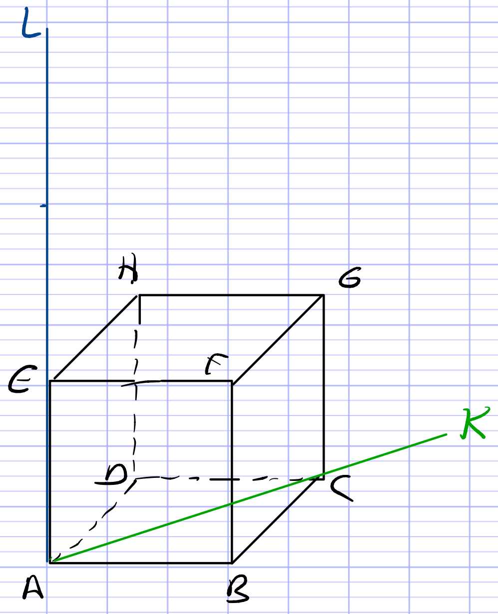
DS 1

5'30"
(3'10" w/o dessin)

⇒ Exercice n°1

3



0.5 1°/ ⓐ $\vec{AG} = \vec{AC} + \vec{CG}$
$= \vec{AC} + \vec{AE}$

0.5 ⓑ $\vec{KG} = \vec{KA} + \vec{AG}$
$= -\frac{3}{2}\vec{AC} + \vec{AC} + \vec{AE}$
$= \vec{AE} - \frac{1}{2}\vec{AC}$

2°/ ⓐ $\vec{KL} = \vec{KA} + \vec{AL}$
$= -\frac{3}{2}\vec{AC} + 3\vec{AE}$ 0.5

1 Il existe une combinaison linéaire de $\vec{KL}$, $\vec{AC}$ et $\vec{AE}$ 0.5
Ils sont donc coplanaires

ⓑ On a $\vec{KL} = 3\vec{AE} - \frac{3}{2}\vec{AC} = 3(\vec{AE} - \frac{1}{2}\vec{AC}) = 3\vec{KG}$
1 Donc $\vec{KL}$ et $\vec{KG}$ sont colinéaires 0.5
Donc K, L et G sont alignés. 0.5

5'10'' 5

⇒ Exercice n°2

1°/ a) $\lim_{+\infty} \frac{1}{n} = 0$; $\lim_{+\infty} n^2 - 2 = +\infty$ } Par produit F.I 0.5

b) $\forall n \in \mathbb{N}$, $v_n = \frac{n^2}{n} - \frac{2}{n} = n - \frac{2}{n}$ 0.5

1

On $\lim_{+\infty} n = +\infty$; $\lim_{+\infty} \frac{-2}{n} = 0$ } 0.5 Par somme, $\lim_{+\infty} v_n = +\infty$

2°/ a) $\forall n \in \mathbb{N}$, $v_n = \frac{n^2+n}{4}$

0.5

$\lim_{+\infty} n^2+n = +\infty$; $\lim 4 = 4$ } Par quotient $\lim_{+\infty} v_n = +\infty$

b) $\forall n \in \mathbb{N}$, $w_n = \frac{n^3+2n}{n^2-3} = \frac{n^2(n+\frac{2}{n})}{n^2(1-\frac{3}{n^2})} = \frac{n+\frac{2}{n}}{1-\frac{3}{n^2}}$ 0.5

1

$\lim_{+\infty} n = +\infty$; $\lim_{+\infty} \frac{2}{n} = 0$ } Par somme $\lim_{+\infty} n + \frac{2}{n} = +\infty$

$\lim_{+\infty} 1 = 1$; $\lim_{+\infty} \frac{3}{n^2} = 0$ } Par somme $\lim_{+\infty} 1 - \frac{3}{n^2} = 1$

} Par quotient, $\lim_{+\infty} w_n = +\infty$ 0.5

c) $\forall n \in \mathbb{N}$, $z_n = \sqrt{n} - \sqrt{n-5} = \frac{(\sqrt{n}-\sqrt{n-5})(\sqrt{n}+\sqrt{n-5})}{\sqrt{n}+\sqrt{n-5}}$ 0.25

$= \frac{\sqrt{n}^2 - \sqrt{n-5}^2}{\sqrt{n}+\sqrt{n-5}} = \frac{n-n+5}{\sqrt{n}+\sqrt{n-5}}$

1

$= \frac{5}{\sqrt{n}+\sqrt{n-5}}$ 0.25

Ainsi, $\lim_{+\infty} 5 = 5$; $\lim_{+\infty} \sqrt{n}+\sqrt{n-5} = +\infty$ } Par quotient $\lim_{+\infty} z_n = 0$ 0.5

2,10 2

⇒ Exercice n°3

0.25 1°/ Oui, c'est la définition d'une limite infinie:

1.25 2°/ $\lim_{+\infty} U_n = +\infty \Rightarrow \forall A \in \mathbb{R}, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \geq n_0, U_n \in [A; +\infty[$ 0.25 0.25 0.25 0.25 0.25

0.5 3°/ $\forall A \in \mathbb{R}, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \geq n_0, U_n \in [A; +\infty[\Rightarrow \lim_{+\infty} U_n = +\infty$

⇝ La réciproque est vraie.

1'30" 2

⇒ Exercice n°3

On a : • 23 choix pour les quatres lettres 0.5
• 10 choix pour les chiffres. 0.5

Ainsi, dans les conditions de l'exercice, il y a $23 \times 23 \times 10 \times 10 \times 10 \times 23 \times 23 = 279\ 841\ 000$ 1 plaques d'immatriculation possibles.

9'00" 8

⇒ Exercice n°4

1 1°/ En 2020, il y a 50 000 arbres, soit 50 milliers 0.5 0.5
Donc $U_0 = 50$

1 2°/ $U_{n+1} = 0{,}95\, U_n + 3$ 0.5 0.5

3°/ Mq : $\forall n \in \mathbb{N}, U_{n+1} \geq U_n$

① Init. 0.25 : $U_0 = 50$ 0.25
$U_1 = 0{,}95 \times 50 + 3 = 50{,}5$ 0.25
⇝ La pté est initialisée 0.25

2.5

② Hérédité : Soit $k \in \mathbb{N}$ fixé. Supposons que, pour cet entier $U_k \leq U_{k+1}$ 0.25
Mq la pté est vraie au rang suivant
(ie. $U_{k+1} \leq U_{k+2}$) 0.25

0.25

$$U_k \leq U_{k+1} \quad \text{(par HR)}$$ 0.25

$$0,95U_k \leq 0,95U_{k+1}$$ 0.25

$$0,95U_k + 3 \leq 0,95U_{k+1} + 3$$ 0.25

$$U_{k+1} \leq U_{k+2}$$ 0.25

⇝ La pté est héréditaire

0.5

Conclusion : Par principe de récurrence, 0.25
(U_n) est croissante 0.25

2.5

4°/ ① Init : $n=0$, $\cdot\ U_0 = 50$ 0.25
0.25

$$\cdot\ 60 - 10 \times 0,95^0 = 60 - 10 = 50$$ 0.25

⇝ La pté est initialisée 0.25

② Hérédité : Soit $k \in \mathbb{N}$ fixé tq la pté soit vraie (ie. $U_k = 60 - 10 \times 0,95^k$) 0.25
0.25
Mq la pté est vraie au rang suivant
(ie. $U_{k+1} = 60 - 10 \times 0,95^{k}$) 0.25

$$U_{k+1} = 0,95U_k + 3 \quad \text{(par déf)}$$ 0.25

$$= 0,95(60 - 10 \times 0,95^k) + 3 \quad \text{(par HR)}$$ 0.25

$$= 57 - 10 \times 0,95^{k+1} + 3$$

$$= 60 - 10 \times 0,95^{k+1}$$ 0.25

⇝ La pté est héréditaire 0.25

0.5

Conclusion : Par principe de récurrence 0.5
$\forall n \in \mathbb{N},\ U_n = 60 - 10 \times 0,95^n$
0.25

0.5

5°/ $2026 = 2020 + 6$

Or $U_6 = 60 - 10 \times 0{,}95^6 \approx 53$

⇝ Il y aurait donc environ 53 000 arbres en 2026

6°/ $\left.\begin{array}{l} \lim_{+\infty} 60 = 60 \\ \lim_{+\infty} -10 \times 0{,}95^n = 0 \end{array}\right\}$ Par somme, $\lim_{+\infty} U_n = 60$

0.5

⇝ Le nombre d'arbre dans la forêt va se stabiliser vers 60 000.