GEOMETRÍA

3ERA. EDICIÓN

PETER B. GELTNER
DARREL J. PETERSON

MATEMÁTICAS
INTERNATIONAL THOMSON

Geometría

Tercera edición

Traducción
Hugo Villagómez

Revisión técnica
Mariana Álvarez
Instituto Tecnológico y de Estudios Superiores de Monterrey, Campus Ciudad de México

Geometría

Tercera edición

Peter B. Geltner
Santa Monica College

Darrell J. Peterson
Santa Monica College

International Thomson Editores

México • Bonn • Boston • Johannesburgo • Londres • Madrid • Melbourne • Nueva York • Singapore
Tokio • Toronto • Albany, NY • Belmont, CA • Cincinnati, OH • San Juan, PR • Santiago • São Paulo

Traducción de la obra *Geometry for College Students, 3rd ed.*,
publicada en inglés por PWS Publishing Company. ISBN 0-534-94542-2

Geometría
ISBN 968-7529-47-4

MÉXICO Y AMÉRICA CENTRAL
Séneca 53, Colonia Polanco
México, D. F.
C. P. 11560,
Tel. (525) 281-2906
Fax (525) 281-2656
e-mail: clientes@mail.internet.com.mx

PUERTO RICO Y EL CARIBE
Tel. (787) 758-7580
Fax (787) 758-7573
e-mail:102154.1127@compuserve.com

AMÉRICA DEL SUR
Tel./fax (562) 524-4688
e-mail: ldevore@ibm.net

CHILE
Tel/fax (541) 777-0660

ARGENTINA
e-mail: sdeluque@ba.net

ESPAÑA
Tel. (341) 446-3350
Fax (341) 445-6218
e-mail: itesparaninfo.pedidos@mad.servicom.es

Director editorial: Miguel Ángel Toledo Castellanos
Editor de producción: René Garay Argueta
Corrección de estilo: Claudio Castro Campillo
Diseño de portada: Movimiento Gráfico
Tipografía: Movimiento Gráfico
Lecturas: Alberto Victoria

987654321 *9II8*

Impreso en México
Printed in Mexico

PARA SHARON

■ ■ ■ PREFACIO

Esta tercera edición es tan concisa y precisa como las dos ediciones anteriores. Estas características han contribuido bastante a la popularidad del libro entre los estudiantes y en las facultades. Aunque el libro fue diseñado originalmente para estudiantes universitarios que no llevaron geometría en la preparatoria o que requerían un curso recordatorio sobre el tema, también ha sido elegido en varias universidades como texto para cursos de matemática educativa para futuros profesores.

De los capítulos 1 a 7 se presenta el material esencial sobre geometría plana, que puede cubrirse en un curso de un semestre integrado por tres unidades, omitiendo tal vez la sección opcional de trigonometría. Los temas adicionales en los capítulos 8, 9 y 10 constituyen material enriquecedor y permiten utilizar el libro en un curso de un semestre integrado por cinco unidades, o para un curso de dos trimestres. Estos tres capítulos son suficientemente independientes, de modo que cualquiera puede consultarse por separado.

La experiencia en el empleo de textos de bachillerato para estudiantes universitarios indica que muchos de éstos son agobiados con una gran cantidad de datos cubiertos en muy poco tiempo. Los bachilleratos suelen dedicar todo un año a la geometría, mientras que casi todas las universidades sólo le dedican un semestre. El material que aquí se presenta está tratado de forma precisa para ayudar a que los estudiantes aprendan, comprendan y apliquen la terminología correcta en el menor tiempo posible. Algunas versiones de este texto han sido probadas a fondo en clase y como resultado ha disminuido significativamente la tasa de deserción de los estudiantes en esos cursos.

Para las definiciones y la notación se utiliza un método moderno. El método deductivo para efectuar demostraciones se desarrolla cuidadosamente para facilitar el nuevo concepto al estudiante. Los conjuntos se utilizan, solamente cuando es necesario, para ayudar a obtener definiciones claras.

Los conjuntos de ejercicios son amplios y variados para proporcionar al usuario una mayor opción de tareas. Se incluyen muchas aplicaciones y problemas de cómputo, así como teoremas y otras proposiciones a demostrar. A lo largo del libro se presentan construcciones para destacar que forman parte integral de la geometría, en vez de constituir temas aislados. Cada capítulo termina con un repaso, una lista de conceptos (en la que se incluyen las páginas de referencia) y un conjunto de ejercicios.

LO NUEVO DE LA TERCERA EDICIÓN

Tomando en cuenta las ideas anteriores, y en respuesta a sugerencias presentadas por instructores que han utilizado este libro y por otros revisores, hemos realizado los cambios siguientes:

—Se ha agregado una nueva característica denominada ¡Precaución!, en la que se analizan en forma positiva errores comunes, se complementan definiciones formales con definiciones informales o se destacan conceptos importantes. Estos aparecen con el icono

—El teorema de congruencia LAA = LAA se pasó de los ejercicios al material del texto como teorema numerado.
—La sección sobre transversales se dividió en dos secciones.
—Se reordenó la sección sobre ángulos y medición de ángulos.
—A fin de presentar una secuencia más lógica de conceptos, se reordenaron partes de otras secciones.
—A lo largo del texto se agregaron nuevos ejemplos, aplicaciones y ejercicios.
—Se añadieron varias figuras nuevas.
—Para mayor claridad se volvieron a plantear muchas proposiciones.

Estos cambios deben hacer que el texto sea aún más útil para los estudiantes y en cursos de matemática educativa para futuros profesores.

MATERIAL SUPLEMENTARIO

Este tercera edición cuenta con un Manual para el Instructor (*Instructor's Manual*) en el que se incluyen las respuestas de los problemas pares y un banco de pruebas que incluye tres pruebas muestra por cada capítulo. Este material es exclusivamente para profesores que usen el libro como texto en sus cursos.

AGRADECIMIENTOS

Deseamos manifestar nuestro aprecio a los estudiantes del Santa Monica College, quienes durante varios años ayudaron a probar en clase muchas partes del libro, y a los profesores del Departamento de Matemáticas del Santa Monica College, quienes nos alentaron e hicieron valiosas sugerencias.

También queremos agradecer a los siguientes revisores, quienes nos ayudaron a realizar cambios en esta tercera edición que aumentaron la calidad y utilidad del texto:

Kathleen J. Bavelas
Manchester Community Technical College

Carlie Thompson
Southeast Community College—Middlesboro

Phyllis Meckstroth
Grossmont College

Wesley W. Tom
Chaffey College

Vivien Miller
Mississippi State University

Alan Westcott
Diablo Valley College

Mary Rylko
McHenry Country College

Bruce Yoshiwara
Pierce College

Dorothy Schwellenbach
Hartnell College

Jill C. Zimmerman
Manchester Community College

Estamos agradecidos por la valiosa ayuda del equipo de trabajo de la PWS Publishing Company, incluyendo a Susan McCulley Gay, Mary Beckwith, Bess Rogerson y Abby Heim.

Peter B. Geltner
Darrell J. Peterson

Geometría analítica plana

1

EUCLIDES (300 a.C.)

NOTA HISTÓRICA *En la antigüedad los matemáticos intentaron definir los términos* punto *y* recta. *Pitágoras definió un punto como "una mónada con posición"; Platón, como "el principio de una recta"; y Euclides como "aquello que carece de partes". Algunas de las primeras definiciones de recta fueron "aquello cuya parte media cubre el final", "longitud sin ancho" o "flujo de un punto". Actualmente éstos y otros conceptos básicos se consideran como indefinidos, y a partir de ellos se elaboran definiciones de otros términos.*

En este capítulo se presentan los elementos básicos de un sistema lógico, que incluyen términos indefinidos, definiciones y postulados. También se dan a conocer algunos objetos geométricos sencillos y se analizan las relaciones entre tales objetos y los números reales mediante el empleo de los conceptos de longitud y medida. Al final del capítulo se incluyen algunas construcciones. El análisis de los teoremas se pospone para el capítulo 2.

1.1 Un sistema lógico

La geometría es el estudio de las propiedades y características de ciertos conjuntos como rectas, ángulos, triángulos y círculos. El tema se desarrolla cuidadosa y lógicamente por medio de lo que se denomina *razonamiento deductivo*. Un sistema que depende del razonamiento deductivo se conoce como *sistema lógico*.

Un **sistema lógico** consta de términos indefinidos, definiciones, hipótesis y teoremas. Los términos indefinidos que se utilizarán son **conjunto**, **punto**, **recta** y **plano**. Estos términos no se definirán porque, en un intento por definirlos, es obligatorio utilizar otros términos que no han sido definidos; por ejemplo, un *conjunto* puede entenderse como un grupo o una colección de objetos; sin embargo, no se han definido los términos *grupo* y *colección*, de modo que no es posible usar estas palabras para definir *conjunto*. Un *punto* puede pensarse como una ubicación en el espacio o como un objeto sin dimensión (longitud, ancho o alto); sin embargo, no podemos utilizar las palabras *ubicación*, *espacio* ni *dimensión*. De manera parecida, puede pensarse que una *recta* es un objeto recto unidimensional que se extiende indefinidamente en dos direcciones, y que un *plano* es un objeto plano bidimensional sin fronteras. (¿Puedes enumerar todos los términos indefinidos que se usaron en la última oración?)

FIGURA 1.1

En la figura 1.1, A representa un punto, j representa una recta y P un plano.

Para indicar conjuntos se usan corchetes { }; por ejemplo, $\{1, V, \$\}$ es el conjunto que consta del numeral uno, la letra V y el signo de pesos. Los objetos dentro de un conjunto son **elementos** del conjunto. A menudo los conjuntos se identifican por medio de nombres. Si el conjunto antes mencionado se denomina S, se escribe $1 \in S$, lo que significa "1 pertenece a S". El símbolo $\notin$ significa "no pertenece". Así, $2 \notin S$. En general, una diagonal sobre un símbolo significa *no*. Así, $\neq$ significa "no es igual a".

EJEMPLO 1 Para $A = \{3, y, /\}$, escribe el símbolo correcto ($\in$ o $\notin$):

a. y ? A **b.** [? A **c.** A ? A

Solución **a.** $y \in A$, ya que y es un elemento de A.
b. [$\notin A$, ya que [no es un elemento de A.
c. $A \notin A$, ya que A no es un elemento de A. ■

Un conjunto es **finito** si el número de elementos que contiene es igual a algún entero no negativo n; en caso contrario, es **infinito**. Así, $\{1, 2, 3\}$ es un conjunto finito, mientras que {enteros} es infinito, ya que {enteros} significa *todos* los enteros, a menos que se indique otra cosa.

EJEMPLO 2 Los siguientes conjuntos, ¿son finitos o infinitos?

a. H = {pelos que tiene un chimpancé}
b. {todas las fracciones posibles}

Solución **a.** H es finito, ya que el número de pelos de un chimpancé es igual a algún entero no negativo, aun cuando sea muy grande.

b. El conjunto de *todas las fracciones posibles* es infinito, puesto que no es posible asignar algún entero no negativo al número de fracciones. No importa qué entero se elija, hay un mayor número de fracciones que ese entero. ■

Dos conjuntos A y B son **iguales** si contienen los mismos elementos; por ejemplo, si $A = \{1, 2\}$ y $B = \{1, 2\}$, A y B son iguales y esto se escribe $A = B$. Se dice que dos conjuntos están en **correspondencia uno a uno** si para cada elemento de A hay exactamente un elemento de B y para cada elemento de B hay exactamente un elemento de A. Así, los conjuntos $R = \{3, 4\}$ y $S = \{*, \&\}$ están en correspondencia uno a uno, pero $R \neq S$.

EJEMPLO 3 ¿Cuáles de los siguientes conjuntos son iguales y cuáles están en correspondencia uno a uno?

$A = \{5, 7, 9\}$ $B = \{\text{L, O, G}\}$ $C = \{\text{G, O, L}\}$ $D = \{7, 5\}$

Solución Los conjuntos B y C son iguales, ya que contienen exactamente los mismos elementos. El orden de los elementos no es importante. Los conjuntos A y B, A y C, así como B y C están en correspondencia uno a uno. ■

Un conjunto es **vacío** si no contiene elementos. Así, el conjunto de perros con cuatro cabezas y el conjunto de personas con cinco narices son vacíos. Además, estos dos conjuntos son iguales, ya que contienen los mismos elementos; a saber, ningún elemento. En consecuencia, se concluye que cualquier conjunto vacío debe ser igual a cualquier otro conjunto vacío. Sólo hay un conjunto vacío, aunque hay muchas formas de describirlo. El conjunto vacío se denota como $\emptyset$.

El conjunto A es un **subconjunto** del conjunto B si todo elemento de A es también un elemento de B. Se escribe $A \subset B$. Así, $\{1\} \subset \{1, 2\}$, $\{2, 3\} \subset \{2, 3\}$, $\{3\} \subset \{3\}$ y $\emptyset \subset \{4, 7\}$, pero $\{2\} \not\subset \{1, 3\}$, $\{2\} \subset \emptyset$ y $\{1, 2, 3\} \not\subset \{1, 2, 4, 7\}$. En general, cualquier conjunto es un subconjunto de sí mismo y $\emptyset$ es un subconjunto de cualquier conjunto.

EJEMPLO 4 Para $A = \{3, y, /\}$, escribe el símbolo correcto ($\subset$ o $\not\subset$), dado que $B = \{3, y\}$ y $C = \{y, *\}$.

a. $A \,?\, B$ **b.** $B \,?\, A$ **c.** $C ?\, A$ **d.** $\emptyset \,?\, A$

Solución **a.** $A \not\subset B$, ya que / está en A pero no en B.

b. $B \not\subset A$, pues todo elemento de B también está en A.

c. $C \subset A$, porque C contiene a * y A no.

d. $\emptyset \subset A$, puesto que $\emptyset$ es un subconjunto de cualquier conjunto. ■

Algunas veces un conjunto se define utilizando notación de "construcción de conjuntos"; por ejemplo, $\{x: x < 3\}$ se lee "el conjunto de todas las x tales que x es menor que 3". Con esta notación se definen la **intersección** ($\cap$) de A y B como $A \cap B = \{P: P \in A \text{ y } P \in B\}$ y la **unión** ($\cup$) de A y B como $A \cup B = \{P: P \in A \text{ o } P \in B\}$.

La palabra *o* significa que el elemento pertenece a A, a B o a ambos. La palabra *y* significa que el elemento está en ambos. Si $A = \{1, 2, 3, 4\}$ y $B = \{4, 6, 7\}$, entonces $A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 6, 7\}$ y $A \cap B = \{4\}$.

EJEMPLO 5 Si $C = \{3, 5, 6\}$ y $D = \{*, ?, 6\}$, encuentra

a. $C \cup D$ **b.** $C \cap D$ **c.** $\emptyset \cup C$ **d.** $\emptyset \cap C$

Solución **a.** $C \cup D = \{3, 5, 6, *, ?\}$

b. $C \cap D = \{6\}$
c. $\emptyset \cup C = C$
d. $\emptyset \cap C = \emptyset$ ■

El ejemplo 5 puede ilustrarse mediante un **diagrama de Venn**. En la figura 1.2, el conjunto C contiene los elementos 3, 5 y 6; el conjunto D a *, ? y 6; el conjunto $C \cap D$, el elemento 6; y el conjunto $C \cup D$, los elementos 3, 5, 6, * y ?. En la figura 1.3, la región sombreada representa $C \cap D$ y en la figura 1.4, la región sombreada representa $C \cup D$.

FIGURA 1.2

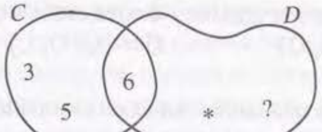
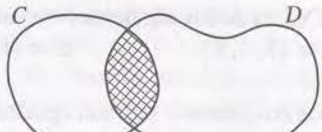


FIGURA 1.3



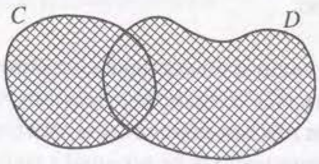


FIGURA 1.4

Muchos de los ejemplos de este texto se relacionan con aplicaciones al mundo real; en diversos libros de texto de álgebra, se conocen como *problemas en lenguaje coloquial* o *problemas planteados*. Aunque se supone que ya has tenido experiencia con problemas de aplicación en algún curso de álgebra elemental, aquí se incluyen algunas directrices de repaso. Algunos de los pasos pueden ser innecesarios en el problema que se esté trabajando.

DIRECTRICES PARA RESOLVER PROBLEMAS DE APLICACIÓN

1. Lee cuidadosamente el problema, varias veces en caso de ser necesario, hasta asegurarte de comprender el significado de todos los términos y la situación que se describe.
2. Determina con qué hechos se cuenta (datos).
3. Define la información que debes encontrar.
4. Identifica con variables cada cantidad desconocida necesaria en el problema.
5. Haz un diagrama, cuando sea posible, como ayuda para analizar el problema.
6. Escribe una ecuación que contenga las variables, a fin de traducir el problema de lenguaje coloquial a forma algebraica.
7. Resuelve la ecuación y usa la solución para determinar toda la información solicitada.
8. Comprueba todas las respuestas estableciendo si responden correctamente todas las preguntas planteadas en el *problema original*.

EJEMPLO 6 El rector de una universidad desea conocer la cantidad de personas inscritas en un programa especial para becarios que consta de una clase de inglés y una clase de matemáticas. A la clase de inglés asisten 36 estudiantes y a la de matemáticas, 42. A ambas clases asisten 25 alumnos. ¿Cuántos estudiantes están en el programa especial?

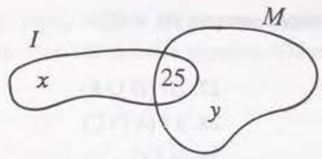


FIGURA 1.5

Solución Sean I el conjunto de estudiantes en la clase de inglés y M el conjunto de estudiantes en la clase de matemáticas. Entonces $I \cap M$ es el conjunto de participantes en ambas clases. Así, el conjunto $I \cap M$ contiene 25 estudiantes. Sea x = número de inscritos en inglés pero no en matemáticas. Sea y = número de matriculados en matemáticas pero no en inglés. Observa la figura 1.5. Dado que $I \cap M$ es un subconjunto tanto de I como de M, se concluye que $x + 25 = 36$ y $y + 25 = 42$. Al despejar x y y se obtiene $x = 11$ y $y = 17$. Así, $11 + 25 + 17 = 53$ estudiantes están en el programa especial. Observa que la cantidad de inscritos en $I \cup M$ es igual al número de estudiantes en I más el número de inscritos en M menos la cantidad de matriculados en $I \cap M$; a saber, $36 + 42 - 25 = 53$. ■

EJERCICIOS 1.1

En los ejercicios 1 a 6 escribe si cada uno de los conjuntos es finito o infinito.

1. Los enteros pares
2. Los presidentes de la nación
3. Todas las rutas posibles para ir en buque de vapor de San Francisco a Tokio
4. Los granos de arena de la playa en Waikiki
5. Los bebés nacidos en un hospital durante 1985
6. Los canguros de tres cabezas que llevan corbata de moño
7. Escriba tres descripciones de conjunto vacío
8. ¿Cuáles de los conjuntos $\{1, 4, 9\}$, $\{a, b, c\}$, $\{1^2, 2^2, 3^2\}$, $\{1, 2, 3, 4\}$, $\{a^2, b^2, c^2\}$, $\emptyset$, $\{\sqrt{1}, \sqrt{16}, \sqrt{81}\}$ y $\{9, 1, 4\}$ son iguales? ¿Cuáles están en correspondencia uno a uno?

En los ejercicios 9 a 29, sean $A = \{1, 2, 3, 4\}$, $B = \{x: x \text{ es un entero positivo}\}$, $C = \{2, 4\}$, $D = \{1\}$, $E = \{\triangle, \square\}$ ***y*** $F = \{2, 4, \triangle, \square\}$.

En los ejercicios 9 a 15, escribe el símbolo correcto ($\subset$ ***o*** $\not\subset$).

9. $C \,?\, A$
10. $D \,?\, A$
11. $A \,?\, B$
12. $D \,?\, C$
13. $\emptyset \,?\, E$
14. $F \,?\, B$
15. $E \,?\, F$

En los ejercicios 16 a 22, encuentra:

16. $C \cup D$
17. $A \cup B$
18. $A \cap C$
19. $A \cap D$
20. $C \cap E$
21. $C \cup E$
22. $A \cap (C \cup D)$

En los ejercicios 23 a 29, escribe el símbolo correcto ($\in$ o $\notin$).

23. $4 \; ? \; A$

24. $3 \; ? \; B$

25. $3 \; ? \; F$

26. $\triangle \; ? \; B$

27. $\triangle ? \; (D \cup E)$

28. $3 \; ? \; (A \cap C)$

29. $\sqrt{4} \; ? \; C$

En los ejercicios 30 a 37, sean A = {x: x es un entero positivo}, B = {y: y es un entero par}, C = {z: z = 3n, n es un entero positivo} y D = {99, 108, 111, 127}.

En los ejercicios 30 a 33, escribe el símbolo correcto ($\subset$ o $\not\subset$).

30. $A \; ? \; B$

31. $C \; ? A$

32. $B \; ? \; C$

33. $D \; ? \; C$

En los ejercicios 34 a 37, encuentra:

34. $B \cup D$

35. $A \cup C$

36. $A \cap B$

37. $C \cap D$

En los ejercicios 38 a 41, escribe el símbolo correcto ($\in$ o $\notin$).

38. Si E = {todas las razas de perros}, entonces un collie E.

39. Si F = {todas las razas de gatos}, entonces un pekinés F.

40. Si G = {el equipo de futbol de 1990 de la universidad Superville}, entonces un parador en corto de 1990 de dicha universidad G.

41. Si H = {todos los ganadores del Oscar}, entonces Meryl Streep H.

En los ejercicios 42 a 49, resuelve los problemas de aplicación. Utiliza diagramas de Venn.

42. Un catedrático desea conocer la cantidad de inscritos en un curso que consta de una clase de historia y una clase de mecanografía. A la clase de historia asisten 27; 15 a la de mecanografía y 8 a ambas. ¿Cuántos individuos forman parte del programa?

43. Un doctor desea determinar el número de internos en el pabellón del hospital. En el pabellón hay 75 pacientes con sarampión, 56 con varicela y 10 con sarampión y varicela. ¿Cuántos internos hay?

44. En un curso de geometría hay 8 mujeres zurdas y 29 mujeres diestras. En la clase hay 13 zurdos y 35 diestros. ¿Cuántos alumnos hay en el curso de geometría?

45. En un curso de álgebra hay 18 zurdos y 12 diestros. En la clase hay 23 zurdos y 15 diestros. ¿Cuántos estudiantes hay en el curso de álgebra?

46. En un librero hay 22 libros rojos, 15 libros de historia, 11 libros grandes, 9 libros de historia rojos, 6 libros rojos grandes, 7 libros de historia grandes y 2 libros de historia rojos grandes. ¿Cuántos libros distintos hay en el librero?

47. En una tienda de mascotas hay 12 perros cafés, 10 spaniels, 11 perros grandes, 7 spaniels cafés, 4 perros cafés grandes, 5 spaniels grandes y 3 spaniels cafés grandes. ¿Cuántos perros distintos hay en la tienda?

48. En un estacionamiento hay 30 automóviles de dos puertas, 17 vehículos extranjeros y 25 autos blancos. Hay 17 automóviles blancos de dos puertas, 13 extranjeros de dos puertas, 12 extranjeros blancos y 8 extranjeros blancos de dos puertas. ¿Cuál es el número total de vehículos en el estacionamiento?

49. En un bosque hay 385 árboles grandes con hojas rojas, 407 de madera dura con hojas rojas, 462 grandes de madera dura y 300 grandes de madera dura con hojas rojas. Hay 758 árboles grandes, 537 con hojas rojas y 737 de madera dura. ¿Cuántos árboles hay en el bosque?

1.2 Postulados

El **espacio** se define como el conjunto de todos los puntos. Por esta definición, si un objeto es un punto, entonces está en el espacio; sin embargo, hasta el momento no se ha hecho nada que sugiera cuántos puntos existen. Además, no se ha establecido relación alguna entre los términos indefinidos *punto*, *recta* y *plano*. A fin de utilizar estas palabras se requieren hacer algunas suposiciones sobre las relaciones que hay entre ellas.

En álgebra, las suposiciones se denominan **axiomas**. Estos axiomas se revisarán en el apéndice A. En geometría, las suposiciones se denominan **postulados**.

Postulado 1.1 Toda recta contiene por lo menos dos puntos distintos.

Postulado 1.2 Dos puntos distintos cualesquiera en el espacio tienen exactamente una recta que los contiene.

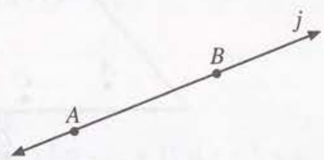


FIGURA 1.6

Observa la figura 1.6, que ilustra los postulados 1.1 y 1.2. Por el postulado 1.1, la recta j contiene por lo menos dos puntos A y B. Por el postulado 1.2, si los puntos A y B son dos puntos distintos cualesquiera en el espacio, entonces existe exactamente una recta j que los contiene.

Postulado 1.3 Todo plano contiene por lo menos tres puntos distintos no colineales.

Postulado 1.4 Tres puntos distintos cualesquiera no colineales en el espacio tienen exactamente un plano que los contiene.

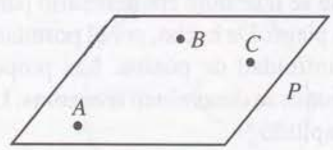


FIGURA 1.7

Observa la figura 1.7 que ilustra los postulados 1.3 y 1.4. Por el postulado 1.3, el plano P contiene por lo menos tres puntos A, B y C. Por el postulado 1.4, si A, B y C son tres puntos distintos cualesquiera no colineales en el espacio, entonces existe exactamente un plano P que los contiene. (Si los tres puntos A, B y C son colineales, entonces muchos planos los contienen.)

Postulado 1.5 Para dos puntos distintos cualesquiera en un plano, la recta que los contiene también está en el plano.

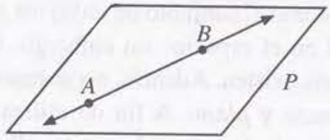


FIGURA 1.8

Observa la figura 1.8, que ilustra el postulado 1.5. Por el postulado 1.5, si dos puntos distintos A y B están en el plano P, entonces la recta que los contiene también está en el plano P.

Postulado 1.6 Ningún plano contiene todos los puntos del espacio.

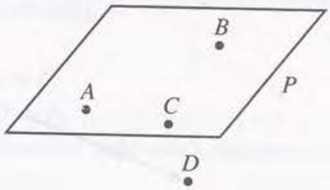


FIGURA 1.9

Observa la figura 1.9, que ilustra el postulado 1.6. Por el postulado 1.6, existe por lo menos un punto D en el espacio que no está en el plano P. (Piensa que el plano P contiene el techo de la habitación en que te encuentras, e imagina un insecto en el punto D sobre el piso de la habitación.)

Postulado 1.7 **(Postulado de la regla)** Existe una correspondencia uno a uno entre el conjunto de todos los números reales y el conjunto de todos los puntos de una recta.

El número que corresponde a cada punto dado de una recta es la **coordenada** del punto. Debido a que el conjunto de los números reales es infinito, el postulado 1.7 implica que una recta contiene una infinidad de puntos. En consecuencia, ya no es necesario el postulado 1.1; sin embargo, cuando éste se introdujo era necesario para describir las diferencias supuestas entre un punto, una recta y un plano. De hecho, por el postulado 1.5 puede observarse que un plano también debe contener una infinidad de puntos. Las proposiciones que pueden obtenerse a partir de postulados y definiciones se denominan **teoremas**. Los teoremas y sus demostraciones se analizarán en el siguiente capítulo.

EJEMPLO 1 ¿Qué postulado se aplica a la siguiente situación?

Dados tres puntos distintos A, B y C en una recta de coordenadas, si la coordenada de A

es –3 y la coordenada de B es 5, entonces la coordenada de C no puede ser 5. Asimismo, la coordenada de C no puede ser – 3.

Solución Tomemos el postulado 1.7, el postulado de la regla. Ya que entre los números reales y los puntos de una recta hay una correspondencia uno a uno, no es posible asignar la coordenada 5 a dos puntos distintos B y C, y tampoco es posible asignar la coordenada –3 a dos puntos distintos A y C. ■

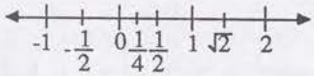


FIGURA 1.10

Al aplicar el postulado de la regla suele elegirse una correspondencia en que las coordenadas de los enteros sean equidistantes a lo largo de la recta numérica, (Fig. 1.10); por ejemplo, las coordenadas 1 y 2 están a la misma distancia que las coordenadas 0 y 1. El lector puede tener una idea intuitiva del significado del término *distancia*; pero aquí todavía no se analiza este concepto en términos de las coordenadas de una recta numérica. Para hacer esto se requiere la siguiente definición.

El **valor absoluto** de un número x, denotado por $|x|$, se define como $|x| = x$ si $x \geq 0$ y $|x| = -x$ si $x < 0$.

EJEMPLO 2 Encuentre $|3|$, $|0|$, $|-2|$, $|c+1|$ y $|y-5|$.

Solución $|3| = 3$, ya que $3 \geq 0$.
$|0| = 0$, ya que $0 \geq 0$.
$|-2| = -(-2) = 2$, ya que $-2 < 0$.
$|c+1| = c+1$ si $c+1 \geq 0$ y $|c+1| = -(c+1)$ si $c+1 < 0$.
$|y-5| = y-5$ si $y \geq 5$ y $|y-5| = -(y-5) = 5-y$ si $y < 5$. ■

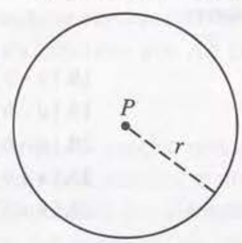
En la solución anterior se utilizaron las proposiciones $y \geq 5$ en vez de $y - 5 \geq 0$ y $y < 5$ en lugar de $y - 5 < 0$. El axioma de suma de la desigualdad permite sumar 5 a ambos miembros de las desigualdades, con lo que se simplifican las expresiones.

¡PRECAUCIÓN! A menudo los estudiantes comentan: "No entiendo cómo $|x| = -x$ puede ser cierto si $x \neq 0$, ya que el valor absoluto de un número nunca es negativo". ¡Hay que leer **todas** las partes de una definición! En la definición de valor absoluto se encuentra la proposición:

$$|x| = -x \text{ si } x < 0.$$

No olvide leer la parte "si" de la proposición. Observe que $-x$ es positivo si $x < 0$; por ejemplo, si $x = -4$, entonces $|x| = |-4| = -(-4) = 4$; es decir, el negativo de un número negativo es positivo.

FIGURA 1.11



Si x y y son las coordenadas de los puntos P y Q, respectivamente, entonces la distancia de P a Q es $|x - y|$. La distancia de P a Q se denota por PQ; esto es, $PQ = |x - y|$.

La distancia es un concepto importante en geometría porque se utiliza en muchas definiciones; por ejemplo, un **círculo** es el conjunto de todos los puntos en un plano que están a una distancia fija r de un punto dado P. El punto dado P es el **centro** del círculo y la distancia dada r es el **radio** del círculo. El círculo se denomina *círculo P* (Fig. 1.11).

Definición

El punto B está **entre** los puntos A y C si A, B y C son colineales y $AB + BC = AC$. Se escribe $A—B—C$.

EJEMPLO 3 En la figura 1.12, indica si las afirmaciones $A—B—C$, $A—C—B$ y $A—D—C$ son verdaderas o falsas.

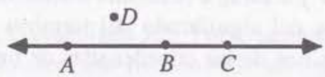


FIGURA 1.12

Solución $A—B—C$ es verdadera, ya que A, B y C son colineales y $AB + BC = AC$. $A—C—B$ es falsa porque $AC + CB \neq AB$, y $A—D—C$ es falsa porque A, D y C no son colineales. ■

EJERCICIOS 1.2

En los ejercicios 1 a 5, si* A, B *y* C *son puntos distintos,* k *y* m *son rectas y* P *es un plano, ¿qué postulado ilustra cada una de las proposiciones siguientes?

1. Si $A \in P$, $C \in P$, $A \in k$ y $C \in k$, entonces $k \in P$.
2. Si $B \in k$, $C \in k$ y $k \neq m$, entonces B y C no pueden estar las dos sobre m.
3. Si $A \in k$, $B \in k$, $A \in m$ y $B \in m$, entonces $k = m$.
4. Existe un punto C tal que $C \notin P$.
5. Si $A \in k$, $B \in k$, $C \in m$ y $C \notin k$, entonces existe un plano P tal que $A \in P$, $B \in P$ y $C \in P$.
6. Traza una recta numérica, como en la figura 1.10, e indica los puntos sobre la recta que representan cada uno de los siguientes: 0, 3, – 2, 3/2, – 1/3, $\sqrt{3}$ y π.

En los ejercicios 7 a 22, encuentra los valores:

7. $\lvert -7 \rvert$	**13.** $\lvert d \rvert$	**18.** $\lvert x - 3 \rvert$ si $x < 3$
8. $\lvert -23 \rvert$	**14.** $\lvert -t \rvert$	**19.** $\lvert a - b \rvert$ si $a > b$
9. $\lvert -0 \rvert$	**15.** $\lvert x^2 \rvert$	**20.** $\lvert a - b \rvert$ si $a < b$
10. $\lvert 0 \rvert$	**16.** $\lvert -y^2 \rvert$	**21.** $\lvert x + y \rvert$ si $x < -y$
11. $\lvert 52 \rvert$	**17.** $\lvert x - 3 \rvert$ si $x > 3$	**22.** $\lvert x + y \rvert$ si $x > -y$
12. $\lvert 24 \rvert$		

En los ejercicios 23 a 30, encuentra cada una de las distancias indicadas para el siguiente diagrama.

23. EF
24. AB
25. BE
26. EB
27. CA
28. AC
29. CE
30. DF

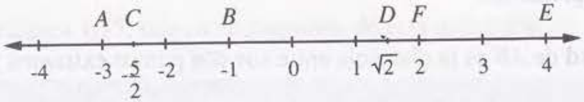


FIGURA PARA LOS EJERCICIOS 23 A 30

31. Si P y Q son puntos distintos sobre una recta k con coordenadas p y q, respectivamente, ¿por qué $PQ = QP$?

32. En un mapa, una recta numérica se coloca de modo que un campo de golf con coordenada – 10, un lago con coordenada 53 y un museo con coordenada 24 estén sobre la recta. Todas las unidades del mapa están en millas. Encuentra la distancia entre el campo de golf y el lago, y la distancia entre el lago y el museo.

33. Un mapa celeste muestra que tres estrellas, Alfa, Beta y Gamma son colineales. Traza una recta numérica sobre las estrellas en el mapa. La coordenada de Alfa es – 5; la de Beta, 6; y la de Gamma, 22. Todas las unidades del mapa están en parsecs. Encuentra la distancia entre Alfa y Beta, y la distancia entre Beta y Gamma.

34. ¿Qué postulado demuestra que una silla de tres patas es estable?

35. ¿Por qué una mesa con cuatro patas no siempre es estable?

1.3 Segmentos, rayos, ángulos y triángulos

El siguiente concepto se refiere al conjunto de puntos representado por la unión de los puntos A y B y el conjunto de todos los puntos entre A y B. En general, las definiciones que comprenden conjuntos se proporcionan con símbolos.

Definición

El **segmento de recta** $AB = \{A, B\} \cup \{P: A\text{—}P\text{—}B\}$. Se escribe $\overline{AB}$.

FIGURA 1.13

La figura 1.13 es un diagrama de $\overline{AB}$. Los puntos A y B son los **puntos extremos** de $\overline{AB}$. A partir de la definición puede observarse que $\overline{AB}$ y $\overline{BA}$ representan el mismo segmento de recta. En la figura 1.1 puedes ver que una recta se representa con flechas en los extremos; la recta que contiene a A y B se denota por $\overleftrightarrow{AB}$, en contraste con $\overline{AB}$ (los segmentos de recta no contienen flechas).

¡PRECAUCIÓN! En este texto se intenta ser preciso con las definiciones, de modo que puedan aplicarse con más seguridad en otro tipo de contextos matemáticos; sin embargo, algunas veces es útil contar con una *definición* más *informal*. Por ejemplo, si estás en una fiesta y tu acompañante te pide que le expliques qué es un segmento de recta, tal vez te vea en forma extraña si comienzas citando las proposiciones sobre A, B y P que se presentaron en la definición anterior. Quizá debas decir:

Un **segmento de recta** consta de dos puntos y todos los puntos entre éstos.

Tal vez tu acompañante te mire con extrañeza, pero por lo menos aceptará que te has expresado de forma comprensible.

La **longitud** de $\overline{AB}$ es la distancia entre sus dos puntos extremos y se denota por AB.

Definición

Dos segmentos de recta $\overline{AB}$ y $\overline{CD}$ son **congruentes** si $AB = CD$. Se escribe $\overline{AB} \cong \overline{CD}$.

¡PRECAUCIÓN! Un planteamiento informal de la definición precedente es: Dos segmentos de recta son **congruentes** si sus longitudes son iguales.

EJEMPLO 1 En la figura 1.14, dado que $\overline{AB}$ y $\overline{CD}$ tienen la misma longitud, indica si las siguientes expresiones son verdaderas o falsas.

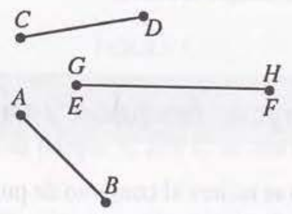


FIGURA 1.14

a. $\overline{AB} \cong \overline{CD}$ **b.** $AB = CD$ **c.** $\overline{AB} = \overline{CD}$

d. $\overline{EF} \cong \overline{GH}$ **e.** $EF = GH$ **f.** $\overline{EF} = \overline{GH}$

Solución **a.** Verdadera **b.** Verdadera **c.** Falsa

d. Verdadera **e.** Verdadera **f.** Falsa

¡PRECAUCIÓN! $\overline{AB} = \overline{CD}$ es diferente de $\overline{AB} \cong \overline{CD}$. El primero significa que los conjuntos de puntos son idénticos (iguales); el segundo, que los conjuntos de puntos son congruentes. Así, en la figura 1.14,

$$\overline{AB} \cong \overline{CD},$$

pero

$$\overline{AB} \neq \overline{CD}.$$

Observa que el punto E también se denomina punto G y que el punto F también se llama punto H. Aunque no suele hacerse, aquí se utilizan dos nomenclaturas para demostrar la diferencia que hay entre igualdad y congruencia de segmentos de recta.

Definición

El punto C es el **punto medio** de $\overline{AB}$ si A—C—B y $AC = BC$.

FIGURA 1.15

Observa la figura 1.15, que es un diagrama de esta definición.

Definición

Una **bisectriz** de $\overline{AB}$ es cualquier recta o segmento de recta que contiene al punto medio C, pero a ningún otro punto de $\overline{AB}$.

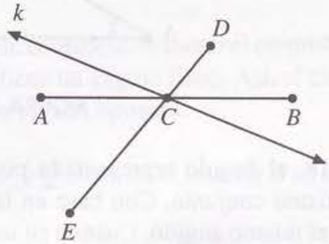


FIGURA 1.16

En la figura 1.16, si C es el punto medio de $\overline{AB}$, entonces $\overline{DE}$ y la recta k son bisectrices de $\overline{AB}$. Es posible que exista una bisectriz que no sea recta ni segmento de recta; sin embargo, por esta ocasión el análisis se restringe a bisectrices del tipo mencionado en la definición.

Definición

El **rayo** $AB = \overline{AB} \cup \{P: A\text{—}B\text{—}P\}$. Se escribe $\overrightarrow{AB}$.

¡PRECAUCIÓN! Es difícil proporcionar una definición informal de rayo; podría decirse: Si A y B son dos puntos de una recta, el **rayo** AB consta del punto A y de todos los puntos de la recta que están del mismo lado de A que de B.

Definición

El punto A es el **punto extremo** de $\overrightarrow{AB}$.

FIGURA 1.17

La figura 1.17 es el diagrama de un rayo. Observa la forma en que se usa la flecha. A saber, la flecha indica que el rayo empieza en A, se extiende hasta B y continúa indefinidamente.

Definición

El **ángulo** $BAC = \overrightarrow{AB} \cup \overrightarrow{AC}$. Se escribe $\angle BAC$.

Los rayos $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{AC}$ son los **lados** de $\angle BAC$. El punto A es el **vértice** de $\angle BAC$.

¡PRECAUCIÓN! Un planteamiento informal de la definición precedente es: Un **ángulo** consta de dos rayos distintos que tienen el mismo punto extremo.

Definición
Si B—A—C, entonces $\angle BAC$ es un **ángulo llano.**

En la figura 1.12, $\angle ABC$ es un ángulo llano con vértice en B.

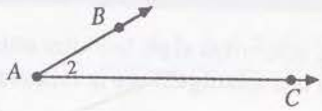


FIGURA 1.18

En la figura 1.18, el ángulo representado puede recibir diferentes denominaciones, todas representando el mismo conjunto. Con base en la definición es posible observar que $\angle BAC$ y $\angle CAB$ representan el mismo ángulo. Cuando en un diagrama no hay posibilidad de confusión, el ángulo puede identificarse como $\angle A$. Algunas veces en un diagrama complicado es más fácil identificar un ángulo mediante un número, que se escribe como se muestra en la figura 1.18, a saber, $\angle 2$.

Definición
Dados los puntos R y S y la recta k, R y S están **del mismo lado de** k si $\overline{RS} \cap k = \emptyset$, y R y S están **en lados opuestos** de k si $\{R\} \cap k = \emptyset$, $\{S\} \cap k = \emptyset$ y $\overline{RS} \cap k \neq \emptyset$.

¡PRECAUCIÓN! Un planteamiento informal de la definición anterior es: Dos puntos están **del mismo lado de una recta** si no es necesario cruzar la recta para ir de un punto al otro y dos puntos están **en lados opuestos de una recta** si para ir de uno al otro es necesario cruzar la recta.

EJEMPLO 2 En la figura 1.19, A y B están del mismo lado de k, y A y C están en lados opuestos de k. ¿Por qué? Observa que A y D no están del mismo lado de k ni en lados opuestos de k. ¿Por qué?

FIGURA 1.19

Solución Los puntos A y B están del mismo lado de k, ya que $\overline{AB} \cap k = \emptyset$. Los puntos A y C están en lados opuestos de k, ya que A y C no están en k y $\overline{AC} \cap k \neq \emptyset$. Los puntos A y D no están del mismo lado de k, ni en lados opuestos de k, puesto que D está en k. ∎

Definición
El **interior** de $\angle BAC = \{P$: $\angle BAC$ no es un ángulo llano, los puntos P y C están en el mismo lado de $\overleftrightarrow{AB}$, y los puntos P y B están en el mismo lado de $\overleftrightarrow{AC}\}$. Se escribe int $\angle BAC$.

Los rayos $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{AC}$ son los **lados** de $\angle BAC$. El punto A es el **vértice** de $\angle BAC$.

¡PRECAUCIÓN! Un planteamiento informal de la definición precedente es:
Un **ángulo** consta de dos rayos distintos que tienen el mismo punto extremo.

Definición
Si B—A—C, entonces $\angle BAC$ es un **ángulo llano.**

En la figura 1.12, $\angle ABC$ es un ángulo llano con vértice en B.

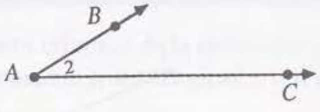


FIGURA 1.18

En la figura 1.18, el ángulo representado puede recibir diferentes denominaciones, todas representando el mismo conjunto. Con base en la definición es posible observar que $\angle BAC$ y $\angle CAB$ representan el mismo ángulo. Cuando en un diagrama no hay posibilidad de confusión, el ángulo puede identificarse como $\angle A$. Algunas veces en un diagrama complicado es más fácil identificar un ángulo mediante un número, que se escribe como se muestra en la figura 1.18; a saber, $\angle 2$.

Definición
Dados los puntos R y S y la recta k, R y S están **del mismo lado de** k si $\overline{RS} \cap k = \emptyset$, y R y S están **en lados opuestos** de k si $\{R\} \cap k = \emptyset$, $\{S\} \cap k = \emptyset$ y $\overline{RS} \cap k \neq \emptyset$.

¡PRECAUCIÓN! Un planteamiento informal de la definición anterior es:
Dos puntos están **del mismo lado de una recta** si no es necesario cruzar la recta para ir de un punto al otro, y dos puntos están **en lados opuestos de una recta** si para ir de uno al otro es necesario cruzar la recta.

EJEMPLO 2 En la figura 1.19, A y B están del mismo lado de k, y A y C están en lados opuestos de k. ¿Por qué? Observa que A y D no están del mismo lado de k ni en lados opuestos de k. ¿Por qué?

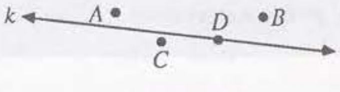


FIGURA 1.19

Solución Los puntos A y B están del mismo lado de k, ya que $\overline{AB} \cap k = \emptyset$. Los puntos A y C están en lados opuestos de k, ya que A y C no están en k y $\overline{AC} \cap k \neq \emptyset$. Los puntos A y D no están del mismo lado de k, ni en lados opuestos de k, puesto que D está en k. ■

Definición
El **interior** de $\angle BAC = \{P$: $\angle BAC$ no es un ángulo llano, los puntos P y C están en el mismo lado de $\overleftrightarrow{AB}$, y los puntos P y B están en el mismo lado de $\overleftrightarrow{AC}\}$. Se escribe int $\angle BAC$.

¡PRECAUCIÓN! No siempre es fácil o posible escribir un planteamiento informal de una definición y no lo intentaremos para el **interior de un ángulo.** En algunos textos éste se considera un término indefinido y en otros simplemente se dan ejemplos para evitar la terminología formal precisa que se usa aquí. En este texto se ha adoptado la notación más precisa a fin de poder definir términos geométricos más complicados.

Definición
El **exterior** de $\angle BAC = \{P: P$ no está en $\angle BAC$ ni en int $\angle BAC\}$. Se escribe ext $\angle BAC$.

¡PRECAUCIÓN! Un planteamiento informal de la definición precedente es:
El **exterior de un ángulo** consta de todos los puntos que no están en el ángulo ni en su interior.

El interior de un ángulo puede considerarse como el conjunto de todos los puntos que están en un solo lado de la recta que contiene un ángulo llano. Así, el exterior del ángulo sería el conjunto de todos los puntos que están en el lado opuesto.

EJEMPLO 3 En la figura 1.20, determina si P y Q están en el interior o en el exterior de $\angle BAC$.

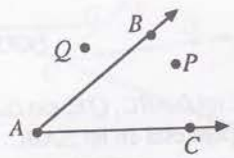


FIGURA 1.20

Solución $P \in \text{int}\angle BAC$, ya que los puntos P y C están en el mismo lado de $\overleftrightarrow{AB}$ y los puntos P y B están en el mismo lado de $\overleftrightarrow{AC}$.
$Q \in \text{ext}\angle BAC$, puesto que Q no está en $\angle BAC$ ni en $\text{int}\angle BAC$. ■

Definición
El **triángulo** $ABC = \overline{AB} \cup \overline{BC} \cup \overline{AC}$, donde A, B y C son puntos no todos colineales. Se escribe $\triangle ABC$. Los segmentos $\overline{AB}$, $\overline{BC}$ y $\overline{AC}$ son los **lados** de $\triangle ABC$.

¡PRECAUCIÓN! Un planteamiento informal de la definición precedente es:
Un **triángulo** consta de tres puntos, no todos sobre la misma recta, junto con los tres segmentos de recta cuyos puntos extremos son pares de estos puntos.

Observa la figura 1.21, que es un diagrama de $\triangle ABC$.

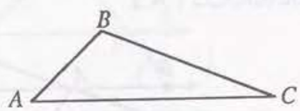


FIGURA 1.21

¡PRECAUCIÓN! No siempre es fácil o posible escribir un planteamiento informal de una definición y no lo intentaremos para el **interior de un ángulo.** En algunos textos éste se considera un término indefinido y en otros simplemente se dan ejemplos para evitar la terminología formal precisa que se usa aquí. En este texto se ha adoptado la notación más precisa a fin de poder definir términos geométricos más complicados.

Definición

El **exterior** de $\angle BAC = \{P: P$ no está en $\angle BAC$ ni en int $\angle BAC\}$. Se escribe ext $\angle BAC$.

¡PRECAUCIÓN! Un planteamiento informal de la definición precedente es:
El **exterior de un ángulo** consta de todos los puntos que no están en el ángulo ni en su interior.

El interior de un ángulo puede considerarse como el conjunto de todos los puntos que están en un solo lado de la recta que contiene un ángulo llano. Así, el exterior del ángulo sería el conjunto de todos los puntos que están en el lado opuesto.

EJEMPLO 3 En la figura 1.20, determina si P y Q están en el interior o en el exterior de $\angle BAC$.

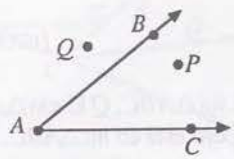


FIGURA 1.20

Solución $P \in \text{int}\angle BAC$, ya que los puntos P y C están en el mismo lado de $\overleftrightarrow{AB}$ y los puntos P y B están en el mismo lado de $\overleftrightarrow{AC}$.
$Q \in \text{ext}\angle BAC$, puesto que Q no está en $\angle BAC$ ni en $\text{int}\angle BAC$. ■

Definición

El **triángulo** $ABC = \overline{AB} \cup \overline{BC} \cup \overline{AC}$, donde A, B y C son puntos no todos colineales. Se escribe $\triangle ABC$. Los segmentos $\overline{AB}$, $\overline{BC}$ y $\overline{AC}$ son los **lados** de $\triangle ABC$.

¡PRECAUCIÓN! Un planteamiento informal de la definición precedente es:
Un **triángulo** consta de tres puntos, no todos sobre la misma recta, junto con los tres segmentos de recta cuyos puntos extremos son pares de estos puntos.

Observa la figura 1.21, que es un diagrama de $\triangle ABC$.

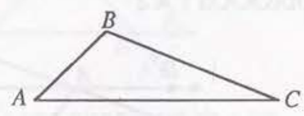


FIGURA 1.21

Definición

El **interior** de $\triangle ABC = \{P: P \in \text{int}\angle ABC \cap \text{int}\angle BAC\}$. Se escribe int $\triangle ABC$.

¡PRECAUCIÓN! Un planteamiento informal de la definición anterior es:
El **interior de un triángulo** es la intersección de los interiores de dos ángulos cualesquiera del triángulo.

Definición

El **exterior** de $\triangle ABC = \{P: P$ no está en $\triangle ABC \cup \text{int}\triangle ABC\}$. Se escribe ext $\triangle ABC$.

¡PRECAUCIÓN! Un planteamiento informal de la definición precedente es:
El **exterior de un triángulo** consta de todos los puntos que no están en el triángulo ni en su interior.

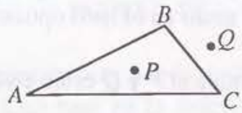


FIGURA 1.22

En la figura 1.22, $P \in \text{int}\triangle ABC$, $Q \in \text{ext}\triangle ABC$, $A \in \triangle ABC$, $A \notin \text{int}\triangle ABC$ y $A \notin \text{ext}\triangle ABC$. Así, P no está en $\triangle ABC$ pero está en int$\triangle ABC$. En $\triangle ABC$, el lado $\overline{AB}$ y $\angle C$ son **opuestos** entre sí.

Si se tienen $\triangle ABC$ y un punto D tales que A—C—D, entonces $\angle BCD$ es un ángulo **externo** de $\triangle ABC$. En la figura 1.23, los ángulos A, B y ACB son **ángulos internos** del triángulo. Dado el exterior $\angle BCD$, $\angle A$ y $\angle B$ son **ángulos internos lejanos**. Observa que $\angle DCE$ no es un ángulo externo, ya que no es cierto que B—C—E. Los ángulos FHI, GHJ, HGK, FGL, GFM y HFN son ángulos externos de $\triangle FGH$.

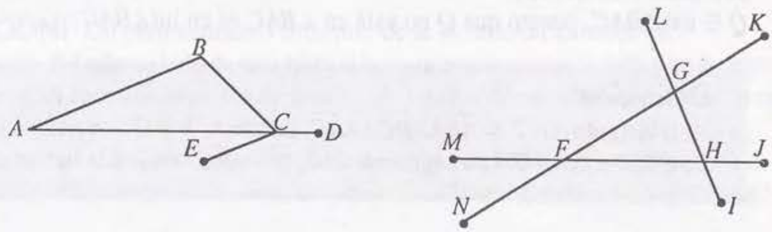
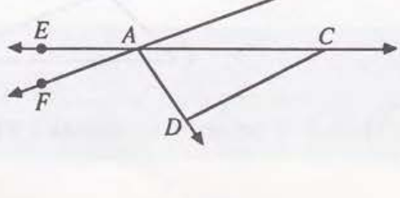


FIGURA 1.23

EJERCICIOS 1.3

FIGURA PARA LOS EJERCICIOS 1 A 3



Con base en el diagrama que se muestra con* E—A—C *y* F—A—B*, en los ejercicios 1 a 3, enumera todos los elementos siguientes:

1. Segmentos de recta
2. Rectas
3. Rayos

De acuerdo con el diagrama que se muestra con* AB = EF*, en los ejercicios 4 a 9, escribe el símbolo correcto (=, $\cong$, $\ncong$, $\neq$).

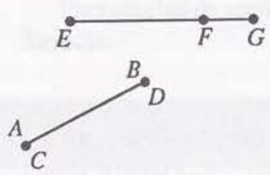


FIGURA PARA LOS EJERCICIOS 4 A 9

4. AB ? CD
5. $\overline{AB}$? $\overline{CD}$ (dos respuestas)
6. CD ? EF
7. $\overline{CD}$? $\overline{EF}$ (dos respuestas)
8. CD ? EG
9. $\overline{AB}$? $\overline{EG}$ (dos respuestas)

***En los ejercicios 10 a 19, dado el diagrama con* A—C—H:**

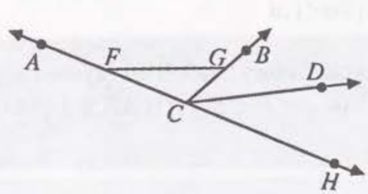


FIGURA PARA LOS EJERCICIOS 10 A 19

10. Enumera todos los ángulos usando tres letras para cada uno.
11. Enumera todos los puntos que son vértices de ángulos.

En los ejercicios 12 a 16, ¿cuáles de las siguientes parejas de puntos están del mismo lado de* $\overleftrightarrow{BC}$*? ¿Cuáles están en lados opuestos de* $\overleftrightarrow{BC}$*?

12. D y F
13. D y H
14. F y G
15. A y F
16. A y H

En los ejercicios 17 a 19, ¿cuál(es) punto identificado está(n) en el interior de cada ángulo siguiente?

17. $\angle BCH$ **18.** $\angle ACB$ **19.** $\angle FCH$

***En los ejercicios 20 a 22, utiliza al diagrama que se muestra con* A—B—E, C—B—F *y* A—C—D:**

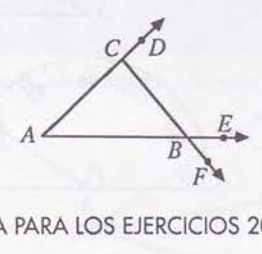


FIGURA PARA LOS EJERCICIOS 20 A 22

20. Identifica los ángulos internos.
21. Identifica los ángulos externos.

22. Identifica los ángulos internos lejanos para cada ángulo interno enumerado en el ejercicio 21.
23. Define verbalmente el término *rayo*.

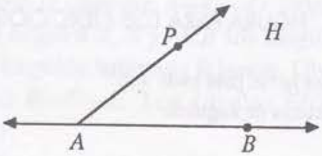
En cada uno de los ejercicios del 24 al 27, enumera cinco objetos que te recuerden los siguientes conjuntos geométricos.

24. Segmentos de recta
25. Rayos
26. Ángulos
27. Triángulos

1.4 Medida de un ángulo

Dada una recta en un plano, se forman tres conjuntos de puntos diferentes; a saber, el conjunto de puntos a un lado de la recta, el conjunto de puntos al otro lado de la recta y el conjunto de puntos que constituyen la recta. Un **semiplano** es el conjunto de todos los puntos que se encuentran a un lado de la recta. La recta es la **arista** del semiplano. Un **semiplano cerrado** es la unión del semiplano y su arista.

Postulado 1.8 **(Postulado del transportador)** Sea $\overrightarrow{AB}$ un rayo sobre la arista de un semiplano cerrado H. Para todo rayo $\overrightarrow{AP}$ tal que $P \in H$ y $P \notin \overrightarrow{AB}$, existe exactamente un número real r tal que $0 < r \leq 180$.



El número real del postulado 1.8 es la **medida** de $\angle PAB$, y se denota por m$\angle PAB$. Para hallar la longitud de un segmento de recta se utiliza una regla. Cuando se busca la medida de un ángulo se usa un transportador. Para encontrar la medida de $\angle BAC$, el punto P del transportador se coloca sobre el vértice A del ángulo, de modo que $\overline{PQ}$ esté sobre $\overrightarrow{AC}$. La intersección de $\overrightarrow{AB}$ se encuentra con las marcas de la escala del transportador. El número en esa ubicación es la medida en grados de $\angle BAC$ (Fig. 1.24).

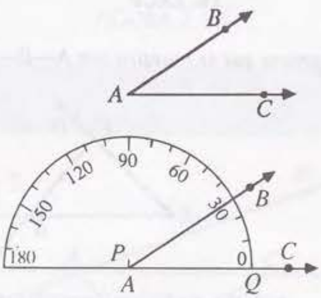


FIGURA 1.24

El empleo del número 180 en el postulado no es necesario. Como alternativa, a menudo se utiliza el número irracional π, que es aproximadamente igual a 3.1416. Cuando se usa 180, la unidad fundamental de medida es el **grado** (°). Cuando se usa π, la unidad fundamental de medida es el **radián** (rad). El uso del radián como medida es importante, ya que la medida en radianes de un ángulo posee una relación geométrica natural importante con los círculos. Ahora bien, dejamos la descripción detallada de las propiedades de los radianes para los textos de trigonometría.

Para efectos de conversión entre medida en grados y medida en radianes se aplica la siguiente fórmula:

$$\pi \text{ radianes} = 180°.$$

Así, para cualquier ángulo en un plano, la medida del ángulo es mayor que 0° (o 0 rad) y menor o igual a 180° (o π rad). En el postulado del transportador, si $P—A—B$, entonces el número real r es 180° (o π rad); por lo tanto, un replanteamiento de la definición de ángulo llano es:

La medida de un **ángulo llano** es 180° (o π rad).

EJEMPLO 1 ¿Cuántos grados representa cada una de las cantidades siguientes?

a. $(\pi/3)$ rad **b.** $(5\pi/6)$ rad

Solución **a.** $(\pi/3)$ rad $= (180/3)° = 60°$

b. $(5\pi/6)$ rad $= 5(180/6)° = 5(30)° = 150°$ ■

Postulado 1.9 **(Postulado de la adición de ángulos)** Si $D \in \text{int}\angle BAC$, entonces $m\angle BAD + m\angle DAC = m\angle BAC$.

EJEMPLO 2 En la figura 1.25, si $m\angle BAD = 36°$ y $m\angle DAC = 75°$, encuentre $m\angle BAC$.

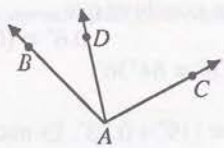


FIGURA 1.25

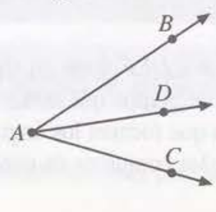
Solución $m\angle BAC = 111°$ ■

Definición

El conjunto de puntos $\overrightarrow{AD}$ se denomina **bisectriz** de $\angle BAC$ si $D \in \text{int}\angle BAC$ y $m\angle BAD = m\angle CAD$.

Observa la figura 1.26, que es un diagrama de esta definición.

FIGURA 1.26



¡PRECAUCIÓN! Podría pensarse que un posible planteamiento informal de la definición ante

Un rayo es la **bisectriz de un ángulo** si divide al ángulo en dos ángulos de la misma me

Un problema con esta definición informal es que el término "divide" no está definido; que no restringe lo suficiente la localización del rayo. Con base en la definición formal se ad que debe tenerse $D \in \text{int}\angle BAC$.

Un grado es igual a 60 minutos (′) y un minuto es igual a 60 segundos (″). Así, dado $\angle ABC$ tenerse $m\angle ABC = 37°45'36''$. Dado $\angle DEF$ podría tenerse $m\angle DEF = 1.2$ rad. Observa que $0° < 37°$ $\leq 180°$ y que $0 \text{ rad} < 1.2 \text{ rad} \leq \pi \text{ rad}$, de modo que es posible obtener ángulos con estas medidas.

EJEMPLO 3 Realiza las operaciones indicadas y simplifica el resultado.

a. $47°29'56'' + 59°36'19''$ **b.** $172°23' - 89°46'50''$

Solución **a.** $56'' + 19'' = 75'' = 1'15''$ (Trasladar 1′)
$29' + 36' + 1' = 66' = 1°6'$ (Trasladar 1°)
$47° + 59° + 1° = 107°$
La respuesta es $107°6'15''$

b. $172°23' = 171°82'60''$ (Tomar 1° y 1′)
$60'' - 50'' = 10''$
$82' - 46' = 36'$
$171° - 89° = 82°$
La respuesta es $82°36'10''$

EJEMPLO 4 Convierte las medidas angulares indicadas en medidas en que aparezcan grados, **minutos** y segu

a. 64.6° **b.** 119.23°

Solución **a.** Se tiene que $64.6° = 64° + 0.6°$. Es necesario convertir 0.6° en minutos. Puesto que 1 gra igual a 60 minutos, se concluye que

$$0.6° = (0.6)\,(60)' = 36'$$

En consecuencia, $64.6° = 64°36'$.

b. Se tiene que $119.23° = 119° + 0.23°$. Es necesario convertir 0.23° en minutos. Ya que 1 gra igual a 60 minutos, se concluye que

$$0.23° = (0.23)\,(60)' = 13.8'$$

Es necesario convertir 0.8′ en segundos. Como 1 minuto es igual a 60 segundos, se conclu

$$0.8' = (0.8)\,(60)'' = 48''.$$

En consecuencia, $119.23° = 119°13'48''$.

Definición
Dos ángulos $\angle ABC$ y $\angle DEF$ son **congruentes** si $m\angle ABC = m\angle DEF$.
Se escribe $\angle ABC \cong \angle DEF$.

¡PRECAUCIÓN! $\angle ABC = \angle DEF$ tiene un significado distinto de $\angle ABC \cong \angle DEF$. El prim significa que los conjuntos de puntos que integran los ángulos son idénticos (iguales); el seg que los conjuntos de puntos que forman los ángulos son **congruentes**. (Es decir, las medidas d ángulos son iguales, aunque los conjuntos de puntos no necesariamente son los mismos.)

¡PRECAUCIÓN! Podría pensarse que un posible planteamiento informal de la definición anterior es:

Un rayo es la **bisectriz de un ángulo** si divide al ángulo en dos ángulos de la misma medida.

Un problema con esta definición informal es que el término "divide" no está definido; otro es que no restringe lo suficiente la localización del rayo. Con base en la definición formal se advierte que debe tenerse $D \in \text{int}\angle BAC$.

Un grado es igual a 60 minutos (′) y un minuto es igual a 60 segundos (″). Así, dado $\angle ABC$ podría tenerse $m\angle ABC = 37°45'36''$. Dado $\angle DEF$ podría tenerse $m\angle DEF = 1.2$ rad. Observa que $0° < 37°45'36'' \leq 180°$ y que $0 \text{ rad} < 1.2 \text{ rad} \leq \pi \text{ rad}$, de modo que es posible obtener ángulos con estas medidas.

EJEMPLO 3 Realiza las operaciones indicadas y simplifica el resultado.

a. $47°29'56'' + 59°36'19''$ **b.** $172°23' - 89°46'50''$

Solución **a.** $56'' + 19'' = 75'' = 1'15''$ (Trasladar 1′)

$29' + 36' + 1' = 66' = 1°6'$ (Trasladar 1°)

$47° + 59° + 1° = 107°$

La respuesta es $107°6'15''$

b. $172°23' = 171°82'60''$ (Tomar 1° y 1′)

$60'' - 50'' = 10''$

$82' - 46' = 36'$

$171° - 89° = 82°$

La respuesta es $82°36'10''$

EJEMPLO 4 Convierte las medidas angulares indicadas en medidas en que aparezcan grados, **minutos** y segundos.

a. $64.6°$ **b.** $119.23°$

Solución **a.** Se tiene que $64.6° = 64° + 0.6°$. Es necesario convertir 0.6° en minutos. Puesto que 1 grado es igual a 60 minutos, se concluye que

$$0.6° = (0.6)(60)' = 36'$$

En consecuencia, $64.6° = 64°36'$.

b. Se tiene que $119.23° = 119° + 0.23°$. Es necesario convertir 0.23° en minutos. Ya que 1 grado es igual a 60 minutos, se concluye que

$$0.23° = (0.23)(60)' = 13.8'$$

Es necesario convertir 0.8′ en segundos. Como 1 minuto es igual a 60 segundos, se concluye que

$$0.8' = (0.8)(60)'' = 48''.$$

En consecuencia, $119.23° = 119°13'48''$.

Definición

Dos ángulos $\angle ABC$ y $\angle DEF$ son **congruentes** si $m\angle ABC = m\angle DEF$.
Se escribe $\angle ABC \cong \angle DEF$.

¡PRECAUCIÓN! $\angle ABC = \angle DEF$ tiene un significado distinto de $\angle ABC \cong \angle DEF$. El primero significa que los conjuntos de puntos que integran los ángulos son idénticos (iguales); el segundo que los conjuntos de puntos que forman los ángulos son **congruentes**. (Es decir, las medidas de los ángulos son iguales, aunque los conjuntos de puntos no necesariamente son los mismos.)

¡PRECAUCIÓN! Podría pensarse que un posible planteamiento informal de la definición anterior es

Un rayo es la **bisectriz de un ángulo** si divide al ángulo en dos ángulos de la misma medida.

Un problema con esta definición informal es que el término "divide" no está definido; otro es que no restringe lo suficiente la localización del rayo. Con base en la definición formal se advierte que debe tenerse $D \in \text{int}\angle BAC$.

Un grado es igual a 60 minutos (′) y un minuto es igual a 60 segundos (″). Así, dado $\angle ABC$ podría tenerse $m\angle ABC = 37°45'36''$. Dado $\angle DEF$ podría tenerse $m\angle DEF = 1.2$ rad. Observa que $0° < 37°45'36'' \leq 180°$ y que $0 \text{ rad} < 1.2 \text{ rad} \leq \pi$ rad, de modo que es posible obtener ángulos con estas medidas.

EJEMPLO 3 Realiza las operaciones indicadas y simplifica el resultado.

a. $47°29'56'' + 59°36'19''$ **b.** $172°23' - 89°46'50''$

Solución **a.** $56'' + 19'' = 75'' = 1'15''$ (Trasladar 1′)

$29' + 36' + 1' = 66' = 1°6'$ (Trasladar 1°)

$47° + 59° + 1° = 107°$

La respuesta es $107°6'15''$

b. $172°23' = 171°82'60''$ (Tomar 1° y 1′)

$60'' - 50'' = 10''$

$82' - 46' = 36'$

$171° - 89° = 82°$

La respuesta es $82°36'10''$

EJEMPLO 4 Convierte las medidas angulares indicadas en medidas en que aparezcan grados, **minutos** y segundos.

a. $64.6°$ **b.** $119.23°$

Solución **a.** Se tiene que $64.6° = 64° + 0.6°$. Es necesario convertir $0.6°$ en minutos. Puesto que 1 grado es igual a 60 minutos, se concluye que

$$0.6° = (0.6)(60)' = 36'$$

En consecuencia, $64.6° = 64°36'$.

b. Se tiene que $119.23° = 119° + 0.23°$. Es necesario convertir $0.23°$ en minutos. Ya que 1 grado es igual a 60 minutos, se concluye que

$$0.23° = (0.23)(60)' = 13.8'$$

Es necesario convertir $0.8'$ en segundos. Como 1 minuto es igual a 60 segundos, se concluye que

$$0.8' = (0.8)(60)'' = 48''.$$

En consecuencia, $119.23° = 119°13'48''$.

Definición

Dos ángulos $\angle ABC$ y $\angle DEF$ son **congruentes** si $m\angle ABC = m\angle DEF$.
Se escribe $\angle ABC \cong \angle DEF$.

¡PRECAUCIÓN! $\angle ABC = \angle DEF$ tiene un significado distinto de $\angle ABC \cong \angle DEF$. El primero significa que los conjuntos de puntos que integran los ángulos son idénticos (iguales); el segundo, que los conjuntos de puntos que forman los ángulos son **congruentes**. (Es decir, las medidas de los ángulos son iguales, aunque los conjuntos de puntos no necesariamente son los mismos.)

EJERCICIOS 1.4

En los ejercicios 1 a 4, si π radianes equivalen a 180°, ¿cuántos grados representa cada una de las siguientes cantidades?

1. $(\pi/2)$ rad
2. $(3\pi/4)$ rad
3. $(\pi/8)$ rad
4. $(5\pi/12)$ rad

En los ejercicios 5 a 8, efectúa las operaciones indicadas y simplifica el resultado.

5. $28°11' + 52°40'$
6. $70°18'\,32'' + 25°25'\,40''$
7. $108°45'\,22'' - 46°32'10''$
8. $165°10'12'' - 74°19'20''$

En los ejercicios 9 a 12, convierte las medidas indicadas en ángulos en medidas donde aparezcan grados, minutos y segundos.

9. 83.5°
10. 142.7°
11. 126.46°
12. 79.91°

En los ejercicios 13 a 18, utiliza un transportador para trazar cada uno de los ángulos cuyas medidas se proporcionan.

13. 80°
14. 25°
15. 90°
16. 117°
17. $(\pi/4°)$ rad
18. $(2\pi/9)$ rad
19. Analiza la diferencia entre $\angle ABC = \angle DEF$ y $\angle ABC \cong \angle DEF$.

En los ejercicios 20 a 25, proporciona medidas en ángulos aproximadas para cada hecho descrito.

20. Un poste telefónico que cae.
21. La mayor flexión posible del brazo a la altura del codo.
22. El giro durante 1 hora de la manecilla horario de un reloj.
23. El giro durante 1 minuto del minutero de un reloj.
24. El máximo giro posible de la cabeza de una persona.
25. El máximo giro posible de la muñeca de una persona.

En los ejercicios 26 a 29, supón que estás utilizando un mapa en que el norte se encuentra hacia la parte superior de la hoja.

26. Traza un ángulo que describa el vuelo de un avión a 40° al este del norte.
27. Traza un ángulo que describa el desplazamiento de un barco que navega a 35° al oeste del sur.
28. Traza un ángulo que describa una vaca que se desplaza a 79° al este del sur.
29. Traza un ángulo que describa una bola de boliche que rueda a 21° al oeste del norte.

1.5 Relaciones entre un ángulo y una recta

En esta sección se analizarán algunas relaciones para ángulos y para rectas.

Definición
Dos ángulos son **complementarios** si la suma de sus medidas es 90°.
Dos ángulos son **suplementarios** si la suma de su medidas es 180°.

Si dos ángulos son complementarios, se dice que uno es el **complemento** del otro. Si dos ángulos son suplementarios, se dice que uno es el **suplemento** del otro.

EJEMPLO 1 Encuentra el complemento de un ángulo de 37°.

Solución $90° - 37° = 53°$; así, $37° + 53° = 90°$.
La respuesta es 53°.

EJEMPLO 2 Encuentra el suplemento de un ángulo de 152°17′.

Solución $180° - 152°17' = 27°43'$; así, $152°17' + 27°43' = 180°$.
La respuesta es 27°43′.

EJEMPLO 3 Halla la medida del ángulo cuyo suplemento es cuatro veces su complemento.

Solución Sea x la medida del ángulo.
Entonces $90° - x$ es la medida de su complemento, y
$180° - x$ es la medida de su suplemento.

Se sabe que
suplemento = cuatro veces el complemento.

Así,
$$180° - x = 4\,(90° - x).$$
Se concluye que
$$\begin{aligned} 180° - x &= 360° - 4x \\ 3x &= 180° \\ x &= 60°. \end{aligned}$$

Definición
Un ángulo es **agudo** si mide menos de 90°. Un ángulo es **obtuso** si su medida es mayor que 90° y menor que 180°. Un ángulo es **recto** si mide 90°.

En la figura 1.27, $\angle A$ es agudo, $\angle B$ es obtuso y $\angle C$ es recto.

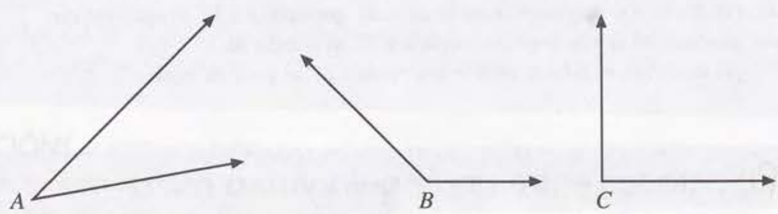


FIGURA 1.27

EJEMPLO 4 Dadas $m\angle 1 = (\pi/5)$ rad, $m\angle 2 = 117°13'$, $m\angle 3 = 90°$ y $m\angle 4 = \pi$ rad, clasifica cada ángulo.

Solución $\angle 1$ es un ángulo agudo.
$\angle 2$ es un ángulo obtuso.
$\angle 3$ es un ángulo recto.
$\angle 4$ es un ángulo llano. ■

Dos ángulos, $\angle EFG$ y $\angle HFG$, son **adyacentes** si $G \in \text{int}\angle EFH$. En la figura 1.28, podrás ver que $\angle SRT$ y $\angle URT$ son adyacentes, pero $\angle SRU$ y $\angle TRU$ no lo son. ¿Por qué?

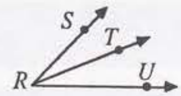


FIGURA 1.28

La relación anterior entre ángulos se usa para definir las siguientes relaciones entre rectas.

Definición

Dos rectas $\overleftrightarrow{AB}$ y $\overleftrightarrow{CD}$ son **perpendiculares** si se cortan de modo que formen ángulos adyacentes congruentes. Se escribe $\overleftrightarrow{AB} \perp \overleftrightarrow{CD}$.

Los ángulos adyacentes congruentes en la definición de *perpendicular* deben ser rectos, ya que la suma de las medidas de los dos ángulos congruentes es 180°. Dos segmentos de recta son perpendiculares si se cortan y están contenidos en dos rectas perpendiculares. En la figura 1.29, $\overleftrightarrow{AB} \perp \overleftrightarrow{CD}$ y $\overline{EF} \perp \overline{GH}$.

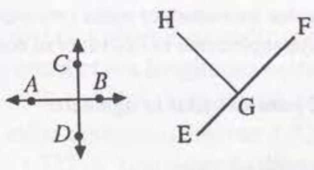
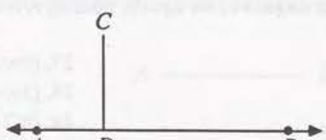


FIGURA 1.29

Definición

Considera $\overleftrightarrow{AB}$ y un punto C que no pertenece a $\overleftrightarrow{AB}$. Si D es un punto de $\overleftrightarrow{AB}$ tal que $\overleftrightarrow{AB} \perp \overleftrightarrow{CD}$, entonces CD es la **distancia** del punto C a la recta $\overleftrightarrow{AB}$.



Dos rectas j y k son **equidistantes** si la distancia de puntos arbitrarios de j a la recta k siempre es idéntica. Así pues, en la figura 1.30, si j y k son equidistantes, entonces $AB = CD = EF$. El símbolo □ en la figura significa *perpendicular*. Dos segmentos de recta son equidistantes si las rectas que los contienen son equidistantes. Por lo tanto, en la figura 1.30 $\overline{AE}$ y $\overline{BF}$ son equidistantes.

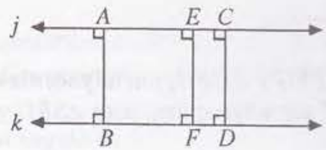


FIGURA 1.30

EJERCICIOS 1.5

Encuentra el complemento de cada uno de los ángulos de los ejercicios 1 a 8.

1. 30°
2. 45°
3. 66°22′
4. 89°10′
5. 3′59″
6. (π/6) rad
7. (π/4) rad
8. (5π/18) rad

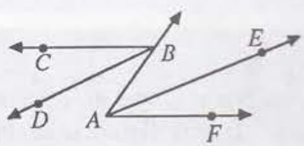
Encuentra el suplemento de cada uno de los ángulos de los ejercicios 9 a 16.

9. 150°
10. 90°
11. 35°
12. 162°45′
13. 75°35′18″
14. (5π/6) rad
15. (π/2) rad
16. (11π/18) rad
17. ¿Qué ángulo mide lo mismo que su complemento y su suplemento?
18. ¿Cuáles son las medidas de los ángulos formados por rectas perpendiculares?
19. Encuentra la medida del ángulo cuyo suplemento es tres veces su complemento.

Usa la figura de los ejercicios 20 a 22 para contestar lo siguiente:

20. Enumera todas la parejas de ángulos adyacentes.
21. ¿Por qué $\angle BAF$ y $\angle EAF$ *no* son adyacentes?
22. ¿Por qué $\angle DBA$ y $\angle BAE$ *no* son adyacentes?

FIGURA PARA LOS EJERCICIOS 20 A 22



En los ejercicios 23 a 34, clasifica cada ángulo como agudo, obtuso, recto o llano.

23. 120°
24. 18°
25. (32°15′ + 57°45′)
26. (73°18′4″ + 16°41′10″)
27. (9π/20) rad
28. (3π/4) rad
29. (π/2) rad
30. (5π/12) rad + (7π/12) rad
31. El complemento del ángulo cuya medida es 36°.

32. El suplemento de cualquier ángulo obtuso.
33. El suplemento de un ángulo llano.
34. El complemento del suplemento de 165°.

En los ejercicios 35 y 36 proporciona cinco ejemplos de deportes en que los siguientes conceptos sean importantes con respecto al terreno de juego (por ejemplo, las líneas de gol en futbol americano son segmentos de recta equidistantes).

35. Segmentos de recta equidistantes.
36. Segmentos de recta perpendiculares.

1.6 Construcciones elementales

Hasta ahora, la atención se ha centrado en la determinación de las longitudes de segmentos de recta y las medidas de ángulos. Para hacer esto se necesitaron una regla graduada y un transportador. En esta sección se analizarán construcciones geométricas. En una **construcción** puede usarse *sólo* una **regla no graduada** y un compás. Un **compás** es un instrumento que sirve para trazar círculos.

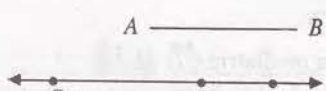
¿Por qué la restricción de trabajar solamente con una regla no graduada y un compás en una construcción? La respuesta es parcialmente histórica. La restricción original fue establecida por los griegos, quienes estaban interesados en mantener simple y hermosa la geometría; no deseaban asignar unidades arbitrarias de longitud y distancia creadas por el ser humano a objetos existentes en la naturaleza. Años después, los matemáticos se intrigaron por los problemas de determinar cuáles objetos geométricos podían construirse y cuáles no. El estudio de las construcciones se volvió una parte importante del estudio de la geometría.

En la actualidad, mucho de la teoría de las construcciones ha sido determinado por los matemáticos; sin embargo, mediante la manipulación artificiosa de la regla no graduada y el compás, muchos estudiantes disfrutan intentando demostrar que los matemáticos están equivocados.

Como una aplicación práctica, diversos objetos geométricos pueden duplicarse o dividirse en porciones iguales sin necesidad de conocer sus longitudes unitarias, medidas o "tamaños". Si se desea dividir una barra de metal en dos piezas de la misma longitud, no necesariamente es de mucha ayuda saber que la barra mide aproximadamente 1.72356 pies de longitud. Cierto, es posible dividir entre dos el número 1.72356, aunque no hay razón alguna para preocuparse por la longitud real de la barra. Simplemente se desea tener la certeza de que la barra esté dividida en dos piezas iguales.

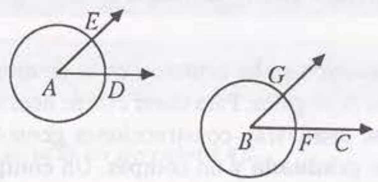
En esta sección se analizarán seis construcciones básicas. Luego se presentarán más construcciones. En el apéndice D se muestra una lista de las construcciones desarrolladas en este texto.

CONSTRUCCIÓN 1.1
Construye un segmento de recta que mida lo mismo que un segmento de recta dado.



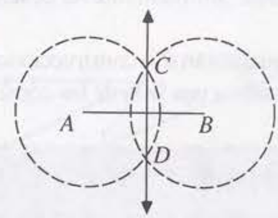
DADO: $\overline{AB}$
CONSTRUYE: $\overline{CD}$ tal que $CD = AB$
Paso 1. Traza una recta $\overleftrightarrow{CE}$.
Paso 2. Coloca las puntas del compás de modo que una esté en A y la otra esté en B.
Paso 3. Sin cambiar la distancia entre las puntas del compás (la abertura de éste), coloca una punta del compás en C y la otra en $\overrightarrow{CE}$. Identifica este otro punto como D. Así, $\overline{CD}$ es el segmento buscado.

CONSTRUCCIÓN 1.2
Construye un ángulo de la misma medida que un ángulo dado.



DADO: $\angle A$
CONSTRUYE: $\angle B$ tal que $m\angle B = m\angle A$.
Paso 1. Traza un rayo $\overrightarrow{BC}$.
Paso 2. Elegir cualquier abertura conveniente del compás y traza un círculo A. Observa que $\angle A \cap$ círculo con centro en A es un conjunto de dos puntos. Identifica estos puntos como D y E.
Paso 3. Sin cambiar la abertura del compás, traza un círculo con centro en B. Sea $\overrightarrow{BC} \cap$ círculo $B = \{F\}$.
Paso 4. Coloca las puntas del compás de modo que una esté en D y la otra esté en E.
Paso 5. Sin cambiar la abertura del compás, pon una punta de éste en F y la otra en el círculo B. Identifica este otro punto como G. Traza $\overrightarrow{BG}$. Así, $\angle B$ es el ángulo requerido.

CONSTRUCCIÓN 1.3
Construye la mediatriz de un segmento de recta dado.



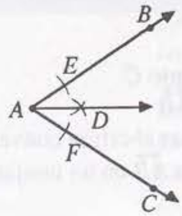
DADO: $\overline{AB}$
CONSTRUYE: La mediatriz $\overleftrightarrow{CD}$ de $\overline{AB}$
Paso 1. Se elige cualquier abertura conveniente del compás, de modo que la distancia entre las puntas de éste sea mayor que $AB/2$. Traza los círculos A y B con esta abertura del compás

Paso 2. Círculo $A \cap$ círculo B es un conjunto de dos puntos. Identifica estos puntos como C y D. Traza $\overleftrightarrow{CD}$. Así, $\overleftrightarrow{CD}$ es la recta buscada.

Para que las construcciones sean algo más claras, algunas veces se evita trazar círculos completos y sólo se dibujan las partes necesarias de los círculos. Así se procederá en las siguientes construcciones.

CONSTRUCCIÓN 1.4

Construye la bisectriz de un ángulo dado.



DADO: $\angle BAC$

CONSTRUYE: La bisectriz $\overrightarrow{AD}$ de $\angle BAC$

Paso 1. Se elige cualquier abertura conveniente del compás y se traza el círculo A. Observa que $\angle A \cap$ círculo A es un conjunto de dos puntos. Identifica estos puntos como E y F.

Paso 2. Se elige cualquier abertura conveniente del compás de modo que la distancia entre las puntas de éste sea mayor que $EF/2$. Traza los círculos E y F con esta abertura del compás.

Paso 3. Círculo $E \cap$ círculo F es un conjunto de dos puntos. Identifica el punto D en int$\angle BAC$. Así, $\overrightarrow{AD}$ es el rayo requerido.

Considera por un momento si es posible una construcción en que la medida de un ángulo se divida en tres porciones iguales, en vez de hacerlo en dos porciones iguales.

Desafortunadamente, se ha demostrado que la trisección de un ángulo arbitrario por construcción es imposible. Los matemáticos intentaron resolver este problema durante siglos antes de llegar a esta decepcionante conclusión. Por supuesto, es posible trisecar algunos ángulos especiales (como el ángulo llano) pero las técnicas para hacerlo no pueden generalizarse.

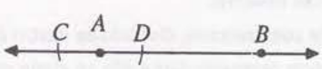
CONSTRUCCIÓN 1.5

Construye la perpendicular a una recta desde un punto de la recta.

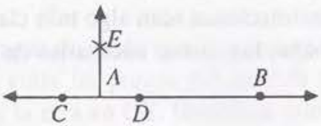
DADO: $\overleftrightarrow{AB}$

CONSTRUYE: $\overleftrightarrow{AE} \perp \overleftrightarrow{AB}$

Paso 1. Se elige cualquier abertura conveniente del compás y se traza el círculo A. El círculo $A \cap \overleftrightarrow{AB}$ es un conjunto de dos puntos. Identifica estos puntos como C y D.



Paso 2. Se construye la bisectriz perpendicular $\overleftrightarrow{AE}$ de $\overline{CD}$ (consulta la construcción 1.3). Así $\overleftrightarrow{AE}$ es la recta requerida.



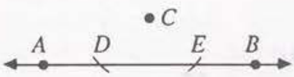
CONSTRUCCIÓN 1.6

Construye la perpendicular a una recta desde un punto que no está en la recta.

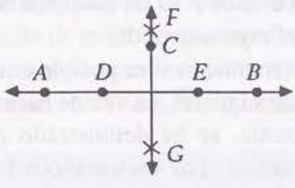
DADO: $\overleftrightarrow{AB}$, punto C

CONSTRUYE: $\overleftrightarrow{CG} \perp \overleftrightarrow{AB}$

Paso 1. Se elige cualquier abertura conveniente del compás y se traza el círculo C de modo que el círculo C corte a $\overleftrightarrow{AB}$ en un conjunto de dos puntos. Identifica estos puntos como D y E.



Paso 2. Construye la bisectriz perpendicular $\overleftrightarrow{FG}$ de $\overline{DE}$. Punto $C \in \overleftrightarrow{FG}$, de modo que $\overleftrightarrow{FG} = \overleftrightarrow{CG}$. Así, $\overleftrightarrow{CG}$ es la recta buscada.



EJERCICIOS 1.6

1. Traza un segmento de recta $\overline{AB}$ con $AB = 2$ cm y una recta k. Construye $\overline{CD}$ en k de modo que $\overline{CD} \cong \overline{AB}$.

2. Dado un segmento de recta $\overline{AB}$ de 1.5 cm de longitud, construye $\overline{EF}$ de modo que $EF = 3$ cm.

3. Traza un ángulo agudo y construye un ángulo de la misma medida.

4. Traza un ángulo obtuso y construye un ángulo congruente.

5. Usa un transportador para trazar un ángulo de 25°. Construye un ángulo de 50° y otro de 75°.

6. Traza un segmento de recta y construye una perpendicular a éste.

7. Traza un segmento de recta de 3 cm de longitud. Por construcción, divídelo en cuatro segmentos iguales.

8. Traza un ángulo agudo y construye su bisectriz.

9. Traza un ángulo obtuso y construye su bisectriz.

10. Traza un ángulo obtuso de 130°. Por construcción, divídelo en cuatro ángulos de la misma medida.

11. Traza una recta k y construye una recta perpendicular a ella en algún punto de la recta.

12. Traza un segmento de recta de 2.5 cm de longitud. Construye la bisectriz perpendicular del segmento.

13. Traza una recta k y un punto P que no esté en k. Construye la perpendicular de P a k.

14. Traza un ángulo llano PQR. En Q construye un ángulo recto. Luego construye un ángulo que mida $\pi/4$ y un ángulo que mida $\pi/8$.

15. Traza una recta k. En cualquier punto A de k construye una recta $m \perp k$. Luego, en el punto B de m, $B \neq A$, construye una recta $n \perp m$. (Las rectas k y n se denominan paralelas).

16. En la biblioteca busca información relacionada con la trisección de un ángulo.

TÉRMINOS CLAVE

EJERCICIOS DE REPASO

Escribe en la línea en blanco la expresión* siempre, algunas veces *o* nunca*, según corresponda.

1. El conjunto vacío __________ es un subconjunto de cualquier conjunto S.
2. El cero __________ es un elemento del conjunto vacío.
3. Si A y B son conjuntos, entonces $A \cap B$ __________ es el conjunto vacío.
4. Si A y B son conjuntos, $x \in B$ y $x \notin A$, entonces $A \cup B$ __________ es el conjunto A.
5. Tres puntos distintos en el espacio __________ están en un plano.
6. El valor absoluto de un número real __________ es positivo.
7. Si A—B—C y A—B—D, entonces A—C—D __________ es verdadera.
8. Si $\overline{AB} \cong \overline{PQ}$, entonces $\overline{AB} = \overline{PQ}$ __________ es verdadera.
9. Un ángulo externo de un triángulo __________ es obtuso.
10. Los ángulos complementarios __________ son ángulos adyacentes.

Falso-verdadero: Si la proposición es verdadera, escribe una V al margen. Si es falsa, sustituye la palabra subrayada a fin de obtener una proposición verdadera.

11. El conjunto de los cuadrados de los enteros pares es <u>finito</u>.
12. Si $A \cap B = \emptyset$ y $B \neq \emptyset$, entonces $A \cup B$ contiene <u>por lo menos</u> un elemento que no está en A.
13. Si $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ y $B = \{2, 4, 6, 8\}$, entonces $\{2, 4\}$ es la <u>unión</u> de A y B.
14. <u>Dos</u> puntos distintos cualesquiera en el espacio tienen exactamente una recta que las contiene.
15. El valor absoluto de $x - y$ es <u>$y - x$</u> si $y > x$.
16. Si A—B—C y C—D—E, entonces A—B—D.
17. El punto <u>A</u> es el punto extremo de $\overrightarrow{BA}$.
18. Si P y Q son puntos en el mismo lado de la recta k y P y R están en lados opuestos de k, entonces Q y R están <u>en el mismo lado</u> de k.
19. El <u>complemento</u> de un ángulo obtuso es un ángulo agudo.
20. Si $\angle ACB$ es un ángulo llano y $\overleftrightarrow{CD}$ bisecta $\angle ACB$, entonces $\overleftrightarrow{CD}$ <u>es</u> perpendicular a $\overleftrightarrow{AB}$.

En los ejercicios 21 a 27, escribe al lado si cada uno de los conjuntos es finito, infinito o vacío.

21. Los puntos C tales que A—C—B.
22. Los valores de $|x|$ si $x \in \{-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3\}$.
23. Los lados de un triángulo dado.
24. Los ángulos externos de un triángulo.
25. Los números reales x tales que $|x| < 0$.
26. Los puntos $P \in \operatorname{int}\angle ABC$.
27. Los ángulos obtusos DEF tales que $m\angle DEF = 32°$.

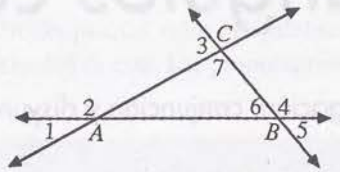
***En los ejercicios 28 a 35, sean* A = {1, 2, 3, 4, 5}, B = {1, 4, 9, 16, 25}, C = {a, b, c, d, e} *y* D = {4}.**

28. ¿Qué conjuntos están en correspondencia uno a uno?
29. ¿De cuál o cuáles conjuntos D es un subconjunto?
30. Encuentra $A \cup B$.
31. Encuentra $C \cup D$.
32. Encuentra $A \cap D$.
33. Encuentra $D \cap \emptyset$.
34. Encuentra $\emptyset \cup C$.
35. Encuentra $\emptyset \cup (A \cap B)$.

En los ejercicios 36 a 41 proporciona los valores absolutos.

36. -2
37. $-(-3)$
38. x, si $x < 0$
39. x^2, si $x < 0$
40. 0
41. $a - b$, si $b > a$

FIGURA PARA LOS EJERCICIOS 42 A 46



42. Haz una lista de todos los ángulos numerados que sean ángulos externos de $\triangle ABC$.
43. Enumera las parejas de ángulos internos lejanos para cada ángulo externo enlistado en el ejercicio 42.
44. Enumera de todos los ángulos numerados que sean ángulos adyacentes.
45. ¿Qué pares de ángulos adyacentes del ejercicio 44 son suplementarios?
46. Si $\angle 3$ es agudo, entonces ¿$\angle 7$ es agudo, recto u obtuso? y ¿Por qué?

En caso de ser posible, encuentra el complemento de cada uno de los ángulos de los ejercicios 47 a 50.

47. $80°$
48. $43°28'$
49. $(2\pi/3)$ rad
50. $50''$

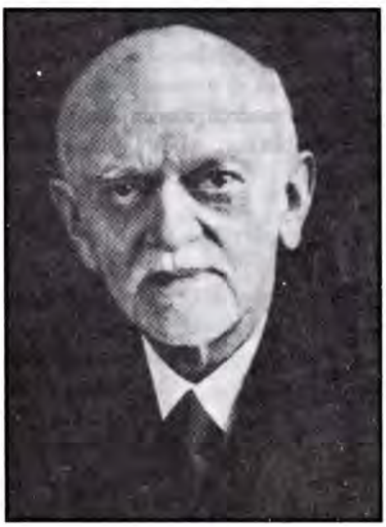
51 a 54. ***Encuentra el suplemento de cada uno de los ángulos de los ejercicios 47 a 50.***

Construcciones:

55. Traza un segmento de recta $\overline{AB}$ con $AB = 1.5$ cm y una recta k. Construye $\overline{CD}$ en k de modo que $CD \cong AB$. Construye CE en k de manera que $CE = AB/2$ y $\overline{CF}$ de suerte que $CF = 2AB$.
56. Traza una recta k. Construye una perpendicular a k en el punto P que está en k. Luego construye un ángulo de 45° cuyo vértice sea P.
57. Traza una recta k y un punto Q que no esté en k. Construye la perpendicular de Q a k.
58. Traza un triángulo suficientemente grande y construye las bisectrices de sus tres ángulos. (Deben cortarse en un solo punto.)
59. Traza un triángulo suficientemente grande y construye las mediatrices de sus tres lados. (Deben cortarse en un solo punto.)

Demostraciones y triángulos congruentes

2



Stock Montage, Inc.

DAVID HILBERT (1862-1943)

NOTA HISTÓRICA *Euclides, quien vivió alrededor del 300 a.C., aumentó considerablemente la comprensión de las matemáticas al reunir y organizar todos los hechos geométricos conocidos en esa época. Publicó libros denominados [Los]* Elementos. *Muchas de las ideas presentadas en estos libros ya eran conocidas mucho tiempo antes y el maestro de Euclides, Tales, pudo ser el primero en desarrollar la geometría demostrativa. Algo de la lógica seguida en el estudio de la geometría fue modificada de manera significativa siglos después por matemáticos como David Hilbert (1862-1943).*

Cuando se analizó un sistema lógico se describieron términos indefinidos, definiciones y postulados a medida que se aplicaban a la geometría plana. En este capítulo se inicia el análisis de los teoremas, que son proposiciones demostrables en términos de los elementos de un sistema lógico.

2.1 Negación, conjunción y disyunción (opcional)

Aquí se estudiará la relación precisa entre las palabras *no, y* y *o* que aparecen en una proposición y la veracidad o falsedad de ésta. Las proposiciones simples se denotan con una letra, como "p", "q" o "r".

Definición

Si "p" es una proposición, entonces la proposición "no p" es la **negación** de "p".

EJEMPLO 1 Forma la negación de las siguientes proposiciones:

a. La Luna está saliendo.
b. $\angle ABC$ es un ángulo interno lejano.
c. El punto C está entre los puntos A y B.
d. $m\angle 3 = 25°$

Solución **a.** La Luna no está saliendo.
b. $\angle ABC$ no es un ángulo interno lejano.
c. El punto C no está entre los puntos A y B.
d. $m\angle 3 \neq 25°$. ■

Si se sabe si una proposición es verdadera o falsa, entonces existe una regla precisa para determinar si la negación de la proposición es verdadera o falsa. Una regla de este tipo puede demostrarse mediante una **tabla de verdad** como la siguiente.

p	No p
V	F
F	V

La tabla de verdad indica que si la proposición "p" es verdadera, entonces la proposición "no p" es falsa, y si la proposición "p" es falsa, entonces la proposición "no p" es verdadera.

EJEMPLO 2 Indica si las siguientes proposiciones y sus negaciones son verdaderas o falsas.

a. $9 = 2 + 7$.
b. La Luna está en el Atlántico.
c. Existe una correspondencia uno a uno entre el conjunto de todos los números reales y el conjunto de todos los puntos en una recta.

Solución **a.** La proposición "$9 = 2 + 7$" es verdadera; así, la proposición "$9 \neq 2 + 7$" es falsa.
b. La proposición "la Luna está en el Atlántico" es falsa; así pues, la proposición "la Luna no es en el Atlántico" es verdadera.
c. La proposición "existe una correspondencia uno a uno entre el conjunto de todos los núm reales y el conjunto de todos los puntos en una recta" es verdadera por el postulado de la regl por lo tanto, la proposición "no existe una correspondencia uno a uno entre el conjunto de todos los números reales y el conjunto de todos los puntos en una recta" es falsa. ∎

Definición

Si "p" y "q" son proposiciones, la proposición compuesta "p y q" es la **conjunción** de "p" y "q".

EJEMPLO 3 Forma la conjunción de los siguientes pares de proposiciones.

a. Tengo hambre. La comida está lista.
b. Los puntos A y B están en una recta. Los puntos A y C están en una recta.
c. m $\angle ABC = 30°$. m$\angle CAB \neq 45°$.

Solución **a.** Tengo hambre y la comida está lista.
b. Los puntos A y B están sobre una recta y los puntos A y C están sobre una recta.
c. m$\angle ABC = 30°$ y m$\angle CAB \neq 45°$. ∎

Si se sabe si dos proposiciones son verdaderas o falsas, entonces se tiene una regla prec para establecer si la conjunción de las dos proposiciones es verdadera o falsa. La siguiente ta de verdad indica la relación de dos proposiciones y su conjunción.

p	q	p y q
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	F

Así, si la proposición "p" es verdadera y la proposición "q" es verdadera, entonces la proposi "p y q" es verdadera. En todos los otros casos posibles, la proposición "p y q" es falsa.

EJEMPLO 4 Indica si las siguientes proposiciones y sus conjunciones son verdaderas o falsas.

a. Dos ángulos son complementarios si la suma de sus medidas es 90°. Dos ángulos son suplementarios si la suma de sus medidas es 180°.
b. Un ángulo es agudo si mide más de 90°. Un ángulo es recto si mide 90°.
c. $6 \neq 4 + 3$. El radio de todos los círculos mide 5 pies.
d. Toda recta contiene, cuando mucho, un punto. Todo plano contiene a todos los puntos del espa

Solución **a.** Ambas proposiciones son verdaderas; así, su conjunción es verdadera.
b. La primera proposición es falsa y la segunda es verdadera. La conjunción es falsa.
c. La primera proposición es verdadera y la segunda es falsa, su conjunción es falsa.
d. Ambas proposiciones son falsas; así, su conjunción es falsa. ∎

Definición

Si "p" y "q" son proposiciones, la proposición compuesta "p o q" es la **disyunción** de "p" y "q".

EJEMPLO 5 Forma la disyunción de las parejas de proposiciones del ejemplo 3.

Solución **a.** Tengo hambre o la comida está lista.
b. Los puntos *A* y *B* están sobre una recta o los puntos *A* y *C* están sobre una recta.
c. $m\angle ABC = 30°$ o $m\angle CAB \neq 45°$. ■

La siguiente tabla de verdad indica la relación entre dos proposiciones y su disyunción.

p	q	p o q
V	V	V
V	F	V
F	V	V
F	F	F

Esto es, la disyunción de dos proposiciones es verdadera si una o ambas proposiciones son verdaderas. El único caso en que la disyunción es falsa es cuando ambas proposiciones son falsas.

EJEMPLO 6 Indica si las proposiciones del ejemplo 4 y sus disyunciones son verdaderas o falsas.

Solución **a.** Ambas proposiciones son verdaderas; por lo tanto, su disyunción es verdadera.
b. La primera proposición es falsa y la segunda es verdadera; su disyunción es verdadera.
c. La primera proposición es verdadera y la segunda es falsa; su disyunción es verdadera.
d. Ambas proposiciones son falsas; así, la disyunción es falsa. ■

Es posible producir oraciones más complicadas combinando las palabras *no*, *y* y *o* en una proposición. Las tablas de verdad son muy útiles para determinar la veracidad o falsedad de proposiciones complejas.

EJEMPLO 7 Elabora una tabla de verdad para la proposición "no p o q".

Solución

p	q	No p	No p o q
V	V	F	V
V	F	F	F
F	V	V	V
F	F	V	V

■

En el ejemplo 7, la palabra "no" antes de p sólo se refiere a p. Si se desea que el "no" comprenda a más de una proposición, es necesario utilizar un símbolo de agrupación; por ejemplo, podría considerarse la proposición "no (p o q)", cuyo significado y tabla de verdad son distintos a los de "no p o q".

EJEMPLO 8 Elabora una tabla de verdad para la proposición "p o (r y no q)".

Solución

p	q	r	No q	(r y no q)	p o (r y no q)
V	V	V	F	F	V
V	V	F	F	F	V
V	F	V	V	V	V
V	F	F	V	F	V
F	V	V	F	F	F
F	V	F	F	F	F
F	F	V	V	V	V
F	F	F	V	F	F

■

Con base en la solución del ejemplo 8 se observa que en cinco de ocho situaciones posibles la proposición "p o (r y no q)" es verdadera, y que en tres situaciones es falsa.

EJERCICIOS 2.1

Forma la negación de cada una de las proposiciones de los ejercicios 1 a 10.

1. Ganaré suficiente dinero.
2. Compraré un automóvil.
3. No apagarás la televisión.
4. No podrás estudiar mejor.
5. Dos ángulos no son complementarios.
6. Dos ángulos son adyacentes.
7. $\overline{AB} \cong \overline{CD}$.
8. $m\angle A = m\angle B$.
9. Un punto está en el interior de $\triangle PQR$.
10. Un punto está en int$\angle Q$.
11 a 15. Si las proposiciones en los ejercicios 1 a 5 son verdaderas, ¿sus negaciones son verdaderas o falsas?
16 a 20. Si las proposiciones en los ejercicios 6 a 10 son falsas, ¿sus negaciones son verdaderas o falsas?

En los ejercicios 21 a 25, forma la conjunción de cada par de proposiciones.

21. Ganaré suficiente dinero. Compraré un automóvil.
22. No apagarás la televisión. No podrás estudiar mejor.
23. Dos ángulos no son complementarios. Dos ángulos son adyacentes.
24. $\overline{AB} \cong \overline{CD}$. $m\angle A = m\angle B$.
25. Un punto está en el interior de $\triangle PQR$. Un punto está en int$\angle Q$.
26 a 30. Forma la disyunción de cada par de proposiciones en los ejercicios 21 a 25.

Indica si las conjunciones de los pares de proposiciones en los ejercicios 31 a 35 son verdaderas o falsas.

31. Un sistema lógico consta de términos indefinidos, definiciones, suposiciones y teoremas. Un conjunto es finito si el número de elementos del conjunto es igual a algún entero no negativo.

32. Un conjunto es vacío si su único elemento es el cero. El conjunto A es un subconjunto del conjunto B si todo elemento de A también es un elemento de B.
33. Todo plano contiene por lo menos tres puntos distintos, no todos colineales. Todo plano contiene todas las rectas posibles que hay en el espacio.
34. $|x| = x$ para todos los números reales x. Si x y y son las coordenadas de los puntos P y Q en un recta, entonces la distancia de P a Q es $|x + y|$.
35. Si B—A—C, entonces $\angle BAC$ es un ángulo llano. Un semiplano es la unión de todos los puntos en un lado de una recta.
36 a 40. Indica si las disyunciones de los pares de proposiciones en los ejercicios 31 a 35 son verdaderas o falsas.
41. Proporciona un ejemplo de una proposición negativa que puedas escuchar en un evento deportivo. Escribe la negación de la proposición.
42. Ejemplifica dos proposiciones que puedas escuchar en un supermercado. Escribe la conjunción y la disyunción de las proposiciones.
43. Da un ejemplo de dos proposiciones que puedas oir durante el almuerzo. Escribe la conjunción y la disyunción de las proposiciones.
44. Proporciona un ejemplo de dos proposiciones que puedas escuchar en una cita. Escribe la conjunción y la disyunción de las proposiciones.
45. Elabora la tabla de verdad de la proposición "p o no p".
46. Elabora la tabla de verdad de la proposición "p y no p".
47. Elabora la tabla de verdad de la proposición "p y (r o no q)".
48. Elabora la tabla de verdad de la proposición "p o (r o no q)"
49. Elabora la tabla de verdad de la proposición "no p y (p o r)".
50. Elabora la tabla de verdad de la proposición "no p o (p y r)".

En los ejercicios 51 y 52 se presenta el planteamiento de las leyes de De Morgan. Usa tablas de verdad para demostrar que las leyes son correctas.

51. No (p o q) = no p y no q.
52. No (p y q) = no p o no q.

Si el conjunto S es un subconjunto de U, entonces el conjunto S' de elementos pertenecen a en U pero no a S se denomina complemento de S. Si S = {2, 4, 8}, T = {2, 10} y U = {2, 4, 6, 8, 10}, demuestra que las leyes de De Morgan son verdaderas en los ejercicios 53 y 54.

53. $(S \cup T)' = S' \cap T$
54. $(S \cap T)' = S' \cup T$

Si S = {enteros positivos}, T = {enteros negativos} y U = {todos los enteros}, demuestra que las leyes de De Morgan son verdaderas en los ejercicios 55 y 56.

55. Consulta el ejercicio 53.
56. Consulta el ejercicio 54.

2.2 Hipótesis y conclusión

A menudo, los teoremas se plantean en la forma "si-entonces". En general, dadas dos proposiciones "p" y "q", una proposición está en la forma "si-entonces" si se lee "si p, entonces q". La proposición "p" es la **hipótesis** y la proposición "q" es la **conclusión**. Cada proposición es una oración completa independiente de cualquier otra oración. La palabra *si* funciona como un símbolo introductorio que indica que sigue la hipótesis, y la palabra *entonces* indica que sigue la conclusión.

EJEMPLO 1 Ejemplifica una proposición en la forma "si-entonces". Da la hipótesis y la conclusión de la proposición.

Solución La proposición "Si está nublado, entonces lloverá" se encuentra en forma "si-entonces". La hipótesis es "está nublado" y la conclusión es "lloverá". ■

Los libros de ciencias contienen muchas proposiciones con hipótesis y conclusiones. La proposición del ejemplo siguiente podría proceder de un libro de genética.

EJEMPLO 2 Encuentra la hipótesis y la conclusión de la proposición "Si es cuestión de suerte qué genotipo se asocia con otro genotipo, entonces es cuestión de suerte qué alelo se combina con otro alelo".

Solución La hipótesis es "Es cuestión de suerte qué genotipo se asocia con otro genotipo" y la conclusión es "Es cuestión de suerte qué alelo se combina con otro alelo". ■

En lenguaje coloquial suele omitirse el término *entonces*.

EJEMPLO 3 Encuentra la hipótesis y la conclusión de la proposición "Si como demasiados dulces, me enfermaré".

Solución Después de la coma se ha omitido la palabra *entonces*; no obstante, la oración debe tratarse como si apareciera el término *entonces*. Por lo tanto, la hipótesis es "Como demasiados dulces" y la conclusión es "Me enfermaré". ■

En algunas ocasiones es posible invertir el orden de las cláusulas *si* y *entonces*.

EJEMPLO 4 Encuentra la hipótesis y la conclusión de la proposición "Me enojaré bastante si repruebo geometría".

Solución La hipótesis es "Repruebo geometría" y la hipótesis es "Me enojaré bastante". ■

Estos ejemplos ilustran que es necesario analizar con bastante cuidado una proposición a fin de establecer qué parte es la hipótesis y cuál es la conclusión; sin embargo, la palabra *si* sirve como una pista importante. Desafortunadamente en muchas proposiciones se omite dicho término. En estos casos puede ser difícil llegar a un acuerdo sobre cuál parte de la proposición es la hipótesis y cuál es la conclusión.

EJEMPLO 5 Encuentra la hipótesis y la conclusión de la proposición "A toda la gente loca le gustan los puerco espines".

Solución Antes de buscar la hipótesis o la conclusión es necesario traducir esta oración a la forma "si-entonces"; a saber, "Si una persona está loca, entonces le gustan los puerco espines". Así, claramente la hipótesis es "una persona está loca" y la conclusión es "a una persona le gustan los puerco espines". A fin de que la segunda oración sea independiente de la primera, el pronombre "le" en la frase original se sustituyó por el sustantivo que en un principio sustituía. ■

Una **falacia** es un argumento engañoso o ilógico; por ejemplo, "A toda la gente loca le gustan los puerco espines" y " A José le gustan los puerco espines", es una falacia concluir que

"José está loco". La proposición de que "A toda la gente loca le gustan los puerco espines" no significa que sólo a los locos les gusten los puerco espines.

Supón que se tienen las dos proposiciones "si p, entonces q" y "si q, entonces p". La hipótesis y la conclusión de la primera oración se han intercambiado para formar la segunda oración. Tales proposiciones son **recíprocas** entre sí. Ésta no es la idea ilustrada en el ejemplo 4. En ese ejemplo, la hipótesis y la conclusión no se intercambiaron, sino que se escribieron en sitios diferentes de la oración.

EJEMPLO 6 Encuentra la recíproca de la proposición "Si A, B y C están en la misma recta y $AB + BC = AC$, entonces B está entre A y C".

Solución La recíproca es "Si B está entre A y C, entonces A, B y C están en la misma recta y $AB + BC = AC$". ■

En el ejemplo 6, la oración proporcionada es la definición de "entre". En este caso tanto la proposición como su recíproca son verdaderas. Éste es un requisito en una definición, como se plantea en el siguiente principio:

> Una definición debe ser reversible; es decir, la proposición y su recíproca deben ser verdaderas ambas.

Por este principio, si se da una definición, se sabe que es reversible. Así, en una *definición* es redundante proporcionar tanto la proposición como su recíproca, y en la mayor parte de la literatura especializada en matemáticas se considera un error hacerlo; sin embargo, si se plantea un *teorema* y tanto la proposición como su recíproca son verdaderas, entonces este hecho debe plantearse explícitamente. En general, una proposición y su recíproca no necesariamente son verdaderas ambas.

Dada la proposición "Si p, entonces q", su **inversa** es "Si no p, entonces no q". La conversa de la inversa es la **contrapositiva** de la proposición original. Así, dada la proposición "Si p, entonces q", la contrapositiva es "Si no q, entonces no p".

EJEMPLO 7 Encuentra la recíproca, la inversa y la contrapositiva de la proposición "Dos ángulos son complementarios si la suma de sus medidas es 90°".

Solución En forma "si-entonces", la proposición es "Si la suma de las medidas de dos ángulos es 90°, entonces los ángulos son complementarios". La recíproca es "Si dos ángulos son complementarios, entonces la suma de sus medidas es 90°". La inversa es "Si la suma de las medidas de dos ángulos no es 90°, entonces los ángulos no son complementarios". La contrapositiva es "Si dos ángulos no son complementarios, entonces la suma de sus medidas no es 90°". ■

La proposición original en el ejemplo 7 se dio antes como definición; la recíproca, la inversa y la contrapositiva de una definición siempre son verdaderas, y la contrapositiva de un teorema siempre es verdadera. Una proposición y su contrapositiva son verdaderas o falsas ambas. De manera semejante, la inversa y la conversa de una proposición son verdaderas o falsas ambas. Así, se dice que una proposición y su contrapositiva son **lógicamente equivalentes**. De manera semejante, la inversa y la recíproca de una proposición son lógicamente equivalentes.

EJEMPLO 8 Dada la proposición "Si está nublado, entonces está lloviendo", determina si es verdadera o falsa. Haz lo mismo para su contrapositiva, su inversa y su recíproca.

Solución La proposición y la contrapositiva son falsas, "Si no está lloviendo entonces no está nublado";

sin embargo, la recíproca "Si está lloviendo, entonces está nublado" es verdadera, así como la inversa "Si no está nublado, entonces no está lloviendo". ■

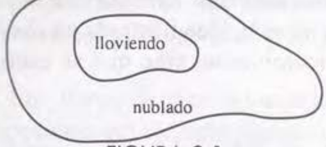


FIGURA 2.1

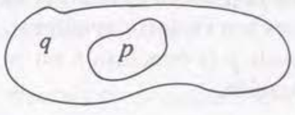


FIGURA 2.2

FIGURA 2.3

El ejemplo 8 puede ilustrarse con un diagrama de Venn. Los hechos *lloviendo* y *nublado* se consideran como conjuntos. En la figura 2.1 se observa que el conjunto *lloviendo* es un subconjunto del conjunto *nublado*; en consecuencia, si está lloviendo, entonces está nublado, sin embargo, hay puntos del conjunto *nublado* que no están en el conjunto *lloviendo*. Así, es falso que si está nublado, entonces esté lloviendo. El punto fuera del conjunto *nublado* es *no nublado*. Con base en el diagrama es evidente que si no está nublado, entonces no está lloviendo, ya que todos los puntos del conjunto *lloviendo* están contenidos en el conjunto *nublado*. También, a partir del diagrama se advierte que si no está lloviendo, es posible que esté nublado.

Los cuatro tipos de proposición se resumen a continuación:

1. "Si p, entonces q" (proposición original).
2. "Si q, entonces p" (recíproca de la proposición original).
3. "Si no p, entonces no q" (inversa de la proposición original).
4. "Si no q, entonces no p" (contrapositiva de la proposición original).

En este resumen, las proposiciones 1 y 4 siempre son lógicamente equivalentes y las proposiciones 2 y 3 siempre son lógicamente equivalentes. Las proposiciones 1 y 4 se ilustran con el diagrama de Venn de la figura 2.2 y las proposiciones 2 y 3 se ilustran con el diagrama de Venn de la figura 2.3.

EJERCICIOS 2.2

Para cada proposición en los ejercicios 1 a 10, escribe la hipótesis y la conclusión como oraciones independientes.* (Sugerencia: *si la proposición no está escrita en forma "si-entonces", conviene primero en esa forma.)

1. Si gano suficiente dinero, entonces compraré un automóvil.
2. Si comes demasiado, engordarás.
3. Si apagas la televisión, podrás estudiar mejor.
4. Dos ángulos son complementarios si la suma de sus medidas es 90°.
5. Si $A \cong B$, entonces $m\angle A = m\angle B$.
6. Un conjunto que tiene por lo menos un elemento no puede ser el conjunto vacío.
7. "Rojo en la mañana, marineros tomen precauciones."
8. El conjunto $C = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ es la unión de los conjuntos $A = \{1, 3, 5\}$ y $B = \{2, 4, 6\}$.
9. Un teorema siempre tiene una hipótesis y una conclusión.
10. Un punto que está en el interior de $\triangle PQR$ está en $\text{int}\angle Q$.
11 a 20. Escribe la recíproca de cada una de las proposiciones de los ejercicios 1 a 10.
21 a 30. Anota la inversa de cada una de las proposiciones de los ejercicios 1 a 10.
31 a 40. Escribe la contrapositiva de cada una de las proposiciones de los ejercicios 1 a 10.
41 a 50. Traza un diagrama de Venn para cada una de las proposiciones de los ejercicios 1 a 10.

Para cada una de las proposiciones de los ejercicios 51 a 60, encuentra la hipótesis, la conclusión, la recíproca, la inversa y la contrapositiva.

51. En la Luna, la aceleración debida a la gravedad es sólo alrededor de la sexta parte de la aceleración en la Tierra.
52. Si no se toma en cuenta el efecto de la fricción del aire, cabe decir que todos los cuerpos caen a la Tierra con la misma aceleración.
53. El hule posee la propiedad de volverse pegajoso cuando se calienta.
54. Las sales de glicerol y sodio de los ácidos grasos se forman cuando la grasa animal se trata con hidróxido de sodio.
55. Siempre que de un metal reactivo se haga el ánodo de una celda electrolítica, la oxidación anódica puede implicar oxidación del metal que compone el electrodo.
56. Cualquier partícula en suspensión será bombardeada por todos lados por las moléculas en movimiento del medio de dispersión.
57. Cualquier cigoto formado por combinación con un gameto normal es aneploide y letal.
58. Un ejemplo de herencia determinada por el sexo es el patrón de la calvicie, en que ocurre pérdida prematura del cabello en las partes frontal y superior de la cabeza, pero no a los lados.
59. Un contribuyente que utiliza la base acumulada reporta sus ingresos cuando los devenga, aun cuando no los haya recibido, y deduce gastos cuando los realiza, incluso sin haberlos pagado.
60. Cuando se venden los activos de una empresa, o se dispone de ellos en alguna otra forma, es importante registrar la depreciación hasta la fecha de venta o disposición.
61. Da un ejemplo de proposición "si-entonces" que hayas escuchado en un espectáculo deportivo. Escribe la recíproca, la inversa y la contrapositiva de la proposición.
62. Proporciona un ejemplo de proposición "si-entonces" que hayas oído en un supermercado. Escribe la recíproca, la inversa y la contrapositiva de la proposición.
63. Ejemplifica una proposición "si-entonces" que haya escuchado durante el almuerzo. Escribe la recíproca, la inversa y la contrapositiva de la proposición.
64. Da un ejemplo de proposición "si-entonces" que hayas oído en una cita. Escribe la recíproca, la inversa y la contrapositiva de la proposición.

2.3 Preparación de una demostración

Después de aprender a encontrar la hipótesis y la conclusión de una proposición dada, es posible demostrar la proposición. Primero, la proposición se traduce en una parte **dado** y en una parte **demostrar** que, en esencia, son la hipótesis y la conclusión de la proposición, respectivamente. Lo anterior se representa en forma simbólica en un diagrama para ilustrar el teorema y ayudar a planear los pasos de la **demostración**. En esta sección sólo se planteará la demostración al dibujar un diagrama y hallar qué es lo *dado* y qué se intenta *demostrar*. En secciones ulteriores se analizará cómo completar las demostraciones.

EJEMPLO 1 Establece la demostración de la proposición "Una bisectriz de un ángulo interno de un triángulo corta el lado opuesto del ángulo".

Solución **Paso 1.** Traducida a la forma "si-entonces", la proposición queda como "Si un ángulo interno de un triángulo tiene una bisectriz, entonces la bisectriz corta el lado opuesto del ángulo".

Paso 2. La hipótesis es "un ángulo interno de un triángulo tiene una bisectriz". La conclusión es "la bisectriz corta el lado opuesto del ángulo".

Paso 3. En la figura 2.4 se muestra un dibujo típico que representa la proposición anterior.

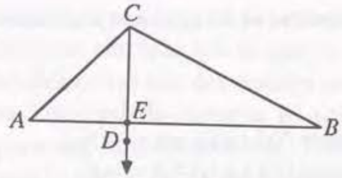


FIGURA 2.4

Paso 4. Las proposiciones del paso 2 se traducen en términos del diagrama:
DADO: $\overrightarrow{CD}$ bisecta $\angle ACB$.
DEMUESTRA: Existe un punto E tal que $\overrightarrow{CD} \cap \overline{AB} = \{E\}$. ■

EJEMPLO 2 Establece la demostración de la proposición "Si dos ángulos internos de un triángulo son congruentes, entonces los lados opuestos a estos ángulos son congruentes".

Solución **Paso 1.** La hipótesis es "Dos ángulos internos de un triángulo son congruentes", y la conclusión es "Los lados opuestos a estos ángulos son congruentes".
Paso 2. En la figura 2.5 se muestra un dibujo de la proposición anterior.

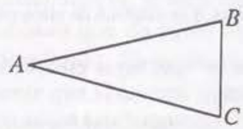


FIGURA 2.5

Paso 3. DADO: $\angle B = \angle C$
DEMUESTRA: $\overline{AC} \cong \overline{AB}$

EJERCICIOS 2.3

Elabora un diagrama para ilustrar e identificar cada una de las siguientes proposiciones; luego, en términos del diagrama escribe qué está dado y qué deseas demostrar. (Si requieres apoyarte en axiomas, símbolos o abreviaturas, consulta los apéndices A, E o F.)

1. La suma de las medidas de los ángulos de un triángulo es 180°.
2. Si dos lados de un triángulo son congruentes, la bisectriz del ángulo formado por estos dos lados es perpendicular al tercer lado.
3. En un triángulo, el cuadrado de la longitud del lado opuesto a un ángulo recto es igual a la suma de los cuadrados de las longitudes de los otros dos lados.
4. Los suplementos de ángulos congruentes son congruentes.
5. Si dos rectas se cortan, las bisectrices de un par de ángulos adyacentes formados son perpendiculares.
6. Las bisectrices de los tres ángulos de un triángulo se cortan en el mismo punto.
7. Las bisectrices perpendiculares de los tres lados de un triángulo se cortan en el mismo punto.
8. Un triángulo no puede tener más de un ángulo recto.
9. El suplemento de un ángulo obtuso es agudo.
10. La recíproca del ejercicio 3.

Escribe qué esta* dado *y qué desea* demostrar *en las siguientes proposiciones de álgebra.

11. Si $x + 7 = 9$, entonces $x = 2$.
12. Si $y - 6 = 4$, entonces $y = 10$.
13. Si $f(x) = x - 9$ y $g(y) = y + 6$, entonces $f(x) + g(y) = x + y - 3$.
14. Si $f(x) = x + 2$ y $g(y) = y - 8$, entonces $f(x) + g(y) = x + y - 6$.

2.4 Demostraciones

En esta sección hay dos ejemplos de demostraciones completas de teoremas. Estudia el siguiente bosquejo de una demostración y compáralo con los ejemplos. Una demostración completa consta de:

1. El teorema por demostrar
2. Un diagrama
3. Lo dado
4. Lo que hay que demostrar
5. La demostración:
   a. **Proposiciones**
   b. **Razones** que justifican las proposiciones

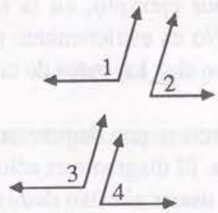
Entre los pasos 4 y 5 se requiere un **análisis** que puede concebirse como un *plan de la demostración*, aunque en general no es necesario un análisis escrito. Sin embargo, éste es el análisis que determina lo que ha de escribirse en el paso 5.

Algunas veces el análisis puede efectuarse mentalmente, pero a medida que las demostraciones se vuelven más grandes, complicadas y difíciles, se recomienda escribir el análisis. Durante éste se decide cuáles proposiciones serán necesarias y si es posible justificarlas. Una proposición debe estar justificada por una de las posibilidades siguientes:

1. Proposiciones dadas
2. Definiciones
3. Axiomas o postulados
4. Teoremas previamente demostrados

No se permite establecer una proposición que *parezca* verdadera y usarla sin justificar.

Teorema 2.1 Los suplementos de ángulos congruentes son congruentes.



DADO: $\angle 1$ y $\angle 2$ son suplementarios
$\angle 3$ y $\angle 4$ son suplementarios
$\angle 2 \cong \angle 4$

DEMUESTRA: $\angle 1 \cong \angle 3$

ANÁLISIS: Al efectuar un análisis se empieza con lo que va a demostrarse y se trabaja hacia atrás hacia lo que está dado. Para demostrar que dos ángulos son congruentes se necesita probar que sus medidas son iguales. Esto puede hacerse al aplicar la definición de ángulos suplementarios y sustituirla para ángulos congruentes. Luego se efectúan las operaciones algebraicas necesarias y se espera lo mejor. La demostración real debe proceder de lo que está dado hacia lo que es necesario probar.

DEMOSTRACIÓN:

Proposiciones	Razones
1. $\angle 1$ y $\angle 2$ son suplementarios $\angle 3$ y $\angle 4$ son suplementarios	**1.** Dado
2. $m\angle 1 + m\angle 2 = 180°$ $m\angle 3 + m\angle 4 = 180°$	**2.** Definición de suplementario(s)
3. $m\angle 1 + m\angle 2 = m\angle 3 + m\angle 4$	**3.** Sustitución (o simetría *y* transitividad)
4. $\angle 2 \cong \angle 4$	**4.** Dado
5. $m\angle 2 = m\angle 4$	**5.** Definición de $\cong \angle$s
6. $m\angle 1 + m\angle 2 + m\angle 3 + m\angle 2$	**6.** Proposiciones 3 y 5; sustitución
7. $m\angle 2 + m\angle 2$	**7.** Reflexividad
8. $m\angle 1 + m\angle 3$	**8.** Proposiciones 6 y 7; axioma de adición de =
9. $\angle 1 \cong \angle 3$	**9.** Definición de $\cong \angle$s

Varios puntos que se deben considerar en la demostración anterior son:

a. La proposición se habría podido incluir en la proposición 1; sin embargo, no fue necesaria sino hasta después de la proposición 3. En general, en una demostración son posibles varios órdenes de proposiciones, pero es necesario tener cuidado de no escribir una proposición que requiera información que todavía no se incluye en la demostración; por ejemplo, la proposición 6 debe escribirse después de la proposición 5 porque depende de ésta.

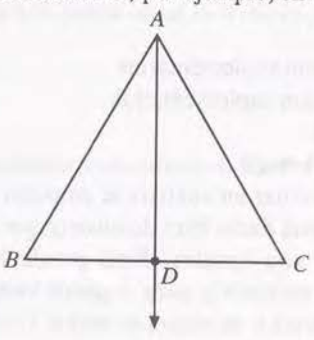
b. Las proposiciones 3 y 7 se refieren a axiomas aprendidos en álgebra elemental; a saber, los axiomas de reflexividad, simetría y transitividad. En el apéndice A se repasan éstos y otros axiomas.

c. En las demostraciones es posible utilizar abreviaturas y símbolos. Así, *def.* se usa por *definición*; *sup.*, por *suplementarios* y $\angle$ por *ángulo*. Aunque en general el símbolo $\cong$ significa *es congruente con*, aquí se utiliza por *congruente*. Consulta la lista de abreviaturas del apéndice F.

d. Algunas proposiciones, como la proposición 3, poseen varias razones posibles.

e. Cuando una proposición abarca varias proposiciones precedentes, es necesario decir cuáles comprende: por ejemplo, en la razón para la proposición 6 están implicadas las proposiciones 3 y 5. No es estrictamente necesario incluir esta información, aunque sí es de utilidad para que alguien siga los pasos de una demostración, incluyendo a la persona que la hizo.

¡PRECAUCIÓN! Al efectuar una demostración *no* es posible establecer hipótesis que *parecen* verdaderas en el diagrama. El diagrama es sólo un auxiliar para realizar el análisis. En el diagrama las proposiciones pueden usarse si están *dadas*; por ejemplo, en el siguiente diagrama:



No puede suponerse que $\overrightarrow{AD}$ bisecta $\angle BAC$.
No puede suponerse que $\overline{AD} \perp \overline{BC}$.
No puede suponerse que $\overline{AD}$ bisecta $\overline{BC}$.
No puede suponerse que $BD = DC$.
No puede suponerse que $AB = AC$.

La demostración del siguiente teorema es bastante similar a la del teorema precedente, por lo que se deja como ejercicio para ti.

Teorema 2.2 Los complementos de ángulos congruentes son congruentes.

Definición
Si dos rayos $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{AC}$ tales que C—A—B están dados, entonces los rayos son **opuestos.**

Observa la figura 2.6, que es una ilustración de los rayos opuestos $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{AC}$.

FIGURA 2.6

Definición
Si dos ángulos con el mismo vértice se colocan de modo que los lados de un ángulo formen rayos opuestos con los lados del otro ángulo, entonces los ángulos son **ángulos opuestos por el vértice.**

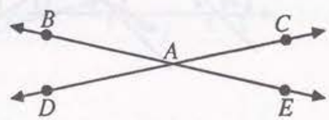
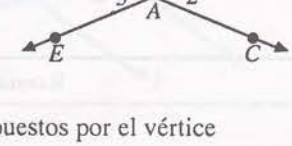


FIGURA 2.7

En la figura 2.7, $\angle BAC$ y $\angle DAE$ son ángulos opuestos por el vértice y $\angle BAD$ y $\angle CAE$ también son ángulos opuestos por el vértice.

Teorema 2.3 Los ángulos opuestos por el vértice son congruentes.



DADO: $\angle 2$ y $\angle 3$ son ángulos opuestos por el vértice
DEMUESTRA: $\angle 2 \cong \angle 3$

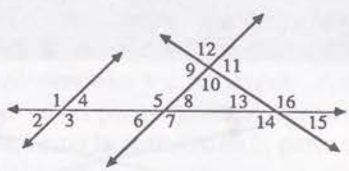
DEMOSTRACIÓN:

Proposiciones	Razones
1. $\angle 2$ y $\angle 3$ son $\angle$s op. vert.	1. Dado
2. $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{AC}$ son rayos op. $\overrightarrow{AD}$ y $\overrightarrow{AE}$ son rayos op.	2. Def. de $\angle$s op. vert.
3. $\angle BAC$ y $\angle DAE$ son $\angle$s llanos	3. Def. de rayos op. y $\angle$s llanos
4. $m\angle BAC = 180°$ $m\angle DAE = 180°$	4. Post. del transportador y def. de medida
5. $m\angle 1 + m\angle 2 = m\angle BAC$ $m\angle 1 + m\angle 3 = m\angle DAE$	5. Post. de adición de ángulos
6. $m\angle 1 + m\angle 2 = 180°$ $m\angle 1 + m\angle 3 = 180°$	6. Transitividad
7. $m\angle 1 + m\angle 2 = m\angle 1 + m\angle 3$	7. Sustitución
8. $m\angle 2 = m\angle 3$	8. Axioma de suma de =
9. $\angle 2 \cong \angle 3$	9. Def. de $\cong$

EJERCICIOS 2.4

1. Enumera los cinco pasos de una demostración completa.
2. Enumera los cuatro tipos de justificación de proposiciones que pueden utilizarse en una demostración.

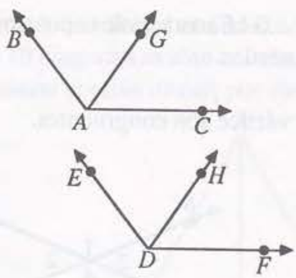
FIGURA PARA EL EJERCICIO 3



3. Enumera todos los pares de ángulos opuestos por el vértice que hay en el diagrama.

Completa la demostración de cada uno de los ejercicios 4 a 16.

FIGURA PARA EL EJERCICIO 4



4. DADO: $m\angle BAC = m\angle EDF$
   $\overrightarrow{AG}$ bisecta $\angle BAC$
   $\overrightarrow{DH}$ bisecta $\angle EDF$

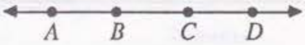
   DEMUESTRA: $m\angle GAC = m\angle HDF$

   DEMOSTRACIÓN:

Proposiciones	Razones
1. ?	1. Dado
2. $m\angle BAC = m\angle BAG + m\angle GAC$	2. ?

m∠*EDF* = m∠*EDH* + m∠*HDF*	
3. m∠*BAG* = m∠*GAC* = m∠*EDH* = m∠*HDF*	**3.** ?
4. m∠*BAG* = m∠*GAC* m∠*EDH* = m∠*HDF*	**4.** ?
5. 2m∠*GAC* = 2m∠*HDF*	**5.** ?
6. m∠*GAC* = m∠*HDF*	**6.** ?

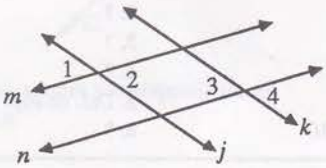
FIGURA PARA EL EJERCICIO 5



5. DADO: *A—B—C*, *B—C—D*
AB = *CD*
DEMUESTRA: *AC* = *BD*
DEMOSTRACIÓN:

Proposiciones	Razones
1. ?	**1.** Dado
2. *AC* = *AB* + *BC*	**2.** ?
3. *AC* = *CD* + *BC*	**3.** ?
4. *CD* + *BC* = *BC* + *CD*	**4.** ?
5. *AC* = *BC* + *CD*	**5.** ?
6. *AC* = *BD*	**6.** ?

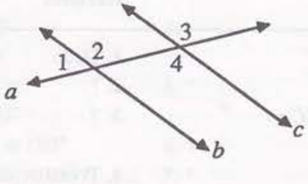
FIGURA PARA EL EJERCICIO 6



6. DADO: *j*, *k*, *m* y *n* son rectas,
m∠2 = m∠3
DEMUESTRA: m∠1 = m∠4
DEMOSTRACIÓN:

Proposiciones	Razones
1. ?	**1.** ?
2. ?	**2.** ∠s op. vert. son ≅
3. m∠1 = m∠4	**3.** ?

FIGURA PARA EL EJERCICIO 7

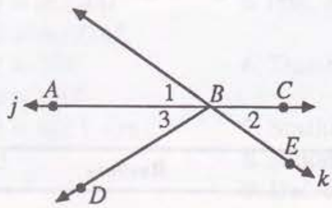


7. DADO: *a*, *b* y *c* son rectas,
m∠1 + m∠3 = 180°
DEMUESTRA: m∠2 = m∠4

DEMOSTRACIÓN:

Proposiciones	Razones
1. ?	**1.** Dado
2. $m\angle 1 + m\angle 2 = 180°$	**2.** ?
3. $m\angle 1 + m\angle 2 = m\angle 1 + m\angle 3$	**3.** ?
4. ?	**4.** Axioma de suma de =
5. $m\angle 3 = m\angle 4$	**5.** ?
6. ?	**6.** Transitividad

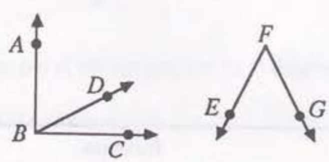
FIGURA PARA EL EJERCICIO 8



8. DADO: j y k son rectas,
$m\angle 1 = m\angle 3$
DEMUESTRA: $m\angle ABE = m\angle CBD$
DEMOSTRACIÓN:

Proposiciones	Razones
1. j y k son rectas	**1.** ?
2. $m\angle 2 = m\angle 1$	**2.** ?
3. $m\angle 1 = m\angle 3$	**3.** ?
4. $m\angle 2 = m\angle 3$	**4.** ?
5. ?	**5.** Def. de sup.
6. $m\angle ABE = m\angle CBD$	**6.** ?

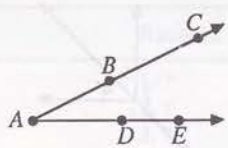
FIGURA PARA EL EJERCICIO 9



9. DADO: ABC $\angle$es un ángulo recto,
$\angle EFG$ y $\angle DBC$ son complementarios
DEMUESTRA: $m\angle ABD = m\angle EFG$
DEMOSTRACIÓN:

Proposiciones	Razones
1. ?	**1.** Dado
2. $m\angle ABC = 90°$	**2.** ?
3. $m\angle ABD + m\angle DBC = m\angle ABC$	**3.** ?
4. ?	**4.** Transitividad
5. $\angle ABD$ y $\angle DBC$ son comp.	**5.** ?
6. $m\angle ABD = m\angle EFG$	**6.** ?

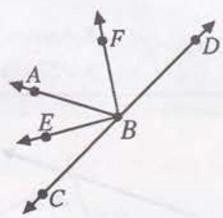
FIGURA PARA EL EJERCICIO 10



10. DADO: Rayos $\overrightarrow{AC}$ y $\overrightarrow{AE}$,
$AC = AE, AB = AD$
DEMUESTRA: $BC = DE$
DEMOSTRACIÓN:

Proposiciones	**Razones**
1. $AB + BC = AC, AD + DE = AE$	**1.** ?
2. $AC = AE$	**2.** ?
3. $AB + BC = AD + DE$	**3.** ?
4. $AB = AD$	**4.** ?
5. $AD + BC = AD + DE$	**5.** ?
6. $BC = DE$	**6.** ?

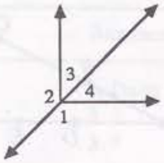
FIGURA PARA EL EJERCICIO 11



11. Las bisectrices de ángulos suplementarios adyacentes son perpendiculares.
DADO: $\angle ABC$ y $\angle ABD$ son suplementarios
$\overrightarrow{BE}$ bisecta $\angle ABC$,
$\overrightarrow{BF}$ bisecta $\angle ABD$
DEMUESTRA: $\overrightarrow{BE} \perp \overrightarrow{BF}$
DEMOSTRACIÓN:

Proposiciones	**Razones**
1. ?	**1.** Dado
2. $m\angle EBC = m\angle ABE$, $m\angle ABF = m\angle FBD$	**2.** ?
3. $m\angle ABC = m\angle ABE + m\angle EBC$ $m\angle ABD = m\angle ABF + m\angle FBD$	**3.** ?
4. $m\angle ABC = 2m\angle ABE$ $m\angle ABD = 2m\angle ABF$	**4.** ?
5. $m\angle ABC + m\angle ABD = 2m\angle ABE + 2m\angle ABF$	**5.** ?
6. $m\angle ABC + m\angle ABD = 180°$	**6.** ?
7. $2m\angle ABE + 2m\angle ABF = 180°$	**7.** ?
8. $m\angle ABE + m\angle ABF = 90°$	**8.** ?
9. $\overrightarrow{BE} \perp \overrightarrow{BF}$	**9.** ?

FIGURA PARA EL EJERCICIO 12



12. La suma de las medidas de los suplementos de ángulos complementarios es igual a 270°.

DADO: $\angle 3$ y $\angle 4$ son comp.

$\angle 2$ y $\angle 3$ son sup.

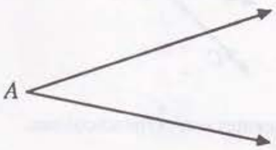
$\angle 1$ y $\angle 4$ son sup.

DEMUESTRA: $m\angle 1 + m\angle 2 = 270°$

DEMOSTRACIÓN:

Proposiciones	Razones
1. ?	**1.** Dado
2. ?	**2.** Def. de comp.
3. ?	**3.** Def. de sup.
4. $m\angle 1 + m\angle 2 + m\angle 3 + m\angle 4 = 360°$	**4.** ?
5. ?	**5.** Sustitución
6. ?	**6.** Axioma de suma de =

FIGURA PARA EL EJERCICIO 13



13. Todo ángulo es congruente a sí mismo (reflexividad)

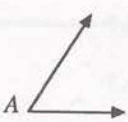
DADO: ?

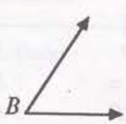
DEMUESTRA: ?

DEMOSTRACIÓN:

Proposiciones	Razones
1. ?	**1.** Dado
2. $m\angle A = m\angle A$	**2.** ?
3. ?	**3.** Def. de $\cong$ $\angle$s

FIGURA PARA EL EJERCICIO 14





14. Si $\angle A \cong \angle B$, entonces $\angle B \cong \angle A$ (simetría)

DADO: $\angle A \cong \angle B$

DEMUESTRA: $\angle B \cong \angle A$

DEMOSTRACIÓN:

Proposiciones	Razones
1. $\angle A \cong \angle B$	1. ?
2. $m\angle A = m\angle B$	2. ?
3. $m\angle B = m\angle A$	3. ?
4. $\angle B \cong \angle A$	4. ?

15. Si $\angle A \cong \angle B$ y $\angle B \cong \angle C$, entonces $\angle A \cong \angle C$ (transitividad).
16. Los complementos de ángulos congruentes son congruentes.

2.5 Triángulos congruentes

Ahora se definirá un concepto que permite comparar triángulos del mismo *tamaño* y *forma*; pero, *tamaño* y *forma* son términos geométricamente ilegales, ya que no se han definido. Intuitivamente, lo que se entiende por "mismo tamaño y forma" es que si un triángulo se coloca encima de otro, ambos deben coincidir.

Definición

Dos triángulos, $\triangle ABC$ y $\triangle DEF$, son **congruentes** si $\angle A \cong \angle D$, $\angle B \cong \angle E$, $\angle C \cong \angle F$, $\overline{AB} \cong \overline{DE}$, $\overline{BC} \cong \overline{EF}$ y $\overline{AC} \cong \overline{DF}$. Se escribe $\triangle ABC \cong \triangle DEF$.

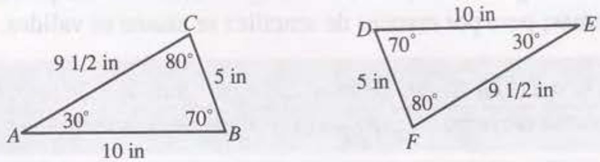


FIGURA 2.8

¡PRECAUCIÓN! Para encontrar la congruencia entre dos triángulos es necesario determinar la correspondencia uno a uno ($\leftrightarrow$) entre sus vértices, de modo que sea posible hacerlos coincidir. Así, en la figura 2.8,

$$\triangle ABC \cong \triangle EDF,$$
$$A \leftrightarrow E,\ B \leftrightarrow D \text{ y } C \leftrightarrow F.$$

$\triangle ABC \cong \triangle EDF$ se lee como

"**$\triangle ABC$ es congruente con $\triangle EDF$**",

y $A \leftrightarrow E$ se lee como

"**A corresponde a E**".

Es incorrecto escribir $\triangle ABC \cong \triangle DEF$, ya que $A \not\leftrightarrow D$ y $B \not\leftrightarrow E$. Cuando se indica con símbolos que dos triángulos son congruentes, se establece al mismo tiempo la relación precisa uno a uno que existe entre los vértices. Este proceso es importante para aprender a utilizar diagramas en la demostración de teoremas.

También se escribe una correspondencia entre las **partes** (ángulos y lados) de un triángulo. Entonces, si $\triangle ABC \cong \triangle EDF$, se escribe $\overline{AB} \leftrightarrow \overline{ED}$, ya que $\overline{AB} \cong \overline{ED}$, y se escribe $\angle A \leftrightarrow \angle E$, pues $\angle A \cong \angle E$. Los ángulos y lados que corresponden de esta manera son **partes correspondientes**. En consecuencia, un replanteamiento de la definición de triángulos congruentes es:

Las partes correspondientes de triángulos congruentes son congruentes.

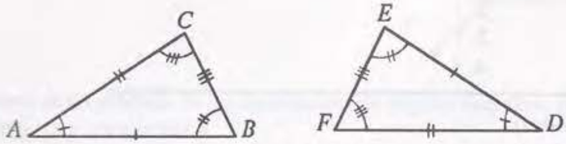


FIGURA 2.9

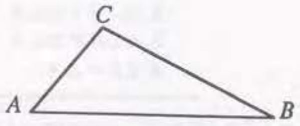


FIGURA 2.10

Esta proposición se utilizará a menudo como una razón en las demostraciones, en lugar de la frase "Def. de $\cong$ ".

Para evitar dar longitudes específicas de segmentos y medidas específicas de ángulos (Fig. 2.8), los diagramas se marcan para indicar congruencias (Fig. 2.9), ahí, las marcas indican que $\angle A \cong \angle D$, $\angle B \cong \angle E$, $\angle C \cong \angle F$, $\overline{AB} \cong \overline{DE}$, $\overline{AC} \cong \overline{DF}$ y $\overline{BC} \cong \overline{EF}$.

En un triángulo, un ángulo **está incluido entre dos lados** si los lados están contenidos en el ángulo. Un lado **está incluido entre dos ángulos** si el lado está contenido en ambos ángulos; por lo tanto, en la figura 2.10, dados $\overline{AC}$ y $\overline{AB}$, $\angle A$ es el ángulo incluido, ya que $\overline{AC} \cup \overline{AB} \subset \angle A$ y, dados $\angle A$ y $\angle B$, $\overline{AB}$ es el lado incluido, pues $\overline{AB} \subset \angle A \cap \angle B$.

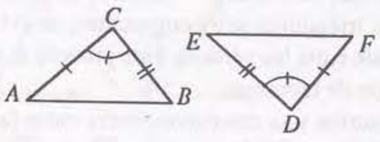
Aunque la definición de triángulos congruentes establece que los seis elementos de un triángulo deben ser congruentes con las partes correspondientes del otro triángulo, los tres siguientes postulados permiten demostrar congruencias con menos información. Si se tuviera interés en un tratamiento riguroso de la geometría plana, sería posible demostrar los postulados 2.2 y 2.3 transformándolos en teoremas; pero por razones de sencillez se asume su validez.

Postulado 2.1 (LAL = LAL) Si dos lados y el ángulo incluido de un triángulo son congruentes con las partes correspondientes de otro triángulo, entonces los triángulos son congruentes.

La notación LAL = LAL se utiliza como denominación del postulado 2.1. En algunos textos se usa la notación LAL $\cong$ LAL. Aquí se prefiere el signo de igualdad, ya que a menudo se determina que dos triángulos son congruentes al analizar las longitudes de los lados y las medidas de los ángulos; por ejemplo, en la figura 2.8, los dos triángulos son congruentes porque las longitudes de los lados correspondientes son iguales, al igual que las medidas de los ángulos correspondientes. Por simplicidad, en el postulado 2.1 se utiliza el término *congruentes* en vez de las palabras *longitud* y *medida*. El término *congruentes* se aplica a los lados y a los ángulos de triángulos, pero la palabra *longitud* se refiere sólo a los lados y el vocablo *medida* sólo a los ángulos.

El siguiente ejemplo ilustra la aplicación del postulado 2.1 en una demostración.

EJEMPLO 1 DADO: $AC = FD$, $BC = ED$, $m\angle C = m\angle D$
DEMUESTRA: $\triangle ABC \cong \triangle FED$



Solución ANÁLISIS: Observa que $A \leftrightarrow F$, $B \leftrightarrow E$ y $C \leftrightarrow D$. Los dos lados y el ángulo incluido de un triángulo están indicados como congruentes con las partes correspondientes del otro triángulo.

DEMOSTRACIÓN:

Proposiciones	Razones
1. $AC = FD$, $BC = ED$, $m\angle C = m\angle D$	1. Dado
2. $\triangle ABC \cong \triangle FED$	2. LAL = LAL

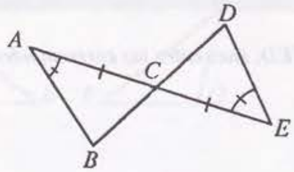
■

Postulado 2.2 **(ALA = ALA)** Si dos ángulos y el lado incluido de un triángulo son congruentes con las partes correspondientes de otro triángulo, entonces los triángulos son congruentes.

El siguiente ejemplo ilustra la aplicación del postulado 2.2 en una demostración.

EJEMPLO 2 DADO: $\angle A \cong \angle E$, $\overline{AC} \cong \overline{CE}$, $A—C—E$, $B—C—D$
DEMUESTRA: $\angle B \cong \angle D$

Solución



DEMOSTRACIÓN:

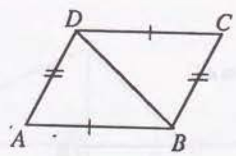
Proposiciones	Razones
1. $\angle A \cong \angle E$, $\overline{AC} \cong \overline{CE}$	1. Dado
2. $\angle ACB \cong \angle ECD$	2. Los $\angle$s op. vert. son $\cong$
3. $\triangle ACB \cong \triangle ECD$	3. ALA = ALA
4. $\angle B \cong \angle D$	4. Partes corresp. de $\triangle$s $\cong$ son $\cong$

■

Postulado 2.3 **(LLL = LLL)** Si los tres lados de un triángulo son congruentes con las partes correspondientes de otro triángulo, entonces los triángulos son congruentes.

El siguiente ejemplo muestra la aplicación del postulado 2.3 en una demostración.

EJEMPLO 3



DADO: $AB = CD$, $AD = CB$
DEMUESTRA: $\angle A \cong \angle C$

Solución DEMOSTRACIÓN:

Proposiciones	Razones
1. $AB = CD, AD = CB$	**1.** Dado
2. $BD = DB$	**2.** Reflexividad
3. $\triangle ABD \cong \triangle CDB$	**3.** LLL = LLL
4. $\angle A \cong \angle C$	**4.** Partes corresp. de $\triangle$s $\cong$ son $\cong$

¡PRECAUCIÓN! *No* intentes usar LLA = LLA o AAA = AAA. ¡Éstas no son verdaderas relaciones de congruencia! En el capítulo 3 será posible demostrar el teorema de congruencia LAA = LAA, pero no lo apliques sino hasta que se haya demostrado.

En los puntos 29 y 30 de los ejercicios 2.5 se pide ilustrar que LLA = LLA y AAA = AAA no son proposiciones verdaderas.

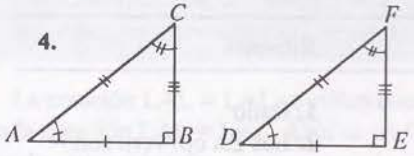
EJERCICIOS 2.5

En los ejercicios 1 a 3, si $\triangle ACB \cong \triangle FED$, encuentra las correspondencias entre:

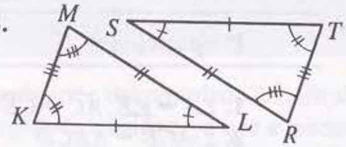
1. Los vértices de los triángulos.
2. Los lados de los triángulos.
3. Los ángulos de los triángulos.

Para cada par de triángulos en los ejercicios 4 y 5, escribe la congruencia entre los triángulos.

4.



5.



En los ejercicios 6 a 9, sea $\triangle IJK \cong \triangle PQR$.

6. ¿Por qué $\overline{IJ} \cong \overline{PQ}$?

7. ¿Por qué $\angle K \cong \angle R$?

8. ¿Por qué $JK = QR$?

9. ¿Por qué m $\angle KIJ$ = m$\angle RPQ$?

Para cada uno de los ejercicios 10 a 19, determina si existe o no una congruencia entre $\triangle ABC$ y $\triangle DEF$. En caso afirmativo, escríbela y enumera las razones de tus respuestas (LAL = LAL, ALA = ALA o LLL = LLL). En caso de que no exista dicha congruencia, escribe **Ninguna.**

10. $\angle A \cong \angle D, AC = DF, AB = DE$

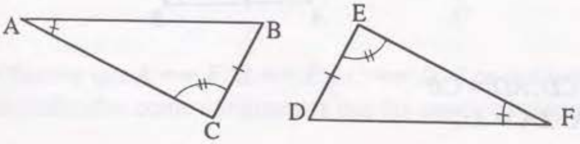
11. $\angle A \cong \angle E, BC = DF, \angle C \cong \angle D$

12. $AC = DF, BC = FE, DE = AB$

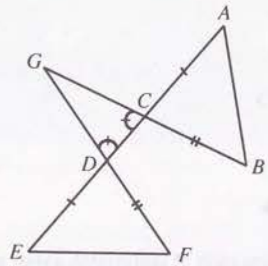
13. $m\angle A = m\angle F, m\angle B = m\angle E, m\angle C = m\angle C$

14. $m\angle C = m\angle F, \angle B \cong \angle E, \overline{BC} \cong \overline{EF}$

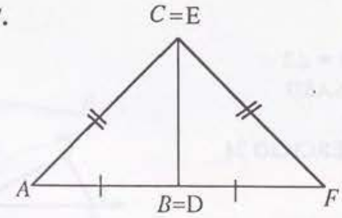
15.



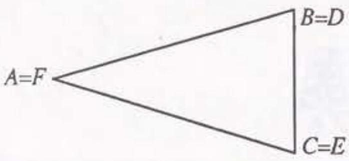
16.



17.



18.



19.

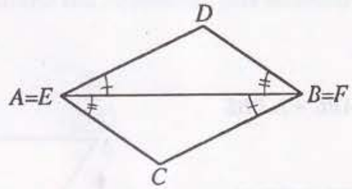
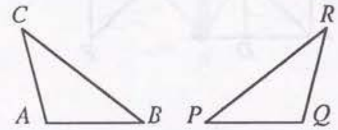
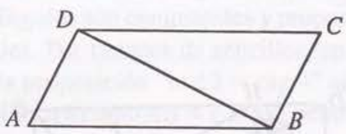


FIGURA PARA
EL EJERCICIO 20



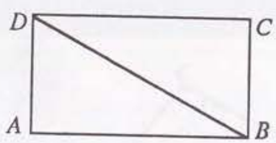
20. DADO: $\angle A \cong \angle Q$,
$AC = QR$,
$AB = PQ$
DEMUESTRA: $BC = PR$

FIGURA PARA
EL EJERCICIO 21



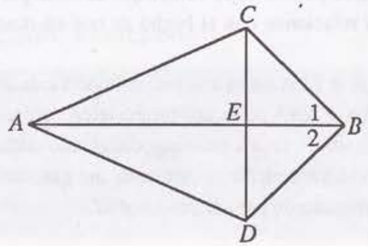
21. DADO: $AD = BC$,
$AB = CD$
DEMUESTRA: $\angle A \cong \angle C$

FIGURA PARA
EL EJERCICIO 22



22. DADO: $AD = BC$,
$\angle ADB \cong \angle CBD$
DEMUESTRA: $\triangle ADB \cong \triangle CBD$

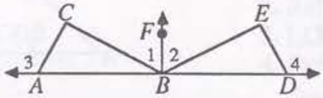
FIGURA PARA
EL EJERCICIO 23



23. DADO: $AC = AD$,
$\overline{AB} \perp \overline{CD}$

DEMUESTRA: $\angle 1 \cong \angle 2$
$\triangle ABC \cong \triangle ABD$

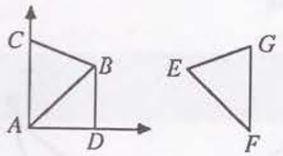
FIGURA PARA EL EJERCICIO 24



24. DADO: $\overline{AD} \perp \overline{BF}$, $A—B—D$,
$\angle 1 \cong \angle 2$,
$AB = BD$,
$\angle 3 \cong \angle 4$

DEMUESTRA: $\triangle ABC \cong \triangle DBE$

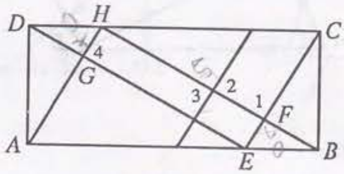
FIGURA PARA EL EJERCICIO 25



25. DADO: $\overline{AC} \perp \overline{AD}$,
$m\angle BAD = 29°$,
$m\angle GFE = 61°$,
$m\angle BCA = m\angle GEF$,
$AC = 2BD$,
$BD = EF/2$

DEMUESTRA: $\triangle ABC \cong \triangle FGE$

FIGURA PARA EL EJERCICIO 26



26. DADO: $\angle 1$ y $\angle 2$ son sup.,
$\angle 3 \cong \angle 4$,
$HG = EF$,
$DG = BF$

DEMUESTRA: $DH = BE$

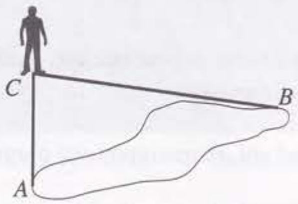
27. Un carpintero que desea sostener un muro vertical, a menudo clava un puntal desde la parte superior del muro hasta una posición sobre el piso lejos de la pared. ¿Qué postulado establece que el muro permanecerá en su lugar?

28. Explica cómo los postulados 2.1 a 2.3 se relacionan con el hecho de que en muchas estructuras, como edificios, se utilicen soportes triangulares.

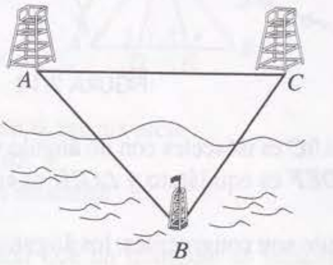
29. Elabora un diagrama que muestre que LLA = LLA no es una proposición verdadera.

30. Elabora un diagrama que muestre que AAA = AAA no es una proposición verdadera.

31. Martha desea encontrar la distancia AB a través de un estanque congelado situado en el centro de un campo nivelado. Es demasiado peligroso caminar sobre el hielo para medir la distancia, así que decide hallar AC, BC y $m\angle C$, como se ve en el diagrama. ¿Cómo puede utilizar esta información para encontrar AB?



32. Una salvavidas desea determinar la distancia entre dos estaciones salvavidas y una boya en el mar. Ella decide encontrar AC, $m\angle A$ y $m\angle C$, como se muestra en el diagrama. ¿Cómo puede utilizar esta información para encontrar AB y BC?



2.6 Triángulos isósceles

En las demostraciones de los teoremas 2.1 y 2.3 se presentó una alternancia entre proposiciones que establecían que dos ángulos son congruentes y proposiciones que establecían que las medidas de dos ángulos son iguales. Por razones de sencillez, en adelante la proposición "$\angle 2 \cong \angle 4$" se tratará como idéntica a la proposición "$m\angle 2 = m\angle 4$" sin escribir un paso para proporcionar la razón. $\overline{AB} \cong \overline{CD}$ se considerará como $AB = CD$ sin plantear razón alguna.

Definición

Un triángulo **escaleno** es un triángulo tal que ninguno de sus lados es congruente con cualquiera de los otros dos lados.

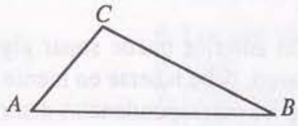


FIGURA 2.11

En la figura 2.11, $\triangle ABC$ es escaleno.

Definición

Un triángulo **isósceles** es un triángulo con dos lados congruentes por lo menos. El ángulo incluido entre dos lados congruentes es un **ángulo vértice**, los otros dos son **ángulos de la base** y el lado opuesto al ángulo vértice es la **base**.

Definición

Un triángulo con todos los lados congruentes es **equilátero**. Un triángulo con todos los ángulos congruentes es **equiangular**.

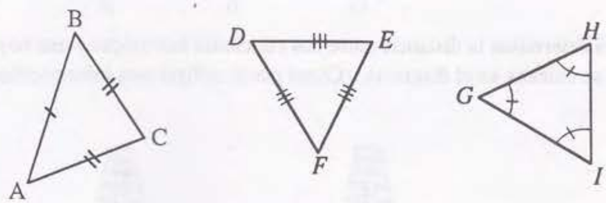
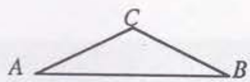


FIGURA 2.12

En la figura 2.12, $\triangle ABC$ es isósceles con un ángulo vértice $\angle C$, ángulos de la base $\angle A$ y $\angle B$, y base $\overline{AB}$. También, $\triangle DEF$ es equilátero y $\triangle GHI$ es equiangular.

Teorema 2.4 Si dos lados de un triángulo son congruentes, los ángulos opuestos a estos lados son congruentes.



DADO: $\triangle ABC, \overline{AC} \cong \overline{BC}$
DEMUESTRA: $\angle A \cong \angle B$
DEMOSTRACIÓN:

Proposiciones	**Razones**
1. $\overline{AC} \cong \overline{BC}$	**1.** Dado
2. $\overline{BC} \cong \overline{AC}$	**2.** Simetría
3. $\angle C \cong \angle C$	**3.** Reflexividad
4. $\triangle ABC \cong \triangle BAC$	**4.** LAL = LAL
5. $\angle A \cong \angle B$	**5.** Partes corr. de $\triangle$s $\cong$ son $\cong$

La demostración anterior puede sonar algo extraña, ya que parece abarcar a un triángulo nada más; sin embargo, debe tenerse en mente la posibilidad de comparar un triángulo dado con él mismo usando varias correspondencias distintas. Una alternativa a este procedimiento es trazar un segundo dibujo del triángulo, técnica que se ilustra en el próximo ejemplo 2.

Definición

Un **corolario** es un teorema estrechamente relacionado con otro teorema y que puede demostrarse con facilidad utilizando dicho teorema.

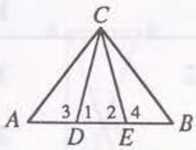
El siguiente corolario se desprende fácilmente del teorema 2.4. La demostración se deja como ejercicio.

Corolario Si un triángulo es equilátero, entonces es equiangular.

El siguiente teorema es la recíproca del teorema 2.4 y se demuestra de manera semejante. La demostración queda como ejercicio.

Teorema 2.5 Si dos ángulos de un triángulo son congruentes, los lados opuestos a los ángulos son congruentes.

El siguiente ejemplo ilustra la aplicación del teorema 2.4 en una demostración.



EJEMPLO 1 DADO: A, B, D, E están en la misma recta
$CD = CE, AD = BE$
DEMUESTRA: $\triangle ABC$ es isósceles

Solución ANÁLISIS: Para demostrar que un triángulo es isósceles, es necesario probar que dos de sus lados son congruentes. Una forma de efectuar lo anterior es probar que los lados son partes correspondientes de triángulos congruentes. A fin de aplicar un teorema de congruencia se requieren las partes idóneas en $\triangle ADC$ y $\triangle BEC$. Dado que no están dadas directamente estas partes, es posible relacionar $\angle 3$ y $\angle 4$ con $\angle 1$ y $\angle 2$ aplicando ángulos suplementarios. Al usar el teorema adecuado, observa que $\angle 1 \cong \angle 2$, ya que $CD = CE$ está dado.

DEMOSTRACIÓN:

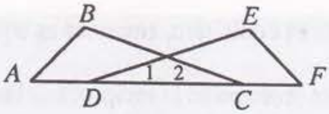
Proposiciones	**Razones**
1. $CD = CE$	**1.** Dado
2. $\angle 1 \cong \angle 2$	**2.** Si 2 lados de un $\triangle$son $\cong$, los $\angle$s op. a estos lados son $\cong$
3. A, B, D, E están en la misma recta	**3.** Dado
4. $\angle 1$ y $\angle 3$ son sup. $\angle 2$ y $\angle 4$ son sup.	**4.** Def. de sup. y medida
5. $\angle 3 \cong \angle 4$	**5.** Los sup. de $\angle$s $\cong$ son $\cong$
6. $AB = BE$	**6.** Dado
7. $\triangle ADC = \triangle BEC$	**7.** Proposiciones 1, 5 y 6; LAL = LAL
8. $AC = BC$	**8.** Partes corr. de $\triangle$s $\cong$ son $\cong$
9. $\triangle ABC$ es isósceles	**9.** Def. de isósceles

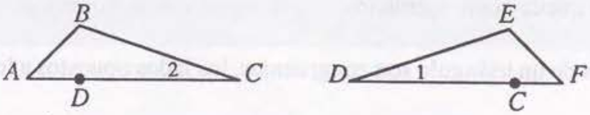
■

Algunas veces un teorema puede ilustrarse mediante un diagrama en que los triángulos se **superponen**. Para simplificar el análisis de la demostración del teorema, se traza un diagrama por separado en que los triángulos no se superponen. El siguiente ejemplo ilustra este concepto.

EJEMPLO 2 DADO: A, D, C, F están en la misma recta
$\angle A \cong \angle F, \angle 1 \cong \angle 2, AD = CF$

DEMUESTRA: $\triangle ABC \cong \triangle FED$





Solución DEMOSTRACIÓN:

Proposiciones	Razones
1. $\angle A \cong \angle F, \angle 1 \cong \angle 2$ $AD = CF$	1. Dado
2. $DC = DC$	2. Reflexividad
3. $AD + DC = DC + CF$	3. Axioma de suma de la =
4. $AD + DC = AC$ $DC + CF = DF$	4. Def. de entre
5. $AC = DF$	5. Sustitución
6. $\triangle ABC \cong \triangle FED$	6. ALA = ALA

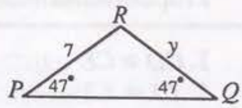
■

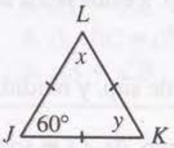
EJERCICIOS 2.6

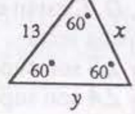
1. ¿Un triángulo isósceles siempre es equilátero? ¿Por qué?
2. ¿Un triángulo equilátero siempre es isósceles? ¿Por qué?

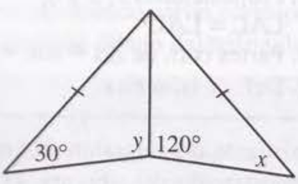
De ser posible, encuentra* x *y* y *para cada uno de los ejercicios 3 a 8.

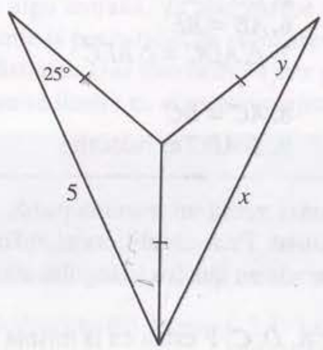
3.


4.


5.


6.


7.


8.


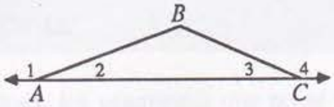


FIGURA PARA LOS EJERCICIOS 9 Y 10

9. DADO: $AB = BC$
DEMUESTRA: $\angle 1 \cong \angle 4$

10. DADO: $m\angle 1 + m\angle 3 = 180°$
DEMUESTRA: $AB = BC$

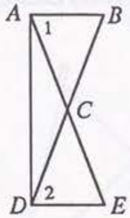


FIGURA PARA LOS EJERCICIOS 11 y 12

11. DADO: $\triangle ABC \cong \triangle EDC$
$\angle 1 \cong \angle 2$
DEMUESTRA: $\triangle ABC$ es isósceles

12. DADO: $AC = CE$, $A—C—E$, $B—C—D$,
$\triangle ABC$ y $\triangle DCE$ son equiláteros
DEMUESTRA: $\triangle ABD \cong \triangle DEA$

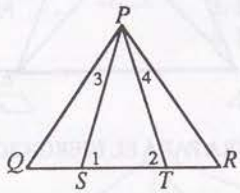


FIGURA PARA LOS EJERCICIOS 13 Y 14

13. DADO: $PQ = QR$,
$\angle 3 \cong \angle 4$
DEMUESTRA: $\triangle QPS \cong \triangle RPT$

14. DADO: $\angle 1 \cong \angle 2$, $Q—S—T—R$,
$QS = TR$
DEMUESTRA: $\triangle QPT \cong \triangle RPS$

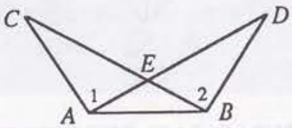


FIGURA PARA LOS EJERCICIOS 15 Y 16

15. DADO: $AE = BE$,

$AC = BD$,
$\angle 1 \cong \angle 2$
DEMUESTRA: $CE = DE$
16. DADO: $\triangle ABC \cong \triangle BAD$
DEMUESTRA: $\triangle ABE$ es isósceles

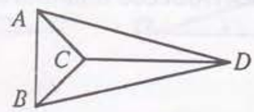


FIGURA PARA LOS EJERCICIOS 17 Y 18

17. DADO: $AC = BC$,
$AD = BD$
DEMUESTRA: $\angle DAC \cong \angle DBC$
18. DADO: $AC = BC$,
$\angle ACD \cong \angle BCD$
DEMUESTRA: $\triangle ABD \cong \triangle BAD$
19. Demuestra que si un triángulo es equilátero, es equiangular.
20. Demuestra el teorema 2.5.
21. Demuestra que si un triángulo es equiangular, es equilátero.

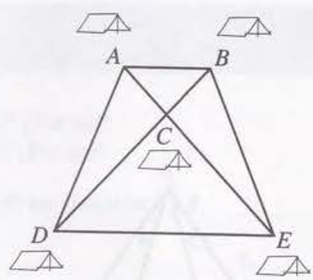


FIGURA PARA EL EJERCICIO 22

22. Ana Bárbara, Carmen, Dora y Eva acamparon en un terreno plano en las posiciones indicadas por A, B, C, D y E, respectivamente, en el diagrama que se muestra. Si $m\angle BAE = m\angle ABD$ y $m\angle BDE = m\angle AED$, encuentra la distancia de Bárbara a Eva si la distancia de Ana a Dora es de 75 pies.

FIGURA PARA EL EJERCICIO 23

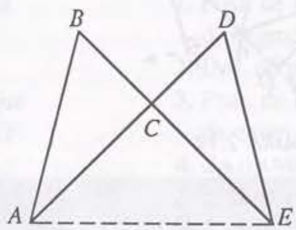
23. Los guardabosques Alicia, Benjamín, Claudia y Darío están ubicados en las estaciones indicadas por A, B, C y D, respectivamente, en el diagrama que se muestra. Si Alicia y Benjamín están, cada uno, a 3 millas de Claudia y a 2 millas de Darío, encuentra $m\angle DAC$ si $m\angle DBC = 23°$.

2.7 Alturas y medianas

En algunas demostraciones, los segmentos que no se muestran como elementos del diagrama original se le deben agregar. Esos segmentos suelen trazarse con línea punteada y se denominan segmentos **auxiliares**. En el siguiente ejemplo, la línea punteada forma parte de la solución, no del problema original.

EJEMPLO 1 DADO: $\overline{AB} \cong \overline{ED}, \overline{BE} \cong \overline{DA}$
DEMUESTRA: $\angle B \cong \angle D$

Solución



DEMOSTRACIÓN:

Proposiciones	Razones
1. $\overline{AB} \cong \overline{ED}, \overline{BE} \cong \overline{DA}$	**1.** Dado
2. $\overline{AE} \cong \overline{AE}$	**2.** Reflexividad
3. $\triangle ABE \cong \triangle EDA$	**3.** LLL = LLL
4. $\angle B \cong \angle D$	**4.** Partes corr. de $\triangle$s $\cong$ son $\cong$

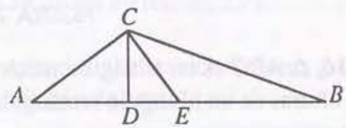


FIGURA 2.13

Las siguientes definiciones se comprenderán mejor si se consulta la figura 2.13. En ella no es necesario que *A—D—E—B*, aunque esta disposición es una de las posibilidades.

Definición

Sea $\triangle ABC$ dado con D y E en $\overleftrightarrow{AB}$. Entonces $\overline{CD}$ es una **altura** de $\triangle ABC$ si $\overline{CD} \perp \overleftrightarrow{AB}$, y $\overline{CE}$ es una **mediana** de $\triangle ABC$ si $AE = BE$.

¡PRECAUCIÓN! A continuación se presentan algunos planteamientos informales de las definiciones precedentes: Una **altura** de un triángulo es un segmento de recta perpendicular a una recta que contiene un lado del triángulo con un punto extremo sobre esa recta y el otro punto extremo en el vértice del ángulo opuesto a ese lado. Una **mediana** de un triángulo es un segmento de recta con un punto extremo en el punto medio de un lado del triángulo y el otro punto extremo en el vértice del ángulo opuesto a ese lado.

Como ya se describió, una altura de un triángulo no requiere cortar al lado opuesto; el único requerimiento es que la altura sea perpendicular a la recta que contiene al lado opuesto. En las figuras 2.14 y 2.15, $\overline{CD}$, $\overline{AE}$ y $\overline{BF}$ son alturas de $\triangle ABC$.

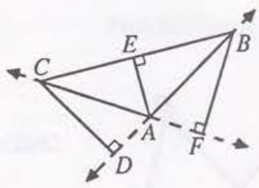


FIGURA 2.14

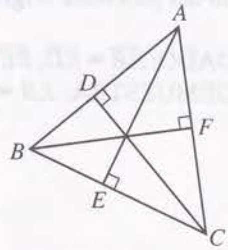


FIGURA 2.15

Definición

Un **triángulo rectángulo** es un triángulo con un ángulo recto. El lado opuesto al ángulo recto es la **hipotenusa** y los otros dos lados son los **catetos.**

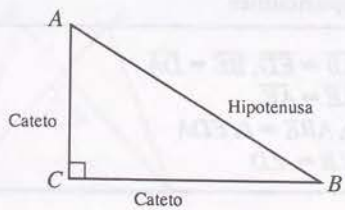
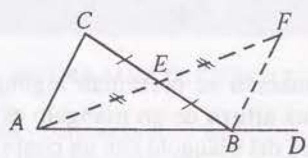


FIGURA 2.16

En la figura 2.16, $\triangle ABC$ es un triángulo rectángulo, $\overline{AB}$ es la hipotenusa y $\overline{AC}$ y $\overline{BC}$ son los catetos. Dos de las alturas de un triángulo rectángulo coinciden con sus catetos. Así, $\overline{AC}$ y $\overline{BC}$ son alturas de $\triangle ABC$.

Nuevamente con referencia a las figuras 2.14 y 2.15, parece que los triángulos tienen tres alturas. En efecto, esto es cierto; sin embargo, esta observación depende de la proposición "existe exactamente una perpendicular a una recta trazada desde un punto que no pertenece a la recta"; es decir, $\overline{AE}$ es la única altura de $\triangle ABC$ que contiene al punto A. Para demostrar esto, primero se requiere otro teorema.

Teorema 2.6 Un ángulo externo de un triángulo es mayor en medida que cualquier ángulo interno lejano.



DADO: $\triangle ABC$, $A—B—D$
DEMUESTRA: (a) $m\angle CBD > m\angle C$
(b) $m\angle CBD > m\angle A$

NOTA: En esta demostración se requieren puntos y segmentos auxiliares. La existencia de tales puntos y segmentos debe justificarse en la demostración.

DEMOSTRACIÓN (a):

Proposiciones	Razones
1. Sea E el punto medio de $\overline{BC}$	**1.** Post. de la regla. y def. de segmento
2. $CE = BE$	**2.** Def. de punto medio
3. Sea F un punto tal que $A—E—F$ y $AE = EF$	**3.** Post. de la regla. y def. de entre
4. $\angle CEA \cong \angle BEF$	**4.** $\angle$s op.vert. son $\cong$
5. $\triangle ACE \cong \triangle FBE$	**5.** LAL = LAL
6. $m\angle C = m\angle FBE$	**6.** Partes corresp. de $\triangle$s $\cong$ son $\cong$
7. $m\angle CBD = m\angle FBE + m\angle FBD$	**7.** Post. de la suma de ángulos
8. $m\angle CBD = m\angle C + m\angle FBD$	**8.** Sustitución
9. $m\angle CBD - m\angle C = m\angle FBD$	**9.** Post. de suma de la =
10. $m\angle FBD > 0$	**10.** Post. del transportador
11. $m\angle CBD - m\angle C > 0$	**11.** Sustitución
12. $m\angle CBD > m\angle C$	**12.** Axioma de suma de la desigualdad

DEMOSTRACIÓN (b): (Punto 18 de los ejercicios 2.7).

A menudo es conveniente volver a plantear el teorema para facilitar su demostración. El siguiente postulado es bastante útil en este sentido.

Postulado 2.4 Una proposición y su contrapositiva son verdaderas o falsas ambas.

EJEMPLO 2 Analiza la veracidad o falsedad de la contrapositiva de la proposición "Si está nublado, entonces está lloviendo".

Solución La proposición dada es falsa, ya que algunas veces cuando está nublado no está lloviendo. En consecuencia, por el postulado 2.4, la contrapositiva de la proposición es falsa. ("Si no está lloviendo, entonces no está nublado)". ■

Por el postulado 2.4, en lugar de probar una proposición es posible demostrar su contrapositiva. Este concepto se desarrollará en la sección 3.2, a través del proceso de *demostración indirecta*. El siguiente teorema es un ejemplo de proposición que se prueba demostrando su contrapositiva.

Teorema 2.7 Existe exactamente una perpendicular a una recta que contiene un punto que no está en la recta.

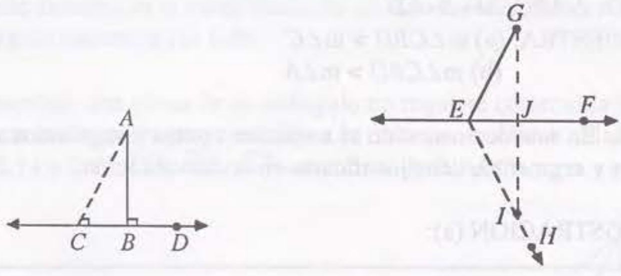


FIGURA 2.17

Este teorema puede probarse analizando los conceptos de **existencia** y **unicidad**. Para demostrar que existe *exactamente una* perpendicular que satisface una condición, hay que probar que existe *por lo menos una* perpendicular así (existencia) y que hay *cuando mucho una* perpendicular así (unicidad).

La demostración detallada del teorema 2.7 se deja como práctica (punto 19 de los ejercicios 2.7); sin embargo, aquí se analiza la demostración. La parte de unicidad del teorema se demuestra al probar que si el teorema 2.7 no es verdadero, entonces el teorema 2.6 no es cierto. Observa $\overline{AB}$ y $\overleftrightarrow{CD}$ en la figura 2.17. La parte de existencia del teorema se demuestra construyendo un ángulo $\angle FEH$ congruente a $\angle FEG$ tal que G y H estén en lados opuestos de $\overleftrightarrow{EF}$, y hallando un punto I en $\overrightarrow{EH}$ tal que $EI = EG$. El segmento de recta $\overline{GI}$ debe cortar a la recta $\overleftrightarrow{EF}$ en el punto J. Con los métodos de teoremas de congruencia es posible demostrar que $\triangle EGJ \cong \triangle EIJ$ y que $\angle EJG \cong \angle EJI$ y, en consecuencia, $\overline{GI} \perp \overleftrightarrow{EF}$. Estudia la figura 2.17.

EJERCICIOS 2.7

1. ¿Cuál es la diferencia entre la altura y la mediana de un triángulo?
2. ¿Cuántas alturas y cuántas medianas tiene un triángulo?
3. Construye un triángulo escaleno y construye todas sus alturas y medianas.
4. Construye un triángulo isósceles y construye todas sus alturas y medianas.
5. Construye un triángulo rectángulo y construye todas sus alturas y medianas.
6. ¿Todas las medianas de un triángulo parecen cortarse en un solo punto?
7. Si se trazan rectas que contienen las alturas de un triángulo, ¿parecen cortarse en un solo punto?

Escribe la contrapositiva de cada una de las proposiciones de los ejercicios 8 y 9.

8. Si dos ángulos de un triángulo no son congruentes, entonces los lados opuestos a estos ángulos no son congruentes.
9. Si $m\angle 1 \neq m\angle 2$, entonces $AB \neq CD$.

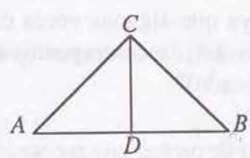


FIGURA PARA LOS EJERCICIOS 10 Y 11

10. DADO: $AC = BC$,
$\overline{CD}$ es una mediana
DEMUESTRA: $\overline{CD}$ es una altura

11. DADO: $\overline{CD}$ es una altura,
$\overline{CD}$ es una mediana
DEMUESTRA: $\triangle ACD \cong \triangle BCD$

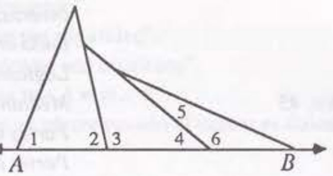


FIGURA PARA LOS EJERCICIOS 12 Y 13

12. DADO: Recta $\overleftrightarrow{AB}$
DEMUESTRA: $m\angle 2 > m\angle 5$

13. DADO: Recta $\overleftrightarrow{AB}$
DEMUESTRA: $m\angle 1 < m\angle 6$

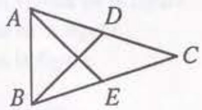


FIGURA PARA LOS EJERCICIOS 14 Y 15

14. DADO: $AC = BC$
$\overline{AE}$ y $\overline{BD}$ son medianas de $\triangle ABC$
DEMUESTRA: $AE = BD$

15. DADO: $AC = BC$,
$\angle DAE \cong \angle EBD$,
$AD = CE$
DEMUESTRA: $\overline{AE}$ y $\overline{BD}$ son medianas de $\triangle ABC$

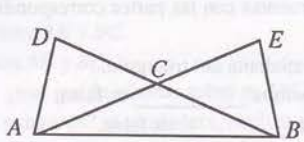


FIGURA PARA LOS EJERCICIOS 16 Y 17

16. DADO: $m\angle E = 90°$,
$CD = EC$,
$m\angle CAB = m\angle CBA$
DEMUESTRA: $\triangle ABD$ es un triángulo rectángulo

17. DADO: $AD = BE$,
$CD = CE$,
$\overline{AD}$ y $\overline{BE}$ son alturas de $\triangle ABC$
DEMUESTRA: $\triangle ABC$ es isósceles

18. DEMUESTRA: teorema 2.6(b).

19. DEMUESTRA: teorema 2.7.

20. Escucha conversaciones a tu alrededor. Cuando oigas una proposición "si-entonces", escríbela. Anota la contrapositiva de la proposición. ¿Significa lo mismo?

21. Escucha conversaciones a tu alrededor. Cuando oigas una proposición "si-entonces", anótala. Escribe la recíproca de la proposición. ¿Significa lo mismo?

TÉRMINOS CLAVE

EJERCICIOS DE REPASO

En la línea en blanco escribe la expresión* siempre, algunas veces *o* nunca, *según corresponda.

1. Las bisectrices de un par de ángulos suplementarios adyacentes __________ son perpendiculares entre sí.
2. Los suplementos de dos ángulos __________ son congruentes.
3. Las bisectrices de ángulos suplementarios __________ son perpendiculares.
4. Si los tres ángulos de un triángulo son congruentes con las partes correspondientes de otro triángulo, entonces los triángulos __________ son congruentes.
5. Una altura de un triángulo ________ es una mediana del triángulo.
6. Si una proposición es verdadera, su contrapositiva __________ es falsa.
7. Si una proposición es verdadera, su recíproca __________ es falsa.
8. Dos triángulos rectángulos __________ son congruentes.
9. Un triángulo equilátero __________ es isósceles.
10. Una mediana de un triángulo _______ lo divide en dos triángulos congruentes.

Verdadero-falso. Si la proposición es verdadera, indícalo con una V. Si es falsa, sustituye la palabra subrayada a fin de obtener una proposición verdadera.

11. La hipótesis de un teorema <u>incluye</u> la palabra “si”.
12. Los suplementos de ángulos <u>adyacentes</u> son congruentes.
13. Los ángulos opuestos por el vértice son <u>complementarios</u>.
14. Las partes correspondientes de triángulos congruentes son <u>congruentes</u>.
15. Si los tres <u>ángulos</u> de un triángulo son congruentes con las partes correspondientes de otro triángulo, los triángulos son congruentes.
16. Un triángulo <u>escaleno</u> es un triángulo con dos lados congruentes por lo menos.
17. Un <u>corolario</u> es un teorema estrechamente relacionado con otro teorema.
18. Una <u>altura</u> de un triángulo siempre corta un lado del triángulo.
19. Un ángulo externo de un triángulo es <u>menor</u> en medida que cualquier ángulo interno lejano.

20. Existe exactamente una <u>mediana</u> a una recta que contiene un punto que no está en la recta.

Contesta lo siguiente.

21. Escribe la hipótesis "Está nublado si está lloviendo".
22. Escribe la conclusión: "Abroche su cinturón por seguridad".
23. Escribe la conversa: "Los triángulos isósceles no son escalenos".
24. Escribe la recíproca: "Si $AB = BC$, entonces $m\angle A \neq m\angle B$".
25. Escribe la contrapositiva: "La remolacha es un placer cuando el azúcar es dulce".

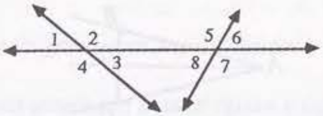


FIGURA PARA LOS EJERCICIOS 26 A 28

26. Identifica todos los pares de ángulos opuestos por el vértice en la figura.
27. Identifica todos los pares de ángulos suplementarios en la figura.
28. Identifica todos los pares de ángulos congruentes en la figura.
29. En $\triangle ABC$, si $\angle A \cong \angle B$ y $AC = 10$, encuentra BC.
30. Si $\overrightarrow{AD}$ bisecta $\angle BAC$ y $m\angle BAC = 37°$, encuentra $m\angle BAD$.
31. Si $\overleftrightarrow{AB} \cap \overleftrightarrow{CD} = \{E\}$ y $m\angle AEC = 112°$, encuentra $m\angle AED$.
32. Si $\triangle QRS \cong \triangle VRW$, encuentra la correspondencia entre los vértices de los triángulos, los lados de los triángulos y los ángulos de los triángulos.

En los ejercicios 33 a 36, escribe por qué $\triangle ABC \cong \triangle DCB$.

33. $\angle A \cong \angle D$, $m\angle ACB = m\angle DBC$, $AC = BD$.
34. $\angle ACB \cong \angle DBC$, $\angle ACD \cong \angle ABD$
35. $AC = BD$, $AB = CD$
36. $AB = CD$, $m\angle ABC = m\angle DCB$
37. Si $\triangle ABC$ es equiangular y $AC = 23$, encuentra AB y BC.
38. Si $\triangle ABC$ es equilátero y $AC = 23$, encuentra AB y BC.
39. En $\triangle ABC$, si $A—D—B$ y $m\angle BDC = 72°$, ¿qué puede afirmar sobre $m\angle ACD$?
40. Si la proposición "Todas las manzanas son canguros" es verdadera, explica por qué la siguiente proposición es verdadera: "Si algo no es un canguro, entonces no es una manzana".

Demostraciones:
En los ejercicios 41 a 46, sean $A—D—E—B$, $A—F—C$ y $B—G—C$.

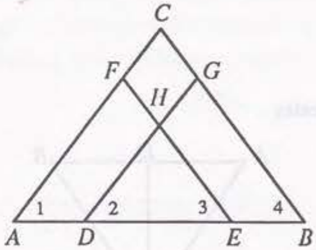


FIGURA PARA LOS EJERCICIOS 41 A 46

41. DADO: $AD = BE$
    DEMUESTRA: $AE = BD$

En los ejercicios 42 y 43, dados: $AF = EF = DG = BG, AD = BE, CF = CG,$

42. DEMUESTRA: $\angle 1 \cong \angle 2 \cong \angle 3 \cong \angle 4$
43. DEMUESTRA: $\triangle ABC$ y $\triangle DEH$ son isósceles.

En los ejercicios 44 a 46, dados: $AF = EF = DG = BG, AD = BE,$

44. DEMUESTRA: $\triangle AFE \cong \triangle DGB$ aplicando LLL = LLL
45. DEMUESTRA: $\triangle AFE \cong \triangle BGD$ aplicando ALA = ALA
46. DEMUESTRA: $\triangle FEA \cong \triangle GDB$ aplicando LAL = LAL

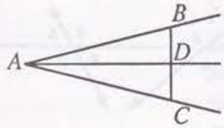


FIGURA PARA LOS EJERCICIOS 47 Y 48

47. DADO: $B—D—C$,
$AB = AC$,
$BD = CD$
DEMUESTRA: $\overrightarrow{AD}$ bisecta $\angle BAC$

48. DADO: $B—D—C$,
$AB = AC$,
$\overrightarrow{AD}$ bisecta $\angle BAC$
DEMUESTRA: $\overline{BC} \perp \overline{AD}$

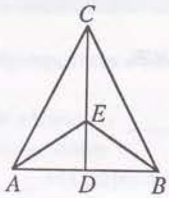


FIGURA PARA LOS EJERCICIOS 49 Y 50

49. DADO: $A—D—B$,
$C—E—D$,
$AC = BC$,
$AE = BE$
DEMUESTRA: $\overline{CD} \perp \overline{AB}$ y $\overline{CD}$ es una mediana

50. DADO: $A—D—B$,
$C—E—D$,
$\overline{CD} \perp \overline{AB}$,
$AD = BD$
DEMUESTRA: $\triangle ABC$ y $\triangle ABE$ son isósceles

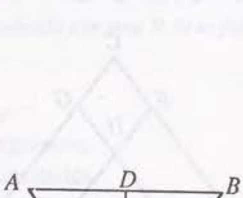


FIGURA PARA LOS EJERCICIOS 51 Y 52

51. DADO: $A—D—B$,
$m\angle 1 = m\angle 2$,
$\overline{CD}$ es una altura
DEMUESTRA: $\overline{CD}$ es una mediana

52. DADO: $A—D—B$,
$AC = BC$,
$\overline{CD}$ es una mediana,
DEMUESTRA: $\overline{CD}$ es una altura

Construcciones:

53. Traza un triángulo escaleno suficientemente grande con ángulos agudos y construye sus medianas (que deben cortarse en un solo punto).

54. Traza un triángulo escaleno suficientemente grande con ángulos agudos y construye sus alturas.

55. Repite el ejercicio 53 con un ángulo obtuso.

56. Repite el ejercicio 54 con un ángulo obtuso.

.... Paralelas y polígonos

3

Stock Montage, Inc.

PITÁGORAS (?-ca. 497 a.C.)

NOTA HISTÓRICA *El matemático griego Pitágoras reunió a un gr... de estudiantes en Crotona, Italia, para investigar sobre geometría, astrono... y música. La escuela pitagórica utilizó los términos* figurado *y* poligonal *p... representar ciertos conjuntos de números que podían ilustrarse medi... patrones geométricos. Por ejemplo, 1, 3 y 6 son números triangulares*

```
                         *
            *          *   *
*         *   *      *   *   *
```

y 1, 4 y 9 son números cuadrados.

```
                     *  *  *
          *  *       *  *  *
*         *  *       *  *  *
```

Otros conjuntos comunes son los números pentagonales y hexagonales.

En este capítulo se presentará el concepto de rectas paralelas en geometría euclidiana. Luego se ampliarán los métodos de prueba a fin de incluir las demostraciones indirectas. Por último, se analizarán varios tipos de polígonos y teoremas relacionados con polígonos, incluyendo polígonos que contienen lados paralelos.

3.1 Postulados sobre paralelas

Dos rectas en el mismo plano se cortan o no se cortan. Las rectas que se cortan ya se analizaron; a continuación se abordará el estudio de aquellas que no se cortan.

Definición

Dos rectas distintas en un plano son **paralelas** si no se cortan.

Dos segmentos de recta distintos son paralelos si las rectas que los contienen son paralelas. Si la recta j es paralela a la recta k, se escribe $j \parallel k$ y se dice "j es paralela a k". Con esta notación es posible afirmar que $j \parallel k$ si $j \cap k = \emptyset$.

EJEMPLO 1 En la figura 3.1, sea $j \parallel k$.

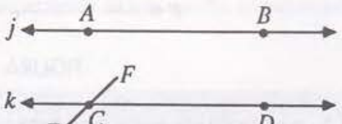


FIGURA 3.1

a. ¿Es $\overline{AB} \parallel \overline{CD}$?
b. ¿Es $\overline{AB} \parallel \overline{EF}$?

Solución **a.** Nota que $\overline{AB} \subset j$ y $\overline{CD} \subset k$, de modo que se sabe que $\overline{AB} \parallel \overline{CD}$.
b. $\overline{AB}$ no es paralela a $\overline{EF}$, aun cuando $\overline{AB} \cap \overline{EF} = \emptyset$, ya que las rectas que contienen a $\overline{AB}$ y $\overline{EF}$ no son paralelas. ■

Un punto es **externo** a un conjunto si no es un elemento del conjunto.

EJEMPLO 2

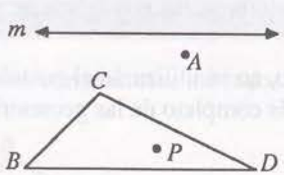


FIGURA 3.2

En la figura 3.2,
a. ¿A es externo a la recta m?
b. ¿P es externo a $\triangle BCD$?

Solución **a.** Sí, ya que A no es un elemento de la recta m.
b. Sí, puesto que P no es un elemento de $\triangle BCD$. ■

¡PRECAUCIÓN! Algunas veces los estudiantes confunden estar *en* un triángulo con estar en el *interior* de un triángulo. Considerar el triángulo como un *hueco*. Un punto *en* un triángulo debe estar *en* (o *sobre*) uno de los segmentos de recta que forman el triángulo. El punto P de la figura 3.2 no está *en* un segmento de recta, de modo que no puede estar *en* el triángulo. Debido a que P no está en $\triangle BCD$, es externo a $\triangle BCD$; sin embargo, P no está en el *exterior* de $\triangle BCD$. En la figura 3.2, el punto A está en el *exterior* de $\triangle BCD$ y es *externo* a $\triangle BCD$. Quizá sea conveniente consultar la sección 1.3 para revisar las definiciones de triángulo e interior y exterior del mismo.

Una recta pasa **por** un punto si la recta contiene al punto.

Postulado 3.1 **(Postulado de las paralelas)** Por un punto externo pasa exactamente una paralela a la recta a una recta dada.

EJEMPLO 3 En la figura 3.3, si $p \parallel n$, ¿cuántas rectas pasan por Q y son paralelas a n?

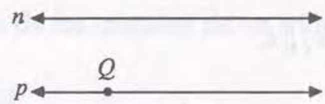


FIGURA 3.3

Solución Por el postulado 3.1, p es la única recta que pasa por Q y es paralela a la recta n. ■

El postulado de las paralelas produjo bastantes controversias durante muchos siglos. Euclides no pudo demostrar la proposición y, por lo tanto, la transformó en postulado. Muchos matemáticos también lo intentaron pero fracasaron. Por último, varios matemáticos, trabajando de manera independiente pero casi al mismo tiempo, decidieron sustituir este postulado por otro, y al hacerlo crearon nuevas geometrías (no euclidianas). Lobachevski y Bolyai establecieron el *postulado L-B*, y Riemann creó el *postulado R*.

Postulado L-B Por un punto externo a una recta dada pasa una infinidad de paralelas a la recta.

Postulado R Por un punto externo a una recta dada no pasa ninguna paralela a la recta pasa.

Por el momento, no se utilizarán el postulado L-B ni el postulado R. Consulta el capítulo 10 para un análisis más completo de las geometrías no euclidianas.

EJERCICIOS 3.1

Contesta las preguntas y proporciona razones que justifiquen tus respuestas. En los ejercicios 1 a 5, $\overleftrightarrow{AB} \parallel \overleftrightarrow{CD}$ en la figura dada.

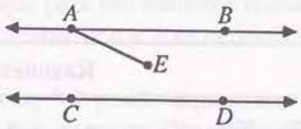


FIGURA PARA LOS EJERCICIOS 1 A 5

1. ¿Es $\overline{AB} \parallel \overline{CD}$?
2. ¿Es $\overline{AE} \parallel \overline{AB}$?
3. ¿Es $\overline{AE} \parallel \overline{CD}$?
4. ¿Existe un punto P en $\overleftrightarrow{CD}$ tal que $\overleftrightarrow{EP} \parallel \overleftrightarrow{BD}$?
5. ¿Existe un punto Q en $\overleftrightarrow{CD}$ tal que $\overleftrightarrow{EQ} \parallel \overleftrightarrow{AB}$?

En los ejercicios 6 a 10, sean* j, k *y* m *tres rectas distintas y sea* P *un punto.

6. Si $j \parallel k$ y $j \parallel m$, ¿es $k \parallel m$?
7. Si $j \parallel k$ y $k \cap m = \emptyset$, ¿es $j \parallel m$?
8. Si $j \cap k \neq \emptyset$ y $k \cap m \neq \emptyset$, ¿es posible que $j \cap m = \emptyset$?
9. Si $j \cap k = \{P\}$ y $k \cap m \neq \{P\}$, ¿es $j \cap m = \{P\}$?
10. Si $j \cap k \neq \emptyset$, $j \cap k \neq \{P\}$, $k \cap m = \{P\}$, ¿es posible que $j \cap m = \{P\}$?
11. Proporciona ejemplos de segmentos de recta paralelos en una cancha de futbol.
12. Da ejemplos de segmentos de recta paralelos en una cancha de tenis.
13. Proporciona ejemplos de segmentos de recta que no sean paralelos en un campo de beisbol.
14. Anota ejemplos de segmentos de recta que no sean paralelos en una cancha de baloncesto.

3.2 Demostración indirecta

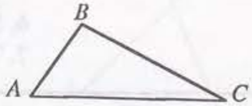
Por la **ley del medio excluido**, si dos proposiciones son contradictorias y una es verdadera, entonces la otra es falsa. En el método de demostración (o prueba) indirecta se utiliza esta ley para demostrar algunos teoremas.

Considera las dos proposiciones $\angle 1 \cong \angle 2$ y $\angle 1 \not\cong \angle 2$. Estas proposiciones son contradictorias, ya que $\angle 1 \cong \angle 2$ y $\angle 1 \not\cong \angle 2$ no pueden ser verdaderas ambas. Si $\angle 1 \cong \angle 2$ es verdadera, entonces $\angle 1 \not\cong \angle 2$ debe ser falsa o a la inversa.

En un problema dado, supón que se desea demostrar que $AB \neq CD$. Esto se hace probando que la proposición $AB = CD$ es falsa, lo que se logra suponiendo primero que la proposición $AB = CD$ es verdadera. Si esta hipótesis conduce a una contradicción de hecho, entonces la conclusión $AB = CD$ debe ser falsa y la conclusión $AB \neq CD$ es verdadera.

El siguiente teorema se demostrará mediante la aplicación de la **prueba indirecta.**

Teorema 3.1 Si dos ángulos de un triángulo no son congruentes, los lados opuestos a estos ángulos no son congruentes.



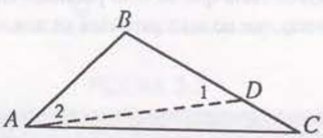
DADO: $\triangle ABC$, $\angle C \not\cong \angle A$
DEMUESTRA: $\overline{AB} \not\cong \overline{BC}$

DEMOSTRACIÓN:

Proposiciones	Razones
1. Una de dos, $\overline{AB} \cong \overline{BC}$ o $\overline{AB} \ncong \overline{BC}$	**1.** Ley del medio excluido
2. $\overline{AB} \cong \overline{BC}$	**2.** Hipótesis
3. $\angle C \cong \angle A$	**3.** Si dos lados de un $\triangle$ son $\cong$, los $\angle$s op. a estos lados son $\cong$
4. $\angle C \ncong \angle A$	**4.** Dado
5. $\overline{AB} \ncong \overline{BC}$	**5.** Suponer $\overline{AB} \cong \overline{BC}$ condujo a dos prop. contradictorias (3 y 4); por lo tanto, la prop. (2) es falsa.

El siguiente teorema plantea más que la recíproca del teorema 3.1 y puede demostrarse sin utilizar la prueba indirecta.

Teorema 3.2 Si dos lados de un triángulo no son congruentes, los ángulos opuestos a estos lados tampoco y el ángulo de mayor medida es opuesto al lado más largo.



DADO: $\triangle ABC$, $BC > AB$
DEMUESTRA: $m\angle A > m\angle C$
DEMOSTRACIÓN:

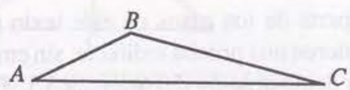
Proposiciones	Razones
1. $BC > AB$	**1.** Dado
2. Existe un punto D en $\overline{BC}$ tal que $BD = AB$	**2.** Post. de la regla y def. de longitud
3. $m\angle 2 = m\angle 1$	**3.** Si 2 lados de un $\triangle$ son $\cong$, los $\angle$s op. a estos lados son $\cong$
4. $m\angle 1 > m\angle C$	**4.** Un $\angle$externo de un $\triangle$ > cualquier $\angle$interno lejano
5. $m\angle A > m\angle 2$	**5.** Post. de suma de ángulos y def. de medida
6. $m\angle A > m\angle 1$	**6.** Sustitución (Prop. 3, 5)
7. $m\angle A > m\angle C$	**7.** Transitividad (Prop. 4, 6)

Algunas veces, una demostración indirecta comprende o requiere más de dos proposiciones mutuamente excluyentes. En este caso, para demostrar que una proposición es verdadera, debe probarse que todas las demás posibilidades son falsas.

Por ejemplo, se sabe que para dos números reales cualesquiera a y b ocurre $a < b$, $a = b$ o $a > b$. (tricotomía). Para demostrar $a < b$ es necesario probar que ambas proposiciones $a = b$ y $a > b$ son falsas.

La recíproca del teorema 3.2 puede demostrarse de esta manera. Se probará utilizando la **forma de párrafo** de una demostración. Observa el parecido entre este teorema y el teorema 3.1.

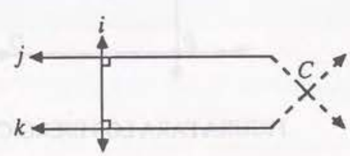
Teorema 3.3 Si dos ángulos de un triángulo no son congruentes, los lados opuestos a estos ángulos no son congruentes y el lado más largo es opuesto al ángulo de mayor medida.



DADO: $\triangle ABC$, $m\angle A > m\angle C$
DEMUESTRA: $BC > AB$
DEMOSTRACIÓN: Por tricotomía, $BC = AB$, $BC < AB$ o $BC > AB$. Supón que $BC = AB$. Entonces $m\angle A = m\angle C$, ya que si dos lados de un triángulo son congruentes, los ángulos opuestos a estos lados son congruentes. La proposición $m\angle A = m\angle C$ es una contradicción de la hipótesis $m\angle A > m\angle C$. Supón que $BC < AB$. Por el teorema 3.2, $m\angle A < m\angle C$. La proposición $m\angle A < m\angle C$ también es una contradicción con la hipótesis $m\angle A > m\angle C$. En consecuencia, $BC > AB$.

El siguiente es otro ejemplo de un teorema que se demostrará aplicando la forma de párrafo.

Teorema 3.4 Dos rectas en un plano perpendicular a una tercera recta en el mismo plano son paralelas.



DADO: Rectas i, j, k;
$i \perp j$, $i \perp k$
DEMUESTRA: $j \parallel k$
DEMOSTRACIÓN: Por dicotomía, $j \parallel k$ o $j \cap k \neq \emptyset$. Supón que $j \cap k = \{C\}$. Entonces existen dos perpendiculares a i que pasan por C, lo que contradice la proposición de que por un punto que no pertenece a una recta pasa exactamente una perpendicular a la recta (teorema 2.7). En consecuencia, $j \parallel k$.

EJEMPLO

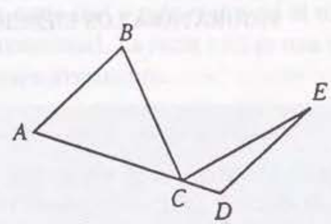


FIGURA 3.4

DADO: $\triangle ABC, \triangle DEC, AB = DE,$
$BC = CE, AC \neq CD$
DEMUESTRA: $m\angle B \neq m\angle E$

Solución Analiza la figura 3.4. Hay dos opciones: $m\angle B = m\angle E$ o $m\angle B \neq m\angle E$. Supón que $m\angle B = m\angle E$. Entonces $\triangle ABC \cong \triangle DEC$ por LAL = LAL, ya que se cuenta con $AB = DE$ y $BC = CE$. Así, $AC = CD$, puesto que las partes correspondientes de triángulos congruentes son congruentes. Esto contradice la proposición dada de que $AC \neq CD$. En consecuencia, $m\angle B \neq m\angle E$. ■

En la mayor parte de los casos de este texto se utiliza la forma de párrafo para demostrar teoremas que requieren una prueba indirecta; sin embargo, es posible realizar las pruebas indirectas como se ilustró la demostración del teorema 3.1. Todas las demostraciones pueden efectuarse en forma de párrafo, pero suele ser más fácil aprender a hacer demostraciones en la forma normal a dos columnas.

EJERCICIOS 3.2

1. En $\triangle ABC$, si $m\angle A = 63°$, $m\angle B = 61°$, $m\angle C = 56°$ y $AC = 8$, ¿qué puedes afirmar sobre AB y BC? ¿Por qué?
2. En $\triangle ABC$, si $m\angle A = 37°$, $m\angle B = 35°$ y $BC = 10$, ¿qué puedes afirmar sobre AC y AB? ¿Por qué?
3. En $\triangle ABC$, si $AB = 5$, $BC = 7$ y $m\angle A = 42°$, ¿qué puedes afirmar sobre $m\angle C$? Si $m\angle A + m\angle B + m\angle C = 180°$, ¿qué puedes afirmar sobre $m\angle B$? ¿Por qué?
4. En $\triangle ABC$, si $AB = 10$, $BC = 12$, $AC = 14$, $m\angle A = 65°$ y si $m\angle A + m\angle B + m\angle C = 180°$, ¿qué puedes afirmar sobre $m\angle B$ y $m\angle C$? ¿Por qué?

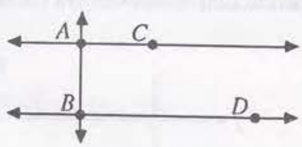


FIGURA PARA LOS EJERCICIOS 5 Y 6

5. Si $\overleftrightarrow{AC} \perp \overleftrightarrow{AB}$ y $\overleftrightarrow{BD} \perp \overleftrightarrow{AB}$, ¿se cumple que $\overleftrightarrow{AC} \parallel \overleftrightarrow{BD}$? ¿se cumple que $\overline{AC} \parallel \overline{BD}$? ¿Por qué?
6. Si $\overleftrightarrow{AB} \perp \overleftrightarrow{AC}$ y $m\angle ACD \neq 90°$, ¿se cumple que $\overleftrightarrow{CD} \parallel \overleftrightarrow{AB}$? ¿Por qué?
7. ¿Es posible que un triángulo tenga dos lados paralelos? ¿Por qué?
8. ¿Es posible que un triángulo tenga dos ángulos rectos? ¿Por qué?

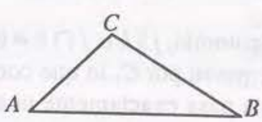


FIGURA PARA LOS EJERCICIOS 9 A 14

9. DADO: $m\angle A \neq m\angle B$
DEMUESTRA: $BC \neq AC$
10. DADO: $AB = BC$, $m\angle A \neq m\angle B$
DEMUESTRA: $AB \neq AC$
11. DADO: $AB \neq BC$
DEMUESTRA: $m\angle C \neq m\angle A$
12. DADO: $m\angle B = m\angle A$, $AB \neq BC$

DEMUESTRA: $m\angle B \neq m\angle C$

13. DADO: $m\angle A \neq m\angle B$, $m\angle A \neq m\angle C$, $m\angle B \neq m\angle C$
DEMUESTRA: $AB \neq BC$, $AB \neq AC$, $AC \neq BC$

14. DADO: $AB \neq BC$, $AB \neq AC$, $AC \neq BC$
DEMUESTRA: $m\angle A \neq m\angle B$, $m\angle A \neq m\angle C$, $m\angle B \neq m\angle C$
(Una recíproca del ejercicio 13)

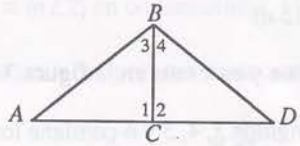


FIGURA PARA LOS EJERCICIOS 15 Y 16

15. DADO: $m\angle D < m\angle A < m\angle 1$
DEMUESTRA: $BC < AB < BD$

16. DADO: $AC = CD$,
$m\angle 3 \neq m\angle 4$
DEMUESTRA: $m\angle 1 \neq m\angle 2$

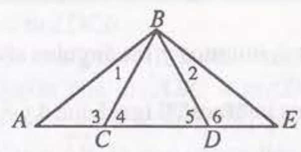


FIGURA PARA LOS EJERCICIOS 17 A 20

17. DADO: $\triangle ABC \not\cong \triangle EBD$,
$AC = DE$
DEMUESTRA: $m\angle 4 \neq m\angle 5$

18. DADO: $AB = BE$,
$AC \neq DE$
DEMUESTRA: $m\angle 1 \neq m\angle 2$

19. DADO: $m\angle 4 \neq m\angle 5$,
$AC = DE$
DEMUESTRA: $AB \neq BE$

20. DADO: $m\angle 3 = m\angle 6$,
$m\angle 1 \neq m\angle 2$
DEMUESTRA: $AC \neq DE$

3.3 Transversales

Una **transversal** es una recta que corta dos o más rectas en el mismo plano en puntos distintos. En la figura 3.5, la recta t es una transversal. La recta s no es una transversal. La recta t **corta** a las rectas j y k en los puntos A y B, respectivamente.

Definición

Los cuatro ángulos formados por un par de rectas y una transversal, de modo que ambos puntos de intersección estén en uno de los lados de cada ángulo, son **ángulos internos**. Los otros cuatro ángulos son **ángulos externos**.

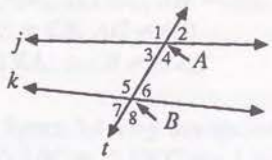


FIGURA 3.5 a)

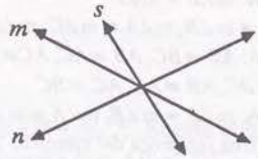


FIGURA 3.5 b)

EJEMPLO 1 Identifica los ángulos internos y externos en la figura 3.5 a).

Solución Dado que cada uno de los ángulos 3, 4, 5 y 6 contiene los dos puntos A y B, son ángulos internos. Los ángulos 1, 2, 7 y 8 son los ángulos externos. ■

Definición

Dos ángulos internos no adyacentes en lados opuestos de una transversal son **ángulos alternos internos**. Los dos ángulos externos no adyacentes en lados opuestos de una transversal son **ángulos alternos externos**.

EJEMPLO 2 Identifica los ángulos alternos internos y los ángulos alternos externos en la figura 3.5 a).

Solución Los ángulos 3 y 6 son alternos internos; al igual que 4 y 5. Los ángulos 1 y 8 son alternos externos; l igual que 2 y 7. ■

Definición

Dos ángulos no adyacentes en el mismo lado de la transversal son **ángulos correspondientes** si uno es interno y el otro es externo.

EJEMPLO 3 Identifica los ángulos correspondientes en la figura 3.5 a).

Solución Los ángulos correspondientes son las parejas: ángulos 1 y 5, ángulos 3 y 7, ángulos 2 y 6, y ángulos 4 y 8. ■

El teorema 3.5 se enuncia para completar el cuadro, pero la demostración se deja como ejercicio. (Consulta el punto 28 de los ejercicios 3.3.)

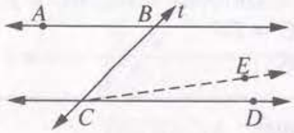
Teorema 3.5 Si una recta en un plano es perpendicular a una de dos rectas paralelas en el mismo plano, entonces también es perpendicular a la otra.

Siguen otros dos ejemplos de teoremas que se prueban por demostración indirecta usando la forma de párrafo.

Teorema 3.6 Si dos rectas son cortadas por una transversal de modo que los ángulos alternos internos sean congruentes, entonces las rectas son paralelas.

DADO: $m\angle 1 = m\angle 2$
DEMUESTRA: $j \parallel k$
DEMOSTRACIÓN: Por dicotomía, $j \parallel k$ o $j \cap k \neq \emptyset$. Supón que $j \cap k = \{C\}$. Entonces $\angle 1$ es un ángulo externo de $\triangle ABC$ y así $m\angle 1 > m\angle 2$, ya que el ángulo externo de un triángulo es mayor en medida que cualquiera de los ángulos internos lejanos. La proposición $m\angle 1 > m\angle 2$ contradice la proposición dada $m\angle 1 = m\angle 2$; en consecuencia, $j \parallel k$.

Teorema 3.7 Si dos rectas paralelas son cortadas por una transversal, entonces los ángulos alternos internos son congruentes.



DADO: $\overleftrightarrow{AB} \parallel \overleftrightarrow{CD}$
DEMUESTRA: $m\angle ABC = m\angle DCB$
DEMOSTRACIÓN: Hay tres posibilidades: $m\angle ABC < m\angle DCB$, $m\angle ABC > m\angle DCB$ o $m\angle ABC = m\angle DCB$. Supón que $m\angle ABC < m\angle DCB$. Entonces existe un rayo $\overrightarrow{CE}$ tal que $m\angle ABC = m\angle ECB$. Por el teorema 3.6, $\overleftrightarrow{AB} \parallel \overleftrightarrow{CE}$; pero por hipótesis $\overleftrightarrow{AB} \parallel \overleftrightarrow{CD}$. Así, por el punto C pasan dos rectas paralelas a $\overleftrightarrow{AB}$, lo que contradice el postulado de las paralelas. De manera semejante, la hipótesis $m\angle ABC > m\angle DCB$ conduce a una contradicción del postulado de las paralelas (consulta el punto 29 de los ejercicios 3.3); por lo tanto, $m\angle ABC = m\angle DCB$.

¡PRECAUCIÓN! En el teorema 3.6 se *concluye* que las rectas son paralelas. En el teorema 3.7 se *supone* que las rectas son paralelas. Debes ser muy cuidadoso en la aplicación del teorema apropiado a la situación correcta. Aplica el teorema 3.6 si intentas demostrar que las rectas son paralelas. Usa el teorema 3.7 si ya sabes que las rectas son paralelas. Ten en mente esta idea cuandos apliques otros teoremas semejantes.

Los teoremas 3.6 y 3.7 son proposiciones recíprocas entre sí. Ambos teoremas pueden plantearse en una oración utilizando las palabras **si y sólo si**: los ángulos alternos internos formados por dos rectas y una transversal son congruentes si y sólo si las rectas son paralelas. En general, si se tienen dos proposiciones "p" y "q", la proposición "p si y sólo si" equivale a la proposición "si p entonces q, y si q entonces p". La porción *si* de la proposición es "si q entonces p" y la porción *sólo si* de la proposición es "si p entonces q".

El siguiente ejemplo recalca la diferencia entre la "proposición si" y la "proposición sólo si". De manera intencional se presenta un ejemplo sencillo, de modo que puedas concentrarte en la forma y no en la demostración misma.

EJEMPLO 4 DADO: $\triangle ABC$, $\triangle DEF$, $AB = DE$, $BC = EF$
DEMUESTRA: $\triangle ABC \cong \triangle DEF$ si y sólo si $AC = DF$.

Solución En el inciso a) se demuestra la "proposición si" y en el inciso b) se demuestra la "proposición sólo si".
a. DADO: $\triangle ABC$, $\triangle DEF$, $AB = DE$, $BC = EF$, $AC = DF$
DEMUESTRA: $\triangle ABC \cong \triangle DEF$

DEMOSTRACIÓN:

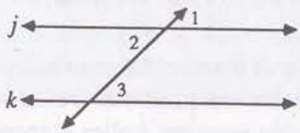
Proposiciones	Razones
1. $\triangle ABC$, $\triangle DEF$, $AB = DE$, $BC = EF$, $AC = DF$	1. Dado
2. $\triangle ABC \cong \triangle DEF$	2. LLL = LLL

b. DADO: $\triangle ABC \cong \triangle DEF$, $AB = DE$, $BC = EF$
DEMUESTRA: $AC = DF$
DEMOSTRACIÓN:

Proposiciones	Razones
1. $\triangle ABC \cong \triangle DEF$	1. Dado
2. $AC = DF$	2. Partes corr. de$\triangle$s $\cong$ son $\cong$

Observa que la parte dada en el inciso b) contiene más información de la necesaria.

Teorema 3.8 Los ángulos correspondientes formados por dos rectas y una transversal son congruentes si y sólo si las rectas son paralelas.



a. DADO: $j \parallel k$
DEMUESTRA: $m\angle 1 = m\angle 3$
b. DADO: $m\angle 1 = m\angle 3$
DEMUESTRA: $j \parallel k$
DEMOSTRACIÓN a):

Proposiciones	Razones
1. $j \parallel k$	1. Dado
2. $m\angle 1 = m\angle 2$	2. $\angle$s op. vert. son $\cong$
3. $m\angle 2 = m\angle 3$	3. Si 2 rectas $\parallel$ son cortadas por una trans., los $\angle$s alt. int. son $\cong$
4. $m\angle 1 = m\angle 3$	4. Transitividad

DEMOSTRACIÓN b): Consulta el punto 30 de los ejercicios 3.3.

Las demostraciones de los dos teoremas siguientes se dejan como ejercicio (consulta los puntos 31 y 32 de los ejercicios 3.3).

Teorema 3.9 Los ángulos alternos externos formados por dos rectas y una transversal son congruentes si y sólo si las rectas son paralelas.

Teorema 3.10 Los ángulos internos formados por dos rectas y una transversal, de modo que los ángulos estén del mismo lado de la transversal, son suplementarios si y sólo si las rectas son paralelas.

EJEMPLO 5 Encuentra las medidas de los ángulos si $m\angle 3 = 55°$ y $j \parallel k$ en la figura 3.6.

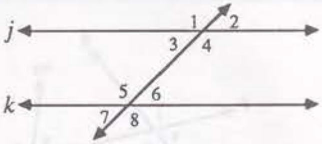


FIGURA 3.6

Solución Los ángulos 2, 3, 6 y 7 miden 55° cada uno.
Los ángulos 1, 4, 5 y 8 miden 125° cada uno. ■

¡PRECAUCIÓN! Es importante que adviertas la necesidad del término *paralelas* en los teoremas precedentes. En la figura 3.7, sean $j \cap k \neq \emptyset$ y $m\angle 3 = 55°$. No hay forma de encontrar la medida de $\angle 6$ con sólo la medida de $\angle 3$, ya que j y k no son paralelas. Todo lo que puede asegurarse es que $m\angle 6 \neq 55°$; sin embargo, por definición los ángulos $\angle 3$ y $\angle 6$ siguen siendo alternos internos, pero sus medidas no son iguales. De manera semejante, por definición, $\angle 2$ y $\angle 6$ son ángulos correspondientes y $\angle 2$ y $\angle 7$ son alternos externos. De nuevo, los ángulos de estas parejas no miden lo mismo.

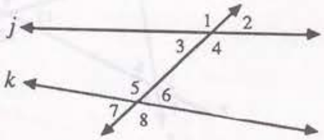
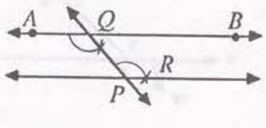


FIGURA 3.7

CONSTRUCCIÓN 3.1
Construye la paralela a la recta por un punto externo a ésta.



DADO: $\overleftrightarrow{AB}$, P
CONSTRUYE: $\overleftrightarrow{PR} \parallel \overleftrightarrow{AB}$

Paso 1. Por P, traza cualquier recta que corte $\overleftrightarrow{AB}$. Sea Q el punto de intersección.

Paso 2. En P, construye $\angle QPR$ tal que $\angle QPR \cong \angle PQA$ y tal que $\angle QPR$ y $\angle PQA$ sean ángulos alternos internos.

Paso 3. Traza $\overleftrightarrow{PR}$. Ésta es la recta buscada ya que, por el postulado de las paralelas, por el punto P pasa exactamente una paralela a $\overleftrightarrow{AB}$.

Esta construcción puede efectuarse con otros métodos.

EJERCICIOS 3.3

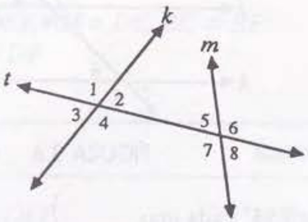


FIGURA PARA LOS EJERCICIOS 1 A 5

1. Enumera todos los ángulos internos.
2. Enumera todos los ángulos externos.
3. Enumera todos los pares de ángulos alternos internos.
4. Enumera todos los pares de ángulos alternos externos.
5. Enumera todos los pares de ángulos correspondientes.

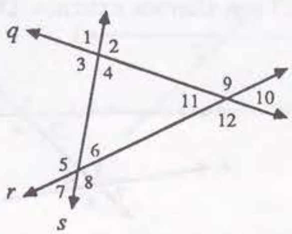


FIGURA PARA LOS EJERCICIOS 6 A 8

6. Enumera todos los pares de ángulos alternos internos.
7. Enumera todos los pares de ángulos alternos externos.
8. Enumera todos los pares de ángulos correspondientes.

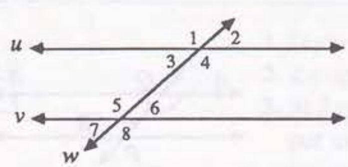


FIGURA PARA LOS EJERCICIOS 9 Y 10

En los ejercicios 9 y 10, u ‖ v.

9. Si $m\angle 1 = 137°$, encuentra las medidas de los otros ángulos.
10. Si $m\angle 6 = 89°$, encuentra las medidas de los otros ángulos.

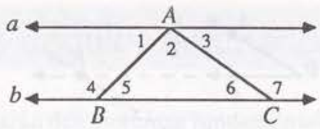


FIGURA PARA LOS EJERCICIOS 11 A 14

En los ejercicios 11 a 14, **a ∥ b.**

11. DEMUESTRA: $m\angle 1 + m\angle 3 = m\angle 5 + m\angle 6$

12. DEMUESTRA: $m\angle 1 + m\angle 4 = 180^\circ$

13. DEMUESTRA: $m\angle 7 > m\angle 1$

14. DEMUESTRA: $m\angle 2 + m\angle 5 + m\angle 6 = 180^\circ$

En los ejercicios 15 a 18, **g ∥ h, h ∥ i.**

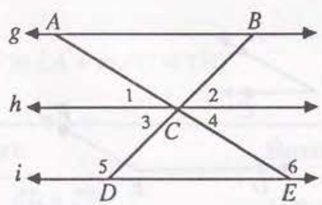


FIGURA PARA LOS EJERCICIOS 15 A 18

15. DEMUESTRA: $m\angle 5 = m\angle 1 + m\angle ACB$

16. DADO: $AC = BC$
DEMUESTRA: $m\angle CDE = m\angle BAC$

17. DADO: $AC = BC$
DEMUESTRA: $m\angle 5 = m\angle 6$

18. DADO: $AC \neq BC$
DEMUESTRA: $m\angle 3 \neq m\angle 4$

En los ejercicios 19 a 23, $\overleftrightarrow{GH} \parallel \overleftrightarrow{IJ}$.

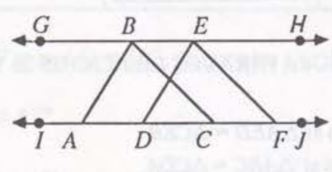


FIGURA PARA LOS EJERCICIOS 19 A 23

19. DADO: $m\angle GBA = m\angle EDC$
DEMUESTRA: $\overleftrightarrow{AB} \parallel \overleftrightarrow{DE}$

20. DADO: $m\angle HEF = m\angle ACB$
DEMUESTRA: $\overline{BC} \parallel \overline{EF}$

21. DADO: $m\angle IAB + m\angle BED = 180^\circ$
DEMUESTRA: $\overleftrightarrow{AB} \parallel \overleftrightarrow{DE}$

22. DADO: $\triangle ABC \cong \triangle DEF$
DEMUESTRA: $\overline{AB} \parallel \overline{DE}$ y $\overline{BC} \parallel \overline{EF}$

23. DADO: $\overleftrightarrow{AB} \cap \overleftrightarrow{DE} \neq \emptyset$
DEMUESTRA: $\triangle ABC \not\cong \triangle DEF$

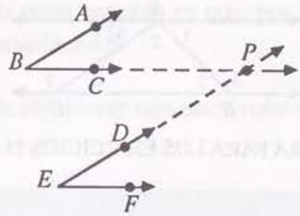


FIGURA PARA EL EJERCICIO 24

24. DEMUESTRA: Si $\overrightarrow{BA} \parallel \overrightarrow{ED}$ y
$\overrightarrow{BC} \parallel \overrightarrow{EF}$, entonces
$m\angle B = m\angle E$.
(*Sugerencia:* Extiende $\overrightarrow{BC}$ y $\overrightarrow{ED}$ hasta que se corten en P.)

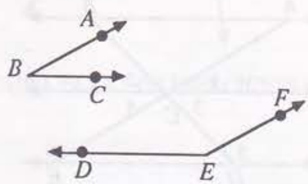


FIGURA PARA EL EJERCICIO 25

25. DEMUESTRA: Si $\overrightarrow{BA} \parallel \overrightarrow{EF}$ y
$\overrightarrow{BC} \parallel \overrightarrow{ED}$ entonces
$m\angle B + m\angle E = 180°$

En los ejercicios 26 y 27, **A—E—C y B—E—D**.

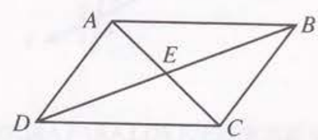


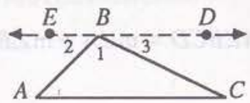
FIGURA PARA LOS EJERCICIOS 26 Y 27

26. DEMUESTRA: $\triangle ABE \cong \triangle CDE$ si y sólo si $\triangle AED \cong \triangle CEB$
27. DEMUESTRA: $\triangle ABD \cong \triangle CDB$ si y sólo si $\triangle ABC \cong \triangle CDA$
28. Demuestra el teorema 3.5.
29. Termina la demostración del teorema 3.7.
30. Demuestra el inciso b) del teorema 3.8.
31. Demuestra el teorema 3.9.
32. Demuestra el teorema 3.10.
33. Traza una recta k y un punto P que no esté en k. Aplica el método mostrado en esta sección para construir la recta que pasa por P y es paralela a k.
34. Efectúa la construcción 3.1 usando ángulos correspondientes.
35. Efectúa la construcción 3.1 con ángulos alternos externos.

3.4 Medidas de los ángulos de un triángulo

En esta sección se analizarán dos teoremas fundamentales y otro de congruencia. Uno se relaciona con la suma de las medidas de los ángulos de un triángulo y otro, con la medida de un ángulo externo de un triángulo. Estos teoremas se usan a menudo en problemas de cómputo.

Teorema 3.11 La suma de las medidas de los ángulos de un triángulo es 180°.



DADO: $\triangle ABC$
DEMUESTRA: $m\angle 1 + m\angle A + m\angle C = 180°$
DEMOSTRACIÓN:

Proposiciones	**Razones**
1. Construye $\overleftrightarrow{BD} \parallel \overleftrightarrow{AC}$.	1. Post. de las paralelas.
2. $\angle EBD$ es un $\angle$llano.	2. Def. de $\angle$llano.
3. $m\angle 1 + m\angle 2 + m = 3 = m\angle EBD$	3. Post. de la suma de $\angle$s.
4. $m\angle EBD = 180°$	4. La medida de un $\angle$llano es 180°.
5. $m\angle 1 + m\angle 2 + m\angle 3 = 180°$	5. Prop. 3 y 4; sustitución.
6. $m\angle A = m\angle 2$, $m\angle C = m\angle 3$	6. Si 2 rectas $\parallel$ son cortadas por una transv., los $\angle$s alt. int. son $\cong$.
7. $m\angle 1 + m\angle A + m\angle C = 180°$	7. Sustitución.

EJEMPLO 1 Si en $\triangle ABC$, $m\angle A = 57°$ y $m\angle C = 68°$, encuentra $m\angle B$.

Solución $m\angle B = 180° - 57° - 68° = 55°$. ■

EJEMPLO 2 Si en $\triangle ABC$, $m\angle A = 4(m\angle B)$ y $m\angle C = 5(m\angle B)$, halla las medidas de todos los ángulos.

Solución Sea $m\angle B = x$. Entonces $m\angle A = 4x$ y $m\angle C = 5x$. Así,

$$4x + x + 5x = 180°$$
$$10x = 180°$$
$$x = 18°.$$

En consecuencia, $m\angle A = 72°$, $m\angle B = 18°$ y $m\angle C = 90°$. ■

El siguiente teorema de congruencia es una conclusión del teorema 3.11. Su demostración se deja como ejercicio (consulta el punto 12 de los ejercicios 3.4).

Teorema 3.12 (**LAA = LAA**) Si dos ángulos y cualquier lado de un triángulo son congruentes con las partes correspondientes de otro triángulo, entonces los triángulos son congruentes.

La demostración del siguiente teorema también se deja como ejercicio.

Teorema 3.13 Un ángulo externo de un triángulo mide lo mismo que la suma de las medidas de los ángulos internos lejanos.

EJEMPLO 3 Dado $\triangle ABC$ y un punto D tal que $A—C—D$, halla $m\angle BCD$ si $m\angle A = 103°$ y $m\angle B = 76°$.

Solución Por el teorema 3.13, $m\angle BCD = m\angle A + m\angle B = 179°$. ■

EJERCICIOS 3.4

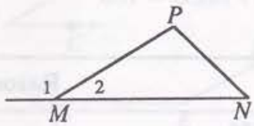


FIGURA PARA EL EJERCICIO 2

1. Si en $\triangle ABC$, $m\angle A = 75°$ y $m\angle B = 2(m\angle C)$, encuentra $m\angle B$ y $m\angle C$.

2. DADO: $\triangle MNP$ con $\angle 1$ externo,
$m\angle 1 = 160°$, $m\angle N = 85°$
ENCUENTRA: $m\angle P$ y $m\angle 2$. Proporciona razones.

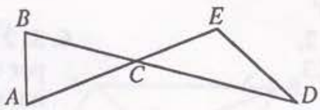


FIGURA PARA LOS EJERCICIOS 3 A 6

En los ejercicios 3-6, dado: $m\angle A = 75°$, $m\angle B = 60°$ y $m\angle D = 35°$.

3. Encuentra $m\angle ACB$ y explica tu respuesta.

4. Encuentra $m\angle E$ y explica tu respuesta.

5. Encuentra $m\angle BCE$ y explica tu respuesta.

6. Encuentra la relación entre $m\angle A$, $m\angle B$ y $m\angle BCE$.

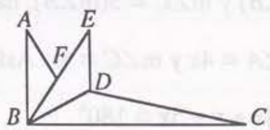


FIGURA PARA EL EJERCICIO 7

7. DADO: $m\angle ACB = 90°$,
$m\angle CBD = 2(m\angle C)$,
$m\angle BFA = 120°$
$m\angle DBE = m\angle A$,
$AF = BF$

ENCUENTRA: m$\angle A$, m$\angle ABF$,
m$\angle DBC$ y m$\angle C$

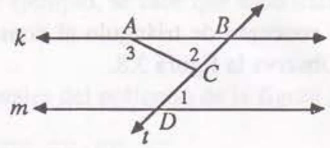


FIGURA PARA EL EJERCICIO 8

8. DADO: $k \parallel m$
DEMUESTRA: m$\angle 3$ = m$\angle 1$ + m$\angle 2$

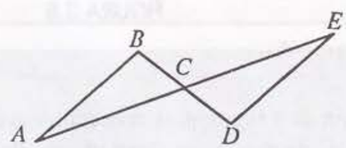


FIGURA PARA EL EJERCICIO 9

9. DADO: C es el punto medio de $\overline{BD}$, m$\angle A$ = m$\angle E$
DEMUESTRA: $\triangle ABC \cong \triangle EDC$

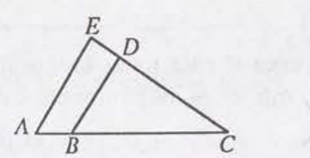


FIGURA PARA LOS EJERCICIOS 10 Y 11

En los ejercicios 10 y 11, dado: $\overline{AE} \parallel \overline{BD}$, *m$\angle$C = 30°, m$\angle$CBD = 40°.*

10. DEMUESTRA: $AC > CE$
11. DEMUESTRA: m$\angle E$ = 110°
12. Demuestra el teorema 3.12.

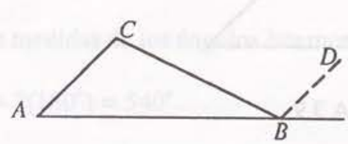


FIGURA PARA EL EJERCICIO 13

13. Demuestra el teorema 3.13. (*Sugerencia:* construye $\overline{BD} \parallel \overline{AC}$)

3.5 Polígonos

Ahora se generalizará el concepto de triángulo al considerar objetos geométricos que pueden tener más de tres lados. Observa la figura 3.8.

FIGURA 3.8

Definición
Un **polígono** es la unión de n segmentos consecutivos en un plano, que se cortan en y sólo en sus puntos extremos, de modo que exactamente dos segmentos contienen cada punto extremo y ninguna pareja de segmentos consecutivos está en la misma recta. Cada segmento es un **lado** y cada punto extremo es un **vértice** del polígono.

Aunque hay muchos polígonos, en este texto el interés principal recae en los polígonos *convexos.*

Definición
Un polígono es **convexo** si para todas las parejas de puntos A y B en lados distintos del mismo se cumple que todos los puntos entre A y B están contenidos en el interior del polígono.

El polígono de la figura 3.9 no es convexo, ya que no todos los puntos entre A y B están en su interior. El polígono de la figura 3.10 es convexo. En el resto del libro, cuando se diga *polígono* significa *polígono convexo.*

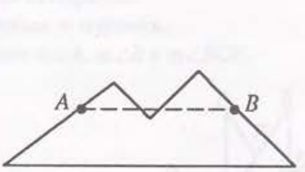


FIGURA 3.9

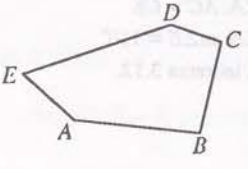


FIGURA 3.10

Un polígono es **regular** si todos sus ángulos y lados son congruentes. Una **diagonal** de un polígono es un segmento de recta que une dos vértices no consecutivos. En la figura 3.10, una de las diagonales es el segmento que une los puntos A y D; a saber, $\overline{AD}$. El **perímetro** de un polígono es la suma de las longitudes de sus lados.

¡PRECAUCIÓN! En la figura 3.10 no se trazaron las diagonales del polígono. Esto no significa que el polígono no tiene diagonales. Es un error esperar que todas las características de un polígono dado estén ilustradas; por ejemplo, se sabe que todo triángulo tiene tres medianas y tres alturas, sea que se tracen o no.

EJEMPLO 1 Identifica todas las diagonales del polígono de la figura 3.10.

Solución Las diagonales son: $\overline{AD}, \overline{AC}, \overline{BD}, \overline{BE}, \overline{CE}$. ■

EJEMPLO 2 Encuentra el perímetro del polígono de la figura 3.10, dado que $AB = BC = 7$, $CD = 3$, $DE = 10$ y $AE = 5$.

Solución El perímetro $= 7 + 7 + 3 + 10 + 5 = 32$. ■

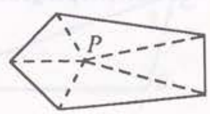
Muchos polígonos poseen nombres especiales, dependiendo del número de lados que tengan:

Polígono	Número de lados
Triángulo	3
Cuadrilátero	4
Pentágono	5
Hexágono	6
Heptágono	7
Octágono	8
Nonágono	9
Decágono	10
Enégono	n

■

Teorema 3.14 La suma de las medidas de los ángulos internos de un enégono es $(n-2)180°$.

SUGERENCIA PARA LA DEMOSTRACIÓN: Considera un punto P en el interior del enégono y traza segmentos de recta de P a cada vértice del enégono. Así se forman n triángulos. Por el teorema 3.11, la suma de las medidas de los ángulos de n triángulos debe ser $n(180°)$. Sin embargo, los ángulos que tienen un vértice P no son ángulos internos del enégono. La suma de las medidas de estos ángulos es 360°. Observa que $180n - 360 = (n-2)180$.



EJEMPLO 3 Encuentra la suma de las medidas de los ángulos internos de un pentágono.

Solución La suma $= (5-2)180° = 3(180°) = 540°$. ■

EJEMPLO 4 Si la suma de las medidas de los ángulos internos de un polígono es 900°, ¿cuántos lados tiene el polígono?

Solución La suma $= 900° = (n-2)180°$. Al dividir entre 180° ambos miembros de la ecuación se obtiene $n - 2 = 5$, de modo que $n = 7$. ■

Si A, B y C son tres vértices consecutivos de un polígono y F es un punto tal que A—B—F, entonces $\angle CBF$ es un **ángulo externo** del polígono (Fig. 3.11).

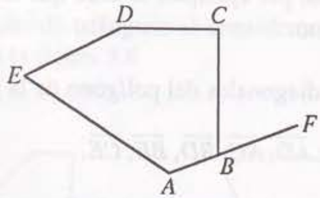


FIGURA 3.11

La demostración del siguiente teorema se deja como ejercicio.

Teorema 3.15 La suma de las medidas de los ángulos externos de un polígono, uno en cada vértice, es igual a 360°.

EJEMPLO 5 Encuentra la suma de las medidas de los ángulos externos de un polígono de 132 lados.

Solución La suma = 360°. ■

EJERCICIOS 3.5

En los ejercicios 1 a 4, ¿cuántas diagonales distintas tiene cada polígono?

1. Un triángulo
2. Un cuadrilátero
3. Un pentágono
4. Un enégono

En los ejercicios 5 a 8, encuentra la suma de las medidas de los ángulos internos de cada uno de los polígonos.

5. Un triángulo
6. Un cuadrilátero
7. Un hexágono
8. Un octágono

En los ejercicios 9 a 12, encuentra el número de lados del polígono para el cual la suma de las medidas de los ángulos internos es la que se muestra.

9. 1260°
10. 1440°
11. 2880°
12. 3780°

En los ejercicios 13 y 14, demuestra que es imposible que exista un polígono para el que la suma de las medidas de los ángulos internos sea la que se muestra.

13. 1720°
14. 2060°

15. Elabora una tabla de polígonos regulares para $n = 3, 4, 5, ..., 10$ y para $n = k$. Los encabezados de la tabla son los siguientes: n, suma de las medidas de los ángulos internos, medida de cada ángulo interno, medida de cada ángulo externo y suma de las medidas de los ángulos externos.

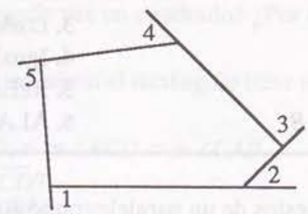


FIGURA PARA EL EJERCICIO 16

16. Demuestra el teorema 3.15. (Primero demuestra el teorema para un pentágono y luego el caso general.)

17. Un estante para zapatos en forma de cuadrilátero es inestable. Explica por qué un puntal metálico colocado a lo largo de la diagonal del cuadrilátero le da estabilidad. ¿Por qué un trozo de cuerda en la misma posición no hace que el estante sea estable?

18. Un estante para bicicletas en forma de pentágono es inestable. Explica por qué un puntal metálico colocado a lo largo de una diagonal del pentágono no lo estabiliza.

3.6 Paralelogramos

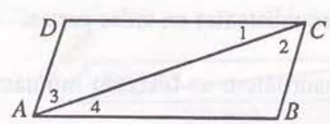
A continuación se analizará un tipo específico de cuadrilátero.

Definición

Un **paralelogramo** (▱) es un cuadrilátero en que ambos pares de lados opuestos son paralelos.

¡PRECAUCIÓN! Las definiciones y teoremas para rectas paralelas también se aplican a segmentos de recta; por ejemplo, con base en el teorema 3.6 se tiene: *Si dos segmentos de recta son cortados por una transversal de modo que los ángulos alternos internos sean congruentes, entonces los segmentos de recta son paralelos.*

Teorema 3.16 Una diagonal divide un paralelogramo en dos triángulos congruentes

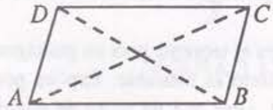


DADO: $\overline{AD} \parallel \overline{BC}, \overline{AB} \parallel \overline{CD}$
DEMUESTRA: $\triangle ACD \cong \triangle CAB$
DEMOSTRACIÓN:

Proposiciones	**Razones**
1. $\overline{AD} \parallel \overline{BC}$	**1.** Dado
2. $m\angle 2 = m\angle 3$	**2.** Si dos rectas $\parallel$ son cortadas por una trans., los $\angle$s alt. int. son $\cong$

3. $\overline{AB} \parallel \overline{CD}$	**3.** Dado
4. $m\angle 1 = m\angle 4$	**4.** Igual que 2
5. $AC = AC$	**5.** Reflexividad
6. $\triangle ACD \cong \triangle CAB$	**6.** ALA = ALA

Corolario Los lados y los ángulos opuestos de un paralelogramo son congruentes.



DADO: $\overline{AD} \parallel \overline{BC}, \overline{AB} \parallel \overline{CD}$
DEMUESTRA: $\angle DAB \cong \angle BCD, \angle ABC \cong \angle CDA,$
$\overline{AD} \cong \overline{BC}, \overline{AB} \cong \overline{CD}$
DEMOSTRACIÓN:

Proposiciones	Razones
1. Construye $\overline{AC}$ y $\overline{BD}$	**1.** Dos ptos. determinan una recta
2. $\overline{AD} \parallel \overline{BC}, \overline{AB} \parallel \overline{CD}$	**2.** Dado
3. $\triangle ACD \cong \triangle CAB$, $\triangle ABD \cong \triangle CDB$	**3.** Una diag. divide un ▱ en 2 $\triangle$s $\cong$
4. $\angle DAB \cong \angle BCD$, $\angle ABC \cong \angle CDA$, $\overline{AD} \cong \overline{BC}, \overline{AB} \cong \overline{CD}$	**4.** Partes corresp. de $\triangle$s $\cong$ son $\cong$

Las demostraciones de los siguientes teoremas se dejan como ejercicios.

Teorema 3.17 Si los ángulos opuestos o los lados opuestos de un cuadrilátero son congruentes, el cuadrilátero es un paralelogramo.

Teorema 3.18 Dos rectas paralelas son equidistantes en todas partes.

Teorema 3.19 Las diagonales de un cuadrilátero se bisectan mutuamente si y sólo si el cuadrilátero es un paralelogramo.

Teorema 3.20 Dos ángulos consecutivos de un paralelogramo son suplementarios.

La recíproca del teorema 3.20 es falsa. (¿Por qué?).

Un **rombo** es un paralelogramo con un par de lados adyacentes congruentes. Un **rectángulo** (▭) es un paralelogramo con un ángulo recto. Un **cuadrado** es un rombo que es un rectángulo.

EJEMPLO 1 Si $m\angle A = 30°$ en ▱$ABCD$, halla $m\angle B$, $m\angle C$ y $m\angle D$.

Solución $m\angle C = 30°$ porque ángulos opuestos de un paralelogramo son congruentes. $m\angle B = m\angle D = 150°$ porque dos ángulos consecutivos de un paralelogramo son suplementarios. ∎

EJEMPLO 2 ¿Es posible que un rectángulo sea un cuadrado? ¿Por qué?

Solución Sí. Un rectángulo es un cuadrado si el rectángulo tiene un par de lados adyacentes congruentes. ■

EJEMPLO 3 En un cuadrilátero $ABCD$, si $m\angle ACD = m\angle CAB$,

a. ¿Se cumple que $\overline{AB} \parallel \overline{CD}$?
b. ¿Se cumple que $\overline{AD} \parallel \overline{BC}$?

Solución **a.** Sí, $\overline{AB} \parallel \overline{CD}$ porque si dos rectas son cortadas por una transversal de modo que los ángulos alternos internos sean congruentes, entonces las rectas son paralelas. En esta situación, $\angle ACD$ y $\angle CAB$ son ángulos alternos internos cortados por la transversal $\overline{AC}$.

b. No, $\overline{AD}$ no necesariamente es paralela a $\overline{BC}$. La información proporcionada no es suficiente para determinar si son paralelas. ■

En física, una cantidad que tiene magnitud y dirección se denomina **vector**. Algunos ejemplos de vector son velocidad, fuerza y desplazamiento. Un problema suele incluir más de un vector y a menudo deben sumarse para encontrar el vector **resultante**.

Un vector se representa en un diagrama mediante un segmento de recta con una punta de flecha para indicar su dirección. La longitud del segmento de recta con respecto a alguna escala numérica representa la magnitud del vector. La resultante de dos vectores se encuentra aplicando la siguiente **ley del paralelogramo**:

LEY DEL PARALELOGRAMO

Si dos vectores con el mismo punto inicial P son lados adyacentes de un paralelogramo, la resultante es un vector con el punto inicial P que coincide con la diagonal del paralelogramo.

EJEMPLO 4 Si un avión se desplaza a velocidad constante de 300 millas por hora (mph) (velocidad en el aire) en dirección este y desde el suroeste sopla viento a 50 mph, utiliza un diagrama para mostrar el vector que representa la velocidad resultante, la velocidad con respecto a tierra y la dirección del vuelo.

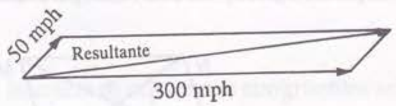


FIGURA 3.12

Solución En la figura 3.12, la velocidad resultante está indicada por la diagonal del paralelogramo. La longitud de la diagonal representa la velocidad con respecto a tierra y su dirección representa la orientación real del avión. ■

EJEMPLO 5 Dos fuerzas se aplican a un objeto. Una es una fuerza de 250 libras (lb) aplicada horizontalmente a la derecha y la otra es una fuerza de 350 lb aplicada verticalmente hacia arriba. Encuentra la resultante de las dos fuerzas.

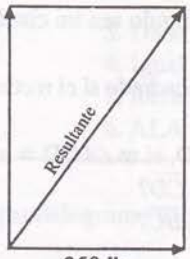


FIGURA 3.13

Solución En la figura 3.13, el vector fuerza resultante se indica con la diagonal del paralelogramo. La longitud de la diagonal representa la magnitud de las fuerzas combinadas y la dirección de la flecha indica la dirección de éstas. Los valores reales que representan la longitud de la diagonal y el ángulo que forma la resultante con las otras fuerzas no pueden calcularse sino hasta la sección 5.5. ■

EJERCICIOS 3.6

1. Si m $\angle A = 50°$ en $\square ABCD$, encuentra m$\angle B$, m$\angle C$ y m$\angle D$. Proporciona razones.

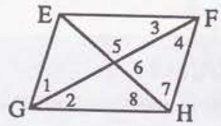


FIGURA PARA EL EJERCICIO 2

2. Si m$\angle 1 = 30°$ y m$\angle 2 = 20°$, encuentra m$\angle 3$, m$\angle 4$, m$\angle 5$, m$\angle 6$, m$\angle 7$ y m$\angle 8$. Proporciona razones.
3. El conjunto de todos los cuadrados, ¿es un subconjunto del conjunto de todos los rectángulos? ¿Por qué?
4. El conjunto de todos los cuadrados, ¿es un subconjunto del conjunto de todos los paralelogramos? ¿Por qué?
5. ¿Es posible que un rombo sea un rectángulo? ¿Por qué?
6. Si dos triángulos isósceles congruentes distintos tienen una base común, ¿qué tipo especial de paralelogramo forman?

En los ejercicios 7 a 9,* KLMN *es un paralelogramo. Da una razón para cada una de las proposiciones.

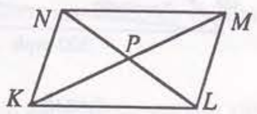


FIGURA PARA LOS EJERCICIOS 7 A 9

7. $\triangle KLM \cong \triangle MNK$
8. $\overline{KP} \cong \overline{PM}$
9. $\angle NKL \cong \angle LMN$
10. Si $AB = 2$ cm, $AD = 1.5$ cm y m$\angle DAB = 55°$, construye $\square ABCD$.
11. Construye $\square MNPQ$ si $MN = 2.5$ cm y $MP = 1$ cm.
12. Construye un rombo con un lado dado $\overline{PQ}$.

13. Construye un cuadrado con un lado dado $\overline{MN}$.
14. DADO: $\angle A$, $AB = 3.5$ cm, $AD = 2$ cm.
CONSTRUYE: $\square ABCD$ como sigue: copia $\angle A$ en una recta de trabajo y copia $\overline{AB}$ y $\overline{AD}$ sobre los lados de $\angle A$. Luego, con B como centro, traza un arco de radio AD, y con D como centro traza un arco de radio AB. La intersección de los arcos es el vértice C del $\square$. ¿Por qué? ¿Puedes imaginar otro método de construcción?

En los ejercicios 15 a 19, elige una escala idónea y elabora una construcción para ilustrar cada problema de vectores.

15. Un avión se desplaza en dirección oeste a 360 mph y desde el sureste sopla viento a 45 mph. Halla el curso resultante y la velocidad con respecto a tierra.
16. Dos fuerzas, una de 40 lb y otra 60 lb, actúan sobre un objeto a un ángulo de 70° entre sí. Encuentra la fuerza resultante (la magnitud y el ángulo entre la resultante y la fuerza de 40 lb).
17. Dos fuerzas, una de 30 lb y otra de 40 lb, actúan sobre un objeto a un ángulo de 90°entre sí. Encuentra la magnitud de la fuerza resultante. ¿Qué relación existe entre las magnitudes de las tres fuerzas?
18. Los dos vectores que se utilizan para encontrar una resultante se denominan *componentes*. Halla los componentes vertical y horizontal de una fuerza de 70 lb si ésta forma un ángulo de 30° con la horizontal.
19. Encuentra la resultante de tres vectores de magnitud 3, 5 y 6. (*Sugerencia:* suma cualquier pareja de estos vectores y luego añade el tercer vector a la fuerza resultante de las dos primeras.)
20. Demuestra que si dos lados de un cuadrilátero son congruentes y paralelos, el cuadrilátero es un paralelogramo.
21. Demuestra el teorema 3.17.
22. Escribe en forma "si-entonces" el teorema 3.18 y demuéstralo.
23. Escribe en forma "si-entonces" el teorema 3.19 y demuéstralo.
24. Escribe en forma "si-entonces" el teorema 3.20 y demuéstralo.

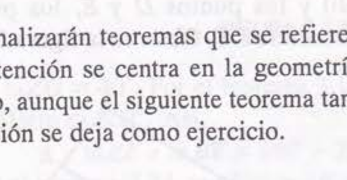
3.7 Intersecciones

En esta sección se analizarán teoremas que se refieren a rectas paralelas. Debido a que en casi todo este curso la atención se centra en la geometría plana, el análisis se restringirá a rectas paralelas en un plano, aunque el siguiente teorema también es verdadero en el espacio tridimensional. Su demostración se deja como ejercicio.

Teorema 3.21 Dos rectas distintas paralelas a una tercera recta son paralelas entre sí.

Si dos rectas intersectan una tercera recta en puntos distintos A y B, entonces las dos rectas **intersectan** a $\overline{AB}$.

Teorema 3.22 Si tres o más rectas paralelas intersectan segmentos congruentes sobre una transversal, intersectan segmentos congruentes en toda transversal.



DADO: $k \parallel m \parallel n$, $AB = BC$
DEMUESTRA: $EF = DE$

DEMOSTRACIÓN:

Proposiciones	Razones
1. Construir $\overline{CG} \parallel \overline{EF}$, $\overline{BH} \parallel \overline{ED}$	1. Post. de las paralelas
2. $\overline{CG} \parallel \overline{BH}$	2. Dos rectas distintas $\parallel$ a una 3a recta son $\parallel$ entre sí
3. $\angle 2 \cong \angle 4$	3. Si dos rectas $\parallel$ son cortadas por una trans., los$\angle$s corresp. son $\cong$
4. $m \parallel n$, $k \parallel m$, $AB = BC$	4. Dado
5. $\angle 1 \cong \angle 3$	5. Igual que 3
6. $\triangle ABH \cong \triangle BCG$	6. ALA = ALA
7. $CG = BH$	7. Elementos corresp. de $\triangle$s $\cong$ son $\cong$
8. Los cuadriláteros *BEDH* y *CFE*G son ▱s	8. Def. de ▱
9. $EF = CG$, $BH = DE$	9. Lados op. de un ▱ son $\cong$
10. $EF = DE$	10. Transitividad (prop. 7 y 9)

La demostración del siguiente teorema se deja como ejercicio.

Teorema 3.23 Si un segmento une los puntos medios de dos lados de un triángulo, entonces es paralelo al tercer lado y su longitud es igual a la mitad de la longitud del tercer lado.

EJEMPLO 1 Dados $\triangle ABC$ con $AC = 20$ y los puntos D y E, los puntos medios de los segmentos $\overline{AB}$ y $\overline{BC}$, respectivamente, encuentra DE. Observa la figura 3.14.

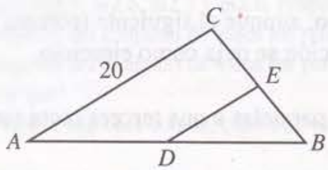


FIGURA 3.14

Solución Por el teorema 3.23, $DE = 10$. ■

EJEMPLO 2 Dados $\triangle ABC$ con los puntos D y E que son, los puntos medios de los segmentos $\overline{AC}$ y $\overline{BC}$, respectivamente; si $DE = 6$, Encuentra AB. Observa la figura 3.15.

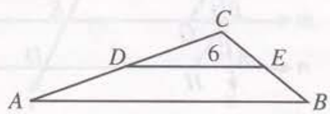


FIGURA 3.15

Solución Por el teorema 3.23, $AB = 12$. ■

Definición

Un **trapezoide** es un cuadrilátero que tiene exactamente un par de lados paralelos. Los lados paralelos se denominan *bases*. Los otros dos lados se llaman *lados no paralelos*.

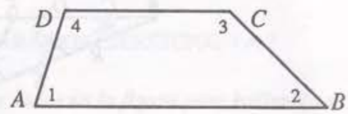


FIGURA 3.16

Dos ángulos de un trapezoide se denominan *ángulos de la base* si ambos contienen la misma base. El segmento de recta que une los puntos medios de los lados no paralelos es la *mediana* del trapezoide. Un trapezoide cuyos lados no paralelos son congruentes es un **trapezoide isósceles**. En la figura 3.16, sea $\overline{AB} \parallel \overline{CD}$. Los lados $\overline{AB}$ y $\overline{CD}$ son bases. Los ángulos 3 y 4 son un par de ángulos de la base. Los ángulos 1 y 2 son otra pareja de ángulos de la base.

Las demostraciones de los dos teoremas siguientes se dejan como ejercicios.

Teorema 3.24 Los ángulos de la base de un trapezoide isósceles son congruentes.

EJEMPLO 3 Dado el trapezoide isósceles $EFGH$ con bases $\overline{EF}$ y $\overline{GH}$, halla $m\angle E$, $m\angle F$ y $m\angle G$ si $m\angle H = 30°$. Consulta la figura 3.17.

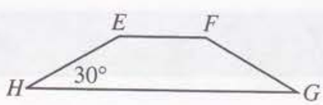


FIGURA 3.17

Solución Por el teorema 3.24, $m\angle G = 30°$. Por el teorema 3.14, la suma de las medidas de los ángulos internos de un cuadrilátero es 360°. Así,

$$m\angle E + m\angle F = 360° - 2(30°) = 300°.$$

En consecuencia, por el teorema 3.24, $m\angle E = m\angle F = 150°$. ■

Teorema 3.25 La mediana de un trapezoide es paralela a ambas bases y su longitud es igual a la semisuma de las longitudes de las bases.

EJEMPLO 4 Si $AB = 17$ y $CD = 5$, encuentra la longitud de la mediana del trapezoide de la figura 3.18.

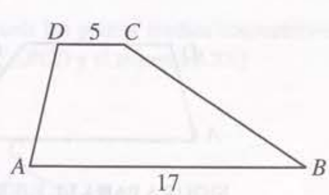
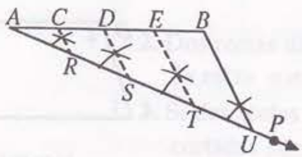


FIGURA 3.18

Solución Por el teorema 3.25, la longitud de la mediana es igual a 11. ■

CONSTRUCCIÓN 3.2

Divide un segmento de recta en un número dado de segmentos congruentes.



DADO: $\overline{AB}$

CONSTRUYE: C, D, E tales que $\overline{AC} \cong \overline{CD} \cong \overline{DE} \cong \overline{EB}$

Paso 1. Para cualquier punto P que no esté en $\overleftrightarrow{AB}$, se construye $\overrightarrow{AP}$.

Paso 2. Se elige cualquier longitud conveniente y se construyen cuatro segmentos congruentes $\overline{AR}, \overline{RS}, \overline{ST}$ y $\overline{TU}$ en $\overrightarrow{AP}$. Construye $\overline{BU}$.

Paso 3. Se copia $\angle TUB$ en R, S y T. Se identifican las intersecciones de estos ángulos con $\overline{AB}$ como C, D y E, respectivamente. Entonces, por el teorema 3.8, $\overline{CR} \parallel \overline{DS} \parallel \overline{ET} \parallel \overline{BU}$ y, en consecuencia, $\overline{AC} \cong \overline{CD} \cong \overline{DE} \cong \overline{EB}$ por el teorema 3.22.

EJERCICIOS 3.7

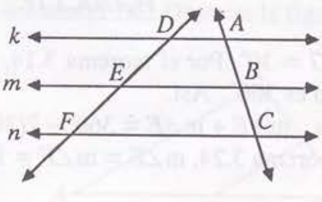


FIGURA PARA EL EJERCICIO 1

1. Si $k \parallel m \parallel n$, $AB = BC = 2$ y $DE = 3$, encuentra EF.

2. Halla la longitud de la mediana del trapezoide $ABCD$ si $\overline{BC}$ y $\overline{DA}$ son sus bases, $BC = 5$ y $DA = 8$.

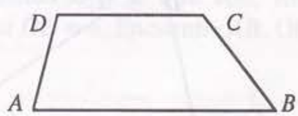


FIGURA PARA EL EJERCICIO 3

3. Si $ABCD$ es un trapezoide isósceles con bases $\overline{AB}$ y $\overline{CD}$ y $m\angle C = 100°$, encuentra $m\angle A$, $m\angle B$ y $m\angle D$. Da razones.

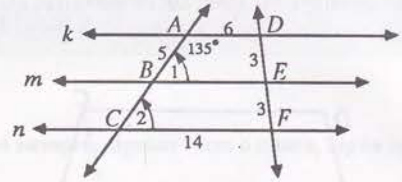


FIGURA PARA LOS EJERCICIOS 4 A 7

En los ejercicios 4 a 7, sean* k || m || n. *Usa los valores dados en la figura para hallar los valores numéricos de cada uno de los siguientes elementos.

4. BE
5. BC
6. $m\angle 1$
7. $m\angle 2$

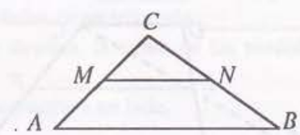


FIGURA PARA LOS EJERCICIOS 8 A 10

En los ejercicios 8 a 10 se proporciona $\triangle ABC$ con $m\angle C = 100°$ y $\overline{AM} \cong \overline{MC}$. Expón una razón para cada una de las siguientes proposiciones.

8. $m\angle B < 90°$.
9. Si $\overline{CN} \cong \overline{NB}$, entonces $\overline{MN} \parallel \overline{AB}$.
10. Si $m\angle A = 30°$, entonces $m\angle B = 50°$.
11. Por construcción, divide en tres segmentos congruentes un segmento de recta $\overline{AB}$ dado.
12. Por construcción, divide en cinco segmentos congruentes un segmento de recta $\overline{AB}$ dado.

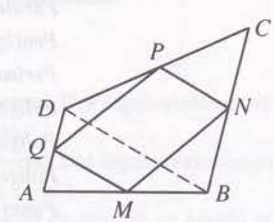


FIGURA PARA EL EJERCICIO 13

13. Demuestra que el cuadrilátero *MNPQ* formado al unir los puntos medios consecutivos de cualquier cuadrilátero *ABCD* es un ▱. (*Sugerencia:* Traza $\overline{BD}$ y considera $\triangle ABD$, $\triangle BCD$ y el teorema 3.23.)
14. Demuestra el teorema 3.21.

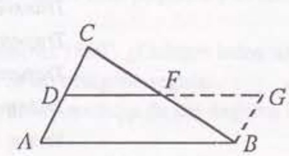


FIGURA PARA EL EJERCICIO 15

15. Demuestra el teorema 3.23. (*Sugerencia:* construye $\overline{FG}$ sobre $\overleftrightarrow{DF}$ de modo que $FG = DF$. Construye $\overline{BG}$. Demuestra que el cuadrilátero $ABGD$ es un paralelogramo.)

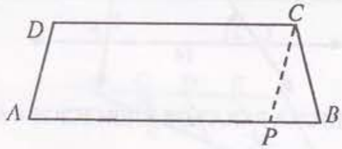


FIGURA PARA EL EJERCICIO 16

16. Demuestra el teorema 3.24. (*Sugerencia:* construye $\overline{CP} \parallel \overline{AD}$. Demuestra que el cuadrilátero $APCD$ es un paralelogramo.)

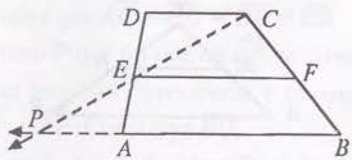


FIGURA PARA EL EJERCICIO 17

17. Demuestra el teorema 3.25. (*Sugerencia:* construye $\overrightarrow{CE}$ y $\overrightarrow{BA}$ que se intersecten en el punto P. Demuestra que $PE = CE$ al probar que $\triangle APE \cong \triangle DCE$. Considera $\triangle PCB$ y aplica el teorema 3.23.)

18. Demuestra que una recta que corta un lado de un triángulo y es paralela a un segundo lado corta el tercer lado.

TÉRMINOS CLAVE

Ángulo externo de un polígono, 92
Ángulos alternos externos, 80
Ángulos alternos internos, 80
Ángulos correspondientes, 80
Ángulos externos, 80
Ángulos internos, 80
Cuadrado, 95
Cuadrilátero, 91
Decágono, 98
Demostración indirecta, 76
Diagonal de un polígono, 90
Enégono, 91
Forma de párrafo, 77
Heptágono, 91
Hexágono, 91
Intersectar, 97
Lado de un polígono, 89
Ley del medio excluido, 75
Ley del paralelogramo, 96
Nonágono, 91
Octágono, 91
Paralela, 73
Paralelogramo, 93
Pentágono, 91
Perímetro de un polígono, 90
Polígono, 89
Polígono convexo, 90
Polígono regular, 90
Punto externo a un conjunto, 73, 92
Recta que pasa por un punto, 74
Rectángulo, 95
Resultante, 96
Rombo, 95
Si y sólo si, 82
Transversal, 80
Trapezoide, 100
Trapezoide isósceles, 100
Triángulo, 91
Vector, 96
Vértice de un polígono, 90

EJERCICIOS DE REPASO

En la línea en blanco escribe la expresión* siempre, algunas veces *o* nunca, *según corresponda.

1. La suma de las medidas de los ángulos de un triángulo ________ es 180°.
2. Las diagonales de un cuadrilátero __________ lo dividen en cuatro triángulos congruentes.
3. Las diagonales de un trapezoide _________ son perpendiculares.
4. Un trapezoide _________ es un paralelogramo.
5. Un cuadrado _________ es un rombo.
6. Si dos rectas son cortadas por una transversal, los ángulos alternos internos formados __________ son iguales.
7. Un ángulo externo en la base de un triángulo isósceles ________ es un ángulo obtuso.
8. Una recta que une los puntos medios de dos lados de un triángulo __________ es paralela al tercer lado.
9. Si el número de lados de un polígono se duplica, la suma de las medidas de los ángulos externos de este polígono ________ cambia.
10. Una diagonal de un rombo _________ es congruente a un lado.

Falso-verdadero: Anota una V si la proposición es verdadera. Si es falsa, sustituye la palabra subrayada a fin de obtener una proposición verdadera.

11. Dos ángulos consecutivos de un paralelogramo son <u>complementarios.</u>
12. Un <u>rombo</u> es un cuadrilátero con dos y sólo dos lados paralelos.
13. La medida de un ángulo externo de un triángulo <u>es igual</u> a la suma de las medidas de los ángulos internos lejanos.
14. Si un ángulo de un triángulo es recto, los otros dos ángulos son <u>suplementarios.</u>
15. Los lados opuestos de cualquier <u>paralelogramo</u> son congruentes.
16. Las diagonales de un paralelogramo son <u>perpendiculares</u> entre sí.
17. La suma de las medidas de los ángulos internos de un <u>hexágono</u> es 1080°.
18. Dos lados <u>opuestos</u> de un paralelogramo son suplementarios.
19. El perímetro del triángulo formado al unir puntos medios consecutivos de los lados de $\triangle ABC$ es igual a la <u>mitad</u> del perímetro de $\triangle ABC$.
20. Las diagonales de un trapezoide isósceles son <u>congruentes.</u>

Contesta las siguientes cuestiones.

21. Dos rectas paralelas son cortadas por una transversal. Dos ángulos internos en el mismo lado de la transversal están representados por x y $2x$. Encuentra la medida de cada ángulo.
22. Dos rectas paralelas son cortadas por una transversal. Dos ángulos externos en el mismo lado de la transversal están representados por y y $2y + 30°$. Encuentra la medida de cada ángulo.
23. Los lados de un ángulo son paralelos a los lados de otro. Si un ángulo mide 50°, ¿cuáles son los valores posibles del otro ángulo? Explica tu respuesta.
24. Encuentra el ángulo vértice de un triángulo isósceles si uno de los ángulos de la base mide 37°.
25. Halla cada ángulo de la base de un triángulo isósceles si cada ángulo de la base es igual al doble del ángulo vértice.
26. Un ángulo externo en la base de un triángulo isósceles mide 155°. ¿Cuánto mide el ángulo vértice?
27. En $\triangle ABC$, $m\angle A = 5x$, $m\angle B = 7x$ y $m\angle C = 36°$. Encuentra las medidas de $\angle A$ y $\angle B$.
28. Si un ángulo de un triángulo es el doble del ángulo más pequeño y el tercer ángulo es tres veces el ángulo más pequeño, encuentra la medida de cada ángulo.
29. La suma de los ángulos internos de un polígono es 1800°. ¿Cuántos lados tiene el polígono?
30. Encuentra la medida de cada ángulo externo de un octágono regular.
31. ¿Cuántos lados tiene un polígono si la suma de las medidas de sus ángulos externos es igual a la suma de las medidas de sus ángulos internos?
32. ¿Cuál es la suma de las medidas de los ángulos internos de un polígono de 61 lados? ¿Cuál es la suma de las medidas de sus ángulos externos?

33. En $\square ABCD$, $m\angle B$ es el doble de $m\angle A$. Halla $m\angle B$.

34. En un cuadrilátero $ABCD$, $AB = CD$, $BC = AD$, $m\angle DCA = 55°$. Encuentra $m\angle CAB$.

35. Si el punto medio del lado $\overline{AB}$ de $\triangle ABC$ es D y una recta paralela a $\overline{BC}$ trazada desde D corta $\overline{AC}$ en P, y si $DP = 12$, halla BC.

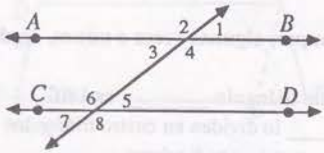


FIGURA PARA EL EJERCICIO 36

36. Si $\overline{AB} \parallel \overline{CD}$, encuentra las medidas de todos los ángulos cuando en la figura se tiene $m\angle 1 = 64°$.

Demostraciones:

37. Demuestra que las diagonales de un cuadrado son perpendiculares entre sí.

38. Demuestra que las diagonales de un rombo son perpendiculares entre sí.

39. En el cuadrilátero $ABCD$, $AB = BC$ y $AD = CD$. Demuestra $\overline{BD} \perp \overline{AC}$.

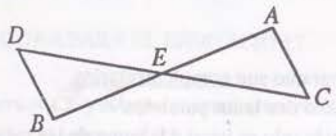


FIGURA PARA EL EJERCICIO 40

40. En la figura, demuestra $\overline{CA} \parallel \overline{BD}$ si $\overline{AB}$ y $\overline{CD}$ se bisectan entre sí.

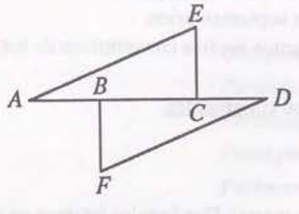


FIGURA PARA EL EJERCICIO 41

41. En la figura, si $EC = BF$, $AB = CD$, $\overline{FB} \perp \overline{AD}$ y $\overline{EC} \perp \overline{AD}$, demuestra $\overline{EA} \parallel \overline{DF}$.

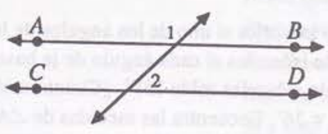


FIGURA PARA EL EJERCICIO 42

42. En la figura, demuestra $\overline{AB} \parallel \overline{CD}$ si $m\angle 1 = 147°$ y $m\angle 2 = 33°$.

43. Demuestra que si la medida de un ángulo de un triángulo es igual a la suma de las medidas de los otros dos ángulos, el triángulo es rectángulo.

44. Demuestra que en un paralelogramo las perpendiculares a una diagonal de dos vértices opuestos tienen la misma longitud.

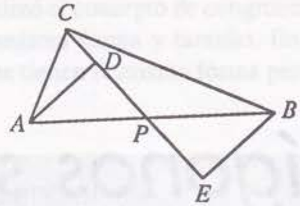


FIGURA PARA EL EJERCICIO 45

45. DADO: $AP = BP$,
$\overline{AD} \perp \overline{CP}$,
$\overline{BE} \perp \overline{CE}$
DEMUESTRA: *AEBD* es un paralelogramo.

46. Demuestra que un paralelogramo es un rombo si una diagonal bisecta un par de lados opuestos.

47. Demuestra que los segmentos que unen los puntos medios de los lados de un triángulo dividen al triángulo en cuatro triángulos congruentes.

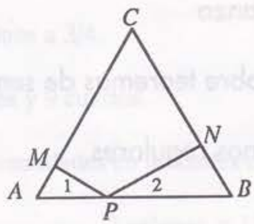


FIGURA PARA EL EJERCICIO 48

48. DADO: $AC = BC$,
$\overline{MP} \perp \overline{AC}$,
$\overline{PN} \perp \overline{BC}$
DEMUESTRA: $m\angle 1 = m\angle 2$

Construcciones:

49. Construye un rombo que tenga dos segmentos de recta dados como sus diagonales. (*Sugerencia:* las diagonales de un rombo son mediatrices entre sí.)

50. Construye un triángulo equilátero cuyo perímetro sea un segmento de recta dado.

En los ejercicios 51 y 52, elige una escala idónea y elabora una construcción para ilustrar cada problema de vectores.

51. Dos fuerzas, una de 55 lb y otra de 70 lb, actúan sobre un objeto a un ángulo de 35°entre sí. Encuentra la fuerza resultante.

52. Dos fuerzas, una de 22 lb y otra de 40 lb, actúan sobre un objeto a un ángulo de 65° entre sí. Encuentra la fuerza resultante.

Polígonos semejantes y regulares

4

Stock Montage, Inc.

PARTENÓN

NOTA HISTÓRICA *Desde la época de los griegos se pensaba que las dimensiones más artísticas para un rectángulo eran las implicadas en la* sección áurea *o* proporción divina. *El largo* L *y el ancho* A *de tal rectángulo satisfacen la proporción*

$$\frac{L + A}{L} = \frac{L}{A}.$$

Puede demostrarse que si la longitud de un segmento de recta es $C = L + A$, *entonces* $A = C(3 - \sqrt{5})/2$ *y* $L = C(\sqrt{5} - 1)/2$. *La razón del largo al ancho es aproximadamente de ocho a cinco. Desde la antigüedad, la sección áurea fue utilizada ampliamente en arte y arquitectura, incluyendo las medidas del Partenón en la Acrópolis de Atenas.*

En el capítulo 2 se analizó el concepto de congruencia de triángulos, para el cual los triángulos esencialmente tienen la misma forma y tamaño. En este capítulo se estudiará el concepto de polígonos semejantes, que tienen la misma forma pero no necesariamente el mismo tamaño.

4.1 Razones y proporciones

En esta sección se expondrán algunos conceptos aritméticos que se utilizan en el resto del texto y son necesarios para describir ciertas relaciones geométricas.

Una **razón** es una expresión de la forma a/b, $b \neq 0$, donde a y b son números reales. Algunas veces esta razón se escribe $a{:}b$ y se lee "a es a b".

EJEMPLO 1 Forma la razón de los números 6 y 8.

Solución La razón es 6/8, que se reduce a 3/4. ■

EJEMPLO 2 Forma la razón de 3 galones y 9 cuartos.

Solución Primero se convierten las cantidades en unidades comunes:

3 galones = 12 cuartos

Así, la razón es (12 cuartos)/(9 cuartos) = 4/3. ■

Una **proporción** es una afirmación de que dos razones son iguales. Así, $a/b = c/d$ y $4/6 = 2/3$ son proporciones. La primera proporción puede escribirse como $a{:}b = c{:}d$, que se lee "a es a b como c es a d". En general, se dice que una serie de números reales a, b, c **es proporcional a** la serie de números reales r, s, t si $a/r = b/s = c/t$. La última expresión es una **proporción continua** y puede contener cualquier número de razones. Cada razón de una proporción continua es igual a cada una de las otras razones.

¡PRECAUCIÓN! Algunas veces se confunden los términos *razón* y *proporción*. En el lenguaje corriente éstos a veces se usan indistintamente. Los diccionarios en general dan las definiciones usuales y también las matemáticas. En matemáticas, una *razón* es de la forma

$$\frac{a}{b}$$

y una *proporción* es de la forma

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d},$$

donde los denominadores son diferentes de cero.

EJEMPLO 3 1, 2, 3, 4, ¿es proporcional a 2, 4, 6, 8? ¿Por qué?

Solución Sí, ya que 1/2 = 2/4 = 3/6 = 4/8. ■

En la proporción $a/b = c/d$, a y d son los **extremos**, b y c son los **medios** y d es la **cuarta proporcional** de a, b, c. Por simetría, también debe tenerse $c/d = a/b$. No obstante, observe que esto cambia los medios, los extremos y la cuarta proporcional.

EJEMPLO 4 Identifica los medios, extremos y la cuarta proporcional en la proporción $10/17 = 20/34$.

Solución Los medios son 17 y 20.
Los extremos son 10 y 34.
34 es la cuarta proporcional de 10, 17, 20. ■

En la proporción $a/b = b/c$, b es la **media geométrica (media proporcional)** entre a y c.

EJEMPLO 5 Encuentra la media proporcional entre 4 y 25.

Solución Se requiere b tal que $4/b = b/25$. Esto significa $b^2 = 100$. Así, $b = 10$ o -10. (Sin embargo, en geometría sólo interesa el valor positivo.) ■

EJEMPLO 6 Halla la cuarta proporcional de 3, 9, 9.

Solución Se precisa c tal que $3/9 = 9/c$. Esto significa $3c = 81$. Así, $c = 27$. ■

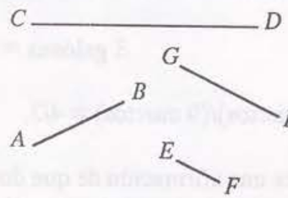


FIGURA 4.1

Los segmentos cuyas longitudes son proporcionales se denominan **segmentos proporcionales**. Así, en la figura 4.1, si $AB = 3$, $CD = 7$, $EF = 3/2$, $GH = 7/2$, entonces los segmentos $\overline{AB}$ y $\overline{CD}$ son proporcionales a los segmentos $\overline{EF}$ y $\overline{GH}$, ya que $AB/CD = EF/GH$.

El ejemplo 7 es una manipulación algebraica de las proporciones y una demostración de la proposición: "En cualquier proporción, el producto de los medios es igual al producto de los extremos".

EJEMPLO 7 DEMUESTRA: $\dfrac{a}{b} = \dfrac{c}{d}$, entonces $ad = bc$.

Solución Dado $\dfrac{a}{b} = \dfrac{c}{d}$, al aplicar el axioma de multiplicación de la igualdad para obtener el resultado ambos miembros se multiplican por bd. ■

EJERCICIOS 4.1

Las proposiciones en los ejercicios 1 a 6 pueden tratarse como teoremas. Escribe con palabras cada uno y demuéstralos aplicando axiomas algebraicos.

1. Si $\dfrac{a}{b} = \dfrac{c}{d}$, entonces $\dfrac{a}{c} = \dfrac{b}{d}$.

2. Si $\dfrac{a}{b} = \dfrac{c}{d}$, entonces $\dfrac{b}{a} = \dfrac{d}{c}$.

3. Si $\dfrac{a}{b} = \dfrac{b}{c}$, entonces $b = \pm\sqrt{ac}$.

4. Si $\dfrac{a}{b} = \dfrac{c}{d}$, entonces $\dfrac{a+b}{b} = \dfrac{c+d}{d}$.

5. Si $\dfrac{a}{b} = \dfrac{c}{d}$, entonces $\dfrac{a-b}{b} = \dfrac{c-d}{d}$.

6. Si $\dfrac{a}{b} = \dfrac{c}{d}$, entonces $\dfrac{a}{b} = \dfrac{c}{d} = \dfrac{a+c}{b+d}$.

Expresa cada uno de los ejercicios 7 a 14 como una fracción y simplifícala.

7. La razón de 10 a 15.
8. La razón de 16 a 20.
9. 72:24.
10. 3/4:9/16.
11. La razón de 15° a 90°.
12. La razón de 12 m a 15 m.
13. La razón de 27 pulgadas a 3 pies.
14. La razón de 150′ a 5°.

En los ejercicios 15 a 20, despeja x en cada proporción.

15. $20/65 = x/13$.
16. $x/3 = 4/5$.
17. $(x-2):8 = 5:2$.
18. $4:(x+1) = 3:x$.
19. $2/3:x = 9:4$.
20. $3x:5x = 6:10$.

En los ejercicios 21 a 24, encuentra la cuarta proporcional de:

21. 2, 3, 4.
22. 4, 8, 12.
23. 5, 8, 4.
24. 1, 100, 10.

En los ejercicios 25 a 28, encuentra la media proporcional entre:

25. 3 y 27.
26. 4 y 16.
27. 1/4 y 9.
28. 4 y 3.

En los ejercicios 29 a 32, escribe las series de números como una proporción continua.

29. 3, 4, 5 es proporcional a 9, 12, 15.
30. 1, 3, 4, 7 es proporcional a 5, 15, 20, 35.
31. 4, 8, 12, 16 es proporcional a 6, 12, 18, 24.
32. 1/2, 1/3, 1/4, 1/6 es proporcional a 6, 4, 3, 2.
33. Supón que en una receta para preparar 110 porciones de sopa se requieren los siguientes ingredientes:

50 cuartos de galón de agua
1 taza de sal
5 libras de zanahorias
12 pollos
3 libras de apio

¿Qué cantidad de cada ingrediente se necesita para hacer 8 porciones?

34. Supón que una receta para preparar 50 porciones de sopa incluye los siguientes ingredientes:

7 galones de agua
1/2 taza de pimienta
3 libras de lentejas
1 pavo
3 libras de cebolla
6 onzas de salsa picante

¿Qué cantidad de cada uno se requiere para elaborar 300 porciones?

35. La Tierra tiene un diámetro aproximado de 8,000 millas y se encuentra casi a 240,000 millas de la Luna, cuyo diámetro aproximado mide 2,200 millas. En un dibujo a escala de la Tierra y la Luna, esta última se representa con un círculo de 1 cm de diámetro. ¿Cuál es el diámetro de la Tierra y a qué distancia se encuentra de la Luna en dicho dibujo?
36. Con los datos del ejercicio 35 se elabora un dibujo a escala de la Tierra y la Luna en el que la Tierra se representa con un círculo de 1 cm de diámetro. ¿Cuál es el diámetro del satélite y a qué distancia se encuentra la Tierra del mismo en este dibujo?
37. Una jugadora de softbol conecta 13 hits durante los 10 primeros juegos de la temporada. Si continúa conectando hits a la misma razón, ¿cuántos conectará durante una temporada de 160 juegos?
38. Un futbolista completa 40 de 70 pases lanzados durante los dos primeros juegos de la temporada, para una ganancia total de 400 yardas. Si continúa jugando al mismo nivel, ¿cuáles serán sus estadísticas para 11 juegos?
39. Se dibuja a escala una casa, de modo que un cuarto de pulgada en el dibujo representa 1.5 pies (ft) del tamaño real de la casa. Si el largo de la casa es de 75 ft y el ancho mide 30 ft, ¿cuáles son las dimensiones de la casa en el dibujo?
40. Un fabricante dibuja a escala un tornillo de manera que 1 centímetro del dibujo representa 3 milímetros del tornillo real. Si el largo del tornillo en el dibujo es de 35 cm, ¿cuánto mide de largo el tornillo real?
41. Un comerciante vende 53 televisiones durante un mes común, con una ganancia neta de $6,000. Predice las cifras de las ventas anuales con base en la información proporcionada.
42. Durante dos semanas de vacaciones un niño rompió siete juguetes. Predice la cantidad de juguetes que rompería durante 12 semanas de vacaciones de verano, suponiendo que se mantiene la razón de juguetes rotos.

4.2 Semejanza

La *semejanza* es un concepto que se utiliza para comparar los ángulos y los lados de polígonos diferentes.

Definición

Dos polígonos son **semejantes** si sus ángulos correspondientes son congruentes y sus lados correspondientes son segmentos proporcionales.

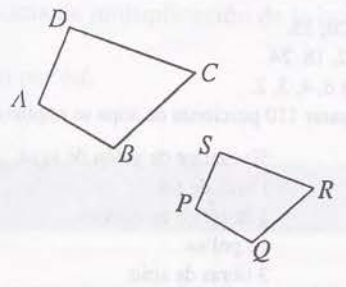


FIGURA 4.2

En la figura 4.2, $\angle A \cong \angle P$, $\angle B \cong \angle Q$, $\angle C \cong \angle R$, $\angle D \cong \angle S$ y $AB/PQ = BC/QR = CD/RS = DA/SP$. Así, los dos cuadriláteros son semejantes. Se escribe $ABCD \sim PQRS$, donde el orden de las letras indica la correspondencia, así como se hizo para el caso de triángulos congruentes.

Al desarrollar teoremas de semejanza para triángulos se requiere el postulado 4.1 (en algunos desarrollos lógicos de geometría se plantea como teorema y se demuestra, aunque aquí se dará por hecha su validez).

Postulado 4.1 **(AAA ~ AAA) Si los tres ángulos de un triángulo son congruentes con los tres ángulos de otro triángulo, entonces los triángulos son semejantes.**

Entonces, para demostrar que dos triángulos son semejantes no es necesario comprobar la proporcionalidad de los lados congruentes, en la medida en que se sepa que todos los ángulos de uno son congruentes con los ángulos correspondientes del otro. El teorema 4.1 establece que la información sobre sólo dos pares de ángulos es suficiente para comprobar la semejanza. La demostración se deja como ejercicio.

Teorema 4.1 (AA ~ AA) Si dos ángulos de un triángulo son congruentes a dos ángulos de otro triángulo, entonces los triángulos son semejantes.

EJEMPLO 1 Analiza la semejanza de los triángulos de la figura 4.3, si $\angle A \cong \angle E$ y $\angle C \cong \angle D$.

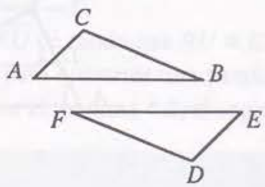


FIGURA 4.3

Solución Por el teorema 4.1, $\triangle ABC \sim \triangle EFD$. (El orden de las letras en la denominación de los triángulos es importante.) ■

La semejanza se utiliza en aplicaciones como topografía, heliográficas o maduros y ampliación de fotografías. El siguiente ejemplo muestra cómo es posible calcular la altura de un árbol o un edificio mediante el empleo de triángulos semejantes.

EJEMPLO 2 En la figura 4.4, una vara graduada $\overline{BC}$ proyecta una sombra $\overline{AC}$ de 4 pies y la sombra $\overline{AT}$ del edificio mide 50 pies de largo. Encuentra la altura RT del edificio.

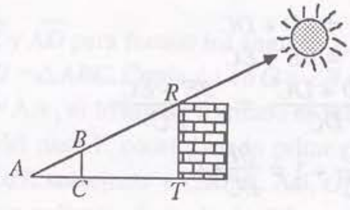


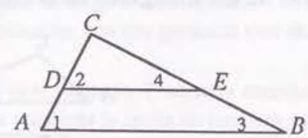
FIGURA 4.4

Solución En la figura 4.4 se tiene $\angle BAC \cong \angle RAT$, ya que se trata del mismo ángulo. También se tiene $\angle ACB \cong \angle ATR$, pues ambos son ángulos rectos. Así, $\triangle ABC \sim \triangle ART$ por AA ~ AA. Encuentra RT despejando RT en la proporción $RT/BC = AT/AC$. Se obtiene $RT/3 = 50/4$, de modo que la solución es $RT = 37.5$ pies. ■

En el ejemplo 2 se afirmó que la sombra del edificio mide 50 pies de largo y que la sombra de la vara mide 4 pies de largo. Si estas cifras son exactas, entonces la respuesta es correcta. Si estos números son aproximados en vez de ser exactos, entonces debe tenerse más cuidado con la respuesta. En el ejemplo se encontró $RT = 37.5$ pies. Esta respuesta tiene tres dígitos de exactitud. Si los datos originales son aproximados, entonces 50 y 4 tienen un solo dígito de exactitud. Debido a que la respuesta no puede ser más exacta que los datos originales, la respuesta se redondea a un dígito de exactitud; a saber, 40 pies. En casi todos los problemas de este texto se supone que los datos son exactos. Sin embargo, quizá sea conveniente que analices con mayor detalle este tema en otro texto bajo el encabezado de **dígitos significativos**.

A menudo el teorema que se refiere a triángulos semejantes sirve para demostrar propiedades de un solo triángulo; por ejemplo, el siguiente teorema es una consecuencia del teorema 4.1.

Teorema 4.2 Una recta paralela a un lado de un triángulo que corta a los otros dos lados en puntos distintos, divide estos dos lados en segmentos proporcionales.



DADO: $\overline{DE} \parallel \overline{AB}$

DEMUESTRA: $\dfrac{AD}{DC} = \dfrac{BE}{EC}$

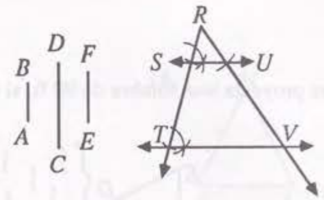
DEMOSTRACIÓN:

Proposiciones	Razones
1. $\overline{DE} \parallel \overline{AB}$	**1.** Dado
2. $\angle 1 \cong \angle 2$, $\angle 3 \cong \angle 4$	**2.** $\angle$s corr. formados por 2 rectas $\parallel$ y una trans. son $\cong$
3. $\triangle CDE \sim \triangle CAB$	**3.** AA ~ AA
4. $\dfrac{AC}{DC} = \dfrac{BC}{EC}$	**4.** Def. de ~
5. $AC = AD + DC$ $BC = BE + EC$	**5.** Def. de entre
6. $\dfrac{AD + DC}{DC} = \dfrac{BE + EC}{EC}$	**6.** Sustitución
7. $\dfrac{AD}{DC} + 1 = \dfrac{BE}{EC} + 1$	**7.** Sustitución
8. $\dfrac{AD}{DC} = \dfrac{BE}{EC}$	**8.** Axioma de adición de =

Las construcciones 4.1 y 4.2 muestran una aplicación de los teoremas 4.1 y 4.2.

CONSTRUCCIÓN 4.1

Construye la cuarta proporcional de tres segmentos de recta dados.



DADO: $\overline{AB}, \overline{CD}, \overline{EF}$

CONSTRUYE: $\overline{UV}$ de modo que

$$\frac{AB}{CD} = \frac{EF}{UV}$$

Paso 1. Construye un ángulo arbitrario R. En uno de los rayos de $\angle R$, construye $\overline{RS}$ y $\overline{ST}$ de modo que $RS = AB$, $ST = CD$ y R—S—T.

Paso 2. En el otro rayo, construye $\overline{RU}$ de modo que $RU = EF$. Traza $\overleftrightarrow{SU}$.

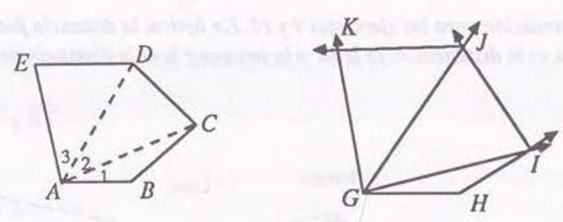
Paso 3. Aplica la construcción 3.1 para construir una paralela a $\overleftrightarrow{SU}$ que pase por T. Esta recta corta a $\overrightarrow{RU}$ en el punto V. Por el teorema 4.2, el segmento de recta buscado es $\overline{UV}$.

CONSTRUCCIÓN 4.2

Construye un polígono semejante a un polígono dado.

DADO: Polígono $ABCDE$, $\overline{GH}$

CONSTRUYE: Polígono $GHIJK$ de modo que $GHIJK \sim ABCDE$.



Paso 1. Traza las diagonales $\overline{AC}$ y $\overline{AD}$ para formar los ángulos 1, 2 y 3 en A.

Paso 2. Luego, construye $\triangle GHI \sim \triangle ABC$. Copia $\angle 1$ en G y $\angle B$ en H, identificando su punto de intersección I. Por AA ~ AA, el triángulo formado es semejante a $\triangle ABC$.

Paso 3. Repite la construcción del paso 2, construyendo primero $\triangle GIJ$ semejante a $\triangle ACD$ y luego construyendo $\triangle GJK$ semejante a $\triangle ADE$. Así, $GHIJK \sim ABCDE$. Este proceso puede continuarse para un polígono de cualquier número de lados.

EJERCICIOS 4.2

En los ejercicios 1 a 3, escribe las congruencias entre los ángulos correspondientes y la proporción continua para los lados correspondientes.

1. $\triangle ABC \sim \triangle RSQ$
2. $HURT \sim YELP$
3. $KLMNPQ \sim KABCDQ$
4. Encuentra la altura de un árbol que proyecta una sombra de 90 ft, si el poste de 2.5 ft de una cerca adyacente proyecta una sombra de 2 ft.

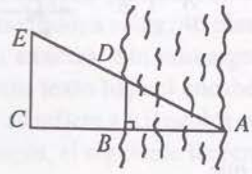


FIGURA PARA EL EJERCICIO 5

5. Se desea encontrar la distancia AB a través del río que se muestra en el diagrama. Supón que $\triangle ABD \sim \triangle ACE$. Por medición directa se encuentra que $BD = 60$ ft, $EC = 75$ ft y $BC = 40$ ft. Encuentra AB.

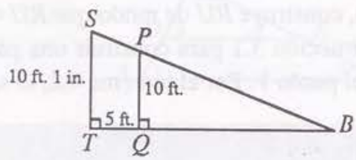
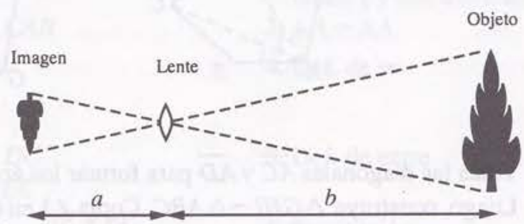


FIGURA PARA EL EJERCICIO 6

6. Un navegante desea calcular la distancia del barco a una boya. Para eso utiliza el diagrama que se muestra, donde el punto B representa la boya y los puntos P, Q, S, T están en el barco. Encuentra BQ.
7. Halla la altura de un edificio que tiene una sombra de 100 ft, si un hombre de 5 ft de estatura proyecta una sombra de 7 ft.
8. Encuentra la altura de un poste que arroja una sombra de 10 ft, si una mujer de 6 ft de estatura proyecta una sombra de 2 ft.

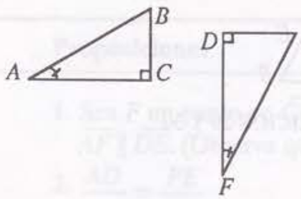
Utiliza la siguiente información para los ejercicios 9 y 10. En óptica, la distancia focal* c *de una lente está dada por la ecuación* $1/a + 1/b = 1/c$*, donde* a *es la distancia de la lente a la imagen y* b *es la distancia de la lente al objeto.



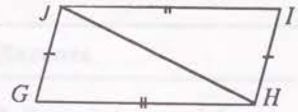
9. Si $a = 1.5$ in, $b = 7$ in y la altura de la imagen mide 0.5 in, encuentra la altura del objeto y la distancia focal de la lente.
10. Si $a = 0.5$ cm, $b = 20$ cm y la altura del objeto mide 70 cm, determina la altura de la imagen y la distancia focal de la lente.
11. En el plano de un edificio la escala es de 1/16 in a 1 ft. ¿Cuáles son las dimensiones de la habitación que en el diagrama mide 1.5 in por 1.25 in?
12. En el plano de un edificio la escala es de 1/16 in a 1 ft. Si una habitación mide 10 por 14 ft, ¿cuáles son las medidas correspondientes en el diagrama?

En los ejercicios 13 a 16, determina si los dos triángulos son semejantes. En caso de serlo, escribe la semejanza.

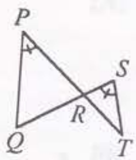
13.



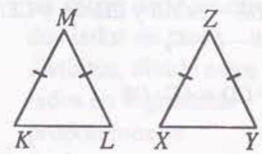
14.



15.



16.



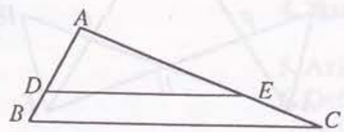


FIGURA PARA LOS EJERCICIOS 17 Y 18

***En los ejercicios 17 y 18, dados:* $\triangle$ ABC, $\overline{\mathbf{DE}} \parallel \overline{\mathbf{BC}}$.**

17. Encuentra EC si $AD = 3$, $BD = 2$ y $AE = 4$.
18. Encuentra AE si $AE = BD$, $AD = 16$ y $EC = 4$.

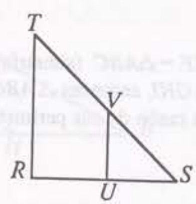


FIGURA PARA LOS EJERCICIOS 19 A 21

***En los ejercicios 19 a 21, dado:* $\triangle$ RST, $\overline{\mathbf{UV}} \parallel \overline{\mathbf{RT}}$.**

19. Encuentra VT/SV si $SU = 7$ y $UR = 2$.
20. Encuentra UR si $SU = 3$, $SV = 5$ y $VT = 2$.
21. Encuentra VT si $ST = 12$, $UR = 8$ y $SU = 10$.
22. Traza segmentos de recta de modo que $AB = 1.5$ in, $CD = 2$ in y $EF = 3$ in. Construye la cuarta proporcional de este conjunto de segmentos de recta.
23. Traza los segmentos de recta $\overline{GH}$, $\overline{KL}$ y $\overline{MN}$ de varias longitudes. Construye $\overline{PQ}$ de modo que $GH{:}KL = PQ{:}MN$.
24. Construye un segmento de recta de longitud ab, dados segmentos de recta de longitud a, b y $PQ = 1$ unidad. (*Sugerencia*: debido a que $1/a = b/x$ implica $x = ab$, construye la cuarta proporcional de 1, a y b.)
25. Por construcción, divide $\overline{AB}$ en dos segmentos cuyas longitudes tengan una razón de 2 a 3.
26. Por construcción, divide $\overline{ST}$ en segmentos proporcionales a 1 in, 2 in y 1.25 in, si $ST = 5.5$ in.
27. Construye un cuadrilátero semejante a un cuadrilátero dado.
28. Construye un heptágono semejante a un heptágono dado.

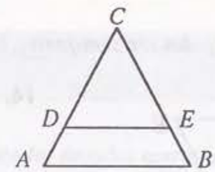


FIGURA PARA LOS EJERCICIOS 29 Y 30

29. DADO: $A—D—C, B—E—C,$
$CD = CE, AD = BE$
DEMUESTRA: $\triangle CDE \sim \triangle CAB$ y $CD/CA = CE/CB$
30. DADO: $A—D—C, B—E—C,$
$\overline{DE} \parallel \overline{AB}$
DEMUESTRA: $AB \cdot CD = AC \cdot DE$

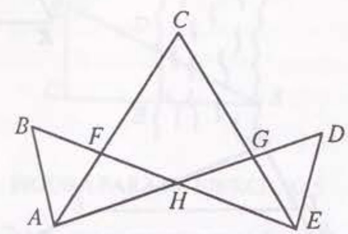


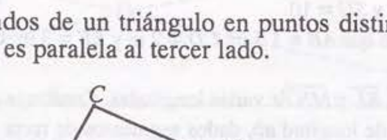
FIGURA PARA LOS EJERCICIOS 31 Y 32

31. DADO: $\angle CEB \cong \angle ABE,$
$A—H—G$
DEMUESTRA: $\triangle HEG \cong \triangle HBA$
32. DADO: $A—F—C, E—G—C,$
$CF = CG, FH = GH,$
$\angle ABE \cong \angle EDA$
DEMUESTRA: $\triangle ABF \sim \triangle EDG$
33. Demuestra que $\triangle ABC \sim \triangle ABC$ (reflexividad).
34. Demuestra que si $\triangle ABC \sim \triangle DEF$, entonces $\triangle DEF \sim \triangle ABC$ (simetría).
35. Demuestra que si $\triangle ABC \sim \triangle DEF$ y $\triangle DEF \sim \triangle GHI$, entonces $\triangle ABC \sim \triangle GHI$ (transitividad).
36. Si dos polígonos son semejantes, demuestra que la razón de sus perímetros es igual a la razón de las longitudes de dos lados correspondientes cualesquiera.
37. Demuestra el teorema 4.1.

4.3 Más sobre teoremas de semejanza

El teorema 4.3 es la recíproca del teorema 4.2. Su demostración ilustra de nuevo la adición de una recta auxiliar a un diagrama.

Teorema 4.3 Una recta que corta dos lados de un triángulo en puntos distintos y divide estos dos lados en segmentos proporcionales, es paralela al tercer lado.



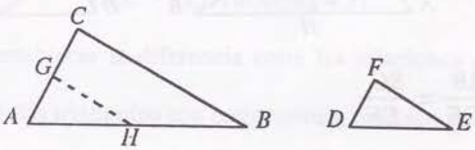
DADO: $\dfrac{BE}{EC} = \dfrac{AD}{DC}$

DEMUESTRA: $\overline{AB} \parallel \overline{DE}$
DEMOSTRACIÓN:

Proposiciones	Razones
1. Sea F un punto en $\overrightarrow{CB}$ tal que $\overline{AF} \parallel \overline{DE}$. (Observa que $C—E—F$).	**1.** Post. de las paralelas
2. $\dfrac{AD}{DC} = \dfrac{FE}{EC}$	**2.** Una recta $\parallel$ a un lado de un $\triangle$ que corta los otros dos lados en ptos. distintos, divide estos 2 lados en segmentos proporcionales
3. $\dfrac{BE}{EC} = \dfrac{AD}{DC}$	**3.** Dado
4. $\dfrac{BE}{EC} = \dfrac{FE}{EC}$	**4.** Transitividad
5. $BE = FE$	**5.** Axioma de mult. de la =
6. $B = F$	**6.** Def. de longitud y post. de la regla
7. $\overline{AB} \parallel \overline{DE}$	**7.** Sustitución

El teorema 4.3 se utiliza para demostrar el siguiente teorema de semejanza.

Teorema 4.4 **(LAL ~ LAL)** Si dos pares de lados correspondientes de dos triángulos son proporcionales y sus ángulos incluidos son congruentes, entonces los dos triángulos son semejantes.



DADO: $\dfrac{AC}{DF} = \dfrac{AB}{DE}$, $\angle A \cong \angle D$

DEMUESTRA: $\triangle ABC \sim \triangle DEF$

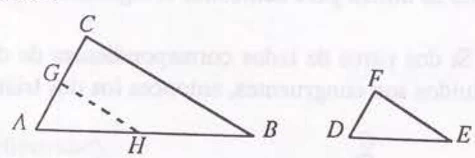
NOTA: en esta demostración se supondrá, sin pérdida de generalidad, que $DF < AC$, ya que si $DF > AC$ la demostración es semejante a la que se presenta en seguida, y si $DF = AC$ la demostración es trivial (ya que entonces $AB = DE$ y $\triangle ABC \cong \triangle DEF$).

DEMOSTRACIÓN:

Proposiciones	Razones
1. Sea G el punto de $\overline{AC}$ tal que $AG = DF$. Sea H el punto de $\overline{AB}$ tal que $AH = DE$	**1.** Post. de la regla

2. $\angle A \cong \angle D$	2. Dado
3. $\triangle AHG \cong \triangle DEF$	3. LAL = LAL
4. $\angle F \cong \angle AGH, \angle E \cong \angle AHG$	4. Partes corr. de $\triangle$s $\cong$ son $\cong$
5. $\dfrac{AC}{DF} = \dfrac{AB}{DE}$	5. Dado
6. $\dfrac{AC}{AG} = \dfrac{AB}{AH}$	6. Sustitución
7. $\overline{GH} \parallel \overline{BC}$	7. Una recta que corta 2 lados de un $\triangle$ en puntos distintos y divide estos segmentos en segmentos proporcionales, es $\parallel$ al tercer lado
8. $\angle AGH, \cong \angle C, \angle AHG \cong \angle B$	8. $\angle$s corresp. formados por 2 rectas $\parallel$ y una trans. son $\cong$
9. $\angle F \cong \angle C, \angle E \cong \angle B$	9. Transitividad (Prop. 4 y 8)
10. $\triangle ABC \sim \triangle DEF$	10. AA ~ AA

Teorema 4.5 **(LLL ~ LLL)** Si lados correspondientes de dos triángulos son proporcionales, entonces los dos triángulos son semejantes.



DADO: $\dfrac{AC}{DF} = \dfrac{AB}{DE} = \dfrac{BC}{EF}$

DEMUESTRA: $\triangle ABC \sim \triangle DEF$

NOTA: sin pérdida de generalidad se supone que $DF < AC$ (consulta la nota en la demostración del teorema 4.4).

DEMOSTRACIÓN:

Proposiciones	**Razones**
1. Sea G el punto de $\overline{AC}$ tal que $AG = DF$. Sea H el punto de $\overline{AB}$ tal que $AH = DE$:	1. Post. de la regla
2. $\dfrac{AC}{DF} = \dfrac{AB}{DE} = \dfrac{BC}{EF}$	2. Dado
3. $\dfrac{AC}{AG} = \dfrac{AB}{AH} = \dfrac{BC}{EF}$	3. Sustitución
4. $\angle A \cong \angle A$	4. Reflexividad

5. $\triangle AHG \sim \triangle ABC$	**5.** LAL ~ LAL
6. $\dfrac{BC}{HG} = \dfrac{AB}{AH}$	**6.** Def. de ~
7. $\dfrac{BC}{HG} = \dfrac{BC}{EF}$	**7.** Transitividad
8. $EF = HG$	**8.** Axioma de mult. de la =
9. $\triangle AHG \cong \triangle DEF$	**9.** LLL = LLL
10. $\angle F \cong \angle AGH$, $\angle E \cong \angle AHG$	**10.** Partes corresp. de $\triangle$ s $\cong$ son $\cong$
11. $\angle AGH \cong \angle C$, $\angle AHG \cong \angle B$	**11.** Def. de ~
12. $\angle F \cong \angle C$, $\angle E \cong \angle B$	**12.** Transitividad
13. $\triangle ABC \sim \triangle DEF$	**13.** AA ~ AA

¡PRECAUCIÓN! En las secciones en que se analizaron los triángulos congruentes, se describieron las siguientes relaciones que determinan la congruencia de triángulos:

LAL = LAL (postulado 2.1)
ALA = ALA (postulado 2.2)
LLL = LLL (postulado 2.3)
LAA = LAA (teorema 3.12)

En este capítulo se analizan las siguientes relaciones que determinan la semejanza de triángulos:

AAA ~ AAA (postulado 4.1)
AA ~ AA (teorema 4.1)
LAL ~ LAL (teorema 4.4)
LLL ~ LLL (teorema 4.5)

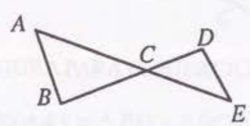
Es importante establecer la diferencia entre las relaciones de congruencia y las relaciones de semejanza:

si dos triángulos son congruentes, también son semejantes;

pero

si dos triángulos son semejantes, no necesariamente son congruentes.

Los ejemplos 1 y 2 ilustran la aplicación de los teoremas 4.4 y 4.5.



EJEMPLO 1 DADO: $\overline{AE}$ y $\overline{BD}$ que se bisectan entre sí
DEMUESTRA: $\triangle ABC \sim \triangle EDC$

Solución DEMOSTRACIÓN:

Proposiciones	**Razones**
1. $\overline{AE}$ y $\overline{BD}$ que se bisectan entre sí	**1.** Dado
2. $AC = CE$, $BC = CD$	**2.** Def. de bisectriz

3. $\dfrac{AC}{CE} = 1, \dfrac{BC}{CD} = 1$	3. Axioma de mult. de la =
4. $\dfrac{AC}{CE} = \dfrac{BC}{CD}$	4. Sustitución
5. $\angle ACB \cong \angle ECD$	5. $\angle$s op. vert. son $\cong$
6. $\triangle ABC \sim \triangle EDC$	6. LAL ~ LAL

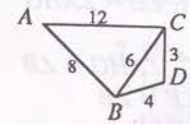


FIGURA 4.5

EJEMPLO 2 DADO: $\triangle ABC$ y $\triangle BCD$ como en la figura 4.5
DEMUESTRA: $\triangle ABC \sim \triangle BDC$

Solución Observa que $\dfrac{AC}{BC} = \dfrac{BC}{DC} = \dfrac{AB}{BD} = \dfrac{2}{1}$. En consecuencia, ya que LLL ~ LLL,

$\triangle ABC \sim \triangle BCD$.

El siguiente teorema se deja como ejercicio. Puede demostrarse aplicando conceptos de triángulos semejantes.

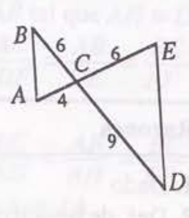
Teorema 4.6 Una bisectriz de un ángulo de un triángulo divide el lado opuesto en segmentos proporcionales a los lados adyacentes correspondientes.

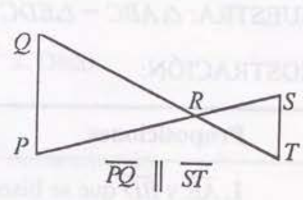
EJERCICIOS 4.3

En los ejercicios 1 a 4, escribe las proporciones que representan los lados de los polígonos semejantes dados.

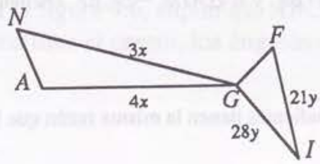
1. $\triangle ABC \sim \triangle MNP$
2. $\triangle ABC \sim \triangle MPN$
3. $\triangle LED \sim \triangle ELF$
4. $\triangle MUD \sim \triangle SUD$

En los ejercicios 5 a 10, determina si los dos triángulos son semejantes. En caso de serlo, anota las proporciones que representan sus lados, por qué son semejantes y la semejanza.

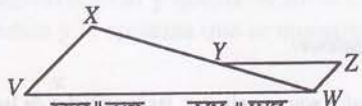
5. 

6. 

7.

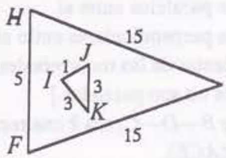


9.

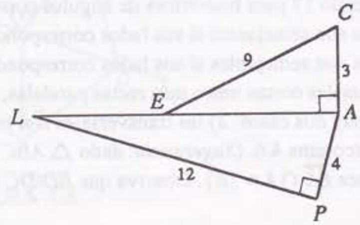


$\overline{VW} \parallel \overline{YZ}$, $\overline{VX} \parallel \overline{WZ}$

8.



10.



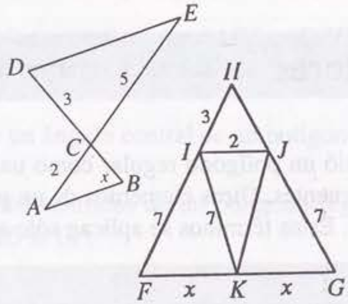


FIGURA PARA LOS EJERCICIOS 11 A 14

Encuentra x, en los ejercicios 11 a 14.

11. $\triangle ABC \sim \triangle EDC$
12. $\triangle ABC \sim \triangle DEC$
13. $\triangle FGH \sim \triangle IJK$
14. $\triangle FGH \sim \triangle GJK$

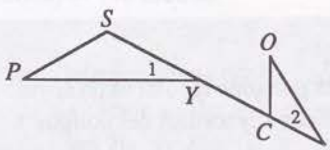


FIGURA PARA EL EJERCICIO 15

15. Si $S—Y—C—H$, $SC = 10$, $HY = 8$, $PY = 7$, $HO = 4$ y si $\triangle PSY \sim \triangle OCH$, halla CY.

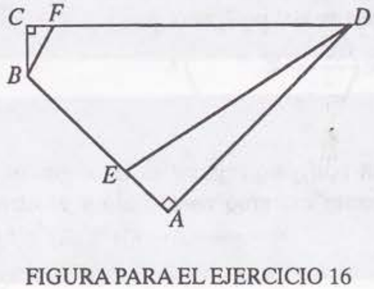


FIGURA PARA EL EJERCICIO 16

16. Si $A—E—B$, $D—F—C$, $AB = 12$, $CD = 23$, $BC = 5$, $AD = 19$, $DF = 2 \cdot BE$, y si $\triangle ADE \sim \triangle CBF$, encuentra BE.

Demuestra lo siguiente:

17. Si dos triángulos son semejantes, las longitudes de las alturas correspondientes tienen la misma razón que las longitudes de los lados correspondientes.
18. Repite el ejercicio 17 para medianas correspondientes.
19. Repite el ejercicio 17 para bisectrices de ángulos correspondientes.
20. Dos triángulos son semejantes si sus lados correspondientes son respectivamente paralelos entre sí.
21. Dos triángulos son semejantes si sus lados correspondientes son respectivamente perpendiculares entre sí.
22. Si dos transversales cortan tres o más rectas paralelas, los segmentos correspondientes de las transversales son proporcionales. [*Sugerencia*: hay dos casos: *a*) las transversales son paralelas, *b*) las transversales no son paralelas.]
23. Demuestra el teorema 4.6. (*Sugerencia*: dado $\triangle ABC$ con $\overrightarrow{AD}$ que bisecta a $\angle A$ y $B—D—C$, sea k una recta paralela a $\overleftrightarrow{AD}$ que pasa por C y sea $\overleftrightarrow{BA} \cap k = \{E\}$. Observa que $BD/DC = BA/AE$ y que $\angle AEC \cong \angle ACE$).

4.4 Polígonos regulares

En el capítulo 3 se definió un polígono regular como un polígono en que todos los ángulos y todos los lados son congruentes. Otros elementos de un polígono regular son su *centro, ángulo central*, *radio* y *apotema*. Estos términos se aplican sólo a *polígonos regulares*.

Definición

El **centro** de un polígono regular es el centro de un círculo que contiene a todos los vértices del polígono.

Siempre es posible encontrar un círculo que contenga todos los vértices de un polígono regular. El centro de un polígono regular es equidistante de cada uno de los vértices del polígono, ya que esa distancia es igual al radio del círculo. Para las definiciones que siguen, consulta el ejemplo 1 y la figura 4.6.

Definición

Un **ángulo central** de un polígono regular es un ángulo con vértice en el centro del polígono y que contiene dos vértices adyacentes del polígono.

Definición

Un **radio** de un polígono regular es un segmento de recta con puntos extremos en el centro del polígono y un vértice del polígono.

Definición

Una **apotema** de un polígono regular es un segmento de recta perpendicular a uno de los lados con un punto extremo en el lado y el otro punto extremo en el centro del polígono.

EJEMPLO 1 En la figura 4.6, supón que $ABCDE$ es un pentágono regular y que $AP = BP = CP = DP = EP$. Identifica el centro, los ángulos centrales, los radios y la apotema que se muestran.

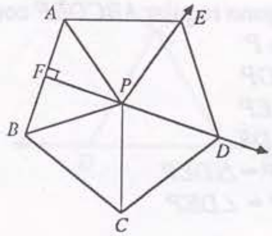


FIGURA 4.6

Solución El centro es P; los ángulos centrales son $\angle APE$, $\angle DPE$, $\angle CPD$, $\angle BPC$, $\angle APB$; los radios son $\overline{AP}, \overline{BP}, \overline{CP}, \overline{DP}, \overline{EP}$; y la apotema mostrada es $\overline{FP}$. ■

EJEMPLO 2 Encuentra la medida de un ángulo central de un polígono regular de 20 lados.

Solución Debido a que los ángulos centrales de un polígono regular son congruentes, la medida de un ángulo central es $360°/20 = 18°$. ■

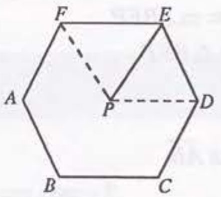
EJEMPLO 3 Si la medida de un ángulo central de un polígono regular es 36°, halla el número de lados del polígono.

Solución El número de lados es $360°/36° = 10$. ■

EJEMPLO 4 Encuentra el perímetro de un decágono regular si cada lado mide 14 metros de largo.

Solución El perímetro es 10(14 metros) = 140 metros. ■

Los polígonos regulares tienen muchas propiedades especiales que no comparten con los polígonos en general. A continuación se ilustran algunas y; otras se dejan como ejercicios. Se demostrará que un radio de un polígono regular bisecta un ángulo interior y que una apotema es la mediatriz de un lado.



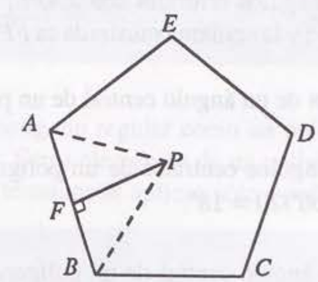
EJEMPLO 5 DADO: Hexágono regular $ABCDEF$ con centro P
DEMUESTRA: $\overrightarrow{EP}$ bisecta $\angle DEF$

Solución DEMOSTRACIÓN:

Proposiciones	Razones
1. Pentágono regular *ABCDEF* con centro *P*	1. Dado
2. $FP = DP$	2. Def. de centro
3. $EP = EP$	3. Reflexividad
4. $FE = DE$	4. Def. de polígono regular
5. $\triangle FEP \cong \triangle DEP$	5. LLL = LLL
6. $\angle FEP \cong \angle DEP$	6. Partes corresp. de $\triangle$s $\cong$ son $\cong$
7. $\overrightarrow{EP}$ bisecta $\angle DEF$	7. Def. de bisectriz de un ángulo

■

EJEMPLO 6



DADO: Pentágono regular *ABCDE* con centro *P*, $\overline{PF} \perp \overline{AB}$
DEMUESTRA: $\overline{PF}$ bisecta $\overline{AB}$

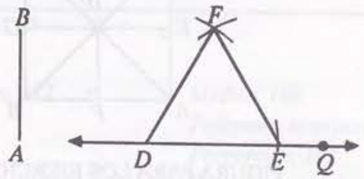
Solución DEMOSTRACIÓN:

Proposiciones	Razones
1. Pentágono regular *ABCDE* con centro *P*, $\overline{PF} \perp \overline{AB}$	1. Dado
2. $AP = BP$	2. Def. de centro
3. $m\angle PAB = m\angle PBA$	3. Si dos lados de un $\triangle$ son $\cong$, los $\angle$s op. a estos lados son $\cong$
4. $m\angle AFP = m\angle BFP$	4. Def. de $\perp$
5. $\triangle AFP \cong \triangle BFP$	5. LAA = LAA
6. $AF = BF$	6. Partes corresp. de $\triangle$s $\cong$ son $\cong$
7. $\overline{PF}$ bisecta $\overline{AB}$	7. Def. de bisectriz de un segmento

■

Las siguientes construcciones ilustran polígonos regulares con tres o cuatro lados.

CONSTRUCCIÓN 4.3
Construcción de un triángulo equilátero.



DADO: $\overline{AB}$ arbitrario

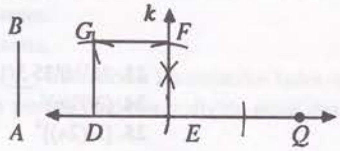
CONSTRUYE: $\triangle DEF$ de modo que $DE = EF = FD = AB$

Paso 1. Traza una recta $\overleftrightarrow{DQ}$ y aplica la construcción 1.1 para encontrar un segmento $\overline{DE}$ sobre $\overleftrightarrow{DQ}$ de modo que $DE = AB$.

Paso 2. Con AB como radio traza los círculos D y E. Identifica con F a uno de los puntos de intersección de los círculos.

Paso 3. Traza $\overline{DF}$ y $\overline{EF}$. Así, $\triangle DEF$ es el triángulo buscado.

CONSTRUCCIÓN 4.4
Construye un cuadrado.



DADO: $\overline{AB}$ arbitrario

CONSTRUYE: Cuadrado $DEFG$

Paso 1. Traza una recta $\overleftrightarrow{DQ}$ y aplica la construcción 1.1 para encontrar un segmento $\overline{DE}$ sobre $\overleftrightarrow{DQ}$ de modo que $DE = AB$.

Paso 2. Aplica la construcción 1.5 para hallar la recta k perpendicular a $\overleftrightarrow{DQ}$ en E.

Paso 3. Aplica la construcción 1.1 para encontrar un punto F de modo que $EF = AB$.

Paso 4. Con AB como radio, traza los círculos D y F. Uno de los puntos de intersección es E. Identifica el otro punto como G.

Paso 5. Traza $\overline{DG}$ y $\overline{FG}$. Así, $DEFG$ es el cuadrado requerido.

EJERCICIOS 4.4

***En los ejercicios 1 a 3, traza un hexágono regular* ABCDEF *con centro* P.**

1. Identifica todos los radios.
2. Identifica todos los ángulos centrales.
3. Traza todas las apotemas.

***En los ejercicios 4 a 7 se proporciona el cuadrado* ABCD.**

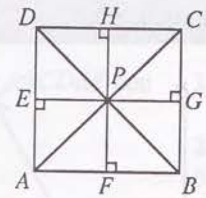


FIGURA PARA LOS EJERCICIOS 4 A 7

4. Identifica todas las diagonales.
5. Identifica todos los radios.
6. Identifica todos los ángulos centrales.
7. Identifica todas las apotemas.

En los ejercicios 8 a 16, encuentra la medida de un ángulo central de cada polígono regular con el número indicado de lados. (Consulta el ejercicio 43.)

8. 3
9. 4
10. 5
11. 6
12. 7
13. 8
14. 9
15. 10
16. n

En los ejercicios 17 a 25, si la medida de un ángulo central de un polígono regular está dada, encuentra el número de lados del polígono.

17. 60°
18. 30°
19. 24°
20. 10°
21. 5°
22. 1°
23. 21°10′35 5/17″
24. $(360/n)°$
25. $[5/(2n)]°$

En los ejercicios 26 a 32, construye polígonos regulares con el número dado de lados. (Sugerencia: los ejercicios 28 a 32 pueden construirse bisectando los ángulos centrales del ejercicio 26 o del ejercicio 27.)

26. 3
27. 4
28. 6
29. 8
30. 12
31. 16
32. 24
33. Construye un cuadrado con un lado dado de 1.5 in.
34. Construye un triángulo equilátero con un lado dado de 1.75 in.
35. Construye un cuadrado con un lado congruente a la altura de un triángulo equilátero con un lado dado de 2 in.
36. Construye un triángulo equilátero con un lado congruente a la diagonal de un cuadrado con un lado dado de 1 in.

En los ejercicios 37 a 42, encuentra los perímetros de los polígonos regulares si cada uno de los lados tiene la longitud dada.

37. Triángulo, 17
38. Pentágono, 4
39. Hexágono, 3
40. Heptágono, $\sqrt{3}$
41. Octágono, 29.2
42. Enégono, 67.35

Demuestra lo siguiente.

43. Los ángulos centrales de un polígono regular son congruentes.
44. Las apotemas de un polígono regular son congruentes.

45. Los ángulos centrales de dos pentágonos regulares son congruentes.
46. Dos cuadrados cualesquiera son semejantes.
47. Dos pentágonos regulares cualesquiera son semejantes.

TÉRMINOS CLAVE

Ángulo central de un polígono regular, 122
Apotema, 122
Centro de un polígono, 122
Cuarta proporcional, 108
Es proporcional a, 107
Extremos, 108
Media geométrica, 108
Media proporcional, 108
Medios, 108
Polígonos semejantes, 110
Proporción, 107
Proporción continua, 107
Radio de un polígono regular, 122
Razón, 107
Segmentos proporcionales, 108

EJERCICIOS DE REPASO

En la línea en blanco escribe la expresión* siempre, algunas veces *o* nunca, *según corresponda.

1. Una razón ________ es una proporción.
2. Los triángulos semejantes ________ son congruentes.
3. Los triángulos congruentes ________ son semejantes.
4. Una recta paralela a un lado de un triángulo ________ intersecta a los otros dos lados en puntos distintos.
5. Una recta que corta dos lados de un triángulo en puntos distintos y divide estos dos lados en segmentos proporcionales ________ es paralelo al tercer lado.
6. Si dos triángulos son semejantes, los dos triángulos ________ son congruentes.
7. El centro de un polígono regular ________ está en el exterior del polígono.
8. Dos apotemas de un polígono regular ________ son perpendiculares.
9. Dos apotemas de un polígono regular ________ son paralelas.
10. Un ángulo con un vértice en el centro de un polígono regular y que contiene a dos vértices del polígono ________ es un ángulo central.

Anota una V si la proposición es verdadera. Si es falsa, sustituye la(s) palabra(s) subrayada(s) a fin de obtener una proposición verdadera.

11. Una razón es una proposición de que dos proporciones son iguales.
12. En la proporción $a/b = b/c$, b es la segunda proporcional entre a y c.
13. Dos polígonos son semejantes si ángulos correspondientes son congruentes y los lados correspondientes son segmentos proporcionales.
14. Si los tres ángulos de un triángulo son congruentes a los tres ángulos de otro triángulo, entonces los triángulos son congruentes.
15. Si ángulos correspondientes de dos triángulos son proporcionales, entonces los dos triángulos son semejantes.
16. Una apotema de un polígono regular es un segmento de recta con puntos extremos en el centro del polígono y un vértice del polígono.
17. El vértice de un polígono regular es el único punto equidistante a cada uno de los centros del polígono.
18. La mediatriz de un lado de un polígono regular contiene al centro del polígono.
19. La bisectriz de un ángulo de un polígono regular debe contener dos vértices del polígono.
20. Un ángulo central de un octágono regular mide dos veces lo que el ángulo central de un cuadrilátero regular.

Contesta las siguientes cuestiones.

En los ejercicios 21 a 24, expresa cada razón como una fracción y simplifícala.

21. 6:4
22. 1/2:2
23. La razón de 5 yardas (*yd*) a 2 millas (*mi*).
24. La razón de 5 galones (*gal*) a 4 cuartos (*qt*).

En los ejercicios 25 a 28, despeja x en cada una de las proporciones.

25. $x/3 = 5/7$
26. $2/x = 9/4$
27. $5/(x + 1) = 9/(x + 2)$
28. $6:7x = 5:3x$

En los ejercicios 29 y 30, encuentra la cuarta proporcional.

29. 2, 3, 4
30. $7x$, $10x$, $17x$

En los ejercicios 31 y 32, encuentra la media proporcional entre:

31. 1 y 169
32. 2/7 y 5/7

En los ejercicios 33 y 44, escribe las congruencias entre los ángulos correspondientes y la proporción continua para los lados correspondientes.

33. $\triangle ACB \sim \triangle DEF$
34. $PQRST \sim JKLMN$

35. Encuentra la altura de una torre que proyecta una sombra de 300 ft si un edificio adyacente de 800 ft de alto proyecta una sombra de 500 ft.

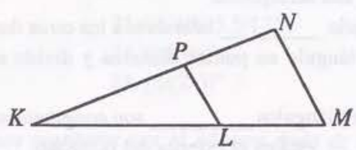


FIGURA PARA LOS EJERCICIOS 36 A 39

En los ejercicios 36 a 39, dado $\triangle$***KMN,*** $\overline{PL} \parallel \overline{NM}$***, K—P—N, K—L—M.***

36. Encuentra LM si $KP = 5$, $KL = 7$ y $PN = 3$.
37. Encuentra PN si $KP = 4$, $KM = 12$ y $KL = 5$.
38. Encuentra KL si $KM = 9$ y $KP = 2PN$.
39. Encuentra PL si $NM = 4$ y $KN = 2KP$.

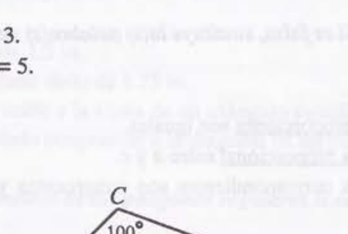


FIGURA PARA LOS EJERCICIOS 40 A 42

***En los ejercicios 40 a 42, dado* △ABC, △DEF, $\overline{DE} \parallel \overline{AC}$, $\overline{EF} \parallel \overline{BC}$.**

40. Encuentra m∠*D* si ∠*F* ≅ ∠*B*.
41. Encuentra m∠*F* si ∠*F* ≅ ∠*B*.
42. Encuentra *DF* si *DE*/*AC* = *EF*/*CB* = 2/3.

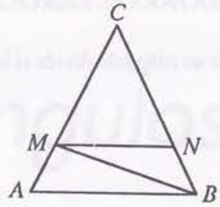


FIGURA PARA LOS EJERCICIOS 43 Y 44

***En los ejercicios 43 y 44, dado* △ABC, A—M—C, B—N—C, $\overline{MN} \parallel \overline{AB}$, AC = BC = *10*, AM = *4*, MC = AB.**

43. Encuentra *MN*.
44. Encuentra m∠*AMB* – m∠*MBN* si m∠*C* = 27°.

***En los ejercicios 45 y 46, dado* △ABC, △RST, m∠A = m∠T, m∠C = m∠S.**

45. Encuentra *AB* si *BC*/*RS* = 2/3 y *RT* = 9.
46. ¿A qué debe ser igual la razón de *BC*/*RS* para que △*RST* ≅ △*BCA*?
47. Si *ABCDEF* es un hexágono regular y *AD* = 12, encuentra *BC*.
48. La medida del ángulo central de un polígono regular es 4/5 de la medida de un ángulo central de un segundo polígono regular. Si el primer polígono tiene tres lados más que el segundo, ¿cuántos lados tiene?
49. Un triángulo equilátero y un octágono regular tienen lados de la misma longitud. ¿Cuál es la razón de sus perímetros?

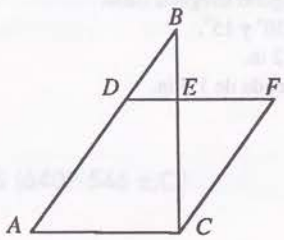


FIGURA PARA LOS EJERCICIOS 50 A 53

Demostraciones:

***En los ejercicios 50 y 51, dado* △ABC, D—E—F *y* ▱ACFD.**

50. DEMUESTRA: △*BDE* ~ △*CFE*
51. DEMUESTRA: *CF*/*DB* = *CE*/*EB*

***En los ejercicios 52 y 53, dado* △ ABC, D—E—F, m∠B = m∠FCE, AD = 3DB *y* CE = 3EB.**

52. DEMUESTRA: △ *DBE* ~ △*FCE*
53. DEMUESTRA: △ *FCE* ~ △ *ABC*

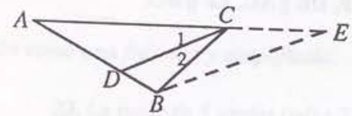


FIGURA PARA EL EJERCICIO 54

54. DEMUESTRA: la bisectriz de un ángulo interno de un triángulo divide el lado opuesto en dos segmentos que son proporcionales a los lados adyacentes.
DADO: $\triangle ABC$, $\overrightarrow{CD}$ bisecta $\angle ACB$
DEMUESTRA: $AD/DB = AC/CB$

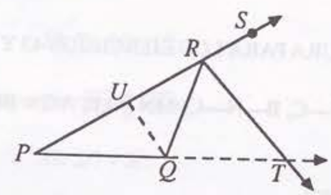


FIGURA PARA EL EJERCICIO 55

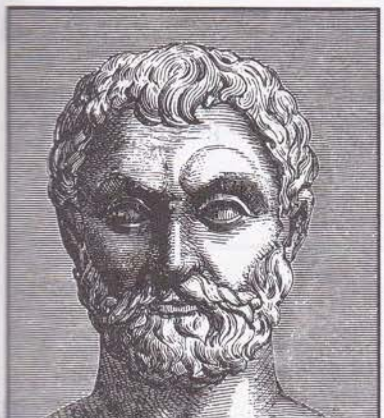
55. DADO: $\triangle PQR$, P—R—S,
$\overrightarrow{RT}$ bisecta $\angle QRS$
DEMUESTRA: $PT/QT = PR/QR$

56. Demuestra que dos cuadrados cualesquiera son semejantes.

Construcciones:

57. Construye un hexágono semejante a un hexágono irregular dado.
58. Construye ángulos cuyas medidas sean 60°, 30° y 15°.
59. Construye un cuadrado con un lado dado de 2 in.
60. Construye un hexágono regular con un lado dado de 1.5 in.

5 Triángulos rectángulos



Stock Montage, Inc.

TALES (640?-546 a.C.)

NOTA HISTÓRICA *Fácilmente hay más de 300 demostraciones conocidas del Teorema de Pitágoras. Pitágoras fue un alumno de Tales, quien es considerado como el creador de la primera demostración de este teorema. A lo largo del tiempo muchas otras personas, incluyendo al presidente estadounidense James A. Garfield, han elaborado una amplia variedad de demostraciones del mismo teorema.*

TEOREMA DE PITÁGORAS

El cuadrado de la longitud de la hipotenusa de un triángulo rectángulo es igual a la suma de los cuadrados de las longitudes de los catetos.

Una vez que se ha analizado el concepto de triángulos congruentes en el capítulo 2, se verá el caso especial de los triángulos rectángulos. Debido a que este concepto requiere el conocimiento de radicales y ecuaciones cuadráticas del álgebra, se proporciona una sección opcional de repaso y una sección opcional (sec. 5.5) en la que se cubren conceptos trigonométricos básicos.

5.1 Repaso de radicales y ecuaciones cuadráticas (opcional)

En los próximos capítulos se usarán ecuaciones cuadráticas y expresiones que comprenden radicales. Esta sección te será de utilidad si careces de experiencia en estos tipos de procedimientos algebraicos; puedes omitirla si te consideras calificado para efectuar el trabajo sin práctica adicional. Las raíces cuadradas constituyen el interés primordial en este curso, de modo que la atención se restringirá a los radicales de raíces cuadradas.

Dado un número real $r \geq 0$, la **raíz cuadrada de r** (que se denota por $\sqrt{r}$) es la solución no negativa de la ecuación $x^2 - r = 0$. La **raíz cuadrada negativa de r** (que se denota por $-\sqrt{r}$) es la solución negativa de la ecuación $x^2 - r = 0$. Así, $\sqrt{9} = 3$ y $\sqrt{9} = -3$ son soluciones de la ecuación $x^2 - 9 = 0$. Para muchas elecciones de r, la ecuación $x^2 - r = 0$ no tiene una solución racional. En este caso es posible aproximar el valor de $\sqrt{r}$ con una calculadora o una tabla. (Consulta el Ap. G.) En este libro suele tenerse más interés en respuestas exactas que en respuestas aproximadas. En ciertos tipos de problemas, las respuestas aproximadas —que se utilizan en cálculos adicionales— pueden conducir a errores grandes en la respuesta final.

EJEMPLO 1 Halla las soluciones exactas y las soluciones aproximadas de la ecuación $x^2 - 3 = 0$.

Solución Al comparar la expresión $x^2 - 3 = 0$ con la expresión $x^2 - r = 0$ se encuentra que $r = 3$, de modo que $\sqrt{r} = \sqrt{3}$. Así, las soluciones exactas de la ecuación dada son $\sqrt{3}$ y $-\sqrt{3}$. Al usar una calculadora o el apéndice G resulta que las soluciones aproximadas son 1.732 y −1.732. ■

EJEMPLO 2 Simplifica $\sqrt{12}$ y $\sqrt{612}$.

Solución

$$\sqrt{12} = \sqrt{4 \cdot 3} = \sqrt{4} \cdot \sqrt{3} = 2\sqrt{3}$$
$$\sqrt{612} = \sqrt{36 \cdot 17} = \sqrt{36} \cdot \sqrt{17} = 6\sqrt{17}$$ ■

Cada simplificación se obtiene factorizando el número original en el factor **cuadrado perfecto** más grande del número (es decir, $4 = 2^2$, $36 = 6^2$) multiplicado por el factor que no es cuadrado perfecto restante del número (esto es, 3, 17).

EJEMPLO 3 Simplifica $\dfrac{1}{\sqrt{3}}$ y $\sqrt{\dfrac{5}{7}}$.

Solución

$$\frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$
$$\sqrt{\frac{5}{7}} = \sqrt{\frac{5}{7} \cdot \frac{7}{7}} = \sqrt{\frac{35}{49}} = \frac{\sqrt{35}}{\sqrt{49}} = \frac{\sqrt{35}}{7}$$ ■

Es preferible la expresión $\dfrac{\sqrt{3}}{3}$ a la expresión $\dfrac{1}{\sqrt{3}}$, ya que para efectos de cómputo,

$\frac{1}{1.732}$ es más difícil de evaluar que $\frac{1.732}{3}$. De manera semejante, es preferible $\frac{\sqrt{35}}{7}$ a $\sqrt{\frac{5}{7}}$.

La expresión **racionalizar el denominador** se utiliza para describir el proceso con que se asegura que no aparecerá expresión irracional alguna en el denominador de una expresión. Esto significa que si en un denominador se encuentra un radical ($\sqrt{\ }$), se siguen pasos como los del ejemplo 3 para eliminarlo.

Una **ecuación cuadrática** es una ecuación de la forma $ax^2 + bx + c = 0$, donde a, b y c son números reales, con $a \neq 0$. El siguiente teorema del álgebra es útil para resolverlas.

Teorema A Si m y n son números reales y $mn = 0$, entonces $m = 0$ o $n = 0$.

DEMOSTRACIÓN:
Si $m = 0$, no hay nada que demostrar. Si $m \neq 0$, se aplica el axioma de multiplicación de la igualdad para multiplicar ambos miembros de $mn = 0$ por $1/m$. El resultado es $n = 0$. El teorema A se aplica en el siguiente ejemplo.

EJEMPLO 4 Despeja x: $5x^2 + 7x - 6 = 0$.

Solución Se factoriza el miembro izquierdo y se obtiene $(5x - 3)(x + 2) = 0$.
Así, por el teorema A: $5x - 3 = 0$ o $x + 2 = 0$.
Por el axioma de suma de la igualdad: $5x = 3$ o $x = -2$.
Por el axioma de multiplicación de la igualdad: $x = 3/5$ o $x = -2$.
En consecuencia, el conjunto solución es $\{-2, 3/5\}$. ■

Una forma simple de una ecuación cuadrática que ocurre a menudo es $x^2 = k^2$. Este tipo de ecuación se resuelve aplicando el siguiente teorema.

Teorema B Si $x^2 = k^2$, entonces $x = \pm k$.

DEMOSTRACIÓN:

Proposiciones	Razones
1. $x^2 = k^2$	**1.** Dado
2. $x^2 - k^2 = 0$	**2.** Axioma de suma de =
3. $(x + k)(x - k) = 0$	**3.** Sustitución
4. $x + k = 0$ o $x - k = 0$	**4.** Teorema A
5. $x = \pm k$	**5.** Axioma de suma de =

EJEMPLO 5 Despeja x: $x^2 = 121$.

Solución El conjunto solución es $\{\pm 11\}$. ■

EJEMPLO 6 Despeja y: $y^2 = 13$.

Solución El conjunto solución es $\{\pm\sqrt{13}\}$. ■

Si las soluciones de una ecuación cuadrática no son racionales, entonces la ecuación no es factorizable. En este caso se aplica el siguiente teorema.

Teorema C Si $ax^2 + bx + c = 0$ y $a \neq 0$, entonces $x = \dfrac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$.

DEMOSTRACIÓN:

Proposiciones	**Razones**
1. $ax^2 + bx + c = 0,\ a \neq 0$	**1.** Dado
2. $x^2 + \dfrac{b}{a}x + \dfrac{c}{a} = 0$	**2.** Axioma de mult. de =
3. $x^2 + \dfrac{b}{a}x = -\dfrac{c}{a}$	**3.** Axioma de suma de =
4. $x^2 + \dfrac{b}{a}x + \dfrac{b^2}{4a^2} = \dfrac{b^2}{4a^2} - \dfrac{c}{a}$	**4.** Axioma de suma de =
5. $\left(x + \dfrac{b}{2a}\right)^2 = \dfrac{b^2 - 4ac}{4a^2}$	**5.** Sustitución
6. $x + \dfrac{b}{2a} = \dfrac{\pm\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$	**6.** Teorema B
7. $x = \dfrac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$	**7.** Axioma de suma de =

La expresión para x en el teorema C es la **fórmula cuadrática.** El procedimiento que se aplicó en la demostración se denomina **completando el cuadrado.** El término $b^2/(4a^2)$, que se sumó a ambos miembros de la ecuación en el paso 4, se obtuvo al tomar la mitad del coeficiente de x y elevar al cuadrado el resultado; a saber, $b^2/(4a^2) = [b/(2a)]^2$. Así, el miembro izquierdo de la ecuación se volvió un cuadrado perfecto, como se muestra en el paso 5.

EJEMPLO 7 Despeja x: $3x^2 - 4x - 5 = 0$.

Solución Por el teorema C: se tiene $x = \dfrac{4 \pm \sqrt{16 - 4(-15)}}{6}$, que se simplifica a x $\dfrac{4 \pm \sqrt{76}}{6} = \dfrac{4 \pm \sqrt{4 \cdot 19}}{6}$

$= \dfrac{4 \pm 2\sqrt{19}}{6} = \dfrac{2 \pm \sqrt{19}}{3}$. ∎

EJERCICIOS 5.1

***En los ejercicios 1 a 9, ¿cuáles números son* cuadrados perfectos?**

1. 4	**4.** 121	**7.** 324
2. 20	**5.** 999	**8.** 5929
3. 49	**6.** 289	**9.** 1481089

Simplifica los radicales en los ejercicios 10 a 18.

10. $\sqrt{18}$	**11.** $\sqrt{92}$	**12.** $\sqrt{1225}$

13. $\sqrt{867}$
14. $\sqrt{2527}$
15. $\sqrt{899}$
16. $\sqrt{7744}$
17. $\sqrt{23625}$
18. $\sqrt{47753}$

En los ejercicios 19 a 27, simplifica las expresiones radicales.

19. $1/\sqrt{7}$
20. $1/\sqrt{81}$
21. $1/\sqrt{13}$
22. $\sqrt{6/9}$
23. $\sqrt{3/2}$
24. $\sqrt{9/13}$
25. $2\sqrt{289/53}$
26. $(7\sqrt{722/1250})/2$
27. $(13\sqrt{191/270})/5$

En los ejercicios 28 a 36, resuelve para x:

28. $x^2 = 25$
29. $x^2 = 7$
30. $x^2 - 2 = 0$
31. $x^2 + 4x + 4 = 0$
32. $x^2 - 4x + 4 = 0$
33. $x^2 - 4x = 21$
34. $72 - x^2 = 6x$
35. $2x^2 + 3x - 8 = 0$
36. $5x^2 - 7x = 64$

Resuelve las proporciones para y en los ejercicios 37 a 45.

37. $\dfrac{3}{y} = \dfrac{y}{12}$
38. $\dfrac{y}{5} = \dfrac{7}{y}$
39. $\dfrac{9}{y} = \dfrac{y}{13}$
40. $\dfrac{y+2}{2} = \dfrac{2}{y}$
41. $\dfrac{y-3}{6} = \dfrac{6}{y}$
42. $\dfrac{2}{y} = \dfrac{2y-1}{4}$
43. $\dfrac{2y+3}{9} = \dfrac{9}{y}$
44. $\dfrac{3y-7}{4} = \dfrac{4}{y+3}$
45. $\dfrac{4-y}{7} = \dfrac{5}{3-2y}$

5.2 Teoremas sobre congruencia de triángulos rectángulos

En la sección 2.6 se definió *triángulo rectángulo*, *hipotenusa* y *cateto*. En esta sección se analizarán teoremas de congruencia que se refieren sólo a triángulos rectángulos. Si C representa al *cateto*, H a la *hipotenusa* y A un *ángulo agudo*, entonces lo siguiente es verdadero:

1. (CA = CA) Si un cateto y un ángulo agudo de un triángulo rectángulo son congruentes a las partes correspondientes de otro triángulo rectángulo, entonces los dos triángulos rectángulos son congruentes.

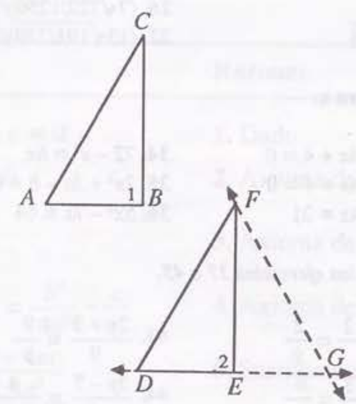
2. (HA = HA) Si la hipotenusa y un ángulo agudo de un triángulo rectángulo son congruentes a las partes correspondientes de otro triángulo rectángulo, entonces los dos triángulos rectángulos son congruentes.

3. (CC = CC) Si los dos catetos de un triángulo rectángulo son congruentes a las partes correspondientes de otro triángulo rectángulo, entonces los dos triángulos rectángulos son congruentes.

Observa que (1) es un caso especial de ALA = ALA o de LAA = LAA; (2) es un caso especial de LAA = LAA, y (3) es un caso especial de LAL = LAL.

El siguiente teorema no tiene contraparte en la sección sobre triángulos congruentes (es decir, no existe un teorema LLA = LLA). Esto significa que si dos lados y un ángulo no incluido de un triángulo son congruentes a dos lados y un ángulo no incluido de otro triángulo, los triángulos pueden no ser congruentes. Consulta los ejercicios 15 y 16.

Teorema 5.1 **(HC = HC)** Si la hipotenusa y un cateto de un triángulo rectángulo son congruentes con las partes correspondientes de otro triángulo rectángulo, entonces los dos triángulos son congruentes.

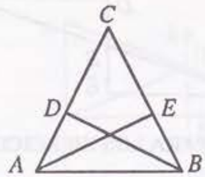


DADO: $\angle 1$ y $\angle 2$ son $\angle$s rectos,
$AC = DF$, $BC = EF$
DEMUESTRA: $\triangle ABC \cong \triangle DEF$
DEMOSTRACIÓN:

Proposiciones	Razones
1. $\angle 1$ y $\angle 2$ son $\angle$s rectos, $AC = DF$, $BC = EF$	**1.** Dado
2. Sea G un punto en $\overleftrightarrow{DE}$ tal que D—E—G y $GE = AB$	**2.** Post. de la regla y def. de entre
3. Existe exactamente una recta que contiene a F y G	**3.** 2 puntos distintos cualesquiera en el espacio tienen exactamente una recta que los contiene
4. $\angle FEG$ es un $\angle$ recto	**4.** Def. de medida y Post. de suma de ángulos
5. $\triangle ABC \cong \triangle GEF$	**5.** CC = CC
6. $AC = GF$	**6.** Partes corresp. de $\triangle$ s $\cong$ son $\cong$.
7. $DF = GF$	**7.** Sustitución (Prop. 1 y 6)
8. $\angle EDF \cong \angle EGF$	**8.** Si 2 lados de un $\triangle$ son $\cong$, los $\angle$s op. a estos lados son $\cong$
9. $\triangle GEF \cong \triangle DEF$	**9.** HA = HA
10. $\triangle ABC \cong \triangle DEF$	**10.** Transitividad

En el último paso se supone que la transitividad se cumple para la congruencia de triángulos (es decir, si $\triangle ABC \cong \triangle GEF$ y $\triangle GEF \cong \triangle DEF$, entonces $\triangle ABC \cong \triangle DEF$). La demostración se deja como ejercicio.

EJEMPLO



DADO: $\overline{BD} \perp \overline{AC}, \overline{AE} \perp \overline{BC}$
$AB = BE$
DEMUESTRA: $\triangle ABC$ es isósceles

Solución DEMOSTRACIÓN:

Proposiciones	Razones
1. $\overline{BD} \perp \overline{AC}, \overline{AE} \perp \overline{BC}, AD = BE$	**1.** Dado
2. $AB = AB$	**2.** Reflexividad
3. $\triangle ABD \cong \triangle BAE$	**3.** HL = HL
4. $\angle DAB \cong \angle EBA$	**4.** Partes corresp. de $\triangle$s $\cong$ son $\cong$
5. $AC = BC$	**5.** Si 2 $\angle$s de un $\triangle$ son $\cong$, los lados op. a los $\angle$s son $\cong$
6. $\triangle ABC$ es isósceles	**6.** Def. de isósceles

EJERCICIOS 5.2

En los ejercicios 1 a 3, escribe y demuestra los teoremas.

1. CA = CA **2.** HA = HA **3.** CC = CC

4. Demuestra que dos triángulos rectángulos son semejantes si un ángulo agudo de uno mide lo mismo que un ángulo agudo del otro.

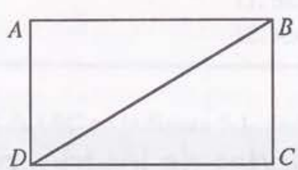


FIGURA PARA LOS EJERCICIOS 5 Y 6

5. DADO: $AD = BC, \overline{AD} \perp \overline{AB}, \overline{CD} \perp \overline{BC}$
DEMUESTRA: $\triangle ABD \cong \triangle CDB$

6. DADO: $\overline{AB} \parallel \overline{CD}, AB = CD, \overline{BC} \perp \overline{CD}$
DEMUESTRA: $\triangle ABD$ es un $\triangle$ rectángulo

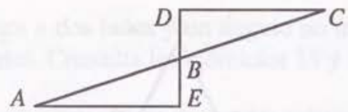


FIGURA PARA LOS EJERCICIOS 7 A 9

7. DADO: $\overline{DE}$ bisecta $\overline{AC}$ en B, $\overline{DE} \perp \overline{AE}$, $\overline{DE} \perp \overline{DC}$
DEMUESTRA: $AE = DC$
8. DADO: $\overline{DE} \perp \overline{AE}$, $\overline{AE} \parallel \overline{DC}$, $DB = EB$, A—B—C
DEMUESTRA: $BC = BA$
9. DADO: $\overline{DE} \perp \overline{AE}$, $\overline{DE} \perp \overline{DC}$, $AE = CD$, $BD = BE$
DEMUESTRA: $m\angle A = m\angle C$

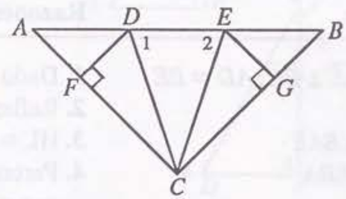


FIGURA PARA LOS EJERCICIOS 10 Y 11

10. DADO: $\overline{DF} \perp \overline{AC}$, $\overline{EG} \perp \overline{BC}$, $DF = EG$, $\angle 1 \cong \angle 2$
DEMUESTRA: $\angle ACD \cong \angle BCE$
11. DADO: $\overline{DF} \perp \overline{AC}$, $\overline{EG} \perp \overline{BC}$, $\angle BAC \cong \angle ABC$, $CF = CG$
DEMUESTRA: $\angle 1 \cong \angle 2$

En los ejercicios 12 a 14, demuestra que la congruencia de triángulos es

12. Reflexiva.
13. Simétrica.
14. Transitiva.

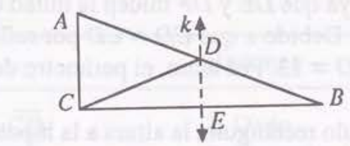
En los ejercicios 15 y 16, demuestra que es posible $\triangle ABC \not\cong \triangle DEF$. Elabora un diagrama. Esto demuestra que no existe un teorema LLA = LLA.

15. $AB = DE$, $BC = EF$, $m\angle C = m\angle F$.
16. $AB = DF$, $BC = DE$, $m\angle C = m\angle E$.

5.3 Algunas propiedades de los triángulos rectángulos

Los triángulos rectángulos poseen muchas propiedades interesantes. En esta sección se analizarán teoremas que describen las medianas y las alturas que se extienden desde el ángulo recto de un triángulo rectángulo.

Teorema 5.2 La mediana a la hipotenusa de cualquier triángulo rectángulo mide la mitad que la hipotenusa.



DADO: $\overline{AC} \perp \overline{BC}, DA = BD$
DEMUESTRA: $CD = BA/2$
DEMOSTRACIÓN:

Proposiciones	**Razones**
1. $\overline{AC} \perp \overline{BC}, DA = BD$	**1.** Dado
2. Existe exactamente una recta k que pasa por D tal que $k \parallel \overleftrightarrow{AC}$. Sea $k \cap \overleftrightarrow{BC} = \{E\}$	**2.** Post. de las paralelas
3. $CE = BE$	**3.** Una recta $\parallel$ a 1 lado de $\triangle$ un que corta a los otros dos lados en puntos distintos divide estos 2 lados en segmentos proporcionales
4. $\overline{DE} \perp \overline{BC}$	**4.** Si una recta en un plano es $\perp$ a 1 de 2 rectas $\parallel$ en el mismo plano, entonces también es $\perp$ a la otra
5. $\angle CED \cong \angle BED$	**5.** Def. de $\perp$
6. $DE = DE$	**6.** Reflexividad
7. $\triangle CED \cong \triangle BED$	**7.** LAL = LAL
8. $BD = CD$	**8.** Partes corresp. de $\triangle$ s $\cong$ son $\cong$
9. $BD + DA = BA$	**9.** Def. de entre
10. $2BD = BA$	**10.** Sustitución (Prop. 1 y 9)
11. $2CD = BA$	**11.** Sustitución (Prop. 8 y 10)
12. $CD = BA/2$	**12.** Axioma de mult. de =

EJEMPLO 1 Encuentra el perímetro del $\triangle ABC$ en la figura 5.1, dado que $\overline{DE}$ y $\overline{DF}$ son medianas.

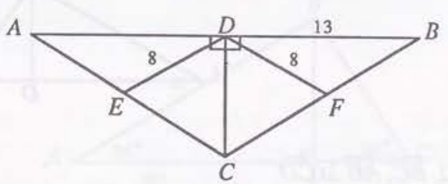
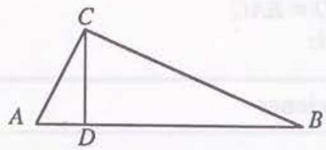


FIGURA 5.1

Solución Por el teorema 5.2, ya que DE y DF miden la mitad que AC y BC, respectivamente, se concluye que $AC = BC = 16$. Debido a que $CD = CD$ por reflexividad, $\triangle ACD \cong \triangle BCD$ por HC = HC. De ahí que $AD = BD = 13$. Por tanto, el perímetro de $\triangle ABC = 16 + 16 + 13 + 13 = 58$. ■

Teorema 5.3 En cualquier triángulo rectángulo, la altura a la hipotenusa forma dos triángulos rectángulos que son semejantes entre sí y al triángulo original.

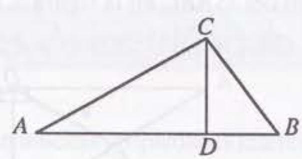


DADO: $\overline{AC} \perp \overline{BC}$, $\overline{CD} \perp \overline{AB}$
DEMUESTRA: $\triangle ACD \cong \triangle CBD$,
$\triangle ACD \cong \triangle ABC$,
$\triangle CBD \cong \triangle ABC$
DEMOSTRACIÓN:

Proposiciones	Razones
1. $\overline{AC} \perp \overline{BC}$, $\overline{CD} \perp \overline{AB}$	**1.** Dado
2. $\angle A \cong \angle A$	**2.** Reflexividad
3. $\angle ADC \cong \angle ACB$	**3.** Def. de $\perp$ y medida
4. $\triangle ACD \sim \triangle ABC$	**4.** AA ~ AA
5. $\angle B \cong \angle B$	**5.** Reflexividad
6. $\angle BDC \cong \angle BCA$	**6.** Def. de $\perp$ y medida
7. $\triangle CBD \sim \triangle ABC$	**7.** AA ~ AA
8. $\triangle ABC \sim \triangle CBD$	**8.** Simetría
9. $\triangle ACD \sim \triangle CBD$	**9.** Transitividad (Prop. 4 y 8)

El teorema 5.4 es un corolario del teorema 5.3, pero es preferible tratarlo como teorema para recalcar su importancia. Este corolario/teorema es útil en muchas situaciones de cómputo que dan por resultado ecuaciones cuadráticas.

Teorema 5.4 Dado un triángulo rectángulo, la altura a la hipotenusa divide la hipotenusa en dos segmentos tales que (1) la altura es la media geométrica de estos segmentos, (2) cada cateto es la media geométrica de la hipotenusa y el segmento de la hipotenusa adyacente al cateto.



DADO: $\overline{AC} \perp \overline{BC}$, $\overline{AB} \perp \overline{CD}$

DEMUESTRA: $\dfrac{AD}{CD} = \dfrac{CD}{BD}$, $\dfrac{AB}{AC} = \dfrac{AC}{AD}$, $\dfrac{AB}{BC} = \dfrac{BC}{BD}$

DEMOSTRACIÓN:

Proposiciones	Razones
1. $\overline{AC} \perp \overline{BC}, \overline{AB} \perp \overline{CD}$	1. Dado
2. $\triangle ADC \sim \triangle CDB$	2. En cualquier $\triangle$ rectángulo, la 2 alt. a la hip. forma 2 $\triangle$s rectángulos que son $\simeq$ entre sí y al $\triangle$ original
3. $\dfrac{AD}{CD} = \dfrac{CD}{BD}$	3. Def. de $\sim$
4. $\triangle ACB \sim \triangle ADC$	4. Misma razón que en 2
5. $\dfrac{AB}{AC} = \dfrac{AC}{AD}$	5. Def. de $\sim$
6. $\triangle ACB \sim \triangle CDB$	6. Misma razón que en 2
7. $\dfrac{AB}{BC} = \dfrac{BC}{BD}$	7. Def. de $\sim$

EJEMPLO 2 En la figura 5.2, encuentra AD si $\overline{BD}$ es una altura de $\triangle ABC$, $m\angle ABC = 90°$, $AB = 10$ y $CD = 5$.

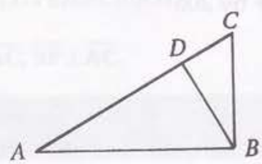


FIGURA 5.2

Solución Por el teorema 5.4, $\dfrac{AC}{AB} = \dfrac{AB}{AD}$. Ya que $AC = AD + DC$, se tiene $\dfrac{AD+5}{10} = \dfrac{10}{AD}$. En consecuencia, $(AD)^2 + 5(AD) = 100$, y así $(AD)^2 + 5(AD) - 100 = 0$. Aplicando la fórmula cuadrática se encuentra que $AD = \dfrac{-5 \pm \sqrt{25+400}}{2}$. Al simplificar se obtiene $AD = \dfrac{-5 \pm 5\sqrt{17}}{2}$. Ya que la longitud de un segmento de recta nunca es negativo, $AD = \dfrac{-5 + 5\sqrt{17}}{2}$. ■

EJEMPLO 3 Encuentra BD en la figura 5.3.

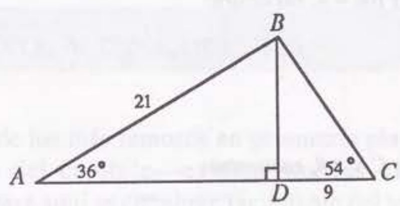


FIGURA 5.3

Solución Resulta evidente que m$\angle ABC = 90°$, ya que la suma de las medidas de los ángulos de un triángulo es 180°, y así $\angle ABC = 180° - 36° - 54°$. En consecuencia, es posible aplicar el teorema 5.4. A continuación se presenta la solución paso por paso (el lector debe proporcionar la razón de cada paso):

1. $\dfrac{AC}{AB} = \dfrac{AB}{AD}$
2. $\dfrac{AD + 9}{21} = \dfrac{21}{AD}$
3. $(AD)^2 + 9\,(AD) = 441$
4. $(AD)^2 + 9\,(AD) - 441 = 0$
5. $AD = \dfrac{-9 + 3\sqrt{205}}{2}$
6. $\dfrac{AD}{BD} = \dfrac{BD}{CD}$
7. $(BD)^2 = AD \cdot CD$
8. $BD = \sqrt{AD \cdot CD}$
9. $BD = 3\sqrt{\dfrac{-9 + 3\sqrt{205}}{2}}$
10. $BD = \dfrac{3}{2}\sqrt{-18 + 6\sqrt{205}}$

■

EJERCICIOS 5.3

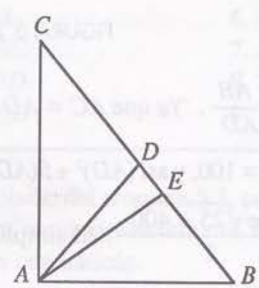


FIGURA PARA LOS EJERCICIOS 1 A 7

En los ejercicios 1 a 7, dados $\triangle ABC$, $\overline{CA} \perp \overline{AB}$, $\overline{AE} \perp \overline{BC}$, $CB = BD$.

En los ejercicios 1 a 3, si $AE = 9$ ***y*** $BE = 6$, ***encuentra:***

1. CE
2. AD
3. DE

En los ejercicios 4 a 6, si $CE = 5$ ***y*** $CA = 8$, ***encuentra:***

4. BE
5. BA
6. AE

7. Si $\triangle ABD$ es equilátero y $AB = 4$, encuentra AE.

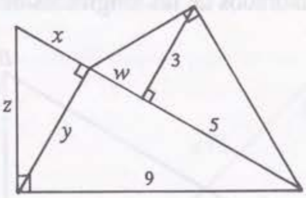


FIGURA PARA EL EJERCICIO 8

8. Encuentra los valores de w, x, y y z en la figura.

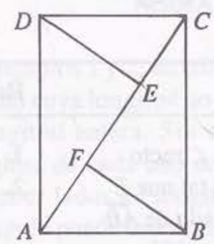


FIGURA PARA LOS EJERCICIOS 9 Y 10

En los ejercicios 9 y 10, dados: rectángulo **ABCD,** $\overline{DE} \perp \overline{AC}$, $\overline{BF} \perp \overline{AC}$.

9. Enumera todos los triángulos semejantes. Proporciona razones.
10. Enumera todos los triángulos congruentes. Proporciona razones.

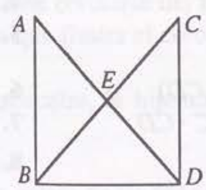


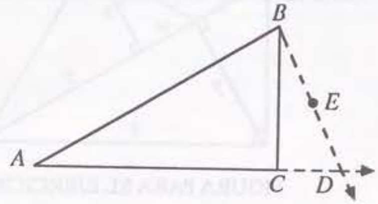
FIGURA PARA EL EJERCICIO 11

11. DADO: $\overline{AB} \parallel \overline{CD}$, $\overline{BD} \perp \overline{CD}$, E es el punto medio de $\overline{AD}$, $BD = AE$
DEMUESTRA: $\triangle BED$ es equilátero
12. DEMUESTRA: Si un triángulo rectángulo tiene catetos de longitud a y b y una hipotenusa de longitud c, entonces la altura a la hipotenusa tiene longitud ab/c.

5.4 Teorema de Pitágoras y aplicaciones

El siguiente teorema es uno de los más famosos en geometría plana y —como se indicó en la nota histórica al principio del capítulo— existen muchas demostraciones del mismo. La demostración que se utilizará aquí se concluye fácilmente del teorema 5.4. En los ejercicios 36 a 39 de los ejercicios 7.2 se presentan varios ejemplos más de demostraciones, algunos de los cuales requieren el concepto de área.

Teorema 5.5 **(Teorema de Pitágoras)** El cuadrado de la longitud de la hipotenusa de un triángulo rectángulo es igual a la suma de los cuadrados de las longitudes de los catetos.



DADO: $\triangle ABC$, $\angle C$ es un ángulo recto
DEMUESTRA: $(AB)^2 = (AC)^2 + (BC)^2$
DEMOSTRACIÓN:

Proposiciones	**Razones**
1. $\triangle ABC$, $\angle C$ es un $\angle$ recto	**1.** Dado
2. Existe un rayo $\overrightarrow{BE}$ tal que E está en el mismo lado de $\overleftrightarrow{AB}$ que C y $m\angle ABE = 90°$. Sea $\overrightarrow{BE} \cap \overrightarrow{AC} = \{D\}$.	**2.** Post. del transportador
3. $\dfrac{AC}{AB} = \dfrac{AB}{AD}$	**3.** Cada cateto de un $\triangle$ rect. es la media geom. de la hip. y el seg. de la hip. ady. al cateto
4. $AD = AC + CD$	**4.** Def. de entre
5. $\dfrac{AC}{AB} = \dfrac{AB}{AC + CD}$	**5.** Sustitución
6. $(AB)^2 = AC\,(AC + CD)$	**6.** Axioma de mult. de =
7. $(AB)^2 = (AC)^2 + AC \cdot CD$	**7.** Distributividad
8. $\dfrac{AC}{BC} = \dfrac{BC}{CD}$	**8.** La alt. de un $\triangle$ rect. es la media geom. de los segmentos de la hipotenusa
9. $CD = \dfrac{(BC)^2}{AC}$	**9.** Axioma de mult. de =
10. $(AB)^2 = (AC)^2 + (BC)^2$	**10.** Sustitución (Prop. 7 y 9)

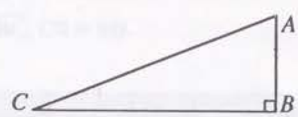


FIGURA 5.4

EJEMPLO 1 Encuentra AC en la figura 5.4 si $AB = 5$ y $BC = 7$.

Solución Por el teorema 5.5, $(AC)^2 = (AB)^2 + (BC)^2 = 25 + 49 = 74$. En consecuencia, $AC = \sqrt{74}$. ■

EJEMPLO 2 Encuentra AB en la figura 5.4 si $AC = 19$ y $BC = 18$.

Solución Por el teorema 5.5, $(AC)^2 = (AB)^2 + (BC)^2$, a partir de lo cual se concluye que $(AB)^2 = (AC)^2 - (BC)^2 = 361 - 324 = 37$. Así, $AB = \sqrt{37}$. ■

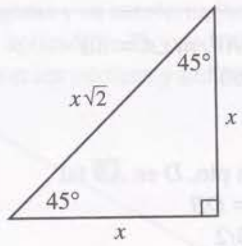


FIGURA 5.5

Como se muestra en los ejemplos 1 y 2, un triángulo rectángulo con dos lados de longitudes enteras a menudo posee un lado cuya longitud no es entera. En general, un triángulo rectángulo puede no tener lados de longitud entera. Sin embargo, existe una infinidad de triángulos rectángulos tales que la longitud de cada uno de los tres lados es un entero. Por ejemplo, un triángulo rectángulo puede tener lados de longitud 3, 4 y 5, ya que $3^2 + 4^2 = 5^2$. De manera semejante, un triángulo rectángulo puede tener lados de longitud 5, 12 y 13 porque $5^2 + 12^2 = 13^2$. Un conjunto de tres enteros que pueden ser las longitudes de los lados de un triángulo rectángulo se denomina **tripleta pitagórica**. En general, una tripleta pitagórica es cualquier conjunto $\{x, y, z\}$ de enteros que satisfacen la ecuación $x^2 + y^2 = z^2$. Además, al multiplicar una tripleta pitagórica por un entero positivo se obtiene una tripleta pitagórica. Otros ejemplos de tripletas pitagóricas son $\{6, 8, 10\}$, $\{7, 24, 25\}$, $\{8, 15, 17\}$, $\{9, 12, 15\}$, $\{9, 40, 41\}$, $\{10, 24, 26\}$, $\{12, 35, 37\}$, $\{14, 48, 50\}$ y $\{20, 21, 29\}$.

La demostración del siguiente corolario del teorema 5.5 se deja como ejercicio. Observa la figura 5.5, que es un diagrama que ilustra el corolario.

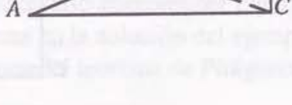
Corolario En un triángulo rectángulo isósceles, la hipotenusa es $\sqrt{2}$ veces más larga que cada uno de los catetos.

EJEMPLO 3 Encuentra la longitud de cada cateto de un triángulo rectángulo isósceles si la hipotenusa mide 12 de longitud.

Solución Por el corolario del teorema 5.5, $\sqrt{2}$ veces la longitud de cada cateto es igual a 12. Así, la longitud de cada cateto mide $12/\sqrt{2} = 6\sqrt{2}$. ■

El siguiente teorema y su corolario ilustran algunas de las aplicaciones del teorema de Pitágoras.

Teorema 5.6 En un triángulo rectángulo, si un ángulo agudo mide 30°, entonces el cateto opuesto a este ángulo mide la mitad que la hipotenusa.

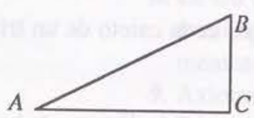


DADO: $m\angle C = 90°$, $m\angle A = 30°$
DEMUESTRA: $BC = AB/2$

DEMOSTRACIÓN:

Proposiciones	Razones
1. m$\angle C = 90°$, m$\angle A = 30°$	**1.** Dado
2. m$\angle B = 60°$	**2.** La suma de las medidas de los $\angle$s de un $\triangle$es 180° y axioma de adición de =
3. Existe un pto. D en $\overline{AB}$ tal que $AD = DB$	**3.** Post. de la regla
4. $CD = AB/2$	**4.** La mediana a la hipotenusa de cualquier $\triangle$ rect. es 1/2 de larga que la hipotenusa
5. $AB = AD + DB$	**5.** Def. de entre
6. $AB = 2DB$	**6.** Sustitución
7. $CD = DB$	**7.** Sustitución (Prop. 4 y 6)
8. m$\angle DCB = 60°$	**8.** Si 2 lados de un $\triangle$son $\cong$, los $\angle$s op. a estos lados son $\cong$
9. m$\angle BDC = 60°$	**9.** Misma razón que 2
10. $BC = DB$	**10.** Si 2 $\angle$s de un $\triangle$ son $\cong$, los lados op.a los $\angle$s son $\cong$
11. $AB = 2BC$	**11.** Sustitución
12. $BC = AB/2$	**12.** Axiomas de mult. y simetría de la igualdad

Corolario En un triángulo rectángulo, si la medida de un ángulo agudo es de 60º, entonces el cateto opuesto a este ángulo mide $\sqrt{3}/2$ veces lo que la hipotenusa y $\sqrt{3}$ veces lo que el otro cateto.



DADO: m$\angle C = 90°$, m$\angle B = 60°$
DEMUESTRA: $AC = \sqrt{3}AB/2$, $AC = \sqrt{3}BC$
DEMOSTRACIÓN: Consulta el ejercicio 31 de los ejercicios 5.4.

EJEMPLO 4 En la figura 5.6, encuentra AC y BC si $AB = 12$.

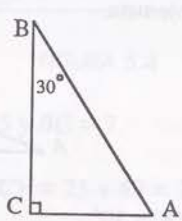
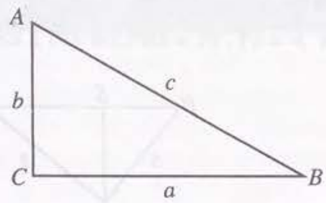


FIGURA 5.6

Solución Por el teorema 5.6, $AC = 12/2 = 6$.
Por el corolario del teorema 5.6, $BC = 6\sqrt{3}$. ■

¡PRECAUCIÓN! El teorema de Pitágoras y su corolario, junto con el teorema 5.6 y su corolario, aparecen a menudo en problemas de aplicación. Es prudente conocer a fondo estas relaciones. Sea $\angle C$ un ángulo recto en $\triangle ABC$, con los vértices y lados como se muestra en el diagrama.



Se concluye que

$$a^2 + b^2 = c^2.$$

Si $m\angle A = m\angle B = 45°$, entonces

$$a = b = x$$
$$c = x\sqrt{2}$$

Si $m\angle A = 30°$ y $m\angle B = 60°$, entonces

$$a = x$$
$$b = x\sqrt{3}$$
$$c = 2x$$

EJEMPLO 5 Encuentra FG, en la figura 5.7.

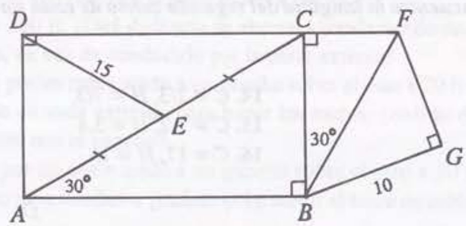


FIGURA 5.7

Solución Ya que $\overline{DE} = 15$ y $\overline{DE}$ es una mediana, por el teorema 5.2 se encuentra que $AC = 30$, pues, por el teorema 5.6, $BC = 15$. Entonces, por el corolario del teorema 5.6, ya que $BC = \sqrt{3}BF/2$, se encuentra que $BF = 30/\sqrt{3} = 10\sqrt{3}$. Pero por el teorema de Pitágoras se concluye que $(BF)^2 = (FG)^2 + (BG)^2$, de modo que $(FG)^2 = (BF)^2 - (BG)^2 = (10\sqrt{3})^2 - 10^2 = 300 - 100 = 200$. Se concluye que $FG = \sqrt{200} = 10\sqrt{2}$. ■

Es necesario recalcar que en un problema de cómputo no es necesario enumerar las razones; sin embargo, por supuesto que es necesario comprender cómo se obtiene cada paso. Por esta razón se hace referencia a los teoremas en la solución del ejemplo 5.

El siguiente teorema es la recíproca del teorema de Pitágoras. Su demostración se deja como ejercicio.

Teorema 5.7 Si la suma de los cuadrados de las longitudes de dos lados de un triángulo es igual al cuadrado de la longitud del tercer lado, entonces el triángulo es un triángulo rectángulo, con el ángulo recto opuesto al tercer lado.

EJERCICIOS 5.4

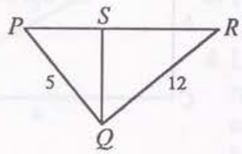


FIGURA PARA LOS EJERCICIOS 1 A 4

En los ejercicios 1 a 4, dados: △PQR, $\overline{QS} \perp \overline{PR}$, $\overline{PQ} \perp \overline{RQ}$, encuentra:

1. *PR*
2. *PS*
3. *RS*
4. *QS*

En los ejercicios 5 a 10, halla la longitud de la hipotenusa de cada uno de los triángulos rectángulos cuyos catetos se proporcionan.

5. 1, 2
6. 3, 4
7. 6, 8
8. 5, 12
9. 5, 10
10. $\sqrt{5}/2$, 3

En los ejercicios 11 a 16, encuentra la longitud del segundo cateto de cada uno de los triángulos rectángulos, dados un cateto y la hipotenusa.

11. $C = 4, H = 5$
12. $C = 2, H = 7$
13. $C = 5, H = 5\sqrt{2}$
14. $C = 2/3, H = 7/3$
15. $C = 1.2, H = 3.4$
16. $C = 17, H = 16$

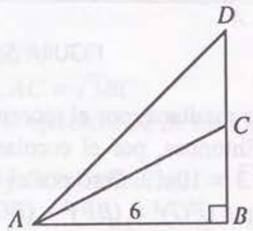


FIGURA PARA LOS EJERCICIOS 17 A 22

En los ejercicios 17 a 22, dados: △ABC, △ABD, B—C—D, m∠BAC = 30°, m∠ADB = 45°, encuentra

17. *BC*
18. *CD*
19. *AC*
20. *AD*
21. m∠*DAC*
22. m∠*ACD*

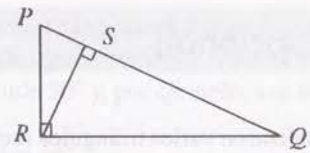


FIGURA PARA LOS EJERCICIOS 23 A 26

En los ejercicios 23 a 26, dados:* $\triangle PQR$, $\overline{PR} \perp \overline{RQ}$, $\overline{RS} \perp \overline{PQ}$, $m\angle PRS = 30°$, $PS = 4$, *encuentra:

23. $m\angle Q$
24. $m\angle P$
25. RS
26. QS

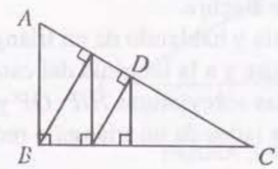


FIGURA PARA EL EJERCICIO 27

27. Encuentra AB en la figura si $CD = 10$ y $m\angle C = 30°$.
28. Demuestra el teorema 5.7. (*Sugerencia*: Construye un triángulo rectángulo cuyos catetos sean congruentes con los dos lados más cortos del triángulo dado. Demuestra que el triángulo rectángulo construido es congruente al triángulo original.)
29. Demuestra el corolario del teorema 5.5.
30. Demuestra que en un triángulo rectángulo, si el cateto opuesto a un ángulo agudo mide la mitad de lo que mide la hipotenusa, entonces ese ángulo mide 30°.
31. Demuestra el corolario del teorema 5.6.
32. Un lote baldío rectangular mide 100 por 50 ft. ¿Qué distancia se ahorrará un perro si camina a lo largo de una diagonal del lote para llegar al vértice opuesto, en vez de caminar a lo largo de la parte externa del terreno?
33. Un estacionamiento rectangular mide 500 por 300 ft. ¿Qué distancia se ahorrará conduciendo un automóvil a lo largo de una diagonal del lote para llegar al vértice opuesto, en vez de conducirlo por la parte externa?
34. Una antena vertical de 30 ft debe ser sostenida por un cable atado a un gancho sobre el piso a 20 ft de la base de la antena. Si se supone que se requiere 1 ft adicional de cable en cada extremo para hacer los nudos, ¿cuánto debe medir el trozo de cable necesario para unir la parte superior de la antena con el gancho?
35. Un poste vertical de 70 ft debe ser sostenido por un cable atado a un gancho sobre el piso a 30 ft de la base del poste. Si se requiere 1 ft adicional de cable en cada extremo para anudarlo, ¿cuánto debe medir el trozo de cable necesario para unir la parte superior del poste con el gancho?
36. Los dos vectores utilizados para encontrar una resultante se denominan *componentes*. Encuentra las componentes vertical y horizontal de una fuerza de 50 libras (lb) si ésta forma un ángulo de 30° con la horizontal.
37. Encuentra las componentes vertical y horizontal de una fuerza de 200 lb si ésta forma un ángulo de 45° con la horizontal.
38. Si un dirigible se desplaza a 50 m.p.h en dirección norte (velocidad en el aire) y desde el oeste sopla un viento de 50 m.p.h., encuentra la velocidad del dirigible con respecto al piso y la dirección del vuelo.
39. Si un barco que está tratando de moverse en dirección norte tiene una resultante de 10 millas náuticas por hora de velocidad con respecto al fondo del mar y una corriente de 5 millas náuticas por hora lo empuja hacia el este, encuentra la velocidad del barco con respecto al agua y determina la dirección real del movimiento (compara con el ejercicio 38).

***Halla otras tripletas pitagóricas en los ejercicios 40 y 41.* (Sugerencia: *sean* a *y* b *enteros positivos de modo que* $a > b$. *Sean* $x = 2ab$, $y = a^2 - b^2$ *y* $z = a^2 + b^2$. *Es fácil demostrar que para estas elecciones* $\{x, y, z\}$ *es una tripleta pitagórica.*)**

40. Que sean múltiplos de 3, 4, 5.
41. Que no sean múltiplos de 3, 4, 5.

5.5 Trigonometría (opcional)

En la última sección se analizaron varios triángulos rectángulos específicos en los que fue posible determinar las razones entre los lados; por ejemplo, en el teorema 5.6 se demostró que en un triángulo rectángulo con m$\angle A = 30°$, el cateto opuesto a $\angle A$ mide la mitad que la hipotenusa; por lo tanto, la razón del cateto opuesto a $\angle A$ a la hipotenusa es 1/2. En el corolario del teorema 5.6 se demostró que si m$\angle B = 60°$, entonces el cateto opuesto a $\angle B$ mide $\sqrt{3}/2$ veces lo que mide la hipotenusa. Así, la razón del cateto opuesto a $\angle B$ a la hipotenusa es $\sqrt{3}/2$. En esta sección se generalizará el concepto de tales razones a otros triángulos rectángulos.

En general, **trigonometría** es el estudio de la medición de triángulos. Esta sección pretende ser sólo una pequeña introducción al tema, ya que un curso normal de trigonometría requiere conocimientos profundo de álgebra.

Por razones de economía y hablando de un triángulo rectángulo, cuando se hace referencia a la longitud de la hipotenusa y a la longitud del cateto de un triángulo rectángulo adyacente a un ángulo agudo, se usan las abreviaturas *HIP*, *OP* y *ADY*, respectivamente. En la figura 5.8 se ilustran los nombres de los lados de un triángulo rectángulo con respecto a $\angle A$ y con respecto a $\angle B$.

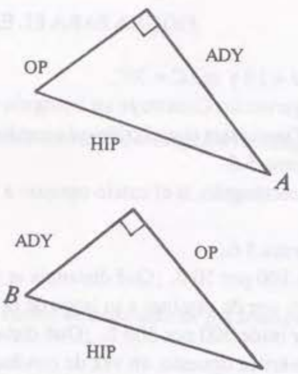


FIGURA 5.8

Definición

En un triángulo rectángulo con ángulo agudo $\angle A$:

$$\text{seno m}\angle A = OP/HIP$$
$$\text{coseno m}\angle A = ADY/HIP$$
$$\text{tangente m}\angle A = OP/ADY$$

Las tres razones precedentes se denominan *funciones trigonométricas* de m$\angle A$ y se denotan por sen m$\angle A$, cos m$\angle A$ y tan m$\angle A$, y se leen como si las palabras no estuviesen abreviadas. Aunque existen otras tres funciones trigonométricas de uso común y que son las recíprocas de estas tres, en este libro no se presentarán.

EJEMPLO 1 Evalúa sen 30°, cos 30° y tan 30°.

Solución Por el teorema 5.6, sen 30° = 1/2. Por el corolario del teorema 5.6, cos 30° $=\sqrt{3}/2$ y tan 30° $= 1/\sqrt{3}$. ■

En el ejemplo 1 se aplicó el hecho de que si un ángulo agudo de un triángulo rectángulo mide 30°, entonces el otro ángulo agudo mide 60°. Así, el cateto opuesto al ángulo que mide 60° es adyacente al ángulo que mide 30° y, por ejemplo, sen 60° = cos 30°.

EJEMPLO 2 Evalúa sen 45°, cos 45° y tan 45°.

Solución Por el corolario del teorema 5.5, sen 45° = $1/\sqrt{2}$ y cos 45° = $1/\sqrt{2}$. Como el triángulo es isósceles, se tiene que tan 45° = 1. ■

EJEMPLO 3 Considera $\triangle ABC$ con $AB = 3$, $AC = 4$ y $BC = 5$. Evalúa sen m$\angle C$, cos m$\angle C$ y tan m$\angle C$. Observa la figura 5.9

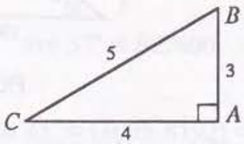


FIGURA 5.9

Solución Por el teorema 5.7, $\triangle ABC$ es un triángulo rectángulo con m$\angle A$ = 90°, ya que $3^2 + 4^2 = 5^2$. Así, sen m$\angle C$ = 3/5, cos m$\angle C$ = 4/5 y tan m$\angle C$ = 3/4. ■

Es posible calcular las funciones trigonométricas de las medidas de todos los ángulos, pero el análisis en este texto se limita a los ángulos agudos. Los teoremas que se han presentado facilitan el cálculo de tales funciones para ejemplos específicos. En libros de texto más avanzados se describen métodos para encontrar las funciones trigonométricas para todas las medidas posibles de ángulos.

En la tabla del apéndice H se enumeran los valores aproximados de las funciones de todos los ángulos agudos cuyas medidas se han redondeado hasta el grado más próximo. Existen tablas precisas, así como tablas en que los ángulos están medidos en radianes en vez de en grados. También hay calculadoras que dan los valores de funciones trigonométricas. Pregunta a tu maestro si debes utilizar una calculadora o el apéndice H en esta sección.

EJEMPLO 4 Evalúa sen 27°, cos 27° y tan 27°.

Solución Por el apéndice H, se encuentra que sen 27° = .4540, cos 27° = .8910 y tan 27° = .5095. ■

EJEMPLO 5 Demuestra que tan m$\angle A$ = (sen m$\angle A$)/(cos m$\angle A$).

Solución

$$\frac{\text{sen m}\angle A}{\text{cos m}\angle A} = \frac{OP/HIP}{ADY/HIP}$$

$$= \frac{OP}{HIP} \cdot \frac{HIP}{ADY}$$

$$= \frac{OP}{ADY}$$

$$= \text{tan m}\angle A$$ ■

Las funciones trigonométricas se usan en muchas aplicaciones, de las cuales aquí se presentarán algunas de las más comunes. Para evaluar las funciones trigonométricas se usa el apéndice H.

EJEMPLO 6 Un edificio proyecta una sombra de 100 ft de largo cuando el Sol está a 65° por arriba del horizonte. ¿Cuál es la altura del edificio?

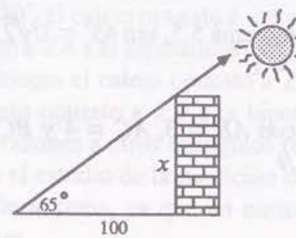


FIGURA 5.10

Solución A partir de la figura 5.10 se concluye que

$$\tan 65^\circ = x/100.$$

Al multiplicar ambos miembros de esta ecuación por 100 se obtiene

$$x = 100 \tan 65^\circ = (100)(2.1445) = 214.45,$$

de modo que la altura del edificio es unos 214 pies. ■

EJEMPLO 7 Durante el vuelo de un transbordador espacial, un astronauta analiza un asteroide esférico de 2 millas de diámetro (Fig. 5.11), y advierte que el diámetro del asteroide subtiende un ángulo de 2°. ¿A qué distancia del centro del asteroide se encuentra?

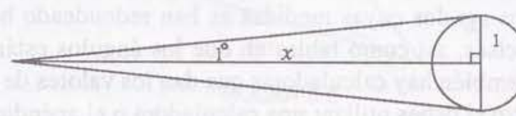


FIGURA 5.11

Solución Debido a que el diámetro del asteroide mide 2 millas, su radio mide 1 milla. Como el asteroide subtiende un ángulo de 2°, se forma un triángulo rectángulo con un ángulo agudo de 1° (Fig. 5.11). Así,

$$\tan 1^\circ = 1/x.$$

Al multiplicar ambos miembros de esta ecuación por x se obtiene

$$x \tan 1^\circ = 1.$$

Al dividir ambos miembros de la ecuación entre tan 1° se obtiene

$$x = 1/(\tan 1^\circ) = 1/(0.175) = 57 \text{ millas.}$$ ■

EJEMPLO 8 Alán y Bárbara, quienes están parados a 400 m entre sí, arrojan piedras a un blanco que se encuentra cruzando una barranca profunda. En la figura 5.12, dado $\triangle ABC$ con $m\angle A = 35^\circ$ y $m\angle B = 55^\circ$, Alán está parado en A, Bárbara en B y el blanco se encuentra en C. Encuentra las distancias de Alán y Bárbara al blanco.

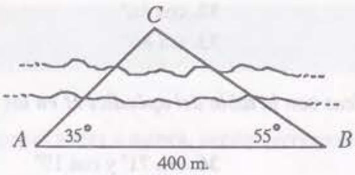


FIGURA 5.12

Solución Observa que $\triangle ABC$ es un triángulo rectángulo, ya que la suma de las medidas de $\angle A$ y $\angle B$ es igual a 90°, y 180° − 90° = 90°. Así,

$$\cos 35° = AC/400$$

y

$$\text{sen } 35° = BC/400.$$

Se concluye que

$$AC = 400 \cos 35° = (400)(.8192) = 328 \text{ metros}$$

y

$$BC = 400 \text{ sen } 35° = (400)(.5736) = 229 \text{ metros.}$$ ■

EJERCICIOS 5.5

Evalúa las funciones trigonométricas sin usar tablas en los ejercicios 1 a 9.

1. sen 60°
2. cos 60°
3. sen 45°
4. cos 45°
5. sen 30°
6. cos 30°
7. tan 60°
8. tan 45°
9. tan 30°

En los ejercicios 10 a 15, si se cuenta con $\triangle$ABC de modo que AB = 8, BC = 15 y AC = 17, encuentra:

10. sen m$\angle A$
11. cos m$\angle A$
12. tan m$\angle A$
13. sen m$\angle C$
14. cos m$\angle C$
15. tan m$\angle C$

En los ejercicios 16 a 21, si se cuenta con $\triangle$ABC de modo que m$\angle$C = 90º, AC = 2 y BC = 3, halla:

16. sen m$\angle A$
17. cos m$\angle A$
18. tan m$\angle A$
19. sen m$\angle B$
20. cos m$\angle B$
21. tan m$\angle B$

En los ejercicios 22 y 23, evalúa las funciones trigonométricas utilizando la tabla del apéndice H.

22. sen 17°
23. cos 17°
24. tan 17°
25. sen 79°
26. cos 79°
27. tan 79°
28. sen 33°
29. cos 33°

30. tan 33°
31. sen 86°
32. cos 86°
33. tan 86°

Evalúa las funciones trigonométricas con la tabla del apéndice H en los ejercicios 34 a 37.

34. sen 13° y cos 77°
35. sen 49° y cos 41°
36. sen 71° y cos 19°
37. sen 89° y cos 1°
38. Un edificio proyecta una sombra de 500 ft de longitud cuando el Sol está a 37° por arriba del horizonte. ¿Cuál es la altura del inmueble?
39. Un poste telefónico vertical proyecta una sombra de 10 ft de longitud cuando el Sol está a 80° por arriba del horizonte. ¿Cuál es la altura del poste?
40. Un jugador de baloncesto de 7 ft de alto proyecta una sombra cuando el Sol está a 5° por arriba del horizonte. ¿Cuál es la longitud de la sombra?
41. Un acantilado vertical de 3000 ft proyecta una sombra sobre el nivel del suelo cuando el Sol está a 11° por arriba del horizonte. ¿Cuál es la longitud de la sombra?
42. Una barra sostiene una antena vertical de televisión de 17 ft de altura y forma un ángulo de 34° con la horizontal. ¿Cuál es la longitud de la barra?
43. Una escalera llega justamente al borde de una ventana que está a 10 ft por arriba del suelo horizontal y forma un ángulo de 70° con el suelo. ¿Cuál es el largo de la escalera?
44. Una mujer observa un globo de 10 m de diámetro en una isla desierta y advierte que el diámetro del globo subtiende un ángulo de 6°. ¿A qué distancia está del centro del globo?
45. Un gigante situado a 100 000 mil de un cometa ve que el diámetro de éste subtiende un ángulo de 2°. ¿Cuál es el radio del cometa?
46. Una lozeta de cocina tiene forma de triángulo rectángulo. En el vértice C del ángulo recto está una araña y en los otros dos vértices, A y B, una mosca y un mosquito, respectivamente. Si m $\angle A = 22°$, encuentra la distancia de la araña a la mosca y de la araña al mosquito, si la mosca está a 8 in del mosquito.
47. Un trabajador de la compañía telefónica situado en la parte superior de un poste de 50 ft observa hacia abajo a un ángulo de 15° con la horizontal un oso que está en el suelo horizontal. ¿A qué distancia del oso está el trabajador? ¿A qué distancia de la base del poste está el oso?

En los ejercicios 48 y 49, usa como ayuda la información de la sección 3.6 sobre la ley del paralelogramo.

48. Dos fuerzas se aplican a un objeto. Una es de 250 lb, aplicada horizontalmente a la derecha, y la otra es de 350 lb, aplicada verticalmente. Encuentra la resultante de las dos fuerzas.
49. Si un avión se desplaza a velocidad constante de 500 m.p.h. (velocidad en el aire) en dirección oeste y desde el sur sopla un viento de 60 m.p.h., encuentra la velocidad con respecto al suelo y la dirección del vuelo.

Demuestra las proposiciones de los ejercicios 50 a 52.

50. sen m$\angle A$ = (cos m$\angle A$)(tan m$\angle A$)
51. cos m$\angle B$ = (sen m$\angle B$)(tan m$\angle B$)
52. (sen m$\angle A)^2$ + (cos m$\angle A)^2 = 1$

TÉRMINOS CLAVE

Completando el cuadrado, 134
Cuadrado perfecto, 132
Ecuación cuadrática, 133
Fórmula cuadrática, 134
Raíz cuadrada negativa de r, 132
Raíz cuadrada de r, 132
Teorema de Pitágoras, 144
Tripleta pitagórica, 145

EJERCICIOS DE REPASO

En la línea en blanco escribe la expresión* siempre, algunas veces *o* nunca, *según corresponda.

1. En la ecuación cuadrática $px^2 + rx + t = 0$, r ________ es cero.
2. Un triángulo rectángulo ________ tiene dos ángulo agudos.
3. En un triángulo rectángulo, la altura a la hipotenusa ________ es la mitad de larga que la hipotenusa.
4. La hipotenusa de un triángulo rectángulo isósceles ________ es uno de los lados congruentes.
5. La altura a la hipotenusa de un triángulo rectángulo ________ es más corta que cualquiera de los catetos.
6. La mediana de la hipotenusa de un triángulo rectángulo ________ es más corta que la altura a la hipotenusa.
7. Si un triángulo tiene lados de longitudes $2a$, $3a$ y $4a$, ________ es un triángulo rectángulo.
8. Un triángulo rectángulo isósceles ________ es semejante a cualquier otro triángulo rectángulo isósceles.
9. Si $\triangle ABC$ y $\triangle ABD$ son triángulos rectángulos con el ángulo recto en B, y si $m\angle BAC = 30°$ y $m\angle BAD = 45°$, entonces $\overline{BC}$ ________ es más largo que $\overline{BD}$.
10. Una altura de un triángulo rectángulo ________ forma dos triángulos semejantes.

Anota una V si la proposición es verdadera. Si es falsa, sustituye la palabra subrayada(s) a fin de obtener una proposición verdadera.

11. Si un ángulo agudo de un triángulo rectángulo es congruente con un ángulo agudo de un segundo triángulo rectángulo, los triángulos son <u>congruentes</u>.
12. El teorema de congruencia HA = HA para triángulos rectángulos es un caso especial del teorema de congruencia <u>ALA = ALA</u>.
13. Un segmento de recta trazado desde un vértice de un rectángulo <u>perpendicular a</u> una diagonal es la media geométrica de los dos segmentos de la diagonal.
14. En un triángulo rectángulo isósceles, la hipotenusa es <u>$\sqrt{3}$</u> veces tan larga como cada uno de los catetos.
15. La mediana a la hipotenusa de un triángulo rectángulo forma dos triángulos <u>isósceles</u>.
16. En un triángulo rectángulo, si un ángulo agudo mide 60°, el cateto opuesto a este ángulo es <u>dos veces</u> el largo del cateto opuesto al ángulo cuya medida es 30°.
17. Si un cateto y un ángulo agudo de un triángulo rectángulo son congruentes a un cateto y un ángulo agudo de otro triángulo rectángulo, respectivamente, entonces los dos triángulos <u>no necesariamente</u> son congruentes.
18. El cuadrado de la longitud de la hipotenusa de un triángulo rectángulo es igual al <u>cuadrado de la suma</u> de las longitudes de los catetos.
19. En un triángulo rectángulo isósceles, la altura a la hipotenusa forma dos triángulos rectángulos <u>congruentes</u> entre sí.
20. En un triángulo rectángulo isósceles, la altura a la hipotenusa forma dos triángulos rectángulos <u>isósceles</u>.

En los ejercicios 21 a 23, dados:* $\triangle$ABC, $\overline{CB} \perp \overline{AB}$, $\overline{BM}$ *es una mediana,

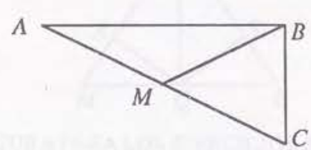


FIGURA PARA LOS EJERCICIOS 21 A 23

21. Si $BM = 3$, encuentra AC.
22. Si $m\angle BAC = 30°$ y $AB = 2$, encuentra BM.
23. Si $AB = 2BC$, encuentra AM.

En los ejercicios 24 a 27, dado: □ABDE, △ACD, $\overline{AD} \perp \overline{CD}$, A—B—C, CD = 3. Encuentra

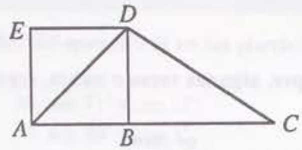


FIGURA PARA LOS EJERCICIOS 24 A 27

24. BC
25. BD
26. El perímetro de $\triangle ABD$
27. El perímetro de $\square ABDE$

En los ejercicios 28 a 31, dados: △ABC, $\overline{AC} \perp \overline{AB}$, $\overline{AD} \perp \overline{BC}$, $\overline{EF} \parallel \overline{AC}$, A—D—F, D—E—B, EF/AC = 3/2. Encuentra

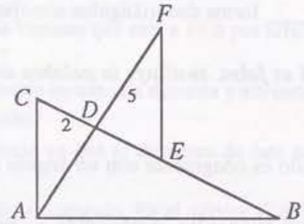


FIGURA PARA LOS EJERCICIOS 28 A 31

28. DE
29. AD
30. EF
31. EB

En los ejercicios 32 a 37, encuentra la longitud de la hipotenusa de los triángulos rectángulos cuyos catetos se proporcionan.

32. 10, 24
33. $5, \sqrt{11}$
34. $\sqrt{2}, \sqrt{3}$
35. 8, 15
36. $2\sqrt{2}, 3\sqrt{3}$
37. $4a, 5a$

En los ejercicios 38 a 45, encuentra la longitud del segundo cateto de cada uno de los triángulos rectángulos, dados un cateto y la hipotenusa.

38. $C = 6, H = 10$
39. $C = 5, H = 8$
40. $C = 2.4, H = 2.5$
41. $C = 5/12, H = 7/12$
42. $C = \sqrt{3}, H = \sqrt{8}$
43. $C = 4n, H = 7n$
44. $C = x + 1, H = 2x + 3$
45. $C = y - 1, H = 3y + 2$

En los ejercicios 46 a 48, dados: △RST, $\overline{RS} \perp \overline{ST}$.

46. Si $m\angle T = 45°$ y $RT = 12$, encuentra ST.
47. Si $m\angle T = 2m\angle R$ y $RS = \sqrt{3}/4$, encuentra RT.
48. Si $\overline{SM} \perp \overline{RT}$, R—M—T, $RM/MT = 2/3$ y $ST = 4$, encuentra MT.

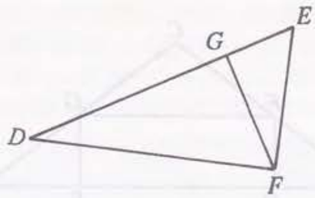


FIGURA PARA LOS EJERCICIOS 49 A 51

En los ejercicios 49 a 51, dados: **$\triangle$DEF, $\overline{EF} \perp \overline{DF}$, $\overline{FG} \perp \overline{DE}$, D—G—E.**

49. Si m$\angle D = 37°$, encuentra m$\angle EFG$.

50. Si $DG/DF = 3/5$ y $GF = 15$, encuentra EF.

51. Si GE, GF, EF son proporcionales a 3, 4, 5, encuentra GE/DE.

52. Dados el rectángulo $MNPQ$, m$\angle MPN = 30°$ y $MP = 10$, encuentra el perímetro del rectángulo.

53. Encuentra el perímetro de un hexágono regular cuya apotema mide $\sqrt{15}$.

54. Encuentra el perímetro de un triángulo equilátero cuya apotema mide 60 años luz.

55. Encuentra la apotema de un triángulo equilátero con un lado que mide 5 parsecs.

56. Encuentra la apotema de un hexágono regular que mide 10 metros de perímetro.

57. Encuentra la apotema de un hexágono regular que tiene un lado de longitud igual a $\sqrt{3}$ centímetros.

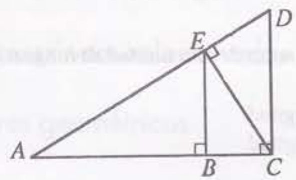


FIGURA PARA EL EJERCICIO 58

Demostraciones:

58. DADO: A—B—C, A—E—D en el diagrama
DEMUESTRA: $\triangle CDE \sim \triangle AEB$

En los ejercicios 59 y 60, dados: **$\triangle$MNP, $\overline{NQ} \perp \overline{MP}$, MN = NP, $\overline{QR}$** ***es un altura de*** **$\triangle$ MNQ, $\overline{QS}$** ***es un altura de*** **$\triangle$ PNQ.**
Demuestra:

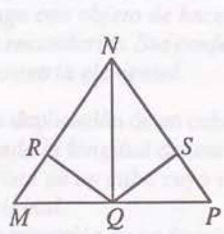


FIGURA PARA LOS EJERCICIOS 59 Y 60

59. $\triangle QRN \cong \triangle QSN$

60. $SP/SQ = RQ/RN = QP/QN$

61. Demuestra que si la apotema de un hexágono regular es x, entonces el perímetro del hexágono mide $4\sqrt{3}x$.

62. Demuestra que si el perímetro de un triángulo equilátero es y, entonces la apotema del triángulo mide $\sqrt{3}y/18$.

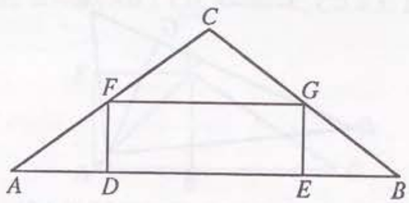


FIGURA PARA EL EJERCICIO 63

63. DADO: Rectángulo $DEGF$, $A—D—E$, $D—E—B$,
$A—F—C$, $B—G—C$,
$AE = BD$
DEMUESTRA: $\triangle ABC$ es isósceles.

Construcciones:

64. Construye un triángulo rectángulo, dados la hipotenusa y un ángulo agudo.
65. Construye un triángulo rectángulo, dados la hipotenusa y un cateto.
66. Construye un triángulo rectángulo, dados un cateto y la altura a la hipotenusa. (*Sugerencia*: construye dos rectas paralelas de modo que la distancia entre ellas sea igual a la longitud de la altura dada.)
67. Construye un cuadrado dada su diagonal.

En los ejercicios 68 y 69, dado un segmento de recta de una unidad de longitud (por ejemplo 2 pulgadas) construye:

68. Un segmento de recta de $\sqrt{2}$ unidades de longitud.
69. Un segmento de recta de $\sqrt{3}$ unidades de longitud.

6 ....Círculos

Stock Montage, Inc.

FELIX KLEIN (1849–1925)

NOTA HISTÓRICA: *El matemático británico Arthur Cayley (1821-1895) y el matemático alemán Felix Klein (1849-1925) integraron una teoría que unificó conceptos geométricos utilizando una definición de distancia más bien complicada. En una ocasión, Klein impartió una serie de conferencias en Gotinga con objeto de hacer llegar las ideas matemáticas actuales a las escuelas secundarias. Sus conferencias abarcaron los tres problemas clásicos de la geometría elemental.*

1. La duplicación de un cubo:
   Dada la longitud de una arista de un cubo, construir la longitud de la arista de un cubo cuyo volumen sea el doble del volumen del cubo original.
2. La trisección de un ángulo:
   Por construcción, dividir un ángulo en tres ángulos congruentes.
3. La cuadratura del círculo:
   Construir un cuadrado que tenga la misma área que un círculo dado.

En el pasado, muchos matemáticos intentaron resolverlos, pero se ha demostrado que la construcción de estos tres problemas es imposible. Estas demostraciones requieren métodos algebraicos.

En este capítulo se analizarán ciertas relaciones entre círculos, rectas y segmentos de recta, y también se presentará el concepto de *lugares geométricos*. Aunque en la sección 3.2 se introdujo la forma de párrafo, su aplicación estaba restringida primordialmente a la prueba indirecta. A partir de este capítulo se modificará el estilo al escribir las demostraciones en forma de párrafo. Esperamos que hagas lo mismo.

6.1 Tangentes

En la sección 1.2 se definieron los conceptos de *círculo*, *centro* y *radio*. La palabra *radio* se utilizó para hacer referencia al segmento de recta y también a la longitud del segmento de recta.

Definición
Una **recta tangente** es una recta en el plano de un círculo, la cual lo corta exactamente en un punto. Este punto se denomina **punto de tangencia.**

En cursos superiores de matemáticas, una recta tangente puede tener una definición distinta; sin embargo, los temas de análisis en tales cursos están más allá del alcance de este texto. El análisis en este libro se restringirá a una recta tangente como se acaba de definir.

Definición
Un **rayo tangente** es un rayo contenido en una recta tangente, con su punto extremo en el punto de tangencia.

Definición
Un **segmento tangente** es un segmento contenido en una recta tangente, con uno de sus puntos extremos sobre el punto de tangencia.

A menudo se abrevian las frases *recta tangente, rayo tangente* y *segmento tangente* con el término *tangente*.

EJEMPLO 1 En la figura 6.1, dado el círculo Q ($\odot Q$), a) identifica la recta tangente; b) identifica los rayos tangentes, y *c*) identifica los segmentos tangentes.

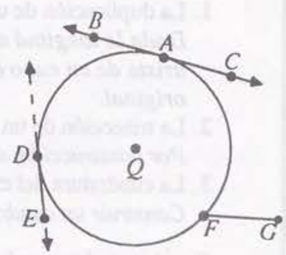


FIGURA 6.1

Solución **a.** $\overleftrightarrow{BC}$ es una recta tangente.
b. $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{AC}$ son rayos tangentes.
c. $\overline{AB}$, $\overline{AC}$ y $\overline{DE}$ son segmentos tangentes.
Observa que $\overline{FG}$ no es un segmento tangente, ya que no está contenido en una recta tangente. ■

Definición
El **interior de un círculo** P (int $\odot P$) con radio r es el conjunto de todos los puntos Q tales que $PQ < r$. El **exterior de un círculo** P (ext $\odot P$) con radio r es el conjunto de todos los puntos Q tales que $PQ > r$.

En la figura 6.2, el punto A está en $\odot P$, el punto B se encuentra en int $\odot P$ y el punto C se halla en ext $\odot P$. Resulta evidente que el centro del círculo se localiza en el interior del círculo.

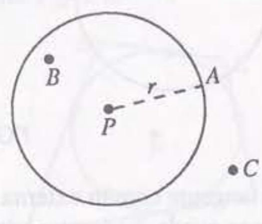


FIGURA 6.2

Los círculos en el mismo plano, que tienen el mismo centro, son **círculos concéntricos**. Dos círculos en el mismo plano son **tangentes internamente** si se cortan exactamente en un punto y la intersección de sus interiores no es vacía. Dos círculos en el mismo plano son **tangentes externamente** si se cortan exactamente en un punto y la intersección de sus interiores es vacía.

EJEMPLO 2 En la figura 6.3, identifica los círculos tangentes internamente y los círculos tangentes externamente.

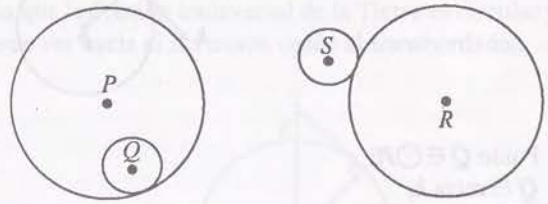


FIGURA 6.3

Solución Los círculos P y Q son tangentes internamente y los círculos R y S son tangentes externamente. ■

Una tangente de dos círculos es una **tangente común interna** si la intersección de la tangente y el segmento de recta que une los centros es no vacía. Una tangente de dos círculos es una **tangente común externa** si la intersección de la tangente y el segmento de recta que une los centros es vacía.

EJEMPLO 3 En la figura 6.4, identifica las tangentes comunes externas y las tangentes comunes internas.

Solución $\overleftrightarrow{AB}$ y $\overleftrightarrow{CD}$ son tangentes comunes externas, y $\overleftrightarrow{EF}$ y $\overleftrightarrow{GH}$ son tangentes comunes internas. ■

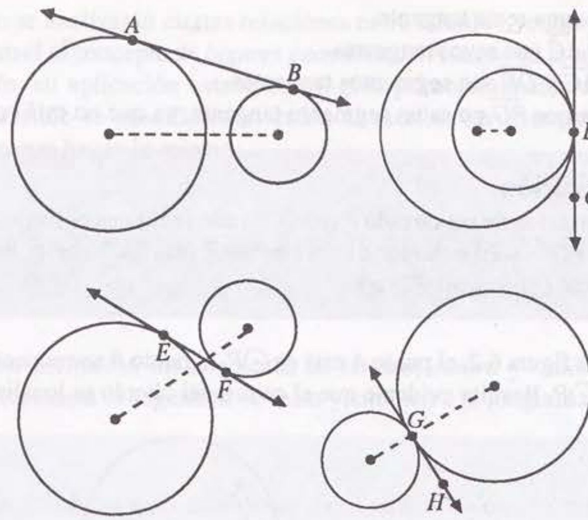
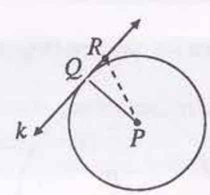


FIGURA 6.4

Puede haber una tangente común externa sin importar que los círculos sean o no tangentes. De manera semejante se puede dar una tangente común interna sin importar que los círculos sean o no tangentes. Observa la figura 6.4 para algunos ejemplos.

A continuación se considerarán algunas propiedades de los círculos y sus tangentes. El siguiente teorema muestra cómo se relaciona una tangente de un círculo con el radio de un círculo.

Teorema 6.1 Una recta perpendicular a un radio en un punto de un círculo es una tangente del círculo.



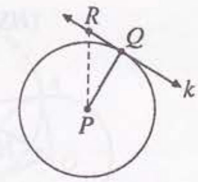
DADO: Punto $Q \in \odot P$,
$Q \in$ recta k,
$\overline{PQ} \perp k$.

DEMUESTRA: La recta k es una tangente de $\odot P$.

DEMOSTRACIÓN: Supón que k no es una tangente de $\odot P$. Entonces, ya que $Q \in (k \cap \odot P)$, k también debe contener otro punto R en $\odot P$. Por el teorema 2.7, como $\overline{PQ} \perp k$, $\overline{PR}$ no es perpendicular a k. Por el teorema 3.11, debido a que $m\angle PQR = 90°$, $m\angle PRQ$ no es mayor que 90°. En consecuencia, $m\angle PRQ < 90°$. Por el teorema 3.3 se concluye que $PQ < PR$. Pero esto contradice la proposición de que R está en $\odot P$, ya que $\overline{PQ}$ es un radio de $\odot P$. Por consiguiente, k es una tangente de $\odot P$.

El siguiente teorema es la recíproca del teorema 6.1.

Teorema 6.2 Una tangente de un círculo es perpendicular al radio del círculo con un punto extremo en el punto de tangencia.



DADO: k es una tangente de $\odot P$ en Q
DEMUESTRA: $\overline{PQ} \perp k$
DEMOSTRACIÓN: Supón que $\overline{PQ}$ no es perpendicular a k. Entonces, por el teorema 2.7, existe un punto R en k tal que $\overline{PR} \perp k$. Ya que $m\angle PRQ = 90°$, $m\angle PQR < 90°$. Así, por el teorema 3.3, $PR < PQ$. Esto significa que R está en int $\odot P$. Resulta evidente que si R está en int $\odot P$ y la recta k contiene a R, entonces k debe cortar a $\odot P$ en dos puntos. (Consulta el punto 19 de los ejercicios 6.1.) Esta contradicción establece que $\overline{PQ} \perp k$.

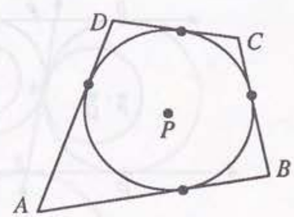


FIGURA 6.5

Un círculo está **inscrito en un polígono** si todos los lados del polígono están sobre tangentes del círculo. También se dice que el **polígono circunscribe al círculo.**

En la figura 6.5, $\odot P$ está inscrito en un cuadrilátero $ABCD$ y el cuadrilátero $ABCD$ también circunscribe a $\odot P$.

EJEMPLO 4 Un transbordador espacial está en órbita a 100 millas (mi) de la Tierra, cuyo radio mide alrededor de 4000 millas. Supón que la sección transversal de la Tierra es circular y encuentra la distancia que un astronauta puede ver hacia el horizonte desde el transbordador.

Solución

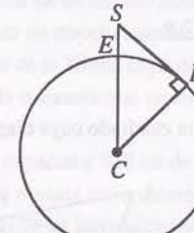


FIGURA 6.6

En la figura 6.6, $CH = CE = 4000$ mi y $ES = 100$ mi; pero $CS = CE + ES = 4100$ mi. Por el teorema de Pitágoras,

$$(CS)^2 = (CH)^2 + (HS)^2.$$

Así,

$$\begin{aligned}(HS)^2 &= (CS)^2 - (CH)^2\\ &= (4100)^2 - (4000)^2\\ &= 810000.\end{aligned}$$

En consecuencia,

$$\begin{aligned}HS &= \sqrt{810000}\\ &= 900 \text{ mi}\end{aligned}$$

■

EJERCICIOS 6.1

En los ejercicios 1 a 11, P, Q, R son centros de los círculos y A, B, C, y D son puntos de tangencia.

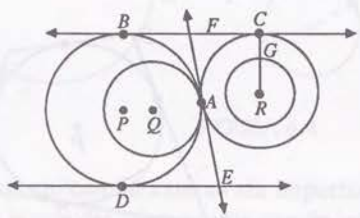


FIGURA PARA LOS EJERCICIOS 1 A 11

En los ejercicios 1 a 6, identifica

1. $\overline{AF}$ **4.** $\overline{RC}$

2. $\overleftrightarrow{BC}$ **5.** $\overline{AQ}$

3. $\overrightarrow{DE}$ **6.** $\overleftrightarrow{AE}$

En los ejercicios 7 a 11, ¿cuál es la relación de cada pareja de círculos?

7. $\odot P$ y $\odot Q$.

8. $\odot P$ y $\odot R$, tal que $C \in \odot R$.

9. $\odot R$, tal que $C \in \odot R$ y $\odot R$, tal que $G \in \odot R$.

10. $\odot Q$ y $\odot R$, tal que $C \in \odot R$.

11. $\odot Q$ y $\odot R$, tal que $G \in \odot R$.

12. Encuentra el radio del círculo inscrito en un cuadrado cuya diagonal mide 6 unidades de longitud.

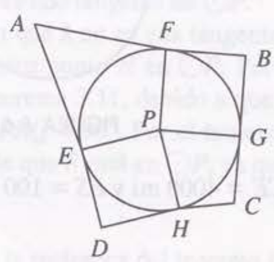


FIGURA PARA EL EJERCICIO 13

13. Si el cuadrilátero $ABCD$ circunscribe a $\odot P$, $\overline{BC} \perp \overline{AB}$, $\overline{CD} \perp \overline{AD}$, m$\angle C = 120°$ y $PG = 2$, halla el perímetro de $ABCD$.

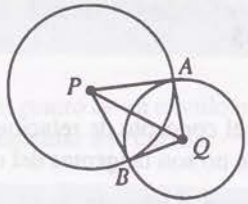


FIGURA PARA EL EJERCICIO 14

14. DADO: $\odot P$ y $\odot Q$ se cortan en los puntos A y B
DEMUESTRA: $\triangle APQ \cong \triangle BPQ$

En los ejercicios 15 a 18, dado que $\overleftrightarrow{AC}$ y $\overleftrightarrow{BC}$ son tangentes de $\odot$P y $\odot$Q y P—Q—C. Demuestra:

15. $\overline{BC} \cong \overline{AC}$
16. $\angle 1 \cong \angle 2$
17. $\overline{PB} \parallel \overline{QD}$
18. $\triangle CDQ \sim \triangle CBP$

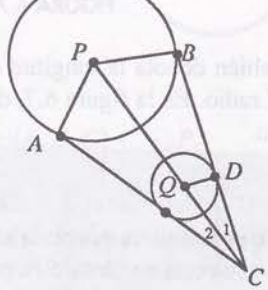


FIGURA PARA LOS EJERCICIOS 15 A 18

19. Demuestra que una recta que contiene un punto en el interior de un círculo debe cortar al círculo en dos puntos.
20. Dibuja un triángulo escaleno suficientemente grande y traza un círculo inscrito en él.
21. Un transbordador espacial está en órbita a 200 mi alrededor de la Tierra, cuyo diámetro mide alrededor de 4000 mi. Supón que la sección transversal de la Tierra es circular y encuentra la distancia que un astronauta puede ver hacia el horizonte desde el transbordador.
22. Contesta la pregunta del ejercicio 21 con el transbordador espacial a 500 mi de la Tierra.
23. Una nave espacial está en órbita a 100 mi alrededor de un planeta cuyo diámetro mide unas 2200 mi. Supón que la sección transversal del planeta es redonda y determina la distancia que un astronauta en la nave puede ver hacia el horizonte.
24. Contesta el punto anterior, pero ahora con la nave a 300 mi del planeta.

En los ejercicios 25 a 28, el Sol que brilla sobre la Tierra hace que ésta proyecte una sombra. La* umbra *es la parte de la sombra que está entre las tangentes comunes externas. La* penumbra *está entre las tangentes comunes internas.

25. Elabora un diagrama que muestre al Sol y a la Tierra como se han descrito, sombreando la umbra.
26. Traza un diagrama que los muestre como se ha descrito, pero sombreando la penumbra.
27. ¿En qué región de la sombra ocurre un eclipse total de Luna?
28. ¿En qué región de la sombra ocurre un eclipse parcial de Luna?

6.2 Cuerdas y secantes

En este apartado se ampliará el concepto de relaciones del círculo mediante la presentación de rectas y segmento de recta que no son tangentes del círculo.

Definición

Una **cuerda** de un círculo es un segmento de recta con puntos extremos en el círculo. Un **diámetro** es una cuerda que contiene al centro del círculo.

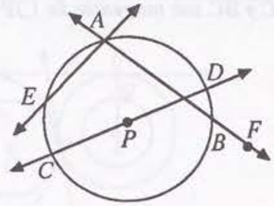


FIGURA 6.7

La palabra *diámetro* también denota la longitud de la cuerda implicada. El diámetro de un círculo mide el doble que el radio. En la figura 6.7, dado $\odot P$ se observa que $\overline{AB}, \overline{AE}$ y $\overline{CD}$ son cuerdas y $\overline{CD}$ es un diámetro.

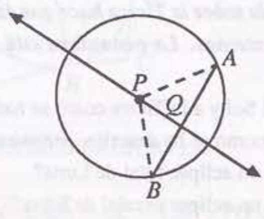
Definición

Una **secante** de un círculo es una recta que corta al círculo exactamente en dos puntos. Un **rayo secante** es un rayo que corta un círculo en exactamente dos puntos.

En la figura 6.7, $\overleftrightarrow{AE}$, $\overleftrightarrow{AB}$ y $\overleftrightarrow{CD}$ son secantes y $\overrightarrow{AE}$, $\overrightarrow{CD}$ y $\overrightarrow{FA}$ son rayos secantes. (¿Puedes identificar otros rayos secantes?)

Teorema 6.3 Si una secante que contiene al centro de un círculo es perpendicular a una cuerda, entonces bisecta a la cuerda.

DADO: $\odot P$, cuerda $\overline{AB}$, $\overline{PQ} \perp \overline{AB}$
DEMUESTRA: $AQ = BQ$
DEMOSTRACIÓN: Considera $\triangle APQ$ y $\triangle BPQ$. Resulta evidente que $AP = BP$, ya que $\overline{AP}$ y $\overline{BP}$ son radios de $\odot P$. Debido a que $PQ = PQ$ y $\overline{PQ} \perp \overline{AB}$, por HC = HC se tiene $\triangle APQ \cong \triangle BPQ$. Puesto que las partes correspondientes de triángulos congruentes son congruentes, $AQ = BQ$.



La siguiente recíproca del teorema 6.3 también es verdadera. Su demostración se deja como ejercicio.

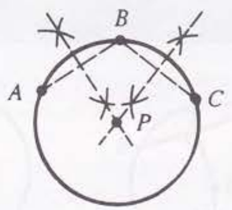
Teorema 6.4 Si una secante que contiene el centro de un círculo bisecta una cuerda que no está en el diámetro, entonces la secante es perpendicular a la cuerda.

El teorema 6.5 conduce a la construcción de un círculo que contiene tres puntos dados no colineales. Su demostración se deja como ejercicio.

Teorema 6.5 En el plano de un círculo, la mediatriz de una cuerda contiene al centro del círculo.

CONSTRUCCIÓN 6.1

Construye un círculo que contenga tres puntos dados no colineales.



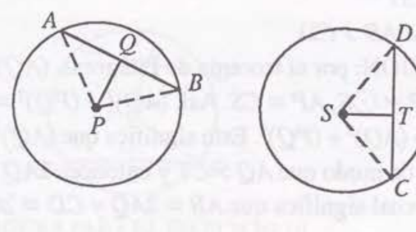
DADO: Puntos A, B y C
CONSTRUYE: $\odot P$ tal que $\{A, B, C\} \subset \odot P$.
Paso 1. Traza $\overline{AB}$ y $\overline{BC}$.
Paso 2. Aplica la construcción 1.3 para construir la mediatriz de $\overline{AB}$ y $\overline{BC}$. Ya que A, B y C no son colineales, las mediatrices no son paralelas y, así, se cortan en el punto P.
Paso 3. Usa P como centro y AP como radio para construir $\odot P$; por lo tanto, $\odot P$ contiene a A, B y C, de modo que $\odot P$ es el círculo buscado.

Antes de considerar el siguiente teorema quizá sea conveniente que repases la definición de *distancia entre un punto y una recta* que se proporcionó en la sección 1.5. Esta definición se utiliza para encontrar la distancia entre el centro de un círculo y una cuerda del círculo. Una cuerda es un segmento de recta, no una recta; sin embargo, la distancia se halla calculando la distancia entre el centro y la recta que contiene a la cuerda.

Dos círculos son **congruentes** si sus radios miden lo mismo. Los siguientes teoremas proporcionan las relaciones entre las longitudes de cuerdas y sus distancias al centro del círculo.

Teorema 6.6 En el mismo círculo o en círculos congruentes, las cuerdas equidistantes del centro son congruentes.

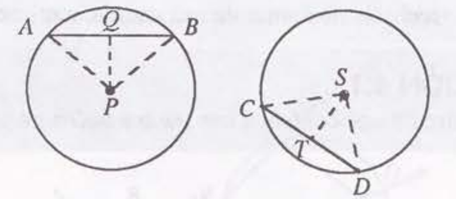
DADO: $\odot P \cong \odot S$, $PQ = ST$, $\overline{PQ} \perp \overline{AB}$, $\overline{ST} \perp \overline{CD}$
DEMUESTRA: $AB = CD$



NOTA: se demostrará la proposición para círculos congruentes. La demostración para el mismo círculo es semejante.

DEMOSTRACIÓN: debido a que $\odot P \cong \odot S$, se sabe que $AP = BP = CS = DS$. Puesto que se cuenta con $\overline{PQ} \perp \overline{AB}$, $\overline{ST} \perp \overline{CD}$ y $PQ = ST$, por HC = HC se concluye que $\triangle APQ \cong \triangle BPQ \cong \triangle CST \cong \triangle DST$. En virtud de que las partes correspondientes de triángulos congruentes son congruentes, $AQ = BQ = CT = DT$. Es fácil concluir que $AB = CD$.

Teorema 6.7 En el mismo círculo o en círculos congruentes, dos cuerdas congruentes cualesquiera equidistan del centro.

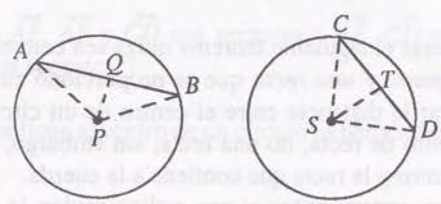


DADO: $\odot P \cong \odot S$,
$AB = CD$,
$\overline{PQ} \perp \overline{AB}$,
$\overline{ST} \perp \overline{CD}$

DEMUESTRA: $PQ = ST$

DEMOSTRACIÓN: dado que $\odot P \cong \odot S$, se sabe que $AP = CS$. Por el teorema 6.3 se sabe que $\overline{PQ}$ bisecta $\overline{AB}$ y $\overline{ST}$ bisecta $\overline{CD}$. Debido a que $AB = CD$, se concluye que $AQ = CT$. Como $\overline{PQ} \perp \overline{AB}$ y $\overline{ST} \perp \overline{CD}$, por HC = HC se tiene $\triangle APQ \cong \triangle CST$. Debido a que partes correspondientes de triángulos congruentes son congruentes, $PQ = ST$.

Teorema 6.8 Dadas dos cuerdas en el mismo círculo o en círculos congruentes, la cuerda más próxima al centro es la más larga.



DADO: $\odot P \cong \odot S$,
$\overline{PQ} \perp \overline{AB}$,
$\overline{ST} \perp \overline{CD}$,
$PQ < ST$

DEMUESTRA: $AB > CD$

DEMOSTRACIÓN: por el teorema de Pitágoras, $(AQ)^2 + (PQ)^2 = (AP)^2$ y $(CT)^2 + (ST)^2 = (CS)^2$. Puesto que $\odot P \cong \odot S$, $AP = CS$. Así, $(AQ)^2 + (PQ)^2 = (CT)^2 + (ST)^2$. Se tiene que $PQ < ST$; así, $(AQ)^2 + (ST)^2 > (AQ)^2 + (PQ)^2$. Esto significa que $(AQ)^2 + (ST)^2 > (CT)^2 + (ST)^2$; en consecuencia, $(AQ)^2 > (CT)^2$, de modo que $AQ > CT$ y entonces $2AQ > 2CT$. Pero por el teorema 6.3, $AQ = BQ$ y $CT = DT$, lo cual significa que $AB = 2AQ$ y $CD = 2CT$; por consiguiente, $AB > CD$.

Un **polígono está inscrito** en un círculo si todos sus lados son cuerdas del círculo. También se dice que el **círculo circunscribe un polígono.** En la figura 6.8, el pentágono $ABCDE$ está inscrito en $\odot P$ y $\odot P$ lo circunscribe.

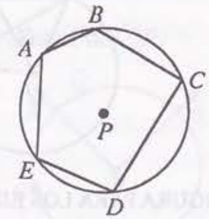


FIGURA 6.8

EJERCICIOS 6.2

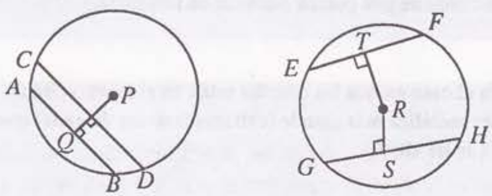


FIGURA PARA LOS EJERCICIOS 1 A 4

En los ejercicios 1 a 4, dados $\odot P \cong \odot R$, **EF = AB.** ***Anota el símbolo correcto (=, < o >).***

1. RT ________ PQ. **3.** GS ________ AP.
2. CD ________ EF. **4.** GH ________ CD.
5. Encuentra el perímetro del cuadrilátero inscrito $EFGH$ del punto 13 de los ejercicios 6.1.
6. Traza un círculo y marca tres puntos A, B y C no colineales sobre éste; por construcción encuentra el centro del círculo.
7. Traza un triángulo y alrededor de éste circunscribe un círculo.
8. Inscribe un hexágono regular en un círculo dado.

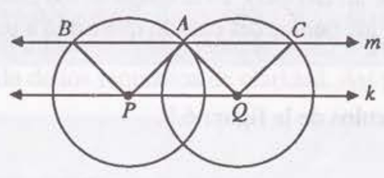


FIGURA PARA EL EJERCICIO 9

9. DADO: $\odot P \cong \odot Q$, la secante k que contiene a P y Q, la secante m que contiene al punto A de intersección de los círculos, $\overline{BC} \parallel \overline{PQ}$
DEMUESTRA: $m\angle ABP = m\angle ACQ$

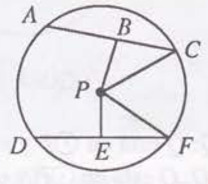


FIGURA PARA EL EJERCICIO 10

10. DADO: $\odot P$, las cuerdas $\overline{AC}$ y $\overline{DF}$, $\overline{BP} \perp \overline{AC}$, $\overline{EP} \perp \overline{DF}$ y $BP = PE$
DEMUESTRA: $\angle C \cong \angle F$

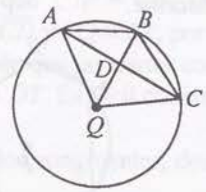


FIGURA PARA LOS EJERCICIOS 11 Y 12

En los ejercicios 11 y 12, dados* {A, B, C} $\subset \odot$Q, $\overline{\mathbf{BQ}} \perp \overline{\mathbf{AC}}$. *Demuestra:

11. $AB = BC$.
12. $m\angle CAB = m\angle ACB$.
13. Demuestra que por tres puntos no colineales cualesquiera puede trazarse exactamente un círculo. (*Sugerencia*: demuestra que tal círculo existe y que ningún otro círculo contiene los mismos tres puntos.)
14. Demuestra que ningún círculo contiene tres puntos distintos de una recta.
15. Demuestra el teorema 6.4.
16. Demuestra el teorema 6.5.
17. Demuestra el teorema 6.6 para el caso en que las cuerdas están en el mismo círculo.
18. ¿Cuál es el diámetro de la placa metálica más grande (extremadamente delgada) que puede ajustarse en un orificio rectangular que mide 3.2 in de ancho y 8.1 in de alto?

6.3 Relaciones arco-ángulo

En esta sección se analizarán las relaciones entre los arcos y los ángulos de un círculo. Se comenzará con descripciones de un semicírculo y un ángulo central.

Definición

Un **semicírculo** de un círculo P es la unión de los puntos extremos de su diámetro con el conjunto de todos los puntos del círculo que están a un lado del diámetro.

EJEMPLO 1 Identifica los semicírculos de la figura 6.9.

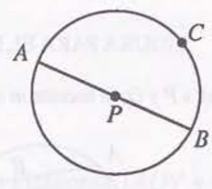


FIGURA 6.9

Solución Un semicírculo es $\{A, B\} \cup \{Q\text{: } Q$ está en $\odot P$ y en el mismo lado de $\overleftrightarrow{AB}$ que $C\}$.
Otro semicírculo es $\{A, B\} \cup \{Q\text{: } Q$ está en $\odot P$ y en el lado opuesto de $\overleftrightarrow{AB}$ con respecto a $C\}$. ■

Solución Se tiene que $m\widehat{AB} = 87°$ y $m\widehat{ACB} = 360° - 87° = 273°$. ■

La demostración del siguiente teorema se deja como ejercicio.

Teorema 6.9 **(Teorema de adición de arcos)** Si C es un punto de $\widehat{AB}$, entonces $m\widehat{AB} = m\widehat{AC} + m\widehat{CB}$.

DADO: $\{A, B, C\} \subset \odot P$
DEMUESTRA: $m\widehat{AB} = m\widehat{AC} + m\widehat{CB}$
DEMOSTRACIÓN: Consulta el punto 24 de los ejercicios 6.3.

EJEMPLO 3 Si en la figura 6.11 $\overline{AD}$ es un diámetro, halla $m\widehat{AGD}$, $m\widehat{BC}$, $m\widehat{BD}$ y $m\widehat{BAD}$.

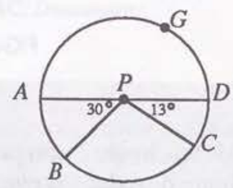


FIGURA 6.11

Solución $m\widehat{AGD} = 180°$, $m\widehat{BC} = 137°$, $m\widehat{BD} = 150°$ y $m\widehat{BAD} = 210°$. ■

Definición

Un **ángulo inscrito** en un círculo P es un ángulo cuyo vértice está en el círculo P y cada uno de sus rayos corta al círculo en un punto distinto al vértice.

En las figuras 6.12 a) y 6.12 b), $\angle U$ y $\angle V$ son ángulos inscritos, pero $\angle S$ y $\angle T$ no lo son. ¿Por qué? En la figura 6.12 se dice que $\angle RUW$ está *inscrito en* $\widehat{RUW}$.

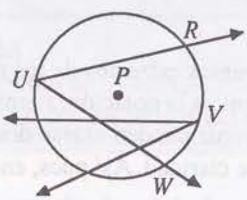


FIGURA 6.12 a)

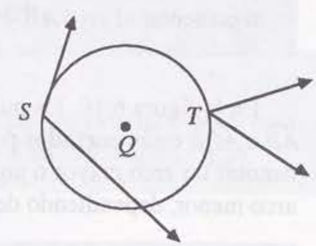
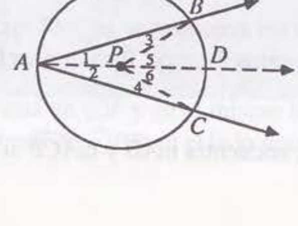


FIGURA 6.12 b)

Teorema 6.10 La medida de un ángulo inscrito es la mitad de la medida de su arco cortado.

DADO: $\{A, B, C\} \subset \odot P$
DEMUESTRA: $m\angle BAC = m\widehat{BC}/2$



NOTA: hay tres casos por considerar. Caso 1: $P \in \text{int}\angle BAC$, caso 2: $P \in \angle BAC$ y caso 3: $P \in \text{ext}\angle BAC$. Aquí sólo se verá el caso 1; Los otros dos se dejan como ejercicios.

DEMOSTRACIÓN: se traza $\overrightarrow{AP}$ que corta a $\odot P$ en un nuevo punto D. Se trazan $\overline{PB}$ y $\overline{PC}$. Por el teorema 3.13, $m\angle 5 = m\angle 1 + m\angle 3$ y $m\angle 6 = m\angle 2 + m\angle 4$. Pero $AP = BP = CP$, de modo que por el teorema 2.4, $m\angle 1 = m\angle 3$ y $m\angle 2 = m\angle 4$. Así, $m\angle 5 = 2m\angle 1$ y $m\angle 6 = 2m\angle 2$. Por la definición de la medida de un arco, $m\widehat{BD} = m\angle 5$ y $m\widehat{CD} = m\angle 6$. Entonces, $m\widehat{BD} + m\widehat{DC} = 2m\angle 1 + 2m\angle 2 = 2(m\angle 1 + m\angle 2)$. Por el teorema de adición de arcos y el postulado de adición de ángulos, $m\widehat{BC} = 2m\angle BAC$. En consecuencia, $m\angle BAC = m\widehat{BC}/2$.

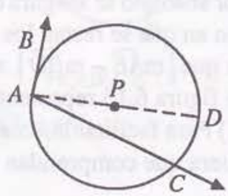
Las demostraciones de los siguientes corolarios se dejan como ejercicios.

Corolario 1 Cualquier ángulo inscrito que corta a un semicírculo es un ángulo recto.

Corolario 2 Todos los ángulos inscritos de un círculo que cortan al mismo arco son congruentes.

El siguiente teorema guarda una estrecha relación con el teorema 6.10.

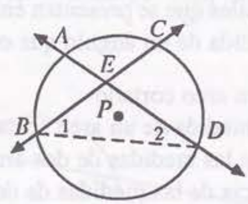
Teorema 6.11 La medida de un ángulo cuyo vértice está en un círculo, tal que un rayo es una tangente y el otro una secante, es igual a la mitad de la medida de su arco cortado.



DADO: $\{A, C, D\} \subset \odot P$, $A—P—D$,
$D \in \text{int}\angle BAC$, $\overrightarrow{AB}$ es una tangente de $\odot P$
DEMUESTRA: $m\angle BAC = m\widehat{ADC}/2$
NOTA: hay otros dos casos por considerar: $D \in \text{ext}\ \angle BAC$ y $D \in \angle BAC$.
DEMOSTRACIÓN: Consulta el punto 29 de los ejercicios 6.3.

Los dos teoremas siguientes se demuestran aplicando el teorema 6.10.

Teorema 6.12 Dado un par de ángulos opuestos por el vértice con el vértice en el interior de un círculo, la medida de cada ángulo es igual a la semisuma de las medidas de los dos arcos cortados.

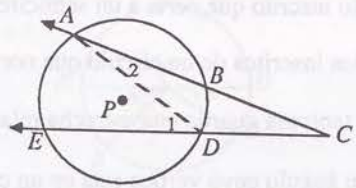


DADO: $\{A, B, C, D\} \subset \odot P$
DEMUESTRA: $m\angle AEB = m\angle CED$
$= (m\widehat{AB} + m\widehat{CD})/2$

DEMOSTRACIÓN: debido a que los ángulos opuestos por el vértice son congruentes, $m\angle AEB = m\angle CED$. Por el teorema 6.10, $m\angle 1 = m\widehat{CD}/2$ y $m\angle 2 = m\widehat{AB}/2$. Por el teorema 3.12, $m\angle AEB = m\angle 2 + m\angle 1$. En consecuencia, $m\angle AEB = (m\widehat{AB} + m\widehat{CD})/2$.

Teorema 6.13 Dado un ángulo con el vértice en el exterior de un círculo, tal que cada uno de los rayos del ángulo corta al círculo, la medida del ángulo es igual a la mitad del valor absoluto de la diferencia de las medidas de los arcos cortados.

DADO: $\{A, B, C, D\} \subset \odot P$
DEMUESTRA: $m\angle C = (m\widehat{AE} - m\widehat{BD})/2$
DEMOSTRACIÓN: Consulta el punto 30 de los ejercicios 6.3.



Al considerar el valor absoluto se asegura que el resultado es positivo por lo que no es necesario preocuparse por el orden en que se restan los arcos. Puesto que se tiene $m\widehat{AE} > m\widehat{BD}$ con base en el diagrama, se observa que $|m\widehat{AE} - m\widehat{BD}| = m\widehat{AE} - m\widehat{BD}$.

Los diagramas de la figura 6.13 representan otros casos del teorema 6.13. (Consulta el punto 31 de los ejercicios 6.3.) Para facilitar las cosas, el teorema 6.13 se plantea como justificación de proposiciones cualesquiera que comprendan las situaciones ilustradas en la figura 6.13.

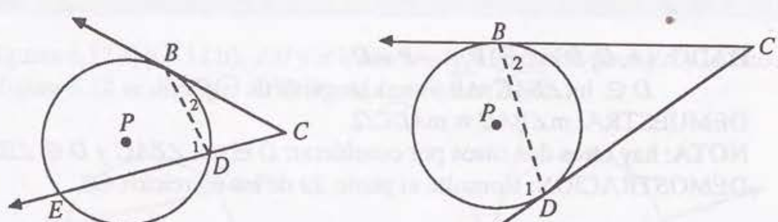


FIGURA 6.13

¡PRECAUCIÓN! Para resolver problemas computacionales es importante recordar cuatro relaciones fundamentales que se presentan entre ángulos y arcos cortados de un círculo. Según las circunstancias, la medida de un ángulo que corta un círculo puede ser igual a

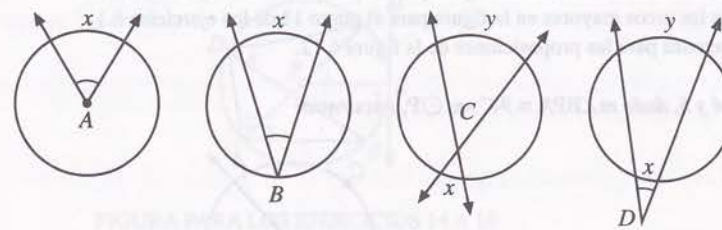
1. La medida de un arco cortado
2. La mitad de la medida de un arco cortado
3. La semisuma de las medidas de dos arcos cortados
4. La semidiferencia de las medidas de dos arcos cortados

En los ejemplos característicos del diagrama, si las letras minúsculas representan las medidas de arcos cortados, se tiene

1. $m\angle A = x$,
2. $m\angle B = \frac{1}{2}x$,

3. $\text{m}\angle C = \dfrac{1}{2}(x + y)$, y

4. $\text{m}\angle D = \dfrac{1}{2}(y - x)$.



EJEMPLO 4 Encuentra m$\widehat{BC}$, m$\angle ACB$ y m$\angle BDC$ en la figura 6.14.

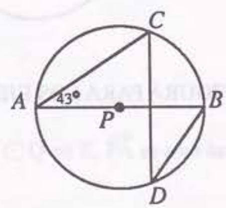


FIGURA 6.14

Solución Al aplicar el teorema 6.10 resulta m$\widehat{BC}$ = 86°.
Por el corolario 1, m$\angle ACB$ = 90°.
Por el corolario 2, m$\angle BDC$ = 43°. ■

EJEMPLO 5 Halla m$\widehat{CD}$ en la figura 6.15.

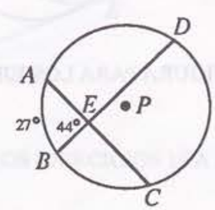


FIGURA 6.15

Solución Por el teorema 6.12, m$\angle AEB$ = (m$\widehat{AB}$ + m$\widehat{CD}$)/2. Así, m$\widehat{CD}$ = 27° = 2(44°), de modo que m$\widehat{CD}$ = 88° − 27° = 61°. ■

EJEMPLO 6 En la figura 6.16, determina m$\angle C$.

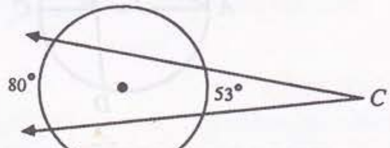


FIGURA 6.16

Solución Al aplicar el teorema 6.13 se encuentra que m$\angle C$ = (80° − 53°)/2 = 13.5°. ■

EJERCICIOS 6.3

1. Enumera todos los arcos menores en la figura para el punto 13 de los ejercicios 6.1.
2. Enumera todos los arcos mayores en la figura para el punto 13 de los ejercicios 6.1.
3. Proporciona razones para las proposiciones de la figura 6.12.

En los ejercicios 4 y 5, dado m∠BPA = 94° en ⊙P, encuentra:

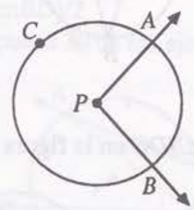


FIGURA PARA LOS EJERCICIOS 4 Y 5

4. m$\widehat{AB}$
5. m$\widehat{ACB}$

En los ejercicios 6 a 9, $\overline{AB}$ es un diámetro, m∠BPC = 27°; encuentra:

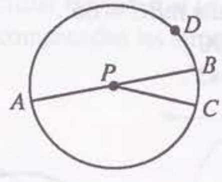


FIGURA PARA LOS EJERCICIOS 6 A 9

6. m$\widehat{AC}$
7. m$\widehat{ADB}$
8. m$\widehat{ABC}$
9. m$\widehat{BAC}$

En los ejercicios 10 a 13, dados m∠BAC = 30°, m$\widehat{CD}$ = 50°, ⊙P; halla:

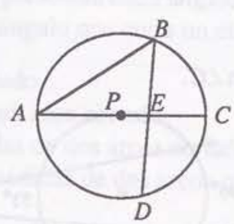


FIGURA PARA LOS EJERCICIOS 10 A 13

10. m$\widehat{BC}$
11. m$\widehat{AB}$

12. m$\angle BEC$
13. m$\angle ABD$

En los ejercicios 14 a 18, dado que $\overline{AC}$ es un diámetro de $\odot$P, t es una tangente de $\odot$P en E, determina:

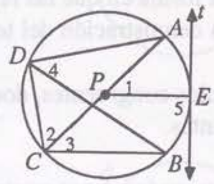


FIGURA PARA LOS EJERCICIOS 14 A 18

14. m$\widehat{AE}$, si m$\angle 1 = 43°$
15. m$\angle 2$, si m$\angle A = 21°$
16. m$\angle 3$, si m$\angle 4 = 49°$
17. m$\angle 5$
18. m$\widehat{BC}$, si m$\widehat{AD} = 140°$, m$\angle 4 = 45°$, y m$\angle B = 20°$

En los ejercicios 19 a 23, dado que $\overrightarrow{PE}$ es una tangente de $\odot$Q en E, $\overrightarrow{PA}$ es una tangente de $\odot$Q en A, encuentra:

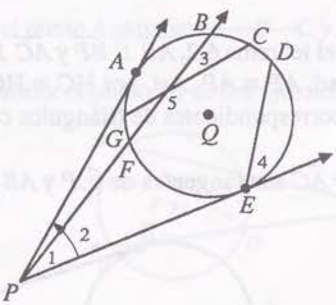


FIGURA PARA LOS EJERCICIOS 19 A 23

19. m$\angle 3$, si m$\widehat{FG} = 20°$ y m$\widehat{BC} = 30°$.
20. m$\widehat{DE}$, si m$\angle 4 = 52°$.
21. m$\angle 2$, si m$\widehat{AFE} = 110°$.
22. m$\widehat{FE}$, si m$\widehat{BDE} = 160°$ y m$\angle 1 = 35°$.
23. m$\widehat{BC}$, si m$\widehat{GF} = 25°$ y m$\angle 5 = 145°$.
24. Demuestra el teorema 6.9. (*Sugerencia*: hay varios casos, como que ambos arcos sean menores o un arco sea menor y otro mayor.)
25. Demuestra el caso 2 del teorema 6.10.
26. Demuestra el caso 3 del teorema 6.10.
27. Demuestra el corolario 1 del teorema 6.10.
28. Demuestra el corolario 2 del teorema 6.10.
29. Demuestra todos los casos del teorema 6.11.
30. Demuestra el teorema 6.13.
31. Escribe y demuestra teoremas comparables con el teorema 6.13 para los diagramas de la figura 6.13.
32. Demuestra que rectas paralelas cortan arcos congruentes de un círculo.

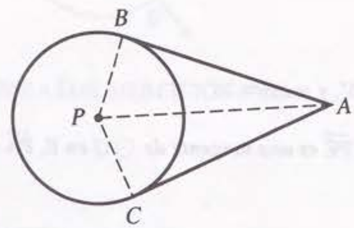
6.4 Relaciones círculo-segmento

En esta sección se analizará la forma en que las relaciones de ciertos segmentos con los círculos determinan sus longitudes. La demostración del teorema 6.14 se deja como ejercicio.

Teorema 6.14 En el mismo círculo o en círculos congruentes, dos cuerdas son congruentes si y sólo si los arcos correspondientes son congruentes.

Teorema 6.15 Los dos segmentos tangentes trazados de un punto a un círculo son congruentes.

DADO: $\{B, C\} \subset \odot P$, $\overline{AB}$ y $\overline{AC}$ son tangentes de $\odot P$
DEMUESTRA: $\overline{AB} \cong \overline{AC}$



DEMOSTRACIÓN: por el teorema 6.2, $\overline{AB} \perp \overline{BP}$ y $\overline{AC} \perp \overline{CP}$. Como $\overline{BP}$ y $\overline{CP}$ son radios de $\odot P$, $BP = CP$. Por reflexividad, $AP = AP$. Así, por HC = HC, $\triangle ABP \cong \triangle ACP$. En consecuencia, $\overline{AB} \cong \overline{AC}$, ya que partes correspondientes de triángulos congruentes son congruentes.

EJEMPLO 1 En la figura 6.17, si $\overline{AB}$ y $\overline{AC}$ son tangentes de $\odot P$ y $AB = 13$, encuentra AC.

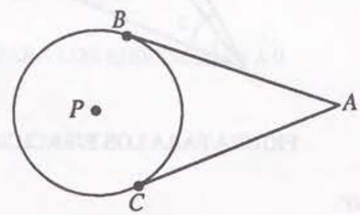
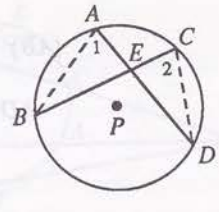


FIGURA 6.17

Solución Por el teorema 6.15, $AC = 13$. ■

Teorema 6.16 Si dos cuerdas de un círculo se cortan en el interior del círculo, el producto de las longitudes de los segmentos sobre una cuerda es igual al producto de las longitudes de los segmentos sobre la otra cuerda.

DADO: $\{A, B, C, D\} \subset \odot P$
DEMUESTRA: $AE \cdot DE = BE \cdot CE$
DEMOSTRACIÓN: debido a que ángulos opuestos por el vértice son congruentes, $m\angle AEB = m\angle CED$. Por el corolario 2 del teorema 6.10, $m\angle 1 = m\angle 2$. Así, por AA ~ AA (teorema 4.1), $\triangle ABE \sim \triangle CDE$. Luego, por definición de triángulos semejantes, $AE/CE = BE/DE$. En consecuencia, por el axioma de multiplicación de la igualdad se tiene $AE \cdot DE = BE \cdot CE$.



EJEMPLO 2 Determina BE en la figura 6.18.

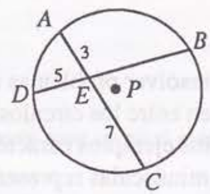


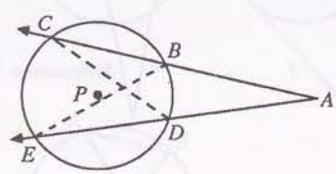
FIGURA 6.18

Solución Por el teorema 6.16 se tiene $BE = 21/5$, ya que $3 \cdot 7 = 5BE$. ■

Los dos teoremas siguientes pueden probarse de manera a como se demostró el teorema 6.16.

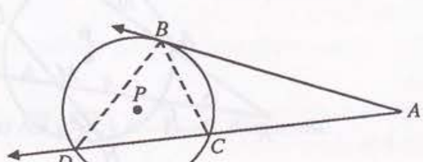
Teorema 6.17 Si $\{B, C, D, E\} \subset \odot P$ y el punto A satisface A—B—C y A—D—E, entonces $AB \cdot AC = AD \cdot AE$.

DEMOSTRACIÓN: Consulta el punto 15 de los ejercicios 6.4.



Teorema 6.18 Si $\{B, C, D\} \subset \odot P$ y $\overleftrightarrow{AB}$ es una tangente de $\odot P$ donde el punto A satisface A—C—D, entonces $(AB)^2 = AC \cdot AD$.

DEMOSTRACIÓN: consulta el punto 16 de los ejercicios 6.4.



EJEMPLO 3 Supón que el círculo en la figura del teorema 6.18 representa una sección transversal de la Tierra. Considera un astronauta ubicado en el espacio en el punto A. El astronauta utiliza un dispositivo láser para calcular la distancia de ese punto a las ciudades en los puntos B y C de la Tierra. Encuentra que $AB = 9000$ mi y que $AC = 8000$ mi. Si fuera posible suspender un cable telefónico recto de C a D, encuentra su longitud.

Solución Por el teorema 6.8,

$$(AB)^2 = AC \cdot AD$$

Así,

$$\begin{aligned} AD &= (AB)^2/AC \\ &= (9000)^2/8000 \\ &= 81000/8 \\ &= 10125 \text{ mi.} \end{aligned}$$

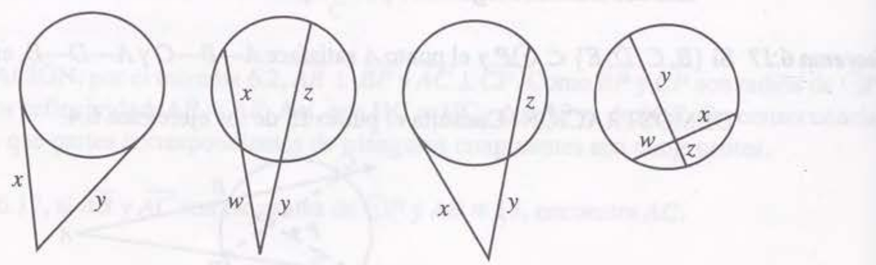
En consecuencia,

$$\begin{aligned} CD &= 10125 - 8000 \\ &= 2125 \text{ mi.} \end{aligned}$$

■

¡PRECAUCIÓN! Para resolver problemas de cómputo es importante recordar cuatro relaciones fundamentales que existen entre los círculos y ciertas cuerdas, segmentos tangentes o segmentos secantes. Al considerar los ejemplos característicos que se ilustran de izquierda a derecha en los diagramas y si las letras minúsculas representan las longitudes de los segmento de recta, se tiene

1. $x = y$,
2. $w(w + x) = y(y + z)$,
3. $x^2 = y(y + z)$, y
4. $wz = yz$.



EJERCICIOS 6.4

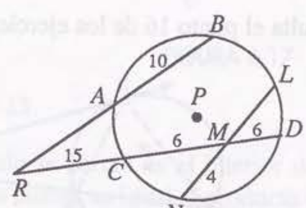


FIGURA PARA LOS EJERCICIOS 1 Y 2

En los ejercicios 1 y 2, dado ⊙P con longitudes como se muestra, encuentra:

1. *LM* **2.** *RA*

En los ejercicios 3 a 6, dado ⊙S con tangente $\overrightarrow{PT}$ y secantes $\overrightarrow{PB}$ y $\overrightarrow{PD}$:

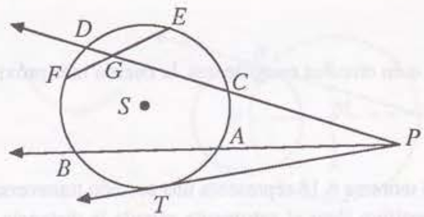


FIGURA PARA LOS EJERCICIOS 3 A 6

3. Si $EG = 6$, $CG = 12$ y $DG = 2$, encuentra FG y EF.
4. Si $PC = 12$, $PA = 10$ y $CD = 6$, encuentra AB y PB.
5. Si $PA = 12$ y $AB = 4$, encuentra PT.
6. Si $PA = 6$ y $PT = 7$, encuentra PB.
7. Aplica el teorema 6.18 para construir un segmento de recta cuya longitud sea la media geométrica de las longitudes de dos segmentos de recta dados.

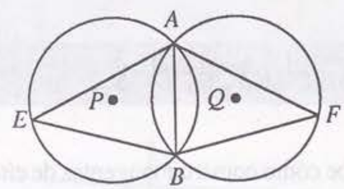


FIGURA PARA EL EJERCICIO 8

8. DADO: $\odot P \cong \odot Q$ que se cortan en A y B, y $\overparen{AE} \cong \overparen{AF}$
DEMUESTRA: $\triangle EAB \cong \triangle FAB$

En los ejercicios 9 y 10, dado* AB = MN *y* $\overline{MN} \parallel \overline{CD}$*, demuestra:

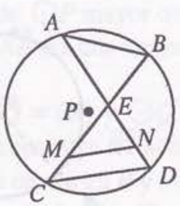


FIGURA PARA LOS EJERCICIOS 9 Y 10

9. $\triangle ABC \sim \triangle CDE$
10. $\triangle ABE \cong \triangle MNE$

En los ejercicios 11 y 12, dado* $\odot$P *con tangentes* $\overline{AB}$ *y* $\overline{AC}$ *y* A—D—P*, demuestra:

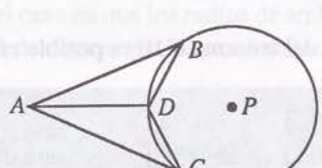


FIGURA PARA LOS EJERCICIOS 11 Y 12

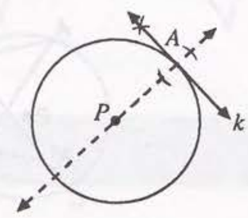
11. $\angle BAD \cong \angle CAD$
12. $\widehat{BD} \cong \widehat{CD}$
13. Demuestra que en el mismo círculo o en círculos congruentes, la cuerda más próxima al centro corta al mayor arco menor.
14. Demuestra el teorema 6.14.
15. Demuestra el teorema 6.17.
16. Demuestra el teorema 6.18.
17. Supón que el círculo en la figura del teorema 6.18 representa una sección transversal de la Tierra y un astronauta se halla en el espacio en el punto A. Con un dispositivo láser el astronauta calcula la distancia desde ese punto hasta las ciudades en los puntos B y C de la Tierra. Encuentra que $AB = 7000$ mi y que $AC = 5000$ mi. Si se pudiera suspender un cable telefónico recto de C a D, encuentra su longitud.
18. Contesta la pregunta anterior con $AB = 8000$ mi y $AC = 7000$ mi.
19. En un tubo se introduce una regla de 12 in, de modo que los extremos de ésta tocan el tubo. El punto medio de la regla está a 3 in del punto más próximo del tubo. ¿Cuál es el diámetro del tubo?
20. Ambos extremos de una vara de 21 cm se colocan contra el lado interior de una pelota circular rota. El punto medio de la vara está a 7 cm del punto más próximo de la pelota. ¿Cuál es el diámetro de la pelota?

6.5 Construcciones relacionadas

En esta sección se describe cómo construir tangentes de círculos y segmentos de recta cuya longitud sea la media geométrica de las longitudes de dos segmentos de recta dados. Al aplicar el teorema 6.1 es posible hacer las siguientes construcciones.

CONSTRUCCIÓN 6.2

Construye una tangente a un círculo por un punto dado del círculo.



DADO: Punto $A \in \odot P$

CONSTRUYE: La recta k de modo que k sea una tangente de $\odot P$

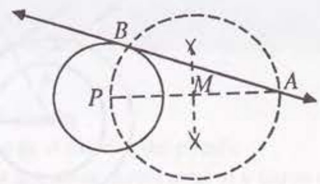
Paso 1. Traza $\overleftrightarrow{AP}$.

Paso 2. Se aplica la construcción 1.5 para construir la perpendicular k a $\overleftrightarrow{AP}$ que pasa por A. La recta k es la recta buscada.

Al usar el corolario 1 del teorema 6.10 es posible efectuar las siguientes construcciones.

CONSTRUCCIÓN 6.3

Construye una tangente a un círculo por un punto dado en el exterior del círculo.



DADO: El punto A está en el exterior de $\odot P$

CONSTRUYE: $\overleftrightarrow{AB}$ de modo que $\overleftrightarrow{AB}$ sea una tangente de $\odot P$

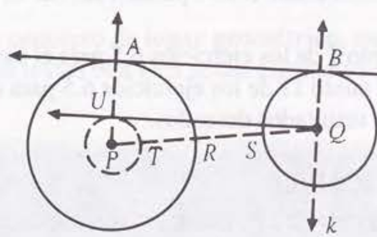
Paso 1. Traza $\overline{AP}$ y aplica la construcción 1.3 para encontrar el punto medio M de $\overline{AP}$.

Paso 2. Con M como centro, construye un círculo de radio MP. Sea B uno de los puntos de intersección de este círculo con $\odot P$.

Paso 3. Traza $\overleftrightarrow{AB}$. Así, por el corolario 1 del teorema 6.10 y por el teorema 6.1, $\overleftrightarrow{AB}$ es la tangente requerida.

CONSTRUCCIÓN 6.4

Construye una tangente común externa de dos círculos dados.



DADO: $\odot P$ y $\odot Q$ con el radio de $\odot P$ mayor que el de $\odot Q$

CONSTRUYE: $\overleftrightarrow{AB}$ de modo que $\overleftrightarrow{AB}$ sea una tangente tanto de $\odot P$ como de $\odot Q$, y $\overline{PQ} \cap \overleftrightarrow{AB} = \emptyset$

Paso 1. Traza $\overline{PQ}$. Sean $\odot P \cap \overline{PQ} = \{R\}$ y $\odot Q \cap \overline{PQ} = \{S\}$.

Paso 2. Con la construcción 1.1 construye $\overline{RT}$ sobre $\overline{RP}$ de modo que $RT = SQ$.

Paso 3. Construye un círculo con centro en P y radio PT. Con la construcción 6.3 construye una tangente a este círculo desde Q. Identifica el punto de tangencia como U.

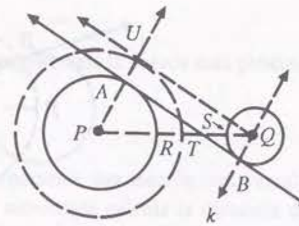
Paso 4. Traza $\overrightarrow{PU}$; identifica con A la intersección de $\overrightarrow{PU}$ con el $\odot P$ original.

Paso 5. Construye una recta k por Q paralela a $\overrightarrow{PU}$ con la construcción 3.1. La recta k corta $\odot Q$ en dos puntos. Uno de estos puntos está en el mismo lado de $\overleftrightarrow{PQ}$ que A; identifícalo como B y traza $\overleftrightarrow{AB}$. Así, $\overleftrightarrow{AB}$ es la recta buscada.

La misma construcción es válida cuando los dos círculos dados se cortan. Consulta el punto 5 de los ejercicios 6.5 para el caso en que los radios de ambos círculos son iguales. Estudia el punto 10 de los ejercicios 6.5 para demostrar que los pasos de la construcción 6.4 conducen a los resultados deseados.

CONSTRUCCIÓN 6.5

Construye una tangente común interna de dos círculos dados.



DADO: $\odot P$ y $\odot Q$ con el radio de $\odot P$ mayor que el radio de $\odot Q$

CONSTRUYE: $\overleftrightarrow{AB}$ de modo que $\overleftrightarrow{AB}$ sea tangente tanto de $\odot P$ como de $\odot Q$ y $\overline{PQ} \cap \overleftrightarrow{AB} \neq \emptyset$

Paso 1. Traza $\overline{PQ}$. Sean $\odot P \cap \overline{PQ} = \{R\}$ y $\odot Q \cap \overline{PQ} = \{S\}$.

Paso 2. Usa la construcción 1.1 para construir $\overline{RT}$ sobre $\overline{RS}$ tal que $RT = SQ$.

Paso 3. Construye un círculo con centro P y radio PT. Usa la construcción 6.3 para construir una tangente a este círculo desde Q. Identifica el punto de tangencia como U.

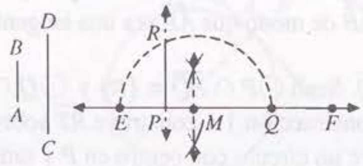
Paso 4. Traza $\overrightarrow{PU}$ e identifica con A la intersección de $\overrightarrow{PU}$ con el $\odot P$ original.

Paso 5. Usa la construcción 3.1 para construir una recta k por Q paralela a $\overleftrightarrow{PU}$. La recta k corta $\odot Q$ en dos puntos. Uno de estos puntos no está en el mismo lado de $\overleftrightarrow{PQ}$ que A. Traza $\overleftrightarrow{AB}$. Identifica como B este punto. Así, $\overleftrightarrow{AB}$ es la recta requerida.

Consulta el punto 7 de los ejercicios 6.5 para el caso en que los radios de los dos círculos son iguales. Estudia el punto 11 de los ejercicios 6.5 para demostrar que los pasos en la construcción 6.5 conducen a los resultados deseados.

CONSTRUCCIÓN 6.6

Construye un segmento cuya longitud sea la media geométrica entre las longitudes de dos segmentos dados.



DADO: $\overline{AB}$ y $\overline{CD}$

CONSTRUYE: $\overline{PR}$ de modo que $\dfrac{AB}{PR} = \dfrac{PR}{CD}$

Paso 1. Traza $\overleftrightarrow{EF}$. Usa la construcción 1.1 para encontrar un punto P en $\overleftrightarrow{EF}$ tal que $EP = AB$, y encuentra un punto Q tal que E—P—Q y $PQ = CD$.

Paso 2. Usa la construcción 1.3 para encontrar el punto medio M de $\overline{EQ}$. Con M como centro, construye un semicírculo con $\overline{EQ}$ como diámetro.

Paso 3. Con la construcción 1.5 encuentra la perpendicular a $\overleftrightarrow{EF}$ que pasa por P. Sea R el punto de intersección de esta perpendicular con el semicírculo. Así, $\overline{PR}$ es el segmento buscado, ya que por el corolario 1 del teorema 6.10, $\angle ERQ$ es un ángulo recto y como $\overline{EQ} \perp \overline{PR}$, se tiene $\dfrac{EP}{PR} = \dfrac{PR}{PQ}$.

EJERCICIOS 6.5

1. Construye la tangente de un círculo por un punto en el círculo.
2. Construye las dos tangentes de un círculo por un punto en el exterior del círculo.
3. Construye una tangente común externa de dos círculos que no se cortan entre sí y cuyos radios son distintos.
4. Construye una tangente común interna de dos círculos que se cortan entre sí y cuyos radios son distintos.
5. Construye una tangente común externa de dos círculos que no se cortan entre sí y cuyos radios son iguales.
6. Construye una tangente común interna de dos círculos que no se cortan entre sí y cuyos radios son distintos.
7. Construye una tangente común interna de dos círculos que no se cortan entre sí y cuyos radios son iguales.
8. Aplica la construcción 6.6 para construir un segmento de recta cuya longitud sea la media geométrica entre 3 y 5.
9. Construye un segmento de recta cuya longitud sea $\sqrt{3}$.
10. En la construcción 6.4, demuestra que $\overleftrightarrow{AB}$ es una tangente tanto de $\odot P$ como de $\odot Q$.
11. En la construcción 6.5, demuestra que $\overleftrightarrow{AB}$ es una tangente de $\odot P$ de $\odot Q$.

6.6 Lugares geométricos

En esta sección se define el concepto de **lugar geométrico,** que se utiliza para describir ciertos conjuntos de puntos. En otros textos esta idea se usa algunas veces para describir la trayectoria de un punto en movimiento.

Definición
Un **lugar geométrico** es el conjunto de todos los puntos que satisfacen una o más condiciones dadas.

Cuando se tiene un problema de lugar geométrico, primero se traza un diagrama que represente las condiciones dadas, del diagrama se aplican los conocimientos adquiridos hasta el momento para evaluar cuáles puntos satisfacen los requerimientos. Por último, el lugar geométrico se describe verbalmente, identificando el tipo de conjunto formado (punto, recta, rayo, etc.), y dónde se ubica con respecto al conjunto de puntcs dado. En los ejemplos siguientes, las rectas continuas representan las condiciones dadas y las líneas punteadas, los lugares geométricos buscados.

LUGAR GEOMÉTRICO 1
Encuentra el lugar geométrico de los puntos en un plano que son equidistantes a dos puntos dados en el plano.

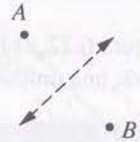


FIGURA 6.19

Dados los puntos A y B en la figura 6.19, se encuentra que el lugar geométrico es la recta perpendicular a la bisectriz de $\overline{AB}$.

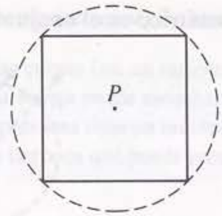


FIGURA 6.23

Dado el cuadrado con centro P en la figura 6.23, el lugar geométrico es el círculo que circunscribe al cuadrado.

Algunos problemas de lugares geométricos requieren bastante análisis, como se indica en el siguiente ejemplo.

LUGAR GEOMÉTRICO 6

Determina el lugar geométrico de los puntos en un plano que están a una unidad de un punto dado en el plano y a media unidad de una recta dada en el plano.

Caso 1: el lugar geométrico está vacío. Ve la figura 6.24.

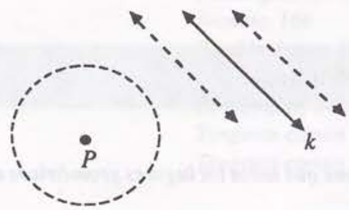


FIGURA 6.24

Caso 2: el lugar geométrico es sólo el punto Q. Ve la figura 6.25.

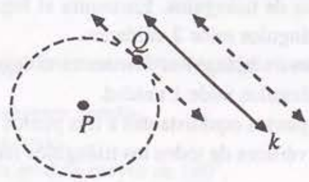


FIGURA 6.25

Caso 3: el lugar geométrico es el conjunto de dos puntos $\{Q, R\}$. Ve la figura 6.26.

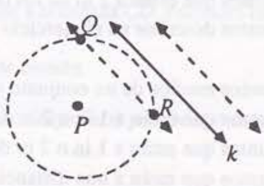


FIGURA 6.26

Caso 4: el lugar geométrico es el conjunto de tres puntos $\{Q, R, S\}$. Ve la figura 6.27.

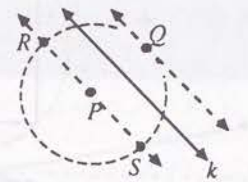


FIGURA 6.27

Caso 5: el lugar geométrico es el conjunto de cuatro puntos $\{Q, R, S, T\}$. Ve la figura 6.28.

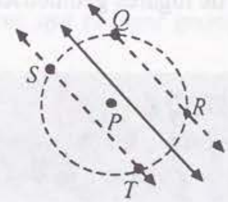


FIGURA 6.28

EJERCICIOS 6.6

En este conjunto de ejercicios se supone que todos los lugares geométricos están en el plano que satisface las condiciones dadas.

1. Construye un ángulo con lados $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{AC}$. Encuentra el lugar geométrico de los puntos, que no están en ext$\angle BAC$, equidistantes de $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{AC}$.
2. Construye un ángulo recto con lados $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{AC}$. Encuentra el lugar geométrico de los puntos, que no están en ext$\angle BAC$, equidistantes de $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{AC}$.
3. Sea $\overline{AB}$ el lado común de un conjunto de triángulos. Encuentra el lugar geométrico de los vértices opuestos a $\overline{AB}$ de estos triángulos, si la altura de todos los triángulos mide 2 unidades.
4. Sea $\overline{AB}$ el lado común de un conjunto de triángulos. Encuentra el lugar geométrico de los vértices opuestos a $\overline{AB}$ de estos triángulos, si la altura de todos los triángulos mide 1 unidad.
5. Encuentra el lugar geométrico de los puntos equidistantes a tres puntos dados no colineales.
6. Encuentra el lugar geométrico de los vértices de todos los triángulos rectángulos cuya hipotenusa es $\overline{MN}$.

En los ejercicios 7 y 8, traza rectas* m *y* n *que estén a 1 in de distancia entre sí.

7. Encuentra el lugar geométrico de los puntos equidistantes a m y a n.
8. Encuentra el lugar geométrico de los puntos que están a 2 in de m y a 3 in de n.
9. Encuentra el lugar geométrico de los puntos que están a 1 in de los dos puntos A y B (hay tres casos).
10. Encuentra el lugar geométrico de los puntos descritos en el ejercicio 1 si los puntos también deben estar a 2 in de un punto P. (¿Cuántos casos puedes hallar?)
11. Encuentra el lugar geométrico de los puntos medios de un conjunto de cuerdas paralelas en un círculo dado.
12. Encuentra el lugar geométrico de los puntos que están a 1 in o 2 in de un punto P.
13. Encuentra el lugar geométrico de los puntos que están a 1 in o 2 in de un círculo cuyo radio mide 3 in.
14. Encuentra el lugar geométrico de los puntos que están a una distancia dada de un triángulo.
15. Encuentra el lugar geométrico de los puntos que están a una distancia dada de un pentágono regular.

En los ejercicios 16 y 17 hay muchas respuestas posibles. Da algunos ejemplos característicos.

16. Un barco que se desplaza a lo largo de una costa irregular cuenta con un radiotransmisor portátil cuyo alcance es de 10 mi. Encuentra el lugar geométrico de los puntos sobre la costa en que puede escucharse la señal enviada desde el barco.

17. Un avión que vuela a altitud constante sobre una región montañosa tiene un radiotransmisor que no funciona bien que transmite a 30 000 ft. ¿Cuál es el lugar geométrico de los puntos en tierra en que puede escucharse la señal enviada desde el avión?

TÉRMINOS CLAVE

*Ángulo central de un círculo, **171***
*Ángulo inscrito de un círculo, **172***
*Arco, **171***
*Arco mayor, **171***
*Arco menor, **171***
*Centroide, **192***
*Círculo inscrito en un polígono, **163***
*Círculo que circunscribe a un polígono, **169***
*Círculos concéntricos, **161***
*Círculos congruentes, **167***
*Círculos tangentes externamente, **161***
*Círculos tangentes internamente, **161***
*Circuncentro, **192***
*Cortado, **171***
*Cuerda, **166***
*Diámetro, **166***
*Espiral, **193***
*Exterior de un círculo, **161***
*Incentro, **192***
*Interior de un círculo, **161***
*Lugar geométrico, **185***
*Medida de un arco, **171***
*Ortocentro, **192***
*Pie, **192***
*Polígono inscrito en un círculo, **169***
*Polígono que circunscribe a un círculo, **163***
*Punto de tangencia, **160***
*Rayo secante, **166***
*Rayo tangente, **160***
*Recta de Euler, **192***
*Recta de Simson, **192***
*Recta tangente, **160***
*Rectángulo dorado, **192***
*Secante, **166***
*Sección áurea, **192***
*Segmento tangente, **160***
*Semicírculo, **170***
*Tangente común externa, **161***
*Tangente común interna, **161***

EJERCICIOS DE REPASO

En la línea en blanco escribe la expresión* siempre, algunas veces *o* nunca, *según corresponda.

1. Dos círculos en un plano __________ tienen una tangente común.
2. Un círculo __________ puede inscribirse en un triángulo.
3. Un arco menor de un círculo __________ tiene una medida mayor de 180°.
4. Un diámetro de un círculo __________ es perpendicular a alguna cuerda del círculo.
5. __________ es posible construir un círculo que contenga tres puntos cualesquiera en el plano.
6. Una cuerda de un círculo __________ es más corta que un diámetro del círculo.
7. La medida de un ángulo inscrito en un arco menor de un círculo __________ es menor que 90°.
8. Una tangente común interna de dos círculos en un plano __________ es perpendicular al segmento de recta que une sus centros.
9. Si un diámetro corta un círculo en A y B es perpendicular a la cuerda $\overline{CD}$, entonces las tangentes del círculo en A y B __________ son paralelas a $\overline{CD}$.
10. Círculos concéntricos __________ tienen una tangente común.

Anota una* V *si la proposición es verdadera. Si es falsa, sustituye la(s) palabra(s) subrayada(s) a fin de obtener una proposición verdadera.

11. El segmento tangente que une los puntos de tangencia de una tangente común externa de dos círculos de radios distintos es <u>más corta</u> que el segmento que une los centros de los círculos.

12. Un punto está en el interior de, sobre o en el exterior de un círculo dependiendo de si su distancia desde el centro del círculo es mayor que, igual a o menor que el radio.
13. Un círculo circunscribe a un polígono si todos los lados de éste son tangentes al círculo.
14. En el mismo círculo o en círculos congruentes, si dos arcos mayores son diferentes, el arco de mayor medida tiene la cuerda más larga.
15. Si la longitud del segmento que une los centros de dos círculos en un plano es igual a la suma de sus radios, los círculos deben ser tangentes externamente.
16. Si las cuerdas $\overline{AB}$ y $\overline{CD}$ del círculo P se cortan en E, entonces $AE/CE = ED/EB$.
17. El arco de un círculo interceptado por un ángulo inscrito tiene una medida igual a la mitad de la medida del ángulo.
18. Una tangente es un segmento de recta cuyos puntos extremos están sobre un círculo.
19. Dos cuerdas en el mismo círculo o en círculos congruentes son congruentes si los arcos mayores correspondientes son congruentes.
20. Una tangente a un círculo puede contener una cuerda del círculo.

Contesta las siguientes cuestiones.

En los ejercicios 21 a 25, $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{AC}$ son rayos tangentes y $\overrightarrow{AD}$ es un rayo secante de $\odot P$.

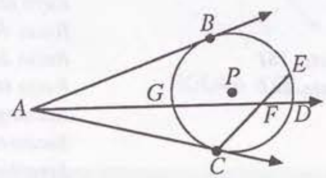


FIGURA PARA LOS EJERCICIOS 21 A 25

21. Si $AC = 10$, encuentra AB.
22. Si $AC = 12$ y $AG = GD$, encuentra AD.
23. Si $CF = 3$, $FE = 5$, y $GD = 8$, encuentra FD.
24. Si $m\widehat{GBE} = 160°$ y $m\widehat{CD} = 50°$, encuentra $m\angle EFD$.
25. Si $m\widehat{CG} = 40°$, $m\widehat{EC} = 65°$, y $m\widehat{ED} = 20°$, encuentra $m\angle CAG$.

Escribe una razón para cada uno de los ejercicios 26 a 33.

En los ejercicios 26 a 29, $\overrightarrow{PA}$ y $\overrightarrow{PB}$ son rayos tangentes de $\odot Q$, $AC = BC$, $\overline{QE} \perp \overline{AC}$ y $\overline{QF} \perp \overline{BC}$.

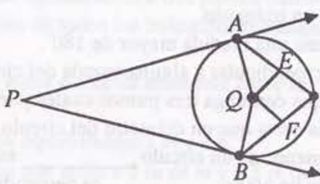


FIGURA PARA LOS EJERCICIOS 26 A 29

26. $m\widehat{AC} = m\widehat{BC}$
27. $EQ = QF$
28. $PA = PB$
29. $\overline{QB} \perp \overline{PB}$

En los ejercicios 30 a 33, $\overline{MN}$ es un diámetro de $\odot$P, $\overline{KL} \parallel \overline{NM}$, $\overline{PR} \perp \overline{LM}$ y $\overline{MN} \perp \overline{LT}$.

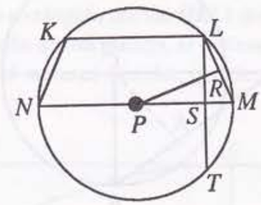


FIGURA PARA LOS EJERCICIOS 30 A 33

30. $m\widehat{KN} = m\widehat{LM}$
31. $m\widehat{LMN} = m\widehat{MNK}$
32. $LS = ST$
33. $PR > PS$

Demostraciones:

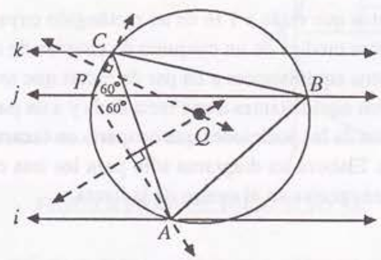


FIGURA PARA EL EJERCICIO 34

34. Haz la siguiente construcción y demuestra que los pasos conducen al resultado deseado. Dadas tres rectas paralelas, construye un triángulo equilátero cuyos vértices estén sobre estas rectas.

Construcción:
Paso 1. Sea P cualquier punto sobre la recta de enmedio j.
Paso 2. Traza $\overrightarrow{PA}$ y $\overrightarrow{PC}$, cada una de las cuales forma un ángulo de 60° con j.
Paso 3. Por los puntos A, P y C, construye un círculo Q. Sea $\odot Q \cap j = \{B\}$. Entonces, $\triangle ABC$ es el triángulo buscado.

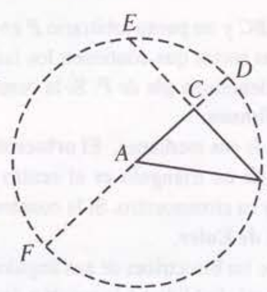


FIGURA PARA EL EJERCICIO 35

35. DADO: $\triangle ABC$, $\angle C$ es un ángulo recto.
DEMUESTRA: $(AB)^2 = (AC)^2 + (BC)^2$
PLAN DE LA DEMOSTRACIÓN: considera el círculo A y el teorema relacionado con segmentos sobre cuerdas que se cortan.

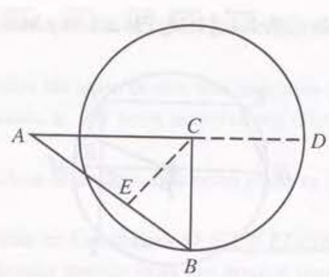


FIGURA PARA EL EJERCICIO 36

36. DADO: $\triangle ABC$, $\angle C$ es un ángulo recto
DEMUESTRA: $(AB)^2 = (AC)^2 + (BC)^2$
PLAN DE LA DEMOSTRACIÓN: considera el círculo C con radio CB y el teorema relacionado con segmentos sobre secantes.

Lugares geométricos: en los ejercicios 37 a 41, supón que todos los lugares geométricos están en el plano que satisface las condiciones dadas.

37. Encuentra el lugar geométrico de los puntos que están a 1 in de un rectángulo cuyas dimensiones son 2 por 3 in.
38. Encuentra el lugar geométrico de los puntos medios de un conjunto de cuerdas de un círculo dado de la misma longitud.
39. Encuentra el lugar geométrico de los puntos equidistantes a un par de rectas que se cortan.
40. Encuentra el lugar geométrico de los puntos equidistantes a una recta dada y a un punto dado que no está en la recta (parábola).
41. Encuentra el lugar geométrico de los puntos de las posiciones que ocuparía un escarabajo si estuviese sobre el rayo de una llanta que gira sobre una calle plana (trocoide). Elabora un diagrama sólo para los tres casos siguientes: 1) el escarabajo está en el borde, 2) está a la mitad del rayo y 3) se encuentra en el centro de la llanta.

Construcciones:

42. Traza un triángulo escaleno. Circunscribe un círculo en el triángulo e inscribe un círculo en el triángulo.
43. Dados A en $\odot P$ y $B \in \text{ext} \odot P$, construye una tangente de $\odot P$ en A y una tangente de $\odot P$ desde B.
44. Dados dos círculos que no se cortan (en un plano), cuyos radios son distintos, construye una tangente común interna y una tangente común externa de los círculos.
45. Dados $\overline{AB}$ y $\overline{CD}$, construye $\overline{DE}$ tal que $AB/DE = DE/CD$.
46. Traza un triángulo escaleno grande. Construye las alturas. Identifica como A, B y C los puntos de intersección de las alturas con los lados; como D, E y F, los puntos medios de los segmentos de recta que unen los vértices y el punto de intersección de las alturas, y como G, H e I, los puntos medios de los lados. Construye el círculo que contiene a estos puntos (círculo de nueve puntos).
47. Dados un círculo con un triángulo inscrito $\triangle ABC$ y un punto arbitrario P en el círculo tales que P no es un vértice de $\triangle ABC$, construye las tres perpendiculares desde P a las rectas que contienen los lados del triángulo. La intersección de cada una de estas perpendiculares con una de las rectas se denomina **pie** de P. Si la construcción se hace con precisión, los tres pies de P están en una sola recta, denominada **recta de Simson.**
48. El **centroide** de un triángulo es la intersección de sus medianas. El **ortocentro** de un triángulo es la intersección de las rectas que contienen a las alturas. El **circuncentro** de un triángulo es el centro del círculo que circunscribe al triángulo. Dado $\triangle ABC$, construye su centroide, su ortocentro y su circuncentro. Si la construcción se hace con precisión, los tres puntos están contenidos en una sola recta denominada **recta de Euler.**
49. El **incentro** de un triángulo es la intersección de las bisectrices de sus ángulos. Construye el incentro de un triángulo escaleno.
50. Si $A—P—B$ y $AB/AP = AP/PB$, entonces $\overline{AB}$ está dividido en la **sección áurea**. Construye $\overrightarrow{BC} \perp \overrightarrow{AB}$. Encuentra Q sobre $\overrightarrow{BC}$ tal que $BQ = AB/2$. Construye $\odot Q$ con radio BQ. Sea $\overrightarrow{AQ} \cap \odot Q = \{D, E\}$, donde $AD < AE$. Si $A—P—B$ tal que $AP = AD$, entonces $AB/AP = AP/PB$.
51. Si un segmento de recta se divide en la sección áurea como se describió en el ejercicio 50 y si un rectángulo tiene lados de longitud igual a AP y PB, entonces el rectángulo es un **rectángulo dorado (áureo)**. Construye un rectángulo de oro a partir de un segmento de recta de 3 in de longitud.

52. Aplica la definición del ejercicio 51 para construir un rectángulo dorado *ABCD* cuyo largo *AB* mida 5 in. Construye otro rectángulo dorado *BCEF* dentro de *ABCD*. Construye otro rectángulo dorado *BGHF* dentro de *BCEF*. Construye otro rectángulo dorado *FIJH* dentro de *BGHF*. Construye otro rectángulo dorado *HKLJ* dentro de *FIJH*. Une los puntos *A*, *E*, *G*, *I*, *K* con una curva suave como se ve en la figura. Si se continúa de esta manera, se obtiene una **espiral** estrechamente relacionada con las que se encuentran en la naturaleza. Un ejemplo es el molusco *nautilus*, que tiene una concha en espiral de muchas cámaras.

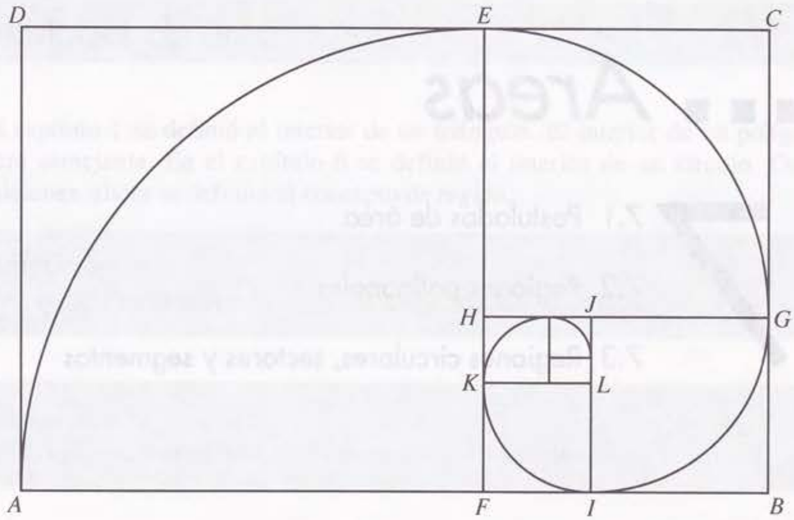


FIGURA PARA EL EJERCICIO 52

53. La sección áurea (ejercicio 50) puede utilizarse para construir un pentágono regular o un decágono regular inscrito en un círculo. Traza un círculo con centro *A* y radio $\overline{AB}$, y divide el radio en la sección áurea en el punto *P*. El segmento $\overline{BC} \cong \overline{AP}$ es el lado del decágono regular inscrito en el círculo *A*. Una los vértices alternos del decágono a fin de construir el pentágono regular inscrito en el círculo *A*. Se puede construir una estrella de cinco picos si se conectan los vértices alternos del pentágono regular.

54. Construye un pentágono regular circunscrito en un círculo. Consulta el ejercicio 53.

7 Áreas

Stock Montage, Inc.

ARQUÍMEDES (287?–212 a.C.)

NOTA HISTÓRICA *Arquímedes ha sido llamado el "gran geómetra". Estaba especialmente interesado en problemas prácticos. Mientras se bañaba descubrió un método para determinar el peso específico de un objeto. Se dice que saltó de la bañera y corrió desnudo por las calles gritando "Eureka" (lo he encontrado). Hizo aproximaciones para π aplicando razones geométricas y armónicas. Arquímedes calculó que π está entre 3 10/71 y 3 10/70, lo cual constituye una aproximación bastante extraordinaria para su época.*

Hasta ahora, en este libro se han analizado conceptos de medida de segmentos de recta y medida de ángulos, pero no se ha abordado la medida de regiones. En este capítulo se estudiará el concepto de regiones y se presentarán postulados y teoremas relacionados con las áreas de regiones (las regiones incluyen las formadas por polígonos, círculos y porciones de círculos).

7.1 Postulados de área

En el capítulo 1 se definió el interior de un triángulo. El interior de un polígono se define de manera semejante. En el capítulo 6 se definió el interior de un círculo. Con base en estas definiciones, ahora se definirá el concepto de *región*.

Definición

Una **región poligonal** es la unión de un polígono y su interior.

Definición

Una **región circular** es la unión de un círculo y su interior.

Definición

Una **región** es:

1. La unión de un número finito de regiones poligonales o circulares

   o

2. La intersección de un número finito de regiones poligonales y circulares tales que la intersección de sus interiores es no vacía,

   o

3. La unión de un número finito de combinaciones de 1 o 2.

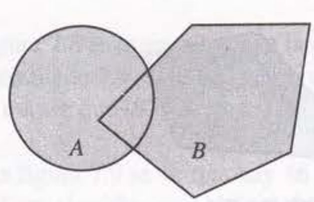


FIGURA 7.1

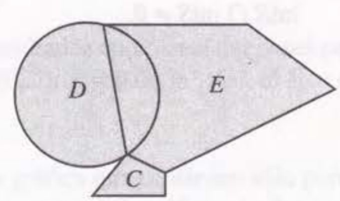


FIGURA 7.2

Es posible proporcionar definiciones más generales de regiones, como las regiones infinitas, pero para los objetivos de este libro basta la anterior. En la figura 7.1 se observa que tanto $A \cup B$ como $A \cap B$ son regiones.

En cambio, en la figura 7.2 se aprecia que si bien $C \cup (D \cap E)$ es una región, $C \cap (D \cup E)$ no lo es, ya que $C \cap (D \cup E)$ no contiene región circular o poligonal alguna. [Puedes advertir que $C \cap [D \cup E]$ es un segmento de recta.]

Postulado 7.1 **(Postulado de área)** A cada región corresponde exactamente un número real positivo.

El número mencionado en el postulado precedente es el **área** de la región. Cuando se analiza el área de una región particular, como una región hexagonal, para abreviar se dice "el área del hexágono". El área de un polígono $ABCDE$ se denota por área$ABCDE$ y el área de un círculo P, por área$\odot P$.

Postulado 7.2 Si dos triángulos son congruentes, entonces sus áreas son iguales.

EJEMPLO 1 Si área$ABC = 10$ y $\triangle ABC \cong \triangle DEF$, encuentra área$DEF$.

Solución Por el postulado 7.2, área$DEF = 10$. ■

Postulado 7.3 **(Postulado de adición de áreas)** Si la intersección de los interiores de dos regiones es vacía, entonces el área de la unión de las regiones es igual a la suma de las áreas de las regiones.

EJEMPLO 2 En las figuras 7.3 y 7.4, halla área$(R \cup S)$ si área$R = 17$ y área$S = 12$.

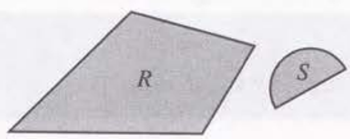


FIGURA 7.3

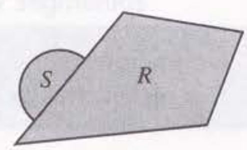


FIGURA 7.4

Solución En ambos casos, por el postulado 7.3,

$$\text{área}(R \cup S) = 17 + 12 = 29. \quad ■$$

En la proposición del postulado de adición de áreas se requiere que la intersección de los dos interiores de las regiones sea vacía. A partir de la figura 7.5 debe resultar evidente que el área de la región R más el área de la región S no es igual al área de la región $R \cup S$. En particular, área $(R \cup S)$ = área$R$. Esto no contradice la proposición del postulado de adición de áreas, ya que int$R \cap$ int$S \neq \emptyset$.

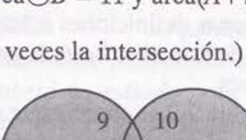


FIGURA 7.5

EJEMPLO 3 En la figura 7.6, si área$\odot A = 10$, área$\odot B = 11$ y área$(A \cap B) = 1$, determina área$(A \cup B)$.

Solución Área$(A \cup B) = 20$. (No cuentes dos veces la intersección.) ■

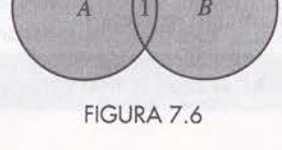


FIGURA 7.6

Postulado 7.4 ($A = l^2$) El área de un cuadrado es igual al cuadrado de la longitud de su lado.

Dado un cuadrado cuyos lados miden una unidad de longitud cada uno, se dice que el área del cuadrado es una **unidad cuadrada**; por ejemplo, un cuadrado cuyos lados miden 1 kilómetro de largo cada uno tiene un área de 1 kilómetro cuadrado (1 km^2). El área de un cuadrado que tiene un lado de 1 milla de largo es una milla cuadrada (1 mi^2).

EJEMPLO 4 Encuentra el área de un cuadrado que tiene un lado de 3 pulgadas de largo.

Solución El área del cuadrado es $(3 \text{ in})^2 = 9 \text{ in}^2$. ■

Las unidades en la solución del ejemplo 4 son pulgadas cuadradas, lo que para abreviar se escribe como in^2.

El postulado de área establece que a cada región corresponde exactamente un número real positivo. Este único número real positivo depende de la unidad usada. Si la longitud del lado de un cuadrado mide 12 pulgadas, también puede afirmarse que la longitud del lado del cuadrado mide 1 pie. Así, el área del cuadrado es $(12 \text{ in})^2 = 144 \text{ in}^2$; o bien, $(1 \text{ ft})^2 = 1 \text{ ft}^2$. La sustitución de unidades equivalentes no viola el postulado de la regla o el postulado de área.

Las regiones en situaciones reales no siempre pueden definirse fácilmente con fórmulas; quizá sea necesario aproximar el área de tales regiones. En el ejemplo 5 se muestra cómo aproximar el área de una región irregular usando la fórmula para calcular el área de un cuadrado.

EJEMPLO 5 Aproxima el área de la región de la figura 7.7. Supón que el lado de cada cuadrado mide 0.2 pulgadas.

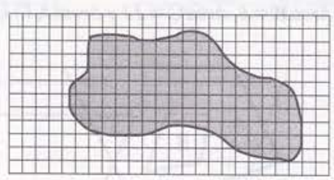


FIGURA 7.7

Solución En la figura 7.8 se muestra que en la región hay 87 cuadrados completos del papel para gráficas. Por el postulado 7.4, el área de cada cuadrado es de $(0.2 \text{ in})^2 = 0.04 \text{ in}^2$. Así, el área de la región dada es mayor que $(87)(0.04) = 3.48 \text{ in}^2$. ■

En la figura 7.9 se ve que hay 46 cuadrados de la gráfica que contienen sólo porciones de la región. Esto significa que el área de la región es menor que 87 + 46 cuadrados completos, de modo que el área de la región dada es menor que $(133)(0.04) = 5.32 \text{ in}^2$.

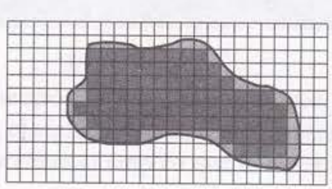


FIGURA 7.8

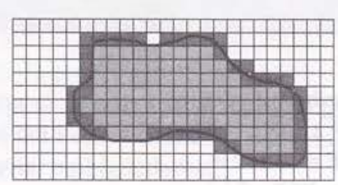


FIGURA 7.9

En consecuencia, la región tiene definitivamente un área entre 3.48 in^2 y 5.32 in^2. Una manera de obtener una aproximación numérica simple al área de la región es considerar el promedio de estos números, con lo que se obtiene $(3.48 + 5.32)/2 = 4.40$ in^2. Si se utiliza papel para gráficas con cuadrados más pequeños, es posible obtener una estimación mejor.

EJERCICIOS 7.1

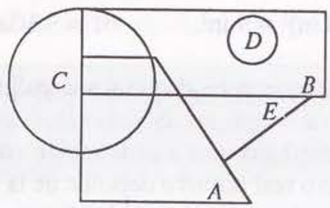


FIGURA PARA LOS EJERCICIOS 1 A 6

En los ejercicios 1 a 6, ¿cuáles conjuntos son regiones? ¿Por qué?

1. $C \cup D$
2. $A \cap B$
3. $B \cap E$
4. $(A \cup B) \cap D$
5. $A \cap B \cap C$
6. $(B \cap E) \cup (A \cap E)$

En los ejercicios 7 a 12, si área*A = *10, área*B = *6, área*C = *12 y área*(A ∩ C) = *2, encuentra el área de cada una de las regiones.

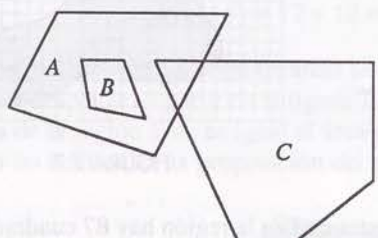


FIGURA PARA LOS EJERCICIOS 7 A 12

7. $A \cap B$
8. $A \cup B$
9. $B \cup C$
10. $A \cup C$
11. $B \cap A \cap C$
12. $A \cup B \cup C$
13. DADO: cuadrado $ABCD$,
$\overline{EF} \perp \overline{CD}$,
$DF = CF = 2$ in,
área$DEF = 7$ in^2
Encuentra área$ABCED$.

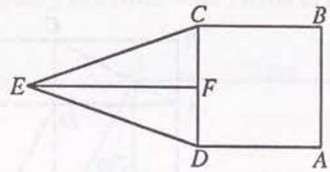


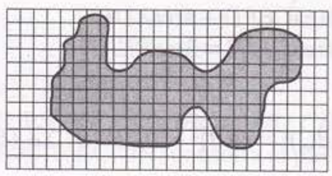
FIGURA PARA EL EJERCICIO 13

En los ejercicios 14 a 17, encuentra la longitud de un lado y de una diagonal de cada cuadrado cuya área se proporciona.

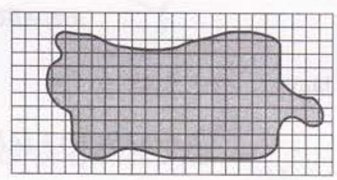
14. 25
15. 18 in^2
16. 7 ft^2
17. 10 cm^2
18. Encuentra el área de un cuadrado si su diagonal mide $10\sqrt{2}$ de longitud.
19. Si la longitud de un lado de un cuadrado es tres veces la longitud de un lado de un cuadrado dado, ¿cuál es la razón del área del cuadrado dada al área del otro cuadrado?
20. Encuentra la longitud del lado de un cuadrado si la cantidad de pies de su perímetro es igual a la cantidad de pies cuadrados de su área.
21. Si la diagonal de un cuadrado cuya área es de 36 es el lado de un segundo cuadrado, encuentra el área del segundo cuadrado.

En los ejercicios 22 y 23 aproxima el área de las regiones dadas. Supón que el lado de cada cuadrado mide 0.2 in.

22.



23.



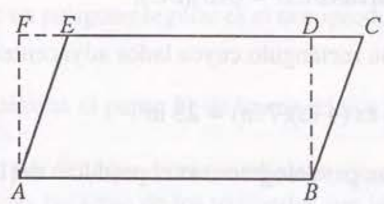


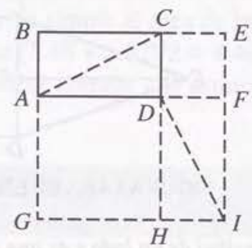
FIGURA PARA EL EJERCICIO 24

24. Demuestra que el área de $\square ABCE$ es igual al área de $\square ABDF$.
25. Demuestra que dos polígonos congruentes tienen áreas iguales.

7.2 Regiones poligonales

En esta sección se analizarán métodos para encontrar el área de varias regiones poligonales. A menudo, el siguiente teorema se plantea en términos del largo y el ancho de un rectángulo, pero aquí se prefiere el empleo que se muestra a fin de evitar ambigüedades.

Teorema 7.1 *($A = la$)* El área de un rectángulo es el producto del largo de cualquier lado y la longitud de la altura a ese lado.



DADO: $\square ABCD$
DEMUESTRA: área$ABCD = (AB)(BC)$
DEMOSTRACIÓN: sean E, F, G, H e I puntos tales que $B—C—E$, $CE = AB$, $A—D—F$, $DF = AB$, $B—A—G$, $AG = BC$, $C—D—H$, $DH = BC$, $E—F—I$ y $FI = BC$. Entonces es obvio que $CEFD$, $ADHG$ y $BEIG$ son cuadrados. Así, área $CEFD = (AB)^2$, área$ADHG = (BC)^2$ y

$$\text{área}BEIG = (AB + BC)^2 = (AB)^2 + 2(AB)(BC) + (BC)^2.$$

Por el postulado 7.2, áreaABC = áreaCDA = áreaIHD = áreaDFI; luego, por el postulado de adición de áreas, área$ABCD$ = área$DFIH$. Por el postulado de adición de áreas, también se tiene

$$\text{área}ABCD + \text{área}CEFD + \text{área}ADHG + \text{área}DFIH = \text{área}BEIG.$$

Por tanto,

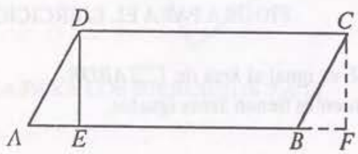
$$2(\text{área}ABCD) + (AB)^2 + (BC)^2 = (AB)^2 + 2(AB)(BC) + (BC)^2.$$

En consecuencia, área$ABCD = (AB)(BC)$.

EJEMPLO 1 Encuentra el área de un rectángulo cuyos lados adyacentes tienen longitudes de 4 y 7 pulgadas.

Solución El área del rectángulo es (4 in)(7 in) = 28 in^2. ■

Teorema 7.2 ($A = la$) El área de un paralelogramo es el producto del largo de cualquier lado y la longitud de la altura a ese lado.



DADO: $\square ABCD$
$\overline{DE} \perp \overline{AB}$
DEMUESTRA: área$ABCD = (AB)(DE)$
DEMOSTRACIÓN: sea F un punto tal que $A—B—F$ y $\overleftrightarrow{CF} \parallel \overleftrightarrow{DE}$. Es evidente que $\overline{BF} \perp \overline{CF}$. Por el teorema 3.8, $\angle A \cong \angle CBF$. Por el corolario del teorema 3.15, $AD = BC$. Así, por HA = HA se tiene que $\triangle ADE \cong \triangle BCF$. Por tanto, debido al postulado 7.2, áreaADE = áreaBCF. Por el postulado de adición de áreas, área$ABCD$ = áreaADE + área$DEBC$. Entonces, área$ABCD$ = áreaBCF + área$DEBC$ = área$DEFC$. Pero $DEFC$ es un rectángulo y así, por el teorema 7.1, área$ABCD$ = área$DEFC = (EF)(DE)$. Resulta evidente que $EF = AB$. En consecuencia, área$ABCD = (AB)(DE)$.

EJEMPLO 2 Si $CD = 15$ pies, $AD = 7$ pies y $m\angle DAE = 60°$, halla el área del paralelogramo de la figura 7.10.

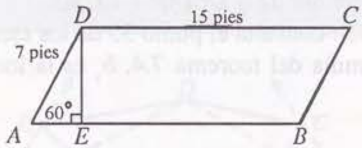
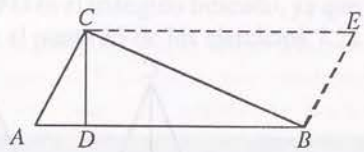


FIGURA 7.10

Solución Se encuentra que $AB = 15$ ft; pero es necesario determinar DE. Al aplicar el corolario del teorema 5.6 resulta que $DE = 7\sqrt{3}/2$ ft. Así,

$$\text{área}ABCD = (15 \text{ ft})(7\sqrt{3}/2 \text{ ft}) = 105\sqrt{3}/2 \text{ ft}^2.$$ ■

Teorema 7.3 $(A = la/2)$ El área de un triángulo es el semiproducto de la longitud de cualquier lado y la longitud de la altura a ese lado.



DADO: $\triangle ABC$, $\overline{CD} \perp \overline{AB}$

DEMUESTRA: $\text{área}ABC = AB \cdot CD/2$

DEMOSTRACIÓN: consulta el punto 30 de los ejercicios 7.2.

Corolario 1 $(A = ap/2)$ El área de un polígono regular es el semiproducto de la longitud de su apotema y su perímetro.

DEMOSTRACIÓN: consulta el punto 31 de los ejercicios 7.2.

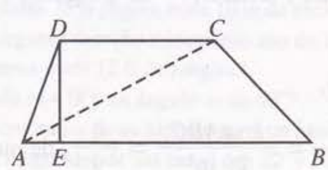
Corolario 2 Si en dos triángulos un par de lados correspondientes son congruentes y las alturas a esos lados son congruentes, entonces las áreas de los triángulos son iguales.

DEMOSTRACIÓN: consulta el punto 32 de los ejercicios 7.2.

Definición

Una **altura de un trapezoide** es un segmento perpendicular a las dos bases del trapezoide, con puntos extremos en las bases.

Teorema 7.4 $[A = a(b_1 + b_2)/2]$ El área de un trapezoide es el semiproducto de la longitud de su altura y la suma de las longitudes de sus bases.



DADO: $ABCD$ con $\overline{AB} \parallel \overline{CD}$,
$\overline{DE} \perp \overline{AB}$

DEMUESTRA: área$ABCD = DE(AB + CD)/2$

DEMOSTRACIÓN: consulta el punto 33 de los ejercicios 7.2.

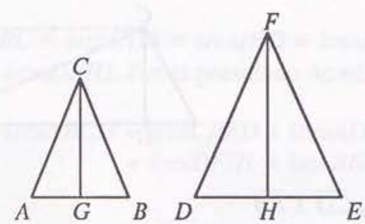
NOTA: en la fórmula del teorema 7.4, b_1 es la longitud de una base y b_2 es la longitud de la otra base.

EJEMPLO 3 Encuentra el área de un trapezoide con bases de longitud 4 y 7 pulgadas y una altura de 6 pulgadas de longitud.

Solución El área del trapezoide es

$$(6 \text{ in})(4 \text{ in} + 7 \text{ in})/2 = (6 \text{ in})(11 \text{ in})/2 = 33 \text{ in}^2.$$

Teorema 7.5 Si dos triángulos son semejantes, entonces la razón de sus áreas es igual al cuadrado de la razón de las longitudes de dos lados correspondientes cualesquiera *o* al cuadrado de la razón de las longitudes de dos alturas correspondientes cualesquiera.



DADO: $\triangle ABC \sim \triangle DEF$
$\overline{CG} \perp \overline{AB}, \overline{FH} \perp \overline{DE}$

DEMUESTRA: $\dfrac{\text{área}ABC}{\text{área}DEF} = \left(\dfrac{AB}{DE}\right)^2 = \left(\dfrac{CG}{FH}\right)^2$

DEMOSTRACIÓN: Según el teorema 7.3, área$ABC = AB \cdot CG/2$ y área$DEF = DE \cdot FH/2$. Por el ejercicio 13 de los ejercicios 7.3, $\dfrac{CG}{FH} = \dfrac{AB}{DE}$.

En consecuencia,

$$\frac{\text{área}ABC}{\text{área}DEF} = \frac{AB \cdot CG/2}{DE \cdot FH/2} = \frac{AB}{DE} \cdot \frac{CG}{FH} = \frac{AB}{DE} \cdot \frac{AB}{DE} = \left(\frac{AB}{DE}\right)^2.$$

También,

$$\frac{AB}{DE} \cdot \frac{CG}{FH} = \frac{CG}{FH} \cdot \frac{CG}{FH} = \left(\frac{CG}{FH}\right)^2.$$

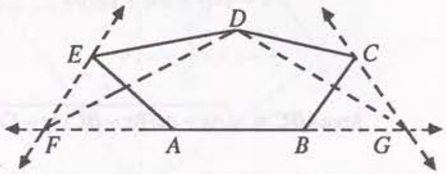
EJEMPLO 4 Si $\triangle ABC \sim \triangle DEF$, área$DEF = 29$ pulgadas cuadradas y $AB/DE = 2/3$, encuentra el área de $\triangle ABC$.

Solución Por el teorema 7.5,

$$\frac{\text{área}ABC}{\text{área}DEF} = \frac{\text{área}ABC}{29 \text{ in}^2} = \frac{4}{9}, \text{ de modo que área}ABC = \frac{116}{9} \text{ in}^2.$$

CONSTRUCCIÓN 7.1

Construye un triángulo de la misma área que un polígono dado.



DADO: polígono $ABCDE$

CONSTRUYE: $\triangle DFG$ de modo que áreaDFG = área$ABCDE$.

Paso 1. Traza $\overleftrightarrow{AB}$. Construye una paralela a $\overleftrightarrow{AD}$ por E y una paralela a $\overleftrightarrow{BD}$ por C aplicando la construcción 3.1. Sean F y G los puntos de intersección respectivos de las rectas paralelas con $\overleftrightarrow{AB}$.

Paso 2. Traza $\overline{DF}$ y $\overline{DG}$. $\triangle DFG$ es el triángulo buscado, ya que áreaBCD = áreaBDG y áreaADE = áreaADF (consulta el punto 35 de los ejercicios 7.2).

EJERCICIOS 7.2

Encuentra el área de cada polígono en los ejercicios 1 a 6.

1. $\triangle ABC$; $\overline{CD} \perp \overline{AB}$, A—D—B, $AB = 5$, $CD = 4$.

2. $\square ABCD$; $\overline{DE} \perp \overline{AB}$, A—E—B, $AB = 8$, $DE = AB/3$.

3. $\square ABCD$; $AB = 3CD$, el perímetro de $ABCD$ es 40.

4. El trapezoide $ABCD$; $\overline{AB} \parallel \overline{CD}$, $\overline{CE} \perp \overline{AB}$, A—E—B, $AB + CD + CE = 34$, $CE/CD = 1/3$, $CD/AB = 2/3$.

5. El trapezoide $ABCD$; $\overline{BC} \parallel \overline{AD}$, $\overline{CD} \perp \overline{AD}$, $BC = 10$, $AD = 12$, $m\angle A = 45°$.

6. $\triangle KLM$; $\triangle KLM \sim \triangle ABC$, $\overline{KL}$ corresponde a $\overline{AB}$, $AB/KL = 3/10$, áreaABC = 10.

7. Encuentra el área de una cara de una tabla rectangular de 70 in de largo y 5 in de ancho.

8. Encuentra el área de un terreno de futbol en ft^2 si el terreno mide 160 ft de ancho y 100 yd de largo. ¿Cuál es el área en yd^2?

9. Si la longitud de un lado de un rectángulo es 12 y el área es 90, encuentra la longitud de un lado adyacente.

10. Si el área de un rectángulo es 150 ft^2 y la longitud de un lado es tres veces la longitud de uno de sus lados adyacentes, ¿Cualés son las dimensiones del rectángulo?

11. Se garantiza que con una lata de cierta pintura se cubren 80 ft^2. Si se quiere pintar las paredes y el techo de una habitación de 12 por 15 ft, ¿cuántas latas de pintura deben comprarse? Las paredes miden 8 ft 4 in de alto, y hay dos ventanas cuyas dimensiones son de 4 por 6 ft cada una.

12. Contesta el ejercicio 11 si se quiere pintar las paredes y el techo de una habitación de 20 por 30 ft y se garantiza que una lata de pintura cubre 65 ft^2.

13. La página de un libro mide 7.5 in de ancho por 9.5 in de alto. Si el margen superior es de 1 in, el margen inferior es de 0.75 in, el margen derecho es de 0.75 in y el margen izquierdo es de 2 in, ¿cuál es el área de la porción impresa de la página?

14. Contesta el ejercicio 13 utilizando las siguientes medidas. Si la página mide 10 in de ancho por 14 in de alto, el margen superior es de 1.5 in, el margen inferior es de 2.5 in, y los márgenes derecho e izquierdo son de 1.25 in cada uno.

15. Encuentra el área de un hexágono regular si su apotema mide 12 ft de longitud.

16. ¿Cuál es el área de un rombo si la longitud de un lado es 4 in y un ángulo es de 60°?

17. Encuentra el área de un triángulo rectángulo si las longitudes de su hipotenusa y un cateto son 13 y 7, respectivamente.

18. Halla la longitud de la altura de un trapezoide si las longitudes de sus bases son 22 y 30 ft y su área es de 273 ft^2.

La **ley de Herón** *puede aplicarse para encontrar el área de un triángulo si se desconocen las longitudes de las alturas del triángulo, en el supuesto de que* **están** *dadas las longitudes de los lados del triángulo. (Su demostración requiere pasos algebraicos complicados, por lo que no se proporciona en este texto.) En* $\triangle$ **ABC**, *sea*

$$s = (AB + BC + CA)/2$$

Entonces:

$$\text{área}ABC = \sqrt{s(s-AB)(s-BC)(s-CA)}\,.$$

Aplica la ley de Herón para encontrar el área del triángulo en los ejercicios 19 a 22, si se proporcionan las longitudes de los lados.

19. 6, 7, 11
20. 4, 7, 9
21. 1, 2, 3 (interpreta el resultado).
22. 3, 8, 5 (interpreta el resultado).

La **fórmula de Brahmagupta** *sirve para hallar el área de un cuadrilátero cuyos vértices están en un círculo y si se conocen las longitudes de los lados. Un requisito alternativo equivalente a que los vértices estén en un círculo es que los ángulos opuestos del cuadrilátero sean suplementarios. En el cuadrilátero* **ABCD**, *sea*

$$s = (AB + BC + CD + DA)/2.$$

Entonces:

$$\text{área}ABCD = \sqrt{(s-AB)(s-BC)(s-CD)(s-DA)}\,.$$

Con la fórmula de Brahmagupta encuentra el área del cuadrilátero en los ejercicios 23 y 24 si las longitudes de los lados se proporcionan en el orden **AB, BC, CD, DA.**

23. 2, 4, 6, 4
24. 3, 5, 8, 5
25. Traza un polígono irregular *ABCDE* y construye un triángulo cuya área sea igual a la del polígono.
26. Traza un polígono irregular *ABCDEF* y construye un triángulo cuya área sea igual a la del polígono.

En los ejercicios 27 y 28, traza un paralelogramo y construye un triángulo cuya área sea igual a la del paralelogramo.

27. Usa la construcción 7.1.
28. Encuentra otro método de construcción usando un lado del paralelogramo como uno de los lados del triángulo.
29. Demuestra que el área de un triángulo rectángulo es el semiproducto de las longitudes de sus catetos.
30. Demuestra el teorema 7.3.
31. Demuestra el corolario 1 del teorema 7.3.
32. Demuestra el corolario 2 del teorema 7.3.
33. Demuestra el teorema 7.4.
34. Escribe y demuestra un teorema para polígonos comparable al teorema 7.5.
35. En la construcción 7.1, demuestra que el área del triángulo es igual al área del polígono.

Muchas demostraciones del teorema de Pitágoras (teorema 5.5) se basan en el área. En los ejercicios 36 a 39 se presentan algunas de estas demostraciones.

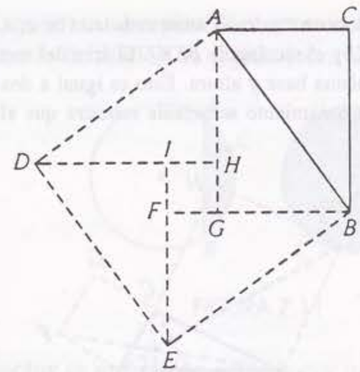


FIGURA PARA EL EJERCICIO 36

36. DADO: $\triangle ABC$, $\angle C$ es un ángulo recto
DEMUESTRA: $(AB)^2 = (AC)^2 + (BC)^2$
PLAN DE LA DEMOSTRACIÓN: el área $\square ADEB$ es igual a la suma de las áreas de cuatro triángulos, cada uno congruente a $\triangle ABC$, más el área de $\square FGHI$.

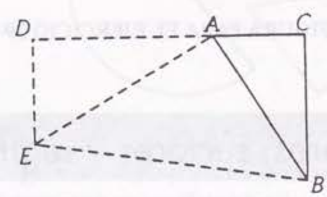


FIGURA PARA EL EJERCICIO 37

37. (Demostración del presidente Garfield)
DADO: $\triangle ABC$, $\angle C$ es un ángulo recto
DEMUESTRA: $(AB)^2 = (AC)^2 + (BC)^2$
PLAN DE LA DEMOSTRACIÓN: sea $D—A—C$, $DA = CB$, $\overline{DE} \parallel \overline{CB}$ y $DE = AC$. Entonces el área del trapezoide $BCDE$ es igual al área de $\triangle BAE$ más dos veces el área de $\triangle ABC$.

38. DADO: $\triangle ABC$, $\angle C$ es un ángulo recto
DEMUESTRA: $(AB)^2 = (AC)^2 + (BC)^2$
PLAN DE LA DEMOSTRACIÓN: construye el cuadrado $ABFE$ y extiende CA hasta D y CB hasta G de modo que $D—E—F—G$.

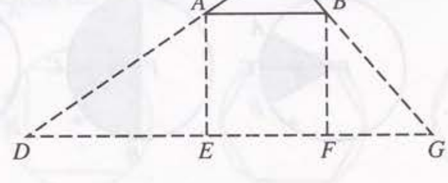


FIGURA PARA EL EJERCICIO 38

39. (Demostración de Euclides)
DADO: $\triangle ABC$, $\angle C$ es un ángulo recto
DEMUESTRA: $(AB)^2 = (AC)^2 + (BC)^2$

PLAN DE LA DEMOSTRACIÓN: considera un cuadrado sobre cada lado de $\triangle ABC$, y $\overline{CK} \perp \overline{DE}$. El área de $\square ABED$ es igual a la suma de las áreas del rectángulo $ADKJ$ y el rectángulo $BEKJ$. El área del rectángulo $ADKJ$ es igual a dos veces el área de $\triangle ADC$ porque ambas figuras tienen la misma base y altura. Esto es igual a dos veces el área de $\triangle ABI$ (por congruencia), lo que es igual al área de $\square ACHI$. Un razonamiento semejante muestra que el área del rectángulo $BEKJ$ es igual al área de $\square BFGC$.

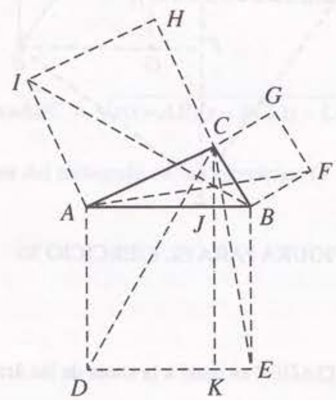


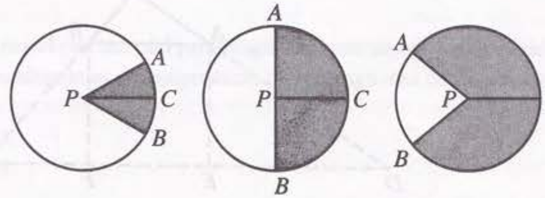
FIGURA PARA EL EJERCICIO 39

7.3 Regiones circulares, sectores y segmentos

En esta sección se analizarán los métodos para encontrar áreas de regiones circulares, sectores y segmentos. Se comenzará con la definición de sector y segmento.

Definición

Un **sector** es una región que es la unión de:
a. $\widehat{ACB}$ de $\odot P$, donde $\widehat{AC} \cong \widehat{CB}$,
b. los radios $\overline{PA}$, $\overline{PB}$ y $\overline{PC}$,
c. int $\odot P \cap$ (int$\angle APC \cup$ int$\angle BPC$).



Definición

Un **segmento de círculo** es la unión de $\widehat{ACB}$, la cuerda $\overline{AB}$ y los puntos del interior del círculo que están en el mismo lado de $\overline{AB}$ que el punto C.

En la figura 7.11, se muestran ejemplos de segmentos. Tú puedes demostrar que los sectores y los segmentos satisfacen la definición de región (consulta el punto 23 de los ejercicios 7.3).

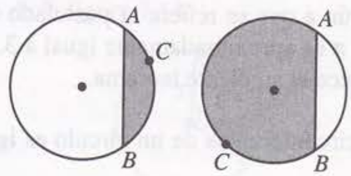
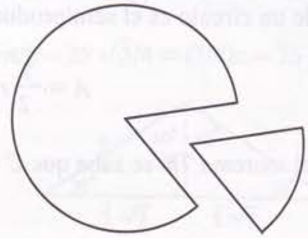
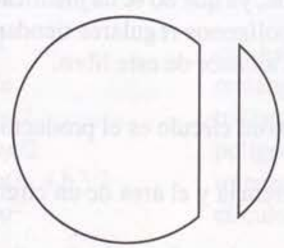


FIGURA 7.11

¡PRECAUCIÓN! Un **sector** es una región acotada por un arco de un círculo y el ángulo central que corta al arco. Su forma se parece a un pedazo de pizza, ya sea una rebanada o lo que queda después de cortar un trozo.



Un **segmento** es una región acotada por una cuerda de un círculo y el arco cortado por la cuerda. Si se practica un corte recto a una galleta circular, entonces cada fragmento es un segmento.



Considera la secuencia de polígonos regulares inscritos en la figura 7.12, desde a) hasta c). A medida que aumenta la cantidad de lados del polígono, el perímetro tiende a un valor límite. Este valor es la **circunferencia** del círculo.

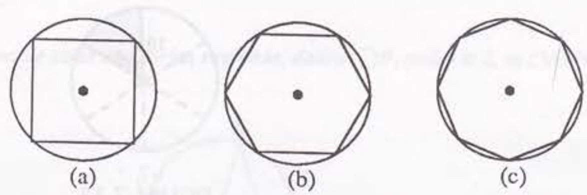


FIGURA 7.12

Se ha observado que la siguiente relación se cumple para todos los círculos —como se indicó en la nota histórica de este capítulo, Arquímedes conocía la importancia de este hecho.

Postulado 7.5 La razón de la circunferencia del círculo a su diámetro es la misma para cualquier círculo.

La razón común a que se refiere al postulado 7.5 es un número irracional denotado con el símbolo π, donde π es aproximadamente igual a 3.1416; por lo tanto, al aplicar al postulado 7.5 fácilmente se deduce el siguiente teorema.

Teorema 7.6 ($C = 2\pi r$) La circunferencia de un círculo es igual al doble del producto de π y el radio del círculo.

En la figura 7.12 se ve que a medida que aumenta el número de lados del polígono, las regiones poligonales formadas se aproximan a la región circular; entonces, el valor límite de las áreas de las regiones poligonales es igual al área de la región circular. También hay que hacer notar que las longitudes de las apotemas de los polígonos regulares tienden al radio del círculo. Puesto que el área de un polígono regular es el semiproducto de la longitud de su apotema y el perímetro, se concluye que el área de un círculo es el semiproducto de su radio y su circunferencia. Así,

$$A = \frac{1}{2} rC.$$

Sin embargo, por el teorema 7.6 se sabe que $C = 2\pi r$. Al sustituir esto en la ecuación previa se obtiene

$$A = \frac{1}{2} r(2\pi r) = \pi r^2.$$

Se ha presentado el argumento que se utilizó en la demostración del teorema 7.7; en realidad no es una demostración, ya que no se ha justificado lo suficiente la proposición "las longitudes de las apotemas de los polígonos regulares tienden al radio del círculo". La demostración de esta proposición rebasa el alcance de este libro.

Teorema 7.7 ($A = \pi r^2$) El área de un círculo es el producto de π y el cuadrado del radio del círculo.

EJEMPLO 1 Encuentra la circunferencia y el área de un círculo que mide 7 pulgadas de radio.

Solución Por el teorema 7.6, su circunferencia $C = 2\pi$ (7 in) = 14π in. Por el teorema 7.7, su área $A = \pi(7 \text{ in})^2 = 49\pi \text{ in}^2$. ■

EJEMPLO 2 Encuentra el área del sector que se muestra en la figura 7.13.

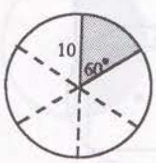


FIGURA 7.13

Solución Al aplicar el teorema 7.7 resulta que el área de todo el círculo es 100π. Es fácil darse cuenta que el área del sector es $100\pi/6 = 50\pi/3$, ya que seis sectores de la misma área forman la región circular completa. ■

En general, el área de un sector de radio r y un ángulo central que mide $a°$, es igual a $\pi ar^2/360$.

EJEMPLO 3 Encuentra el área del segmento de la figura 7.14.

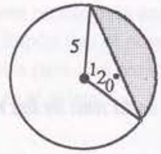


FIGURA 7.14

Solución Para hallar el área del segmento, el área del triángulo se resta del área del sector. El área del sector es $\pi(120)(5)^2/360 = 25\pi/3$. El área del triángulo es $(5\sqrt{3}/2)(5/2) = 25\sqrt{3}/4$. (Observa la figura 7.15.) Así, el área del segmento es ■

$$25\pi/3 - 25\sqrt{3}/4 = (100\pi - 75\sqrt{3})/12.$$

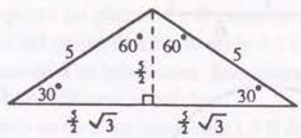


FIGURA 7.15

¡PRECAUCIÓN! Cada fórmula de área debe memorizarse, así como la figura geométrica a que se aplica. A continuación se presentan las fórmulas más importantes de este capítulo:

$A = l^2$	cuadrado
$A = la$	rectángulo, paralelogramo
$A = la/2$	triángulo
$A = ap/2$	polígono regular
$A = a(b_1 + b_2)/2$	trapezoide
$A = \pi r^2$	círculo

EJERCICIOS 7.3

En los ejercicios 1 a 6, encuentra el área de cada una de las regiones, dados ⊙P, radio = 2, m∠MPN = 120°.

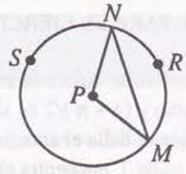


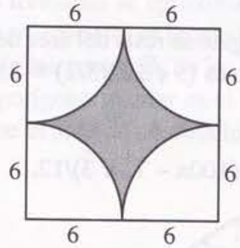
FIGURA PARA LOS EJERCICIOS 1 A 6

1. $\odot P$
2. Sector *PMRN*
3. Sector *PMSN*
4. $\triangle MNP$
5. Segmento *MRN*
6. Segmento *MSN*

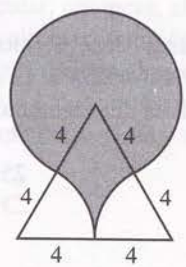
En los ejercicios 7 a 12, halla el perímetro de cada una de las regiones dadas en los ejercicios 1 a 6.

En los ejercicios 13 a 16, encuentra el área de cada una de las regiones sombreadas.

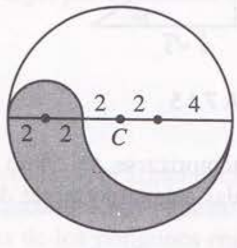
13.



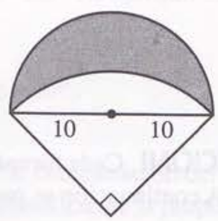
15.



14.



16.



17. Una *corona circular* es la unión de dos círculos concéntricos, con centro P y radios r_1 y r_2, y el conjunto de puntos Q tales que $r_1 < PQ < r_2$. Encuentra el área de la corona circular formada por círculos cuyos radios son 5 y 10.

FIGURA PARA EL EJERCICIO 18

18. Una *ventana Norman* se forma por una región semicircular colocada arriba de una región rectangular, como se muestra en el diagrama. Si la porción rectangular mide 4 ft de ancho y $(4 + \pi)/2$ de alto, encuentra el área y el perímetro de la ventana.
19. Construye un *trifoliado*. Si un lado del triángulo mide 4, halla el área y el perímetro del trifoliado.
20. Construye un *tetrafoliado*. Si un lado del cuadrado mide 3, encuentra el área y el perímetro del tetrafoliado.
21. Demuestra que la fórmula para calcular la longitud L del arco de un sector cuyo radio es r y cuyo ángulo central tiene una medida de $a°$ es $L = a\pi r/180$.

22. Demuestra que si dos arcos tienen el mismo radio, entonces la razón de sus longitudes es igual a la razón de sus medidas.
23. Demuestra que un sector y un segmento de círculo satisfacen la definición de región proporcionada en la sección 7.1.
24. Si una pizza circular de 6 in de diámetro es una ración para una persona, ¿cuántas pizzas circulares de 10 in de diámetro son necesarias para 15 personas? Supón que el grosor de todas las pizzas es el mismo.
25. Si una pizza circular de 6 in de diámetro basta para una persona, ¿cuántas de 12 pulg de diámetro requerirán 20 personas? Supón que el grosor de todas es el mismo.

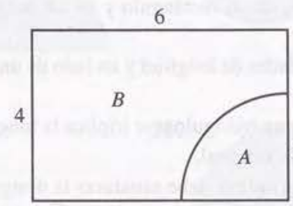


FIGURA PARA EL EJERCICIO 26

26. Un patrón para hacer una colcha requiere las piezas *A* y *B* como se muestra en la figura. El rectángulo mide 6 in de largo y 4 in de ancho. El radio del cuarto de círculo mide 2.5 in. El patrón requiere 14 piezas de la parte *A* en una tela de color claro y 28 piezas de *B* en tela oscura. Encuentra el área de la tela de color claro necesaria y el área de la tela oscura necesaria para elaborar la colcha.
27. Una manguera para jardín está enrollada en círculos que miden 1.5 ft de diámetro. Si hay ocho vueltas completas, ¿cuánto mide de largo la manguera?
28. Una cuerda se enrolla en círculos de 9 in de diámetro. Si hay 17 vueltas completas, ¿cuánto mide de largo la cuerda?

En los ejercicios 29 y 30 aplica la siguiente sugerencia para construir el polígono regular indicado con vértices en un círculo dado. (Sugerencia: traza un diámetro $\overline{AB}$ del círculo y usa la construcción 3.2 para dividir el diámetro en n segmentos congruentes con puntos extremos $A, P_1, P_2, P_3, ..., P_{n-1}, B$, donde n es el número de lados del polígono regular. Construye un triángulo equilátero ABC. Construye $\overrightarrow{CP_2}$ e identifica como punto Q la intersección de este rayo con el círculo. Así, $\overline{AQ}$ es un lado del polígono regular requerido. Luego, marca los otros lados del polígono regular con un compás usando como longitud a AQ.)

29. Heptágono regular.
30. Nonágono regular.

TÉRMINOS CLAVE

Altura de un trapezoide, 201
Área, 196
Circunferencia, 207
Ley de Herón, 204
Región, 195
Región circular, 195
Región poligonal, 195
Sector, 207
Segmento de un círculo, 206
Unidad cuadrada, 197

EJERCICIOS DE REPASO

En la línea en blanco escribe la expresión siempre, algunas veces o nunca, según corresponda.

1. Un segmento de un círculo _________ es un sector.
2. El área de un triángulo _________ es el semiproducto de las longitudes de dos de sus lados.

3. El área de un cuadrado __________ es menor que el área del círculo cuyo diámetro tiene la misma longitud que el lado del cuadrado.
4. La unión de dos regiones __________ es una región.
5. El área de un polígono inscrito __________ es mayor que el área del círculo circunscrito.

Falso-verdadero. Anota una V si la proposición es verdadera. Si es falsa, sustituye la palabra subrayada a fin de obtener una proposición verdadera.

6. Si las longitudes de lados adyacentes de un rectángulo y de un paralelogramo con un ángulo agudo son a y b, entonces el rectángulo tiene <u>menor</u> área.
7. Si un lado de un cuadrado mide a unidades de longitud y un lado de un segundo cuadrado mide b unidades de longitud, la razón de las áreas es <u>a/b</u>.
8. Si se duplica la longitud de un lado de un triángulo y se triplica la longitud de la altura a ese lado, el área del nuevo triángulo es <u>cinco</u> veces lo que el área del triángulo original.
9. El área A de un sector de un círculo de radio r debe satisfacer la desigualdad <u>$0 < A < \pi r^2$</u>.
10. Si el radio de un círculo es r y un lado de un cuadrado mide $r\sqrt{\pi}$ unidades de longitud, las áreas del círculo y del cuadrado son <u>iguales.</u>

Contesta las siguientes cuestiones.

11. La longitud de uno de los lados de un triángulo es el doble que la longitud de la altura a ese lado. Si el área del triángulo es 12, encuentra las longitudes del lado y de la altura.

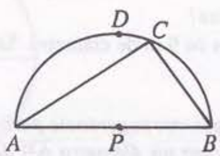


FIGURA PARA LOS EJERCICIOS 12 Y 13

12. Si un triángulo se inscribe en un semicírculo como se muestra, encuentra el área máxima que puede tener el triángulo si $PA = 5$.
13. Si $m\angle A = 30°$ y $PA = 4$ en la figura, encuentra el área del segmento ADC.

En los ejercicios 14 a 16, si la longitud de la base menor de un trapezoide es 10, los ángulos de la base en la base mayor miden 30° y 45°, respectivamente, y la razón del área a la altura es 11:1, encuentra:

14. La longitud de la base mayor.
15. La longitud de la altura.
16. El área del trapezoide.
17. Si un hexágono regular se inscribe en un círculo cuyo radio mide 8, encuentra el área total de los segmentos del círculo.

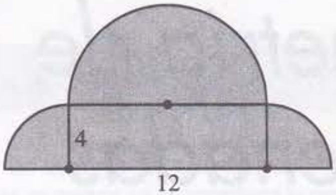
Demostraciones:

18. Si la longitud de un lado de un triángulo equilátero es l, demuestra que la longitud de una altura es $l\sqrt{3}/2$ y que el área del triángulo es $l^2\sqrt{3}/4$.
19. Demuestra que si la longitud de un lado de un paralelogramo es igual a la longitud de lado correspondiente de otro paralelogramo, entonces la razón de las áreas es igual a la razón de las longitudes de las alturas a los lados congruentes.
20. Demuestra que la fórmula para calcular el área de un rectángulo es un caso especial de la fórmula para encontrar el área de un trapezoide.
21. Demuestra que la fórmula para calcular el área de un paralelogramo es un caso especial de la fórmula para hallar el área de un trapezoide.

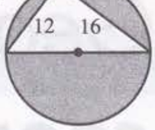
22. Demuestra que la fórmula para calcular el área de un triángulo es un caso especial de la fórmula para encontrar el área de un trapezoide.

En los ejercicios 23 a 26, halla el área de cada una de las regiones sombreadas.

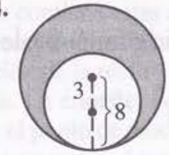
23.



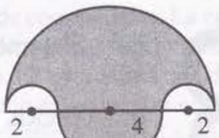
25.



24.



26.



27. Si $\triangle PST$ y $\triangle PQR$ son equiláteros, encuentra el área de la región sombreada.

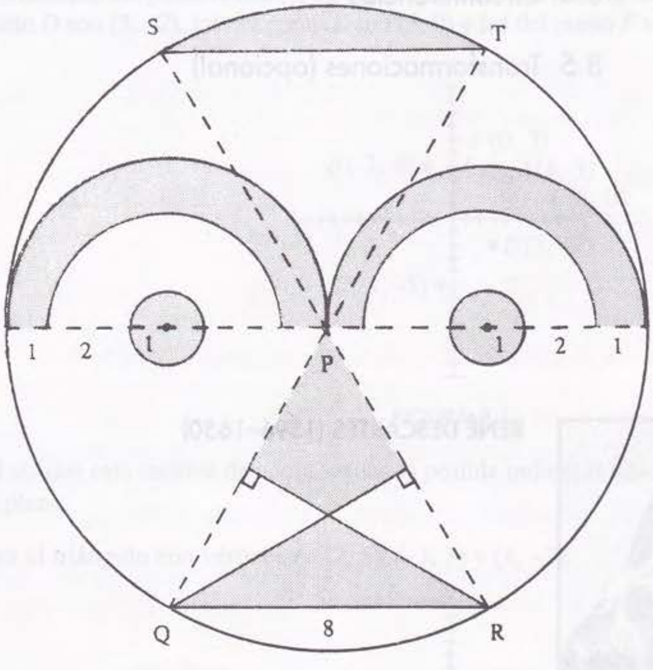


FIGURA PARA EL EJERCICIO 27

28. Una caja contiene 25 mosaicos en forma de rombo. La longitud de cada lado de un mosaico mide 5 in y la medida de un ángulo de cada mosaico es de 30°. ¿Cuántos pies cuadrados cubren tres cajas de mosaicos?

29. 60 baldosas circulares se colocan sobre un patio plano de tierra según un patrón rectangular de 10 por 6. El radio de cada baldosa mide 6 in. Para llenar la región alrededor de cada círculo se usará cemento, de modo que el patio será un rectángulo. ¿Cuál es el área ocupada por el cemento?

30. En un baño se utilizarán 10 cajas de azulejos. Cada azulejo es un hexágono regular cuya apotema mide 3 in de longitud. Cada caja contiene 20 azulejos. Si se utilizan todos los azulejos, ¿cuántos pies cuadrados se cubren?

Geometría de coordenadas

8

RENÉ DESCARTES (1596–1650)

NOTA HISTÓRICA *El gran filósofo francés René Descartes (1596-1650) revolucionó la geometría con la invención del concepto de sistema de coordenadas, que permitió a los matemáticos interpretar geométricamente las ecuaciones algebraicas a través del empleo de curvas. Este sistema se conoce como sistema de coordenadas cartesianas, y algunas veces se denomina sistema de coordenadas rectangulares. Descartes también creó la primera clasificación sistemática de las curvas; de hecho, intentó geometrizar todo lo existente en la naturaleza.*

En el capítulo 1 se analizó el concepto de coordenadas unidimensionales; es decir, las coordenadas en una recta. En álgebra elemental se estudiaron las coordenadas en un plano, así como en una recta. En este capítulo, después de hacer un breve repaso de algunas ideas del álgebra, se relacionará el tema de coordenadas planas con la geometría plana.

8.1 Sistemas de coordenadas bidimensionales

Considera un sistema de coordenadas bidimensionales en que dos rectas perpendiculares de coordenadas se cortan en la coordenada cero de cada recta. Una de las rectas, el **eje** x, se coloca en posición horizontal y la otra recta, el **eje** y, se coloca verticalmente. Así, a cualquier punto en el plano que contiene estas rectas se le asigna un par de coordenadas. La **coordenada** x, o **abscisa**, del punto se encuentra al trazar una recta por el punto de modo que la recta sea perpendicular al eje x. La intersección de la recta y el eje x produce un punto. La coordenada unidimensional de este punto es la abscisa. La **coordenada** y, u **ordenada**, del punto se encuentra en forma parecida al trazar una recta por el punto de modo que la recta sea perpendicular al eje y. La intersección de la recta y el eje y produce un punto. La coordenada unidimensional de este punto es la ordenada. Al punto original corresponde un **par ordenado**, donde el primer elemento es la abscisa y el segundo es la ordenada. En particular, la intersección de los dos ejes es el punto (0, 0), denominado **origen**. En la figura 8.1, las coordenadas del punto A son (4, 3), las del punto B son (–2, 4), las del punto C son (–1, –5), las del punto D son (3, –2), las del punto E son (8, 0) y las del punto F son (0, 3).

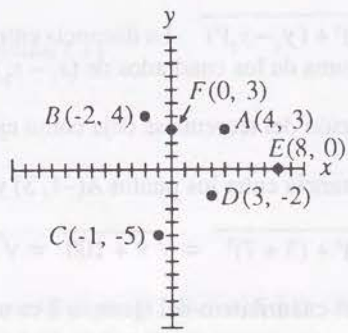


FIGURA 8.1

Al utilizar este sistema de coordenadas es posible indicar la ubicación de objetos geométricos en un plano.

EJEMPLO 1 Grafica el triángulo con vértices en (2, 5), (–1, 3) y (4, –2).

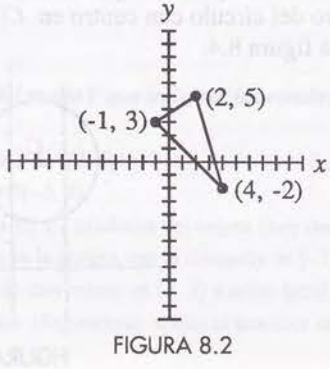


FIGURA 8.2

Solución Después de trazar los puntos dados y unir los vértices se obtiene el triángulo de la figura 8.2. ■

EJEMPLO 2 Grafica el cuadrilátero cuyos vértices están en (7, 1), (7, 8), (–2, 3) y (–2, –4).

Solución El cuadrilátero de la figura 8.3. ■

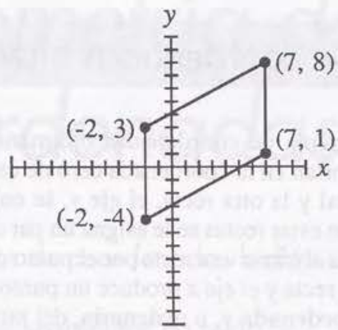


FIGURA 8.3

El cuadrilátero de la figura 8.3 parece un paralelogramo. De acuerdo con el teorema 3.17, una forma de probar que es un paralelogramo es demostrar que sus lados opuestos son congruentes. Para esto es necesario encontrar la distancia entre dos puntos en un plano utilizando las coordenadas de los puntos. Lo anterior conduce al teorema 8.1.

Teorema 8.1 ($PQ = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$) La distancia entre los puntos $P(x_1, y_1)$ y $Q(x_2, y_2)$ es igual a la raíz cuadrada de la suma de los cuadrados de $(x_1 - x_2)$ y $(y_1 - y_2)$.

La demostración del teorema se deja como ejercicio.

EJEMPLO 3 Encuentra la distancia entre los puntos $A(-1, 3)$ y $B(-4, -7)$.

Solución $AB = \sqrt{(-1 + 4)^2 + (3 + 7)^2} = \sqrt{9 + 100} = \sqrt{109}$ ■

EJEMPLO 4 Demuestra que el cuadrilátero del ejemplo 2 es un paralelogramo.

Solución El lado *izquierdo* mide $\sqrt{(-2 + 2)^2 + (3 + 4)^2}$, que es igual a 7. El lado *derecho* mide $\sqrt{(7 - 7)^2 + (8 - 1)^2}$, que también es igual a 7. El lado *superior* mide $\sqrt{(7 + 2)^2 + (8 - 3)^2}$, que es igual a $\sqrt{106}$. El lado *inferior* mide $\sqrt{(7 + 2)^2 + (1 + 4)^2}$, que también es igual a $\sqrt{106}$. En consecuencia, por el teorema 3.17, el cuadrilátero es un paralelogramo. ■

EJEMPLO 5 Encuentra la ordenada del punto P que satisface la condición de que la abscisa de P es –2 y el punto está dentro del círculo con centro en $C(-1, 4)$ y un punto extremo del diámetro está en $A(1, 5)$. Observa la figura 8.4.

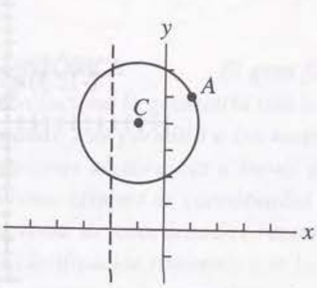


FIGURA 8.4

Solución Sean $(-2, y)$ las coordenadas del punto P. El radio del círculo es

$$AC = \sqrt{(-1-1)^2 + (4-5)^2} = \sqrt{5}$$

pero $PC = AC$. Así,

$$PC = \sqrt{(-2+1)^2 + (y-4)^2} = \sqrt{5}.$$

Se concluye que

$$\begin{aligned} 1 + (y-4)^2 &= 5, \\ (y-4)^2 &= 4, \\ y - 4 &= \pm 2, \\ y &= 4 \pm 2 = 2 \text{ o } 6. \end{aligned}$$

■

EJERCICIOS 8.1

Traza una gráfica para cada ejercicio.

Encuentra la distancia entre los dos puntos de los ejercicios 1 a 6.

1. $(6, 8)$ y $(2, 5)$.
2. $(4, 1)$ y $(3, -3)$.
3. $(0, 0)$ y $(7, 24)$.
4. $(-8, 11)$ y $(13, -10)$.
5. $(0, 8)$ y $(-5, 0)$.
6. $(7, -5)$ y $(7, 8)$.
7. Encuentra el perímetro del triángulo cuyos vértices son los puntos $(5, -8)$, $(-3, 0)$ y $(2, -5)$.
8. Demuestra que el triángulo cuyos vértices están en $(-4, 3)$, $(0, 6)$ y $(2, -5)$ es rectángulo.

En los ejercicios 9 a 11, contesta las siguientes preguntas. El cuadrilátero cuyos vértices se proporcionan, ¿es un paralelogramo, un rombo o un cuadrado?

9. $(2, -2)$, $(-4, 6)$, $(-8, 3)$ y $(-2, -5)$.
10. $(-4, 14)$, $(6, -1)$, $(1, -9)$ y $(3, 7)$.
11. $(4, 5)$, $(-6, 2)$, $(-3, -8)$ y $(7, -5)$.

En los ejercicios 12 a 16, encuentra las coordenadas del punto P que satisface las condiciones dadas.

12. El origen es el punto medio del segmento de recta de P a $A(2, 5)$.
13. El eje x es la mediatriz del segmento de recta de P a $B(-3, 8)$.
14. La abscisa y la ordenada de P son iguales, y P está a $10\sqrt{2}$ unidades del origen (hay dos respuestas).
15. P está sobre el eje y positivo y su distancia al origen es la misma que la distancia de $(-7, 0)$ al origen.
16. La ordenada de P es 7 y el punto está sobre un círculo con centro en $(2, 3)$ y radio igual a 8 (hay dos respuestas).
17. Demuestra la fórmula de la distancia entre dos puntos. (*Sugerencia*: aplica el teorema de Pitágoras.)

8.2 Rectas y segmentos de recta

Por el postulado 1.5 se sabe que para dos puntos distintos cualesquiera en un plano, la recta que los contiene también está en el plano. En la figura 8.5 se ilustra la recta que pasa por los puntos $P(-3, 1)$ y $Q(3, 5)$.

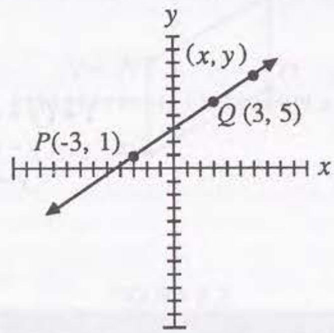


FIGURA 8.5

> **Definición**
> La **pendiente** de una recta que pasa por los puntos $P(x_1, y_1)$ y $Q(x_2, y_2)$ es igual a $(y_1 - y_2)/(x_1 - x_2)$.

Observa en esta definición que el cociente $(y_1 - y_2)/(x_1 - x_2)$ es igual al cociente $(y_2 - y_1)/(x_2 - x_1)$. La manera en que se *inclina* la recta se indica al definir la pendiente de una recta como la razón de cambio vertical al cambio horizontal diferente de cero de dos puntos cualesquiera de la recta. Si el cambio horizontal es cero, se dice que no existe pendiente, y la recta es **vertical.**

EJEMPLO 1 Encuentra la pendiente de la recta de la figura 8.5.

Solución El cambio vertical de P a Q es 4, encontrado al calcular $5 - 1$. De manera semejante, el cambio horizontal es $3 - (-3) = 6$. Así, la pendiente es 4/6 o 2/3. Para calcular la pendiente, las coordenadas de P se restaron a las coordenadas de Q. Se hubiera llegado al mismo resultado restando las coordenadas de Q de las coordenadas de P; a saber, $(1 - 5)/(-3 - 3) = 2/3$. ■

EJEMPLO 2 Encuentra la ecuación de la recta de la figura 8.5.

Solución Dado un punto arbitrario (x, y) en la recta de la figura 8.5, la pendiente del punto P a este punto es $(y - 1)/(x + 3)$, y como por el ejemplo 1 se sabe que la pendiente de la recta es 2/3, se tiene la ecuación de la recta $(y - 1)/(x + 3) = 2/3$. Al multiplicar ambos miembros de la ecuación por el mínimo común denominador $3(x + 3)$, se obtiene $3(y - 1) = 2(x + 3)$. Al efectuar los productos para eliminar los paréntesis se obtiene $3y - 3 = 2x + 6$, que puede volver a escribirse como $2x - 3y + 9 = 0$. ■

> **Definición**
> La **forma general de la ecuación de una recta** es $ax + by + c = 0$, donde a, b y c son números reales (enteros de ser posible).

En vez de utilizar la forma general de una recta, a menudo conviene usar la forma pendiente-ordenada al origen de la recta.

Definición

La **forma pendiente-ordenada de la recta** es $y = mx + b$, donde m es la pendiente de la recta y b es la ordenada al origen.

En la definición anterior, cuando se hace referencia a la ordenada al origen se quiere decir la ordenada del punto de intersección de la recta y el eje y.

EJEMPLO 3 Encuentra la pendiente y la ordenada al origen de la recta de la figura 8.5.

Solución En el ejemplo 2, si de la ecuación se despeja y, se obtiene $y = (2/3)x + 3$; así, la pendiente es 2/3 y la ordenada al origen es 3. ■

¡PRECAUCIÓN! Las dos formas de la ecuación de una recta presentadas en esta sección son de uso común. No obstante, en algunas aplicaciones una forma particular puede ilustrar mejor un concepto; por ejemplo, si y representa las ganancias de un vendedor y x denota el número de sombreros vendidos, entonces al escribir la ecuación en la forma

$$y = mx + b$$

se recalca el valor de las ganancias con base en el número de sombreros vendidos. En otras situaciones puede existir una relación lineal entre dos variables, pero por el momento no interesa despejar una variable en términos de la otra; por ejemplo, si x es el precio de una silla y y es el precio de una mesa, entonces las ecuaciones

$$4x + y - 700 = 0 \quad \text{o} \quad 4x + y = 700$$

podrían ilustrar mejor el hecho de que una silla y cuatro mesas cuestan \$700. La forma general

$$ax + by + c = 0$$

con el cero en el miembro derecho tiene algunas ventajas cuando se comparan rectas con otro tipo de curvas geométricas.

En el capítulo 1 se aprendió que una recta contiene una infinidad de puntos. En general, es posible encontrar otros puntos de una recta al sustituir valores arbitrarios x en la ecuación de una recta y resolver para los valores y correspondientes; por ejemplo, si en la ecuación $y = (2/3)x + 3$ se sustituye el valor $x = 6$, se encuentra que $y = 7$. Así, otro punto de la recta es $(6, 7)$. Al sustituir $x = -5$ resulta que $y = -1/3$. Entonces, $(-5, -1/3)$ es un punto de la recta.

Para trazar un segmento de recta se restringen los valores de x. Un **intervalo** $[a, b]$ de valores x se define como la unión de a, b y todos los números entre a y b. Si una recta se restringe al permitir sólo valores x en el intervalo, entonces se obtiene un segmento de recta.

EJEMPLO 4 Grafica la ecuación del segmento de recta que se encuentra al restringir los valores x de la recta $y = 2x - 5$ al intervalo $[0, 4]$.

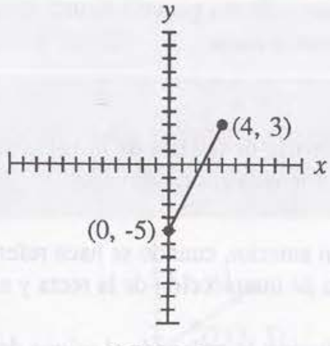


FIGURA 8.6

Solución La gráfica del segmento de recta se muestra en la figura 8.6. Los puntos extremos del segmento de recta pueden encontrarse usando los valores $x = 0$ y $x = 4$, que acotan el intervalo. Así, las coordenadas de un punto extremo son (0, –5) y las coordenadas del otro son (4, 3). ■

Había sido posible definir un segmento de recta restringiendo los valores y a un intervalo, restricción que algunas veces es necesaria. Considera la forma general $ax + by + c = 0$ de una recta, donde $a = 1$, $b = 0$ y $c = -2$. Esta expresión se reduce a la ecuación $x = 2$. Existe una infinidad de pares ordenados cuya abscisa es 2; por ejemplo, (2, –5), (2, 500) y (2, 0) son tres puntos de la recta. Resulta evidente que no es posible considerar una restricción de valores x a fin de obtener un segmento de recta; sin embargo, sí habría sido posible restringir los valores y al intervalo [–2, 5].

EJEMPLO 5 Traza la gráfica del segmento de recta que se encuentra restringiendo los valores y de la recta $x = 2$ al intervalo [–2, 5].

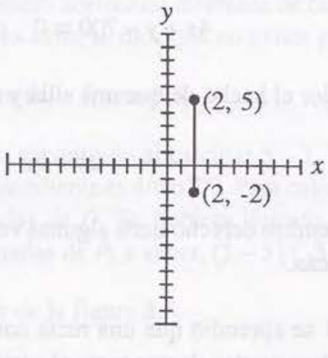


FIGURA 8.7

Solución La gráfica se muestra en la figura 8.7. ■

Si c es una constante, una recta de la forma $x = c$ es una recta vertical y una recta de la forma $y = c$ es una recta horizontal. El **punto medio** de un segmento de recta se encuentra promediando las coordenadas x por un lado y las coordenadas y de los puntos extremos por el otro.

EJEMPLO 6 Encuentra el punto medio del segmento de recta de la figura 8.6 y del segmento de recta de la figura 8.7.

Solución El segmento de recta de la figura 8.6 tiene su punto medio en (2, –1), ya que (0 + 4)/2 = 2 y (–5 + 3)/2 = –1. Los puntos extremos del segmento de recta de la figura 8.7 están en (2, –2) y (2, 5); por lo tanto, su punto medio está en (2, 3/2), ya que (2 + 2)/2 = 2 y (–2 + 5)/2 = 3/2. ■

Teorema 8.2 Dos rectas no verticales son paralelas si y sólo si tienen la misma pendiente.

Teorema 8.3 Dos rectas no verticales son perpendiculares si y sólo si el producto de sus pendientes es –1.

Las demostraciones de los teoremas 8.2 y 8.3 se dejan como ejercicios (consulta los puntos 31 y 32 de los ejercicios 8.2). En caso de que una de las rectas en consideración sea vertical, entonces —como ya se mencionó—, no existe la pendiente. En este caso, resulta evidente que una recta paralela a una recta vertical es otra recta vertical, y que una recta perpendicular a una recta vertical es una recta horizontal.

EJEMPLO 7 Considera las siguientes parejas de rectas y determina si son paralelas o perpendiculares.

a. $y = -2x + 3$ y $y = -2x - 5$.

b. $y = (3/4)x + 7$ y $y = (-4/3)x + 9$.

c. $x = 4$ y $x = 13$.

d. $x = -5$ y $y = 3$.

Solución **a.** Paralelas, ya que la pendiente de ambas rectas es –2.

b. Perpendiculares, pues 3/4 multiplicado por –4/3 es igual a –1.

c. Paralelas, dado que ambas rectas son verticales.

d. Perpendiculares, puesto que $x = -5$ es una recta vertical y $y = 3$ es una recta horizontal. ■

EJERCICIOS 8.2

Traza una gráfica para cada ejercicio. Encuentra la pendiente de las rectas que pasan por los puntos dados en los ejercicios 1 a 6.

1. (2, 5) y (7, 10).
2. (–3, 4) y (6, –2).
3. (8, 0) y (9, 2).
4. (3, –2) y (8, –2).
5. (4, 7) y (0, 0).
6. (5, –3) y (5, 7).
7. Encuentra el punto medio de los segmentos de recta cuyos puntos extremos están dados en los ejercicios 1 a 6.
8. Encuentra el centro del círculo cuyo diámetro tiene por puntos extremos (–3, 5) y (4, –2).
9. Si (2, 4) es el centro de un círculo y (–5, –3) es un punto extremo del diámetro, encuentra el otro punto extremo del diámetro.
10. Escribe la ecuación de la recta que pasa por cada par de puntos en los ejercicios 1 a 6. Anota las respuestas en la forma general.

Encuentra la pendiente y la ordenada al origen de la recta representada por cada una de las siguientes ecuaciones en los ejercicios 11 a 16.

11. $2y = 3 - 4x$.
12. $5x - 7y - 8 = 0$.
13. $y + 2 = 3(x - 5)$.
14. $y = -3$.
15. $x = 7y - 6$.

16. $2 - \pi x = 9y$.
17. Escribe la ecuación de la recta que pasa por el punto (0, 8) y cuya pendiente es $-1/3$.

En los ejercicios 18 a 22, escribe la ecuación de la recta que pasa por el punto (–7, 2) y tiene la siguiente propiedad:

18. Su pendiente es cero.
19. Es paralela a la recta $2x - 5y = 10$.
20. Es perpendicular a la recta $3x + 8y = 7$.
21. Es vertical.
22. Es horizontal.

En los ejercicios 23 a 27, traza las gráficas de cada uno de los segmentos de recta dados.

23. $y = 4x - 8$, para el intervalo x [0, 3].
24. $x + 3y = 6$, para el intervalo y [–1, 2].
25. $4x - 3y + 12 = 0$, para el intervalo x [–3, 3].
26. $y = -1$, para el intervalo x [0, 5].
27. $x = 4$, para el intervalo y [–6, –2].
28. Escribe las ecuaciones de las alturas del triángulo cuyos vértices están en $A(-2, 8)$, $B(1, -5)$ y $C(8, 3)$; también encuentra el punto en que concurren las alturas.
29. Escribe las ecuaciones de las medianas del $\triangle ABC$ del ejercicio 28 y encuentra el punto en que concurren las medianas.
30. Escribe las ecuaciones restringidas que representan a los lados del $\triangle ABC$ del ejercicio 28.
31. Demuestra el teorema 8.2.
32. Demuestra el teorema 8.3.

8.3 Polígonos

Para representar un segmento de recta, se encuentra la ecuación de la recta que contiene al segmento de recta y luego se restringen idóneamente los valores x, los valores y o ambos. A fin de representar algebraicamente un polígono, es necesario hallar las ecuaciones restringidas de los segmentos de recta correspondientes a los lados del polígono. Un triángulo se describe enumerando tres ecuaciones de recta restringidas; un pentágono enumerando cinco ecuaciones de recta restringidas, y un enégono enumerando n ecuaciones de recta restringidas.

Esta manera de describir objetos es tediosa porque antes, si se contaba con los vértices de un polígono, simplemente se tomaba una regla y se unían los vértices con los segmentos idóneos; parecía que no eran necesarias sus ecuaciones. No obstante, aun cuando el uso de las construcciones geométricas es teóricamente perfecto, en la práctica producen resultados aproximados y si se requiere más exactitud, es necesario trabajo algebraico.

También, si se tiene interés en utilizar las capacidades de una computadora para trazar diagramas, hay que poder describir el conjunto correcto de puntos por graficar. Los segmentos de recta son de uso común en gráficas por computadora.

EJEMPLO 1 Considera el triángulo de la figura 8.8 con vértices en $A(-2, 3)$, $B(4, 7)$ y $C(3, -5)$. Encuentra las ecuaciones de los segmentos de recta $\overline{AB}$, $\overline{AC}$ y $\overline{BC}$.

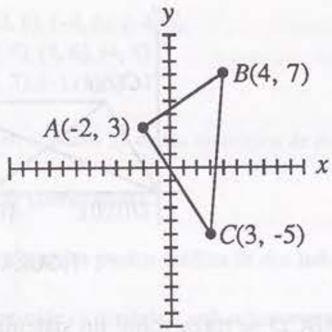


FIGURA 8.8

Solución La pendiente de la recta $\overleftrightarrow{AB}$ es $(7-3)/(4+2) = 2/3$. La pendiente de la recta $\overleftrightarrow{AC}$ es $(-5-3)/(3+2) = -8/5$. La pendiente de la recta $\overleftrightarrow{BC}$ es $(-5-7)/(3-4) = 12$. Así, las ecuaciones de las tres rectas son respectivamente,

$$(y-3)/(x+2) = 2/3$$
$$(y-3)/(x+2) = -8/5$$
$$(y-7)/(x-4) = 12.$$

Al multiplicar cada ecuación por el mínimo común denominador y escribir las ecuaciones en la forma general, se obtienen las tres ecuaciones

$$2x-3y+13=0,$$
$$8x+5y+1=0,$$
$$12x-y-41=0.$$

(El punto A se utilizó para determinar las ecuaciones de las dos primeras rectas y el punto B para determinar la ecuación de la tercera recta. También habría sido posible usar los otros puntos extremos. En todo caso, las ecuaciones resultantes *simplificadas* son idénticas.)

Por último, para determinar las restricciones sobre las rectas que forman los lados del polígono, se utilizan los valores x de los vértices, que son los valores x de los puntos extremos de los segmentos de recta que se buscan. A continuación se resumen los resultados finales:

Segmento de recta AB: $2x-3y+13=0$, $[-2, 4]$.
Segmento de recta AC: $8x+5y+1=0$, $[-2, 3]$.
Segmento de recta BC: $12x-y-41=0$, $[3, 4]$. ■

La práctica general es indicar la restricción de los valores usando el intervalo de los valores x; sin embargo, si el segmento de recta es vertical, hay que restringir los valores y, como ya se había mencionado.

A continuación se proporciona un ejemplo de demostración en que se aplican los métodos de la geometría de coordenadas.

EJEMPLO 2 Demuestra que las diagonales de un paralelogramo se bisecan entre sí.

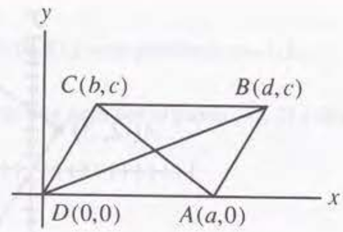


FIGURA 8.9

Solución El paralelogramo $ABCD$ se traza sobre un sistema de coordenadas (Fig. 8.9). Las ordenadas de los puntos B y C son iguales, ya que por el teorema 3.18 dos rectas paralelas son equidistantes en todas partes, y $\overline{BC}$ es paralela al eje x.

DADO: $ABCD$ es un paralelogramo.

DEMUESTRA: $\overline{AC}$ y $\overline{BD}$ se cortan en sus puntos medios.

DEMOSTRACIÓN: ya que $ABCD$ es un paralelogramo, sus lados opuestos son paralelos. Así, los lados opuestos tienen la misma pendiente. Se concluye que $(c-0)/(b-0) = (c-0)/(d-a)$, de modo que $c/b = c/(d-a)$, lo que se reduce a $b = d - a$, o $d = a + b$. Entonces, el punto medio de $\overline{BD}$ es $((a+b)/2, c/2)$, que también es el punto medio de $\overline{AC}$. En consecuencia, $\overline{AC}$ y $\overline{BD}$ se cortan en sus puntos medios. ■

¡PRECAUCIÓN! Aunque las demostraciones pueden efectuarse aplicando los métodos tradicionales ya usados en este texto, algunas personas creen que las demostraciones de la geometría de coordenadas son más fáciles de comprender y realizar. Sin embargo, al efectuar demostraciones con este método es necesario tener cuidado de no emplear razonamientos circulares; es decir, cuando se demuestra el teorema mediante la geometría de coordenadas, no debe utilizarse la información obtenida del teorema que se ha demostrado en la forma tradicional.

EJERCICIOS 8.3

En los ejercicios 1 a 3, traza una gráfica y escribe las ecuaciones restringidas de los lados de cada polígono.

1. Vértices (3, 8), (–6, 2), (–1, –7).
2. Vértices (8, 5), (2, 4), (–2, 1), (3, 3).
3. Vértices (–6, 0), (0, 10), (6, 5), (0, 5), (–3, 2).

Traza una gráfica para los ejercicios 4 a 6.

4. Los lados de un cuadrilátero están en las rectas $x = 0$, $y = 0$, $2x - 4y = 8$ y $5x + 3y = 30$. ¿Cuáles son las restricciones para los lados?
5. Un lado de un cuadrado está definido por $2x - 5y - 13 = 0$, intervalo $x\ [-1, 4]$. Encuentra las ecuaciones restringidas de los otros tres lados del cuadrado (hay dos respuestas).
6. Cuatro lados de un octágono son paralelos a los ejes y están representados por $x = 5$, $[-2, 2]$; $y = 5$, $[-2, 2]$; $x = -5$, $[-2, 2]$; y $y = -5$, $[-2, 2]$. Encuentra las ecuaciones restringidas de los lados oblicuos que unen los lados dados. ¿Se trata de un octágono regular? ¿Por qué?
7. Grafica los siguientes polígonos en el mismo sistema de coordenadas.

   Cuadrilátero (1, –4), (2, –3), (–2, –3), (–1, –4).

   Cuadrilátero (0, 12), (–8, 8), (0, –10), (8, 8).

Triángulo (–2, 8), (–3, 6), (–4, 8).
Triángulo (2, 8), (3, 6), (4, 8).
Triángulo (0, 5), (–1, 1), (1, 1).

8. Encuentra las ecuaciones restringidas para la *cara* en el punto 27 de los ejercicios de repaso del capítulo 7.

Demuestra los ejercicios 9 a 12 aplicando geometría de coordenadas.

9. Demuestra el teorema 3.23; esto es: "Si un segmento une los puntos medios de dos lados de un triángulo, entonces es paralelo al tercer lado y mide la mitad que el tercer lado".
10. Demuestra el teorema 3.25: "La mediana de un trapezoide es paralela a ambas bases y su longitud es igual a la semisuma de las longitudes de las bases".
11. Demuestra que las tres medianas de un triángulo se cortan en un punto situado a dos tercios de la distancia de cada vértice al punto medio de su lado opuesto. Este punto es el **centroide** del triángulo (consulta el punto 48 de los ejercicios de repaso del capítulo 6).
12. Demuestra que las rectas que contienen a las tres alturas de un triángulo se cortan en un punto. Este punto es el **ortocentro** del triángulo (consulta el punto 48 de los ejercicios de repaso del capítulo 6).

8.4 Circunferencias

En la sección 8.1 se presentó la fórmula para calcular la distancia entre dos puntos, la cual también sirve para encontrar la ecuación de una circunferencia. Una circunferencia es el conjunto de todos los puntos en un plano que están a una distancia dada (el radio) de un punto dado (el centro). Sea r el radio de una circunferencia cuyo centro tiene las coordenadas $C(h, k)$. Dado un punto arbitrario (x, y) en la circunferencia, la distancia entre este punto y el centro de la circunferencia es r. Así, por el teorema 8.1 se tiene

$$\sqrt{(x-h)^2+(y-k)^2}=r.$$

Al elevar al cuadrado ambos miembros de esta ecuación se obtiene la ecuación de la circunferencia

$$\boxed{(x-h)^2+(y-k)^2=r^2}$$

denominada **forma normal de la ecuación de la circunferencia.**

Si se considera la forma normal de la ecuación y se elevan al cuadrado los términos entre paréntesis, se obtiene

$$x^2-2hx+h^2+y^2-2ky+k^2=r^2.$$

Al reagrupar términos, lo anterior puede escribirse como

$$x^2+y^2-2hx-2ky+h^2+k^2-r^2=0.$$

Haciendo $a=-2h$, $b=-2k$ y $c=h^2+k^2-r^2$ se obtiene la **forma general de la ecuación de una circunferencia**

$$\boxed{x^2+y^2+ax+by+c=0.}$$

Cuando una circunferencia se grafica en un sistema de coordenadas, se utiliza el compás en vez de trazar puntos por separado de nuevo.

EJEMPLO 1 Encuentra la ecuación de una circunferencia de radio 5 y centro en (0, 0); también grafica la circunferencia.

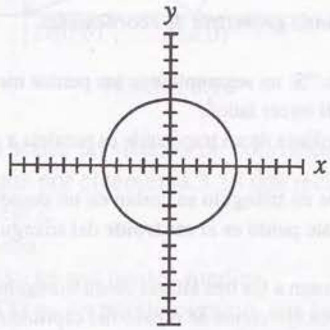


FIGURA 8.10

Solución La ecuación de la circunferencia es $x^2 + y^2 = 25$, que también puede escribirse en la forma general como $x^2 + y^2 - 25 = 0$. En la figura 8.10 se muestra la gráfica de esta circunferencia. ■

EJEMPLO 2 Considera una circunferencia de radio 2 y centro en (–1, 3). Encuentra su ecuación y gráficala.

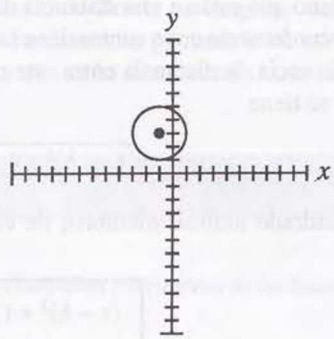


FIGURA 8.11

Solución La forma normal de la ecuación de esta circunferencia es

$$(x + 1)^2 + (y - 3)^2 = 4.$$

Al desarrollar los binomios al cuadrado se obtiene

$$x^2 + 2x + 1 + y^2 - 6y + 9 = 4,$$

que puede escribirse en la forma general

$$x^2 + y^2 + 2x - 6y + 6 = 0.$$

En la figura 8.11 se muestra la gráfica de la circunferencia. ■

Una ventaja evidente al escribir la ecuación de una circunferencia en forma normal es que así es fácil encontrar el centro y el radio de ésta. No obstante, la forma general es más sencilla, ya que los términos semejantes se han combinado. Dada la ecuación de una circunferencia en forma general, es posible encontrar su centro y su radio pasándola a la forma normal. Para esto se requiere el proceso de *completar al cuadrado* que se aprendió en álgebra.

EJEMPLO 3 Encuentra el centro y el radio de la circunferencia cuya ecuación es

$$x^2 + y^2 - 6x + 2y - 7 = 0.$$

Solución Se reagrupan los términos y la ecuación se escribe como

$$x^2 - 6x + y^2 + 2y = 7.$$

Debido a que la mitad de -6 (el coeficiente de x) es -3, se suma $(-3)^2$ a ambos miembros de la ecuación, asimismo, como la mitad de 2 (el coeficiente de y) es 1, se suma $(1)^2$ a ambos miembros de la ecuación. Esto da

$$x^2 - 6x + 9 + y^2 + 2y + 1 = 17.$$

Se factoriza y se obtiene

$$(x - 3)^2 + (y + 1)^2 = 17.$$

Así, el radio de la circunferencia es $\sqrt{17}$ y su centro está en $(3, -1)$. ■

EJERCICIOS 8.4

Grafica cada una de las circunferencias de los ejercicios 1 a 4 y escribe la ecuación en forma normal.

1. Centro $(0, 0)$, radio 3.
2. Centro $(1, 3)$, radio 5.
3. Centro $(-4, -7)$, radio 4.
4. Centro $(4, -2)$, radio $2\sqrt{5}$.

Escribe la ecuación de la circunferencia en la forma general en los ejercicios 5 a 10.

5. Centro $(4, -8)$, radio 13.
6. Los puntos extremos del diámetro son $(7, 3)$ y $(-3, -5)$.
7. Centro $(-3, 6)$ y pasa por $(5, 1)$.
8. Centro $(4, -6)$ y tangente al eje x.
9. Centro $(4, -6)$ y tangente al eje y.
10. Pasa por los puntos $(0, 0)$, $(0, -5)$ y $(8, 0)$.

Encuentra el centro y el radio de cada una de las circunferencias de los ejercicios 11 a 14, volviendo a escribir primero la ecuación en forma normal.

11. $x^2 + y^2 - 4x - 10y + 20 = 0.$

12. $x^2 + y^2 - 16y + 39 = 0$.
13. $x^2 + y^2 + 14x - 25y + 57 = 0$.
14. $9x^2 + 9y^2 - 12x + 60y + 55 = 0$.
15. Escribe la ecuación de las circunferencias concéntricas con centro en (–3, 4) y cuyos radios respectivos miden 3, 4, 5 y 6. Anota las respuestas en la forma general.
16. En el mismo sistema de coordenadas grafica la circunferencia $x^2 + y^2 - 8x - 2y - 23 = 0$ y la recta $2x - 2y - 1 = 0$. Calcula las coordenadas de los dos puntos de intersección. ¿Es posible determinar exactamente estas coordenadas? ¿Cómo?

8.5 Transformaciones (opcional)

En esta sección se analizarán algunas relaciones entre conjuntos de puntos. Los conceptos que se estudiarán no necesariamente requieren el empleo de la geometría de coordenadas, aunque es conveniente ilustrarlos con este medio.

Definición
Una **transformación** $\mathscr{T}$ es una correspondencia uno a uno entre dos conjuntos de puntos $\mathbb{R}$ y $\mathbb{S}$.

Para representar la transformación $\mathscr{T}$ entre el conjunto $\mathbb{R}$ y el conjunto $\mathbb{S}$ se escribe $\mathscr{T}$: $\mathbb{R} \leftrightarrow \mathbb{S}$. En algunos tratamientos de este tema se hace referencia a una transformación *de* un conjunto a otro y la transformación en la otra dirección se denomina transformación inversa. Sin embargo, para los objetivos de este texto, es preferible limitar el análisis a los conceptos de la correspondencia uno a uno. Esta definición general se refiere a una correspondencia uno a uno entre conjuntos, y no tiene otra restricción. La siguiente definición es un ejemplo de una transformación que posee restricciones adicionales.

EJEMPLO 1 Determina si las siguientes son transformaciones entre el conjunto $\mathbb{R}$ y el conjunto $\mathbb{S}$.
a. $\mathbb{R} = \{x: x = -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3\}$, $\mathbb{S} = \{z: z = -6, -4, -2, 0, 2, 4, 6\}$, donde $\mathscr{T}$: $\mathbb{R} \leftrightarrow \mathbb{S}$ está definida por $z = 2x$.
b. $\mathbb{R} = \{y: y = -4, 0, 4\}$, $\mathbb{S} = \{p: p = 0, 16\}$, donde $\mathscr{T}$: $\mathbb{R} \leftrightarrow \mathbb{S}$ está definida por $p = y^2$.

Solución **a.** $\mathscr{T}$ es una transformación porque existe una correspondencia uno a uno entre $\mathbb{R}$ y $\mathbb{S}$. La correspondencia es como sigue:

$-3 \leftrightarrow -6 \quad -2 \leftrightarrow -4 \quad -1 \leftrightarrow -2 \quad 0 \leftrightarrow 0 \quad 1 \leftrightarrow 2 \quad 2 \leftrightarrow 4 \quad 3 \leftrightarrow 6$

b. $\mathscr{T}$ no es una transformación porque $p = y^2$ no define una correspondencia uno a uno entre $\mathbb{R}$ y $\mathbb{S}$. En particular, 16 en $\mathbb{S}$ corresponde a dos elementos: –4 y 4. También observa que el número de elementos en $\mathbb{R}$ no es igual a la cantidad de elementos en $\mathbb{S}$, de modo que no hay posibilidad de definir una correspondencia uno a uno entre los conjuntos. ■

Definición
Una **isometría** es una transformación que preserva la distancia.

Esta definición indica que una transformación $\mathscr{T}$: $\mathbb{R} \leftrightarrow \mathbb{S}$ es una isometría si la distancia entre dos puntos cualesquiera R_1 y R_2 en $\mathbb{R}$ es la misma que la distancia entre sus puntos correspondientes S_1 y S_2 en $\mathbb{S}$; es decir, $R_1R_2 = S_1S_2$, donde R_1 corresponde a S_1 y R_2 corresponde a S_2. A continuación se presentan tres categorías de isometrías: traslaciones, rotaciones y reflexiones, que se definen más adelante.

EJEMPLO 2 Determina si la siguiente es una isometría entre los conjuntos $\mathbb{R}$ y $\mathbb{S}$. $\mathbb{R} = \{(x, y): y = 2x - 9\}$, $\mathbb{S} = \{(x, y): y = 2x + 6\}$, donde $\mathcal{T}$: $\mathbb{R} \leftrightarrow \mathbb{S}$ se define como sigue: asociar cada punto en $\mathbb{R}$ con el punto en $\mathbb{S}$ resultante de mantener la misma abscisa y sumar 15 a la ordenada del punto en $\mathbb{R}$.

Solución La relación $\mathcal{T}$ es una transformación, ya que es una correspondencia uno a uno entre $\mathbb{R}$ y $\mathbb{S}$. Esto se concluye a partir de la observación de que un punto en $\mathbb{R}$ es de la forma $(x, 2x - 9)$; al sumar 15 a la ordenada se obtiene el punto $(x, 2x + 6)$, que es un punto en $\mathbb{S}$, de modo que cada punto en $\mathbb{R}$ tiene un único punto correspondiente en $\mathbb{S}$ y viceversa. Sean R_1 y R_2 dos puntos arbitrarios cualesquiera en $\mathbb{R}$ que corresponden a los puntos S_1 y S_2 en $\mathbb{S}$. Se demostrará que $(R_1R_2)^2 = (S_1S_2)^2$. Debido a que las distancias son positivas, se implica que $R_1R_2 = S_1S_2$. Por el teorema 8.1,

$$\begin{aligned}(R_1R_2)^2 &= (x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2\\ &= (x_1 - x_2)^2 + [(2x_1 - 9) - (2x_2 - 9)]^2\\ &= (x_1 - x_2)^2 + [2x_1 - 2x_2]^2\end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned}(S_1S_2)^2 &= (x_1 - x_2)^2 + [(y_1 + 15) - (y_2 + 15)]^2\\ &= (x_1 - x_2)^2 + [(2x_1 + 6 + 15) - (2x_2 + 6 + 15)]^2\\ &= (x_1 - x_2)^2 + [2x_1 - 2x_2]^2\end{aligned}$$

Así,

$$(R_1R_2)^2 = (S_1S_2)^2,$$

por lo tanto $\mathcal{T}$ es una isometría. ■

Teorema 8.4 Una isometría preserva la medida de los ángulos.

DEMOSTRACIÓN: sea $\mathcal{T}: \angle ABC \leftrightarrow \angle DEF$ una isometría. Sin pérdida de generalidad, puede suponerse que $A \leftrightarrow D$, $B \leftrightarrow E$ y $C \leftrightarrow F$. (Se concluye esto porque cualquier punto en $\overrightarrow{ED}$ y cualquier punto en $\overrightarrow{EF}$, distinto del vértice E, pueden usarse para definir $\angle DEF$, de modo que se eligen los puntos más convenientes, mismos que se identifican por D y F; a saber, aquellos que satisfacen $AB = DE$ y $BC = EF$.) Ya que una isometría preserva distancias, $AC = DF$. Al trazar los segmentos de recta auxiliares $\overline{AC}$ y $\overline{DF}$ por LLL = LLL se tiene $\triangle ABC \cong \triangle DEF$. Debido a que las partes correspondientes de triángulos correspondientes son congruentes, $\angle ABC \cong \angle DEF$. Así, $m\angle ABC = m\angle DEF$, con lo que se obtiene el resultado deseado de que $\mathcal{T}$ preserva la medida de los ángulos.

Definición

Una **traslación** es una transformación $\mathcal{T}$: $\mathbb{R} \leftrightarrow \mathbb{S}$ en que todo punto en $\mathbb{R}$ con coordenadas (x, y) corresponde a un punto en $\mathbb{S}$ con coordenadas $(x + a, y + b)$.

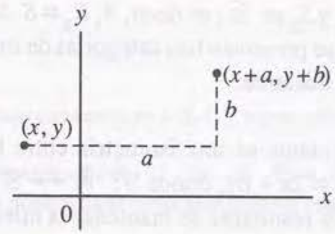


FIGURA 8.12

En la figura 8.12 se muestra la gráfica de un punto con coordenadas (x, y) y el punto correspondiente con coordenadas $(x + a, y + b)$. La definición de una traslación entre los conjuntos $\mathbb{R}$ y $\mathbb{S}$ requiere contar con una correspondencia tal que cada punto en $\mathbb{R}$ corresponda a un punto en $\mathbb{S}$.

EJEMPLO 3 Determina si el conjunto $\mathbb{S} = \{(x, y): y = x + 10\}$ es una traslación del conjunto $\mathbb{R} = \{(x, y): y = x + 3\}$.

Solución La ecuación $y = x + 10$ determina los puntos en $\mathbb{S}$. Entonces, si $\mathscr{T}$ es una traslación, un punto en $\mathbb{S}$ con coordenadas $(x + a, y + b)$ debe satisfacer la ecuación $y + b = x + a + 10$. Ya que los puntos en $\mathbb{R}$ satisfacen la ecuación $y = x + 3$, por sustitución se obtiene $x + 3 + b = x + a + 10$. Al resolver esta ecuación para b se obtiene $b = a + 7$, que tiene una infinidad de soluciones para a y b. Se concluye que entre $\mathbb{R}$ y $\mathbb{S}$ hay una infinidad de traslaciones; por ejemplo:

Si $a = 5$, entonces $b = 12$, de modo que $(x, y) \leftrightarrow (x + 5, y + 12)$;
Si $a = 0$, entonces $b = 7$, de modo que $(x, y) \leftrightarrow (x, y + 7)$; o
Si $a = -4$, entonces $b = 3$, de modo que $(x, y) \leftrightarrow (x - 4, y + 3)$. ■

En el ejemplo 3 fue posible mostrar que entre la recta y la paralela dadas existe una infinidad de traslaciones. (Observa que las pendientes de las dos rectas son iguales.) Esto no es una coincidencia; trasladar una recta da por resultado una recta paralela o la misma recta.

En la sección 8.4 se analizó la forma normal de la ecuación de una circunferencia con centro $C(h, k)$ y radio r: $(x - h)^2 + (y - k)^2 = r^2$. Nota que es una traslación de la circunferencia $x^2 + y^2 = r^2$ con centro $C(0, 0)$ y radio r. La correspondencia es $(x, y) \leftrightarrow (x - h, y - k)$.

Teorema 8.5 Las traslaciones son isometrías.

DEMOSTRACIÓN: Sea $\mathscr{T}$: $\mathbb{R} \leftrightarrow \mathbb{S}$ una traslación tal que cada punto en $\mathbb{R}$ con coordenadas (x, y) corresponde a un punto en $\mathbb{S}$ con coordenadas $(x + a, y + b)$. Sean R_1 y R_2 dos puntos arbitrarios en $\mathbb{R}$ correspondientes a los puntos S_1 y S_2 en $\mathbb{S}$. Por el teorema 8.1,

$$(R_1R_2)^2 = (x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2$$

y

$$\begin{aligned}(S_1S_2)^2 &= [(x_1 + a) - (x_2 + a)]^2 + [(y_1 + b) - (y_2 + b)]^2 \\ &= [x_1 + a - x_2 - a]^2 + [y_1 + b - y_2 - b]^2 \\ &= (x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2.\end{aligned}$$

Así,

$$(R_1R_2)^2 = (S_1S_2)^2,$$

con lo que se obtiene que $\mathscr{T}$ es una isometría.

Definición

Una **rotación con respecto al origen** es una transformación $\mathscr{T}$: $\mathbb{R} \leftrightarrow \mathbb{S}$ tal que cada punto en $\mathbb{R}$ con coordenadas (x, y) corresponde a un punto en $\mathbb{S}$ con coordenadas $(ax - by, ay + bx)$, donde $a^2 + b^2 = 1$.

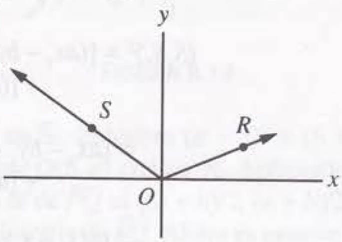


FIGURA 8.13

Esta definición formal de rotación no es muy intuitiva. Informalmente, una rotación puede verse como el resultado de *girar* un conjunto alrededor de un punto, como cuando la hélice de un avión gira alrededor de su centro. También, una rotación puede entenderse como un cambio en la posición de un rayo con respecto al eje x positivo. En este sentido, considera un rayo con punto extremo en el origen y que contiene un punto R en $\mathbb{R}$ y otro rayo con punto extremo en el origen y que contiene un punto S en $\mathbb{S}$ (Fig. 8.13). Es posible hacer girar el primer rayo alrededor del origen, ya sea en el sentido del movimiento de las manecillas del reloj o en sentido contrario, hasta que coincida con el segundo rayo. El punto R ha rotado hasta el punto S si el punto R coincide ahora con el punto S. (La definición garantiza este hecho por la condición $a^2 + b^2 = 1$.) El ángulo formado por los dos rayos se denomina *ángulo de rotación*.

También es posible efectuar una rotación alrededor de un punto (c, d) que no sea el origen. Ahora bien, no es necesario desarrollar una fórmula por separado para esta situación. Primero se efectúa una traslación $\mathscr{T}_1$: $\mathbb{R} \leftrightarrow \mathbb{S}$ en que cada punto en $\mathbb{R}$ con coordenadas (x, y) corresponde a un punto en $\mathbb{S}$ con coordenadas $(x - c, y - d)$. Esto significa que el punto (c, d) en $\mathbb{R}$ corresponde al origen en $\mathbb{S}$. Luego se realiza la rotación requerida $\mathscr{T}_2$: $\mathbb{S} \leftrightarrow \mathbb{U}$ alrededor del nuevo origen. Por último, se efectúa una traslación $\mathscr{T}_3$: $\mathbb{U} \leftrightarrow \mathbb{R}$ en sentido inverso, en que cada punto en $\mathbb{U}$ con coordenadas (x, y) corresponde a un punto en $\mathbb{R}$ con coordenadas $(x + c, y + d)$. Estas transformaciones dan por resultado una respuesta planteada en términos del sistema de coordenadas original. En este texto sólo se harán rotaciones con respecto al origen.

EJEMPLO 4 Determina si el conjunto $\mathbb{S} = \{(x, y): y = 2x\}$ es una rotación del conjunto $\mathbb{R} = \{(x, y): y = -3x\}$.

Solución Los puntos en $\mathbb{S}$ están determinados por la ecuación $y = 2x$. Entonces, si $\mathscr{T}$ es una rotación, un punto en $\mathbb{S}$ con coordenadas $(ax - by, ay + bx)$ debe satisfacer la ecuación $ay + bx = 2(ax - by)$. Puesto que los puntos en $\mathbb{R}$ satisfacen la ecuación $y = -3x$, por sustitución se obtiene $-3ax + bx = 2(ax + 3bx)$. Así, $-3ax + bx = 2ax + 6bx$ conduce a $-5ax = 5bx$, que se simplifica a $a = -b$. Este resultado junto con $a^2 + b^2 = 1$ significa que una solución es $a = -\sqrt{2}/2$, $b = \sqrt{2}/2$, de modo que $(x, y) \leftrightarrow (-x\sqrt{2}/2 - y\sqrt{2}/2, -y\sqrt{2}/2 + x\sqrt{2}/2)$. Se concluye que entre $\mathbb{R}$ y $\mathbb{S}$ existe una rotación; por ejemplo: $(1, -3) \leftrightarrow (\sqrt{2}, 2\sqrt{2})$.

Teorema 8.6 Las rotaciones son isometrías.

DEMOSTRACIÓN: sea $\mathscr{T}$: $\mathbb{R} \leftrightarrow \mathbb{S}$ una rotación tal que cada punto en R con coordenadas (x, y) corresponde a un punto en $\mathbb{S}$ con coordenadas $(ax - by, ay + bx)$, donde $a^2 + b^2 = 1$. Sean R_1 y R_2 dos puntos arbitrarios en $\mathbb{R}$ que corresponden a los puntos S_1 y S_2 en $\mathbb{S}$. Por el teorema 8.1,

$$(R_1R_2)^2 = (x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2$$

y

$$\begin{aligned}(S_1S_2)^2 &= [(ax_1 - by_1) - (ax_2 - by_2)]^2 \\ &\quad + [(ay_1 + bx_1) - (ay_2 + bx_2)]^2 \\ &= [ax_1 - by_1 - ax_2 + by_2]^2 \\ &\quad + [ay_1 + bx_1 - ay_2 - bx_2]^2 \\ &= [a(x_1 - x_2) - b(y_1 - y_2)]^2 \\ &\quad + [b(x_1 - x_2) + a(y_1 - y_2)]^2 \\ &= a^2(x_1 - x_2)^2 - 2ab(x_1 - x_2)(y_1 - y_2) \\ &\quad + b^2(y_1 - y_2)^2 + b^2(x_1 - x_2)^2 \\ &\quad + 2ab(x_1 - x_2)(y_1 - y_2) + a^2(y_1 - y_2)^2 \\ &= a^2(x_1 - x_2)^2 + b^2(y_1 - y_2)^2 \\ &\quad + b^2(x_1 - x_2)^2 + a^2(y_1 - y_2)^2 \\ &= (a^2 - b^2)(x_1 - x_2)^2 + (a^2 + b^2)(y_1 - y_2)^2 \\ &= (x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2\end{aligned}$$

ya que $a^2 + b^2 = 1$. Así,

$$(R_1R_2)^2 = (S_1S_2)^2,$$

con lo que se obtiene que $\mathscr{T}$ es una isometría.

Definición

Dos puntos distintos P y Q **son simétricos con respecto a la recta k** si P no está en k y k es la mediatriz de $\overline{PQ}$. Si P está en k, entonces P es simétrico consigo mismo con respecto a k.

Definición

Una **reflexión con respecto a la recta k** es una transformación $\mathscr{T}$: $\mathbb{R} \leftrightarrow \mathbb{S}$ tal que cada punto R_1 en $\mathbb{R}$ corresponde a un punto S_1 en $\mathbb{S}$ de modo que R_1 es simétrico con S_1 con respecto a k.

EJEMPLO 5 Determina si el conjunto $\mathbb{S} = \{(x, y): (x-3)^2 + (y+1)^2 = 4\}$ es una reflexión del conjunto $\mathbb{R} = \{(x, y): (x+1)^2 + (y-3)^2 = 4\}$ con respecto a la recta $y = x$.

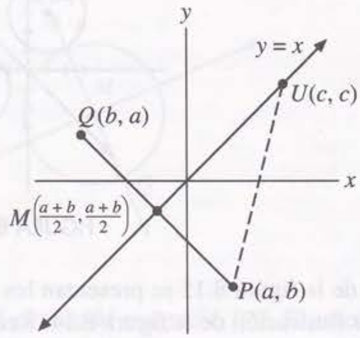


FIGURA 8.14

Solución Sea $P(a, b)$ un punto arbitrario en $\mathbb{S}$. Entonces $(a-3)^2 + (b+1)^2 = 4$, lo cual significa que $(b+1)^2 + (a-3)^2 = 4$, de modo que $Q(b, a)$ está en $\mathbb{R}$. Aplicando los resultados de la sección 8.2 se encuentra que el punto medio M de $\overline{PQ}$ es $((a+b)/2, (a+b)/2)$, de modo que M está en $y = x$. Esto demuestra que $y = x$ es la bisectriz de $\overline{PQ}$. Ahora es necesario demostrar que $\overline{PQ}$ es perpendicular a $y = x$. Considera el punto $U(c, c)$ tal que $c \neq (a+b)/2$ (Fig. 8.14).

Resulta evidente que el punto U está en $y = x$ y $U \neq M$. Se tiene

$$
\begin{aligned}
(PM)^2 + (UM)^2 &= \left(a - \frac{a+b}{2}\right)^2 + \left(b - \frac{a+b}{2}\right)^2 \\
&\quad + \left(c - \frac{a+b}{2}\right)^2 + \left(c - \frac{a+b}{2}\right)^2 \\
&= \left(\frac{a-b}{2}\right)^2 + \left(\frac{b-a}{2}\right)^2 + 2\left(\frac{2c-a-b}{2}\right)^2 \\
&= \frac{(a-b)^2}{2} + \frac{(2c-a-b)^2}{2} \\
&= \frac{1}{2}(a^2 - 2ab + b^2 + 4c^2 - 4ac + a^2 - 4bc + b^2 + 2ab) \\
&= \frac{1}{2}(2a^2 - 4ac + 2c^2 + 2b^2 - 4bc + 2c^2) \\
&= (a^2 - 2ac + c^2) + (b^2 - 2bc + c^2) \\
&= (a-c)^2 + (b-c)^2 \\
&= (PU)^2.
\end{aligned}
$$

■

Por el teorema 5.7, $\triangle PUM$ es un triángulo rectángulo con $m\angle PMU = 90°$. Así, $\overline{PQ}$ es perpendicular a $y = x$. En consecuencia, entre $\mathbb{R}$ y $\mathbb{S}$ existe una reflexión con respecto a $y = x$.

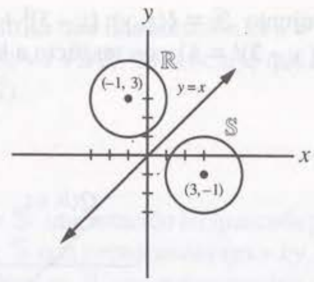


FIGURA 8.15

En la gráfica de la figura 8.15 se presentan los conjuntos ℝ y 𝕊 descritos en el ejemplo 5. Compárala con la ilustración de la figura 8.14. Recuerda que cada punto P en 𝕊 corresponde a un punto Q en ℝ.

En la figura 8.16 se ilustra una reflexión entre dos regiones ℝ y 𝕊.

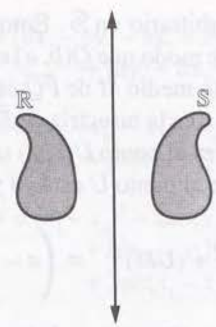


FIGURA 8.16

La demostración del siguiente teorema se deja como ejercicio.

Teorema 8.7 Las reflexiones son isometrías.

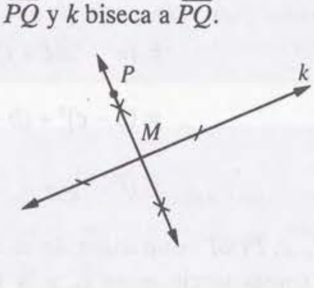
CONSTRUCCIÓN 8.1

Construye la reflexión del punto P con respecto a la recta k.

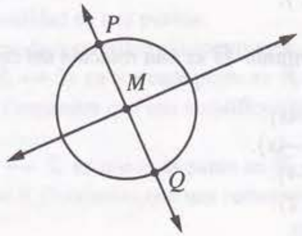
En esta construcción se supondrá que P no está en la recta k, de lo contrario la construcción sería innecesaria; es decir, existe una reflexión $\mathcal{T}: P \leftrightarrow P$. En consecuencia, es necesario encontrar un punto Q tal que $\mathcal{T}: P \leftrightarrow Q$.

DADO: recta k, punto P

CONSTRUYE: Q tal que $k \perp \overline{PQ}$ y k biseca a $\overline{PQ}$.



Paso 1. Con la construcción 1.6, construye la perpendicular a la recta k desde el punto P. Sea $M = k \cap \overline{PQ}$.



Paso 2. Con un compás, traza el círculo M con radio PM. El círculo M corta a k en dos puntos, uno de los cuales es P. Identifica el otro punto como Q. Entonces Q es el punto buscado.

EJERCICIOS 8.5

En los ejercicios 1 a 8, determina si las condiciones dadas producen transformaciones entre $\mathbb{R}$ y $\mathbb{S}$.

1. $\mathbb{R} = \{x: x = -10, -5, 0, 3, 4\}$, $\mathbb{S} = \{y: y = -30, -15, 0, 9, 12\}$, donde $\mathcal{T}$: $\mathbb{R} \leftrightarrow \mathbb{S}$ está definida por $y = 3x$.
2. $\mathbb{R} = \{x: x = -16, -2, 9, 10\}$, $\mathbb{S} = \{y: y = -64, -8, 36, 40\}$, donde $\mathcal{T}$: $\mathbb{R} \leftrightarrow \mathbb{S}$ está definida por $y = 4x$.
3. $\mathbb{R} = \{x: x = -5, 3, 4\}$, $\mathbb{S} = \{z: z = -5/2, -3/2, 2\}$, donde $\mathcal{T}$: $\mathbb{R} \leftrightarrow \mathbb{S}$ está definida por $z = (1/2)x$.
4. $\mathbb{R} = \{x: x = -16, -2, 10\}$, $\mathbb{S} = \{z: z = -16/3, -2/3, 10/3\}$, donde $\mathcal{T}$: $\mathbb{R} \leftrightarrow \mathbb{S}$ está definida por $x = (1/3)z$.
5. $\mathbb{R} = \{p: p$ es un entero$\}$, $\mathbb{S} = \{q: q$ es un entero$\}$, donde $\mathcal{T}$: $\mathbb{R} \leftrightarrow \mathbb{S}$ está definida por $q = p + 4$.
6. $\mathbb{R} = \{t: t$ es un número real$\}$, $\mathbb{S} = \{u: u$ es un número real$\}$, donde $\mathcal{T}$: $\mathbb{R} \leftrightarrow \mathbb{S}$ está definida por $u = t - 7$.
7. $\mathbb{R} = \{h: h$ es un entero$\}$, $\mathbb{S} = \{k: k$ es un número racional$\}$, donde $\mathcal{T}$: $\mathbb{R} \leftrightarrow \mathbb{S}$ está definida por $k = h/5$.
8. $\mathbb{R} = \{a: a$ es un número real$\}$, $\mathbb{S} = \{b: b$ es un número real$\}$, donde $\mathcal{T}$: $\mathbb{R} \leftrightarrow \mathbb{S}$ está definida por $b = a/6$.

En los ejercicios 9 a 14, determina si las condiciones dadas producen isometrías entre $\mathbb{R}$ y $\mathbb{S}$.

9. $\mathbb{R} = \{(x, y): y = 3x + 2\}$, $\mathbb{S} = \{(x, y): y = 6x - 4\}$, donde $\mathcal{T}$: $\mathbb{R} \leftrightarrow \mathbb{S}$ se define como sigue: asocia cada punto en $\mathbb{R}$ con el punto en $\mathbb{S}$ que se obtiene al mantener la misma abscisa y sumar $3x - 6$ a la ordenada.
10. $\mathbb{R} = \{(x, y): y = 5x + 7\}$, $\mathbb{S} = \{(x, y): y = 5x - 9\}$, donde $\mathcal{T}$: $\mathbb{R} \leftrightarrow \mathbb{S}$ se define como sigue: asocia cada punto en $\mathbb{R}$ con el punto en $\mathbb{S}$ resultante de mantener la misma abscisa y restar 16 a la ordenada.
11. $\mathbb{R} = \{(x, y): y = 3\}$, $\mathbb{S} = \{(x, y): y = 2\}$, donde $\mathcal{T}$: $\mathbb{R} \leftrightarrow \mathbb{S}$ se define como sigue: asocia cada punto en $\mathbb{R}$ con el punto en $\mathbb{S}$ que se obtiene al mantener la misma abscisa y restar 1 a la ordenada.
12. $\mathbb{R} = \{(x, y): x = -5\}$, $\mathbb{S} = \{(x, y): x = 3\}$, donde $\mathcal{T}$: $\mathbb{R} \leftrightarrow \mathbb{S}$ se define como sigue: asocia cada punto en $\mathbb{R}$ con el punto en $\mathbb{S}$ que se obtiene al mantener la misma ordenada y sumar 8 a la abscisa.
13. $\mathbb{R} = \{(x, y): y = x\}$, $\mathbb{S} = \{(x, y): y = x\}$, donde $\mathcal{T}$: $\mathbb{R} \leftrightarrow \mathbb{S}$ se define como sigue: asocia cada punto en $\mathbb{R}$ con el punto en $\mathbb{S}$ que se obtiene al mantener la misma abscisa y la misma ordenada.
14. $\mathbb{R} = \{(x, y): y = x\}$, $\mathbb{S} = \{(x, y): y = x^2\}$, donde $\mathcal{T}$: $\mathbb{R} \leftrightarrow \mathbb{S}$ se define como sigue: asocia cada punto en $\mathbb{R}$ con el punto en $\mathbb{S}$ que se obtiene al mantener la misma abscisa y elevar al cuadrado la ordenada.

En los ejercicios 15 a 20, determina si el conjunto $\mathbb{S}$ es una traslación del conjunto $\mathbb{R}$.

15. $\mathbb{R} = \{(x, y)\}: y = 3x - 2\}$, $\mathbb{S} = \{(x, y): y = 3x - 8\}$.
16. $\mathbb{R} = \{(x, y)\}: y = 2x + 5\}$, $\mathbb{S} = \{(x, y): y = 2x - 7\}$.
17. $\mathbb{R} = \{(x, y)\}: y = 6\}$, $\mathbb{S} = \{(x, y): y = -4\}$.

18. $\mathbb{R} = \{(x, y)\}: x = -3\}$, $\mathbb{S} = \{(x, y): x = 2\}$.
19. $\mathbb{R} = \{(x, y)\}: y = x\}$, $\mathbb{S} = \{(x, y): y = 2x\}$.
20. $\mathbb{R} = \{(x, y)\}: y = x\}$, $\mathbb{S} = \{(x, y): y = x^2\}$.

En los ejercicios 21 a 26, determina si el conjunto $\mathbb{S}$ es una rotación del conjunto $\mathbb{R}$.

21. $\mathbb{R} = \{(x, y)\}: y = 5x\}$, $\mathbb{S} = \{(x, y): y = 4x\}$.
22. $\mathbb{R} = \{(x, y)\}: y = 6x\}$, $\mathbb{S} = \{(x, y): y = -4x\}$.
23. $\mathbb{R} = \{(x, y)\}: y = 6\}$, $\mathbb{S} = \{(x, y): y = -4\}$.
24. $\mathbb{R} = \{(x, y)\}: y = -3\}$, $\mathbb{S} = \{(x, y): y = 2\}$.
25. $\mathbb{R} = \{(x, y)\}: y = x\}$, $\mathbb{S} = \{(x, y): y = 3\}$.
26. $\mathbb{R} = \{(x, y)\}: y = x\}$, $\mathbb{S} = \{(x, y): y = x^2\}$.

En los ejercicios 27 a 32, determina si el conjunto $\mathbb{S}$ es una reflexión del conjunto $\mathbb{R}$ con respecto a la recta $y = x$.

27. $\mathbb{R} = \{(x, y)\}: y = x + 2\}$, $\mathbb{S} = \{(x, y): y = x - 2\}$.
28. $\mathbb{R} = \{(x, y)\}: x = y - 5\}$, $\mathbb{S} = \{(x, y): x = y + 5\}$.
29. $\mathbb{R} = \{(x, y)\}: y = 2x + 3\}$, $\mathbb{S} = \{(x, y): y = 2x - 3\}$.
30. $\mathbb{R} = \{(x, y)\}: x = y\}$, $\mathbb{S} = \{(x, y): y = x\}$.
31. $\mathbb{R} = \{(x, y)\}: (x + 5)^2 + (y - 7)^2 = 5\}$, $\mathbb{S} = \{(x, y): (x - 7)^2 + (y + 5)^2 = 5\}$.
32. $\mathbb{R} = \{(x, y)\}: (x + 2)^2 - (y + 6)^2 = -1\}$, $\mathbb{S} = \{(x, y): (x + 6)^2 - (y + 2)^2 = -1\}$.

En los ejercicios 33 a 40 se proporciona una combinación de traslaciones, rotaciones y/o reflexiones. Realiza las transformaciones en el orden dado trazando un diagrama inicial del conjunto $\mathbb{R}$, con un dibujo después de cada transformación; luego, cambia el orden de las transformaciones según se indica y determina si el orden en que éstas se efectúan afecta los resultados.

33. Sea $\mathbb{R} = \{(x, y): y = 2x + 3\}$. Primero: rota $\mathbb{R}$ 90° en sentido contrario al movimiento de las manecillas del reloj y luego 30° en el sentido de las manecillas del reloj. Segundo: rota $\mathbb{R}$ 30° en el sentido de las manecillas del reloj y luego 90° en sentido contrario. ¿El resultado final es una rotación de $\mathbb{R}$?
34. Sea $\mathbb{R} = \{(x, y): y = 2x + 3\}$. Primero: traslada $\mathbb{R}$ 4 unidades a la derecha y 3 unidades hacia abajo; luego trasládala 7 unidades a la izquierda. Segundo: trasládala 7 unidades a la izquierda y después 4 unidades a la derecha y 3 unidades hacia abajo. ¿El resultado final es una traslación de $\mathbb{R}$?
35. Sea $\mathbb{R} = \{(x, y): y = x - 2\}$. Primero: traslada $\mathbb{R}$ 3 unidades a la derecha y luego rótala 90° en el sentido del movimiento de las manecillas del reloj. Segundo: rota $\mathbb{R}$ 90° en el sentido del movimiento de las manecillas del reloj y trasládala 3 unidades a la derecha.
36. Sea $\mathbb{R} = \{(x, y): x + 3\}$. Primero: traslada $\mathbb{R}$ 5 unidades a la izquierda y luego rótala 90° en sentido contrario al movimiento de las manecillas del reloj. Segundo: rota $\mathbb{R}$ 90° en sentido contrario al movimiento de las manecillas del reloj y trasládala 5 unidades a la izquierda.
37. Sea $\mathbb{R} = \{(x, y): y = -2x\}$. Primero: refleja $\mathbb{R}$ con respecto a la recta $y = x$ y luego rótala 30° en sentido contrario al movimiento de las manecillas del reloj. Segundo: rota $\mathbb{R}$ 30° en el mismo sentido y refléjala con respecto a la recta $y = x$.
38. Sea $\mathbb{R} = \{(x, y): y = 3x + 1\}$. Primero: refleja $\mathbb{R}$ con respecto a la recta $y = -x$ y luego rótala 60° en el sentido del movimiento de las manecillas del reloj. Segundo: rota $\mathbb{R}$ 60° en el mismo sentido y refléjala con respecto a la recta $y = -x$.
39. Sea $\mathbb{R} = \{(x, y): x^2 + y^2 = 4\}$. Primero: traslada $\mathbb{R}$ una unidad hacia arriba, rótala 45° en el sentido del movimiento de las manecillas del reloj y luego refléjala con respecto a la recta $y = -x$. Segundo: rota $\mathbb{R}$ 45° en el sentido del movimiento de las manecillas del reloj, trasládala una unidad hacia arriba y refléjala con respecto a la recta $y = -x$. Tercero: refleja $\mathbb{R}$ con respecto a la recta $y = -x$, rótala 45° en el sentido del movimiento de las manecillas del reloj y trasládala una unidad hacia arriba. (Hay otros tres órdenes posibles; enuméralos y traza los dibujos correspondientes.)
40. Sea $\mathbb{R} = \{(x, y): x^2 + (y + 2)^2 = 9\}$. Primero: traslada $\mathbb{R}$ 2 unidades hacia abajo, rótala 45° en sentido contrario al movimiento de las manecillas del reloj y refléjala con respecto a la recta $y = x$. Segundo: refleja $\mathbb{R}$ con respecto a la recta $y = x$, rótala 45° en el mismo sentido y trasládala 2 unidades hacia abajo. Tercero: rota $\mathbb{R}$ 45° en el mismo sentido, trasládala 2 unidades hacia abajo y refléjala con respecto a la recta $y = x$. (Hay otros tres órdenes posibles; enuméralos y elabora los dibujos apropiados.)

Demostraciones:

41. Demuestra que una isometría preserva la relación "entre".

42. Demuestra que una isometría preserva la colinealidad de tres puntos.

43. Demuestra que una isometría en un triángulo produce un triángulo congruente.

44. Una **amplificación** es una transformación $\mathcal{T}$: $\mathbb{R} \leftrightarrow \mathbb{S}$ en que cada punto en $\mathbb{R}$ con coordenadas (x, y) corresponde a un punto en $\mathbb{S}$ con coordenadas (rx, ry), donde $r > 1$. Demuestra que una amplificación preserva la semejanza de triángulos, pero no la congruencia.

45. Una **reducción** es una transformación $\mathcal{T}$: $\mathbb{R} \leftrightarrow \mathbb{S}$ en que cada punto en $\mathbb{R}$ con coordenadas (x, y) corresponde a un punto en $\mathbb{S}$ con coordenadas (rx, ry), donde $0 < r < 1$. Demuestra que una reducción preserva la semejanza de triángulos, pero no la congruencia.

46. Demuestra el teorema 8.7. (*Sugerencia*: sean A y B puntos en $\mathbb{R}$ correspondientes a sus reflexiones A' y B' en $\mathbb{S}$ con respecto a la recta k. Sean P y Q los puntos medios de $\overline{AA'}$ y $\overline{BB'}$, respectivamente. Aplica LL = LL para demostrar que $\triangle APQ \cong \triangle A'PQ$. Explica por qué $\angle AQP \cong \angle A'QP$ y $\angle AQB \cong \angle A'QB'$. Luego aplica LAL = LAL para demostrar que $\triangle AQB \cong \triangle A'QB'$. Se concluye que $AB = A'B'$.)

En los ejercicios 47 a 50, las circunferencias y los cuadrados tienen sus centros en el origen. Aplica la siguiente definición: una* inversión *es una transformación $\mathcal{T}$: $\mathbb{R} \leftrightarrow \mathbb{S}$ en que todo punto de $\mathbb{R}$ con coordenadas (x, y) corresponde a un punto en $\mathbb{S}$ con coordenadas $(x/(x^2 + y^2), y/(x^2 + y^2))$, donde x y y no son ambos cero.

47. Si $\mathbb{R}$ es una circunferencia unitaria, encuentra $\mathbb{S}$ y demuestra que $\mathcal{T}$ es una transformación y también una isometría.

48. Si $\mathbb{R}$ es un cuadrado cuya apotema mide una unidad, encuentra $\mathbb{S}$ y demuestra que $\mathcal{T}$ es una transformación pero no una isometría.

49. Si $\mathbb{R}$ es el interior de una circunferencia unitaria, excluyendo el origen, encuentra $\mathbb{S}$ y demuestra que $\mathcal{T}$ es una transformación pero no una isometría.

50. Si $\mathbb{R}$ es el exterior de una circunferencia unitaria, encuentra $\mathbb{S}$ y demuestra que $\mathcal{T}$ es una transformación pero no una isometría.

Construcciones:

51. Construye la reflexión de un triángulo a través de una recta k. (Hay varios casos: la recta k corta al triángulo en 0, 1 o 2 puntos, o en un segmento de recta.)

52. Construye la reflexión de un cuadrado a través de una recta k. (Hay varios casos: la recta k corta al cuadrado en 0, 1 o 2 puntos, o en un segmento de recta.)

53. Construye la reflexión de una circunferencia P a través de una recta k. (Hay varios casos: la recta k corta a la circunferencia en 0, 1 o 2 puntos.)

TÉRMINOS CLAVE

Abscisa, 215
Amplificación, 237
Coordenada x, 215
Coordenada y, 215
Eje x, 215
Eje y, 215
Forma de pendiente-ordenada al origen de la ecuación de una recta, 219
Forma general de la ecuación de una circunferencia, 225
Forma general de la ecuación de una recta, 218
Forma normal de la ecuación de una circunferencia, 225
Intervalo, 219
Inversión, 237
Isometría, 228
Ordenada, 215
Origen, 215
Par ordenado, 215
Pendiente, 218
Punto medio, 220
Recta vertical, 218
Reducción, 237
Reflexión, 232
Rotación, 231
Simétrico, 232
Transformación, 228
Traslación, 229

EJERCICIOS DE REPASO

En la línea en blanco escribe la expresión **siempre, algunas veces** *o* **nunca,** *según corresponda.*

1. En el par ordenado que representa un punto, la ordenada ________ precede a la abscisa.
2. Un triángulo con vértices en (a, b), (c, b) y $(c, -b)$ ________ es un triángulo rectángulo.
3. La pendiente de una recta ________ es mayor o igual que cero.
4. Las coordenadas del punto medio de un segmento de recta ________ pueden encontrarse tomando la semidiferencia de las abscisas y la semidiferencia de las ordenadas.
5. Si la pendiente de una recta es m, entonces la pendiente de la recta perpendicular a ésta ________ es igual a $-1/m$.

Falso-verdadero. Anota una V si la proposición es verdadera. Si es falsa, sustituye la(s) palabra(s) subrayada(s) a fin de obtener una proposición verdadera.

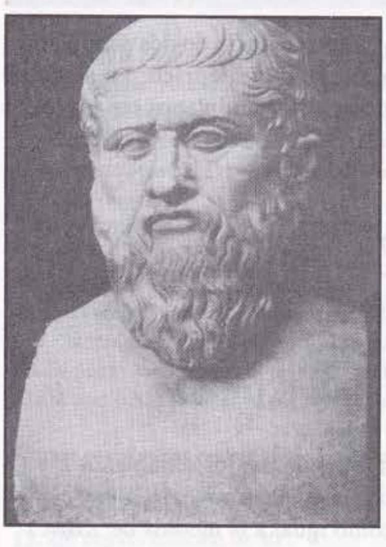
6. La abscisa de un punto representa la distancia del punto al <u>eje *x*</u>.
7. La pendiente de la recta que pasa por $P(4, -3)$ y $Q(4, -5)$ es igual a <u>uno</u>.
8. Las rectas representadas por $4x + 3y = 5$ y $8 - 12x - 9y = 0$ son <u>paralelas</u>.
9. Los puntos $(-7, 5)$, $(-3, 3)$, $(1, 1)$ y $(5, -1)$ <u>son</u> los vértices de un paralelogramo.
10. Dados los puntos $A(4, 3)$ y $B(2, -2)$, la distancia AB es <u>mayor que</u> la distancia del origen a A.

Contesta las siguientes cuestiones.

11. Encuentra la distancia entre $P(5, -8)$ y $Q(12, 8)$.
12. Encuentra la distancia del punto $A(-7, -12)$ al eje x.
13. Encuentra dos puntos que están a una distancia de 10 unidades del origen, de modo que las coordenadas de un punto sean los negativos de las coordenadas del otro punto.
14. Escribe la ecuación de la recta que pasa por el punto $P(0, -7)$ y cuya pendiente es 2.
15. Escribe la ecuación restringida del segmento de recta cuyos puntos extremos son $(2, 5)$ y $(-6, -7)$.
16. Escribe la ecuación de la recta vertical que pasa por el punto $P(5, -2)$.
17. Encuentra la pendiente y la ordenada al origen de la recta representada por $3x - 5y = 11$.
18. Escribe las ecuaciones restringidas del triángulo cuyos vértices son $(2, 2)$, $(-5, 3)$ y $(2, -3)$.
19. Demuestra que el cuadrilátero con vértices $(-3, 3)$, $(-5, 2)$, $(8, -7)$ y $(10, -2)$ es un paralelogramo.
20. Determina si el paralelogramo del ejercicio 19 es o no un rectángulo.
21. Aplica la geometría de coordenadas para demostrar el teorema 5.2: La mediana a la hipotenusa de cualquier triángulo rectángulo mide la mitad que la hipotenusa.
22. Si $\mathbb{R} = \{x: x$ es un entero negativo$\}$, $\mathbb{S} = \{y: y$ es un entero positivo$\}$ y $\mathscr{T}$: $\mathbb{R} \leftrightarrow \mathbb{S}$ está definida por $y = -x$, determina si $\mathscr{T}$ es una transformación.
23. Si $\mathbb{R} = \{(x, y): y = 2x - 5\}$, $\mathbb{S} = \{(x, y): y = 2x\}$ y $\mathscr{T}$: $\mathbb{R} \leftrightarrow \mathbb{S}$ se define como sigue: asocia cada punto en $\mathbb{R}$ con el punto en $\mathbb{S}$ que se obtiene al mantener la misma abscisa y sumar 5 a la ordenada, determina si $\mathscr{T}$ es una isometría.
24. Si $\mathbb{R} = \{(x, y): y = 3x + 1\}$, $\mathbb{S} = \{(x, y): y = 2x - 4\}$, determina si el conjunto $\mathbb{S}$ es una traslación del conjunto $\mathbb{R}$.
25. Si $\mathbb{R} = \{(x, y): y = x - 3\}$, $\mathbb{S} = \{(x, y): y = x + 3\}$, determina si el conjunto $\mathbb{S}$ es una rotación del conjunto $\mathbb{R}$.
26. Si $\mathbb{R} = \{(x, y): y = -2$ para $0 \le x \le 5\}$ y $\mathbb{S} = \{(x, y): x = 2$ para $-5 \le y \le 0\}$, determina si el conjunto $\mathbb{S}$ es una reflexión del conjunto $\mathbb{R}$ con respecto a la recta $y = -x$.

Geometría del espacio

9



Stock Montage, Inc.

PLATÓN (427?–347 a.C.)

NOTA HISTÓRICA *El filósofo griego Platón nació alrededor de 427 a.C. y falleció en 347 a.C. Estableció una conexión entre la geometría pitagórica y la biología de Empédocles mediante una construcción matemática de los elementos. Construyó cuatro de los sólidos regulares: el cubo, el tetraedro, el octaedro y el icosaedro comenzando con el triángulo rectángulo isósceles y el triángulo rectángulo cuya hipotenusa mide el doble que el cateto más corto. Se supuso que estos cuatro sólidos eran las formas de los corpúsculos de la tierra, el fuego, el aire y el agua. Estas ideas afectaron el estudio de la fisiología y la medicina, ya que se consideraron como los bloques fundamentales de todos los compuestos orgánicos e inorgánicos.*

En la sección 1.2 se presentó el postulado 1.6, el cual establece que ningún plano contiene todos los puntos del espacio. Hasta ahora, los capítulos se han centrado en la geometría en un plano y se ha ignorado la existencia de puntos fuera de cualquier plano dado. En este capítulo se presentan temas concernientes al espacio *tridimensional*.

9.1 Rectas y planos en el espacio

En el capítulo 3 se definió que dos rectas distintas en un plano son paralelas si no se cortan. Así, en un plano, dos rectas distintas son paralelas o se cortan. Esto no es cierto en el espacio; de hecho, las **rectas oblicuas** se definen como dos rectas distintas que no se cortan ni son paralelas. En la figura 9.1, las rectas k y m son oblicuas; la recta k está en la cara superior de la *caja* y la recta m en la cara frontal.

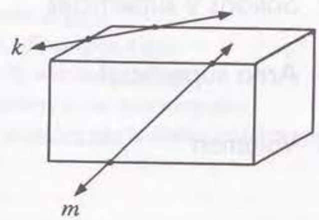


FIGURA 9.1

No obstante, dos *planos* distintos son **paralelos** si no se cortan. Para los planos sólo hay dos posibilidades: son paralelos o se cortan. En la figura 9.1, si el plano que pasa por la cara superior de la caja no corta al plano que pasa por la cara inferior de la caja, entonces es paralelo al segundo.

Para determinar el tipo de objeto que se obtiene cuando dos planos se cortan, se requiere el siguiente postulado.

Postulado 9.1 La intersección de dos planos distintos no paralelos es una recta.

En la figura 9.2 se ilustra la intersección de dos planos y la intersección de dos semiplanos. Cuando dos semiplanos tienen una arista en común, forman un **ángulo diédrico**. La arista de intersección de los dos semiplanos es la **arista** del ángulo diédrico y los semiplanos son los **lados** del ángulo diédrico.

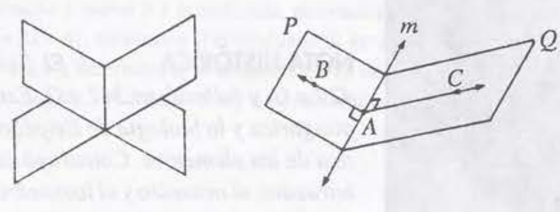


FIGURA 9.2

Considera un punto A en la arista m de un ángulo diédrico formado por los semiplanos P y Q. Sean el punto B en el semiplano P y el punto C en el semiplano Q tales que el rayo $AB \perp m$ y el rayo $AC \perp m$. Entonces, la medida del ángulo diédrico se define como igual a la medida de $\angle BAC$.

Si la unión de dos semiplanos distintos es un plano, entonces los semiplanos son **semiplanos opuestos**. Si dos ángulos diédricos con la misma arista se colocan de modo que los lados de un ángulo diédrico formen semiplanos opuestos con los lados del otro ángulo diédrico, entonces los ángulos diédricos son **ángulos diédricos verticales**.

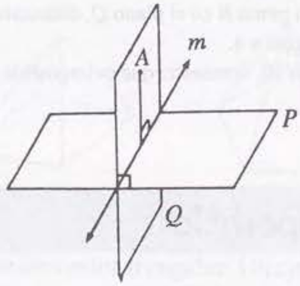


FIGURA 9.3

Dos planos son **perpendiculares** si cada uno de sus ángulos diédricos verticales mide 90°. Para encontrar la **distancia** entre un punto A y un plano P (Fig. 9.3), por el punto A se traza un plano Q perpendicular al plano P y se halla la distancia entre el punto A y la recta de intersección m de los dos planos. En la sección 1.5 se expuso cómo encontrar la distancia entre un punto y una recta.

De manera semejante, la **distancia** entre dos planos paralelos se encuentra al considerar cualquier punto en un plano y determinar la distancia entre ese punto y el otro plano.

EJERCICIOS 9.1

1. Identifica los vértices de la caja de la figura 9.1 como $A, B, C, \ldots, H$. ¿Qué segmentos de recta que forman aristas de la caja son paralelos? ¿Cuáles se cortan? ¿Cuáles son perpendiculares? ¿Cuáles son oblicuos?

***En los ejercicios 2 a 6, sea* m *la recta de intersección de dos planos distintos* P *y* Q*, y sea* A *un punto en* m.**

2. ¿Cuántos planos es posible trazar por m?
3. Si k es una recta en Q, con $k \parallel m$, ¿cuántos planos es posible trazar por m y k?
4. ¿Cuántas rectas perpendiculares a m es posible trazar por A?
5. ¿Es posible trazar una recta perpendicular a ambos planos, P y Q?
6. ¿Cuántos planos a) perpendiculares a m, b) perpendiculares a P, c) perpendiculares a P y Q pueden trazarse por A?

En los ejercicios 7 a 11 ilustra con una figura las respuestas de las preguntas.

7. Dos rectas paralelas, ¿deben estar en el mismo plano?
8. Tres rectas paralelas, ¿deben estar en el mismo plano?
9. ¿En qué condiciones un plano T es paralelo a dos planos R y S?
10. El punto A no está en el plano R, ¿cuántas rectas paralelas a R es posible trazar por A y cuántos planos?
11. El punto A no está en el plano R. ¿Cuántas rectas perpendiculares a R es posible trazar por A y cuántos planos?

Ilustra con figuras cada una de las cuestiones siguientes en los ejercicios 12 a 18:

12. Ángulos diédricos verticales.
13. Un ángulo diédrico de 30°.

14. Un ángulo diédrico de 120°.
15. Un ángulo diédrico de 180°.
16. Planos perpendiculares.
17. Semiplanos opuestos.
18. La distancia de un punto A a un plano P, donde A no está en P.
19. Dados un punto A en el plano P y un punto B en el plano Q, demuestra que es posible que la distancia entre A y B sea igual a 5 cuando la distancia entre P y Q es igual a 4.
20. En la situación descrita en el ejercicio 19, demuestra que es imposible que la distancia entre A y B sea 4 cuando la distancia entre P y Q es igual a 5.

9.2 Sólidos y superficies

La siguiente definición puede parecer algo extraña, ya que se define algo denominado **sólido convexo** sin antes haber definido *sólido*; sin embargo, en este curso no es necesaria la definición general de sólido porque sólo se estudiarán sólidos convexos. Una rosquilla (dona) es un ejemplo de objeto no convexo que casi todo mundo identifica como un sólido.

Definición

Un **sólido convexo** es un conjunto de puntos S, no todos coplanares, tales que para dos puntos cualesquiera A y B en S, todos los puntos entre A y B también están en S.

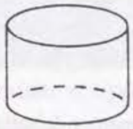
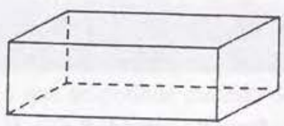
(a)  (b)  (c) 

FIGURA 9.4

Dado un sólido S, supón que se tienen los puntos P y Q en S tales que para todo punto R que satisface Q—P—R, R no está en S. Entonces se dice que P es un **punto superficial** del sólido S. El conjunto de todos los puntos superficiales de S es la **superficie** de S. Todos los puntos de S que no se encuentran en la superficie de S están en el **interior** de S. Los puntos en el espacio que no se hallan en S se localizan en el **exterior** de S. En la figura 9.4 se muestran varios ejemplos de sólidos y superficies.

A continuación se considerarán varios tipos distintos de sólidos. Muchos de éstos te deben ser conocidos.

Definición

Un **poliedro** es un sólido cuya superficie es la unión de un número finito de regiones poligonales.

Cada región poligonal es una **cara** del poliedro. Si la intersección de dos caras es un segmento de recta, entonces éste es una **arista** del poliedro. Si la intersección de dos aristas es un punto, éste es un **vértice** del poliedro.

Definición
Un **poliedro regular** es un sólido cuyas superficies, todas, son regiones poligonales regulares congruentes.

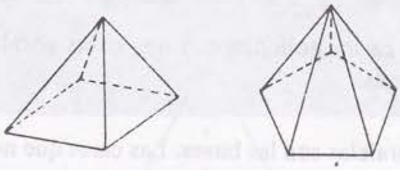


FIGURA 9.5

Un poliedro que no es regular se denomina **irregular**. Un ejemplo de poliedro no necesariamente regular es la **pirámide**, un poliedro con una cara (la **base**) que es una región poligonal arbitraria y cuyas otras caras son regiones triangulares que se encuentran en un punto común: el **vértice**. Un ejemplo específico de pirámide irregular es una pirámide de base cuadrada. Observa la figura 9.5, donde se muestran algunos ejemplos de pirámides. La única pirámide regular posible se muestra en la figura 9.6a.

Sólo existen cinco tipos de poliedros *regulares*. Un **tetraedro** regular (Fig. 9.6a) tiene cuatro caras triangulares equiláteras; un **hexaedro** regular (Fig. 9.6b), o **cubo**, seis caras cuadradas; un **octaedro** regular (Fig. 9.6c), ocho caras triangulares equiláteras, un **dodecaedro** regular (Fig. 9.6d), doce caras pentagonales regulares, por último, un **icosaedro** regular (Fig. 9.6e) tiene veinte caras triangulares equiláteras.

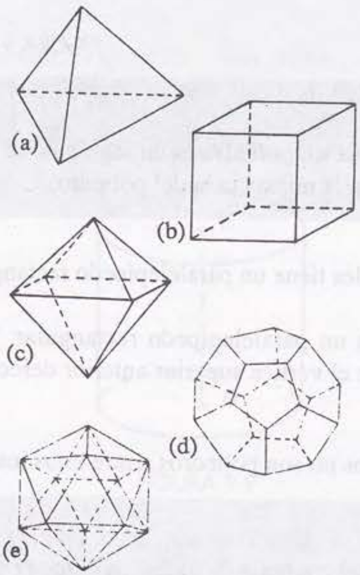


FIGURA 9.6

EJEMPLO 1 Encuentra el número de

a. Caras de un cubo
b. Vértices de un tetraedro
c. Aristas de un octaedro

Solución Los siguientes resultados se determinan al analizar la figura 9.6.

a. Seis caras
b. Cuatro vértices
c. Doce aristas

■

Definición
Un **prisma** es un poliedro con dos caras paralelas congruentes y dos caras que son paralelogramos.

Las caras paralelas son las **bases**. Las caras que no son bases son los **lados**. Un **prisma recto** tiene lados rectangulares.

Definición
Un **paralelepípedo** es un prisma con seis caras que son paralelogramos.

Paralelepípedo rectangular es un nombre elegante para lo que quizá el lector denominaría *caja*. El cubo es un ejemplo de paralelepípedo rectangular. Analiza la figura 9.7, donde se muestran dibujos de prismas.

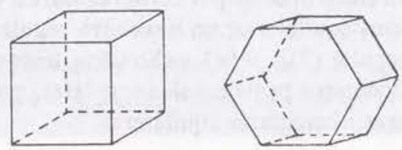


FIGURA 9.7

Definición
Una **diagonal de un poliedro** es un segmento de recta cuyos puntos extremos son vértices que no están en la misma cara del poliedro.

EJEMPLO 2 ¿Cuántas diagonales tiene un paralelepípedo rectangular?

Solución La figura 9.4b es un paralelepípedo rectangular. Tiene cuatro diagonales; por ejemplo, una diagonal va desde el vértice superior anterior derecho al vértice inferior posterior izquierdo del paralelepípedo. ■

Muchos sólidos no son poliedros, entre ellos los siguientes.

Definición
Una **esfera** es el conjunto de todos los puntos en el espacio que están a una distancia dada de un punto dado. La distancia es el **radio** de la esfera y el punto es el **centro** de la esfera.

El **interior de una esfera** es el conjunto de todos los puntos en el espacio que están a una distancia menor que el radio al centro. La unión de la esfera y su interior forma un sólido. Este sólido a menudo también se denomina esfera, lo que puede provocar confusión con la definición anterior. Para los objetivos de este texto, el término *esfera* se refiere a la superficie, excepto cuando se estudien volúmenes de sólidos.

Definición

Sean C una región circular y P un punto que no está en el plano que contiene a la región circular. Un **cono circular** es la unión de C, P y todos los puntos entre P y cada punto de C. Tiene **vértice** P y **base** C.

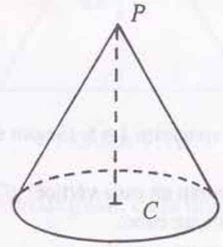


FIGURA 9.8

Resulta evidente que un cono circular es un sólido. El segmento de recta que va de P al plano que contiene a C y es perpendicular a éste es la **altura del cono**. Si el segmento de recta que va de P al centro de la región C es perpendicular al plano que contiene a C, entonces el sólido es un **cono circular recto** (Fig. 9.8). Si el segmento de recta que va de P al centro de la región C *no* es perpendicular al plano que contiene a C, entonces el sólido es un **cono circular oblicuo**. Si se utiliza otra región que no sea circular, el cono es un **cono no circular**.

Definición

Sean C y D dos regiones circulares congruentes en planos paralelos. Un **cilindro circular** es el sólido formado por la unión de C, D y todos los puntos entre cada punto de C y D. Las **bases** del cilindro son C y D.

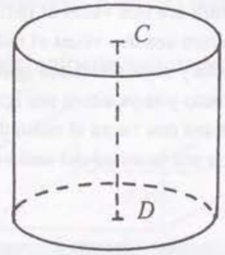


FIGURA 9.9

Si el segmento que une los centros de las regiones circulares es perpendicular a ambos planos, se trata de un **cilindro circular recto** (Fig. 9.9). Si el segmento que une los centros de las regiones circulares *no* es perpendicular a ambos planos, entonces el sólido es un **cilindro circular oblicuo.** En caso de utilizar otra región que no sea circular, el cilindro es un **cilindro no circular**.

En general, una **altura de un sólido** que tiene una base es un segmento de recta que satisface las tres condiciones siguientes para el plano que contiene a la base.

i. Es perpendicular al plano.
ii. Un punto extremo está en el plano.
iii. El otro punto extremo es un punto, en el sólido, más alejado del plano.

EJERCICIOS 9.2

En los ejercicios 1 a 6, sean f el número de caras, v el número de vértices y e el número de aristas del poliedro.

1. Encuentra f, v y e para un tetraedro.
2. Encuentra f, v y e para un cubo.
3. Encuentra f, v y e para un octaedro.
4. Encuentra f, v y e para un dodecaedro.
5. Encuentra f, v y e para un icosaedro.
6. Encuentra $f + v - e$ para cada uno de los ejercicios 1 a 5. (Según el teorema de Euler: todo poliedro, regular o irregular, tiene la propiedad de que $f + v - e = 2$.)
7. ¿Cuántas caras de un tetraedro se encuentran en cada vértice? ¿Cuántas aristas hay en cada vértice?
8. Contesta las preguntas del ejercicio 7 para un cubo.
9. Contesta las preguntas del ejercicio 7 para un octaedro.
10. Halla el número de grados en la suma de las medidas de los ángulos en cada vértice de un tetraedro, un cubo, un octaedro y un icosaedro. (Puede demostrarse que esta suma siempre debe ser menor que 360°.)
11. ¿Cuántas diagonales tiene un tetraedro?
12. ¿Cuántas diagonales tiene un octaedro?
13. ¿Cuántas diagonales posee un dodecaedro?
14. ¿Cuántas diagonales hay en un icosaedro?

En las figuras 9.4 a 9.9 se muestran dibujos de objetos tridimensionales; úsalos como guía para trazar las figuras tridimensionales indicadas en los ejercicios 15 a 26.

15. Un tetraedro irregular.
16. Un hexaedro irregular.
17. Un poliedro irregular de nueve caras.
18. Dibuja una pirámide cuya base sea hexagonal. ¿Cuántas caras tiene?
19. Traza un prisma cuyas caras paralelas sean pentágonos. ¿Cuántas caras y diagonales tiene?
20. Dibuja un paralelepípedo.
21. Traza un cilindro circular recto cuya altura sea tres veces el radio de la base.
22. Dibuja un cilindro circular recto cuya altura sea dos veces el radio de la base.
23. Traza un cilindro circular que no sea recto y cuya altura sea igual al radio de la base.
24. Dibuja un cilindro circular que no sea recto y cuya altura sea igual a la mitad del radio de la base.
25. Traza un cono circular recto cuya altura sea dos veces el radio de la base.
26. Dibuja un cono circular recto cuya altura sea la mitad del radio de la base.

9.3 Área superficial

En el capítulo 7 se analizaron varios teoremas relacionados con las áreas de polígonos, los cuales se usarán ahora para encontrar el área superficial de los poliedros.

Definición
El **área superficial** de un poliedro es la suma de las áreas de las caras del poliedro.

EJEMPLO 1 Encuentra el área superficial de un tetraedro regular, cada una de cuyas aristas mide 2 pulgadas.

Solución Hay cuatro caras, cada una de las cuales tiene la misma área. Por el teorema 7.3, cada cara es un triángulo equilátero de área $\sqrt{3}$ in². Observa la figura 9.10. Así, el área superficial es $4\sqrt{3}$ in². ■

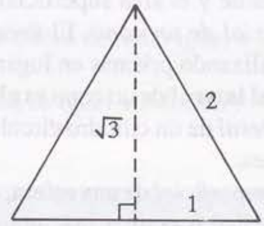


FIGURA 9.10

EJEMPLO 2 Halla el área superficial de un dodecaedro regular, cada una de cuyas caras tiene apotema a y lado s.

Solución Observa la figura 9.11. Hay doce caras, cada una de las cuales tiene la misma área. Cada cara es un pentágono regular cuyo perímetro mide $5s$. Así, por el corolario 1 del teorema 7.3, su área es de $5as/2$ unidades cuadradas y el área superficial del dodecaedro es de $30as$ unidades cuadradas. ■

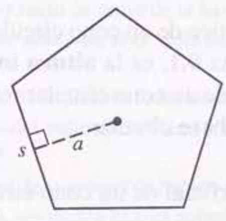


FIGURA 9.11

Aunque los ejemplos previos muestran cómo encontrar las áreas superficiales de poliedros regulares, los poliedros no necesariamente tienen que ser regulares para hallar sus áreas superficiales.

EJEMPLO 3 Encuentra el área superficial del paralelepípedo rectangular de la figura 9.12.

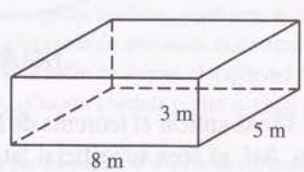


FIGURA 9.12

Solución El paralelepípedo rectangular mide 8 m de largo, 3 m de alto y 5 m de ancho. (Los nombres *largo*, *ancho* y *alto* se eligen arbitrariamente para identificar las aristas, aunque por lo general se considera que el largo es mayor que el ancho.) Al aplicar el teorema 7.1 se encuentra que dos de las caras tienen un área de 24 m² cada una, dos tienen un área de 40 m² cada una y dos tienen un área de 15 m² cada una. Así, el área del paralelepípedo es de 158 m². ■

Considera un cono circular formado por una región circular C y un punto P que no está en el plano que contiene a C. Sea D una región poligonal formada al inscribir un polígono regular en el círculo. La unión de P, D y todos los puntos entre P y los puntos de D forma una pirámide con base D, que está *inscrita* en el cono. Considera qué ocurre a medida que se incrementa el número de lados de la base (Fig. 7.12). El perímetro del polígono tiende a la circunferencia del círculo como valor límite y el área superficial de la pirámide tiende a un número que se define como el *área superficial de un cono*. El *área superficial de un cilindro circular* se define de manera semejante, utilizando prismas en lugar de pirámides.

El **área superficial lateral** de un cono es el área superficial del cono menos el área de su base. El *área superficial lateral* de un cilindro circular es el área superficial del cilindro circular menos el área de sus dos bases.

Al definir el *área superficial* de una esfera, en ésta se inscriben poliedros, aunque debe tenerse mucho cuidado. El poliedro regular más grande tiene veinte caras; por lo tanto, no es posible continuar aumentando la cantidad de caras de los poliedros regulares inscritos en una esfera; es necesario utilizar poliedros irregulares. Al hacerlo, debe tenerse cuidado, en que estos poliedros se *aproximen* a la esfera a medida que se incrementa el número de caras. El valor límite del área superficial de los poliedros es el área superficial de la esfera.

Los siguientes teoremas se plantean sin demostración.

Teorema 9.1 ($S = \pi rs$) El área superficial lateral de un cono circular recto es el producto de π, el radio del círculo y la distancia del vértice a cualquier punto del círculo.

La distancia del vértice de un cono circular recto a cualquier punto del círculo, a la que se hizo referencia en el teorema 9.1, es la **altura inclinada** del cono. Entonces puede afirmarse que el área superficial lateral de un cono circular recto es el producto de la altura inclinada y la mitad de la circunferencia de la base circular.

EJEMPLO 4 Encuentra el área superficial de un cono circular recto de radio 3 pulgadas y altura 4 pulgadas.

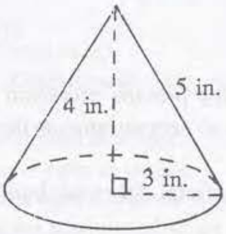


FIGURA 9.13

Solución Observa la figura 9.13. Al aplicar el teorema de Pitágoras se encuentra que la distancia del vértice al círculo mide 5 in. Así, el área superficial lateral es 15π in^2 y el área de la base es 9π in^2. Se concluye que el área superficial total es de 24π in^2. ■

Teorema 9.2 ($S = 2\pi ra$) El área superficial lateral de un cilindro circular recto es dos veces el producto de π, el radio del círculo y la longitud de la altura del cilindro.

También puede decirse que el área superficial lateral de un cilindro circular recto es el producto de la circunferencia del círculo y la altura del cilindro.

EJEMPLO 5 Encuentra el área superficial de un cilindro circular recto con radio 2 pies y altura 7 pies.

Solución El área superficial lateral es 28π ft^2 y el área de cada base es 4π ft^2. Así, el área superficial total es 36π ft^2. ■

Teorema 9.3 ($S = 4\pi r^2$) El área superficial de una esfera es cuatro veces el producto de π y el cuadrado del radio.

EJEMPLO 6 Encuentra el área superficial de una esfera de radio igual a 5 millas.

Solución Por el teorema 9.3, el área superficial es igual a 100π mi^2. ■

EJERCICIOS 9.3

1. Encuentra el área superficial de un tetraedro regular si cada una de sus aristas mide 3 m. Compara esta área con la de un octaedro regular cuyas aristas miden 3 m cada una.
2. Halla el área superficial de un cubo si cada una de sus aristas mide 16/3 in.
3. Encuentra el área superficial de un paralelepípedo rectangular que mide 12 in de largo, 10 in de ancho y 5 in de alto.
4. Determina el área superficial de un icosaedro si cada una de sus aristas mide 8 cm.
5. Encuentra el área superficial lateral de un cono cuyo radio de la base mide 5 cm y cuya altura mide 8 cm.
6. Halla el área superficial total de un cono si el radio de la base mide 6 in y la altura mide 8 in.
7. Encuentra el área superficial lateral de un cilindro circular recto de radio de la base igual a 7 in y altura igual a 10 in.
8. Determina el área superficial total de una lata cilíndrica de aluminio si el radio de la parte inferior mide 8 cm y la altura mide 15 cm.
9. El radio de la Tierra mide aproximadamente 4000 millas. Si el planeta fuese una esfera perfecta (totalmente lisa), ¿cuál sería su área superficial aproximada? Busca una aproximación del radio de la Tierra hasta la milla más cercana y encuentra el área superficial. ¿Cómo se comparan las dos aproximaciones?
10. Considera el cono de un helado con un hemisferio (la mitad de la esfera) de helado en la parte superior. Si el diámetro de la parte superior del cono mide 3 in y la altura del cono mide 5 in, encuentra el área superficial total del cono y el helado.
11. Traza la figura y determina el área superficial total de un prisma recto cuyas caras paralelas son triángulos equiláteros con lados de 6 in y cuyas caras laterales son cuadrados.
12. Las dimensiones originales de la gran pirámide de Keops en Egipto eran aproximadamente 750 ft a lo largo de cada lado de la base cuadrada y 481 ft de alto. Si los lados fuesen triángulos, ¿cuál sería el área superficial de la pirámide?
13. Si se duplican el radio y la altura de un cono circular recto, ¿qué ocurre con el área superficial lateral?
14. Si se triplican el radio y la altura de un cono circular recto, ¿qué pasa con el área superficial lateral?
15. En un cilindro circular recto, si se triplica el radio y se duplica la altura, ¿qué sucede con el área superficial lateral?
16. En un cilindro circular recto, si se duplica el radio y se triplica la altura, ¿qué ocurre con el área superficial lateral?
17. ¿Cuál es la razón del área superficial de dos esferas, si el radio de una mide dos veces lo que el radio de la otra?
18. ¿Cuál es la razón del área superficial de dos esferas, si el radio de una es el triple del radio de la otra?
19. Un tanque de base circular tiene forma de hemisferio. ¿Cuánto costaría pintar la parte interna del tanque si su radio mide 75 ft y cada galón de pintura cubre 20 ft^2 y cuesta \$6?
20. Un tanque en forma de cilindro circular recto con las partes superior e inferior cerradas tiene un radio de 20 ft y una altura de 60 ft. ¿Cuánto costaría pintar la parte interna del tanque si cada galón de pintura cubre 25 ft^2 y cuesta \$8?

9.4 Volumen

En esta sección se analizarán postulados y teoremas relacionados con los volúmenes de los sólidos. Debido a la naturaleza elemental de este texto, no se demostrarán los teoremas, aunque se denominarán teoremas para que tengas en cuenta que sus demostraciones son posibles.

Dado un cubo de arista igual a una unidad de longitud, se dice que el **volumen** del cubo es de una **unidad cúbica**; por ejemplo, un cubo cuya arista mide una milla de largo tiene un volumen de una milla cúbica. El volumen de un cubo cuya arista mide un centímetro de longitud es igual a 1 centímetro cúbico.

El siguiente postulado extiende el concepto de volumen a un conjunto más amplio de sólidos.

Postulado 9.2 El volumen de un paralelepípedo rectangular es igual al área de una base multiplicada por la distancia a su base paralela.

EJEMPLO 1 Encuentra el volumen del paralelepípedo rectangular que se ve en la figura 9.14.

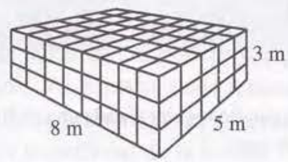


FIGURA 9.14

Solución El paralelepípedo rectangular tiene un volumen de 120 m^3. Dos caras paralelas cualesquiera del paralelepípedo pueden considerarse como las bases; por ejemplo, si se considera que la base mide 8 m por 5 m, entonces el volumen se calcula al multiplicar 40 m^2 por 3 m. Si en vez de esto se considera que la base mide 3 m por 5 m, entonces el volumen se calcula multiplicando 15 m^2 por 8 m. ■

Para calcular los volúmenes de varios de los sólidos que ya se han estudiado se requiere un postulado denominado **principio de Cavalieri.** Como preparación para este postulado se proporciona la siguiente definición.

Definición

Una **sección transversal** es la intersección no vacía de un sólido y un plano. Si un plano corta más de un sólido, las secciones transversales son **secciones transversales correspondientes.**

Postulado 9.3 Dos sólidos tienen el mismo volumen si todo plano paralelo a un plano dado los corta de modo que las secciones transversales correspondientes tengas áreas iguales.

Este principio puede ilustrarse colocando dos mazos idénticos de cartas sobre una superficie plana. Cuidadosamente, apila las cartas de un mazo una sobre otra a la vez que haces lo mismo con la otra baraja, pero de modo que los bordes de cartas distintas apunten en direcciones diferentes. Si para fines ilustrativos se ignora el grosor de las cartas, cada una representa una sección transversal del sólido en que se halla. Así, aunque las formas de los dos sólidos son diferentes, tienen el mismo volumen. Puedes demostrar este principio utilizando monedas de diferente denominación para mostrar que no es necesario que las secciones transversales de un sólido tengan la misma área que las otras secciones transversales en el mismo sólido.

Teorema 9.4 *($V = Ba$)* El volumen de un prisma o de un cilindro circular es igual al área de una base multiplicada por la longitud de la altura.

EJEMPLO 2 Encuentra el volumen de un prisma cuya base es un hexágono regular de 8 pulgadas de arista y cuya altura mide 10 pulgadas.

Solución Por el corolario 1 del teorema 7.3, el área de la base es $96\sqrt{3}$ in², de modo que el volumen del prisma es de $960\sqrt{3}$ in³. ■

EJEMPLO 3 Halla el volumen de un cilindro circular de 10 pulgadas de altura y cuya base es un círculo de 8 pulgadas de radio.

Solución El área de la base es de 64π in² y el volumen del cilindro circular es de 640π in³. ■

Teorema 9.5 **($V = Ba/3$)** El volumen de una pirámide o de un cono circular es igual a un tercio del área de la base multiplicada por la longitud de la altura.

EJEMPLO 4 Encuentra el volumen de una pirámide si su altura mide 5 pulgadas y su base es un cuadrado de 9 pulgadas de arista.

Solución El área de la base es de 81 in², de modo que el volumen de la pirámide es 27 in² multiplicadas por 5 in, lo que da un resultado de 135 in³. ■

EJEMPLO 5 Encuentra el volumen de un cono cuya base es un círculo de 9 pulgadas de radio y cuya altura mide 5 pulgadas.

Solución El área de la base es de 81π in², de modo que el volumen del cono circular es de 135π in³. ■

Teorema 9.6 **($V = 4\pi r^3/3$)** El volumen de una esfera es igual a cuatro tercios del producto de π y el cubo del radio.

EJEMPLO 6 Encuentra el volumen de una esfera de 6 metros de radio.

Solución Por el teorema 9.6, el volumen es $4\pi/3$ multiplicado por 216 in³, con lo que se obtiene un resultado de 288π in³. ■

¡PRECAUCIÓN! Es necesario memorizar cada fórmula para calcular el área superficial y el volumen, así como la figura geométrica a la que se aplican tales fórmulas. A continuación se muestra una lista de las fórmulas más importantes presentadas en este capítulo:

$S = \pi rs$	Cono circular recto
$S = 2\pi ra$	Cilindro circular recto
$S = 4\pi r^2$	Esfera
$V = Ba$	Prisma, cilindro circular
$V = Ba/3$	Pirámide, cono circular
$V = 4\pi r^3/3$	Esfera

EJERCICIOS 9.4

1. Encuentra el volumen de un paralelepípedo rectangular cuyas dimensiones son 20 m, 7 m y 3 m.
2. Si se duplican las tres dimensiones de un paralelepípedo, encuentra la razón del nuevo volumen al anterior.
3. Resuelve el ejercicio 2 si se triplica cada una de las tres dimensiones.

4. La base de un prisma es un paralelogramo cuyos lados miden 4 cm y 10 cm, y forman un ángulo de 60°. Si el prisma mide 5 cm de altura, ¿cuál es su volumen?
5. Encuentra el volumen de un cilindro circular recto si el radio de la base mide 12 m y la altura mide 8 m.
6. Encuentra el volumen de una pirámide de 12 in de altura que tiene una base cuadrada de 7 in de arista.
7. La base de una pirámide es un hexágono que mide 4 cm por lado. Si la altura de la pirámide mide 5 cm, encuentra su volumen.
8. Encuentra el volumen de un cono circular si el radio de la base mide 5 ft y la altura mide 12 ft.
9. Escribe una fórmula para calcular el volumen de un cono circular recto en términos del radio r, si el radio y la altura miden lo mismo.
10. Encuentra el volumen de una esfera si el diámetro mide 10 cm.
11. Encuentra el volumen aproximado de la Tierra suponiendo que es una esfera de 4000 mi de radio. Busaca una aproximación del radio de la Tierra hasta la milla más cercana y encuentra el volumen. ¿Cómo se comparan las dos aproximaciones?
12. ¿Cuál es la razón del volumen de dos esferas, si el radio de una es el doble que el radio de la otra?
13. Encuentra el volumen del cono de helado y del helado en el punto 10 de los ejercicios 9.3.
14. Un cohete tiene forma de cilindro circular recto coronado por un cono circular recto del mismo radio. ¿Cuál es su volumen si la altura del cilindro mide 250 ft, la altura del cono mide 140 ft y el radio mide 60 ft?
15. La forma de un tanque es de cilindro circular recto de 15 ft de longitud y 4 ft de diámetro, con un hemisferio en cada extremo del cilindro. Encuentra el volumen del tanque.
16. Si las naranjas esféricas de Florida miden el doble del diámetro de las naranjas esféricas de California, ¿pagarías cinco veces más por las naranjas de Florida? ¿Por qué?
17. Julia es exactamente dos veces más fuerte que Gerardo. Si Gerardo puede levantar una bola de 5 cm de diámetro, ¿cabe suponer que Julia es capaz de levantar una bola del mismo material que mida 8 cm de diámetro? ¿Por qué?
18. Una persona desea construir una acera alrededor de una fuente circular de 30 ft de diámetro. La acera cubre la región entre dos círculos concéntricos, donde el círculo interior acota a la fuente. La acera debe medir 4 ft de ancho y 6 in de grueso. Encuentra el volumen del cemento necesario para construir la acera.
19. Una receta con limones requiere 15 limones esféricos de 2 in de diámetro; pero sólo es posible encontrar limones de 3 in de diámetro. ¿Cuántos limones se necesitan para la receta?

TÉRMINOS CLAVE

Altura de un cono, 245
Altura de un sólido, 245
Altura inclinada, 248
Ángulo diédrico, 240
Ángulos diédricos verticales, 241
Área superficial, 246
Área superficial lateral, 248
Arista de un ángulo diédrico, 240
Arista de un poliedro, 242
Base de un cilindro, 245
Base de un cono, 245
Base de un prisma, 244
Base de una pirámide, 243
Cara de un poliedro, 242
Centro de una esfera, 244
Cilindro circular, 245
Cilindro circular oblicuo, 245
Cilindro circular recto, 245
Cilindro no circular, 245
Cono circular, 245
Cono circular oblicuo, 245
Cono circular recto, 245
Cono no circular, 245
Cubo, 243
Diagonal de un poliedro, 244
Distancia entre dos rectas paralelas, 241
Distancia entre un punto y un plano, 241
Dodecaedro, 243
Esfera, 244
Exterior de un sólido, 242
Hexaedro, 243
Icosaedro, 243
Interior de un sólido, 242
Interior de una esfera, 244
Lado de un ángulo diédrico, 240
Lado de un prisma, 244
Octaedro, 243
Paralelepípedo, 244
Pirámide, 243
Planos paralelos, 240
Planos perpendiculares, 241
Poliedro, 242
Poliedro regular, 243
Principio de Cavalieri, 250
Prisma, 244
Prisma recto, 244

Punto superficial, 242
Radio de una esfera, 244
Rectas oblicuas, 240
Sección transversal, 250
Secciones transversales correspondientes, 250
Semiplanos opuestos, 241
Sólido, 242
Sólido convexo, 242
Superficie, 242
Tetraedro, 243
Unidad cúbica, 249
Vértice de un cono, 245
Vértice de un poliedro, 242
Vértice de una pirámide, 243
Volumen, 249

EJERCICIOS DE REPASO

En la línea en blanco escribe la expresión* siempre, algunas veces *o* nunca, *según corresponda.

1. Dos rectas que no se cortan en el espacio __________ son paralelas.
2. Dos planos que no se cortan __________ son paralelos.
3. Dados los puntos A y B en un sólido convexo, un punto C entre A y B __________ está en el exterior del sólido.
4. Un punto superficial de un sólido __________ es un punto del sólido.
5. Un prisma __________ es un paralelepípedo rectangular.
6. El área superficial lateral de un cono circular __________ es igual a su área total.
7. El área superficial lateral de un cilindro circular __________ es igual a la suma de las áreas de sus bases.
8. Dos sólidos __________ tienen el mismo volumen, si todo plano paralelo a un plano dado corta a los dos sólidos de modo que las secciones transversales correspondientes tengan áreas desiguales.
9. Dados dos sólidos con la misma base, uno de los cuales es un cilindro circular recto y el otro es un cono circular recto, los sólidos __________ tienen el mismo volumen.
10. Un tetraedro regular __________ tiene caras hexagonales.

Falso-verdadero: Anota una V si la proposición es verdadera. Si es falsa, sustituye la(s) palabra(s) subrayada(s) a fin de obtener una proposición verdadera.

11. Dos planos distintos que no se cortan son <u>paralelos</u>.
12. Cuando dos <u>planos</u> se cortan a lo largo de sus aristas, forman un ángulo diédrico.
13. Si dos rectas en el espacio no se cortan, son paralelas o <u>perpendiculares</u>.
14. Hay exactamente <u>cinco</u> tipos de poliedros regulares.
15. Un dodecaedro regular tiene doce caras <u>hexagonales</u> regulares.
16. La distancia entre dos planos que <u>se cortan</u> se encuentra al considerar cualquier punto en un plano y determinar la distancia entre ese punto y el otro plano.
17. Un plano <u>puede</u> ser perpendicular a dos planos que se cortan.
18. Un hexaedro regular tiene <u>ocho</u> caras.
19. Las dos caras paralelas de un prisma <u>pueden ser</u> congruentes.
20. Un dodecaedro tiene <u>más</u> caras que un icosaedro.

Contesta las siguientes cuestiones.

21. En el espacio, por un punto fuera de una recta dada, ¿cuántas rectas paralelas a la recta dada hay?
22. En el espacio, por un punto fuera de una recta dada, ¿cuántas rectas oblicuas a la recta dada hay?
23. Si cada arista de un cubo mide 3 in. ¿cuántos de estos cubos pequeños son necesarios para formar un cubo de 12 in de arista?
24. ¿Cuántas caras de un icosaedro regular se encuentran en cada vértice?
25. Encuentra el área superficial de un tetraedro regular de 5 cm de arista
26. Halla el área superficial de un icosaedro regular de 20 mi de arista.

27. ¿Qué sólido tiene mayor volumen, un cono circular recto de 10 in de altura y radio de la base igual a 6 in o una pirámide de 10 in de altura y base cuadrada de 10 in por lado?
28. Encuentra el área superficial lateral de un cono circular recto cuya base mide 7 in de radio, si la distancia del vértice del cono a su base mide 10 in.
29. Encuentra el área superficial total de un cilindro circular recto de 20 ft de altura y cuyas bases miden 9 ft de radio.
30. Halla el área superficial de una esfera de 3900 mi de radio.
31. Si un paralelepípedo rectangular tiene un volumen de 127 m^3 y mide 3 m de largo por 9 m de ancho, encuentra su altura.
32. Supón que un sólido tiene un volumen de 192.3 cm^3 y que todo plano paralelo a un plano dado corta a este sólido y a un segundo sólido de modo que las secciones transversales correspondientes tengan la misma área. ¿Cuál es el volumen del segundo sólido?
33. Supón que un prisma tiene una base de área igual a 29 yd^2 y una altura de 15 yd de largo. Encuentra el volumen del prisma.
34. Supón que una pirámide de 13 ft de altura tiene una base de 17 lados cuya área es de 23 ft^2. ¿Cuál es el volumen de la pirámide?
35. Encuentra el volumen de una esfera cuyo radio mide 93 millones de mi.

Geometrías no euclidianas

10

Stock Montage, Inc.

KARL FRIEDRICH GAUSS (1777–1855)

NOTA HISTÓRICA *Karl Friedrich Gauss (1777-1855) fue conocido como "el príncipe de los matemáticos". Cuando tenía tres años podía corregir los errores de cómputo que cometía su padre en la nómina. A los doce años cuestionó los fundamentos de la geometría euclidiana. A los 16 ya había desarrollado algunas de las primeras ideas de una geometría no euclidiana; sin embargo, no le interesaba publicar sus resultados. A los 19 demostró que la construcción de un polígono regular de 17 lados era posible. Este logro lo convenció de convertirse en matemático, y no en filósofo. La exactitud era extremadamente importante en los análisis matemáticos de Gauss y cuestionó demostraciones añejas en geometría. Conoció los trabajos de Lobachevski y Bolyai, que dieron origen a la geometría no euclidiana. No obstante, obtuvo sus resultados de manera independiente y quizá fue el primero en usar el término* no euclidiano.

En el capítulo 3 se indicó que el postulado 3.1, el postulado de las paralelas, causó bastante controversia durante muchos siglos. Los matemáticos que intentaron demostrarlo, y así transformarlo en teorema, fracasaron. Después, decidieron que la proposición debía ser independiente de los demás postulados y, por lo tanto, indemostrable. Probaron este hecho desarrollando modelos de otras geometrías (las geometrías no euclidianas) que satisfacen todos los postulados, con la excepción del postulado de las paralelas.

10.1 Geometría hiperbólica

En esta sección se analizará un modelo de **geometría hiperbólica**; en la siguiente sección se presentará un modelo de **geometría elíptica**.

Dos matemáticos, Nikolai Ivanovich Lobachevski (1792-1856), en Rusia, y Johann Bolyai (1802-1860), en Hungría, crearon el siguiente postulado.

Postulado L-B Por un punto fuera de una recta dada pasa una infinidad de paralelas a la recta.

A continuación se presenta un modelo bastante sencillo, proporcionado por el francés Henri Poincaré (1854-1912), de una **geometría no euclidiana** que satisface el postulado L-B.

Recuerda que los términos *plano* y *recta* son indefinidos. Los planos y las rectas se han estado representando por medio de figuras como las de la figura 1.1. Poincaré representó un plano usando el interior de un círculo; se ignoran los puntos sobre la circunferencia o fuera de ésta.

Poincaré presentó las rectas de una forma en que se requiere definir los círculos ortogonales.

Definición
Dos círculos son **ortogonales** si sus tangentes son perpendiculares en los puntos de intersección.

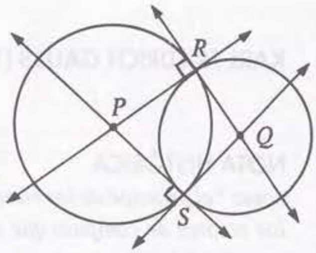


FIGURA 10.1

Así, en la figura 10.1, el círculo P y el círculo Q son ortogonales si las tangentes al círculo P y al círculo Q en R son perpendiculares y las tangentes al círculo P y al círculo Q en S son perpendiculares.

El **plano de Poincaré** se denotará por el **interior del círculo** P. Poincaré representa las rectas como

a. La intersección del interior del círculo P con un diámetro del círculo P,
b. La intersección del interior del círculo P con círculos ortogonales al círculo P.

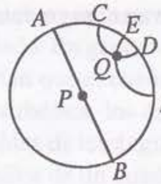


FIGURA 10.2

En esta representación de las rectas, las rectas *no* tienen puntos extremos, como en geometría euclidiana. En la figura 10.2 los puntos A y B no están sobre la recta AB, ya que no se hallan en el interior del círculo P. Asimismo, los puntos C y D no están en la recta CD y los puntos E y F no se encuentran en la recta EF.

No es difícil demostrar que el sistema desarrollado con este modelo satisface todos los postulados de la **geometría euclidiana**, salvo el postulado de las paralelas. Debido a que este texto es introductorio, se limita a un análisis intuitivo del modelo de Poincaré.

Puesto que dos rectas son paralelas si no se cortan, es fácil darse cuenta de que en este sistema hay una infinidad de rectas paralelas que pasan por un punto fuera de una recta.

EJEMPLO 1 En el modelo de Poincaré, muestra dos dibujos para los cuales haya más de una recta paralela a una recta que pasa por un punto fuera de la recta.

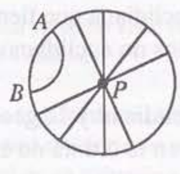


FIGURA 10.3

Solución En la figura 10.2, las rectas CD y EF, pasan por el punto Q, y ambas son paralelas a la recta AB. En la figura 10.3 se observan la recta AB y cuatro rectas que pasan por el punto P y que no cortan a la recta AB. ■

Con base en la figura 10.3 también es fácil observar que una infinidad de rectas paralelas a la recta AB puede pasar por el punto P.

En este modelo geométrico, objetos como segmentos de recta, rayos, ángulos y polígonos conservan la definición anterior, pero pueden tener otra apariencia. No es necesario dibujar flechas sobre los extremos de los rayos; en vez de ello se omiten los puntos extremos.

EJEMPLO 2 Aplica el modelo de Poincaré para mostrar un dibujo de un segmento de recta, un rayo, un ángulo y un triángulo.

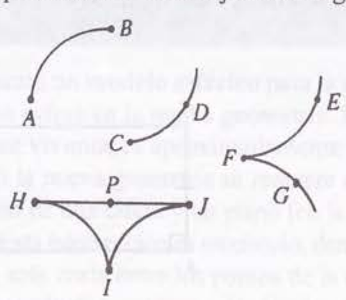


FIGURA 10.4

Solución En la figura 10.4 se observan el segmento de recta AB, el rayo CD, el ángulo EFG y el triángulo HIJ. ■

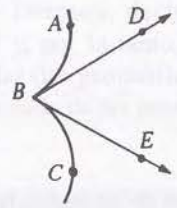


FIGURA 10.5

Aunque los ángulos se definen como en la geometría euclidiana y se puede seguir aplicando el postulado del transportador, es necesario saber determinar la medida de un ángulo en esta nueva geometría. Dado el ángulo ABC en la figura 10.5, en la geometría anterior se forma el ángulo DBE usando los dos rayos tangentes en el vértice B. Después $m\angle ABC$ se define como igual a $m\angle DBE$ de la geometría anterior.

Al usar esta interpretación de medida, la suma de las medidas de los ángulos de un triángulo siempre es *menor de* 180°. En la figura 10.6, los objetos trazados con segmentos de recta continuos representan triángulos en la nueva geometría. Los segmentos de recta discontinuos indican los triángulos en geometría euclidiana que tienen los mismos vértices. Observa que las medidas de los ángulos de los triángulos no euclidianos son menores que las medidas de los ángulos de los triángulos euclidianos.

Entre la geometría euclidiana y la geometría hiperbólica existen muchas otras diferencias interesantes; por ejemplo, en la última no existen rectángulos.

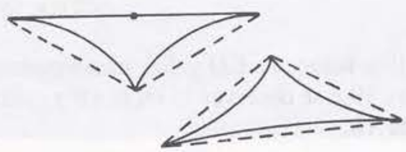


FIGURA 10.6

Definición

El cuadrilátero $ABCD$ es un **cuadrilátero de Saccheri** si $\angle A$ y $\angle B$ son ángulos rectos y $AD = BC$. El segmento AB es la **base inferior,** el segmento CD es la **base superior,** $\angle A$ y $\angle B$ son los **ángulos de la base inferior** y $\angle C$ y $\angle D$ son los **ángulos de la base superior.**

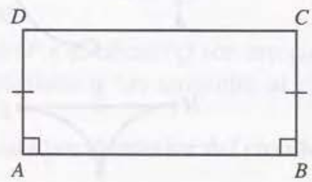


FIGURA 10.7

Verbalmente, un cuadrilátero de Saccheri es un cuadrilátero con un par de lados iguales, ambos perpendiculares al mismo tercer lado. En geometría euclidiana, el diagrama se vería como la figura 10.7 y las condiciones implicarían que el cuadrilátero es un rectángulo. No obstante, en el modelo de Poincaré de geometría hiperbólica, los ángulos de la base superior no pueden ser rectos. (Debido a que la suma de las medidas de los ángulos de un triángulo siempre es menor que 180°, la suma de las medidas de los ángulos de un cuadrilátero siempre es menor que 360°.)

Para los estudiantes interesados en profundizar el estudio de estos temas, puede demostrarse que

a. Las diagonales de un cuadrilátero de Saccheri son congruentes y que
b. Los ángulos de la base superior de un cuadrilátero de Saccheri son congruentes.

EJERCICIOS 10.1

Contesta las siguientes preguntas para el modelo de Poincaré de geometría hiperbólica.

1. Por un punto fuera de una recta, ¿cuántas paralelas a ésta hay?
2. ¿En cuántos puntos se corta cada par de rectas?
3. ¿Cuántos ángulos rectos puede tener un triángulo?
4. Si dos rectas distintas son paralelas a una tercera recta, ¿son paralelas entre sí?
5. Por un punto fuera de una recta, ¿cuántas perpendiculares a ésta hay?
6. ¿Qué polígono tiene el menor número de lados?
7. ¿Qué puede afirmarse sobre la suma de las medidas de los ángulos de un triángulo?
8. ¿Es cierto que para tres puntos en una recta, exactamente uno está entre los otros dos?
9. Describe la relación entre la medida de un ángulo externo de un triángulo y la suma de las medidas de los ángulos internos opuestos.
10. Traza el diagrama de una recta, un segmento de recta, un rayo, un ángulo y un triángulo.
11. Elabora varios diagramas de un cuadrilátero de Saccheri, usando como directrices las figuras 10.2 y 10.3.

10.2 Geometría elíptica

El matemático Georg Friedrich Bernhard Riemann (1826-1866) desarrolló el siguiente postulado en Alemania.

Postulado R Por un punto fuera de una recta dada no pasa paralela alguna a la recta.

A continuación se considerará un **modelo esférico** para la geometría de Riemann. El *plano* en la geometría euclidiana es una esfera en la nueva geometría. Este modelo no es irreal cuando se considera que el mundo en que vivimos es aproximadamente esférico.

Para describir una *recta* en la nueva geometría se requiere el concepto de geodésica sobre una esfera. Considera la intersección de una esfera y un plano (en la geometría anterior), donde el plano pasa por el centro de la esfera. Esta intersección es un círculo, denominado **geodésica** de la esfera. Las geodésicas determinan la ruta más corta entre los puntos de la esfera; en consecuencia, se utilizan para definir las trayectorias de vuelo de los aviones. Dados dos puntos A y B sobre una esfera, la ruta más corta entre A y B, donde la trayectoria está sobre la esfera, puede encontrarse como sigue.

Considera el plano que pasa por los puntos A y B y el centro de la esfera. Recuerda que por el postulado 1.4, tres puntos cualesquiera no colineales determinan un plano único. La intersección de este plano con la esfera da por resultado una geodésica que contiene a los puntos A y B. Estos puntos dividen al círculo en dos arcos. La distancia entre A y B sobre la esfera es la longitud del arco más corto; por ejemplo, en un modelo esférico de la Tierra la ruta más corta entre Nueva Delhi India y Managua Nicaragua, puede determinarse por medio de una geodésica que pasa por las dos ciudades. Así, en la práctica, una geodésica sobre la Tierra posee la propiedad fundamental que se espera encontrar en una *recta*; a saber, que una recta define la distancia más corta entre dos puntos. Observa la figura 10.8.

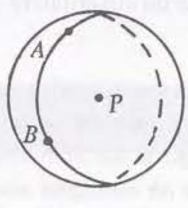


FIGURA 10.8

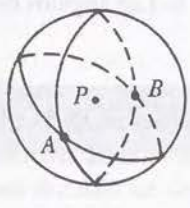


FIGURA 10.9

Después de un análisis cuidadoso de las geodésicas sobre una esfera, se encuentra que dos geodésicas cualesquiera se cortan. (No consideres círculos arbitrarios en la esfera, sino los que están en planos que pasan por el centro de la esfera.) Así, en la geometría de Riemann no existen rectas paralelas. Estudia la figura 10.9.

El modelo geométrico de la figura 10.9 satisface todos los postulados de la geometría euclidiana, excepto el postulado de las paralelas. No obstante, hay algunas diferencias interesantes en los conceptos de cómo son algunas de las figuras geométricas; por ejemplo, las rectas son *cerradas*; es decir, si se camina lo suficiente a lo largo de una geodésica se llega al punto de partida. Además, en esta geometría, un rayo y una recta son idénticos, y existen figuras cerradas de dos lados (bigonos). Observa la figura 10.10.

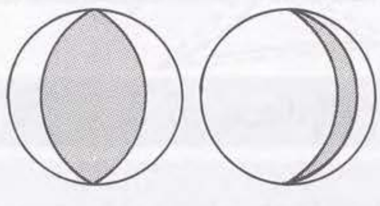


FIGURA 10.10

En geometría elíptica, la medida de un ángulo se encuentra por medio de un procedimiento semejante al aplicado en geometría hiperbólica. La suma de las medidas de los ángulos de un triángulo siempre es *mayor* que 180°. En particular, ¡hay triángulos con tres ángulos rectos! (Fig. 10.11).


FIGURA 10.11

EJERCICIOS 10.2

Contesta las preguntas 1 a 10 de los ejercicios 10.1 para el modelo esférico de la geometría elíptica.

TÉRMINOS CLAVE

Ángulos de la base inferior, 258
Ángulos de la base superior, 258
Base inferior, 258
Base superior, 258
Círculos ortogonales, 256
Cuadrilátero de Saccheri, 258
Geodésica, 259
Geometría elíptica, 256
Geometría euclidiana, 257
Geometría hiperbólica, 256
Geometría no euclidiana, 256
Modelo esférico, 259

EJERCICIOS DE REPASO

En los ejercicios 1 a 10, sean P = modelo de Poincaré de la geometría elíptica; S = modelo esférico de la geometría elíptica; y E = geometría euclidiana. Indica en cuál de las geometrías se cumplen las siguientes proposiciones. Una proposición puede ser verdadera en más de una geometría. Si una proposición no es verdadera en alguna de las geometrías mencionadas, anota una N (Ninguna de éstas).

1. La medida de un ángulo externo de un triángulo puede ser menor que la suma de las medidas de los ángulos internos opuestos.
2. No existen rectas paralelas.
3. Cada par de rectas se corta en un punto cuando mucho.
4. Si tres puntos son colineales, entonces exactamente un punto está enmedio de los otros dos.
5. Un triángulo puede tener tres ángulos rectos.
6. La suma de las medidas de los ángulos de un triángulo puede variar de 180° a 720°.
7. Dos rectas distintas pueden ser paralelas a una tercera, en cuyo caso son paralelas entre sí.
8. No existen segmentos de recta.
9. Existen polígonos de dos lados.
10. Por un punto fuera de una recta pasa exactamente una perpendicular a la recta.
11. Analiza la medida en grados de la suma de los ángulos de un triángulo para las geometrías hiperbólica y elíptica.
12. ¿Dos puntos determinan una recta en geometría elíptica? Explica tu respuesta.
13. Traza un cuadrilátero en geometría hiperbólica.
14. Traza un triángulo con tres ángulos rectos (en geometría elíptica).
15. Considera una recta en geometría hiperbólica. Por el postulado de la regla, existe una correspondencia uno a uno entre el conjunto de todos los números reales y el conjunto de todos los puntos de una recta. Suponiendo que este postulado se cumple, ejemplifica tal correspondencia y demuestra así que las rectas son infinitamente largas en geometría hiperbólica.

▪▪▪▪ Apéndice

Apéndice A Axiomas algebraicos

AXIOMAS DE LOS NÚMEROS REALES

Sean *a*, *b* y *c* números reales.

1. Cerradura
Si $a \in R$ y $b \in R$, entonces $a + b \in R$ y $ab \in R$.

2. Asociatividad
Si $a \in R$, $b \in R$ y $c \in R$, entonces $a + b + c = (a + b) + c = a + (b + c)$ y $abc = (ab)c = a(bc)$.

3. Conmutatividad
Si $a \in R$ y $b \in R$, entonces $a + b = b + a$ y $ab = ba$.

4. Distributividad
Si $a \in R$, $b \in R$ y $c \in R$, entonces $a(b + c) = ab + ac$.

5. Identidad aditiva
El conjunto R contiene un elemento único 0 tal que para todos los elementos a en R, $0 + a = a + 0 = a$.

6. Identidad multiplicativa
El conjunto R contiene un elemento único 1 tal que para todos los elementos a en R, $1 \cdot a = a \cdot 1 = a$.

7. Inverso aditivo
Para todo elemento a en R existe un elemento único en R denotado por $-a$ tal que $a + (-a) = (-a) + a = 0$.

8. Inverso multiplicativo
Para todo elemento $a \neq 0$ en R existe un elemento único en R denotado por $1/a$ tal que $a \cdot (1/a) = (1/a) \cdot a = 1$.

AXIOMAS DE IGUALDAD

Sean *a*, *b* y *c* números reales.

1. Reflexividad
$a = a$.

2. Simetría
Si $a = b$, entonces $b = a$.

3. Transitividad
Si $a = b$ y $b = c$, entonces $a = c$.

4. Sustitución
Si $a = b$, entonces en cualquier expresión que contenga b es posible sustituir b por a.

***5. Adición**
Si $a = b$, entonces $a + c = b + c$.

***6. Multiplicación**
Si $a = b$, entonces $ac = bc$.

AXIOMAS DE DESIGUALDAD

Sean a, b y c números reales. Se escribe $b < a$ siempre que $a - b$ es positivo. En vez de $b < a$ puede escribirse $a > b$.

1. Tricotomía
Exactamente una de las proposiciones siguientes es verdadera: $a < b$, $a = b$, $a > b$.

***2. Transitividad**
Si $a < b$ y $b < c$, entonces $a < c$.

***3. Adición**
Si $a < b$, entonces $a + c < b + c$.

***4. Multiplicación**
Si $c > 0$ y $a < b$, entonces $ac < bc$.
Si $c < 0$ y $a < b$, entonces $ac > bc$.

*Varias de las proposiciones enumeradas aquí son teoremas algebraicos y no axiomas. En este curso se supone su validez en vez de presentar demostraciones. En particular, las propiedades de la igualdad y la desigualdad de la adición y la multiplicación son teoremas, así como la propiedad de transitividad de la desigualdad.

Apéndice B Lista de postulados

Postulado 1.1 Toda recta contiene por lo menos dos puntos distintos.

Postulado 1.2 Dos puntos distintos cualesquiera en el espacio tienen exactamente una recta que los contiene.

Postulado 1.3 Todo plano contiene por lo menos tres puntos distintos no todos colineales.

Postulado 1.4 Tres puntos distintos cualesquiera no colineales en el espacio tienen exactamente un plano que los contiene.

Postulado 1.5 Para dos puntos distintos cualesquiera en un plano, la recta que los contiene también está en el plano.

Postulado 1.6 Ningún plano contiene todos los puntos del espacio.

Postulado 1.7 **Postulado de la regla** Existe una correspondencia uno a uno entre el conjunto de todos los números reales y el conjunto de todos los puntos de una recta.

Postulado 1.8 **Postulado del transportador** Sea $\overrightarrow{AB}$ un rayo sobre la arista de un semiplano cerrado H. Para todo rayo $\overrightarrow{AP}$ tal que $P \in H$ y $P \notin \overrightarrow{AB}$, existe exactamente un número real r tal que $0 < r \leq 180$.

Postulado 1.9 **Postulado de la adición de ángulos** Si $D \in \text{int}\angle BAC$, entonces $m\angle BAD + m\angle DAC = m\angle BAC$.

Postulado 2.1 **LAL = LAL** Si dos lados y el ángulo incluido de un triángulo son congruentes con las partes correspondientes de otro triángulo, entonces los triángulos son congruentes.

Postulado 2.2 **ALA = ALA** Si dos ángulos y el lado incluido de un triángulo son congruentes con las partes correspondientes de otro triángulo, entonces los triángulos son congruentes.

Postulado 2.3 **LLL = LLL** Si los tres lados de un triángulo son congruentes con las partes correspondientes de otro triángulo, entonces los triángulos son congruentes.

Postulado 2.4 Una proposición y su contrapositiva son verdaderas o falsas ambas.

Postulado 3.1 **Postulado de las paralelas** Por un punto externo a una recta dada pasa exactamente una paralela a la recta.

Postulado 4.1 **AAA ~ AAA** Si los tres ángulos de un triángulo son congruentes a los tres ángulos de otro triángulo, entonces los triángulos son semejantes.

Postulado 7.1 **Postulado de área** A cada región corresponde exactamente un número real positivo.

Postulado 7.2 Si dos triángulos con congruentes, entonces sus áreas son iguales.

Postulado 7.3 **Postulado de adición de áreas** Si la intersección de los interiores de dos regiones es vacía, entonces el área de la unión de las regiones es igual a la suma de las áreas de las regiones.

Postulado 7.4 $A = l^2$ El área de un cuadrado es igual al cuadrado de la longitud de un lado.

Postulado 7.5 La razón de la circunferencia del círculo a su diámetro es la misma para cualquier círculo.

Postulado 9.1 La intersección de dos planos distintos no paralelos es una recta.

Postulado 9.2 El volumen de un paralelepípedo rectangular es igual al área de una base multiplicada por la distancia a su base paralela.

Postulado 9.3 Dos sólidos tienen el mismo volumen si todo plano paralelo a un plano dado los corta de modo que las secciones transversales correspondientes tengan áreas iguales.

Postulado L-B Por un punto fuera de una recta dada hay una infinidad de paralelas a la recta.

Postulado R Por un punto fuera de una recta dada no pasa paralela alguna a la recta.

Apéndice C Lista de teoremas

Teorema 2.1 Los suplementos de ángulos congruentes son congruentes.
Teorema 2.2 Los complementos de ángulos congruentes son congruentes.
Teorema 2.3 Los ángulos opuestos por el vértice son congruentes.
Teorema 2.4 Si dos lados de un triángulo son congruentes, los ángulos opuestos a estos lados son congruentes.
Teorema 2.5 Si dos ángulos de un triángulo son congruentes, los lados opuestos a los ángulos son congruentes.
Teorema 2.6 Un ángulo externo de un triángulo es mayor en medida que cualquier ángulo interno lejano.
Teorema 2.7 Existe exactamente una perpendicular a una recta que contiene un punto que no está en la recta.
Teorema 3.1 Si dos ángulos de un triángulo no son congruentes, los lados opuestos a estos ángulos no son congruentes.
Teorema 3.2 Si dos lados de un triángulo no son congruentes, los ángulos opuestos a estos lados no son congruentes y el ángulo de mayor medida es opuesto al lado más largo.
Teorema 3.3 Si dos ángulos de un triángulo no son congruentes, los lados opuestos a estos ángulos no son congruentes y el lado más largo es opuesto al ángulo de mayor medida.
Teorema 3.4 Dos rectas en un plano perpendicular a una tercera recta en el mismo plano son paralelas.
Teorema 3.5 Si una recta en un plano es perpendicular a una de dos rectas paralelas en el mismo plano, entonces también es perpendicular a la otra.
Teorema 3.6 Si dos rectas son cortadas por una transversal de modo que los ángulos alternos internos sean congruentes, entonces las rectas son paralelas.
Teorema 3.7 Si dos rectas paralelas son cortadas por una transversal, entonces los ángulos alternos internos son congruentes.
Teorema 3.8 Los ángulos correspondientes formados por dos rectas y una transversal son congruentes si y sólo si las rectas son paralelas.
Teorema 3.9 Los ángulos alternos externos formados por dos rectas y una transversal son congruentes si y sólo si las rectas son paralelas.
Teorema 3.10 Los ángulos internos formados por dos rectas y una transversal, de modo que los ángulos estén del mismo lado de la transversal, son suplementarios si y sólo si las rectas son paralelas.
Teorema 3.11 La suma de las medidas de los ángulos de un triángulo es 180°.
Teorema 3.12 **LAA = LAA** Si dos ángulos y cualquier lado de un triángulo son congruentes a los elementos correspondientes de otro triángulo, entonces los triángulos son congruentes.
Teorema 3.13 Un ángulo externo de un triángulo mide lo mismo que la suma de las medidas de los ángulos internos lejanos.
Teorema 3.14 La suma de las medidas de los ángulos internos de un enégono es $(n-2)180°$.
Teorema 3.15 La suma de las medidas de los ángulos externos de un polígono, uno en cada vértice, es igual a 360°.
Teorema 3.16 Una diagonal divide un paralelogramo en dos triángulos congruentes
Teorema 3.17 Si los ángulos opuestos o los lados opuestos de un cuadrilátero son congruentes, el cuadrilátero es un paralelogramo.
Teorema 3.18 Dos rectas paralelas son equidistantes en todas partes.
Teorema 3.19 Las diagonales de un cuadrilátero se bisecan mutuamente si y sólo si el cuadrilátero es un paralelogramo.
Teorema 3.20 Dos ángulos consecutivos de un paralelogramo son suplementarios.
Teorema 3.21 Dos rectas distintas paralelas a una tercera recta son paralelas entre sí.
Teorema 3.22 Si tres o más rectas paralelas cortan segmentos congruentes sobre una transversal, cortan segmentos congruentes en toda transversal.

Teorema 3.23 Si un segmento une los puntos medios de dos lados de un triángulo, entonces es paralelo al tercer lado y su longitud es igual a la mitad de la longitud del tercer lado.

Teorema 3.24 Los ángulos de la base de un trapezoide isósceles son congruentes.

Teorema 3.25 La mediana de un trapezoide es paralela a ambas bases y su longitud es igual a la semisuma de las longitudes de las bases.

Teorema 4.1 **AA ~ AA** Si dos ángulos de un triángulo son congruentes con dos ángulos de otro triángulo, entonces los triángulos son semejantes.

Teorema 4.2 Una recta paralela a un lado de un triángulo que corta los otros dos lados en puntos distintos, los divide en segmentos proporcionales.

Teorema 4.3 Una recta que corta dos lados de un triángulo en puntos distintos y los divide en segmentos proporcionales, es paralela al tercer lado.

Teorema 4.4 **LAL ~ LAL** Si dos pares de lados correspondientes de dos triángulos son proporcionales y los ángulos incluidos son congruentes, entonces los dos triángulos son semejantes.

Teorema 4.5 **LLL ~ LLL** Si lados correspondientes de dos triángulos son proporcionales, entonces los dos triángulos son semejantes.

Teorema 4.6 Una bisectriz de un ángulo de un triángulo divide el lado opuesto en segmentos proporcionales a los lados adyacentes correspondientes.

Teorema 5.1 **HC = HC** Si la hipotenusa y un cateto de un triángulo rectángulo son congruentes a las partes correspondientes de otro triángulo rectángulo, entonces los dos triángulos son congruentes.

Teorema 5.2 La mediana a la hipotenusa de cualquier triángulo rectángulo mide la mitad que la hipotenusa.

Teorema 5.3 En cualquier triángulo rectángulo, la altura a la hipotenusa forma dos triángulos rectángulos semejantes entre sí y al triángulo original.

Teorema 5.4 Dado un triángulo rectángulo, la altura a la hipotenusa divide la hipotenusa en dos segmentos tales que 1) la altura es la media geométrica de estos segmentos y 2) cada cateto es la media geométrica de la hipotenusa y el segmento de la hipotenusa adyacente al cateto.

Teorema 5.5 **Teorema de Pitágoras** El cuadrado de la longitud de la hipotenusa de un triángulo rectángulo es igual a la suma de los cuadrados de las longitudes de los catetos.

Teorema 5.6 En un triángulo rectángulo, si un ángulo agudo mide 30°, entonces el cateto opuesto a este ángulo mide la mitad que la hipotenusa.

Teorema 5.7 Si la suma de los cuadrados de las longitudes de dos lados de un triángulo es igual al cuadrado de la longitud del tercer lado, entonces el triángulo es un triángulo rectángulo, con el ángulo recto opuesto al tercer lado.

Teorema 6.1 Una recta perpendicular a un radio en un punto de un círculo es una tangente del círculo.

Teorema 6.2 Una tangente de un círculo es perpendicular al radio del círculo con un punto extremo en el punto de tangencia.

Teorema 6.3 Si una secante que contiene al centro de un círculo es perpendicular a una cuerda, entonces la biseca.

Teorema 6.4 Si una secante que contiene el centro de un círculo biseca una cuerda que no está en el diámetro, entonces la secante es perpendicular a la cuerda.

Teorema 6.5 En el plano de un círculo, la mediatriz de una cuerda contiene al centro del círculo.

Teorema 6.6 En el mismo círculo o en círculos congruentes, las cuerdas equidistantes del centro son congruentes.

Teorema 6.7 En el mismo círculo o en círculos congruentes, dos cuerdas congruentes cualesquiera equidistan del centro.

Teorema 6.8 Dadas dos cuerdas en el mismo círculo o en círculos congruentes, la cuerda más próxima al centro es la más larga.

Teorema 6.9 **Teorema de adición de arcos** Si C es un punto de $\widehat{AB}$, entonces $m\widehat{AB} = m\widehat{AC} + m\widehat{CB}$.

Teorema 6.10 La medida de un ángulo inscrito es la mitad de la medida de su arco intersecado.

Teorema 6.11 La medida de un ángulo cuyo vértice está en un círculo, tal que un rayo es una tangente y el otro es una secante, es igual a la mitad de la medida de su arco intersecado.

Teorema 6.12 Dado un par de ángulos opuestos por el vértice con el vértice en el interior de un círculo, la medida de cada ángulo es igual a la semisuma de las medidas de los dos arcos cortados.

Teorema 6.13 Dado un ángulo con el vértice en el exterior de un círculo, tal que cada uno de los rayos del ángulo corta al círculo, la medida del ángulo es igual a la mitad del valor absoluto de la diferencia de las medidas de los arcos cortados.

Teorema 6.14 En el mismo círculo o en círculos congruentes, dos cuerdas son congruentes si y sólo si los arcos correspondientes son congruentes.

Teorema 6.15 Los dos segmentos tangentes trazados de un punto a un círculo son congruentes.

Teorema 6.16 Si dos cuerdas de un círculo se cortan en el interior del círculo, el producto de las longitudes de los segmentos sobre una cuerda es igual al producto de las longitudes de los segmentos sobre la otra cuerda.

Teorema 6.17 Si $\{B, C, D, E\} \subset \odot P$ y el punto A satisface $A—B—C$ y $A—D—E$, entonces $AB \cdot AC = AD \cdot AE$.

Teorema 6.18 Si $\{B, C, D,\} \subset \odot P$ y $\overleftrightarrow{AB}$ es una tangente de $\odot P$ donde el punto A satisface $A—C—D$, entonces $(AB)^2 = AC \cdot AD$.

Teorema 7.1 $A = la$ El área de un rectángulo es el producto del largo de cualquier lado y la longitud de la altura a ese lado.

Teorema 7.2 $A = la$ El área de un paralelogramo es el producto del largo de cualquier lado y la longitud de la altura a ese lado.

Teorema 7.3 $A = la/2$ El área de un triángulo es el semiproducto de la longitud de cualquier lado y la longitud de la altura a ese lado.

Teorema 7.4 $A = a(b_1 + b_2)/2$ El área de un trapezoide es el semiproducto de la longitud de su altura y la suma de las longitudes de sus bases.

Teorema 7.5 Si dos triángulos son semejantes, entonces la razón de sus áreas es igual al cuadrado de la razón de las longitudes de dos lados correspondientes cualesquiera *o* al cuadrado de la razón de las longitudes de dos alturas correspondientes cualesquiera.

Teorema 7.6 $C = 2\pi r$ La circunferencia de un círculo es igual al doble del producto de π y el radio del círculo.

Teorema 7.7 $A = \pi r^2$ El área de un círculo es el producto de π y el cuadrado del radio del círculo.

Teorema 8.1 $PQ = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$ La distancia entre los puntos $P(x_1, y_1)$ y $Q(x_2, y_2)$ es igual a la raíz cuadrada de la suma de los cuadrados de $(x_1 - x_2)$ y $(y_1 - y_2)$.

Teorema 8.2 Dos rectas no verticales son paralelas si y sólo si tienen la misma pendiente.

Teorema 8.3 Dos rectas no verticales son perpendiculares si y sólo si el producto de sus pendientes es -1.

Teorema 8.4 Una isometría preserva la medida de los ángulos.

Teorema 8.5 Las traslaciones son isometrías.

Teorema 8.6 Las rotaciones son isometrías.

Teorema 8.7 Las reflexiones son isometrías.

Teorema 9.1 $S = \pi rs$ El área superficial lateral de un cono circular recto es el producto de π, el radio del círculo y la distancia del vértice a cualquier punto del círculo.

Teorema 9.2 $S = 2\pi ra$ El área superficial lateral de un cilindro circular recto es dos veces el producto de π, el radio del círculo y la longitud de la altura del cilindro.

Teorema 9.3 $S = 4\pi r^2$ El área superficial de una esfera es cuatro veces el producto de π y el cuadrado del radio.

Teorema 9.4 $V = Ba$ El volumen de un prisma o de un cilindro circular es igual al área de una base multiplicada por la longitud de la altura.

Teorema 9.5 $V = Ba/3$ El volumen de una pirámide o de un cono circular es igual a un tercio del área de la base multiplicada por la longitud de la altura.

Teorema 9.6 $V = 4\pi r^3/3$ El volumen de una esfera es igual a cuatro tercios del producto de π y el cubo del radio.

Apéndice D Lista de construcciones

Construcción 1.1	Construye un segmento de recta que mida lo mismo que un segmento de recta dado.
Construcción 1.2	Construye un ángulo de la misma medida que un ángulo dado.
Construcción 1.3	Construye la mediatriz de un segmento de recta dado.
Construcción 1.4	Construye la bisectriz de un ángulo dado.
Construcción 1.5	Construye la perpendicular a una recta desde un punto de la recta.
Construcción 1.6	Construye la perpendicular a una recta desde un punto que no esté en la recta.
Construcción 3.1	Por un punto externo a una recta, construye la paralela a la recta.
Construcción 3.2	Divide un segmento de recta en un número dado de segmentos congruentes.
Construcción 4.1	Construye la cuarta proporcional de tres segmentos de recta dados.
Construcción 4.2	Construye un polígono semejante a un polígono dado.
Construcción 4.3	Construye un triángulo equilátero.
Construcción 4.4	Construye un cuadrado.
Construcción 6.1	Construye un círculo que contenga tres puntos dados no colineales.
Construcción 6.2	Construye una tangente a un círculo por un punto dado del círculo.
Construcción 6.3	Construye una tangente a un círculo por un punto dado en el exterior del círculo.
Construcción 6.4	Construye una tangente común externa de dos círculos dados.
Construcción 6.5	Construye una tangente común interna de dos círculos dados.
Construcción 6.6	Construye un segmento cuya longitud sea la media geométrica entre las longitudes de dos segmentos dados.
Construcción 7.1	Construye un triángulo de la misma área que un polígono dado.
Construcción 8.1	Construye la reflexión del punto P con respecto a la recta k.

Apéndice E Lista de símbolos

$\{\ \}$	conjunto
$\in$	es un elemento de
$\notin$	no es un elemento de
$=$	es igual a
$\neq$	no es igual a
$\emptyset$	conjunto vacío
$<$	es menor que
$>$	es mayor que
$\leq$	es menor o igual a
$\geq$	es mayor o igual a
$\subset$	es subconjunto de
$\not\subset$	no es subconjunto de
$:$	tal que
$\cup$	unión
$\cap$	intersección
$\lvert x \rvert$	valor absoluto de x
PQ	distancia de P a Q
$A—B—C$	B está entre A y C
$\overline{AB}$	segmento AB
$\overleftrightarrow{AB}$	recta AB
$\overrightarrow{AB}$	rayo AB
$\cong$	es congruente con
$\not\cong$	no es congruente con
$\angle$, $\angle$s	ángulo(s)
int$\angle$	interior de un ángulo
ext$\angle$	exterior de un ángulo
m$\angle A$	medida del ángulo A
$\triangle$, $\triangle$s	triángulo(s)
int $\triangle$	interior de un triángulo
ext $\triangle$	exterior de un triángulo
$^\circ$	grado(s)
π	pi (aproximadamente 3.1416)
rad	radián, radianes
$'$	minuto(s)
$''$	segundo(s)
$\perp$	es perpendicular a
$\llcorner$	rayos perpendiculares (en un diagrama)
$\leftrightarrow$	corresponde a
$\not\leftrightarrow$	no corresponde a
$\parallel$	es paralelo a
▱	paralelogramo
▭	rectángulo
$\sim$	es semejante a
$\sqrt{r}$	raíz cuadrada de r
$\odot$	círculo
int$\odot$	interior del círculo
ext$\odot$	exterior del círculo
$\overset{\frown}{AB}$	arco AB
m$\overset{\frown}{AB}$	medida del arco AB
área$ABCDE$	área del polígono $ABCDE$
área$\odot$	área del círculo

Apéndice F Lista de abreviaturas

ad.	adición
ady.	adyacente
alt.	altura; alterno
aprox.	aproximadamente
comp.	complementario
corr.	correspondiente
cos	coseno
cuad.	cuadrilátero
def.	definición
diag.	diagonal
geom.	geométrico
hip.	hipotenusa
med.	medida
mult.	multiplicación
op.	opuesto
op. vert.	opuestos por el vértice
post.	postulado
prop.	proposición
pt., pts.	punto, puntos
rec.	recto(a)
seg.	segmento
sen	seno
sup.	suplementario
tan.	tangente
trans.	transversal

Apéndice G Potencias y raíces

Número	Cuadrado	Raíz cuadrada	Número	Cuadrado	Raíz cuadrada	Número	Cuadrado	Raíz cuadrada
1	1	1.000	40	1600	6.325	79	6241	8.888
2	4	1.414	41	1681	6.403	80	6400	8.944
3	9	1.732	42	1764	6.481	81	6561	9.000
4	16	2.000	43	1849	6.557	82	6724	9.055
5	25	2.236	44	1936	6.633	83	6889	9.110
6	36	2.449	45	2025	6.708	84	7056	9.165
7	49	2.646	46	2116	6.782	85	7225	9.220
8	64	2.828	47	2209	6.856	86	7396	9.274
9	81	3.000	48	2304	6.928	87	7569	9.327
10	100	3.162	49	2401	7.000	88	7744	9.381
11	121	3.317	50	2500	7.071	89	7921	9.434
12	144	3.464	51	2601	7.141	90	8100	9.487
13	169	3.606	52	2704	7.211	91	8281	9.539
14	196	3.742	53	2809	7.280	92	8464	9.592
15	225	3.873	54	2916	7.348	93	8649	9.644
16	256	4.000	55	3025	7.416	94	8836	9.695
17	289	4.123	56	3136	7.483	95	9025	9.747
18	324	4.243	57	3249	7.550	96	9216	9.798
19	361	4.359	58	3364	7.616	97	9409	9.849
20	400	4.472	59	3481	7.681	98	9604	9.899
21	441	4.583	60	3600	7.746	99	9801	9.950
22	484	4.690	61	3721	7.810	100	10000	10.000
23	529	4.796	62	3844	7.874			
24	576	4.899	63	3969	7.937			
25	625	5.000	64	4096	8.000			
26	676	5.099	65	4225	8.062			
27	729	5.196	66	4356	8.124			
28	784	5.292	67	4489	8.185			
29	841	5.385	68	4624	8.246			
30	900	5.477	69	4761	8.307			
31	961	5.568	70	4900	8.367			
32	1024	5.657	71	5041	8.426			
33	1089	5.745	72	5184	8.485			
34	1156	5.831	73	5329	8.544			
35	1225	5.916	74	5476	8.602			
36	1296	6.000	75	5625	8.660			
37	1369	6.083	76	5776	8.718			
38	1444	6.164	77	5929	8.775			
39	1521	6.245	78	6084	8.832			

Apéndice H Valores de funciones trigonométricas

Medida en grados	Sen	Cos	Tan	Medida en grados	Sen	Cos	Tan
0	0.0000	1.0000	0.0000	46	0.7193	0.6947	1.0355
1	0.0175	0.9998	0.0175	47	0.7314	0.6820	1.0724
2	0.0349	0.9994	0.0349	48	0.7431	0.6691	1.1106
3	0.0523	0.9986	0.0524	49	0.7547	0.6561	1.1504
4	0.0698	0.9976	0.0699	50	0.7660	0.6428	1.1918
5	0.0872	0.9962	0.0875	51	0.7771	0.6293	1.2349
6	0.1045	0.9945	0.1051	52	0.7880	0.6157	1.2799
7	0.1219	0.9925	0.1228	53	0.7986	0.6018	1.3270
8	0.1392	0.9903	0.1405	54	0.8090	0.5878	1.3764
9	0.1564	0.9877	0.1584	55	0.8192	0.5736	1.4281
10	0.1736	0.9848	0.1763	56	0.8290	0.5592	1.4826
11	0.1908	0.9816	0.1944	57	0.8387	0.5446	1.5399
12	0.2079	0.9781	0.2126	58	0.8480	0.5299	1.6003
13	0.2250	0.9744	0.2309	59	0.8572	0.5150	1.6643
14	0.2419	0.9703	0.2493	60	0.8660	0.5000	1.7321
15	0.2588	0.9659	0.2679	61	0.8746	0.4848	1.8040
16	0.2756	0.9613	0.2867	62	0.8829	0.4695	1.8807
17	0.2924	0.9563	0.3057	63	0.8910	0.4540	1.9626
18	0.3090	0.9511	0.3249	64	0.8988	0.4384	2.0503
19	0.3256	0.9455	0.3443	65	0.9063	0.4226	2.1445
20	0.3420	0.9397	0.3640	66	0.9135	0.4067	2.2460
21	0.3584	0.9336	0.3839	67	0.9205	0.3907	2.3559
22	0.3746	0.9272	0.4040	68	0.9272	0.3746	2.4751
23	0.3907	0.9205	0.4245	69	0.9336	0.3584	2.6051
24	0.4067	0.9135	0.4452	70	0.9397	0.3420	2.7475
25	0.4226	0.9063	0.4663	71	0.9455	0.3256	2.9042
26	0.4384	0.8988	0.4877	72	0.9511	0.3090	3.0777
27	0.4540	0.8910	0.5095	73	0.9563	0.2924	3.2709
28	0.4695	0.8829	0.5317	74	0.9613	0.2756	3.4874
29	0.4848	0.8746	0.5543	75	0.9659	0.2588	3.7321
30	0.5000	0.8660	0.5774	76	0.9703	0.2419	4.0108
31	0.5150	0.8572	0.6009	77	0.9744	0.2250	4.3315
32	0.5299	0.8480	0.6249	78	0.9781	0.2079	4.7046
33	0.5446	0.8387	0.6494	79	0.9816	0.1908	5.1446
34	0.5592	0.8290	0.6745	80	0.9848	0.1736	5.6713
35	0.5736	0.8192	0.7002	81	0.9877	0.1564	6.3138
36	0.5878	0.8090	0.7265	82	0.9903	0.1392	7.1154
37	0.6018	0.7986	0.7536	83	0.9925	0.1219	8.1443
38	0.6157	0.7880	0.7813	84	0.9945	0.1045	9.5144
39	0.6293	0.7771	0.8098	85	0.9962	0.0872	11.430
40	0.6428	0.7660	0.8391	86	0.9976	0.0698	14.301
41	0.6561	0.7547	0.8693	87	0.9986	0.0523	19.081
42	0.6691	0.7431	0.9004	88	0.9994	0.0349	28.636
43	0.6820	0.7314	0.9325	89	0.9998	0.0175	57.290
44	0.6947	0.7193	0.9657	90	1.0000	0.0000	—
45	0.7071	0.7071	1.0000				

Apéndice I Glosario de definiciones importantes

Agudo Un ángulo es agudo si mide menos que 90°.

Altura de un trapezoide La altura de un trapezoide es un segmento perpendicular a las dos bases del trapezoide, con puntos extremos en las bases.

Altura de un triángulo Sea $\triangle ABC$ con D en $\overleftrightarrow{AB}$. Entonces $\overline{CD}$ es una altura de $\triangle ABC$ si $\overline{CD} \perp \overleftrightarrow{AB}$.

Ángulo El ángulo $BAC = \overrightarrow{AB} \cup \overrightarrow{AC}$.

Ángulo central de un círculo Un ángulo central de un círculo es un ángulo cuyo vértice es el centro del círculo.

Ángulo central de un polígono regular Un ángulo central de un polígono regular es un ángulo cuyo vértice está en el centro del polígono y contiene dos vértices adyacentes del polígono.

Ángulo inscrito Un ángulo inscrito de un círculo es un ángulo con vértice en el círculo y cada uno de cuyos rayos corta al círculo en un punto distinto al vértice.

Ángulo llano Si $B—A—C$, entonces $\angle BAC$ es un ángulo llano.

Ángulo recto Un ángulo es recto si mide 90°.

Ángulos alternos externos Dos ángulos externos no adyacentes en lados opuestos de una transversal son ángulos alternos externos.

Ángulos alternos internos Dos ángulos internos no adyacentes en lados opuestos de una transversal son ángulos alternos internos.

Ángulos congruentes Dos ángulos $\angle ABC$ y $\angle DEF$ son congruentes si $m\angle ABC = m\angle DEF$.

Ángulos correspondientes Dos ángulos no adyacentes en el mismo lado de la transversal son ángulos correspondientes si uno es interior y otro es exterior.

Ángulos exteriores Consulta la definición de ángulos interiores. Los otros cuatro ángulos son exteriores.

Ángulos interiores Los cuatro ángulos formados por un par de rectas y una transversal, tales que ambos puntos de intersección están en uno de los lados de cada ángulo, son ángulos interiores.

Ángulos opuestos por el vértice Si dos ángulos con el mismo vértice se colocan de modo que los lados de un ángulo formen rayos opuestos con los lados del otro ángulo, entonces las ángulos son ángulos opuestos por el vértice.

Apotema de un polígono regular La apotema de un polígono regular es un segmento de recta perpendicular a uno de los lados con un punto extremo sobre el lado y el otro punto extremo en el centro del polígono.

Arco Un arco es un semicírculo, un arco menor o un arco mayor.

Arco mayor Un arco mayor ACB de un círculo P con puntos A y B en $\odot P$, $m\angle APB \neq 180°$ y $C \in \{\odot P \cap \text{ext}\angle APB\}$ es la unión de A y B con el conjunto de todos los puntos de $\odot P$ que están en ext$\angle APB$.

Arco menor Un arco menor AB de un círculo P con puntos A y B en $\odot P$ y $m\angle APB \neq 180°$ es la unión de A y B con el conjunto de todos los puntos de $\odot P$ que están en int$\angle APB$.

Área superficial El área superficial de un poliedro es la suma de las áreas de las caras del poliedro.

Bisectriz de un ángulo	El conjunto de puntos $\overrightarrow{AD}$ es la bisectriz del $\angle BAC$ si $D \in \text{int}\angle BAC$ y $m\angle BAD = m\angle CAD$.
Bisectriz de un segmento de recta	Una bisectriz de $\overline{AB}$ es cualquier recta o segmento de recta que contenga al punto medio C de $\overline{AB}$ y a ningún otro punto de $\overline{AB}$.
Centro de un polígono regular	El centro de un polígono regular es el centro de un círculo que contiene a todos los vértices del polígono.
Cilindro circular	Sean C y D dos regiones circulares congruentes en planos paralelos. Un cilindro circular es el sólido formado por la unión de C, D y todos los puntos entre cada punto de C y D.
Círculos ortogonales	Dos círculos son ortogonales si sus tangentes en los puntos de intersección son perpendiculares.
Complementarios	Dos ángulos son complementarios si la suma de sus medidas es igual a 90°.
Cono circular	Sean C una región circular y P un punto que no está en el plano que contiene a la región circular. Un cono circular es la unión de C, P y todos los puntos entre P y cada punto de C.
Convexo	Un polígono es convexo si para todas las parejas de puntos A y B en lados distintos del polígono se cumple que todos los puntos entre A y B están en el interior del polígono.
Corolario	Un corolario es un teorema en estrecha relación con otro teorema y que se demuestra fácilmente aplicando este último.
Cuadrilátero de Saccheri	Un cuadrilátero $ABCD$ es un cuadrilátero de Saccheri si $\angle A$ y $\angle B$ son ángulos rectos y $AD = BC$.
Cuerda	Una cuerda de un círculo es un segmento de recta con puntos extremos en el círculo.
Diagonal de un poliedro	Una diagonal de un poliedro es un segmento de recta cuyos puntos extremos son vértices que no están en la misma cara del poliedro.
Diagonal de un polígono	Es un segmento de recta que une dos vértices no consecutivos.
Diámetro	Un diámetro de un círculo es una cuerda que contiene al centro del círculo.
Distancia de un punto a una recta	Sea $\overleftrightarrow{AB}$ y un punto C que no está en $\overleftrightarrow{AB}$. Si D es un punto de $\overleftrightarrow{AB}$ tal que $\overleftrightarrow{AB} \perp \overleftrightarrow{CD}$, entonces CD es la distancia del punto C a la recta $\overleftrightarrow{AB}$.
En el mismo lado de	Dados los puntos R y S y la recta k, R y S están en el mismo lado de k si $\overline{RS} \cap k = \emptyset$.
En lados opuestos de	Dados los puntos R y S y la recta k, R y S están en lados opuestos de k si $\{R\} \cap k = \emptyset$, $\{S\} \cap k = \emptyset$ y $\overline{RS} \cap k \neq \emptyset$.
Entre	El punto B está entre los puntos A y C si A, B y C son colineales y $AB + BC = AC$.
Equiangular	Un triángulo con todos los ángulos congruentes es equiangular.
Equilátero	Un triángulo con todos los lados congruentes es equilátero.
Escaleno	Un triángulo escaleno es un triángulo sin un par de lados congruentes.
Esfera	Una esfera es el conjunto de todos los puntos en el espacio que están a una distancia dada de un punto dado.
Exterior de un ángulo	El exterior de $\angle BAC = \{P\colon P$ no está en $\angle BAC$ y tampoco en $\text{int}\angle BAC\}$.
Exterior de un círculo	El exterior de un círculo P con radio r es el conjunto de todos los puntos Q tales que $PQ > r$.
Exterior de un triángulo	El exterior de $\triangle ABC = \{P\colon P$ no está en $\triangle ABC \cup \text{int}\ \triangle ABC\}$.
Forma general	La forma general de la ecuación de una recta es $ax + by + c = 0$, donde a, b y c son números reales.
Forma pendiente-ordenada al origen de una recta	La forma pendiente-ordenada al origen de una recta es $y = mx + b$, donde m es la pendiente de la recta y b es la ordenada al origen.
Interior de un ángulo	El interior de $\angle BAC = \{P\colon \angle BAC$ no es un ángulo recto, los puntos P y C están en el mismo lado de $\overleftrightarrow{AB}$ y los puntos P y B están en el mismo lado de $\overleftrightarrow{AC}\}$.

Interior de un círculo	El interior de un círculo P con radio r es el conjunto de todos los puntos Q tales que $PQ < r$.
Interior de un triángulo	El interior de $\triangle ABC = \{P: P \in \text{int } \angle ABC \text{ int} \cap \angle BAC\}$.
Isometría	Una isometría es una transformación que preserva distancias.
Isósceles	Un triángulo isósceles es un triángulo que tiene por lo menos dos lados congruentes.
Lugar geométrico	Un lugar geométrico es el conjunto de todos los puntos que satisfacen una o más condiciones dadas.
Mediana	Sea $\triangle ABC$ dado con E en $\overleftrightarrow{AB}$. Entonces $\overline{CE}$ es una mediana de $\triangle ABC$ si $AE = BE$.
Mediatriz	Dado un segmento $\overline{AB}$, $\overrightarrow{CD}$ es una mediatriz de $\overline{AB}$ si $\overrightarrow{CD}$ bisecta $\overline{AB}$ y es perpendicular a $\overline{AB}$.
Medida de un arco mayor	La medida de un arco mayor es 360° menos la medida del ángulo central que contiene a los puntos extremos del arco.
Medida de un arco menor	La medida de un arco menor es la medida del ángulo central que contiene a los puntos extremos del arco.
Obtuso	Un ángulo es obtuso si su medida es mayor que 90° y menor que 180°.
Paralelas	Dos rectas distintas son paralelas si no se cortan.
Paralelepípedo	Un paralelepípedo es un prisma con seis caras que son paralelogramos.
Paralelogramo	Un paralelogramo es un cuadrilátero en que ambos pares de lados opuestos son paralelos.
Pendiente de una recta	La pendiente de una recta que pasa por los puntos $P(x_1, y_1)$ y $Q(x_2, y_2)$ es igual a $(y_1 - y_2)/(x_1 - x_2)$.
Perpendiculares	Dos rectas son perpendiculares si se cortan de modo que formen ángulos adyacentes congruentes.
Poliedro	Un poliedro es un sólido cuya superficie es la unión de un número finito de regiones poligonales.
Poliedro regular	Un poliedro regular es un sólido cuyas caras son, todas, regiones poligonales regulares congruentes.
Polígono	Un polígono es la unión de n segmentos consecutivos en un plano, que se cortan sólo en sus puntos extremos, tales que exactamente dos segmentos contienen a cada punto extremo y ningún par de segmentos consecutivos está en la misma recta.
Prisma	Un prisma es un poliedro con dos caras paralelas y congruentes y cuyas otras caras son paralelogramos.
Punto extremo de un rayo	El punto A es el punto extremo de $\overrightarrow{AB}$.
Punto medio	El punto C es el punto medio de $\overline{AB}$ si $A—C—B$ y $AC = BC$.
Radio de un polígono regular	Un radio de un polígono regular es un segmento de recta con puntos extremos en el centro del polígono y un vértice del polígono.
Rayo	El rayo $AB = \overline{AB} \cup \{P: A—B—P\}$.
Rayo secante	Un rayo secante de un círculo es un rayo que corta al círculo exactamente en dos puntos.
Rayo tangente	Un rayo tangente es un rayo contenido en una recta tangente, con su punto extremo en el punto de tangencia
Rayos opuestos	Si hay dos rayos $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{AC}$ tales que $C—A—B$, entonces los rayos son opuestos.
Recta tangente	Una recta tangente es una recta en ei plano de un círculo que corta al círculo exactamente en un punto (el punto de tangencia)
Reflexión con respecto a una recta	Una reflexión con respecto a una recta k es una transformación $\mathcal{T}: \mathbb{R} \leftrightarrow \mathbb{S}$, donde cada punto R_1 en $\mathbb{R}$ corresponde a un punto S_1 en $\mathbb{S}$, de modo que R_1 es simétrico a S_1 con respecto a k.

Región Una región es:
1. La unión de un número finito de regiones poligonales o circulares, o
2. La intersección de un número finito de regiones poligonales y circulares tal que la intersección de sus interiores es no vacía, o
3. La unión de un número finito de combinaciones de 1) o 2).

Región circular Una región circular es la unión de una circunferencia y su interior.

Región poligonal Una región poligonal es la unión de un polígono y su interior.

Rotación con respecto al origen Una rotación con respecto al origen es una transformación $\mathcal{T}: \mathbb{R} \leftrightarrow \mathbb{S}$ tal que todo punto de coordenadas (x, y) en $\mathbb{R}$ corresponde a un punto en $\mathbb{S}$ de coordenadas $(ax - by, ay + bx)$ donde, $a^2 + b^2 = 1$.

Secante Una secante de un círculo es una recta que corta al círculo exactamente en dos puntos.

Sección transversal Una sección transversal es la intersección no vacía de un sólido y un plano.

Sector Un sector es una región que es la unión de
1. $\widehat{ACB}$ de $\odot P$, donde $\widehat{AC} \cong \widehat{CB}$
2. los radios $\overline{PA}$, $\overline{PB}$ y $\overline{PC}$,
3. $\text{Int} \odot P \cap \{\text{int} \angle APC \cup \text{int} \angle BPC\}$.

Segmento de círculo Un segmento de círculo es la unión de $\widehat{ACB}$, la cuerda $\overline{AB}$ y los puntos del interior del círculo que están en el mismo lado de $\overline{AB}$ que el punto C.

Segmento de recta El segmento de recta $AB = \{A, B\} \cup \{P: A—P—B\}$.

Segmento tangente Un segmento tangente es un segmento contenido en una recta tangente y que tiene uno de sus puntos extremos en el punto de tangencia.

Segmentos de recta congruentes Dos segmentos de recta $\overline{AB}$ y $\overline{CD}$ son congruentes si $AB = CD$.

Semejantes Dos polígonos son semejantes si los ángulos correspondientes son congruentes y los lados correspondientes son segmentos proporcionales.

Semicírculo Un semicírculo de un círculo P es la unión de los puntos extremos de su diámetro con el conjunto de todos los puntos del círculo que están a un lado del diámetro.

Simétricos con respecto a una recta Dos puntos distintos P y Q son simétricos con respecto a la recta k si P no está en k y k es la mediatriz de $\overline{PQ}$.

Sólido convexo Un sólido convexo es un conjunto de puntos S, no todos coplanares, tales que para dos puntos cualesquiera A y B en S, todos los puntos entre A y B también están en S.

Suplementarios Dos ángulos son suplementarios si la suma de sus medidas es igual a 180°.

Transformación Una transformación $\mathcal{T}$ es una correspondencia uno a uno entre dos conjuntos de puntos, $\mathbb{R}$ y $\mathbb{S}$.

Trapezoide Un trapezoide es un cuadrilátero con un par de lados paralelo exactamente.

Traslación Una traslación es una transformación $\mathcal{T}: \mathbb{R} \leftrightarrow \mathbb{S}$ en que cada punto de coordenadas (x, y) en $\mathbb{R}$ corresponde a un punto de coordenadas $(x + a, y + b)$ en $\mathbb{S}$.

Triángulo El triángulo $ABC = \overline{AB} \cup \overline{BC} \cup \overline{AC}$, donde A, B y C son puntos no todos colineales.

Triángulo rectángulo Un triángulo rectángulo es un triángulo con un ángulo recto.

Triángulos congruentes Dos triángulos $\triangle ABC$ y $\triangle DEF$ son congruentes si $\angle A \cong \angle D$, $\angle B \cong \angle E$, $\angle C \cong \angle F$, $\overline{AB} \cong \overline{DE}$, $\overline{BC} \cong \overline{EF}$ y $\overline{AC} \cong \overline{DF}$.

Respuestas a los ejercicios impares

EJERCICIOS 1.1

1. Infinito **3.** Infinito **5.** Finito

7. Las respuestas pueden variar: $\{x: x < 3 \text{ y } x \geq 4\}$, $\{x: x \in A \cap B \text{ y } x \notin A \cap B\}$, {naranjas con dientes}

9. $\subset$ **11.** $\subset$ **13.** $\subset$ **15.** $\subset$ **17.** B

19. D **21.** F **23.** $\in$ **25.** $\notin$ **27.** $\in$

29. $\in$ **31.** $\subset$ **33.** $\not\subset$ **35.** A **37.** {99, 108, 111}

39. $\in$ **41.** $\in$ **43.** 121 **45.** 38 **47.** 20

49. 1078

EJERCICIOS 1.2

1. Postulado 1.5 **3.** Postulado 1.2 **5.** Postulado 1.4

7. 7 **9.** 0 **11.** 52

13. d si $d \geq 0$, $-d$ si $d < 0$ **15.** x^2 **17.** $x - 3$

19. $a - b$ **21.** $-x - y$ **23.** 2

25. 5 **27.** 1/2 **29.** 13/2

31. $|q - p| = |p - q|$ **33.** 11 parsecs, 16 parsecs **35.** Cuatro puntos no necesariamente determinan un plano único

EJERCICIOS 1.3

1. $\overline{AE}, \overline{CE}, \overline{AC}, \overline{AF}, \overline{BF}, \overline{AB}, \overline{AD}, \overline{CD}$

3. $\overrightarrow{AE}, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AF}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{BF} = \overrightarrow{BA}, \overrightarrow{FB} = \overrightarrow{FA}, \overrightarrow{EC} = \overrightarrow{EA}, \overrightarrow{CE} = \overrightarrow{CA}$

5. $=, \cong$ **7.** $\cong, \neq$ **9.** $\neq, \ncong$

11. C, F, G **13.** El mismo lado **15.** El mismo lado

17. D **19.** Ninguno **21.** $\angle BCD, \angle CBE, \angle ABF$

23. El rayo AB es la unión del segmento de recta AB con el conjunto de todos los puntos P tales que B está entre A y P

25. Las respuestas pueden variar

27. Las respuestas pueden variar

EJERCICIOS 1.4

1. 90° **3.** 22°30′ **5.** 80°51′

7. 62° 13′12″ **9.** 83°30′ **11.** 126°27′36″

19. $\angle ABC = \angle DEF$ significa que los dos ángulos (conjuntos de puntos) son idénticos. $\angle ABC \cong \angle DEF$ significa que los dos ángulos tienen la misma medida

21. Aproximadamente 150°

23. 6°

25. Aproximadamente 180°

EJERCICIOS 1.5

1. 60° **3.** 23°38′ **5.** 89°56′1″ **7.** $(\pi/4)$rad

9. 30° **11.** 145° **13.** 104°24′42″ **15.** $(\pi/2)$rad

17. 45°, 90° **19.** 45° **21.** $F \notin \text{int}\angle BAE$ **23.** Obtuso

25. Recto **27.** Agudo **29.** Recto **31.** Agudo

33. No es un ángulo (es un rayo)

35. Las respuestas pueden variar

EJERCICIOS DE REPASO DEL CAPÍTULO 1

1. Siempre
3. Algunas veces
5. Siempre
7. Algunas veces
9. Algunas veces
11. Infinito
13. Intersección (o subconjunto)
15. Verdadera
17. B
19. Suplemento
21. Infinito si $A \neq B$; $\emptyset$ si $A = B$
23. Finito
25. $\emptyset$
27. $\emptyset$
29. A, B, D
31. $\{a, b, c, d, e, 4\}$
33. $\emptyset$
35. $\{1, 4\}$
37. 3
39. x^2
41. $b - a$
43. $\angle 6, \angle 7; \angle 6, \angle BAC; \angle 7, \angle BAC$
45. Todos los pares
47. 10°
49. Ninguno
51. 100°
53. $\pi/3$ rad

EJERCICIOS 2.1

1. No ganaré suficiente dinero
3. Apagarás la televisión
5. Dos ángulos son complementarios
7. $AB \ncong CD$
9. Un punto no está en el interior de $\triangle PQR$
11. Falsa
13. Falsa
15. Falsa
17. Verdadera
19. Verdadera
21. Ganaré suficiente dinero y compraré un automóvil
23. Dos ángulos no son complementarios y dos ángulos son adyacentes
25. Un punto está en el interior de $\triangle PQR$ y un punto está en int$\angle Q$
27. No apagarás la televisión o no podrás estudiar mejor
29. $\overline{AB} \cong \overline{CD}$ o $m\angle A = m\angle B$
31. Verdadera
33. Falsa
35. Falsa
37. Verdadera
39. Falsa
45.

P	NO P	P O NO P
V	F	V
F	V	V

47.

P	Q	R	NO Q	(R O NO Q)	P Y (R O NO Q)
V	V	V	F	V	V
V	V	F	F	F	F
V	F	V	V	V	V
V	F	F	V	V	V
F	V	V	F	V	F
F	V	F	F	F	F
F	F	V	V	V	F
F	F	F	V	V	F

49.

p	r	no p	(p o r)	no p y (p o r)
V	V	F	V	F
V	F	F	V	F
F	V	V	V	V
F	F	V	F	F

51.

p	q	no p	no q	p o q	no (p o q)	no p y no q
V	V	F	F	V	F	F
V	F	F	V	V	F	F
F	V	V	F	V	F	F
F	F	V	V	F	V	V

53. $S \cup T = \{2, 4, 8, 10\}$, $(S \cup T)' = \{6\}$
$S' = \{6, 10\}$, $T' = \{4, 6, 8,\}$, $S' \cap T' = \{6\}$

55. $S \cup T =$ {Enteros diferentes de cero}, $(S' \cup T)' = \{0\}$. $S' =$ {Enteros no positivos}, $T' =$ {Enteros no negativos}, $S' \cap T' = \{0\}$

EJERCICIOS 2.2

1. Ganaré suficiente dinero. Compraré un automóvil
3. Apagarás la televisión. Podrás estudiar mejor
5. $A \cong B$. $m\angle A = m\angle B$
7. Hay bandera roja en la mañana. Los marineros toman precauciones
9. Una proposición es un teorema. La proposición siempre tiene una hipótesis y una conclusión
11. Si voy a comprar un automóvil, entonces ganaré suficiente dinero
13. Si podrás estudiar mejor, entonces apagarás la televisión
15. Si $m\angle A = m\angle B$, entonces $A \cong B$
17. Si los marineros toman precauciones, entonces hay señal roja en la mañana
19. Si una proposición siempre tiene una hipótesis y una conclusión, entonces la proposición es un teorema
21. Si no gano suficiente dinero, entonces no compraré un automóvil
23. Si no apagas la televisión, no podrás estudiar mejor
25. Si $A \ncong B$, entonces $m\angle A \neq m\angle B$
27. Si no hay señal roja en la mañana, los marineros no toman precauciones
29. Si una proposición no es un teorema, entonces no siempre tiene una hipótesis y una conclusión
31. Si no voy a comprar un automóvil, entonces no gano suficiente dinero
33. Si no podrás estudiar mejor, entonces no apagues la televisión
35. Si $m\angle A \neq m\angle B$, entonces $A \ncong B$
37. Si los marineros no toman precauciones, entonces no hay señal roja en la mañana
39. Si una proposición no siempre tiene una hipótesis y una conclusión, entonces la proposición no es un teorema
51. Estás en la Luna. La aceleración por la gravedad es de una sexta parte de la gravedad en la Tierra. Si la aceleración debida a la gravedad es sólo aproximadamente la sexta parte de la gravedad en la Tierra, entonces estás en la Luna. Si no estás en la Luna, entonces no es verdad que la aceleración debida a la gravedad sea alrededor de la sexta parte de la gravedad en la Tierra. Si no es verdad que la aceleración debida a la gravedad es de una sexta parte de la gravedad en la Tierra, entonces no estás en la Luna
53. El hule se calienta. El hule posee la propiedad de volverse pegajoso. Si el hule posee la propiedad de volverse pegajoso, entonces está caliente. Si el hule no se calienta, entonces no posee la propiedad de volverse pegajoso. Si el hule no posee la propiedad de volverse pegajoso, entonces no está caliente
55. Un metal reactivo se hace el ánodo de una celda electrolítica. La oxidación anódica puede implicar oxidación del metal que compone el electrodo. Si la oxidación anódica puede implicar oxidación del metal que compone el electrodo, entonces el metal reactivo se hace el ánodo de una celda electrolítica. Si un metal reactivo no se hace el ánodo de una celda electrolítica, entonces no es verdad que la oxidación anódica pueda implicar oxidación del metal que compone el electrodo. Si no es verdad que la oxidación anódica pueda implicar oxidación del metal que compone el electrodo, entonces un metal reactivo no se hace el ánodo de una celda electrolítica
57. Cualquier cigoto se forma por la combinación con un gameto normal. Cualquier cigoto es aneuploide y letal. Si cualquier cigoto es aneuploide y letal, entonces se forma por la combinación con un gameto normal. Si cualquier cigoto no se forma por la combinación con un gameto normal, entonces no es aneuploide y letal. Si cualquier cigoto no es aneuploide y letal, entonces no se forma por la combinación con un gameto normal

59. Un contribuyente utiliza la base acumulada. Un contribuyente reporta sus ingresos cuando los devenga, aun cuando no los haya recibido, y deduce gastos cuando los realiza, incluso sin haberlos pagado. Un contribuyente que reporte sus ingresos cuando los devenga, aun cuando no los haya recibido, y deduce gastos cuando los realiza, incluso sin haberlos pagado, utiliza la base acumulada. Si un contribuyente no utiliza la base acumulada, entonces no es cierto que el contribuyente reporte sus ingresos cuando los devenga, aun cuando no los haya recibido, y deduce gastos cuando los realiza, incluso sin haberlos pagado. Si no es verdad que un contribuyente reporta sus ingresos cuando los devenga, aun cuando no los haya recibido, y deduce gastos cuando los realiza, incluso sin haberlos pagado, entonces el contribuyente no utiliza la base acumulada

61. Las respuestas pueden variar

63. Las respuestas pueden variar

EJERCICIOS 2.3

1. DADO: $\triangle ABC$
DEMUESTRA: $m\angle A + m\angle B + m\angle C = 180°$

3. DADO: $\angle B$ es un $\angle$ recto
DEMUESTRA: $(AC)^2 = (AB)^2 + (BC)^2$

5. DADO: Las rectas j y k que se cortan
$m\angle 1 = m\angle 2$, $m\angle 3 = m\angle 4$
DEMUESTRA: $\overrightarrow{BA} \perp \overrightarrow{BC}$

7. DADO: $AF = BF, BE = CE, AD = CD$,
$j \perp \overline{AB}, i \perp \overline{BC}, k \perp \overline{AC}$
DEMUESTRA: i, j y k son concurrentes

9. DADO: $m\angle 1 + m\angle 2 = 180°$
$m\angle 1 > 90°$
DEMUESTRA: $m\angle 2 < 90°$

11. DADO: $x + 7 = 9$
DEMUESTRA: $x = 2$

13. DADO: $f(x) = x - 9$ y $g(y) = y + 6$
DEMUESTRA: $f(x) + g(y) = x + y - 3$

EJERCICIOS 2.4

1. Proposiciones por demostrar, diagrama, dado, demuestra, demostración

3. $\angle 1, \angle 3$; $\angle 2, \angle 4$; $\angle 5, \angle 7$; $\angle 6, \angle 8$; $\angle 9, \angle 11$; $\angle 10, \angle 12$; $\angle 13, \angle 15$; $\angle 14, \angle 16$

5. **1.** $A—B—C, B—C—D, AB = CD$
2. Def. de entre
3. Sustitución
4. Conmutatividad
5. Transitividad
6. Def. de entre y sustitución

7. **1.** a, b y c son rectas, $m\angle 1 + m\angle 3 = 180°$
2. Def. de sup.
3. Sustitución
4. $m\angle 2 = m\angle 3$
5. $\angle$s op. vert son $\cong$
6. $m\angle 2 = m\angle 4$

9. **1.** $\angle ABC$ es un $\angle$ recto, $\angle EFG$ y $\angle DBC$ son comp.
2. Def. de $\angle$ recto
3. Post. de adición de ángulos
4. $m\angle ABD + m\angle DBC = 90°$
5. Def. de comp.
6. Comps. de $\angle$s $\cong$ son $\cong$

11. 1. $\angle ABC$ y $\angle ABD$ son sup., $\overrightarrow{BE}$ biseca a $\angle ABC$, $\overrightarrow{BF}$ biseca $\angle ABD$
   2. Def. de $\angle$ bisector
   3. Post. de adición de ángulos
   4. Sustitución
   5. Axioma de adición de la =
   6. Def. de sup.
   7. Sustitución
   8. Axioma de multiplicación de la =
   9. Def. de $\perp$ y medida
13. DADO: $\angle A$
   DEMUESTRA: $\angle A \cong \angle A$
   1. $\angle A$
   2. Reflexividad
   3. $\angle A \cong \angle A$
15. DADO: $\angle A \cong \angle B$, $\angle B \cong \angle C$
   DEMUESTRA: $\angle A \cong \angle C$
   DEMOSTRACIÓN:

1. $\angle A \cong \angle B$, $\angle B \cong \angle C$	1. Dado
2. $m\angle A = m\angle B$, $m\angle B = m\angle C$	2. Def. de $\angle$s $\cong$
3. $m\angle A = m\angle C$	3. Transitividad
4. $\angle A \cong \angle C$	4. Def. de $\angle$s $\cong$

EJERCICIOS 2.5

1. $A \leftrightarrow F$, $C \leftrightarrow E$, $B \leftrightarrow D$
3. $\angle A \leftrightarrow \angle F$, $\angle C \leftrightarrow \angle E$, $\angle B \leftrightarrow \angle D$
5. $\triangle KLM \cong \triangle TSR$
7. $\angle K \leftrightarrow \angle R$
9. $\angle KIJ \leftrightarrow \angle RPQ$ y def. de medida
11. Ninguna
13. Ninguna
15. Ninguna
17. $\triangle ABC \cong \triangle FDE$, LLL = LLL
19. $\triangle ABC \cong \triangle FED$, ALA = ALA
21. Demuestra que $\triangle ABD \cong \triangle CDB$ por LLL = LLL y usar que partes corresp. de $\triangle$s $\cong$ son $\cong$
23. Demuestra que $\triangle BCE \cong \triangle BDE$ por ALA = ALA. Así, $BC = BD$ porque partes corresp. de $\triangle$ s $\cong$ son $\cong$. Entonces, $\triangle ABC \cong \triangle ABD$ por LLL = LLL
25. Demuestra que $m\angle BAC = 61°$. Demuestra que $AC = EF$. Aplica ALA = ALA
27. LLL = LLL
31. Martha puede medir AC, BC y $m\angle C$. Entonces puede moverse a una nueva posición a nivel del terreno, copiar $\angle C$ y copiar AC en un lado, BC en el otro y por último medir AB

EJERCICIOS 2.6

(Aunque en todas las respuestas siguientes los teoremas se identifican por medio de números, debes ser capaz de citarlos.)

1. No. El tercer lado puede no ser congruente con los dos lados congruentes dados
3. 39°
5. 60°, 60°
7. La información es insuficiente
9. $\angle 2 \cong \angle 3$ por el teorema 2.4. Aplica el teorema 2.1
11. $\angle 2 \cong \angle B$ porque partes corresp. de $\triangle$s $\cong$ son $\cong$. En consecuencia, $\angle 1 \cong \angle B$. Aplica el teorema 2.5

13. Aplica el teorema 2.4 para obtener $\angle Q \cong \angle R$. Aplica ALA = ALA
15. $\triangle ACE \cong \triangle BDE$ por LAL = LAL. Aplica el hecho de que partes corresp. de $\triangle$s $\cong$ son $\cong$
17. Aplica el post. de adición de ángulos. Demuestra que $AC = BC$, de modo que $\triangle DAC \cong \triangle DBC$ por LLL = LLL. Aplica el hecho de que partes corresp. de $\triangle$s $\cong$ son $\cong$
19. Aplica dos veces el teorema 2.4
21. Aplica dos veces el teorema 2.5
23. 23°

EJERCICIOS 2.7

1. Ambos son segmentos de recta con un punto extremo en un punto vértice, pero una altura es perpendicular al lado opuesto y el otro punto extremo de la mediana es el punto medio del lado opuesto
7. Sí
9. Si $AB = CD$, entonces $m\angle 1 = m\angle 2$
11. Aplica LAL = LAL
13. Aplica el teorema 2.6 para demostrar que $m\angle 6 > m\angle 3$ y $m\angle 3 > m\angle 1$
15. Aplica ALA = ALA para demostrar que $\triangle CAE \cong \triangle CBD$. Luego, $CD = CE = AD = BE$
17. Aplica LAL = LAL para demostrar que $\triangle ACD \cong \triangle BCE$ y así $\angle DAC \cong \angle EBC$. Se concluye que $\angle CAB \cong \angle CBA$ y entonces, por el teorema 2.5, $AC = BC$
19. Consulta la sugerencia a continuación del teorema 2.7
21. Las respuestas pueden variar

EJERCICIOS DE REPASO DEL CAPÍTULO 2

1. Siempre	**3.** Algunas veces	**5.** Algunas veces
7. Algunas veces	**9.** Siempre	**11.** No la incluye
13. Congruentes	**15.** Lados	**17.** Verdadera
19. Mayor que	**21.** Está lloviendo	

23. Los triángulos que no son escalenos son isósceles
25. El azúcar no es dulce cuando la remolacha no es un placer
27. $\angle 1, \angle 2; \angle 1, \angle 4; \angle 2, \angle 3; \angle 3, \angle 4; \angle 5, \angle 6; \angle 5, \angle 8; \angle 6, \angle 7; \angle 7, \angle 8$

29. 10	**31.** 68°	**33.** ALA = ALA
35. LLL = LLL	**37.** $AB = BC = 23$	**39.** $m\angle ACD < 72°$

41. DEMOSTRACIÓN

1. $AD = BE$	**1.** Dado
2. $DE = DE$	**2.** Reflexividad
3. $AD + DE = BE + ED$	**3.** Axioma de adición de la =
4. $AE = BD$	**4.** Def. de entre y sustitución

43. Aplica los teoremas 2.4 y 2.5
47. Aplica LLL = LLL para demostrar que $\triangle ABD \cong \triangle ACD$. Así, $\angle BAD \cong \angle CAD$. Entonces, por definición, $\overrightarrow{AD}$ bisecta a $\angle BAC$
49. DEMOSTRACIÓN:

1. $A—D—B$, $C—E—D$, $AC = BC$, $AE = BE$	**1.** Dado
2. $CE = CE$	**2.** Reflexividad
3. $\triangle AEC \cong \triangle BEC$	**3.** LLL = LLL
4. $\angle CEA \cong \angle CEB$	**4.** Partes corresp. de $\triangle$s $\cong$ son $\cong$
5. $\angle AED \cong \angle BED$	**5.** Teorema 2.1
6. $\angle EAD \cong \angle EBD$	**6.** Teorema 2.4
7. $\triangle ADE \cong \triangle BDE$	**7.** ALA = ALA (proposiciones 1, 5, 6)
8. $\angle EDA \cong \angle BDA$	**8.** Partes corresp. de $\triangle$s $\cong$ son $\cong$
9. $\overline{CD} \perp \overline{AB}$	**9.** Def. de $\perp$
10. $\overline{AD} \cong \overline{BD}$	**10.** Partes corresp. de $\triangle$s $\cong$ son $\cong$
11. $\overline{CD}$ es una mediana	**11.** Def. de mediana

51. DEMOSTRACIÓN:

1. $A—D—B$, $m\angle 1 = m\angle 2$, $\overline{CD}$ es una altura	1. Dado
2. $\angle ADC \cong \angle BDC$	2. Def. de altura y de $\perp$
3. $CD = CD$	3. Reflexividad
4. $\triangle ADC \cong \triangle BDC$	4. ALA = ALA
5. $\overline{AD} \cong \overline{BD}$	5. Partes corresp. de $\triangle$ s $\cong$ son $\cong$
6. $\overline{CD}$ es una mediana	6. Def. de mediana

EJERCICIOS 3.1

1. Sí. Dos segmentos de recta distintos en un plano son paralelos si las rectas que los contienen son paralelas
3. No. $\overleftrightarrow{AE}$ no es paralelo a $\overleftrightarrow{CD}$, ya que por A pasa exactamente una paralela a $\overleftrightarrow{CD}$ y esa paralela está definida por $\overleftrightarrow{AB}$, pero $\overleftrightarrow{AE} \neq \overleftrightarrow{AB}$; por lo tanto, los segmentos de recta contenidos en $\overleftrightarrow{AE}$ y $\overleftrightarrow{CD}$ no son paralelos
5. No. Si existiera tal Q, tanto $\overleftrightarrow{EQ}$ como $\overleftrightarrow{CD}$ serían rectas que pasan por Q paralelas a $\overleftrightarrow{AB}$. Esto es imposible por el postulado de las paralelas
7. No. Si $j \parallel m$, entonces por el postulado de las paralelas, k sería igual a m
9. No. Si $P \in j \cap m$ y $P \in j \cap k$, entonces se tendría $P \in k \cap m$

EJERCICIOS 3.2

1. $AB < 8$, $BC > 8$; teorema 3.3
3. $m\angle C < 42°$; teorema 3.2, $m\angle B > 96°$ ya que $m\angle B + m\angle C = 138°$ y $m\angle C < 42°$
5. Sí. Teorema 3.4. Sí; def. de segmentos de recta $\parallel$
7. No. Por la def. de triángulo, cada lado corta a cada uno de los otros lados; en consecuencia, por def. no pueden ser $\parallel$
9. Aplica el teorema 3.1
11. Aplica el teorema 3.2
13. Aplica el teorema 3.1
15. Aplica el teorema 3.3.
17. Ocurre $m\angle 4 = m\angle 5$ o $m\angle 4 \neq m\angle 5$. Supón que $m\angle 4 = m\angle 5$. Entonces por el teorema 2.5, $BC = BD$ y por el teorema 2.1, $m\angle 3 = m\angle 6$. Se tiene $AC = DE$. Entonces, por LAL = LAL se cumple que $\triangle ABC \cong \triangle EBD$. En consecuencia, $m\angle 4 \neq m\angle 5$.
19. Ocurre $AB = BE$ o $AB \neq BE$. Supón que $AB = BE$. Entonces por el teorema 2.4, $m\angle A = m\angle E$. Como $AC = DE$ está dado, entonces por LAL = LAL se tiene $\triangle ABC \cong \triangle EBD$. Como partes corresp. de $\triangle$ s $\cong$ son $\cong$, $m\angle 3 = m\angle 6$. Por tanto, $m\angle 4 = m\angle 5$, ya que los sup. de $\angle$s $\cong$ son $\cong$. Contradicción. En consecuencia, $AB \neq BE$

EJERCICIOS 3.3

1. $\angle 2$, $\angle 4$, $\angle 5$, $\angle 7$
3. $\angle 2$, $\angle 7$; $\angle 4$, $\angle 5$
5. $\angle 1$, $\angle 5$; $\angle 2$, $\angle 6$; $\angle 3$, $\angle 7$; $\angle 4$, $\angle 8$
7. $\angle 1$, $\angle 8$; $\angle 2$, $\angle 7$; $\angle 1$, $\angle 12$; $\angle 3$, $\angle 10$; $\angle 5$, $\angle 10$; $\angle 7$, $\angle 9$
9. $m\angle 4 = m\angle 5 = m\angle 8 = 137°$, $m\angle 2 = m\angle 3 = m\angle 6 = m\angle 7 = 43°$
11. Demuestra que $m\angle 1 = m\angle 5$, $m\angle 3 = m\angle 6$ y aplica el axioma de adición de la =
13. Demuestra que $m\angle 1 = m\angle 5$. Luego aplica el teorema 2.6 y sustitución
15. Aplica el teorema 3.8 y el postulado de adición de ángulos
17. Consulta el ejercicio 16 y también demuestra que $m\angle BAC = m\angle CED$. Luego aplica el teorema 2.1
19. Demuestra que $m\angle GBA = m\angle BAD$. Así, $m\angle BAD = m\angle EDC$. Aplica el teorema 3.8
21. Demuestra que $m\angle IAB = m\angle ABE$ y así $\angle ABE$ es el sup. de $\angle BED$. Aplica el teorema 3.10
23. Supón $\triangle ABC \cong \triangle DEF$. Entonces por el ejercicio 22, $\overleftrightarrow{AB} \parallel \overleftrightarrow{DE}$. Contradicción. En consecuencia, $\triangle ABC \ncong \triangle DEF$.
25. Sea $\overrightarrow{BC} \cap \overrightarrow{EF} = \{P\}$. Por el teorema 3.7, $m\angle ABC = m\angle BPE$. Por el teorema 3.10, $\angle BPE$ y $\angle E$ son suplementarios. Aplica sustitución y la def. de sup

27. (Si) Dado $\triangle ABC \cong \triangle CDA$, demuestra que $AB = CD$, $BC = DA$, $\angle BAC \cong \angle DCA$ y $\angle BCA \cong \angle DAC$. Aplica el postulado de adición de ángulos para demostrar que $\angle DAB \cong \angle BCD$. Luego aplica LAL = LAL para probar que $\triangle ABD \cong \angle CDB$. (sólo si) Dado $\triangle ABD \cong \triangle CDB$, demuestra que $AB = CD$, $BC = DA$, $\angle ABD \cong \angle CDB$ y $\angle ADB \cong \angle CBD$. Aplica el post. de adición de ángulos para demostrar que $\angle ABC \cong \angle CDA$. Luego aplica LAL = LAL para probar que $\triangle ABC \cong \triangle CDA$

29. Supón $m\angle ABC > m\angle DCB$. Entonces existe un rayo $\overrightarrow{BF}$ tal que $m\angle DCB = m\angle CBF$. Por el teorema 3.6, $\overleftrightarrow{BF} \parallel \overleftrightarrow{CD}$. Pero por hipótesis, $\overleftrightarrow{AB} \parallel \overleftrightarrow{CD}$. Esto contradice el postulado de las paralelas

31. Elabora una demostración semejante a la del teorema 3.8, pero usa un $\angle 4$, donde $\angle 1$ y $\angle 4$ son ángulos alternos externos

EJERCICIOS 3.4

1. $m\angle B = 70°$, $m\angle C = 35°$

3. 45°

5. 135°

7. $m\angle A = 30°$, $m\angle ABF = 30°$, $m\angle DBC = 30°$, $m\angle C = 15°$

9. Demuestra que $m\angle ACB = m\angle ECD$ y aplica el teorema 3.11 para probar que $m\angle B = m\angle D$. Luego aplica ALA = ALA. (Consulta el ejercicio 8.)

11. Aplica el teorema 3.11 para demostrar que $m\angle CDB = 110°$. Aplica el teorema 3.8

13. Sea P un punto tal que $A—B—P$. Demuestra que $m\angle A = m\angle DBP$ y que $m\angle C = m\angle CBD$. Aplica el post. de adición de la = y el post. de adición de ángulos

EJERCICIOS 3.5

1. 0	**3.** 5	**5.** 180°	**7.** 720°
9. 9	**11.** 18	**13.** 1720/180 = 86/9 no es un entero	

15. Sean Columna A = Suma de las medidas de los $\angle$s int.
Columna B = Medida de cada $\angle$int.
Columna C = Medida de cada $\angle$ext.
Columna D = Suma de las medidas de los $\angle$s ext.
(Todas las medidas están en grados.)

n	A	B	C	D
3	180	60	120	360
4	360	90	90	360
5	540	108	72	360
6	720	120	60	360
7	900	128 4/7	51 3/7	360
8	1080	135	45	360
9	1260	140	40	360
10	1440	144	36	360
k	$(k-2)180$	$180 - 360/k$	$360/k$	360

17. Dos triángulos se forman por una diagonal y los triángulos son estables. Una cuerda puede ceder, modificando la longitud de la diagonal

EJERCICIOS 3.6

1. $m\angle C = 50°$, $m\angle B = m\angle D = 130°$

3. Sí; por definición, todos los cuadrados son rectángulos

5. Sí; por definición, un cuadrado es un rombo que es un rectángulo

7. Teorema 3.16

9. Por el corolario del teorema 3.16

21. Si $AB = CD$ y $AD = BC$ en el cuadrilátero $ABCD$, entonces $\triangle ACD \cong \triangle CAB$. Por lo tanto, $\angle ACD \cong \angle CAB$ y $\angle DAC = \angle BCA$. En consecuencia, $\overline{AB} \parallel \overline{CD}$ y $\overline{AD} \parallel \overline{BC}$. Si $\angle A \cong \angle C$ y $\angle B \cong \angle D$ en el cuadrilátero $ABCD$, entonces por el teorema 3.14 se tiene que $2\text{m}\angle A + 2\text{m}\angle B = 360°$. Así, $\text{m}\angle A + \text{m}\angle B = 180°$ y por sustitución se tiene que $\text{m}\angle A + \text{m}\angle D = 180°$. En consecuencia, por el teorema 3.10, $\overline{AD} \parallel \overline{BC}$ y $\overline{AB} \parallel \overline{CD}$

23. a) Si un cuadrilátero es un paralelogramo, entonces sus diagonales se bisecan entre sí. b) Si las diagonales de un cuadrilátero se bisecan entre sí, entonces el cuadrilátero es un paralelogramo
DEMOSTRACIÓN:

a. En $\square ABCD$, sea $\overline{AC} \cap \overline{BD} = \{E\}$. Demuestra que $\triangle ABE \cong \triangle CDE$ por ALA = ALA y, en consecuencia, $AE = CE$ y $BE = DE$

b. En el cuadrilátero $ABCD$, sea $\overline{AC} \cap \overline{BD} = \{E\}$. Demuestra que $\triangle ABE \cong \triangle CDE$ por LAL = LAL y, así, $\angle EAB \cong \angle ECD$. De forma parecida, $\triangle AED \cong \triangle CEB$ y, así, $\angle DAE \cong \angle BCE$. En consecuencia, $\overline{AB} \parallel \overline{CD}$ y $\overline{AD} \parallel \overline{BC}$

EJERCICIOS 3.7

1. 3

3. $\text{m}\angle A = \text{m}\angle B = 80°$, $\text{m}\angle D = 100°$

5. 5

7. 45°

9. Teorema 3.23

13. Por el teorema 3.23, $\overline{MQ} \parallel \overline{BD}$, $\overline{PN} \parallel \overline{BD}$, $MQ = DB/2$ y $PN = BD/2$. Por el teorema 3.21, $\overline{MQ} \parallel \overline{PN}$. Por sustitución, $MQ = PN$. Luego, consulta el ejercicio 20 de los ejercicios 3.6

15. Demuestra que $\triangle CDF \cong \triangle BGF$ y así $AD = BG$ y $\angle G \cong \angle CDF$. Por tanto, $\overline{AD} \parallel \overline{BG}$ y por el ejercicio 20 de los ejercicios 3.6, el cuadrilátero $ABGD$ es un paralelogramo. En consecuencia, $\overline{AB} \parallel \overline{DG}$ y $AB = DG$. Debido a que $DG = 2DF$, se tiene que $AB = 2DF$ y así $DF = AB/2$

17. Por def. de mediana, $AE = DE$. Por el teorema 3.7, $\angle CDE = \angle PAE$. Debido a que $\angle$s op. vert. son $\cong$, $\angle PEA \cong \angle CED$. Así, $\triangle APE \cong \triangle DCE$ por ALA = ALA. Ya que partes corresp. de $\triangle$s $\cong$ son $\cong$, $CE = PE$. Pero por def. de mediana $CF = FB$. En consecuencia, por el teorema 3.23, $EF = PB/2$. Pero $PB = PA + AB$ y $PA = CD$, de modo que $EF = (CD + AB)/2$

EJERCICIOS DE REPASO DEL CAPÍTULO 3

1. Siempre
3. Algunas veces
5. Siempre
7. Siempre
9. Nunca
11. Suplementarios
13. Verdadera
15. Verdadera
17. Octágono
19. Verdadera
21. 60°, 120°
23. 50° o 130°. Consulta los puntos 24 y 25 de los ejercicios 3.3
25. 72°
27. $\text{m}\angle A = 60°$, $\text{m}\angle B = 84°$
29. 12
31. 4
33. 120°
35. 24

37. Por el teorema 3.19, las diagonales de un paralelogramo se bisecan entre sí; por lo tanto, en el cuadrado $ABCD$, si $\overline{AC} \cap \overline{BD} = \{E\}$, entonces $BE = DE$ y $AE = EC$. Demuestra que $\triangle AEB \cong \triangle AED$ por LLL = LLL y así, $\angle AEB \cong \angle AED$. Aplica la def. de $\perp$

39. Demuestra que $\triangle ABD \cong \triangle CBD$ por LLL = LLL; por lo tanto, $\angle CBD \cong \angle ABD$. Si $\overline{AC} \cap \overline{BD} = \{E\}$, demuestra que $\triangle ABE \cong \triangle CBE$ por LAL = LAL y aplica la def. de $\perp$

41. Aplica la def. de "entre" y el axioma de adición de la = para demostrar que $AC = BD$. Luego demuestra que $\triangle ACE \cong \triangle DBF$ por LAL = LAL. Así, $\angle EAC \cong \angle FDB$. Aplica el teorema 3.6

43. Si $\text{m}\angle A = \text{m}\angle B + \text{m}\angle C$ y $\text{m}\angle A + \text{m}\angle B + \text{m}\angle C = 180°$, entonces $2\text{m}\angle A = 180°$, de modo que $\text{m}\angle A = 90°$

45. Por el teorema 3.4, $\overline{AD} \parallel \overline{BE}$. Demuestra que $\angle DAP \cong \angle PBE$ y que $\triangle APD \cong \triangle BPE$, de modo que $\triangle APD \cong \triangle BPE$ por ALA = ALA. Así, $AD = BE$. Luego usa el punto 20 de los ejercicios 3.6

47. Aplica varias veces el teorema 3.23 y luego usa repetidas veces LLL = LLL

EJERCICIOS 4.1

1. Si se intercambian los medios de una proporción, la expresión resultante es una proporción. Dada $a/b = c/d$, al aplicar el axioma de mult. de la =, ambos miembros se multiplican por bd y se obtiene $ad = bc$. Luego, aplicar el axioma de mult. de la =, ambos miembros se multiplican por $1/cd$. Se concluye el resultado

3. En una proporción, la media geométrica es igual a la raíz cuadrada positiva o negativa del producto de los extremos. Dada $a/b = b/c$, al aplicar el axioma de mult. de la =, ambos miembros se multiplican por bc y se obtiene $b^2 = ac$. Se concluye el resultado

5. Si en una proporción cada denominador se resta del numerador correspondiente, las nuevas razones forman una proporción. Dada $a/b = c/d$, al aplicar el axioma de adición de la =, a ambos miembros se suma –1 y se obtiene $a/b - 1 = c/d - 1$. El miembro izquierdo es igual a $(a - b)/b$ y el miembro derecho es igual a $(c - d)/d$; así, se concluye el resultado

7. 2/3 **9.** 3/1 **11.** 1/6

13. 3/4 **15.** 4 **17.** 22

19. 8/27 **21.** 6 **23.** 32/5

25. ±9 **27.** ±3/2 **29.** 3/9 = 4/12 = 5/15

31. 4/6 = 8/12 = 12/18 = 16/24

33. 40/11 cuartos de agua, 4/55 taza de sal, 4/11 lb de zanahorias, 48/55 de pollo, 12/55 lb de apio

35. 40/11 cm, 1200/11 cm **37.** 208

39. 12.5 in por 5 in **41.** 636 televisiones; $72 000 de ganancia neta

EJERCICIOS 4.2

1. $\angle A \cong \angle R, \angle B \cong \angle S, \angle C \cong \angle Q; AB/RS = AC/RQ = BC/SQ$

3. $\angle QKL \cong \angle QKA, \angle L \cong \angle A, \angle M \cong \angle B, \angle N \cong \angle C, \angle P \cong \angle D, \angle PQK \cong \angle DQK; KL/AK = LM/AB = MN/BC = NP/CD = PQ/DQ = QK/QK = 1$

5. 160 ft **7.** 500/7 ft **9.** 7/3 in, 21/17 in

11. 24 ft por 20 ft **13.** $\triangle ABC \sim \triangle FED$ **15.** $\triangle PQR \sim \triangle STR$

17. 8/3 **19.** 2/7 **21.** 16/3

29. Aplica el teorema 2.4 y demuestra que $\angle CDE \cong \angle CED$ y $\angle CAB \cong \angle CBA$. Luego, aplica el teorema 3.11 para demostrar que $\angle CDE \cong \angle CAB$ y $\angle CED \cong \angle CBA$

31. Aplica AA ~ AA

33. Aplica AA ~ AA

35. Aplica AA ~ AA

37. Aplica el teorema 3.11 y AAA ~ AAA

EJERCICIOS 4.3

1. $AB/MN = BC/NP = CA/PM$

3. $LE/EL = ED/LF = DL/FE$

5. LAL ~ LAL, $\triangle ABC \sim \triangle EDC$ **7.** No

9. AA ~ AA, $\triangle VWX \sim \triangle ZYW$ **11.** 6/5

13. 10/7 **15.** 16/3

17. Aplica AA ~ AA a los triángulos formados por las alturas

19. Aplica AA ~ AA a los triángulos formados por las bisectrices

21. Aplica AA ~ AA

23. Consulta la sugerencia proporcionada

EJERCICIOS 4.4

1. $\overline{PA}, \overline{PB}, \overline{PC}, \overline{PD}, \overline{PE}, \overline{PF}$ **5.** $\overline{PA}, \overline{PB}, \overline{PC}, \overline{PD}$ **7.** $\overline{PE}, \overline{PF}, \overline{PG}, \overline{PH}$

9. 90° **11.** 60° **13.** 45°

15. 36° **17.** 6 **19.** 15

21. 72 **23.** 17 **25.** $144n$

37. 51 **39.** 18 **41.** 233.6

43. Observa los triángulos formados por los dos radios y un lado, y aplica LLL = LLL

45. Ambos miden 72° (consulta el punto 39)

47. Demuestra que los lados son proporcionales. Aplica el teorema 3.14 para demostrar que los ángulos son congruentes

EJERCICIOS DE REPASO DEL CAPÍTULO 4

1. Nunca **3.** Siempre **5.** Siempre
7. Nunca **9.** Nunca **11.** Proporción, razones
13. Verdadera **15.** Congruentes **17.** Centro, vértices o lados
19. Puede **21.** 3/2 **23.** 1/704
25. 15/7 **27.** 1/4 **29.** 6
31. ±13
33. $\angle A \cong \angle D, \angle C \cong \angle E, \angle B \cong \angle F; AC/DE = AB/DF = CB/EF$
35. 480 ft **37.** 28/5 **39.** 2 **41.** 30°
43. 18/5 **45.** 6 **47.** 6 **49.** 3/8
51. Aplica la definición de semejanza
53. Demuestra que $\triangle ABC \sim \triangle DBE$ por LAL ~ LAL. Luego aplica transitividad con el punto 52
55. Sea $\overline{QU} \parallel \overline{RT}$, como se muestra. Luego, $m\angle SRT = m\angle QRT$ por la def. de bisectriz, $m\angle SRT = m\angle RUQ$ por el teorema 3.8 y $m\angle QRT = m\angle RQU$ por el teorema 3.7. Así, $m\angle RUQ = m\angle RQU$. Entonces, $UR = QR$ por el teorema 2.5. Debido a que $\overline{QU} \parallel \overline{RT}$, se concluye que $PT/QT = PR/UR$. Al sustituir se obtiene $PT/QT = PR/QR$

EJERCICIOS 5.1

1. Sí **3.** Sí **5.** No **7.** Sí
9. Sí **11.** $2\sqrt{23}$ **13.** $17\sqrt{3}$ **15.** No se simplifica
17. $15\sqrt{105}$ **19.** $\sqrt{7}/7$ **21.** $\sqrt{13}/13$ **23.** $\sqrt{6}/2$
25. $34\sqrt{53}/53$ **27.** $13\sqrt{5730}/450$ **29.** $\pm\sqrt{7}$ **31.** –2
33. –3, 7 **35.** $(-3 \pm \sqrt{73})/4$ **37.** ±6 **39.** $\pm 3\sqrt{13}$
41. $(3 \pm 3\sqrt{17})/2$ **43.** $(-3 \pm 3\sqrt{73})/4$ **45.** $(11 \pm \sqrt{305})/4$

EJERCICIOS 5.2

1. Si un cateto y un ángulo agudo de un triángulo rectángulo son congruentes con las partes correspondientes de otro triángulo rectángulo, entonces los dos triángulos rectángulos son congruentes. Usa ALA = ALA o LAA = LAA
3. Si los dos catetos de un triángulo rectángulo son congruentes con las partes correspondientes de otro triángulo rectángulo, entonces los dos triángulos rectángulos son congruentes. Utiliza LAL = LAL
5. Aplica HC = HC
7. Aplica HA = HA
9. Aplica CC = CC
11. Demuestra que $AF = BG$, de modo que $\triangle ADF \cong \triangle BEG$ por CA = CA. Así, $DF = EG$; por lo tanto, $\triangle DFC \cong \triangle EGC$ por CC = CC. En consecuencia, $DC = EC$ y por el teorema 2.4 se concluye el resultado
13. Demuestra que si $\triangle ABC \cong \triangle DEF$, entonces $\triangle DEF \cong \triangle ABC$

EJERCICIOS 5.3

1. 27/2 **3.** 15/4 **5.** $8\sqrt{39}/5$ **7.** $2\sqrt{3}$
9. $\triangle AFB, \triangle CED, \triangle ABC, \triangle CDA, \triangle BFC, \triangle DEA$
11. Aplica los teoremas 3.5 y 5.2

EJERCICIOS 5.4

1. 13 **3.** 144/13 **5.** $\sqrt{5}$
7. 10 **9.** $5\sqrt{5}$ **11.** 3
13. 5 **15.** $\sqrt{253}/5$ **17.** $2\sqrt{3}$
19. $4\sqrt{3}$ **21.** 15° **23.** 30°
25. $4\sqrt{3}$ **27.** 80/9

29. En un triángulo rectángulo isósceles los dos catetos son $\cong$, así pues, por el teorema de Pitágoras, el cuadrado de la longitud de la hipotenusa es igual al doble del cuadrado de la longitud de un cateto. Se concluye el resultado
31. Aplica el teorema 5.6 y el teorema de Pitágoras
33. $800 - 100\sqrt{34} \sim 217$ ft
35. $2 + 10\sqrt{58} \sim 78$ ft
37. $100\sqrt{2}$ lb; $100\sqrt{2}$ lb
39. Velocidad: $5\sqrt{3}$ millas náuticas por hora; dirección: 30° al este del norte
41. $\{5a, 12a, 13a\}$, $\{7a, 24a, 25a\}$, $\{8a, 15a, 17a\}$, $\{9a, 40a, 41a\}$, etcétera, para cualquier entero positivo a

EJERCICIOS 5.5

1. $\sqrt{3}/2$ **3.** $1\sqrt{2}$ **5.** 1/2 **7.** $\sqrt{3}$
9. $1/\sqrt{3}$ **11.** 8/17 **13.** 8/17 **15.** 8/15
17. $2/\sqrt{13}$ **19.** $2/\sqrt{13}$ **21.** 2/3 **23.** 0.9563
25. 0.9816 **27.** 5.1446 **29.** 0.8387 **31.** 09976
33. 14.30 **35.** 0.7547, 0.7547 **37.** 0.9998, 0.9998 **39.** Aprox. 57 ft
41. Aprox. 15432 ft **43.** Aprox. 11 ft **45.** Aprox. 1750 mi **47.** Aprox. 193 ft, 187 ft
49. Aprox. 504 mph y 83° al oeste del norte
51. $\dfrac{\text{sen m}\angle B}{\tan \text{m}\angle B} = \dfrac{OP/HIP}{OP/ADY} = \dfrac{OP}{HIP} \cdot \dfrac{ADY}{OP} = \dfrac{ADY}{HIP} = \cos \text{m}\angle B$

EJERCICIOS DE REPASO DEL CAPÍTULO 5

1. Algunas veces **3.** Algunas veces **5.** Siempre **7.** Nunca
9. Nunca **11.** Semejantes **13.** Verdadera **15.** Verdadera
17. Verdadera **19.** Verdadera **21.** 6 **23.** $(\sqrt{5}/2)BC$
25. $3\sqrt{2}/2$ **27.** $6\sqrt{2}$ **29.** 10/3 **31.** 23/9
33. 6 **35.** 17 **37.** $a\sqrt{41}$ **39.** $\sqrt{39}$
41. $\sqrt{6}/6$ **43.** $n\sqrt{33}$ **45.** $\sqrt{8y^2 + 14y + 3}$ **47.** 1/2
49. 37° **51.** 9/25 **53.** $12\sqrt{5}$ **55.** $5\sqrt{3}/6$ parsecs
57. 1.5 cm **59.** Demuestra que $\angle RNQ \cong \angle SNQ$. Luego aplica HA = HA
61. Usa el corolario del teorema 5.6
63. Demuestra que $\triangle ADF \cong \triangle BEG$ por LAL = LAL y así, $\angle A \cong \angle B$. El resultado se concluye por el teorema 2.5

EJERCICIOS 6.1

1. Segmento tangente **3.** Rayo tangente **5.** Radio
7. Tangente internamente **9.** Concéntricos **11.** No se cortan
13. $8 + 16\sqrt{3}/3$
15. Demuestra que $\triangle PAC \cong \triangle PBC$ por HC = HC
17. Demuestra que $\overline{PB} \perp \overline{BC}$ y $\overline{QD} \perp \overline{BC}$
19. Si d es la distancia del centro del círculo a la recta, entonces $d < r$ (radio). Usa segmentos de longitud $\sqrt{r^2 - d^2}$ sobre la recta para demostrar que en la recta hay dos puntos que están a una distancia r del centro del círculo
21. $200\sqrt{41}$ mi **23.** $300\sqrt{5}$ mi **25.** Umbra

EJERCICIOS 6.2

1. = **3.** < **5.** $2 + 4\sqrt{2} + 2\sqrt{3}$
9. Demuestra que $\triangle PAQ$ es isósceles. Así, $\angle APQ \cong \angle AQP$ y entonces $\angle BAP \cong \angle CAQ$. También $\triangle ABP$ y $\triangle ACQ$ son isósceles. Se concluye el resultado
11. Demuestra que $\triangle ADB \cong \triangle CDB$ mediante CC = CC
13. Usa las mediatrices de los segmentos de recta que unen los puntos. Éstas se cortan en el centro del círculo buscado.
15. Aplica LLL = LLL y la definición de $\perp$

EJERCICIOS 6.3

1. $\widehat{EF}, \widehat{FG}, \widehat{GH}, \widehat{HE}, \widehat{EHG}, \widehat{FGH}$
3. Un rayo de $\angle S$ corta $\bigodot Q$ sólo en el vértice. Ambos rayos de $\angle T$ cortan $\bigodot Q$ sólo en el vértice
5. 266° **7.** 180° **9.** 333° **11.** 120°
13. 65° **15.** 69° **17.** 90° **19.** 25°
21. 70° **23.** 45° **25.** Semejante al caso 1.
27. Aplica el teorema 6.10
29. Aplica los teoremas 6.2 y 6.10
31. Las proposiciones son idénticas a la del teorema 6.13, excepto que en el primer diagrama uno de los rayos es una tangente y en el segundo ambos rayos lo son. Las demostraciones son similares a la demostración del teorema 6.12

EJERCICIOS 6.4

1. 9 **3.** 4, 10 **5.** $8\sqrt{3}$
9. Aplica AA ~ AA.
11. Demuestra que $\triangle ABP \cong \triangle ACP$ por CC = CC. Así, $\angle BAD \cong \angle CAD$
13. Dadas las cuerdas $\overline{AB}$ y $\overline{CD}$ tales que $CD > AB$, construye un círculo P con cuerdas $\overline{EF}$ y $\overline{FG}$ tales que $EF = AB$ y $FG = CD$ y tales que E no esté en el mismo lado de $\overleftrightarrow{GF}$ que P. Así, m$\widehat{FE}$ + m$\widehat{EG}$ = m$\widehat{FG}$ y m$\widehat{EG} > 0$, de modo que m$\widehat{FG}$ > m$\widehat{FE}$. En consecuencia, m$\widehat{CD}$ > m$\widehat{AB}$
15. Demuestra que $\triangle ADC \sim ABE$ por AA ~ AA
17. 4800 mi **19.** 15 in

EJERCICIOS 6.5

11. Demuestra que $\overrightarrow{PA} \perp \overleftrightarrow{AB}$ y $\overleftrightarrow{QB} \perp \overleftrightarrow{AB}$. Luego usa el teorema 6.1

EJERCICIOS 6.6

1. El rayo que biseca a $\angle A$
3. Dos rectas paralelas a 4 in de distancia entre sí
5. El centro del círculo que contiene a los tres puntos
7. Una recta paralela a m y n, a media pulgada de cada una de éstas
9. Dos puntos, un punto, o ∅
11. Un diámetro del círculo (excluyendo los puntos extremos)
13. Cuatro círculos concéntricos de radios 1, 2, 4 y 5
15. La unión de a) una figura que parece pentágono en el exterior del pentágono, salvo que en vez de vértices tiene arcos y b) un pentágono semejante al pentágono original (o un punto o ∅) en el interior del pentágono
17. Las respuestas pueden variar, dependiendo de la altitud del avión y la altura de las montañas

EJERCICIOS DE REPASO DEL CAPÍTULO 6

1. Algunas veces **3.** Nunca **5.** Algunas veces
7. Nunca **9.** Siempre **11.** Verdadera
13. Está inscrito en **15.** Verdadera **17.** Dos veces
19. Verdadera **21.** 10 **23.** 3 (o 5, si no crees que $DF < FG$).
25. 2°30′ **27.** Teorema 6.7 **29.** Teorema 6.2
31. Teorema de adición de arcos
33. Sea $\overline{PR} \cap \overline{LS} = \{U\}$. Entonces $PU > PS$ por el teorema 3.3 y $PR > PU$ por la def. de "entre". En consecuencia, $PR > PS$.
37. La unión de a) una figura en el exterior del rectángulo que parece rectángulo, salvo que en vez de vértices tiene arcos y b) un segmento de recta de una pulgada de largo en el interior del rectángulo
39. Dos rectas perpendiculares

EJERCICIOS 7.1

1. Sí **3.** No **5.** Sí **7.** 6
9. 18 **11.** 0 (no hay región) **13.** 30 in^2 **15.** $3\sqrt{2}$ in, 6 in.
17. $\sqrt{10}$ cm, $2\sqrt{5}$ cm **19.** 1/9 **21.** 72 **23.** 6.0 in^2
25. Divide los polígonos en triángulos y aplica el postulado 7.2

EJERCICIOS 7.2

1. 10 **3.** 75 **5.** 22 **7.** 350 in^2
9. 7.5 **11.** 8 latas (582 ft^2) **13.** 36.8125 in^2 **15.** $288\sqrt{3}$ ft^3
17. $7\sqrt{30}$ **19.** $6\sqrt{10}$
21. Cero. No se forma ningún triángulo porque la suma de los dos lados cortos es igual al lado largo
23. $8\sqrt{3}$
29. Aplica el teorema 7.3
31. Divide el polígono en triángulos formados por los ángulos centrales y los lados y aplica el teorema 7.3
33. Aplica el teorema 7.3 y el postulado 7.3
35. Aplica el teorema 7.3

EJERCICIOS 7.3

1. 4π **2.** $8\pi/3$ **5.** $4\pi/3 - \sqrt{3}$ **7.** 4π
9. $8\pi/3 + 4$ **11.** $4\pi/3 + 2\sqrt{3}$ **13.** $144 - 36\pi$ **15.** $8\pi + 16\sqrt{3}$
17. 75π **19.** $10\pi + 4\sqrt{3}$, 10π **21.** Aplica el teorema 7.6 **23.** Usa diagramas
25. 5 **27.** $12\,\pi$ ft = aproximadamente 37.7 ft

EJERCICIOS DE REPASO DEL CAPÍTULO 7

1. Algunas veces **3.** Nunca **5.** Nunca **7.** a^2/b^2
9. Verdadera **11.** $4\sqrt{3}$, $2\sqrt{3}$ **13.** $16\,\pi/3 - 4\sqrt{3}$ **15.** $\sqrt{3} - 1$
17. $64\pi - 96\sqrt{3}$ **19.** Aplica el teorema 7.2 **21.** Área $= a(b_1 + b_2)/2$ **23.** $26\pi + 48$
25. $100\pi - 96$ **27.** $(59\pi - 16\sqrt{3})/3$ **29.** $(60 - 15\,\pi)$ ft^2 = aproximadamente 12.9 ft^2

EJERCICIOS 8.1

1. 5 **3.** 25 **5.** $\sqrt{89}$ **7.** $16\sqrt{2}$
9. Sí, no, sí, no **11.** Sí, sí, sí, sí **13.** $(-3, -8)$ **15.** $(0, 7)$
17. Considera los puntos $P(a, b)$, $Q(c, d)$ y $R(c, b)$, y demuestra que $(PR)^2 + (QR)^2 = (PQ)^2$

EJERCICIOS 8.2

1. 1 **3.** 2 **5.** 7/4
7. (9/2, 15/2), (3/2, 1), (17/2, 1), (11/2, −2), (2, 7/2), (5, 2) **9.** (9, 11)
11. −2, 3/2 **13.** 3, −17 **15.** 1/7, 6/7
17. $x + 3y - 24 = 0$ **19.** $2x - 5y + 24 = 0$ **21.** $x = -7$

Ejercicios 23, 25 y 27: traza segmentos de recta desde:

23. (0, −8) hasta (3, 4) **25.** (−3, 0) hasta (3, 8)
27. (4, −6) hasta (4, −2)
29. $18x + 13y - 68 = 0$, $21x - 4y - 41 = 0$. $3x - 17y + 27 = 0$. (7/3, 2)
31. Usa el eje y como transversal y aplica el teorema 3.8

EJERCICIOS 8.3

1. $2x - 3y + 18 = 0$, $[-6, 3]$; $9x + 5y + 44 = 0$, $[-6, -1]$; $15x - 4y - 13 = 0$, $[-1, 3]$

3. $5x - 3y + 30 = 0$, $[-6, 0]$; $5x + 6y - 60 = 0$, $[0, 6]$; $y = 5$, $[0, 6]$, $x - y + 5 = 0$, $[-3, 0]$; $2x - 3y + 12 = 0$, $[-6, -3]$

5. $5x + 2y + 11 = 0$, $[-3, -1]$; $2x - 5y + 16 = 0$, $[-3, 2]$; $5x + 2y - 18 = 0$, $[2, 4]$; o $5x + 2y + 11 = 0$, $[-1, 1]$; $2x - 5y - 42 = 0$, $[1, 6]$; $x + 2y - 18 = 0$, $[4, 6]$

9. Considera el triángulo con vértices $A(a, 0)$, $B(b, d)$ y $C(0, 0)$. El punto medio de $\overline{AB}$ es $M((a + b)/2, d/2)$, y el punto medio de $\overline{BC}$ es $N(b/2, d/2)$. Observa que $\overline{AB} \parallel \overline{BC}$, ya que ambas están sobre rectas de pendiente cero. Al aplicar el teorema 8.1, $AC = a$ y $MN = (1/2)a$, con lo que se llega al resultado deseado

11. Considera el triángulo con vértices $A(a, 0)$, $B(b, d)$ y $C(0, 0)$. El punto medio de $\overline{AB}$ es $M((a + b)/2, d/2)$, el punto medio de $\overline{BC}$ es $N(b/2, d/2)$ y el punto medio de $\overline{AC}$ es $P(a/2, 0)$. La pendiente de $\overline{CM}$ es $d/(a + b)$, la pendiente de $\overline{AN}$ es $d/(b - 2a)$. La ecuación de $\overleftrightarrow{CM}$ es $y = dx/(a + b)$ y la ecuación de $\overleftrightarrow{AN}$ es $y = d/(x - a)(b - 2a)$. Al resolver estas dos ecuaciones con dos incógnitas se obtiene $x = (a + b)/3$ y $y = d/3$, de modo que el punto de intersección de $\overline{CM}$ y $\overline{AN}$ es $((a + b)/3, d/3)$, que está a dos tercios de la distancia de A a N y de C a M. Con un razonamiento semejante se llega al mismo punto de intersección sobre $\overline{BP}$

EJERCICIOS 8.4

1. $x^2 + y^2 = 9$

3. $(x + 4)^2 + (y + 7)^2 = 16$

5. $x^2 + y^2 - 8x + 16y - 89 = 0$

7. $x^2 + y^2 + 6x - 12y - 44 = 0$

9. $x^2 + y^2 - 8x + 12y + 36 = 0$

11. $(2, 5)$, 3

13. $(-7, 25/2)$, $\sqrt{593}/2$

15. $x^2 + y^2 + 6x - 8y + 16 = 0$, $x^2 + y^2 + 6x - 8y + 9 = 0$, $x^2 + y^2 + 6x - 8y = 0$, $x^2 + y^2 + 6x - 8y - 11 = 0$

EJERCICIOS 8.5

1. Sí	**3.** Sí	**5.** Sí	**7.** No
9. No	**11.** Sí	**13.** Sí	**15.** Sí
17. Sí	**19.** No	**21.** Sí	**23.** No
25. No	**27.** Sí	**29.** No	**31.** Sí

33. Ambos conducen al mismo resultado. Sí

35. Los resultados son diferentes

37. Los resultados son diferentes

39. Cuarto: Traslada $\mathbb{R}$ una unidad hacia arriba, luego refléjala con respecto a la recta $y = -x$ y rótala 45° en el sentido del movimiento de las manecillas del reloj. Quinto: rota $\mathbb{R}$ 45° en el sentido del movimiento de las manecillas del reloj, luego refléjala con respecto a la recta $y = -x$, y trasládala una unidad hacia arriba. Sexto: refleja $\mathbb{R}$ con respecto a la recta $y = -x$, trasládala una unidad hacia arriba y rótala 45° en sentido del movimiento de las manecillas del reloj. La tercera orden produce el mismo conjunto de puntos que la quinta orden. Los otros resultados son diferentes

41. DADO: $\mathscr{T}: \mathbb{R} \leftrightarrow \mathbb{S}$ es una isometría;
A, B, C en $\mathbb{R}$, A', B', C' en $\mathbb{S}$;
$A \leftrightarrow A', B \leftrightarrow B', C \leftrightarrow C'$;
B está entre A y C.
DEMUESTRA: B' está entre A' y C'.
DEMOSTRACIÓN: Debido a que B está entre A y C, $AB + BC = AC$. $\mathscr{T}$ es una isometría, por lo cual preserva distancias; así pues $AB = A'B'$, $BC = B'C'$ y $AC = A'C'$. Así, $A'B' + B'C' = A'C'$ por sustitución. En consecuencia, B' está entre A' y C'

43. DADO: $\mathscr{T}: \mathbb{R} \leftrightarrow \mathbb{S}$ es una isometría;
A, B, C en $\mathbb{R}$, A', B', C' en $\mathbb{S}$;
$A \leftrightarrow A', B \leftrightarrow B', C \leftrightarrow C', \triangle ABC$;
$\triangle A'B'C'$.

DEMUESTRA: $\triangle ABC \cong \triangle A'B'C'$

DEMOSTRACIÓN: $\mathscr{T}$ es una isometría, por lo cual preserva distancias; así pues $AB = A'B'$, $BC = B'C'$ y $AC = A'C'$. En consecuencia, $\triangle ABC \cong \triangle A'B'C'$ por LLL = LLL

45. DADO: $\mathscr{T}: \mathbb{R} \leftrightarrow \mathbb{S}$ es una reducción;
$A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$, $C(x_3, y_3)$ en $\mathbb{R}$;
$A'(rx_1, ry_1)$, $B'(rx_2, ry_2)$, $C'(rx_3, ry_3)$ en $\mathbb{S}$;
$A \leftrightarrow A'$, $B \leftrightarrow B'$, $C \leftrightarrow C'$;
$\triangle ABC$, $\triangle A'B'C'$.

DEMUESTRA: a) $\triangle ABC \sim \triangle A'B'C'$
b) $\triangle ABC \ncong \triangle A'B'C'$

DEMOSTRACIÓN: a) Demuestra que $AB/A'B' = BC/B'C' = AC/A'C' = r$. Luego aplica LLL ~ LLL
b) Demuestra que $AB \neq A'B'$

47. $\mathbb{S} = \mathbb{R}$, de modo que $x^2 + y^2 = 1$. Así, todo punto con coordenadas (x, y) en $\mathbb{R}$ corresponde al punto con coordenadas (x, y) en $\mathbb{S}$. En consecuencia, $\mathscr{T}$ es una transformación. Debido a que se preservan las coordenadas, resulta evidente que se preservan las distancias; por lo tanto, $\mathscr{T}$ es una isometría.

49. $\mathbb{S}$ es el exterior del círculo unitario (observa que $x^2 + y^2 < 1$, de modo que x dividido entre esta cantidad es mayor que x y y dividido entre esta cantidad es mayor que y). $\mathscr{T}$ es una transformación porque la correspondencia uno a uno definida por las coordenadas de los puntos conduce a una correspondencia uno a uno entre los puntos. Puede probarse que $\mathscr{T}$ no es una isometría demostrando que no siempre se preserva la distancia; por ejemplo, la distancia entre (0, 0.5) y (0, 0.1) es 0.4, pero la distancia entre los puntos correspondientes (0, 2) y (0, 10) es 8

EJERCICIOS DE REPASO DEL CAPÍTULO 8

1. Nunca **3.** Algunas veces **5.** Algunas veces
7. Indefinido **9.** No son **11.** $\sqrt{305}$
13. $(-5\sqrt{2}, 5\sqrt{2})$, $(5\sqrt{2}, -5\sqrt{2})$
15. $3x - 2y + 4 = 0$, $[-6, 2]$
17. 3/5, −11/5
19. Demuestra que los lados opuestos del cuadrilátero tienen la misma pendiente
21. Considera el triángulo rectángulo con vértices en $A(a, 0)$, $B(0, b)$ y $O(0, 0)$, y el punto medio $M(a/2, b/2)$ de la hipotenusa. Demuestra que $OM = (1/2)AB$
23. Sí **25.** No

EJERCICIOS 9.1

3. Una **5.** No **7.** Sí
9. Que T no corte a R ni a S
11. Uno, una infinidad
13. Considera un triángulo rectángulo con lados 3, 4 y 5

EJERCICIOS 9.2

1. 4, 4, 6 **3.** 8, 6, 12 **5.** 20, 12, 30
7. 3, 3 **9.** 4, 4 **11.** 0
13. 100 **19.** 7, 10

EJERCICIOS 9.3

1. $9\sqrt{3}$ m², $18\sqrt{3}$ m² **3.** 460 in²
5. $5\pi\sqrt{89}$ cm² **7.** 140 π in²
9. 64 000 000 π mi² **11.** $108 + 18\sqrt{3}$ in²
13. Es 4 veces más grande

15. Es 6 veces más grande
17. 4 a 1
19. Aproximadamente $15 904

EJERCICIOS 9.4

1. 420 m^3
3. 27 a 1
5. 1152 π m^3
7. $40\sqrt{3}$ cm^3
9. $\pi r^3/3$
11. 256 000 000 000 $\pi/3$ mi^3
13. 6 π in^3
15. 212 π /3 ft^3
17. No. La razón del volumen de la bola de Julia a la bola de Gerardo es 512/125, de modo que la bola de Julia pesa más de cuatro veces lo que la de Gerardo, pero ella es sólo dos veces más fuerte que éste
19. 4.44 limones (¡compre 5 limones!)

EJERCICIOS DE REPASO DEL CAPÍTULO 9

1. Algunas veces
3. Nunca
5. Algunas veces
7. Algunas veces
9. Algunas veces
11. Verdadera
13. Oblicuas
15. Pentagonales
17. Verdadera
19. Deben
21. Una
23. 64
25. $25\sqrt{3}$ cm^2
27. Cono (120 π contra 1000/3 in^3)
29. 522 π ft^2
31. 127/27 m
33. 435 yd^3
35. 1 072 476 000 000 000 000 000 000 π mi^3

EJERCICIOS 10.1

1. Una infinidad
3. Uno
5. Una
7. Menos de 180°
9. La medida de un ángulo exterior de un triángulo es mayor que la suma de las medidas de los ángulos interiores opuestos

EJERCICIOS 10.2

1. Ninguna
3. Tres
5. Según la posición del punto, puede haber una o una infinidad
7. Entre 180° y 540°
9. La medida del ángulo exterior de un triángulo es menor que la suma de las medidas de los ángulos interiores opuestos

EJERCICIOS DE REPASO DEL CAPÍTULO 10

1. *S*
3. *E*, *P*
5. *S*
7. *E*
9. *S*
11. Hiperbólica: menos de 180°; elíptica: entre 180° y 540°
15. Considera números de la forma 1/*r*, en particular cuando *r* está cerca de cero

Índice

¡MATEMÁTICAS CON PODER!

ISBN 968-7529-47-4

9 789687 529479