TD - Chapitre 6 - EDS Maths - 1ère

E.1

Proposition : les tableaux ci-dessous donnent les dérivées des monômes :

Pour tout $a\in\mathbb{R}$	$f(x)=a \rightsquigarrow f'(x)=0$
$f(x)=1 \rightsquigarrow f'(x)=0$	$f(x)=5 \rightsquigarrow f'(x)=0$

Pour tout $n\in\mathbb{N}^*$	$f(x)=x^n \rightsquigarrow f'(x)=n{\cdot}x^{n-1}$
$g(x)=x \rightsquigarrow g'(x)=1$	$j(x)=x^3 \rightsquigarrow j'(x)=3x^2$
$h(x)=x^2 \rightsquigarrow h'(x)=2x$	$k(x)=x^4 \rightsquigarrow k'(x)=4x^3$

Pour tout $a\in\mathbb{R}$, $n\in\mathbb{N}^*$	$f(x)=a{\cdot}x^n \rightsquigarrow f'(x)=a\times n{\cdot}x^{n-1}$
$g(x)=2x \rightsquigarrow g'(x)=2$	$j(x)=7x^3 \rightsquigarrow j'(x)=21x^2$
$h(x)=-2x^2 \rightsquigarrow h'(x)=-4x$	$k(x)=-x^4 \rightsquigarrow k'(x)=-4x^3$

Déterminer l'expression de la fonction dérivée de chacune des fonctions ci-dessous :

1. $f(x)=5x^2+2x+3$
2. $g(x)=3x^4-5x+2$
3. $h(x)=5-3x^2$
4. $j(x)=3x^2-x+1$

E.2 Déterminer l'expression des fonctions dérivées de chacune des fonctions ci-dessous :

1. $f(x)=x^5+3{\cdot}x^2-x+10$
2. $f(x)=2{\cdot}x^7-x^2-2{\cdot}x+1$

E.3 On considère la fonction f définie par :

$$f(x)=\frac{5}{3}{\cdot}x^3-\frac{2}{3}{\cdot}x^2+3{\cdot}x-4$$

Déterminer l'expression de la fonction f' dérivée de la fonction f.

E.4 Déterminer l'expression des fonctions dérivées des fonctions polynomiales suivantes :

1. $f\colon x\longmapsto -3{\cdot}x+2$
2. $g\colon x\longmapsto 4{\cdot}x^2-4$
3. $h\colon x\longmapsto 2{\cdot}x^2+3{\cdot}x$
4. $j\colon x\longmapsto 5{\cdot}x^3-2{\cdot}x^2$

E.5 Déterminer les nombres dérivées en 1 pour chacune des fonctions suivantes :

1. $h : x\longmapsto 2x^2+3$
2. $j : x\longmapsto 5x-3x^2-1$
3. $k\colon x\longmapsto -2{\cdot}x^2+2{\cdot}x$
4. $k\colon x\longmapsto 3x^2-2{\cdot}x$

E.6 Déterminer l'expression des fonctions dérivées des fonctions polynomiales suivantes :

1. $f\colon x\longmapsto(3{\cdot}x+11)(4-x)$
2. $g\colon x\longmapsto(x+1)(2{\cdot}x-4)$

E.7

Proposition : soit a un nombre réel et f une fonction dérivable en a.
La tangente (T) au point d'abscisse a à la courbe $\mathscr{C}_f$ de la fonction f a pour équation réduite :

$$y=f'(a){\cdot}(x-a)+f(a)$$

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par la relation :

$$f(x)=\frac{1}{2}{\cdot}x^3-\frac{3}{2}{\cdot}x^2+x+1$$

Dans un repère $\big(O\,;I\,;J\big)$, on note $\mathscr{C}_f$ la courbe représentative de la fonction f.

1. a. Déterminer l'expression de la fonction dérivée f' de la fonction f.
   b. Donner la valeur de $f'(2)$.
2. a. Donner les coordonnées du point A de $\mathscr{C}_f$ ayant pour abscisse 2.
   b. Déterminer l'équation réduite de la tangente (T) à la courbe $\mathscr{C}_f$ au point d'abscisse 2.
3. Vérifier à l'aide de la calculatrice que la droite obtenue est bien la tangente (T).

E.8 On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par la relation :

$$f(x)=-\frac{2}{3}{\cdot}x^3-3{\cdot}x^2+x+10$$

Dans un repère $\big(O\,;I\,;J\big)$, on note $\mathscr{C}_f$ la courbe représentative de la fonction f.

1. a. Déterminer l'expression de la fonction dérivée f' de la fonction f.
   b. Donner la valeur de $f'(-3)$.
2. a. Donner les coordonnées du point A de $\mathscr{C}_f$ ayant pour abscisse -3.
   b. Déterminer l'équation réduite de la tangente (T) à la courbe $\mathscr{C}_f$ au point d'abscisse -3.
3. Vérifier à l'aide de la calculatrice que la droite obtenue est bien la tangente (T).

E.9

Proposition : ci-dessous les dérivées de la fonction inverse et de la fonction racine carré.

Formule générale :	$f(x)=\dfrac{1}{x} \rightsquigarrow f'(x)=-\dfrac{1}{x^2}$
$g(x)=\dfrac{5}{x} \rightsquigarrow g'(x)=-\dfrac{5}{x^2}$	$h(x)=-\dfrac{7}{3x} \rightsquigarrow h'(x)=\dfrac{7}{3x^2}$

Formule générale :	$f(x)=\sqrt{x} \rightsquigarrow f'(x)=\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$
$g(x)=3\sqrt{x} \rightsquigarrow g'(x)=\dfrac{3}{2\sqrt{x}}$	$h(x)=\dfrac{2\sqrt{x}}{3} \rightsquigarrow h'(x)=\dfrac{1}{3\sqrt{x}}$

Déterminer l'expression des dérivées des fonctions suivantes :

1. $f(x)=3x^2$
2. $g(x)=\dfrac{1}{12}{\cdot}x^6$
3. $h(x)=4\sqrt{x}$
4. $j(x)=\dfrac{\sqrt{x}}{2}$
5. $k(x)=\dfrac{1}{2x}$
6. $l(x)=-\dfrac{2}{x}$

E.10 Pour chaque question, une fonction f est proposée ainsi que l'expression de la fonction f' dérivée de la fonction f. Etablir l'expression de la fonction f' proposée :

	$f(x)$	$f'(x)$
1	$\dfrac{1}{x}-x^2$	$\dfrac{-2{\cdot}x^3-1}{x^2}$
2	$x+x^2+\dfrac{1}{x}$	$\dfrac{2{\cdot}x^3+x^2-1}{x^2}$
3	$x^2+\sqrt{x}$	$\dfrac{4{\cdot}x{\cdot}\sqrt{x}+1}{2{\cdot}\sqrt{x}}$

E.11 Déterminer l'expression des fonctions dérivées de chacune des fonctions ci-dessous :

1. $f : x \longmapsto x+\dfrac{1}{x}$
2. $g : x \longmapsto \dfrac{2}{3}{\cdot}x^3-\sqrt{x}$
3. $h : x \longmapsto 3{\cdot}\sqrt{x}-2x^4$
4. $j : x \longmapsto \dfrac{3}{x}-\dfrac{1}{x}$

E.12 Déterminer l'expression de la dérivée de chacune des fonctions ci-dessous :

1. $f : x \longmapsto x-\dfrac{1}{x}$
2. $g : x \longmapsto 2{\cdot}\sqrt{x}$
3. $h : x \longmapsto \dfrac{3}{x}-2\sqrt{x}$
4. $j : x \longmapsto 2{\cdot}x^3+\dfrac{2}{x}$

On présentera l'expression des dérivées sous la forme d'un quotient.

E.13 On considère les deux fonctions u et v définies sur $\mathbb{R}$ par les relations :

$u(x)=3{\cdot}x-2 \quad ; \quad v(x)=2-x$

On définit la fonction f définie par la relation $f=u{\cdot}v$. Déterminer les images ci-dessous par la fonction f :

a. $f(1)$ b. $f(3)$ c. $f\Big(-\dfrac{1}{3}\Big)$

E.14

Pour deux fonctions u et v définies sur un intervalle I, la fonction produit $u{\cdot}v$ admet pour dérivée la fonction notée $(u{\cdot}v)$ définie pour tout $x\in I$ par :

$$(u\cdot v)'(x)=u'(x)\cdot v(x)+u(x)\cdot v'(x)$$

1. Compléter le tableau ci-dessous, où la fonction u' *(resp. v')* est la fonction dérivée de la fonction u *(resp. v)* :

$u(x)$	$v(x)$	$u'(x)$	$v'(x)$
$3{\cdot}x^2+3{\cdot}x$	$2{\cdot}x+2$		
x^8	$3-x$		

2. Pour chacune des lignes du tableau, montrer que la fonction f admet la fonction f' pour fonction dérivée :

$f(x)$	$f'(x)$
$(3{\cdot}x^2+3{\cdot}x)(2{\cdot}x+2)$	$18{\cdot}x^2+24{\cdot}x+6$
$x^8{\cdot}(3-x)$	$x^7{\cdot}(24-9{\cdot}x^2)$

E.15

1. Pour chacune des fonctions u *(resp. v)*, donner l'expression de sa fonction dérivée u' *(resp v')* :

$u(x)$	$v(x)$	$u'(x)$	$v'(x)$
$3{\cdot}x^2-2$	$8-x$		

2. Déterminer l'expression de la fonction dérivée f' de la fonction f définie par :

$f : x \longmapsto (3{\cdot}x^2-2)(8-x)$

E.16 Déterminer l'expression des dérivées des fonctions suivantes :

1. $f : x \longmapsto x^5{\cdot}(x^2-1)$
2. $g : x \longmapsto (2{\cdot}x^2-5x+1)(1-x^2)$

E.17

1. Pour chacune des fonctions u *(resp. v)*, donner l'expression de sa fonction dérivée u' *(resp v')* :

$u(x)$	$v(x)$	$u'(x)$	$v'(x)$
$\dfrac{1}{x}$	x^2-1		
$5{\cdot}x+\dfrac{2}{x}$	$3-2{\cdot}x^3$		

2. Pour chacune des fonctions ci-dessous, déterminer l'expression de sa fonction dérivée :

a. $f : x \longmapsto \dfrac{1}{x}{\cdot}(x^2-1)$ c. $g : x \longmapsto \Big(5{\cdot}x+\dfrac{2}{x}\Big)(3-2{\cdot}x^3)$

E.18

1. Pour chacune des fonctions u *(resp. v)*, donner l'expression de sa fonction dérivée u' *(resp v')* :

$u(x)$	$v(x)$	$u'(x)$	$v'(x)$
x	$\sqrt{x}$		
x^2+1	$\sqrt{x}$		

2. Pour chacune des fonctions ci-dessous, déterminer l'expression de sa fonction dérivée :

a. $f : x \longmapsto x{\cdot}\sqrt{x}$ b. $g : x \longmapsto (x^2+1){\cdot}\sqrt{x}$

E.19 On considère les deux fonctions u et v définies sur $\mathbb{R}$ par les relations :

$u(x)=3{\cdot}x-2 \quad ; \quad v(x)=2-x$

On définit la fonction g définie par la relation $g=\dfrac{u}{v}$. Déterminer, si possible, les images ci-dessous par la fonction g :

a. $g(0)$ b. $g(2)$ c. $g\Big(-\dfrac{1}{4}\Big)$

E.20

Proposition :
Soit u et v deux fonctions définies sur un intervalle I telles que v ne s'annule pas sur v. On considère la fonction f définie sur I par : $f(x)=\dfrac{u(x)}{v(x)}$

La fonction f admet pour fonction dérivée la fonction f' définit par :

$$f'(x)=\frac{u'(x){\cdot}v(x)-u(x){\cdot}v'(x)}{\big[v(x)\big]^2}$$

1. Pour chaque ligne, donner l'expression de la fonction u'

(resp. v') dérivée de la fonction u *(resp. u')*:

$u(x)$	$v(x)$	$u'(x)$	$v'(x)$
$5{\cdot}x+2$	$3{\cdot}x-2$		
x^2-3	$x+1$		

(2) Pour chacune des fonctions f ci-dessous, on établira l'expression proposée de sa fonction dérivée f':

$f(x)$	$f'(x)$
$\dfrac{5{\cdot}x+2}{3{\cdot}x-2}$	$\dfrac{-16}{(3{\cdot}x-2)^2}$
$\dfrac{x^2-3}{x+1}$	$\dfrac{x^2+2{\cdot}x+3}{(x+1)^2}$

E.21

(1) Pour chaque ligne, donner l'expression de la fonction u' *(resp. v')* dérivée de la fonction u *(resp. u')*:

$u(x)$	$v(x)$	$u'(x)$	$v'(x)$
$3-2x$	$x+1$		
x^2	$2x+1$		

(2) Pour chacune des lignes ci-dessous, établir l'expression de la fonction f' dérivée de la fonction f:

$f(x)$	$f'(x)$
$\dfrac{3-2{\cdot}x}{x+1}$	$-\dfrac{5}{(x+1)^2}$
$\dfrac{x^2}{2{\cdot}x+1}$	$\dfrac{2{\cdot}x^2+2{\cdot}x}{\left(2{\cdot}x+1\right)^2}$

E.22 On considère la fonction f définie par: $f(x)=\dfrac{3}{2-x}$

Déterminer l'expression de la fonction f', dérivée de la fonction f.

E.23 On considère la fonction f définie par: $f(x)=\dfrac{x^2+x+1}{2{\cdot}x^2-1}$

Etablir que la fonction f', dérivée de la fonction f, admet pour expression:

$$f'(x)=\frac{-2{\cdot}x^2-6{\cdot}x-1}{(2{\cdot}x^2-1)^2}$$

E.24 On considère la fonction f définie par: $f(x)=\dfrac{4}{x^2-2x+3}$

Etablir que la fonction f', dérivée de la fonction f, admet pour expression:

$$f'(x)=\frac{-8x+8}{(x^2-2x+3)^2}$$

E.25 On considère la fonction f définie par: $f(x)=\dfrac{x^2-3x+1}{2{\cdot}x+1}$

Déterminer l'expression de la fonction f', dérivée de la fonction f.

E.26 On considère la fonction h dont l'image de x est défini par la relation:

$$h(x)=\frac{x^2-2{\cdot}x+1}{x^2-5{\cdot}x+6}$$

(1) Déterminer l'ensemble de définition de la fonction h.

(2) Montrer que le nombre de dérivée de h en x s'exprime par:

$$h'(x)=\frac{-3{\cdot}x^2+10{\cdot}x-7}{(x^2-5{\cdot}x+6)^2}$$

E.27 On considère la fonction g définie par: $g(x)=\dfrac{5{\cdot}x-x^2}{3-x^2}$

Etablir l'égalité suivante: $g'(x)=\dfrac{5{\cdot}x^2-6{\cdot}x+15}{\left(3-x^2\right)^2}$

E.28 On considère la fonction f est définie par: $\dfrac{2{\cdot}x-1}{x^2+x}$

Montrer que la fonction f', dérivée de la fonction f, admet pour expression: $f'(x)=-\dfrac{2{\cdot}x^2-2{\cdot}x-1}{x^2{\cdot}(x+1)^2}$

E.29

> ***Proposition:***
> Soit f une fonction dérivable sur I, a et b deux nombres réels quelconque. La fonction définit par:
> $x\longmapsto f(a{\cdot}x+b)$
> est une fonction dérivable sur tout intervalle J tel que:
> $x\in J \implies ax+b\in J$
> et sa fonction dérivée a pour expression:
> $x\longmapsto a{\cdot}f'(a{\cdot}x+b)$

Déterminer, pour chaque fonction, l'expression de la fonction dérivée:

(a) $f: x\longmapsto \left(4x-2\right)^7$ (b) $g: x\longmapsto \dfrac{1}{5-3x}$

E.30 Déterminer l'expression, sous la forme d'un quotient simplifié, de la fonction f' *(resp. g')* dérivée de la fonction f *(resp. g)*:

(a) $f(x)=\sqrt{\dfrac{1}{3}x-2}$ (b) $g(x)=\sqrt{3x-1}$

E.31 On considère la fonction f, définie sur $\left[-\dfrac{1}{5};+\infty\right[$, dont l'image d'un nombre réel x est donnée par la relation:

$$f(x)=\sqrt{5{\cdot}x+1}$$

(1) Pour $x\in\mathcal{D}_f$ et $h\in\mathbb{R}$ tel que $h\neq0$ et $(x+h)\in\mathcal{D}_f$, établir l'égalité suivante:

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\frac{5}{\sqrt{5{\cdot}x+5{\cdot}h+1}+\sqrt{5{\cdot}x+1}}$$

(2) En déduire l'expression de la fonction dérivée de la fonction f.

