Pour cet exercice, on admet que les deux suites (a_n) et (u_n) sont bien définies, ce qui équivaut à admettre que les termes de la suite (u_n) sont tous différents de -2 (pour que la suite (u_n) soit bien définie) et de 1 (pour que (a_n) soit bien définie).

1. On a : $u_1 = \dfrac{2u_0+1}{u_0+2} = \dfrac{2\times 2+1}{2+2} = \dfrac{5}{4} = 1,25$.

2. (a) On a : $a_0 = \dfrac{u_0}{u_0-1} = \dfrac{2}{2-1} = 2$

   et $a_1 = \dfrac{u_1}{u_1-1} = \dfrac{1,25}{1,25-1} = \dfrac{1,25}{0,25} = 5$.

   (b) Soit n un entier naturel.

   On a, d'une part : $$a_{n+1} = \frac{u_{n+1}}{u_{n+1}-1} = \frac{\dfrac{2u_n+1}{u_n+2}}{\dfrac{2u_n+1}{u_n+2}-1} = \frac{\dfrac{2u_n+1}{u_n+2}}{\dfrac{2u_n+1}{u_n+2}-\dfrac{u_n+2}{u_n+2}}$$
   $$= \frac{\dfrac{2u_n+1}{u_n+2}}{\dfrac{2u_n+1-u_n-2}{u_n+2}} = \frac{2u_n+1}{u_n+2}\times\frac{u_n+2}{u_n-1}$$
   $$= \frac{2u_n+1}{u_n-1}$$
   et, d'autre part : $$3a_n-1 = 3\times\frac{u_n}{u_n-1}-1 = \frac{3u_n}{u_n-1}-\frac{u_n-1}{u_n-1} = \frac{3u_n-(u_n-1)}{u_n-1}$$
   $$= \frac{2u_n+1}{u_n-1}$$
   On constate donc bien que, pour tout entier naturel n, $a_{n+1} = 3a_n-1$.

   Autre méthode :

   Soit n un entier naturel.
   $$a_{n+1} = \frac{u_{n+1}}{u_{n+1}-1} = \frac{u_{n+1}-1+1}{u_{n+1}-1} = 1+\frac{1}{u_{n+1}-1}$$
   $$= 1+\frac{1}{\dfrac{2u_n+1}{u_n+2}-\dfrac{u_n+2}{u_n+2}} = 1+\frac{1}{\dfrac{2u_n+1}{u_n+2}}$$
   $$= 2+\frac{u_n+2}{u_n-1}-1$$
   $$= \frac{2(u_n-1)+u_n+2}{u_n-1}-1 = \frac{2u_n-2+u_n+2}{u_n-1}-1$$
   $$= \frac{3u_n}{u_n-1}-1$$
   $$= 3a_n-1$$

   (c) Posons, pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 1, l'affirmation P_n :

   « $a_n \geqslant 3n-1$ ».

   Initialisation : On a calculé $a_1 = 5$ et donc on a bien $5 \geqslant 3\times 1-1 = 2$.

   L'affirmation P_1 est donc vraie.

   Hérédité : Soit n un entier naturel non nul. On suppose que l'affirmation P_n est vraie, c'est-à-dire que $a_n \geqslant 3n-1$.

   Par hypothèse de récurrence, on a :

$$\begin{aligned}
a_n \geqslant 3n-1 &\implies 3a_n \geqslant 3(3n-1) \quad \text{car } 3>0\\
&\implies 3a_n - 1 \geqslant 9n-3-1\\
&\implies a_{n+1} \geqslant 9n-4 \quad \text{d'après la question } \textbf{2. b.}\ 3an-1 = a_{n+1}\\
&\implies a_{n+1} \geqslant 3n+6n+3-7\\
&\implies a_{n+1} \geqslant 3(n+1)+6k-7\\
&\implies a_{n+1} \geqslant 3(n+1)-1+6n-6\\
&\implies a_{n+1} \geqslant 3(n+1)-1+6(n-1)\\
&\implies a_{n+1} \geqslant 3(n+1)-1 \quad \text{car } 6(n-1)\geqslant 0
\end{aligned}$$

Si, pour un entier n naturel non nul (ce qui garantit $(n-1)\geqslant 0$), P_n est vraie, alors P_{n+1} est vraie également.

Conclusion : L'affirmation P_1 est vraie, et, pour tout entier naturel non nul n, la véracité de l'affirmation est héréditaire : d'après le principe de récurrence, on en déduit que pour tout entier naturel non nul n, on a : $a_n \geqslant 3n-1$.

d) Comme $3>0$, on a : $\lim\limits_{n\to+\infty} 3n-1 = +\infty$.

Par comparaison, puisque pour tout n non nul, on a $a_n \geqslant 3n-1$, on en déduit que la suite (a_n) diverge vers $+\infty$.

3. a) Soit n un entier naturel.

$$\begin{aligned}
a_n = \frac{u_n}{u_n-1} &\iff a_n \times (u_n - 1) = u_n \quad \text{car } u_n - 1 \neq 0\\
&\iff a_n \times u_n - a_n - u_n = 0\\
&\iff (a_n-1)\times u_n - a_n = 0\\
&\iff (a_n-1)\times u_n = a_n\\
&\iff u_n = \frac{a_n}{a_n-1}
\end{aligned}$$

Pour la dernière étape, la division par $a_n - 1$ est légitime, puisque a_n est un quotient de deux nombres différents, car le dénominateur est égal au numérateur moins 1, donc a_n ne peut pas être égal à 1, donc $a_n - 1$ est non nul.

Ainsi, on a bien exprimé u_n en fonction de a_n avec la relation annoncée dans le question.

b) Avec les questions **2. a.** on a $a_0 = 2$ et avec **2. c.**, pour n naturel non nul, on a $a_n \geqslant 3n-1 > 0$.

Ainsi, pour tout entier naturel n, a_n est non nul.

On déduit donc de la question précédente que, pour tout n naturel, on a : $u_n = \dfrac{a_n}{a_n-1} = \dfrac{1}{1-\dfrac{1}{a_n}}$.

Enfin, puisque (a_n) diverge vers $+\infty$, par limite du quotient, on a : $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{a_n} = 0$,

puis, par limite de la somme $\lim\limits_{n\to+\infty} 1 - \dfrac{1}{a_n} = 1$,

enfin, par limite du quotient : $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{1-\dfrac{1}{a_n}} = 1$.

La suite (u_n) converge donc vers 1.

4. Puisqu'on admet que la suite (u_n) est décroissante, cela signifie que la suite est minorée par sa limite et donc que pour tout entier naturel n, on a $u_n \geqslant 1$ donc $u_n - 1 \geqslant 0$.

a) Cette fonction python initialise la variable `u` à 2, ce qui est la valeur de u_0 et la variable `n` à 0, ce qui est l'indice correspondant.

Puis, à chaque exécution de la boucle `while`, `u` se voit affecter le terme suivant dans la suite (u_n) et `n` se voit affecter l'entier suivant, donc l'indice correspondant au terme dont la valeur est stockée dans la variable `u`.

Cette boucle `while` tourne tant que l'écart entre le terme stocké dans la variable `u` et la limite 1 est strictement supérieur à la valeur `p`, qui est l'argument choisi pour invoquer la fonction.

Les valeurs `n` et `u` renvoyées par l'appel de la fonction `algo(p)` correspondent donc respectivement à l'indice et à la valeur du premier terme de la suite pour lequel l'écart entre le terme et la limite de la suite est inférieur ou égal à la valeur `p` choisie.

b) On parcourt la suite à la calculatrice, et on constate que $u_5 \approx 1{,}002\,7$, donc $u_5 - 1 > 0,001$ et $u_6 \approx 1{,}000\,9$, donc $u_6 - 1 \leqslant 0,001$.

La valeur de n pour $p = 0,001$ est donc 6 (et la valeur renvoyée pour `u` est donc une valeur approchée de u_6).

On peut aussi programmer la fonction python sur la calculatrice et faire l'appel `algo(0.001)`, qui renvoie `(6, 1,000 914 913 083 257)`