

**Conjecture à la calculatrice****Exercice 1**

1. En 2021 :  $30000 \times 0,9 + 10000 = 27000 + 10000 = 37000$  abonnés.

En 2022 :  $37000 \times 0,9 + 10000 = 33300 + 10000 = 43300$  abonnés.

2. (a)  $u_0 = 30$  (milliers),  $u_1 = 37$  (milliers),  $u_2 = 43,3$  (milliers).

- (b) On a la relation de récurrence :  $u_{n+1} = 0,9u_n + 10$ .

À la calculatrice :

$$u_{10} \approx 89,3 \text{ milliers} \quad (1)$$

$$u_{20} \approx 98,8 \text{ milliers} \quad (2)$$

$$u_{50} \approx 100,0 \text{ milliers} \quad (3)$$

- (c) On conjecture que  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 100$  milliers.

**Exercice 2**

- $u_n = (-1)^n \times n$  : Cette suite oscille entre des valeurs positives et négatives de plus en plus grandes. Elle n'admet pas de limite.
- $v_n = \frac{6n-3}{n+5}$  : Pour de grandes valeurs de  $n$ , on observe que  $v_n$  se rapproche de 6. On conjecture  $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = 6$ .
- $w_n = n^2 - 2n$  : Cette suite croît vers l'infini. On conjecture  $\lim_{n \rightarrow +\infty} w_n = +\infty$ .
- $z_0 = 1$ ,  $z_{n+1} = \frac{1}{2}z_n + 1$  : On calcule quelques termes et on observe une convergence vers 2. On conjecture  $\lim_{n \rightarrow +\infty} z_n = 2$ .
- $t_n = 0,9^n$  : Cette suite géométrique de raison  $0,9 < 1$  converge vers 0. On conjecture  $\lim_{n \rightarrow +\infty} t_n = 0$ .

**Définition de la limite****Exercice 3**

1. On conjecture que  $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = 2$ .

2. Pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $0,7^n > 0$ , donc  $v_n = 2 + 0,7^n > 2$ .

3. À la calculatrice :

- (a)  $v_n < 2,1 \Leftrightarrow 0,7^n < 0,1$ . Le plus petit entier  $n$  tel que cette condition soit vérifiée est  $n = 7$ .

- (b)  $v_n < 2,01 \Leftrightarrow 0,7^n < 0,01$ . Le plus petit entier  $n$  est  $n = 13$ .

- (c)  $v_n < 2,001 \Leftrightarrow 0,7^n < 0,001$ . Le plus petit entier  $n$  est  $n = 20$ .

**Exercice 4**

1. On conjecture que  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = -\infty$ .

2. À la calculatrice :

- (a)  $u_n < -10 \Leftrightarrow -n^2 + 5 < -10 \Leftrightarrow n^2 > 15$ . Le plus petit entier  $n$  est  $n = 4$ .

- (b)  $u_n < -100 \Leftrightarrow n^2 > 105$ . Le plus petit entier  $n$  est  $n = 11$ .

- (c)  $u_n < -1000 \Leftrightarrow n^2 > 1005$ . Le plus petit entier  $n$  est  $n = 32$ .

3. Par le calcul :

- (a)  $u_n < -10 \Leftrightarrow n^2 > 15 \Leftrightarrow n \geq 4$  (car  $\sqrt{15} \approx 3,87$ ).

- (b)  $u_n < -100 \Leftrightarrow n^2 > 105 \Leftrightarrow n \geq 11$  (car  $\sqrt{105} \approx 10,25$ ).

- (c)  $u_n < -1000 \Leftrightarrow n^2 > 1005 \Leftrightarrow n \geq 32$  (car  $\sqrt{1005} \approx 31,70$ ).

**Exercice 5**

1.  $u_n > 1000 \Leftrightarrow 3n - 5 > 1000 \Leftrightarrow n > \frac{1005}{3} = 335$ . Donc à partir du rang  $n = 336$ .

$u_n > 10^6 \Leftrightarrow 3n - 5 > 10^6 \Leftrightarrow n > \frac{10^6 + 5}{3} \approx 333333,67$ . Donc à partir du rang  $n = 333334$ .

2. **Définition** : Une suite  $(u_n)$  diverge vers  $+\infty$  si pour tout réel  $A > 0$ , il existe un entier naturel  $N$  tel que pour tout  $n \geq N$ , on a  $u_n > A$ .

**Démonstration** : Soit  $A > 0$ . On cherche  $N$  tel que pour  $n \geq N$ ,  $u_n > A$ .  $u_n > A \Leftrightarrow 3n - 5 > A \Leftrightarrow n > \frac{A+5}{3}$ .

Il suffit de prendre  $N = \lfloor \frac{A+5}{3} \rfloor + 1$ . Ainsi,  $(u_n)$  diverge vers  $+\infty$ .

**Exercice 6**

1.  $v_n \in ]1,99; 2,01[ \Leftrightarrow |v_n - 2| < 0,01 \Leftrightarrow \frac{1}{n^2} < 0,01 \Leftrightarrow n^2 > 100 \Leftrightarrow n \geq 10$ .

2. **Définition** : Une suite  $(v_n)$  converge vers  $l$  si pour tout  $\varepsilon > 0$ , il existe un entier naturel  $N$  tel que pour tout  $n \geq N$ , on a  $|v_n - l| < \varepsilon$ .

**Démonstration** : Soit  $\varepsilon > 0$ . On cherche  $N$  tel que pour  $n \geq N$ ,  $|v_n - 2| < \varepsilon$ .  $|v_n - 2| = \frac{1}{n^2} < \varepsilon \Leftrightarrow n^2 > \frac{1}{\varepsilon} \Leftrightarrow n > \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}$ .

Il suffit de prendre  $N = \lfloor \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} \rfloor + 1$ . Ainsi,  $(v_n)$  converge vers 2.

**Exercice 7**

Logique

1. Cette proposition est **vraie**. Si  $(u_n)$  converge vers  $l$ , alors pour  $\varepsilon = 0,2$ , il existe un rang  $N$  tel que pour tout  $n \geq N$ ,  $|u_n - l| < 0,2$ , ce qui équivaut à  $u_n \in ]l - 0,2; l + 0,2[$ .

2. (a) **Réiproque** : Si à partir d'un certain rang, tous les termes  $u_n$  appartiennent à  $]l - 0,2; l + 0,2[$ , alors la suite  $(u_n)$  converge vers  $l$ .

(b) Cette réiproque est **fausse**. Contre-exemple :  $u_n = l + \frac{0,1}{n}$  pour  $n \geq 1$ . À partir du rang 1, tous les termes appartiennent à  $]l - 0,2; l + 0,2[$  mais la suite converge vers  $l$ , pas nécessairement vers la valeur donnée.

**BONUS.** ( $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = l$ )  $\Rightarrow$  ( $\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geq N : |u_n - l| < \varepsilon$ )  $\Leftrightarrow$  ( $\exists N_0 \in \mathbb{N}, \forall n \geq N_0 : u_n \in ]l - \varepsilon; l + \varepsilon[$ ).

### Exercice 8



### Algorithme

1. On conjecture que  $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = 0$ .

```
2. (a) n=0
    v=1
    while v >= 0.001:
        n=n+1
        v=1/(2*n+1)
    print(n)
```

(b)  $v_n < 0,001 \Leftrightarrow \frac{1}{2n+1} < 0,001 \Leftrightarrow 2n+1 > 1000 \Leftrightarrow n > 499,5$ . Donc  $n = 500$ .

### Exercice 9



### Algorithme

```
def demarrer_1():
    u=2
    n=0
    while u <= 4:
        n=n+1
        u=(2/3)*u+(1/3)*n+1
    return u
```

### Exercice 10



### Algorithme

```
1. def appartient_intervalle(a):
    n = 1
    u = (4*n+1)/(n+1)
    while 4-a < u < 4+a:
        n = n + 1
        u = (4*n+1)/(n+1)
    return n
```

2.  $u_n = \frac{4n+1}{n+1} = \frac{4(n+1)-3}{n+1} = 4 - \frac{3}{n+1}$ . Quand  $n \rightarrow +\infty$ ,  $\frac{3}{n+1} \rightarrow 0$ , donc  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 4$ .

## Opérations sur les limites

### Exercice 11



1.  $u_n = n^2 + n - 5$  : Le terme de plus haut degré est  $n^2$ , donc  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$ .

2.  $v_n = n^2 \sqrt{n} + 2 = n^{5/2} + 2 : \lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = +\infty$ .

3.  $w_n = -\frac{1}{2n-5} : \text{Quand } n \rightarrow +\infty, 2n-5 \rightarrow +\infty, \text{ donc } w_n \rightarrow 0^-$ . Ainsi  $\lim_{n \rightarrow +\infty} w_n = 0$ .

### Exercice 12



1.  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n^2} = 0$ , donc  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left( \frac{1}{n^2} - 10 \right) = 0 - 10 = -10$ .

2.  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} = 0$  et  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} = 0$ , donc  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left( \frac{1}{\sqrt{n}} \times \frac{1}{n} \right) = 0 \times 0 = 0$ .

3.  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} = 0$ , donc  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left( 1 + \frac{1}{n} \right) = 1 + 0 = 1$ . Ainsi  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{3}{1 + \frac{1}{n}} = \frac{3}{1} = 3$ .

### Exercice 13



1.  $u_n = 3n^2 + 2n = n^2(3 + \frac{2}{n}) : \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$ .

2.  $v_n = 2n + n\sqrt{n} = n(2 + \sqrt{n}) : \lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = +\infty$ .

3.  $w_n = -\frac{4}{2 + \frac{1}{n}} : \lim_{n \rightarrow +\infty} \left( 2 + \frac{1}{n} \right) = 2$ , donc  $\lim_{n \rightarrow +\infty} w_n = -\frac{4}{2} = -2$ .

### Exercice 14



1.  $u_n = n^2 + 2n - 4 : \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$ .

2.  $v_n = -n^3 + 5 : \lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = -\infty$ .

3.  $w_n = \frac{5}{3+\sqrt{n}} : \lim_{n \rightarrow +\infty} (3 + \sqrt{n}) = +\infty$ , donc  $\lim_{n \rightarrow +\infty} w_n = 0$ .

4.  $a_n = n \times \sqrt{n} = n^{3/2} : \lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = +\infty$ .

### Exercice 15



1.  $u_n = 2n - 1 : \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$ .

2.  $v_n = -3 + \frac{5}{n+2} : \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{5}{n+2} = 0$ , donc  $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = -3 + 0 = -3$ .

### Exercice 16



1.  $u_n = \left( n + \frac{1}{n} \right) \left( \frac{1}{n^4} - 5 \right)$

On a  $\lim \left( n + \frac{1}{n} \right) = +\infty$  et  $\lim \left( \frac{1}{n^4} - 5 \right) = -5$ .

Donc, par produit,  $\lim u_n = -\infty$ .

2.  $v_n = \frac{3+n}{2+\frac{1}{n}}$

On a  $\lim 3+n = +\infty$  et  $\lim 2 + \frac{1}{n} = 2$

Donc, par quotient,  $\lim v_n = +\infty$

**Exercice 17**

Pour  $u_n = (2 - n^2) \left( \frac{1}{\sqrt{n}} - 2 \right)$  :

$$\text{On a } \lim 2 - n^2 = -\infty \text{ et } \lim \frac{1}{\sqrt{n}} - 2 = -2$$

Donc  $\lim u_n = +\infty$

Pour  $v_n = \frac{n^2+n}{4}$  :  $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = +\infty$ .

**Formes indéterminées****Exercice 18**

1.  $u_n = -n^3 + 2n^2$  : On a une forme indéterminée  $-\infty + \infty$ .

On factorise :  $u_n = n^2(-n + 2) = n^2(2 - n)$

Quand  $n \rightarrow +\infty$ ,  $n^2 \rightarrow +\infty$  et  $(2 - n) \rightarrow -\infty$ , donc  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = -\infty$ .

2.  $v_n = n^2 - 3n + 1$  : On a une forme indéterminée  $+\infty - \infty$ .

On factorise :  $v_n = n^2 \left( 1 - \frac{3}{n} + \frac{1}{n^2} \right)$

Quand  $n \rightarrow +\infty$ ,  $\left( 1 - \frac{3}{n} + \frac{1}{n^2} \right) \rightarrow 1$ , donc  $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = +\infty$ .

**Exercice 19**

1.  $u_n = \frac{3n+1}{5n+2}$  : On a une forme indéterminée  $\frac{\infty}{\infty}$ .

On divise par  $n$  :  $u_n = \frac{3 + \frac{1}{n}}{5 + \frac{2}{n}}$

Quand  $n \rightarrow +\infty$  :  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \frac{3+0}{5+0} = \frac{3}{5}$ .

2.  $v_n = \frac{2n}{1-n^2}$  : On a une forme indéterminée  $\frac{\infty}{\infty}$ .

On divise par  $n^2$  :  $v_n = \frac{\frac{2}{n}}{\frac{1}{n^2} - 1}$

Quand  $n \rightarrow +\infty$  :  $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = \frac{0}{0-1} = 0$ .

**Exercice 20**

1.  $u_n = n^2 - 2n = n(n - 2)$  :  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$ .

2.  $v_n = n - n^3 = n(1 - n^2)$  :  $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = -\infty$ .

**Exercice 21**

1.  $u_n = 3n - n^2 + 2 = n^2 \left( \frac{3}{n} - 1 + \frac{2}{n^2} \right)$  :  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = -\infty$ .

2.  $v_n = \frac{n+5}{n^2+1}$  : On divise par  $n^2$  :  $v_n = \frac{\frac{1}{n} + \frac{5}{n^2}}{1 + \frac{1}{n^2}}$

$\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = \frac{0+0}{1+0} = 0$ .

**Exercice 22**

1.  $u_n = n + 3n^2 - n^3 = n^3 \left( \frac{1}{n^2} + \frac{3}{n} - 1 \right)$  :  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = -\infty$ .

2.  $v_n = \frac{n^3+2}{2n^2-1}$  : On divise par  $n^2$  :  $v_n = \frac{n + \frac{2}{n^2}}{2 - \frac{1}{n^2}}$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = +\infty.$$

**Exercice 23**

1.  $u_n = \frac{3n-12}{4-2n}$  : On divise par  $n$  :  $u_n = \frac{\frac{3}{n}-\frac{12}{n}}{\frac{4}{n}-\frac{2n}{n}}$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \frac{3-0}{0-2} = -\frac{3}{2}.$$

2.  $v_n = \frac{n^2+3}{n} = n + \frac{3}{n}$  :  $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = +\infty$ .

3.  $w_n = \frac{n^3+2n}{n^2-3}$  : On divise par  $n^2$  :  $w_n = \frac{n + \frac{2}{n}}{1 - \frac{3}{n^2}}$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} w_n = +\infty.$$

4.  $z_n = n^2 - n + 2$  :  $\lim_{n \rightarrow +\infty} z_n = +\infty$ .

5.  $t_n = \sqrt{n} - \sqrt{n-5}$  : On multiplie par la quantité conjuguée :

$$t_n = \frac{(\sqrt{n} - \sqrt{n-5})(\sqrt{n} + \sqrt{n-5})}{\sqrt{n} + \sqrt{n-5}} = \frac{n - (n-5)}{\sqrt{n} + \sqrt{n-5}} = \frac{5}{\sqrt{n} + \sqrt{n-5}}$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} t_n = 0.$$

**Exercice 24**

1.  $u_n = \frac{n^2+2n}{n+1}$  : On effectue la division euclidienne :  $u_n = n + 1 + \frac{-1}{n+1}$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty.$$

2.  $v_n = \frac{3n+\sqrt{n}}{2n+3}$  : On divise par  $n$  :  $v_n = \frac{3 + \frac{1}{\sqrt{n}}}{2 + \frac{3}{n}}$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = \frac{3+0}{2+0} = \frac{3}{2}.$$

**Exercice 25**

1.  $u_n = n^2 - n = n(n - 1)$  :  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$ .

2.  $u_n = -3n^2 + 6n + 7 = n^2(-3 + \frac{6}{n} + \frac{7}{n^2})$  :  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = -\infty$ .

3.  $u_n = \frac{-2n^2+3n+1}{3n^2+5n}$  : On divise par  $n^2$  :  $u_n = \frac{-2 + \frac{3}{n} + \frac{1}{n^2}}{3 + \frac{5}{n}}$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \frac{-2+0+0}{3+0} = -\frac{2}{3}.$$

4.  $u_n = -n^2 + \sqrt{n} = n^2(-1 + \frac{1}{n^{3/2}})$  :  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = -\infty$ .

5.  $u_n = \frac{6\sqrt{n}-n}{\sqrt{n}+n}$  : On divise par  $\sqrt{n}$  :  $u_n = \frac{6 - \frac{\sqrt{n}}{n}}{1 + \frac{\sqrt{n}}{n}}$

$$\text{On divise par } \sqrt{n} : u_n = \frac{\frac{6}{\sqrt{n}} - 1}{\frac{1}{\sqrt{n}} + 1}$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \frac{0-1}{0+1} = -1.$$

6.  $u_n = 5n^3 - 3n^2 + 2\sqrt{n} = n^3(5 - \frac{3}{n} + \frac{2}{n^{5/2}})$  :  
 $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$ .

7.  $u_n = \frac{1}{\sqrt{n}}(-3n + 5) = \frac{-3n + 5}{\sqrt{n}} =$   
 $\frac{-3\sqrt{n} + \frac{5}{\sqrt{n}}}{1} = -3\sqrt{n} + \frac{5}{\sqrt{n}}$   
 $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = -\infty$ .

### Exercice 26



- On ne peut pas directement appliquer les propriétés car on a une forme indéterminée  $0 \times \infty$  :  $\frac{1}{n} \rightarrow 0$  et  $(n^2 - 2) \rightarrow +\infty$ .
- En développant :  $u_n = \frac{1}{n} \times (n^2 - 2) = \frac{n^2 - 2}{n} = n - \frac{2}{n}$   
 $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$ .

### Convergence de suites

### Exercice 27



- Faux.** Contre-exemple :  $u_n = \frac{1}{n}$  converge vers 0, mais  $v_n = \frac{1}{u_n} = n$  diverge vers  $+\infty$ .
- Faux.** Contre-exemple :  $u_n = (-1)^n$  diverge (suite oscillante), mais  $v_n = \frac{1}{u_n} = (-1)^n$  diverge aussi et ne converge pas vers 0.

### Exercice 28



1. On a  $u_{n+1} = \frac{9}{6 - u_n}$  et  $v_n = \frac{1}{u_n - 3}$ .  
 $v_{n+1} = \frac{1}{u_{n+1} - 3} = \frac{1}{\frac{9}{6 - u_n} - 3} =$   
 $\frac{6 - u_n}{9 - 3(6 - u_n)} = \frac{6 - u_n}{9 - 18 + 3u_n} = \frac{6 - u_n}{3u_n - 9}$   
 $= \frac{6 - u_n}{3(u_n - 3)} = \frac{6 - u_n}{3(u_n - 3)}$   
Or  $6 - u_n = 6 - 3 - \frac{1}{v_n} = 3 - \frac{1}{v_n} = \frac{3v_n - 1}{v_n}$   
Et  $u_n - 3 = \frac{1}{v_n}$ , donc :  
 $v_{n+1} = \frac{\frac{3v_n - 1}{v_n}}{3 \cdot \frac{1}{v_n}} = \frac{3v_n - 1}{3} = v_n - \frac{1}{3}$

Donc  $(v_n)$  est arithmétique de raison  $r = -\frac{1}{3}$ .

2.  $v_0 = \frac{1}{u_0 - 3} = \frac{1}{-3 - 3} = -\frac{1}{6}$   
 $v_n = v_0 + nr = -\frac{1}{6} - \frac{n}{3} = -\frac{1 + 2n}{6}$   
 $u_n = 3 + \frac{1}{v_n} = 3 + \frac{1}{-\frac{1 + 2n}{6}} = 3 - \frac{6}{1 + 2n}$

3.  $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = -\infty$ , donc  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 3 - 0 = 3$ .

### Exercice 29



1.  $u_n = \frac{1}{n(n+1)}$  : Quand  $n \rightarrow +\infty$ ,  $n(n+1) \rightarrow +\infty$ , donc  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0$ .

2. On a  $\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} = \frac{n+1}{n(n+1)} - \frac{n}{n(n+1)} = \frac{n+1-n}{n(n+1)} = \frac{1}{n(n+1)}$

3.  $S_n = \sum_{k=1}^n u_k = \sum_{k=1}^n \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\right)$   
 $= \left(\frac{1}{1} - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right)$

C'est une somme télescopique :  $S_n = 1 - \frac{1}{n+1} = \frac{n}{n+1}$ .

4.  $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n}{n+1} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{1 + \frac{1}{n}} = \frac{1}{1+0} = 1$ .

### En route vers le Grand Oral :

### Exercice 30



1.  $u_1 = 900 \times 0,8 + 200 = 720 + 200 = 920$  habitants.

$u_2 = 920 \times 0,8 + 200 = 736 + 200 = 936$  habitants.

2.  $u_{n+1} = 0,8u_n + 200$  pour tout  $n \in \mathbb{N}$ .

3. On étudie la suite auxiliaire  $v_n = u_n - l$  où  $l$  est la limite éventuelle.

Si la suite converge, alors  $\lim u_{n+1} = \lim u_n = l$ .

$l = 0,8l + 200 \Rightarrow 0,2l = 200 \Rightarrow l = 1000$ .

$v_n = u_n - 1000$  et  $v_{n+1} = u_{n+1} - 1000 = 0,8u_n + 200 - 1000 = 0,8u_n - 800 = 0,8(u_n - 1000) = 0,8v_n$ .

$(v_n)$  est géométrique de raison 0,8 et  $v_0 = 900 - 1000 = -100$ .

$v_n = -100 \times 0,8^n$ , donc  $u_n = 1000 - 100 \times 0,8^n$ .

Comme  $0 < 0,8 < 1$ ,  $\lim_{n \rightarrow +\infty} 0,8^n = 0$ , donc  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 1000$ .

La population converge vers 1000 habitants.

4. Si  $u_0 = 10000$  :

$v_0 = 10000 - 1000 = 9000$ , donc  $v_n = 9000 \times 0,8^n$  et  $u_n = 1000 + 9000 \times 0,8^n$ .

$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 1000$  habitants.

**Remarque :** Quelle que soit la population initiale, la suite converge toujours vers 1000 habitants. C'est la capacité d'équilibre du village.

### Exercices supplémentaires :

### Exercice 31



1. L'algorithme calcule le plus petit entier  $n$  tel que  $u_n < 10^{-3}$ , c'est-à-dire  $\frac{1}{n} < 10^{-3}$ .

$$\frac{1}{n} < 10^{-3} \Leftrightarrow n > 10^3 = 1000$$

L'algorithme affiche donc  $n = 1001$ .

2. n prend la valeur 1  
 u prend la valeur 1  
 Tant Que u <  $10^{-6}$  faire  
     n prend la valeur n + 1  
     u prend la valeur  $1/n$   
 Afficher n

3. Soit  $\varepsilon > 0$ . On cherche  $N$  tel que pour tout

$n \geq N$ ,  $0 < u_n < \varepsilon$ .

$$u_n < \varepsilon \Leftrightarrow \frac{1}{n} < \varepsilon \Leftrightarrow n > \frac{1}{\varepsilon}$$

Il suffit de prendre  $N = \lfloor \frac{1}{\varepsilon} \rfloor + 1$ . Ainsi, pour tout  $n \geq N$ ,  $0 < u_n < \varepsilon$ .

Ceci prouve que  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0$ .

### Exercice 32



$$1. \quad u_n = \frac{n^2 + 2}{n} = n + \frac{2}{n}$$

$$u_n > 10 \Leftrightarrow n + \frac{2}{n} > 10$$

Pour  $n$  assez grand,  $\frac{2}{n} \approx 0$ , donc  $u_n \approx n$ .

$$u_n > 10 \Leftrightarrow n > 10 - \frac{2}{n}$$

Pour  $n \geq 10$ , on a  $u_n \geq 10 + \frac{2}{10} = 10,2 > 10$ .

Vérifications :  $u_9 = 9 + \frac{2}{9} = \frac{83}{9} \approx 9,22 < 10$  et  $u_{10} = 10 + \frac{2}{10} = 10,2 > 10$ .

Donc  $n_0 = 10$ .

2. Soit  $A \geq 0$ . On cherche  $n_0$  tel que pour tout

$n \geq n_0$ ,  $u_n > A$ .

$$u_n > A \Leftrightarrow n + \frac{2}{n} > A$$

Pour  $n$  assez grand,  $u_n \approx n$ , donc  $n > A$ .

Donc  $n_0 = \lfloor A \rfloor + 1$ .

3. D'après la question précédente, pour tout  $A > 0$ , il existe  $n_0$  tel que pour tout  $n \geq n_0$ ,  $u_n > A$ .

Par définition, ceci signifie que  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$ .

### Exercice 33



```
S = 0
u = 0
for i in range(101):
    u = (-1)**i / (2*i + 1)
    S = S + u
print(S)
print(4*S)
```

Ce programme calcule  $S_{100} = \sum_{n=0}^{100} \frac{(-1)^n}{2n+1}$  et

affiche ensuite  $4S_{100}$  qui est une approximation de  $\pi$ .