

Formule des cosinus

Exercice 1

Calculer $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$.

1. $AB = 1$, $AC = 5$ et $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = 40^\circ$
2. $AB = 2,5$, $AC = 3$ et $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = 70^\circ$
3. $AB = 4$, $AC = \frac{5}{3}$ et $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = -110^\circ$

Exercice 2

Calculer $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$.

1. $AB = 2$, $AC = 6$ et $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = \frac{\pi}{4}$
2. $AB = \sqrt{3}$, $AC = 1$ et $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = -\frac{\pi}{6}$
3. $AB = 5$, $AC = \frac{3}{4}$ et $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = \frac{2\pi}{3}$

Exercice 3

Les points A, B, C, D, E, F, G et H sont placés sur une droite graduée de façon à ce que $AB = BC = CD = DE = EF = FG = GH = 1$.



Déterminer les produits scalaires suivants.

1. $\overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{AG}$
2. $\overrightarrow{DC} \cdot \overrightarrow{DF}$
3. $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{DE}$
4. $\overrightarrow{CD} \cdot \overrightarrow{HD}$

Exercice 4

Dans chaque cas, calculer le produit scalaire $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$.

1. $AB = 6$, $AC = 2$ et $\widehat{BAC} = 30^\circ$
2. $AB = 2$, $AC = 3$ et $\widehat{BAC} = 120^\circ$

Exercice 5

Dans chaque cas, calculer une mesure en degré de l'angle \widehat{BAC} .

1. $AB = 3$, $AC = 6$ et $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 9\sqrt{2}$
2. $AB = 2$, $AC = 5$ et $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = -8$ (on donnera une valeur approchée au degré près)
3. $AB = 3$, $AC = 7$ et $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 0$

Exercice 6

Soient trois points A, B et C tels que : $AB = \sqrt{3}$, $AC = 2$ et $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 1$

Calculer la mesure de l'angle \widehat{BAC} .

Projeté orthogonal

Exercice 7

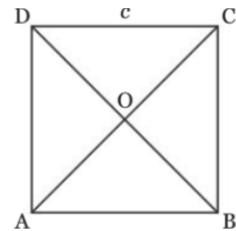
H est le projeté orthogonal du point C sur la droite (AB).

1. $AB = 4$, $AH = 3$ et $H \in [AB]$
2. $AB = 1$, $AH = 5$ et $H \notin [AB]$
3. $AB = 6$, $BH = \frac{19}{3}$ et $H \notin [AB]$

Exercice 8

On considère un carré ABCD de centre O et de côté c . Calculer les produits scalaires suivants.

1. $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$
2. $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AO}$
3. $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD}$
4. $\overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{AD}$
5. $\overrightarrow{DB} \cdot \overrightarrow{AB}$
6. $\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{AC}$
7. $\overrightarrow{DB} \cdot \overrightarrow{OC}$

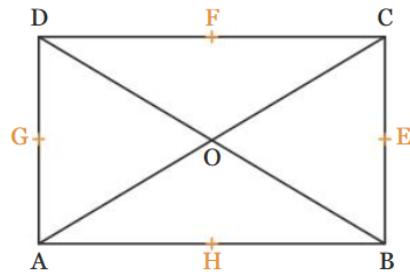


Exercice 9

On considère le rectangle ABCD ci-après. E, F, G et H sont respectivement les milieux des côtés [BC], [CD], [DA] et [AB].

O est l'intersection des diagonales du rectangle.

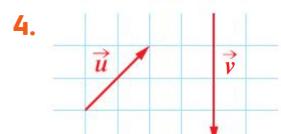
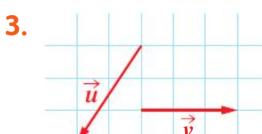
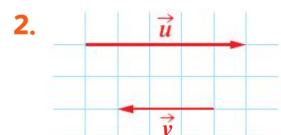
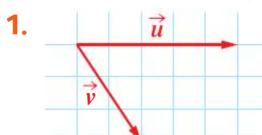
Apparier chaque expression du produit scalaire avec son expression simplifiée.



- | | | |
|---|---|---|
| $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$ | ♦ | ♦ $\overrightarrow{AH} \cdot \overrightarrow{AB}$ |
| $\overrightarrow{AG} \cdot \overrightarrow{AF}$ | ♦ | ♦ $\overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{AB}$ |
| $\overrightarrow{AF} \cdot \overrightarrow{AB}$ | ♦ | ♦ $\overrightarrow{AG} \cdot \overrightarrow{AD}$ |
| $\overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{AF}$ | ♦ | ♦ $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD}$ |

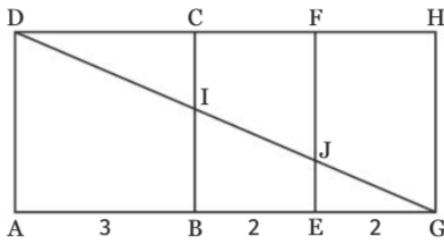
Exercice 10

Les quadrillages suivants sont à mailles carrées de côté 1. Dans chaque cas, calculer $\vec{u} \cdot \vec{v}$.



Exercice 11

Dans une unité de longueur donnée, on considère un carré $ABCD$ dont le côté mesure 3, accolé à deux rectangles identiques $BEFC$ et $EGHF$ de largeur 2.

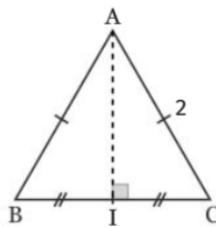


En utilisant la formule du projeté orthogonal, calculer les produits scalaires suivants.

1. $\vec{AB} \cdot \vec{AC}$
2. $\vec{BA} \cdot \vec{BF}$
3. $\vec{EI} \cdot \vec{AG}$
4. $\vec{CF} \cdot \vec{GD}$
5. $\vec{IC} \cdot \vec{HG}$
6. $\vec{EJ} \cdot \vec{FA}$

Exercice 12

Le triangle ABC est un triangle équilatéral dont le côté mesure 2 cm. I est le pied de la hauteur issue de A. Déterminer les valeurs exactes des produits scalaires suivants.

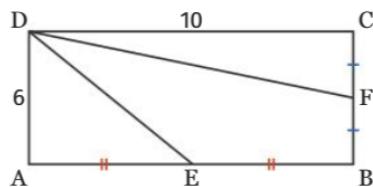


1. $\vec{BC} \cdot \vec{BA}$
2. $\vec{BA} \cdot \vec{BI}$
3. $\vec{AI} \cdot \vec{AC}$

Exercice 13

On considère le rectangle $ABCD$ de longueur 10 et de largeur 6. E est le milieu du côté $[AB]$ et F le milieu du côté $[BC]$. Déterminer les valeurs exactes des produits scalaires suivants.

1. $\vec{DA} \cdot \vec{DB}$
2. $\vec{DC} \cdot \vec{DF}$
3. $\vec{DA} \cdot \vec{DC}$
4. $\vec{DE} \cdot \vec{DF}$
5. $\vec{DF} \cdot \vec{DB}$



Exercice 14

1. A, B et C étant trois points distincts du plan, rappeler une expression de $\vec{AB} \cdot \vec{AC}$ utilisant un projeté orthogonal. On illustrera cette relation par un schéma.

2. $ABCD$ est un rectangle de centre O tel que $AB = 2$ et $AD = 6$. Calculer les produits scalaires suivants.

- a. $\vec{AB} \cdot \vec{AC}$
- b. $\vec{AD} \cdot \vec{AB}$
- c. $\vec{AD} \cdot \vec{CB}$
- d. $\vec{AC} \cdot \vec{BC}$
- e. $\vec{DO} \cdot \vec{DC}$
- f. $\vec{OA} \cdot \vec{AD}$

Exercice 15

Dans chaque cas, calculer $\vec{AB} \cdot \vec{AC}$.

- 1.
- 2.
- 3.
- 4.

Propriétés

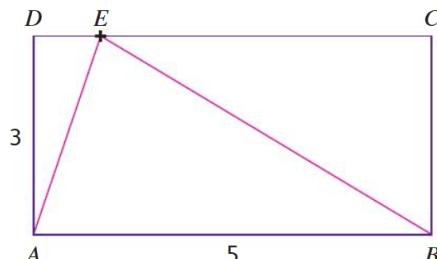
Exercice 16

Soient \vec{u} et \vec{v} deux vecteurs. Simplifier les expressions suivantes.

1. $(3\vec{u}) \cdot (2\vec{v})$
2. $\left(\frac{7}{3}\vec{u}\right) \cdot (-6\vec{v})$
3. $\vec{u} \cdot (\vec{u} - \vec{v})$
4. $(\vec{u} + \vec{v})^2$

Exercice 17

$ABCD$ est un rectangle tel que $AB = 5$ et $AD = 3$. E est le point de $[CD]$ tel que $DE = 1$.



1. En utilisant des décompositions vectorielles et la relation de Chasles, montrer que :

$$\vec{EA} \cdot \vec{EB} = \vec{ED} \cdot \vec{EC} + \vec{DA}^2$$

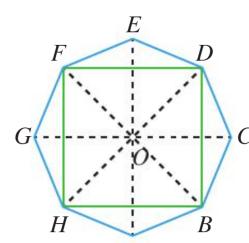
2. En déduire la valeur du produit scalaire $\vec{EA} \cdot \vec{EB}$.

3. Justifier alors que $\cos \widehat{AEB} = \frac{1}{\sqrt{10}}$.

En déduire une mesure en degré de l'angle \widehat{AEB} (on donnera une valeur arrondie au degré près).

Exercice 18

61. On considère un octogone régulier $ABCDEFGH$ inscrit dans un cercle de centre O et de rayon 2. Déterminer les produits scalaires suivants.

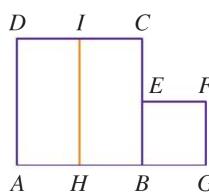


1. $\vec{OA} \cdot \vec{OB}$
2. $\vec{OD} \cdot \vec{OH}$
3. $\vec{OF} \cdot \vec{DC}$
4. $\vec{GC} \cdot \vec{AE}$
5. $\vec{CO} \cdot \vec{CD}$
6. $\vec{HD} \cdot \vec{FB}$

Exercice 19

Sur la figure ci-contre, $ABCD$ est un carré de côté 10. Les points E , I et H sont des milieux des côtés de $ABCD$. $BEFG$ est un carré. Calculer les produits scalaires :

1. $\vec{AH} \cdot \vec{FE}$
2. $\vec{AE} \cdot \vec{BG}$
3. $\vec{AH} \cdot \vec{DG}$
4. $\vec{DB} \cdot \vec{FG}$
5. $\vec{IB} \cdot \vec{HF}$
6. $\vec{BI} \cdot \vec{AC}$



Démonstrations

Exercice 20

1. En remarquant que $\|\vec{u} + \vec{v}\|^2 = (\vec{u} + \vec{v})^2$ et en utilisant la bilinéarité du produit scalaire, montrer l'identité $\|\vec{u} + \vec{v}\|^2 = \|\vec{u}\|^2 + 2\vec{u} \cdot \vec{v} + \|\vec{v}\|^2$.

2. De la même manière, exprimer $(\vec{u} + \vec{v}) \cdot (\vec{u} - \vec{v})$ et $\|\vec{u} - \vec{v}\|^2$ en fonction de $\|\vec{u}\|^2$, $\|\vec{v}\|^2$ et $\vec{u} \cdot \vec{v}$.

Exercice 21

Soient \vec{u} et \vec{v} deux vecteurs du plan.

1. En s'inspirant de la démonstration de la relation $\vec{u} \cdot \vec{v} = \frac{1}{2} [\|\vec{u} + \vec{v}\|^2 - \|\vec{u}\|^2 - \|\vec{v}\|^2]$ vue dans le cours, démontrer que :

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \frac{1}{2} [\|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2 - \|\vec{u} - \vec{v}\|^2]$$

2. En déduire alors que :

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \frac{1}{4} [\|\vec{u} + \vec{v}\|^2 - \|\vec{u} - \vec{v}\|^2]$$

Exercice 22

Dans le plan muni d'un repère orthonormé, on considère $\vec{u} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ et $\vec{v} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$ deux vecteurs du plan.

1. Exprimer $\|\vec{u}\|^2$, $\|\vec{v}\|^2$ et $\|\vec{u} + \vec{v}\|^2$ en fonction de x , x' , y et y' .

2. En utilisant la relation :

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \frac{1}{2} [\|\vec{u} + \vec{v}\|^2 - \|\vec{u}\|^2 - \|\vec{v}\|^2]$$

démontrer alors que $\vec{u} \cdot \vec{v} = xx' + yy'$.

Coordonnées

Exercice 23

Le plan est muni d'un repère orthonormé. Dans chaque cas, calculer le produit scalaire $\vec{u} \cdot \vec{v}$.

1. $\vec{u} \begin{pmatrix} 4 \\ 9 \end{pmatrix}$ et $\vec{v} \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \end{pmatrix}$
2. $\vec{u} \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix}$ et $\vec{v} \begin{pmatrix} -2 \\ 5 \end{pmatrix}$

Exercice 24

Préciser si les affirmations suivantes sont vraies ou fausses. Justifier.

Dans un repère orthonormé, soient $\vec{u} \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \end{pmatrix}$, $\vec{v} \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$ et $\vec{w} \begin{pmatrix} 6 \\ -2 \end{pmatrix}$ et A , B et C tels que $\vec{AB} = \vec{u}$ et $\vec{AC} = \vec{v}$.

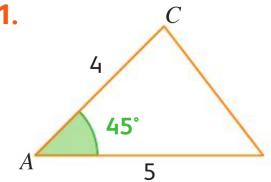
$$1. \|\vec{u}\| = \sqrt{13} \quad 2. \vec{u} \cdot \vec{v} = -9 \quad 3. \vec{v} \cdot \vec{w} = 0$$

$$4. \|\vec{u} + \vec{v}\|^2 = 29 \quad 5. \cos \widehat{BAC} = \frac{3}{\sqrt{130}}$$

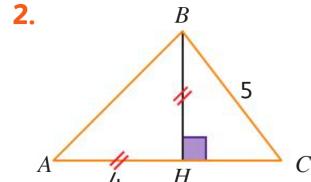
Exercice 25

Calculer $\vec{AB} \cdot \vec{AC}$

1.



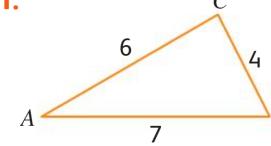
2.



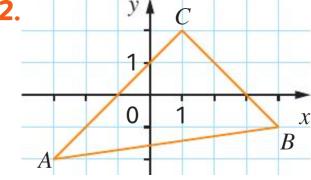
Exercice 26

Calculer $\vec{AB} \cdot \vec{AC}$

1.



2.



Exercice 27

Dans le plan muni d'un repère orthonormé, on considère les vecteurs $\vec{u} \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix}$ et $\vec{v} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$.

$$1. \text{ Calculer } \vec{u} \cdot \vec{v}, \|\vec{u}\| \text{ et } \|\vec{v}\|.$$

2. Calculer de deux façons les nombres :

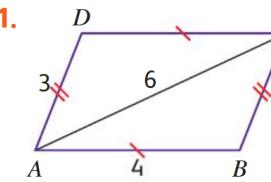
$$\|\vec{u} + \vec{v}\|^2 \text{ et } \|\vec{u} - \vec{v}\|^2$$

3. Calculer de deux façons $(\vec{u} + \vec{v}) \cdot (\vec{u} - \vec{v})$.

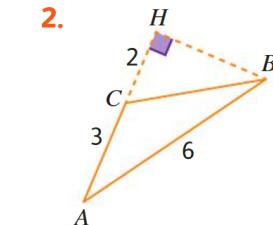
Exercice 28

Calculer $\vec{AB} \cdot \vec{AC}$

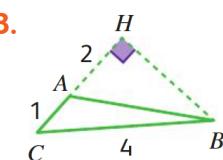
1.



2.



3.



4.

