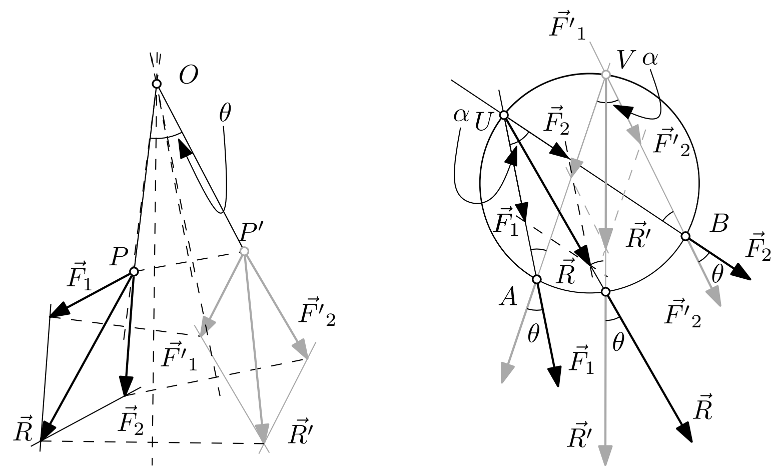
**7.10** Comprobemos que la suma de ángulos opuestos suman un llano, ver Fig. 10.77.

$$\measuredangle BQC = 180^\circ - \frac{\beta + \gamma}{2}$$
$$\measuredangle AND = 180^\circ - \frac{\alpha + \delta}{2}$$




(a) Cuerdas con suma dada. (b) Cuerdas con diferencia dada.

**Fig. 10.75** Problema 7.8.




(a) (b)

**Fig. 10.76** Problema 7.9.

sumando las igualdades

$$\measuredangle BQC + \measuredangle AND = 360^\circ - \frac{\alpha+\beta+\gamma+\delta}{2} = 180^\circ,$$

ya que $\alpha+\beta+\gamma+\delta = 360^\circ$.

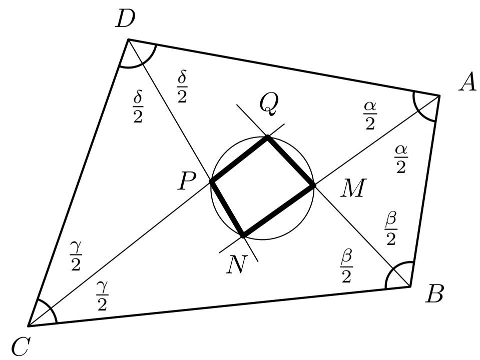



**Fig. 10.77** Problema 7.10.

**7.11** Ver Fig. 10.78. Es una consecuencia del ejercicio siguiente.

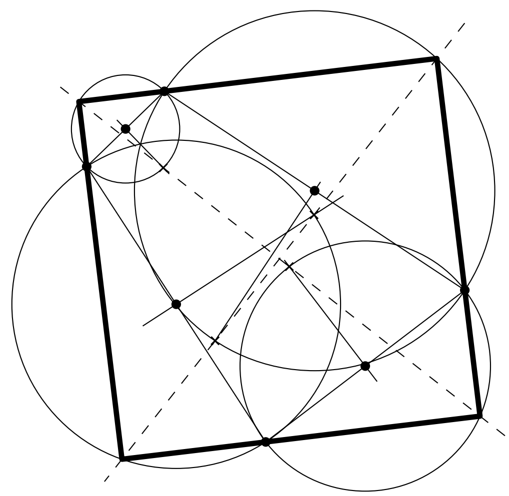


**Fig. 10.78** Problema 7.11.

**7.12** Ver Fig. 10.79. Sean $P$, $Q$, $R$ y $S$ dados así como el ángulo $\alpha$. Los vértices del rombo se encuentran, por ejemplo, $A$ en el arco capaz de segmento $PS$ y ángulo $\alpha$. Por otra parte podemos considerar la diagonal $AT$ como lado del ángulo inscrito $\measuredangle PAT$ en dicho arco capaz y valor $\frac{\alpha}{2}$. Hallando el ángulo central correspondiente, su intersección con la circunferencia que contiene al arco capaz nos proporciona el punto $T$ de dicha diagonal. Procediendo análogamente con los otros tres arcos capaces y hallando las diagonales, sus intersecciones con los arcos capaces nos dan los vértices del rombo y su construcción es trivial.

**7.13** El trapecio debe ser isósceles pues la suma de los ángulos opuestos deber ser un llano, ver Fig. 10.80(a)

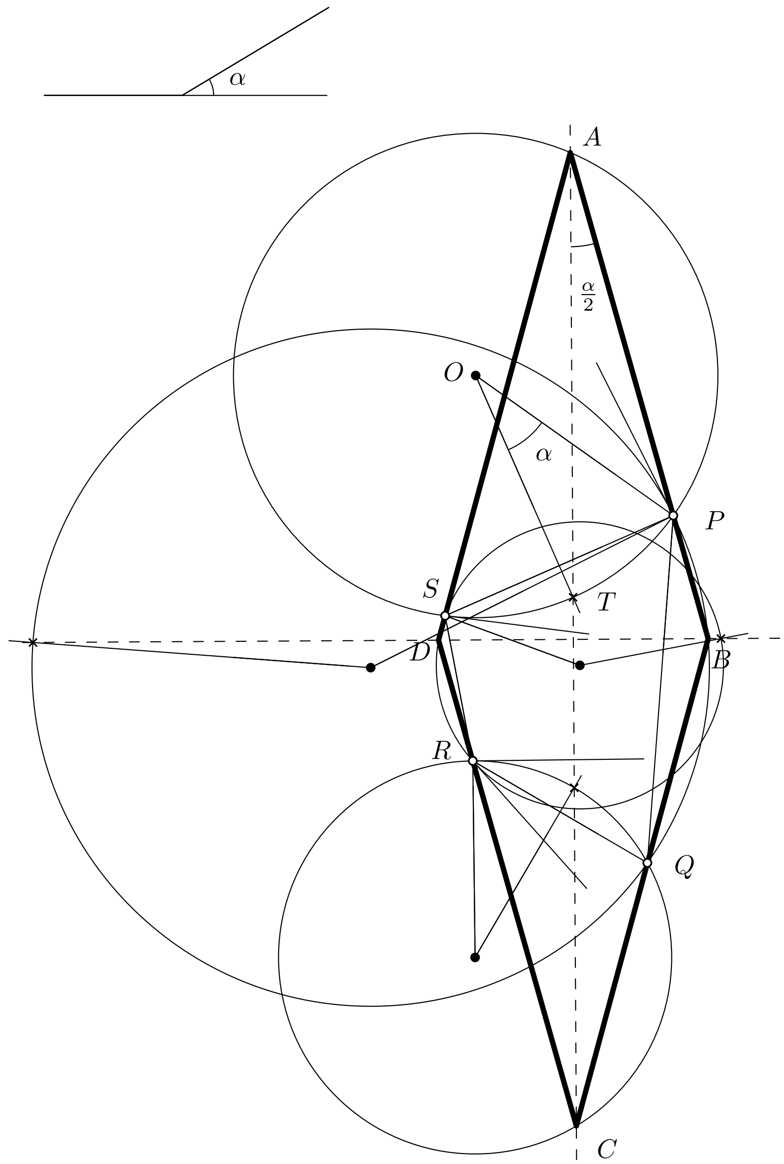
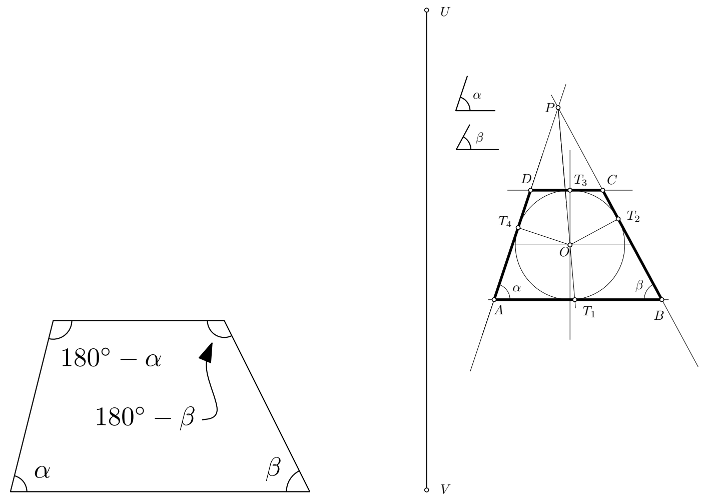



**Fig. 10.79** Problema 7.12.

$$\alpha + 180^\circ - \beta = 180^\circ$$

esto es $\alpha = \beta$ .

**7.14** Por ser el trapecio circunscriptible, ver Fig. 10.80(b)




(a) Problema 7.13. (b) Problema 7.14.

**Fig. 10.80**

$$AT_1 = AT_4 \quad BT_1 = BT_2 \quad CT_2 = CT_3 \quad DT_3 = DT_4$$

por tanto, la suma de las bases es la mitad del perímetro $UV$ y como la paralela media es la mitad de la suma de las bases, resulta ser la cuarta parte del perímetro. Al construir los ángulos $\alpha$ y $\beta$, con la paralela media de lado común, prolongando los otros dos lados obtenemos un triángulo cuya bisectriz en $P$ junto con la paralela media nos proporciona el centro $O$ de la circunferencia inscrita, su radio lo obtenemos con los segmentos de perpendicular desde el centro a los lados del triángulo, obteniendo los otros puntos de tangencia, podemos finalmente construir el trapecio.

**7.15** Ver Fig. 10.81. Tenemos que

$$AT_1 = AT_4 \quad CT_2 = CT_3 \quad BT_1 = BT_2 \quad DT_3 = DT_4$$

de donde

$$\begin{aligned} AB + BC &= AT_1 - BT_1 + BT_2 + CT_2 \\ &= AT_4 - DT_4 + DT_3 + CT_3 \\ &= AD + DB \end{aligned}$$

lo que demuestra la igualdad de la suma de lados concurrentes con la diagonal exterior a diferencia de los cuadriláteros convexos circunscriptibles en que se demuestra la igualdad de la suma de lados opuestos.

**7.16** Se ha tenido en cuenta que $a + c = b + d$, ver Fig. 10.82(a).

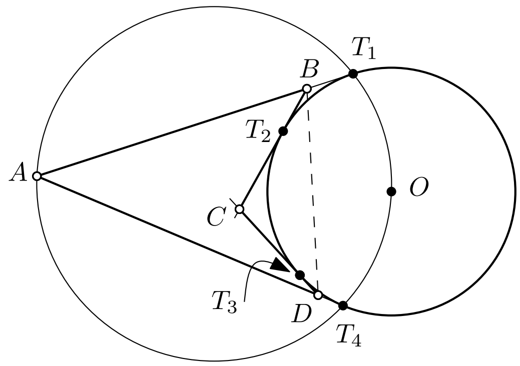
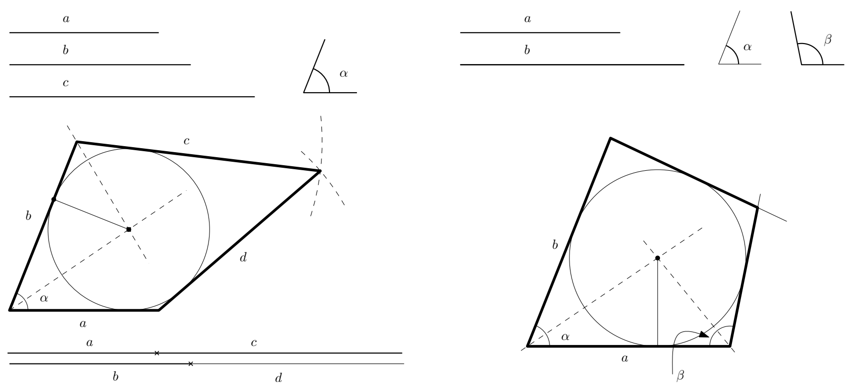



**Fig. 10.81** Problema 7.15.




(a) Problema 7.16.

(b) Problema 7.17

**Fig. 10.82**

**7.17** Ver Fig. 10.82(b).

**7.18** Se construyen los arcos capaces de segmentos $a$ y $b$ y ángulos $\beta_1$ y $\beta_2$ respectivamente, ver Fig. 10.83, la intersección de ambos proporciona el extremo que falta de la diagonal concurrente con los lados dados. Se construye fácilmente el cuadrilátero.

**7.19**

$$\frac{2(n-2)}{n}.$$

**7.20** Ver Fig. 10.84.

**7.21** Si en un vértice concurren $x$ losetas, hemos de buscar las soluciones enteras de

- Si $n = 5$.

$$108^\circ \cdot x = 360^\circ$$

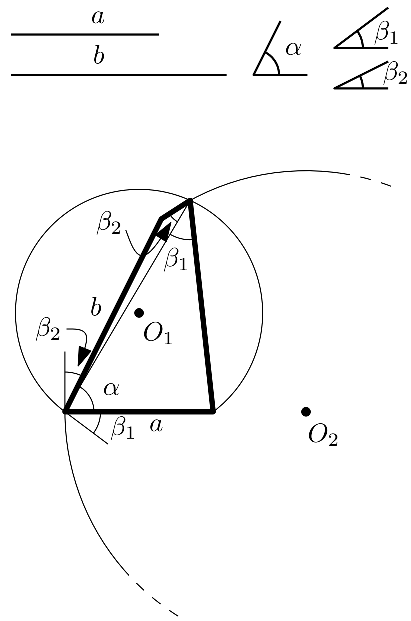



**Fig. 10.83** Problema 7.18.

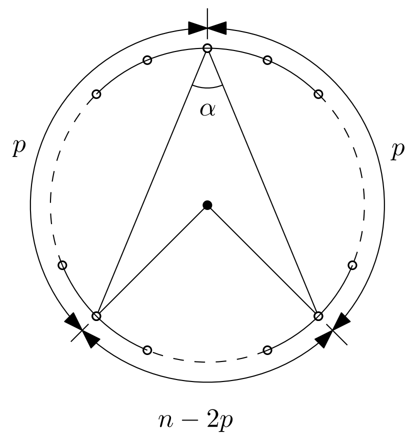



**Fig. 10.84** Problema 7.20. Como el ángulo inscrito es la mitad del ángulo central tenemos que

$$\begin{aligned}\alpha &= \frac{1}{2}\cdot\frac{360^\circ}{n}(n-2p)\\ &= \frac{2(n-2p)}{n}\end{aligned}$$

ángulos rectos.

no tiene soluciones enteras, por tanto, es imposible formar mosaico.

- Si $n=8$,

$$135^\circ\cdot x = 360^\circ$$

tampoco tiene soluciones enteras, imposible formar mosaico.

**7.22** Hemos de buscar las soluciones enteras positivas de las siguientes ecuaciones diofánticas

- *Cuadrados y octógonos.*

$$135^\circ \cdot x + 90^\circ \cdot y = 360^\circ$$

cuya única solución es $x = 2$, $y = 1$, es decir, en un vértice deben concurrir dos octógonos y un cuadrado, ver Fig. 10.85.

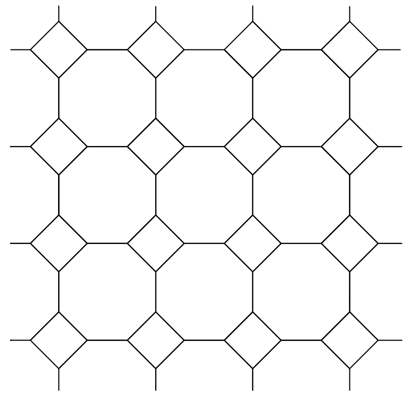


**Fig. 10.85** Problema 7.22.

- *Pentágonos y triángulos equiláteros.*

$$108^\circ \cdot x + 60^\circ \cdot y = 360^\circ$$

no tiene soluciones enteras positivas para $x$ e $y$, por tanto, no podemos formar mosaico combinando pentágonos regulares y triángulos equiláteros.

**7.23** Sea el cuadrado de lado $a$ y diagonal $d = \sqrt{2}a$. Comprobemos que, ver Fig. 10.86, $AB = BC$, tenemos que $BR = a - \frac{d}{2}$ así que

$$BC = \sqrt{2}\left(a - \frac{d}{2}\right) = (\sqrt{2} - 1)a,$$

por otra parte

$$AB = a - 2\left(a - \frac{d}{2}\right) = d - a = (\sqrt{2} - 1)a.$$

Comprobemos que $Q$ pertenece a la circunferencia de centro $O$ y radio $OP = \frac{a}{2}$

$$OQ = OR - QR = \frac{d}{2} - \sqrt{\left(a - \frac{d}{2}\right)^2 - \left(\frac{\sqrt{2}\left(a - \frac{d}{2}\right)}{2}\right)^2}$$
$$= \frac{d}{2} - \frac{1}{\sqrt{2}}\left(a - \frac{d}{2}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}}a - \frac{1}{\sqrt{2}}a + \frac{a}{2} = \frac{a}{2}$$

lo que demuestra que $Q$ se encuentra en dicha circunferencia.

Hallemos $\measuredangle PBQ$, el ángulo $\measuredangle PBQ$ es exterior a la circunferencia, por tanto, su medida es la mitad de la diferencia de los centrales correspondientes a los arcos $PVQ$ y $PUQ$

$$\measuredangle PBQ = \frac{315^\circ - 45^\circ}{2} = 135^\circ$$

lo que asegura que se trata de un octógono regular.

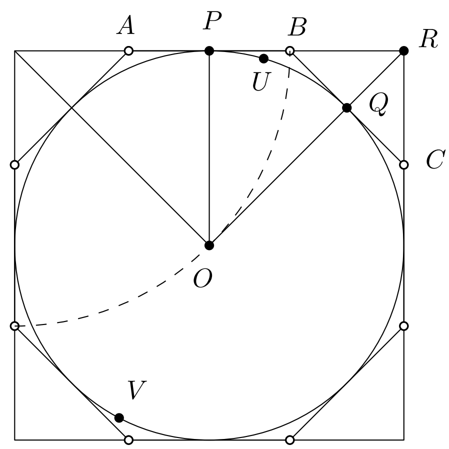



**Fig. 10.86** Problema 7.23.

**7.24**

- *Si* $n = 8$. El único primo con 8 menor que 4 es 3, por tanto, solo hay un octógono estrellado y su especie es 3.
- *Si* $n = 10$. El único primo con 10 menor que 5 es, por tanto, solo hay un decágono estrellado cuya especies es 3.
- *Si* $n = 15$. 2, 4 y 7 son primos con 15 y menores de 15/2, por tanto existen tres pentadecágonos estrellados cuyas especies son, respectivamente, 2, 4 y 7.

**7.25** La fórmula de Gauss es

$$n = 2^p \left(2^{2^{\alpha_1}} + 1\right) \left(2^{2^{\alpha_2}} + 1\right) \dots \left(2^{2^{\alpha_s}} + 1\right)$$

donde $0 \le \alpha_1 < \alpha_2 < \cdots < \alpha_s$.

- $p = 0$
  - $\alpha_1 = 0$, $\boxed{n = 3}$.
    - · $\alpha_2 = 1$, $\boxed{n = 15}$.
      - · $\alpha_3 = 2$, $\boxed{n = 255}$.
    - · $\alpha_2 = 2$, $\boxed{n = 51}$.
  - $\alpha_1 = 1$,—, $\boxed{n = 5}$.
    - · $\alpha_2 = 2$, $\boxed{n = 85}$.
  - $\alpha_1 = 2$, $\boxed{n = 17}$.
  - $\alpha_1 = 3$, $\boxed{n = 257}$.
- $p = 1$
  - $\alpha_1 = 0$, $\boxed{n = 6}$.
    - · $\alpha_2 = 1$, $\boxed{n = 30}$.

- $\cdot \quad \alpha_2 = 2\,,\ \boxed{n = 102}\,.$
- $\alpha_1 = 1\,,\ \boxed{n = 10}\,.$
  - $\cdot \quad \alpha_2 = 2\,,\ \boxed{n = 170}\,.$
- $\alpha_1 = 2\,,\ \boxed{n = 34}\,.$
- $p = 2\,,\ \boxed{n = 4}\,.$
  - $\alpha_1 = 0\,,\ \boxed{n = 12}\,.$
    - $\cdot \quad \alpha_2 = 1\,,\ \boxed{n = 60}\,.$
    - $\cdot \quad \alpha_2 = 2\,,\ \boxed{n = 204}\,.$
  - $\alpha_1 = 1\,,\ \boxed{n = 20}\,.$
  - $\alpha_1 = 2\,,\ \boxed{n = 68}\,.$
- $p = 3\,,\ \boxed{n = 8}\,.$
  - $\alpha_1 = 0\,,\ \boxed{n = 24}\,.$
    - $\cdot \quad \alpha_2 = 1\,,\ \boxed{n = 120}\,.$
  - $\alpha_1 = 1\,,\ \boxed{n = 40}\,.$
  - $\alpha_1 = 2\,,\ \boxed{n = 136}\,.$
- $p = 4\,,\ \boxed{n = 16}\,.$
  - $\alpha_1 = 0\,,\ \boxed{n = 48}\,.$
    - $\cdot \quad \alpha_2 = 1\,,\ \boxed{n = 240}\,.$
  - $\alpha_1 = 1\,,\ \boxed{n = 80}\,.$
  - $\alpha_1 = 2\,,\ \boxed{n = 272}\,.$
- $p = 5\,,\ \boxed{n = 32}\,.$
  - $\alpha_1 = 0\,,\ \boxed{n = 96}\,.$
  - $\alpha_1 = 1\,,\ \boxed{n = 160}\,.$
- $p = 6\,,\ \boxed{n = 64}\,.$
  - $\alpha_1 = 0\,,\ \boxed{n = 192}\,.$
- $p = 7\,,\ \boxed{n = 128}\,.$
- $p = 8\,,\ \boxed{n = 256}\,.$

Salen 37 polígonos inscriptibles de menos de 300 lados.

## Problems of Chapter 8

**8.1** Ver Fig. 10.87. Teniendo en cuenta que $AH = HG = GM_a$ por la lecc. 12§8, tenemos que $BP = PQ = QM_a$ y $M_aS = ST = TC$. Por tanto

$$BQ = \frac{2}{3}BM_a = \frac{2}{3}\frac{a}{2} = \frac{a}{3}$$
$$SC = \frac{2}{3}M_aC = \frac{2}{3}\frac{a}{2} = \frac{a}{3}$$

y

$$QS = a - BQ - SC = a - \frac{a}{3} - \frac{a}{3} = \frac{a}{3}\,.$$

**8.2** Ver Fig. 10.88.

**8.3** Ver Fig. 10.89(a). En primer lugar probemos que para cada par de circunferencias existen dos puntos distintos de intersección, por ejemplo, las circunferencias $c_1$ y $c_2$ se cortan en $B$, si este fuera el único punto de intersección, serían tangentes y, por tanto, $B$ y los correspondientes circuncentros estarían alineados, es decir, los segmentos $AC$ y $DE$ tendrían la misma mediatriz (que pasaría por $B$) y las rectas $AC$ y $DE$ serían paralelas, lo que contradice la definición de cuadrilátero completo.

Por otra parte, supongamos que $M$ es el segundo punto de intersección de $c_1$ y $c_2$, por ser los cuadriláteros $ABMC$ y $DBME$ inscriptibles en las circunferencias

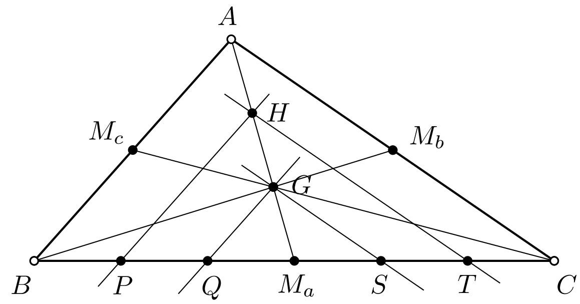



**Fig. 10.87** Problema 8.1.

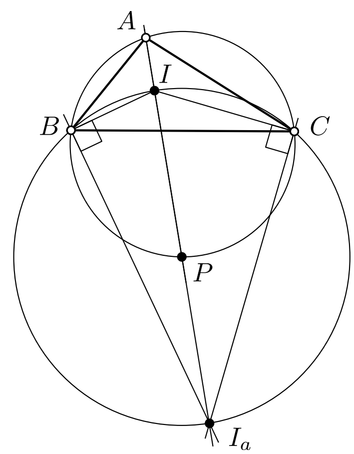



**Fig. 10.88** Problema 8.2. El cuadrilátero $IBI_aC$ es inscriptible y $II_a$ es un diámetro de la circunferencia que lo inscribe, además, por §6, $P$ es el centro de dicha circunferencia. Lo que demuestra lo que queremos probar.

$c_1$ y $c_2$ respectivamente

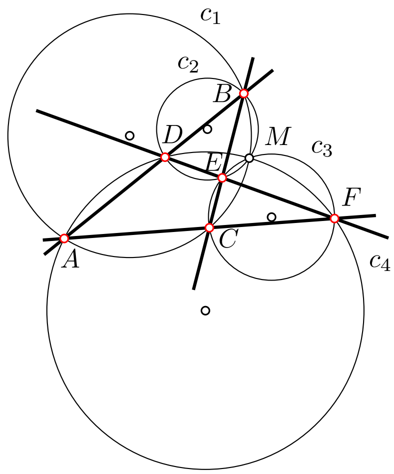
$$\measuredangle BMC = 180^\circ - \measuredangle BAC \tag{10.13}$$
$$\measuredangle BME = 180^\circ - \measuredangle BDE\,.$$

Veamos que $E$, $C$, $M$ y $F$ son concíclicos (están en una misma circunferencia), de la figura se desprende

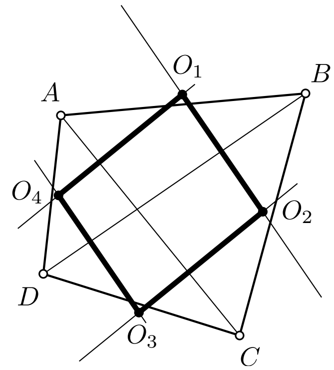
$$\begin{aligned}
\measuredangle EMC &= \measuredangle BMC - \measuredangle BME \\
&= \measuredangle BDE - \measuredangle BAC && \text{(por las ecuaciones 10.13.)} \\
&= \measuredangle DAF + \measuredangle AFD - \measuredangle BAC && (\measuredangle BDE = \measuredangle DAF + \measuredangle AFD) \\
&= \measuredangle EFC && (\text{pues } \measuredangle DAF = \measuredangle BAC \text{ y } \measuredangle AFD = \measuredangle EFC)
\end{aligned}$$

así pues, $M$ y $F$ pertenecen al arco capaz de segmento $EC$, es decir, a la circunferencia circunscrita $c_3$.

Análogamente, probemos que $A$, $D$, $M$ y $F$ son concíclicos, tenemos que




(a) Problema 8.3.




(b) Problema 8.4.

**Fig. 10.89**

$$\begin{aligned} \measuredangle ACB &= 180^\circ - \measuredangle BAC - \measuredangle ABC \qquad (10.14)\\ \measuredangle BED &= 180^\circ - \measuredangle DBE - \measuredangle BDE \end{aligned}$$

que nos permiten probar

$$\begin{aligned} \measuredangle AMD &= \measuredangle AMB - \measuredangle BMD \\ &= \measuredangle ACB - \measuredangle BED \\ &= \measuredangle DBE + \measuredangle BDE - \measuredangle BAC - \measuredangle ABC && \text{(por 10.14.)} \\ &= \measuredangle DAF + \measuredangle AFD - \measuredangle BAC && (\measuredangle BDE = \measuredangle DAF + \measuredangle AFD) \\ &= \measuredangle AFD \end{aligned}$$

lo que concluye la demostración.

**8.4** Pues los segmentos $O_1O_2$ y $O_4O_3$ son paralelos por encontrarse sobre mediatrices paralelas así como los segmentos $O_1O_4$ y $O_2O_3$ por el mismo motivo. Ver Fig. 10.89(b).

**8.5**

Si las circunferencias han de ser tangentes en $A$, ver Fig. 10.90(a), deben estar alineados $A$ y los centros, $O_1$ y $O_2$, de ambas circunferencias, es decir deben ser iguales los ángulos $\alpha$ y $\beta$.

- *Cálculo de* $\alpha$. Tenemos que

$$\measuredangle BV_aA = 180^\circ - \frac{A}{2} - B = A + B + C - \frac{A}{2} - B = \frac{A}{2} + C$$

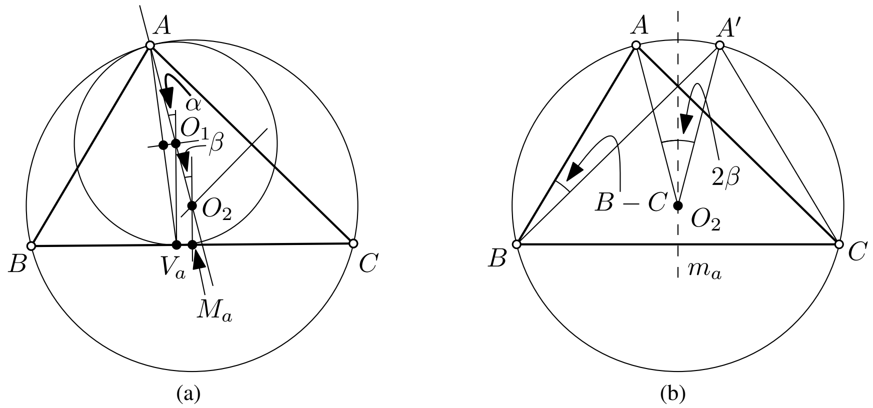



**Fig. 10.90** Problema 8.5.

y

$$\measuredangle AV_aO_1 = 90^\circ - \frac{A}{2} - C\,.$$

Por ser $\alpha$ ángulo exterior del triángulo isósceles $AV_aO_1$ obtenemos

$$\alpha = 2\cdot\left(90^\circ - \frac{A}{2} - C\right) = 180^\circ - A - 2C = A + B + C - A - 2C = B - C\,.$$

- *Cálculo de* $\beta$. Para ello, construimos el simétrico de $ABC$ respecto de la mediatriz $m_a$, ver Fig. 10.90(b). Por las propiedades de los ángulos inscritos y los correspondientes centrales, tenemos

$$2\beta = 2(B-C)$$

de donde

$$\beta = B - C\,.$$

Por ser iguales $\alpha$ y $\beta$, los puntos $A$, $O_1$ y $O_2$ están alineados y , por tanto, las circunferencias son tangentes en $A$.

**8.6** Suponemos que el triángulo $ABC$ es agudo para que el ortocentro sea interior.

Bajo esas simetrías, las rectas $h_a$, $h_b$ y $h_c$ permanecen invariables y los homólogos de $H$ son $H_a'$, $H_b'$ y $H_c'$, ver Fig. 10.91, por ser la simetría axial involutiva, los arcos simétricos concurren en el ortocentro $H$.

**8.7** Ver Fig. 10.92. Supongamos que las circunferencias $c_1$ y $c_2$ tienen a $P$ como segundo punto de intersección. Por ser los cuadriláteros $DAPB$ y $AECP$ inscriptibles tenemos respectivamente

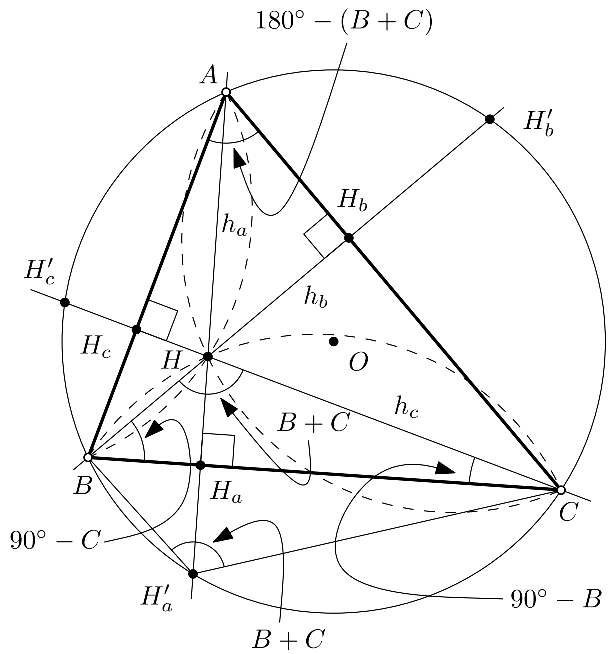



**Fig. 10.91** Problema 8.6.

$$
\begin{aligned}
\measuredangle APB &= 180^\circ - \measuredangle EDF \\
\measuredangle APC &= 180^\circ - \measuredangle DEF
\end{aligned}
\tag{10.15}
$$

Veamos que $B$, $P$, $C$, y $F$ son concíclicos

$$
\begin{aligned}
\measuredangle BPC &= 360^\circ - \measuredangle APB - \measuredangle APC \\
&= \measuredangle EDF + \measuredangle DEF \qquad \text{(por 10.15)} \\
&= 180^\circ - \measuredangle DFE \\
&= 180^\circ - \measuredangle BFC
\end{aligned}
$$

por tanto, $P$ pertenece a $c_3$.

**8.8** Ver Fig. 10.93.

**8.9** Supuestos fijos el lado $BC$ y el ángulo $A$, el lugar geométrico es el arco capaz de segmento $BC$ y ángulo $180^\circ - A$. Ver Fig. 10.94(a).

**8.10** Supuestos fijos el lado $BC$ y el ángulo $A$, el lugar geométrico es el arco capaz de segmento $BC$ y ángulo $90^\circ + \frac{A}{2}$. Ver Fig. 10.94(b).

**8.11** Suponemos dados $BC$ y el ángulo $A$. Ver Fig. 10.95.

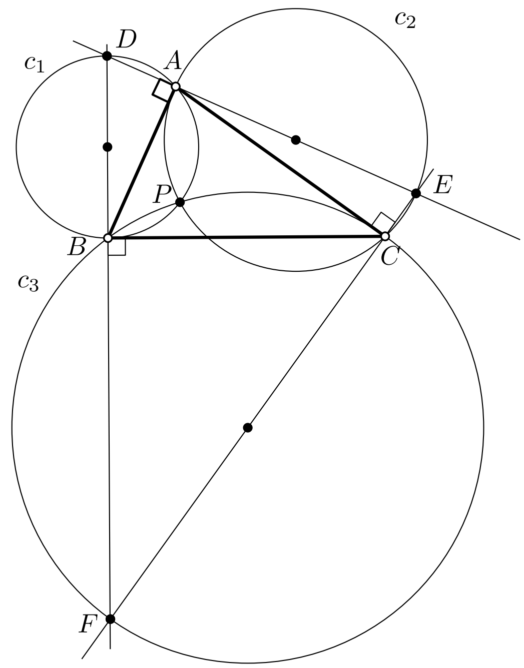



**Fig. 10.92** Problema 8.7.

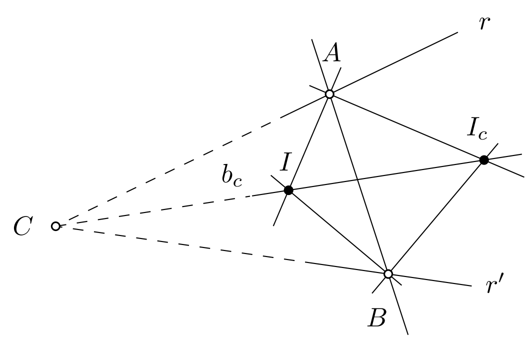



**Fig. 10.93** Problema 8.8. Para construir la bisectriz $b_c$ necesitamos dos puntos suyos como el incentro $I$ proporcionado por la intersección de las bisectrices de los ángulos colaterales internos y el exincentro $I_c$ por la intersección de las bisectrices de los ángulos colaterales externos.

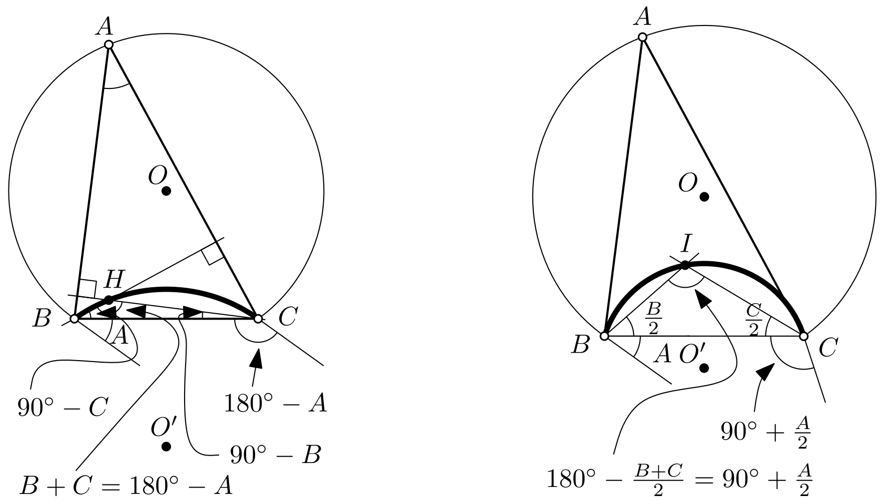
**8.12** Ver ej. 10 y 11, la Fig. 10.96 y construyendo las circunferencias inscritas y exinscritas.

**8.13** Ver Fig. 10.97(a).

**8.14** Ver Fig. 10.97(b).

**8.15** Ver Figs. 10.97(c) y 10.97(d).

**8.16** Con hallar un solo vértice resolvemos el problema. Si el número de lados es impar, se puede demostrar que, ver Fig. 10.98




(a) Problema 8.9. (b) Problema 8.10.

**Fig. 10.94**

$$A_1 = M_1 + \overrightarrow{M_2M_3} + \overrightarrow{M_4M_5} + \overrightarrow{M_6M_7} + \cdots + \overrightarrow{M_{2n-2}M_{2n-1}} + \overrightarrow{M_{2n}M_{2n+1}}$$

pues

$$\begin{aligned} M_1 + \overrightarrow{M_2M_3} + \overrightarrow{M_4M_5} + \overrightarrow{M_6M_7} + \cdots + \overrightarrow{M_{2n-2}M_{2n-1}} + \overrightarrow{M_{2n}M_{2n+1}} \\ = M_1 - M_2 + M_3 - M_4 + M_5 - \cdots + M_{2n-1} - M_{2n} + M_{2n+1} \\ = \frac{A_1+A_2}{2} - \frac{A_2+A_3}{2} + \frac{A_3+A_4}{2} - \cdots - \frac{A_{2n}+A_{2n+1}}{2} + \frac{A_{2n+1}+A_1}{2} \\ = A_1 \end{aligned}$$

Para responder la última pregunta usaremos el Álgebra Lineal, tenemos que para un polígono de $n$ lados

$$\left.\begin{aligned} A_1 + A_2 &= 2M_1 \\ A_2 + A_3 &= 2M_2 \\ A_3 + A_4 &= 2M_3 \\ \cdots &= \cdots \\ A_{n-1} + A_n &= 2M_{n-1} \\ A_n + A_1 &= 2M_n \end{aligned}\right\}$$

el determinante de la matriz de los coeficientes es

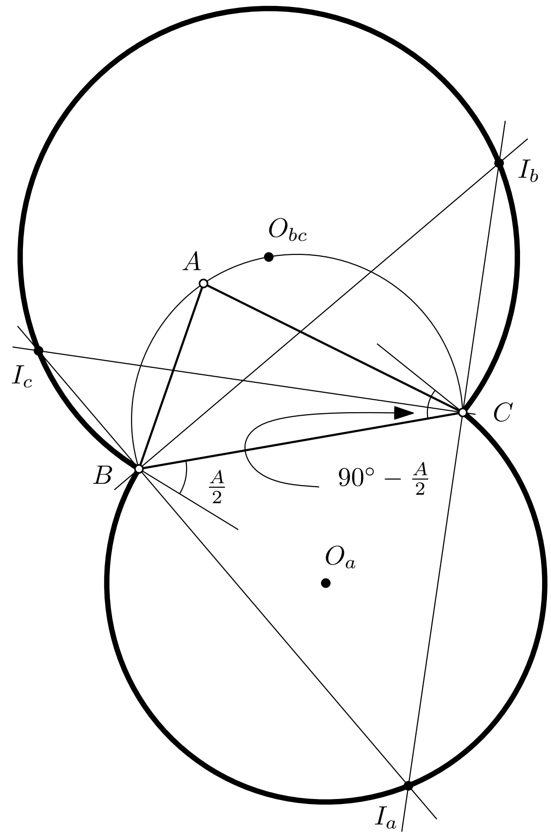


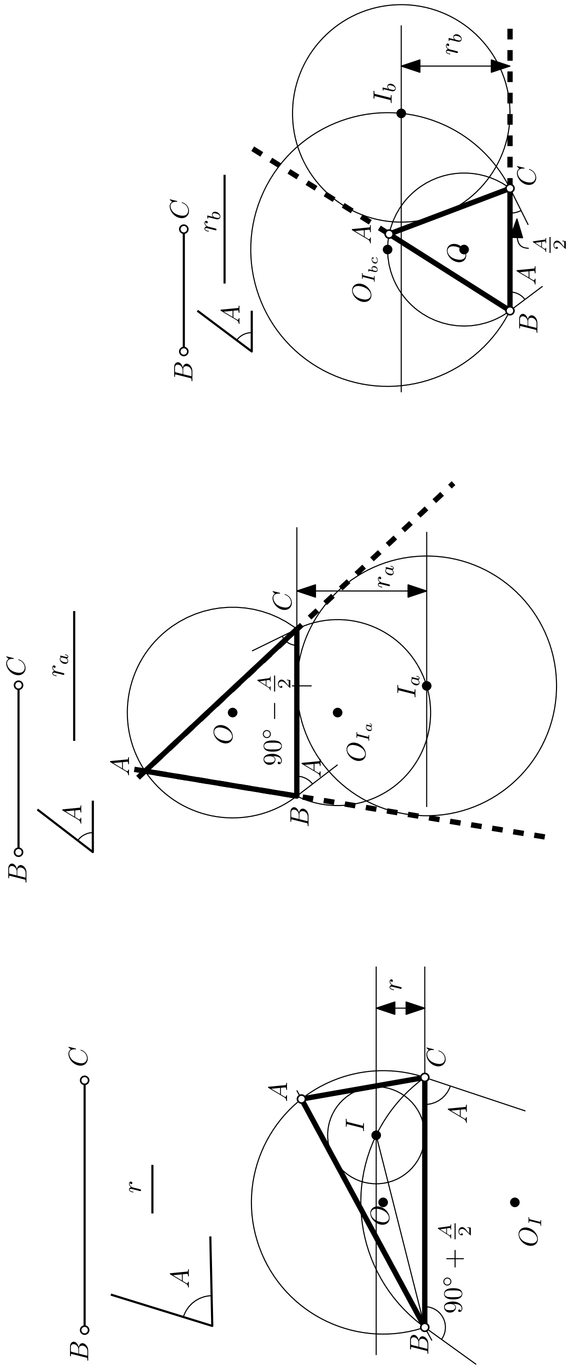

**Fig. 10.95** Problema 8.11. $I_a$ se encuentra en el arco capaz de segmento $BC$ y ángulo $90^\circ - \frac{A}{2}$ situado en el semiplano que no contiene $A$. $I_b$ y $I_c$ se encuentran en el arco capaz de segmento $BC$ y ángulo $\frac{A}{2}$ situado en el semiplano que contiene $A$.

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 + (-1)^{n+1} = \begin{cases} 2 & \text{si } n \text{ es impar} \\ 0 & \text{si } n \text{ es par} \end{cases}$$

En consecuencia, si $n$ es impar la matriz de los coeficientes es no singular teniendo siempre una única solución, si $n$ es par la matriz de los coeficientes es singular y por tanto el sistema puede ser incompatible o compatible indeterminado lo que implica que no hay solución o hay infinitas soluciones respectivamente.

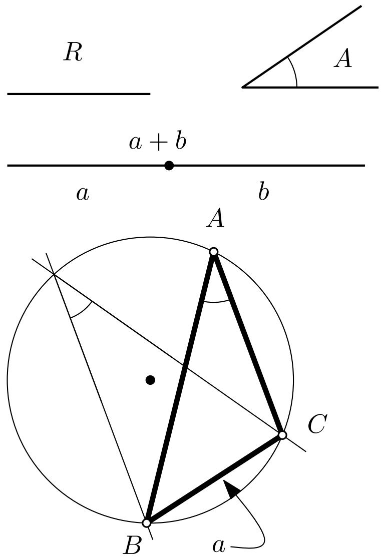
**8.17** Ver Fig. 10.99(a). Es una consecuencia de la recta de Simson, §10, pues cada uno de los puntos medios de los arcos $BC$, $P$ y $P'$ se proyectan perpendicularmente en el punto medio $T$ del lado $BC$ del triángulo.

**8.18** Ver Fig. 10.99(b). Se tiene que $\measuredangle I_b I_a I_c = 90^\circ - \frac{A}{2} < 90^\circ$, lo mismo podemos asegurar de los otros dos ángulos.

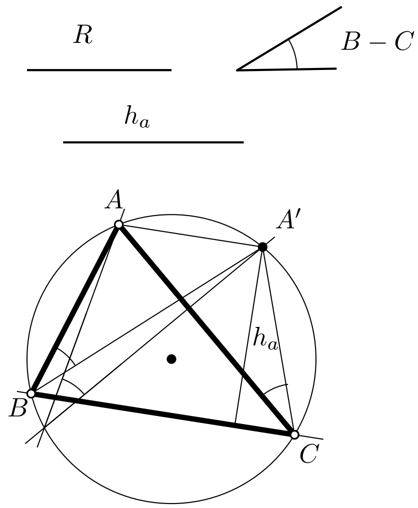



(a) Conocido $r$. (b) Conocido $r_a$. (c) Conocido $r_b$.

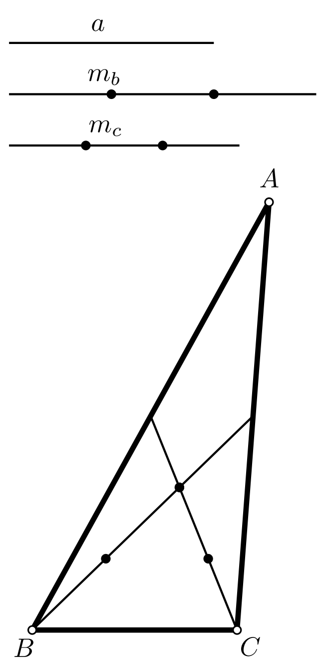
**Fig. 10.96** Problema 8.12.



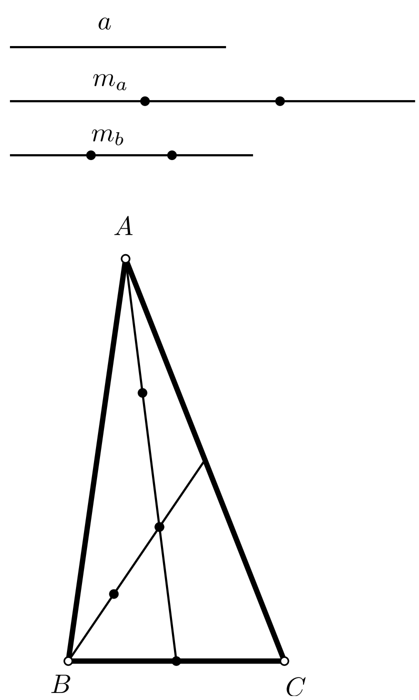

(a) Problema 8.13. Se inscribe el ángulo $A$ en la circunferencia circunscrita, lo que nos proporciona la cuerda que coincide con el lado $a$, restándolo de $a+b$, obtenemos el lado $b$ transportándolo a la circunferencia circunscrita a continuación de $a$, se completa el triángulo.




(b) Problema 8.14. Se inscribe el ángulo $B-C$ en la circunferencia circunscrita lo que nos proporciona la cuerda $AA'$. Como construir el triángulo $ABC$ buscado es equivalente a construir el trapecio isósceles $AA'CB$ obtenido por simetria respecto de la mediatriz $m_a$ del triángulo, se completa la figura.

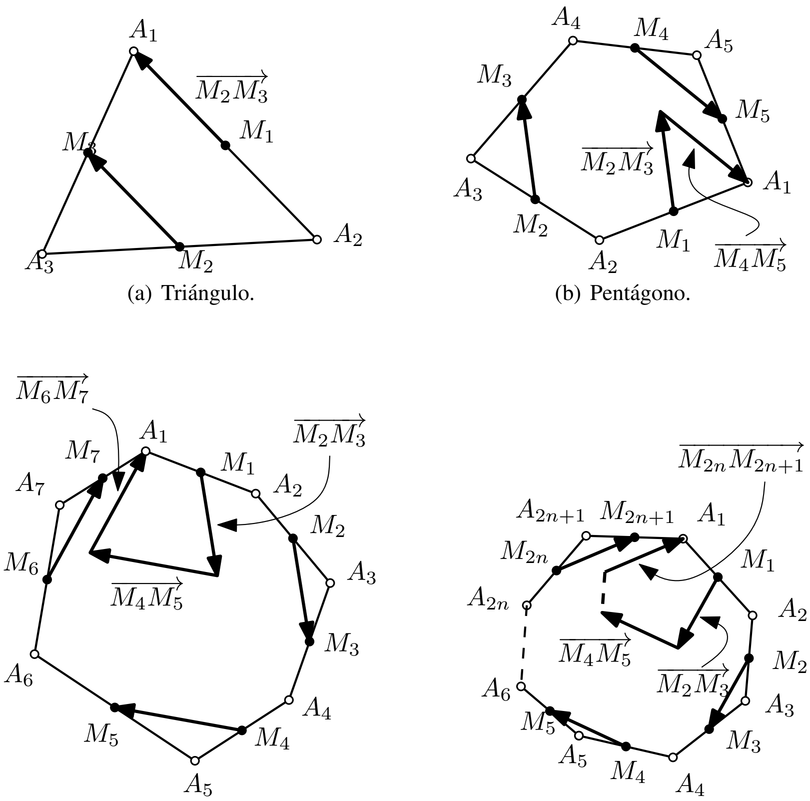



(c) Problema 8.15.




(d) Problema 8.15.

**Fig. 10.97**




(a) Triángulo. (b) Pentágono.

(c) Heptágono. (d) Polígono de $2n+1$ lados.

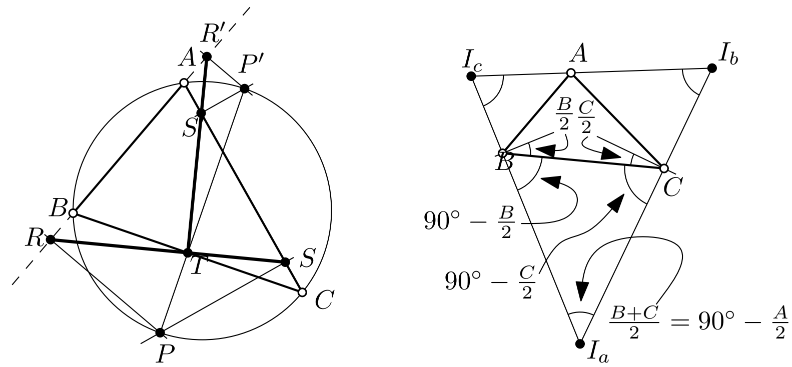
**Fig. 10.98** Problema 8.16.

**8.19** Ver Fig. 10.100. Empezamos por construir la recta de Simson $s$, los ángulos $\measuredangle PDC$ y $\measuredangle PCE$ son rectos y los cuatro puntos son concíclicos, circunferencia a trazos, asimismo $\measuredangle PCE = \measuredangle PCA = \measuredangle PH'A = \measuredangle H'PD$ y por tanto el triángulo $GPD$ es isósceles lo que implica que $GP = DG$. Por ser $\measuredangle FGD$ exterior a $PGD$ tenemos $\measuredangle GFD = \measuredangle GDF$ de donde $DG = FG$ y por tanto $PG = GF$.

Por otra parte, por el ej. 8.6, $\measuredangle A'H'F = \measuredangle A'HF$ lo que implica que $HF$ y $s$ son paralelos.

Por ser $s$ paralela media de $HFP$, $S$ es el punto medio de $HP$ y por ser los triángulos rectángulos $PUS$ y $HVS$ congruentes tenemos que $HV = UP$ que es lo que queríamos obtener.

Demostración adaptada de
`mathforum.org/library/drmath/view/61688.html`.




(a) Problema 8.17. (b) Problema 8.18.

**Fig. 10.99**

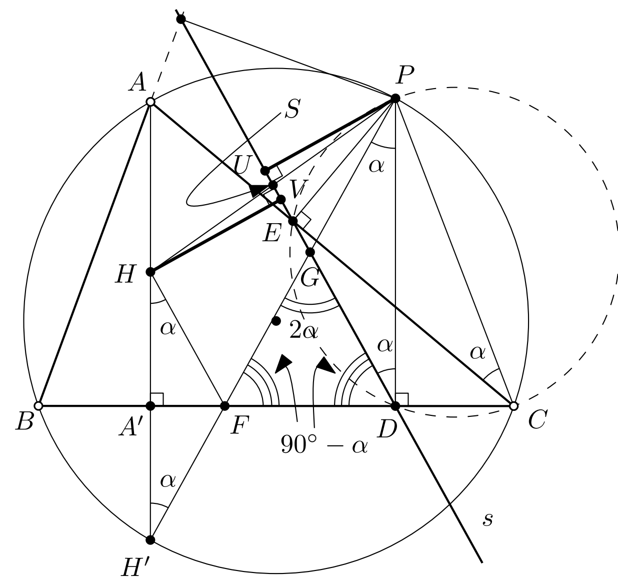



**Fig. 10.100** Problema 8.19.

## Problems of Chapter 9

**9.1** Suponemos

$$\frac{a}{b} = \frac{m}{n}$$

distinguimos conocida la suma y conocida la diferencia.

- *Suma.* Como

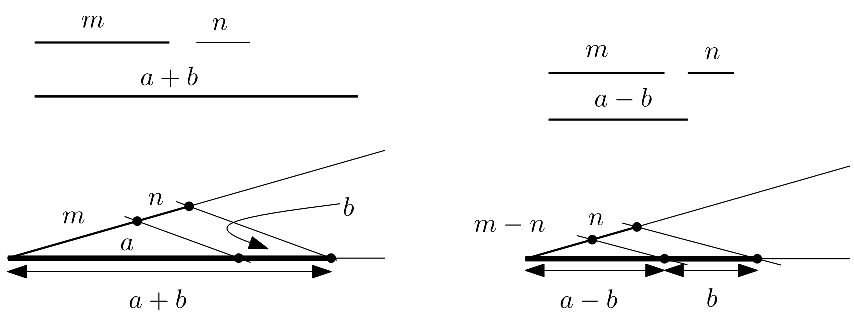
$$\frac{a}{b} = \frac{m}{n} \iff \frac{a+b}{b} = \frac{m+n}{n}$$

ver Fig. 10.101(a).

- *Diferencia.* Como

$$\frac{a}{b} = \frac{m}{n} \iff \frac{a-b}{b} = \frac{m-n}{n}$$

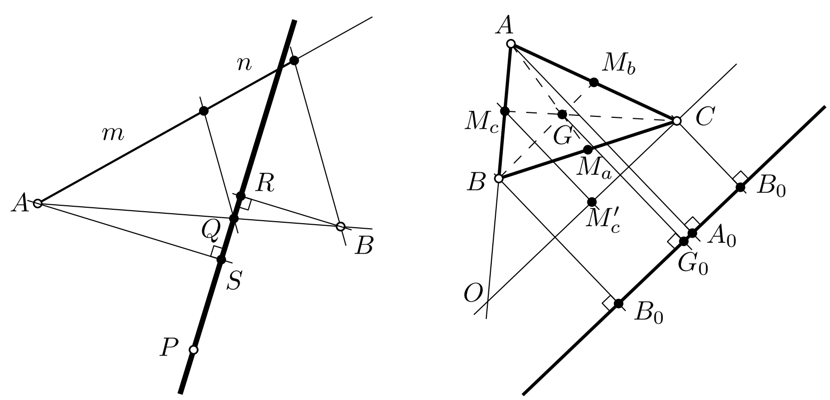
ver Fig. 10.101(b).




(a) Conocida la suma.

(b) Conocida la diferencia.

**Fig. 10.101** Problema 9.1.




(a) Problema 9.2.

(b) Problema 9.3.

**Fig. 10.102**

**9.2** Queremos hallar por un punto $P$ una recta cuya razón de distancias a dos puntos dados, $A$ y $B$, sea conocida ($m : n$). Ver Fig. 10.102(a).

Trazamos un par de secantes por $A$ una de ellas pasando por el punto $B$. Sobre la otra secante y a partir de $A$ yuxtaponemos dos segmentos de medidas $m$ y $n$, aplicamos el teorema de Thales trazando paralelas por los extremos de $m$ y $n$ que intersectan la otra secante en los puntos $Q$ y $B$ por lo que

$$\frac{AQ}{QB} = \frac{m}{n}.$$

La recta buscada es la $PQ$ pues al trazar las perpendiculares a esta por $A$ y $B$ por la §2, tenemos

$$\frac{AS}{RB} = \frac{AQ}{QB} = \frac{m}{n},$$

lo que resuelve el problema.

**9.3** De la Fig. 10.102(b), tenemos

$$\frac{M_cM_c'}{BB_0 - CC_0} = \frac{OM_c}{OB} = \frac{OB + \frac{1}{2}AB}{OB} = 1 + \frac{1}{2}\frac{AB}{OB} \tag{10.16}$$

$$\frac{M_cM_c'}{AA_0 - CC_0} = \frac{OM_c}{OA} = \frac{OB + \frac{1}{2}AB}{OB + AB} \tag{10.17}$$

Dividiendo 10.16 entre 10.17, tenemos

$$\frac{AA_0 - CC_0}{BB_0 - CC_0} = 1 + \frac{AB}{OB}.$$

Por otra parte, tenemos

$$\frac{AB}{OB} = \frac{AO - BO}{OB} = \frac{AO}{OB} - 1 = \frac{AA_0 - CC_0}{BB_0 - CC_0} - 1 = \frac{AA_0 - BB_0}{BB_0 - CC_0}$$

sustituyendo en 10.16, tenemos

$$\frac{M_cM_c'}{BB_0 - CC_0} = 1 + \frac{1}{2}\frac{AA_0 - BB_0}{BB_0 - CC_0}$$

de donde

$$M_cM_c' = BB_0 - CC_0 + \frac{1}{2}AA_0 - \frac{1}{2}BB_0 = \frac{AA_0}{2} + \frac{BB_0}{2} - CC_0. \tag{10.18}$$

De la Fig. 10.102(b), tenemos

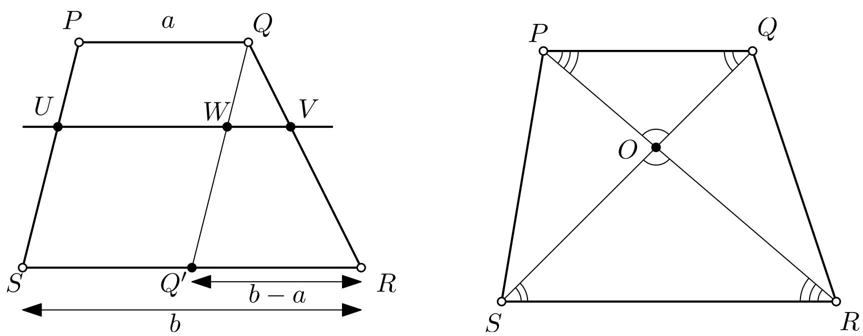
$$\frac{GG_0 - CC_0}{M_cM_c'} = \frac{GC}{M_cC} = \frac{2}{3}$$

de donde

$$GG_0 = CC_0 + \frac{2}{3}M_cM_c' \tag{10.19}$$

sustituyendo 10.18 en 10.19 obtenemos finalmente

$$GG_0 = CC_0 + \frac{2}{3} M_c M_c' = \frac{AA_0 + BB_0 + CC_0}{3}.$$




(a) Problema 9.4. Por hipótesis $\frac{QV}{VR} = \frac{m}{n}$, además $\frac{WV}{Q'R} = \frac{QV}{QR} = \frac{m}{m+n}$ de donde $WV = \frac{m}{m+n}(b-a)$ y la longitud pedida es $UV = a + \frac{m}{m+n}(b-a) = \frac{na+mb}{m+n}$. Si se trata de un triángulo se reduce a $UV = \frac{m}{m+n} b$.

(b) Problema 9.5. Por tener los triángulos $POQ$ y $ROS$ los mismos ángulos $\frac{PQ}{RS} = \frac{OP}{OR} = \frac{OQ}{OS}$.

**Fig. 10.103**

**9.4** Ver Fig. 10.103(a).

**9.5** Ver Fig. 10.103(b).

**9.6** De la Fig. 10.104(a)

$$\frac{AO}{PQ} = \frac{OS}{QS} = \frac{SR}{SR+PQ} \quad \text{(por el problema anterior)}$$
$$\frac{OB}{PQ} = \frac{OR}{RP} = \frac{SR}{SR+PQ} \quad \text{(ídem)}$$

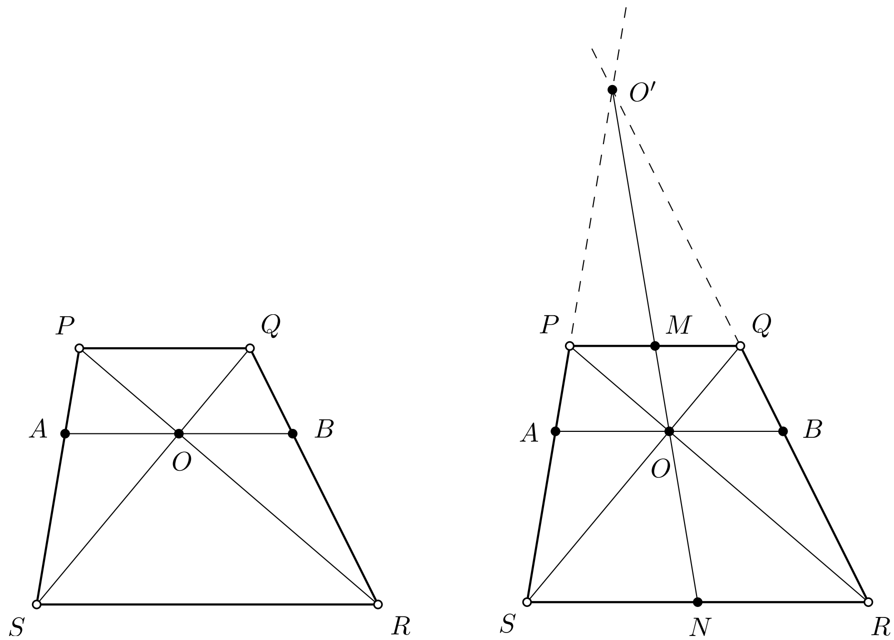
de donde $AO = OB$, por tanto, $O$ es el punto medio del segmento $AB$.

Si $PQ = a$ y $RS = b$, tenemos

$$AB = 2a \cdot \frac{b}{b+a} = \frac{2ab}{a+b} = \frac{2}{\frac{1}{a} + \frac{1}{b}} \quad \text{(media armónica)}$$

**9.7** De la Fig. 10.104(b) y teniendo en cuenta que $AO = OB$, tenemos

$$\frac{PM}{AO} = \frac{MO'}{OO'} = \frac{MQ}{OB} \quad \text{de donde} \quad PM = MQ$$




(a) Problema 9.6. (b) Problema 9.7.

**Fig. 10.104**

$$\frac{SN}{AO} = \frac{NO'}{OO'} = \frac{NR}{OB} \quad \text{de donde} \quad SN = NR$$

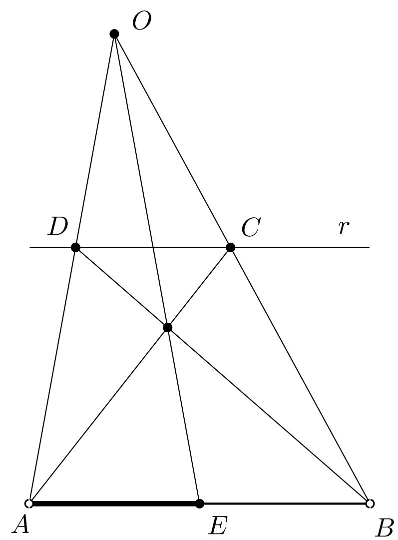
y $M$ y $N$ son los puntos medios de $PQ$ y $RS$ respectivamente.

Si $PQ = a$ y $RS = b$, tenemos

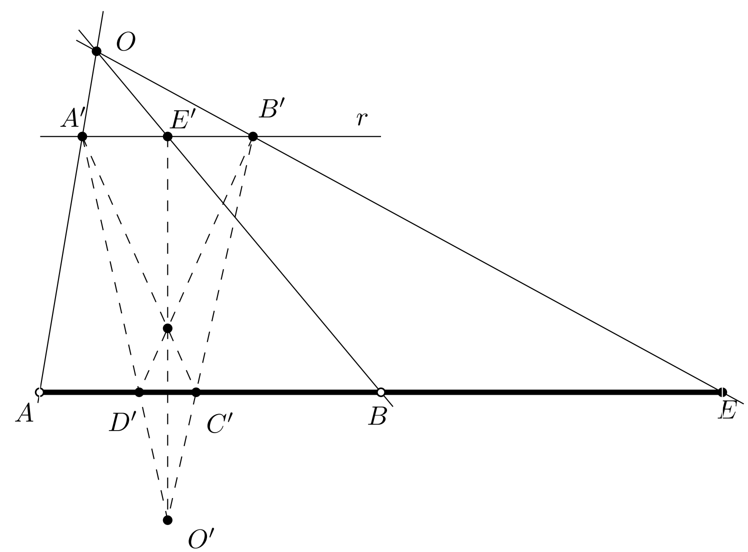
$$\begin{aligned}
\frac{OM}{ON} &= \frac{OO' - MO'}{O'N - OO'} = \frac{1 - \frac{MO'}{OO'}}{\frac{O'N}{OO'} - 1} = \frac{1 - \frac{PM}{AO}}{\frac{SN}{AO} - 1} \\
&= \frac{1 - \frac{\frac{a}{2}}{\frac{ab}{a+b}}}{\frac{\frac{b}{2}}{\frac{ab}{a+b}} - 1} = \frac{\frac{ab}{a+b} - \frac{a}{2}}{\frac{b}{2} - \frac{ab}{a+b}} = \frac{2ab - a(a+b)}{b(a+b) - 2ab} \\
&= \frac{ab - a}{b - ab} = \frac{a(b-a)}{b(b-a)} = \frac{a}{b} \\
\frac{O'M}{O'N} &= \frac{PM}{SN} = \frac{\frac{a}{2}}{\frac{b}{2}} = \frac{a}{b}
\end{aligned}$$

por lo que el par $OO'$ está armónicamente separado por el par $MN$.

**9.8**



(a) Bisección del segmento $AB$.



(b) Duplicación del segmento $AB$.

**Fig. 10.105** Problema 9.8.

- *Bisección.* Ver Fig. 10.105(a). Para bisectar el segmento $AB$ tomamos otro $CD$ sobre la recta $r$ y construimos el trapecio $ABCD$ la prolongación de sus lados intersecta en $O$ y trazamos la recta que pasa por este punto y la intersección de las diagonales. La intersección de esta con la recta $AB$ nos proporciona el punto $E$, punto medio del segmento $AB$.
- *Duplicación.* Ver Fig. 10.105(b). Para duplicar el segmento $AB$, tomamos un segmento $A'B'$ sobre la recta $r$ y lo bisecamos según el procedimiento anterior siendo $E'$ su punto medio. Uniendo este con $B$ y $A$ con $A'$ obtenemos el punto $O$ de la intersección de ambas rectas, uniendo $O$ con $B'$ y prolongando el segmento $AB$ encontramos el punto $E$ que nos resuelve el problema.

**9.9** Ver Fig. 10.106. Para trisectar y triplicar el segmento $AD$ tomamos el segmento $A'C'$ sobre la recta $r$ y lo bisecamos con lo que obtenemos el punto $B'$, posteriormente duplicamos el segmento $B'C'$ con lo que obtenemos el punto $D'$. Así pues, el segmento $A'D'$ queda dividido en tres segmentos iguales. Por la §9 del texto tomando centros de proyección $O$ y $O'$ podemos trisectar y triplicar, respectivamente el segmento $AD$.

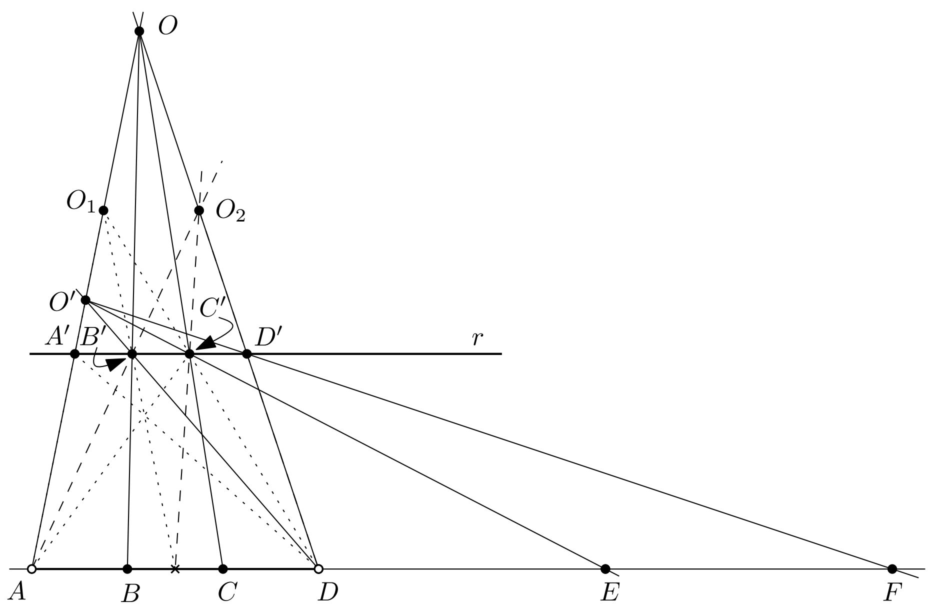
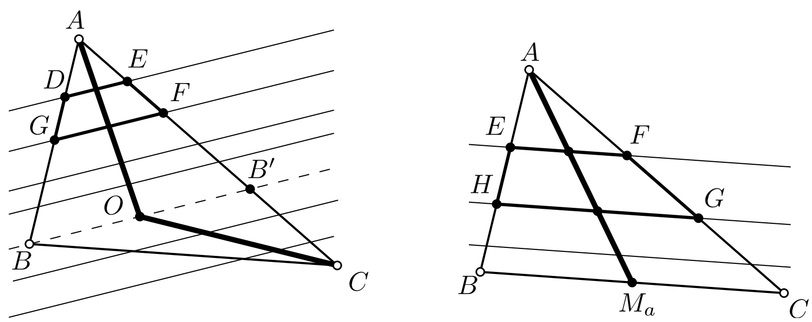



**Fig. 10.106** Problema 9.9.

Si queremos dividir o multiplicar el segmento $AD$ por un número natural, debemos tomar un segmento arbitrario sobre la recta $r$ y bisectarlo, después duplicamos una de sus partes y obtenemos tres segmentos iguales yuxtapuestos. Si duplicamos uno de los segmentos de los extremos obtenemos otro segmento igual a los anteriores y yuxtapuesto a ellos, podemos reiterar el procedimiento el número de veces necesario para que al aplicar el teorema de la §9 podamos dividir o multiplicar al segmento $AD$ el número de veces pedido.




(a) Sistema de paralelas no paralelas a los lados.

(b) Sistema de paralelas paralelas a uno de los lados.

**Fig. 10.107** Problema 9.10.

**9.10**

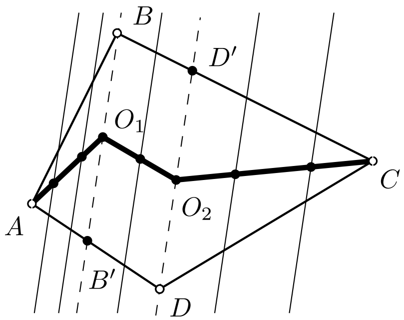
- *Sistema de paralelas no paralelas a los lados.* Ver Fig. 10.107(a). Por el trapecio $DEFG$ y el ej. 9.7 el lugar geométrico es la quebrada desde $A$ hasta $O$, punto medio del segmento $BB'$, y desde este punto hasta $C$.
- *Sistema de paralelas paralelas a uno de los lados.* Ver Fig. 10.107(b). El lugar geométrico es el segmento de mediana desde $A$ hasta $M_a$.

**9.11** Consecuencia de los ej. 7 y 10. Ver Fig. 10.108.

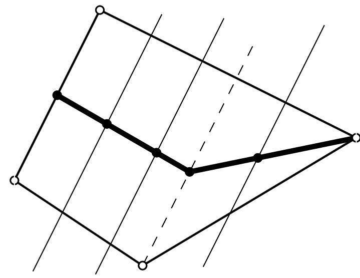
**9.12** Ver Fig. 10.109. En el caso de un polígono de $n$ lados se trata de una poligonal de $n-1$ lados como máximo con origen en un vértice del polígono y final en otro si el sistema de paralelas no son paralelas a alguno de los lados. En caso contrario, la poligonal tiene como máximo $n-2$ lados con origen en el punto medio del lado paralelo al sistema de paralelas y final en un vértice.

**9.13** Ver Fig. 10.110. Trazamos por $P$ paralelas a $r$ y $s$ que interceptan a la otra recta en los puntos $B$ y $A$ respectivamente. $AB$ es la diagonal del paralelogramo $OAPB$ por cuyo punto medio $M$ pasará la otra diagonal, lo que resuelve el problema.

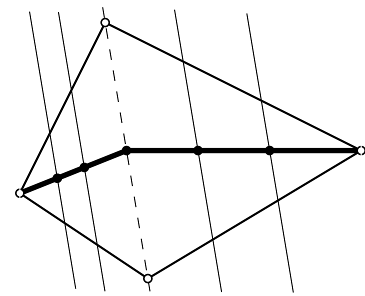
Cabe notar que la paralela a la diagonal $AB$ por $P$ intercepta un segmento cuyos extremos $C$ y $D$ se encuentran sobre las rectas $s$ y $r$ respectivamente. Por el ej. 9.7, este segmento es bisecado por $P$, lo que conduce a otra solución para el ej. 5.5.



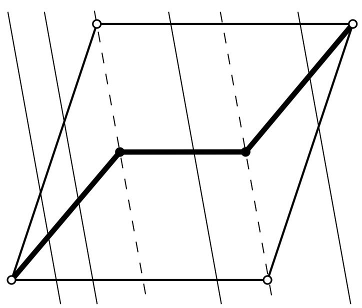

(a) Cuadrilátero. Sistema de paralelas no paralelas a los lados ni a las diagonales.



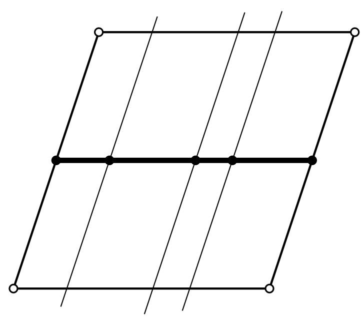
(b) Cuadrilátero. Sistema de paralelas paralelas a uno de sus lados.



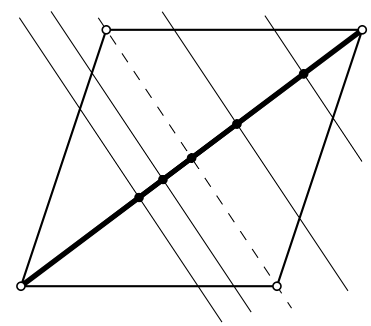
(c) Cuadrilátero. Sistema de paralelas paralelas a una de sus diagonales.



(d) Paralelogramo. Sistema de paralelas no paralelas a los lados ni a las diagonales.

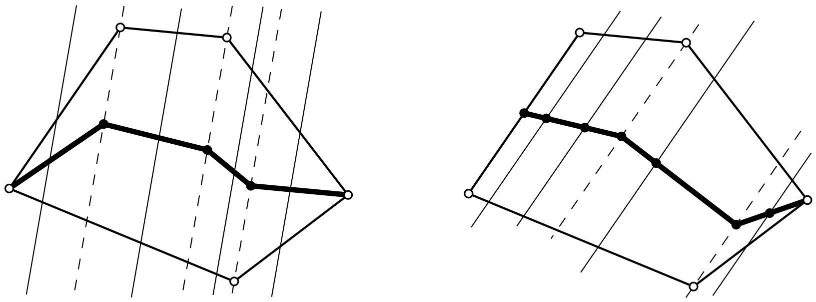


(e) Paralelogramo. Sistema de paralelas paralelas a uno de sus lados.



(f) Paralelogramo. Sistema de paralelas paralelas a una de sus diagonales.

**Fig. 10.108** Problema 9.11.



(a) Polígono. Sistema de paralelas no paralelas a los lados.

(b) Polígono. Sistema de paralelas paralelas a uno de los lados.

**Fig. 10.109** Problema 9.12.

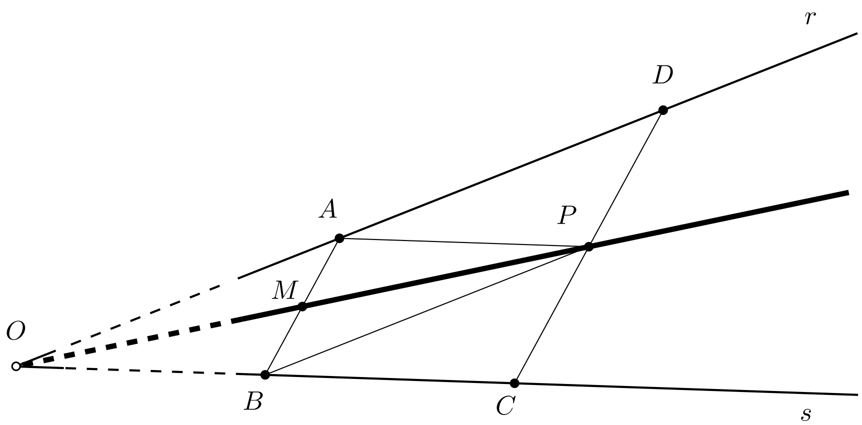



**Fig. 10.110** Problema 9.13.

## Problems of Chapter 10

**10.1** Ver Fig. 10.111(a).

**10.2** Ver Fig. 10.111(b).

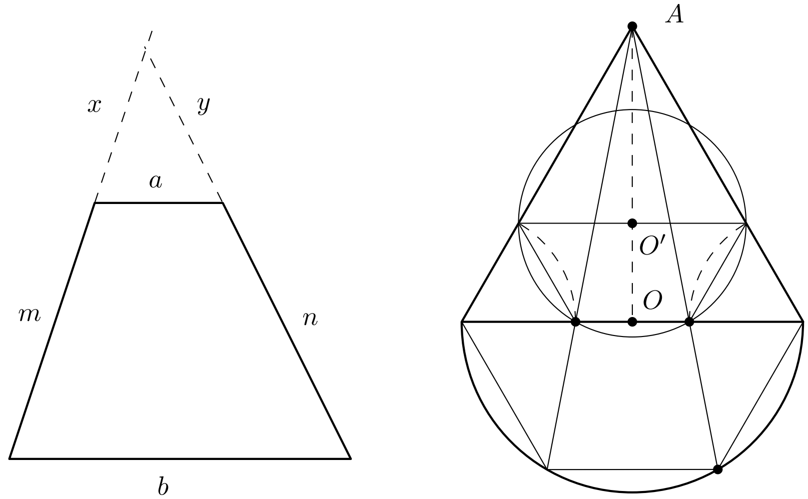
**10.3** Ver Fig. 10.112.

**10.4** Ver Fig. 10.113.

**10.5** Suponemos que el sistema está en equilibrio, la potencia es $\mathbf{F}$ y que la resistencia es $m\mathbf{g}$.

- *Potencia en dirección de la máxima pendiente.* De la Fig. 10.114(a),

$$\frac{F}{mg\sin\theta} = 1 \quad \text{de donde} \quad \frac{F}{mg} = \sin\theta = \frac{AC}{BC}\,.$$




(a) Problema 10.1. $\frac{a}{b} = \frac{x}{m+x} = \frac{y}{n+y}$, obtenemos $x = \frac{am}{b-a}$, $y = \frac{an}{b-a}$.

(b) Problema 10.2. Las circunferencias de centros $O$ y $O'$ son homotéticas respecto de $A$ de donde se desprende la igualdad de las cuerdas y por tanto de los arcos.

**Fig. 10.111**

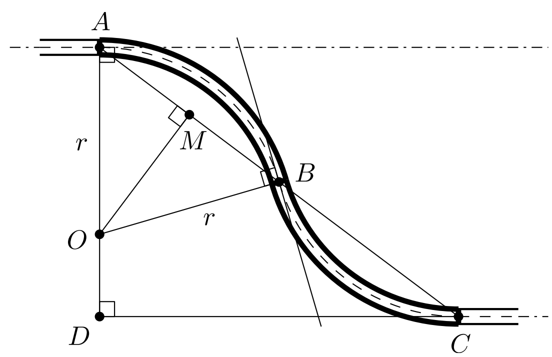



**Fig. 10.112** Problema 10.3. De la semejanza de los triángulos rectángulos $ADC$ y $AMO$, tenemos

$$\frac{3}{\frac{5}{4}} = \frac{5}{r}$$

de donde $r$=2 1/12 m.

- *Potencia en dirección horizontal.* De la Fig. 10.114(b),

$$\frac{F\cos\theta}{mg\sin\theta} = 1 \quad \text{de donde} \quad \frac{F}{mg} = \tan\theta = \frac{AC}{AB}.$$

**10.6** Ver Fig. 10.115.

**10.7**

- *De paralelogramos.* Basta que tengan un ángulo igual y la proporcionalidad de los lados que lo forman.

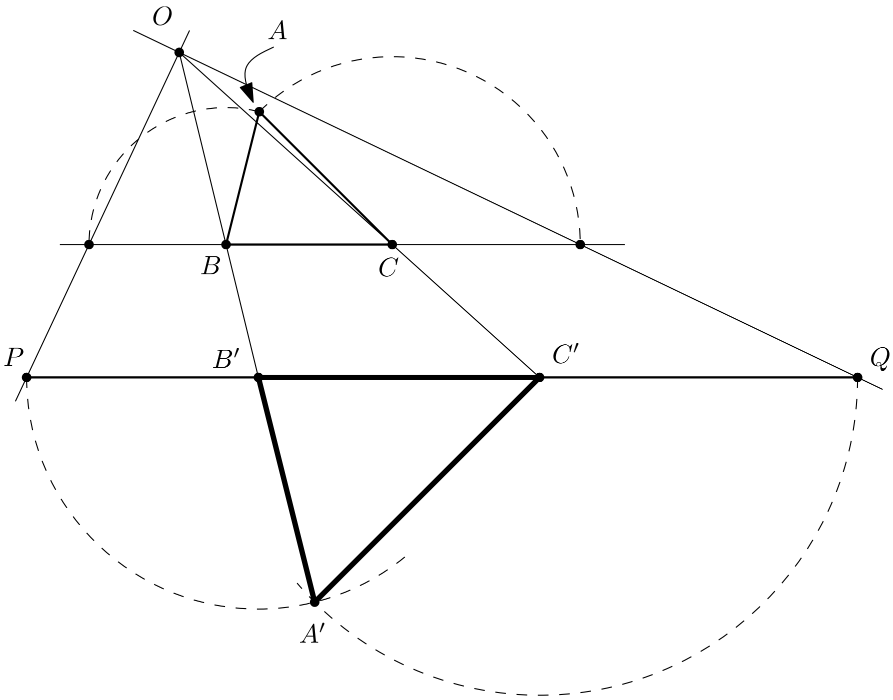
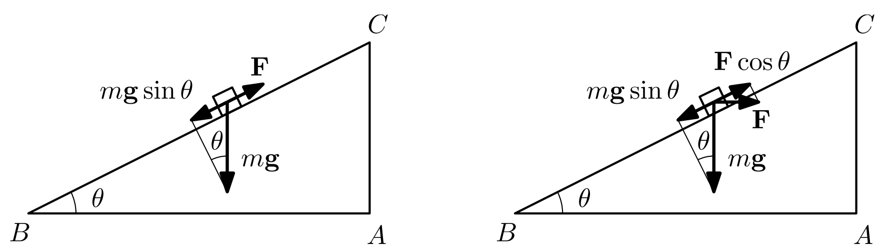



**Fig. 10.113** Problema 10.4. $PQ$ es el perímetro dado.




(a) Potencia en dirección de la máxima pendiente.

(b) Potencia en dirección horizontal.

**Fig. 10.114** Problema 10.5.

- *De rombos*. Que tengan un ángulo igual.
- *De trapecios.* Que tengan iguales los ángulos que forma una de las bases con los lados oblicuos y que las bases sean proporcionales.

**10.8** Ver Fig. 10.116(a).

**10.9** Ver Fig. 10.116(b). Por ser el cuadrilátero $T_1BAO_1$ semejante al $AO_2T_2B$, tenemos

**Fig. 10.115** Problema 10.6.
De la condición de equilibrio

$$2F\sin\theta = mg$$

tenemos

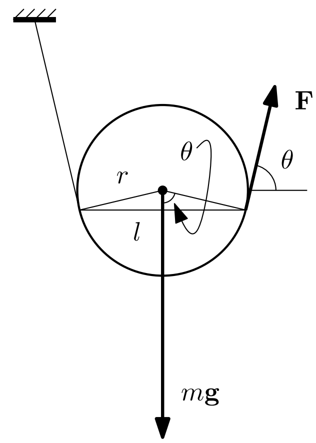
$$\frac{F}{mg} = \frac{1}{2\sin\theta},$$

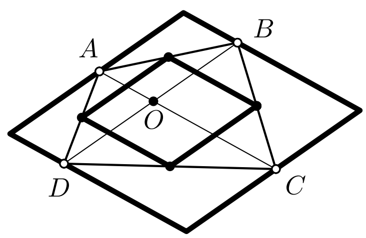
por otra parte

$$l = 2r\sin\theta.$$

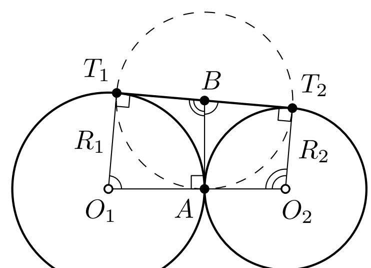
Por tanto

$$\frac{F}{mg} = \frac{r}{l}.$$




(a) Problema 10.8. Son homotéticos de centro $O$ y razón $k = \frac{1}{2}$.




(b) Problema 10.9.

**Fig. 10.116**

$$\frac{T_1B}{T_2O_2} = \frac{BA}{O_2A} = \frac{AO_1}{AB} = \frac{O_1T_1}{BT_2}$$

si llamamos $x = AB$, por el ej. 6.3, tenemos

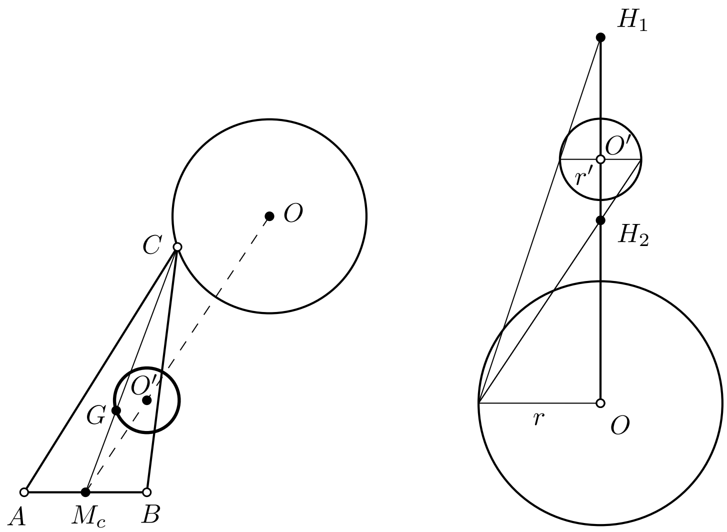
$$\frac{x}{R_2} = \frac{R_1}{x} \quad \text{de donde} \quad (2x)^2 = 2R_1 \cdot 2R_2$$

que es lo que queríamos probar.

**10.10** Ver Fig. 10.117(a).

**10.11** Ver Fig. 10.117(b). Llamando $d = OO'$, $x = O'H_1$ e $y = O'H_2$, por semejanza de triángulos tenemos

$$\frac{r}{r'} = \frac{d+x}{x} \quad \text{de donde} \quad x = \frac{dr'}{r-r'}$$




(a) Problema 10.10. Como $M_cG = \frac{1}{3}M_cC$, $G$ describe una circunferencia homotética a la dada mediante la homotecia de centro $M_c$ y razón $k = \frac{1}{3}$ cuyo centro es $O'$ com $M_cO' = \frac{1}{3}M_cO$ y radio la tercera parte del de la dada.

(b) Problema 10.11.

**Fig. 10.117**

y de

$$\frac{r}{r'} = \frac{d-y}{y} \quad \text{obtenemos} \quad y = \frac{dr'}{r+r'}.$$

**10.12** Ver Fig. 10.118(a). Llamamos

$$\begin{array}{ccccc} AC = x_0 & EH = x_1 & FI = x_2 & GJ = x_3 & BD = x_4 \\ & EC = y_1 & FH = y_2 & GI = y_3 & BJ = y_4 \end{array}$$

donde $x_0$=40 cm y $x_4$=80 cm; además, por semejanza, $a_0$=1000 cm y por el teorema de Pitágoras $h_0$=140$\sqrt{51}$ cm.

Aplicando el teorema de Thales a los sistemas de paralelas

- $AC \parallel EH \parallel FI \parallel GJ \parallel BD$. Tenemos

$$\frac{a_0}{h_0} = \frac{a_1}{h_1} = \frac{a_2}{h_2} = \frac{a_3}{h_3} = \frac{a_4}{h_4}. \tag{10.20}$$

- $EC \parallel FH \parallel GI \parallel BJ$. Tenemos

$$\frac{a_0 + a_1}{a_0} = \frac{a_2}{a_1} = \frac{a_3}{a_2} = \frac{a_4}{a_3}. \tag{10.21}$$

Además
$$a_1+a_2+a_3+a_4=a_0\,, \tag{10.22}$$
de 10.20, tenemos
$$a_i=\frac{a_0}{h_0}h_i \qquad i=1,2,3,4\,,$$
de 10.21
$$a_2=\left(1+\frac{a_1}{a_0}\right)a_1 \qquad a_3=\left(1+\frac{a_1}{a_0}\right)^2 a_1 \qquad a_4=\left(1+\frac{a_1}{a_0}\right)^3 a_1$$
considerando 10.22, tenemos la suma geométrica
$$a_1\left\{1+\left(1+\frac{a_1}{a_0}\right)+\left(1+\frac{a_1}{a_0}\right)^2+\left(1+\frac{a_1}{a_0}\right)^3\right\}=a_0$$
resulta
$$\frac{\left(1+\frac{a_1}{a_0}\right)^4-1}{1+\frac{a_1}{a_0}-1}=a_0 \quad\Longleftrightarrow\quad \left(1+\frac{a_1}{a_0}\right)^4=2$$
por esto y lo anterior, tenemos
$$\begin{aligned} a_1&=(\sqrt[4]{2}-1)a_0 & a_2&=(\sqrt[4]{2}-1)\sqrt[4]{2}a_0\\ a_3&=(\sqrt[4]{2}-1)\sqrt[4]{2^2}a_0 & a_2&=(\sqrt[4]{2}-1)\sqrt[4]{2^3}a_0\,. \end{aligned}$$
Por semejanza, tenemos
$$\frac{x_i}{x_0}=\frac{a_0+a_1+\cdots+a_i}{a_0} \qquad i=1,2,3,4$$
después de algunos cálculos
$$x_1=\sqrt[4]{2}x_0 \qquad x_2=\sqrt[4]{2^2}x_0 \qquad x_3=\sqrt[4]{2^3}x_0$$
i.e.
$$x_1\approx 47{,}6\,\mathrm{cm} \qquad x_2\approx 56{,}6\,\mathrm{cm} \qquad x_3\approx 67{,}3\,\mathrm{cm}$$
Por otra parte, por el teorema de Pitágoras, tenemos
$$y_i=\sqrt{\left(x_i-\frac{x_i-x_{i-i}}{2}\right)^2+h_i^2}=\sqrt{\left(\frac{x_{i-1}+x_i}{2}\right)^2+\left(\frac{a_i}{a_0}\right)^2 h_0^2} \qquad i=1,2,3,4\,.$$
Concretando

$$y_1 = \sqrt{\left(\frac{1+\sqrt[4]{2}}{2}\right)^2 x_0^2 + (\sqrt[4]{2}-1)^2 h_0^2}$$

$$y_2 = \sqrt{\left(\frac{\sqrt[4]{2}+\sqrt[4]{2^2}}{2}\right)^2 x_0^2 + \left((\sqrt[4]{2}-1)\sqrt[4]{2}\right)^2 h_0^2}$$

$$y_3 = \sqrt{\left(\frac{\sqrt[4]{2^2}+\sqrt[4]{2^3}}{2}\right)^2 x_0^2 + \left((\sqrt[4]{2}-1)\sqrt[4]{2^2}\right)^2 h_0^2}$$

$$y_4 = \sqrt{\left(\frac{\sqrt[4]{2^3}+2}{2}\right)^2 x_0^2 + \left((\sqrt[4]{2}-1)\sqrt[4]{2^3}\right)^2 h_0^2}$$

podemos observar que $y_{i+1} = \sqrt[4]{2} y_i$, lo que facilita el cálculo, por tanto

$$y_1 \approx 194{,}2\,\text{cm} \qquad y_2 \approx 230{,}9\,\text{cm} \qquad y_3 \approx 274{,}6\,\text{cm} \qquad y_4 \approx 326{,}6\,\text{cm}\,.$$

**10.13** Ver Fig. 10.118(b). $O$ es el centro de homotecia.

**10.14** Ver Fig. 10.119.

**10.15** Ver Fig 10.120(a).

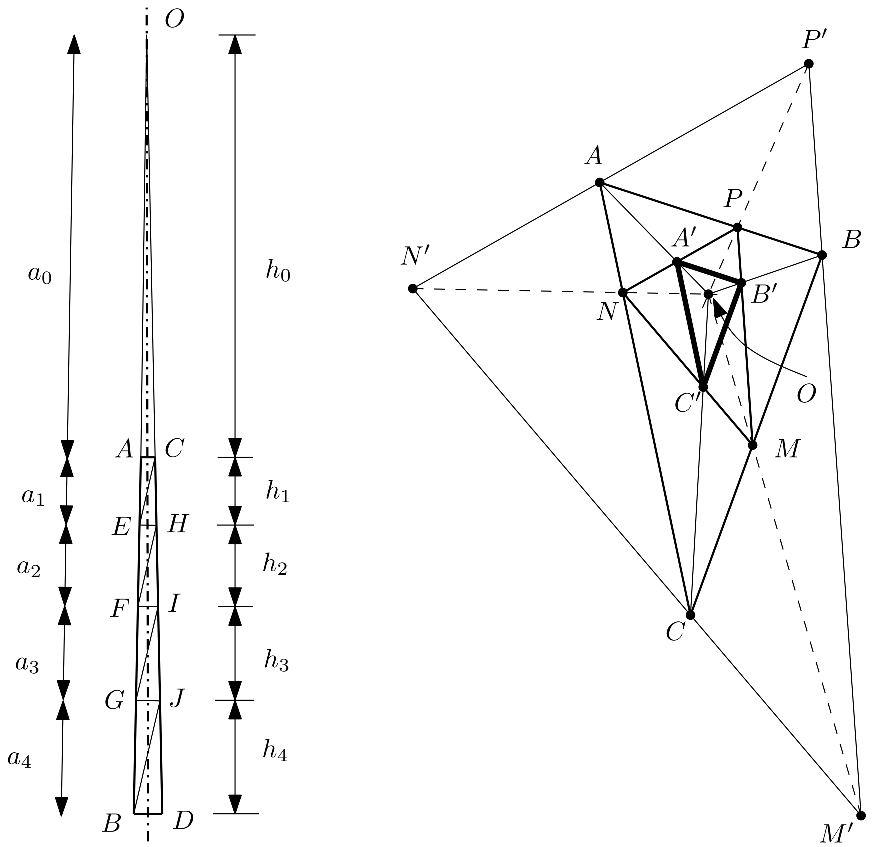
**10.16** Ver Fig 10.120(b).

**10.17** Ver Fig 10.121(a).

**10.18** Ver Fig 10.121(b).

**10.19** Ver Fig. 10.122(a). Suponemos conocidos el ángulo $\measuredangle APB$, la razón $\frac{PA}{PB} = \frac{PA'}{PB'}$, y la diagonal $AB$. Por ser inscriptible, el ángulo $\measuredangle AQB$ es suplementario del $\measuredangle APB$ y construimos su arco capaz sobre la diagonal cuyo centro es el de la circunferencia circunscrita. Por ser circunscriptible la suma de los lados opuestos es constante, i.e. $PA + QB = PB + QA$ de donde $QA - QB = PA - PB$ y aplicando la segunda parte del ej. 6.30 y observando la Fig. 10.67(b), hallamos la solución.

**10.20** Suponemos dados el ángulo $\measuredangle BAD$, las razones $\frac{AB}{AB'} = \frac{BC}{B'C'} = \frac{CD}{C'D'} = \frac{DA}{D'A}$ y la diagonal $AC$. Ver Fig. 10.122(b). Hemos supuesto el cuadrilátero convexo.




(a) Problema 10.12. (b) Problema 10.13.

**Fig. 10.118**

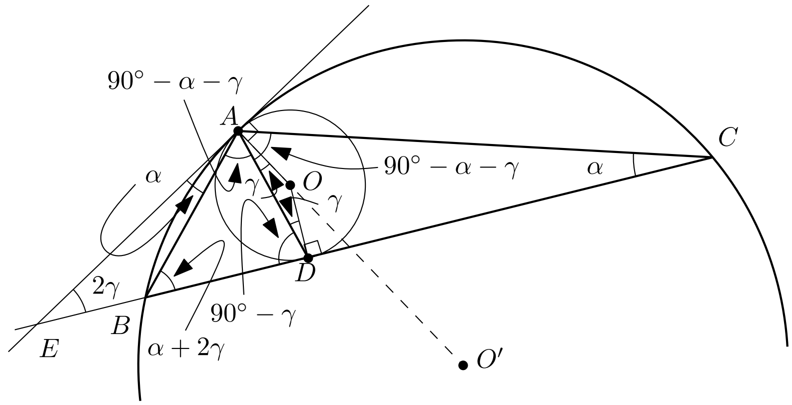
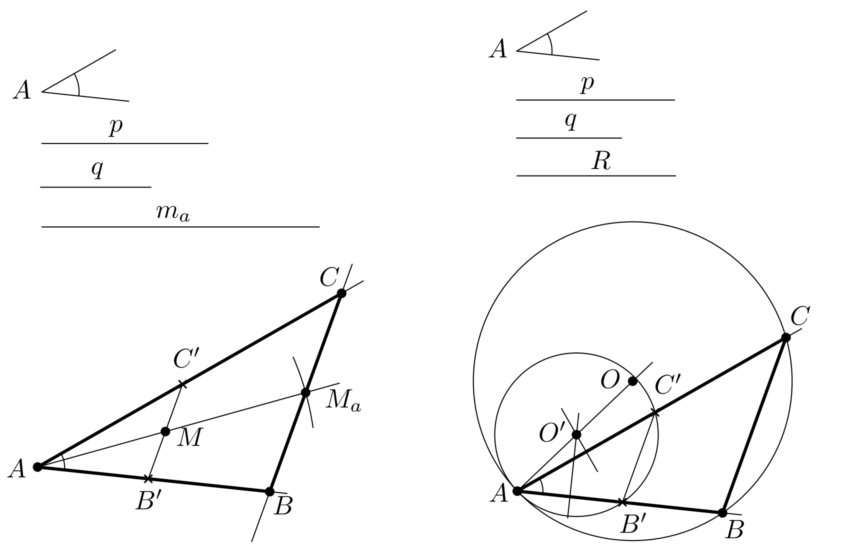


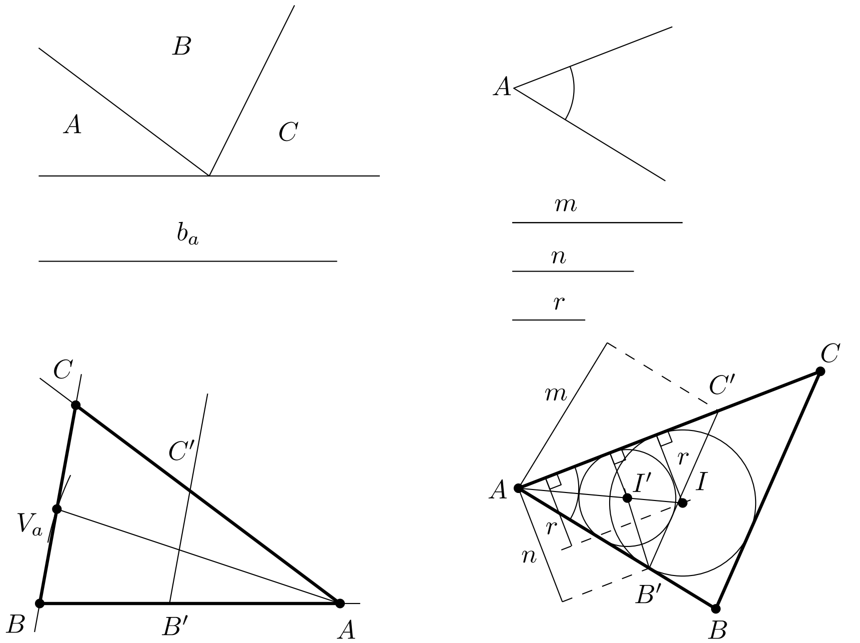

**Fig. 10.119** Problema 10.14. $\measuredangle EAB = \measuredangle ACB = \alpha$ por ser semiinscrito e inscrito respectivamente con arco $AB$ de la circunferencia de centro $O'$. Si suponemos que $\measuredangle AEB = 2\gamma$ tenemos que $\measuredangle ABD = \alpha + 2\gamma$ por ser exterior al triángulo $ABE$. Completando ángulos encontramos que $\measuredangle BAD = \measuredangle CAD = 90^\circ - \alpha - \gamma$.




(a) Problema 10.15. Tomamos $p = AC'$ y $q = AB'$ y suponemos $\frac{b}{c} = \frac{p}{q} = \frac{AC'}{AB'}$, $M$ es el punto medio de $B'C'$ y por el ej. 9.7 $M_a$ es el punto medio de $BC$.

(b) Problema 10.16. Las circunferencias son homotéticas de centro $A$.

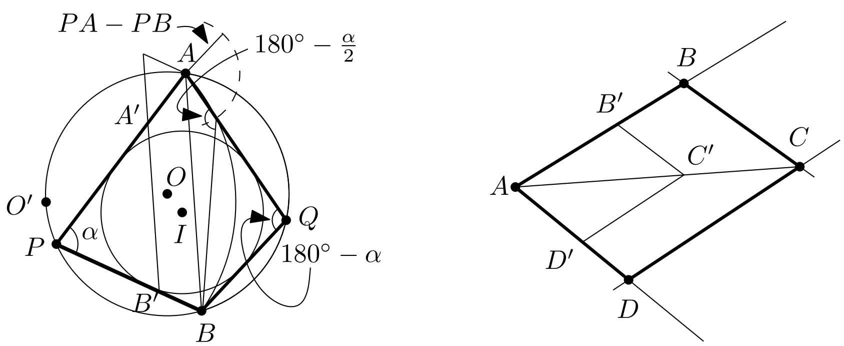
**Fig. 10.120**




(a) Problema 10.17.

(b) Problema 10.18. Las circunferencias son homotéticas de centro $A$.

**Fig. 10.121**




(a) Problema 10.19.

(b) Problema 10.20.

**Fig. 10.122**