VECTORES

TRABAJO PRÁCTICO Nº 3

A- Producto escalar - Aplicaciones

1. Sean los vectores

i) $\vec{u} = \check{j} + 4\check{i}$ *y* $\vec{v} = 3\check{i} - 2\check{j}$ *,* ***ii)*** $\vec{u} = -\check{i} + \check{j} - 4\check{k}$ *y* $\vec{v} = \frac{3}{2}\check{i} + 2\check{j} - \frac{1}{2}\check{k}$

Realizar los cálculos indicados y responder los interrogantes planteados justificando, en ambos casos.

a) El producto escalar entre $\vec{u}$ *y* $\vec{v}$ *. ¿* $\vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{v} \cdot \vec{u}$ *?*

b) El ángulo determinado por los mismos. ¿ $\vec{u} \perp \vec{v}$*?*

c) La proyección escalar de $\vec{u}$ *en la dirección de* $\vec{v}$ *e interprete gráficamente.*

d) La proyección vectorial de $\vec{u}$ *en la dirección de* $\vec{v}$ *e interprete gráficamente.*

a)Recordamos la definicion del Producto Escalar entre Vectores: "… Es la suma del producto de las componentes homonimas de ambos vectores", donde este resultado es un Numero Real.

i)

$\vec{u} = (4; 1)$

$\vec{v} = (3; -2)$

$$\vec{u}.\vec{v} = (4; 1).(3; -2)$$

$$\vec{u}.\vec{v} = 4.3 + 1.(-2)$$

$$\vec{u}.\vec{v} = 12 - 2$$

$$\boxed{\vec{u}.\vec{v} = 10}$$

Ahora probamos si se verifica la conmutatividad del producto escalar como solicita la consigna:

i)

$$\vec{v}.\vec{u} = (3; -2).(4; 1)$$

$$\vec{v}.\vec{u} = 3.4 + (-2).1$$

$$\boxed{\vec{v}.\vec{u} = 10}$$

Se puede observar que se verifica la conmitatividad del producto escalar en R^2.

ii)

$\vec{u} = (-1\,;\ 1\,;-4)$

$\vec{v} = \left(\frac{3}{2};\ 2\,;\ -\frac{1}{2}\right)$

$$\vec{u}.\vec{v} = (-1\,;1\,;-4).(\frac{3}{2};\ 2\,;\ -\frac{1}{2})$$

$$\vec{u}.\vec{v} = (-1).\frac{3}{2} + 1.2 + (-4).(-\frac{1}{2})$$

$$\vec{u}.\vec{v} = -\frac{3}{2} + 2 + 2$$

$$\boxed{\vec{u}.\vec{v} = \frac{5}{2}}$$

ii)

$$\vec{v}.\vec{u} = \left(\frac{3}{2};\ 2\,;\ -\frac{1}{2}\right).(-1\,;\ 1\,;-4)$$

$$\vec{v}.\vec{u} = \frac{3}{2}.(-1) + 2.1 +.\left(-\frac{1}{2}\right).(-4)$$

$$\boxed{\vec{v}.\vec{u} = \frac{5}{2}}$$

Se cumple también la conmutatividad del producto escalar en R^3.

b) Para calcular el angulo entre vectores necesitamos sus modulos, asi que los calcularemos:

i)

$|\vec{u}| = \sqrt{4^2+1^2} = \sqrt{17}$

$|\vec{v}| = \sqrt{3^2 + (-2)^2} = \sqrt{13}$

ii)

$|\vec{u}| = \sqrt{(-1)^2+1^2 + (-4)^2} = \sqrt{18}$

$|\vec{v}| = \sqrt{\left(\frac{3}{2}\right)^2 +2^2 + \left(-\frac{1}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{13}{2}}$

Recoramos que, sean α el angulo formado entre los vectores, entonces:

$$\cos\alpha = \frac{\vec{u}.\vec{v}}{|\vec{u}|.|\vec{v}|}$$

$$\alpha = \cos^{-1}\left(\frac{\vec{u}.\vec{v}}{|\vec{u}|.|\vec{v}|}\right)$$

Como ya calculamos el numerador en el item "a" y determinamos sus modulos, podemos reemplazar los valores correspondientes:

i)

$$\boxed{\alpha = \cos^{-1}\left(\frac{10}{\sqrt{17}.\sqrt{13}}\right) = 47° \, 43' \, 34{,}7''}$$

ii)

$$\boxed{\beta = \cos^{-1}\left(\frac{5/2}{\sqrt{18}.\sqrt{13/2}}\right) = 76° \, 38' 12{,}05''}$$

Por último, para que dos vectores cumplan la condición de ser perpendiculares ($\vec{u} \perp \vec{v}$), el ángulo entre ellos debe ser de 90º, por ende el coseno de éste debe ser 0, cosa que no sucede para ninguno de nuestros pares de ángulos.

c) Para obetner la **Proyeccion Escalar** de un vectore sobre otro, debemos utilizar la expresion:

$$proy_{\vec{v}}\overrightarrow{u} = \frac{\vec{u}.\vec{v}}{|\vec{v}|}$$

Tenemos los datos del numerador y denominador de items anteriores, podemos reemplazar respectivamente:

i)

$$proy_{\vec{v}}\overrightarrow{u} = \frac{10}{\sqrt{13}} \cong 2{,}77$$

ii)

$$proy_{\vec{v}}\overrightarrow{u} = \frac{5/2}{\sqrt{13/2}} \cong 0{,}98$$

La Proyección escalar de un vector sobre otro representa la longitud del segmento que se obtiene sobre la dirección de $\vec{v}$, en este caso; al trazar una perpendicular desde el extremo de $\vec{u}$ hasta la dirección de $\vec{v}$.

d)La **Proyección Vectorial** de un vector sobre otro puede calcularse de la siguiente manera:

$$\overrightarrow{\text{proy}}_{\vec{v}}\,\vec{u} = \frac{\vec{u}.\vec{v}}{|\vec{v}|^2}.\vec{v}$$

Ya tenemos todos los datos, procedemos a reemplazar para cada caso:

i)

$$\overrightarrow{\text{proy}}_{\vec{v}}\,\vec{u} = \frac{10}{(\sqrt{13})^2}\,.(3;-2)$$

$$\overrightarrow{\text{proy}}_{\vec{v}}\,\vec{u} = \left(\frac{30}{13}\,;\,\frac{-20}{13}\right)$$

ii)

$$\overrightarrow{\text{proy}}_{\vec{v}}\,\vec{u} = \frac{5/2}{\left(\sqrt{13/2}\right)^2}\,.\left(\frac{3}{2};\,2\,;\,-\frac{1}{2}\right)$$

$$\overrightarrow{\text{proy}}_{\vec{v}}\,\vec{u} = \frac{5}{13}\,.\left(\frac{3}{2};\,2\,;\,-\frac{1}{2}\right)$$

$$\overrightarrow{\text{proy}}_{\vec{v}}\,\vec{u} = \left(\frac{15}{26}\,;\,\frac{10}{13}\,;\,-\frac{5}{26}\right)$$

La Proyección Vectorial, es similar a la Proyección Escalar en su geometría, pero la primera mencionada representa el VECTOR en la direccion de $\vec{v}$, que se encuentra al trazar por el extemo de $\vec{u}$ una perpendicular a la direccion de $\vec{v}$. O sea, esta calcula un vector sobre la misma dirección de $\vec{v}$, y el módulo de dicho vector coincidirá con el valor de la Proyección Escalar de $\vec{u}$ sobre $\vec{v}$.

Consigna 3: Dados $\vec{u} = -2\check{\imath} + 9\check{\jmath}$ y $\vec{v} = -\check{\imath} + \check{\jmath}$. Encuentre: a) $\vec{v}\cdot\vec{u}$, b) $\text{proy}_{\vec{u}}\,\vec{v}$ c) $\overrightarrow{\text{proy}}_{\vec{u}}\,\vec{v}$ d) $\text{proy}_{\vec{v}}\,\vec{u}$ e) $\overrightarrow{\text{proy}}_{\vec{v}}\,\vec{u}$. Verifique sus soluciones analíticas usando herramientas **gráficas** y **algebraicas** del software ***GeoGebra***.

$\vec{u} = -2\check{\imath} + 9\check{\jmath} = (-2\,;9)$

$\vec{v} = -\check{\imath} + \check{\jmath} = (-1\,;1)$

$|\vec{u}| = \sqrt{(-2)^2+9^2} = \sqrt{85} \cong 9{,}22$

$|\vec{v}| = \sqrt{(-1)^2 + 1^2} = \sqrt{2}$

a) $\vec{v}.\vec{u} = (-1\,;1).(-2\,;9) = (-1).(-2) + 1.9 = 11$

b) $\text{proy}_{\vec{u}}\ \vec{v} = \frac{11}{\sqrt{85}} \cong 1{,}19$

c)

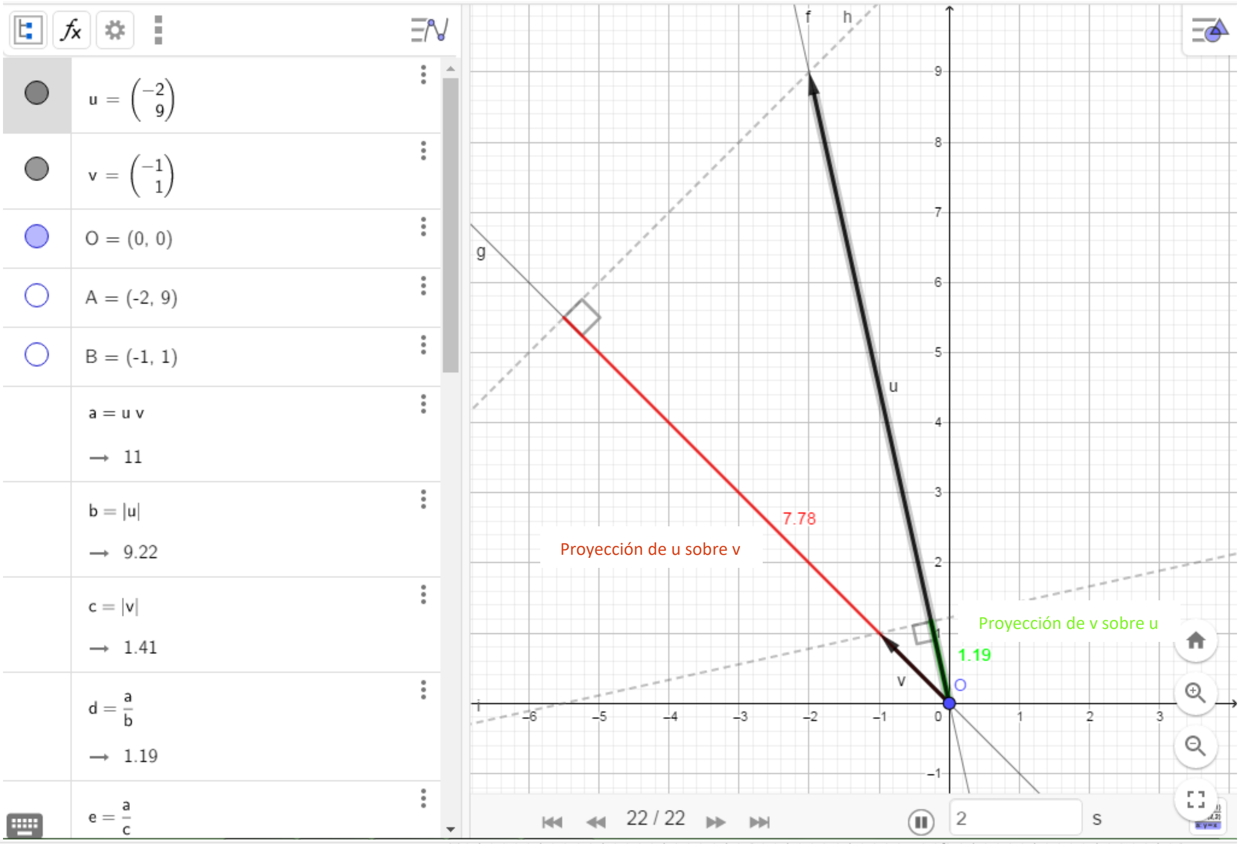
$$\overrightarrow{\text{proy}}_{\vec{u}}\ \vec{v} = \frac{11}{\left(\sqrt{85}\right)^2}\ .(-2\,;9)$$

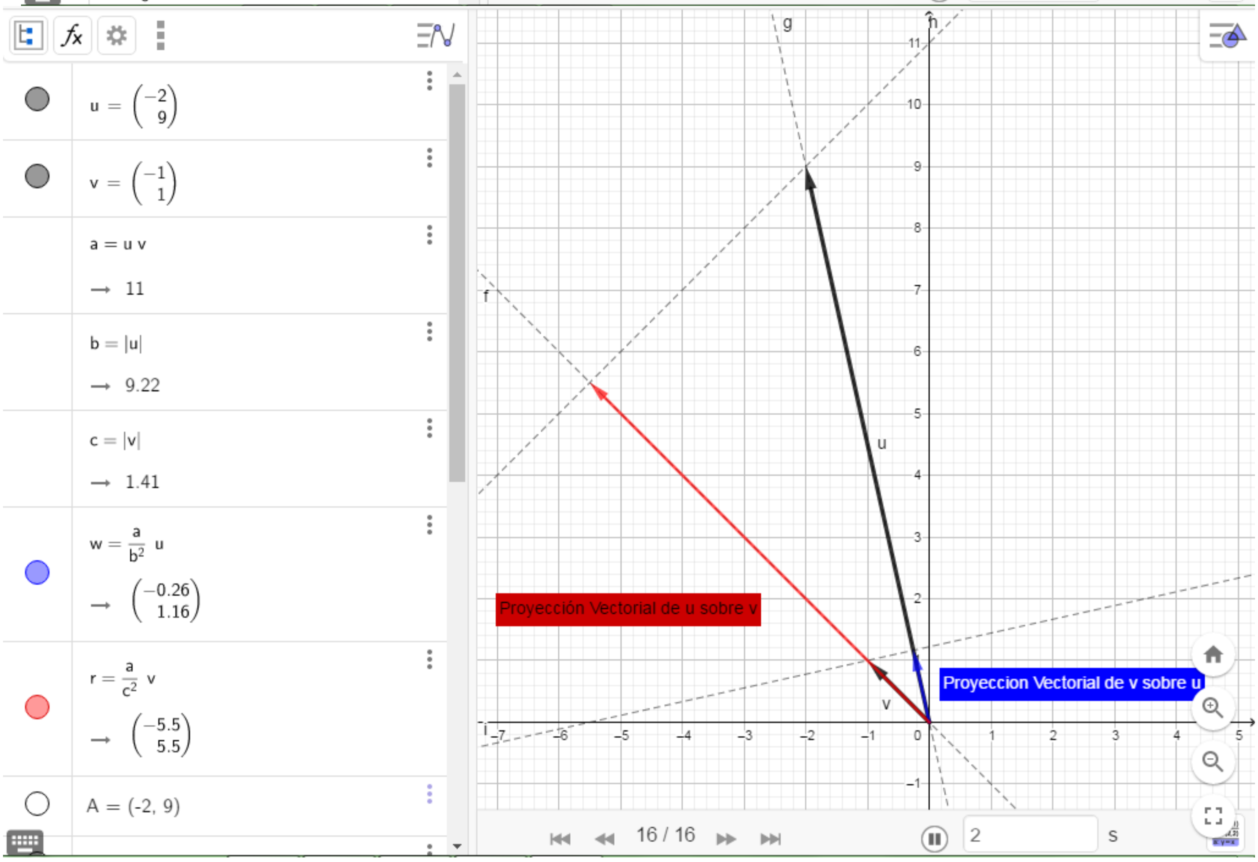
$$\overrightarrow{\text{proy}}_{\vec{u}}\ \vec{v} = \left(-\frac{22}{85}\ ;\ \frac{99}{85}\right)$$

d) $\text{proy}_{\vec{v}}\,\vec{u} = \frac{11}{\sqrt{2}} \cong 7{,}77$

e) $\overrightarrow{\text{proy}_{\vec{v}}}\,\vec{u} = \frac{11}{\left(\sqrt{2}\right)^2}\,.(-1\,;1)$

$$\overrightarrow{\text{proy}_{\vec{v}}}\,\vec{u} = \left(\frac{-11}{2}\,;\,\frac{11}{2}\right)$$





Consigna 4: a) Sabiendo que $\vec{u}$ = (2 ; 3 , -1) y $\vec{v}$ = (-4 ; b , 2), determine el valor de "b" tal que: a) $\vec{u}$ y $\vec{v}$ sean ortogonales. b) $\vec{u}$ y $\vec{v}$ sean paralelos. c) El ángulo entre $\vec{u}$ y $\vec{v}$ sea $\frac{\pi}{4}$.

Para que dos vectores sean ortogonales, se debe verificar que el producto escalar entre ellos debe ser igual a cero, ya que:

$$\cos\alpha = \frac{\vec{u}.\vec{v}}{|\vec{u}|.|\vec{v}|} \wedge \cos\frac{\pi}{2} = 0 \rightarrow \vec{u}.\vec{v} = 0$$

Esto es porque, se plantea que una división debe ser igual a cero, y para que esto justamente suceda es necesario que el numerador sea igual a cero.

Entonces:

$$\vec{u}.\vec{v} = 0$$

$$(2\,;3\,;\,-1).(-4\,;\,b\,;2) = 0$$

$$2.(-4) + 3.b + (-1).2 = 0$$

$$-8 + 3b - 2 = 0$$

$$3b = 10 \rightarrow b = \frac{10}{3}$$

a) Para que dos vectores sean paralelos debe existir un escalar k, tal que:

$$\vec{u} \,//\, \vec{v} \rightarrow \vec{u} = k.\vec{v}$$

Donde:

$$k = \frac{u_1}{v_1} = \frac{u_2}{v_2} = \frac{u_3}{v_3}$$

Entonces podemos encontrar el valor de k con las razones de las componentes que si conocemos:

$$k = \frac{2}{-4} = \frac{3}{b} = \frac{-1}{2} \rightarrow k = -\frac{1}{2}$$

$$-\frac{1}{2} = \frac{3}{b} \rightarrow b = -6$$

b)

$$\cos\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2} \rightarrow \frac{\vec{u}.\vec{v}}{|\vec{u}|.|\vec{v}|} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\frac{(2\,;3\,;\,-1).(-4\,;\,b\,;2)}{\sqrt{2^2+3^2+(-1)^2}.\sqrt{(-4)^2+b^2+2^2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\frac{-10+3b}{\sqrt{14}.\sqrt{20+b^2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\left(\frac{-10+3b}{\sqrt{14}.\sqrt{20+b^2}}\right)^2=\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2$$

$$\frac{(-10+3b)^2}{\left(\sqrt{14}.\sqrt{20+b^2}\right)^2}=\frac{2}{4}$$

$$\frac{100-60b+9b^2}{14\,.(20+b^2)}=\frac{1}{2}$$

$$100-60b+9b^2=(280\ +14b^2)\,.\frac{1}{2}$$

$$100-60b+9b^2=140+7b^2$$

$$100-60b+9b^2-140-7b^2=0$$

$$2b^2-60b-40=0$$

Con la fórmula resolvente calculamos las raíces y encontramos que son:

$$b'=\frac{30-\sqrt{980}}{2}\ ;\ b''=\frac{30+\sqrt{980}}{2}$$

Racionalizando quedarán

$$b'=15-7\sqrt{5}\ ;\ b''=15+7\sqrt{5}$$

Pero solo el valor $b''=15+7\sqrt{5}$ es solución de nuestro problema. Debemos descartar la otra raíz encontrada, ya que al verificar dicho resultado encontramos que el ángulo entre esos dos vectores debería ser $\frac{5\pi}{4}$, no de $\frac{\pi}{4}$ como solicita la consigna. Esto es porque al elevar ambos miembros al cuadrado se está asumiendo que podemos utilizar los dos resultados que tiene esa $\sqrt{2}$, cosa que no es cierta, porque el $\cos\frac{\pi}{4}\neq\frac{-\sqrt{2}}{2}$.

B- Producto vectorial - Aplicaciones

Consigna 5 a) Determine analíticamente las componentes de un vector perpendicular a los vectores $\vec{m}=-\check{j}+3\check{k}$ y $\vec{p}=2\check{\imath}-\check{k}+\check{j}$.

a) b) Represente la solución hallada en el ítem a) usando el software ***GeoGebra*** y verifique la perpendicularidad del vectores $\vec{m}\times\vec{p}$ respecto a los vectores $\vec{m}$ y $\vec{p}$

calculando los ángulos convenientes entre los vectores.

Podemos hacer uso del producto vectorial entre vectores para encontrar el vector que es perpendicular a los dos dados. Entonces:

$$\vec{m} = -\check{j} + 3\check{k} = (0\,;\ -1\,;\ 3)$$

$$\vec{p} = 2\check{i} - \check{k} + \check{j} = (2\,;\ 1\,;\ -1)$$

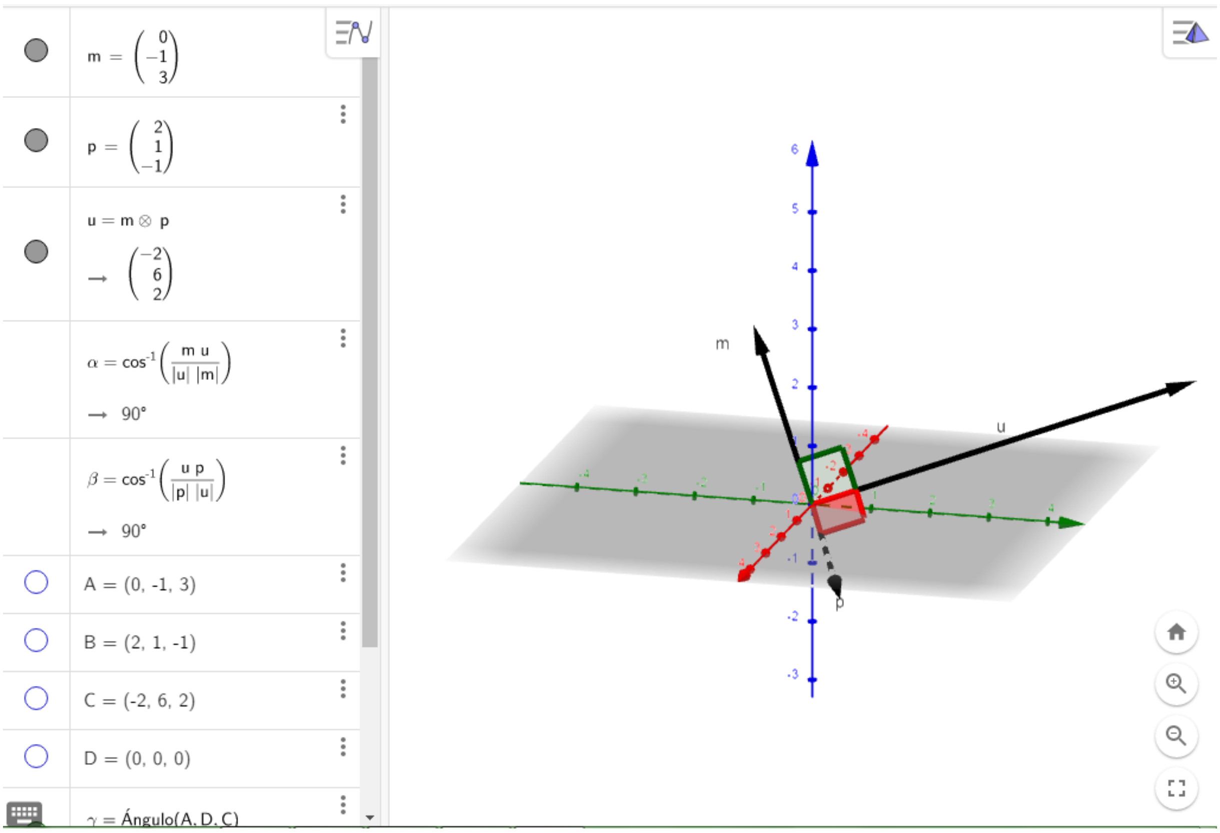
$$\vec{u} \perp \vec{m}\ \wedge\ \vec{u} \perp \vec{p} \rightarrow \vec{u} = \vec{m} \times \vec{p}$$

$$\vec{u} = \vec{m} \times \vec{p} = \begin{vmatrix} \check{i} & \check{j} & \check{k} \\ 0 & -1 & 3 \\ 2 & 1 & -1 \end{vmatrix} \rightarrow$$

$$\rightarrow \vec{u} = [(-1).(-1) - (3.1)].\check{i} - [0.(-1) - (3.2)].\check{j} + [(0.1) - 2.(-1)].\check{k}$$

$$\boxed{\vec{u} = -2\check{i} + 6\check{j} + 2\check{k} = (-2; 6; 2)}$$

El vector encontrado está asegurado que será perpendicular a los vectores $\vec{m} y\ \vec{p}$ ya que fue obtenido al hacer el producto vectorial entre ambos.



Consigna 7: Sean los vectores $\vec{r} = (1\,,-1\,,2)$ y $\vec{a} = (0\,,\ 1\,,-1)$ halle las componentes de un vector perpendicular a $\vec{r}$ y a $\vec{a}$ de módulo 5

Primeramente debemos hallar un vector perpendicular a los vectores dados. Para ello efectuamos el producto vectorial:

Teniendo como datos las componentes de los vectores $\vec{r}$ y $\vec{a}$, utilizamos determinantes para hallar el producto vectorial, ubicando los componentes de cada uno de los vectores de la siguiente manera:

$$(\vec{r}_x\vec{a}) = \begin{vmatrix} \breve{i} & \breve{j} & \breve{k} \\ r_1 & r_2 & r_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \end{vmatrix} = (r_2.a_3 - r_3.a_2).\breve{i} - (r_1.a_3 - r_3.a_1).\breve{j} + (r_1.a_2 - r_2.a_1).\breve{k} =$$

$$(\vec{r}_x\vec{a}) = \begin{vmatrix} \breve{i} & \breve{j} & \breve{k} \\ 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \end{vmatrix} = \left((-1).(-1) - 2.1\right).\breve{i} - \left(1.(-1) - 2.0\right).\breve{j} + \left(1.1 - (-1).0\right).\breve{k} =$$

$$(\vec{r}_x\vec{a}) = \begin{vmatrix} \breve{i} & \breve{j} & \breve{k} \\ 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \end{vmatrix} = (1-2).\breve{i} - \left((-1) - 0\right).\breve{j} + (1-0).\breve{k} = -1\breve{i} + 1\breve{j} + 1\breve{k} =$$

$(\vec{r}_x\vec{a}) = (-1,1,1)$ Es perpendicular a los vectores r y a

Seguidamente debemos hallar un vector unitario en la misma dirección de $(\vec{r}_x\vec{a}) = (-1,1,1)$

$$\vec{u}_{(\vec{r}x\vec{a})} = (\vec{r}_x\vec{a}).\frac{1}{|(\vec{r}_x\vec{a})|} = (-1,1,1).\frac{1}{\sqrt{(-1)^2 + (1)^2 + (1)^2}} = \frac{(-1,1,1)}{\sqrt{3}}$$

$$\vec{u}_{(\vec{r}x\vec{a})} = \frac{-1\sqrt{3}}{3}, \frac{1\sqrt{3}}{3}, \frac{1\sqrt{3}}{3}$$

Este vector también es perpendicular a los vectores a y r pero su módulo es 1, para que cumpla con lo pedido en la consigna solo queda multiplicarlo por el escalar 5

$$\vec{u}_{(\vec{r}x\vec{a})}.5 = \left(\frac{-1\sqrt{3}}{3}, \frac{1\sqrt{3}}{3}, \frac{1\sqrt{3}}{3}\right).5 = \frac{-5\sqrt{3}}{3}, \frac{5\sqrt{3}}{3}, \frac{5\sqrt{3}}{3}$$

$$\boxed{\vec{b} = \frac{-5\sqrt{3}}{3}, \frac{5\sqrt{3}}{3}, \frac{5\sqrt{3}}{3}}$$

C- Producto mixto - Aplicaciones

Consigna 9: Encuentre el valor de la tercer componente de $\vec{w}$, "c", para que los siguientes vectores sean coplanares: $\vec{u}$ =(-3; 2; 5), $\vec{v}$ =(1; -2; 3) y $\vec{w}$ = (3; 4; c).

Se dice que los vectores son coplanares cuando pertenecen al mismo plano. Para resolver este ejercicio recurrimos al cálculo del producto mixto.

Teniendo como datos las componentes de los vectores $\vec{u}$, $\vec{v}$ y $\vec{w}$, utilizamos determinantes para hallar el producto vectorial entre $\vec{u}$ y $\vec{v}$, ubicando los componentes de cada uno de los vectores de la siguiente manera:

$$(\vec{u} x \vec{v}) = \begin{vmatrix} \breve{i} & \breve{j} & \breve{k} \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix} = (u_2.v_3 - u_3.v_2).\breve{i} - (u_1.v_3 - u_3.v_1).\breve{j} + (u_1.v_2 - u_2.v_1).\breve{k} =$$

Donde en la primera fila se ubican los versores fundamentales, en la segunda fila, las componentes del vector $\vec{u}$ y en la tercera las del vector $\vec{v}$, respectivamente, y las columnas son formadas por el orden de dichas componentes.

a) Se elige $\bar{i}$ de la primera fila y se suprimen la fila y la columna al que pertenece, quedando un determinante de menor rango el cual se resuelve: **(**Producto de números en diagonal principal **–** producto números diagonal secundaria**) x** $\bar{i}$ cuya columna y fila se suprimieron

$$\begin{vmatrix} \boxed{\breve{i}} & & \\ & 2 & 5 \\ & -2 & 3 \end{vmatrix} = ((2.3) - (-2.5)).\breve{i} =$$

b) Se elige el segundo versor de la primera fila y se suprimen la fila y la columna al que pertenece, quedando un determinante de menor rango el cual se resuelve:

$$\begin{vmatrix} & \boxed{\breve{j}} & \\ -3 & & 5 \\ 1 & & 3 \end{vmatrix} = \left((-3.3)-(1.5)\right).\breve{j} =$$

c) Se elige el tercer versor de la primera fila y se suprimen la fila y la columna al que pertenece, quedando un determinante de menor rango el cual se resuelve:

$$\begin{vmatrix} & & \boxed{\breve{k}} \\ -3 & 2 & \\ 1 & -2 & \end{vmatrix} = \left((-3.-2)-(1.2)\right).\breve{k} =$$

Organizando los cálculos, quedaría a)**-**b)**+**c) esto es, se irán alternando sumas y restas

$$(\vec{u}_x\vec{v}) = \begin{vmatrix} \breve{i} & \breve{j} & \breve{k} \\ -3 & 2 & 5 \\ 1 & -2 & 3 \end{vmatrix} = \left((2.3)-(-2.5)\right).\breve{i} - \left((-3.3)-(1.5)\right).\breve{j} + \left((-3.-2)-(1.2)\right).\breve{k} =$$

$$(\vec{u}_x\vec{v}) = \begin{vmatrix} \breve{i} & \breve{j} & \breve{k} \\ -3 & 2 & 5 \\ 1 & -2 & 3 \end{vmatrix} = \left((6)-(-10)\right).\breve{i} - \left((-9)-(5)\right).\breve{j} + \left((6)-(2)\right).\breve{k} =$$

$$(\vec{u}_x\vec{v}) = \begin{vmatrix} \breve{i} & \breve{j} & \breve{k} \\ -3 & 2 & 5 \\ 1 & -2 & 3 \end{vmatrix} = 16\breve{i} + 14\breve{j} + 4\breve{j}$$

$$(\vec{u}_x\vec{v}) = (16,14,4)$$

A continuacion efectuamos el producto escalar entre $(\vec{u}_x\vec{v}) = (16,14,4)$ y $\vec{w} = (3,4,c)$ que debe ser cero para que los vectores sean coplanares:

$$(\vec{u}x\vec{v}).\vec{w} = (16,14,4).(3,4,c) = 0 \rightarrow (16.3+14.4+4.c) = 0$$
$$\rightarrow 48+56+4.c = 0 \rightarrow 104+4.c = 0 \rightarrow 4.c = -104 \rightarrow c = (-104:4)$$

$$c = -26$$

Consigna 11: Halle el volumen del tetraedro cuyos vértices son P(1, 1, 1), Q (1, 2, 3), R(1, 1, 2) y S(3, -1, 2). Grafique el tetraedro.

Recordando que el **tetraedro** es un poliedro de cuatro caras triangulares. Y en cada vértice concurren tres caras. Teniendo como dato cuatro puntos que corresponden a sus vértices podemos hallar los vectores que conforman sus aristas. Por otra parte recordamos que un paralelepípedo se divide en 6 tetraedros de igual volumen.

Para resolver este ejercicio utilizamos el **Producto mixto**: $(\vec{a} \times \vec{b}).\vec{c} = \lambda$

Geométricamente, el valor absoluto del **producto mixto representa el volumen del paralelepípedo** cuyas aristas son tres vectores que concurren en un mismo vértice.

Teniendo como datos las coordenadas de los puntos **P**, **Q R** y **S** podemos hallar las componentes de los vectores que forman sus aristas:

Las componentes del vector $\vec{a}$ serán la diferencia entre las coordenadas del extremo **Q** y las del origen **P:**

$\vec{a} = (1-1; 2-1; 3-1) \rightarrow \boxed{\vec{a} = (0, 1; 2)}$

Las componentes del vector $\vec{b}$ serán la diferencia entre las coordenadas del extremo **R** y las del origen **P:**

$\vec{b} = (1-1; 1-1; 2-1) \rightarrow \boxed{\vec{b} = (0, 0; 1)}$

Las componentes del vector $\vec{c}$ serán la diferencia entre las coordenadas del extremo **S** y las del origen **P**: $\vec{c} = (3-1; -1-1; 2-1) \rightarrow \boxed{\vec{c} = (2, -2; 1)}$

A continuación calculamos la sexta parte del volumen del paralelepípedo con el método de los determinantes:

$$(\vec{a} \times \vec{b}).\vec{c} = \begin{vmatrix} c_1 & c_2 & c_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} = (a_2.b_3 - a_3.b_2).c_1 - (a_1.b_3 - a_3.b_1).c_2 + (a_1.b_2 - a_2.b_1).c_3 =$$

Primeramente se ordenan los componentes de los vectores del siguiente modo:

$$(\vec{a} \times \vec{b}).\vec{c} = \begin{vmatrix} 2 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

Donde en la primera fila se ubican las componentes del vector $\vec{c}$, en la segunda fila, las del vector $\vec{a}$ y en la tercera las del vector $\vec{b}$, respectivamente, y las columnas son formadas por el orden de dichas componentes. Seguidamente se procede de la siguiente manera:

Se elige el <u>primer</u> número de la primera fila y se suprimen la fila y la columna al que pertenece, quedando un determinante de menor rango el cual se resuelve:

(Producto de números en diagonal principal **–** producto números diagonal secundaria**) x** el número elegido cuya columna y fila se suprimieron

a) $$\begin{vmatrix} \boxed{2} & & \\ & 1 & 2 \\ & 0 & 1 \end{vmatrix} = (1.1 - 0.2).2$$

Se elige el <u>segundo</u> número de la primera fila y se suprimen la fila y la columna al que pertenece, quedando un determinante de menor rango el cual se resuelve:

b) $$\begin{vmatrix} & \boxed{-2} & \\ 0 & & 2 \\ 0 & & 1 \end{vmatrix} = (0.1 - 0.2).(-2)$$

Se elige el <u>tercer</u> número de la primera fila y se suprimen la fila y la columna al que pertenece, quedando un determinante de menor rango el cual se resuelve:

c) $$\begin{vmatrix} & & \boxed{1} \\ 0 & 1 & \\ 0 & 0 & \end{vmatrix} = (0.0 - 0.1).1$$

Organizando los cálculos, quedaría a)-b)+c) esto es, se irán alternando sumas y restas

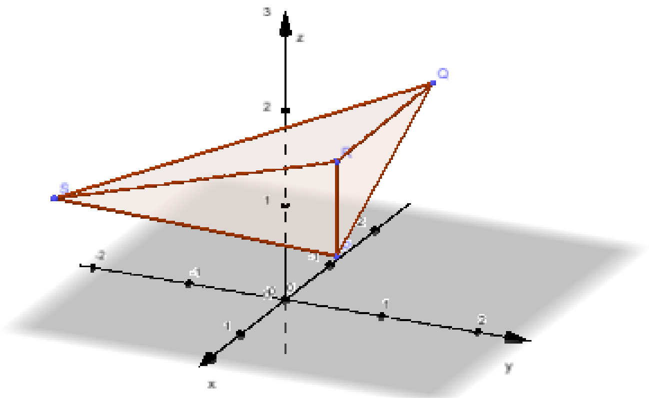
$$(\vec{a} \times \vec{b}).\vec{c} = \begin{vmatrix} 2 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = (1.1 - 0.2).2 - (0.1 - 0.2).(-2) + (0.0 - 0.1).1 =$$

$$(\vec{a} \times \vec{b}).\vec{c} = \begin{vmatrix} 2 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = (1 - 0).2 - (0 - 0).(-2) + (0 - 0).1 = 1.2 - 0 + 0 = 2$$

$$\boxed{(\vec{a} \times \vec{b}).\vec{c} = 2}$$

Teniendo en cuenta que lo que hallamos es **Volumen del paralelepípedo = 2 unidades ³**

Y como ya se dijo, el volumen del tetraedro es la sexta parte del volumen del paralelepípedo, solo resta dividirlo por seis: $\boxed{V = \frac{2}{6} u^3}$ que es el volumen buscado.

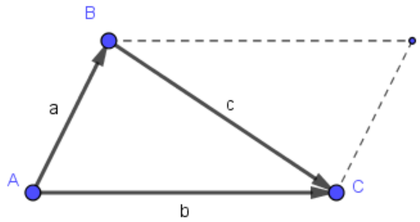


D- Realice las siguientes actividades:

Consigna 12. a) Los puntos $A\left(-\frac{1}{6}, \frac{1}{3}, -\frac{1}{2}\right)$, $B\left(-\frac{1}{3}, 0, -\frac{1}{6}\right)$, y $C\left(0, \frac{2}{3}, 0\right)$, son las coordenadas de los vértices de un triángulo. Calcule: a) el área.

Para resolver este ejercicio recurriremos al **producto vectorial**. Recordando que el producto vectorial entre dos vectores es igual a otro vector que tiene la propiedad de ser perpendicular a las direcciones de ambos vectores y **la aplicación geométrica es el cálculo del área del paralelogramo.** Ademas el área del triángulo es igual a la mitad de la del paralelogramo .

Teniendo como datos las coordenadas de los puntos A, B y C podemos hallar las componentes de los vectores que forman dos lados del triángulo :



Las componentes del vector $\vec{a}$ serán la diferencia entre las coordenadas del extremo B y las del origen A:

$$\vec{a} = \left(-\frac{1}{3} - (-\frac{1}{6}); 0 - \frac{1}{3}; -\frac{1}{6} - (-\frac{1}{2} \right) = \left(-\frac{1}{3} + \frac{1}{6}; 0 - \frac{1}{3}; -\frac{1}{6} + \frac{1}{2} \right) =$$

$$= \left(-\frac{1}{6}; -\frac{1}{3}; \frac{2}{6} \right) = \left(-\frac{1}{6}; -\frac{1}{3}; \frac{1}{3} \right)$$

$$\boxed{\vec{a} = \left(-\frac{1}{6}; -\frac{1}{3}; \frac{1}{3} \right)}$$

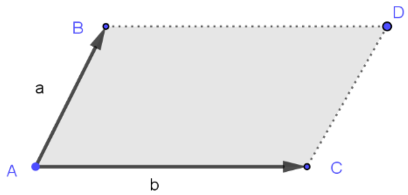
Las componentes del vector $\vec{b}$ serán la diferencia entre las coordenadas del extremo C y las del origen A:

$$\vec{b} = \left(0 - (-\frac{1}{6}); \frac{2}{3} - \frac{1}{3}; 0 - (-\frac{1}{2} \right) = \left(+\frac{1}{6}; \frac{1}{3}; +\frac{1}{2} \right) =$$

$$\boxed{\vec{b} = \left(\frac{1}{6}; \frac{1}{3}; \frac{1}{2} \right)}$$

Una vez halladas las componentes de los vectores podremos calcular el área del paralelogramo utilizando el producto vectorial.

Para ello ordenamos las componentes de ambos vectores de la siguiente manera:



$$(\vec{a} \times \vec{b}) = \begin{vmatrix} \breve{i} & \breve{j} & \breve{k} \\ -1/6 & -1/3 & 1/3 \\ 1/6 & 1/3 & 1/2 \end{vmatrix}$$

Donde en la primera fila se ubican los versores fundamentales, en la segunda fila, las componentes del vector $\vec{a}$ y en la tercera las del vector $\vec{b}$, respectivamente, y las columnas son formadas por el orden de dichas componentes. Seguidamente se procede de la siguiente manera:

a) Se elige $\breve{i}$ de la primera fila y se suprimen la fila y la columna al que pertenece, quedando un determinante de menor rango el cual se resuelve: **(**Producto de números en diagonal principal **–** producto números diagonal secundaria**) x** $\breve{i}$ cuya columna y fila se suprimieron

a) $$\begin{vmatrix} \boxed{\breve{i}} & & \\ & -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ & \frac{1}{3} & \frac{1}{2} \end{vmatrix} = \left((\frac{-1}{3}.\frac{1}{2}) - (\frac{1}{3}.\frac{1}{3}) \right).\breve{i}$$

Se elige el segundo versor de la primera fila y se suprimen la fila y la columna al que pertenece, quedando un determinante de menor rango el cual se resuelve:

b) $$\begin{vmatrix} & \boxed{\breve{j}} & \\ -\frac{1}{6} & & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{6} & & \frac{1}{2} \end{vmatrix} = \left((\frac{-1}{6}.\frac{1}{2}) - (\frac{1}{6}.\frac{1}{3}) \right).(\breve{j})$$

Se elige el tercer versor de la primera fila y se suprimen la fila y la columna al que pertenece, quedando un determinante de menor rango el cual se resuelve: c)

$$\begin{vmatrix} & & \boxed{\breve{k}} \\ -\frac{1}{6} & -\frac{1}{3} & \\ \frac{1}{6} & \frac{1}{3} & \end{vmatrix} = \left((\frac{-1}{6}.\frac{1}{3}) - (\frac{1}{6}.\frac{-1}{3}) \right).\breve{k}$$

Organizando los cálculos, quedaría a)**-**b)**+**c) esto es, se irán alternando sumas y restas

$$(\vec{a}\times\vec{b}) = \begin{vmatrix} \breve{i} & \breve{j} & \breve{k} \\ -\frac{1}{6} & -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{6} & \frac{1}{3} & \frac{1}{2} \end{vmatrix} = \left((\frac{-1}{3}.\frac{1}{2}) - (\frac{1}{3}.\frac{1}{3}) \right).\breve{i} - \left((\frac{-1}{6}.\frac{1}{2}) - (\frac{1}{6}.\frac{1}{3}) \right).(\breve{j}) + \left((\frac{-1}{6}.\frac{1}{3}) - (\frac{1}{6}.\frac{-1}{3}) \right).\breve{k} =$$

$$(\vec{a} \times \vec{b}) = \begin{vmatrix} \breve{i} & \breve{j} & \breve{k} \\ -\frac{1}{6} & -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{6} & \frac{1}{3} & \frac{1}{2} \end{vmatrix} = \left((\frac{-1}{6}) - (\frac{1}{9}) \right).\breve{i} - \left((\frac{-1}{12}) - (\frac{1}{18}) \right).(\breve{j}) + \left((\frac{-1}{18}.) - (\frac{-1}{18}) \right).\breve{k} =$$

$$(\vec{a} \times \vec{b}) = \begin{vmatrix} \breve{i} & \breve{j} & \breve{k} \\ -\frac{1}{6} & -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{6} & \frac{1}{3} & \frac{1}{2} \end{vmatrix} = \left(\frac{-9-6}{54} \right).\breve{i} - \left(\frac{-18-12}{216} \right).(\breve{j}) + 0.\breve{k} =$$

$$\vec{a} \times \vec{b}) = \begin{vmatrix} \breve{i} & \breve{j} & \breve{k} \\ -\frac{1}{6} & -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{6} & \frac{1}{3} & \frac{1}{2} \end{vmatrix} = \left(\frac{-15}{54} \right).\breve{i} - \left(\frac{-30}{216} \right).(\breve{j}) + 0.\breve{k} =$$

$$(\vec{a} \times \vec{b}) = \begin{vmatrix} \breve{i} & \breve{j} & \breve{k} \\ -\frac{1}{6} & -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{6} & \frac{1}{3} & \frac{1}{2} \end{vmatrix} = \left(\frac{-5}{18} \right).\breve{i} - \left(\frac{-5}{36} \right).(\breve{j}) + (0).\breve{k} =$$

$$\boxed{\frac{-5}{18}\breve{i} + \frac{5}{36}\breve{j} + 0\breve{k}}$$

De esta manera hemos encontrado un vector perpendicular a los vectores $\vec{a}$ y $\vec{b}$, y para obtener el área calcularemos el módulo de dicho vector:

Este Área corresponde a la del paralelogramo cuyos lados son los vectores $\vec{a}$ y $\vec{b}$, lo que resta es dividir por dos, ya que como se dijo, el área del triángulo es igual a la mitad del área del paralelogramo:

$$Area\Delta = \left(\frac{5\sqrt{5}}{36}\right) : 2 = \frac{5\sqrt{5}}{72} = 0{,}155$$

Consigna 12. b) Los puntos $A\left(-\frac{1}{6}, \frac{1}{3}, -\frac{1}{2}\right)$, $B\left(-\frac{1}{3}, 0, -\frac{1}{6}\right)$, y $C\left(0, \frac{2}{3}, 0\right)$, son las coordenadas de los vértices de un triángulo. Calcule: b) el perímetro,

Las componentes del vector $\vec{c}$ serán la diferencia entre las coordenadas del extremo C y las del origen B:

$$\vec{c} = \left(0 - (-\frac{1}{3}); \frac{2}{3} - 0; 0 - (-\frac{1}{6}\right) = \left(\frac{1}{3}; \frac{2}{3}; \frac{1}{6}\right) =$$

$$\boxed{\vec{c} = \left(\frac{1}{3}; \frac{2}{3}; \frac{1}{6}\right)}$$

Entonces dadas las coordenadas de los vértices pudimos hallar los vectores que conforman los lados del triángulo ABC=

$$\boxed{\vec{a} = \left(-\frac{1}{6}; -\frac{1}{3}; \frac{1}{3}\right)} \quad \boxed{\vec{b} = \left(\frac{1}{6}; \frac{1}{3}; \frac{1}{2}\right)} \quad \boxed{\vec{c} = \left(\frac{1}{3}; \frac{2}{3}; \frac{1}{6}\right)}$$

´con esta información podremos encontrar el perímetro del triángulo. Calculando el modulo da cada uno de estos tres vectores y sumando.

$$\left|\vec{a}\right| = \sqrt{\left(-\frac{1}{6}\right)^2 + \left(-\frac{1}{3}\right)^2 + \left(\frac{1}{3}\right)^2} = \sqrt{\frac{1}{36} + \frac{1}{9} + \frac{1}{9}} = \sqrt{\frac{1}{36} + \frac{2}{9}} = \sqrt{\frac{1+8}{36}} = \sqrt{\frac{9}{36}} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$$

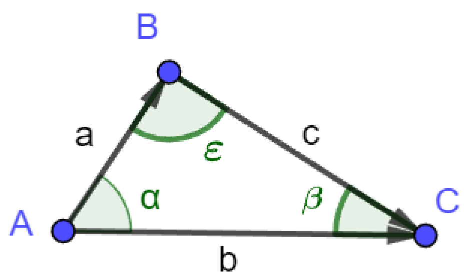
$$\left|\vec{b}\right| = \sqrt{\left(\frac{1}{6}\right)^2 + \left(\frac{1}{3}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{1}{36} + \frac{1}{9} + \frac{1}{4}} = \sqrt{\frac{1+4+9}{36}} = \sqrt{\frac{14}{36}} = \frac{\sqrt{14}}{6}$$

$$\left|\vec{c}\right| = \sqrt{\left(\frac{1}{3}\right)^2 + \left(\frac{2}{3}\right)^2 + \left(\frac{1}{6}\right)^2} = \sqrt{\frac{1}{9} + \frac{4}{9} + \frac{1}{36}} = \sqrt{\frac{5}{9} + \frac{1}{36}} = \sqrt{\frac{20+1}{36}} = \sqrt{\frac{21}{36}} = \frac{\sqrt{21}}{6}$$

Por lo tanto su Perímetro será: $P = \left(\left|\vec{a}\right| + \left|\vec{b}\right| + \left|\vec{c}\right|\right) = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{14}}{6} + \frac{\sqrt{21}}{6} = 1,89u$

Consigna 12. c) Los puntos $A\left(-\frac{1}{6}, \frac{1}{3}, -\frac{1}{2}\right)$, $B\left(-\frac{1}{3}, 0, -\frac{1}{6}\right)$, y $C\left(0, \frac{2}{3}, 0\right)$, son las coordenadas de los vértices de un triángulo. Calcule: c) los ángulos interiores.

Los ángulos a hallar son:



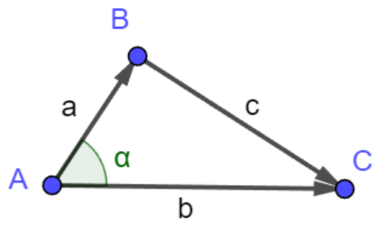
Esta expresión permite encontrar el ángulo θ formado entre dos vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$:

$$\boxed{cos\theta = \frac{\vec{u}.\vec{v}}{|\vec{u}||\vec{v}|}}$$

Del ítem b sabemos que:

$|\vec{a}| = \frac{1}{2}$ $\qquad$ $|\vec{b}| = \frac{\sqrt{14}}{6}$ $\qquad$ $|\vec{c}| = \frac{\sqrt{21}}{6}$

-El ángulo α es el comprendido entre $\vec{a}$ y $\vec{b}$



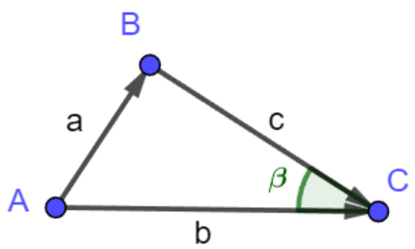
$$\cos(\alpha) = \frac{\vec{a}.\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|}$$

$$\cos(\alpha) = \frac{\left(-\frac{1}{6};-\frac{1}{3};\frac{1}{3}\right)\left(\frac{1}{6};\frac{1}{3};\frac{1}{2}\right)}{\frac{1}{2}.\frac{\sqrt{14}}{6}} = \frac{\left(-\frac{1}{6}.\frac{1}{6}+\left(-\frac{1}{3}\right)\frac{1}{3}+\frac{1}{3}.\frac{1}{2}\right)}{\frac{\sqrt{14}}{12}}$$

$$\cos(\alpha) = \frac{\left(-\frac{1}{36}-\frac{1}{9}+\frac{1}{6}\right)}{\frac{\sqrt{14}}{12}} = \frac{\frac{1}{36}}{\frac{\sqrt{14}}{12}} = \frac{1}{36}.\frac{12}{\sqrt{14}} = \frac{1}{3\sqrt{14}}$$

$$\cos(\alpha) = \frac{1}{3\sqrt{14}} \approx 0.089089 \;\rightarrow\; \boxed{\alpha = 84°\,53'20"}$$

-El ángulo β es el comprendido entre $\vec{b}$ y $\vec{c}$



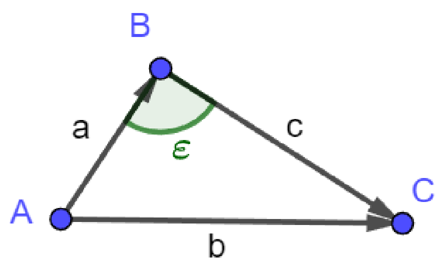
$$\cos(\beta) = \frac{\vec{c}.\vec{b}}{|\vec{c}||\vec{b}|}$$

$$\cos(\beta) = \frac{\left(\frac{1}{3};\frac{2}{3};\frac{1}{6}\right)\left(\frac{1}{6};\frac{1}{3};\frac{1}{2}\right)}{\frac{\sqrt{21}}{6}.\frac{\sqrt{14}}{6}} = \frac{\left(\frac{1}{3}.\frac{1}{6}+\frac{2}{3}.\frac{1}{3}+\frac{1}{6}.\frac{1}{2}\right)}{\frac{\sqrt{294}}{36}}$$

$$\cos(\beta) = \frac{\left(\frac{1}{18}+\frac{2}{9}+\frac{1}{12}\right)}{\frac{\sqrt{294}}{36}} = \frac{\frac{13}{36}}{\frac{\sqrt{294}}{36}} = \frac{13}{36}.\frac{36}{\sqrt{294}} = \frac{13}{\sqrt{294}}$$

$$\cos(\beta) = \frac{13}{\sqrt{294}} \approx 0.758175396 \rightarrow \boxed{\beta = 40°\, 41'47"}$$

-El tercer ángulo ε se puede obtener sabiendo que "la suma de los ángulos interiores de un triángulo es 180° "



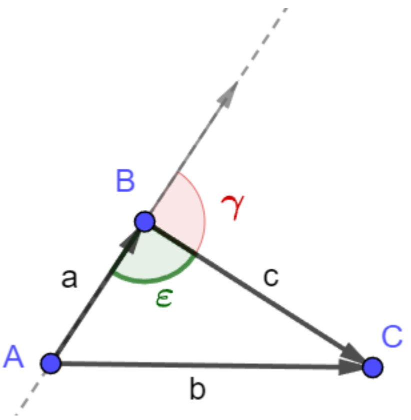
$$\alpha + \beta + \varepsilon = 180°$$

$$84°\, 53'20" + 40°\, 41'47" + \varepsilon = 180° \rightarrow \boxed{\varepsilon = 54°\, 24'\, 53"}$$

¡CUIDADO!

Al calcular el ángulo entre los vectores $\vec{a}\ y\ \vec{c}$ no se obtiene ε sino su suplementario γ.

Recordemos que el ángulo que se obtiene entre dos vectores, mediante la expresión, es aquel determinado por dos vectores situados de modo tal que sus orígenes coincidan.



Entonces, si calculamos el ángulo γ podremos obtener ε haciendo: $\varepsilon = 180° - \gamma$

$$\cos(\gamma) = \frac{\vec{c}.\vec{a}}{|\vec{c}||\vec{a}|}$$

$$\cos(\gamma) = \frac{\left(\frac{1}{3};\frac{2}{3};\frac{1}{6}\right)\left(-\frac{1}{6};-\frac{1}{3};\frac{1}{3}\right)}{\frac{\sqrt{21}}{6}.\frac{1}{2}} = \frac{\left(\frac{1}{3}.\left(-\frac{1}{6}\right)+\frac{2}{3}.\left(-\frac{1}{3}\right)+\frac{1}{6}.\frac{1}{3}\right)}{\frac{\sqrt{21}}{12}}$$

$$\cos(\gamma) = \frac{\left(-\frac{1}{18}-\frac{2}{9}+\frac{1}{18}\right)}{\frac{\sqrt{21}}{12}} = \frac{-\frac{2}{9}}{\frac{\sqrt{21}}{12}} = -\frac{2}{9}.\frac{12}{\sqrt{21}} = -\frac{24}{9\sqrt{21}}$$

$$\cos(\gamma) = -\frac{24}{9\sqrt{21}} \approx -0.581914374 \rightarrow \qquad \boxed{\gamma = 125°\,35'\,7"}$$

Por ende:

$$\varepsilon = 180° - 125°\,35'\,7"$$

$$\boxed{\varepsilon = 54°\,24'\,53"}$$

Consigna 12 d). Los puntos $A\left(-\frac{1}{6}, \frac{1}{3}, -\frac{1}{2}\right)$,$B\left(-\frac{1}{3}, 0, -\frac{1}{6}\right)$, y $C\left(0, \frac{2}{3}, 0\right)$, son las coordenadas de los vértices de un triángulo. Halle un versor con sentido opuesto a $\overrightarrow{AB}$.

Primeramente debemos hallar un versor en la dirección del vector $\overrightarrow{\boldsymbol{AB}} = \vec{a}$ y como pide que tenga el sentido opuesto calculamos el vector unitario pero en la dirección de $-\vec{a}$

$$\vec{u}_{(-\vec{a})} = (-\vec{a}).\frac{1}{|(-\vec{a})|} = \frac{\left(+\frac{1}{6};+\frac{1}{3};-\frac{1}{3}\right)}{\frac{1}{2}} = +\frac{1}{6}.2;+\frac{1}{3}.2;-\frac{1}{3}.2 \rightarrow \boxed{-\vec{a} = \left(\frac{1}{3};\frac{2}{3};-\frac{2}{3}\right)}$$

Consigna 13. Sean $\vec{u}$ = (2 , 4 , 0) y $\vec{w} = 3\breve{\imath} + \breve{\jmath} - \breve{k}$. Halle los vectores $\vec{v}$ y $\vec{t}$ tales que: $\vec{t}$ sea ortogonal a $\vec{u}$, $\vec{v}$ sea paralelo a $\vec{u}$ y $\vec{w} = \vec{v} + \vec{t}$.

Solución:

Se deben encontrar los vectores $\vec{t} = (t_1; t_2; t_3)$ y $\vec{v} = (v_1; v_2; v_3)$.

Por un lado, se debe cumplir que el vector $\vec{t}$ sea ortogonal (o lo que es lo mismo, perpendicular) a $\vec{u}$, para ello, se debe verificar que el producto escalar entre ambos vectores resulte ser el escalar 0. En fórmulas,

$$\vec{t}.\vec{u} = 0$$

$$(t_1; t_2; t_3).(2\,,4\,,0) = 0$$

$$(2.t_1 + 4.t_2 + \ 0.t_3) = 0$$

$$2.t_1 + 4.t_2 = 0$$

$$2.(t_1 + 2.t_2) = 0 \rightarrow \boxed{t_1 = -2.t_2}$$

Notese que la componente t_3 puede tomar cualquier valor, dado que sin importar su valor $0.t_3$ siempre se anulará. En cambio, las componentes t_1 y t_2 se podrán dejar expresadas una en función de otra, por ejemplo, la primera en función de la segunda y así, el vector $\vec{t}$ podría expresarse de la siguiente manera: $\vec{t} = (-2t_2; t_2; t_3)$ o escrito en forma trinómica, $\vec{t} = -2t_2\breve{\imath} + t_2\breve{\jmath} + t_3\breve{k}$

Por otro lado, se debe verificar que $\vec{v} = (v_1; v_2; v_3)$ sea paralelo a $\vec{u}$ = (2 , 4 , 0) , por lo tanto se tiene que el cocinete entre las componentes homónimas debe ser una constante. En símbolos,

$$\lambda = \frac{2}{v_1} = \frac{4}{v_2} = \frac{0}{v_3}$$

Si tomamos los miembros de las igualdades dos a dos obtendremos las siguientes relaciones:

$$\frac{2}{v_1} = \frac{4}{v_2} \rightarrow 2v_2 = 4v_1 \rightarrow \boxed{v_2 = 2v_1}$$

$$\frac{4}{v_2} = \frac{0}{v_3} \rightarrow 4v_3 = 0v_2 \rightarrow \boxed{v_3 = 0}$$

Si fuera necesario, se pueden igualar el primer y el último miembro de la igualdad, pero en este caso no brindan más información de la que ya se obtuvo.

De las expresiones podemos obtener el vector $\vec{v}$, donde se pueden dejar expresadas las componentes 1 y 2 una en función de la otra (por ejemplo, v_2 en función de v_1) $\vec{v} = (v_1; 2v_1; 0)$, escrito en forma trinómica sería $\vec{v} = v_1\check{\imath} + 2v_1\check{\jmath}$

Por último, pide la consigna se cumpla que $\vec{w} = \vec{v} + \vec{t}$

$$3\check{\imath} + \check{\jmath} - \check{k} = v_1\check{\imath} + 2v_1\check{\jmath} - 2t_2\check{\imath} + t_2\check{\jmath} + t_3\check{k}$$

$$3\check{\imath} + \check{\jmath} - \check{k} = (v_1 - 2t_2)\check{\imath} + (2v_1 + t_2)\check{\jmath} + t_3\check{k}$$

Igulando las componentes homónimas se tendrá el siguiente sistema de ecuciones:

$$\begin{cases} 3 = v_1 - 2t_2 \\ 1 = 2v_1 + t_2 \\ \quad -1 = t_3 \end{cases}$$

Tomando las dos primeras, las resolveremos por el método de sustitución. Despejamos v_1 de la primera:

$$3 + 2t_2 = v_1$$

Remplazamos en la segunda, y resolvemos

$$1 = 2(3 + 2t_2) + t_2$$

$$1 = 6 + 4t_2 + t_2$$

$$1 - 6 = 5t_2$$

$$-5 = 5t_2$$

$$\boxed{-1 = t_2}$$

Sustituyendo el resultado en la ecuación 1,

$$3 + 2.(-1) = v_1$$

$$\boxed{1 = v_1}$$

De la tercer ecuación se desprende inmediatamente que $\boxed{-1 = t_3}$.

Se tendrá que $\vec{t} = (2; -1; -1)$ y $\vec{v} = (1; 2; 0)$