Trabajo Práctico N° 3
Integrales Múltiples

1. Calcular las siguientes integrales iteradas:
   (a) $\int_1^2 \int_0^1 (4+5xy)dxdy$
   (b) $\int_0^1 \int_0^3 \sqrt{x+y}dxdy$
   (c) $\int_3^4 \int_3^4 (\frac{x}{y}+\frac{y}{x})dxdy$
   (d) $\int_0^{\ln 5} \int_0^{\ln 2} e^{4x-y}dxdy$
   (e) $\int_1^3 \int_0^2 \int_0^{1-z^2} 4ze^{3y}dxdzdy$
   (f) $\int_0^1 \int_0^1 \int_0^1 \frac{1}{x+y+z+1}dxdydz$
   (g) $\int_0^2 \int_0^{2\sqrt{x}} \int_0^{\sqrt{\frac{4x-y^2}{2}}} xdzdydx$
   (h) $\int_0^1 \int_0^{1-x} \int_0^{1-x-y} xyzdzdydx$

2. Calcular el valor de las siguientes integrales dobles:
   (a) $\iint_R xye^y dA$, donde $R = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 | 0 \leq x \leq 2, 0 \leq y \leq 1\}$
   (b) $\iint_R \frac{4+x^2}{1+y^2} dA$, donde $R = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 | 0 \leq x \leq 3, 0 \leq y \leq 1\}$
   (c) $\iint_R \frac{xy^2}{x^2+4} dA$, donde $R = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 | 0 \leq x \leq 2, -2 \leq y \leq 2\}$
   (d) $\iint_R \frac{y}{x^2+y^2} dA$, donde $R = [1,2] \times [-1,1]$

3. Sea R la región determinada por las curvas $y = x$ e $y = \frac{x^2}{2}$. Calcular $\iint_R xydA$:
   (a) usando el orden de integración $dxdy$;
   (b) usando el orden de integración $dydx$.

4. Dada la integral $\iint_R (x^2+y^2)dA$, donde R es la región determinada por las curvas $y = x^2$, $y = 3-x$, $y = 1$ y $y = 0$. Calcular la integral:
   (a) usando el orden de integración $dxdy$;
   (b) usando el orden de integración $dydx$.

5. Sea la integral
$$I = \int_0^1 \int_{-x^3}^{x} f(x,y)dydx + \int_1^4 \int_{x-2}^{x} f(x,y)dydx$$
   (a) Dibujar la región de integración.
   (b) Reescribir la integral en el orden $dxdy$.

6. Sea la integral
$$I = \int_{-2}^{-1} \int_{4-4(x+2)^2}^{x+6} dydx + \int_{-1}^{0} \int_{x+1}^{x+6} dydx$$
.

(a) Dibujar la región de integración.

(b) Reescribir la integral invirtiendo el orden de integración.

7. Sea Q el sólido limitado por las superficies $z = 1 - x^2$ y $x + y = 1$ en el primer octante. Calcule el volumen del sólido usando como región de integración cada una de las proyecciones del sólido sobre los planos XY, YZ, XZ.

8. Sea Q el sólido limitado por las superficies $x^2 + z^2 = 4$, $x + y = 5$, $z = 2$, $y = z = 0$ en el primer octante. Calcule el volumen del sólido usando como región de integración cada una de las proyecciones del sólido sobre los planos XY, YZ, XZ.

9. Calcular la integral $\iiint_Q 2x\cos(y+z)dV$, siendo Q el sólido limitado por las superficies $y + z = \pi$, $y = \sqrt{x}$, $x = z = 0$ y utilizando el orden $dxdzdy$.

10. Dado el sólido Q limitado por $z = 0$, $y + 2z = 2$, $x = 0$, $y = 2 - 2x^2$ y $y = 1 - x^2$. Usando integrales triples, plantear las integrales necesarias para calcular el volumen de Q proyectando sobre cada uno de los planos coordenados.

11. Calcular el volumen de los sólidos que se detallan a continuación:

    (a) $Q = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 | y^2 = -2(z - 8), x = 0, y = 0, z = 0, x = 3, x + y = 4\}$

    (b) $Q = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 | 4z = x^2 + y^2, x = 0, y = 0, z = 4, y = 3\}$

12. Considerar la siguiente integral $\iint_R (x^2 - y)dA$, donde R es el paralelogramo con vértices en $A(0,0)$, $B(1,2)$, $C(3,3)$ y $D(2,1)$. Calcular el valor de la integral doble y compruebe que se obtiene el mismo valor realizando el cambio de coordenadas $u = y - 2x$ y $v = y - \frac{1}{2}x$.

13. Calcular el valor de la integral doble $\iint_R \frac{y^2}{x^2}dA$, donde R es la región en el primer cuadrante acotada por las rectas $y = 4x$, $x = 3y$ y las hipérbolas $y = 1/x$ e $y = 4/x$. Utilice el cambio de coordenadas dado por $u = \frac{y}{x}$ y $v = xy$.

14. Usando coordenadas polares, calcular el área de la región R formada entre la curva $x^2 + y^2 + 2x = \sqrt{x^2 + y^2}$ y el eje x.

15. Calcular el volumen del sólido Q limitado por las superficies $z = \frac{1}{1+x^2+y^2}$, $x^2 + y^2 = 1$ y $z = 0$.

16. Calcular $\iint_R \frac{xy}{(1+x^2+y^2)^2}dA$ siendo $R = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | x^2 + y^2 \leq 1, x \geq 0, y \geq 0\}$.

17. Sea Q el sólido limitado por $y = 1$, $y = x^2 + z^2$ e $y = 4$. Utilizando coordenadas cilíndricas, calcular $\iiint_Q \frac{1}{\sqrt{x^2+z^2}+1}dV$.

18. Se sabe que la ecuación de una esfera es $x^2 + y^2 + z^2 = r^2$. Utilizando integrales triples en coordenadas cilíndricas, verificar que el volumen de la esfera es $V = \frac{4}{3}\pi r^3$.

19. Considerar el sólido Q limitado por el cono de ecuación $z^2 = x^2 + y^2$ y el plano $z = 1$.

    (a) Calcular $\iiint_Q 2zdV$.

    (b) Calcular el volumen de Q.

20. Utilizar coordenadas esféricas para calcular $\iiint_Q (x^2+y^2)dV$ donde Q es la esfera $(x-1)^2+y^2+z^2=1$.

21. Calcular el volumen del sólido limitado por $(x^2+y^2+z^2)^3=z^4$.

22. Calcular el volumen del toro $\rho = 4 \operatorname{sen} \phi$.

23. Hallar el centro de masa de una placa plana homogénea en forma de la región del primer octante del plano acotada por las cuervas $y=x$, $y=x^2$.

24. Hallar el centro masa de una placa plana en forma de semianillo superior entre las dos circunferencias centradas en el origen de radios 1 y 2. La densidad en un punto (x,y) de la lámina es proporcional a la distancia del punto al origen.

Ejercicios complementarios

1. Calcular
$$\iiint_A f(x,y,z)dxdydz$$
en donde $A=[0,1]^3$ y $f(x,y,z)=max(x,y,z)$.

2. Sea f una función continua real de variable real. Expresar la integral
$$\int_a^b \left(\int_x^b f(x)f(y)dy \right) dx$$
en términos de la integral $\int_a^b f(x)dx$.
   (a) Utilizar el resultado anterior para calcular:
$$\iint_A \frac{xy}{(4+x^2)(4+y^2)} dydx$$
   siendo $A=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 | x\le y\le \sqrt{2}, 0\le x\le \sqrt{2}\}$.

3. Sea Q el sólido limitado por las superficies $4z=x^2+y^2$, $y=3$, $y=1$, $z=4$ y $x=0$.
   (a) Dibujar la región de integración sobre los planos XY, YZ, XZ.
   (b) Calcular el volumen del sólido usando cada una de las regiones antes planteadas.

4. Dado el sólido Q limitado por $z=4-x^2$, $y+z=6$, $y=x$, $y=5$, $z=0$ y $x=0$. Usando integrales triples, plantear las integrales necesarias para calcular el volumen de Q proyectando sobre cada uno de los planos coordenados.

5. Plantear las integrales triples necesarias para calcular el volumen del sólido Q si este sólido está limitado por $x^2+y^2=4$, $z+y=2$, $y=1$, $x=0$, $y=0$ y $z=0$, en el primer octante.

6. Calcular el volumen del sólido limitado por la esfera $x^2+y^2+z^2=4$ y el cilindro $x^2+(y-1)^2=1$, para $z\ge 0$.

7. Calcular el volumen del sólido limitado por la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 9$ y los cilindros $x^2 + z^2 = 4$ y $x^2 + z^2 = 1$.

8. Calcular el volumen del sólido limitado por la porción de paraboloide $z = 4 - x^2 - y^2$, la porción de esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 16$ y el plano $x = y$, en el primer octante.

9. Calcular el volumen de los siguientes sólidos:

   (a) limitado superiormente por el paraboloide $z = 4 - x^2 - y^2$ e inferiormente por el plano $z = 0$.

   (b) $Q = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 | x^2 + y^2 \leq z \leq a\}$.

   (c) acotado por la esfera $r^2 + z^2 = a^2$ y el cilindro $r = a\cos\theta$.

   (d) cono de altura 10 y amplitud $30°$ respecto al eje z.

   (e) limitado superiormente por la superficie esférica $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ e inferiormente por el cono de amplitud $45°$, vértice en el origen y eje z.

   (f) limitado por la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ y $x^2 + y^2 + z^2 = b^2$, con $b > a$ e interior al cono $x^2 + y^2 = z^2$.

10. Considerar el paralelepípedo Π con vértices en: $A(0, 0, 0)$, $B(0, 1, 0)$, $C(2, 1, 0)$, $D(2, 0, 0)$, $A'(0, 1, 3)$, $B'(0, 2, 3)$, $C'(2, 2, 3)$, $D'(2, 1, 3)$.

    (a) Hallar su volumen usando una sola integral simple.

    (b) Hallar su volumen usando una sola integral doble.

    (c) Hallar su volumen usando una sola integral triple.

    (d) Hallar la masa del paralelepípedo si la densidad de masa en un punto $p(x, y, z) = \frac{1}{5-z}$.