NOM Prénom : 2023/2024

14/12/2023

Devoir Surveillé

EDS 1ère

Conditions d'évaluation

Calculatrice : autorisée.   Durée : 1h40

Compétences évaluées :

- ☐ Calculer et utiliser les dérivées des fonctions usuelles (x, x^2, x^3, racine, inverse, polynôme, x^n).
- ☐ Calculer la fonction dérivée d'un produit de fonctions.
- ☐ Calculer la fonction dérivée d'un quotient de fonctions.
- ☐ Déterminer la dérivée de $x \mapsto g(ax+b)$.
- ☐ Résoudre des équations du second degré.
- ☐ Factoriser une fonction polynôme du second degré.
- ☐ Déterminer le signe d'une fonction polynôme du second degré.
- ☐ Utiliser un ou plusieurs registres pour définir une suite.
- ☐ Proposer et modéliser une situation avec des suites.
- ☐ Déterminer une relation pour une suite définie par un motif géométrique.
- ☐ Calculer les termes d'une suite définie explicitement ou par récurrence.

Remarques importantes :

- Le sujet comporte 6 exercices.
  Vous pouvez les traiter dans l'ordre que vous souhaitez.
  Assurez-vous d'avoir le sujet complet avant de commencer.
- Le sujet est sur 40 points. Le barème est donné à titre indicatif.
- **Pensez à inscrire votre nom sur chaque page du sujet et à le rendre avec la copie.**
- Toutes réponses, même incomplètes, seront prises en compte dans la notation.
- Vous pouvez utiliser le dos du sujet comme brouillon

Exercice 1 — Second degré *(6 points)*

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = x^2 + 2x - 8$$

1. Résoudre $f(x) = 0$
2. Dresser le tableau de signe de la fonction f.
3. En déduire les solutions de l'inéquation $f(x) < 0$.

Exercice 2 **QCM** *(5 points)*

Ceci est un questionnaire a choix multiples. Pour chaque question, il y a une ou plusieurs bonnes réponses. Une bonne réponse rapporte un point, un mauvaise réponse enlève un demi point et une absence de réponse ne rapporte ni n'enlève aucun point.

1. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2 + x + 1$.
   Alors f est aussi dérivable sur $\mathbb{R}$ et :
   ① $f'(x) = 2x + 1$
   ② $f'(-1) = -1$
   ③ $f'(x) = 2x$
   ④ $f'(0) = 0$
2. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = -x^3$.
   Alors f est aussi dérivable sur $\mathbb{R}$ et :
   ① $f'(x) = -3x^2$
   ② $f'(1) = -1$
   ③ $f'(x) = -x^2$
   ④ $f'(0) = 0$
3. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = g(4x + 2)$.
   Alors f est aussi dérivable sur $\mathbb{R}$ et :
   ① $f'(x) = g'(4x + 2)$
   ② $f'(1) = -4g'(4x + 2)$
   ③ $f'(x) = 4g'(4x + 2)$
   ④ $f'(0) = 4g'(x)$

Exercice 3 **Étude d'une suite** *(10 points)*

Soit (u_n) la suite définie sur $\mathbb{N}$ par $u_n = n^3 + n^2 + 10n$.

1. La suite (u_n) définie ci-dessus est-elle définie explicitement ou par récurrence ? Justifier.
2. Calculer les quatre premiers termes de la suite. Émettre une conjecture du sens de variation de la suite.
3. Nous allons démontrer votre conjecture :
   (a) Démontrer que $u_{n+1} - u_n = 3n^2 + 5n + 12$.
   (b) Soit f la fonction polynôme du second degré définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = 3x^2 + 5x + 12$.
   Dresser le tableau de signe de la fonction f.
   (c) En déduire le signe de $u_{n+1} - u_n$ pour tout entier naturel n.
   (d) En déduire les variations de la suite (u_n).

Exercice 4 **Calcul de dérivées** *(11 points)*

Pour chacune des fonctions f ci-dessous, donner sa fonction dérivée f' sous forme simplifiée.

On détaillera les calculs et donnera les formules comme vu en cours.

1. $f(x) = 5x^6 + 4x^3 + 57$
2. $f(x) = (3x^2 - 2)(6x - 7)$
3. $f(x) = x\sqrt{x}$
4. $f(x) = \sqrt{2}x^3 + 3\sqrt{x}$
5. $f(x) = \dfrac{x^2}{2x+1}$

Exercice 5 **Antibiotique** *(4 points)*

On étudie la concentration dans le sang en fonction du temps d'un antibiotique injecté en une seule prise à un patient. On modélise cette concentration par la fonction g définie sur l'intervalle $[0; 10]$ par :

$$g(t) = \frac{4t}{t^2 + 1}$$

$g(t)$ représente la concentration en mg.L^{-1} de l'antibiotique lorsque t heures se sont écoulées.

1. Dans quel intervalle de temps la concentration sera-t-elle supérieure ou égale à 1,6mg.L^{-1} ?
2. La concentration peut-elle être strictement supérieure à 2mg.L^{-1} ?
3. Question indépendante : Calculer la dérivée de g sur $\mathbb{R}$.

Exercice 6 **Démonstration** *(4 points)*

L'objectif de cet exercice est de démontrer la formule de la dérivée de la fonction inverse.

Considérons la fonction f définie sur $\mathbb{R}^*$ par $f(x) = \dfrac{1}{x}$.

1. Rappeler l'expression et le domaine de définition de la fonction dérivée de f.
2. Soit a un réel non nul et h un réel non nul tel que $a + h \neq 0$.
   (a) Calculer le taux d'accroissement de f en a.
   (b) En déduire $f'(a)$.
3. Expliquer en quoi les résultats précédents permettent de répondre à l'objectif de l'exercice.