Semejanza.

Def.: "Semejanza es la composición de una homotecia y un movimiento “

Las figuras que cumplen esas condiciones se llaman semejantes.

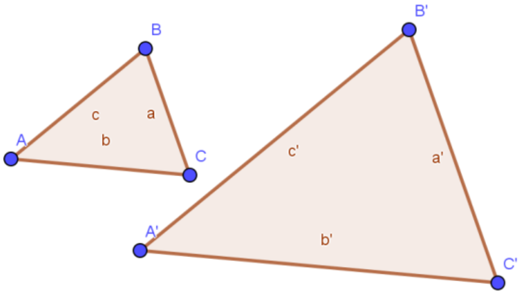
La correspondencia que intercede entre ellas se llama semejanza.
La razón de proporcionalidad entre los segmentos homólogos se llama razón de semejanza (S).
En el caso que S = 1 o S = -1, la semejanza es una congruencia.

CARACTERÍSTICAS:
Se conserva la alineación y el orden.
Los segmentos homólogos son proporcionales
Los ángulos homólogos son congruentes.
Si en la semejanza se conserva el sentido del plano la semejanza se llama directa, en caso contrario se llama inversa.

Semejanza de triángulos y polígonos: condición necesaria y suficiente.

Dos triángulos son semejantes cuando tienen sus ángulos respectivamente iguales y sus lados proporcionales. El signo de semejanza es ~. ABC ~. A’B’C’

Para asegurar la semejanza no es necesario comprobar todas estas condiciones pues se verá que el hecho de tener solo alguna nos asegura la misma.
Lados homólogos: Son los que se oponen a los ángulos iguales. AB y A’B’, BC y B’C’, CA y C’A’.



Lados proporcionales

$$\frac{AB}{A'B'} = \frac{BC}{B'C'} = \frac{CA}{C'A'}$$

Angulos iguales

$\hat{A} = \hat{A}'$

$\hat{B} = \hat{B}'$

$\hat{C} = \hat{C}'$

Casos de semejanza de triángulos

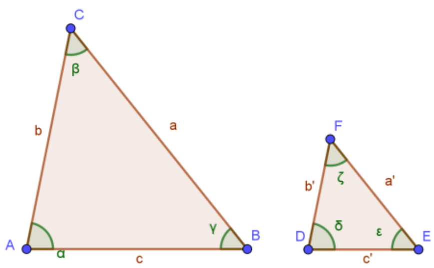
- Si tienen dos ángulos respectivamente iguales
  Si ∡A=∡A’ y ∡B=∡B’ entonces ΔABC ~. Δ A’B’C’

- Si tienen dos lados proporcionales e igual el ángulo comprendido.
  $\frac{AB}{A'B'} = \frac{AC}{A'C'}$ y ∡A=∡A’ entonces ΔABC ~. Δ A’B’C’

- Si tienen los tres lados proporcionales.
  $\frac{AB}{A'B'} = \frac{AC}{A'C'} = \frac{BC}{B'C'}$ entonces ΔABC ~. Δ A’B’C’

Demostración de la semejanza de triángulos

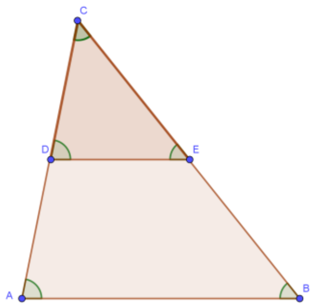
Considerar dos triángulos que tiene sus tres ángulos iguales. Poe ejemplo, los triángulos ABC y DEF, donde $\hat{A} = \widehat{D}$ $\hat{B} = \hat{E}$ y $\hat{C} = \hat{F}$



Como estos triángulos tiene tienen sus ángulos iguales, para analizar si son semejantes falta determinar si las medidas de sus lados homólogos son proporcionales, es decir:

$$\frac{\overline{AC}}{\overline{DF}} = \frac{\overline{CB}}{\overline{FE}} = \frac{\overline{AB}}{\overline{DE}}$$

Dado que los dos triángulos tienen sus tres ángulos iguales es posible superponer los ángulos C y F haciéndolos superponer es sus lados. Para evitar confusiones, al vértice que comparten lo llamaremos C.

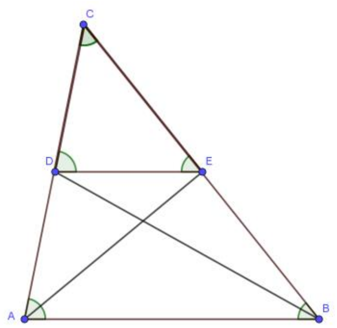


El dibujo parece informar que $\overline{AB}$ y $\overline{DE}$ son paralelos ¿será cierto?

Como $\hat{A} = \widehat{D}$ y $\hat{B} = \hat{E}$, y sabiendo que si los ángulos correspondiente entre dos rectas son iguales, entonces las dos rectas son paralelas.

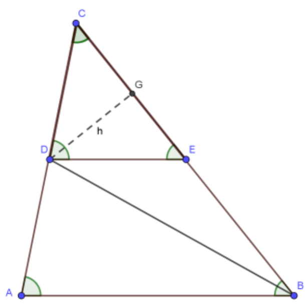
Para determinar si los triángulos son semejantes, hay que determinar si se cumple que

$$\frac{\overline{AC}}{\overline{DC}} = \frac{\overline{CB}}{\overline{CE}} = \frac{\overline{AB}}{\overline{DE}}$$



Para analizar la primera igualdad, $\frac{\overline{AC}}{\overline{DC}} = \frac{\overline{CB}}{\overline{CE}}$ trazamos los segmentos DB y AE.

Sabemos los triángulos AEC y BDC tienen igual área, por tener la misma base y altura



Además, el triángulo BCD tiene de base CB y altura h. El triángulo DCE tiene base CE y su altura también es h. como los dos triángulos tienen igual altura, la razón entre las áreas es igual a la razón entre las medidas de las bases

<table>
<tr><td>$Area\ del\ \Delta\ BDC = \frac{\overline{CB}.h}{2}$</td><td rowspan="2">$\frac{Area\ \Delta BDC}{Area\ \Delta DCE} = \frac{\overline{CB}}{\overline{CE}}$</td></tr>
<tr><td>$Area\ del\ \Delta DCE = \frac{\overline{CE}}{2} h$</td></tr>
</table>

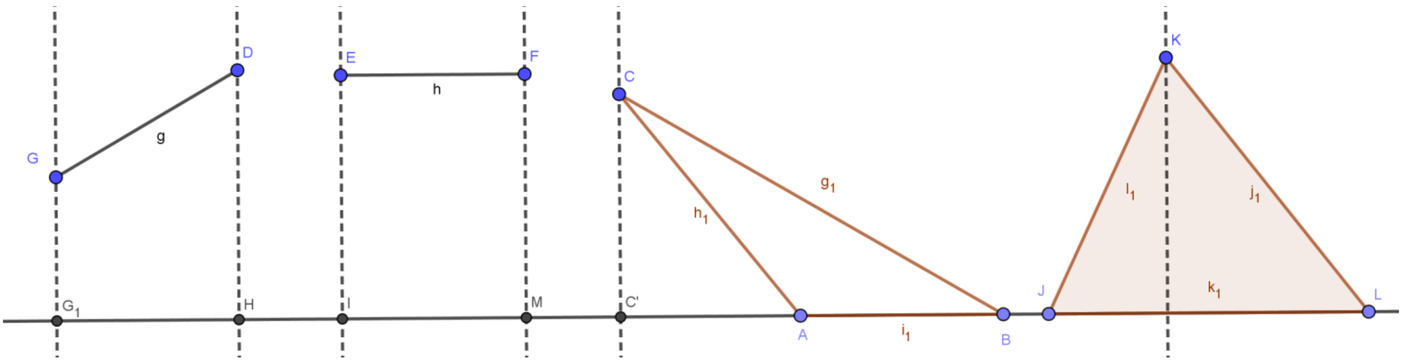
Al realizar el mismo análisis con los triángulos AEC y DCE podemos determinar las otras proporciones.

Por lo tanto, las medidas de los lados son proporcionales y, como los ángulos son iguales, los triángulos son semejantes.

Relaciones métricas en el triángulo rectángulo:

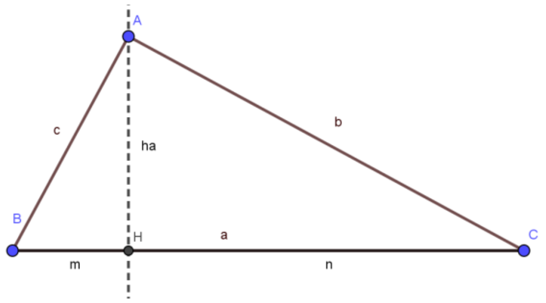
Se llama proyección de un punto G, D, E, etc. sobre una recta, al pie G1, H, I, etc. de la perpendicular bajada a la recta desde el punto. La recta perpendicular se llama proyectante (recta punteada)

Proyecciones de los lados de un triángulo:
En la figura están representadas las proyecciones de los lados AC del ΔABC sobre el lado AB y del ΔJLK el lado LK sobre JL.
Las proyecciones se expresan, por ejemplo: Proyec. $_{AB}$ AC=AC'



Teorema del cateto,
PROPIEDAD: "Cada cateto de un triángulo rectángulo es medio proporcional entre la hipotenusa y su proyección sobre ella".

ABC triángulo rectángulo
a hipotenusa
b y c catetos
n proyección del cateto b sobre la hipotenusa
m proyección del cateto c sobre la hipotenusa.

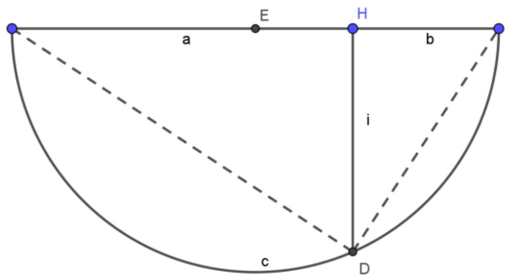


Entonces por ser medio proporcional se tiene que $\frac{a}{c}=\frac{c}{m}$ entonces despejando c^2= a . m, respecto del otro cateto se tiene b^2= a . n.

Teorema de la altura,
PROPIEDAD: “La altura sobre la hipotenusa de un triángulo rectángulo es media proporcional entre los segmentos en que divide a ésta”.
De la semejanza de los triángulos AHB y AHC se desprende que $\frac{HB}{HA}=\frac{HA}{HC}$ de donde $HA^2=HB\,.HC$ o respecto del grafico ha^2=m.n

Construcción de medias proporcionales

El Teorema de la altura nos brinda una herramienta para construir un segmento i desconocido, que es medio proporcional entre dos segmentos a y b dados.
Se deberá construir un triángulo rectángulo cuya hipotenusa sea el segmento a + b y cuyo vértice opuesto D se proyecte en H, eso quiere decir que D debe estar situado en la semicircunferencia de diámetro a + b y en perpendicular a ésta trazada por H. El segmento DH es el segmento medio proporcional.



Teorema de Pitágoras.

PROPIEDAD: "En todo triángulo rectángulo el cuadrado de la hipotenusa es igual a la suma de los cuadrados de los catetos".

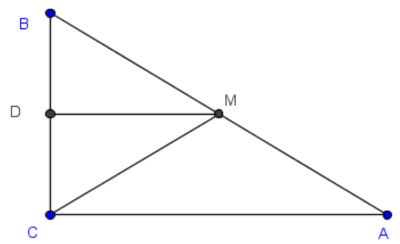
$$a^2 = b^2 + c^2$$

Sumando las expresiones del teorema del cateto $b^2= a\,.\,n$.+ $c^2= a\,.\,m$, se tiene b^2.+ $c^2= a\,.\,n + a\,.\,m$ sacando factor común y reemplazando $m+n=a$ se obtiene la expresión del teorema

Teorema de la mediana,

PROPIEDAD: "La mediana a la hipotenusa, de un triángulo rectángulo, mide la mitad de la hipotenusa".

Sea M el punto medio de la hipotenusa de un triángulo BCA. Demostrar que M es equidistante de los vértices.



Por M tracemos una paralela a CA, y sea D su punto de intersección con el cateto BC. Puesto que DM es paralela a CA y CA es perpendicular a BC, entonces DM es también perpendicular a BC. Por el teorema de la línea media se sabe que D es punto medio de BC. Pero entonces DM es mediatriz de BCM. De aquí que BM=CM (pues la mediatriz de un segmento es el lugar geométrico de los puntos que equidistan de los extremos) (Alternativamente, se puede ver que los triángulos rectángulos BDM y CDM tienen los catetos correspondientemente iguales y entonces son congruentes por el criterio LAL. De aquí que BM=CM.).http://www.matetam.com/glosario/teorema/mediana-hipotenusa

Propiedades de los triángulos rectángulos especiales.

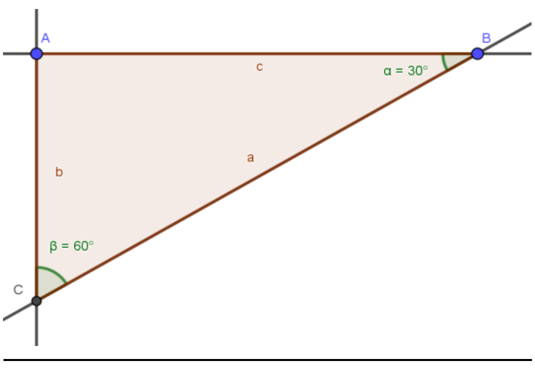
PROPIEDAD: "Si en un triángulo rectángulo un ángulo mide 30°, el cateto opuesto mide la mitad de la hipotenusa

$$b = \frac{a}{2}$$

COROLARIO: "Si en un triángulo rectángulo un ángulo mide 60°, el cateto opuesto cumple con las siguientes relaciones métricas

$$c = \sqrt{3}.b$$

$$c = \frac{\sqrt{3}}{2}.a$$

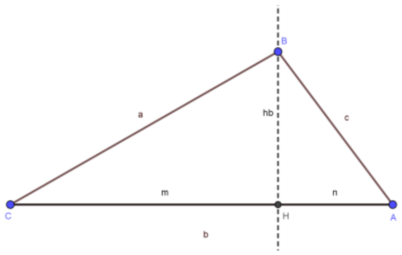


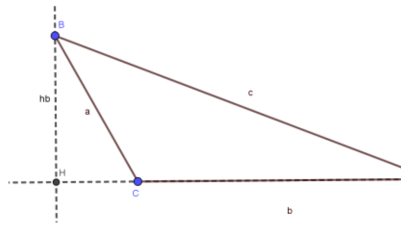
Propiedad métrica en los triángulos

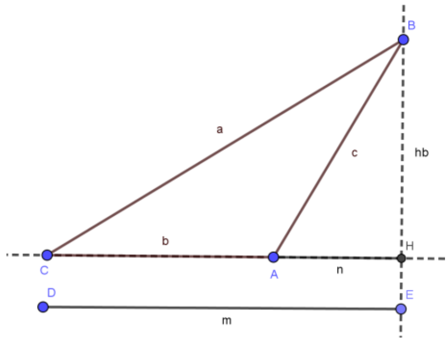
Generalización del teorema de Pitágoras.

PROPIEDAD: "El cuadrado de un lado es igual a la suma de los cuadrados de los otros dos, menos el doble producto de uno de ellos por la proyección del otro lado sobre él, si el lado se opone a un ángulo agudo; y más el doble producto de uno de ellos por la proyección del otro sobre él, si el lado se opone a un ángulo obtuso".

De acuerdo a lo enunciado en la propiedad se pueden presentar tres casos.







Llamaremos ahora "a" a la medida del lado BC, opuesto a un ángulo agudo en un
triángulo oblicuángulo ABC (figura a y b) o el opuesto al opuesto al ángulo obtuso en un triángulo obtusángulo (figura c).

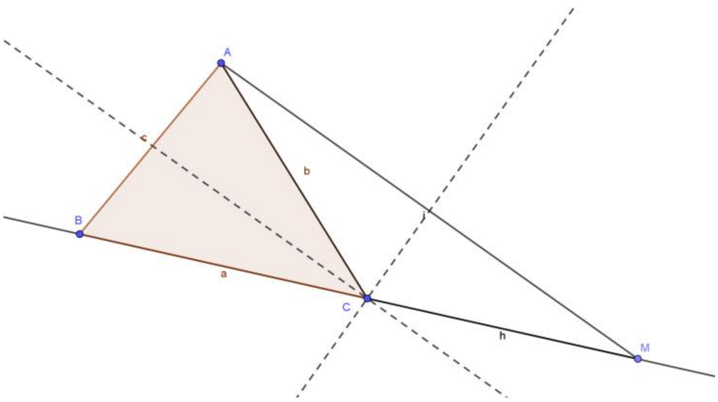
Se traza por un extremo B la altura correspondiente hb y llamemos m y n a las medidas de los segmentos absolutos CH y AH que determina sobre el lado opuesto. Sean análogamente b y c las medidas CA y AB.
Entonces en las figuras a y b se tiene $a^2 = m^2 + hb^2 = (b-n)^2 + c^2 - n^2 = b^2 + c^2 - 2bn$
En la figura c se tiene $a^2 = m^2 + hb^2 = (b+n)^2 + c^2 + n^2 = b^2 + c^2 + 2bn$

En resumen $a^2 = b^2 + c^2 \mp 2bn \quad \begin{cases} -\, si\ A < 90° \\ +\, si\ A > 90° \\ n = 0\ si\ A = 90° \end{cases}$

Otra forma de enunciar "El cuadrado de un lado opuesto a un ángulo (agudo/obtuso) de un triángulo oblicuángulo es igual a la suma de los cuadrados de los otros dos (menos/mas) el doble del producto de ellos por la proyección del otro sobre él".

<u>Propiedad métrica de las bisectrices en los triángulos</u>

Propiedad: "La bisectriz interior de un triángulo divide al lado opuesto en segmentos proporcionales a los otros dos lados".



Dado el triángulo ABC, se traza sobre la prolongación del lado a un segmento de igual longitud que b (lado h). Queda determinado el triángulo ACM isósceles. Si se traza la bisectriz interior (bc) y exterior (bc´) del ángulo C (las cuales son perpendiculares entre sí), resulta que la bisectriz exterior es perpendicular al segmento AM, por lo tanto AM es paralelo a la bisectriz interior. A partir de aquí, se aplicará el Corolario del Teorema de Tales, pudiéndose establecer la siguiente proporción:

BBc / BcA = BC / CM

BBc / BcA = a / b

Bibliografía: Puig Adam (1980) Geometría métrica // Wentworth –Smith (1980) Geometría plana y del espacio // Baldor (2001) Geometría plana y del espacio.