### Convexité - Analyse de données

**Exercice 1**

(a) Cette fonction est concave car sa courbe représentative est située au-dessus de ses tangentes. On peut également observer que la fonction "tourne sa concavité vers le bas" (forme de cloche inversée).
(b) Cette fonction est concave car sa courbe représentative est située au-dessus de ses tangentes. La fonction racine carrée a une dérivée seconde négative sur $\mathbb{R}_+^*$.

**Exercice 2**

(a) La fonction $f(x) = x^2 - 1$ est convexe sur $\mathbb{R}$ car il s'agit d'une parabole tournée vers le haut.
(b) La fonction $f(x) = -x^2 + 1$ est concave sur $\mathbb{R}$ car il s'agit d'une parabole tournée vers le bas.
(c) La fonction $f(x) = \frac{x^3}{3}$ est :

- concave sur $]-\infty; 0]$
- convexe sur $[0; +\infty[$
- possède un point d'inflexion en $x = 0$

**Exercice 3**

(a)

- $f''(x) < 0$ sur $]-\infty; 0[$ donc $f$ est concave sur $]-\infty; 0[$
- $f''(x) > 0$ sur $]0; 1[$ donc $f$ est convexe sur $]0; 1[$
- $f''(x) < 0$ sur $]1; +\infty[$ donc $f$ est concave sur $]1; +\infty[$
- Points d'inflexion en $x = 0$ et $x = 1$

(b)

- $f''(x) < 0$ sur $]-\infty; \frac{1}{4}[$ donc $f$ est concave sur $]-\infty; \frac{1}{4}[$
- $f''(x) > 0$ sur $]\frac{1}{4}; +\infty[$ donc $f$ est convexe sur $]\frac{1}{4}; +\infty[$
- Point d'inflexion en $x = \frac{1}{4}$

**Exercice 4**

1. **Faux.** Si $f'$ est croissante sur $[4; 7]$, alors $f''(x) \geq 0$ sur cet intervalle, donc $f$ est **convexe** sur $[4; 7]$ (et non concave).
2. **Vrai.** Si $f''(x) > 0$ pour tout $x \in [-1; 2]$, alors par définition, $f$ est convexe sur $[-1; 2]$.

**Exercice 5**

1. Pour tout réel $x$, $e^{-x+1} > 0$. Donc $f''(x) > 0$. Ainsi, $f$ est convexe.
2. Comme $f$ est convexe, la courbe représentative de la fonction est au dessus de ces tangentes et en dessous de ces sécantes.

**Exercice 6**

On remarque que sur $]-\infty; 0.5]$, $f'$ est croissante, donc $f$ est convexe.
De même, sur $]0.5; +\infty[$, $f'$ est décroissante, donc $f$ est concave.

**Exercice 7**

Sur $]-\infty; -5]$ et $[1; +infty[$, $f''(x) \leq 0$, donc $f$ est concave.
A l'inverse, sur $[-5; 1]$, $f''(x) \geq 0$, donc $f$ est convexe.

### Convexité - Par le calcul

**Exercice 8**

1. On calcule $f'(x)$ avec $f(x) = (x - 2,5)e^{0,4x}$ :

$$\begin{aligned} f'(x) &= 1 \cdot e^{0,4x} + (x - 2,5) \cdot 0,4e^{0,4x} \\ &= e^{0,4x} + 0,4(x - 2,5)e^{0,4x} \\ &= e^{0,4x}[1 + 0,4(x - 2,5)] \\ &= e^{0,4x}[1 + 0,4x - 1] \\ &= 0,4xe^{0,4x} \end{aligned}$$

2. On calcule $f''(x)$ :

$$\begin{aligned} f''(x) &= 0,4e^{0,4x} + 0,4x \cdot 0,4e^{0,4x} \\ &= 0,4e^{0,4x}(1 + 0,4x) \\ &= 0,4e^{0,4x} \cdot \frac{10 + 4x}{10} \\ &= \frac{4}{25}e^{0,4x}(2,5 + x) \end{aligned}$$

3. Étude de convexité :

$$\begin{aligned} f''(x) &\leq 0 \\ \frac{4}{25}e^{0,4x}(2,5 + x) &\leq 0 \\ 2,5 + x \leq 0 & \quad (\text{car } \frac{4}{25}e^{0.4x} > 0) \\ x &\leq -2,5 \end{aligned}$$

Donc $f$ est concave sur $]-5; -2.5]$ et convexe sur $[-2,5; 7]$.

**Exercice 9**

1. On a $f'(x) = \frac{1}{x-1}$, donc :

$$f''(x) = \frac{d}{dx}\left(\frac{1}{x-1}\right) = \frac{-1}{(x-1)^2}$$

2. Pour tout $x \in [0,5;12]$, on a $x-1>0$, donc $(x-1)^2>0$.
Par conséquent, $f''(x) = \frac{-1}{(x-1)^2} < 0$ pour tout $x \in [0,5;12]$.
La fonction $f$ est donc concave sur $[0,5;12]$.

**Exercice 10** Logique

1. Cette proposition est **fausse**.
Contre-exemple : $f(x) = -x^2$ est une fonction polynôme du second degré, mais elle est concave sur $\mathbb{R}$ (et non convexe).
2. La négation de cette proposition est : "Il existe au moins une fonction polynôme du second degré qui n'est pas convexe sur $\mathbb{R}$."
Cette négation est **vraie** (voir contre-exemple ci-dessus).

**Exercice 11**

(a) $f(x) = xe^{-x}$ définie sur $\mathbb{R}$
$f'(x) = e^{-x} + x(-e^{-x}) = e^{-x}(1-x)$
$f''(x) = -e^{-x}(1-x) + e^{-x}(-1) = e^{-x}(x-2)$
Étude du signe de $f''(x)$ :
- $e^{-x} > 0$ pour tout $x$
- $x-2=0 \Leftrightarrow x=2$
- Sur $]-\infty;2[$, $f''(x)<0$ donc $f$ est concave
- Sur $]2;+\infty[$, $f''(x)>0$ donc $f$ est convexe
- Point d'inflexion en $x=2$

(b) $g(x) = \sqrt{x} - 3e^{x-3}$ définie sur $\mathbb{R}_+^*$
$g'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} - 3e^{x-3}$
$g''(x) = -\frac{1}{4x^{3/2}} - 3e^{x-3}$
Pour tout $x>0$ :
- $-\frac{1}{4x^{3/2}} < 0$
- $-3e^{x-3} < 0$

Donc $g''(x) < 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$.
La fonction $g$ est concave sur $\mathbb{R}_+^*$.

## Point d'inflexion et convexité - Analyse

**Exercice 12**

**Correction :**

1. Le point A est un point d'inflexion de $\mathcal{C}_f$ car :
   - La tangente traverse la courbe en ce point
   - La courbe change de concavité de part et d'autre du point A
   - Visuellement, on observe que la courbe passe d'une forme concave à une forme convexe
2. D'après le graphique :
   - Sur $[-3;-1]$, la courbe est au-dessous de ses tangentes, donc $f$ est concave
   - Sur $[-1;1]$, la courbe est au-dessus de ses tangentes, donc $f$ est convexe

**Exercice 13**

1. **Vrai.** $f''(x)>0$ sur $]-1;2[$ donc $f$ est convexe sur $[-1;2]$.
2. **Vrai.** $f''(x)<0$ sur $]-7;-1[$ donc $f$ est concave sur $[-5;0] \subset ]-7;-1[$.
3. **Vrai.** $f''(-1)=0$ et $f''$ change de signe en $x=-1$, donc A est un point d'inflexion.
4. **Faux.** $f''(2)=0$ mais $f''$ ne change pas de signe en $x=2$ (reste positive), donc B n'est pas un point d'inflexion.

**Exercice 14**

1. D'après le graphique :
   - $f$ est convexe sur $]-\infty;6]$
   - $f$ est concave sur $[6;+\infty[$.
2. Le points d'inflexion est en $x=3$.

**Exercice 15**

1. $f'(0)=3$, $f'(1)=0$ et $f'(3)=0$.
2. $f$ semble concave sur $]-1;2[$ et convexe sur $]2;+\infty[$.
3. $I(2;0.5)$

**Exercice 16**

1. **Faux.** Il y a deux tangentes parallèles à l'axe des abscisses car $f'$ s'annule deux fois.
2. **Vraie.** Sur l'intervalle $[5;15]$, $f'$ est croissante donc $f$ est convexe.
3. **Faux.** La fonction dérivée ne change de variation qu'une seule fois, donc $f''$ ne change de signe qu'une seule fois également.

## Point d'inflexion et convexité - Calculs

**Exercice 17**

Partie A : conjectures

1. D'après le graphique, $f$ semble concave sur $]-\infty;2[$ et convexe sur $]2;+\infty[$.
2. $C_f$ semble avoir un point d'inflexion en $x=2$.

Partie B : preuves

1. $f'(x) = 7e^{-x} + 7x(-e^{-x}) = 7e^{-x}(1-x)$
Étude du signe de $f'(x)$ :
   - $7e^{-x} > 0$ pour tout $x$
   - $1-x=0 \Leftrightarrow x=1$
   - $f'(x)>0$ sur $]-\infty;1[$ donc $f$ croissante
   - $f'(x)<0$ sur $]1;+\infty[$ donc $f$ décroissante
   - Maximum en $x=1$

2. (a) $f''(x) = 7(-e^{-x})(1-x) + 7e^{-x}(-1) = 7e^{-x}(x-2)$

(b) Étude du signe de $f''(x)$ :

— $7e^{-x} > 0$ pour tout $x$

— $x - 2 = 0 \Leftrightarrow x = 2$

— Sur $]-\infty; 2[$, $f''(x) < 0$ donc $f$ concave

— Sur $]2; +\infty[$, $f''(x) > 0$ donc $f$ convexe

— Point d'inflexion en $x = 2$, $f(2) = 14e^{-2}$

**Exercice 18** Logique

1. Cette proposition est **vraie**.

Si $A(a; f(a))$ est un point d'inflexion de $\mathcal{C}_f$, alors la concavité de la courbe change en ce point. Cela signifie que la dérivée seconde $f''$ change de signe en $a$. Pour une fonction deux fois dérivable, si $f''$ change de signe en $a$, alors nécessairement $f''(a) = 0$ (par continuité de $f''$).

2. La réciproque est : « Si $f''(a) = 0$ alors le point $A(a; f(a))$ est un point d'inflexion de $\mathcal{C}_f$ »

Cette réciproque est **fausse**.

**Contre-exemple :** Considérons $f(x) = x^4$ et $a = 0$. On a $f'(x) = 4x^3$ et $f''(x) = 12x^2$. Donc $f''(0) = 0$, mais $f''(x) = 12x^2 \geq 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. La fonction $f''$ ne change pas de signe en $0$, donc le point $(0; 0)$ n'est pas un point d'inflexion.

**Remarque :** Pour qu'un point soit d'inflexion, il faut que $f''(a) = 0$ ET que $f''$ change de signe en $a$.

**Exercice 19**

1. $f'(x) = 3x^2 - 30x + 75$

$f''(x) = 6x - 30$

2. **Variation de $f'$**

$f''(x) = 0 \Leftrightarrow 6x - 30 = 0 \Leftrightarrow x = 5$

$f''(x) < 0$ pour $x < 5$ et $f''(x) > 0$ pour $x > 5$

Donc $f'$ est décroissante sur $[0; 5]$ et croissante sur $[5; 10]$.

**Signe de $f'$ sur $[0; 10]$ :**

$f'(x) = 3x^2 - 30x + 75 = 3(x^2 - 10x + 25) = 3(x-5)^2$

Donc $f'(x) \geq 0$ pour tout $x \in [0; 10]$, avec $f'(x) = 0$ uniquement pour $x = 5$.

3. Puisque $f'(x) \geq 0$ sur $[0; 10]$ (avec $f'(x) = 0$ seulement en $x = 5$), la fonction $f$ est croissante sur $[0; 10]$.

4. Un point d'inflexion correspond à un point où $f''$ s'annule et change de signe.

$f''(x) = 6x - 30 = 0 \Leftrightarrow x = 5$

La dérivée seconde change bien de signe en $x = 5$.

$f(5) = 5^3 - 15 \cdot 5^2 + 75 \cdot 5 = 125 - 375 + 375 = 125$

La courbe $\mathcal{C}_f$ admet un point d'inflexion de coordonnées $(5; 125)$.

**Exercice 20**

$f(x) = x^3 - 21x^2 + 19$

$f'(x) = 3x^2 - 42x$

$f''(x) = 6x - 42 = 6(x - 7)$

$f''(x) = 0 \Leftrightarrow x = 7$

$f''$ change de signe en $x = 7$ donc il y a un point d'inflexion.

Coordonnées du point d'inflexion : $(7; f(7)) = (7; 7^3 - 21 \cdot 7^2 + 19) = (7; 343 - 1029 + 19) = (7; -667)$

**Exercice 21**

$f(x) = x^4 - 2x^3 - 120x^2 + 3$

$f'(x) = 4x^3 - 6x^2 - 240x$

$f''(x) = 12x^2 - 12x - 240 = 12(x^2 - x - 20) = 12(x - 5)(x + 4)$

$f''(x) = 0 \Leftrightarrow x = 5$ ou $x = -4$

Tableau de signes de $f''(x)$ :

| $x$ | $-\infty$ | | $-4$ | | $5$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f''(x)$ | | $+$ | $0$ | $-$ | $0$ | $+$ | |

Points d'inflexion :

— $x = -4$ : $f(-4) = 256 + 128 - 1920 + 3 = -1533$

— $x = 5$ : $f(5) = 625 - 250 - 3000 + 3 = -2622$

Coordonnées : $(-4; -1533)$ et $(5; -2622)$

**Exercice 22**

1. $f'(x) = 0,375x^2 - 1,5x$

2. $f'(x) = 0 \Leftrightarrow 0,375x(x - 4) = 0 \Leftrightarrow x = 0$ ou $x = 4$

La courbe admet des tangentes horizontales en $x = 0$ et $x = 4$.

3. Tableau de signes de $f'(x)$ :

| $x$ | $0$ | | $4$ | | $5$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | $0$ | $-$ | $0$ | $+$ | |

Variations de $f$ :

| $x$ | $0$ | $4$ | $5$ |
|---|---|---|---|
| $f$ | $4$ $\searrow$ | $0$ | $\nearrow$ $1.625$ |

4. $f''(x) = 0,75x - 1,5 = 0,75(x - 2)$

$f''(x) = 0 \Leftrightarrow x = 2$

$f''$ change de signe en $x = 2$ donc il y a un point d'inflexion.

$f(2) = 0,125 \cdot 8 - 0,75 \cdot 4 + 4 = 1 - 3 + 4 = 2$

Point d'inflexion : $I(2; 2)$

5. $f'(2) = 0,375 \cdot 4 - 1,5 \cdot 2 = 1,5 - 3 = -1,5$
   Équation de la tangente : $y = -1,5(x-2) + 2 = -1,5x + 5$
6. Comme $f$ est convexe après le point d'inflexion et concave avant, la tangente traverse la courbe au point d'inflexion.

## Exercice 23

On a : $f(x) = (3,6x + 2,4)e^{-0,6x}$
$f'(x) = 3,6e^{-0,6x} + (3,6x + 2,4)(-0,6)e^{-0,6x} = e^{-0,6x}[3,6 - 0,6(3,6x + 2,4)] = e^{-0,6x}(2,16 - 2,16x)$
$f''(x) = -0,6e^{-0,6x}(2,16 - 2,16x) + e^{-0,6x}(-2,16) = e^{-0,6x}[-1,296 + 1,296x - 2,16] = e^{-0,6x}(1,296x - 3,456)$

1. $f''(x) = 0 \Leftrightarrow 1,296x - 3,456 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{3,456}{1,296} = \frac{8}{3}$
   $f''$ change de signe en $x = \frac{8}{3}$ donc **l'affirmation est vraie**.
2. Sur $[0;1]$, $x < \frac{8}{3}$ donc $f''(x) < 0$, donc $f$ est concave sur $[0;1]$.
   **L'affirmation est fausse.**

## Exercice 24

1. $f(x) = x^3 - 5x^2 + 4x + 3$
   $f'(x) = 3x^2 - 10x + 4$
   $f''(x) = 6x - 10$
   $f''(x) = 0 \Leftrightarrow x = \frac{5}{3}$
   Point d'inflexion : $\left(\frac{5}{3}; f\left(\frac{5}{3}\right)\right) = \left(\frac{5}{3}; \frac{49}{27}\right)$
2. $f(x) = \frac{1}{x} + \frac{3}{x} = \frac{4}{x}$
   $f'(x) = -\frac{4}{x^2}$
   $f''(x) = \frac{8}{x^3}$
   $f''(x) = 0$ n'a pas de solution dans $\mathbb{R}\backslash\{0\}$.
   Pas de point d'inflexion.
3. $f(x) = \frac{x}{2}$
   $f''(x) = 0$ pour tout $x$.
   Pas de point d'inflexion.
4. $f(x) = (x+1)e^{-x}$
   $f'(x) = e^{-x} - (x+1)e^{-x} = e^{-x}(-x)$
   $f''(x) = -e^{-x} + xe^{-x} = e^{-x}(x-2)$
   $f''(x) = 0 \Leftrightarrow x = 2$
   Point d'inflexion : $(2; 3e^{-2})$

## Exercice 25

D'après les tableaux, on peut déduire que $f$ change de concavité en $x = 2$ (car $f'$ y admet un maximum). Il faut tracer une courbe qui :

- Passe par les points $(0,4)$, $(4,36)$, $(7,-45)$, $(-3,85)$
- Est croissante sur $[-3,0]$ et $[4,7]$, décroissante sur $[0,4]$
- Est concave sur $[-3,2]$ et convexe sur $[2,7]$
- Admet un point d'inflexion en $x = 2$

## Exercice 26

D'après les tableaux, on peut déduire que :

- $f$ est décroissante sur $[-9,-6]$ et $[0,3]$, croissante sur $[-6,0]$ et $[3,+\infty[$
- $f$ change de concavité en $x = -3$ (point d'inflexion)
- $f$ est concave sur $[-9,-3]$ et convexe sur $[-3,+\infty[$
- Points remarquables : $(-9,-2)$, $(-6,106)$, $(0,-2)$, $(3,106)$

# Inégalités de convexité

## Exercice 27

a) $f(x) = e^x$, $f'(x) = e^x$
Au point d'abscisse 0 : $f(0) = 1$, $f'(0) = 1$
Équation de la tangente : $y = 1 \cdot (x-0) + 1 = x + 1$

b) $f(x) = e^x$ est convexe sur $\mathbb{R}$ car $f''(x) = e^x > 0$.
Pour une fonction convexe, la courbe est au-dessus de ses tangentes.
Donc pour tout $x \in \mathbb{R}$ : $e^x \geq x + 1$, soit $1 + x \leq e^x$.

## Exercice 28

Soit $f$ la fonction définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par $f(x) = x + \dfrac{1}{x}$.

1. **Montrer que $f$ est convexe sur $]0;+\infty[$.**
   Pour étudier la convexité de $f$, on calcule $f''(x)$.
   $f'(x) = 1 - \dfrac{1}{x^2}$
   $f''(x) = \dfrac{2}{x^3}$
   Sur $]0;+\infty[$, on a $x > 0$, donc $x^3 > 0$, d'où $f''(x) = \dfrac{2}{x^3} > 0$.
   Puisque $f''(x) > 0$ sur $]0;+\infty[$, la fonction $f$ est convexe sur $]0;+\infty[$.
2. **Déterminer une équation de la tangente $T$ à $\mathcal{C}_f$ en son point d'abscisse $1$.**
   Pour $x = 1$ : $f(1) = 1 + \dfrac{1}{1} = 2$
   $f'(1) = 1 - \dfrac{1}{1^2} = 0$
   L'équation de la tangente $T$ au point d'abscisse $1$ est : $y - f(1) = f'(1)(x-1)$
   $y - 2 = 0 \cdot (x-1)$
   Donc $T : y = 2$.

3. **En déduire que pour tout réel $x$ de $]0;+\infty[$, on a : $x+\frac{1}{x}\geq 2$.**

   Puisque $f$ est convexe sur $]0;+\infty[$, sa courbe représentative est située au-dessus de toutes ses tangentes.

   En particulier, pour la tangente $T : y=2$ au point d'abscisse $1$, on a : $f(x)\geq 2$ pour tout $x\in]0;+\infty[$

   Donc $x+\dfrac{1}{x}\geq 2$ pour tout $x\in]0;+\infty[$.

   L'égalité a lieu pour $x=1$.

## Exercice 29

Soit $f$ définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=x^6+3x^2+6$.

1. **Montrer que $f$ est convexe sur $\mathbb{R}$.**

   On calcule $f''(x)$.

   $f'(x)=6x^5+6x$

   $f''(x)=30x^4+6$

   Pour tout $x\in\mathbb{R}$, on a $x^4\geq 0$, donc $30x^4\geq 0$.

   Par conséquent, $f''(x)=30x^4+6\geq 6>0$.

   Puisque $f''(x)>0$ sur $\mathbb{R}$, la fonction $f$ est convexe sur $\mathbb{R}$.

2. **Déterminer une équation de la tangente $T$ à $\mathcal{C}_f$ en son point d'abscisse $1$.**

   Pour $x=1$ : $f(1)=1^6+3\cdot1^2+6=1+3+6=10$

   $f'(1)=6\cdot1^5+6\cdot1=6+6=12$

   L'équation de la tangente $T$ au point d'abscisse $1$ est : $y-f(1)=f'(1)(x-1)$ $y-10=12(x-1)$ $y=12x-12+10$

   Donc $T : y=12x-2$.

3. **En déduire que pour tout réel $x$ : $x^6+3x^2+6\geq 12x-2$.**

   Puisque $f$ est convexe sur $\mathbb{R}$, sa courbe représentative est située au-dessus de toutes ses tangentes.

   En particulier, pour la tangente $T : y=12x-2$ au point d'abscisse $1$, on a : $f(x)\geq 12x-2$ pour tout $x\in\mathbb{R}$

   Donc $x^6+3x^2+6\geq 12x-2$ pour tout $x\in\mathbb{R}$.

   L'égalité a lieu pour $x=1$.

### Exercices supplémentaires

## Exercice 30

**Choisir la ou les bonnes réponses.**

1. **Parmi toutes les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ et dont l'expression est donnée ci-dessous, la seule qui est convexe sur $]0;+\infty[$ est :**

   Calculons $f''(x)$ pour chaque fonction :

   a) $f(x)=-2e^{-2x}$ : $f'(x)=4e^{-2x}$, $f''(x)=-8e^{-2x}<0$ (concave)

   b) $g(x)=x^4-2x^3+3$ : $g'(x)=4x^3-6x^2$, $g''(x)=12x^2-12x=12x(x-1)$ Sur $]0;+\infty[$ : $g''(x)<0$ sur $]0;1[$ et $g''(x)>0$ sur $]1;+\infty[$ (ni convexe ni concave)

   c) $h(x)=x^3-6x+1$ : $h'(x)=3x^2-6$, $h''(x)=6x>0$ sur $]0;+\infty[$ (convexe)

   d) $p(x)=-xe^x$ : $p'(x)=-e^x-xe^x=-e^x(1+x)$, $p''(x)=-e^x(1+x)-e^x=-e^x(2+x)<0$ sur $]0;+\infty[$ (concave)

   **Réponse : c)**

2. **La fonction $g$ définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x)=x^3-9x$ est convexe sur l'intervalle :**

   $g'(x)=3x^2-9$ et $g''(x)=6x$

   $g''(x)>0 \Leftrightarrow 6x>0 \Leftrightarrow x>0$

   Donc $g$ est convexe sur $]0;+\infty[$.

   **Réponse : b)**

3. **La fonction $f$ définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=-xe^{-x}$ :**

   $f'(x)=-e^{-x}+xe^{-x}=e^{-x}(x-1)$

   $f''(x)=-e^{-x}(x-1)+e^{-x}=e^{-x}(1-(x-1))=e^{-x}(2-x)$

   Sur $[0;1]$ : $2-x\geq 1>0$, donc $f''(x)>0$ (convexe)

   Sur $[0;+\infty[$ : $f''(x)>0$ pour $x<2$ et $f''(x)<0$ pour $x>2$

   **Réponse : d)**

## Exercice 31

Soit $f$ une fonction définie et dérivable sur $I=[0.5;+\infty[$ telle que, $f'(x)=\dfrac{-x+3}{x}$.

**La courbe représentative de $f$ est-elle située en dessous de chacune de ses tangentes ?**

Pour répondre à cette question, étudions la convexité de $f$ en calculant $f''(x)$.

$f'(x)=\dfrac{-x+3}{x}=-1+\dfrac{3}{x}$

$f''(x)=-\dfrac{3}{x^2}$

Sur $I=[0.5;+\infty[$, on a $x>0$, donc $x^2>0$, d'où $f''(x)=-\dfrac{3}{x^2}<0$.

Puisque $f''(x)<0$ sur $I$, la fonction $f$ est **concave** sur $I$.

Par conséquent, la courbe représentative de $f$ est située **au-dessus** de chacune de ses tangentes.

**Réponse : Non**, la courbe n'est pas située en dessous de ses tangentes.

## Exercice 32

On injecte à un patient un médicament puis on mesure régulièrement, pendant 15 heures, la concentration, en grammes par litre, de ce médicament dans le sang.

On admet que la concentration est modélisée par la fonction $f$ définie sur $[0;15]$ par $f(x)=$

$(x+2)e^{-0,5x}$, où $x$ représente le nombre d'heures écoulées depuis l'instant initial et $f(x)$ la concentration, en grammes par litre, du médicament dans le sang.

1. **On note $f'$ la fonction dérivée de la fonction $f$. Calculer $f'(x)$ et en déduire le tableau de variation de la fonction $f$ sur $[0;15]$.**

   $f(x) = (x+2)e^{-0,5x}$

   En appliquant la règle de dérivation d'un produit : $f'(x) = 1 \cdot e^{-0,5x} + (x+2) \cdot (-0,5)e^{-0,5x}$ $f'(x) = e^{-0,5x} - 0,5(x+2)e^{-0,5x}$ $f'(x) = e^{-0,5x}[1 - 0,5(x+2)]$ $f'(x) = e^{-0,5x}(1 - 0,5x - 1)$ $f'(x) = e^{-0,5x}(-0,5x)$ $f'(x) = -0,5xe^{-0,5x}$

   Étude du signe de $f'(x)$ : - $e^{-0,5x} > 0$ pour tout $x$ - $-0,5x \leq 0$ pour $x \geq 0$ - $f'(x) = 0$ pour $x = 0$ - $f'(x) < 0$ pour $x > 0$

   Valeurs particulières : - $f(0) = 2e^0 = 2$ - $f(15) = 17e^{-7,5} \approx 0,009$

   Tableau de variations :

   | $x$ | $0$ | | $15$ |
   |---|---|---|---|
   | $f'(x)$ | $0$ | $-$ | |
   | $f(x)$ | $2$ | $\searrow$ | $17e^{-7,5}$ |

2. **Montrer que pour tout réel $x$ de $[0;15]$ : $f''(x) = (0,25x - 0,5)e^{-0,5x}$**

   À partir de $f'(x) = -0,5xe^{-0,5x}$, calculons $f''(x)$ :

   $f''(x) = -0,5[1 \cdot e^{-0,5x} + x \cdot (-0,5)e^{-0,5x}]$ $f''(x) = -0,5[e^{-0,5x} - 0,5xe^{-0,5x}]$ $f''(x) = -0,5e^{-0,5x}[1 - 0,5x]$ $f''(x) = -0,5e^{-0,5x} + 0,25xe^{-0,5x}$ $f''(x) = e^{-0,5x}(0,25x - 0,5)$

3. **Étudier la convexité de la fonction $f$ sur l'intervalle $[0;15]$ et préciser l'abscisse d'un éventuel point d'inflexion.**

   Étude du signe de $f''(x) = e^{-0,5x}(0,25x - 0,5)$ : - $e^{-0,5x} > 0$ pour tout $x$ - $0,25x - 0,5 = 0 \Leftrightarrow x = 2$ - $0,25x - 0,5 < 0$ pour $x < 2$ - $0,25x - 0,5 > 0$ pour $x > 2$

   Donc : - $f''(x) < 0$ sur $[0;2[$ : $f$ est concave - $f''(x) > 0$ sur $]2;15]$ : $f$ est convexe - $f''(2) = 0$ : point d'inflexion en $x = 2$

4. **Au bout de combien d'heures la baisse de concentration ralentit-elle ?**

   La baisse de concentration ralentit lorsque la fonction passe de concave à convexe, c'est-à-dire au point d'inflexion.

   **Réponse : Au bout de 2 heures.**

**Exercice 33**

On considère la fonction $f$ définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = x^5 + \frac{25}{3}x^4 + \frac{20}{3}x^3 - 80x^2 + 8x + 1$$

1. **Montrer que, pour tout $x$ réel, $f''(x) = 20(x-1)(x+2)(x+4)$.**

   Calculons $f'(x)$ puis $f''(x)$ :

   $f'(x) = 5x^4 + \frac{25 \cdot 4}{3}x^3 + \frac{20 \cdot 3}{3}x^2 - 80 \cdot 2x + 8$ $f'(x) = 5x^4 + \frac{100}{3}x^3 + 20x^2 - 160x + 8$

   $f''(x) = 20x^3 + \frac{100 \cdot 3}{3}x^2 + 40x - 160$ $f''(x) = 20x^3 + 100x^2 + 40x - 160$ $f''(x) = 20(x^3 + 5x^2 + 2x - 8)$

   Il faut factoriser $x^3 + 5x^2 + 2x - 8$.

   Testons $x = 1$ : $1 + 5 + 2 - 8 = 0$. Donc $(x-1)$ est un facteur.

   $x^3 + 5x^2 + 2x - 8 = (x-1)(x^2 + 6x + 8)$

   Factorisons $x^2 + 6x + 8$ : $\Delta = 36 - 32 = 4$ $x^2 + 6x + 8 = (x+2)(x+4)$

   Donc $f''(x) = 20(x-1)(x+2)(x+4)$.

2. **Étudier le signe de $f''(x)$ et en déduire l'étude complète de la convexité de $f$.**

   $f''(x) = 20(x-1)(x+2)(x+4)$

   Les racines de $f''(x)$ sont $x = -4$, $x = -2$ et $x = 1$.

   Tableau de signes : A faire

   Conclusion :

   — $f$ est concave sur $]-\infty;-4[$ et $]-2;1[$

   — $f$ est convexe sur $]-4;-2[$ et $]1;+\infty[$

   — Points d'inflexion : $x = -4$, $x = -2$, $x = 1$

3. **Donner une équation de la tangente à $C_f$, courbe représentative de $f$, au point d'abscisse $-1$.**

   Calculons $f(-1)$ : $f(-1) = (-1)^5 + \frac{25}{3}(-1)^4 + \frac{20}{3}(-1)^3 - 80(-1)^2 + 8(-1) + 1$ $f(-1) = -1 + \frac{25}{3} - \frac{20}{3} - 80 - 8 + 1$ $f(-1) = \frac{25-20}{3} - 88 = \frac{5}{3} - 88 = \frac{5-264}{3} = \frac{-259}{3}$

   Calculons $f'(-1)$ : $f'(-1) = 5(-1)^4 + \frac{100}{3}(-1)^3 + 20(-1)^2 - 160(-1) + 8$ $f'(-1) = 5 - \frac{100}{3} + 20 + 160 + 8$ $f'(-1) = 193 - \frac{100}{3} = \frac{579-100}{3} = \frac{479}{3}$

   L'équation de la tangente au point d'abscisse $-1$ est : $y - f(-1) = f'(-1)(x - (-1))$ $y + \frac{259}{3} = \frac{479}{3}(x+1)$ $y = \frac{479}{3}x + \frac{479}{3} - \frac{259}{3}$ $y = \frac{479}{3}x + \frac{220}{3}$

   Donc $T : y = \frac{479}{3}x + \frac{220}{3}$.