TRABAJO PRÁCTICO Nº 6

Problemas de Posición y Magnitud

Consigna 17- Calcular el ángulo comprendido entre:

a) los planos π_1: $3x - y + 2z + 1 = 0$ y π_2: $2x + y + 5z - 1 = 0$

b) entre la recta r: $\begin{cases} x = 3 + \lambda \\ y = -2 + \lambda \\ z = 5 \end{cases}$ y el plano γ: $3x - 4y + 5z - 1 = 0$

c) entre las rectas $l_1: \frac{x-1}{2} = \frac{y+5}{-3} = \frac{z+1}{2}$ y $l_2: \frac{x}{4} = \frac{y-1}{-1} = \frac{z-1}{2}$

Solución

a) El ángulo entre dos planos, está determinado por el menor ángulo que determinen sus vectores normales. O sea, el ángulo agudo determinado por la expresión:

$$\cos\theta = \frac{|\vec{n}_1.\vec{n}_2|}{|\vec{n}_1|.|\vec{n}_2|}$$

Entonces, en primer lugar, debemos reconocer los vectores normales a cada uno de los planos que tenemos.

$$\pi_1: 3x - y + 2z + 1 = 0$$

$$\pi_1 \perp \vec{n}_1 = (3, -1, 2)$$

$$|\vec{n}_1| = \sqrt{3^2 + (-1)^2 + 2^2} = \sqrt{14}$$

$$\pi_2: 2x + y + 5z - 1 = 0$$

$$\pi_2 \perp \vec{n}_2 = (2, 1, 5)$$

$$|\vec{n}_1| = \sqrt{2^2 + 1^2 + 5^2} = \sqrt{30}$$

Calculando entonces el menor ángulo entre n_1 y n_2 encontraremos el ángulo que forman los planos π_1 y π_2.

$$\cos\theta = \frac{\vec{n}_1.\vec{n}_2}{|\vec{n}_1|.|\vec{n}_2|}$$

$$\cos\theta = \frac{(3, -1, 2).(2, 1, 5)}{\sqrt{14}.\sqrt{30}}$$

$$\cos\theta = \frac{3.1 + (-1).1 + 2.5}{\sqrt{14}.\sqrt{30}}$$

$$\hat{\theta} = \cos^{-1}\left(\frac{15}{\sqrt{14}.\sqrt{30}}\right) \rightarrow \hat{\theta} \cong 42° \, 57' \, 7.12''$$

b) Para calcular el ángulo entre una recta y un plano debemos recordar que el vector normal del plano ($\hat{\theta}$) y dicho angulo entre estos objetos ($\widehat{\omega}$) son complementarios.

Entonces, el para calcular ω procedemos de la siguiente manera:

$$\hat{\theta} + \widehat{\omega} = 90° \ \rightarrow \widehat{\omega} = 90° - \hat{\theta}$$

Con $\quad \hat{\theta} = \cos^{-1}\left(\frac{\vec{n}.\vec{v}}{|\vec{n}|.|\vec{v}|}\right)$

Además, como θ y ω podemos asegurar que:

$$\cos\theta = \operatorname{sen}\omega \ \ ^\wedge \operatorname{sen}\omega = \frac{|\vec{n}.\vec{v}|}{|\vec{n}|.|\vec{v}|}$$

Si tenemos:

La recta $r: \begin{cases} x = 3 + \lambda \\ y = -2 + \lambda \\ z = 5 \end{cases}$ y el plano $\gamma: 3\mathrm{x} - 4\mathrm{y} + 5\mathrm{z} - 1 = 0$

Determinamos el vector director de la recta $\vec{v} = (1,1,0)$ y el vector normal del plano $\vec{n} = (3,-4,5)$ y sus módulos:

$$|\vec{n}| = \sqrt{3^2 + (-4)^2 + 5^2} = \sqrt{50}$$

$$|\vec{v}| = \sqrt{1^2 + 1^2 + 0^2} = \sqrt{2}$$

Determinaremos el ángulo formado entre la recta el plano con la expresión del $\operatorname{sen}\omega$:

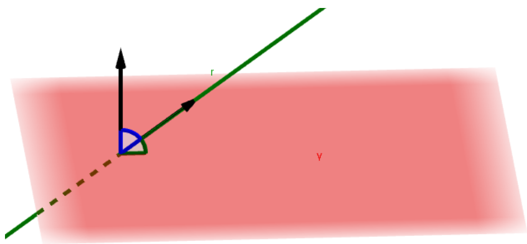
$$\operatorname{sen}\omega = \frac{|(1,1,0).(3,-4,5)|}{\sqrt{2}.\sqrt{50}}$$

$$\operatorname{sen}\omega = \frac{|3-4|}{\sqrt{100}} = \frac{1}{10}$$

Entonces el ángulo ω es:

$$\widehat{\omega} = \operatorname{sen}^{-1}\left(\frac{1}{10}\right) \rightarrow \widehat{\omega} \cong 5° \ 44° \ 1.01°$$

c) Para encontrar el ángulo que forman dos rectas entre si, debemos encontrar el menor ángulo que forman sus vectores directores:



Siendo entonces θ el ángulo que forman los vectores directores de las rectas, y por tanto las rectas entre sí:

$$\cos\theta = \frac{|\vec{v}_1.\vec{v}_2|}{|\vec{v}_1|.|\vec{v}_2|}$$

Teniendo las rectas:

$$l_1: \frac{x-1}{2} = \frac{y+5}{-3} = \frac{z+1}{2}$$

$$l_2: \frac{x}{4} = \frac{y-1}{-1} = \frac{z-1}{2}$$

Determinaremos los vectores directores de cada recta y sus módulos, recordando que los denominadores de cada miembro en la ecuación simétrica representan las coordenadas de estos vectores. Entonces:

$$\vec{v}_1 = (2, -3, 2) \qquad \qquad \vec{v}_2 = (4, -1, 2)$$

$$|\vec{v}_1| = \sqrt{2^2 + (-3)^2 + 2^2} = \sqrt{17} \qquad \qquad |\vec{v}_1| = \sqrt{4^2 + (-1)^2 + 2^2} = \sqrt{21}$$

Calculamos entonces θ:

$$\cos\theta = \frac{|(2,-3,2).(4,-1,2)|}{\sqrt{17}.\sqrt{21}}$$

$$\cos\theta = \frac{|2.4 + (-3).(-1) + 2.2|}{\sqrt{17}.\sqrt{21}}$$

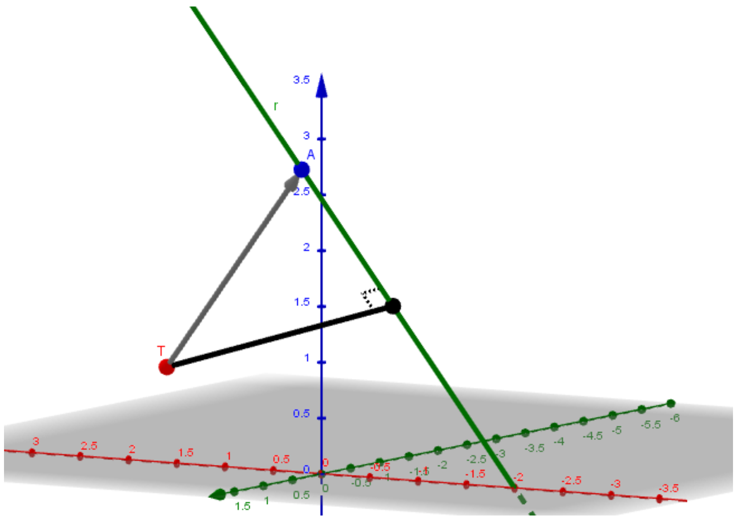
$$\hat{\theta} = \cos^{-1}\left(\frac{|15|}{\sqrt{17}.\sqrt{21}}\right) \rightarrow \hat{\theta} \cong 57° \; 32° \; 59.97°$$

Consigna 20- Calcular la distancia entre:

a) el punto P(1 ; 1; 1) y la recta r: $\frac{x+1}{2} = \frac{y-2}{4} = \frac{z-3}{6}$

b) el plano π: $2x - 3y - 6z - 14 = 0$ y el punto Q $(-1; 2; 3)$

Solución



a) La distancia entre un punto y una recta está dada por la longitud del segmento de recta perpendicular a la recta dada que pasa por el punto dado. Entonces utilizando un punto que pertenezca a la recta y la proyección de este sobre la recta (sobre su vector director más precisamente) podemos imaginar un triángulo rectángulo, donde la distancia es el cateto que desconocemos. O sea, se puede determinar por la expresión:

$$d(P,r) = \sqrt{\left|\overrightarrow{PA}\right|^2 - \left|Proy_{\vec{v}}\overrightarrow{PA}\right|^2}$$

Entonces, para comenzar determinamos si el punto T está incluido en la recta, si esto sucediera la Distancia sería igual a 0

$$r: \frac{1+1}{2} \neq \frac{1-2}{4} \neq \frac{1-3}{6} \rightarrow T \notin r$$

Continuamos determinando un vector que vaya desde P hasta A, y A sea un punto perteneciente a la recta.

Elegimos un punto $A\ (1\ ,6\ ,9)$ por ejemplo:

$$r: \frac{1+1}{2} = \frac{6-2}{4} = \frac{9-3}{6}\ \ ,\ \ A \in r$$

Comenzamos por determinar $\vec{v}$ y su modulo, $\overrightarrow{TA}$ y su modulo y la $Proy_{\vec{u}}\overrightarrow{PA}$:

- $\vec{v} = (2{,}4{,}6)$
- $|\vec{v}| = \sqrt{2^2+4^2+6^2} = \sqrt{56}$
- $\overrightarrow{TA} = (1-1{,}6-1{,}9-1) = (0{,}5{,}8)$
- $\left|\overrightarrow{TA}\right| = \sqrt{0^2+5^2+8^2} = \sqrt{89}$
- $Proy_{\vec{u}}\overrightarrow{PA} = \frac{\overrightarrow{PA}.\vec{v}}{|\vec{v}|} = \frac{(0{,}5{,}8).(2{,}4{,}6)}{\sqrt{56}} = \frac{68}{\sqrt{56}}$

Ya tenemos todo lo necesario para calcular la distancia, por lo que planteamos reemplazando los valores necesarios:

$$d(T,r) = \sqrt{\left|\overrightarrow{TA}\right|^2 - \left|Proy_{\vec{v}}\overrightarrow{TA}\right|^2}$$

$$d(T,r) = \sqrt{\sqrt{89}^2 - \frac{68}{\sqrt{56}}^2} \rightarrow D(T,r) \cong 2.54$$

b) Podemos determinar la distancia entre un punto P y un plano π obteniendo el valor absoluto de la proyección escalar de un vector que vaya desde un punto A (perteneciente al plano) hasta P sobre el vector normal de dicho plano. O sea:

$$d(P,\pi) = \left|Proy_{\vec{n}}\overrightarrow{PA}\right|$$

Entonces, para encontrar la distancia entre $\pi: 2x-3y-6z-14=0$ y Q$(-1;\,2;\,3)$, buscaremos un punto A perteneciente al plano, por ejemplo A(4,-2,0):

$$2.4-3.(-2)-6.0-14=0 \rightarrow A \in \pi$$

Y determinamos lo necesario para poder calcular la Proyección, o sea;

- $\overrightarrow{QA} = (4+1, -2-2, 0-3) = (5, -4, -3)$
- $\vec{n} = (2, -3, -6)$
- $|\vec{n}| = \sqrt{2^2 + (-3)^2 + (-6)^2} = \sqrt{49} = 7$

Ya podemos proceder a reemplazar los datos recordando cómo se calcula una Proyección escalar:

$$\left|Proy_{\vec{n}}\overrightarrow{QA}\right| = \left|\frac{\overrightarrow{QA}.\vec{n}}{|\vec{n}|}\right| = \left|\frac{(5,-4,-3).(2,-3,-6)}{7}\right|$$

$$\left|Proy_{\vec{n}}\overrightarrow{QA}\right| = \left|\frac{40}{7}\right| \rightarrow d(Q,\pi) \cong 5.71$$

Consigna 21- Hallar la distancia entre los planos σ: $3x + 6y + 2z - 22 = 0$ yε: $3x + 6y + z - 27 = 0$.

Solución

Para hablar de distancias entre dos planos, primero debemos comprobar que estos sean paralelos, si no, significaría que estos se cortan en algún punto por lo que su distancia seria "variable".

$$\sigma // \varepsilon \leftrightarrow \overrightarrow{n_1} // \overrightarrow{n_2}$$

Determinamos entonces los vectores normales de cada plano:

$$\overrightarrow{n_1} = (3,6,2)$$

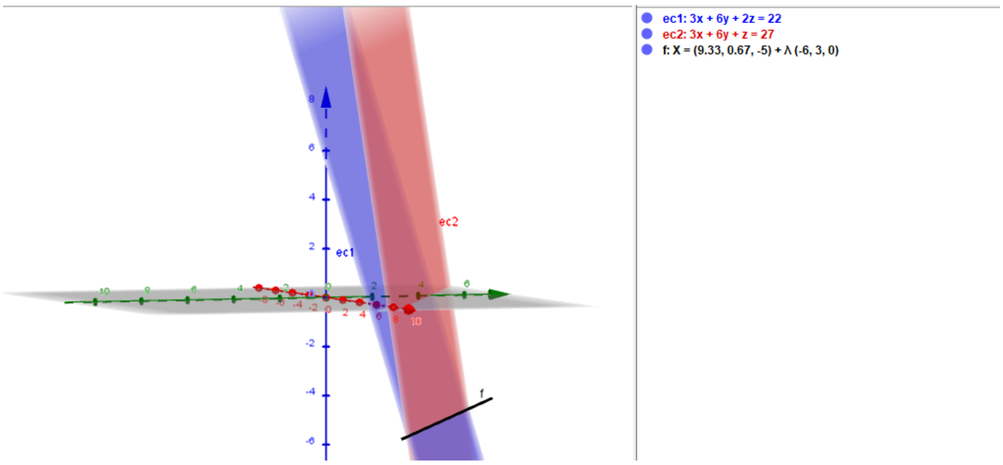
$$\overrightarrow{n_2} = (3,6,1)$$

$$\frac{3}{3} = \frac{6}{6} \neq \frac{2}{1} \rightarrow$$

$No\ son\ paralelos\ los\ vectores\ normales, por\ lo\ tanto\ tampoco\ lo\ son\ los\ planos\ \varepsilon\ y\ \pi$.

Dicho esto, no podemos calcular la distancia que existe entre los planos dados, ya que esta es variable según nos acercamos a la intersección entre los mismos.

Plano ε en Rojo, Plano σ en Azul y la recta "f" resultante entre la intersección de ambos en negro.



Consigna 23- Calcular la distancia entre la recta r_1: $(x, y, z) = (1,0,3) + \mu\,(1, -1/2, -2)$ y la recta r_2: $(x, y, z) = (3,1,0) + \tau(-2,1,4)$

Solución

Primeramente comprobamos si las rectas son aprarelas o no, porque el calculo de la distancia entre ellas va a varia un poco dependiendo de esto. Para eso es necesario que reconozcamos los vectores directores de cada recta y veamos si estos son paralelos ente si. O sea:

$$r_1 // r_2 \leftrightarrow \overrightarrow{v_1} // \overrightarrow{v_2}$$

Entonces:

$$\overrightarrow{v_1} = \left(1, -\frac{1}{2}, -2\right)$$

$$\overrightarrow{v_2} = (-2,1,4)$$

$$\frac{1}{-2} = \frac{-1/2}{1} = \frac{-2}{4} \rightarrow Efectivamente, ambos\ son\ paralelos$$

Ahora, además, debemos comprobar que no son coincidentes, probando con un punto cualquiera. Por ejemplo P(1,0,3)∈r1, por lo tanto, no debería pertenecer a r2, si lo hace (ya habiendo comprobado el paralelismo), estas son rectas coincidentes.

$$r_2: (x, y, z) = (3,1,0) + \tau(-2,1,4)$$

$$r_2: (1,0,3) = (3 + (-2)\tau, 1 + \tau, 0 + 4\tau)$$

$$r_2: \begin{cases} 1 = 3 - 2\tau \\ 0 = 1 + \tau \\ 3 = 4\tau \end{cases} \rightarrow r_2: \begin{cases} \tau = \dfrac{1-3}{2} \\ \tau = -1 \\ \tau = \dfrac{3}{4} \end{cases}$$

No existe un mismo valor de τ para que cada una de las coordenadas coincidan con las del punto P, por lo tanto el punto P no pertenece a r2, por lo que no son coincidentes.

A partir de ahora podemos pasar a calcular la distancia entre dos rectas paralelas, para la cual nos vamos a valer de 2 puntos no enfrentados, uno de cada recta. La distancia entre ellas es el largo de un segmento perpendicular a ambos. Para encontrar esto necesitaremos un punto P en r1 y un punto Q en r2, El vector que va desde P a Q (o viceversa) y la proyección de este vector sobre el vector director de una de las rectas. Con ellos imaginaremos un triángulo rectángulo donde el largo del cateto faltante es el largo del segmento que representa la distancia entre ambas rectas.

Entonces la distancia entre las rectas está dada por la expresión:

$$d(r_1, r_2) = \sqrt{\left|\overrightarrow{PQ}\right|^2 - \left|Proy_{\vec{v}}\overrightarrow{PQ}\right|^2}$$

Consideremos entonces los puntos P(1,0,3) de r1 y Q(3,1,0) de r2, y calculamos:

$$\overrightarrow{v_2} = (-2,1,4)$$

$$|\overrightarrow{v_2}| = \sqrt{(-2)^2 + 1^2 + 4^2} = \sqrt{21}$$

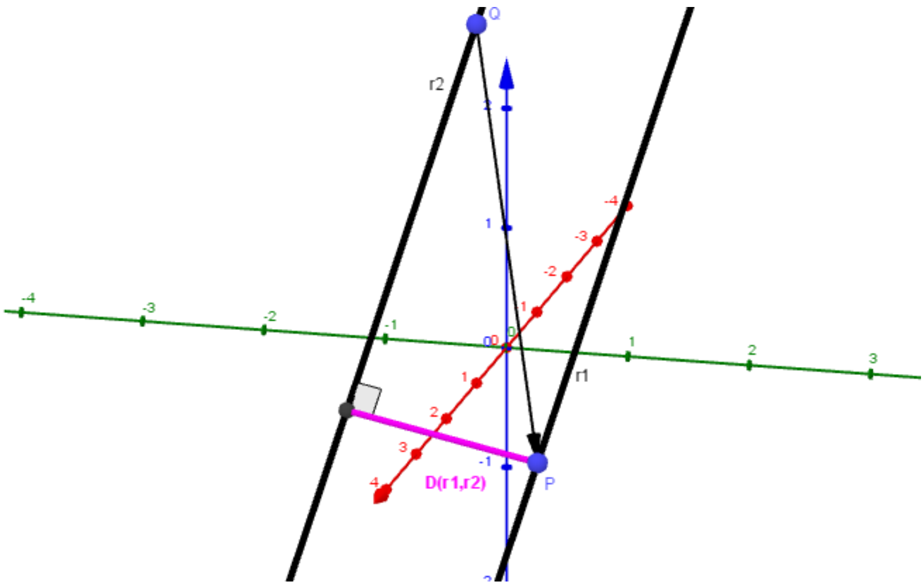
$$\overrightarrow{PQ} = (3-1, 1-0, 0-3) = (2,1,-3)$$

$$\left|\overrightarrow{PQ}\right| = \sqrt{2^2 + 1^2 + (-3)^2} = \sqrt{14}$$

$$\left|Proy_{\vec{v}}\overrightarrow{PQ}\right| = \left|\frac{\overrightarrow{PQ}.\vec{v}}{\vec{v}}\right| = \left|\frac{(2,1,-3).(-2,1,4)}{\sqrt{21}}\right| = \left|\frac{\left(-\frac{15}{2}\right)}{\sqrt{21}}\right| = \frac{15}{2\sqrt{21}}$$

Ahora podemos calcular entonces la distancia entre rectas, reemplazando los datos obtenidos:

$$d(r_1, r_2) = \sqrt{\sqrt{21}^2 - \left(\frac{15}{2\sqrt{21}}\right)^2} \rightarrow d(r_1, r_2) \cong 4.28$$



Consigna 26- a) Hallar la ecuación del plano θ paralelo al plano π: $2x - 3y - 6z - 14 = 0$ y que equidista del origen de coordenadas en 5 unidades.

b) Calcular la distancia entre los planos θ y π.

c) El punto A(1;2;-1) ¿pertenece al plano π? De no ser así calcule la distancia que existe entre el punto A y el plano π .

Solución

a) π: $2x - 3y - 6z - 14 = 0$ Tiene como vector director a $\vec{n}$ = (2 , -3 , -6)

Éste vector también dirige al plano θ porque θ // π.

Entonces: θ: $2x - 3y - 6z$ + d = 0 , es un valor desconocido que tenemos que hallar.

Y, según indica la consigna, el plano θ está a 5 unidades de distancia del origen de coordenadas O (0 , 0 , 0). Entonces d(O , θ) = $\left|proy_{\vec{n}}\overrightarrow{OA}\right|$ = 5, siendo A un punto del plano θ, A $\in$ θ.

Considerando x = 0 e y = 0, entonces $2 \times 0 - 3 \times 0 - 6z + d = 0 \Rightarrow z = d/6 \Rightarrow$ A(0 , 0 , d/6)

$\overrightarrow{OA}$ = (0, 0 , d/6)

$|\vec{n}| = \sqrt{2^2 + (-3)^2 + (-6)^2} = 7$

$$\left|proy_{\vec{n}}\overrightarrow{OA}\right| = \left|\frac{2\times 0 + (-3)\times 0 + (-6)\times\frac{d}{6}}{7}\right| = 5 \quad \Rightarrow \quad \left|-\frac{d}{7}\right| = 5$$

De donde: $-\frac{d}{7} = 5 \quad \Rightarrow \quad d = -35 \quad$ o $\quad -\frac{d}{7} = -5 \quad \Rightarrow \quad d = 35$

Hay dos planos paralelos a π que están a 5 unidades del origen de coordenadas:

$$\boxed{\theta_1: 2x - 3y - 6z + 35 = 0 \quad \text{y} \quad \theta_2: 2x - 3y - 6z - 35 = 0}$$

b) Sean π: $2x - 3y - 6z - 14 = 0$ y θ_1: $2x - 3y - 6z + 35 = 0$

Ya sabemos que $\theta \,//\, \pi$ y que no son coincidentes. $\theta \,//\, \pi$. d(θ , π.) = $\left|proy_{\vec{n}}\,\overrightarrow{PQ}\right|$, siendo P $\in$ π y Q $\in$ θ_1.

P: si x = 1 e y = 0 , entonces z = -2 $\Rightarrow$ P (1 , 0 , -2)

Q: si x = -1 y z = 0 entonces y = 11 $\Rightarrow$ Q (-1 , 11 , 0)

$\overrightarrow{PQ}$ = (-2 , 11 , 2)

$\vec{n}$ = (2 , -3 , -6) $\qquad |\vec{n}| = \sqrt{2^2 + (-3)^2 + (-6)^2} = 7$

$$d(\theta, \pi.) = \left|proy_{\vec{n}}\,\overrightarrow{PQ}\right| = \left|\frac{(-2)x2 + 11x(-3) + 2x(-6)}{7}\right| = \left|\frac{-49}{7}\right| = 7$$

$$\boxed{d(\theta, \pi.) = 7}$$

c) A(1;2;-1) **y** π: $2x - 3y - 6z - 14 = 0$

¿A $\in$ π? $2 \times 1 - 3 \times 2 - 6 \times 1 - 14 = 0$, $-24 \neq 0 \Rightarrow$ A $\notin$ π

d(A , π) = $\left|proy_{\vec{n}}\overrightarrow{AP}\right|$

Siendo A(1;2;-1) **y** P (1 , 0 , -2) $\Rightarrow$ $\overrightarrow{AP}$ = (0 , -2 , -1)

$$d(A, \pi) = \left|proy_{\vec{n}}\overrightarrow{AP}\right| = \left|\frac{0x2 + (-2)x(-3) + (-1)x(-6)}{7}\right| = \left|\frac{12}{7}\right| \cong 1{,}71$$

$$\boxed{d(A, \pi) \cong 1{,}71}$$