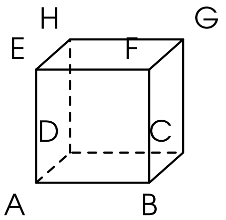
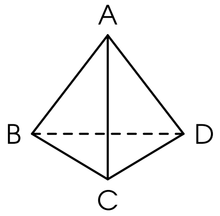
Lorsque l'exercice désigne le cube $ABCDEFGH$ (tétraèdre $ABCD$), il se réfère au cube (tétraèdre) représenté ci-dessous :





Droites

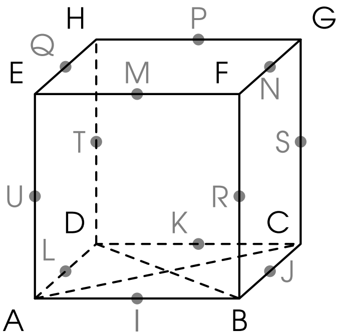
Exercice 1

On considère le cube $ABCDEFGH$ ci-dessous sur lequel on a placé les milieux de chaque arête et O le centre de la face de dessous.
Donner deux vecteurs directeurs des droites :

ⓐ (MP)

ⓑ (OD)

ⓒ (ON)



Exercice 2

Soient M, N et P trois points de l'espace non alignés. On considère les points I et J tels que

$$\overrightarrow{MI} = \frac{1}{2}\overrightarrow{MN} \quad \text{et} \quad \overrightarrow{NJ} = 3\overrightarrow{MP} - 2\overrightarrow{MN}.$$

1. Faire une figure.
2. Montrer que $P \in (IJ)$.

Plans

Exercice 3

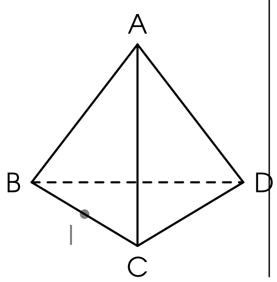
On considère le cube $ABCDEFGH$

1. Citer 4 plans distincts.
2. Pour chacun de ces plans, donner :
   ⓐ Une base du plan
   ⓑ Un repère du plan

Exercice 4

On considère le tétraèdre $ABCD$.

1. On se place dans la face (ABC).
   ⓐ Donner deux vecteurs directeurs de ce plan.
   ⓑ $\overrightarrow{AI}$ est-il de la direction du plan ?



2. On se place dans la face (ACD)
   ⓐ Donner un base de ce plan.
   ⓑ Placer un point J tel que $\overrightarrow{DJ}$ soit de la direction du plan.

Positions relatives

Exercice 5

On considère le cube $ABCDEFGH$. Choisir la ou les bonnes réponses.

1. La droite (DC) est :
   ⓐ sécante au plan (ABC)
   ⓑ incluse dans (ABC)
   ⓒ strictement parallèle à (ABC)
2. La droite (AB) est :
   ⓐ sécante au plan (ADF)
   ⓑ incluse dans (ADF)
   ⓒ strictement parallèle à (ADF)
3. La droite (HC) est :
   ⓐ sécante au plan (ABF)
   ⓑ incluse dans (ABF)
   ⓒ strictement parallèle à (ABF)

Exercice 6

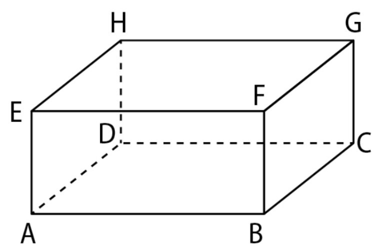
Vrai ou faux ? Justifier.
On considère le cube $ABCDEFGH$.

1. $\overrightarrow{EG}$ appartient à la direction du plan (BEG).
2. Les vecteurs $\overrightarrow{EF}$ et $\overrightarrow{HG}$ engendrent la direction du plan (EFG).
3. Les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{BC}$ engendrent la direction du plan (ABC).
4. Deux droites de l'espace sont soit sécantes, soit parallèles.

Exercice 7

$ABCDEFGH$ est le parallélépipède rectangle représenté ci-dessous.
Pour chacun des couples de plans qui suivent, préciser si ces plans sont sécants, confondus ou strictement parallèles.

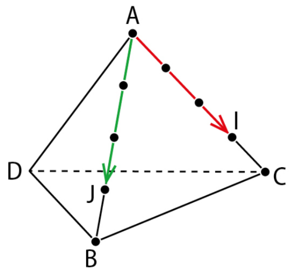
1. (ABC) et (FGH)
2. (ABF) et (AEG)
3. (EFG) et (EHF)
4. (ADE) et (BFH)



Exercice 8

Dans le tétraèdre ABCD, on place les points I et J tels que $\overrightarrow{AI} = \frac{3}{4}\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{AJ} = \frac{3}{4}\overrightarrow{AB}$.

1. Montrer que : $\overrightarrow{JI} = \frac{3}{4}\overrightarrow{BC}$.
2. Que peut-on en déduire pour la droite (IJ) et le plan (BCD) ?



Exercice 9

On considère le tétraèdre ABCD ci-dessus. Les points E et F sont tels que $\overrightarrow{AE} = \overrightarrow{BC}$ et $\overrightarrow{AF} = \overrightarrow{BD}$.

1. $(\overrightarrow{BC}; \overrightarrow{BD})$ est-elle une base de (BCD) ?
2. Que peut-on dire des plans (AEF) et (BCD) ?

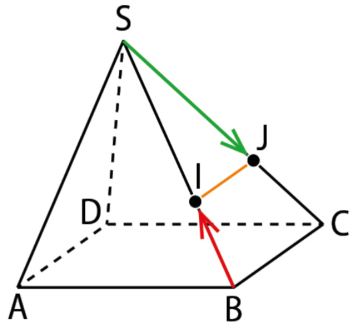
Exercice 10

$ABCDEFGH$ est un cube, K est le milieu de $[AE]$ et L est le milieu de $[EF]$.

1. (a) Justifier que K appartient au plan (ADH).
   (b) Justifier que les vecteurs $\overrightarrow{AD}$ et $\overrightarrow{KH}$ ne sont pas colinéaires.
   (c) Que peut-on en déduire pour les droites (AD) et (KH) ?
2. À l'aide d'un raisonnement par l'absurde, démontrer que les droites (AL) et (KH) ne sont pas parallèles.

Exercice 11

$SABCD$ est une pyramide dont la base $ABCD$ est un parallélogramme.



Les points I et J sont tels que $\overrightarrow{BI} = \frac{1}{3}\overrightarrow{BS}$ et $\overrightarrow{SJ} = \frac{2}{3}\overrightarrow{SC}$.

1. Justifier que les droites (IJ) et (BC) sont parallèles.
2. Démontrer que les droites (AJ) et (DI) sont sécantes.

Exercice 12 Logique

1. La proposition suivante est-elle vraie ?
   « *Si deux droites de l'espace n'ont pas de point commun, alors ces droites sont strictement parallèles.* »
2. La propriété réciproque est-elle vraie ?

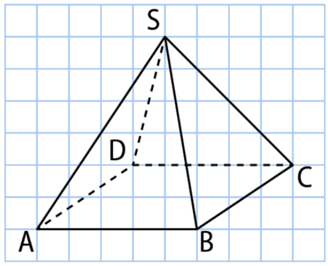
Exercice 13

$ABCD$ est un tétraèdre. Les points E, F et G sont tels que $\overrightarrow{BE} = \frac{1}{5}\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{EF} = \frac{1}{5}\overrightarrow{CD}$ et $\overrightarrow{EG} = \frac{1}{5}\overrightarrow{CA}$.

1. Justifier que F est un point de (BD).
2. Justifier que G est un point de (AB).
3. Démontrer que (FG) et (AD) sont parallèles.

Exercice 14

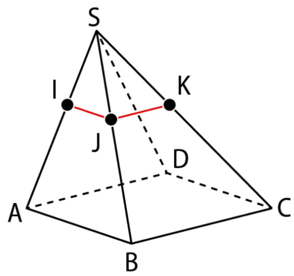
On considère la pyramide $SABCD$ si-dessous :



1. Placer les points E et F définis par $\overrightarrow{AE} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AS}$ et $\overrightarrow{SF} = \frac{3}{4}\overrightarrow{SC}$.
2. Démontrer que les droites (EF) et (AC) sont sécantes. Construire leur point d'intersection.

Exercice 15

$SABCD$ est une pyramide dont la base $ABCD$ est un parallélogramme.



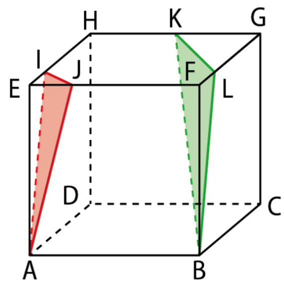
Les points I, J et K sont tels que $\overrightarrow{SI} = \frac{1}{3}\overrightarrow{SA}$, $\overrightarrow{SJ} = \frac{1}{3}\overrightarrow{SB}$ et $\overrightarrow{SK} = \frac{1}{3}\overrightarrow{SC}$.

1. Justifier que $\overrightarrow{IJ}$ et $\overrightarrow{AB}$ sont colinéaires puis que $\overrightarrow{JK}$ et $\overrightarrow{BC}$ sont colinéaires.
2. Démontrer que $(IJK)//(ABC)$.

Exercice 16

$ABCDEFGH$ est un cube.

Les points I, J, K et L sont tels que $\overrightarrow{EI} = \dfrac{1}{3}\overrightarrow{EH}$, $\overrightarrow{EJ} = \dfrac{1}{4}\overrightarrow{EF}$, $\overrightarrow{FL} = \dfrac{1}{3}\overrightarrow{FG}$, et $\overrightarrow{GK} = \dfrac{1}{2}\overrightarrow{GH}$.



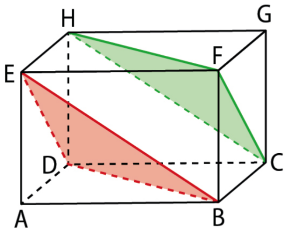
1. Justifier que $\overrightarrow{AI} = \overrightarrow{BL}$.
2. (a) Exprimer les vecteurs $\overrightarrow{IJ}$ et $\overrightarrow{KL}$ en fonction des vecteurs $\overrightarrow{EF}$ et $\overrightarrow{FG}$.
   (b) Démontrer que $(AIJ)//(BKL)$.

Exercice 17

$ABCD$ est un tétraèdre. On désigne par I, J et K les milieux respectifs des arêtes $[BC]$, $[AC]$ et $[CD]$. Démontrer que les plans (IJK) et (ABD) sont parallèles.

Exercice 18

$ABCDEFGH$ est un parallélépipède rectangle. Démontrer que les plans (BDE) et (CFH) sont parallèles.



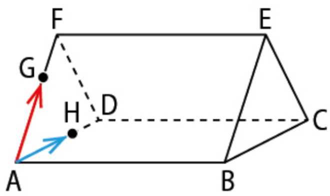
Exercice 19

$ABCDEFGH$ est un parallélépipède rectangle. Les points M, N et P sont définis par les égalités : $\overrightarrow{GM} = \frac{1}{4}\overrightarrow{GF}$, $\overrightarrow{EN} = \frac{3}{4}\overrightarrow{EH}$, $\overrightarrow{AP} = \frac{1}{4}\overrightarrow{AD}$.

1. Faire une figure.
2. Démontrer que $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{GH}$.
3. Montrer que $\overrightarrow{AN} = \overrightarrow{PH}$.
4. A l'aide de la question précédente, montrer que les plans (AMN) et (GHP) sont parallèles.

Exercice 20

$ABCDEF$ est un polyèdre tel que les faces $ABCD$, $ABEF$ et $CEFD$ sont des rectangles.

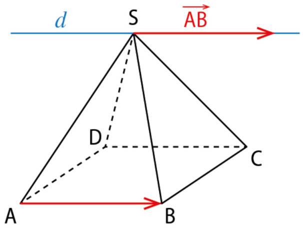


Les points G et H sont tels que $\overrightarrow{AG} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AF}$ et $\overrightarrow{AH} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AD}$.

1. Justifier que $(BCE)//(ADF)$.
2. Justifier que les plans (BCE) et (ECG) sont sécants. Préciser leur droite d'intersection d_1.
3. (a) Exprimer $\overrightarrow{GH}$ en fonction de $\overrightarrow{EC}$.
   (b) En déduire que $H \in (ECG)$.
   (c) Justifier que les plans (ADF) et (ECG) sont sécants. Préciser leur droite d'intersection d_2.
4. Que peut-on dire des droites d_1 et d_2 ? Justifier.

Exercice 21

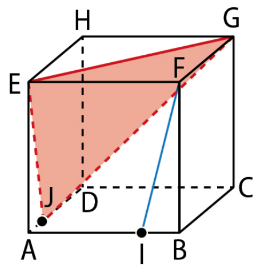
$SABCD$ est une pyramide dont la base est le parallélogramme $ABCD$.



1. Justifier que la droite (AB) est parallèle au plan (SDC).
2. Justifier que les plans (SAB) et (SDC) sont sécants.
3. On appelle d la droite passant par S et de vecteur directeur $\overrightarrow{AB}$.
   (a) Pourquoi la droite d est-elle incluse dans le plan (SAB) ?
   (b) Démontrer que d est la droite d'intersection entre les plans (SAB) et (SDC).

Exercice 22

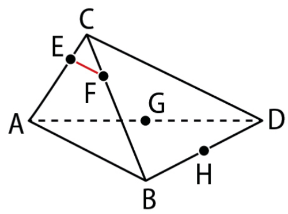
$ABCDEFGH$ est un cube. I et J sont tels que $\overrightarrow{AI} = \frac{3}{4}\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AJ} = \frac{1}{4}\overrightarrow{AD}$.



1. Exprimer les vecteurs $\overrightarrow{EG}$, $\overrightarrow{EJ}$ et $\overrightarrow{IF}$ en fonction des vecteurs $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AD}$ et $\overrightarrow{AE}$.
2. En déduire que $\overrightarrow{IF} = \frac{1}{4}\overrightarrow{EG} - \overrightarrow{EJ}$.
3. Que peut-on dire de la droite (IF) et du plan (EGJ) ?

Exercice 23

$ABCD$ est un tétraèdre. E est un point du segment $[AC]$. La parallèle à (AB) passant par E coupe $[BC]$ en F.
Les points G et H sont les milieux respectifs des segments $[AD]$ et $[BD]$.



Vrai ou faux ? Justifier.

(a) Les vecteurs $\overrightarrow{EF}$ et $\overrightarrow{AB}$ sont colinéaires.

(b) Les droites (EF) et (CD) sont parallèles.

(c) (EF) et (GH) ne sont pas coplanaires.

(d) La droite (GH) est l'intersection des plans (EFG) et (ABD).