

**Limites en  $\pm\infty$** **Exercice 1**

Si  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 2$ , alors la courbe de  $f$  admet une asymptote horizontale d'équation  $y = 2$  en  $+\infty$ .

En observant les courbes proposées, seule celle qui se rapproche horizontalement de la droite  $y = 2$  quand  $x$  tend vers  $+\infty$  peut représenter la fonction  $f$ .

**Exercice 2**

D'après le tableau de variation :

- $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$  et  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 4$ .
- Puisque  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 4$ , la courbe représentative de  $f$  admet une asymptote horizontale d'équation  $d : y = 4$  en  $+\infty$ .
- La courbe part de  $+\infty$  en  $-\infty$ , descend jusqu'au minimum  $f(1) = -2$ , puis remonte vers l'asymptote  $y = 4$  en  $+\infty$ .

**Exercice 3**

D'après le tableau de variation :

- $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$  et  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 2$ .
- Puisque  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 2$ , la courbe représentative de  $f$  admet une asymptote horizontale d'équation  $d : y = 2$  en  $+\infty$ .
- La courbe part de  $-\infty$  en  $-\infty$ , monte jusqu'au maximum  $f(7) = 3$ , puis descend vers l'asymptote  $y = 2$  en  $+\infty$ .

**Exercice 4**

D'après le tableau de variation :

- $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$  et  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 7$ .
- Puisque  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 7$ , la courbe  $C$  admet une asymptote horizontale d'équation  $y = 7$  en  $+\infty$ .
- Puisque  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$ , pour tout réel  $M > 0$ , il existe un réel  $x_0$  tel que pour tout  $x < x_0$ , on ait  $f(x) > M$ . En particulier, pour  $M = 1000$ , il existe  $x_0$  tel que  $f(x) > 1000$  pour tout  $x < x_0$ .

**Exercice 5**

- Vraie.** Si  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$ , alors par définition, pour tout réel  $M < 0$ , il existe un réel  $x_0$  tel que pour tout  $x \geq x_0$ , on ait  $f(x) \leq M$ . En particulier, pour  $M = -1000$ , il existe  $x_0$  tel que  $f(x) < -1000$  pour tout  $x \geq x_0$ .

- Fausse.** Une fonction décroissante sur  $\mathbb{R}$  peut avoir une limite finie en  $+\infty$ . Contre-exemple :  $f(x) = -e^{-x}$  est décroissante sur  $\mathbb{R}$  et  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$ .

**Limites en un réel****Exercice 6**

Si  $\lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x > 1}} f(x) = +\infty$ , alors la courbe de  $f$  admet une asymptote verticale d'équation  $x = 1$  et la courbe "explose" vers  $+\infty$  quand on s'approche de  $x = 1$  par la droite.

Parmi les courbes proposées, celles qui présentent cette caractéristique peuvent représenter la fonction  $f$ .

**Exercice 7**

- De  $\lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x > 1}} f(x) = -\infty$ , on déduit que  $C_f$  admet une asymptote verticale d'équation  $x = 1$ . De  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 3$ , on déduit que  $C_f$  admet une asymptote horizontale d'équation  $y = 3$  en  $+\infty$ .
- Puisque  $f$  est croissante sur  $]1; +\infty[$ , la courbe part de  $-\infty$  en  $x = 1^+$  et croît vers l'asymptote  $y = 3$  en  $+\infty$ .

**Exercice 8**

- De  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 1$ , on déduit que  $C_f$  admet une asymptote horizontale d'équation  $y = 1$  en  $-\infty$ . De  $\lim_{\substack{x \rightarrow 3 \\ x < 3}} f(x) = +\infty$ , on déduit que  $C_f$  admet une asymptote verticale d'équation  $x = 3$ .
- Puisque  $f$  est croissante sur  $]-\infty; 3[$ , la courbe part de l'asymptote  $y = 1$  en  $-\infty$  et croît vers  $+\infty$  en  $x = 3^-$ .

**Exercice 9**

- Tableau de variation :

$x$	-1	2	5
$f(x)$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$

- (a) Oui,  $C_f$  admet deux asymptotes verticales :  $x = -1$  et  $x = 2$ .

- b)** La courbe part de  $-\infty$  en  $x = -1^+$ , croît vers  $+\infty$  en  $x = 2^-$ , puis repart de  $-\infty$  en  $x = 2^+$  et croît jusqu'au point  $(5, 2)$ .

### Exercice 10



1. D'après le tableau : - En  $x = -3$  : asymptote verticale (limite  $+\infty$  à droite) - En  $x = 1$  : asymptote verticale (limites  $+\infty$  à gauche et  $-\infty$  à droite) - En  $+\infty$  : asymptote horizontale  $y = 2$

Les trois asymptotes sont :  $x = -3$ ,  $x = 1$  et  $y = 2$ .

2. La courbe descend de  $+\infty$  en  $x = -3^+$ , atteint un minimum en  $x = 0$ , remonte vers  $+\infty$  en  $x = 1^-$ , repart de  $-\infty$  en  $x = 1^+$  et croît vers l'asymptote  $y = 2$ .

### Exercice 11



1. Par lecture graphique :

- $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 1$  (asymptote  $d_3$  :  $y = 1$ )
- $\lim_{\substack{x \rightarrow -1 \\ x < -1}} f(x) = +\infty$
- $\lim_{\substack{x \rightarrow -1 \\ x > -1}} f(x) = -\infty$  (asymptote  $d_1$  :  $x = -1$ )
- $\lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x < 1}} f(x) = -\infty$
- $\lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x > 1}} f(x) = +\infty$  (asymptote  $d_2$  :  $x = 1$ )
- $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 1$  (asymptote  $d_3$  :  $y = 1$ )

2. Tableau de variation correspondant aux limites observées.

$x$	$-\infty$	$-1$	$0$	$1$	$+\infty$
$f$	$2$	$+ \infty$	$- \infty$	$-3$	$+ \infty$

### Opérations sur les limites

### Exercice 12



- a)**  $f(x) = -100$  :  $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = -100$   
 $g(x) = 0,1x$  :  $\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = -\infty$  et  $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = +\infty$
- b)**  $f(x) = -7x$  :  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$  et  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$   
 $g(x) = 5x^2$  :  $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} g(x) = +\infty$
- c)**  $f(x) = 8 + 2x$  :  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$  et  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$   
 $g(x) = -2 - 0,1x^2$  :  $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} g(x) = -\infty$

- d)**  $f(x) = 6 - 5x^3$  :  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$  et  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$   
 $g(x) = 8 + 21x^5$  :  $\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = -\infty$  et  $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = +\infty$

- e)**  $f(x) = 2e^x$  :  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0$  et  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$   
 $g(x) = 17 - 9e^x$  :  $\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = 17$  et  $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = -\infty$
- f)**  $f(x) = \frac{1}{x} - 2$  :  $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = -2$   
 $g(x) = 3 - \frac{5}{x}$  :  $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} g(x) = 3$

### Exercice 13



1.  $f(x) = \frac{1}{x}$  :  $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = -\infty$  et  $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = +\infty$   
 $g(x) = 1 + \frac{2}{x}$  :  $\lim_{x \rightarrow 0^-} g(x) = -\infty$  et  $\lim_{x \rightarrow 0^+} g(x) = +\infty$   
 $h(x) = 1 - \frac{4}{x}$  :  $\lim_{x \rightarrow 0^-} h(x) = +\infty$  et  $\lim_{x \rightarrow 0^+} h(x) = -\infty$
2.  $f(x) = 5 + \frac{1}{x^2}$  :  $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = +\infty$  et  $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = +\infty$   
 $g(x) = 2 + \frac{5}{x^2}$  :  $\lim_{x \rightarrow 0^-} g(x) = +\infty$  et  $\lim_{x \rightarrow 0^+} g(x) = +\infty$   
 $h(x) = 2 - \frac{3}{x^2}$  :  $\lim_{x \rightarrow 0^-} h(x) = -\infty$  et  $\lim_{x \rightarrow 0^+} h(x) = -\infty$

### Exercice 14



Puisque  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$ , on a  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{f(x)} = 0$ .  
Puisque  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 2$ , on a  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{f(x)} = \frac{1}{2}$ .

### Exercice 15



- 1. Vraie.** On peut prendre  $g(x) = 2 - x$ . Alors  $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = -\infty$  et  $f(x) + g(x) = x + 2 - x = 2$ , donc  $\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) + g(x)) = 2$ .
- 2. Vraie.** On peut prendre  $k(x) = x$ . Alors  $\lim_{x \rightarrow +\infty} k(x) = +\infty$  et  $h(x) \times k(x) = \frac{x}{x} = 1$ , donc  $\lim_{x \rightarrow +\infty} (h(x) \times k(x)) = 1$ .

### Exercice 16



- a)**  $\lim_{x \rightarrow +\infty} (-2 + 3x + 4\sqrt{x}) = +\infty$
- b)**  $\lim_{x \rightarrow -\infty} (2x^3 - x^2 + x + 7) = -\infty$
- c)**  $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} \left( 5x^2 + 3x - \frac{19}{x} \right) = -\infty$
- d)**  $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x < 0}} \left( 4 - 3x + \frac{1}{x^2} \right) = +\infty$
- e)**  $\lim_{x \rightarrow -\infty} (e^x + 2x - 3) = -\infty$
- f)**  $\lim_{x \rightarrow +\infty} (1 - x - 2e^x) = -\infty$
- g)**  $\lim_{x \rightarrow +\infty} (1 - \sqrt{2}x^2 - 5x\sqrt{x}) = -\infty$

(h)  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \left( (e^x - x) \left( \frac{1}{x} - 5 \right) \right)$

Quand  $x \rightarrow -\infty : e^x \rightarrow 0$ , donc  $e^x - x \rightarrow +\infty$   
 $\frac{1}{x} - 5 \rightarrow -5$   
 Donc la limite est  $+\infty \times (-5) = -\infty$ .

(i)  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \left( e^x \left( -5 + \frac{2}{x} \right) \right) = 0 \times (-5) = 0$

(j)  $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x < 0}} \left( (x-1) \left( 2 + \frac{3}{x^3} \right) \right)$

$(x-1) \rightarrow -1$  et  $\frac{3}{x^3} \rightarrow -\infty$ , donc la limite est  $(-1) \times (-\infty) = +\infty$ .

(k)  $\lim_{x \rightarrow -\infty} ((7-2e^x)(2+e^x))$

Quand  $x \rightarrow -\infty : e^x \rightarrow 0$ , donc  $(7-2e^x) \rightarrow 7$  et  $(2+e^x) \rightarrow 2$ .

La limite est  $7 \times 2 = 14$ .

(l)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} ((2x-3)(5e^x-1)) = +\infty$

(m)  $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} \left( (1-2e^x) \left( 1 + \frac{2}{x} \right) \right)$

$(1-2e^x) \rightarrow 1-2 = -1$  et  $\frac{2}{x} \rightarrow +\infty$ , donc la limite est  $(-1) \times (+\infty) = -\infty$ .

(n)  $\lim_{x \rightarrow -\infty} ((1-e^x)(1-x))$

Quand  $x \rightarrow -\infty : (1-e^x) \rightarrow 1$  et  $(1-x) \rightarrow +\infty$ .

La limite est  $1 \times (+\infty) = +\infty$ .

### Exercice 17

1. **Fausse.** La proposition  $(\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = k) \Rightarrow (\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = k)$  est fausse.

Contre-exemple :  $f(x) = k + \frac{1}{x+1}$  pour  $x \neq -1$ . On a  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = k$  mais  $f(x) \neq k$  pour tout  $x$ .

2. **Vraie.** La réciproque  $(\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = k) \Rightarrow (\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = k)$  est vraie car une fonction constante a pour limite sa valeur constante.

### Exercice 18

(a)  $f(x) = x^3 + 2x^2 + 3$  : terme dominant  $x^3$   
 $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$  et  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$

(b)  $f(x) = -3x^2 - 8x + 11$  : terme dominant  $-3x^2$   
 $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = -\infty$

(c)  $f(x) = x^3 - 7x^2 + x - 1$  : terme dominant  $x^3$   
 $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$  et  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$

(d)  $f(x) = x + xe^x = x(1+e^x)$   
 En  $+\infty$  :  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$

En  $-\infty$  :  $e^x \rightarrow 0$ , donc  $f(x) \rightarrow -\infty$

(e)  $f(x) = (x^3 + x^2 - x)(e^x - 1)$   
 En  $+\infty$  :  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$

En  $-\infty$  :  $e^x \rightarrow 0$ , donc  $f(x) \rightarrow +\infty$

### Exercice 19

Soit  $f(x) = 3 - e^x$ .

1.  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 3 - 0 = 3$  et  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 3 - (+\infty) = -\infty$ .

Donc  $\mathcal{C}_f$  admet une asymptote horizontale  $d : y = 3$  en  $-\infty$ .

2. Pour tout  $x \in \mathbb{R} : f(x) = 3 - e^x < 3$  car  $e^x > 0$ .

Donc  $\mathcal{C}_f$  est en dessous de  $d$ .

3. La distance  $MH = |f(x) - 3| = |3 - e^x - 3| = e^x$ . Le programme calcule la valeur de  $x$  pour laquelle  $e^x < 0,001$ , c'est-à-dire pour laquelle la distance entre la courbe et l'asymptote devient inférieure à 0,001.

### Exercice 20

Fausse pour  $k = 0$ .

Si  $k = 0$  et  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$ , alors  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{f(x)}$  n'existe pas nécessairement (peut être  $\pm\infty$ ).

La proposition est vraie pour tout  $k \neq 0$ .

### Exercice 21

$f(x) = \frac{1}{x-2}$  et  $g(x) = \frac{-7x}{x-2}$

En  $-\infty$  :

—  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0$

—  $\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = -7$

En  $2^-$  :

—  $x-2 \rightarrow 0^-$ , donc  $\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = -\infty$

—  $-7x \rightarrow -14 < 0$  et  $x-2 \rightarrow 0^-$ , donc  $\lim_{x \rightarrow 2^-} g(x) = +\infty$

### Exercice 22

Soit  $f(x) = \frac{2}{e^x - 1}$  définie sur  $\mathbb{R}_+$ .

1.  $\lim_{x \rightarrow +\infty} (e^x - 1) = +\infty$ , donc  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$ .

2. (a) Pour  $x > 0 : e^x > e^0 = 1$ , donc  $e^x - 1 > 0$ .  
 (b) Quand  $x \rightarrow 0^+ : e^x \rightarrow 1$ , donc  $e^x - 1 \rightarrow 0^+$ .

Par conséquent :  $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \frac{2}{0^+} = +\infty$ .

### Exercice 23

Soit  $f(x) = \frac{7}{x^2+9}$  définie sur  $[0; 3] \cup [3; +\infty[$ .

1.  $\lim_{x \rightarrow +\infty} (-x^2 + 9) = -\infty$ , donc  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$ .

2. (a)  $-x^2 + 9 = -(x^2 - 9) = -(x-3)(x+3)$   
 Pour  $x \in [0; 3[ : x-3 < 0$  et  $x+3 > 0$ , donc  $-x^2 + 9 > 0$ .

Pour  $x \in ]3; +\infty[ : x-3 > 0$  et  $x+3 > 0$ , donc  $-x^2 + 9 < 0$ .

(b) Quand  $x \rightarrow 3^- : -x^2 + 9 \rightarrow 0^+$ , donc  $\lim_{x \rightarrow 3^-} f(x) = +\infty$ .

Quand  $x \rightarrow 3^+ : -x^2 + 9 \rightarrow 0^-$ , donc  $\lim_{x \rightarrow 3^+} f(x) = -\infty$ .

**Exercice 24**

D'après le tableau de variation de  $f$  :

$$1. \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 3 \text{ et } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty.$$

$$\text{Donc } \lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = \frac{1}{3} \text{ et } \lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = 0.$$

2. (a) D'après le tableau,  $f$  s'annule en  $x = 1$  avec  $f(x) > 0$  pour  $x < 1$  et  $f(x) < 0$  pour  $x > 1$ .

(b) Quand  $x \rightarrow 1^-$  :  $f(x) \rightarrow 0^+$ , donc  $\lim_{x \rightarrow 1^-} g(x) = +\infty$ .

Quand  $x \rightarrow 1^+$  :  $f(x) \rightarrow 0^-$ , donc  $\lim_{x \rightarrow 1^+} g(x) = -\infty$ .

**Exercice 25**

$$\text{Soient } f(x) = 3 - \frac{2}{1+e^x} \text{ et } g(x) = 2 - \frac{3}{1+e^x}.$$

$$1. \text{ En } -\infty : e^x \rightarrow 0, \text{ donc } 1+e^x \rightarrow 1.$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 3 - \frac{2}{1} = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = 2 - \frac{3}{1} = -1$$

$$\text{En } +\infty : e^x \rightarrow +\infty, \text{ donc } \frac{1}{1+e^x} \rightarrow 0.$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 3 - 0 = 3$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = 2 - 0 = 2$$

2.  $f$  a pour asymptotes  $y = 1$  en  $-\infty$  et  $y = 3$  en  $+\infty \Rightarrow$  Courbe 1

$g$  a pour asymptotes  $y = -1$  en  $-\infty$  et  $y = 2$  en  $+\infty \Rightarrow$  Courbe 2

**Exercice 26**

$$\text{Soit } f(x) = \frac{-2x^2+1}{x-1} \text{ définie sur } ]1; +\infty[.$$

En  $1^+$  : Le numérateur tend vers  $-2+1 = -1$  et le dénominateur tend vers  $0^+$ .

$$\text{Donc } \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = -\infty.$$

$$\text{En } +\infty : f(x) = \frac{x^2(-2+\frac{1}{x^2})}{x(1-\frac{1}{x})} = \frac{x(-2+\frac{1}{x^2})}{1-\frac{1}{x}} \sim \frac{-2x}{-1} = -2x$$

$$\text{Donc } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty.$$

**Exercice 27**

$$\text{Soit } f(x) = \frac{-2x+1}{x^2-4} \text{ définie sur } ]2; +\infty[.$$

En  $2^+$  : Le numérateur tend vers  $-4+1 = -3$  et le dénominateur tend vers  $4-4=0^+$ .

$$\text{Donc } \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = -\infty.$$

$$\text{En } +\infty : f(x) = \frac{x(-2+\frac{1}{x})}{x^2(1-\frac{4}{x^2})} = \frac{-2+\frac{1}{x}}{x(1-\frac{4}{x^2})} \sim \frac{-2}{x}$$

$$\text{Donc } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0.$$

**Exercice 28**

$$\text{Soit } f(x) = \frac{x\sqrt{x}-3}{1-x} = \frac{x^{3/2}-3}{1-x} \text{ définie sur } ]1; +\infty[.$$

En  $1^+$  : Le numérateur tend vers  $1-3=-2$  et le dénominateur tend vers  $0^-$ .

$$\text{Donc } \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = +\infty.$$

$$\text{En } +\infty : f(x) = \frac{x^{3/2}(1-\frac{3}{x^{3/2}})}{-x(1-\frac{1}{x})} = \frac{-x^{1/2}(1-\frac{3}{x^{3/2}})}{1-\frac{1}{x}} \sim \frac{-\sqrt{x}}{\frac{1}{x}}$$

$$\text{Donc } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty.$$

**Exercice 29**

$$\text{Soit } f(x) = \frac{e^x+3}{e^x+1} \text{ définie sur } \mathbb{R}.$$

$$\text{En } -\infty : e^x \rightarrow 0, \text{ donc } f(x) \rightarrow \frac{0+3}{0+1} = 3.$$

$$\text{En } +\infty : f(x) = \frac{e^x(1+\frac{3}{e^x})}{e^x(1+\frac{1}{e^x})} = \frac{1+\frac{3}{e^x}}{1+\frac{1}{e^x}} \rightarrow \frac{1}{1} = 1.$$

**Exercice 30**

$$\text{Soit } f(x) = \frac{2x-5}{x^2+3x-4} \text{ définie sur } \mathbb{R}_+ \setminus \{1\}.$$

$$1. \quad (a) \quad x^2+3x-4 = (x-1)(x+4)$$

Pour  $x \in \mathbb{R}_+ \setminus \{1\}$  :  $x+4 > 0$  toujours.

- Si  $x \in ]0; 1[$  :  $x-1 < 0$ , donc  $x^2+3x-4 < 0$ . -

Si  $x \in ]1; +\infty[$  :  $x-1 > 0$ , donc  $x^2+3x-4 > 0$ .

(b) En  $1^-$  : Le numérateur tend vers  $2-5=-3$  et le dénominateur tend vers  $0^-$ .

$$\text{Donc } \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = +\infty.$$

En  $1^+$  : Le numérateur tend vers  $-3$  et le dénominateur tend vers  $0^+$ .

$$\text{Donc } \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = -\infty.$$

$$2. \quad \text{En } +\infty : f(x) = \frac{x(2-\frac{5}{x})}{x^2(1+\frac{3}{x}-\frac{4}{x^2})} = \frac{2-\frac{5}{x}}{x(1+\frac{3}{x}-\frac{4}{x^2})} \sim \frac{\frac{2}{x}}{\frac{2}{x}}$$

$$\text{Donc } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0.$$

**Exercice 31**

$$\text{Soient } f(x) = \frac{-4+3x}{3-x}, g(x) = \frac{-3x^2+18x-22}{x^2-6x+9} \text{ et } h(x) = \frac{20-5x}{(3-x)^2}.$$

$$1. \text{ En } 3^+ :$$

Pour  $f$  : numérateur  $\rightarrow -4+9=5 > 0$ , dénominateur  $\rightarrow 0^-$ , donc  $\lim_{x \rightarrow 3^+} f(x) = -\infty$ .

Pour  $g$  :  $x^2-6x+9 = (x-3)^2$ , donc  $g(x) = \frac{-3x^2+18x-22}{(x-3)^2}$ .

Numérateur en  $x = 3$  :  $-27+54-22=5 > 0$ , dénominateur  $\rightarrow 0^+$ , donc  $\lim_{x \rightarrow 3^+} g(x) = +\infty$ .

Pour  $h$  : numérateur  $\rightarrow 20-15=5 > 0$ , dénominateur  $\rightarrow 0^+$ , donc  $\lim_{x \rightarrow 3^+} h(x) = +\infty$ .

$$\text{En } +\infty :$$

$$f(x) = \frac{x(3-\frac{4}{x})}{-x(1-\frac{3}{x})} = \frac{-(3-\frac{4}{x})}{1-\frac{3}{x}} \rightarrow -3$$

$$g(x) = \frac{x^2(-3+\frac{18}{x}-\frac{22}{x^2})}{x^2(1-\frac{6}{x}+\frac{9}{x^2})} \rightarrow \frac{-3}{1} = -3$$

$$h(x) = \frac{x(-5+\frac{20}{x})}{x^2(1-\frac{3}{x})^2} = \frac{-5+\frac{20}{x}}{x(1-\frac{3}{x})^2} \rightarrow 0$$

$$2. \quad C_1 \Rightarrow f; C_2 \Rightarrow h; C_3 \Rightarrow g$$

**Composition****Exercice 32**

Soit  $u$  définie sur  $\mathbb{R}$  avec  $\lim_{x \rightarrow -\infty} u(x) = 1$  et

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} u(x) = +\infty.$$

$\lim_{x \rightarrow -\infty} e^{u(x)} = e^1 = e$  (par composition avec  $\lim_{x \rightarrow 1} e^X = e^1$ )  
 $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^{u(x)} = +\infty$  (par composition avec  $\lim_{X \rightarrow +\infty} e^X = +\infty$ )

### Exercice 33



Soient  $u$  et  $v$  telles que  $\lim_{x \rightarrow +\infty} u(x) = 2$  et  $\lim_{x \rightarrow 2} v(x) = -\infty$ .

Par composition :  $\lim_{x \rightarrow +\infty} v(u(x)) = \lim_{X \rightarrow 2} v(X) = -\infty$ .

### Exercice 34



Soient  $f(x) = x^2 + 2$  et  $g(x) = \sqrt{x^2 + 2}$ .

1.  $g(x) = \sqrt{f(x)}$ , donc  $g$  est la composée de  $f$  suivie de la fonction racine carrée.

2.  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$

Par composition :  $\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = \lim_{X \rightarrow +\infty} \sqrt{X} = +\infty$ .

### Exercice 35



Soient  $f(x) = 6 - x$ ,  $g(x) = (6 - x)^2$  et  $h(x) = e^{6-x}$ .

1.  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 6 - (-\infty) = +\infty$

2.  $g(x) = [f(x)]^2$  et  $h(x) = e^{f(x)}$ .

Par composition :

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = \lim_{X \rightarrow +\infty} X^2 = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} h(x) = \lim_{X \rightarrow +\infty} e^X = +\infty$$

3.  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 6 - (+\infty) = -\infty$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = \lim_{X \rightarrow -\infty} X^2 = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} h(x) = \lim_{X \rightarrow -\infty} e^X = 0$$

### Exercice 36



1.  $f(x) = \sqrt{x^2 + 3} = \sqrt{u(x)}$  avec  $u(x) = x^2 + 3$

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} u(x) = +\infty, \text{ donc } \lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = +\infty$$

2.  $f(x) = e^{1-0,5x} = e^{u(x)}$  avec  $u(x) = 1 - 0,5x$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} u(x) = +\infty, \text{ donc } \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} u(x) = -\infty, \text{ donc } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$$

3.  $f(x) = (5 - x)^3 = [u(x)]^3$  avec  $u(x) = 5 - x$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} u(x) = +\infty, \text{ donc } \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} u(x) = -\infty, \text{ donc } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$$

4.  $f(x) = \frac{1}{(x^2+x+1)^4} = \frac{1}{[u(x)]^4}$  avec  $u(x) = x^2 + x + 1$

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} u(x) = +\infty, \text{ donc } \lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = 0$$

### Exercice 37



1.  $\lim_{x \rightarrow -\infty} (3x - 2) = -\infty$ , donc  $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^{3x-2} = 0$
2.  $\lim_{x \rightarrow +\infty} (2 + x + e^{-x}) = +\infty$  (car  $e^{-x} \rightarrow 0$ ), donc  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{2 + x + e^{-x}} = +\infty$
3.  $\lim_{x \rightarrow +\infty} (-x^2 + x + 1) = -\infty$ , donc  $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^{-x^2+x+1} = 0$
4.  $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} \frac{2}{x} = +\infty$ , donc  $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} e^{\frac{2}{x}} = +\infty$
5.  $\lim_{x \rightarrow -\infty} (2 - 3e^{2x}) = 2$  (car  $e^{2x} \rightarrow 0$ ), donc  $\lim_{x \rightarrow -\infty} (2 - 3e^{2x})^5 = 2^5 = 32$
6.  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 - 1}{4x^2 + 1} = \frac{1}{4}$ , donc  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{\frac{x^2 - 1}{4x^2 + 1}} = \frac{1}{2}$

### Exercice 38



Soit  $f(x) = e^{\frac{2}{x-1}}$  définie sur  $]1; +\infty[$ .

En  $1^+$  :  $\frac{2}{x-1} \rightarrow +\infty$ , donc  $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = +\infty$ .

En  $+\infty$  :  $\frac{2}{x-1} \rightarrow 0$ , donc  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = e^0 = 1$ .

### Exercice 39



Soient  $f(x) = \sqrt{x^2 - 4} - x$  et  $g(x) = \sqrt{x^2 - 4} + x$  définies sur  $]-\infty; -2] \cup [2; +\infty[$ .

$$1. f(x) \times g(x) = (\sqrt{x^2 - 4})^2 - x^2 = x^2 - 4 - x^2 = -4.$$

2. (a) En  $+\infty$  :  $g(x) = x(\sqrt{1 - \frac{4}{x^2}} + 1) \sim x \times 2 = 2x$   
Donc  $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = +\infty$ .

(b) Puisque  $f(x) \times g(x) = -4$  et  $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = +\infty$  :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-4}{g(x)} = 0.$$

3. (a) En  $-\infty$  :  $f(x) = -x(\sqrt{1 - \frac{4}{x^2}} - 1)$

Or  $\sqrt{1 - \frac{4}{x^2}} \rightarrow 1$ , donc  $f(x) \sim -x \times 0$

Plus précisément :  $\sqrt{1 - \frac{4}{x^2}} = 1 - \frac{2}{x^2} + o(\frac{1}{x^2})$

Donc  $f(x) \sim -x \times (-\frac{2}{x^2}) = \frac{2}{x} \rightarrow 0$ .

Donc  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0$ .

$$(b) \lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-4}{f(x)} = -\infty.$$

### Exercice 40



1.  $\lim_{x \rightarrow -\infty} (2 + x^3) = -\infty$ , donc  $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^{2+x^3} = 0$ .  
L'affirmation est **vraie**.

2. L'affirmation est **fausse**.

Contre-exemple :  $f(x) = -x$ . Alors  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$  mais  $f(f(x)) = f(-x) = -(-x) = x$ , donc  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(f(x)) = -\infty$ .

### Comparaison et encadrement

### Exercice 41



Soit  $f(x) = x + 2 \sin(x)$  définie sur  $\mathbb{R}$ .

1. Pour tout  $x \in \mathbb{R}$  :  $-1 \leq \sin(x) \leq 1$

Donc  $-2 \leq 2\sin(x) \leq 2$ , et par conséquent :  
 $x - 2 \leq x + 2\sin(x) \leq x + 2$ .

2.  $\lim_{x \rightarrow +\infty} (x - 2) = +\infty$  et  $\lim_{x \rightarrow +\infty} (x + 2) = +\infty$

Par encadrement :  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ .

3.  $\frac{f(x)}{x} = \frac{x+2\sin(x)}{x} = 1 + \frac{2\sin(x)}{x}$

Or  $-\frac{2}{x} \leq \frac{2\sin(x)}{x} \leq \frac{2}{x}$ , donc  $1 - \frac{2}{x} \leq \frac{f(x)}{x} \leq 1 + \frac{2}{x}$ .

Puisque  $\lim_{x \rightarrow +\infty} (1 - \frac{2}{x}) = 1$  et  $\lim_{x \rightarrow +\infty} (1 + \frac{2}{x}) = 1$  :

Par encadrement :  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = 1$ .

### Exercice 42



Soit  $f(x) = 2\cos(x) - x$  définie sur  $\mathbb{R}$ .

1. Pour tout  $x \in \mathbb{R}$  :  $-1 \leq \cos(x) \leq 1$

Donc  $-2 \leq 2\cos(x) \leq 2$ , et par conséquent :  
 $-2 - x \leq 2\cos(x) - x \leq 2 - x$ .

2.  $\lim_{x \rightarrow -\infty} (-2 - x) = +\infty$  et  $\lim_{x \rightarrow -\infty} (2 - x) = +\infty$

Par encadrement :  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$ .

$\lim_{x \rightarrow +\infty} (-2 - x) = -\infty$  et  $\lim_{x \rightarrow +\infty} (2 - x) = -\infty$

Par encadrement :  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$ .

3. (a) Pour  $x < 0$  :  $\frac{f(x)}{x} = \frac{2\cos(x)-x}{x} = \frac{2\cos(x)}{x} - 1$

Or  $-2 \leq 2\cos(x) \leq 2$ , donc pour  $x < 0$  :  
 $\frac{2}{x} \leq \frac{2\cos(x)}{x} \leq \frac{-2}{x}$

D'où :  $\frac{2}{x} - 1 \leq \frac{f(x)}{x} \leq \frac{-2}{x} - 1$ .

(b)  $\lim_{x \rightarrow -\infty} (\frac{2}{x} - 1) = -1$  et  $\lim_{x \rightarrow -\infty} (\frac{-2}{x} - 1) = -1$

Par encadrement :  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = -1$ .

### Exercice 43



Soit  $h$  définie sur  $\mathbb{R}$  telle que  $e^{x+1} - 1 \leq h(x) \leq 2e^{x+1} - 1$ .

— En  $-\infty$  :  $e^{x+1} \rightarrow 0$ , donc  $e^{x+1} - 1 \rightarrow -1$  et  
 $2e^{x+1} - 1 \rightarrow -1$ .

Par encadrement :  $\lim_{x \rightarrow -\infty} h(x) = -1$ .

— En  $+\infty$  :  $e^{x+1} \rightarrow +\infty$ , donc  $e^{x+1} - 1 \rightarrow +\infty$ .

Par comparaison :  $\lim_{x \rightarrow +\infty} h(x) = +\infty$ .

### Exercice 44



Soit  $u$  définie sur  $\mathbb{R}$  telle que, pour tout réel  $x$  :

$$x - 1 \leq u(x) \leq 2x - 1.$$

Soit la fonction  $f$  définie sur  $\mathbb{R}$  par  $f(x) = e^{u(x)}$ .

1. Montrer que pour tout réel  $x$ ,  $e^{x-1} \leq f(x) \leq e^{2x-1}$ .

Correction :

Pour tout réel  $x$ , on a par hypothèse :

$$x - 1 \leq u(x) \leq 2x - 1$$

La fonction exponentielle est strictement croissante sur  $\mathbb{R}$ , donc elle conserve l'ordre des inégalités.

En appliquant la fonction exponentielle aux trois membres de l'inégalité :

$$e^{x-1} \leq e^{u(x)} \leq e^{2x-1}$$

Or  $f(x) = e^{u(x)}$ , donc :

$$e^{x-1} \leq f(x) \leq e^{2x-1}$$

2. Calculer  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$  et  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ .

Correction :

Limite en  $-\infty$  :

D'après la question précédente :  $e^{x-1} \leq f(x) \leq e^{2x-1}$

Quand  $x \rightarrow -\infty$  :

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} e^{x-1} = \lim_{x \rightarrow -\infty} e^{x-1} = 0 \quad (1)$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} e^{2x-1} = \lim_{x \rightarrow -\infty} e^{2x-1} = 0 \quad (2)$$

Par le théorème des gendarmes :

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0$$

Limite en  $+\infty$  :

Quand  $x \rightarrow +\infty$  :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} e^{x-1} = +\infty \quad (3)$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} e^{2x-1} = +\infty \quad (4)$$

Par le théorème des gendarmes :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$$

### Croissance comparée

#### Exercice 45



Soit  $f$  la fonction définie sur  $\mathbb{R}$  par  $f(x) = xe^{-20x}$ .

1. Calculer la limite de  $f$  en  $-\infty$ .

Correction :

Quand  $x \rightarrow -\infty$  :

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} x = -\infty \quad (5)$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} e^{-20x} = \lim_{X \rightarrow +\infty} e^X = +\infty \text{ (avec } X = -20x\text{)} \quad (6)$$

On a donc une forme indéterminée  $(-\infty) \times (+\infty)$ .

Posons  $X = -x$ , alors  $x = -X$  et quand  $x \rightarrow -\infty$ , on a  $X \rightarrow +\infty$ .

$$f(x) = xe^{-20x} \quad (7)$$

$$= -Xe^{20X} \quad (8)$$

$$= -Xe^{20X} \quad (9)$$

D'après la croissance comparée,  $\lim_{X \rightarrow +\infty} Xe^{20X} = +\infty$ .

$$\text{Donc : } \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{X \rightarrow +\infty} (-Xe^{20X}) = -\infty$$

2. (a) Déterminer le réel  $a$  tel que pour tout réel  $x$ , on ait :

$$f(x) = a(-20xe^{-20x})$$

**Correction :**

On a  $f(x) = xe^{-20x}$  et on veut  $f(x) = a(-20xe^{-20x})$ .

$$xe^{-20x} = a(-20xe^{-20x}) \quad (10)$$

$$xe^{-20x} = -20a \cdot xe^{-20x} \quad (11)$$

Pour que cette égalité soit vraie pour tout  $x \neq 0$ , il faut :

$$1 = -20a$$

$$\text{Donc : } a = -\frac{1}{20}$$

- (b) Calculer la limite de  $f$  en  $+\infty$ .

**Correction :**

D'après la question précédente :  $f(x) = -\frac{1}{20}(-20xe^{-20x})$

Posons  $u = -20x$ . Quand  $x \rightarrow +\infty$ , on a  $u \rightarrow -\infty$ .

$$f(x) = -\frac{1}{20}(-20xe^{-20x}) \quad (12)$$

$$= -\frac{1}{20} \cdot ue^u \text{ (avec } u = -20x\text{)} \quad (13)$$

D'après la croissance comparée,  $\lim_{u \rightarrow -\infty} ue^u = 0$ .

$$\text{Donc : } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\frac{1}{20} \times 0 = 0$$

**Exercice 46**

Soit  $f$  la fonction définie sur  $]0; +\infty[$  par :

$$f(x) = \frac{e^{0,1x}}{x}.$$

1. Calculer la limite de  $f$  en 0.

**Correction :**

Quand  $x \rightarrow 0^+$  :

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} e^{0,1x} = e^0 = 1 \quad (14)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} x = 0^+ \quad (15)$$

$$\text{Donc : } \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{e^{0,1x}}{x} = \frac{1}{0^+} = +\infty$$

2. (a) Déterminer le réel  $a$  tel que pour tout réel  $x$  strictement positif, on ait :

$$f(x) = a \times \frac{e^{0,1x}}{0,1x}.$$

**Correction :**

On a  $f(x) = \frac{e^{0,1x}}{x}$  et on veut  $f(x) = a \times \frac{e^{0,1x}}{0,1x}$ .

$$\frac{e^{0,1x}}{x} = a \times \frac{e^{0,1x}}{0,1x} \quad (16)$$

$$\frac{e^{0,1x}}{x} = \frac{a \cdot e^{0,1x}}{0,1x} \quad (17)$$

En simplifiant par  $e^{0,1x}$  (qui est toujours non nul) :

$$\frac{1}{x} = \frac{a}{0,1x}$$

$$\text{Donc : } \frac{1}{x} = \frac{a}{0,1x} \Rightarrow 0,1x = ax \Rightarrow a = 0,1$$

$$\text{Donc : } a = \frac{1}{10} = 0,1$$

- (b) Calculer la limite de  $f$  en  $+\infty$ .

**Correction :**

D'après la question précédente :  $f(x) = 0,1 \times \frac{e^{0,1x}}{0,1x}$

Posons  $u = 0,1x$ . Quand  $x \rightarrow +\infty$ , on a  $u \rightarrow +\infty$ .

$$f(x) = 0,1 \times \frac{e^{0,1x}}{0,1x} \quad (18)$$

$$= 0,1 \times \frac{e^u}{u} \text{ (avec } u = 0,1x\text{)} \quad (19)$$

D'après la croissance comparée,  $\lim_{u \rightarrow +\infty} \frac{e^u}{u} = +\infty$ .

$$\text{Donc : } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0,1 \times (+\infty) = +\infty$$

**Exercice 47**

Calculer les limites suivantes :

**Correction :**

$$1. \lim_{x \rightarrow -\infty} (3xe^x + 2e^x - 1)$$

Quand  $x \rightarrow -\infty$  :

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} 3xe^x = 0 \text{ (croissance comparée)} \quad (20)$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} 2e^x = 0 \quad (21)$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} (-1) = -1 \quad (22)$$

$$\text{Donc : } \lim_{x \rightarrow -\infty} (3xe^x + 2e^x - 1) = 0 + 0 - 1 = -1$$

$$2. \lim_{x \rightarrow -\infty} (1 - e^2 x - x^3 e^x)$$

Quand  $x \rightarrow -\infty$  :

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} 1 = 1 \quad (23)$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} (-e^2 x) = +\infty \text{ (car } e^2 > 0 \text{ et } x \rightarrow -\infty\text{)} \quad (24)$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} (-x^3 e^x) = 0 \text{ (croissance comparée)} \quad (25)$$

Donc :  $\lim_{x \rightarrow -\infty} (1 - e^2 x - x^3 e^x) = +\infty$

$$3. \lim_{x \rightarrow +\infty} \left( 2 - \frac{4e^x}{x} \right)$$

Quand  $x \rightarrow +\infty$  :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} 2 = 2 \quad (26)$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{4e^x}{x} = +\infty \text{ (croissance comparée)} \quad (27)$$

Donc :  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left( 2 - \frac{4e^x}{x} \right) = 2 - (+\infty) = -\infty$

$$4. \lim_{x \rightarrow +\infty} \left( 1 + \frac{e^x}{2x^2} \right)$$

Quand  $x \rightarrow +\infty$  :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} 1 = 1 \quad (28)$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{2x^2} = +\infty \text{ (croissance comparée)} \quad (29)$$

Donc :  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left( 1 + \frac{e^x}{2x^2} \right) = 1 + (+\infty) = +\infty$

$$5. \lim_{x \rightarrow +\infty} \left( 1 + \frac{4e^x}{\sqrt{x}} \right)$$

Quand  $x \rightarrow +\infty$  :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} 1 = 1 \quad (30)$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{4e^x}{\sqrt{x}} = +\infty \text{ (croissance comparée)} \quad (31)$$

Donc :  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left( 1 + \frac{4e^x}{\sqrt{x}} \right) = +\infty$

$$6. \lim_{x \rightarrow +\infty} \left( \frac{\sqrt{x} e^x}{x} \right)$$

On peut réécrire :  $\frac{\sqrt{x} e^x}{x} = \frac{e^x}{\sqrt{x}}$

D'après la croissance comparée :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{\sqrt{x}} = +\infty$$

$$7. \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{5x}{e^x}$$

D'après la croissance comparée :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{e^x} = 0$$

Donc :  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{5x}{e^x} = 5 \times 0 = 0$

$$8. \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{5 - 3x}{e^x}$$

On peut factoriser par  $x$  au numérateur :

$$\frac{5-3x}{e^x} = \frac{x(\frac{5}{x}-3)}{e^x} = \frac{x}{e^x} \cdot (\frac{5}{x} - 3)$$

Quand  $x \rightarrow +\infty$  :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{e^x} = 0 \text{ (croissance comparée)} \quad (32)$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (\frac{5}{x} - 3) = -3 \quad (33)$$

Donc :  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{5 - 3x}{e^x} = 0 \times (-3) = 0$

$$9. \lim_{x \rightarrow -\infty} (5x - 1)e^x$$

On factorise par  $x$  :  $(5x - 1)e^x = x(5 - \frac{1}{x})e^x$

D'après la croissance comparée :  $\lim_{x \rightarrow -\infty} xe^x = 0$

$$\text{Et } \lim_{x \rightarrow -\infty} (5 - \frac{1}{x}) = 5$$

$$\text{Donc : } \lim_{x \rightarrow -\infty} (5x - 1)e^x = 0$$

$$10. \lim_{x \rightarrow -\infty} (x^2 + x + 3)e^x$$

On factorise par  $x^2$  :  $(x^2 + x + 3)e^x = x^2(1 + \frac{1}{x} + \frac{3}{x^2})e^x$

D'après la croissance comparée :  $\lim_{x \rightarrow -\infty} x^2 e^x = 0$

$$\text{Et } \lim_{x \rightarrow -\infty} (1 + \frac{1}{x} + \frac{3}{x^2}) = 1$$

$$\text{Donc : } \lim_{x \rightarrow -\infty} (x^2 + x + 3)e^x = 0$$

$$11. \lim_{x \rightarrow +\infty} (3x - e^x)$$

On factorise par  $e^x$  :  $3x - e^x = e^x(\frac{3x}{e^x} - 1)$

Quand  $x \rightarrow +\infty$  :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = +\infty \quad (34)$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x}{e^x} = 0 \text{ (croissance comparée)} \quad (35)$$

$$\text{Donc } \lim_{x \rightarrow +\infty} (\frac{3x}{e^x} - 1) = -1$$

$$\text{Donc : } \lim_{x \rightarrow +\infty} (3x - e^x) = (+\infty) \times (-1) = -\infty$$

$$12. \lim_{x \rightarrow +\infty} (3x^2 - 2e^x)$$

On factorise par  $e^x$  :  $3x^2 - 2e^x = e^x(\frac{3x^2}{e^x} - 2)$

D'après la croissance comparée :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2}{e^x} = 0$$

$$\text{Donc } \lim_{x \rightarrow +\infty} (\frac{3x^2}{e^x} - 2) = -2$$

$$\text{Donc : } \lim_{x \rightarrow +\infty} (3x^2 - 2e^x) = -\infty$$

13.  $\lim_{x \rightarrow +\infty} (x^2 - xe^x)$

On factorise par  $xe^x$  :  $x^2 - xe^x = xe^x(\frac{x}{e^x} - 1)$

D'après la croissance comparée :  
 $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{e^x} = 0$

Donc  $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\frac{x}{e^x} - 1) = -1$

Et  $\lim_{x \rightarrow +\infty} xe^x = +\infty$  (croissance comparée)

Donc :  $\lim_{x \rightarrow +\infty} (x^2 - xe^x) = -\infty$

14.  $\lim_{x \rightarrow -\infty} (e^x - x)e^x$

$(e^x - x)e^x = e^{2x} - xe^x$

Quand  $x \rightarrow -\infty$  :

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} e^{2x} = 0 \quad (36)$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} xe^x = 0 \text{ (croissance comparée)} \quad (37)$$

Donc :  $\lim_{x \rightarrow -\infty} (e^x - x)e^x = 0 - 0 = 0$

15.  $\lim_{x \rightarrow -\infty} (3xe^{3x})$

Posons  $u = 3x$ . Quand  $x \rightarrow -\infty$ , on a  $u \rightarrow -\infty$ .

$3xe^{3x} = ue^u$

D'après la croissance comparée :  
 $\lim_{u \rightarrow -\infty} ue^u = 0$

Donc :  $\lim_{x \rightarrow -\infty} (3xe^{3x}) = 0$

16.  $\lim_{x \rightarrow -\infty} (2 - x)e^{2-x}$

Posons  $u = 2 - x$ . Quand  $x \rightarrow -\infty$ , on a  $u \rightarrow +\infty$ .

$(2 - x)e^{2-x} = ue^u$

D'après la croissance comparée :  
 $\lim_{u \rightarrow +\infty} ue^u = +\infty$

Donc :  $\lim_{x \rightarrow -\infty} (2 - x)e^{2-x} = +\infty$