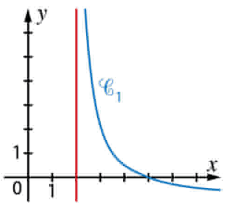
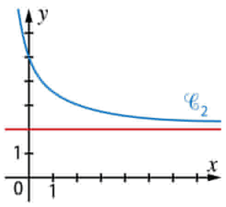
Limites en $\pm\infty$

Exercice 1

Soit f une fonction telle que $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 2$.
Parmi les courbes ci-dessous, laquelle peut représenter la fonction f ? Expliquer ce choix.





Exercice 2

Soit le tableau de variation dune fonction f.

x	$-\infty$		1		$+\infty$
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	-2	$\nearrow$	4

1. Donner les limites de f en $-\infty$ et en $+\infty$.
2. En déduire lexistence dune asymptote d à la courbe représentative de la fonction f.
3. Tracer dans un repère la droite d et une courbe pouvant représenter f.

Exercice 3

Soit f une fonction définie sur $\mathbb{R}$ et $\mathcal{C}_f$ sa courbe représentative.
On donne le tableau de variation de f.

x	$-\infty$		7		$+\infty$
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	3	$\searrow$	2

1. Donner les limites de f en $-\infty$ et en $+\infty$.
2. En déduire lexistence dune asymptote d à la courbe représentative de la fonction f.
3. Tracer dans un repère la droite d et une courbe pouvant représenter f.

Exercice 4

On donne le tableau de variation de f.

x	$-\infty$		1		$+\infty$
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	2	$\nearrow$	7

1. Lire dans le tableau de variation les limites de f aux bornes de son ensemble de définition.
2. En déduire lexistence dune asymptote à la courbe représentative $\mathcal{C}$ de la fonction f.
3. Pourquoi peut-on affirmer quil existe un réel x_0 tel que $f(x) > 1000$ pour tout réel $x < x_0$?

Exercice 5

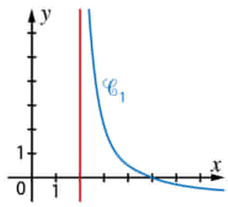
f est une fonction définie sur $\mathbb{R}$ et $\mathcal{C}_f$ est sa courbe représentative.
Indiquer si les affirmations sont vraies ou fausses, puis justifier.

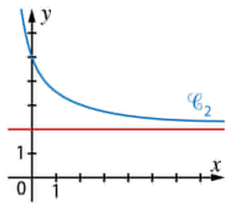
1. Si $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$, alors il existe un réel x_0 tel que $f(x) < -1000$ pour tout réel $x \geq x_0$.
2. Si f est décroissante sur $\mathbb{R}$, alors $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$.

Limites en un réel

Exercice 6

Soit f une fonction telle que $\lim_{\substack{x\to1\\x>1}} f(x) = +\infty$.
Parmi les courbes ci-dessous, lesquelles peuvent représenter la fonction f ? Expliquer ce choix.





Exercice 7

Soit f une fonction définie sur $I =]1;+\infty[$ et $\mathcal{C}_f$ sa courbe représentative.
On sait que $\lim\limits_{\substack{x\to1\\x>1}} f(x) = -\infty$et $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 3$.

1. Déduire de chaque limite l'existence dune asymptote à la courbe $\mathcal{C}_f$ et en donner une équation.
2. On sait de plus que f est croissante sur I.
Tracer dans un repère une allure de la courbe $\mathcal{C}_f$ et ses asymptotes.

Exercice 8

Soit f définie sur $I =]-\infty;3[$ et telle que $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = 1$ et $\lim\limits_{\substack{x\to3\\x<3}} f(x) = +\infty$.

1. Déduire de chaque limite l'existence dune asymptote à la courbe $\mathcal{C}_f$ et en donner une équation.
2. On sait que f est croissante sur I.
Tracer dans un repère une allure de la courbe $\mathcal{C}_f$ et ses asymptotes.

Exercice 9

Soit f définie sur $]-1;2[\cup]2;5]$ telle que :

- f est croissante sur $]-1;2[$ et sur $]2;5]$,
- $\lim\limits_{\substack{x\to-1\\x>-1}} f(x)=-\infty$, $\lim\limits_{\substack{x\to2\\x<2}} f(x)=+\infty$, $\lim\limits_{\substack{x\to2\\x>2}} f(x)=-\infty$
- $f(5)=2$.

On nomme $\mathcal{C}_f$ la courbe représentative de f.

1. Dresser le tableau de variation de f.
2. (a) La courbe $\mathcal{C}_f$ admet-elle des asymptotes ? Si oui, en donner une équation.
   (b) Tracer dans un repère une allure de la courbe $\mathcal{C}_f$ et ses asymptotes.

Exercice 10

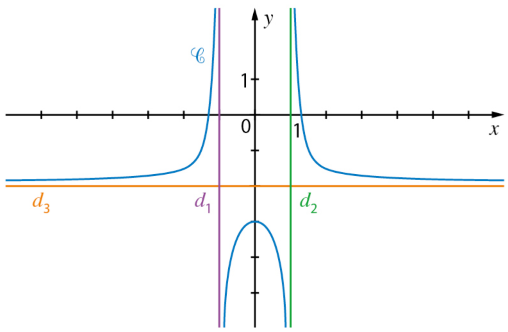
On donne le tableau de variation de f.

x	-3		0		1		$+\infty$
$f(x)$	||	$+\infty$ ↘	1	↗ $+\infty$	||	$-\infty$ ↗	2

1. Justifier que la courbe représentative $\mathcal{C}_f$ de la fonction f admet trois asymptotes. En donner une équation.
2. Tracer dans un repère une allure de la courbe $\mathcal{C}_f$ et ses asymptotes.

Exercice 11

Soit f une fonction définie sur $\mathbb{R}\setminus\{-1;1\}$ et $\mathcal{C}$ sa courbe représentative.
Les droites d_1, d_2 et d_3 sont des asymptotes à $\mathcal{C}$.



1. Par lecture graphique, conjecturer les limites de la fonction f en $-\infty$, en -1 (à gauche et à droite), en 1 (à gauche et à droite), et en $+\infty$.
2. Dresser le tableau de variation de f.

Opérations sur les limites

Exercice 12

Calculer les limites en $-\infty$ et $+\infty$ de f et g.

(a) $f(x)=-100$ $\qquad g(x)=0{,}1x$

(b) $f(x)=-7x$ $\qquad g(x)=5x^2$

(c) $f(x)=8+2x$ $\qquad g(x)=-2-0{,}1x^2$

(d) $f(x)=6-5x^3$ $\qquad g(x)=8+21x^5$

(e) $f(x)=2e^x$ $\qquad g(x)=17-9e^x$

(f) $f(x)=\dfrac{1}{x}-2$ $\qquad g(x)=3-\dfrac{5}{x}$

Exercice 13

Soient f, g et h des fonctions définies sur $\mathbb{R}^*$. Déterminer leurs limites en 0^- et 0^+.

1. $f(x)=\frac{1}{x}$, $\quad g(x)=1+\frac{2}{x}$, $\quad h(x)=1-\frac{4}{x}$
2. $f(x)=5+\frac{1}{x^2}$, $\quad g(x)=2+\frac{5}{x^2}$, $\quad h(x)=2-\frac{3}{x^2}$

Exercice 14

Soit f une fonction définie sur $\mathbb{R}$ telle que :

$$\lim_{x\to-\infty} f(x)=+\infty \quad\text{et}\quad \lim_{x\to+\infty} f(x)=2.$$

Calculer : $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{1}{f(x)}$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{f(x)}$

Exercice 15

Indiquer si les affirmations sont vraies ou fausses, puis justifier.

1. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=x$.
   Il existe une fonction g définie sur $\mathbb{R}$ telle que :
   $$\lim_{x\to+\infty} g(x)=-\infty \quad\text{et}\quad \lim_{x\to+\infty}(f(x)+g(x))=2.$$
2. Soit h définie sur $[1;+\infty[$ par $h(x)=\frac{1}{x}$.
   Il existe une fonction k définie sur $[1;+\infty[$ tq :
   $$\lim_{x\to+\infty} k(x)=+\infty \quad\text{et}\quad \lim_{x\to+\infty}(h(x)\times k(x))=1.$$

Exercice 16

Calculer les limites données.

(a) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(-2+3x+4\sqrt{x}\right)$

(b) $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(2x^3-x^2+x+7\right)$

(c) $\lim\limits_{\substack{x\to0\\x>0}}\left(5x^2+3x-\dfrac{19}{x}\right)$

(d) $\lim\limits_{\substack{x\to0\\x<0}}\left(4-3x+\dfrac{1}{x^2}\right)$

(e) $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(e^x+2x-3\right)$

(f) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1-x-2e^x\right)$

(g) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1-\sqrt{2}x^2-5x\sqrt{x}\right)$

(h) $\lim\limits_{x\to-\infty}\left((e^x-x)\left(\dfrac{1}{x}-5\right)\right)$

(i) $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(e^x\left(-5+\dfrac{2}{x}\right)\right)$

(j) $\lim\limits_{\substack{x\to0\\x<0}}\left((x-1)\left(2+\dfrac{3}{x^3}\right)\right)$

(k) $\lim\limits_{x\to-\infty}\left((7-2e^x)(2+e^x)\right)$

(l) $\lim\limits_{x\to+\infty}((2x-3)(5e^x-1))$

(m) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\x>0}}\left((1-2e^x)\left(1+\dfrac{2}{x}\right)\right)$

(n) $\lim\limits_{x\to-\infty}((1-e^x)(1-x))$

Exercice 17 Logique

f est une fonction définie sur $\mathbb{R}$ et k est un réel.

1. La proposition suivante est-elle vraie ? Justifier.
« $(\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=k) \Rightarrow (\forall\, x\in\mathbb{R},\, f(x)=k)$ »
2. La réciproque est-elle vraie ?

Exercice 18

Pour chaque fonction f définie sur $\mathbb{R}$, calculer les limites de $f(x)$ en $+\infty$ et $-\infty$.

(a) $f(x)=x^3+2x^2+3$

(b) $f(x)=-3x^2-8x+11$

(c) $f(x)=x^3-7x^2+x-1$

(d) $f(x)=x+xe^x$

(e) $f(x)=(x^3+x^2-x)(e^x-1)$

Exercice 19 Algorithme

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=3-e^x$ et $\mathcal{C}_f$ sa courbe représentative.

1. Montrer que $\mathcal{C}_f$ admet une asymptote d parallèle à l'axe des abscisses.
2. Quelle est la position de $\mathcal{C}_f$ par rapport à d ?
3. Soit M un point de $\mathcal{C}_f$ et H le projeté orthogonal de M sur d.
Quel est le rôle du programme ci-dessous ?

```
from math import *

def asympt():
    x = 0
    d = 1
    while d >= 0.001:
        x = x - 1
        d = exp(x)
    return(x)
```

Exercice 20 Logique

Est-ce vraie pour tout réel k ?
« Si $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=k$ alors, $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{f(x)}=\dfrac{1}{k}$. »

Exercice 21

Soient f et g les fonctions définies sur $]-\infty;2[$ par :

$$f(x)=\frac{1}{x-2}\quad\text{et}\quad g(x)=\frac{-7x}{x-2}.$$

Calculer les limites de f et g en $-\infty$ et en 2.

Exercice 22

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par $f(x)=\dfrac{2}{e^x-1}$.

1. Calculer la limite de la fonction f en $+\infty$.
2. (a) Étudier le signe de e^x-1 sur $]0;+\infty[$.
(b) En déduire la limite de la fonction f en 0.

Exercice 23

Soit f définie sur $[0;3[\cup]3;+\infty[$ par $f(x)=\dfrac{7}{-x^2+9}$.

1. Calculer la limite de la fonction f en $+\infty$.
2. (a) Étudier le signe de $-x^2+9$ selon les valeurs de x.
(b) Calculer la limite de la fonction f en 3 à gauche et à droite.

Exercice 24

On donne le tableau de variation de f.

x	$-\infty$	1	$+\infty$
$f(x)$	3 ↘	0 ↘	$-\infty$

Soit g définie sur $]-\infty;1[\cup]1;+\infty[$ par $g(x)=\frac{1}{f(x)}$.

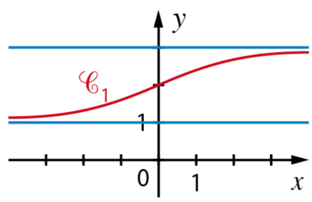
1. Quelles sont les limites de f en $-\infty$ et en $+\infty$?
En déduire les limites de g en $-\infty$ et en $+\infty$.
2. (a) Déterminer le signe de $f(x)$ selon les valeurs de x.
(b) En déduire les limites de g en 1 à gauche et à droite.

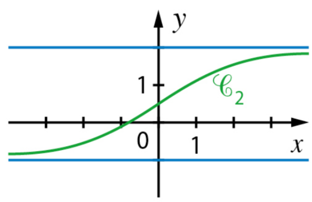
Exercice 25

Soient f et g les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x)=3-\frac{2}{1+e^x}\quad\text{et}\quad g(x)=2-\frac{3}{1+e^x}.$$

1. Déterminer les limites des fonctions f et g en $-\infty$ et en $+\infty$.
2. On a représenté ci-dessous les courbes représentatives de ces fonctions ainsi que leurs asymptotes (en bleu).
Associer à chaque fonction sa courbe représentative.





Exercice 26

Soit f définie sur $]1;+\infty[$ par $f(x)=\dfrac{-2x^2+1}{x-1}$.
Calculer les limites de f en 1 et en $+\infty$.

Exercice 27

Soit f définie sur $]2;+\infty[$ par $f(x)=\dfrac{-2x+1}{x^2-4}$.
Calculer les limites de f en 2 et en $+\infty$.

Exercice 28

Soit f définie sur $]1;+\infty[$ par $f(x)=\dfrac{x\sqrt{x}-3}{1-x}$.
Calculer les limites de f en 1 et en $+\infty$.

Exercice 29

Soit f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=\dfrac{e^x+3}{e^x+1}$.
Calculer les limites de f en $-\infty$ et en $+\infty$.

Exercice 30

Soit f définie sur $\mathbb{R}_+ \setminus 1$ par $f(x)=\dfrac{2x-5}{x^2+3x-4}$.

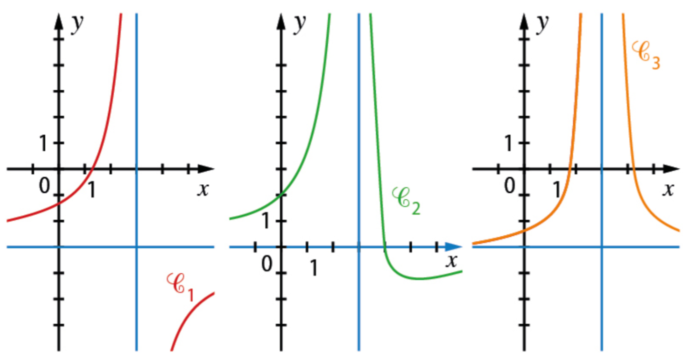
1. (a) Étudier le signe de x^2+3x-4 selon les valeurs de x.
   (b) Déterminer les limites de la fonction f en 1 à gauche et à droite.
2. Déterminer la limite de la fonction f en $+\infty$.

Exercice 31

Soit f, g et h les fonctions définies sur $\mathbb{R}\setminus\{3\}$ par :

$$f(x)=\frac{-4+3x}{3-x},\ g(x)=\frac{-3x^2+18x-22}{x^2-6x+9},\ h(x)=\frac{20-5x}{(3-x)^2}.$$

1. Déterminer les limites des fonctions f, g et h en 3 à droite et en $+\infty$.
2. On a représenté ci-dessous les courbes représentatives de ces fonctions ainsi que leurs asymptotes (en bleu).
   Associer, à chaque fonction, sa courbe représentative.



Composition

Exercice 32

Soit u une fonction définie sur $\mathbb{R}$ telle que :

$$\lim_{x\to-\infty} u(x)=1 \quad \text{et} \quad \lim_{x\to+\infty} u(x)=+\infty.$$

Montrer que $\lim\limits_{x\to-\infty} e^{u(x)}=e$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} e^{u(x)}=+\infty$.

Exercice 33

Soit u et v deux fonctions telles que $\lim\limits_{x\to+\infty} u(x)=2$ et $\lim_{x\to2} v(x)=-\infty$.
Déterminer $\lim\limits_{x\to+\infty} v(u(x))$.

Exercice 34

Soit f et g les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x)=x^2+2 \quad \text{et} \quad g(x)=\sqrt{x^2+2}.$$

1. La fonction g est la composée de f suivie d'une fonction de référence. Quelle est cette fonction de référence ?
2. Calculer $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$, puis $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x)$.

Exercice 35

Soit f, g et h les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x)=6-x, \quad g(x)=(6-x)^2, \quad h(x)=e^{6-x}.$$

1. Calculer $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$.
2. En déduire $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x)$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} h(x)$.
3. Calculer la limite des fonctions f, g et h en $+\infty$.

Exercice 36

Pour chacune des fonctions suivantes, écrire f comme la composée de deux fonctions, puis calculer les limites de f en $-\infty$ et en $+\infty$.

1. $f(x)=\sqrt{x^2+3}$
2. $f(x)=e^{1-0{,}5x}$
3. $f(x)=(5-x)^3$
4. $f(x)=\dfrac{1}{(x^2+x+1)^4}$

Exercice 37

Calculer les limites suivantes :

1. $\lim\limits_{x\to-\infty} e^{3x-2}$
2. $\lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt{2+x+e^{-x}}$
3. $\lim\limits_{x\to+\infty} e^{-x^2+x+1}$
4. $\lim\limits_{\substack{x\to0\\x>0}} e^{\frac{2}{x}}$
5. $\lim\limits_{x\to-\infty} \left(2-3e^{2x}\right)^5$
6. $\lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt{\frac{x^2-1}{4x^2+1}}$

Exercice 38

Soit f la fonction définie sur $]1\,;+\infty[$ par :

$$f(x)=e^{\frac{2}{x-1}}.$$

Calculer les limites de f en 1 et en $+\infty$.

Exercice 39

Soient f et g les fonctions définies sur $]-\infty\,;-2]\cup[2\,;+\infty[$ par $f(x)=\sqrt{x^2-4}-x$ et $g(x)=\sqrt{x^2-4}+x$.

1. Montrer que pour tout réel $x\in]-\infty\,;-2]\cup[2\,;+\infty[$, on a : $f(x)\times g(x)=-4$.
2. (a) Calculer la limite de la fonction g en $+\infty$.
   (b) En déduire la limite de f en $+\infty$.
3. (a) Calculer la limite de la fonction f en $-\infty$.
   (b) En déduire la limite de g en $-\infty$.

Exercice 40

Indiquer si les affirmations sont vraies ou fausses, puis justifier.

1. $\lim\limits_{x\to-\infty} e^{2+x^3}=0$.
2. Soit f une fonction définie sur $\mathbb{R}$.
   Si $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=-\infty$, alors $\lim\limits_{x\to-\infty} f(f(x))=+\infty$.

Comparaison et encadrement

Exercice 41

Soit f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=x+2\sin(x)$.

1. Montrer que pour tout réel x, $x-2\leq f(x)\leq x+2$.
2. Calculer la limite de f en $+\infty$.
3. Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x}$.

Exercice 42

Soit f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=2\cos(x)-x$.

1. Montrer que pour tout réel x, $-2-x\leq f(x)\leq 2-x$.
2. Calculer les limites de f en $-\infty$ et en $+\infty$.
3. (a) Montrer que pour tout réel x strictement négatif, on a :
$$\frac{2}{x}-1\leq\frac{f(x)}{x}\leq-\frac{2}{x}-1.$$
   (b) En déduire $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{f(x)}{x}$.

Exercice 43

Soit h définie sur $\mathbb{R}$ telle que, pour tout réel x :
$$e^{x+1}-1\leq h(x)\leq 2e^{x+1}-1.$$
Calculer $\lim\limits_{x\to-\infty} h(x)$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} h(x)$.

Exercice 44

Soit u définie sur $\mathbb{R}$ telle que, pour tout réel x :
$$x-1\leq u(x)\leq 2x-1.$$
Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=e^{u(x)}$.

1. Montrer que pour tout réel x, $e^{x-1}\leq f(x)\leq e^{2x-1}$.
2. Calculer $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.

Croissance comparée

Exercice 45

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=xe^{-20x}$.

1. Calculer la limite de f en $-\infty$.
2. (a) Déterminer le réel a tel que pour tout réel x, on ait :
$$f(x)=a(-20xe^{-20x})$$
   (b) Calculer la limite de f en $+\infty$.

Exercice 46

Soit f la fonction définie sur $]0;+\infty[$ par :
$$f(x)=\frac{e^{0{,}1x}}{x}.$$

1. Calculer la limite de f en 0.
2. (a) Déterminer le réel a tel que pour tout réel x strictement positif, on ait :
$$f(x)=a\times\frac{e^{0{,}1x}}{0{,}1x}.$$
   (b) Calculer la limite de f en $+\infty$.

Exercice 47

Calculer les limites suivantes :

1. $\lim\limits_{x\to-\infty}(3xe^x+2e^x-1)$
2. $\lim\limits_{x\to-\infty}(1-e^2x-x^3e^x)$
3. $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(2-\frac{4e^x}{x}\right)$
4. $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1+\frac{e^x}{2x^2}\right)$
5. $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1+\frac{4e^x}{\sqrt{x}}\right)$
6. $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{\sqrt{x}e^x}{x}\right)$
7. $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{5x}{e^x}$
8. $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{5-3x}{e^x}$
9. $\lim\limits_{x\to-\infty}(5x-1)e^x$
10. $\lim\limits_{x\to-\infty}(x^2+x+3)e^x$
11. $\lim\limits_{x\to+\infty}(3x-e^x)$
12. $\lim\limits_{x\to+\infty}(3x^2-2e^x)$
13. $\lim\limits_{x\to+\infty}(x^2-xe^x)$
14. $\lim\limits_{x\to-\infty}(e^x-x)e^x$
15. $\lim\limits_{x\to-\infty}(3xe^{3x})$
16. $\lim\limits_{x\to-\infty}(2-x)e^{2-x}$