

L'objectif de cet exercice est de conjecturer en partie A puis de démontrer en partie B le comportement d'une suite.

Les deux parties peuvent cependant être traitées de manière indépendante.

On considère la suite  $(u_n)$  définie par  $u_0 = 3$  et pour tout  $n \in \mathbb{N}$  :

$$u_{n+1} = \frac{4}{5 - u_n}.$$

### Partie A

1. Recopier et compléter la fonction Python suivante `suite(n)` qui prend comme paramètre le rang  $n$  et renvoie la valeur du terme  $u_n$ .

```
def suite(n):
    u = ...
    for i in range(n) :
        ...
    return u
```

2. L'exécution de `suite(2)` renvoie 1.3333333333333333.  
Effectuer un calcul pour vérifier et expliquer cet affichage.
3. À l'aide des affichages ci-dessous, émettre une conjecture sur le sens de variation et une conjecture sur la convergence de la suite  $(u_n)$ .

```
» suite(2)
1.3333333333333333
» suite(5)
1.0058479532163742
» suite(10)
1.0000057220349845
» suite(20)
1.0000000000005457
```

### Partie B

On considère la fonction  $f$  définie et dérivable sur l'intervalle  $] -\infty ; 5[$  par :

$$f(x) = \frac{4}{5 - x}.$$

Ainsi, la suite  $(u_n)$  est définie par  $u_0 = 3$  et pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $u_{n+1} = f(u_n)$ .

1. Montrer que la fonction  $f$  est croissante sur l'intervalle  $] -\infty ; 5[$ .
2. Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel  $n$  on a :

$$1 \leq u_{n+1} \leq u_n \leq 4.$$

3. (a) Soit  $x$  un réel de l'intervalle  $] -\infty ; 5[$ .  
Prouver l'équivalence suivante :

$$f(x) = x \iff x^2 - 5x + 4 = 0.$$

- (b) Résoudre  $f(x) = x$  dans l'intervalle  $] -\infty ; 5[$ .
4. Le comportement de la suite serait-il identique en choisissant comme terme initial  $u_0 = 4$  au lieu de  $u_0 = 3$  ?

L'objectif de cet exercice est de conjecturer en partie A puis de démontrer en partie B le comportement d'une suite.

Les deux parties peuvent cependant être traitées de manière indépendante.

On considère la suite  $(u_n)$  définie par  $u_0 = 3$  et pour tout  $n \in \mathbb{N}$  :

$$u_{n+1} = \frac{4}{5 - u_n}.$$

### Partie A

1. Recopier et compléter la fonction Python suivante `suite(n)` qui prend comme paramètre le rang  $n$  et renvoie la valeur du terme  $u_n$ .

```
def suite(n):
    u = ...
    for i in range(n) :
        ...
    return u
```

2. L'exécution de `suite(2)` renvoie 1.3333333333333333.  
Effectuer un calcul pour vérifier et expliquer cet affichage.
3. À l'aide des affichages ci-dessous, émettre une conjecture sur le sens de variation et une conjecture sur la convergence de la suite  $(u_n)$ .

```
» suite(2)
1.3333333333333333
» suite(5)
1.0058479532163742
» suite(10)
1.0000057220349845
» suite(20)
1.0000000000005457
```

### Partie B

On considère la fonction  $f$  définie et dérivable sur l'intervalle  $] -\infty ; 5[$  par :

$$f(x) = \frac{4}{5 - x}.$$

Ainsi, la suite  $(u_n)$  est définie par  $u_0 = 3$  et pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $u_{n+1} = f(u_n)$ .

1. Montrer que la fonction  $f$  est croissante sur l'intervalle  $] -\infty ; 5[$ .
2. Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel  $n$  on a :

$$1 \leq u_{n+1} \leq u_n \leq 4.$$

3. (a) Soit  $x$  un réel de l'intervalle  $] -\infty ; 5[$ .  
Prouver l'équivalence suivante :

$$f(x) = x \iff x^2 - 5x + 4 = 0.$$

- (b) Résoudre  $f(x) = x$  dans l'intervalle  $] -\infty ; 5[$ .
4. Le comportement de la suite serait-il identique en choisissant comme terme initial  $u_0 = 4$  au lieu de  $u_0 = 3$  ?