Trabajo Práctico N° 3
Polinomios

1. Sea el anillo $A = \mathbb{Z}$ y sean $p = (2, 1, 0, 0, ...)$ y $q = (3, 1, 0, 0, ...)$ definidos en dicho anillo. Calcular y determinar el grado de cada polinomio resultante:

   a) $p + q$ *c)* $p \cdot q$ *e)* p^2
   b) $p - q$ *d)* $2p + 3q$ *f)* q^3

2. Sean $p = (a_0, a_1, 0, 0, ...)$ y $q = (b_0, b_1, 0, 0, ...)$:

   a) Indique el grado de cada uno.
   b) Halle $p + q$ y $p \cdot q$ y sus respectivos grados.

3. Si $p = (1, -k, -k, 0, 0, ...)$ y $q = (-1, k, 3, 2k, 0, 0, ...)$ son polinomios definidos en $\mathbb{Z}$, hallar los valores que debe tomar k tal que $(p \cdot q)_1 - (p \cdot q)_3 = 4$.

4. Calcular $m \in \mathbb{R}$ para que el polinomio $P(x) = (m^2 - 1)x^3 + (m + 1)x^2 - x + 4$ sea:

   a) de tercer grado. *b)* de segundo grado. *c)* de primer grado.

5. Determine los valores reales de a y b para que el polinomio $x^3 + 6x^2 + ax + b$ sea un cubo perfecto.

6. Si el polinomio $P(x) = x^3 + mx^2 - 1$ es divisible por $x^2 + x - 1$ ¿Cuál es el valor de m?

7. Halle el valor de m y n para que el polinomio $P(x) = 2x^4 - x^3 + mx^2 - nx + 2$ sea divisible por $Q(x) = x^2 - x - 2$.

8. Halle $d(x) = mcd(p(x), q(x))$ si:

   a) $p(x) = x^3 + 2x^2 + x$ y $q(x) = x^2 + 1$
   b) $p(x) = x^4 + x^3 + 2x^2 + x + 1$ y $q(x) = x^3 - 2x^2 - 2x - 3$

   Obtenga también dos polinomios $u(x)$ y $v(x)$ tales que: $d(x) = u(x)p(x) + v(x)q(x)$.

9. Pruebe que los polinomios $P(x) = x^3+4x^2-4x-16$ y $Q(x) = x^3-2x^2+x$ son coprimos.

10. Pruebe si $(x - 1)^2$ es el máximo común divisor de $P(x) = x^3 - 2x^2 + 1$ y $Q(x) = x^4 - 2x^3 + x^2$.

11. Si $P(x)$ es un polinomio tal que $2P(x) + x^2P(x - 1) = x^2 + 2x + 2$, calcule $P(1)$.

12. Sea el polinomio $P(x) = (x^{n-1} + 2x^{n-2} + n)^n$. Si 2^n veces su término independiente es igual a la suma de sus coeficientes, calcular el valor de n.

13. Un polinomio $P(x)$ cuando se divide por el polinomio $Q(x) = x^2 - 4$ deja resto $R(x) = 3x + 5$. Calcular $P(-2)$.

14. Si $P(x + 5) = x^2 - 3x + 1$, calcular $P(8) + P(6)$.

15. Siendo $P(x^n + 1) = x - 1$, hallar n sabiendo que $P(3) = -\frac{7}{8}$.

16. Si el resto de la división del polinomio $P(x) = x^4 - 4x^3 - kx - 75$ por $(x - 5)$ es 10, encuentre el valor de k.

17. El polinomio $P(x) = x^n - 4x^3 + 2x + k$ es divisible por $(x + 2)$. Si $P(1) = 3$, halle el valor de k y el grado de $P(x)$.

18. Determine k de modo que al dividir $P(x) = 2x^{15} - kx^{13} + 5x^8 + 2kx^4 - 6$ por $S(x) = x + 1$ el resto sea igual a 2.

19. Al dividir el polinomio $P(x)$ por $(x - 1)$ da resto 2 y al dividirlo por $(x - 2)$ da resto 1. ¿Cuál es el resto de la división de $P(x)$ por el producto $(x - 1)(x - 2)$?

20. Si el residuo de dividir el polinomio $P(x) = ax^5 + bx^3 + cx - 8$ entre $(x + 3)$ es 6, determine entonces, el residuo de dividir $P(x)$ entre $(x - 3)$.

21. En $\mathbb{R}[x]$ hallar el resto de la división de $p(x) = x^{1237} - 1$ entre $q(x) = x^2 - 1$.

22. El polinomio $P(x) = 2x^3 - x^2 + ax + b$ en el que a y b son números reales, posee al número i como una de sus raíces. Calcular el producto $a \cdot b$.

23. Para cada uno de los siguientes polinomios, determine sus raíces y la multiplicidad de cada una de ellas:

    a) $P(x) = (x + 3)^2(x - 2)^3x$
    b) $Q(x) = (x^2 + 3x + 2)^2(x + 2)$
    c) $R(x) = (x^2 + 9)(x + 3i)^2(x - 3i)^2$
    d) $S(x) = x^3 + x^2 + x + 1$

24. En cada caso, demuestre si el primer polinomio es un factor del segundo:

    a) $P(x) = x - 1\,;\quad Q(x) = 4x^3 + 3x^2 - 5x - 2$
    b) $P(x) = x + 2\,;\quad Q(x) = x^3 - 2x^2 - 5x + 6$
    c) $P(t) = t + 1\,;\quad Q(t) = 4t^4 - 2t^2 - 1$
    d) $P(t) = 3t + 1\,;\quad Q(t) = 3t^4 + t^2 - 2t + 1$
    e) $P(t) = 3t + 1\,;\quad Q(t) = 9t^4 + 6t^3 + 10t^2 + 6t + 1$

25. Factorice completamente $P(x)$:

    a) Si una raíz de $P(x) = x^3 - 5x^2 - 17x + 21$ es 7.
    b) Si una raíz de $P(x) = 2x^4 - x^3 - 8x^2 + 4x$ es -2.
    c) Si $P(x) = x^5 - x^4 - 2x^3 + 2x^2 + x - 1$ tiene a 1 como raíz de multiplicidad 3.
    d) Si una raíz de $P(x) = x^4 + 2x^3 - 12x^2 + 2x + 35$ es $2 + i$.

26. El polinomio $P(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$ coeficientes reales y admite a 1 y $1 + i$ como raíces. ¿Cuánto vale b?

27. Obtenga el polinomio de grado 5 sobre $\mathbb{R}$ que tiene como raíces: $r_1 = 1 - i$, $r_2 = 3$, $r_3 = -1$ (de multiplicidad 2), sabiendo que $P(1) = 16$.

28. Sea $Q(z)$ un polinomio mónico de quinto grado, definido sobre el conjunto de los números complejos. Siendo $P(z) = z^3 + z^2 + z + 1$ un factor de $Q(z)$, $Q(0) = 2$ y $Q(1) = 8$, calcular la suma de los cuadrados de los módulos de las raíces de $Q(z)$.

29. Determine todas las raíces racionales del polinomio dado, y si es posible, halle todas sus raíces:

    a) $P(x) = x^4 - 49x^2 + 8x + 56$

    b) $P(x) = 2x^4 - 11x^3 + 11x^2 + 15x - 9$

    c) $P(x) = 2x^3 - x^2 - 4x + 3$

    d) $P(x) = 4x^3 + 14x^2 + 10x - 3$

    e) $P(x) = 2x^4 + 7x^3 + 4x^2 - 7x - 6$

    f) $P(x) = x^5 + 4x^4 - 4x^3 - 34x^2 - 45x - 18$

30. Halle el máximo común divisor entre los polinomios dados:

    a) $P(x) = 2x^4 + 2x^3 - 3x^2 - 2x + 1$; $Q(x) = x^3 + 2x^2 + 2x + 1$

    b) $P(x) = 3x^4 - x^2 - 2$; $Q(x) = 3x^2 + 2$

    c) $P(x) = x^3 + x^2 - 4x - 4$; $Q(x) = x^3 - 4x$; $S(x) = 2x^4 - 6x^2 - 8$

    d) $P(x) = x^4 - 9x^2$; $Q(x) = x^4 - 5x^3 + 6x^2$; $S(x) = x^4 - 6x^3 + 9x^2$