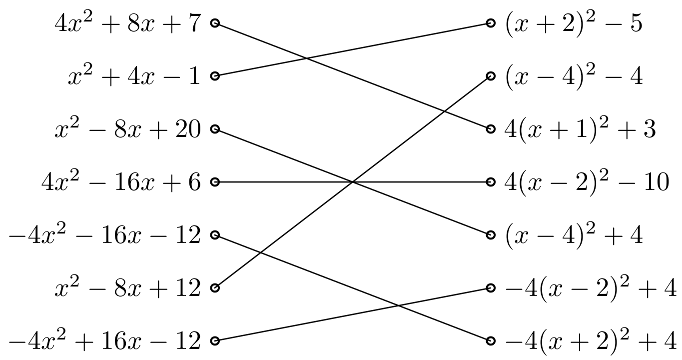
TD - Chapitre 1

C.1



C.2

a) Les deux termes en x de l'expression "x^2-4x+1" s'obtiennent par le développement de l'identité remarquable :

$$\left(x-2\right)^2 = x^2-4\cdot x+4 \quad\Longrightarrow\quad x^2-4\cdot x = \left(x-2\right)^2-4$$

On en déduit l'expression de la forme canonique :

$$x^2-4x+1 = \left[x^2-4\cdot x\right]+1$$
$$= \left[\left(x-2\right)^2-4\right]+1$$
$$= (x-2)^2-3$$

b) Les deux termes en x de l'expression "x^2+6x+3" s'obtiennent par le développement de l'identité remarquable :

$$\left(x+3\right)^2 = x^2+6\cdot x+9 \quad\Longrightarrow\quad x^2+6\cdot x = \left(x+3\right)^2-9$$

On en déduit l'expression de la forme canonique :

$$x^2+6x+3 = \left[x^2+6\cdot x\right]+3$$
$$= \left[\left(x+3\right)^2-9\right]+3$$
$$= (x+3)^2-6$$

C.3

a) $x^2+4x-5 = \left[(x+2)^2-4\right]-5 = (x+2)^2-9$

b) $x^2-2x-1 = \left[(x-1)^2-1\right]-1 = (x-1)^2-2$

C.4

a) $x^2+2x-3 = \left[(x+1)^2-1\right]-3 = (x+1)^2-4$

b) $x^2-6x-2 = \left[(x-3)^2-9\right]-2 = (x-3)^2-11$

c) $x^2+12x+5 = \left[(x+6)^2-36\right]+5 = (x+6)^2-31$

d) $x^2-10x+5 = \left[(x-5)^2-25\right]+5 = (x-5)^2-20$

C.5

a) $2x^2+12x-4 = 2\cdot\left(x^2+6x\right)-4$

$$= 2\cdot\left[\left(x^2+6x+9\right)-9\right]-4 = 2\cdot\left[\left(x+3\right)^2-9\right]-4$$
$$= 2\cdot\left(x+3\right)^2-18-4 = 2\cdot\left(x+3\right)^2-22$$

b) $3x^2+30x+12 = 3\cdot\left(x^2+10x\right)+12$

$$= 3\cdot\left[\left(x^2+10x+25\right)-25\right]+12 = 3\cdot\left[\left(x+5\right)^2-25\right]+12$$
$$= 3\cdot\left(x+5\right)^2-75+12 = 3\cdot\left(x+5\right)^2-63$$

C.6

a) $2x^2+8x-6 = 2\cdot\left(x^2+4x\right)-6$

$$= 2\cdot\left[\left(x^2+4x+4\right)-4\right]-6 = 2\cdot\left[\left(x+2\right)^2-4\right]-6$$
$$= 2\cdot\left(x+2\right)^2-8-6 = 2\cdot\left(x+2\right)^2-14$$

b) $3x^2+6x+6 = 3\cdot\left(x^2+2x\right)+6$

$$= 3\cdot\left[\left(x^2+2x+1\right)-1\right]+6 = 3\cdot\left[\left(x+1\right)^2-1\right]+6$$
$$= 3\cdot\left(x+1\right)^2-3+6 = 3\cdot\left(x+1\right)^2+3$$

c) $9x^2+18x+27 = 9\cdot\left(x^2+2x\right)+27$

$$= 9\cdot\left[\left(x^2+2x+1\right)-1\right]+27 = 9\cdot\left[\left(x+1\right)^2-1\right]+27$$
$$= 9\cdot\left(x+1\right)^2-9+27 = 9\cdot\left(x+1\right)^2+18$$

d) $5x^2+10x+2 = 5\cdot\left(x^2+2x\right)+2$

$$= 5\cdot\left[\left(x^2+2x+1\right)-1\right]+2 = 5\cdot\left[(x+1)^2-1\right]+2$$
$$= 5\cdot(x+1)^2-5+2 = 5\cdot(x+1)^2-3$$

C.7

a) $x^2+x+2 = \left(x+\dfrac{1}{2}\right)^2-\dfrac{1}{4}+2 = \left(x+\dfrac{1}{2}\right)^2+\dfrac{7}{4}$

b) $x^2-3x-1 = \left(x-\dfrac{3}{2}\right)^2-\dfrac{9}{4}-1 = \left(x-\dfrac{3}{2}\right)^2-\dfrac{13}{4}$

c) $x^2+\dfrac{1}{2}x-3 = \left(x+\dfrac{1}{4}\right)^2-\dfrac{1}{16}-3$

$$= \left(x+\frac{1}{4}\right)^2-\frac{1}{16}-\frac{48}{16} = \left(x+\frac{1}{4}\right)^2-\frac{49}{16}$$

d) $x^2+x-\dfrac{1}{3} = \left(x+\dfrac{1}{2}\right)^2-\dfrac{1}{4}-\dfrac{1}{3}$

$$= \left(x+\frac{1}{2}\right)^2-\frac{3}{12}-\frac{4}{12} = \left(x+\frac{1}{2}\right)^2-\frac{7}{12}$$

C.8

a) $x^2+\dfrac{1}{4}x+1 = \left[\left(x+\dfrac{1}{8}\right)^2-\dfrac{1}{64}\right]+1 = \left(x+\dfrac{1}{8}\right)^2+\dfrac{63}{64}$

b) $x^2+x+1 = \left[\left(x+\dfrac{1}{2}\right)^2-\dfrac{1}{4}\right]+1 = \left(x+\dfrac{1}{2}\right)^2+\dfrac{3}{4}$

C.9

1) Pour déterminer la forme canonique du polynôme P, on identifie les termes en x^2 et en x avec l'identité remarquable :

$$\left(x+3\right)^2 = x^2+6x+9 \quad\Longrightarrow\quad x^2+6x = \left(x+3\right)^2-9$$

On a les transformations algébriques suivantes :

$$x^2+6x-7 = \left(x^2+6x\right)-7 = \left[\left(x+3\right)^2-9\right]-7$$
$$= \left(x+3\right)^2-16$$

2) Résolvons l'équation :

$$x^2+6x-7=0$$
$$\left[\left(x+3\right)^2-9\right]-7=0$$
$$\left(x+3\right)^2-16=0$$
$$\left(x+3\right)^2-4^2=0$$
$$\left[\left(x+3\right)+4\right]\left[\left(x+3\right)-4\right]=0$$
$$\left(x+7\right)\left(x-1\right)=0$$

Un produit est nul si, et seulement si, au moins un de ses facteurs est nul :

$x+7=0$	$x-1=0$
$x=-7$	$x=1$

Ainsi, cette équation admet pour ensemble de solution : $\mathcal{S}=\{-7\,;1\}$

C.10

(1) La forme canonique du polynôme P est $3\cdot\left(x-2\right)^2+5$ car :

$$3\cdot\left(x-2\right)^2+5=3\cdot\left(x^2-4x+4\right)+5$$
$$=3\cdot x^2-12\cdot x+12+5=3\cdot x^2-12\cdot x+17$$

(2) Résolvons cette équation :

$$3\cdot x^2-12\cdot x+17=8$$
$$3\cdot\left(x-2\right)^2+5=8$$
$$3\cdot\left(x-2\right)^2=8-5$$
$$3\cdot\left(x-2\right)^2=3$$
$$\left(x-2\right)^2=\frac{3}{3}$$
$$\left(x-2\right)^2=1$$
$$\left(x-2\right)^2-1^2=0$$
$$\left[\left(x-2\right)+1\right]\left[\left(x-2\right)-1\right]=0$$
$$\left(x-2+1\right)\left(x-2-1\right)=0$$
$$\left(x-1\right)\left(x-3\right)=0$$

Un produit est nul si, et seulement si, au moins un de ses facteurs est nul :

$x-1=0$	$x-3=0$
$x=1$	$x=3$

L'ensemble des solutions est : $\mathcal{S}=\{1\,;3\}$

C.11

(1) Proposons l'expression $\left(x+2\right)^2+5$ pour forme canonique. Pour l'établir, nous allons développer :
$\left(x+2\right)^2+5=x^2+4\cdot x+4+5=x^2+4\cdot x+9$

(2) Résolvons l'équation :

$$x^2+4\cdot x+9=1$$
$$\left(x+2\right)^2+5=1$$
$$\left(x+2\right)^2=1-5$$
$$\left(x+2\right)^2=-4$$

Un carré n'étant jamais strictement négatif, on en déduit que cette équation n'admet aucune solution.

C.12

(1) On a les transformations algébriques :
$2x^2+4x-16=2\cdot\left(x^2+2x\right)-16$

On remarque que l'expression x^2+2x est le début du développement de l'identité remarquable $\left(x+1\right)^2$.
Cette remarque permet d'effectuer l'identification :
$$\left(x+1\right)^2=x^2+2\cdot x+1 \implies x^2+2\cdot x=\left(x+1\right)^2-1$$

On obtient ainsi, la forme canonique recherchée :
$$2x^2+4x-16=2\cdot\left(x^2+2x\right)-16=2\cdot\left[\left(x+1\right)^2-1\right]-16$$
$$=2\cdot\left(x+1\right)^2-2-16=2\cdot\left(x+1\right)^2-18$$

(2) Résolvons l'équation (E) :

$$2x^2+4x+4=20$$
$$2x^2+4x+4-20=0$$
$$2x^2+4x-16=0$$

D'après la question précédente, on a :

$$2\cdot\left(x+1\right)^2-18=0$$
$$\frac{2\cdot\left(x+1\right)^2-18}{2}=\frac{0}{2}$$
$$\left(x+1\right)^2-\frac{18}{2}=0$$
$$\left(x+1\right)^2-9=0$$
$$\left(x+1\right)^2-3^2=0$$
$$\left[\left(x+1\right)+3\right]\left[\left(x+1\right)-3\right]=0$$
$$\left(x+4\right)\left(x-2\right)=0$$

Un produit est nul si, et seulement si, au moins un de ses facteurs est nul :

$x+4=0$	$x-2=0$
$x=-4$	$x=2$

On en déduit que l'ensemble des solutions de cette équation sont :
$\mathcal{S}=\{-4\,;2\}$.

C.13

(a) On a les deux valeurs suivantes :

- $-\dfrac{b}{2a}=-\dfrac{8}{2\times2}=-2$
- $f(-2)=2\times(-2)^2+8\times(-2)+1=8-16+1=-7$

Le fonction f a un coefficient du second degré positif. On a le tableau de variations suivant :

x	$-\infty$	-2	$+\infty$
Variation de f	$+\infty$ $\searrow$	-7	$\nearrow$ $+\infty$

La fonction f admet un minimum atteint en -2 et dont la valeur est -7.

(b) On a les deux valeurs suivantes :

- $-\dfrac{b}{2a}=-\dfrac{2}{2\times(-1)}=-\dfrac{2}{-2}=1$
- $g(1)=-1^2+2\times1+1=-1+2+1=2$

Le fonction g a un coefficient du second degré négatif. On a le tableau de variations suivant :

x	$-\infty$		1		$+\infty$
Variation de g	$-\infty$	$\nearrow$	2	$\searrow$	$-\infty$

La fonction g admet un maximum atteint en 1 et dont la valeur est 2.

C.14

(1) On a les deux valeurs suivantes :

- $-\dfrac{b}{2a} = -\dfrac{9}{2\times(-3)} = -\dfrac{9}{-6} = \dfrac{3}{2}$
- $f\Big(\dfrac{3}{2}\Big) = -3\cdot\Big(\dfrac{3}{2}\Big)^2 + 9\times\dfrac{3}{2} - 2 = -3\times\dfrac{9}{4} + \dfrac{27}{2} - 2$
  $= \dfrac{-27+54-8}{4} = \dfrac{19}{4}$

Le fonction f a un coefficient du second degré négatif. On a le tableau de variations suivant :

x	$-\infty$		$\frac{3}{2}$		$+\infty$
Variation de f	$-\infty$	$\nearrow$	$\frac{19}{4}$	$\searrow$	$-\infty$

La fonction f admet un maximum atteint en $\dfrac{3}{2}$ et dont la valeur est $\dfrac{19}{4}$.

(2) On a les deux valeurs suivantes :

- $-\dfrac{b}{2a} = -\dfrac{2}{2\times3} = -\dfrac{2}{6} = -\dfrac{1}{3}$
- $g\Big(-\dfrac{1}{3}\Big) = 3\cdot\Big(-\dfrac{1}{3}\Big)^2 + 2\times\Big(-\dfrac{1}{3}\Big) + 2 = 3\times\dfrac{1}{9} - \dfrac{2}{3} + 2$
  $= \dfrac{1-2+6}{3} = \dfrac{5}{3}$

Le fonction g a un coefficient du second degré positif. On a le tableau de variations suivant :

x	$-\infty$		$-\frac{1}{3}$		$+\infty$
Variation de g	$+\infty$	$\searrow$	$\frac{5}{3}$	$\nearrow$	$+\infty$

La fonction g admet un minimum atteint en $-\dfrac{1}{3}$ et dont la valeur est $\dfrac{5}{3}$.

C.15

(1) On a les deux valeurs suivantes :

- $-\dfrac{b}{2a} = -\dfrac{\frac{1}{4}}{2\times\frac{1}{6}} = -\dfrac{\frac{1}{4}}{\frac{1}{3}} = -\dfrac{1}{4}\times\dfrac{3}{1} = -\dfrac{3}{4}$
- $f\Big(-\dfrac{3}{4}\Big) = \dfrac{1}{6}\cdot\Big(-\dfrac{3}{4}\Big)^2 + \dfrac{1}{4}\times\Big(-\dfrac{3}{4}\Big) + 1$
  $= \dfrac{1}{6}\times\dfrac{9}{16} - \dfrac{3}{16} + 1 = \dfrac{3}{32} - \dfrac{6}{32} + \dfrac{32}{32} = \dfrac{29}{32}$

Le fonction f a un coefficient du second degré positif. On a le tableau de variations suivant :

x	$-\infty$		$-\frac{3}{4}$		$+\infty$
Variation de f	$+\infty$	$\searrow$	$\frac{29}{32}$	$\nearrow$	$+\infty$

La fonction f admet un minimum atteint en $-\dfrac{3}{4}$ et dont la valeur est $\dfrac{29}{32}$.

(2) On a les deux valeurs suivantes :

- $-\dfrac{b}{2a} = -\dfrac{2\sqrt{3}}{2\times(-1)} = \sqrt{3}$
- $g\big(\sqrt{3}\big) = -\big(\sqrt{3}\big)^2 + 2\sqrt{3}\cdot\sqrt{3} - 1 = -3+6-1 = 2$

Le fonction g a un coefficient du second degré négatif. On a le tableau de variations suivant :

x	$-\infty$		$\sqrt{3}$		$+\infty$
Variation de g	$-\infty$	$\nearrow$	2	$\searrow$	$-\infty$

La fonction g admet un maximum atteint en $\sqrt{3}$ et dont la valeur est 2.

C.16

(1) La courbe $\mathscr{C}_f$ passe par le point de coordonnées $A(-2\,;-12)$. Ceci permet d'affirmer que l'image de -2 par la fonction f a pour valeur -12 :

$$\begin{aligned} f(-2) &= -12 \\ a\times(-2)^2 + 3\times(-2) + 2 &= -12 \\ 4a - 6 + 2 &= -12 \\ 4a - 4 &= -12 \\ 4a &= -12+4 \\ 4a &= -8 \\ a &= \frac{-8}{4} \\ a &= -2 \end{aligned}$$

Ainsi, f a pour expression : $f(x) = -2x^2+3x+2$

(2) Le sommet d'une parabole a pour coordonnées :

$S\Big(-\dfrac{b}{2a}\,;\,-\dfrac{\Delta}{4a}\Big)$

Par identification des abscisses du sommet de cette parabole, on obtient la relation :

$$\frac{-b}{2a}=1$$
$$\frac{-b}{2{\times}3}=1$$
$$-b=1{\times}6$$
$$-b=6$$
$$b=-6$$

L'expression de la fonction g est : $g(x)=3x^2-6x+1$

C.17

1 a On a l'égalité suivante :
$$\mathcal{L}=100$$
$$2x+y+12=100$$
$$y=100-2x-12$$
$$y=88-2x$$

b y représentant un nombre positif, on a les inégalités suivantes :
$$y>0$$
$$88-2x\ >\ 0$$
$$-2x\ >\ -88$$
$$x\ <\ \frac{-88}{-2}$$
$$x\ <\ 44$$

2 L'aire de jeu est un rectangle de dimensions x et y, ainsi son aire a pour valeur :
$$\mathcal{A}(x)=x{\times}y=x{\cdot}\big(88-2x\big)=88{\cdot}x-2{\cdot}x^2$$

L'expression définissant la fonction $\mathcal{A}$ est un polynôme du second degré admettant les deux valeurs suivantes particulières :

- $-\dfrac{b}{2{\cdot}a}=-\dfrac{88}{2{\times}(-2)}=\dfrac{88}{4}=22$
- $\mathcal{A}(22)=88{\times}22-2{\times}22^2=1936-2{\times}484$
  $=1936-968=968$

Le coefficient du terme du second degré est négatif, on obtient le tableau de variations suivant :

x	0		22		44
Variation de $\mathcal{A}$	0	↗	968	↘	0

D'après le tableau de variations de la question précédente, on en déduit que la valeur maximale de l'aire est réalisée pour $x=22$; alors y a pour valeur :
$$y=88-2{\times}22=88-44=44$$

L'aire de jeu est un rectangle dont la longueur $44\,m$ et de largeur $22\,m$.

C.18

1 La longueur de la clôture s'exprime en fonction de x et de y par :
$$(x-2)+y+x+(y-5)=17$$
$$2{\cdot}x+2{\cdot}y-7=17$$
$$2{\cdot}(x+y)=17+7$$
$$x+y=\frac{24}{2}$$
$$x+y=12$$

2 De l'égalité précédente, on obtient l'expression de y en fonction de x :
$$x+y=12$$
$$y=12-x$$

Pour obtenir l'aire de l'espace extérieur, on effectue la soustraction de l'aire du grand rectangle par l'aire du petit rectangle :
$$\mathcal{A}=x{\cdot}y-5{\times}2=x{\cdot}(12-x)-10=-x^2+12{\cdot}x-10$$

3 La fonction $\mathcal{A}$ est une expression du second degré. On a les deux valeurs suivantes :

- $-\dfrac{b}{2{\cdot}a}=-\dfrac{12}{2{\times}(-1)}=\dfrac{12}{2}=6$
- $\mathcal{A}(6)=-6^2+12{\times}6-10=-36+72-10=26$

Le coefficient du terme du second degré de l'expression de $\mathcal{A}$ est négatif. On a le tableau de variations ci-dessous :

x	-∞		6		+∞
Variation de $\mathcal{A}$	-∞	↗	26	↘	-∞

4 Le tableau de variations ci-dessus indique que l'aire de la partie extérieure est maximale pour $x=6$. On en déduit la valeur de y :
$$x+y=12$$
$$6+y=12$$
$$y=12-6$$
$$y=6$$

La surface du champ a pour mesure alors $26\,m^2$.

C.19 Notons x la mesure du segment $[AM]$. Ainsi, le segment $[MB]$ a pour mesure $1-x$. Les deux disques $\mathcal{D}_1$ et $\mathcal{D}_2$ ont respectivement pour aire :
$$\mathcal{A}_1=\pi{\times}\Big(\frac{x}{2}\Big)^2\quad;\quad\mathcal{A}_2=\pi{\times}\Big(\frac{1-x}{2}\Big)^2$$

Notons f la fonction qui à x, la longueur du segment $[AM]$, associe la somme des aires des disques $\mathcal{D}_1$ et $\mathcal{D}_2$. La fonction f a pour expression :
$$f(x)=\mathcal{A}_1+\mathcal{A}_2=\pi{\times}\Big(\frac{x}{2}\Big)^2+\pi{\times}\Big(\frac{1-x}{2}\Big)^2$$

Ainsi, la fonction f a pour expression :
$$f(x)=\pi{\cdot}\Big(\frac{x}{2}\Big)^2+\pi{\cdot}\Big(\frac{1-x}{2}\Big)^2=\pi{\cdot}\frac{x^2}{4}+\pi{\cdot}\frac{1-2{\cdot}x+x^2}{4}$$
$$=\frac{1}{4}{\cdot}\Big(\pi{\cdot}x^2+\pi-2\pi{\cdot}x+\pi{\cdot}x^2\Big)=\frac{\pi}{2}{\cdot}x^2-\frac{\pi}{2}{\cdot}x+\frac{\pi}{4}$$

Ainsi, la fonction f est un polynôme du second degré ayant un coefficient du second degré strictement positif. La fonction f admet un minimum atteint en :
$$-\frac{b}{2{\cdot}a}=-\frac{-\frac{\pi}{2}}{2{\times}\frac{\pi}{2}}=\frac{\pi}{2}{\times}\frac{1}{\pi}=\frac{1}{2}$$

L'image de $\dfrac{1}{2}$ par la fonction f a pour valeur :
$$f\Big(\frac{1}{2}\Big)=\pi{\times}\left(\frac{\frac{1}{2}}{2}\right)^2+\pi{\times}\left(\frac{1-\frac{1}{2}}{2}\right)^2=\pi{\times}\Big(\frac{1}{4}\Big)^2+\pi{\times}\Big(\frac{1}{4}\Big)^2$$
$$=\pi{\times}\frac{1}{16}+\pi{\times}\frac{1}{16}=\pi{\times}\frac{2}{16}=\frac{1}{8}{\cdot}\pi$$