Sucesiones de Números Reales : Lo Esencial

por Juan Carlos Bustamante

25.09.2009 versión 1.2

Preambulo.

Estas notas[1] presentan los conceptos básicos acerca de sucesiones de números reales. No hay ninguna pretensión de originalidad, son una adaptación y traducción de una parte importante del capítulo 2 del libro *Introduction à l'analyse*[2] . El material correspondiente se halla desarrollado bastante más tarde en el libro de texto usado en la clase MAT125, pero se ha juzgado conveniente presentarlo más temprano, esto nos permitirá formalizar ciertas construcciones, y además el lector se familiarizará desde temprano con la idea de límite, la idea fundamental del cálculo diferencial e integral, así como del análisis matemático

1 Definiciones, ejemplos y operaciones

Recordemos que $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, ...\}$. Intuitivamente, una sucesión de números reales es simplemente una familia de números que aparecen secuencialmente: $a_1, a_2, a_3, ...$ Esto es una manera de hacerle corresponder un real al natural 1, el real a_1; luego un real al natural 2, el real a_2, y así sucesivamente. Esto provee la definición precisa de lo que se entiende por sucesión.

Definición 1. *Una* ***sucesión*** *de números reales es una aplicación* $a\colon \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{R}$.

En estricto rigor al hablar de sucesiones deberíamos escribir $a(1)$, $a(2)$, ..., $a(n)$, ... para designar a sus términos, pero es más común escribir a_1, a_2, ..., a_n, ... En vez de escribir (a_1, a_{2},, ...) escribiremos $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, o simplemente (a_n) para referirnos a la sucesión. Se debe tener cuidado: a_n es el $n-$ ésimo término de una sucesión, o también el término de rango n, en tanto que (a_n) designa a toda una sucesión.

Ejemplo 2.

a) (a_n) con $a_n = 1/n$ es la sucesión $(1, 1/2, 1/3, ...)$.

b) Si $b \in \mathbb{R}$ es una constante, ydefinimos $a_1 = 1$ y $a_{n+1} = b a_n$, entonces obtenemos la sucesión $(1, b, b^2, b^3, ...)$.

1. Esta es la segunda versión de estas notas. Con toda seguridad habrá errores tipográficos o de ortografía. Se agradecerá que sean comunicados al autor.

2. *Introduction à l'analyse*, Charles Cassidy y Marie-Louise Lavertu. Les Presses de l'Université Laval, Sainte-Foy, 1994. En *An Introduction to Analysis*, de J.R. Kirkwood, PWS Publishing Company, 1999, se tiene una aproximación muy similar, aunque un poco más formal y abstracta.

c) La lista $(..., -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, ...)$ no es una sucesión. En cambio $(0, 1, -1, 2, -2, 3, -3, ...)$ sí es una. Notemos que los dos conjuntos de valores son los mismos. El conjunto de valores de esta sucesión es $\mathbb{Z}$.

d) $(2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, ...)$ es una sucesión importante, la sucesión de números primos, aunque no se disponga de una fórmula explícita para describir el término general a_n en función de n.

e) $(0, 1, 0, 1, 0, 1, ...)$ es una sucesión, cuyo conjunto de valores es $\{0, 1\}$.

f) Si $c \in \mathbb{R}$ entonces, $(c) = (c, c, c, ...)$ es la sucesión constante igual a c.

El conjunto de valores que toma una sucesión es un conjunto de números reales. Como tal, este conjunto puede estar acotado inferiormente, superiormente, no estarlo, etc... Esto nos lleva a definir las nociones correspondientes para las sucesiones.

Definición 3. *Sea (a_n) una sucesión de números reales. Decimos que (a_n) es*

a) ***Mayorada*** *(o acotada superiormente) si es que existe $M \in \mathbb{R}$ tal que $a_n \leqslant M$, para todo $n \in \mathbb{N}$,*

b) ***Minorada*** *(o acotada inferiormente) si es que existe $m \in \mathbb{R}$ tal que $a_n \geqslant m$, para todo $n \in \mathbb{N}$,*

c) ***Acotada*** *si es que es mayorada y minorada a la vez,*

d) ***Creciente*** *si es que $a_1 \leqslant a_2 \leqslant a_3 \leqslant \cdots \leqslant a_n \leqslant a_{n+1} \leqslant \cdots$,*

e) ***Estrictamente creciente*** *si es que $a_1 < a_2 < a_3 < \cdots < a_n < a_{n+1} < \cdots$,*

f) ***Decreciente*** *si es que $a_1 \geqslant a_2 \geqslant a_3 \geqslant \cdots \geqslant a_n \geqslant a_{n+1} \geqslant \cdots$,*

g) ***Estrictamente decreciente*** *$a_1 > a_2 > a_3 > \cdots > a_n > a_{n+1} > \cdots$,*

h) ***Monótona*** *si es creciente o decreciente.*

Hemos de notar que una sucesión que es estrictamente creciente (o decreciente) es también creciente (o decreciente). Por otro lado, puede perfectamente darse que una sucesión dada no sea ni creciente ni decreciente. Veamos algunos ejemplos.

Ejemplo 4.

a) La sucesión (a_n) donde $a_n = 1/n$ es acotada. En efecto, $0 \leqslant a_n \leqslant 1$, $\forall n \in \mathbb{N}$. Esta sucesión es además estrictamente decreciente.

b) La sucesión (a_n) donde $a_n = (-1)^n n$ no es ni mayorada ni minorada. Tampoco es creciente ni decreciente, de modo que no es monótona tampoco.

c) La sucesión (a_n) donde $a_n = (-1)^n$ es acotada, pero no es creciente ni decreciente.

d) La suecesion $(-1, 2, -1, 3, -1, 4, -1, ...)$ es acotada inferiormente, pero no superiormente. Notemos que tampoco es monótona.

Las sucesiones son, en estricto sentido, funciones cuyos valores están en $\mathbb{R}$, de modo que con ellas se pueden efectuar algunas operaciones.

Definición 5. *Sean (a_n) y (b_n) dos sucesiones de números reales, α, $\beta \in \mathbb{R}$ dos constantes, se definen entonces las sucesiones:*

a) *$(|a_n|) = (|a_1|, |a_2|, ...)$ es la* ***sucesión valor absoluto*** *de (a_n),* *b)* $(\alpha a_n + \beta b_n) = (\alpha a_1 + \beta b_1, \alpha a_2 + \beta b_2, \ldots)$*es la* ***combinación lineal*** *de* (a_n) *y* (b_n) *con coeficientes* α *y* β*.*

c) $(a_n b_n) = (a_1 b_1, a_2 b_2, \ldots)$ *es la* ***sucesión producto*** *de* (a_n) *y* (b_n)*.*

d) $\left(\frac{a_n}{b_n}\right) = \left(\frac{a_1}{b_1}, \frac{a_2}{b_2}, \ldots\right)$ *es el* ***cociente*** *de* (a_n) *por* (b_n)*, que se define únicamente si es que* $b_n \neq 0$*, para todo* $n \in \mathbb{N}$*.*

Nótese que en la definición de combinación lineal se engloban varias construcciones usuales: al tomar, por ejemplo, $\beta = 0$ tenemos simplemente un múltiplo de la sucesión (a_n), y al hacer $\alpha = \beta = 1$ se obtiene la suma, y con $\alpha = 1$, $\beta = -1$, diferencia de dos sucesiones.

2 Convergencia

Cuando se utiliza la noción de sucesión, muchas veces sucede que a medida que n toma valores cada vez más grandes, el valor de a_n se acerca cada vez más a un valor dado L. Antes de seguir adelante recordemos que la *distancia* que separa a dos números reales x, y , que denotaremos por $d(x, y)$ está dada por $d(x, y) = |x - y|$. Esta distancia tiene tres propiedades fundamentales:

Proposición 6. *La función de distancia dada por* $d(x, y) = |x - y|$ *verifica:*

i. *Para todos* $x, y \in \mathbb{R}$ *se tiene* $d(x, y) = d(y, x)$

ii. *Para todos* $x, y \in \mathbb{R}$ *se tiene* $d(x, y) \geqslant 0$*, y la igualdad se si y solamente si es que* $x = y$*.*

iii. *Para* $x, y, z \in \mathbb{R}$ *se cumple* $d(x, z) \leqslant d(x, y) + d(y, z)$*.*

Demostración. Es un ejercicio fácil dejado al lector. Bastará usar las propiedades del valor absoluto. □

Consideremos la sucesión definida por $a_n = \frac{(-1)^n}{n}$. Una breve mirada a algunos valores de la sucesión bastará para convencerse de que los términos a_n se acercan a 0 a medida que n crece. De hecho, y esto es lo más importante:

Los términos a_n pueden acercarse a 0 tanto como se quiera, bastando para ello ser suficientemente pacientes y que n sea suficientemente grande.

Así por ejemplo, si deseamos que la distancia entre a_n y 0 sea inferior a, por decir algo, $\varepsilon = 1/10$, basta tener $n \geqslant 11$. Esto es, para $n \geqslant 11$, tendremos que $d(a_n, 0) = |a_n - 0| < \varepsilon$. Si en cambio deseamos que la distancia sea inferior a 10^{-10}, pues bastará tener $n \geqslant 10^{10} + 1$. Dicho de otro modo, para $n \geqslant 10^{10} + 1$, tendremos que $d(a_n, 0) = |a_n - 0| < \varepsilon$. Antes de definir el límite de una sucesión real, precisemos aún un poco más la idea de que dos números reales *están cerca.*

Definición 7. *Sea* $x_0 \in \mathbb{R}$*. Un conjunto* $\mathcal{V}$ *es una* ***vecindad*** *o* ***entorno*** *de* x_0 *si es que existe un real estrictamente positivo* δ *tal que* $d(x, x_0) < \delta \Longrightarrow x \in \mathcal{V}$*.*

Notemos que la condición podría expresarse diciendo que todos los reales que se encuentren a una distancia de x_0 estrictamente inferior a δ, forzosamente tienen que ser parte del conjunto $\mathcal{V}$.

Ejemplo 8.

a) Un intervalo abierto $]a,b[$ es una vecindad de cada uno de sus puntos. En efecto, para $x_0 \in]a,b[$ basta tomar, por ejemplo $\delta = \frac{1}{2}\min\{x_0 - a, b - x_0\}$. De hecho, gracias a esto, se puede pensar que una vecindad de un punto x_0 es un intervalo abierto $]a,b[$, que contenga a x_0.

b) El intervalo $[a,b[$ no es una vecindad de a ni de b. En efecto, sea cual sea la distancia $\delta > 0$ que se tome, siempre habrá puntos que estén a una distancia inferior a δ del punto a, pero que no estén dentro de $]a,b[$.

Volvamos a la idea de límite de una sucesión, y a la discusión precedente: queremos expresar de manera precisa y formal la idea que los términos a_n van a terminar todos estando suficientemente cerca del límite L. Dicho de otro modo, en toda vecindad $\mathcal{V}$ de L tendremos a todos los a_n, bastando para ello que n sea suficientemente grande. Esto es prácticamente la definición formal del límite de una sucesión.

Definición 9. *Una sucesión de números reales (a_n)* ***converge al límite*** *L si y solamente si es que para toda vecindad $\mathcal{V}$ de L existe un entero N tal que si $n \geqslant N$, entonces $x_n \in \mathcal{V}$.*

Cuando esto sucede, escribimos $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = L$, o también $a_n \longrightarrow L$. Si la sucesión (a_n) no es convergente a un real, diremos simplemente que es divergente.

Notemos que, en la definición, el entero N depende de la vecindad $\mathcal{V}$. Retomando el ejemplo del inicio de esta sección, si hacemos $\mathcal{V}_1 =]\frac{-1}{10}, \frac{1}{10}[$ entonces nuestro N_1 es 11. Si en cambio tomamos $\mathcal{V}_2 =]-10^{-10}, 10^{-10}[$ entonces nuestro N_2 es $10^{10}+1$.

Por otro lado, como se pide que los a_n estén dentro de toda vecindad de L éstos se acercan a L tanto como se quiera. Para que la distancia sea inferior a ε, por ejemplo, basta tomar $\mathcal{V} =]L-\varepsilon, L+\varepsilon[$. Al usar este tipo de vecindades, es sumamente importante tener en mente que las tres condiciones siguientes son equivalentes:

i. $L - \varepsilon < x < L + \varepsilon$,

ii. $-\varepsilon < x - L < \varepsilon$,

iii. $|x - L| < \varepsilon$,

iv. $d(x, L) < \varepsilon$.

Ejemplo 10.

a) La sucesión $(1/n)$ tiende a 0. En efecto, supongamos que $\mathcal{V}$ es una vecindad de 0. Esto es, existe $\varepsilon > 0$ tal que $]-\varepsilon, \varepsilon[\subseteq \mathcal{V}$. Tenemos que existe un entero positivo N_ε tal que $|1/N_\varepsilon| < \varepsilon$. Así, si $n > N_\varepsilon$, tendremos:

$$d(a_n, 0) = |a_n - 0| = |a_n| = |1/n| < |1/N_\varepsilon| < \varepsilon$$

Es decir, para $n > N_\varepsilon$, se tiene que $a_n \in]-\varepsilon, \varepsilon[$, de modo que $a_n \in \mathcal{V}$.

b) Consideremos la sucesión dada por $a_n = (-1)^n$. Así, $(a_n) = (-1, 1, -1, 1, \ldots)$. Veamos que (a_n) es divergente. Supongamos que, al contrario, a_n es convergente, hacia un valor l. Esto nos dice que, para cualquier vecindad $\mathcal{V}$ de l, a partir un cierto N debemos tener que todos los a_n deben estar en $\mathcal{V}$. En particular esto se debe cumplir para la vecindad $\mathcal{V} =]l - \frac{1}{2}, l + \frac{1}{2}[$. Esto haría necesario que tanto 1 como -1 pertenezcan a esta vecindad $\mathcal{V}$, cosa que es imposible. En efecto la ddi-tancia entre -1 y 1 es 2, en tanto que la distancia entre dos elementos de $\mathcal{V}$ no puede ser superior a 1.

   De todos modos, es fácil ver que esta sucesión oscila entre dos valores, de modo que no puede acercarse mucho a uno de ellos, y permanecer cerca de éste.

La definición que hemos dado es precisa, y es la definición correcta. Sin embargo, ésta tiene un inconveniente relativamente grave: dada una vecindad $\mathcal{V}$ de l, un $\varepsilon > 0$, tal que $]l - \varepsilon, l + \varepsilon[\subseteq \mathcal{V}$, encontrar el N que funciona puede ser relativamente difícil. En el ejemplo anterior esto fue muy fácil, pero notemos que se trató de una sucesión bastante peculiar. Así, nos vemos ante la necesidad de contar con resultados que puedan ser utilizados para, en la medida de lo posible, liberarnos de los ε, y los N. Vamos ahora a demostrar algunas de las propiedades de la convergencia de sucesiones que nos harán la vida más sencilla en adelante. El tipo de resultados que buscamos es aquel que nos permitiría decidir rápidamente que, por ejemplo, $(2/n) \longrightarrow 0$. Al fin y al cabo, el doble de algo que se acerca a cero, debería también acercarse a cero, aunque tal vez un poco más despacio.

Lo primero que habría que preguntarse es si es que es posible una sucesión tenga dos límites distintos. El siguiente teorema da la respuesta, que, sin mayor sorpresa es negativa. La demostración ilustra como trabajar con la definición del límite de una sucesuón.

Teorema 11. *Una sucesión (a_n) no puede converger a dos límites distintos. Es decir, si $a_n \longrightarrow l$, y $a_n \longrightarrow l'$, entonces forzosamente se tiene que $l = l'$.*

Demostración. Supongamos que, al contrario, tenemos $a_n \longrightarrow l$, y $a_n \longrightarrow l'$, con $l \neq l'$. Sea $\varepsilon > 0$, arbitrario. Dado que $a_n \longrightarrow l$, tenemos que existe un natural N_1 tal que si $n \geqslant N_1$ entonces tendremos que

$$d(a_n, l) = < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Del mismo modo, tenemos que existe N_2 tal que $n \geqslant N_2$ implica

$$d(a_n, l) = < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Si tomamos entonces $N = \max\{N_1, N_2\}$, y $n \geqslant N$, tendremos que:

$$\begin{aligned} d(l, l') &\leqslant d(l, a_n) + d(a_n, l') \\ &< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} \\ &= \varepsilon. \end{aligned}$$

Esto significa que la distancia que separa a l de l' es estrictamente inferior a cualquier número real positivo. Necesariamente debemos tener que $l = l'$. □

Vale la pena hacer un comentario en este punto: la definición del límite de una sucesión termina diciendo *«... entonces $x_n \in \mathcal{V}$»*, esto quiere decir que uno puede arreglárselas para que la distancia entre x_n y el límite L puede hacerse tan pequeña como se quiera, en particular puede hacerse inferior a $\varepsilon/2$, sin importar cuánto es ε.

Otro resultado importante, del cual también es fácil de convencerse dice que toda sucesión convergente es acotada. Veremos la demostración con todo detalle y rigor, pero digamos que la idea es la siguiente: Si una sucesión converge a un número real L, por grande o pequeño que este sea, los términos de la sucesión *«se aglomeran»* alrededor de L, al largo plazo. Así, únicamente unos pocos términos de la sucesión pueden estar *«muy alejados de L»*.

Teorema 12. *Toda sucesión convergente es acotada.*

Demostración. Supongamos que $a_n \longrightarrow l$. Escojamos un $\varepsilon > 0$, cualquiera. Sabemos, por la definición que existe $N \in \mathbb{N}$ tal que cuando se tenga $n \geqslant N$, entonces tendremos que $|a_n - l| < \varepsilon$. Así, para $n \geqslant N$ tendremos que:

$$\begin{aligned} |a_n| &= |a_n - l + l| \\ &\leqslant |a_n - l| + |l| \\ &< \varepsilon + |l| \end{aligned}$$

Esto demuestra que los términos de (a_n) para los que $n \geqslant N$ son todos acotados. Falta entonces mirar qué sucede con los pimeros términos de la sucesión. Lo importante es que hay únicamente un número finito de éstos. Si tomamos

$$M = \max \{|a_1|, |a_2|, \ldots, |a_N|, |l| + \varepsilon\}$$

tendremos que, para todo $n \in \mathbb{N}$, se cumple que $|a_n| \leqslant M$, exactamente lo que queríamos demostrar. □

Notemos que la recíproca del teorema anterior no es verdadera. En efecto, la sucesión definida por $a_n = (-1)^n$ es una sucesión que es acotada, y vimos que no es convergente.

Teorema 13. *Sean (a_n) y (b_n) dos sucesiones tales que $a_n \longrightarrow a$, y $b_n \longrightarrow b$; y sean α, $\beta \in \mathbb{R}$ dos constantes. Entonces se tiene que:*

a) $|a_n| \longrightarrow |a|$,

b) $(\alpha a_n + \beta b_n) \longrightarrow \alpha a + \beta b$,

c) $(a_n b_n) \longrightarrow ab$,

d) $\left(\frac{a_n}{b_n}\right) \longrightarrow \frac{a}{b}$, *siempre que $b_n \neq 0$, y $b \neq 0$.*

e) Si es que a partir de cierto valor de n se tiene que, $a_n \leqslant b_n$ entonces $a \leqslant b$.

Demostración.

a) Para todo $\varepsilon > 0$ existe, por hipótesis, un entero $N \in \mathbb{N}$ tal que si $n \geqslant N$ entonces se cumple que $d(a_n, a) = |a_n - a| < \varepsilon$. Así, si es que $n \geqslant N$ tendremos que:

$$d(|a_n|, |a|) = ||a_n| - |a|| \leqslant |a_n - a| < \varepsilon.$$

con lo que se demuestra que $|a_n| \longrightarrow |a|$.

b) De nuevo, sea $\varepsilon > 0$, arbitrario. Supongamos primero que $\alpha \neq 0$, $\beta \neq 0$. Buscamos ahora un N a partir del cual tenemos $d(\alpha a_n + \beta b, \alpha a + \beta b) < \varepsilon$.

Pero, por hipótesis, a_n y b_n pueden estar tan cercanos de a y b como queramos. En particular, es posible arregrlárselas para que la distancia $d(a_n, a)$ sea estrictamente inferior a $\varepsilon/|\alpha|$. Es decir, existe un entero N_1 tal que para $n \geqslant N_1$ tendremos

$$d(a_n - a) < \frac{\varepsilon}{|\alpha|}.$$

Del mismo modo, existe N_2 tal que para $n \geqslant N_2$ tendremos

$$d(b_n - b) < \frac{\varepsilon}{|\beta|}.$$

Ahora bien, si tomamos $N = \max\{N_1, N_2\}$, y $n \geqslant N$, tendremos que

$$\begin{aligned} d(\alpha a_n + \beta b_n, \alpha a + \beta b) &= |(\alpha a_n + \beta b_n) - (\alpha a + \beta b)| \\ &= |\alpha(a_n - a) + \beta(b_n - b)| \\ &\leqslant |\alpha| \cdot |a_n - a| + |\beta| \cdot |b_n - b| \\ &< |\alpha| \cdot \frac{\varepsilon}{|\alpha|} + |\beta| \cdot \frac{\varepsilon}{|\beta|} \\ &= \varepsilon. \end{aligned}$$

Si se diese el caso que $\alpha = 0$, o $\beta = 0$, entonces solamente existirá uno de los dos N_1 o N_2, y las cosas serán incluso más sencillas.

c) Notemos primero que

$$\begin{aligned} d(a_n b_n, ab) &\leqslant d(a_n b_n, b a_n) + d(b a_n, ba) \\ &= |a_n(b_n - b)| + |b(a_n - a)| \\ &\leqslant |a_n| \cdot |b_n - b| + |b| \cdot |a_n - a| \\ &= |a_n| \cdot d(b_n, b) + |b| \cdot d(a_n, a). \end{aligned}$$

Como (a_n) es convergente, es acotada, en virtud del teorema 12. Así, existe $M \in \mathbb{R}$ tal que $|a_n| \leqslant M$, para todo n. Sea ahora $\varepsilon > 0$, arbitrario. Como $b_n \longrightarrow b$, debe existir un entero N_1 tal que $d(b_n, b) < \frac{\varepsilon}{2M}$, para $n \geqslant N_1$. Como $a_n \longrightarrow a$, también existe un entero N_2 tal que $d(a_n, a) < \frac{\varepsilon}{2(|b|+1)}$ siempre que $n \geqslant N_2$. Así, retomando las desigualdades del inicio de esta parte de la demostración, para $n \geqslant \max\{N_1, N_2\}$, tendremos:

$$\begin{aligned} d(a_n b_n, ab) &\leqslant |a_n| \cdot d(b_n, b) + |b| \cdot d(a_n, a) \\ &< M \cdot \frac{\varepsilon}{2M} + |b| \cdot \frac{\varepsilon}{2(|b|+1)} \\ &< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} \\ &= \varepsilon. \end{aligned}$$

d) Basta demostrar que $1/b_n \longrightarrow 1/b$, y luego usar la parte c). Sea entonces $\varepsilon > 0$, cualquiera. Notemos que

$$d\left(\frac{1}{b_n}, \frac{1}{b}\right) = \left|\frac{1}{b_n} - \frac{1}{b}\right| = \left|\frac{b - b_n}{b b_n}\right| = \frac{d(b, b_n)}{|b| \cdot |b_n|}.$$

Ahora bien, como $b_n \longrightarrow b$, por la parte a) de este teorema, tenemos que $|b_n| \longrightarrow |b|$. Así, para valores de n suficientemente grandes, digamos para $n \geqslant N_1$, tendremos que $|b_n|$ estará en el intervalo $\left]|b| - \frac{|b|}{2}, |b| + \frac{|b|}{2}\right[$. En particular, esto implica que tendremos $|b_n| > \frac{|b|}{2}$, lo que a su vez nos dice que $\frac{1}{|b_n|} < \frac{2}{|b|}$.

Por otro lado, también existe un entero N_2 tal que para $n \geqslant N_2$ tendremos que $d(b_n, b) < \varepsilon \cdot \frac{|b|^2}{2}$. Luego, si es que $n \geqslant \max\{N_1, N_2\}$, tendremos:

$$\begin{aligned} d\left(\frac{1}{b_n}, \frac{1}{b}\right) &= \frac{d(b, b_n)}{|b| \cdot |b_n|} \\ &\leqslant \frac{d(b, b_n)}{\frac{|b|}{2} \cdot |b|} \\ &= \frac{2 \cdot d(b_n, b)}{|b|^2} \\ &< \frac{2}{|b|^2} \cdot \varepsilon \cdot \frac{|b|^2}{2} = \varepsilon. \end{aligned}$$

e) Supongamos que, al contrario, $b < a$, y tomemos $\varepsilon = \frac{a-b}{4}$. Como $a_n \longrightarrow a$, y $b_n \longrightarrow b$, existe un entero N tal que si es que $n \geqslant N$, tendremos

$$b_n < b + \varepsilon, \ \text{ y también } \ a - \varepsilon < a_n.$$

Pero esto, de acuerdo a nuestra definición de ε, esto implica que $b_n < a_n$, cosa que contradice la hipótesis. Así, debe cumplirse que $a \leqslant b$. □

Observación 14. Es importante notar que la parte e) del teorema anterior dice que el paso al límite preserva las desigualdades amplias. El lector atento se preguntará si es que lo mismo vale con las desigualdades estrictas, es decir, si es que es cierto que $a_n < b_n$ y $a_n \longrightarrow a$, $b_n \longrightarrow b$ implican que $a < b$. La respuesta es negativa, como veremos a continuación.

Ejemplo 15.

a) Sea $a_n = 1/(n+1)$, y $b_n = 1/n$. Tenemos entonces $a_n < b_n$, y sin embargo:

$$0 = \lim_{n \to \infty} a_n = \lim_{n \to \infty} b_n.$$

b) Mostremos que $\lim_{n \to \infty} \frac{3n^3 + 7n^2 + 1}{4n^3 - 8n + 63} = \frac{3}{4}$. Notemos primero que es posible hacer algunas simplificaciones. En efecto:

$$\frac{3n^3 + 7n^2 + 1}{4n^3 - 8n + 63} = \frac{3 + \frac{7}{n} + \frac{1}{n^3}}{4 - \frac{8}{n} + \frac{63}{n^2}}.$$

Luego, como ya vimos, $1/n \longrightarrow 0$, de modo que, gracias al teorema anterior tendremos $7/n \longrightarrow 0$, $1/n^3 \longrightarrow 0$, $8/n^2 \longrightarrow 0, 63/n^3 \longrightarrow 0$. El numerador de la expresión anterior tiende entonces hacia 3, y el denominador hacia 4. El resultado sigue utilizando una vez más el teorema anterior, esta vez el literal d).

El siguiente teorema, conocido como el *"teorema del sánduche"* es también sumamente útil cuando de calcular límites se trata. En realidad reposa sobre la parte e) del Teorema 13

Teorema 16. *Sean (a_n), (b_n) y (c_n) tres sucesiones tales que para $n \geqslant N_0$, con $N_0 \in \mathbb{N}$, se tiene que $a_n \leqslant c_n \leqslant b_n$. Si es que $\lim_{n \to \infty} a_n = \lim_{n \to \infty} b_n = l$, entonces se tiene también que $\lim_{n \to \infty} c_n = l$.*

Demostración. Queremos ver que, cualquiera sea $\varepsilon > 0$, la distancia entre c_n y l es menor que ε. Como $a_n \longrightarrow l$, existe un entero N_1 tales que para $n \geqslant N_1$ se tiene que $l - \varepsilon < a_n$. Del mismo modo, existe N_2, entero tal que si $n \geqslant N_2$ se tiene $b_n < l + \varepsilon$. Así, si tomamos $N = \max\{N_0, N_1, N_2\}$, para $n \geqslant N$, tendremos

$$l - \varepsilon < a_n \leqslant c_n \leqslant b_n < l + \varepsilon$$

es decir que $c_n \in]l - \varepsilon, l + \varepsilon[$, lo que es lo mismo que decir que $d(c_n, l) < \varepsilon$. □

Corolario 17. *Si* $|a_n| \longrightarrow 0$, *entonces* $a_n \longrightarrow 0$.

Demostración. Sigue del teorema anterior, y la desigualdad $-|a_n| \leqslant a_n \leqslant a_n$. □

Ejemplo 18.

a) Para $r \in \mathbb{R}$, con $|r| < 1$, y (a_n) la sucesión definida mediante $a_n = r^n$. Entonces $a_n \longrightarrow 0$.

  i. Si $r = 0$, no hay nada que demostrar.

  ii. Supongamos entonces que $r \neq 0$. En particular se tiene que $\frac{1}{|r|} > 1$, de modo que podemos escribir $\frac{1}{|r|} = 1 + t$, con $t > 0$. En virtud de la desigualdad de Bernoulli, o del bonomio de Newton, tenemos que:

$$\left(\frac{1}{|r|}\right)^n = (1 + t)^n \geqslant 1 + nt$$

  de modo que

$$0 \leqslant |r|^n = |r^n| \leqslant \frac{1}{1 + nt} < \frac{1}{nt}$$

  que tiende a cero, cuando n tiende al infinito. El resultado sigue.

b) Sean $r \in \mathbb{R}$, con $|r| < 1$, y $k \in \mathbb{N}$, fijos. Entonces $\lim\limits_{n \to \infty} n^k r^n = 0$. Haremos aquí la demostración para $k = 1$, dejando en ejercicio la generalización del argumento. Mostremos entonces que $\lim\limits_{n \to \infty} n r^n = 0$.

  i. De nuevo, si $r = 0$, no hay nada que demostrar.

  ii. Supongamos entonces que $q \neq 0$, y, de nuevo, hagamos que $\frac{1}{|r|} = 1 + t$, con $t > 0$. Del teorema del binomio de Newton obtenemos, para $n \geqslant 2$:

$$\left(\frac{1}{|r|}\right)^n = (1 + t)^n \geqslant 1 + nt + \frac{n(n-1)}{2} t^2$$

  Así que

$$0 \leqslant n|r|^n = |nr|^n \leqslant \frac{n}{1 + nt + \frac{n(n-1)}{2} t^2}$$

  pero este último término tiende a 0 cuando n tiende al infinito. La conclusión es inmediata.

c) Sea (a_n) la sucesión definida por $a_n = \sqrt[n]{n}$, entonces $\lim\limits_{n \to \infty} a_n = 1$. En efecto, Sea $\varepsilon > 0$, cualquiera. Tenemos entonces que $0 < \frac{1}{1 + \varepsilon} < 1$. En virtud del ejemplo b), existe $N_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\frac{n}{(1 + \varepsilon)^n} \leqslant 1$ si es que $n \geqslant N_0$. Esto es decir que para $n \geqslant N_0$ se debe tener que

$$1 \leqslant n \leqslant (1 + \varepsilon)^n$$

luego,

$$1 \leqslant \sqrt[n]{n} \leqslant (1 + \varepsilon)$$

y la conclusión sigue.

d) Sea $a>0$. Entonces $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a}=1$. En efecto, primero notemos que si es que $n\geqslant \max\{a,1/a\}$, tendremos que

$$\frac{1}{n}\leqslant a\leqslant n$$

de modo que

$$\frac{1}{\sqrt[n]{n}}\leqslant\sqrt[n]{a}\leqslant\sqrt[n]{n}$$

y el resultado sigue del teorema del sánduche, y el ejemplo anterior.

Teorema 19. *Una sucesión monótona es convergente si y solamente si es que es acotada.*

Demostración.

- Vimos ya que una toda sucesión convergente, que sea monótona o no, es necesariamente acotada.
- Recíprocamente, supongamos que tenemos una sucesión (a_n) monótona creciente y acotada. En virtud del axioma del supremo, el conjunto $\{a_n|n\in\mathbb{N}\}$ posee un supremo, digamos $\bar{a}$. Vamos a demostrar que tenemos $a_n\longrightarrow\bar{a}$.

  Para $\varepsilon>0$ tenemos que existe $n_0\in\mathbb{N}$ tal que

  $$\bar{a}-\varepsilon<a_{n_0}\leqslant\bar{a}.$$

  Como (a_n) es creciente, debemos tener que:

  $$\bar{a}-\varepsilon<a_{n_0}\leqslant a_{n_0+1}\leqslant\cdots\leqslant\bar{a}$$

  es decir que para $n\geqslant n_0$ se tiene que $d(a_n,\bar{a})<\varepsilon$, pero esto es exactamente lo que queríamos demostrar. □

Corolario 20.

i. Toda sucesión creciente y mayorada es convergente,

ii. Toda sucesión decreciente y minorada es convergente.

Ejemplo 21. El número e. Consideremos la sucesión definida por:

$$a_n=\sum_{i=0}^{n}\frac{1}{i!}=1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\cdots+\frac{1}{n!}$$

Esta sucesión es estrictamente creciente, pues $a_{n+1}-a_n=\frac{1}{(n+1)!}$ que es estrictamente positivo. Para tener la conclusión bastará que mostremos que también es mayorada. Pero esto sigue de notar que para $j\in\mathbb{N}$ se tiene que $2^j\leqslant j!$. Así, tenemos:

$$a_n\leqslant 1+1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^3}+\cdots+\frac{1}{2^{n-1}}=1+\frac{1-\frac{1}{2^n}}{1-\frac{1}{2}}<3$$

Esto demuestra que esta sucesión converge. Por definición, el número e es el límite de esta sucesión:

$$e=\lim_{n\to\infty}a_n.$$

El valor de e es alrededor de $2,71828184590452353602874713526$6... y es ciertamente una de las constantes más importantes del vasto mundo de la matemática.

3 Sub-sucesiones.

Si (a_n) es una sucesión de números reales, podría ser que nos interese formar otra sucesión a partir de ésta: por ejemplo, tomar únicamente los términos $a_2, a_4, a_6, \ldots$ Estaramos entonces considerando una sub-sucesión de (a_n). Más generalmente, dada (a_n), escojamos una sucesión estrictamente creciente de enteros $n_1 < n_2 < n_3 < \cdots < n_k < \cdots$, y definamos $b_j := a_{n_j}$. Dicho de otro modo, una sub-sucesión de (a_n) es una sucesión formada a partir de los términos de a_n, dejando de lado algunos de ellos, pero respetando el orden en el que aparecen.

Ejemplo 22.

a) $(a_{2n}) = (a_2, a_4, a_6, \ldots)$ es una sub-sucesión de $(a_n) = (a_1, a_2, a_3, \ldots)$.

b) (a_n) es una subsucesión de sí misma.

c) Supongamos que (b_k) es una sub-sucesión de (a_n), y que a su vez (c_j) es una sub-sucesión de (c_k). Entonces (c_j) es una sub-sucesión de (a_n).

d) Definamos $n_k = k^2$. Si (a_n) es una sucesión, entonces $b_k = a_{n_k}$ define una sub-sucesión de (a_n). Se trata de la sucesión $(a_1, a_4, a_9, a_{16}, a_{25}, \ldots)$.

Observación 23. Se habrá notado que el tomar los enteros $n_1 < n_2 < \cdots < n_k < \cdots$ es tener una sucesión estrictamente creciente, esto es, una aplicación estrictamente creciente $n\colon \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$, definida por $n(k) = n_k$. Luego, la sucesión original (a_n) es también una aplicación $a\colon \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{R}$. Tomar la sub-sucesión equivale a considerar al composición de las dos aplicaciones:

$$n\colon \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N} \quad \text{y} \quad a\colon \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{R}.$$

El siguiente resultado podrá parecer sorprendente, pero es de una importancia capital.

Lema 24. *De toda sucesión (convergente o no) se puede extraer una sub-sucesión monótona (creciente o decreciente).*

Demostración. Sea (a_n) una sucesión de números reales. Digamos que el entero n es un *pico* de (a_n) si es que para $j > n$ se tiene que $a_n > a_j$. Dos casos son posibles:

- (a_n) posee una infinidad de picos: $n_1 < n_2 < \cdots < n_k < \cdots$ con lo que tendremos

  $$a_{n_1} > a_{n_2} > \cdots > a_{n_k} > \cdots$$

  es decir, una sub-sucesión estrictamente decreciente.

- (a_n) posee únicamente un número finito de picos. Escojamos n_1 mayor que todos estos picos. Como n_1 no es un pico, existe un $n_2 > n_1$ tal que $a_{n_2} \geqslant a_{n_1}$. Pero n_2 tampoco es un pico, de modo que existe un $n_3 > n_2$ tal que $a_{n_3} \geqslant a_{n_2}$, y así sucesivamente. Esto nos proporciona una sub-sucesión $(a_{n_k})_k$ que es creciente. □

Una consecuencia de gran importancia de este resultado, es el famoso teorema de Bolzano-Weierstrass:

Teorema 25. *De toda sucesión acotada se puede extraer una sub-sucesión convergente.*

Demostración. Sea (a_n) una sucesión acotada. Según el lema anterior, podemos extraer una sub-sucesión monótona. Al ser acotada, esta será forzosamente convergente, por el corolario 20. □

4 Límites Infinitos.

Hasta el momento, al hablar de límites de sucesiones, éstos han sido siempre números reales. Sin embargo la idea que el límite de una sucesión sea $+\infty$ nos será útil, y necesaria también. Empecemos intentando adaptar la definición que tenemos para límites finitos, a este nuevo contexto: la idea es que uno debería poder arreglárselas para que a partir de un cierto momento, los valores de a_n estén *"cerca de $+\infty$"*. Pero aquí observamos el problema: ¿qué puede querer decir estár cerca del infinito? ¿Qué puede ser una *"vecindad del infinito"* ? No entraremos aquí en discusiones metafísicas, ni filosóficas, sino que simplemente aceptaremos que *"algo que se acerca al infinito"* es básicamente que ese algo *"puede ser arbitrariamente grande"*. Con esto en mente, tenemos la siguiente definición:

Definición 26. *Sea (a_n) una sucesión.*

a) *Diremos que (a_n) tiende a ∞ cuando $n \longrightarrow \infty$, si es que para todo $M > 0$ existe un natural N tal que para $n \geqslant N$ se tiene $a_n > M$. En este caso escribiremos $\lim_{n\to\infty} a_n = \infty$.*

b) *Diremos que (a_n) tiende a $-\infty$ cuando $n \longrightarrow \infty$, si es que para todo $M < 0$ existe un natural N tal que para $n \geqslant N$ se tiene $a_n < M$. En este caso escribiremos $\lim_{n\to\infty} a_n = -\infty$.*

Ejemplo 27.

a) La sucesión (a_n) definida por $a_n = n$ tiende al infinito. En efecto, para un real M fijo, sabemos que existe un entero N tal que $M < N$. Así, para $n \geqslant N$ tendremos

$$a_n = n \geqslant N > M.$$

b) La sucesión $(a_n) = (1, -2, 3, -4, \ldots.)$ no tiende al infinito, ni a menos infinito. En efecto, los términos pasan de positivos a negativos y viceversa. Para tender a infinito, partir de un cierto momento, todos los términos deberían ser positivos.

Notemos que la sucesión del ejemplo b) no es convergente, y tampoco es acotada. Sin embargo, se puede extraer una sub-sucesión (aquella formada por los términos de rango impar) que tiende a $+\infty$. Esto no es casualidad, como el siguiente teorema muestra.

Teorema 28. *Si (a_n) es una sucesión no mayorada, entonces se puede extraer una sub-sucesión (a_{n_k}) tal que $\lim_{k\to\infty} a_{n_k} = +\infty$.*

Demostración. Dado que 1 no es una cota superior de (a_n), porque ésta no posee cotas superiores, debe existir algún término de la sucesión que es mayor que 1. Esto es, debe existir un n_1 tal que $a_{n_1} > 1$. Debe también existir un entero $n_2 > n_1$ tal que $a_{n_2} > 2$, porque de otro modo tendríamos que max $\{a_1, a_2, \ldots, a_{n_1}, 2\}$ sería un mayorante de (a_n). De manera sucesiva, construimos la sub-sucesión deseada. □

Corolario 29. *Si* (a_n) *es una sucesión no minorada, entonces se puede extraer de ella una sub-sucesión* (a_{n_k}) *tal que* $\lim_{k\to\infty} a_{n_k} = -\infty$.

Para concluir, veamos que con límites infinitos no es posible tener resultado análogos del Teorema 13. Sin embargo, algunos resultados sí son válidos. Omitiremos la demostración del siguiente resultado.

Teorema 30. *Sean* (a_n) *y* (b_n) *dos sucesiones de números reales.*

a) Si $a_n \longrightarrow \infty$ y b_n tiende a un límite, finito o infinito, entonces $(a_n + b_n) \longrightarrow \infty$.

b) Si $a_n \longrightarrow \infty$ y $\lambda \in \mathbb{R}$, $\lambda > 0$ (respectivamnte $\lambda < 0$) entonces $\lambda a_n \longrightarrow \infty$ (respectivamente $\lambda a_n \longrightarrow -\infty$).

c) Si $a_n \longrightarrow \infty$ y b_n tiende a un límite estrictamente positivo, o a ∞, entonces $a_n b_n \longrightarrow \infty$.

   Si $a_n \longrightarrow \infty$ y b_n tiende a un límite estrictamente negativo, o a $-\infty$, entonces $a_n b_n \longrightarrow -\infty$

d) Si $a_n \longrightarrow \pm\infty$ entonces $1/a_n \longrightarrow 0$.

Observación 31. El lector atento habrá notado que no se ha nada dicho acerca de $a_n + b_n$ en el caso en que $a_n \longrightarrow \infty$, $b_n \longrightarrow -\infty$; ni tampoco se ha dicho nada acerca de $a_n b_n$ cuando $a_n \longrightarrow \infty$, $b_n \longrightarrow 0$. La razón, es que no es posible obtener un resultado general, como los siguientes ejemplos muestran.

Ejemplo 32.

a) Acerca de $a_n + b_n$ cuando $a_n \longrightarrow \infty, b_n \longrightarrow -\infty$.

   i. Sea $a_n = n$, y $b_n = n - l$, donde $l \in \mathbb{R}$ es cualquier real. Entonces, $a_n - b_n = n - (n - l) = l$ es la sucesión constante, que converge a l.

   ii. Sea $a_n = n^2$, y $b_n = -n$. Entonces $a_n + b_n = n^2 - n = n(n-1) \longrightarrow \infty$.

   iii. Sean $a_n = n$, $b_n = -n^2$. Entonces $a_n + b_n = n(1-n) \longrightarrow -\infty$.

   iv. Si $a_n = (-1)^n + n$, y $b_n = -n$, entonces $a_n + b_n = (-1)$ que no converge.

b) Acerca de $a_n b_n$ cuando $a_n \longrightarrow \infty$ y $b_n \longrightarrow 0$.

   i. Sea $a_n = n$, y $b_n = l/n$, donde $l \in \mathbb{R}$ es un número cualquiera. Entonces $a_n b_n = l$ que converge a l.

   ii. Sea $a_n = n^2$, y $b_n = 1/n$. Entonces $a_n b_n = n$ que tiende a ∞.

   iii. Sea $a_n = n^2$, y $b_n = 1/n^3$. Entonces $a_n b_n = 1/n$ que tiende a 0.

   iv. Si $a_n = n$, y $b_n = (-1)^n/n$, entonces $a_n b_n = (-1)^n$ que no converge.

c) Notamos también que la parte c) del teorema anterior no tiene recíproca. Es decir, si se tiene una sucesión (a_n) que converge a cero, no es posible concluir que $1/a_n$ tiende al infinito. Por ejemplo, consideremos la sucesión $a_n = (-1)^n/n$. Claramente, $a_n \longrightarrow 0$ pero no es cierto que $1/a_n \longrightarrow \infty$ ni que $1/a_n \longrightarrow -\infty$.

5 Sucesiones de Cauchy

Una de las primeras dificultades que se encuentra al tratar de usar la definición de la convergencia de una sucesión es que ésta presupone que se conoce el límite de la sucesión: en efecto, si $(a_n)_n$ es una sucesión y se quiere mostrar que converge a L, se debe conocer el valor de L para poder hacer que $d(a_n,\ L)$ sea lo suficientemente pequeño. Entonces ¿qué hacer si no se conoce el valor de L? La definición no ayuda, aunque sea posible usar los criterios de comparación para concluir la convergencia de la sucesión.

La noción de «*sucesión de Cauchy*» nos dará un medio de verificar si una sucesión es convergente sin necesariamente conocer el límite de la sucesión, y sin utilizar los criterios de comparación vistos anteriormente. Intuitivamente, puede decirse que una suecsión $(a_n)_n$ es una sucesión de Cauchy si es que los términos se aglutinan cada vez más, los unos cerca de los otros, a medida que n crece. La definición a continuación precisa esta noción.

Definición 33. *Una sucesión $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es una **sucesión de Cauchy** si es que para todo $\varepsilon > 0$ existe un entero N tal que $|a_n - a_m| < \varepsilon$ toda vez que $m, n \geqslant N$.*

Ejemplo 34.

a) Si $a_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$ entonces (a_n) no es una sucesión de Cauchy. En efecto, para cualquier n tomemos $m = 2n$. Tendremos entonces:

$$\begin{aligned} |a_n - a_m| &= |a_{2n} - a_n| \\ &= \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{2n} \\ &> n \cdot \frac{1}{2n} \\ &= \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Así, incluso si es que n es muy grande, siempre tendremos que $|a_n - a_m| > \frac{1}{2}$. Es entonces suficiente tomar $\varepsilon = \frac{1}{2}$ para ver que la sucesión no es de Cauchy.

b) Si $b_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{n+1}}{n}$, entonces (b_n) sí es una sucesión de Cauchy. En efecto, si $m > n$, entonces tenemos:

$$b_n - b_m = \pm\left(\underbrace{\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2}}_{>0} + \underbrace{\frac{1}{n+3} - \frac{1}{n+4}}_{>0} + \cdots \pm \frac{1}{m}\right)$$

así que

$$\begin{aligned} |b_m - b_n| &= \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2} + \frac{1}{n+3} - \frac{1}{n+4} + \cdots \pm \frac{1}{m} \\ &= \frac{1}{n+1} - \underbrace{\left(\frac{1}{n+2} - \frac{1}{n+3}\right)}_{>0} - \underbrace{\left(\frac{1}{n+4} - \frac{1}{n+5}\right)}_{>0} \cdots \\ &< \frac{1}{n+1} \end{aligned}$$

que puede ser tan pequeño como se quiera.

Teorema 35. *Una sucesión de números reales (a_n) es convergente si y solamente si es que es una sucesión de Cauchy.*

Demostración. Debemos demostrar dos implicaciones.

- Mostremos primero que toda sucesión de Cauchy es convergente. Para ello primero observemos que toda sucesión de Cauchy es acotada. En efecto, si (a_n) es una sucesión de Cauchy, para $\varepsilon > 0$ fijo, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que si $n, m > N$ tenemos $|a_n - a_m| < \varepsilon$. Así, para $n > N$ tendremos

$$\begin{aligned} |a_n| &= |a_N + (a_n - a_N)| \\ &\leqslant |a_N| + |a_n - a_N| \\ &\leqslant |a_N| + \varepsilon. \end{aligned}$$

  Así, para $n \in \mathbb{N}$ tendremos $|a_n| \leqslant \max\{|a_1|, |a_2|, \ldots, |a_{N-1}|, |a_N| + \varepsilon\} = M < \infty$, lo que demuestra que la sucesión es acotada. Según el Teorema de Bolzano - Weierstrass, (a_n) posee una sub-sucesión convergente, digamos $(a_{n_k})_k$. Sea ℓ el límite de a_{n_k}. Para $\varepsilon > 0$ existe entonces un natural que depende de ε, digamos $N_1 = N_1(\varepsilon)$ tal que

$$|a_{n_k} - \ell| < \frac{\varepsilon}{2}$$

  cuando $n_k > N_1$. Por otro lado, como la sucesión original es una sucesión de Cauchy, existe un natural $N_2(\varepsilon)$ tal que

$$|a_m - a_n| < \frac{\varepsilon}{2}$$

  cuando $n, m > N_2$. Así, al tomar $N = \max\{N_1, N_2\}$, para $n, n_k > N$ tendremos que

$$\begin{aligned} |a_n - \ell| &= |a_n - a_{n_k} + a_{n_k} - \ell| \\ &\leqslant |a_n - a_{n_k}| + |a_{n_k} - \ell| \\ &< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} \end{aligned}$$

- Mostremos ahora que, recíprocamente, toda sucesión convergente es una sucesión de Cauchy. Sea entonces $\ell = \lim_{n \to \infty} a_n$. Por la definición de la convergencia, tenemos entonces que para $\varepsilon > 0$ existe un natural N tal que, para $n > N$ se tiene $|a_n - \ell| < \varepsilon/2$. Así, para $m, n > N$ tendremos

$$\begin{aligned} |a_n - a_m| &= |a_n - \ell + \ell - a_m| \\ &\leqslant |a_n - \ell| + |a_m - \ell| \\ &< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2}. \end{aligned}$$

□

Observación 36. El teorema anterior evidencia la diferencia fundamental que existe entre $\mathbb{R}$ y $\mathbb{Q}$: la completez de $\mathbb{R}$. En $\mathbb{R}$ las sucesiones convergentes son precisamente las sucesiones de Cauchy. En $\mathbb{Q}$, en cambio, las sucesiones convergentes seguirán siendo de Cauchy, pero tenemos sucesiones de Cauchy que no convergen **en $\mathbb{Q}$**. Los términos de una sucesión de Cauchy de números racionales se aglutinan cada vez más, pero pueden hacerlo alrededor de uno de «los huecos de $\mathbb{Q}$». En este caso, la sucesión noconverge en $\mathbb{Q}$, aunque sí converge en $\mathbb{R}$. Es opr esto que $\mathbb{R}$ es completo, y $\mathbb{Q}$ no.