UNIVERSIDAD NACIONAL DE MISIONES
FACULTAD DE CIENCIAS EXACTAS, QUÍMICAS Y NATURALES
PROFESORADO EN MATEMÁTICA

ALGEBRA III
Práctico Nº1

Ejercicio Nº1: En los siguientes incisos se da una ecuación lineal y un conjunto de valores de las indeterminadas de la ecuación. Determine si los conjuntos dados constituyen el conjunto solución de las ecuaciones correspondientes.

a) $5x = 7$ $\quad \{x = 2\}$

b) $5x + 2y = 0$ $\quad \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \,/\, x = 0, y = 0\}$

c) $2x + 4y = 0$ $\quad \left\{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \,/\, x = 1,\ y = -\frac{1}{2}\right\}$

d) $x + 3y = 1$ $\quad \left\{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \,/\, x = t,\ y = 1 - \frac{1}{3}t,\ t \in \mathbf{R}\right\}$

e) $4x + 3y - z = 4$ $\quad \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 \,/\, x = t,\ \ y = s,\ \ z = 4t + 3s - 4,\ \ t, s \in \mathbf{R}\}$

Ejercicio Nº2:Determine el conjunto solución de la ecuación $ax + by = c$ en cada uno de los siguientes casos :

a) $a = 0,\ b = 0, c = 0$
b) $a = 0,\ b = 0, c \neq 0$
c) $a = 0,\ b \neq 0, c = 0$
d) $a = 0,\ b \neq 0, c \neq 0$
e) $a \neq 0,\ b = 0, c = 0$
f) $a \neq 0,\ b = 0, c \neq 0$
g) $a \neq 0,\ b \neq 0, c = 0$
h) $a \neq 0,\ b \neq 0, c \neq 0$

Ejercicio Nº3: Determine el conjunto solución de los siguientes sistemas de ecuaciones con dos incógnitas. En cada caso interprete geométricamente las ecuaciones del sistema, así como su solución.

a) $\begin{cases} 3x + 2y = 0 \\ x - y = 4 \end{cases}$ b) $\begin{cases} 5x + y = 1 \\ 5x + y = 0 \end{cases}$ c) $\begin{cases} 3x + 2y = 4 \\ 6x + 4y = 8 \end{cases}$

Ejercicio Nº4: Dado el siguiente sistema de ecuaciones lineales $\begin{cases} 4x - \ 5y = 0 \\ -12x + 15y = 0 \end{cases}$

a- Determine si el conjunto $S = \{(0,0)\}$ constituye el conjunto solución.
b- Sin resolver, comente cómo se modificaría la solución del sistema si se incorpora la ecuación $2x + y = 2$.
c- Verificar geométricamente las conclusiones obtenidas

Ejercicio Nº5: Utilice la eliminación Gaussiana o la eliminación de Gauss-Jordán para obtener la solución de los siguientes sistemas de ecuaciones.

a) $\begin{cases} 2x_1 + x_2 - x_3 = 0 \\ x_2 + x_3 = 0 \end{cases}$ b) $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 0 \\ x_1 - x_2 = 0 \\ x_2 + x_3 = 0 \end{cases}$ c) $\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 = 7 \\ 4x_1 - x_2 + 5x_3 = 4 \\ 6x_1 + x_2 + 3x_3 = 20 \end{cases}$

d) $\begin{cases} x_1 - x_2 + 7x_3 - x_4 = 0 \\ 2x_1 + 3x_2 - 8x_3 + x_4 = 0 \end{cases}$ e) $\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 2x_3 = 1 \\ x_1 + x_2 + x_3 = 2 \\ 2x_1 - x_2 + x_3 = 5 \end{cases}$ f) $\begin{cases} 3x_2 + 2x_1 = x_3 + 1 \\ 3x_1 + 2x_3 = 8 - 5x_2 \\ 3x_3 - 1 = x_1 - 2x_2 \end{cases}$

g) $\begin{cases} 3x_1 + 6x_2 - 6x_3 = 9 \\ 2x_1 - 5x_2 + 4x_3 = 6 \\ -x_1 + 16x_2 - 14x_3 = -3 \end{cases}$ h) $\begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 + x_4 = 2 \\ 3x_1 + 2x_3 - 2x_4 = -8 \\ 4x_2 - x_3 - x_4 = 1 \\ 5x_1 + 3x_3 - x_4 = -3 \end{cases}$ i) $\begin{cases} x_1 + 2x_2 - 4x_3 = 4 \\ -2x_1 - 4x_2 + 8x_3 = -9 \end{cases}$

Ejercicio Nº6:
i) De las siguientes matrices, diga cuáles están en la forma escalonada, cuáles en la forma escalonada reducida o cuáles no están en ninguna de estas dos formas.

a) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ b) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 3 & 1 \end{pmatrix}$ c) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

d) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ e) $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 2 & 3 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

ii) Suponga que las matrices dadas representan matrices aumentadas de sistemas de ecuaciones lineales. Determine las soluciones de estos sistemas.

Ejercicio Nº7: Sea el sistema: $\begin{cases} 6x + 2y = 4 \\ ax + by = 2 \end{cases}$.

Analizar, justificando su respuesta, si existen valores para a y b tales que el sistema resulte:
(a) compatible determinado; **(b)** compatible indeterminado; **(c)** incompatible.

Ejercicio Nº8: Considere el sistema de ecuaciones lineales

$$\begin{cases} -2ax_1 - 5x_2 + 2x_3 = 1 \\ 2x_1 + x_2 + ax_3 = 1 \\ 2x_1 + 3x_2 + ax_3 = 2 \end{cases}$$

i) Demuestre que independientemente del valor de “a “, el sistema posee solución única.
ii) Determine tal solución.

Ejercicio Nº9: Determinar para qué valores de "k" los siguientes sistemas tienen:
i) solución única
ii) ninguna solución
iii) más de una solución

a) $\begin{cases} kx + y + z = 1 \\ x + ky + z = 1 \\ x + y + kz = 1 \end{cases}$ b) $\begin{cases} x + 2y + kz = 1 \\ 2x + ky + 8z = 3 \end{cases}$ c) $\begin{cases} x - 3z = -3 \\ 2x + ky - z = -2 \\ x + 2y + kz = 1 \end{cases}$

Ejercicio Nº10:
i) Establecer para qué valores de **a**, **b** y **c** los siguientes sistemas de ecuaciones tienen asegurada solución.
ii) Caracterizar la solución encontrada.

$\begin{cases} x + 2y - 3z = a \\ 3x - y + 2z = b \\ x - 5y + 8z = c \end{cases}$ b) $\begin{cases} x - 2y + 4z = a \\ 2x + 3y - z = b \\ 3x + y + 2z = c \end{cases}$ c) $\begin{cases} 2x - y = a \\ x - 2y = b \\ -x + y = c \end{cases}$

Ejercicio Nº11: Dadas las matrices:

$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$ $B = \begin{pmatrix} -2 & 3 & 0 \\ 1 & -4 & 1 \end{pmatrix}$ $C = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$ $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$

$E = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \end{pmatrix}$ $F = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ $G = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ $H = \begin{pmatrix} 1/3 & 0 & 0 \\ 0 & 1/6 & 0 \\ 0 & 0 & 1/3 \end{pmatrix}$ $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Calcular:

a) A.B b) C.F c) E.C
d) $B.(D+G)$ e) $3A - 2B.C$ f) $F.E - 3B$
g) $D.I - 1/3G$ h) $G.(2D - 3I)$ i) $2I - 1/2G.H$

Ejercicio Nº12:

i) ¿Cuál de las siguientes afirmaciones es cierta cuando se halla la diferencia de dos matrices?.
a) Las matrices deben ser cuadradas.
b) Las matrices deben ser ambas matrices filas o matrices columnas.
c) Las matrices deben ser de la misma dimensión.
d) Una matriz debe ser una matriz fila y la otra una matriz columna.

ii) ¿Cuál de las siguientes afirmaciones sobre el producto **A.B** es cierta si **A** es una matriz de 4x5?
a) **B** debe tener 4 filas y el resultado tendrá 5 columnas.
b) **B** debe tener 5 columnas y el resultado será una matriz cuadrada.
c) **B** debe tener 4 columnas y el resultado tendrá 5 filas.
d) **B** debe tener 5 filas y el resultado tendrá 4 filas.

iii) ¿Cuáles de las siguientes afirmaciones es cierta para las matrices **A** y **B** si **A.B** es una matriz columna?.
a) **B** es una matriz columna.
b) **A** puede ser una matriz fila.
c) **A** y **B** son matrices cuadradas.
d) El número de filas de **A** debe ser igual al número de columnas de **B**.

Ejercicio Nº13:

Sean las matrices A= $\begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 \\ 4 & 1 & 7 \end{pmatrix}$, B= $\begin{pmatrix} 0 & -1 & 3 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, C= $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix}$

Encuentre la matriz D, tal que A + 2B – C + D = 0_{2x3}

Ejercicio Nº14: Encuentre las componentes de la matriz $\mathbf{A} = (a_{ij})$ a partir de las especificaciones dadas en cada caso:

a) $\mathbf{A}$ es de 3×3 y $a_{ij} = \begin{cases} 0 \text{ si } i \neq j \\ 1 \text{ si } i = j \end{cases}$ b) $\mathbf{A}$ es de 3×3 y $a_{ij} = 0$ si $i > j$
c) $\mathbf{A}$ es de 2×2 y $a_{ij} = 0$ si $i \neq j$ d) $\mathbf{A}$ es de 3×4 y $a_{ij} = 2i + 3j$
e) $\mathbf{A}$ es de 2×4 y $a_{ij} = i + j$ f) $\mathbf{A}$ es de 2×3 y $a_{ij} = (-1)^{i+j}(i)$

Ejercicio Nº15:

i) ¿ Cuál de las siguientes afirmaciones es ciertas para la multiplicación de dos matrices **A** y **B**?.
a) Se puede realizar sólo si **A** y **B** son matrices cuadradas.
b) Cada elemento c_{ij} es el producto de a_{ij} y b_{ij}.
c) **A.B = B.A**
d) Se puede realizar sólo si el número de columna de **A** es igual al número de filas de **B**.

ii) ¿Cuál de las siguientes afirmaciones sobre el producto **A.B** es cierta si **A** es una matriz de 4x5?
a) **B** debe tener 4 filas y el resultado tendrá 5 columnas.
b) **B** debe tener 5 columnas y el resultado será una matriz cuadrada.
c) **B** debe tener 4 columnas y el resultado tendrá 5 filas.
d) **B** debe tener 5 filas y el resultado tendrá 4 filas.

iii) ¿Cuál de las siguientes afirmaciones es cierta para las matrices **A** y **B** si **A.B** es una matriz columna?.
a) **B** es una matriz columna.
b) **A** es una matriz fila.
c) **A** y **B** son matrices cuadradas.
d) El número de filas de **A** debe ser igual al número de columnas de **B**.

Ejercicio Nº16: Sea $\mathbf{B}$ una matriz cualquiera de $M_3(\mathbf{R})$ y $\mathbf{A}$ la matriz cuya dimensión se establece en cada caso y tal que $a_{ij=1} \quad \forall i, \forall j$

a) $\mathbf{A} \in M_{1,3}(\mathbf{R})$ b) $\mathbf{A} \in M_{3,1}(\mathbf{R})$ c) $\mathbf{A} \in M_3(\mathbf{R})$

Caracterizar las matrices producto ($\mathbf{A}.\mathbf{B}$ y $\mathbf{B}.\mathbf{A}$) que estén definidas.

Ejercicio Nº17:

i) Dadas la matrices triangulares superiores A y B $\in$ M_3 (R) :

a) Determinar cuáles son las características de A **.** B.
b) ¿Qué ocurriría si fuesen triangulares inferiores?.

ii) Dadas las matrices diagonales A y B $\in$ M_3 (R), determinar las características del producto A **.** B .

Ejercicio Nº18: A partir de las definiciones de suma de matrices y del producto por escalares por matrices, usuales:

$$(a_{ij}) + (b_{ij}) = (a_{ij} + b_{ij}) \quad \text{y} \quad \alpha(a_{ij}) = (\alpha a_{ij})$$

i) Siendo **A**, **B** y **C** matrices cualesquiera del conjunto $M_{m,n}(\mathbf{R})$, α y β números reales, demostrar que se cumple :

1) $\mathbf{A}+\mathbf{B}=\mathbf{B}+\mathbf{A}$
2) $\mathbf{A}+(\mathbf{B}+\mathbf{C})=(\mathbf{A}+\mathbf{B})+\mathbf{C}$
3) Existe una matriz nula tal que $\mathbf{A}+\mathbf{0}=\mathbf{0}+\mathbf{A}=\mathbf{A}$
4) Dada la matriz **A**, existe (-**A**) tal que $\mathbf{A}+(-\mathbf{A})=(-\mathbf{A})+\mathbf{A}=\mathbf{0}$
5) $\alpha(\mathbf{A}+\mathbf{B})=\alpha\,\mathbf{A}+\alpha\,\mathbf{B}$
6) $(\alpha+\beta)\mathbf{A}=\alpha\,\mathbf{A}+\beta\,\mathbf{A}$
7) $(\alpha\,\beta)\mathbf{A}=\alpha(\beta\mathbf{A})$
8) 1.**A=A**

ii) Determinar la estructura algebraica del par $(M_{m,n}(\mathrm{R}),+)$

Ejercicio Nº19: Utilizando la definición de producto $(c_{ij}) = (a_{ik}).(b_{kj}) = \left(\sum_{k=1}^{p} a_{ik}.b_{kj}\right)$ y siendo **A**, **B** y **C** matrices de órdenes tales que las operaciones indicadas tienen sentido y α un número real, se cumplen las siguientes propiedades:

1) $\mathbf{A}.(\mathbf{B}.\mathbf{C})=(\mathbf{A}.\mathbf{B}).\mathbf{C}$
2) $\mathbf{A}.(\mathbf{B}+\mathbf{C})=\mathbf{A}.\mathbf{B}+\mathbf{A}.\mathbf{C}$
3) $(\mathbf{A}+\mathbf{B}).\mathbf{C}=\mathbf{A}.\mathbf{C}+\mathbf{B}.\mathbf{C}$
4) $\alpha(\mathbf{A}.\mathbf{B})=(\alpha\,\mathbf{A}).\mathbf{B}=\mathbf{A}(\alpha\,\mathbf{B})$
5) $\mathbf{I}.\mathbf{A}=\mathbf{A},\ \mathbf{A}.\mathbf{I}=\mathbf{A}$ donde **I** es la matriz identidad.
6) $\mathbf{0}.\mathbf{A}=\mathbf{0},\ \mathbf{A}.\mathbf{0}=\mathbf{0}$ donde $\mathbf{0}$ es la matriz nula.

i) Verificar el cumplimiento de las propiedades enunciadas en 2) , 4) , 5) y 6)

ii) Establecer la estructura de $(\mathrm{M_n}(\mathrm{R}),+,\cdot)$

Ejercicio Nº20: Si en el conjunto $M_n(\mathbf{R})$ se define el producto usual de matrices, es decir $(c_{ij}) = (a_{ij}).(b_{ij}) = \left(\sum_{k=1}^{n} a_{ik}.b_{kj}\right)$, éste resulta ser una ley de composición interna.

i) Analizar sus propiedades y la existencia de elementos distinguidos.

ii) ¿Es el producto doblemente distributivo respecto a la suma usual de matrices, en $M_n(\mathbf{R})$?.

iii) Establecer la estructura de $(M_n(\mathrm{R}),+,.)$.

Ejercicio Nº21: Las siguientes propiedades se deducen de la aritmética de los números reales:

$$\text{Si } ab = ac \text{ y } a \neq 0, \text{ entonces } b = c$$

$$\text{Si } a.d = 0, \text{ entonces } a = 0 \vee d = 0$$

Utilice las siguientes matrices para averiguar si las propiedades anteriores son válidas para la aritmética de las matrices.

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \qquad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \qquad \mathbf{C} = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \qquad \mathbf{D} = \begin{pmatrix} 3 & 7 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Ejercicio Nº22:

Sea $\mathbf{A}$ una matriz cuadrada de orden *n*. Se dice que la matriz $\mathbf{B}$ de orden *n* "conmuta" con la matriz $\mathbf{A}$ si $\mathbf{A}.\mathbf{B} = \mathbf{B}.\mathbf{A}$.

i) ¿Cuáles matrices conmutan con la matriz identidad?.

ii) ¿Cuáles matrices conmutan con la matriz nula?.

iii) Dada la matriz $\mathbf{A}$, determinar en cada caso la estructura de la matriz $\mathbf{B}$ de modo que $\mathbf{B}$ conmute con $\mathbf{A}$.

a) $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ b) $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ c) $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

Ejercicio Nº23:

i) Sea A = $\begin{pmatrix} a & a \\ 0 & a \end{pmatrix}$

a) encuentre A^2 y A^3.
b) caracterice A^k donde *k* es cualquier entero no negativo.

ii) Sea A una matriz diagonal de orden 2.

a) Determine A^2 y A^3
b) Encuentre A^k donde *k* es cualquier entero positivo.

iii) Caracterice I^k donde I es la identidad de orden 2 y *k* es un entero no negativo

Ejercicio Nº24: Sean A y B matrices cualesquiera de n x n , analizar si las siguientes afirmaciones son válidas:

a) $A^2 - I = (A - I) (A + I)$
b) $(A + I)^2 = A^2 + 2A + I$
c) $A^3 - I = (A - I) (A^2 + 2A + I)$
d) $A^2 - B^2 = (A - B) (A + B)$
e) $(A + B)^2 = A^2 + 2AB + B^2$

Ejercicio Nº25**:** Indicar si las siguientes afirmaciones son V o F:

i) $\mathbf{A}^t$ está definida sólo si **A** es una matriz cuadrada.

ii) Si **A** es una matriz de $n \times n$, entonces la diagonal principal de $\mathbf{A}^t$ es la misma que la diagonal principal de **A**.

iii) $\left[\left(A^t\right)^t\right]^t = A^t$

iv) La traspuesta de una matriz triangular inferior es triangular superior

Ejercicio Nº26: Dada la matriz $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ determinar bajo qué condiciones es invertible, en tal caso obtener una fórmula de la inversa.

Ejercicio Nº27: Calcule la inversa de las siguientes matrices, utilizando el método de Gauss-Jordan.

$$A = \begin{pmatrix} -3 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 4 & -5 \end{pmatrix} \qquad C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & 4 \end{pmatrix} \qquad D = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 5 & 7 & 1 \\ -1 & 1 & 4 \end{pmatrix}$$

Ejercicio Nº28: Indicar si las siguientes afirmaciones son V o F.

i) $\mathbf{A}^t$ está definida sólo si **A** es una matriz cuadrada.

ii) Si **A** es una matriz de $n \times n$, entonces la diagonal principal de $\mathbf{A}^t$ es la misma que la diagonal principal de **A**.

iii) $\left[\left(A^t\right)^t\right]^t = A^t$

iv) La traspuesta de $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, es : a) $\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 2 & 0 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$ b) $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 0 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$ c) $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 3 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$ d) $\begin{pmatrix} -1 & -2 & -3 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

Ejercicio Nº29: Demostrar que:

Propiedades de las matrices simétricas y antisimétricas

- El producto de toda matriz por su traspuesta es una matriz simétrica: $\forall \mathbf{A} \in M_{m,n}$: $\mathbf{A}.\mathbf{A}^t$ es simétrica.
- La suma de toda matriz cuadrada y de su traspuesta es simétrica: $\forall \mathbf{A} \in M_n$: $\mathbf{A}+\mathbf{A}^t$ es simétrica
- La diferencia de toda matriz cuadrada con su traspuesta es antisimétrica:

$\forall \mathbf{A} \in M_n$: $\mathbf{A}-\mathbf{A}^t$ es antisimétrica.

Propiedades de las matrices inversibles

- Si **A** y **B** son inversibles, entonces **A.B** es inversible y $(\mathrm{A.B})^{-1} = \mathrm{B}^{-1}.\mathrm{A}^{-1}$.
- Si **A** es inversible, entonces $k.\mathbf{A}$ es inversible y $(k.\mathrm{A})^{-1} = k^{-1}.\mathrm{A}^{-1}$.
- Si **A** es inversible, entonces $\mathbf{A}^{-1}$ es inversible y $\left(\mathrm{A}^{-1}\right)^{-1} = \mathrm{A}$.

Propiedades de las matrices ortogonales

- **A** es ortogonal sí y solo sí $\mathbf{A}.\mathbf{A}^t = \mathbf{I}$
- Si **A** y **B** son ortogonales, entonces **A.B** es ortogonal.

Ejercicio Nº30:

Demostrar que si $\mathbf{A}$ y $\mathbf{B}$ son matrices diagonales en $M_n(\mathbf{R})$, entonces $\mathbf{A}.\mathbf{B}$ es diagonal y $\mathbf{A}.\mathbf{B} = \mathbf{B}.\mathbf{A}$.