TRABAJO PRÁCTICO Nº 2

CUESTIONES TEÓRICO PRÁCTICAS

1. Determine los intervalos para los cuales es seguro que exista una solución única de cada una de las ecuaciones diferenciales lineales, que satisfaga las condiciones iniciales $y(x_o)=y_o,\ y'(x_o)=y'_o$, en donde x_o es cualquier punto del intervalo.

a) $xy''+3y=x$

b) $x(x-1)y''+3xy'+4y=2$

c) $y''+6y'+7y=2\operatorname{sen}x$

d) $e^x y''+x^2y'+y=\tan x$

2. La ecuación diferencial ordinaria lineal $t^2y''-2t\,y'+2y=0$ tiene un número infinito de soluciones, $y=Ct^2$, donde C es una constante arbitraria. Con estas soluciones también se resuelve el Problema de Valor Inicial $t^2y''-2t\,y'+2y=0,\ y(0)=0,\ \ y'(0)=0$ porque la función $y=Ct^2$ satisface las condiciones iniciales. Al parecer esto contradice el teorema de existencia y unicidad de soluciones para ecuaciones diferenciales lineales. ¿Existe tal contradicción? Justifique

3. Analice las diferencias entre resolver una ecuación diferencial de segundo orden con condiciones iniciales y una con condiciones de contorno. Resuelva los siguientes problemas de valores de frontera: (a) $x''+16x=0 \quad x(0)=0 \quad x\left(\pi/2\right)=0$

(b) $x''+16x=0 \quad x(0)=0 \quad x\left(\pi/8\right)=0$

(c) $x''+16x=0 \quad x(0)=0 \quad x\left(\pi/2\right)=1$

Cuando se trata de condiciones en la frontera ¿se puede anticipar si el problema tiene o no solución, y en caso de que la tenga, si hay una sola o más de una?

4. Sea $L[y]=y''+py'+qy$. Suponga que y_1 e y_2 son dos funciones tales que $L[y_1]=f(x)$ y $L[y_2]=g(x)$. Demuestre que la suma $y=y_1+y_2$ satisface la ecuación no homogénea $L[y]=f(x)+g(x)$.

5. La ecuación de reducción de orden puede utilizarse, de manera más general, para reducir una ecuación lineal homogénea de orden *n* a una ecuación lineal homogénea de orden *(n-1)*. Para la ecuación $xy'''-xy''+y'-y=0$, que tiene a $f(x)=e^x$ como una solución, use la sustitución $y(x)=v(x)f(x)$ para reducir esta ecuación de tercer orden a una ecuación lineal homogénea de segundo orden en la variable $w=v'$.

6. Cuando $b^2-4ac=0$, las raíces de la ecuación auxiliar $ar^2+br+c=0$ son iguales; es decir: $r_1=r_2=r=-\dfrac{b}{2a}$. Por lo tanto, $f(x)=e^{\left(-b/2a\right)x}$ es una solución de la ED $ay''+by'+cy=0$. Use el método de reducción de orden para deducir $xe^{\left(-b/2a\right)x}$ como una segunda solución linealmente independiente de la ED.

7. Reducción de orden: el procedimiento para reducción de orden para ecuaciones homogéneas se puede extender para ecuaciones no homogéneas de la forma $y''+p(x)y'+q(x)y=g(x)$.

a) muestre que la sustitución $y(x)=v(x)f(x)$, donde $f(x)$ es una solución no trivial conocida de la ecuación homogénea correspondiente, reduce la ecuación no homogénea a la ecuación lineal de primer orden $fw'+(2f'+pf)w=g$ donde $w=v'$.

b) Use el procedimiento de la parte a) para hallar una solución general de $y''+x^{-1}y'-4x^{-2}y=1-x^{-3}, x>0$, dado que $f(x)=x^2$ es una solución de la ecuación de la homogénea correspondiente.

8. La ecuación diferencial lineal $2t\,y''-(t+2)y'+2y=0$ no tiene coeficientes constantes. (a) ¿en qué intervalos de la recta real estarán definidas las soluciones? (b) Determine por inspección una solución de la ecuación diferencial. (c) Determine la segunda solución linealmente independiente utilizando el procedimiento de reducción de orden.

9. Determine si las siguientes funciones pueden ser wronskiano en -1<x<1 para una pareja de soluciones de cierta ecuación $y''+py'+qy=0$ (con p y q continuas)

a) $w(x)=6e^{4x}$ b) $w(x)=(x+1)^{-1}$ c) $w(x)=x^3$

10. Otra representación del wronskiano de dos soluciones $y_1(x),\ y_2(x)$ para la ecuación $y''+py'+qy=0$ en (a,b) es la **identidad de Abel:** $W[y_1,y_2](x)=C\exp\left(-\int_{x_0}^{x}p(t)dt\right)$ donde $x_0\in(a,b)$ y C es una constante que depende de $y_1(x),\ y_2(x)$.

Demuestre la identidad de Abel, para ello pruebe que el wronskiano satisface la ecuación diferencial $W'+p(x)W=0$, luego resuelva dicha ecuación diferencial.

11. Los siguientes tres problemas ilustran el hecho de que el principio de superposición no se cumple en las ecuaciones no lineales.

a) Demuestre que $y=1/x$ es una solución de $y'+y^2=0$, pero que si $c\neq 0$ y c≠1, entonces $y=c/x$ no es solución.

b) Demuestre que $y=x^3$ es una solución de $yy''=6x^4$, pero que si $c^2\neq 1$, entonces $y=cx^3$ no es solución.

c) Demuestre que $y_1=x^{1/2}$ y $y_2=1$ son soluciones de $yy''+(y')^2=0$, pero que la suma de ellas no es solución.

12. (i) Analizar el método de resolución de las ecuaciones diferenciales de Cauchy-Euler.

(ii) Resolver las siguientes ecuaciones diferenciales de Cauchy -Euler:

a) $3x^2y''+11xy'-3y=0,\ x>0$ b) $x^2y''+7xy'-7y=0$

c) $y''-\dfrac{1}{x}y'+\dfrac{5}{x^2}y=0$ d) $xy''+3y'-\dfrac{3}{x}y=x^2$

e) $3x^2y''+11xy'-3y=8-3\ln x,\ y(1)=1,\ y'(1)=\frac{4}{3}$

f) $x^4y''-3x^2y=1-6x^2$

(iii) Utilice la sustitución $x=e^t$ para demostrar que la ecuación de Cauchy-Euler de tercer orden $ax^3y'''+bx^2y''+cxy'+dy=0,\ x>0,$ es equivalente a la ecuación con coeficientes constantes $ay'''(t)+(b-3a)y''(t)+(2a-b+c)y'(t)+d\ y(t)=0.$

CUESTIONES TÉCNICAS:

1. Encontrar una ecuación diferencial que es satisfecha por cada una de las siguientes familias de funciones:

a) $y=c_1e^x+c_2e^{-x}$ b) $y=c_1x+c_2$

c) $y=c_1x+c\,\mathrm{sen}\,x$ d) $y=(c_1+c_2x)e^x$

2. Hallar las soluciones generales de las siguientes ecuaciones diferenciales:

a) $y''-3y'+2y=0$ b) $y''+5y'=0$

c) $2y'' - y' - y = 0$

d) $4y'' + 4y' + y = 0$

e) $6y'' - 7y' - 20y = 0$

f) $9y^{(3)} + 12y'' + 4y' = 0$

g) $y^{(4)} - 8y^{(3)} + 16y'' = 0$

h) $y^{(4)} - 3y^{(3)} + 3y'' - y' = 0$

i) $y^{(4)} - 8y'' + 16y = 0$

3. Dada una solución no trivial de cada ecuación diferencial, encuentre una segunda solución linealmente independiente.

a) $y'' - 3y' + 2y = 0; \quad f(x) = e^x$

b) $x^2 y'' + 6xy' + 6y = 0; \; x > 0, \quad f(x) = x^{-2}$

c) $xy'' - (x+1)y' + y = 0; \; x > 0, \quad f(x) = e^x$

d) $xy'' + (1-2x)y' + (x-1)y = 0; \quad x > 0, \quad f(x) = e^x$

4. En cada problema se da una solución de la ecuación diferencial propuesta. Encuentre la solución general.

a) $3y^{(3)} - 2y'' + 12y' - 8y = 0, \quad y = e^{2x/3}$

b) $6y^{(4)} + 5y^{(3)} + 25y'' + 20y' + 4y = 0, \quad y = \cos 2x$

c) $9y^{(3)} + 11y'' + 4y' - 14y = 0, \quad y = e^{-x}\,\mathrm{sen}\,x$

5. Use el método de coeficientes indeterminados o el de variación de parámetros para hallar la solución general de las siguientes ecuaciones no homogéneas:

a) $y'' + y' - 2y = 2x, \quad y(0) = 0, \; y'(0) = 1$

b) $y'' = -y + x^2$

c) $2y'' - 4y' - 6y = 3e^{2x}$

d) $y'' + y = 3\cos 2x, \quad y(0) = 1, \; y'(0) = 0$

e) $y'' + 9y = 2\sec 3x$

f) $y'' - 2y' + y = x^{-2} e^x$

g) $y'' + y = \csc^2 x$

h) $y'' - y = \dfrac{1}{x}$

6. Para una ecuación de la forma $y'' = f(x, y')$, la sustitución $v = y', \; v' = y''$ conduce a una ecuación de primer orden de la forma $v' = f(x, v)$. Siempre y cuando esta ecuación pueda resolverse para *v*, puede obtenerse y integrando $dy/dx = v(x)$. Hállese la solución de las siguientes ecuaciones diferenciales.

a) $y'' = y'$

b) $xy'' = 2y'$

c) $y'' = 1 + (y')^2$

d) $y'' = 4x\sqrt{y'}$

e) $y'' + x(y')^2 = 0$

f) $2x^2 y'' + (y')^3 = 2xy', \quad x > 0$

7. Consideremos una ecuación de segundo orden de la forma $y'' = f(y, y')$, donde no aparece la variable independiente *x* en la ecuación. Se puede usar la sustitución $w = y'$ y aplicar la regla de la cadena para reducir a una ecuación de primer orden en *w*, y considerar a *y* como variable independiente. Resolver las siguientes ecuaciones diferenciales en las cuales está ausente *x*.

a) $y'' + y(y')^3 = 0$

b) $y'' + yy' = 0$

c) $y'' = y' e^y$

d) $\left(1 + y^2\right) y'' = y' + (y')^3$

Aplicaciones de las ecuaciones diferenciales de segundo orden

El oscilador masa resorte

Consideremos un oscilador masa-resorte amortiguado que está formado por una masa *m* unida a un resorte fijo en un extremo. Diseñaremos una ecuación diferencial que modele el comportamiento de este sistema.

Según la ley de Hooke, la fuerza que el resorte ejerce sobre una masa unida a él es $F_{resorte} = -ky$, donde $k \geq 0$es la rigidez del resorte. Esta ecuación solo es válida para desplazamientos suficientemente pequeños.

Prácticamente todos los sistemas mecánicos experimentan fricción, para el movimiento de vibración ésta se modela mediante la ecuación $F_{fricción} = -b\dfrac{dy}{dt} = -by'$, donde $b \geq 0$ es el coeficiente de amortiguamiento. Para ambas ecuaciones el signo negativo indica la naturaleza de oposición de la fuerza.

Aplicamos la segunda ley de Newton: $F_{neta} = ma$ para el sistema masa-resorte, donde F_{neta} es la suma de todas las fuerzas que actúan sobre el cuerpo de masa *m*. Como $a = \dfrac{d^2y}{dt^2} = y''$, se tiene:

$$my'' = F_{resorte} + F_{fricción}$$
$$my'' = -ky - by'$$
$$my'' + by' + ky = 0$$

Si además de $F_{resorte}$ y $F_{fricción}$, la masa *m* es accionada por una fuerza externa $F(t)$, entonces debe ser agregada al miembro derecho de la ecuación anterior resultando

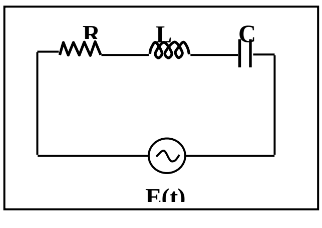
$$my'' = F_{resorte} + F_{fricción} + F_{externa}$$
$$my'' + by' + ky = F(t)$$

Por ejemplo, la suspensión de un automóvil se puede modelar como un resorte vibrante con amortiguamiento debido a los amortiguadores, para ello empleamos la ecuación anterior. En este caso *m* es la masa del automóvil, *b* la constante de amortiguamiento del amortiguador, *k* es la constante del resorte e $y(t)$es el desplazamiento vertical del automóvil en el instante *t*. Como éste, existen numerosas situaciones que admiten una aproximación por este modelo.

Consigna: Sea la ecuación diferencial $my'' + by' + ky = F(t)$. Con ayuda de algún programa analizar analítica y gráficamente el comportamiento de las soluciones para distintos valores de *m*, *b* y *k*. Trabajar tanto en la EDO incompleta correspondiente como en la completa con $F(t)$ exponencial, polinómica o trigonométrica. Elaborar las conclusiones pertinentes al modelo matemático y al modelo físico asociado.

Circuitos eléctricos:

Circuito LRC en serie: según la ley de Kirchhoff la suma de las caídas de voltaje a través del inductor L (que está dada por $L\dfrac{di}{dt}$ donde i es la corriente que circula en el circuito), del capacitor C (dada por $\dfrac{Q}{C}$, donde Q es la carga en el capacitor) y del resistor R (que por la ley de Ohm es igual a iR) es igual al voltaje aplicado, (E(t)).



Matemáticamente esto se expresa de la siguiente manera: $L\dfrac{di}{dt} + \dfrac{Q}{C} + i(t)R = E(t)$

Puesto que la corriente en el circuito es igual a $i = \frac{dQ}{dt}$, la ED precedente, que involucra dos incógnitas, puede escribirse como: $L\frac{d^2Q}{dt^2} + R\frac{dQ}{dt} + \frac{1}{C}Q = E(t)$

Consigna:

Sea la ED $L\frac{d^2Q}{dt^2} + R\frac{dQ}{dt} + \frac{1}{C}Q = E(t)$ $\quad Q(0) = Q_0 \quad Q'(0) = I_0$. Con ayuda de algún programa analizar analítica y gráficamente el comportamiento de las soluciones para distintos valores de L, R y C para diferentes condiciones iniciales. Trabajar tanto en la EDO incompleta correspondiente (oscilaciones libres) como en la completa (oscilaciones forzadas) con E(t) trigonométrica (voltaje alterno).

¿Qué puede decir de la solución cuando no se aplica voltaje externo, es decir, E(t)=0?

En caso de que se apliquen un voltaje externo, las soluciones obtenidas constan de una parte transitoria y de una parte de estado permanente. ¿Las soluciones transitorias dependen de las condiciones iniciales elegidas? ¿Las soluciones permanentes de que dependen: de las condiciones iniciales o de la forma del voltaje aplicado?

Ejercicios adicionales: Resolver algunos de los ejercicios que aparecen en la bibliografía citada a continuación:

Zill, D. (1986). *"Ecuaciones Diferenciales con aplicaciones"*. México: Iberoamérica. Páginas 143, 144, 153, 154, 161, 162, 164.

Edwards H., Penney D. (2001) "*Ecuaciones diferenciales"* México: Prentice Hall. Páginas 152, 153, 165, 166, 178, 205.

Bibliografía

Blanchard P., Devaney R., Hall G. (1998). "*Ecuaciones diferenciales*". México: Thomson

Boyce, W. y Diprima, R. (2000). *"Ecuaciones Diferenciales y problemas con valores en la frontera".* 4° ed. México: Limusa.

Edwards H., Penney D. (2001). "*Ecuaciones diferenciales*". México: Prentice Hall

López Rodriguez, M. (2007). "*Problemas resueltos de Ecuaciones Diferenciales".* España: Thomson.

Nagle K., Saff, E., Snider A. (2001). "*Ecuaciones diferenciales y problemas con valores en la frontera*". México: Addison Wesley

Trench, W. (2002) "*Ecuaciones Diferenciales con problemas de valores en la frontera".* México: Thomson Learning

Zill D. (1986) *"Ecuaciones Diferenciales con aplicaciones"*. México: Iberoamérica

Zill D., Cullen M. (2002) "*Ecuaciones Diferenciales con problemas de valores en la frontera*". México: Thomson