VECTORES

EJERCICIOS RESUELTOS - TRABAJO PRÁCTICO Nº1:

A- Vectores en R^2

Consigna 2.a) *Encontrar el origen del vector* $\vec{u} = (-2; 5)$ *cuyo extremo es B(3;1).*

Solución:

Las componentes del vector $\vec{u}$ serán la diferencia entre las coordenadas del extremo (punto $B(x_B; y_B)$) y las del origen (lo llamaremos punto $A(x_A; y_A)$):

$$\vec{u} = (x_B - x_A; y_B - y_A)$$

En la consigna, se tiene como datos las componentes del vector $\vec{u} = (-2; 5)$y las coordenadas del punto extremo B(3;1). reemplazando en la fórmula anterior obtendremos lo siguiente:

$$(-2; 5) = (3 - x_A; 1 - y_A)$$

Igualando las componentes homónimas se obtienen dos ecuaciones sencillas, al resolverlas obtendremos las coordenadas del punto A que será el origen del vector:

$$-2 = 3 - x_A \rightarrow x_A = 3 + 2 \rightarrow \boxed{x_A = 5}$$

$$5 = 1 - y_A \rightarrow y_A = 1 - 5 \rightarrow \boxed{y_A = -4}$$

El origen del vector será el punto $A(5; -4)$

Consigna 2.b) *Encontrar el extremo del vector* $\vec{w} = (4; -3)$ *cuyo origen es A(-3;-1).*

Solución:

Las componentes del vector $\vec{w}$ serán la diferencia entre las coordenadas del extremo (punto $B(x_B; y_B)$) y las del origen (punto $A(x_A; y_A)$).

$$\vec{w} = (x_B - x_A; y_B - y_A)$$

Reemplazando los datos que proporciona la consigna ($\vec{w} = (4; -3)$ y origen es A(-3;-1)) y como en este caso se desconoce las coordenadas del extremo, se tendrá:

$$(4; -3) = (x_B - (-3); y_B - (-1))$$

Igualando las componentes homónimas se tiene:

$$4 = x_B - (-3) \rightarrow x_B = 4 - 3 \rightarrow \boxed{x_B = 1}$$

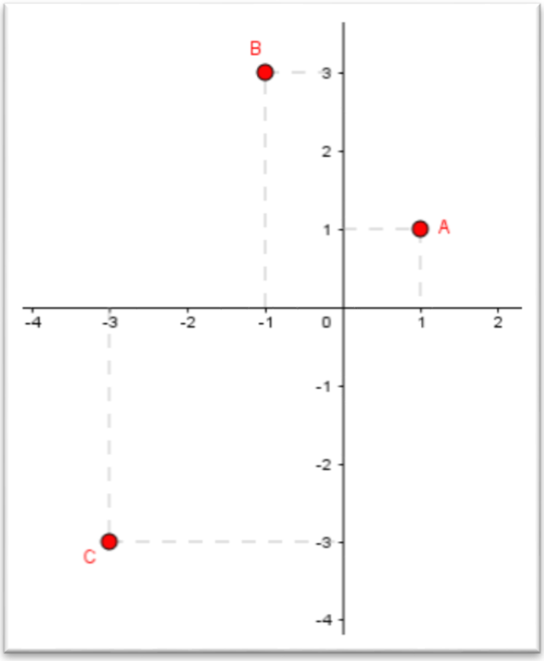
$$-3 = y_B - (-1) \rightarrow y_B = -3 - 1 \rightarrow \boxed{y_B = -4}$$

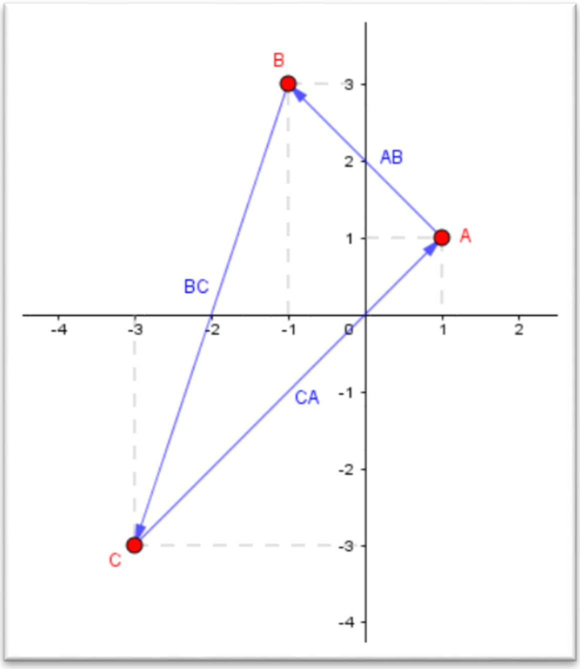
El extremo del vector será punto $B(1; -4)$

Consigna 4.a) *Determinar la longitud de los lados del triángulo ABC utilizando vectores, sabiendo que sus vértices son los puntos A(1;1), B(-1;3) y C(-3;-3).*

Solución:

Para ubicarnos vamos a graficar en los ejes coordenados x e y los puntos A, B y C, que serán vértices del triángulo (Figura 1). Si unimos los vértices con vectores obtendremos la figura del triángulo en cuestión.





Ahora bien, para calcular la longitud de los lados del triángulo se deberá hallar analíticamente los vectores que quedan determinados por los vértices como se observa en la figura 2.

Para ello, se deberá optar por elegir un punto como extremo y otro como origen del vector, y efectuar la diferencia entre las componentes homónimas: $\vec{v} = \left(x_q - x_p; y_q - y_p\right)$.

En primer lugar, se hallará el vector $\overrightarrow{AB}$, es decir, el vector que tiene origen en A y extremo en B:

$$\overrightarrow{AB} = ((-1) - 1; 3 - 1)$$

$$\boxed{\overrightarrow{AB} = (-2; 2)}$$

En segundo lugar, el vector $\overrightarrow{BC}$,

$$\overrightarrow{BC} = \big((-3) - (-1); -3 - 3\big)$$

$$\overrightarrow{BC} = (-3 + 1; -3 - 3)$$

$$\boxed{\overrightarrow{BC} = (-2; -6)}$$

Y en tercer lugar, el vector $\overrightarrow{CA}$,

$$\overrightarrow{CA} = (1 - (-3); 1 - (-3))$$

$$\overrightarrow{CA} = (1 + 3; 1 + 3)$$

$$\boxed{\overrightarrow{CA} = (4; 4)}$$

Una vez hallado los vectores que corresponden a los lados del triángulo, hallaremos la longitud de cada uno; eso es, el módulo de cada vector: $|\vec{v}| = \sqrt{(x_q - x_p)^2 + (y_q - y_p)^2}$.

$$\left|\overrightarrow{AB}\right| = \sqrt{(-2)^2 + (2)^2}$$

$$\left|\overrightarrow{AB}\right| = \sqrt{4 + 4}$$

$$\boxed{\left|\overrightarrow{AB}\right| = \sqrt{8}}$$

La longitud del vector $\left|\overrightarrow{AB}\right|$ es de $\sqrt{8}$ unidades.

$$\left|\overrightarrow{BC}\right| = \sqrt{(-2)^2 + (-6)^2}$$

$$\left|\overrightarrow{BC}\right| = \sqrt{4 + 36}$$

$$\boxed{\left|\overrightarrow{BC}\right| = \sqrt{40}}$$

La longitud del vector$\left|\overrightarrow{BC}\right|$ es de $\sqrt{40}$ unidades.

$$\left|\overrightarrow{CA}\right| = \sqrt{(4)^2 + (4)^2}$$

$$\left|\overrightarrow{CA}\right| = \sqrt{16 + 16}$$

$$\boxed{\left|\overrightarrow{CA}\right| = \sqrt{32}}$$

La longitud del vector$\left|\overrightarrow{CA}\right|$ es de $\sqrt{32}$ unidades.

Consigna 4.b) *Con lo calculado en el ítem a) determinar el valor del perímetro del triángulo ABC.*

Solución:

Para calcular el perímetro del triángulo se deben sumar la longitud de los lados del mismo:

$$Perímetro\ ABC = |\overrightarrow{AB}| + |\overrightarrow{BC}| + |\overrightarrow{CA}|$$

$$Perímetro\ ABC = \sqrt{8} + \sqrt{40} + \sqrt{32}$$

$$Perímetro\ ABC = 2\sqrt{2} + 2.\sqrt{2}.\sqrt{5} + 4\sqrt{2}$$

$$Perímetro\ ABC = \sqrt{2}.(6 + 2\sqrt{5})$$

$$\boxed{Perímetro\ ABC \cong 14{,}81}$$

Consigna 5- a) *Encontrar las coordenadas del origen del vector $\overrightarrow{MN}$ sabiendo que M es el punto medio del segmento AB, donde A(3,9) y $B(-1;5)$.*

Solución:

Para determinar las coordenadas del punto medio M entre A y B, hacemos:

$$\mathrm{M}\left(\frac{x_A + x_B}{2}; \frac{y_A + y_B}{2}\right)$$

$$\mathrm{M}\left(\frac{3 + (-1)}{2}; \frac{9 + 5}{2}\right)$$

$$\mathrm{M}(1; 7)$$

Consigna 5. b) *Determine las componentes del vector $\overrightarrow{MN}$ sabiendo que N$(\sqrt{2}; 5)$.*

Solución:

Ya habíamos calculado en (a) que las coordenadas del punto son: $\mathrm{M}(1; 7)$

Sabemos que para determinar las componentes de $\overrightarrow{MN}$ debemos hacer:

$$\overrightarrow{MN} = (x_N - x_M; y_N - y_M)$$

$\overrightarrow{MN} = (\sqrt{2} - 1; 5 - 7) \rightarrow$ La respuesta es: $\overrightarrow{MN} = (\sqrt{2} - 1; -2)$

C- Vectores en R^3

Consigna 12.a) *Utilizar vectores para calcular la distancia entre los puntos S(3;5;-1) y T(-2;2;3).*

Solución:

Para resolver este ejercicio, en primer lugar debemos hallar el vector que une los puntos S y T. Para ello, al igual que en R^2, debemos elegir uno de los puntos como extremo (por ejemplo el T(-2;2;3)) y el otro como origen (el S(3;5;-1)) ; y luego efectuar la diferencia entre las componentes homónimas:

$$\overrightarrow{ST} = ((x_T - x_S; y_T - y_S; (z_T - z_S)$$

$$\overrightarrow{ST} = (-2 - 3; 2 - 5; 3 - (-1))$$

$$\overrightarrow{ST} = (-5; -3; 4)$$

$$\overrightarrow{ST} = (-5; -3; +4)$$

Una vez encontrado el vector, la distancia entre ambos puntos será la longitud del vector, y para calcularla utilizaremos la fórmula del módulo de un vector en R^3

$$|\overrightarrow{ST}| = \sqrt{(x_T - x_S)^2 + (y_T - y_S)^2 + (z_T - z_S)^2}$$

$$|\overrightarrow{ST}| = \sqrt{(-5)^2 + (-3)^2 + 4^2}$$

$$|\overrightarrow{ST}| = \sqrt{25 + 9 + 16}$$

$$|\overrightarrow{ST}| = \sqrt{50}$$

$$|\overrightarrow{ST}| \cong 7.07$$

Consigna 12.*b) Determinar las coordenadas del punto medio del segmento ST.*

Solución:

Para determinar las coordenadas del punto M que es medio del segmento ST se deberá calcular la semisuma entre las coordenadas de los puntos S y T:

$$\mathrm{M}\left(\frac{x_S + x_T}{2}; \frac{y_S + y_T}{2}; \frac{z_S + z_T}{2}\right)$$

$$\mathrm{M}\left(\frac{3 + (-2)}{2}; \frac{5 + 2}{2}; \frac{-1 + 3}{2}\right)$$

$$\mathrm{M}\left(\frac{1}{2}; \frac{7}{2}; \frac{2}{2}\right)$$

$$\mathrm{M}\left(\frac{1}{2}; \frac{7}{2}; 1\right)$$

Consigna 12.c) ¿ $\overrightarrow{\mathrm{ST}}$ es un vector unitario? Justificar con los cálculos correspondientes.

Solución:

Para saber si el vector $\overrightarrow{\mathrm{ST}}$ es unitario, se deberá calcular su módulo, si éste resulta 1, el vector será unitario.

$$|\overrightarrow{ST}| = \sqrt{(x_T - x_S)^2 + (y_T - y_S)^2 + (z_T - z_S)^2}$$

$$|\overrightarrow{ST}| = \sqrt{(-5)^2 + (-3)^2 + 4^2}$$

$$|\overrightarrow{ST}| = \sqrt{25 + 9 + 16}$$

$$|\overrightarrow{ST}| = \sqrt{50}$$

$$|\overrightarrow{ST}| \cong 7.07$$

El vector $\overrightarrow{ST}$ no es unitario, ya que su módulo no es 1.

Consigna 15. a) Utilizando vectores, encontrar la distancia entre los puntos A(1, 2, 3) y B(−1, 2, 0).

Solución:

Para resolver este ejercicio, en primer lugar debemos hallar el vector que une los puntos A y B. Para ello, elegimos por ejemplo el punto A(1, 2, 3) como origen y el punto B(−1, 2, 0) como extremo del vector.

$$\overrightarrow{AB} = (x_B - x_A; y_B - y_A; z_B - z_A)$$

$$\overrightarrow{AB} = (-1 - 1; 2 - 2; 0 - 3)$$

$$\overrightarrow{AB} = (-2; 0; -3)$$

Luego para determinar la distancia entre los puntos calculamos la longitud del vector que los une, que no es otra cosa que el módulo del vector.

$$\left|\overrightarrow{AB}\right| = \sqrt{(-2)^2 + 0^2 + (-3)^2}$$

$$\left|\overrightarrow{AB}\right| = \sqrt{4 + 0 + 9}$$

$$\left|\overrightarrow{AB}\right| = \sqrt{13}$$

$$\left|\overrightarrow{AB}\right| \cong 3{,}60$$

Consigna 15. b) *Determinar las componentes del vector que tiene por origen al punto P(-2;1; -3) y por extremo al punto medio entre A y B.*

Solución:

Para calcular las coordenadas del punto medio entre los puntos A(1, 2, 3) y B(-1, 2, 0) calculamos la semisuma de las coordenadas de ambos

$$\mathrm{N}\left(\frac{x_A + x_B}{2}; \frac{y_A + y_B}{2}; \frac{z_A + z_B}{2}\right)$$

$$\mathrm{N}\left(\frac{1 + (-1)}{2}; \frac{2 + 2}{2}; \frac{3 + 0}{2}\right)$$

$$\mathrm{N}\left(\frac{0}{2}; \frac{4}{2}; \frac{3}{2}\right)$$

$$\mathrm{N}\left(0; 2; \frac{3}{2}\right)$$

Una vez determinado el punto N que será extremo del vector, resta hallar las componentes efectuando la diferencia entre las coordenadas de N y las de P

$$\overrightarrow{PN} = ((x_N - x_P; y_N - y_P; (z_N - z_P)$$

$$\overrightarrow{PN} = \left(0 - (-2); 2 - 1; \frac{3}{2} - (-3)\right)$$

$$\overrightarrow{PN} = \left(2; 1; \frac{9}{2}\right)$$

D- Vectores unitarios y dirección de vectores en R^2.

Consigna 17. a) *Determinar las componentes de $\vec{v}$ sabiendo que $|\vec{v}| = 2$ y su dirección está dada por $\theta = \frac{\pi}{3}$.*

Solución:

Recordemos que si $\vec{v} = (a, b)$, su módulo se calcula utilizando la fórmula $|\vec{v}| = \sqrt{a^2 + b^2}$ y su dirección será $tg\ \theta = \frac{b}{a}$.

En este caso se sabe que $|\vec{v}| = 2$, por lo tanto $|\vec{v}| = \sqrt{a^2 + b^2} = 2$; y por otro lado se sabe que $\theta = \frac{\pi}{3}$ (ángulo del primer cuadrante) entonces $tg\frac{\pi}{3} = \frac{b}{a}$.

Con estas dos ecuaciones se puede armar un sistema de ecuaciones como el que sigue:

$$\begin{cases} \sqrt{a^2 + b^2} = 2 \\ tg\dfrac{\pi}{3} = \dfrac{b}{a} \end{cases}$$

Resolviéndolo se obtendrán las componentes del vector $\vec{v}$

$$\begin{cases} a^2 + b^2 = 4 \\ \sqrt{3} = \dfrac{b}{a} \end{cases}$$

De la segunda ecuación despejamos b

$$a\sqrt{3} = b$$

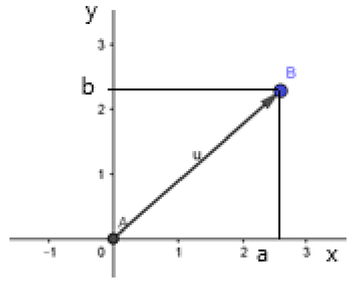
Y la reemplazamos en la primera ecuación:

$$a^2 + (a\sqrt{3})^2 = 4 \rightarrow a^2 + a^2.3 = 4 \rightarrow 4a^2 = 4 \rightarrow a^2 = 1 \rightarrow a = \pm\sqrt{1} \rightarrow a = \pm 1$$

Como dijimos, θ pertenece al primer cuadrante, así que las componentes a y b son positivas (¿Qué signos tendrían a y b si θ fuese un ángulo del tercer cuadrante, donde la tangente también es positiva?)

Si $a = 1$ entonces $b = \sqrt{3}$. La respuesta es: $\vec{v} = (1, \sqrt{3})$

También podemos llegar a la misma solución haciendo:

	$\cos\theta = \frac{a}{|\vec{u}|} \rightarrow a = |\vec{u}|\cos\theta$ $\operatorname{sen}\theta = \frac{b}{|\vec{u}|} \rightarrow b = |\vec{u}|\operatorname{sen}\theta$

Entonces:

$a = 2\cos\frac{\pi}{3} = 2\ \frac{1}{2} = 1$ y $b = 2\,\text{sen}\,\frac{\pi}{3} = 2\ \frac{\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3}$. Entonces: $\vec{v} = (1, \sqrt{3})$

Consigna 17. *b) Encontrar el vector unitario que posee la misma dirección y sentido que el vector* $\vec{v} = (1; -\frac{4}{3})$

Solución:

Para encontrar el vector unitario, en la misma dirección y sentido que el vector $\vec{v}$, se deberá multiplicar al vector por el inverso de su módulo:

$$\vec{u}_v = \vec{v}.\frac{1}{|\vec{v}|}$$

$$\vec{u}_v = \left(1; -\frac{4}{3}\right).\frac{1}{\sqrt{1^2 + \left(-\frac{4}{3}\right)^2}}$$

$$\vec{u}_v = \left(1; -\frac{4}{3}\right).\frac{1}{\sqrt{\frac{25}{9}}}$$

$$\vec{u}_v = \left(1; -\frac{4}{3}\right).\frac{3}{5}$$

$$\boxed{\vec{u}_v = \left(\frac{3}{5}; -\frac{4}{5}\right)}$$

E- Vectores unitarios y dirección de vectores en R3.

Consigna 20 *Hallar un vector unitario que posea la misma dirección que el vector* $\vec{v} = (1; 4; \frac{1}{2})$

Solución:

Un vector unitario $\vec{u}$ en la dirección del vector $\vec{v}$ se obtiene multiplicando al vector dado por el inverso de su módulo.

$$\vec{u}_{\vec{v}} = \vec{v}.\frac{1}{|\vec{v}|}$$

Lo primero que debemos hacer es hallar el módulo del vector. Recordando Si $\vec{v} = (a,b,c)$ entonces su módulo es $|\vec{v}| = \sqrt{(a)^2 + (b)^2 + (c)^2}$.

Reemplazando:

$$|\vec{v}| = \sqrt{1^2 + 4^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{69}{4}}$$

Obtendremos el vector unitario en la dirección de $\vec{v}$

$$\vec{u}_{\vec{v}} = \left(\frac{1}{\sqrt{69/4}}, \frac{4}{\sqrt{69/4}}, \frac{1/2}{\sqrt{69/4}} \right)$$

$$\boxed{\vec{u}_{\vec{v}} = \left(\frac{2\sqrt{69}}{69}, \frac{8\sqrt{69}}{69}, \frac{\sqrt{69}}{69} \right)}$$

Consigna 21*. Hallar el valor de la segunda componente del vector* $\vec{\boldsymbol{v}} = \left(\frac{\mathbf{2}}{\mathbf{3}}; \boldsymbol{v_2}; \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{4}}\right)$*sabiendo que* $\vec{v}$ *es un versor.*

Solución: sabiendo que el vector es un versor entonces su módulo es 1. Recordando, Si $\vec{v} = (a,b,c)$ entonces su módulo es $|\vec{v}| = \sqrt{(a)^2 + (b)^2 + (c)^2}$. Reemplazando y resolviendo algebraicamente tenemos:

$$|\vec{v}| = \sqrt{\left(\frac{2}{3}\right)^2 + \mathrm{v_2}^2 + \left(\frac{1}{4}\right)^2} = 1$$

$$\sqrt{\frac{4}{9} + \mathrm{v_2}^2 + \frac{1}{16}} = 1$$

$$\sqrt{\mathrm{v_2}^2 + \frac{73}{144}} = 1$$

$$\mathrm{v_2}^2 + \frac{73}{144} = 1^2$$

$$\mathrm{v_2}^2 = 1 - \frac{73}{144}$$

$$|\mathrm{v_2}| = \sqrt{\frac{71}{144}}$$

$$\mathrm{v_2} = \pm\frac{\sqrt{71}}{12}$$

Por lo tanto, obtendremos dos valores posibles para la componente $\mathrm{v_2}$, podrá valer $\frac{\sqrt{71}}{12}$ o bien, $-\frac{\sqrt{71}}{12}$

Para verificar comprobamos si su módulo es igual a la unidad, probamos con la componente positiva $\frac{\sqrt{71}}{12}$. Queda para practicar la verificación con la componente negativa.

$$\sqrt{\left(\frac{2}{3}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{71}}{12}\right)^2+\left(\frac{1}{4}\right)^2}=1 \rightarrow \sqrt{\frac{4}{9}+\frac{71}{144}+\frac{1}{16}}=1 \rightarrow \sqrt{\frac{64+71+9}{144}}=1$$

$$\sqrt{\frac{144}{144}}=1$$

Consigna 23 a). *¿Cuál es la dirección de los siguientes vectores pertenecientes a R3?*

a) $\vec{u}=(4,5,3)$

Solución en R^3 la dirección del vector la determinan los valores de los ángulos que forma el vector con cada semieje positivo X, Y, Z respectivamente.

Por ello α, β, γ se denominan ángulos directores

Si las componentes son $\vec{u}=(a,b,c)$, entonces utilizamos relaciones trigonométricas para encontrar correspondencias entre los ángulos directores:

$$\cos\hat{\alpha}=\frac{a}{|\vec{v}|} \qquad \cos\hat{\beta}=\frac{b}{|\vec{v}|} \qquad \cos\hat{\gamma}=\frac{c}{|\vec{v}|}$$

Por lo tanto primeramente debemos calcular el módulo del vector dado.

Si $\vec{u}=(4,5,3)$, su módulo será

$$|\vec{u}|=\sqrt{4^2+5^2+3^2}=\sqrt{50}$$

$$\boxed{|\vec{u}|=5\sqrt{2}}$$

Reemplazamos en las respectivas relaciones:

$$\cos\hat{\alpha}=\frac{4}{5\sqrt{2}}$$

$$\hat{\alpha}=arccos\frac{4}{5\sqrt{2}}$$

$$\hat{\alpha}=55°33´0.35´´$$

$$\cos\hat{\beta}=\frac{5}{5\sqrt{2}}$$

$$\hat{\beta}=arccos\frac{5}{5\sqrt{2}}$$

$$\hat{\beta}=45°$$

$$\cos\hat{\gamma}=\frac{3}{5\sqrt{2}}$$

$$\hat{\gamma}=arccos\frac{3}{5\sqrt{2}}$$

$$\hat{\gamma}=64°53´45{,}28´´$$

Podemos comprobar si esos valores corresponden a la dirección del vector dado, si verifican la siguiente propiedad:

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1$$

$$cos^2(55°33´0.35´´) + cos^2(45°) + cos^2(64°53´45{,}28´´) \cong 1$$

Consigna 23 b). *¿Cuál es la dirección de los siguientes vectores pertenecientes a R3?* ***b)*** $\vec{w} = (2,4,4)$

Solución el procedimiento es similar al ítem anterior. Planteamos las relaciones:

$$\cos\hat{\alpha} = \frac{a}{|\vec{v}|} \qquad \cos\hat{\beta} = \frac{b}{|\vec{v}|} \qquad \cos\hat{\gamma} = \frac{c}{|\vec{v}|}$$

Primeramente debemos calcular el módulo del vector dado. Si $\vec{w} = (2,4,4)$, su módulo será:

$$\vec{w} = (2,4,4)$$
$$|\vec{w}| = \sqrt{2^2 + 4^2 + 4^2} = \sqrt{36}$$
$$\boxed{|\vec{w}| = 6}$$

Reemplazamos en las respectivas relaciones:

$$\cos\alpha = \frac{2}{6} \qquad \cos\hat{\beta} = \frac{4}{6} \qquad \cos\hat{\gamma} = \frac{4}{6}$$

$$\alpha = \arccos\frac{2}{6} \qquad \hat{\beta} = \arccos\frac{4}{6} \qquad \hat{\gamma} = \arccos\frac{4}{6}$$

$$\boxed{\hat{\alpha} = 70°31'44''} \qquad \boxed{\hat{\beta} = 48°11'23''} \qquad \boxed{\hat{\gamma} = 48°11'23''}$$

Podemos comprobar si esos valores corresponden a la dirección del vector dado, si verifican la siguiente propiedad:

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1$$

$$\cos^2(70°31'44'') + \cos^2(48°11'23'') + \cos^2(48°11'23'') = 1$$
$$0{,}11 + 0{,}44 + 0{,}44 \approx 1$$

Consigna 24. *Analizar si $\hat{\alpha}$ = 72°, $\hat{\beta}$ = 76° y $\hat{\gamma}$ = 23° son los ángulos directores de un vector $\vec{v}$ o no. En caso afirmativo, hallar las componentes de este vector $\vec{v}$.*

Teniendo en cuenta que el vector $\vec{v}$ pertenece a R3 podemos representarlo de las siguientes maneras:

$$\vec{v} = (a, b, c) = a\hat{\imath} + b\hat{\jmath} + c\hat{k}$$

En primer lugar comprobaremos si los ángulos dados pueden ser directores de un vector utilizando la propiedad:

$$cos^2(\alpha) + cos^2(\beta) + cos^2(\gamma) = 1$$

$$cos^2(72°) + cos^2(76°) + cos^2(23°) \cong 1$$

Ya comprobado que estos son efectivamente cosenos directores de un vector, recordemos como se calculan los cosenos directores:

$$\cos\alpha = \frac{a}{|\vec{v}|}$$

$$\cos\beta = \frac{b}{|\vec{v}|}$$

$$\cos\gamma = \frac{c}{|\vec{v}|}$$

Despejando los valores de las componentes “a”, “b” y “c” que nos interesan:

$$\cos 72 \,.\, |\vec{v}| = a$$

$$\cos 76 \,.\, |\vec{v}| = b$$

$$\cos 23 \,.\, |\vec{v}| = c$$

Reemplazamos estos valores en la expresión canónica de nuestro vector y trabajamos algebraicamente:

$$\vec{v} = a\hat{\imath} + b\hat{\jmath} + c\hat{k}$$

$$\vec{v} = \cos\alpha \,.\, |\vec{v}|\hat{\imath} + \cos\beta \,.\, |\vec{v}|\hat{\jmath} + \cos\gamma \,.\, |\vec{v}|\hat{k}$$

$$\vec{v} = |\vec{v}|.\,(\cos\alpha\,\hat{\imath} + \cos\beta\,\hat{\jmath} + \cos\gamma\,\hat{k})$$

$$\vec{v} = |\vec{v}|.\left(\cos 72°\,\hat{\imath} + \cos 76°\,\hat{\jmath} + \cos 23°\,\hat{k}\right)$$

Donde $\hat{v} = \left(\cos 72°\,\hat{\imath} + \cos 76°\,\hat{\jmath} + \cos 23°\,\hat{k}\right)$ es un vector unitario (de modulo igual a 1) en la dirección de $\vec{v}$ y $|\vec{v}| = c$ un escalar. Entonces, dando valores al módulo de este vector, podríamos encontrar las componentes correspondientes para cualquier vector en la dirección de este versor.

Consigna 25*. Calcular las componentes de vector $\vec{a}$ de R3 que forma, con los ejes x e y, los ángulos $\hat{\alpha}$ = π/3 y $\hat{\beta}$ = 2/3 π, respectivamente, sabiendo que posee | $\vec{a}$| = 3. Expresar al vector en su forma canónica.*

La consigna deja en claro que el vector $\vec{a}$ pertenece a R3, entonces:

$$\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$$

Comenzamos por plantear los cosenos directores de las componentes y ángulos que conocemos:

$$\cos\alpha = \frac{a_1}{|\vec{a}|} \rightarrow \cos\frac{\pi}{3} = \frac{a_1}{3}$$

$$\cos\beta = \frac{a_2}{|\vec{a}|} \rightarrow \cos\frac{2\pi}{3} = \frac{a_2}{3}$$

Despejando y calculando las componentes (si utilizan calculadora debe estar en radianes):

$$\cos\frac{\pi}{3}.3 = a_1 \rightarrow \boxed{a_1 = 1{,}5}$$

$$\cos\frac{2\pi}{3}.3 = a_2 \rightarrow \boxed{a_2 = -1{,}5}$$

Para la componente a_3 no tenemos el ángulo que el vector forma con el eje Z, por lo que necesitamos otra expresión para calcularla. Plantearemos entonces el módulo de $\vec{a}$:

$$|\vec{a}| = \sqrt{{a_1}^2 + {a_2}^2 + {a_3}^2}$$

$$3 = \sqrt{(1{,}5)^2 + (-1{,}5)^2 + {a_3}^2}$$

Despejando:

$$3^2 = (\sqrt{(1{,}5)^2 + (-1{,}5)^2 + {a_3}^2})^2$$

$$9 = (1{,}5)^2 + (-1{,}5)^2 + {a_3}^2$$

$$9 - (1{,}5)^2 - (-1{,}5)^2 = {a_3}^2$$

Una vez llegado a este punto debemos utilizar la propiedad uniforme para aplicar en ambos miembros una raíz cuadrada, manteniendo así la igualdad. Además, debemos tener en cuenta la definición del valor absoluto ($|x| = \sqrt{x^2}$):

$$\sqrt{9 - 2{,}25 - 2{,}25} = \sqrt{{a_3}^2}$$

$$\boxed{\sqrt{4{,}5} = |a_3|} \rightarrow \boxed{\sqrt{4{,}5} = a_3';} \vee \boxed{-\sqrt{4{,}5} = {a_3}''}$$

No confundir el valor del módulo del vector ($|\vec{a}|$) con el valor absoluto de número real, en este caso de su componente ($|a_3|$). El conjunto solución de dicha ecuación está formado entonces por dos valores, que corresponden a las posibles componentes a_3 del vector $\vec{a}$:

$$S = \left\{\sqrt{4{,}5}\,; -\sqrt{4{,}5}\right\}$$

Ahora podemos expresar de forma canónica a los dos vectores que son solución del problema:

$$\vec{a}' = a_1\hat{\imath} + a_2\hat{\jmath} + {a_3}'\hat{k} \rightarrow \boxed{\vec{a}' = 1{,}5\hat{\imath} - 1{,}5\hat{\jmath} + \sqrt{4{,}5}\hat{k}}$$

$$\vec{a}'' = a_1\hat{\imath} + a_2\hat{\jmath} + {a_3}''\hat{k} \rightarrow \boxed{\vec{a}'' = 1{,}5\hat{\imath} - 1{,}5\hat{\jmath} - \sqrt{4{,}5}\hat{k}}$$

***Consigna 26**. Analizar cuál debe ser la amplitud de $\hat{\alpha}$ para que los ángulos $\hat{\beta}$ = 60° y $\hat{\gamma}$ = 75° sean ángulos directores de un vector.*

Conocemos la propiedad:

$$cos^2(\alpha) + cos^2(\beta) + cos^2(\gamma) = 1$$

Entonces remplazando:

$$cos^2(\alpha) + cos^2(60°) + cos^2(75°) = 1$$

Despejamos:

$$cos^2(\alpha) = 1 - cos^2(60°) - cos^2(75°)$$

$$\sqrt{cos^2(\alpha)} = \sqrt{1 - cos^2(60°) - cos^2(75°)}$$

$cos^2(75°) = \frac{2-\sqrt{3}}{4}$ y es irracional.

$$|\cos(\alpha)| \cong \sqrt{1 - \frac{1}{4} - \frac{2-\sqrt{3}}{4}}$$

$$|\cos(\alpha)| = \sqrt{\frac{4-1-2+\sqrt{3}}{4}}$$

$$\boxed{|\cos(\alpha)| = \sqrt{\frac{1+\sqrt{3}}{4}}}$$

Entonces, hay dos ángulos que cumplen la condición para ser directores del vector. Estos son:

$$\cos(\alpha_1) = \sqrt{\frac{1+\sqrt{3}}{4}}$$

$$\alpha_1 = \cos^{-1}\sqrt{\frac{1+\sqrt{3}}{4}}$$

$$\boxed{\alpha_1 = 34°15'.74''}$$

$$\cos(\alpha_2) = -\sqrt{\frac{1+\sqrt{3}}{4}}$$

$$\alpha_2 = \cos^{-1}(-\sqrt{\frac{1+\sqrt{3}}{4}})$$

$$\boxed{\alpha_2 = 145°44'.26''}$$