On considère la suite (v_n) définie pour tout entier naturel n par : $v_0 = 1$ et

$$v_{n+1} = \frac{9}{6 - v_n}$$

Partie A

1. **Choix de l'algorithme correct**
   Pour afficher tous les termes de la suite du rang 0 au rang n, nous devons analyser les trois algorithmes proposés.
   L'algorithme 3 est le seul qui convient car :
   - Il initialise correctement v à 1
   - Il affiche d'abord v_0
   - Puis calcule le terme suivant
   - La boucle parcourt bien tous les rangs nécessaires
   - Il calcule correctement chaque terme suivant
2. **Conjectures sur la suite** (v_n)
   D'après les valeurs numériques données :
   - Pour $n = 10$: les termes vont de 1 à 2,714
   - Pour $n = 100$: les derniers termes sont proches de 2,970

   Conjectures :
   - La suite (v_n) semble être croissante
   - La suite (v_n) semble converger vers une limite proche de 3
   - Tous les termes sont strictement positifs
3. (a) **Démonstration par récurrence de** $0 < v_n < 3$
   Initialisation : Pour $n = 0$, $v_0 = 1$, donc $0 < v_0 < 3$.
   Hérédité : Supposons que pour un certain rang n, on ait $0 < v_n < 3$.
   Montrons que $0 < v_{n+1} < 3$.
   On a $v_{n+1} = \frac{9}{6-v_n}$.
   Comme $0 < v_n < 3$, on a $6 - v_n > 6 - 3 = 3 > 0$, donc $6 - v_n > 0$.
   Donc $v_{n+1} = \frac{9}{6-v_n} > 0$ car $9 > 0$ et $6 - v_n > 0$.
   De plus, $v_{n+1} = \frac{9}{6-v_n} < 3 \Leftrightarrow 9 < 3(6 - v_n) \Leftrightarrow 9 < 18 - 3v_n \Leftrightarrow 3v_n < 9 \Leftrightarrow v_n < 3$.
   Cette dernière inégalité est vraie par hypothèse de récurrence.
   Conclusion : Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $0 < v_n < 3$.

   (b) **Démonstration de la formule**
   Pour tout entier naturel n :

$$\begin{aligned}
v_{n+1} - v_n &= \frac{9}{6 - v_n} - v_n && (1)\\
&= \frac{9 - v_n(6 - v_n)}{6 - v_n} && (2)\\
&= \frac{9 - 6v_n + v_n^2}{6 - v_n} && (3)\\
&= \frac{v_n^2 - 6v_n + 9}{6 - v_n} && (4)\\
&= \frac{(v_n - 3)^2}{6 - v_n} && (5)
\end{aligned}$$

   Comme $(v_n - 3)^2 = (3 - v_n)^2$, on obtient :

$$v_{n+1} - v_n = \frac{(3 - v_n)^2}{6 - v_n}$$

Ⓒ **Monotonie de la suite** (v_n)

D'après la question précédente : $v_{n+1} - v_n = \frac{(3-v_n)^2}{6-v_n}$

$(3 - v_n)^2 \geq 0$ pour tout n $6 - v_n > 0$ pour tout n (car $v_n < 3$)

Donc $v_{n+1} - v_n \geq 0$ pour tout n.

De plus, $v_{n+1} - v_n = 0 \Leftrightarrow (3 - v_n)^2 = 0 \Leftrightarrow v_n = 3$.

Or $v_n < 3$ pour tout n, donc $v_{n+1} - v_n > 0$ pour tout n.

Conclusion : La suite (v_n) est strictement croissante.

Partie B

On considère la suite (w_n) définie pour tout entier naturel n par :

$$w_n = \frac{1}{v_n - 3}$$

1. **Démonstration que** (w_n) **est arithmétique**

   Calculons $w_{n+1} - w_n$:

$$w_{n+1} - w_n = \frac{1}{v_{n+1} - 3} - \frac{1}{v_n - 3} \tag{6}$$

$$= \frac{1}{\frac{9}{6-v_n} - 3} - \frac{1}{v_n - 3} \tag{7}$$

$$= \frac{1}{\frac{9-3(6-v_n)}{6-v_n}} - \frac{1}{v_n - 3} \tag{8}$$

$$= \frac{1}{\frac{9-18+3v_n}{6-v_n}} - \frac{1}{v_n - 3} \tag{9}$$

$$= \frac{1}{\frac{3v_n-9}{6-v_n}} - \frac{1}{v_n - 3} \tag{10}$$

$$= \frac{6 - v_n}{3(v_n - 3)} - \frac{1}{v_n - 3} \tag{11}$$

$$= \frac{6 - v_n - 3}{3(v_n - 3)} \tag{12}$$

$$= \frac{3 - v_n}{3(v_n - 3)} \tag{13}$$

$$= \frac{-(v_n - 3)}{3(v_n - 3)} \tag{14}$$

$$= -\frac{1}{3} \tag{15}$$

   La suite (w_n) est donc arithmétique de raison $r = -\frac{1}{3}$.

2. **Expression de** w_n **puis de** v_n

   Comme (w_n) est arithmétique de raison $r = -\frac{1}{3}$ et de premier terme $w_0 = \frac{1}{v_0-3} = \frac{1}{1-3} = \frac{1}{-2} = -\frac{1}{2}$, on a :

$$w_n = w_0 + nr = -\frac{1}{2} + n \cdot \left(-\frac{1}{3}\right) = -\frac{1}{2} - \frac{n}{3}$$

   Donc : $w_n = -\frac{1}{2} - \frac{n}{3} = -\frac{3+2n}{6}$

   Comme $w_n = \frac{1}{v_n-3}$, on a :

$$\frac{1}{v_n - 3} = -\frac{3 + 2n}{6}$$

   D'où : $v_n - 3 = -\frac{6}{3+2n}$

   Par conséquent :

$$v_n = 3 - \frac{6}{3 + 2n} = \frac{3(3 + 2n) - 6}{3 + 2n} = \frac{6 + 6n - 6}{3 + 2n} = \frac{6n}{3 + 2n}$$

3. **Limite de la suite** (v_n)

   On a $v_n = \frac{6n}{3+2n}$.

   $\lim_{n\to+\infty} v_n = \lim_{n\to+\infty} \frac{6n}{3+2n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{n(6)}{n(\frac{3}{n}+2)} = \lim_{n\to+\infty} \frac{6}{\frac{3}{n}+2} = \frac{6}{0+2} = 3$

   Donc : $\lim_{n\to+\infty} v_n = 3$