Trabajo Práctico N° 6

Teoremas fundamentales del cálculo vectorial

1. Comprobar el teorema de Green para el campo vectorial $\vec{F}(x,y) = (xy, x^2y^3)$ y la curva C, que es frontera del triángulo R con vértices $(0,0)$, $(1,0)$ y $(1,2)$ orientada positivamente.

2. Para el campo vectorial $\vec{F}(x,y) = (y,0)$, calcular el valor de la integral de línea $\int_C \vec{F} \cdot d\vec{r}$, donde C es el cuadrado con vértices en $A(1,1)$, $B(2,1)$, $C(2,2)$ y $D(1,2)$ orientado positivamente.

3. Utilice el teorema de Green para calcular el área de un circulo de radio r.

4. Calcular el área encerrada por la curva polar dada por la ecuación $r = \operatorname{sen}(2\theta)$ (rosa de cuatro pétalos).

5. Verificar el teorema de Stokes para $\vec{F}(x,y,z) = y\hat{\imath} - x\hat{\jmath}$ y S es la rigión del paraboloide $z = x^2 + y^2 - 4$ debajo del plano xy con orientación hacia arriba.

6. Sea $\vec{F}(x,y,z) = (-y^2, x, z^2)$ y C la curva de intersección del cilindro $x^2 + y^2 = 1$ con el plano $y + z = 2$. Calcular la integral de línea de $\vec{F}$ sobre C.

7. Sea el campo vectorial $\vec{F}(x,y,z) = (xy, yz, \operatorname{sen}(xyz))$ y la superficie S que representa la región superior de la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ $(z \geq 0)$ interior al cilindro $x^2 + y^2 = 1$. Calcular la integral:
$$\int_S \nabla \times \vec{F} \cdot d\vec{S}$$

8. Calcular el flujo hacia afuera de $\vec{F}(x,y,z) = (xy, y^2 + e^{xz^2}, \operatorname{sen}(xy))$ a través de la superficie cerrada S, acotada por el cilindro parabólico $z = 1 - x^2$ y los planos $z = 0$, $y + z = 2$.

9. Calcular la integral de superficie del campo $\vec{F}(x,y,z) = (x^3, y^3, z^3)$ sobre la esfera unitaria.

10. Utilizar el teorema de la divergencia de Gauss en los tres casos siguientes para calcular $I = \int_S \vec{F} \cdot d\vec{S}$:
    (a) $\vec{F}(x,y,z) = (z,x,y)$ y S es el hemisferio $0 \leq z \leq \sqrt{9 - x^2 - y^2}$.
    (b) $\vec{F}(x,y,z) = (x^2, y^2, z^2)$ y S es el sólido parabólico $0 \leq z \leq 4 - x^2 - y^2$.
    (c) $\vec{F}(x,y,z) = (x + z^2, y - z^2, x)$ y S es el sólido $0 \leq y^2 + z^2 \leq 1$, $0 \leq x \leq 2$.

Ejercicios complementarios

1. Por medio del Teorema de Green, calcular el trabajo efectuado por el campo de fuerza $\mathbf{F}(x,y) = (y+3x)\hat{\boldsymbol{\imath}} + (2y-x)\hat{\boldsymbol{\jmath}}$ al mover una partícula rodeando una vez la elipse $4x^2 + y^2 = 4$ en el sentido contrario al de las agujas del reloj.

2. Aplicar el teorema de Green para calcular el área de la figura limitada por la curva dada:

   (a) La elipse $\lambda : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^2,\ \lambda(t) = (a\cos(t), b\,\mathrm{sen}(t))$.

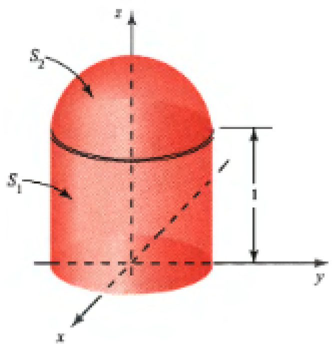
   (b) La Lemniscata de Bernoulli $(x^2+y^2)^2 = a^2(x^2-y^2)$. Una parametrización de la parte de la lemniscata que se encuentra en el primer cuadrante es $\lambda : [0, \frac{\pi}{4}] \ \to\ \lambda(t) = (a\cos^3(t), a\,\mathrm{sen}^3(t))$.

3. Si C es una curva cerrada simple que acota una región para la cual se aplica el Teorema de Green, entonces el área de la región D acotada por $C = \partial D$ es:

$$A = \frac{1}{2}\int_{\partial D} xdy - ydx.$$

   Utilizar este Teorema para recobrar la fórmula $A = \frac{1}{2}\int_a^b r^2 d\theta$ para una región en coordenadas polares.

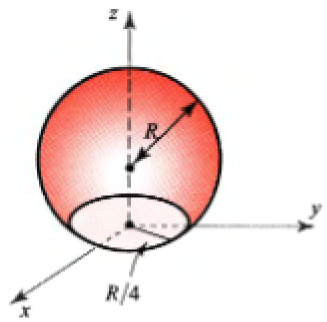
4. Sea S una superficie cilíndrica con tapa mostrada en la figura. S es la unión de dos superficies S_1 y S_2, donde S_1 es el conjunto de (x,y,z) con $x^2+y^2 = 1$, $0 \leq z \leq 1$ y S_2 es el conjunto de (x,y,z) con $x^2+y^2+(z-1)^2 = 1$, $z \geq 1$. Sea $F(x,y,z) = (zx + z^2y + x)\hat{\boldsymbol{\imath}} + (z^3yx + y)\hat{\boldsymbol{\jmath}} + z^4x^2\hat{\boldsymbol{k}}$. Calcular $\int_S (\nabla \times F) \cdot d\mathbf{S}$. (IDEA: El Teorema de Stokes se cumple para esta superficie).



5. Un globo aerostático tiene la forma esférica truncada mostrada en la figura. Los gases calientes escapan por la cubierta porosa con campo vectorial de velocidad

$$V(x,y,z) = \nabla \times \Phi(x,y,z) \text{ donde } \Phi(x,y,z) = -y\hat{\boldsymbol{\imath}} + x\hat{\boldsymbol{\jmath}}$$

   Si R=5, calcular la tasa de flujo del volumen de los gases que pasan a través de la superficie.



6. Evaluar la integral de superficie $\int\int_{\partial S}(\mathbf{F}\cdot\mathbf{n})dA$, donde $\mathbf{F}(x,y,z)=\hat{\boldsymbol{\imath}}+\hat{\boldsymbol{\jmath}}+z(x^2+y^2)^2\hat{\boldsymbol{k}}$ y ∂S es la superficie del cilindro $x^2+y^2\leq 1$, $0\leq z\leq 1$. (IDEA: Utilizar el Teorema de Gauss).

7. Con el Teorema de la Divergencia, calcule el flujo del campo $\mathbf{F}:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$, $\mathbf{F}(x,y,z)=(x^3,y^3,z)$ a través de la esfera unitaria $x^2+y^2+z^2=1$.