

Dénombrement de k -arrangements**Exercice 1**

- Pour former un 3-uplet d'éléments distincts de E , on choisit le premier élément parmi les 6 disponibles, le deuxième parmi les 5 restants (car distincts), et le troisième parmi les 4 restants. D'où $6 \times 5 \times 4$.
- De même, pour un 4-uplet d'éléments distincts : $6 \times 5 \times 4 \times 3 = 360$.

Exercice 2

</> Algorithme

- Pour $n = 4$:
 - $f = 1$ initialement
 - $i = 1 : f = 1 \times 1 = 1$
 - $i = 2 : f = 1 \times 2 = 2$
 - $i = 3 : f = 2 \times 3 = 6$
 - $i = 4 : f = 6 \times 4 = 24$

La variable f contient 24.
- Cet algorithme calcule $n!$ (factorielle de n).

Exercice 3

- Pour qu'une permutation de E soit un k -uplet d'éléments distincts de E , il faut $k = 3$ (car E a 3 éléments).
- Les permutations de $E = \{0, 1, 2\}$ sont : $(0, 1, 2)$, $(0, 2, 1)$, $(1, 0, 2)$, $(1, 2, 0)$, $(2, 0, 1)$, $(2, 1, 0)$. Il y en a 6.
- La formule est $3! = 6$.

Exercice 4

- (e, g, f, e) n'est pas une permutation de E car l'élément e apparaît deux fois et l'élément h n'apparaît pas.
 - (e, g, f) n'est pas une permutation de E car il n'y a que 3 éléments alors que E en contient 4, et h n'apparaît pas.
- Pour la première position, on a 4 choix, pour la deuxième 3 choix (éléments distincts), pour la troisième 2 choix, et pour la dernière 1 choix. D'où $4 \times 3 \times 2 \times 1$.
 - Ce nombre se note $4!$.

Exercice 5

- Le nombre de 4-uplets d'éléments distincts d'un ensemble à 9 éléments est : $9 \times 8 \times 7 \times 6 = 3024$.

- Sven n'utilise pas le chiffre 0 et pas de répétition, donc il dispose des chiffres $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$.

(a) Le nombre de codes possibles est : $9 \times 8 \times 7 \times 6 \times 5 \times 4 = 60480$.

(b) Si le dernier chiffre est 5, il reste 5 positions à remplir avec 8 chiffres disponibles : $8 \times 7 \times 6 \times 5 \times 4 = 6720$.

Exercice 6

- Le nombre de façons d'attribuer 5 prix différents à 5 couples parmi 10 est le nombre de 5-arrangements : $10 \times 9 \times 8 \times 7 \times 6 = 30240$.
- Si Fauve et Maxime sont premiers, il reste 4 prix à attribuer à 4 couples parmi les 9 restants : $9 \times 8 \times 7 \times 6 = 3024$.
 - Si de plus Denitsa et Christophe sont quatrièmes, il reste 3 prix (2e, 3e, 5e) à attribuer à 3 couples parmi les 8 restants : $8 \times 7 \times 6 = 336$.

Exercice 7

- Le nombre de permutations d'un ensemble à 9 éléments est $9! = 362880$.
- Le nombre de classements possibles dans le groupe est $6! = 720$.
 - Si la France est première et l'Australie dernière, il reste à classer 4 équipes aux positions 2, 3, 4, 5 : $4! = 24$.

Exercice 8

Le nombre d'anagrammes du mot "MATHS" est le nombre de permutations de ses 5 lettres distinctes : $5! = 120$.

Exercice 9

</> Algorithme

```
def factorielle(n):
    f = 1
    for i in range(1, n+1):
        f = f * i
    return f
```

Exercice 10

- Faux.** Il y a $12!$ classements différents car chaque joueur occupe une position unique.
- Vrai.** Si Maria est première, il reste 11 positions pour les 11 autres joueurs, soit $11!$ possibilités.
- Vrai.** Si Luigo, Bouseure et Tob occupent respectivement les positions 3, 7 et 9, il reste 9 positions pour les 9 autres joueurs : $9! = 362880$.

Exercice 11

Logique

1. **Vraie.** Si p est une permutation de E , alors p utilise tous les éléments de E exactement une fois, donc p est bien un n -uplet.

2. La réciproque est : "Si p est un n -uplet, alors p est une permutation de E ". **Fausse.** Un n -uplet peut contenir des répétitions d'éléments, ce qui n'est pas le cas d'une permutation.

Exercice 12



Algorithme

1. (a) Le nombre de 4-uplets d'éléments distincts de E est $8 \times 7 \times 6 \times 5 = 1680$.
- (b) Il n'existe pas de 10-uplets d'éléments distincts de E car E n'a que 8 éléments et on ne peut pas choisir 10 éléments distincts.
2. (a) L'algorithme complété :

```

Si k > 8
    alors N ← 1
Sinon
    N ← 1
    Pour i allant de 1 à k
        N ← N * i
    Fin Pour
Fin Si
```

- (b) En Python :

```

def nbr_arrangements(k):
    if k > 8:
        return 0
    else:
        N=1
        for i in range(1,k+1):
            N*=i
        return N
```

- (c) Version généralisée :

```

def arrangements(n, k):
    if k > n:
        return 0
    N = 1
    for i in range(n-k+1, n+1):
        N = N * i
    return N
```

Exercice 13



1. (a) $P(0) : 2^0 = 1$ et $0! = 1$, donc $1 \leq 1$ OK.
 $P(1) : 2^1 = 2$ et $1! = 1$, donc $2 \leq 1$ NON
 $P(2) : 2^2 = 4$ et $2! = 2$, donc $4 \leq 2$ NON

$P(3) : 2^3 = 8$ et $3! = 6$, donc $8 \leq 6$ NON

$P(4) : 2^4 = 16$ et $4! = 24$, donc $16 \leq 24$ OK

$P(5) : 2^5 = 32$ et $5! = 120$, donc $32 \leq 120$ OK

(b) On conjecture $n_0 = 4$.

2. (a) $(p+1)! = (p+1) \times p \times (p-1) \times \dots \times 1 = (p+1) \times p!$

(b) Montrons par récurrence que $P(n)$ est vraie pour $n \geq 4$.

Initialisation : $P(4)$ est vraie (vérifié ci-dessus).

Hérédité : Supposons $P(n)$ vraie pour $n \geq 4$, i.e. $2^n \leq n!$. Montrons $P(n+1) : 2^{n+1} \leq (n+1)!$.

$2^{n+1} = 2 \times 2^n \leq 2 \times n!$ (par hypothèse de récurrence).

Or, pour $n \geq 4$, on a $n+1 \geq 5 > 2$, donc $2 < n+1$.

Ainsi $2 \times n! < (n+1) \times n! = (n+1)!$.

D'où $2^{n+1} \leq (n+1)!$.

Combinatoires

Exercice 14



1. Le nombre de parties de E à un élément est $\binom{5}{1} = 5$. Réponses correctes : b et c.
2. Le nombre de 5-combinatoires de E est $\binom{5}{5} = 1$. Réponses correctes : a et d.
3. $\binom{5}{2} = \frac{5!}{3! \times 2!} = \frac{5 \times 4}{2 \times 1} = 10$. Réponses correctes : b et c (et d car il y a 10 couples dans un ensemble à 5 éléments).

Exercice 15



Logique

1. **Vraie.** $F = \{e_1, e_2\}$ est bien une partie à 2 éléments de E , donc une 2-combinaison.
2. (a) La réciproque est : "Si F est une combinaison de deux éléments de E , alors $F = \{e_1, e_2\}$ ".
- (b) **Fausse.** Il existe d'autres 2-combinatoires : $\{e_1, e_3\}$ et $\{e_2, e_3\}$.

Exercice 16



1. (a) Les combinaisons de 3 éléments de E sont : $\{p, q, r\}, \{p, q, s\}, \{p, r, s\}, \{q, r, s\}$.
- (b) Il y en a 4.
- (c) $\binom{4}{3} = \frac{4!}{3! \times 1!} = \frac{4 \times 3!}{3! \times 1} = 4$
2. (a) $\binom{4}{2} = \frac{4!}{2! \times 2!} = \frac{4 \times 3}{2 \times 1} = 6$.
- (b) Les 2-combinatoires sont : $\{p, q\}, \{p, r\}, \{p, s\}, \{q, r\}, \{q, s\}, \{r, s\}$. Il y en a bien 6.

Exercice 17



1. **Oui.** A est un sous-ensemble de 2 élèves, sans ordre et sans répétition.

- Non**, A n'est pas une combinaison car c'est un classement où l'ordre importe.
- Oui**, A est une combinaison car c'est un sous-ensemble (taille k variable) de la classe, l'ordre n'importe pas

Exercice 18



- Le classement est une **permutation de** A car toutes les athlètes sont classées dans un ordre précis.
- Le podium est un **3-uplet d'éléments distincts de** A car l'ordre des médailles importe.
- L'ensemble des trois françaises est une **combinaison de** A car l'ordre n'importe pas.

Exercice 19



- $\frac{5!}{3! \times 2!} = \frac{120}{6 \times 2} = \frac{120}{12} = 10$.
- Ce nombre est égal à $\binom{5}{2}$ ou $\binom{5}{3}$.

Exercice 20



- $\binom{7}{4} = \frac{7!}{4! \times 3!} = \frac{7 \times 6 \times 5}{3 \times 2 \times 1} = \frac{210}{6} = 35$
- $\binom{7}{5} = \frac{7!}{5! \times 2!} = \frac{7 \times 6}{2 \times 1} = \frac{42}{2} = 21$.

Exercice 21



- $\binom{9}{3} = \frac{9!}{3! \times 6!} = \frac{9 \times 8 \times 7}{3 \times 2 \times 1} = \frac{504}{6} = 84$.
- $\binom{9}{4} = \frac{9!}{4! \times 5!} = \frac{9 \times 8 \times 7 \times 6}{4 \times 3 \times 2 \times 1} = \frac{3024}{24} = 126$. $\binom{9}{5} = \frac{9!}{5! \times 4!} = 126$ (par symétrie).
- $\binom{6}{0} = 1$, $\binom{6}{1} = 6$, $\binom{6}{2} = 15$, $\binom{6}{3} = 20$, $\binom{6}{4} = 15$, $\binom{6}{5} = 6$, $\binom{6}{6} = 1$.
- $\binom{15}{9} = 5005$ (avec calculatrice).

Exercice 22



- $\binom{10}{3} = \frac{10 \times 9 \times 8}{3 \times 2 \times 1} = \frac{720}{6} = 120$. $\binom{10}{7} = \binom{10}{3} = 120$ (par symétrie).
- Vérification avec calculatrice : $\binom{10}{3} = \binom{10}{7} = 120$

Exercice 23



- Le nombre de mains de 8 cartes est $\binom{52}{8} = \frac{52!}{8! \times 44!}$. Avec calculatrice : $\binom{52}{8} = 752\,538\,150$.
- (a) Zoé peut choisir 4 albums parmi 9 : $\binom{9}{4} = 126$.
- (b) Si l'album voulu est inclus, elle doit choisir 3 albums parmi les 8 restants : $\binom{8}{3} = 56$.

Exercice 24



- Le nombre de triplettes de spécialités est $\binom{12}{3} = \frac{12 \times 11 \times 10}{3 \times 2 \times 1} = 220$.
- Enzo peut choisir 2 spécialités parmi les 3 qu'il avait : $\binom{3}{2} = 3$.

- (a) Un parcours = choix de 3 spécialités en 1ère puis 2 parmi ces 3 en Terminale. Nombre de parcours = $\binom{12}{3} \times \binom{3}{2} = 220 \times 3 = 660$
- (b) Coline a déjà une spécialité fixée. En première, elle doit donc choisir 2 autres spécialités sur les 11 restantes : $\binom{11}{2} = 55$. En terminale, elle devra choisir une seule spé parmi les 2 restantes : $\binom{2}{1} = 2$. En total, elle a donc $55 \times 2 = 110$ parcours différents.

Exercice 25



- (a) Marlène choisit indépendamment 2 jeans parmi 5 et 3 T-shirts parmi 7, d'où le produit $\binom{5}{2} \times \binom{7}{3}$.
 $\binom{5}{2} \times \binom{7}{3} = 10 \times 35 = 350$.
- Gaëtan peut remplir sa valise de $\binom{10}{8} \times \binom{13}{10} \times \binom{7}{4}$ manières. $\binom{10}{8} \times \binom{13}{10} \times \binom{7}{4} = 45 \times 286 \times 35 = 450\,450$ manières.

Exercice 26



Le nombre total de tirages de 2 boules parmi 7 est $\binom{7}{2} = 21$.

- Événement A : les deux boules sont de même couleur. $A = \{\text{2 noires}\} \cup \{\text{2 rouges}\}$. $P(A) = \frac{\binom{4}{2} + \binom{3}{2}}{\binom{7}{2}} = \frac{6+3}{21} = \frac{9}{21} = \frac{3}{7}$ **Vraie**.
- Événement B : une seule boule rouge. $P(B) = \frac{\binom{3}{1} \times \binom{4}{1}}{\binom{7}{2}} = \frac{3 \times 4}{21} = \frac{12}{21} = \frac{4}{7} \neq \frac{1}{7}$ **Fausse**.

Triangle de Pascal

Exercice 27



- Vraie.** La ligne 6 correspond aux coefficients $\binom{n}{k}$ pour $k = 0, 1, \dots, 6$.
- Fausse.** Dans le triangle, ligne 4, colonne 3 : on trouve 4, mais $\binom{4}{3} = 4$ (pas 6).
- Vraie.** La première colonne contient les coefficients $\binom{n}{0} = 1$ pour tout n .
- Vrai.** Propriété opératoire de Pascal

Exercice 28



- (a) Triangle de Pascal (lignes 0 à 7) :

1									(1)
1	1								(2)
1	2	1							(3)
1	3	3	1						(4)
1	4	6	4	1					(5)
1	5	10	10	5	1				(6)
1	6	15	20	15	6	1			(7)
1	7	21	35	35	21	7	1		(8)

- (b) D'après le triangle, $\binom{7}{4} = 35$.

2. **(a)** $7! = 5040$, $(7 - 4)! = 3! = 6$, $4! = 24$.
(b) $\binom{7}{4} = \frac{7!}{3! \times 4!} = \frac{5040}{6 \times 24} = \frac{5040}{144} = 35$

Exercice 29



- D'après le triangle de Pascal, $\binom{8}{4} = 70$ et $\binom{8}{5} = 56$.
- On peut calculer $\binom{9}{5}$ avec la relation de Pascal : $\binom{9}{5} = \binom{8}{4} + \binom{8}{5} = 70 + 56 = 126$.

Exercice 30



- D'après le triangle de Pascal : $\binom{8}{4} = 70$, $\binom{8}{5} = 56$, $\binom{8}{6} = 28$.
- Le nombre total d'équipes possibles est $\binom{8}{4} + \binom{8}{5} + \binom{8}{6} = 70 + 56 + 28 = 154$.

Exercice 31



Logique

- Vraie.** Le premier coefficient de chaque ligne est toujours $\binom{n}{0} = 1$.
- La réciproque est : "Si un coefficient du triangle de Pascal est 1, alors c'est le premier d'une ligne". **Fausse.** Le coefficient 1 apparaît aussi en dernière position de chaque ligne ($\binom{n}{n} = 1$).

Exercice 32



- Triangle de Pascal jusqu'à la ligne 6 (voir exercice précédent).
- Sommes des lignes : 1, 2, 4, 8, 16, 32, 64. Les résultats successifs sont les puissances de 2.
- Ceci illustre la propriété : $\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} = 2^n$.

Dénombrement (général)

Exercice 33



- On autorise les deux allèles à être identiques et l'ordre n'a pas d'importance
On compte donc le nombre de combinaisons **avec répétition** de 2 éléments parmi 6. Ainsi, il y a $\binom{6+2-1}{2} = \binom{7}{2} = 21$ couples possibles.
Plus simplement : il y a $\binom{6}{2} = 15$ combinaisons (sans répétitions) et 6 cas avec répétitions (A_1A_1 , A_2A_2 ,). Soit $15 + 6 = 21$ possibilités.
- Le nombre de gènes avec deux allèles identiques est 6.
- Le nombre de gènes avec des allèles différents est $\binom{6}{2} = 15$.

Exercice 34



Le nombre de résistances différentes est $10 \times 10 \times 9 \times 4 = 3600$.

Exercice 35



- Le nombre d'octets est $2^8 = 256$.
- Le nombre d'octets commençant par 1 et finissant par 0 : les 6 positions intermédiaires peuvent prendre 2 valeurs chacune, soit $2^6 = 64$.
- Le nombre d'octets contenant exactement trois 1 : on choisit 3 positions parmi 8 pour placer les 1, soit $\binom{8}{3} = 56$.
- Pour avoir plus de 1 que de 0, il faut au moins 5 fois le bit 1. Nombre d'octets = $\binom{8}{5} + \binom{8}{6} + \binom{8}{7} + \binom{8}{8} = 56 + 28 + 8 + 1 = 93$.

Exercice 36



Tableau de répartition :

	Sia	Ariana	Lady Gaga	Total
Garçons	62	118	140	320
Filles	175	128	70	493
Total	237	246	210	813

- Le nombre d'adolescents préférant Sia est 237.
- Le nombre de filles préférant Ariana Grande est $493 - 175 - 70 = 248$.
- (a)** La proportion de garçons préférant Ariana Grande est $\frac{118}{320} = \frac{59}{160} = 0,36875 = 36,88\%$.
- (b)** Parmi les 210 adolescents préférant Lady Gaga, 70 sont des filles. La proportion est $\frac{70}{210} = \frac{1}{3} = 0,3333\dots = 33,33\%$.

Exercice 37



- Les issues donnant une somme de 5 sont : (1, 4), (2, 3), (3, 2), (4, 1). Il y a 4 issues favorables sur 36 possibles. $P(\text{somme} = 5) = \frac{4}{36} = \frac{1}{9}$.
- Les sommes possibles et leurs probabilités :

- Somme 2 : (1, 1) $P = \frac{1}{36}$
- Somme 3 : (1, 2), (2, 1) $P = \frac{2}{36}$
- Somme 4 : (1, 3), (2, 2), (3, 1) $P = \frac{3}{36}$
- Somme 5 : (1, 4), (2, 3), (3, 2), (4, 1) $P = \frac{4}{36}$
- Somme 6 : (1, 5), (2, 4), (3, 3), (4, 2), (5, 1) $P = \frac{5}{36}$
- Somme 7 : (1, 6), (2, 5), (3, 4), (4, 3), (5, 2), (6, 1) $P = \frac{6}{36}$
- Somme 8 : (2, 6), (3, 5), (4, 4), (5, 3), (6, 2) $P = \frac{5}{36}$
- Somme 9 : (3, 6), (4, 5), (5, 4), (6, 3) $P = \frac{4}{36}$
- Somme 10 : (4, 6), (5, 5), (6, 4) $P = \frac{3}{36}$
- Somme 11 : (5, 6), (6, 5) $P = \frac{2}{36}$
- Somme 12 : (6, 6) $P = \frac{1}{36}$

Le résultat le plus probable est 7 avec $P = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$.

Exercice 38



Il y a $6 \times 4 = 24$ issues possibles (couples de résultats). Les différences possibles sont 0, 1, 2, 3, 4, 5.

- Différence 0 : (1, 1), (2, 2), (3, 3), (4, 4) 4 cas
 $P = \frac{4}{24} = \frac{1}{6}$
- Différence 1 : (1, 2), (2, 1), (2, 3), (3, 2), (3, 4), (4, 3) 6 cas $P = \frac{6}{24} = \frac{1}{4}$
- Différence 2 : (1, 3), (3, 1), (2, 4), (4, 2), (1, 4), (4, 1) 6 cas $P = \frac{6}{24} = \frac{1}{4}$
- Différence 3 : (2, 1), (3, 1), (4, 1), (1, 4) mais on a déjà compté certains cas. En réalité : (1, 4), (4, 1) donnent $|4 - 1| = 3$ 2 cas
 $P = \frac{2}{24} = \frac{1}{12}$
- Différence 4 : (5, 1), (6, 1), (1, 5), (1, 6) mais le dé à 4 faces ne peut donner 5 ou 6. En réalité : (5, 1), (6, 1) 2 cas $P = \frac{2}{24} = \frac{1}{12}$
- Différence 5 : (6, 1) 1 cas $P = \frac{1}{24}$

Correction du calcul :

- Différence 0 : (1, 1), (2, 2), (3, 3), (4, 4) $P = \frac{4}{24} = \frac{1}{6}$
- Différence 1 : (2, 1), (1, 2), (3, 2), (2, 3), (4, 3), (3, 4) $P = \frac{6}{24} = \frac{1}{4}$
- Différence 2 : (3, 1), (1, 3), (4, 2), (2, 4), (5, 3), (6, 4) $P = \frac{6}{24} = \frac{1}{4}$
- Différence 3 : (4, 1), (1, 4), (5, 2), (6, 3) $P = \frac{4}{24} = \frac{1}{6}$
- Différence 4 : (5, 1), (6, 2) $P = \frac{2}{24} = \frac{1}{12}$
- Différence 5 : (6, 1) $P = \frac{1}{24}$

Exercice 39



Il y a 13 caractères disponibles : 3 lettres + 10 chiffres.

1. Le nombre de codes différents est $13^4 = 28561$.
2. Si les 4 caractères sont différents : $13 \times 12 \times 11 \times 10 = 17160$.
3. Avec seulement A, C et 5, le nombre de codes est $3^4 = 81$.

Exercice 40



1. **Vraie.** On cherche en fait le nombre de duo qu'il est possible de former. Le nombre de poignées de main entre 20 personnes est $\binom{20}{2} = \frac{20 \times 19}{2} = 190 \neq 380$. **Fausse**, il y a 190 poignées de main.

2. Poignées de main :

- Il y a 11 joueurs dans chaque équipe.
- Entre joueurs d'équipes différentes : $11 \times 11 = 121$
- Entre joueurs et arbitres : $22 \times 3 = 66$

Total : $121 + 66 = 187$ **Vraie**.

Exercice 41



Jean-François doit payer 15 cts. Les possibilités sont :

— Avec la pièce de 10cts :

- 1 pièces de 5cts
- 5 pièces de 1ct
- 1 pièce de 2cts et 3 de 1ct
- 2 pièces de 2cts et 1 de 1ct

Donc 4 possibilités

— Sans la pièce de 10cts

- 3 pieces de 5cts : 1 possibilité
- 2 pieces de 5cts : Il reste donc 5cts, comme cas 1 (sans pièce de 5cts, sinon on revient au cas 3 pieces) : 3 possibilités
- 1 pieces de 5cts : Il reste 10cts. On note $(x_2; x_1)$. On peut faire : (0; 10), (1; 8), (2; 6), (3; 4), (4; 2), (5; 0). Soit 6 possibilités
- 0 pieces de 5cts : En notant toujours $(x_2; x_1)$, on a : (0; 15), (1; 13); (2; 11); (3; 9), (4; 7), (5; 5), (6; 3), (7; 1) soit 8 façons

On aurait donc ici, $1 + 3 + 6 + 8 = 18$ possibilités

Il y a 22 manières différentes de payer.

Exercice 42



1. Avec remise :

- Le nombre total de tirages est $8^5 = 32768$.
- Le nombre de tirages avec 1ère noire et 2e rouge : $5 \times 3 \times 8^3 = 15 \times 512 = 7680$.
- Le nombre de tirages avec 1ère rouge en 3e position : les deux premières sont noires, la 3e rouge, puis 8^2 pour les deux dernières. $5^2 \times 3 \times 8^2 = 25 \times 3 \times 64 = 4800$.

2. Sans remise :

- Le nombre total de tirages est $8 \times 7 \times 6 \times 5 \times 4 = 6720$.
- 1ère noire et 2e rouge : $5 \times 3 \times 6 \times 5 \times 4 = 1800$.
- 1ère rouge en 3e position : $5 \times 4 \times 3 \times 5 \times 4 = 1200$.

3. Tirage simultané de 2 boules :

$$P(A) = \frac{\binom{3}{2}}{\binom{8}{2}} = \frac{3}{28}$$

$$P(B) = \frac{\binom{5}{2} + \binom{3}{2}}{\binom{8}{2}} = \frac{10+3}{28} = \frac{13}{28}$$