Notion d'équation différentielle

Exercice 1

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = 4x^2 + x - 1.$$

1. Calculer $f'(x)$.
2. Montrer que f est une solution de l'équation différentielle $y' = 8x + 1$.

Exercice 2

Soit u et v les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par :

$$u(x) = 3x - 7 \quad \text{et} \quad v(x) = 3x + 5.$$

1. Calculer $u'(x)$ et $v'(x)$.
2. Montrer que u et v sont des solutions de l'équation différentielle $y' = 3$.
3. Donner une autre fonction solution de cette équation différentielle.

Exercice 3

Soit l'équation différentielle $y' + 3y = 12$, pour x réel. Montrer que la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par

$$g(x) = 4 + e^{-3x}$$

est une solution de cette équation.

Primitives d'une fonction ($y' = f$)

Exercice 4

Soit F et f les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ respectivement par :

$$F(x) = xe^{3x} \quad \text{et} \quad f(x) = (1 + 3x)e^{3x}.$$

1. Justifier que, pour tout réel x, $F'(x) = f(x)$.
2. Que peut-on en déduire pour la fonction F ?

Exercice 5

1. Montrer que la fonction F définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par

   $$F(x) = x\ln(x)$$

   est une primitive de f définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par

   $$f(x) = \ln(x) + 1.$$

2. Donner deux autres primitives de f sur $]0; +\infty[$.

Exercice 6

Vrai ou faux ? Justifier.
Soit f et g des fonctions définies sur un intervalle I et soit F et G des primitives respectives de f et g sur I.

1. $F + G$ est une primitive de $f + g$ sur I.
2. $F \times G$ est une primitive de $f \times g$ sur I.
3. $-F$ est une primitive de $-f$ sur I.
4. F^2 est une primitive de f^2 sur I.

Exercice 7

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 3x^2$.

1. Déterminer une primitive de f sur $\mathbb{R}$.
2. Déterminer la primitive de f qui s'annule en 1.

Exercice 8

Soit u la fonction définie sur $]0; +\infty[$ par $u(x) = \frac{1}{x^5}$.

1. Écrire $u(x)$ sous la forme x^n, avec n entier.
2. En déduire une primitive de u sur $]0; +\infty[$, puis l'écrire sous la forme $\frac{k}{x^4}$, où k est un réel.

Exercice 9

Déterminer sur $]0; +\infty[$ une primitive de chacune des fonctions f, g et h telles que :

$$f(x) = \frac{1}{x^2}, \quad g(x) = x^{-3}, \quad h(x) = \frac{2}{x^3}.$$

Exercice 10

1. Déterminer une primitive de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 2e^{2x}$.
2. En déduire une primitive sur $\mathbb{R}$ des fonctions g et h telles que $g(x) = e^{2x}$ et $h(x) = e^{ax}$ avec a un réel non nul.

Exercice 11

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 2xe^{x^2}$.

1. Vérifier que f s'écrit sous la forme $u'e^u$, où u est une fonction dont on donnera l'expression.
2. En déduire une primitive de la fonction f sur $\mathbb{R}$.

Exercice 12

Soit f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \sin^2(x)\cos(x)$.

1. Vérifier que f est sous la forme u^2u', où u est une fonction dont on donnera l'expression.
2. En déduire une primitive de f sur $\mathbb{R}$.

Exercice 13

Soit les fonctions f et g définies sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = x\cos(x) \quad \text{et} \quad g(x) = \cos(x) + x\sin(x).$$

1. Montrer que g est une primitive de f sur $\mathbb{R}$.
2. En déduire toutes les primitives de f sur $\mathbb{R}$.

Exercice 14

Vrai ou faux ? Justifier.

1. Toute fonction continue sur $\mathbb{R}$ admet des primitives sur $\mathbb{R}$.
2. Toute fonction dérivable sur $\mathbb{R}$ admet des primitives sur $\mathbb{R}$.
3. Toute primitive sur $\mathbb{R}$ est continue sur $\mathbb{R}$.
4. Une primitive de la dérivée d'une fonction f est la fonction $x \mapsto f(x) + 10$.

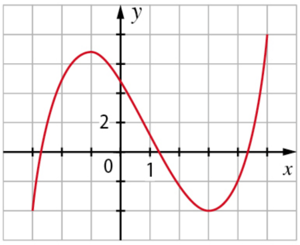
Exercice 15

Soit f une fonction deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$.

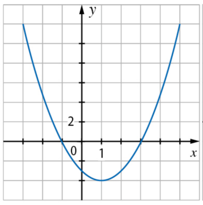
1. Déterminer une primitive de la fonction g telle que $g(x) = f''(x) + 2f'(x)$.
2. Déterminer une primitive de la fonction h telle que $h(x) = f'(-x)$.

Exercice 16

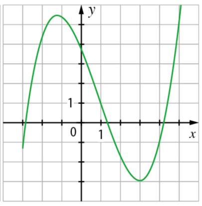
Soit f définie sur $[-3;5]$. La courbe ci-contre représente une primitive F de f.



Parmi les courbes ci-après, laquelle représente la fonction f ? Justifier.



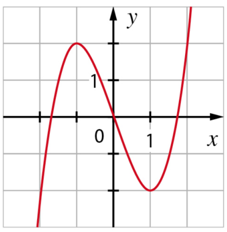
Courbe 1



Courbe 2

Exercice 17

La fonction F représentée ci-contre est une primitive d'une fonction f sur $\mathbb{R}$.



Indiquer si les affirmations sont vraies ou fausses, puis justifier.

1. $f(0) = 0$
2. $f(1) = 0$
3. $f(x) \geq 0$ sur $[-1;0]$
4. $f(x) \leq 0$ sur $[0;1]$

Exercice 18 Logique

Soit f une fonction continue sur $\mathbb{R}$ et F une primitive de f sur $\mathbb{R}$.

1. Dire, en le justifiant, si l'énoncé suivant est vrai ou faux : « si la fonction f est positive sur $\mathbb{R}$, alors la fonction F est croissante sur $\mathbb{R}$. »
2. Énoncer la réciproque de la proposition précédente. Cette réciproque est-elle vraie ou fausse ? Justifier la réponse.

Exercice 19

Déterminer une primitive de chacune des fonctions f et g définies sur $\mathbb{R}$ par leurs expressions.

1. $f(x) = 5x^3 - 3x + 7$ et $g(x) = 2x^4 - \dfrac{1}{2}x^3$
2. $f(x) = x^5 - x$ et $g(x) = 4x^4 - 7x + \sqrt{2}$
3. $f(x) = 2\cos(x) - 3\sin(x)$ et $g(x) = 10 - 3e^x + x$
4. $f(x) = (x-1)(x+2)$ et $g(x) = (2x+1)^2$
5. $f(x) = \dfrac{x^2}{5} + \dfrac{1}{6}$ et $g(x) = 12{,}4x^9 - 7x^6 + 15x^4$

Exercice 20

Déterminer une primitive de chacune des fonctions f et g définies sur $\mathbb{R}_+^*$ par leurs expressions.

1. $f(x) = 3x + 1 + \dfrac{1}{x}$ et $g(x) = x^2 + \dfrac{4}{x^2}$
2. $f(x) = x + x^{-3}$ et $g(x) = x - \dfrac{1}{2x}$
3. $f(x) = \dfrac{7}{x^3}$ et $g(x) = \dfrac{4}{x} - \dfrac{3}{x^2} + \dfrac{1}{x^4}$
4. $f(x) = \dfrac{x+5}{x^2}$ et $g(x) = \dfrac{x^2 - x + 2}{x}$
5. $f(x) = \dfrac{3x^2 - 11}{x^2}$ et $g(x) = \dfrac{5}{\sqrt{x}} - x + 6$
6. $f(x) = \dfrac{4 - x\sqrt{x}}{x^2}$ et $g(x) = \dfrac{1 + x^2\sqrt{x}}{\sqrt{x}}$

Exercice 21

Déterminer une primitive de chacune des fonctions f et g définies sur $\mathbb{R}$ par leurs expressions.

1. $f(x) = 3e^{3x+4}$ et $g(x) = xe^{x^2-3}$
2. $f(x) = x^2e^{-3}$ et $g(x) = \dfrac{e^x}{e^x + 4}$
3. $f(x) = 5e^{4-x}$ et $g(x) = \dfrac{4x^3}{x^4 + 5}$
4. $f(x) = 4x(3x^2 - 8)^2$ et $g(x) = \dfrac{3x^2}{\sqrt{x^3 + 3}}$
5. $f(x) = e^x(e^x + 4)^3$ et $g(x) = (2x - 1)^4$
6. $f(x) = \sin(3x) - \cos(2x)$; $g(x) = \sin\left(5x + \dfrac{\pi}{4}\right)$
7. $f(x) = \sin(x)\cos(x)$ et $g(x) = \sin(x)\cos^2(x)$
8. $f(x) = \cos(x)e^{\sin(x)}$; $g(x) = \sin(x)(1 - \cos(x))^3$
9. $f(x) = \dfrac{4x + 2}{x^2 + x + 1}$ et $g(x) = \dfrac{x - 1}{(x^2 - 2x + 4)^2}$
10. $f(x) = \dfrac{1}{e^x}$ et $g(x) = \dfrac{3}{e^{-x}(e^x + 1)}$

Exercice 22

Déterminer une primitive de la fonction f sur l'intervalle indiqué.

1. $f(x) = \dfrac{2}{x}(\ln(x) + 2)^2$ sur $I =]0; +\infty[$

2. $f(x) = \dfrac{2}{(3x-1)^2} + \dfrac{1}{3x-1}$ sur $I =]\frac{1}{3}; +\infty[$
3. $f(x) = \dfrac{\ln(x)}{x}$ sur $I =]0; +\infty[$
4. $f(x) = \dfrac{1}{x\ln(x)}$ sur $I =]1; +\infty[$
5. $f(x) = \dfrac{-3-e^x}{(e^x+3x)^2}$ sur $I = [0; +\infty[$
6. $f(x) = \dfrac{-7}{x(\ln(x)+3)}$ sur $I =]e^{-3}; +\infty[$
7. $f(x) = \dfrac{\sin(x)}{\cos(x)}$ sur $I =]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}[$
8. $f(x) = \dfrac{\cos(x)}{\sqrt{\sin(x)}}$ sur $I =]0; \pi[$
9. $f(x) = \dfrac{2}{x^2}e^{-\frac{1}{x}}$ sur $I =]0; +\infty[$

Exercice 23

1. Déterminer l'ensemble des solutions de l'équation différentielle $(E) : y' = x - \sin(x)$.
2. Déterminer la solution f de (E) tq $f(0) = 2$.

Équation différentielles $y' = ay$

Exercice 24

Écrire chacune des équations différentielles suivantes sous la forme $y' = ay$ en précisant à chaque fois la valeur du réel a.

(a) $y' - 5y = 0$
(b) $3y' + 4y = 0$
(c) $y = 2y'$
(d) $-y' + \pi y = 0$

Exercice 25

Soit l'équation différentielle $2y' - 5y = 0$.

1. Écrire cette équation sous la forme $y' = ay$, où a est un réel que l'on donnera.
2. Résoudre cette équation.

Exercice 26

Soit l'équation différentielle $y' = y$.

1. Résoudre cette équation.
2. Montrer que la solution f de cette équation tq $f(0) = 1$ est la fonction exponentielle.

Exercice 27

Déterminer l'ensemble des solutions de chacune des équations différentielles suivantes sur $\mathbb{R}$.

(a) $y' = -2y$
(b) $3y' - 2y = 0$
(c) $-y' + 0{,}1y = 0$
(d) $y' + \ln(2)\,y = 0$

Exercice 28

Pour chacune des équations différentielles suivantes, déterminer la solution f vérifiant la condition donnée.

(a) $y' = 5y$ et $f(0) = 2$
(b) $y' + 6y = 0$ et $f(1) = 1$
(c) $2y' - 3y = 0$ et $f(4) = 2$
(d) $2y' = 5y$ et $f'(0) = 5$

Exercice 29

La destruction de cellules bactériennes par la chaleur peut être mise en évidence en chauffant à une température donnée, pendant des durées variables, une suspension de telles cellules et en dénombrant les survivantes.
On désigne par $N(t)$ le nombre de cellules survivantes à l'instant t, exprimé en minutes. On admet que la fonction N est une solution sur $[0; +\infty[$ de l'équation différentielle $(E) : x' = ax$, où a est une constante qui dépend de la température de chauffage.

1. Résoudre l'équation différentielle (E).
2. Préciser la solution de (E) vérifiant les conditions suivantes : $N(0) = 10^5$ et $N(60) = 5\,000$. *(On arrondira au centième)*

Exercice 30

On souhaite étudier la vitesse de rotation angulaire lors du freinage d'un disque dans un liquide. Cette vitesse $N(t)$ représente le nombre de tours par minute à l'instant t, exprimé en minutes.
La fonction N vérifie l'équation différentielle : $y' = -(\ln 100)\,y$.

1. Déterminer la fonction N tq $N(0) = 1\,500$.
2. Calculer la vitesse angulaire à l'instant $t = 1$.
3. Au bout de combien de temps la vitesse angulaire sera-t-elle d'un tour par minute ? Donner la valeur exacte et une valeur approchée au centième de minute.

Exercice 31

On considère les équations différentielles :

$$(E_1) : y' - 2y = 0 \quad \text{et} \quad (E_2) : y' = y.$$

1. Résoudre les équations (E_1) et (E_2).
2. Déterminer la solution particulière f_1 de (E_1) telle que $f_1'(0) = 4$.
3. Déterminer la solution particulière f_2 de (E_2) telle que $f_2'(0) = 1$.
4. Soit f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = f_1(x) - f_2(x)$.
   (a) Étudier les variations de f sur $\mathbb{R}$.
   (b) Résoudre l'équation $f(x) = 0$.

Exercice 32

Déterminer l'équation d'une courbe passant par le point $A(-1;2)$ et telle qu'en chaque point M de la courbe, le coef. directeur de la tangente est égal au triple de l'ordonnée du point M.

Équation différentielles $y' = ay + b$

Exercice 33

Soit l'équation différentielle $(E) : y' = 10y + 20$.

1. Déterminer la solution particulière constante de l'équation (E).
2. Justifier que les solutions de (E) sont les fonctions f de la forme $f(x) = Ce^{10x} - 2$, où C est un réel quelconque.

Exercice 34

Soit l'équation différentielle $(E) : y' = -y + 1$.

1. Résoudre l'équation différentielle $y' = -y$.
2. Justifier que l'ensemble des solutions de (E) est formé des fonctions f de la forme $f(x) = Ce^{-x} + 1$, où C est un réel quelconque.

Exercice 35

Soit l'équation différentielle $(E) : y' = -2y + 3$.

1. Déterminer la solution particulière constante.
2. En déduire toutes les solutions de (E).

Exercice 36

Déterminer la fonction f, solution sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle $2y' + 6y = 1$, dont la courbe représentative passe par le point $A(2;0)$.

Exercice 37

On chauffe dans une grande cuve un liquide et on appelle $g(t)$ sa température en degrés Celsius à l'instant t, exprimé en secondes, g étant une fonction numérique définie sur $[0;+\infty[$.
La température à l'instant initial est de $20\,°\mathrm{C}$.
On admet que la fonction g vérifie l'équation différentielle : $(E) : y' + 0{,}0002y = 0{,}02$.

1. Exprimer $g(t)$ en fonction de t.
2. Quelle sera la température du liquide au bout d'une heure ?
3. Au bout de combien de secondes la température dépassera-t-elle $85\,°\mathrm{C}$? Donner la réponse en heures, minutes et secondes.

Équation différentielles $y' = ay + f$

Exercice 38

Soit l'équation différentielle $(E) : y' = -2y + \cos(x)$, pour x réel.

1. Résoudre l'équation $y' = -2y$.
2. Montrer que la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = 0{,}4\cos(x) + 0{,}2\sin(x)$ est solution de (E).
3. En déduire l'ensemble des solutions de (E).

Exercice 39

Soit l'équation différentielle $(E) : y' + y = e^{-x}$.

1. Montrer que la fonction u, définie sur $\mathbb{R}$ par $u(x) = xe^{-x}$, est une solution de (E).
2. En déduire toutes les solutions de (E).

Exercice 40

Soit l'équation différentielle $(E) : y' + 2y = x$.

1. Déterminer les réels a et b pour que la fonction g, définie par $g(x) = ax + b$, soit solution de (E).
2. En déduire l'ensemble des solutions de (E).

Exercice 41

Soit l'équation différentielle $(E) : y' - 2y = xe^{x}$.

1. Déterminer les réels a et b tels que la fonction u, définie sur $\mathbb{R}$ par $u(x) = (ax + b)e^{x}$, soit une solution de (E).
2. Donner l'ensemble des solutions de (E) sur $\mathbb{R}$.
3. Donner la solution de (E) qui s'annule en 0.

Exercice 42

Soit l'équation différentielle $y' - 2y = 4x^2 - 4x$.

1. Déterminer une solution particulière u de cette équation sous la forme $u(x) = ax^2+bx+c$, où a, b et c sont des réels à déterminer.
2. Donner la solution générale de cette éq.
3. Donner la solution f telle que $f'(1) = 2$.

Synthèse

Exercice 43

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et l'équation différentielle :
$$(E_n) : y' + y = \frac{x^n}{n!}e^{-x}.$$

1. Soit g et h deux fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$ telles que, pour tout réel x, $g(x) = h(x)e^{-x}$.
   a. Montrer que g est solution de (E_n) si et seulement si $h'(x) = \frac{x^n}{n!}$.
   b. En déduire une solution particulière de l'équation (E_n).
2. a. Déterminer la solution générale de l'équation (E_n).
   b. Déterminer la solution f de (E_n) vérifiant $f(0) = 0$.
3. On pose, pour tout réel x, $f_0(x) = e^{-x}$. Pour tout entier strictement positif n, on définit la fonction f_n comme la solution de l'équation différentielle : $y' + y = f_{n-1}$ vérifiant $f_n(0) = 0$.
   Montrer par récurrence que, pour tout réel x et tout entier strictement positif n,
$$f_n(x) = \frac{x^n}{n!}e^{-x}.$$