Circunferencia Unidad 4

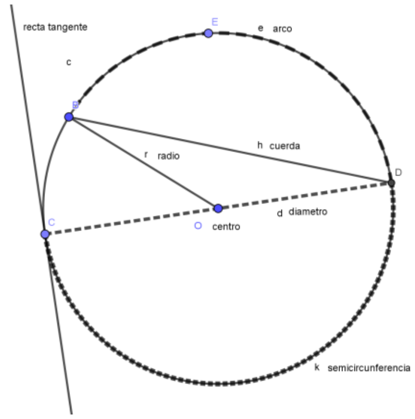
Circunferencia. Posiciones relativas de una recta y una circunferencia. Posiciones relativas de dos circunferencias. Ángulos y arcos asociados en la circunferencia. Segmento medio proporcional. Polígonos en la circunferencia: inscripto y circunscripto. Puntos y rectas notables en el triángulo. Circunferencia de los nueve puntos. Homotecia entre circunferencias: centros de homotecia. Potencia de un punto respecto de una circunferencia. Eje radical. Centro radical de tres circunferencias. Sección áurea de un segmento. Número áureo.

Circunferencia.

<u>Definición</u>: Circunferencia es el conjunto de todos los puntos del plano que equidistan de otro punto llamado centro.

Los segmentos que unen el centro con los puntos de la circunferencia se llaman radios. Por ejemplo, OB=r

La circunferencia se denomina por su centro y el valor del radio. Es decir C(O, r)



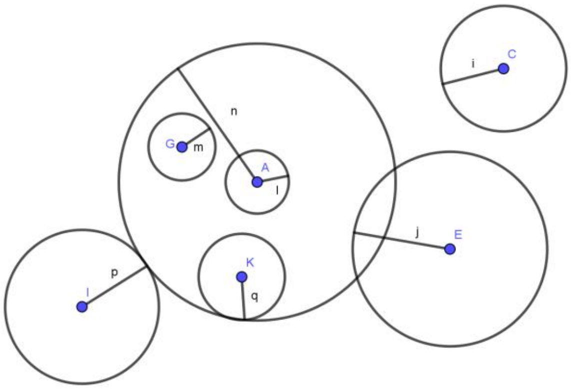
Arco de la circunferencia:($\cap BD$) es una porción de circunferencia

Cuerda($\overline{BD}$): es el segmento determinado por dos puntos de la circunferencia

Diámetro (d): es toda cuerda que pasa por el centro. El diámetro suma dos radios.

Posiciones relativas de dos circunferencias

Dos circunferencias pueden tener, en un plano, varias posiciones relativas, y de acurdo con ellas se cumplen una serie de propiedades.



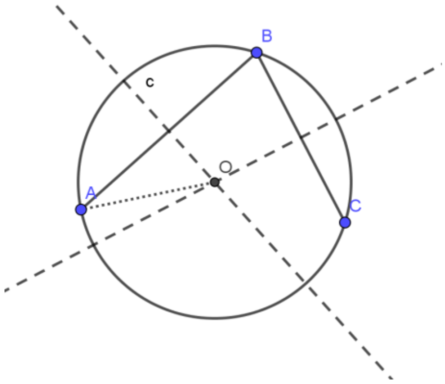
Circunferencias exteriores: los puntos de cada una son exteriores a la otra. En dos circunferencias exteriores la distancia de los centros en mayor que la suma de los radios. AC=d por lo tanto $d > n + i$

Circunferencias tangentes exteriores: tiene un punto común y los demás puntos de cada una son exteriores. La distancia de los centros es igual a la suma de los radios d=AI por lo tanto d=p+n

Circunferencias secantes: si tienen dos puntos en común, la distancia de los centros es menor que la suma de los radios y mayor que la diferencia. Entonces $d < n + j$

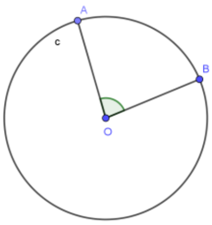
Determinación del centro de la circunferencia

Propiedad “por tres puntos no alineados pasa una y solo una circunferencia que los contiene”
Las mediatrices de los segmentos AB y BC se cortan en el punto O debido a que O equidista de los puntos A, B y C es decir AO=OB= OC=r

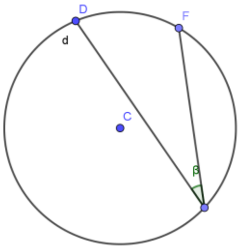


Ángulos y arcos asociados en la circunferencia

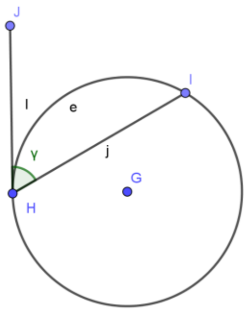
Angulo central: es el que tiene el vértice en el centro de la circunferencia.
Medida del Angulo central: si adoptamos como unidad de ángulos el ángulo central correspondiente al arco unidad, la medida del ángulo central es igual a la de su arco correspondiente.



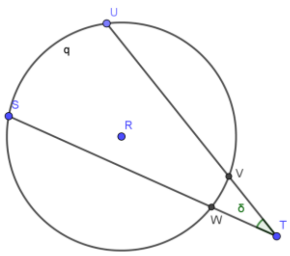
Ángulos inscriptos en un arco de circunferencia: es el ángulo que tiene su vértice en la circunferencia y sus lados son secantes.



Angulo semi inscripto en un arco de circunferencia: tiene su vértice en la circunferencia y uno de sus lados es una tangente y el otro una secante.

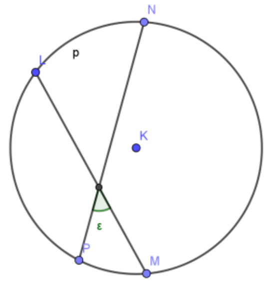


Angulo exterior: Es el ángulo cuyo vértice es un punto exterior de la circunferencia.
La medida del ángulo exterior es igual a la semi-diferencia de las medidas de los arcos comprendidos por sus lados.



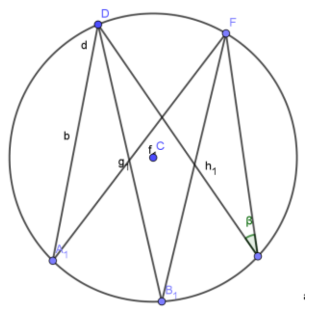
$$medida\ del\ < \delta = \frac{|\cap US - \cap VW|}{2}$$

Angulo interior o excéntrico es el ángulo cuyo vértice es un punto interior de la circunferencia.
La medida del ángulo interior es igual a la semisuma de las medidas de los arcos comprendidos por sus lados y por sus prolongaciones.

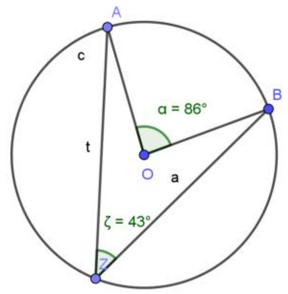


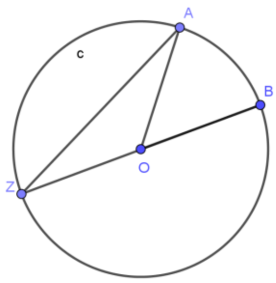
$$\boxed{medida\ del\ < \varepsilon = \frac{\cap PM + \cap LN}{2}}$$

Arco capaz "Es el lugar geométrico de los vértices de ángulos congruentes a un ángulo cuyos lados pasan por dos puntos fijos de la circunferencia".
Los dos puntos fijos de la circunferencia mencionados en la definición son los extremos del arco DB1F, los ángulos son todos congruentes por estar inscriptos en el mismo arco.



RELACIONES ARCO – ANGULO
Teorema: "Un ángulo inscripto en un arco de circunferencia mide la mitad del ángulo central correspondiente"





El ángulo AZB es inscripto y O es el centro de la circunferencia.

<u>Tesis</u>: $medida\ del\ < Z = \frac{\cap AB}{2}$

Construcción auxiliar: tracemos el radio OA formándose el triángulo ZOA que es isósceles.

Demostración: en el triángulo BOA el < Z es igual al < A $(< Z =< A)$

Pero $< Z + < A =< AOB$ por ser AOB un ángulo exterior

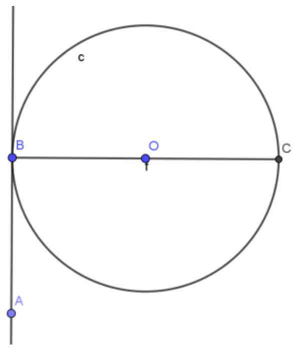
Sustituyendo las expresiones se tiene

$$< Z + < Z =< AOB \quad \therefore \quad 2 < Z =< AOB \quad \therefore \quad < Z = \frac{< AOB}{2}$$

Pero $\cap AB$ es la medida del <AOB sustituyendo se tiene que la medida $< Z = \frac{\cap AB}{2}$

NOTA: Este es uno de los casos averiguar los otros dos.

Teorema "Un ángulo semi-inscripto es un arco de circunferencia mide la mitad del ángulo central correspondiente"



Caso uno: el centro está en uno de los lados del ángulo

H) el ángulo ABC es semi-inscripto y O es el centro de la circunferencia.

T) $medida\ del\ < ABC = \cap\, BC/2$

D) <ABC =90° (la tangente es perpendicular al radio en el punto de contacto)

$\cap\, BC = 180°$ por ser una semicircunferencia

Comparando ambas expresiones se tiene

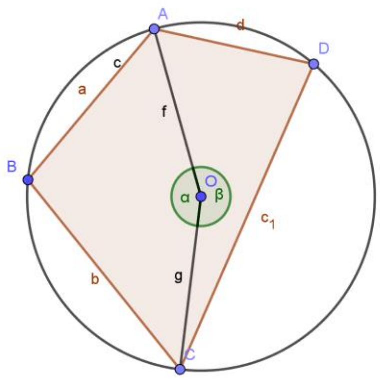
$medida\ del\ < ABC = \frac{\cap BC}{2}$.

Nota: este es uno de los casos investigar los otros dos.

Polígonos en la circunferencia: inscripto y circunscripto.

Polígono inscripto en una circunferencia es aquel cuyos lados son cuerdas de la circunferencia.
El polígono ABCD está inscripto en la circunferencia C (O, r) o bien la circunferencia está circunscripta al polígono. Cundo un polígono está inscripto en una circunferencia se dice que el polígono es inscriptible.

Propiedad de los cuadriláteros inscriptible "En todo cuadrilátero inscripto en una circunferencia, los ángulos opuestos son suplementarios"



H) ABCD cuadrilátero inscripto en la circunferencia

A, B, C, D son puntos de la circunferencia

T) A+C= 2R y B+D=2R

D) Como el ángulo B está inscripto en el arco ABC, el ángulo central correspondiente AOC, por lo que B=AOC/2 análogamente D está inscripto en el arco ADC y el ángulo central correspondiente es AOC, por lo que D=AOC/2 (cóncavo)

Sumando miembro a miembro se tiene

B+D=AOC/2 +AOC (cóncavo)/2

B+D=(AOC+AOC (cóncavo))/2

B+D=4R/2

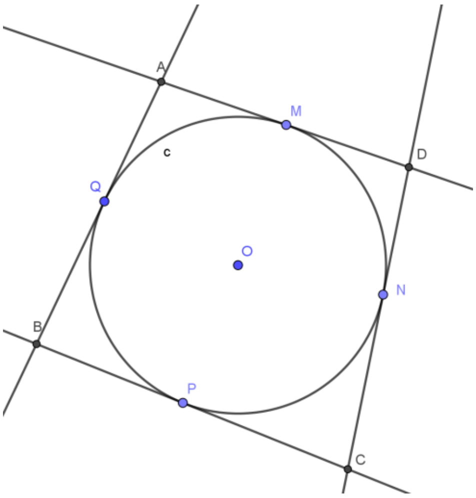
B+D=2R

De manera similar se puede demostrar que A y C son suplementarios.

Polígonos circunscriptos en una circunferencia "polígono circunscripto en una circunferencia es aquel cuyos lados son tangentes a la circunferencia"

El polígono ABCD está circunscripto a la circunferencia C (O, r) o bien la circunferencia C (O, r) está inscripta al polígono.

Propiedad de los cuadriláteros circunscriptibles "En todo cuadrilátero circunscripto a una circunferencia, las sumas de los lados opuestos son iguales"



H) ABCD cuadrilátero circunscripto en la circunferencia C (O, r)
M, N, P, Q son puntos de tangencia del cuadrilátero y la circunferencia
Son pares de lados opuestos AB y DC, AD y BC

T) AB+DC=AD+BC

D) Por ser puntos de tangencia se verifica que AM=AQ, DM=DN, BQ=BP, CP=CN
Sumando miembro a miembro queda AB+DC=AD+BC.

<u>Puntos y rectas notables en el triángulo</u>.

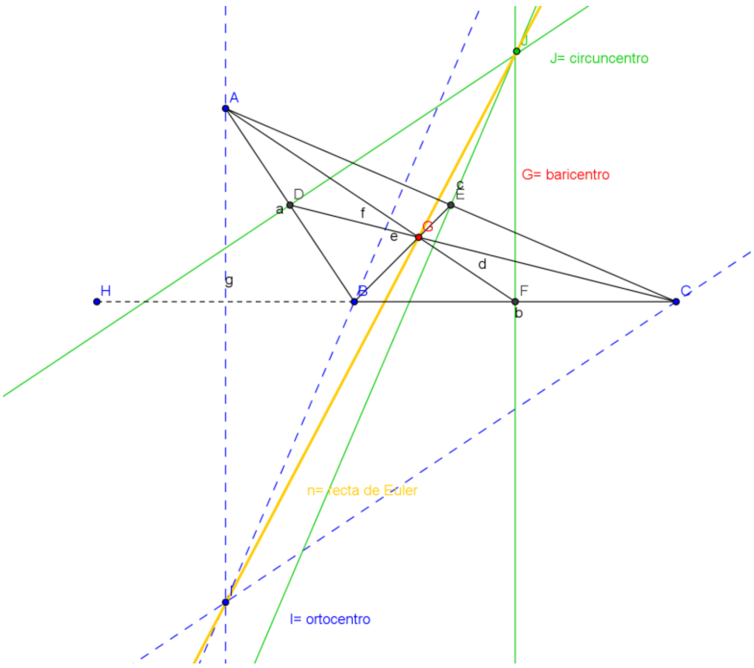
Circuncentro: las mediatrices de los lados de un triángulo se cortan en un punto denominado circuncentro (O) el circuncentro es el centro de la circunferencia circunscripta al triangulo.

Ortocentro: las alturas de un triángulo se cortan en un punto llamado ortocentro (H)

Incentro: las bisectrices de los tres ángulos de un triángulo se intersectan en un punto denominado Incentro (I). el Incentro es el centro de la circunferencia inscripta al triangulo.

Baricentro: o centro de gravedad: el baricentro es la intersección de las medianas del triángulo (G) las medianas se dividen mutuamente en la misma proporción: 1/3 de la mediana desde G al lado y 2/3 desde el vértice a G.

Recta de Euler: en todo triangulo se cumple que el baricentro, el ortocentro y el circuncentro están alineados. Dicha recta se denominada recta de Euler.



Circunferencia de los nueve puntos. Investigar

<u>Homotecia entre circunferencias: centros de homotecia</u>.

Si dos circunferencias no son concéntricas son homotéticas respecto de dos centros de homotecia armónicamente separados por los centros de las circunferencias.

http://ommbc.org/sitio/Material/Geometria/G21_Armonicos.pdf

1. Definición

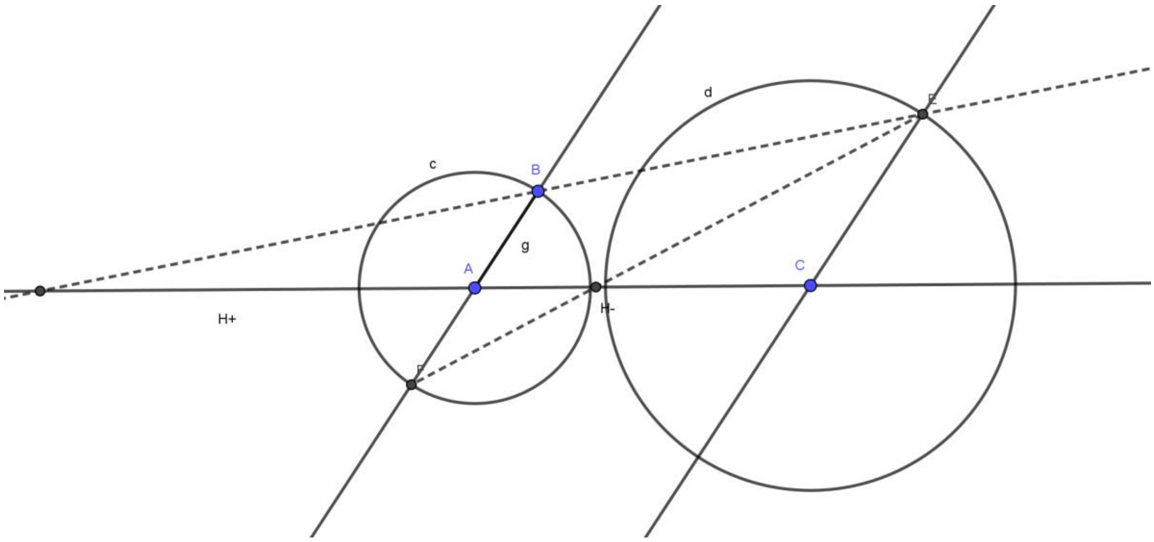
Se tienen una recta AB en el plano, un punto C dentro del segmento AB y un punto D sobre la recta AB, pero fuera del segmento, de tal manera que se cumple la siguiente relación:

$$\frac{AC}{CB} = \frac{AD}{DB} = k$$

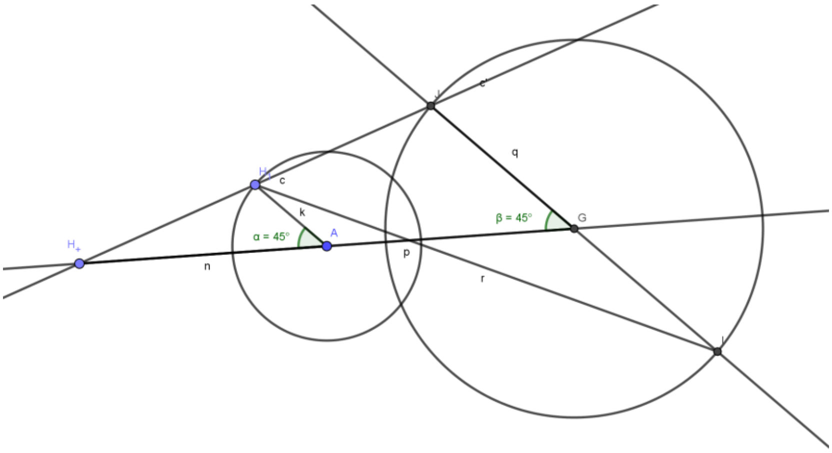
Entonces se dice que C y D son conjugados armónicos de A y B y dividen a AB interna y externamente en la misma razón k. A ti te toca demostrar que, curiosamente, A y B son conjugados armónicos de C y D, por este hecho es que al conjunto ordenado de puntos A, C, B y D se les hace mención como cuatro puntos conjugados armónicos, o para no cansarnos: *cuaterna armónica*.

Se consideran dos circunferencias no concéntricas con centro A y C. Dibujamos los radios paralelos AB y CE con el mismo sentido. Uniendo los extremos de los radios, es decir mediante las rectas AC y BE obtenemos el punto H+, conocido como: centro de homotecia externo o centro de la homotecia de razón positiva de las dos circunferencias

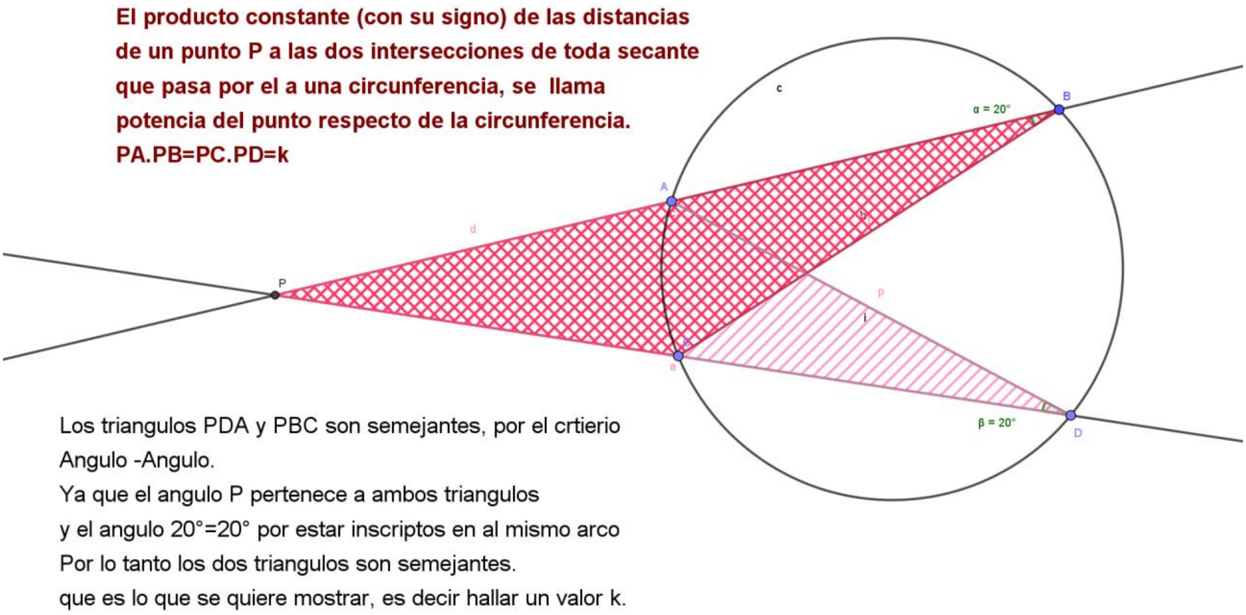
Si dibujamos los radios FA y CE al unir los extremos F y E obtenemos el punto H-, conocido como centro de homotecia interno centro de homotecia de razón negativa de dos circunferencias



Para poder demostrar la homotecia entre circunferencias se estudia la semejanza entre triángulos. ¿Cuáles serían los triángulos a considerar? ¿y qué criterio podría utilizar? Desarrollar la justificación.



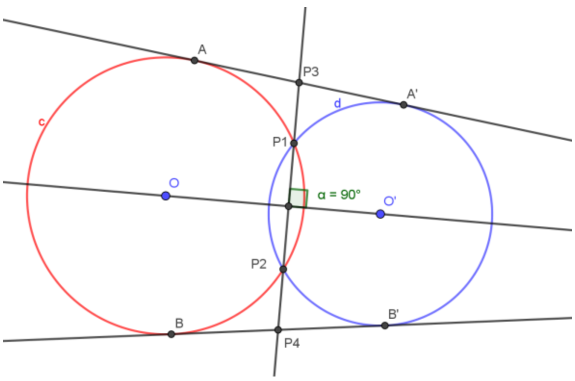
Potencia de un punto respecto de una circunferencia.



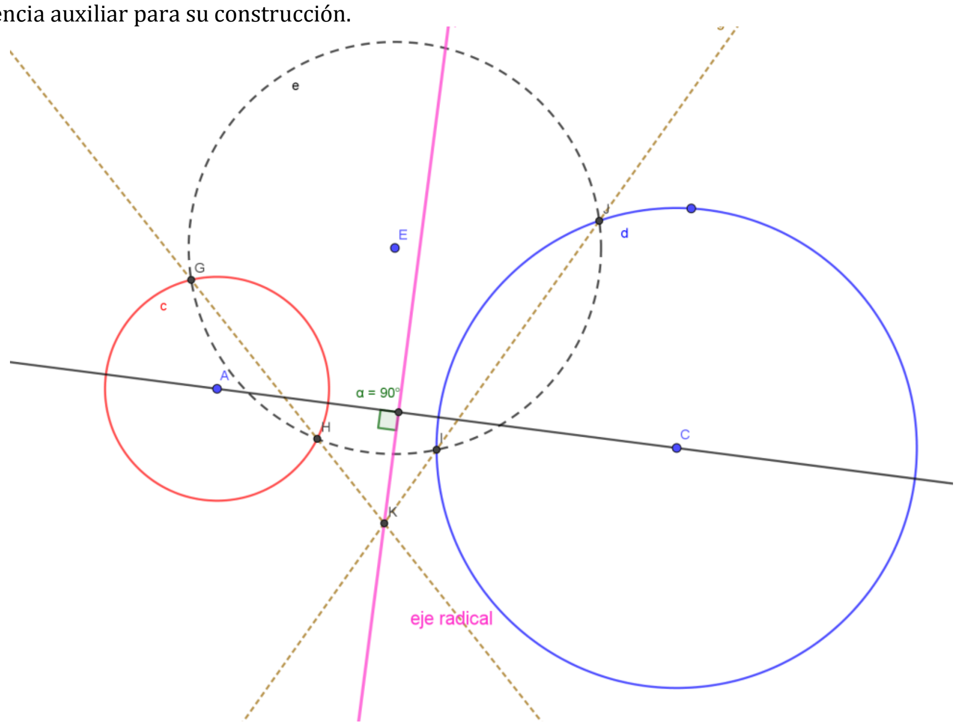
Eje radical.

“Eje radical de dos circunferencias es el lugar geométrico de los puntos que tienen igual potencia respecto de ambas circunferencias”

P1 y P2 tienen igual potencia respecto de ambas circunferencias, por pertenecer a las mismas. P3 y P4 por ser puntos medios de los segmentos AA’ y BB’ respectivamente. La recta que contiene a P1, P2, P3 y P4 se denomina Eje radical.

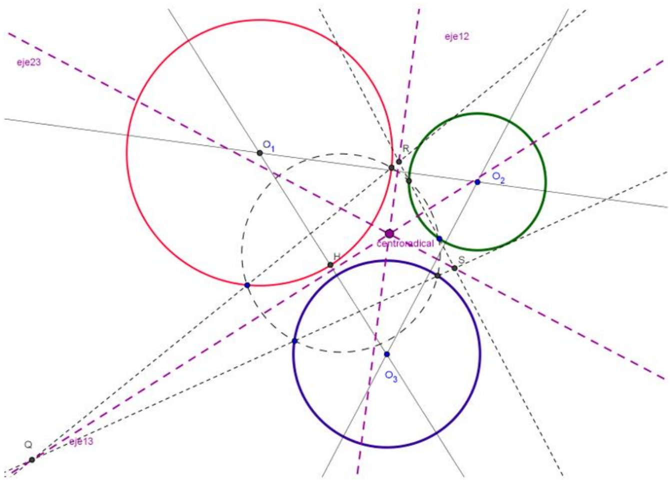


El eje radical se puede trazar en todas las posiciones relativas de las circunferencias, por ejemplo, si las circunferencias son exteriores se utiliza una circunferencia auxiliar para su construcción.



Centro radical de tres circunferencias.

"Centro radical de tres circunferencias es el punto del plano que tiene igual potencia respecto de las tres circunferencias"
Se halla el eje radical de cada par de circunferencias. En este caso son tres.
El punto donde se intersecan los tres ejes posee igual potencia respecto de las circunferencias. Se lo denomina ***Centro Radical***



Sección áurea de un segmento. Número áureo.

"El segmento AB está dividido en *media y extrema razón* cuando la parte mayor (a) es medio proporcional entre el segmento AB y la parte menor (b)". Simbólicamente: $\frac{a+b}{a}=\frac{a}{b}$

La sección realizada se denomina *división áurea* y a la proporción se la llama *divina proporción o proporción áurea*.
La parte mayor, a, es *el segmento áureo* de AB.

Restando miembro a miembro "1" a la expresión dada anteriormente, se obtiene: $\frac{a}{b} = \frac{b}{a-b}$

Por lo tanto, b es el segmento áureo de a.

Retomando la primera proporción y considerando que el segmento AB tiene longitud 1 se tiene: $a^2 + a - 1 = 0$

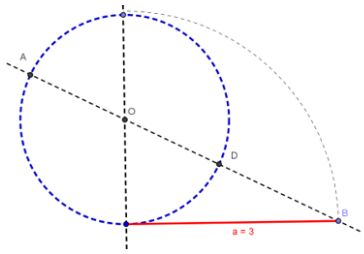
La solución positiva de la ecuación es: $\frac{-1+\sqrt{5}}{2}$

De la razón entre el segmento mayor y el menor se obtiene el número irracional *número de oro*:

$$\frac{a}{1-a} = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \cong 1{,}6180339887498948482045\ldots$$

$$\Phi = 1{,}6180339887498948482045\ldots$$

Conocido el segmento áureo de a= 3 cm determinar geométricamente a) el segmento total (AB) el segmento áureo de a y verificar analíticamente las medidas de los segmentos hallados.



¿Por qué el segmento AB, de la construcción, es el segmento total? Y ¿el segmento BD el segmento áureo de a?

$$Pot(B,C) = BD.BA = a^2 = AD^2$$

$$BD.BA = AD^2$$

$$\frac{BA}{AD} = \frac{AD}{BD}$$

Luego AD es medio proporcional entre AB y BD

Bibliografía: Puig Adam (1980) Geometría métrica // Wentworth –Smith (1980) Geometría plana y del espacio // Baldor (2001) Geometría plana y del espacio.