VECTORES

<u>TRABAJO PRÁCTICO Nº 3</u>

A- Producto escalar - Aplicaciones

1. Sean los vectores

i) $\vec{u} = \breve{\jmath} + 4\breve{\imath}$ y $\vec{v} = 3\breve{\imath} - 2\breve{\jmath}$, **ii)** $\vec{u} = -\breve{\imath} + \breve{\jmath} - 4\breve{k}$ y $\vec{v} = \frac{3}{2}\breve{\imath} + 2\breve{\jmath} - \frac{1}{2}\breve{k}$

Realizar los cálculos indicados y responder los interrogantes planteados justificando, en ambos casos.

a) El producto escalar entre $\vec{u}$ y $\vec{v}$. ¿ $\vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{v} \cdot \vec{u}$?

b) El ángulo determinado por los mismos. ¿ $\vec{u}$ $\vec{v}$?

c) La proyección escalar de $\vec{u}$ en la dirección de $\vec{v}$ e interprete gráficamente.

d) La proyección vectorial de $\vec{u}$ en la dirección de $\vec{v}$ e interprete gráficamente.

2. Sean los vectores $\vec{m} = -2\breve{\imath} + 3\,\breve{\jmath} + \breve{k}$ y $\vec{p} = \breve{\imath} + c\,\breve{k}$. Halle el valor de c para que resulten perpendiculares. Para el valor hallado, grafique ambos vectores en un mismo sistema.

3. Dados $\vec{u} = -2\breve{\imath} + 9\breve{\jmath}$ y $\vec{v} = -\breve{\imath} + \breve{\jmath}$. Encuentre:

   a) $\vec{v} \cdot \vec{u}$, b) $proy_{\vec{u}}\,\vec{v}$ c) $\overrightarrow{proy}_{\vec{u}}\,\vec{v}$ d) $proy_{\vec{v}}\,\vec{u}$ e) $\overrightarrow{proy}_{\vec{v}}\,\vec{u}$.

   Verifique sus soluciones analíticas usando herramientas **gráficas** y **algebraicas** del software ***GeoGebra***.

4. Sabiendo que $\vec{u}$ = (2; 3, -1) y $\vec{v}$ = (-4; b, 2), determine el valor de "b" tal que:

   a) $\vec{u}$ y $\vec{v}$ sean ortogonales

   b) $\vec{u}$ y $\vec{v}$ sean paralelos

   c) El ángulo entre $\vec{u}$ y $\vec{v}$ sea $\frac{\pi}{4}$.

B- Producto vectorial - Aplicaciones

5. a) Determine analíticamente las componentes de un vector perpendicular a los vectores $\overrightarrow{m} = -\jmath + 3k$ y $\vec{p} = 2\imath - k + \jmath$.

   b) Represente la solución hallada en el ítem a) usando el software ***GeoGebra*** y verifique la perpendicularidad de vectores $\vec{m}\, x\, \vec{p}$ respecto a los vectores $\vec{m}$ y $\vec{p}$ calculando los ángulos convenientes entre los vectores.

6. Sean los vectores $\vec{u} = 2\imath + 3\jmath - k$, $\vec{v} = -2\imath + \jmath - 2k$ y $\vec{w} = \imath - 2\jmath + 3k$.

   a) Calcular:

   a.1) $\vec{u} \times \vec{v}$ a.2) $\vec{w} \times \vec{v}$ a.3) $(\vec{u} \times \vec{v}) \cdot \vec{w}$ a.4) $(\vec{u} \times \vec{v}) \times \vec{w}$

   b) Determine el área del paralelogramo que forman los vectores: $\vec{u}$ y $\vec{w}$

   c) Hallar un vector $\vec{n}$ que sea perpendicular a $\vec{v}$ y $\vec{w}$.

7. Sean los vectores $\vec{r} = (1\,, -1\,, 2)$ y $\vec{a} = (0\,,\ 1\,, -1)$ halle las componentes de un vector perpendicular a $\vec{r}$ y a $\vec{a}$ de módulo 5.

C- Producto mixto - Aplicaciones

8. Analice si los siguientes vectores están contenidos en un mismo plano o no: $\vec{a} = (1; 2; 0)$, $\vec{b} = (-1; -2; 0)$ y $\vec{c} = (0; 1; 0)$.

9. Encuentre el valor de la tercer componente de $\vec{w}$, "c", para que los siguientes vectores sean coplanares: $\vec{u}$ = (-3; 2; 5), $\vec{v}$ = (1; -2; 3) y $\vec{w}$ = (3; 4; c).

10. Calcule el volumen del paralelepípedo que tiene por aristas a los vectores: $\vec{a} = (1; -1; 3)$, $\vec{b} = (-2; 2; 1)$ y $\vec{c} = (3; -2; 5)$.

11. Halle el volumen del tetraedro cuyos vértices son P(1, 1, 1), Q (1, 2, 3), R(1, 1, 2) y S(3, -1, 2). Grafique el tetraedro.

D- Realice las siguientes actividades:

12. Los puntos $A\left(-\frac{1}{6}\ ,\ \frac{1}{3}\ ,-\frac{1}{2}\right)$, $B\left(-\frac{1}{3}\ ,\ 0\ ,-\frac{1}{6}\right)$, y $C\left(0\ ,\ \frac{2}{3}\ ,0\right)$, son las coordenadas de los vértices de un triángulo. Calcule: a) el área, b) el perímetro, c) los ángulos interiores. d) Halle un versor con sentido opuesto a $\overrightarrow{AB}$.

13. Sean $\vec{u}$ = (2, 4, 0) y $\vec{w} = 3\breve{\imath} + \breve{\jmath} - \breve{k}$. Halle los vectores $\vec{v}$ y $\vec{t}$ tales que: $\vec{t}$ sea ortogonal a $\vec{u}$, $\vec{v}$ sea paralelo a $\vec{u}$ y $\vec{w} = \vec{v} + \vec{t}$.

14. Dados los vectores: $\vec{a} = (3;\ 1;\ 0)$, $\vec{b} = (4\ ;\ 2;\ -1)$ y $\vec{c} = (2\ ;\ 1\ ;\ -2)$. Halle un vector $\vec{v}$ ortogonal a $\vec{a}$ y a $\vec{b}$, y tal que $proy_{\vec{c}}\ \vec{v} = 6$.

15. Responda a los siguientes interrogantes justificando sus respuestas.

    a) ¿El resultado de un producto escalar puede ser una cantidad negativa? De ser así, ¿en qué casos?

    b) ¿Cómo son los vectores $\vec{a} = (a_1\ , a_2\ , a_3)$ y $\vec{b} = (b_1\ , b_2\ , b_3)$ sabiendo que $\vec{a} \times \vec{b} = \vec{0}$?

    c) Sean los vectores $\vec{a} = (a_1\ , a_2\ , a_3)$ y $\vec{b} = (b_1\ , b_2\ , b_3)$ demuestre que:

    c.1) $\vec{a} \times \vec{b} = \vec{b} \times \vec{a}$ ¿A qué es igual este producto si $\vec{a} = \vec{b}$?

    c.2) $\vec{a} \times \vec{b} = -\vec{b} \times \vec{a}$

    c.3) $-(\vec{a} \times \vec{b}) = -\vec{a} \times \vec{b} = \vec{a} \times (-\vec{b})$

16. **a)** Analice si se pueden realizar las siguientes operaciones. De no ser así, explique por qué. De ser así, establezca si son vectores o escalares:

    a.1) $\vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c})$ **a.2)** $\vec{a} \times (\vec{b} \cdot \vec{c})$ **a.3)** $\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c})$

    a.4) $(\vec{a} \cdot \vec{b}) \times \vec{c}$ **a.5)** $(\vec{a} \cdot \vec{b}) \times (\vec{c} \cdot \vec{d})$ **a.6)** $(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot (\vec{c} \times \vec{d})$

    b) Sean los versores fundamentales $\breve{\imath}$, $\breve{\jmath}$ y $\breve{k}$, calcule:

    b.1) $(\breve{\imath} \times \breve{\jmath}) \times \breve{k}$ **b.2)** $\breve{\imath} \times (\breve{\jmath}\ x\ \breve{k})$ ¿Qué conclusiones se pueden sacar?

    c) Determine $(\breve{\imath} \times \breve{\jmath})$, $(\breve{\jmath} \times \breve{\imath})$ y $(-\breve{\imath} \times \breve{\jmath})$. De acuerdo al resultado obtenido, ¿qué proposición verdadera puede formular?

Para pensar

1. ¿Del producto escalar entre vectores resulta otro vector?
2. Considerando el vector $\vec{w} = (a, b)$, es cierta la siguiente igualdad $\vec{w}.\vec{w} = |\vec{w}|^2$
3. Si el producto escalar $\vec{w}.\vec{v}$=0, ¿cuál es el ángulo entre los vectores? Explicar.
4. Explicar la proyección escalar y vectorial de un vector sobre la dirección del otro.
5. El producto vectorial entre vectores permite obtener otro vector, ¿Qué características tiene ese vector?
6. ¿El producto vectorial es conmutativo?
7. Explicar por qué la longitud del producto vectorial es el área del paralelogramo determinado por estos vectores.
8. El producto mixto entre vectores permite saber si los vectores son coplanares. Explicar. ¿Qué significa que sean coplanares?