

# TD - Chapitre 6 - EDS Maths - 1ère

C.1

- ① La fonction  $f$  admet pour fonction dérivée :

$$\begin{aligned} f'(x) &= 5 \times 2x + 2 \times 1 + 0 \\ &= 10x + 2 \end{aligned}$$

- ② La fonction  $g$  admet pour fonction dérivée :

$$\begin{aligned} g'(x) &= 3 \times 4x^3 - 5 \times 1 + 0 \\ &= 12x^3 - 5 \end{aligned}$$

- ③ La fonction  $h$  admet pour fonction dérivée :

$$\begin{aligned} h'(x) &= 0 - 3 \times 2x \\ &= -6x \end{aligned}$$

- ④ La fonction  $j$  admet pour fonction dérivée :

$$\begin{aligned} j'(x) &= 3 \times 2x - 1 + 0 \\ &= 6x - 1 \end{aligned}$$

C.2

- ① La fonction  $f$  est une fonction polynôme qui admet pour dérivée :

$$\begin{aligned} f'(x) &= (5 \cdot x^4) + 3 \cdot (2 \cdot x) - 1 + 0 \\ &= 5 \cdot x^4 + 6 \cdot x - 1 \end{aligned}$$

- ② La fonction  $f$  est une fonction polynomiale qui admet pour dérivée :

$$\begin{aligned} f'(x) &= 2 \cdot (7 \cdot x^6) - (2 \cdot x) - 2 + 0 \\ &= 14 \cdot x^6 - 2 \cdot x - 2 \end{aligned}$$

- C.3 La dérivée  $f'$  de la fonction  $f$  a pour expression :

$$f'(x) = \frac{5}{3} \cdot (3 \cdot x^2) - \frac{2}{3} \cdot (2 \cdot x) + 3 \times 1 = 5 \cdot x^2 - \frac{4}{3} \cdot x + 3$$

C.4

- ① La dérivée de la fonction  $f$  admet pour expression :

$$f'(x) = -3 + 0$$

- ② La dérivée de la fonction  $g$  admet pour expression :

$$g'(x) = 4 \times (2x) + 0 = 8 \cdot x$$

- ③ La dérivée de la fonction  $h$  a pour expression :

$$h(x) = 2 \times (2 \cdot x) + 3 = 4 \cdot x + 3$$

- ④ La dérivée de la fonction  $j$  admet pour expression :

$$j'(x) = 5 \times (3 \cdot x^2) - 2 \times (2 \cdot x) = 15 \cdot x^2 - 4 \cdot x$$

C.5

- ① La fonction dérivée de la fonction  $h$  est :

$$h'(x) = 2 \times 2x = 4x$$

On en déduit la valeur du nombre dérivé de la fonction  $h$  en 1 :

$$h'(1) = 4 \times 1$$

- ② La fonction dérivée de la fonction  $j$  est :

$$j'(x) = 5 - 3 \times 2x = -6x + 5$$

On en déduit la valeur du nombre dérivé de la fonction  $j$  en 1 :

$$j'(1) = -6 \times 1 + 5$$

- ③ La dérivée de la fonction  $k$  admet pour expression :

$$k'(x) = -2 \times (2 \cdot x) + 2 = -4 \cdot x + 2$$

- ④ La fonction  $k$  admet pour expression :

$$k'(x) = 3 \cdot (2x) - 2 = 6x - 2$$

C.6

- ① On a les transformations algébriques suivantes :

$$\begin{aligned} f(x) &= (3 \cdot x + 11)(4 - x) = 12x - 3 \cdot x^2 + 44 - 11x \\ &= -3 \cdot x^2 + x + 44 \end{aligned}$$

Cette expression de la fonction sous la forme d'une somme permet d'obtenir facilement l'expression de sa fonction dérivée :

Ainsi, la dérivée de la fonction  $f$  est :

$$f'(x) = -3 \times 2 \cdot x + 1 = -6 \cdot x + 1$$

- ② On a le développement suivant :

$$\begin{aligned} g(x) &= (x + 1)(2 \cdot x - 4) = 2x^2 - 4 \cdot x + 2 \cdot x - 4 \\ &= 2x^2 - 2 \cdot x - 4 \end{aligned}$$

L'expression de la fonction  $g$  sous la forme d'une expression permet d'obtenir facilement l'expression de sa dérivée :

$$g'(x) = 4 \cdot x - 2$$

C.7

- ① a) La fonction dérivée  $f'$  de la fonction  $f$  admet pour expression :

$$f'(x) = \frac{1}{2} \cdot (3 \cdot x^2) - \frac{3}{2} \cdot (2 \cdot x) + 1 = \frac{3}{2} \cdot x^2 - 3 \cdot x + 1$$

- b) On en déduit le nombre dérivé en 2 de la fonction  $f$  :

$$f'(2) = \frac{3}{2} \times 2^2 - 3 \times 2 + 1 = 6 - 6 + 1 = 1$$

- ② a) Le point de  $\mathcal{C}_f$  ayant pour abscisse 2 a pour coordonnées  $(2; f(2))$ .

Déterminons l'image du nombre 2 par la fonction  $f$  :

$$f(2) = \frac{1}{2} \times 2^3 - \frac{3}{2} \times 2^2 + 2 + 1 = 4 - 6 + 2 + 1 = 1$$

Ainsi, le point  $A$  a pour coordonnées  $A(2; 1)$ .

- b) La formule donnant l'équation réduite d'une tangente permet d'obtenir l'équation réduite de la tangente ( $T$ ) :

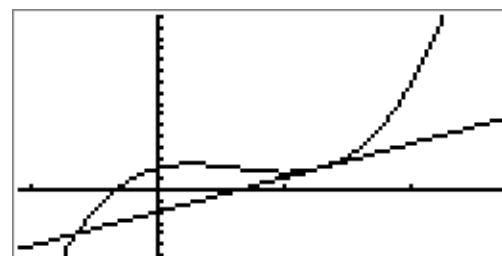
$$y = f'(2) \cdot (x - 2) + f(2)$$

$$y = 1 \cdot (x - 2) + 1$$

$$y = x - 2 + 1$$

$$y = x - 1$$

- ③ Voici la représentation des deux courbes de ces fonctions à l'aide d'une calculatrice :



C.8

- ① a) La fonction  $f'$  admet pour expression :

$$f'(x) = -\frac{2}{3} \cdot (3 \cdot x^2) - 3 \cdot (2 \cdot x) + 1 = -2 \cdot x^2 - 6 \cdot x + 1$$

- b) Le nombre dérivé de la fonction  $f$  en  $-3$  a pour valeur :

$$f'(-3) = -2 \cdot (-3)^2 - 6 \cdot (-3) + 1 = -18 + 18 + 1 = 1$$

- ② a) La courbe  $\mathcal{C}_f$  admet un seul point ayant  $-3$  pour abscisse. celui-ci a pour coordonnées :  $(-3; f(-3))$

Pour donner ses coordonnées, déterminons l'image du nombre  $-3$  par la fonction  $f$  :

$$\begin{aligned} f(-3) &= -\frac{2}{3} \cdot (-3)^3 - 3 \cdot (-3)^2 + (-3) + 10 \\ &= 18 - 27 - 3 + 10 = -2 \end{aligned}$$

Le point  $A$  a pour coordonnées :  $A(-3; -2)$

- b** D'après la formule donnant l'équation réduite de la tangente à une courbe, on a l'équation réduite de la tangente ( $T$ ) au point d'abscisse  $-3$ :

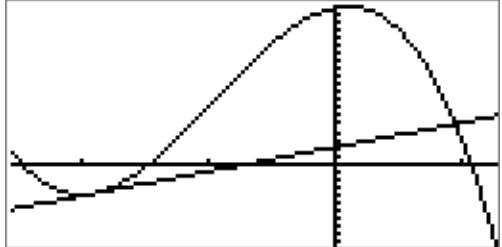
$$y = f'(-3) \cdot [x - (-3)] + f(-3)$$

$$y = 1 \cdot (x + 3) + (-2)$$

$$y = x + 3 - 2$$

$$y = x + 1$$

- 3** Voici la représentation obtenue à l'aide d'une calculatrice:



**C.9**

- 1** La fonction  $f$  a pour expression :

$$f(x) = 3 \times x^2$$

Ainsi, la fonction  $f'$  admet pour expression :

$$f'(x) = 3 \times (2x) = 6 \cdot x$$

- 2** La fonction  $g$  a pour expression :

$$g(x) = \frac{1}{12}x^6 = \frac{1}{12} \times x^6$$

Ainsi, la fonction  $g'$  admet pour expression :

$$g'(x) = \frac{1}{12} \times (6 \cdot x^5) = \frac{1}{2} \cdot x^5$$

- 3** La fonction  $h$  a pour expression :

$$h(x) = 4\sqrt{x} = 4 \times \sqrt{x}$$

Ainsi, la fonction  $h'$  admet pour expression :

$$h'(x) = 4 \times \frac{1}{2\sqrt{x}} = \frac{2}{\sqrt{x}}$$

- 4** La fonction  $j$  a pour expression :

$$j(x) = \frac{\sqrt{x}}{2} = \frac{1}{2} \times \sqrt{x}$$

Ainsi, la fonction  $j'$  admet pour expression :

$$j'(x) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2\sqrt{x}} = \frac{1}{4\sqrt{x}}$$

- 5** La fonction  $k$  a pour expression :

$$k(x) = \frac{1}{2x} = \frac{1}{2} \times \frac{1}{x}$$

Ainsi, la fonction  $k'$  admet pour expression :

$$k'(x) = \frac{1}{2} \times \left(-\frac{1}{x^2}\right) = -\frac{1}{2x^2}$$

- 6** La fonction  $\ell$  a pour expression :

$$\ell(x) = -\frac{2}{x} = -2 \times \frac{1}{x}$$

Ainsi, la fonction  $\ell'$  admet pour expression :

$$\ell'(x) = -2 \times \left(-\frac{1}{x^2}\right) = \frac{2}{x^2}$$

**C.10**

- 1** La fonction  $f'$  dérivée de la fonction  $f$  admet pour expression :

$$f'(x) = \frac{1}{x} - x^2 = \left(-\frac{1}{x^2}\right) - 2 \cdot x = \frac{-1}{x^2} - \frac{(2 \cdot x) \cdot x^2}{x^2} = \frac{-1 - 2 \cdot x^3}{x^2}$$

- 2** La fonction  $f'$  dérivée de la fonction  $f$  admet pour expression :

$$\begin{aligned} f'(x) &= 1 + 2 \cdot x + \left(-\frac{1}{x^2}\right) = \frac{x^2}{x^2} + \frac{(2 \cdot x) \cdot x^2}{x^2} - \frac{1}{x^2} \\ &= \frac{x^2 + 2 \cdot x^3 - 1}{x^2} = \frac{2 \cdot x^3 + x^2 - 1}{x^2} \end{aligned}$$

- 3** La fonction  $f'$  dérivée de la fonction  $f$  admet pour expression :

$$f'(x) = 2 \cdot x + \frac{1}{2 \cdot \sqrt{x}} = \frac{(2 \cdot x) \cdot (2 \cdot \sqrt{x})}{2 \cdot \sqrt{x}} + \frac{1}{2 \cdot \sqrt{x}} = \frac{4 \cdot x \cdot \sqrt{x} + 1}{2 \cdot \sqrt{x}}$$

**C.11**

- 1** On a :

$$f'(x) = 1 + \left(-\frac{1}{x^2}\right) = 1 - \frac{1}{x^2}$$

On peut également obtenir l'expression suivante :

$$= \frac{x^2 - 1}{x^2}$$

- 2** On a :

$$g'(x) = \frac{2}{3} \cdot 3 \cdot x^2 - \frac{1}{2\sqrt{x}} = 2 \cdot x^2 - \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

On peut également obtenir l'expression suivante :

$$= \frac{4 \cdot x^2 \sqrt{x} - 1}{2 \cdot \sqrt{x}}$$

- 3** On a :

$$h'(x) = 3 \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}} - 2 \times 4 \cdot x^3 = \frac{3}{2\sqrt{x}} - 8x^3$$

On peut également obtenir l'expression suivante :

$$= \frac{3 - 16 \cdot x^3 \cdot \sqrt{x}}{2 \cdot \sqrt{x}}$$

- 4** On a la simplification :

$$j(x) = \frac{3}{x} - \frac{1}{x} = \frac{2}{x} = 2 \cdot \frac{1}{x}$$

On a :

$$j'(x) = 2 \cdot \left(-\frac{1}{x^2}\right) = -\frac{2}{x^2}$$

**C.12**

- 1** La dérivée de la fonction  $f$  a pour expression :

$$f'(x) = 1 - \left(-\frac{1}{x^2}\right) = 1 + \frac{1}{x^2} = \frac{x^2 + 1}{x^2}$$

- 2** La fonction  $g$  admet pour expression :

$$g(x) = 2\sqrt{x} = 2 \times \sqrt{x}$$

Ainsi, sa dérivée  $g'$  admet pour expression :

$$g'(x) = 2 \times \frac{1}{2\sqrt{x}} = \frac{1}{\sqrt{x}}$$

- 3** La fonction  $h$  admet pour expression :

$$h(x) = \frac{3}{x} - 2\sqrt{x} = 3 \times \frac{1}{x} - 2 \times \sqrt{x}$$

Ainsi, sa dérivée  $h'$  admet pour expression :

$$h'(x) = 3 \times \left(-\frac{1}{x^2}\right) - 2 \times \frac{1}{2\sqrt{x}} = -\frac{3}{x^2} - \frac{1}{\sqrt{x}}$$

$$= -\frac{3\sqrt{x}}{x^2\sqrt{x}} - \frac{x^2}{x^2\sqrt{x}} = \frac{-3\sqrt{x} - x^2}{x^2\sqrt{x}} = -\frac{3\sqrt{x} + x^2}{x^2\sqrt{x}}$$

- 4** La fonction  $j$  admet pour expression :

$$j(x) = 2 \cdot x^3 + \frac{2}{x} = 2 \times x^3 + 2 \times \frac{1}{x}$$

Ainsi, sa dérivée  $j'$  admet pour expression :

$$\begin{aligned} j'(x) &= 2 \times (3x^2) + 2 \times \left(-\frac{1}{x^2}\right) = 6 \cdot x^2 - \frac{2}{x^2} \\ &= \frac{6 \cdot x^4}{x^2} - \frac{2}{x^2} = \frac{6 \cdot x^4 - 2}{x^2} \end{aligned}$$

C.13

a)  $f(1) = u(1) \cdot v(1) = (3 \times 1 - 2)(2 - 1)$   
 $= (3 - 2) \times 1 = 1 \times 1 = 1$

b)  $f(3) = u(3) \cdot v(3) = (3 \times 3 - 2)(2 - 3)$   
 $= (9 - 2) \times (-1) = -7$

c)  $f\left(-\frac{1}{3}\right) = u\left(-\frac{1}{3}\right) \cdot v\left(-\frac{1}{3}\right) = \left[3 \times \left(-\frac{1}{3}\right) - 2\right] \left[2 - \left(-\frac{1}{3}\right)\right]$   
 $= (-1 - 2)\left(2 + \frac{1}{3}\right) = -3\left(\frac{6}{3} + \frac{1}{3}\right) = -3 \times \frac{7}{3} = -7$

C.14

- 1) L'expression de chacune de ces fonctions est donnée sous la forme d'un produit  $u \cdot v$ . Compléter le tableau ci-dessous afin d'identifier les deux facteurs de ce produit et leur dérivée respective.

$u(x)$	$v(x)$	$u'(x)$	$v'(x)$
$3 \cdot x^2 + 3x$	$2 \cdot x + 2$	$6 \cdot x + 3$	2
$x^8$	$3 - x$	$8 \cdot x^7$	-1

- 2) a) Avec les identifications faites à la question précédente et la formule de dérivation d'un produit, on obtient l'expression de la fonction dérivée  $f'$ :

$$\begin{aligned} f'(x) &= u'(x) \cdot v(x) + u(x) \cdot v'(x) \\ &= (6 \cdot x + 3)(2 \cdot x + 2) + (3 \cdot x^2 + 3 \cdot x) \times 2 \\ &= 12 \cdot x^2 + 12 \cdot x + 6 \cdot x + 6 + 6 \cdot x^2 + 6 \cdot x \\ &= 18 \cdot x^2 + 24 \cdot x + 6 \end{aligned}$$

- b) Avec les identifications faites à la question précédente et la formule de dérivation d'un produit, on obtient l'expression de la fonction dérivée  $f'$ :

$$\begin{aligned} f'(x) &= u'(x) \cdot v(x) + u(x) \cdot v'(x) \\ &= 8 \cdot x^7 \cdot (3 - x) + x^8 \cdot (-1) \\ &= x^7 \cdot (24 - 8x) + x^7 \cdot (-x) \\ &= x^7 \cdot [(24 - 8x) + (-x)] \\ &= x^7 \cdot (24 - 9x) \end{aligned}$$

C.15

- 1) Compléter le tableau suivant :

$u(x)$	$v(x)$	$u'(x)$	$v'(x)$
$3 \cdot x^2 - 2$	$8 - x$	$6 \cdot x$	-1

- 2) La fonction  $f$  s'écrivant comme le produit de deux facteurs, sa fonction dérivée s'écrit sous la forme :

$$\begin{aligned} f'(x) &= u'(x) \cdot v(x) + u(x) \cdot v'(x) = 6 \cdot x \cdot (8 - x) + (3 \cdot x^2 - 2) \cdot (-1) \\ &= 48 \cdot x - 6 \cdot x^2 - 3 \cdot x^2 + 2 = -9 \cdot x^2 + 48 \cdot x + 2 \end{aligned}$$

C.16

- 1) L'expression de la fonction  $f$  est donnée sous la forme du produit des fonctions  $u$  et  $v$  où :

$$u(x) = x^5 ; \quad v(x) = x^2 - 1$$

qui admettent les fonctions dérivées :

$$u'(x) = 5 \cdot x^4 ; \quad v'(x) = 2x$$

Ainsi, la fonction  $g$  admet pour dérivée la fonction  $g'$  dont l'expression est :

$$\begin{aligned} f'(x) &= u'(x) \cdot v(x) + u(x) \cdot v'(x) = 5 \cdot x^4 \cdot (x^2 - 1) + x^5 \cdot (2x) \\ &= 5 \cdot x^6 - 5 \cdot x^4 + 2 \cdot x^6 = 7 \cdot x^6 - 5 \cdot x^4 \end{aligned}$$

- 2) L'expression de la fonction  $g$  est donnée sous la forme du produit des fonctions  $u$  et  $v$  définies par :

$$\begin{aligned} u(x) &= 2 \cdot x^2 - 5 \cdot x + 1 ; \quad v(x) = 1 - x^2 \\ \text{qui admettent pour dérivées :} \quad u'(x) &= 4 \cdot x - 5 ; \quad v'(x) = -2 \cdot x \end{aligned}$$

La formule de dérivation d'un produit permet d'obtenir l'expression de la fonction  $g'$  dérivée de la fonction  $g$ :

$$\begin{aligned} g'(x) &= u'(x) \cdot v(x) + u(x) \cdot v'(x) \\ &= (4 \cdot x - 5)(1 - x^2) + (2 \cdot x^2 - 5 \cdot x + 1)(-2 \cdot x) \\ &= 4 \cdot x - 4 \cdot x^3 - 5 + 5 \cdot x^2 - 4 \cdot x^3 + 10 \cdot x^2 - 2 \cdot x \\ &= -8 \cdot x^3 + 15 \cdot x^2 + 2 \cdot x - 5 \end{aligned}$$

C.17

- 1) Voici le tableau complété :

$u(x)$	$v(x)$	$u'(x)$	$v'(x)$
$\frac{1}{x}$	$x^2 - 1$	$-\frac{1}{x^2}$	$2x$
$5x + \frac{2}{x}$	$3 - 2x^3$	$5 - \frac{2}{x^2}$	$-6x^2$

- 2) a) La fonction  $f$  s'écrivant comme le produit des deux facteurs  $u$  et  $v$ , sa fonction dérivée s'écrit sous la forme :

$$\begin{aligned} f'(x) &= u'(x) \cdot v(x) + u(x) \cdot v'(x) \\ &= -\frac{1}{x^2} \cdot (x^2 - 1) + \frac{1}{x} \cdot 2x = \frac{-(x^2 - 1)}{x^2} + 2 \\ &= \frac{-x^2 + 1 + 2 \cdot x^2}{x^2} = \frac{x^2 + 1}{x^2} \end{aligned}$$

- b) La fonction  $g$  s'écrivant comme le produit des deux facteurs  $u$  et  $v$ , sa fonction dérivée s'écrit sous la forme :

$$\begin{aligned} g'(x) &= u'(x) \cdot v(x) + u(x) \cdot v'(x) \\ &= \left(5 - \frac{2}{x^2}\right)(3 - 2x^3) + \left(5x + \frac{2}{x}\right)(-6x^2) \\ &= 15 - 10x^3 - \frac{6}{x^2} + 4x - 30x^3 - 12x \\ &= -40x^3 - 8x + 15 - \frac{6}{x^2} \end{aligned}$$

C.18

- 1) Voici le tableau complété :

$u(x)$	$v(x)$	$u'(x)$	$v'(x)$
$x$	$\sqrt{x}$	1	$\frac{1}{2\sqrt{x}}$
$x^2 + 1$	$\sqrt{x}$	$2x$	$\frac{1}{2\sqrt{x}}$

- 2) a) La fonction  $f$  s'écrivant comme le produit de deux facteurs, sa fonction dérivée  $f'$  admet pour expression :

$$\begin{aligned}
f'(x) &= u'(x) \cdot v(x) + u(x) \cdot v'(x) = 1 \cdot \sqrt{x} + x \cdot \frac{1}{2 \cdot \sqrt{x}} \\
&= \sqrt{x} + \frac{x}{2 \cdot \sqrt{x}} = \frac{2 \cdot \sqrt{x} \times \sqrt{x}}{2 \cdot \sqrt{x}} + \frac{x}{2 \cdot \sqrt{x}} = \frac{2 \cdot x + x}{2 \cdot \sqrt{x}} \\
&= \frac{3 \cdot x}{2 \cdot \sqrt{x}} = \frac{3 \cdot \sqrt{x} \cdot \sqrt{x}}{2 \cdot \sqrt{x}} = \frac{3 \cdot \sqrt{x}}{2}
\end{aligned}$$

(b) La fonction  $g$  s'écritant comme le produit de deux facteurs, sa fonction dérivée  $g'$  admet pour expression :

$$\begin{aligned}
g'(x) &= u'(x) \cdot v(x) + u(x) \cdot v'(x) = 2x \cdot \sqrt{x} + (x^2 + 1) \cdot \frac{1}{2 \cdot \sqrt{x}} \\
&= \frac{4x \cdot \sqrt{x} \times \sqrt{x}}{2 \cdot \sqrt{x}} + \frac{x^2 + 1}{2 \cdot \sqrt{x}} = \frac{4x^2}{2 \cdot \sqrt{x}} + \frac{x^2 + 1}{2 \cdot \sqrt{x}} \\
&= \frac{4x^2 + x^2 + 1}{2 \cdot \sqrt{x}} = \frac{5x^2 + 1}{2 \cdot \sqrt{x}}
\end{aligned}$$

### C.19

(a)  $\left(\frac{u}{v}\right)(0) = \frac{u(0)}{v(0)} = \frac{3 \times 0 - 2}{2 - 0} = \frac{-2}{2} = -1$

(b) L'image de 2 par la fonction  $v$  est nulle :

$$v(2) = 2 - 2 = 0$$

Ainsi, la fonction  $g$ , définie par le quotient de  $u$  par  $v$  n'est pas définie pour  $x=2$  car son dénominateur sera nul.

$$\begin{aligned}
(c) \left(\frac{u}{v}\right)\left(-\frac{1}{4}\right) &= \frac{u\left(-\frac{1}{4}\right)}{v\left(-\frac{1}{4}\right)} = \frac{3 \cdot \left(-\frac{1}{4}\right) - 2}{2 - \left(-\frac{1}{4}\right)} = \frac{-\frac{3}{4} - 2}{2 + \frac{1}{4}} \\
&= \frac{-\frac{3}{4} - \frac{8}{4}}{2 + \frac{1}{4}} = \frac{-\frac{11}{4}}{\frac{8}{4} + \frac{1}{4}} = \frac{-\frac{11}{4}}{\frac{9}{4}} = -\frac{11}{4} \times \frac{4}{9} = -\frac{11}{9}
\end{aligned}$$

### C.20

(1) Compléter le tableau suivant :

$u$	$v$	$u'$	$v'$
$5x + 2$	$3x - 2$	5	3
$x^2 - 3$	$x + 1$	$2x$	1

(2) • L'expression de la dérivée  $f'$  est donnée par la formule :

$$\begin{aligned}
f'(x) &= \frac{u'(x) \cdot v(x) - u(x) \cdot v'(x)}{[v(x)]^2} = \frac{5 \cdot (3x - 2) - (5x + 2) \cdot 3}{(3x - 2)^2} \\
&= \frac{15x - 10 - 15x - 6}{(3x - 2)^2} = \frac{-16}{(3x - 2)^2}
\end{aligned}$$

• L'expression de la dérivée  $f'$  est donnée par la formule :

$$\begin{aligned}
f'(x) &= \frac{u'(x) \cdot v(x) - u(x) \cdot v'(x)}{[v(x)]^2} = \frac{2x \cdot (x + 1) - (x^2 - 3) \cdot 1}{(x + 1)^2} \\
&= \frac{2x^2 + 2x - x^2 + 3}{(x + 1)^2} = \frac{x^2 + 2x + 3}{(x + 1)^2}
\end{aligned}$$

### C.21

(1) Par identification du numérateur et dénominateur de chaque quotient, voici le tableau complété :

$u(x)$	$v(x)$	$u'(x)$	$v'(x)$
$3 - 2x$	$x + 1$	-2	1
$x^2$	$2x + 1$	$2x$	2

(2)

• La formule de dérivation d'un quotient permet d'obtenir l'expression de la fonction  $f'$  :

$$\begin{aligned}
f'(x) &= \frac{u'(x) \cdot v(x) - u(x) \cdot v'(x)}{[v(x)]^2} = \frac{-2 \cdot (x + 1) - (3 - 2x) \times 1}{(x + 1)^2} \\
&= \frac{-2x - 2 - 3 + 2x}{(x + 1)^2} = \frac{-5}{(x + 1)^2}
\end{aligned}$$

• La formule de dérivation d'un quotient permet d'obtenir l'expression de la fonction  $f'$  :

$$\begin{aligned}
f'(x) &= \frac{u'(x) \cdot v(x) - u(x) \cdot v'(x)}{[v(x)]^2} \\
&= \frac{2x \cdot (2x + 1) - x^2 \cdot (2)}{(2x + 1)^2} = \frac{4x^2 + 2x - 2x^2}{(2x + 1)^2} = \frac{2x^2 + 2x}{(2x + 1)^2}
\end{aligned}$$

C.22 L'expression de la fonction  $f$  est donnée sous la forme du quotient des fonctions  $u$  et  $v$  telles que :

$$u(x) = 3 ; v(x) = 2 - x$$

qui admettent pour dérivées :

$$u'(x) = 0 ; v'(x) = -1$$

La formule de dérivation d'un quotient permet d'obtenir l'expression de la fonction  $f'$ , dérivée de la fonction  $f$  :

$$\begin{aligned}
f'(x) &= \frac{u'(x) \cdot v(x) - u(x) \cdot v'(x)}{[v(x)]^2} = \frac{0 \times (2 - x) - 3 \times (-1)}{(2 - x)^2} \\
&= \frac{3}{(2 - x)^2}
\end{aligned}$$

C.23 La fonction  $f$  est définie par le produit des fonctions  $u$  et  $v$  définies par :

$$u(x) = x^2 + x + 1 ; v(x) = 2 \cdot x^2 - 1$$

qui admettent pour dérivées :

$$u'(x) = 2x + 1 ; v'(x) = 4 \cdot x$$

La formule de dérivation d'un quotient permet d'obtenir l'expression de la fonction  $f'$ , dérivée de la fonction  $f$  :

$$\begin{aligned}
f'(x) &= \frac{u'(x) \cdot v(x) - u(x) \cdot v'(x)}{[v(x)]^2} \\
&= \frac{(2 \cdot x + 1) \cdot (2 \cdot x^2 - 1) - (x^2 + x + 1) \cdot 4 \cdot x}{(2 \cdot x^2 - 1)^2} \\
&= \frac{4 \cdot x^3 - 2 \cdot x + 2 \cdot x^2 - 1 - 4 \cdot x^3 - 4 \cdot x^2 - 4 \cdot x}{(2 \cdot x^2 - 1)^2} \\
&= \frac{-2 \cdot x^2 - 6 \cdot x - 1}{(2 \cdot x^2 - 1)^2}
\end{aligned}$$

C.24 La fonction  $f$  est définie par le produit des fonctions  $u$  et  $v$  définies par :

$$u(x) = 4 ; v(x) = x^2 - 2 \cdot x + 3$$

qui admettent pour dérivées :

$$u'(x) = 0 ; v'(x) = 2 \cdot x - 2$$

La formule de dérivation d'un quotient permet d'obtenir l'expression de la fonction  $f'$ , dérivée de la fonction  $f$  :

$$\begin{aligned}
f'(x) &= \frac{u'(x) \cdot v(x) - u(x) \cdot v'(x)}{[v(x)]^2} = \frac{0 \cdot (x^2 - 2 \cdot x + 3) - 4 \cdot (2 \cdot x - 2)}{(x^2 - 2 \cdot x + 3)^2} \\
&= \frac{-8 \cdot x + 8}{(x^2 - 2 \cdot x + 3)^2}
\end{aligned}$$

C.25 La fonction  $f$  est définie par le quotient des fonctions  $u$  et  $v$  où :

$$u(x) = x^2 - 3x + 1 ; v(x) = 2 \cdot x + 1$$

qui admettent pour dérivées :

$$u'(x) = 2 \cdot x - 3 \quad ; \quad v'(x) = 2$$

Ainsi, la dérivée  $f'$  de la fonction  $f$  admet pour dérivée :

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{u'(x) \cdot v(x) - u(x) \cdot v'(x)}{[v(x)]^2} \\ &= \frac{(2 \cdot x - 3) \cdot (2 \cdot x + 1) - (x^2 - 3 \cdot x + 1) \cdot 2}{(2 \cdot x + 1)^2} \\ &= \frac{4x^2 + 2x - 6x - 3 - 2x^2 + 6x - 2}{(2 \cdot x + 1)^2} = \frac{2x^2 + 2x - 5}{(2 \cdot x + 1)^2} \end{aligned}$$

### C.26

- (1) Pour qu'un quotient soit défini, il faut que son dénominateur soit non-nul.

Etudions le polynôme  $x^2 - 5 \cdot x + 6$ . Ce polynôme admet pour discriminant :

$$\Delta = b^2 - 4 \cdot a \cdot c = (-5)^2 - 4 \times 1 \times 6 = 25 - 24 = 1$$

Le discriminant de ce polynôme étant strictement positif, ce polynôme admet les racines suivantes :

$$\begin{array}{ll} x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2 \cdot a} & x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2 \cdot a} \\ = \frac{-(-5) - 1}{2 \times 1} & = \frac{-(-5) + 1}{2 \times 1} \\ = \frac{5 - 1}{2} & = \frac{5 + 1}{2} \\ = \frac{4}{2} & = \frac{6}{2} \\ = 2 & = 3 \end{array}$$

On en déduit l'ensemble de définition de la fonction  $h$  :

$$\mathcal{D}_h = \mathbb{R} \setminus \{2; 3\}$$

- (2) L'expression de la fonction  $h$  est donnée sous la forme d'un quotient où :

$$u(x) = x^2 - 2 \cdot x + 1 \quad ; \quad v(x) = x^2 - 5 \cdot x + 6$$

qui admettent pour dérivée les deux fonctions :

$$u'(x) = 2 \cdot x - 2 \quad ; \quad v'(x) = 2 \cdot x - 5$$

La formule de dérivation d'un quotient permet d'obtenir l'expression de la fonction  $h'$  :

$$\begin{aligned} h'(x) &= \frac{u'(x) \cdot v(x) - u(x) \cdot v'(x)}{[v(x)]^2} \\ &= \frac{(2x - 2)(x^2 - 5 \cdot x + 6) - (x^2 - 2 \cdot x + 1)(2 \cdot x - 5)}{(x^2 - 5 \cdot x + 6)^2} \\ &= \frac{2x^3 - 10x^2 + 12x - 2x^2 + 10x - 12 - (2x^3 - 5x^2 - 4x^2 + 10x + 2x - 5)}{(x^2 - 5x + 6)^2} \\ &= \frac{2 \cdot x^3 - 12 \cdot x^2 + 22 \cdot x - 12 - (2 \cdot x^3 - 9 \cdot x^2 + 12 \cdot x - 5)}{(x^2 - 5 \cdot x + 6)^2} \\ &= \frac{2 \cdot x^3 - 12 \cdot x^2 + 22 \cdot x - 12 - 2 \cdot x^3 + 9 \cdot x^2 - 12 \cdot x + 5}{(x^2 - 5 \cdot x + 6)^2} \\ &= \frac{-3 \cdot x^2 + 10 \cdot x - 7}{(x^2 - 5 \cdot x + 6)^2} \end{aligned}$$

- (C.27) La fonction  $g$  est définie par le quotient des deux fonctions  $u$  et  $v$  définies par :

$$u(x) = 5 \cdot x - x^2 \quad ; \quad v(x) = 3 - x^2$$

qui admettent pour dérivées les fonctions :

$$u'(x) = 5 - 2 \cdot x \quad ; \quad v'(x) = -2 \cdot x$$

L'expression de la fonction  $g'$  dérivée de la fonction  $g$  est donnée par :

$$\begin{aligned} g'(x) &= \frac{u'(x) \cdot v(x) - u(x) \cdot v'(x)}{[v(x)]^2} \\ &= \frac{(5 - 2 \cdot x) \cdot (3 - x^2) - (5x - x^2) \cdot (-2 \cdot x)}{(3 - x^2)^2} \\ &= \frac{15 - 5 \cdot x^2 - 6 \cdot x + 2 \cdot x^3 + 10 \cdot x^2 - 2 \cdot x^3}{(3 - x^2)^2} \\ &= \frac{5 \cdot x^2 - 6 \cdot x + 15}{(3 - x^2)^2} \end{aligned}$$

- (C.28) L'expression de la fonction  $f$  est donnée sous la forme du quotient des fonctions  $u$  et  $v$  définie par :

$$u(x) = 2 \cdot x - 1 \quad ; \quad v(x) = x^2 + x$$

qui admettent pour dérivée :

$$u'(x) = 2 \quad ; \quad v'(x) = 2 \cdot x + 1$$

La formule de dérivation d'un quotient permet d'obtenir l'expression de la fonction  $f'$  :

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{u'(x) \cdot v(x) - u(x) \cdot v'(x)}{[v(x)]^2} \\ &= \frac{2 \times (x^2 + x) - (2 \cdot x - 1) \times (2 \cdot x + 1)}{(x^2 + x)^2} \\ &= \frac{2 \cdot x^2 + 2 \cdot x - (4 \cdot x^2 - 1)}{[x \cdot (x + 1)]^2} = \frac{-2 \cdot x^2 + 2 \cdot x + 1}{x^2 \cdot (x + 1)^2} \\ &= -\frac{2 \cdot x^2 - 2 \cdot x - 1}{x^2 \cdot (x + 1)^2} \end{aligned}$$

### C.29

- (a) La fonction  $f$  est définie par l'expression :

$$f(x) = u(4x - 2)$$

où la fonction  $u$  est définie par :

$$u(x) = x^7 \quad ; \quad u'(x) = 7 \cdot x^6$$

D'après la formule de dérivation de la composée par une fonction affine permet d'obtenir l'expression de la fonction  $f'$  :

$$f'(x) = 4 \times [7(4x - 2)^6] = 28 \cdot (4x - 2)^6$$

- (b) La fonction  $g$  est définie par l'expression :

$$g(x) = u(5 - 3x)$$

$$\text{où } u(x) = \frac{1}{x} \quad ; \quad u'(x) = -\frac{1}{x^2}$$

La formule de dérivation de la composée par une fonction affine permet d'obtenir l'expression de la fonction  $g'$  :

$$g'(x) = -3 \times \left[ -\frac{1}{(5 - 3x)^2} \right] = \frac{3}{(5 - 3x)^2}$$

### C.30

- (a) La fonction  $f$  est la composée de la fonction  $u$  par la fonction racine carrée où :

$$u(x) = \frac{1}{3}x - 2 \quad ; \quad u'(x) = \frac{1}{3}$$

La formule de dérivation de la fonction racine carrée permet d'obtenir l'expression de la fonction  $f$  :

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{u'(x)}{2\sqrt{u(x)}} = \frac{\frac{1}{3}}{2\sqrt{\frac{1}{3}x - 2}} = \frac{1}{3} \times \frac{1}{2\sqrt{\frac{1}{3}x - 2}} \\ &= \frac{1}{3 \times 2\sqrt{\frac{1}{3}x - 2}} = \frac{1}{6\sqrt{\frac{1}{3}x - 2}} \end{aligned}$$

- (b) La fonction  $g$  est définie par une expression de la forme :

$$g(x) = \sqrt{u(x)}$$

où  $u(x) = 3x - 1$  ;  $u'(x) = 3$

Ainsi, la fonction dérivée  $g'$  admet pour expression :

$$g'(x) = \frac{u'(x)}{2\sqrt{u(x)}} = \frac{3}{2\sqrt{3x-1}}$$

### C.31

(1) On a les transformations algébriques suivantes :

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \frac{\sqrt{5 \cdot (x+h)+1} - \sqrt{5 \cdot x+1}}{h}$$

Le facteur  $\sqrt{5 \cdot (x+h)+1} + \sqrt{5 \cdot x+1}$  est non-nul :

$$\begin{aligned} &= \frac{(\sqrt{5 \cdot (x+h)+1} - \sqrt{5 \cdot x+1})(\sqrt{5 \cdot (x+h)+1} + \sqrt{5 \cdot x+1})}{h \cdot (\sqrt{5 \cdot (x+h)+1} + \sqrt{5 \cdot x+1})} \\ &= \frac{(\sqrt{5 \cdot (x+h)+1})^2 - (\sqrt{5 \cdot x+1})^2}{h \cdot (\sqrt{5 \cdot (x+h)+1} + \sqrt{5 \cdot x+1})} \\ &= \frac{5 \cdot (x+h)+1 - (5 \cdot x+1)}{h \cdot (\sqrt{5 \cdot (x+h)+1} + \sqrt{5 \cdot x+1})} \\ &= \frac{5 \cdot x + 5 \cdot h + 1 - 5 \cdot x - 1}{h \cdot (\sqrt{5 \cdot (x+h)+1} + \sqrt{5 \cdot x+1})} \\ &= \frac{5 \cdot h}{h \cdot (\sqrt{5 \cdot (x+h)+1} + \sqrt{5 \cdot x+1})} \\ &= \frac{5}{\sqrt{5 \cdot (x+h)+1} + \sqrt{5 \cdot x+1}} \end{aligned}$$

(2) Le nombre dérivée de la fonction  $f$  en  $x$  sur son ensemble de dérivabilité est donnée par la limite :

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

Or, on a les deux limites suivantes :

$$\lim_{h \rightarrow 0} 5 = 5 \quad ; \quad \lim_{h \rightarrow 0} \sqrt{5 \cdot (x+h)+1} + \sqrt{5 \cdot x+1} = 2 \cdot \sqrt{5 \cdot x+1}$$

On en déduit la valeur du nombre dérivé :

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{5}{\sqrt{5 \cdot (x+h)+1} + \sqrt{5 \cdot x+1}} \\ &= \frac{5}{2 \cdot \sqrt{5 \cdot x+1}} \end{aligned}$$