Rappels sur les limites de suites

Exercice 1

Déterminons la limite des suites dont on donne le terme général :

(a) $u_n = \sqrt{n} + n^2$
Le terme dominant est n^2, donc $\lim_{n\to+\infty} u_n = +\infty$.

(b) $u_n = n^2 - n$
$u_n = n(n-1)$ avec $n \to +\infty$, donc $\lim_{n\to+\infty} u_n = +\infty$.

(c) $u_n = n^6 - n^4 + n^2$
Le terme dominant est n^6, donc $\lim_{n\to+\infty} u_n = +\infty$.

(d) $u_n = \dfrac{1}{n^2}(2n+4) = \dfrac{2n+4}{n^2} = \dfrac{2}{n} + \dfrac{4}{n^2}$
$\lim_{n\to+\infty} u_n = 0 + 0 = 0$.

(e) $u_n = \dfrac{2}{n^2-4}$
Pour $n \geq 3$, $n^2 - 4 > 0$ et $n^2 - 4 \to +\infty$, donc $\lim_{n\to+\infty} u_n = 0$.

(f) $u_n = \dfrac{3n^2+4}{2n+2}$
Le degré du numérateur est supérieur au degré du dénominateur, donc $\lim_{n\to+\infty} u_n = +\infty$.

(g) $u_n = \dfrac{n^2-1}{n+1} = \dfrac{(n-1)(n+1)}{n+1} = n-1$ pour $n \neq -1$
$\lim_{n\to+\infty} u_n = +\infty$.

(h) $u_n = \dfrac{n^2+n+1}{n^3} = \dfrac{1}{n} + \dfrac{1}{n^2} + \dfrac{1}{n^3}$
$\lim_{n\to+\infty} u_n = 0 + 0 + 0 = 0$.

Comparaisons et encadrements

Exercice 2

Déterminons la limite de la suite (u_n) dans chaque cas :

1. $u_n \geq \sqrt{n}$
   On sait que $\lim_{n\to+\infty} \sqrt{n} = +\infty$. Par théorème de comparaison, $\lim_{n\to+\infty} u_n = +\infty$.
2. $u_n < -n^3$
   On sait que $\lim_{n\to+\infty}(-n^3) = -\infty$. Par théorème de comparaison, $\lim_{n\to+\infty} u_n = -\infty$.

Exercice 3

Soit (u_n) la suite définie par : $u_n = 4n^2 + 1 + (-1)^n$.

1. (a) $(-1)^n = 1$ si n est pair, $(-1)^n = -1$ si n est impair.
   (b) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $-1 \leq (-1)^n \leq 1 \Leftrightarrow 0 \leq 1 + (-1)^n \leq 2 \Leftrightarrow 4n^2 \leq u_n \leq 4n^2 + 2$
2. On sait que $\lim_{n\to+\infty}(4n^2 - 1) = +\infty$. Par théorème de comparaison, $\lim_{n\to+\infty} u_n = +\infty$.

Exercice 4

Soit (v_n) la suite définie par : $v_n = -3n - (-1)^n$

1. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $(-1)^n \geq -1$, donc $-(-1)^n \leq 1$. Par conséquent : $v_n = -3n - (-1)^n \leq -3n + 1$.
2. On sait que $\lim_{n\to+\infty}(-3n+1) = -\infty$. Par théorème de comparaison, $\lim_{n\to+\infty} v_n = -\infty$.

Exercice 5

Soit (w_n) la suite définie par : $w_n = -n^2 + 6\cos(n)$.

1. (a) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $-1 \leq \cos(n) \leq 1$.
   (b) Donc $6\cos(n) \leq 6$, et par conséquent : $w_n = -n^2 + 6\cos(n) \leq -n^2 + 6$.
2. On sait que $\lim_{n\to+\infty}(-n^2+6) = -\infty$. Par théorème de comparaison, $\lim_{n\to+\infty} w_n = -\infty$.

Exercice 6

L'affirmation est **vraie**.

Justification : C'est l'énoncé du théorème des gendarmes (ou théorème d'encadrement). Si à partir d'un certain rang $u_n \leq v_n \leq w_n$ et si $\lim_{n\to+\infty} u_n = \lim_{n\to+\infty} w_n = 2$, alors $\lim_{n\to+\infty} v_n = 2$.

Exercice 7

1. Soit (u_n) une suite qui vérifie $u_n \geq 3n^2 - 1$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

   On sait que $\lim_{n\to+\infty}(3n^2 - 1) = +\infty$. Par théorème de comparaison, $\lim_{n\to+\infty} u_n = +\infty$.

2. Soit (u_n) une suite telle que $u_n \leq -5n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

   On sait que $\lim_{n\to+\infty}(-5n) = -\infty$. Par théorème de comparaison, $\lim_{n\to+\infty} u_n = -\infty$.

3. Soit (u_n) une suite telle que $\frac{1}{n} \leq u_n \leq \frac{2}{n}$ pour tout $n \geq 1$.

   On sait que $\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n} = 0$ et $\lim_{n\to+\infty} \frac{2}{n} = 0$. Par théorème des gendarmes, $\lim_{n\to+\infty} u_n = 0$.

Exercice 8

Soit (u_n) la suite de terme général $u_n = 1 + \dfrac{(-1)^n}{n+1}$.

On sait que $-1 \leq (-1)^n \leq 1$, donc $\frac{-1}{n+1} \leq \frac{(-1)^n}{n+1} \leq \frac{1}{n+1}$.

Par conséquent : $1 - \frac{1}{n+1} \leq u_n \leq 1 + \frac{1}{n+1}$.

Comme $\lim_{n\to+\infty}\left(1 - \frac{1}{n+1}\right) = 1$ et $\lim_{n\to+\infty}\left(1 + \frac{1}{n+1}\right) = 1$, par théorème des gendarmes : $\lim_{n\to+\infty} u_n = 1$.

Exercice 9

Déterminons la limite de la suite (u_n) en utilisant les théorèmes de comparaison :

a) $u_n = n - \sin n$

$-1 \leq \sin n \leq 1$, donc $n - 1 \leq u_n \leq n + 1$. Comme $\lim_{n\to+\infty}(n - 1) = +\infty$, on a $\lim_{n\to+\infty} u_n = +\infty$.

b) $u_n = -n^2 + \cos n$

$-1 \leq \cos n \leq 1$, donc $-n^2 - 1 \leq u_n \leq -n^2 + 1$. Comme $\lim_{n\to+\infty}(-n^2 + 1) = -\infty$, on a $\lim_{n\to+\infty} u_n = -\infty$.

c) $u_n = \dfrac{n}{2 + \cos n}$

$-1 \leq \cos n \leq 1$, donc $1 \leq 2 + \cos n \leq 3$. Donc $\frac{n}{3} \leq u_n \leq \frac{n}{1} = n$. Comme $\lim_{n\to+\infty} \frac{n}{3} = +\infty$, on a $\lim_{n\to+\infty} u_n = +\infty$.

d) $u_n = \dfrac{n - \sin n}{n^2 + 1}$

$-1 \leq \sin n \leq 1$, donc $n - 1 \leq n - \sin n \leq n + 1$.

Donc $\frac{n-1}{n^2+1} \leq u_n \leq \frac{n+1}{n^2+1}$.

Or $\frac{n-1}{n^2+1} = \frac{n}{n^2+1} - \frac{1}{n^2+1} \sim \frac{1}{n} - 0 = \frac{1}{n} \to 0$.

De même, $\frac{n+1}{n^2+1} \to 0$. Donc $\lim_{n\to+\infty} u_n = 0$.

Exercice 10

Déterminons la limite de la suite (u_n) en utilisant les théorèmes de comparaison :

a) $u_n = \dfrac{4n + (-1)^n}{n + 2}$

$-1 \leq (-1)^n \leq 1$, donc $\frac{4n-1}{n+2} \leq u_n \leq \frac{4n+1}{n+2}$.

Or $\frac{4n-1}{n+2} = \frac{4n+8-9}{n+2} = 4 - \frac{9}{n+2} \to 4$.

De même, $\frac{4n+1}{n+2} \to 4$. Donc $\lim_{n\to+\infty} u_n = 4$.

b) $u_n = 5n^3 + (-1)^n$

$-1 \leq (-1)^n \leq 1$, donc $5n^3 - 1 \leq u_n \leq 5n^3 + 1$. Comme $\lim_{n\to+\infty}(5n^3 - 1) = +\infty$, on a $\lim_{n\to+\infty} u_n = +\infty$.

c) $u_n = \dfrac{-n + (-1)^n}{2n - (-1)^n}$

$-1 \leq (-1)^n \leq 1$, donc : - Au numérateur : $-n - 1 \leq -n + (-1)^n \leq -n + 1$ - Au dénominateur : $2n - 1 \leq 2n - (-1)^n \leq 2n + 1$

Pour n assez grand, le dénominateur est positif, donc : $\frac{-n-1}{2n+1} \leq u_n \leq \frac{-n+1}{2n-1}$.

Or $\frac{-n-1}{2n+1} \to -\frac{1}{2}$ et $\frac{-n+1}{2n-1} \to -\frac{1}{2}$.

Donc $\lim_{n\to+\infty} u_n = -\frac{1}{2}$.

d) $u_n = \dfrac{n^2 + (-1)^n\sqrt{n}}{n}$

$-1 \leq (-1)^n \leq 1$, donc $-\sqrt{n} \leq (-1)^n\sqrt{n} \leq \sqrt{n}$.

Donc $\frac{n^2-\sqrt{n}}{n} \leq u_n \leq \frac{n^2+\sqrt{n}}{n}$.

Or $\frac{n^2-\sqrt{n}}{n} = n - \frac{1}{\sqrt{n}} \to +\infty$.

Donc $\lim_{n\to+\infty} u_n = +\infty$.

Exercice 11

L'affirmation est **fausse**.

Contre-exemple : $v_n = (-1)^n$ qui vérifie l'encadrement mais qui diverge.

Une suite bornée n'est pas nécessairement convergente.

Exercice 12

Choisissons les bonnes réponses :

1. Si $u_n = \frac{1}{n}$ pour tout $n \geq 1$, alors :

   a) **Vrai** : $\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n} = 0$.

   b) **Vrai** : pour tout $n \geq 1$, $u_n = \frac{1}{n} > 0$.

   c) **Faux** : la suite converge vers 0.

2. Si pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \leq 2 - 3n$, alors :

   a) **Vrai** : $\lim_{n\to+\infty}(2 - 3n) = -\infty$, donc par comparaison $\lim_{n\to+\infty} u_n = -\infty$.

   b) **Faux** : la suite diverge vers $-\infty$.

   c) **Vrai** : pour n assez grand, $2 - 3n < 0$, donc $u_n < 0$.

Exercice 13

Soit (u_n) définie par $u_n = n^2 - 3n + 1$.

1. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = n^2 - 3n + 1 = n(n-3) + 1 > n(n-3)$.

2. On sait que $\lim_{n\to+\infty} n(n-3) = +\infty$. Par théorème de comparaison, $\lim_{n\to+\infty} u_n = +\infty$.

Exercice 14 ⇄ Inversé

Complétons le raisonnement :
« On a $u_n \leq w_n \leq v_n$ **à partir d'un certain rang** et $\lim_{n\to+\infty} u_n = \lim_{n\to+\infty} v_n = -5$ donc **par le théorème des gendarmes**, $\lim_{n\to+\infty} w_n = -5$. »
Énoncé possible : Soient (u_n), (v_n) et (w_n) trois suites telles qu'à partir d'un certain rang $u_n \leq w_n \leq v_n$. Si $\lim_{n\to+\infty} u_n = \lim_{n\to+\infty} v_n = -5$, déterminer $\lim_{n\to+\infty} w_n$.

Exercice 15

Soit (u_n) la suite de terme général $u_n = 1 + \dfrac{(-1)^n}{n+1}$.
On sait que $-1 \leq (-1)^n \leq 1$, donc $\frac{-1}{n+1} \leq \frac{(-1)^n}{n+1} \leq \frac{1}{n+1}$.
Par conséquent : $1 - \frac{1}{n+1} \leq u_n \leq 1 + \frac{1}{n+1}$.
Comme $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(1 - \dfrac{1}{n+1}\right) = 1$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(1 + \dfrac{1}{n+1}\right) = 1$, par théorème des gendarmes : $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 1$.

Exercice 16

Soit (u_n) la suite de terme général $u_n = \dfrac{n^2}{n+1}$.

1. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = \frac{n^2}{n+1} = \frac{n^2+n-n}{n+1} = \frac{n(n+1)-n}{n+1} = n - \frac{n}{n+1}$.
   Or $\frac{n}{n+1} = \frac{n+1-1}{n+1} = 1 - \frac{1}{n+1} < 1$.
   Donc $u_n = n - \frac{n}{n+1} > n - 1$.
2. On sait que $\lim_{n\to+\infty}(n-1) = +\infty$. Par théorème de comparaison, $\lim_{n\to+\infty} u_n = +\infty$.

Rappels sur les suites géométriques

Exercice 17

Soit (v_n) la suite géométrique de premier terme $v_0 = 5$ et de raison $q = 7$.

1. $v_n = v_0 \times q^n = 5 \times 7^n$.
2. Puisque $q = 7 > 1$, on a $\lim_{n\to+\infty} v_n = +\infty$.
3. $S_n = v_0 + v_1 + \cdots + v_n = v_0 \times \frac{1-q^{n+1}}{1-q} = 5 \times \frac{1-7^{n+1}}{1-7} = 5 \times \frac{7^{n+1}-1}{6} = \frac{5(7^{n+1}-1)}{6}$.

Exercice 18

Donnons les éléments caractéristiques de chaque suite géométrique :

(a) $u_0 = 3$, $u_{n+1} = 2 \cdot u_n$: Premier terme $u_0 = 3$, raison $q = 2$.

(b) $u_n = 2^n$: Premier terme $u_0 = 1$, raison $q = 2$.

(c) $u_0 = -2$, $u_{n+1} = \frac{u_n}{2}$: Premier terme $u_0 = -2$, raison $q = \frac{1}{2}$.

(d) $u_n = 3 \times 0{,}2^n$: Premier terme $u_0 = 3$, raison $q = 0{,}2$.

Exercice 19

Calculons la valeur exacte de chaque somme :

(a) $S_1 = 1 + 4 + 4^2 + \cdots + 4^6 = \frac{1-4^7}{1-4} = \frac{1-16384}{-3} = \frac{16383}{3} = 5461$.

(b) $S_2 = 1 + 0{,}2 + 0{,}2^2 + \cdots + 0{,}2^7 = \frac{1-0{,}2^8}{1-0{,}2} = \frac{1-0{,}2^8}{0{,}8} \approx 1{,}25$.

(c) $S_3 = 1 + \frac{1}{6} + \left(\frac{1}{6}\right)^2 + \cdots + \left(\frac{1}{6}\right)^6 = \frac{1-\left(\frac{1}{6}\right)^7}{1-\frac{1}{6}} = \frac{1-\frac{1}{6^7}}{\frac{5}{6}} = \frac{6}{5}\left(1 - \frac{1}{6^7}\right) \approx 1{,}20$.

(d) $S_4 = 1 + 1^1 + 1^2 + \cdots + 1^{10} = 11 \times 1 = 11$.

Exercice 20

(a) (u_n) géométrique : $u_0 = 5$, $q = \frac{2}{3}$, donc $u_n = 5 \times \left(\frac{2}{3}\right)^n$.
$S = u_{10} + u_{11} + \cdots + u_{21} = u_{10}(1 + q + q^2 + \cdots + q^{11}) = u_{10} \times \frac{1-q^{12}}{1-q}$.
$S = 5 \times \left(\frac{2}{3}\right)^{10} \times \frac{1-\left(\frac{2}{3}\right)^{12}}{1-\frac{2}{3}} = 5 \times \left(\frac{2}{3}\right)^{10} \times \frac{1-\left(\frac{2}{3}\right)^{12}}{\frac{1}{3}} = 15 \times \left(\frac{2}{3}\right)^{10} \times \left(1 - \left(\frac{2}{3}\right)^{12}\right)$.

(b) (v_n) géométrique : $v_0 = 12$, $q = -\frac{1}{2}$, donc $v_n = 12 \times \left(-\frac{1}{2}\right)^n$.
$S' = v_7 + v_8 + \cdots + v_{12} = v_7(1 + q + q^2 + \cdots + q^5) = v_7 \times \frac{1-q^6}{1-q}$.
$S' = 12 \times \left(-\frac{1}{2}\right)^7 \times \frac{1-\left(-\frac{1}{2}\right)^6}{1-\left(-\frac{1}{2}\right)} = 12 \times \left(-\frac{1}{128}\right) \times \frac{1-\frac{1}{64}}{\frac{3}{2}} = -\frac{12}{128} \times \frac{63}{64} \times \frac{2}{3}$.

Limites de q^n

Exercice 21

(a) $u_n = 3^n$: Comme $3 > 1$, on a $\lim_{n\to+\infty} 3^n = +\infty$.

(b) $s_n = (-0,99)^n$: Comme $|-0,99| = 0,99 < 1$, on a $\lim_{n\to+\infty}(-0,99)^n = 0$.

(c) $w_n = (-0,1)^n$: Comme $|-0,1| = 0,1 < 1$, on a $\lim_{n\to+\infty}(-0,1)^n = 0$.

(d) $\zeta_n = e^n$: Comme $e > 1$, on a $\lim_{n\to+\infty} e^n = +\infty$.

Exercice 22

(a) $u_n = -25\left(\dfrac{5}{6}\right)^n$: Comme $\left|\dfrac{5}{6}\right| < 1$, on a $\lim_{n\to+\infty} \left(\dfrac{5}{6}\right)^n = 0$, donc $\lim_{n\to+\infty} u_n = 0$.

(b) $u_n = -7\left(\sqrt{3}\right)^n$: Comme $\sqrt{3} > 1$, on a $\lim_{n\to+\infty} \left(\sqrt{3}\right)^n = +\infty$, donc $\lim_{n\to+\infty} u_n = -\infty$.

(c) $u_n = -2\left(\dfrac{10}{7}\right)^n$: Comme $\dfrac{10}{7} > 1$, on a $\lim_{n\to+\infty} \left(\dfrac{10}{7}\right)^n = +\infty$, donc $\lim_{n\to+\infty} u_n = -\infty$.

(d) $u_n = (-\pi)^n$: Comme $|-\pi| = \pi > 1$ et que $(-\pi)^n$ change de signe, la suite n'admet pas de limite.

(e) $u_n = 3^{n+1} = 3 \times 3^n$: Comme $3 > 1$, on a $\lim_{n\to+\infty} u_n = +\infty$.

(f) $u_n = (-1)^n$: Cette suite oscille entre -1 et 1, elle n'admet donc pas de limite.

Exercice 23 Algorithme

```
def conv(q):
    if -1<q<1:
        return ("La suite converge vers 0")
    else:
        return ("La suite diverge")
```

Exercice 24

On peut écrire $u_n = \dfrac{6^n}{7^n} = \left(\dfrac{6}{7}\right)^n$. Ainsi $q = \dfrac{6}{7}$.

Comme $0 < \dfrac{6}{7} < 1$, on a $\lim_{n\to+\infty} \left(\dfrac{6}{7}\right)^n = 0$.

La suite (u_n) converge donc vers 0.

Exercice 25 Logique

1. Cette proposition est vraie. C'est une propriété fondamentale des suites géométriques.
2. (a) **Contraposée :** « Si la suite (q^n) n'a pas pour limite 0, alors $q \notin]0;1[$. »

   Réciproque : « Si la suite (q^n) a pour limite 0, alors $0 < q < 1$. »

   (b) **Contraposée :** Vraie (équivalente à la proposition directe).

   Réciproque : Fausse. Contre-exemple : $q = -0,5$. On a $\lim_{n\to+\infty}(-0,5)^n = 0$ mais $q \notin]0;1[$.

Exercice 26

(a) $u_n = \dfrac{4}{7^n}$: Comme $\lim_{n\to+\infty} 7^n = +\infty$, on a $\lim_{n\to+\infty} u_n = 0$.

(b) $u_n = \dfrac{2 \times 12^n}{6 \times 4^n} = \dfrac{1}{3} \times \dfrac{12^n}{4^n} = \dfrac{1}{3} \times 3^n$: Comme $3 > 1$, on a $\lim_{n\to+\infty} u_n = +\infty$.

(c) $u_n = \dfrac{(-1)^n \times 3^n}{(-0,1)^n} = \dfrac{(-1)^n \times 3^n}{(-1)^n \times 0,1^n} = \dfrac{3^n}{0,1^n} = 30^n$: Comme $30 > 1$, on a $\lim_{n\to+\infty} u_n = +\infty$.

(d) $u_n = \dfrac{(-4)^{n+1}}{5^n} = \dfrac{(-4) \times (-4)^n}{5^n} = -4 \times \left(\dfrac{-4}{5}\right)^n$: Comme $\left|\dfrac{-4}{5}\right| < 1$, on a $\lim_{n\to+\infty} u_n = 0$.

Exercice 27

(a) $u_n = 4^n + 7^n$: Comme $4^n \to +\infty$ et $7^n \to +\infty$, on a $\lim_{n\to+\infty} u_n = +\infty$.

(b) $u_n = -2\times 12^n + 3^n - 5 = 12^n\left(-2 + \left(\dfrac{3}{12}\right)^n\right) - 5$: Comme $12^n \to +\infty$ et $\left(\dfrac{3}{12}\right)^n \to 0$, on a $\lim_{n\to+\infty} u_n = -\infty$.

(c) $u_n = 9^n - 3^n = 3^n(3^n - 1) = 9^n - 3^n$: Comme 9^n croît plus vite que 3^n, on a $\lim_{n\to+\infty} u_n = +\infty$.

(d) $u_n = 1 + 0,5 + ... + 0,5^n = \sum_{k=0}^{n} 0,5^k = \dfrac{1 - 0,5^{n+1}}{1 - 0,5} = 2(1 - 0,5^{n+1})$: Comme $0,5^{n+1} \to 0$, on a $\lim_{n\to+\infty} u_n = 2$.

(e) $u_n = 4^n + (-2)^n + 4$: Comme $4^n \to +\infty$ et $(-2)^n$ diverge sans limite, on a $\lim_{n\to+\infty} u_n = +\infty$.

(f) $u_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} 2^k = \dfrac{2^{n+1} - 1}{2 - 1} = 2^{n+1} - 1$: Comme $2^{n+1} \to +\infty$, on a $\lim_{n\to+\infty} u_n = +\infty$.

Exercice 28

Déterminer la limite éventuelle de (u_n) définie pour tout entier naturel n.

Correction :

(a) $u_n = \dfrac{2^n - 3^n}{5^n + 4^n}$: On divise par 5^n : $u_n = \dfrac{\left(\dfrac{2}{5}\right)^n - \left(\dfrac{3}{5}\right)^n}{1 + \left(\dfrac{4}{5}\right)^n}$. Comme tous les termes avec exposant n tendent vers 0, on a $\lim_{n\to+\infty} u_n = 0$.

(b) $u_n = \dfrac{2^n - 3^n}{3^n - 1}$: On divise par 3^n : $u_n = \dfrac{\left(\dfrac{2}{3}\right)^n - 1}{1 - \left(\dfrac{1}{3}\right)^n}$. Comme $\left(\dfrac{2}{3}\right)^n \to 0$ et $\left(\dfrac{1}{3}\right)^n \to 0$, on a $\lim_{n\to+\infty} u_n = -1$.

(c) $u_n = \dfrac{5^n + (-3)^n}{2^n + 3(-1)^n}$: Le terme $(-3)^n$ et $(-1)^n$ font osciller la suite, elle n'admet pas de limite.

Exercice 29

Déterminer la limite de chacune des suites définies pour tout entier naturel n non nul par :

Correction :

(a) $u_n = 0.5^n \cos n$: Comme $-1 \leq \cos n \leq 1$, on a $-0,5^n \leq u_n \leq 0,5^n$. Par le théorème des gendarmes, $\lim_{n\to+\infty} u_n = 0$.

(b) $u_n = 3^n + \sin n$: Comme $3^n \to +\infty$ et $|\sin n| \leq 1$, on a $\lim_{n\to+\infty} u_n = +\infty$.

(c) $u_n = \frac{1}{n}\sin(2^n)$: Comme $|\sin(2^n)| \leq 1$, on a $|u_n| \leq \frac{1}{n}$. Par le théorème des gendarmes, $\lim_{n\to+\infty} u_n = 0$.

Exercice 30 Logique

Montrer, en raisonnant par l'absurde, que la suite (u_n) définie pour tout entier naturel n par $u_n = \dfrac{(-2)^n}{7}$ n'admet pas de limite.

Correction :

Supposons par l'absurde que (u_n) converge vers une limite ℓ.

Pour n pair : $u_n = \dfrac{2^n}{7} \to +\infty$ Pour n impair : $u_n = \dfrac{-2^n}{7} \to -\infty$

Les sous-suites extraites (u_{2k}) et (u_{2k+1}) ont des limites différentes, ce qui contredit l'unicité de la limite.

Donc (u_n) n'admet pas de limite.

Exercice 31 **Logique**

Montrer que (v_n) définie pour tout entier naturel n par $v_n = 2\left(-\dfrac{15}{7}\right)^n$ n'admet pas de limite.

Correction :

On a $v_n = 2(-1)^n\left(\dfrac{15}{7}\right)^n$.

Pour n pair : $v_n = 2\left(\dfrac{15}{7}\right)^n \to +\infty$ Pour n impair : $v_n = -2\left(\dfrac{15}{7}\right)^n \to -\infty$

Les sous-suites (v_{2k}) et (v_{2k+1}) ont des comportements asymptotiques opposés, donc (v_n) n'admet pas de limite.

Exercice 32

Soit (u_n) la suite définie pour tout entier naturel n par :

$$\begin{cases} u_0 = 5 \\ u_{n+1} = -2u_n + 3 \end{cases}$$

On pose $v_n = u_n - 1$.

Correction :

1. $v_{n+1} = u_{n+1} - 1 = -2u_n + 3 - 1 = -2u_n + 2 = -2(u_n - 1) = -2v_n$
   Donc (v_n) est géométrique de raison -2 et de premier terme $v_0 = u_0 - 1 = 4$.
2. $v_n = 4 \times (-2)^n$, donc $u_n = v_n + 1 = 4(-2)^n + 1$.
3. Comme $|-2| = 2 > 1$, la suite $(-2)^n$ diverge, donc (u_n) diverge.

Exercice 33

Indiquer si l'affirmation est vraie ou fausse, puis justifier.
« Si q est un nombre réel tel que $-1 < q < 1$, alors la suite de terme général $\sum_{k=0}^{n} q^k$ converge. »

Correction :

Affirmation vraie.

Si $q \neq 1$, alors $\sum_{k=0}^{n} q^k = \dfrac{1 - q^{n+1}}{1 - q}$.

Comme $-1 < q < 1$, on a $\lim_{n\to+\infty} q^{n+1} = 0$, donc $\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{n} q^k = \dfrac{1}{1-q}$.

Exercice 34

Soit (v_n) la suite définie pour tout entier naturel n par :

$$\begin{cases} v_0 = -\dfrac{2}{3} \\ v_{n+1} = -2v_n + 1 \end{cases}$$

Correction :

1. **Initialisation :** $v_0 = -\dfrac{2}{3} = \dfrac{1}{3} - (-2)^0 = \dfrac{1}{3} - 1 = -\dfrac{2}{3}$
   Hérédité : Supposons $v_n = \dfrac{1}{3} - (-2)^n$.
   $v_{n+1} = -2v_n + 1 = -2\left(\dfrac{1}{3} - (-2)^n\right) + 1 = -\dfrac{2}{3} + 2(-2)^n + 1 = \dfrac{1}{3} + 2(-2)^n = \dfrac{1}{3} - (-2)^{n+1}$
2. Comme $|-2| = 2 > 1$, la suite $(-2)^n$ diverge, donc (v_n) diverge.

Exercice 35

On considère la suite (u_n) définie pour tout entier naturel n par :

$$u_{n+1} = \frac{3u_n + 1}{2u_n + 4} \text{ et } u_0 = 1$$

Correction :

1. **Initialisation :** $u_0 = 1 \geq 0$
   Hérédité : Si $u_n \geq 0$, alors $u_{n+1} = \dfrac{3u_n + 1}{2u_n + 4}$.
   Comme $3u_n + 1 \geq 1 > 0$ et $2u_n + 4 \geq 4 > 0$, on a $u_{n+1} > 0$
2. a) $r_{n+1} = \dfrac{2u_{n+1} - 1}{u_{n+1} + 1}$
   En substituant $u_{n+1} = \dfrac{3u_n + 1}{2u_n + 4}$:
   $r_{n+1} = \dfrac{2 \cdot \dfrac{3u_n + 1}{2u_n + 4} - 1}{\dfrac{3u_n + 1}{2u_n + 4} + 1} = \dfrac{\dfrac{6u_n + 2 - 2u_n - 4}{2u_n + 4}}{\dfrac{3u_n + 1 + 2u_n + 4}{2u_n + 4}} = \dfrac{4u_n - 2}{5u_n + 5} = \dfrac{2(2u_n - 1)}{5(u_n + 1)} = \dfrac{2}{5} \cdot \dfrac{2u_n - 1}{u_n + 1} = \dfrac{2}{5} r_n$
   Donc (r_n) est géométrique de raison $\dfrac{2}{5}$.
   b) $r_0 = \dfrac{2 \cdot 1 - 1}{1 + 1} = \dfrac{1}{2}$
   Donc $r_n = \dfrac{1}{2} \cdot \left(\dfrac{2}{5}\right)^n$.
3. De $r_n = \dfrac{2u_n - 1}{u_n + 1}$, on tire :
   $r_n(u_n + 1) = 2u_n - 1$ $r_n u_n + r_n = 2u_n - 1$ $u_n(r_n - 2) = -1 - r_n$ $u_n = \dfrac{1 + r_n}{2 - r_n}$
   En substituant : $u_n = \dfrac{1 + \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{2}{5}\right)^n}{2 - \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{2}{5}\right)^n} = \dfrac{2 + \left(\dfrac{2}{5}\right)^n}{4 - \left(\dfrac{2}{5}\right)^n}$
4. Comme $\left(\dfrac{2}{5}\right)^n \to 0$, on a $\lim_{n\to+\infty} u_n = \dfrac{2}{4} = \dfrac{1}{2}$.
   La suite (u_n) converge vers $\dfrac{1}{2}$.

Convergences monotones

Exercice 36

Soit la suite (u_n) définie par $u_0 = -2$ et pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = \frac{1}{2}u_n + 1$.

Correction :

1. **Initialisation :** $u_0 = -2 \leq 2$

   Hérédité : Si $u_n \leq 2$, alors $u_{n+1} = \dfrac{1}{2}u_n + 1 \leq \dfrac{1}{2} \cdot 2 + 1 = 2$

   Conclusion : Par principe de récurrence, la propriété est vraie
2. $u_{n+1} - u_n = \dfrac{1}{2}u_n + 1 - u_n = 1 - \dfrac{1}{2}u_n = \dfrac{2-u_n}{2}$

   Comme $u_n \leq 2$, on a $2 - u_n \geq 0$, donc $u_{n+1} - u_n \geq 0$.

   La suite (u_n) est croissante.
3. (u_n) est croissante et majorée par 2, donc elle converge.

   Sa limite vérifie $\ell = \dfrac{1}{2}\ell + 1$, soit $\ell = 2$.

Exercice 37

Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = 2020$ et pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = \sqrt{u_n}$.

Correction :

1. **Initialisation :** $u_0 = 2020 \geq 1$

   Hérédité : Si $u_n \geq 1$, alors $u_{n+1} = \sqrt{u_n} \geq \sqrt{1} = 1$
2. $u_{n+1} - u_n = \sqrt{u_n} - u_n = \sqrt{u_n}(1 - \sqrt{u_n})$

   Comme $u_n \geq 1$, on a $\sqrt{u_n} \geq 1$, donc $1 - \sqrt{u_n} \leq 0$.

   Ainsi $u_{n+1} - u_n \leq 0$, la suite est décroissante.
3. (u_n) est décroissante et minorée par 1, donc elle converge.
4. Sa limite vérifie $\ell = \sqrt{\ell}$, soit $\ell^2 = \ell$, donc $\ell = 0$ ou $\ell = 1$.

   Comme $u_n \geq 1$, on a $\lim_{n\to+\infty} u_n = 1$.

Exercice 38

Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = 1,8$ et pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = \frac{2}{3-u_n}$.

Correction :

1. **Initialisation :** $u_0 = 1,8 \in [1;2]$

   Hérédité : Si $u_n \in [1;2]$, alors $3 - u_n \in [1;2]$, donc $u_{n+1} = \dfrac{2}{3-u_n} \in [1;2]$
2. $u_{n+1} - u_n = \dfrac{2}{3-u_n} - u_n = \dfrac{2 - u_n(3-u_n)}{3-u_n} = \dfrac{2 - 3u_n + u_n^2}{3-u_n} = \dfrac{u_n^2 - 3u_n + 2}{3-u_n} = \dfrac{(u_n-1)(u_n-2)}{3-u_n}$

   Pour $u_n \in [1;2]$, on a $u_n - 1 \geq 0$, $u_n - 2 \leq 0$ et $3 - u_n > 0$.

   Donc $u_{n+1} - u_n \leq 0$, la suite est décroissante.
3. (u_n) est décroissante et minorée par 1, donc elle converge.
4. Sa limite vérifie $\ell = \dfrac{2}{3-\ell}$, soit $\ell(3-\ell) = 2$, donc $\ell^2 - 3\ell + 2 = 0$.

   Les solutions sont $\ell = 1$ et $\ell = 2$. Comme la suite est décroissante et $u_0 = 1,8 < 2$, on a $\lim_{n\to+\infty} u_n = 1$.

Exercice 39

Indiquer si les affirmations sont vraies ou fausses, puis justifier.

Correction :

1. **Faux.** Une suite convergente n'est pas nécessairement monotone.

   Contre-exemple : $u_n = \dfrac{(-1)^n}{n}$ converge vers 0 mais n'est ni croissante ni décroissante.
2. **Vrai.** Si une suite croissante converge vers 0, alors pour tout n, $u_n \leq \lim_{k\to+\infty} u_k = 0$.
3. **Faux.** Une suite non minorée peut avoir d'autres comportements que tendre vers $-\infty$.

   Contre-exemple : $u_n = -n + (-1)^n \cdot n$ n'est pas minorée mais n'admet pas de limite.

Exercice 40

Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = \dfrac{1}{2}$ et pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = \dfrac{3u_n}{1+2u_n}$.

Correction :

1. $f'(x) = \dfrac{3(1+2x) - 3x \cdot 2}{(1+2x)^2} = \dfrac{3 + 6x - 6x}{(1+2x)^2} = \dfrac{3}{(1+2x)^2} > 0$

   Donc f est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+$.
2. (a) **Initialisation :** $u_0 = \dfrac{1}{2}$. Alors $u_1 = \dfrac{3 \cdot \frac{1}{2}}{1 + 2 \cdot \frac{1}{2}} = \dfrac{\frac{3}{2}}{2} = \dfrac{3}{4}$.

   Hérédité : Si $0 \leq u_n \leq 1$, alors $u_{n+1} = \dfrac{3u_n}{1+2u_n}$.

   Comme $u_n \geq 0$, on a $u_{n+1} \geq 0$.

   $u_{n+1} - 1 = \dfrac{3u_n}{1+2u_n} - 1 = \dfrac{3u_n - 1 - 2u_n}{1+2u_n} = \dfrac{u_n - 1}{1+2u_n}$

   Si $u_n \leq 1$, alors $u_n - 1 \leq 0$ et $1 + 2u_n > 0$, donc $u_{n+1} \leq 1$

   (b) $u_{n+1} - u_n = \dfrac{3u_n}{1+2u_n} - u_n = \dfrac{3u_n - u_n(1+2u_n)}{1+2u_n} = \dfrac{3u_n - u_n - 2u_n^2}{1+2u_n} = \dfrac{2u_n - 2u_n^2}{1+2u_n} = \dfrac{2u_n(1-u_n)}{1+2u_n}$

   Pour $u_n \in [0;1]$, on a $u_n \geq 0$, $1 - u_n \geq 0$ et $1 + 2u_n > 0$, donc $u_{n+1} - u_n \geq 0$.

   La suite (u_n) est croissante.
3. (u_n) est croissante et majorée par 1, donc elle converge.

4. Montrons par récurrence que $u_n = \dfrac{3^n}{3^n+1}$:

Initialisation : $u_0 = \dfrac{3^0}{3^0+1} = \dfrac{1}{2}$

Hérédité : Si $u_n = \dfrac{3^n}{3^n+1}$, alors :

$$u_{n+1} = \frac{3u_n}{1+2u_n} = \frac{3\cdot\dfrac{3^n}{3^n+1}}{1+2\cdot\dfrac{3^n}{3^n+1}} = \frac{\dfrac{3^{n+1}}{3^n+1}}{\dfrac{3^n+1+2\cdot 3^n}{3^n+1}} = \frac{3^{n+1}}{3^n+1+2\cdot 3^n} = \frac{3^{n+1}}{3\cdot 3^n+1} = \frac{3^{n+1}}{3^{n+1}+1}$$

Donc $\lim_{n\to+\infty} u_n = \lim_{n\to+\infty} \dfrac{3^n}{3^n+1} = \lim_{n\to+\infty} \dfrac{1}{1+3^{-n}} = 1$.

Exercices supplémentaires

Exercice 41

Soit la fonction f définie sur l'intervalle $[0;4]$ par $f(x) = x+2$.
On divise l'intervalle $[0;4]$ en 4 segments de largeur 1 et on construit quatre rectangles « inférieurs »en bleu et quatre rectangles « supérieurs »en rouge.
On appelle $\mathcal{A}$ l'aire du trapèze ABCD.

Correction :

1. **Rectangles inférieurs :**

   Sur $[0;1]$: hauteur $f(0) = 2$, aire $= 1\times 2 = 2$ Sur $[1;2]$: hauteur $f(1) = 3$, aire $= 1\times 3 = 3$ Sur $[2;3]$: hauteur $f(2) = 4$, aire $= 1\times 4 = 4$ Sur $[3;4]$: hauteur $f(3) = 5$, aire $= 1\times 5 = 5$

   Aire totale des rectangles inférieurs : $2+3+4+5 = 14$

   Rectangles supérieurs :

   Sur $[0;1]$: hauteur $f(1) = 3$, aire $= 1\times 3 = 3$ Sur $[1;2]$: hauteur $f(2) = 4$, aire $= 1\times 4 = 4$ Sur $[2;3]$: hauteur $f(3) = 5$, aire $= 1\times 5 = 5$ Sur $[3;4]$: hauteur $f(4) = 6$, aire $= 1\times 6 = 6$

   Aire totale des rectangles supérieurs : $3+4+5+6 = 18$

2. $14 < \mathcal{A} < 18$

3. a $u_4 = 14$ et $v_4 = 18$

   b Par construction, u_n est une approximation par défaut et v_n par excès de l'aire sous la courbe, donc $u_n < \mathcal{A} < v_n$.

4. On a $\lim_{n\to+\infty} u_n = \lim_{n\to+\infty} 8\left(\dfrac{n-1}{n}+1\right) = 8(1+1) = 16$

   Et $\lim_{n\to+\infty} v_n = \lim_{n\to+\infty} 8\left(\dfrac{n+1}{n}+1\right) = 8(1+1) = 16$

   Par le théorème des gendarmes, $\mathcal{A} = 16$.

   Vérification : L'aire du trapèze ABCD est $\mathcal{A} = \dfrac{(2+6)\times 4}{2} = 16$

Point Histoire : Cette méthode d'approximation de l'aire sous une courbe a été introduite par Riemann (1826-1866) et Simpson (1710-1761). Nous en reparlerons au chapitre 11.