## Calcul de produits scalaires

### Exercice 1

On utilise la formule du produit scalaire : $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = AB \times AC \times \cos(\widehat{BAC})$.

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} &= 8 \times 7 \times \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) \\ &= 56 \times \frac{1}{2} \\ &= 28\end{aligned}$$

### Exercice 2

On utilise la formule du produit scalaire : $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = AB \times AC \times \cos(\widehat{BAC})$.

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} &= 5 \times 16 \times \cos\left(\frac{5\pi}{6}\right) \\ &= 80 \times \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) \\ &= -40\sqrt{3}\end{aligned}$$

### Exercice 3

On a :

(a) $\overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{BF} = 0$

(b) $\overrightarrow{CD} \cdot \overrightarrow{HD} = 0$

(c) $\overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{AD} = 3^2 = 9$

(d) $\overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{HE} = -9$

(e) $\overrightarrow{AE} \cdot \overrightarrow{GH} = 0$

(f) $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AF} = 16$

### Exercice 4

En utilisant la linéarité du produit scalaire :

(a) $\overrightarrow{v} \cdot (7\overrightarrow{u}) = 7(\overrightarrow{v} \cdot \overrightarrow{u}) = 7 \times 5 = 35$ ;

(b) $\overrightarrow{v} \cdot \overrightarrow{u} = \overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v} = 5$ (commutativité) ;

(c) $\overrightarrow{u} \cdot (\overrightarrow{v} - \overrightarrow{w}) = \overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v} - \overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{w} = 5 - (-3) = 8$.

### Exercice 5

1. En utilisant la linéarité :

$$\begin{aligned}\overrightarrow{u} \cdot (2\overrightarrow{v} + 3\overrightarrow{w}) &= 2(\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v}) + 3(\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{w}) && (1)\\ &= 2 \times (-9) + 3 \times 6 && (2)\\ &= -18 + 18 = 0 && (3)\end{aligned}$$

2. Puisque $\overrightarrow{u} \cdot (2\overrightarrow{v} + 3\overrightarrow{w}) = 0$, les vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $2\overrightarrow{v} + 3\overrightarrow{w}$ sont orthogonaux.

### Exercice 6

1. On a la relation de Chasles : $\overrightarrow{BD} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AD}$.
2. En utilisant la linéarité du produit scalaire :

$$\begin{aligned}\overrightarrow{BD} \cdot \overrightarrow{AC} &= (\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AD}) \cdot \overrightarrow{AC} && (4)\\ &= \overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{AC} && (5)\\ &= -\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{AC} && (6)\\ &= -6 + 5 = -1 && (7)\end{aligned}$$

### Exercice 7

1. (a) $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AF} = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AB} = a^2$

   (b) $\overrightarrow{EI} \cdot \overrightarrow{HF} = 0$ (car les diagonales sont perpendiculaires)

   (c) $\overrightarrow{BJ} \cdot \overrightarrow{CG} = \overrightarrow{BJ} \cdot \overrightarrow{BF} = \frac{1}{2}a \times a = \frac{a^2}{2}$

2. (a) $\overrightarrow{IJ} = \overrightarrow{IG} + \overrightarrow{GJ} = \frac{1}{2}\overrightarrow{EG} + \frac{1}{2}\overrightarrow{GB} = \frac{1}{2}\overrightarrow{EB}$

   (b) $\overrightarrow{EA} \cdot \overrightarrow{IJ} = \overrightarrow{EA} \cdot \frac{1}{2}\overrightarrow{EB} = \frac{1}{2}\overrightarrow{EA} \cdot \overrightarrow{EB} = \frac{1}{2}\overrightarrow{EA} \cdot \overrightarrow{EA} = \frac{1}{2}a^2$.

### Exercice 8

$SABCD$ est une pyramide de base carrée avec des faces latérales équilatérales.

1. Dans un triangle équilatéral $SAB$ de côté $a$ : $\overrightarrow{SA} \cdot \overrightarrow{SB} = |\overrightarrow{SA}| \times |\overrightarrow{SB}| \times \cos(\widehat{ASB}) = a \times a \times \cos(60°) = a^2 \times \frac{1}{2} = \frac{a^2}{2}$
2. $H$ est le pied de la hauteur issue de $S$ dans le triangle $SAC$.
3. (a) Puisque $H$ est le centre du carré, $\overrightarrow{SH} \perp \overrightarrow{AC}$ (la hauteur de la pyramide est perpendiculaire à la base). Donc $\overrightarrow{SH} \cdot \overrightarrow{AC} = 0$.

   (b) $H$ est le centre du carré, donc $\overrightarrow{AH} \perp \overrightarrow{DB}$ (les diagonales d'un carré sont perpendiculaires). Donc $\overrightarrow{AH} \cdot \overrightarrow{DB} = 0$.

   (c) $\overrightarrow{HI} \cdot \overrightarrow{SA} = \overrightarrow{HI} \cdot \overrightarrow{-HC} = -\overrightarrow{HI} \cdot \overrightarrow{HI} = -(\frac{1}{2}a)^2 = -\frac{1}{4}a^2$

   (d) $\overrightarrow{HI} \cdot \overrightarrow{DH} = \overrightarrow{HI} \cdot \overrightarrow{HB} = \overrightarrow{HI} \cdot \overrightarrow{HI} = (\frac{1}{2}a)^2 = \frac{1}{4}a^2$

### Exercice 9

Dans le parallélépipède rectangle, utilisons le repère orthonormé $(A; \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE})$.
Les dimensions sont : $AB = 3a$, $AD = a$, $AE = a$.

(a) $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AF} = AB^2 = 9a^2$

(b) $\overrightarrow{DB} \cdot \overrightarrow{CG} = \overrightarrow{DB} \cdot \overrightarrow{DH} = 0$

(c) $\overrightarrow{EG} \cdot \overrightarrow{HF} = (\overrightarrow{EF} + \overrightarrow{FG}) \cdot (\overrightarrow{HE} + \overrightarrow{EF}) = \overrightarrow{EF} \cdot \overrightarrow{HE} + \overrightarrow{EF} \cdot \overrightarrow{EF} + \overrightarrow{FG} \cdot \overrightarrow{HE} + \overrightarrow{FG} \cdot \overrightarrow{EF} = 0 + 9a^2 - a^2 + 0 = 8a^2$

ⓓ $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AG}=\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AB}=9a^2$

**Exercice 10**

Dans le cube de côté $a$, utilisons le repère orthonormé $(A;\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD},\overrightarrow{AE})$.
$I$ est le centre de la face $DCGH$, donc $I\left(\frac{a}{2};a;\frac{a}{2}\right)$.
$J$ est le milieu de $[AD]$, donc $J\left(0;\frac{a}{2};0\right)$.

1. $\overrightarrow{AI}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AE}$
   $\overrightarrow{BJ}=-\overrightarrow{AB}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AD}$
2. ⓐ $\overrightarrow{AI}\cdot\overrightarrow{BJ}=\left(\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AE}\right)\cdot\left(-\overrightarrow{AB}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AD}\right)$
   En développant et utilisant l'orthogonalité des vecteurs de base : $=\dfrac{1}{2}AB^2+\dfrac{1}{2}AD^2=-\frac{1}{2}a^2+\frac{1}{2}a^2=0$
   ⓑ Puisque $\overrightarrow{AI}\cdot\overrightarrow{BJ}=0$, les droites $(AI)$ et $(BJ)$ sont orthogonales.

**Exercice 11**

1. **Faux**. Le produit scalaire dépend de l'angle entre les vecteurs : $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=AB\times AC\times\cos(\widehat{BAC})=9\times7\times\cos(\widehat{BAC})=63\cos(\widehat{BAC})$.
   Cette valeur peut prendre toutes les valeurs entre $-63$ et $63$ selon l'angle $\widehat{BAC}$.
2. **Vrai**. $\overrightarrow{BA}=-\overrightarrow{AB}$, donc : $\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{AC}=(-\overrightarrow{AB})\cdot\overrightarrow{AC}=-(\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC})=-5$.

**Exercice 12**

Dans le repère orthonormé du cube $(A;\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD},\overrightarrow{AE})$ :
$\overrightarrow{AM}=2\overrightarrow{AB}+3\overrightarrow{AD}+4\overrightarrow{AE}$ et $\overrightarrow{AN}=\overrightarrow{AB}-2\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AE}$

1. En utilisant l'orthonormalité de la base :
$$\begin{aligned}\overrightarrow{AM}\cdot\overrightarrow{AN}&=(2\overrightarrow{AB}+3\overrightarrow{AD}+4\overrightarrow{AE})\cdot(\overrightarrow{AB}-2\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AE})\\&=2a^2-6a^2+4a^2=0\end{aligned}$$
2. Puisque $\overrightarrow{AM}\cdot\overrightarrow{AN}=0$, le triangle $MAN$ est rectangle en $A$.

**Exercice 13** Logique

1. **Vrai**. Si $\vec{u}\cdot\vec{v}=\|\vec{u}\|\times\|\vec{v}\|$, alors $\cos(\vec{u},\vec{v})=1$, ce qui implique que l'angle entre $\vec{u}$ et $\vec{v}$ est nul, donc ils sont colinéaires et de même sens.
2. La réciproque est : « Si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires, alors $\vec{u}\cdot\vec{v}=\|\vec{u}\|\times\|\vec{v}\|$. »
   Cette réciproque est **fausse**. Si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires de sens opposés, alors $\vec{u}\cdot\vec{v}=-\|\vec{u}\|\times\|\vec{v}\|$.

**Produits scalaires dans un repère orthonormé**

**Exercice 14**

ⓐ $\vec{u}\cdot\vec{v}=(-3)\times2+(-1)\times0+0\times5=-6$

ⓑ $\vec{u}\cdot\vec{v}=1\times2+(-1)\times3+3\times(-2)=2-3-6=-7$

**Exercice 15** Algorithme

```
def pro_scal(U,V):
    p=0
    for i in range(3):
        p=p+U(i)*V(i)
    return p
```

**Exercice 16**

1. $\vec{u}\cdot\vec{v}=7\times(-3)+(-1)\times(-11)+2\times5=-21+11+10=0$
2. Puisque $\vec{u}\cdot\vec{v}=0$, les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont orthogonaux.

**Exercice 17**

$\vec{u}\cdot\vec{v}=(-4)\times3+6\times(-7)+9\times6=-12-42+54=0$
Donc $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont orthogonaux.

**Exercice 18** Algorithme

1. `orth(1,2,1,-1,1,-1)` calcule $1\times(-1)+2\times1+1\times(-1)=0$, donc renvoie `True`.
2. `orth(3,0,2,1,2,3)` calcule $3\times1+0\times2+2\times3=9\neq0$, donc renvoie `False`.
3. Cette fonction teste si deux vecteurs de coordonnées $(x_1,y_1,z_1)$ et $(x_2,y_2,z_2)$ sont orthogonaux.

**Exercice 19**

1. $\overrightarrow{AB}(3;-8;2)$ et $\overrightarrow{AC}(-2;-3;-4)$
2. $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=3\times(-2)+(-8)\times(-3)+2\times(-4)=-6+24-8=10$

**Exercice 20**

1. $\overrightarrow{AB}(7;-1;3)$ et $\overrightarrow{AC}(1;4;-1)$
   $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=7\times1+(-1)\times4+3\times(-1)=7-4-3=0$
   Donc $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont orthogonaux.
2. Le triangle $ABC$ est rectangle en $A$.

**Exercice 21**

1. $\overrightarrow{AB}(2;2;3)$, $\overrightarrow{DC}(2;2;3)$, donc $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{DC}$.
   Ainsi $ABCD$ est un parallélogramme.
2. ⓐ $\overrightarrow{AD}(1;2;-2)$
   $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AD}=2\times1+2\times2+3\times(-2)=2+4-6=0$
   ⓑ Puisque $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AD}=0$, le parallélogramme $ABCD$ est un rectangle.

**Exercice 22**

1. $\overrightarrow{AB}(7;4;-2)$, $\overrightarrow{DC}(7;4;-2)$, donc $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{DC}$.
   Ainsi $ABCD$ est un parallélogramme.

2. (a) $\overrightarrow{AC}(6;6;-10)$ et $\overrightarrow{BD}(-8;-2;-6)$
   $\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{BD} = 6\times(-8)+6\times(-2)+(-10)\times(-6) = -48-12+60 = 0$
   (b) Les diagonales sont orthogonales, donc le parallélogramme $ABCD$ est un losange.

**Exercice 23**

1. Calculons les longueurs des côtés :
   $AB^2 = (-2)^2+(-7)^2+3^2 = 4+49+9 = 62$, donc $AB = \sqrt{62}$
   $BC^2 = 5^2+(-1)^2+1^2 = 25+1+1 = 27$, donc $BC = 3\sqrt{3}$
   $AC^2 = 3^2+(-8)^2+4^2 = 9+64+16 = 89$, donc $AC = \sqrt{89}$
   Or, d'une part $AB^2+BC^2 = 89$ et d'autre part, $AC^2 = 89$.
   Donc $ABC$ est rectangle en $B$. (b)
2. $\overrightarrow{AB} = (-2;-7;3)$ et $\overrightarrow{AC} = (3;-8;4)$
   $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC} = (-2)\times 3+(-7)\times(-8)+3\times 4 = -6+56+12 = 62 = AB^2$ (a) et (d)

**Exercice 24**

1. (a) $\overrightarrow{AB}(-2;6;9)$ et $\overrightarrow{AC}(-2;3;6)$
   Donc $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC} = (-2)\times(-2)+6\times 3+9\times 6 = 4+18+54 = 76$
   (b) $AB = \sqrt{4+36+81} = \sqrt{121} = 11$ et $AC = \sqrt{4+9+36} = \sqrt{49} = 7$
2. On a : $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC} = ||\overrightarrow{AB}||\times||\overrightarrow{AC}||\times\cos(\widehat{BAC}) = AB\times AC\times\cos(\widehat{BAC}) \Leftrightarrow 76 = 11\times 7\times\cos(\widehat{BAC}) = 77\times\cos(\widehat{BAC})$
   Ainsi $\cos(\widehat{BAC}) = \dfrac{76}{77}$
   Donc $\widehat{BAC} \approx 73,33°$.

**Exercice 25**

1. (a) $J$ est le milieu de $[AC]$, donc $J\left(4;-4;\frac{7}{2}\right)$
   $\overrightarrow{BC}(1;1;-2)$ et $\overrightarrow{BJ}(4;0;\frac{1}{2})$
   Ainsi, $\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{BJ} = 1\times 4+1\times 0+(-2)\times\frac{1}{2} = 4-1 = 3$
   (b) $BC = \sqrt{1+1+4} = \sqrt{6}$ et $BJ = \sqrt{16+0+\frac{1}{4}} = \sqrt{\frac{65}{4}} = \frac{\sqrt{65}}{2}$
2. $\cos(\widehat{CBJ}) = \frac{\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{BJ}}{BC\times BJ} = \frac{3}{\sqrt{6}\times\frac{\sqrt{65}}{2}} = \frac{6}{\sqrt{390}}$
   Donc $\widehat{CBJ} \approx 72,31$ř

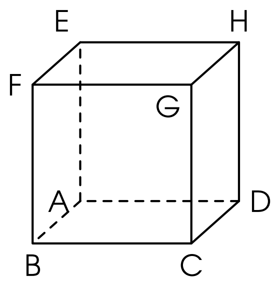
**Exercice 26**

1. Le repère $\left(D;\ \overrightarrow{DA},\ \frac{1}{2}\overrightarrow{DC},\ \overrightarrow{DH}\right)$ est orthonormé car :
   - $\overrightarrow{DA}$, $\overrightarrow{DC}$ et $\overrightarrow{DH}$ sont orthogonaux deux à deux
   - $|\overrightarrow{DA}| = 1$, $\left|\frac{1}{2}\overrightarrow{DC}\right| = 1$, $|\overrightarrow{DH}| = 1$
2. (a) Dans ce repère :
   - $I$ : milieu de $[DE]$, donc $I\left(\dfrac{1}{2};0;\dfrac{1}{2}\right)$
   - $J$ : milieu de $[DG]$, donc $J\left(0;1;\frac{1}{2}\right)$
   - $K$ : milieu de $[EB]$, donc $K\left(1;1;\frac{1}{2}\right)$

   Ainsi, $\overrightarrow{IJ}\left(-\dfrac{1}{2};1;0\right)$ et $\overrightarrow{IK}\left(\dfrac{1}{2};1;0\right)$
   Par conséquent, on a :
   $\bullet\overrightarrow{IJ}\cdot\overrightarrow{IK} = (-\frac{1}{2})\times\frac{1}{2}+1\times 1+\frac{1}{2}\times 0 = -\dfrac{1}{4}+1 = \dfrac{3}{4}$
   $\bullet IJ = \sqrt{\frac{1}{4}+1+0} = \frac{\sqrt{5}}{2}$
   $\bullet IK = \sqrt{\frac{1}{4}+1+0} = \frac{\sqrt{5}}{2}$
   (b) $\cos(\widehat{JIK}) = \frac{\overrightarrow{IJ}\cdot\overrightarrow{IK}}{IJ\times IK} = \frac{\frac{3}{4}}{\frac{\sqrt{5}}{2}\times\frac{\sqrt{5}}{2}} = \frac{3}{5}$
   Donc $\widehat{JIK} \approx 53,13°$

**Exercice 27**

Dans le repère $(D;\overrightarrow{DA},\overrightarrow{DC},\overrightarrow{DH})$ :




1. $\overrightarrow{DF} = \overrightarrow{DA}+\overrightarrow{DC}+\overrightarrow{DH} = (1;1;1)$
   Comme $D$ est l'origine du repère, on a : $\overrightarrow{DM} = x\,\overrightarrow{DF} = x(1;1;1) = (x;x;x)$, ce qui donne $M(x;x;x)$.
2. Pour que le triangle $MEB$ soit rectangle en $M$, il faut que $\overrightarrow{ME}\perp\overrightarrow{MB}$.
   On a : $E(1;0;1)$, $B(1;1;0)$ et $M(x;x;x)$
   Donc : $\overrightarrow{EM}(x-1;x;x-1)$ et $\overrightarrow{BM}(x-1;x-1;x)$
   Ainsi, $\overrightarrow{EM}\cdot\overrightarrow{BM} = 3x^2-4x+1$
   Pour l'orthogonalité, il nous faut donc $3x^2-4x+1 = 0$.
   Donc $x\in\{\dfrac{1}{3};1\}$.
   Or $x$ ne peux valoir 1.
   Donc $MEB$ est rectangle en $M$ si et seulement si $x = \dfrac{1}{3}$.

**Formules de polarisation**

**Exercice 28**

1. Pour un vecteur $\vec{u}(a;b;c)$, on a $\|\vec{u}\| = \sqrt{a^2+b^2+c^2}$.
2. (a) $\|\vec{u}\| = \sqrt{1^2+2^2+2^2} = \sqrt{9} = 3$
   (b) $\|\vec{u}\| = \sqrt{(-2)^2+(-3)^2+6^2} = \sqrt{4+9+36} = \sqrt{49} = 7$
   (c) $\|\vec{u}\| = \sqrt{9^2+12^2+(-8)^2} = \sqrt{81+144+64} = \sqrt{289} = 17$

**Exercice 29**

1. La formule de polarisation est : $\vec{u}\cdot\vec{v} = \frac{1}{2}\left(\|\vec{u}+\vec{v}\|^2 - \|\vec{u}\|^2 - \|\vec{v}\|^2\right)$
2. $\vec{u}\cdot\vec{v} = \frac{1}{2}\left(7^2-8^2-3^2\right) = \frac{1}{2}(49-64-9) = \frac{-24}{2} = -12$

**Exercice 30**

1. (a) D'après la première formule de polarisation, on a : $\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{AC} = \dfrac{1}{2}(||\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AC}||^2 - ||\overrightarrow{BA}||^2 - ||\overrightarrow{AC}||^2) = \dfrac{1}{2}(BC^2 - BA^2 - AC^2)$
   (b) $\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{AC} = \frac{1}{2}(25-49-64) = \frac{-88}{2} = -44$
   $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC} = -\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{AC} = 44$
2. $\cos(\widehat{BAC}) = \frac{\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}}{AB\times AC} = \frac{44}{7\times 8} = \frac{44}{56} = \frac{11}{14}$

   Donc $\widehat{BAC} \approx 38,21°$

**Exercice 31**

1. (a) On a $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BC} = \dfrac{1}{2}\left(||\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}||^2 - ||\overrightarrow{AB}||^2 - ||\overrightarrow{BC}||^2\right) = \dfrac{1}{2}(AC^2 - AB^2 - BC^2) = \frac{1}{2}(25-36-64) = \frac{-75}{2}$
   (b) $\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC} = -\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BC} = \frac{75}{2}$
2. $\cos(\widehat{ABC}) = \frac{\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC}}{BA\times BC} = \frac{\frac{75}{2}}{6\times 8} = \frac{75}{96} = \frac{25}{32}$

   Donc $\widehat{ABC} \approx 38,62°$

**Exercice 32** Logique

1. On a $\overrightarrow{DA}\cdot\overrightarrow{AB} = \dfrac{1}{4}\left(||\overrightarrow{DA}+\overrightarrow{AB}||^2 - ||\overrightarrow{DA}-\overrightarrow{AB}||^2\right) = \dfrac{1}{4}(DB^2 - AC^2) = \frac{1}{4}(BD^2 - AC^2)$
2. Un parallélogramme est un rectangle si et seulement si $\overrightarrow{DA}\perp\overrightarrow{AB}$, c'est-à-dire $\overrightarrow{DA}\cdot\overrightarrow{AB} = 0$.

   D'après la question précédente, cela équivaut à $\dfrac{1}{4}(BD^2 - AC^2) = 0$, soit $BD^2 = AC^2$, soit $BD = AC$.

   Donc un parallélogramme est un rectangle si et seulement si ses diagonales sont de même longueur.

**Exercice 33**

En utilisant la formule démontrée précédemment : $\overrightarrow{DA}\cdot\overrightarrow{AB} = \frac{1}{4}(BD^2 - AC^2) = \frac{1}{4}(16-100) = \frac{-84}{4} = -21$

### Orthogonalité de droites et de plans

**Exercice 34**

1. $\vec{u}\cdot\vec{v} = 7\times(-4)+5\times 5+3\times 1 = -28+25+3 = 0$
2. Puisque $\vec{u}\cdot\vec{v} = 0$ et que $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont des vecteurs directeurs de $d$ et $d'$, les droites $d$ et $d'$ sont orthogonales.

**Exercice 35**

1. (a) $\overrightarrow{AB}(2;1;3)$ et $\overrightarrow{AC}(-5;7;1)$
   (b) $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC} = 2\times(-5)+1\times 7+3\times 1 = -10+7+3 = 0$
2. Puisque $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC} = 0$, les droites $(AB)$ et $(AC)$ sont orthogonales.

**Exercice 36**

1. $\overrightarrow{AB}(-5;4;1)$
2. (a) $\overrightarrow{AB}\cdot\vec{v} = (-5)\times 1+4\times 1+1\times 1 = -5+4+1 = 0$
   $\overrightarrow{AB}\cdot\vec{w} = (-5)\times 1+4\times 2+1\times(-3) = -5+8-3 = 0$
   (b) Puisque $\overrightarrow{AB}$ est orthogonal aux deux vecteurs directeurs du plan $\mathcal{P}$, la droite $(AB)$ est perpendiculaire au plan $\mathcal{P}$.

**Exercice 37** Logique

1. **Vraie**. Si $d$ est perpendiculaire à $\mathcal{P}$, alors $\vec{u}$ est orthogonal à tous les vecteurs de la direction de $\mathcal{P}$, donc en particulier à $\vec{v}$.
2. (a) La réciproque est : « Si $\vec{u}\cdot\vec{v} = 0$, alors $d$ est perpendiculaire à $\mathcal{P}$. »
   (b) Cette réciproque est **fausse**. Il faut que $\vec{u}$ soit orthogonal à tous les vecteurs de la direction du plan, pas seulement à un seul.

**Exercice 38**

1. $\overrightarrow{AB}(1;-6;3)$ et $\overrightarrow{AC}(2;2;1)$

   Les triplets $(1;-6;3)$ et $(2;2;1)$ ne sont pas proportionnels donc les vecteurs ne sont pas colinéaires.

   Donc les points $A$, $B$ et $C$ ne sont pas alignés et définissent un plan.
2. On a $\overrightarrow{AB}(1;-6;3)$ et $\overrightarrow{DE}(-12;5;14)$

   Donc $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{DE} = 1\times(-12)+(-6)\times 5+3\times 14 = -12-30+42 = 0$

   Donc les droites $(AB)$ et $(DE)$ sont orthogonales.
3. Il faut vérifier que $\overrightarrow{DE}$ est orthogonal aux deux vecteurs directeurs du plan $(ABC)$ :

   $\overrightarrow{DE}\cdot\overrightarrow{AB} = 0$ (déjà calculé)

   $\overrightarrow{DE}\cdot\overrightarrow{AC} = (-12)\times 2+5\times 2+14\times 1 = -24+10+14 = 0$

   Donc la droite $(DE)$ est orthogonale au plan $(ABC)$.

**Exercice 39**

$\overrightarrow{AB}(3;4;-2)$ et $\overrightarrow{CD}(-6;4;-1)$

$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CD} = 3\times(-6)+4\times 4+(-2)\times(-1) = -18+16+2 = 0$

Donc les droites $(AB)$ et $(CD)$ sont orthogonales.

## Exercice 40

$\overrightarrow{MN}(9;3;2)$ et $\overrightarrow{RS}(1;-3;0)$
$\overrightarrow{MN}\cdot\overrightarrow{RS} = 9\times1+3\times(-3)+2\times0 = 9-9+0 = 0$
Donc les droites $(MN)$ et $(RS)$ sont orthogonales.

## Exercice 41

1. $\overrightarrow{AB}(2;-1;-1)$ et $\overrightarrow{AC}(1;0;-1)$
   Ces vecteurs ne sont pas colinéaires, donc les points $A$, $B$ et $C$ définissent un plan.
2. On a $\overrightarrow{DE}(4;4;4)$
   Ainsi $\overrightarrow{DE}\cdot\overrightarrow{AB} = 4\times2+4\times(-1)+4\times(-1) = 8-4-4 = 0$
   et $\overrightarrow{DE}\cdot\overrightarrow{AC} = 4\times1+4\times0+4\times(-1) = 4+0-4 = 0$
   Donc la droite $(DE)$ est orthogonale au plan $(ABC)$.

## Exercice 42

1. Dans un carré, les diagonales sont perpendiculaires. Donc $(DB)\perp(AC)$.
2. D'une part $(DB)\subset\Delta$ et $(AE)\perp\Delta$. Donc $(DB)\perp(AE)$.
   D'autre part, $(DB)\perp(AC)$ d'après la question précédente.
   Ainsi, $(DB)$ est orthogonale à deux droites sécantes du plan $(AEC)$. Donc $(DB)$ est orthogonale au plan $(AEC)$.
   Or $(EC)\subset(AEC)$. Donc $(DB)$ est orthogonale à $(EC)$.

## Exercice 43

Dans le triangle $ABC$ équilatéral, $AI$ est la médiatrice de $BC$, donc $AI\perp BC$.
Dans le triangle $DBC$ équilatéral, $DI$ est la médiatrice de $BC$, donc $DI\perp BC$.
Ainsi, $(BC)$ est orthogonale à deux droites sécantes (car sinon $A$, $I$, $D$ seraient alignés, ce qui n'est pas le cas) de $(AID)$.
Donc la droite $(BC)$ est perpendiculaire au plan $(IAD)$.

## Exercice 44

1. Dans le triangle isocèle $ABC$, $(AI)$ est la hauteur issue de $A$, donc $(AI)$ est perpendiculaire à $(BC)$.
   De même, $(DI)$ est perpendiculaire à $(BC)$.
   Ainsi, $(BC)$ est donc orthogonale à deux droites sécantes de $(AID)$.
   Donc $(BC)$ est perpendiculaire à $(AID)$.
2. Puisque $(BC)\perp(AID)$ et $(AD)\subset(AID)$, on a $(BC)\perp(AD)$.
   Donc les droites $(BC)$ et $(AD)$ sont orthogonales.

## Exercice 45

1. a) Dans un prisme droit, les arêtes latérales sont perpendiculaires aux bases. Donc $(AD)\perp(DEF)$.
   b) D'après la question précédente, $(AD)\perp(DEF)$.
   Or $(FH)\subset(DEF)$, donc $(FH)\perp(AD)$.
   De plus, $H$ est le pied de la hauteur issue de $F$ dans le triangle $DEF$. Donc $(FH)\perp(DE)$.
   Par conséquent, $(FH)$ est orthogonale à deux droites sécantes du plan $(ABE)$.
   Donc $(FH)\perp(ABE)$.
2. $(AH)\subset(ABE)$ et $(FH)\perp(ABE)$, donc $(FH)\perp(AH)$ : le triangle $AHF$ est rectangle en $H$.
   De même, $(BH)\subset(ABE)$ et $(FH)\perp(ABE)$, donc $(FH)\perp(BH)$ : le triangle $HF$ est rectangle en $H$