UNIVERSIDAD DE GRANADA

Teoría de Nudos

Doble Grado en Ingeniería Informática y Matemáticas

Iñaki Melguizo Marcos

2 de Diciembre de 2021

Trabajo Fin de Grado

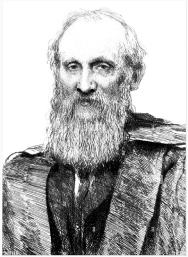
E.T.S de Ingenierías Informática y de Telecomunicación
Facultad de Ciencias

Índice de contenidos

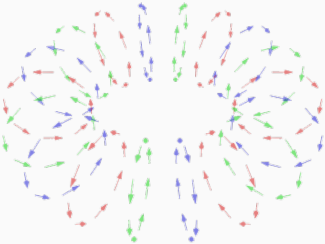
Introducción

Introducción

La clasificación de los nudos es un problema que lleva tratándose desde finales del siglo XIX, cuando Lord Kelvin creía que los átomos constituyentes de la materia eran anillos de vórtice formando distintos nudos en un fluido ideal, el éter.



(a) Lord Kelvin.



(b) Anillo de vórtice.

Teoría de nudos

Teoría de nudos

Conceptos base

Definición de nudo

Definición (Nudo)

Un nudo K es un subconjunto de $\mathbb{R}^3$ tal que existe un homeomorfismo de la circunferencia unidad $C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \colon x^2 + y^2 = 1\}$ a K.

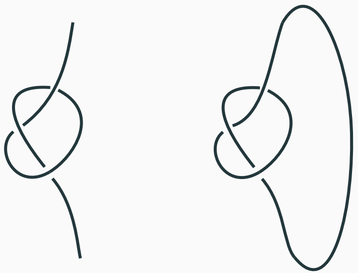


Figura 2: Nudo físico vs nudo matemático.

Definición (Equivalencia de nudos)

Dos nudos K_1 y K_2 son equivalentes si existe un homeomorfismo de $\mathbb{R}^3$ en sí mismo que aplica K_1 en K_2.

La relación de "ser equivalente a" es un relación de equivalencia y cada clase de equivalencia es un tipo de nudo.

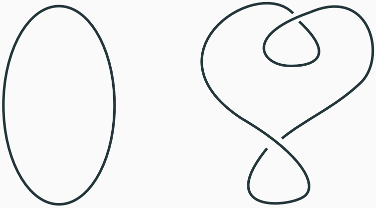


Figura 3: Nudos equivalentes.

Definición (Nudo admisible)

Un nudo se dice que es admisbile si es equivalente a un **nudo poligonal**, es decir, si es equivalente a un nudo que está formado por la unión de un número finito de segmentos de recta.

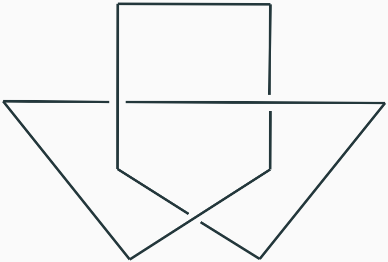


Figura 4: Nudo poligonal.

Invariante de nudos

Definición (Invariante de nudos)

Un invariante de nudos es una función f que asigna a cada nudo admisible K un objeto $f(K)$, de forma que a nudos equivalentes les son asignados objetos equivalentes.

Ejemplos de invariantes de nudos:

- Tricolorabilidad.
- Número de cruces.
- **Grupo**.
- Polinomio de Alexander.

Teoría de nudos

Grupo de un nudo

Definición de grupo de un nudo

Definición (Grupo de un nudo)

Dado un nudo admisible K y un punto $p_0 \in \mathbb{R}^3 \setminus K$, llamaremos grupo de K al grupo fundamental de $\Pi(\mathbb{R}^3 \setminus K, p_0)$.

Nota: Consideraremos sin pérdida de generalidad que todo nudo poligonal está en posición regular respecto a la proyección $\mathscr{P} \colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ tal que $\mathscr{P}(x, y, z) = (x, y, 0)$.

Objetivo: Hallar dos presentaciones del grupo de un nudo admisible K, utilizando la proyección de dicho nudo, $\mathscr{P}K$.

Arcos superiores e inferiores

Seleccionamos un subconjunto Q, conteniendo exactamente $2n$ puntos, de forma que divida al nudo poligonal en **arcos superiores** $(A_1, \ldots, A_n)$ y **arcos inferiores** $(B_1, \ldots, B_n)$.

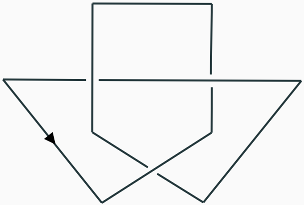


Figura 5: Nudo poligonal.

Arcos superiores e inferiores

Seleccionamos un subconjunto Q, conteniendo exactamente $2n$ puntos, de forma que divida al nudo poligonal en **arcos superiores** $(A_1, \ldots, A_n)$ y **arcos inferiores** $(B_1, \ldots, B_n)$.

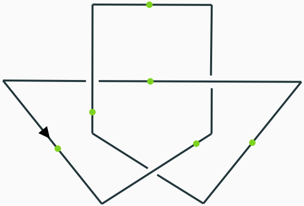


Figura 5: Subconjunto Q.

Arcos superiores e inferiores

Seleccionamos un subconjunto Q, conteniendo exactamente $2n$ puntos, de forma que divida al nudo poligonal en **arcos superiores** $(A_1, \ldots, A_n)$ y **arcos inferiores** $(B_1, \ldots, B_n)$.

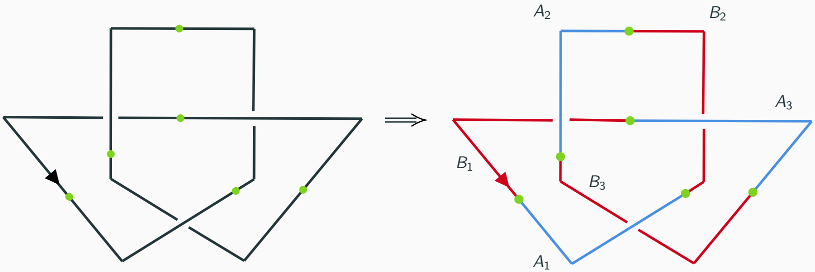


Figura 5: Nudo dividido en arcos superiores e inferiores.

Cálculo de presentación superior (1)

- Tomamos un punto $q_0 \in (\mathbb{R}^2 \times \{0\}) \setminus \mathscr{P}K$.

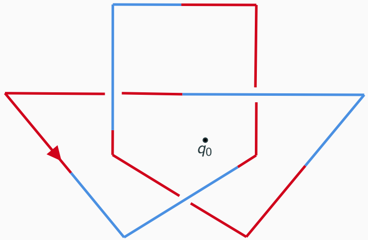


Figura 6: Elección de punto $q_0 \in (\mathbb{R}^2 \times \{0\}) \setminus \mathscr{P}K$.

Cálculo de presentación superior (1)

- Tomamos un punto $q_0 \in (\mathbb{R}^2 \times \{0\}) \setminus \mathscr{P}K$.
- Tomamos $x = \{x_1, \ldots, x_n\}$ un conjunto formado por n símbolos en biyección con los n arcos superiores del nudo poligonal.

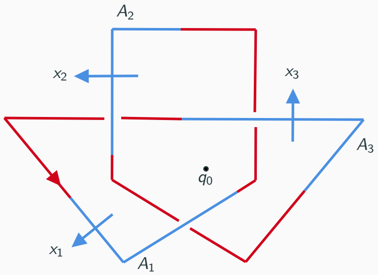


Figura 6: Conjunto $x = \{x_1, \ldots, x_n\}$.

Cálculo de presentación superior (1)

- Tomamos un punto $q_0 \in (\mathbb{R}^2 \times \{0\}) \setminus \mathscr{P}K$.
- Tomamos $x = \{x_1, \ldots, x_n\}$ un conjunto formado por n símbolos en biyección con los n arcos superiores del nudo poligonal.
- Tomamos espacios disjuntos, abiertos y simplemente conexos $V_1, \ldots, V_n$ en $\mathbb{R}^2 \times \{0\}$, tal que $\mathscr{P}B_i \subset V_i$ para todo $i = 1, \ldots, n$.

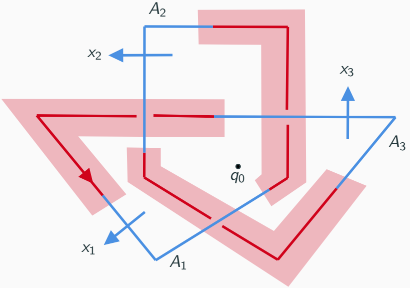


Figura 6: Espacios $V_1, \ldots, V_n$.

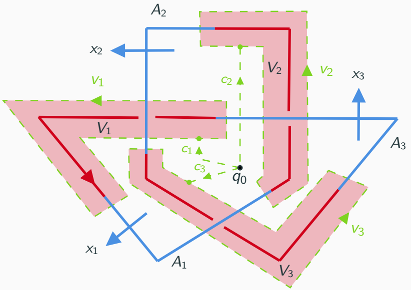
Cálculo de presentación superior (1)

- Tomamos un punto $q_0 \in (\mathbb{R}^2 \times \{0\}) \setminus \mathscr{P}K$.
- Tomamos $x = \{x_1, \dots, x_n\}$ un conjunto formado por n símbolos en biyección con los n arcos superiores del nudo poligonal.
- Tomamos espacios disjuntos, abiertos y simplemente conexos $V_1, \dots, V_n$ en $\mathbb{R}^2 \times \{0\}$, tal que $\mathscr{P}B_i \subset V_i$ para todo $i = 1, \dots, n$.
- Los bordes de dichos espacios son curvas de Jordan lineales a trozos que serán recorridas en sentido antihorario por los caminos $v_1, \dots v_n$.

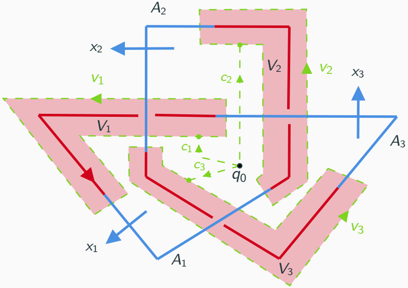
Cálculo de presentación superior (1)

- Tomamos un punto $q_0 \in (\mathbb{R}^2 \times \{0\}) \setminus \mathscr{P}K$.
- Tomamos $x = \{x_1, \ldots, x_n\}$ un conjunto formado por n símbolos en biyección con los n arcos superiores del nudo poligonal.
- Tomamos espacios disjuntos, abiertos y simplemente conexos $V_1, \ldots, V_n$ en $\mathbb{R}^2 \times \{0\}$, tal que $\mathscr{P}B_i \subset V_i$ para todo $i = 1, \ldots, n$.
- Los bordes de dichos espacios son curvas de Jordan lineales a trozos que serán recorridas en sentido antihorario por los caminos $v_1, \ldots v_n$.
- Tomamos también caminos simples $c_1, \ldots, c_n$ tales que cada c_i tenga punto inicial q_0 y punto final $v_i(0)$.

Cálculo de presentación superior (2)



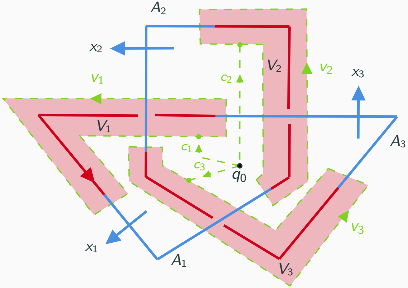
Cálculo de presentación superior (2)



Los relatores de la presentación superior serán:

$$r_1 = x_3 x_2 x_1^{-1} x_2^{-1}, \quad r_2 = x_3 (x_3^{-1} x_1 x_3 x_2^{-1}) x_3^{-1}, \quad r_3 = x_2 x_1 x_3^{-1} x_1^{-1}.$$

Cálculo de presentación superior (2)



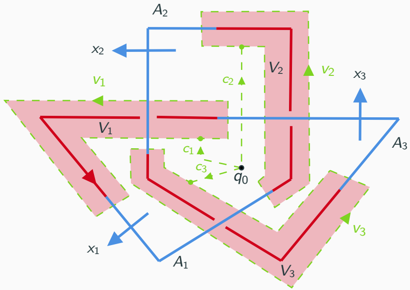
Los relatores de la presentación superior serán:

$$r_1 = x_3x_2x_1^{-1}x_2^{-1}, \quad r_2 = x_3(x_3^{-1}x_1x_3x_2^{-1})x_3^{-1}, \quad r_3 = x_2x_1x_3^{-1}x_1^{-1}.$$

Teorema

En cualquier presentación superior, cualquiera de los relatores $r_1, \ldots, r_n$ se puede obtener de los $n-1$ restantes.

Cálculo de presentación superior (2)



Los relatores de la presentación superior serán:

$$r_1 = x_3 x_2 x_1^{-1} x_2^{-1}, \quad r_2 = x_3 (x_3^{-1} x_1 x_3 x_2^{-1}) x_3^{-1}, \quad r_3 = x_2 x_1 x_3^{-1} x_1^{-1}.$$

Teorema

En cualquier presentación superior, cualquiera de los relatores $r_1, \ldots, r_n$ se puede obtener de los $n-1$ restantes.

$$\langle x_1, x_2, x_3 : x_3 x_2 x_1^{-1} x_2^{-1}, x_1 x_3 x_1^{-1} x_2^{-1} \rangle$$

Estudio computacional de los nudos

Codificaciones de nudos

Formas de codificar el diagrama de un nudo:

- Código de un diagrama etiquetado.

Codificaciones de nudos

Formas de codificar el diagrama de un nudo:

- Código de un diagrama etiquetado.
- Código de Gauss.

Codificaciones de nudos

Formas de codificar el diagrama de un nudo:

- Código de un diagrama etiquetado.
- Código de Gauss.
- Código de Gauss extendido.

Codificaciones de nudos

Formas de codificar el diagrama de un nudo:

- Código de un diagrama etiquetado.
- Código de Gauss.
- Código de Gauss extendido.
- Notación Dowker.

Notación Dowker

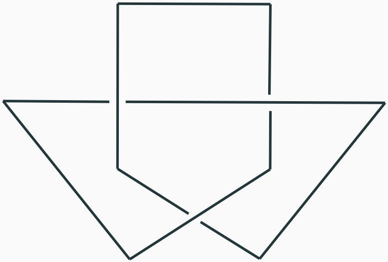


Figura 6: Diagrama de un nudo.

1. Tomamos un cruce cualquiera que etiquetaremos con el valor 1 y una orientación del nudo.

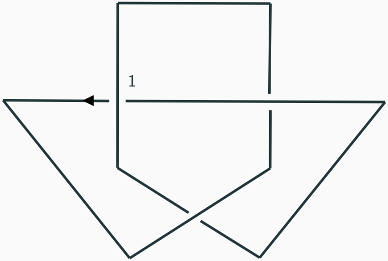


Figura 6: Primer cruce etiquetado y orientación.

Notación Dowker

1. Tomamos un cruce cualquiera que etiquetaremos con el valor 1 y una orientación del nudo.
2. Etiquetamos el resto de cruces con números naturales consecutivos.

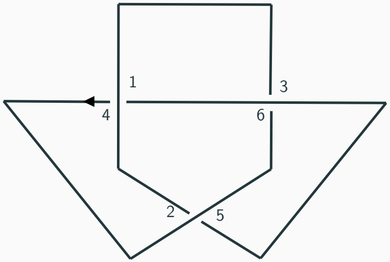


Figura 6: Diagrama etiquetado con números naturales.

1. Tomamos un cruce cualquiera que etiquetaremos con el valor 1 y una orientación del nudo.
2. Etiquetamos el resto de cruces con números naturales consecutivos.
3. Para cada cruce, si su número par asociado es asignado mientras estamos recorriendo la parte inferior de éste, añadimos el signo negativo a dicho número.

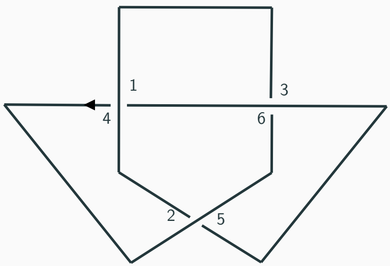


Figura 6: Diagrama etiquetado.

Notación Dowker

1. Tomamos un cruce cualquiera que etiquetaremos con el valor 1 y una orientación del nudo.
2. Etiquetamos el resto de cruces con números naturales consectutivos.
3. Para cada cruce, si su número par asociado es asignado mientras estamos recorriendo la parte inferior de éste, añadimos el signo negativo a dicho número.
4. Almacenamos la información de los cruces en una tabla.

1	3	5
4	6	2

Tabla 1: Notación Dowker del nudo.

Estudio computacional de los nudos

Implementación de la clase Nudo

Descripción

Este estudio consistirá en el cálculo de la presentación superior e inferior del grupo de un nudo y en la representación gráfica del diagrama de éste y de otros espacios asociados a ese nudo.

Para la implementación crearemos una clase en ***Python*** que llamaremos Nudo y cuyo único atributo será la notación Dowker del nudo a estudiar.

Representación de un nudo

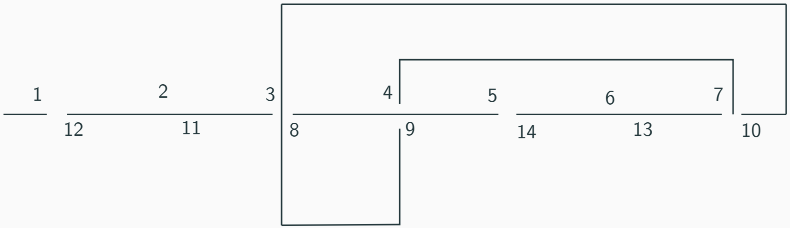
Obtendremos los vértices de las aristas del diagrama del nudo de un método llamado *obtener_puntos_nudo_dowker*.

El método *dibujar_nudo* utilizará el módulo *Turtle* para representar el diagrama del nudo, recibiendo por parámetro la lista de vértices que devuelve el método *obtener_puntos_nudo_dowker*.

Representación de un nudo. Ejemplo

1	3	5	7	9	11	13
12	8	14	10	4	2	6

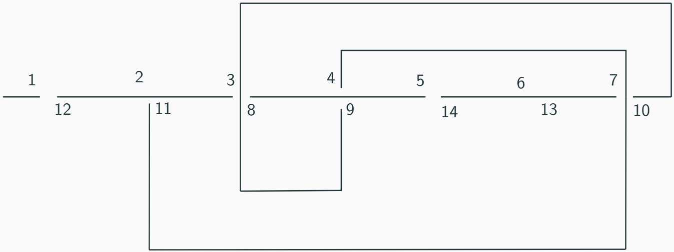
Tabla 2: Tabla de cruces asociada a la notación Dowker $12, 8, 14, 10, 4, 2, 6$.



Representación de un nudo. Ejemplo

1	3	5	7	9	11	13
12	8	14	10	4	2	6

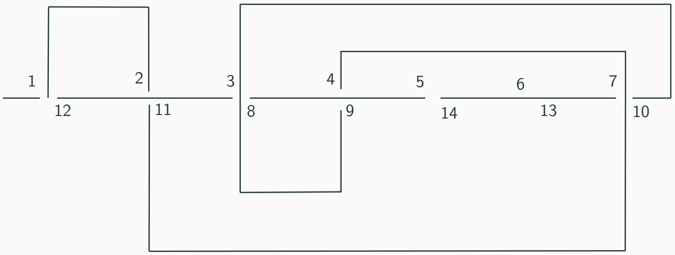
Tabla 2: Tabla de cruces asociada a la notación Dowker $12, 8, 14, 10, 4, 2, 6$.



Representación de un nudo. Ejemplo

1	3	5	7	9	11	13
12	8	14	10	4	2	6

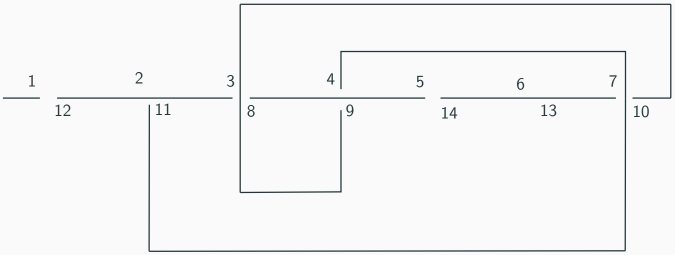
Tabla 2: Tabla de cruces asociada a la notación Dowker $12, 8, 14, 10, 4, 2, 6$.



Representación de un nudo. Ejemplo

1	3	5	7	9	11	13
12	8	14	10	4	2	6

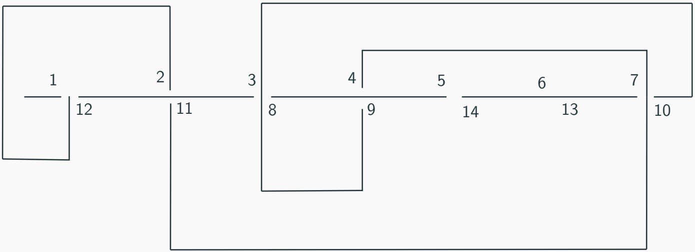
Tabla 2: Tabla de cruces asociada a la notación Dowker $12, 8, 14, 10, 4, 2, 6$.



Representación de un nudo. Ejemplo

1	3	5	7	9	11	13
12	8	14	10	4	2	6

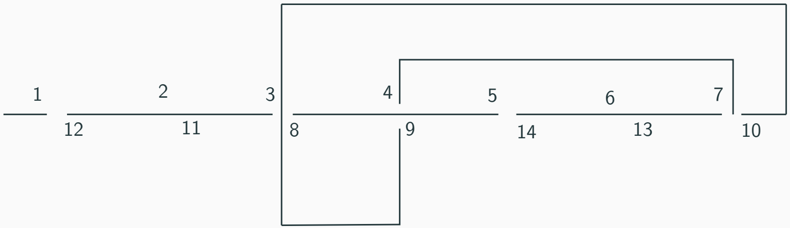
Tabla 2: Tabla de cruces asociada a la notación Dowker $12, 8, 14, 10, 4, 2, 6$.



Representación de un nudo. Ejemplo

1	3	5	7	9	11	13
12	8	14	10	4	2	6

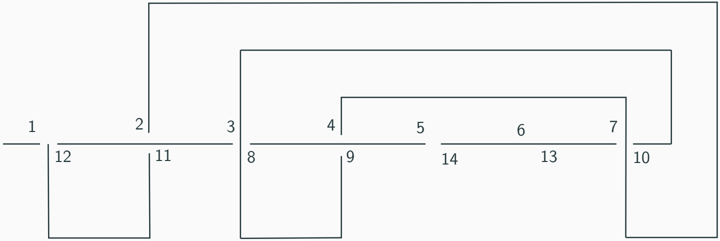
Tabla 2: Tabla de cruces asociada a la notación Dowker $12, 8, 14, 10, 4, 2, 6$.



Representación de un nudo. Ejemplo

1	3	5	7	9	11	13
12	8	14	10	4	2	6

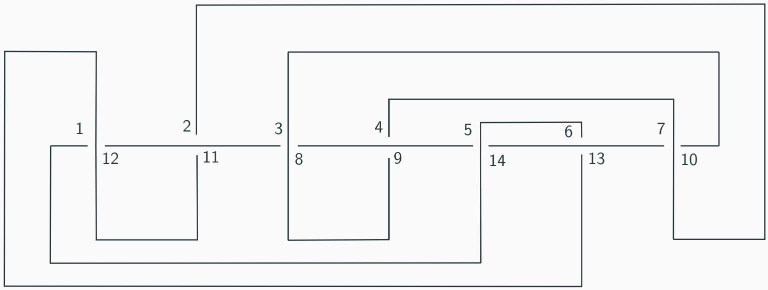
Tabla 2: Tabla de cruces asociada a la notación Dowker $12, 8, 14, 10, 4, 2, 6$.



Representación de un nudo. Ejemplo

1	3	5	7	9	11	13
12	8	14	10	4	2	6

Tabla 2: Tabla de cruces asociada a la notación Dowker $12, 8, 14, 10, 4, 2, 6$.



Representación de un nudo. Ejemplo

1	3	5	7	9	11	13
12	8	14	10	4	2	6

Tabla 2: Tabla de cruces asociada a la notación Dowker $12, 8, 14, 10, 4, 2, 6$.

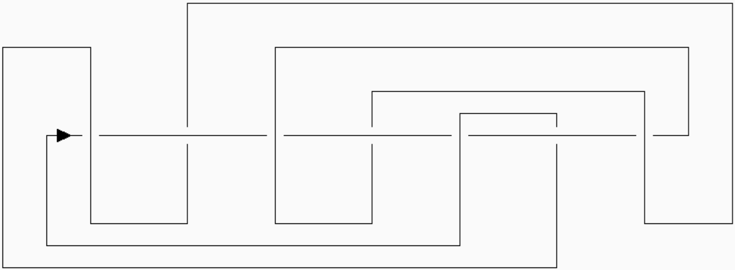


Figura 6: Salida del método *dibujar_nudo*.

Cálculo presentación superior del grupo de un nudo

El método *obtener_presentacion_superior* calculará la presentación superior del grupo de un nudo, sirviéndose de otros métodos que calcularán los espacios $V_i,\ i = 1, \ldots, n$ y los caminos $v_i,\ i = 1, \ldots, n$ asociados.

El método *dibujar_caminos_vi* dibujará el diagrama del nudo dividido en arcos superiores e inferiores, junto con los espacios V_i y los caminos $v_i,\ i = 1, \ldots, n$.

Cálculo presentación superior del grupo de un nudo

El método *obtener_presentacion_superior* calculará la presentación superior del grupo de un nudo, sirviéndose de otros métodos que calcularán los espacios $V_i,\ i = 1, \ldots, n$ y los caminos $v_i,\ i = 1, \ldots, n$ asociados.

El método *dibujar_caminos_vi* dibujará el diagrama del nudo dividido en arcos superiores e inferiores, junto con los espacios V_i y los caminos $v_i,\ i = 1, \ldots, n$.

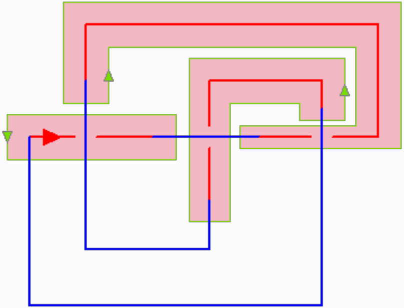
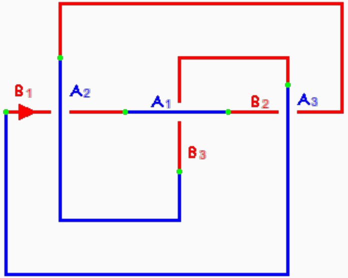


Figura 7: Salida de *dibujar_caminos_vi*

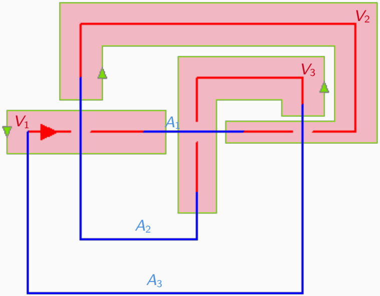
Cálculo presentación superior del grupo de un nudo

El método *obtener_presentacion_superior* calculará la presentación superior del grupo de un nudo, sirviéndose de otros métodos que calcularán los espacios $V_i,\ i = 1, \ldots, n$ y los caminos $v_i,\ i = 1, \ldots, n$ asociados.

El método *dibujar_caminos_vi* dibujará el diagrama del nudo dividido en arcos superiores e inferiores, junto con los espacios V_i y los caminos $v_i,\ i = 1, \ldots, n$.



(a) Salida de *dibujar_nudo_arcos*.

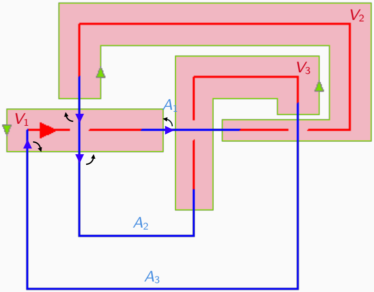


(b) Diagrama etiquetado.

Cálculo presentación superior del grupo de un nudo

El método *obtener_presentacion_superior* calculará la presentación superior del grupo de un nudo, sirviéndose de otros métodos que calcularán los espacios $V_i,\ i = 1, \ldots, n$ y los caminos $v_i,\ i = 1, \ldots, n$ asociados.

El método *dibujar_caminos_vi* dibujará el diagrama del nudo dividido en arcos superiores e inferiores, junto con los espacios V_i y los caminos $v_i,\ i = 1, \ldots, n$.

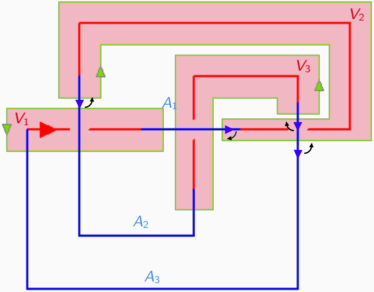


$\langle x_1, x_2, x_3 : x_3 x_2^{-1} x_1^{-1} x_2,$

Cálculo presentación superior del grupo de un nudo

El método *obtener_presentacion_superior* calculará la presentación superior del grupo de un nudo, sirviéndose de otros métodos que calcularán los espacios $V_i,\ i = 1, \ldots, n$ y los caminos $v_i,\ i = 1, \ldots, n$ asociados.

El método *dibujar_caminos_vi* dibujará el diagrama del nudo dividido en arcos superiores e inferiores, junto con los espacios V_i y los caminos $v_i,\ i = 1, \ldots, n$.

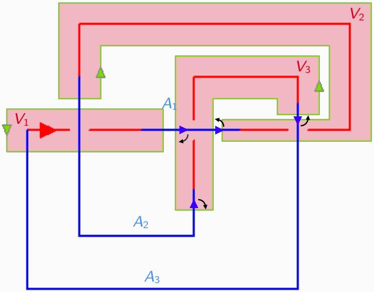


$\langle x_1, x_2, x_3 : x_3 x_2^{-1} x_1^{-1} x_2,\ x_3 x_1 x_3^{-1} x_2^{-1},$

Cálculo presentación superior del grupo de un nudo

El método *obtener_presentacion_superior* calculará la presentación superior del grupo de un nudo, sirviéndose de otros métodos que calcularán los espacios $V_i,\ i = 1, \ldots, n$ y los caminos $v_i,\ i = 1, \ldots, n$ asociados.

El método *dibujar_caminos_vi* dibujará el diagrama del nudo dividido en arcos superiores e inferiores, junto con los espacios V_i y los caminos $v_i,\ i = 1, \ldots, n$.



$$\langle x_1, x_2, x_3 : x_3 x_2^{-1} x_1^{-1} x_2,\ x_3 x_1 x_3^{-1} x_2^{-1},\ x_1 x_2 x_1^{-1} x_3^{-1} \rangle$$

Conclusiones y trabajo futuro

- Es posible calcular computacionalmente la presentación superior e inferior del grupo de un nudo, dada una codificación de éste.

Conclusiones y trabajo futuro

- Es posible calcular computacionalmente la presentación superior e inferior del grupo de un nudo, dada una codificación de éste.
- Puede ser de gran interés probar el funcionamiento del método *obtener_puntos_nudo_dowker* de la clase Nudo para nudos primos con 10 o más cruces.

Conclusiones y trabajo futuro

- Es posible calcular computacionalmente la presentación superior e inferior del grupo de un nudo, dada una codificación de éste.
- Puede ser de gran interés probar el funcionamiento del método *obtener_puntos_nudo_dowker* de la clase Nudo para nudos primos con 10 o más cruces.
- Sería relevante en el futuro estudiar la comparación del potencial del grupo de un nudo con respecto al de otros invariantes.

Gracias por su atención