Centres étrangers 2021

1. On considère la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = xe^{-2x}$.
   On note f'' la dérivée seconde de la fonction f.
   Quel que soit le réel x, $f''(x)$ est égal à :

   a. $(1-2x)e^{-2x}$ **b.** $4(x-1)e^{-2x}$ **c.** $4e^{-2x}$ **d.** $(x+2)e^{-2x}$

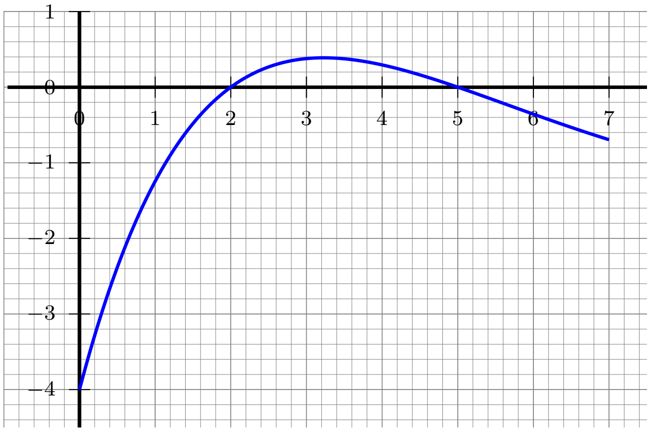
   > $f(x) = xe^{-2x}$ donc $f'(x) = e^{-2x} + x \times (-2)e^{-2x} = (1-2x)\,e^{-2x}$ et donc
   > $f''(x) = -2e^{-2x} + (1-2x) \times (-2)e^{-2x} = (-2-2+4x)\,e^{-2x} = 4\,(x-1)\,e^{-2x}$
   > **Réponse b.**

2. Le code d'un immeuble est composé de 4 chiffres (qui peuvent être identiques) suivis de deux lettres distinctes parmi A, B et C (exemple : 1232BA). Le nombre de code différent possibles contenant au moins un 0 est de :

   a. 60 000 **b.** 20 634 **c.** 39 366 **d.** 6 000

   > Il y a $10 \times 10 \times 10 \times 10 \times 3 \times 2 = 60\ 000$ codes possibles. (10 valeurs possibles pour chacun des chiffres et 3 valeurs possibles pour la première lettre et deux valeurs possible pour la deuxième car elles doivent être distinctes.)
   > Déterminons le nombre de code ne contenant pas de 0 :
   > Il y a $9 \times 9 \times 9 \times 9 \times 3 \times 2 = 39\ 366$ codes ne contenant pas de 0. (9 valeurs possibles pour chacun des chiffres et 3 valeurs possibles pour la première lettre et deux valeurs possible pour la deuxième car elles doivent être distinctes.)
   > Il y a donc $60\ 000 - 39\ 366 = 20\ 634$ codes contenant au moins un zéro.
   > **Réponse b.**

3. On donne ci-dessous la représentation graphique de f' fonction dérivée d'une fonction f définie sur (0; 7).



Le tableau de variation de f sur l'intervalle $[0\ ;\ 7]$ est :

a.

x	0		3,25		7
$f(x)$		↗		↘	

b.

x	0		2		5		7
$f(x)$		↘		↗		↘	

c.

x	0		2		5		7
$f(x)$		↗		↘		↗	

d.

x	0		2		7
$f(x)$		↗		↘	

f' est négative ou nulle sur $[0~,~2]$ donc la fonction f est décroissante sur $[0~,~2]$.
f' est positive ou nulle sur $[2~,~5]$ donc la fonction f est croissante sur $[2~,~5]$.
f' est négative ou nulle sur $[5~,~7]$ donc la fonction f est décroissante sur $[5~,~7]$.

Réponse b.

4. Une entreprise fabrique des cartes à puces. Chaque puce peut présenter deux défauts notés A et B. Une étude statistique montre que 2,8 % des puces ont le défaut A, 2,2 % des puces ont le défaut B et, heureusement, 95,4 % des puces n'ont aucun des deux défauts.

   La probabilité qu'une puce prélevée au hasard ait les deux défauts est :

   a. 0,05 **b.** 0,004 **c.** 0,046 **d.** On ne peut pas le savoir

On appelle A l'événement « la puce a le défaut A » et B l'événement « la puce a le défaut B ».
D'après le texte, on a : $P(A) = 0,028$ et $P(B) = 0,022$.
On cherche la probabilité qu'une puce ait les deux défauts, c'est-à-dire $P(A \cap B)$.
On sait que $95,4$ % des puces n'ont aucun des deux défauts donc il y a $100 - 95,4 = 4,6$ % des puces qui ont au moins un des deux défauts, donc $P(A \cup B) = 0,046$.
Or $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$ donc
$P(A \cap B) = P(A) + P(B) - P(A \cup B) = 0,028 + 0,022 - 0,046 = 0,004$

Réponse b.

5. On se donne une fonction f, supposée dérivable sur $\mathbb{R}$, et on note f' sa fonction dérivée.

   On donne ci-dessous le tableau de variation de f :

x	$-\infty$		-1		$+\infty$
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	0	$\searrow$	$-\infty$

   D'après ce tableau de variation :

   a. f' est positive sur $\mathbb{R}$. **b.** f' est positive sur $]-\infty~;~-1]$.
   c. f' est négative sur $\mathbb{R}$. **d.** f' est positive sur $[-1~;~+\infty[$.

La fonction f est croissante sur $]-\infty~;~-1]$ donc f' est positive sur $]-\infty~;~-1]$.

Réponse b.