LÓGICA DE PROPOSICIONAL

Con el afán de precisar y caracterizar a los razonamientos científicos, la lógica matemática hace uso, exclusivamente, de lenguajes formalizados de distintos sistemas de la lógica simbólica. En cada lenguaje formalizado debemos poder especificar qué símbolos se usan, cómo se combinan para formar formulas, y qué fórmulas deben considerarse como demostrables en ese lenguaje. Tal como se expresó en el tema anterior, Introducción a la Lógica, el grado de exhaustividad en la simbolización posibilita abordar el estudio a la lógica formal en diferentes niveles, conforme al lenguaje que se utilice, en esta ocasión nos centraremos en el estudio de *Lógica Proposicional* o *Cálculo Proposicional*.

Lenguaje Formal de la Lógica Proposicional

Las proposiciones son expresiones que afirman o niegan algo, es decir, que tienen sentido y es posible decir si son verdaderas o no, dicho de otro modo, podemos establecer cuál es su valor de verdad. Son ejemplos de proposición:

La matemática es una ciencia formal.

Las cataratas del Iguazú están en la provincia de Buenos Aires.

La UNaM es una universidad privada.

Lionel Messi nació en Argentina.

La primera expresión y la última, son proposiciones verdaderas, la segunda y la tercera son falsas. En cabio, las siguientes expresiones, no se reconocen como proposiciones:

¿Existe la justicia?

¡Qué rico mate!

Mariela, por favor, bajá el volumen de la música.

Ponete el barbijo Pedro.

Estas expresiones no tienen un carácter afirmativo, carecen de *valor veritativo*, es decir, que no es posible determinar si son verdaderas o falsas.

Las proposiciones están contempladas dentro de lo que los grámaticos denominan oraciones enunciativas o declarativas, con esto está claro que no son interrogativas, exclamativas, dubitativas, desiderativa ni imperativas. Sin embargo, no es lícito identificar totalmente a una oración declarativa con una proposición. La diferencia que radica entre ambas es que una oración declarativa es una fórmula material que puede ser oral o escrita, de una determinada lengua o idioma como los son el español, el francés, el inglés, etc., esto quiere decir que está constituida por ciertas palabras que están dispuestas de un determinado modo. En cambio, las proposiciones corresponden al significado de estas oraciones, en el siguiente sentido: a dos o más proposiciones puede corresponderle la misma proposición si es que tienen el mismo significado y, por ejemplo, pertenecen a distintos idiomas como ser:

"María es mi maestra" y *"Mary is my teacher"*

O si contienen sinónimos tal como:

"Meolans es un gran nadador" y *"Meolans es un excelente nadador"*

Teniendo presente la aclaración del párrafo anterior es posible aproximarse a una definición de proposición diciendo que es la mínima del lenguaje con contenido informativo que poseen un valor veritativo, esto es sobre la cual, es posible determinar su valor de verdad[1], verdadero (V) o falso (F), pero no ambos. En el lenguaje simbólico empleado en la lógica proposicional se utilizan letras minúsculas, por lo general, a partir de la "p" para representar a una proposición dada en el lenguaje natural. Por lo tanto, si se considera la nuevamente a la proposición:

"*La matemática es una ciencia formal."*

Es posible identificarla con "p" en el lenguaje simbólico, siempre que se especifique, en esta ocasión cual es la proposición que se denota con esta letra. Retomando el ejemplo mencionado sería:

p: "*La matemática es una ciencia formal."*

Existen diferentes tipos de proposiciones, entre ellas se pueden mencionar a:

[1] En esta ocasión adoptaremos la simbología V y F para indicar la verdad o falsedad de una proposición pero hay autores que utilizan los símbolos T y F derivados de vocablos en inglés que significan lo mismo. En el ámbito de la computación es usual emplear 1 para expresar la verdad de una proposición y 0 para la falsedad.

- Proposiciones de acción con sujeto no determinado, por ejemplo: “llueve”
- Proposiciones de atribución de propiedades a sujetos determinados, por ejemplo: “Sebastián es músico”.
- Proposiciones de relación, por ejemplo: “Remo es hermano de Rómulo”.

ACTIVIDAD 1 Identificar cuáles de las siguientes proposiciones son proposiciones y cuáles no.

a) 47 es número primo. ______________________
b) ¿todas las aves tienen plumas? ______________________
c) El álgebra es una rama de la geometría______________________
d) 18 = 2+3n ______________________
e) Pedro es bailarín y estudia el profesorado en Biología. ______________________
f) ¡Gané la lotería! ______________________

ACTIVIDAD 2

a) Expresar en forma simbólica a las proposiciones de la actividad 1 y determinar su valor de verdad.

Ejemplo: r: “La matemática es una ciencia formal”

Esta proposición es verdadera, la forma adecuada de expresarlo en el lenguaje simbólico es: $\mathcal{V}(r)=V$

b) Considerar a las expresiones de la actividad 1 que no son proposiciones y justificar.

Ejemplo: ¿La matemática es una ciencia formal?

Esta expresión no es proposición porque es una pregunta por lo tanto no se puede establecer su valor de verdad.

Definición formal del lenguaje proposicional

Un lenguaje formalizado se define por medio de reglas de formación y reglas de transformación.

- Las reglas de formación especifican las clase de símbolos primitivos del lenguaje a utilizar, es decir, símbolos que no se componen con de otros símbolos. También se refieren a las expresiones que se construyen a partir de los símbolos primitivos y respetando las normas propias del lenguaje en cuestión. Las expresiones compuestas reciben el nombre *fórmulas bien formadas* (fbf*)* del lenguaje. Las reglas de formación permiten diferenciar entre una fbf y una expresión que no lo es.
- Las reglas de transformación permiten obtener fbf a partir de otras fbf, a diferencia de las reglas antes mencionadas, que construyen fbf a partir de los símbolos primitivos. (Se ampliará más sobre estas reglas en temas posteriores).

Para la definición formal de un lenguaje es necesario especificar su alfabeto y sus reglas de sintaxis, para el caso de la lógica proposicional estos componentes se definen del siguiente modo:

- **Alfabeto**: Símbolos que se pueden utilizar son:
  - Símbolos de proposición: p, q, r, s, t
  - Símbolos de conectivos lógicos: $\sim$, $\wedge$, $\vee$, $\rightarrow$, $\leftrightarrow$, $\underline{\vee}$
  - Símbolos auxiliares: (;)
- **Regla de Sintaxis:** en el lenguaje natural no toda combinación de palabras es correcta, lo mismo ocurre en el lenguaje simbólico de la lógica proposicional. Para que una expresión se considere correcta debe cumplir con las reglas de sintaxis propias de este lenguaje. Estas reglas establecen que:
  - Las fbf del lenguaje proposicional se definen de la siguiente manera:
    - Las letras que representan a proposiciones.
    - Si A y B son fbf, entonces aquellas que resultas de combinar a estas con los conectivos lógicos de manera adecuada, también los son. A saber: $\sim$A, A $\wedge$ B, A $\vee$ B, A $\vee$ B, A $\rightarrow$ B, A $\leftrightarrow$ B.
    - Solo son fbf las que se obtienen a partir de las reglas recientemente mencionadas.
  - Para la correcta relación entre los conectivos y proposiciones en las fbf se debe proceder del siguiente modo:

- No deben aparecer conectivos adyacente, excepto la negación (~).
- Es preciso definir la relación entre conectivos y proposiciones cuando hay más de un conectivo en la fórmula de la siguiente manera:
    - Un conectivo afecta a la proposición inmediata o a la fbf encerrada entre paréntesis más próxima.
    - Para evitar el exceso de paréntesis, se define una jerarquía de prioridades entre los conectivos:

      Nivel 1: $\sim$

      Nivel 2 : $\wedge$; $\vee$

      Nivel 3: $\rightarrow$; $\Leftrightarrow$

Estos niveles que establecen las reglas de sintaxis permiten comprender que el conectivo de mayor prioridad es el de nivel 1, en el nivel 2, prevalece la conjunción ($\wedge$) a la disyunción incluyente ($\vee$), y del mismo modo se comportan los conectivos del nivel 3.

Los conectivos (o nexos) lógicos son los elementos del lenguaje que permiten construir nuevas fórmulas a partir de otras, obteniendo nuevos significados. Se consideraremos los siguientes conectivos con las simbologías que se utilizarán en este curso en el siguiente cuadro:

Conectivo lógico	Símbolo	Significado	Expresión en el Lenguaje Simbólico	Expresión en el Lenguaje Natural
Negación	$\sim$, $\neg$	no	$\sim p$	No No es cierto que…
Conjunción	$\wedge$	y	$p \wedge q$	p y q p y/o q p aunque q p pero q
Disyunción incluyente	$\vee$	y/o	$p \vee q$	p o q p y/o q
Disyunción excluyente	$\veebar$	o …., o bien …., pero no ambos	$p \veebar q$	p ó q o bien p o bien q, pero no ambos
Implicación (o condicional)	$\rightarrow$, $\Rightarrow$	si …. entonces ….	$p \rightarrow q$	si p entonces q p implica q si p, q
Doble implicación (o bicondicional)	$\leftrightarrow$, $\Leftrightarrow$	... si y sólo sí ...	$p \leftrightarrow q$	p sí y sólo sí q

Teniendo presente las normas que definen el lenguaje formal de la lógica proposicional es posible distinguir entre fórmulas que son fbf de aquellas que no lo son. Por ejemplo, las siguientes expresiones son fbf: $\mathbf{(p\wedge q) \leftrightarrow r}$ y $\mathbf{q \vee \sim p}$

Sin embargo, las expresiones que se muestran a continuación no cumplen con lo que establecen las reglas de sintaxis, por lo tanto no son fbf: $\mathbf{p \sim\to q}$ y $\mathbf{\sim p(q \vee rp)}$

Tal como se comentó previamente, en este material, existen diferentes modos de clasificar a las proposiciones pero la que más interesa al cálculo proposicional es la que diferencia a las proposiciones en simples (o atómicas) y compuestas (o moleculares).

- Una **proposición simple** es aquella que no puede reducirse a otras más sencillas, es decir, no contiene ninguna otra proposición como parte constituyente, como ser:

  “Las tardes de verano son calurosas”

  “Las tardes de verano son húmedas”

  “Los elefantes vuelan”

- Una **proposición compuesta** está conformada por dos o más proposiciones simples relacionadas por ciertos términos llamados conectivo (o nexos) lógicos. Por ejemplo:

  “No es cierto que los elefantes vuelan”

  “Las tardes de verano son calurosas y húmedas.”

Retomando los ejemplos dados como proposiciones simples, podemos expresarla de manera simbólica, nombrándolas con una letra a cada una de ellas.

p: “Las tardes de verano son calurosas” r: “Los elefantes vuelan”

q: “Las tardes de verano son húmedas”

En el caso de las proposiciones compuestas, el primer ejemplo es la negación de la proposición r, mientras que el segundo ejemplo es la conjunción entre las proposiciones p y q, es decir:

$\sim r$: “No es cierto que los elefantes vuelan”

$p \wedge q$: “Las tardes de verano son calurosas y húmedas”

Cabe aclarar que si se toman las proposiciones p y q tal como están definidas, al expresar en el lenguaje natural a la proposición compuesta p $\wedge$ q se podría escribir caer en una redundancia expresando:

p $\wedge$ q: "Las tardes de verano son calurosas y las tardes de verano son húmedas"

Sin embargo, no debe perderse de vista que tanto en el lenguaje coloquial (o natural) como en el lenguaje simbólico proposicional las expresiones deben ser correctas, esto es deben cumplir con las reglas propias a cada uno de estos lenguajes.

ACTIVIDAD 3 Identificar cuáles de las siguientes expresiones son fórmulas bien formadas y cuáles no.

a) $p \rightarrow \vee\ r \sim$ b) $(r \wedge r) \rightarrow \sim pq$ c) $(p \rightarrow t) \sim q$ d) $\sim(p \leftrightarrow s) \rightarrow t$

ACTIVIDAD 4 Identificar proposiciones simples y compuestas. En las que sean compuestas, indicar cuál es el conectivo lógico.

a) Mariela estudia lógica o toma mate.
b) 5+6=14.
c) Una célula puede ser vegetal o animal.
d) Los delfines son peces.
e) La sociedad argentina se encuentra en cuarentena a causa de una pandemia.
f) $|1| \geq 0$
g) Groenlandia es una isla si y solo si está rodeada de agua.
h) Si Luis se dedica a estudiar, entonces comprenderá los temas.

ACTIVIDAD 5 Teniendo en cuenta las proposiciones simples:

p: 9 es múltiplo de 3 q: 0 es un número par

r: 9 es un número primo s: -3 > -1.

Expresar en el lenguaje natural a las proposiciones compuestas que se proponen.

a) $\sim q$ b) $r \rightarrow \sim p$ c) $\sim s \wedge q$ d) $r \vee s$

ACTIVIDAD 6 Expresar en el lenguajes simbólico a las proposiciones compuestas de la actividad 4.

Ejemplo: "Si Paula estudia entonces aprueba el examen de ingreso."

Para pasar una proposición dada en el lenguaje natural al lenguaje simbólico, lo primero que debe hacerse es identificar las proposiciones simples (tal como se mostró en los ejemplos anteriores a este grupo de actividades), luego identificar el conectivo lógico y finalmente expresar en forma simbólica. O sea:

t: "Paula estudia." s: "Paula aprueba el examen de ingreso."

Como la proposición tiene la forma: si… entonces…, se trata de un condicional.

Por lo tanto, la expresión simbólica es: $t \rightarrow s$

Es decir: $t \rightarrow s$: "Si Paula estudia entonces aprueba el examen de ingreso."

Definición semántica de conectivos lógicos

Hasta el momento se estudió a los conectivos lógicos como elementos del lenguaje que permiten construir nuevas expresiones a partir de otras ya existentes. Además, es necesario abordar el modo en que cada uno de estos conectivos intervienen en el significado de las nuevas fbf, a partir de aquellas que las originaron. Es decir, vamos a realizar el estudio semántico de los mismos a través de sus respectivas tablas de valores de verdad.

- **Negación**

La negación de una proposición p es otra proposición, ~p, que niega lo que afirma p, y viceversa. Por lo tanto, una proposición y su negación poseen valores de verdad diferentes. Es decir, la negación cambia el valor de verdad de la proposición original.

p	~p
V	F
F	V

- **Conjunción**

Dos o más proposiciones pueden combinarse por medio de una conjunción para formar una proposición compuesta. Esta proposición compuesta será verdadera únicamente cuando todas las proposiciones que integran la conjunción, son verdaderas.

p	q	$p \wedge q$
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	F

- **Disyunción incluyente**

Si una proposición compuesta resulta de combinar dos o más proposiciones a través de una disyunción incluyente, se cumplirá que su valor de vedad es falso en el único caso en que cada una de las proposiciones que la integran es falsa.

p	q	$p \vee q$
V	V	V
V	F	V
F	V	V
F	F	F

- **Disyunción excluyente**

A diferencia de la disyunción incluyente, una proposición compuesta que se formó por conectar a otras dos proposiciones con una disyunción excluyente, será verdadera cuando las proposiciones que la forman poseen distintos valores de verdad.

p	q	$p \veebar q$
V	V	F
V	F	V
F	V	V
F	F	F

- **Condicional**

Este es el único conectivo lógico que asigna nombres a cada una de las partes de su expresión, es así como la proposición (o fbf) que se ubica delante del signo del conectivo recibe el nombre de *antecedente* y el que se ubica detrás, *consecuente*.

Este conectivo, puede interpretarse como un compromiso que se debe cumplir bajo el cumplimiento previo de una condición inicial. Es decir, que el único caso en el cual una proposición compuesta, formada por un condicional, resultará falsa es cuando el *antecedente* es verdadero y el *consecuente* es falso.

p	q	$p \rightarrow q$
V	V	V
V	F	F
F	V	V
F	F	V

- **Bicondicional**

Si una proposición compuesta se obtiene al conectar dos proposiciones por medio de un bicondicional o doble implicación, esta será verdadera cuando ambas proposiciones tengan el mismo valor de verdad.

p	q	p ↔ q
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	V

Conocer la definición semántica de los conectivos lógicos permite analizar los posibles valores de verdad de cualquier proposición compuesta. La construcción de una tabla de valores para una proposición compuesta permite poder leer las diferentes interpretaciones contenidas en ella, entendiendo por interpretación a cada una de las filas que hace referencia a un valor de vedad en particular asociado a una determinada combinación de valores de verdad de ñas proposiciones que la forman.

Para construir una tabla de valores de verdad se debe tener en cuenta la cantidad de proposiciones simples intervinientes. La cantidad de filas que deberá tener una tabla de valores se determina a través de la relación:

Nº de filas de la tabla= 2^n	donde *n* es la cantidad de proposiciones simples.

Es por ello que la tabla de valores de ~p, tiene solo 2 filas y la tabla de valores de p ∨ q, tiene 4 filas. Si se tuviera que confeccionar la tabla de valores de una proposición compuesta que tiene 3 proposiciones simples, tendrá 8 filas y así sucesivamente.

Una vez que se calcula la cantidad de filas de la tabla, se puede empezar a completarla con los valores correspondientes. Empezar ubicando en la fila de la primera columna la mitad de primeras las filas con V y las restantes F, en la segunda columna, se alternan los valores de verdad considerando la mitad de filas verdaderas de la anterior, y luego se sigue con el mismo procedimiento si hubiese más proposiciones simples.

Una vez que se tiene dispuesta la tabla se empieza a analizar respetando la jerarquía de los conectivos asignando valores de verdad a las expresiones conforme a la definición semántica de los mismos.

Ejemplo:

Si lo que se quiere es realizar la evaluación semántica de la proposición **q → (r ∨ ~q)**, se deberá construir una tabla de valores de verdad de 4 filas.

- Ubicamos las proposiciones en orden alfabético. La primera tendrá 2 filas (mitad de las 4 filas totales) se completan con V y las otras 2, con F:

q	r
V	V
V	F
F	V
F	F

- Se construye la/s columna/s con negaciones, en este caso, solo ~q:

q	r	~q
V	V	F
V	F	F
F	V	V
F	F	V

- Se continua por lo que está entre paréntesis, es decir: (r ∨ ~q).

q	r	~q	r ∨ ~q
V	V	F	V
V	F	F	F
F	V	V	V
F	F	V	V

- Finalmente, se completará la columna de la implicación:

q	r	~q	r ∨ ~q	q → (r ∨ ~q)
V	V	F	V	**V**
V	F	F	F	**F**
F	V	V	V	**V**
F	F	V	V	**V**

ACTIVIDAD 7: Construir las tablas de valores de verdad de las siguientes proposiciones:

a) $\sim p \wedge (p \vee q)$ b) $(p \wedge q) \rightarrow (p \rightarrow q)$ c) $(p \vee q) \wedge (r \vee \sim q)$

Bibliografía consultada

- Arenas Alegría, L. Lógica Formal para Informáticos. 1996. Ediciones Díaz Santos S.A.
- Caronía, S. Unidad II Lógica Proposicional. Breves apuntes de cátedras. 2011.
- García Zárate, O. INTRODUCCIÓN A LA LÓGICA -Segunda parte– LÓGICA DE PREDICADOS. Capítulo 2. Disponible en: http://sisbib.unmsm.edu.pe/bibvirtualdata/libros/Filosofia/intro_logica/2_parte.pdf
-
-
- Feys, R. y Fitch, F. Los Símolos de la Lógica Matemática. Colección: Lógica y Teoría de la Ciencia. Paraninfo. 1980
- Nudler, T. y Nudler, O. Elementos de Lógica Simbólica. Editorial Kapeluz. 1973.
- Pastor, S. Elementos de Lógica Simbólica. Departamento de Matemática. Facultad de CEQyN. UNaM.
- Puyau, H. y Roetti, J. Elementos de Lógica Matemática. Editorial Universitaria de Buenos Aires. 1976.
- Smith, K. Introducción a la Lógica Simbólica. 1991. Grupo Editorial Iberoamérica.