__TRABAJO PRÁCTICO Nº 2 – Parte I: Ejercicios Resueltos__

__Ejercicio N° 1__: Dados los conjuntos: A = {1, 2} y B = {a, b, c}. Halle AxB, BxA. Represéntelos en un gráfico cartesiano. ¿Es cierto que BxA = $(AxB)^{-1}$?

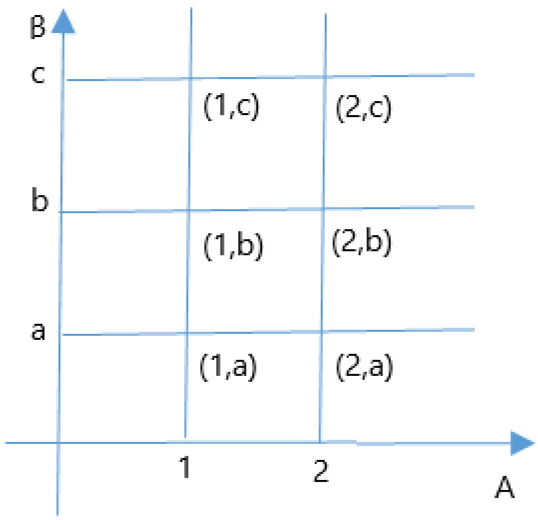
Solución

AxB = {(1 , a) , (1 , b) , (1 , c) , (2 , a) , (2 , b) , (2 , c) }

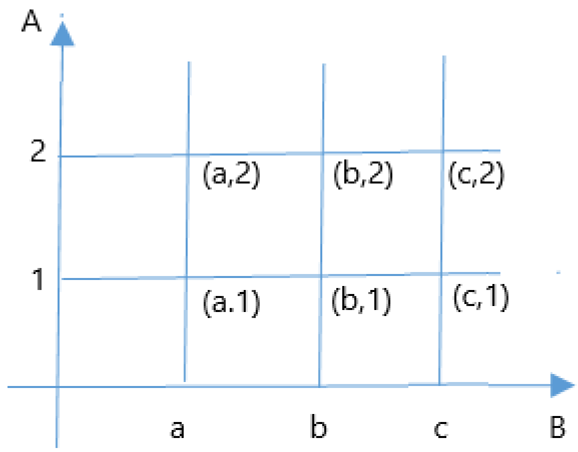
BxA = {(a , 1) , (a , 2) , (b , 1) , (b , 2) , (c , 1) , (c , 2) }

Se observa que AxB ≠ BxA

Gráfico cartesiano:



A x B



B x A

$(AxB)^{-1}$ representa el conjunto inverso de AxB. $(AxB)^{-1}$ = {(b , a) / (a , b) ∈ AxB}

Siendo AxB = {(1 , a) , (1 , b) , (1 , c) , (2 , a) , (2 , b) , (2 , c) }

$(AxB)^{-1}$ = {(a , 1) , (b , 1) , (c , 1) , (a , 2) , (b , 2) , (c , 2) }

Entonces: BxA = $(AxB)^{-1}$

__Ejercicio N° 2__: Defina por extensión todas las relaciones no vacías posibles de A en B si:

a) A = {1, 2, 3} y B = {a}   b) A = {1, 2} y B = {a, b}

Solución

a) A = {1, 2, 3} y B = {a}

Una relación R entre dos conjuntos A y B es todo subconjunto del producto cartesiano AxB. Todas las relaciones no vacías entre A = {1, 2, 3} y B = {a} son subconjunto de AxB = {(1, a) , (2, a), (3, a)}

R_1 = {(1, a)}

R_2 = {(2, a)}

R_3 = {(3, a)}

R_4 = {(1, a) , (2, a)}

R_5 = {(1, a) , (3, a)}

R_6 = {(2, a) , (3, a)}

R_7 = AxB = {(1, a) , (2, a), (3, a)}

Ejercicio N° 4: Sean: E = {3, 5, 7} y F = {1, 3, 11, 17}. a) ¿Cuál es el grafo de la relación "x+y < 15", con x ϵ E y y ϵ F? b) Determine el dominio y el conjunto imagen de la relación.

Solución

E x F = {(3 ,1) , (3,3) , (3 , 11) , (3 , 17) , (5 ,1) , (5,3) , (5 , 11) , (5 , 17), (7 ,1) , (7,3) , (7 , 11) , (7 , 17)}

a) Como la relación es R (x , y) : x+y < 15

R = {(3 ,1) , (3,3) , (3 , 11) , (5 ,1) , (5,3) , (7 ,1) , (7,3)} que es un grafo de esta relación.

b) Dominio de una relación es el conjunto formado por todas las primeras componentes del conjunto relación. D_R = { x / (x , y) $\in$ R}

En este caso: D_R = { 3 , 5 , 7}

Imagen de una relación es el conjunto formado por todas las segundas componentes del conjunto relación. I_R = { y / (x , y) $\in$ R}

En este caso: I_R = { 1 , 3 , 11}

Ejercicio N° 5: Sean A = {1, 2, 3, 4} y las siguientes relaciones en A^2:

R_1 = {(1,1), (2, 2), (3,3), (4, 4)} ; R_2 = {(1,1), (2, 2), (1,2), (1, 3), (2, 1), (3, 1)}

R_3 = A x A ; R_4 ={(4,1), (4, 2), (4,3), (3, 1), (3, 2), (2, 1)}; R_5 = {(1,2), (2, 4)}

a) Defina cada relación por comprensión.
b) Halle el dominio y el conjunto imagen de cada una.
c) Determine la relación inversa, su dominio e imagen.

Solución para R_1 y R_2

R_1 = {(1,1), (2, 2), (3,3), (4, 4)}

a) Definido por comprensión: $\mathbf{R_1 = \{(x, y) \in A^2 / x = y\}}$

b) Dom_{R1} = {1, 2, 3, 4} I_{R1} = {1, 2, 3, 4}

c) R_1^{-1} = {(1,1), (2, 2), (3,3), (4, 4)}
Dom_{R1}^{-1} = {1, 2, 3, 4} I_{R1}^{-1} = {1, 2, 3, 4}

R_2 = {(1,1), (2, 2), (1,2), (1, 3), (2, 1), (3, 1)}

a) Definido por comprensión: $\mathbf{R_2 = \{(x, y) \in A^2 / x+y \leq 4\}}$

b) Dom_{R2} = {1, 2, 3} I_{R2} = {1, 2, 3}

c) R_2^{-1} = {(1,1), (2, 2), (2,1), (3, 1), (1, 2), (1, 3)}
Dom_{R2}^{-1} = {1, 2, 3} I_{R2}^{-1} = {1, 2, 3}

<u>Ejercicio N° 7</u>: Considere los siguientes conjuntos: A = {1, 2, 3, 4}, B = {1, 4, 6, 16}, C = {2, 3, 8, 10} y las relaciones *R* y *S* definidas por: *R* = {(x, y) ϵ A x B / $y = x^2$ } y *S* = {(y, z) ϵ B x C / z = y/2 };

a) Determine *R* y *S* por extensión.
b) Defina la composición *S* o *R* por extensión.
c) Determine los dominios e imágenes de las tres relaciones.

Solución ítem b)

A partir de las relaciones $R \subset AxB$ y $S \subset BxC$, es posible definir una relación entre A y C que se llama composición entre R y S mediante: $S \circ R = \{(x,z)/\ \exists y \epsilon B\ \wedge\ (x,y) \epsilon R\ \wedge\ (y,z) \epsilon S\}$
En este caso, la composición por extensión es: $S \circ R = \{(2,2)\ ,(4,8)\}$

Ejercicio N° 9: Sean A = {1, 2, 3} y las siguientes relaciones en A^2:

R_1 = {(1,1), (2, 2), (3,3)} ; R_2 = {(1,1), (2, 2), (1,2), (3, 3), (2, 1)}; R_3 = A x A

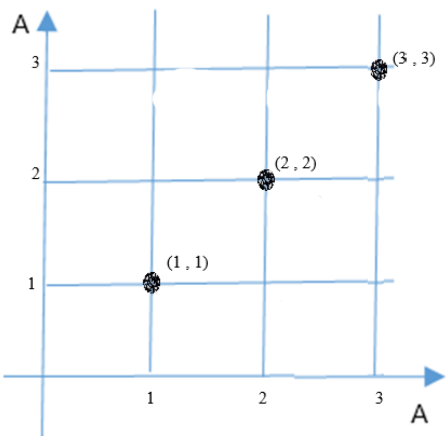
R_4 = {(1,2), (2, 2), (2,3), (3, 3), (3, 2), (2, 1)}; R_5 = {(1,2), (1, 3), (2, 3)}.

Realice un gráfico cartesiano para cada relación dada e indique, justificando aquellas que son: reflexivas, arreflexivas, simétricas, antisimétricas y transitivas.

Solución: para R1 y R4

a)

R1 R_1 = {(1,1), (2, 2), (3,3)}



R_1

R1 es **reflexiva**, porque todos los elementos de A están relacionados consigo mismo.

$$\forall x: x \in A \rightarrow (x , x) \in R$$

Es **simétrica**, porque para todo elemento de A, si un elemento está relacionado con otro, éste está relacionado con el primero.

$$\forall x \in A, \forall y \in A: (x , y) \in R \rightarrow (y , x) \in R$$

También es **antisimétrica**, porque para todo elemento de A, si un elemento está relacionado con otro y éste está relacionado con el primero, entonces los dos elementos son iguales.

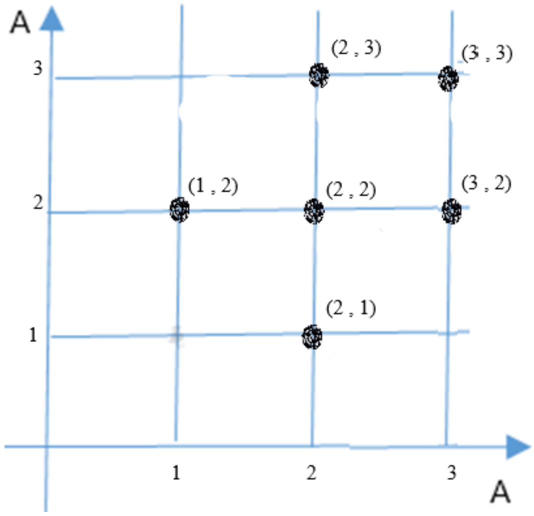
$$\forall x \in A, \forall y \in A: (x , y) \in R \wedge (y , x) \in R \rightarrow x = y$$

Y es **transitiva** porque para todo elemento de A, si un elemento está relacionado con otro y éste está relacionado con un tercero, entonces el primer elemento está relacionado con el tercero.

$$\forall x \in A, \forall y \in A, \forall z \epsilon A: (x , y) \in R \wedge (y , z) \in R \rightarrow (x , z) \in R$$

R4

R_4 = {(1,2), (2, 2), (2,3), (3, 3), (3, 2), (2, 1)}



R_4

Esta relación es **No Reflexiva**, porque existen elementos de A que no se relacionan consigo mismo. El 1.

$$\exists x/\ x \in A \wedge (x\ , x\ ) \notin R$$

Es **simétrica**, porque para todo elemento de A, si un elemento está relacionado con otro, éste está relacionado con el primero. (cada vez que hay ida, hay vuelta)

$$\forall x \in A, \forall y \in A: (x\ , y) \in R \rightarrow (y\ , x\ ) \in R$$

No es antisimétrica, porque existen pares que pertenecen a la relación que son simétricos pero sus componentes son distintos.

Y no es transitiva, es **No Transitiva** porque existen pares que evidencian que un elemento está relacionado con otro, éste se relaciona con un tercer elemento, pero el primero no se relaciona con el tercero. $\exists x \in A, \exists y \in \exists, \forall z \epsilon A: [(x\ , y) \in R \wedge (y\ , z\ ) \in R]\ \wedge (x\ , z\ ) \notin R$

$$(1\ , 2) \in \mathrm{R} \ \wedge (2, 1) \in \mathrm{R} \quad \text{pero } (1\ , 1) \notin R$$