CAP VERS LE BAC Des pistes pour le Grand oral

Question

Comment les mathématiques permettent-elles de modéliser les jeux de hasard ?

Pour se préparer

- Utiliser le dossier *Les clés du bac*, au début du manuel
- S'entraîner à l'expression orale en mathématiques : exercices **88**, **133**

Enjeu de la question

Les mathématiques permettent de dénombrer les résultats d'un jeu de hasard afin d'en obtenir les probabilités.
On peut ainsi élaborer des stratégies afin d'optimiser les gains.

Plan possible

1. Le loto
2. La roulette
3. Le tiercé et le quinté +
4. Conclusion : comparaison de ces jeux

Les mots-clés

Dénombrement • Expérience aléatoire • Probabilités

Support de présentation possible

- **Grille de loto :** on choisit 5 numéros parmi 49 numéros possibles de 1 à 49 et un numéro « chance » parmi 10 numéros, de 1 à 10.
- **Roulette :** 37 cases, numérotées de 1 à 36 et une case vide (ou marquée 0). On peut choisir un ou plusieurs numéros ou des combinaisons de ceux-ci : pair, impair, passe, manque…
- **Tiercé :** choix de 3 chevaux par leurs numéros. On peut gagner si on trouve les 3 premiers chevaux dans l'ordre, ou bien dans le désordre.
- **Taux de redistribution aux joueurs :** moyenne exprimée en pourcentage du reversement des organisateurs aux joueurs.
- **Nombre de k-uplets d'éléments distincts d'un ensemble à n éléments :** $n(n-1)\dots(n-k+1)$.
- **Combinaisons de k éléments pris parmi n éléments :** $\binom{n}{k} = \dfrac{n(n-1)\dots(n-k+1)}{k(k-1)\dots\times 2\times 1}$.

Questions d'approfondissement possibles

Quelle est la probabilité pour un parieur jouant au hasard de gagner le quinté + dans l'ordre s'il y a 25 chevaux au départ ?

Démontrer la formule donnant le nombre de combinaisons de p éléments d'un ensemble à n éléments.

Quels sont les jeux ayant les meilleurs taux de restitution ?

Présenter, en le justifiant, le triangle de Pascal.

Poursuite d'études et projet professionnel

- **Pourquoi étudier le dénombrement ?**
  Ce domaine des mathématiques permet de modéliser certains phénomènes aléatoires.
  Il est utilisé dans la théorie des jeux, dans l'étude des risques…
- **Dans quelles études peut-on approfondir ces notions ?**
  L'analyse combinatoire est étudiée dans les classes préparatoires et à l'Université.
- **Un exemple de métier ?**
  L'**actuaire** gère les risques dans divers domaines, comme celui des assurances. Il (elle) réalise des études économiques, financières et statistiques, établit des modèles probabilistes, dans le but de mettre au point ou de modifier des contrats d'assurance. Il (elle) travaille sur des processus qui permettent de modéliser des systèmes dont le comportement n'est que partiellement prévisible.

Des pistes pour le Grand oral

Pour se préparer

- Utiliser le dossier *Les clés du bac*, au début du manuel
- S'entraîner à l'expression orale en mathématiques : exercices **61**, **171**

Question

Comment expliquer les propriétés macroscopiques d'un cristal ?

Enjeu de la question

Les propriétés macroscopiques d'un cristal sont liées à sa composition atomique et à la disposition des atomes entre eux. Ainsi, plus un cristal est compact, plus il sera dense.

Les mots-clés

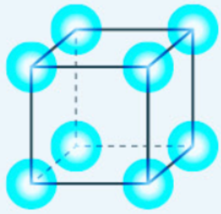
Vecteurs de l'espace • Repérage • Transformations • Distances et volumes

Plan possible

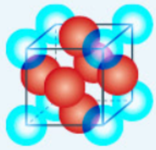
1. Maille d'une structure cristalline homonucléaire
2. Réseau cubique simple
3. Réseau cubique à faces centrées
4. Réseau hexagonal compact
5. Conclusion (propriétés de ces structures)

Support de présentation possible

- Schéma d'une maille cubique :



- Volume d'une sphère de rayon R : $\frac{4}{3}\pi R^3$.
- Calcul de compacité : $\frac{\text{Volume occupé par les sphères dans une maille}}{\text{Volume d'une maille}}$.
- La compacité d'une maille cubique simple est $\frac{\pi}{6}$.
- **Kepler (1571–1630)**
Il émet la conjecture que la compacité maximale d'empilement de sphères identiques est $\frac{\pi\sqrt{2}}{6}$.
Cette compacité est celle d'un empilement tétraédrique qui correspond au réseau cubique à faces centrées ainsi qu'au réseau hexagonal compact.



Questions d'approfondissement possibles

Comment expliquer graphiquement qu'un empilement de sphères identiques selon un maillage hexagonal correspond au réseau cubique à faces centrées ?

Détailler le calcul de la compacité d'une maille cubique simple.

Comment prouver que trois vecteurs de l'espace ne sont pas coplanaires ?

Calculer la longueur de la grande diagonale du cube d'arête *a*.

Poursuite d'études et projet professionnel

- **Pourquoi étudier la géométrie dans l'espace ?**
Ce domaine des mathématiques permet de modéliser le monde qui nous entoure. Il est utilisé en mécanique, en biologie, en productique comme l'impression 3D, etc.
- **Dans quelles études peut-on approfondir ces notions ?**
L'étude de la géométrie dans l'espace est approfondie dans beaucoup de formations de l'enseignement supérieur : écoles d'architecture, écoles graphiques, licences scientifiques, écoles d'ingénieur.
- **Un exemple de métier ?**
Le (la) **concepteur(trice)** de moteur graphique programme des interfaces graphiques permettant de modéliser informatiquement des structures en trois dimensions. Il (elle) effectue les recherches mathématiques, physiques, biologiques et informatiques afin que le moteur reproduise au plus près la réalité. Les moteurs graphiques ainsi réalisés sont ensuite utilisés dans le domaine de l'imagerie médicale, du jeu vidéo, du cinéma d'animation, de l'astronomie, de la physique des particules…

Des pistes pour le Grand oral

Question

Comment fait-on pour résoudre les très grands systèmes linéaires que l'on rencontre dans la modélisation de certains phénomènes ?

Pour se préparer

- Utiliser le dossier *Les clés du bac*, au début du manuel
- S'entraîner à l'expression orale en mathématiques : exercices **135**, **183**, **184**

Enjeu de la question

De nombreux problèmes issus des mathématiques, de la physique, de la biologie ou de l'économie conduisent à la résolution de systèmes d'équations linéaires avec parfois un très grand nombre d'équations et de variables.

Les mots-clés

Systèmes d'équations • Déterminant • Méthode par combinaison • Méthode par substitution • Matrice • Pivot de Gauss

Support de présentation possible

- **Exemples de problèmes**
– Positionnement par GPS
– Cryptographie multivariables
– Première loi de Kirschhoff (loi des mailles)
– Modèle entrée-sortie de Léontief

- **Les méthodes de résolution**
– **substitution :** on exprime une variable en fonction des autres ;
– **combinaisons linéaires (dont pivot de Gauss) :** on remplace la ligne L_i par $aL_i + bL_j$ (a non nul) pour éliminer une inconnue dans L_i ;
– **déterminant :**
$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc \text{ (cas de la dimension 2) ;}$$
– **calcul matriciel.**

Plan possible

1. Exemples de problèmes conduisant à un système linéaire
2. Résolution par substitution – limite de la méthode
3. Résolution par combinaison linéaire – Pivot de Gauss
4. Déterminants – Méthode de Cramer
5. Problématique des systèmes de grandes dimensions – Programmation

Questions d'approfondissement possibles

À l'aide d'une interprétation géométrique, décrire les cas de figures que l'on rencontre pour un système linéaire de deux équations à deux inconnues.

Soit les points A(3 ; 4 ; 5) et B(4 ; 7 ; 6). Étudier l'intersection de la droite (AB) avec le plan $\mathcal{P}$ d'équation $2x + 3y + 4z - 8 = 0$.

Quelle interprétation géométrique peut-on faire d'un système de trois équations linéaires à trois inconnues ?

Résoudre le système suivant par la méthode du pivot de Gauss :
$$\begin{cases} x + 2y - z = -4 \\ x + 3y + z = 5 \\ 4x + 11y + 3z = 15 \end{cases}$$

Poursuite d'études et projet professionnel

- **Pourquoi étudier les systèmes linéaires ?**
De nombreuses modélisations de phénomènes physiques, économiques ou biologiques conduisent à la résolution de ces systèmes.
- **Dans quelles études peut-on approfondir ces notions ?**
L'étude des systèmes linéaires est approfondie dans beaucoup de formations de l'enseignement supérieur : classes préparatoires, écoles d'ingénieur, licences scientifiques ou d'économie gestion, IUT, BTS, etc.
- **Un exemple de métier ?**
Le (la) **cryptologue** met en place des codes réalisés à partir d'algorithmes complexes afin de sécuriser des données sensibles telles que les mots de passe, les identifiants de compte en banque, etc. Il (elle) doit également tester sans cesse la fiabilité de son travail afin d'avoir un temps d'avance sur les pirates informatiques.

Des pistes pour le Grand oral

Pour se préparer

- Utiliser le dossier *Les clés du bac*, au début du manuel
- S'entraîner à l'expression orale en mathématiques : exercices **89**, **128**

Question

Comment les mathématiques peuvent-elles aider à modéliser le refroidissement d'un corps ?

Enjeu de la question

Le problème de l'évolution de la température d'un corps est un problème physique important. Les applications en météorologie, résistance des matériaux, astrophysique sont nombreuses. La loi de Newton fournit une modélisation mathématique de ce problème.

Plan possible

1. Les modèles d'évolution, discrets ou continus
2. Le modèle de Newton discret
3. Le modèle de Newton continu
4. Ouverture : comment modifier les modèles précédents lorsque la température du milieu environnant évolue dans le temps ?
5. Conclusion (limites des modèles et avantages)

Les mots-clés

Modèle continu • Modèle discret • Suites • Limites • Fonction exponentielle • Équations différentielles

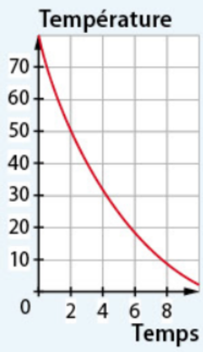
Support de présentation possible

• Dans le cas **discret**, Newton suppose que le **taux d'évolution** de la température d'un corps est **proportionnel** à la différence de température de ce corps et de celle du milieu environnant.
La suite (T_n) telle que :

$$T_0 = 80 \text{ et } T_{n+1} - T_n = -0{,}2(T_n - 10)$$

pour tout entier naturel n, modélise la température relevée chaque minute d'un corps dont la température initiale est de 80 °C et que l'on plonge dans un milieu dont la température est égale à 10 °C.

• Dans le cas **continu**, c'est la **vitesse de refroidissement** qui est **proportionnelle** à la différence de température de ce corps et celle du milieu environnant.
Pour le problème ci-dessus, si $\theta(t)$ est la température du corps à l'instant t exprimé en minutes, alors la fonction θ vérifie l'équation différentielle $\theta'(t) = -0{,}2\,(\theta(t) - 10)$.



Questions d'approfondissement possibles

Présenter ce que vous savez sur les suites géométriques.

Déterminer la suite (T_n) définie par $T_0 = 80$ et la relation : $T_{n+1} - T_n = -0{,}2(T_n - 10)$ pour tout entier naturel n.

Comment résout-on une équation différentielle de la forme $y' = ay + b$?

Quelle est la différence entre un modèle continu et un modèle discret ?

Poursuite d'études et projet professionnel

- **Pourquoi étudier les suites ?**
  De nombreux phénomènes physiques, biologiques ou socio-économiques sont modélisables par des suites.
- **Dans quelles études peut-on approfondir ces notions ?**
  L'étude des suites est approfondie dans quasiment toutes les formations de l'enseignement supérieur : DUT ou BTS à dominante économique ou scientifique, licences d'économie-gestion, licences scientifiques, CPGE, écoles d'ingénieur, écoles de commerces.
- **Un exemple de métier ?**
  Un(e) **géotechnicien(ne)** teste la résistance des sols et des sous-sols avant la construction d'un bâtiment pour prévenir les risques d'écroulement dus aux glissements de sol. Sur le terrain, il(elle) creuse le sol pour mesurer la quantité d'eau dans la terre ou sa résistance à l'écrasement.

Des pistes pour le Grand oral

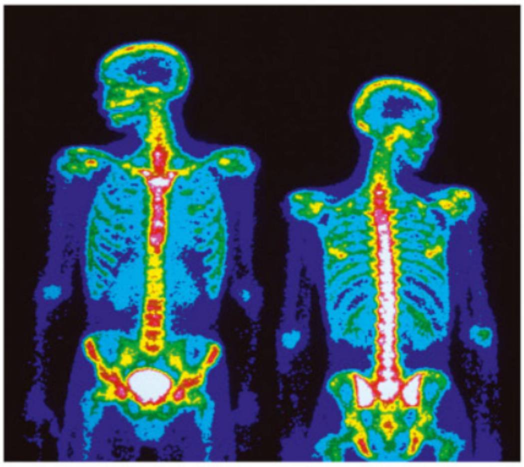
Pour se préparer
- Utiliser le dossier *Les clés du bac*, au début du manuel
- S'entraîner à l'expression orale en mathématiques : exercices **139**, **181**, **182**

Question

Comment étudie-t-on l'élimination d'un traceur radioactif lors d'une scintigraphie ?

Enjeu de la question

La radioactivité a de nombreuses applications, notamment dans le domaine médical. Les produits radioactifs utilisés lors d'une scintigraphie permettent par leur rayonnement de visualiser le fonctionnement d'un organe mais il est important d'utiliser des marqueurs qui ne sont pas dangereux pour le patient.



Plan possible

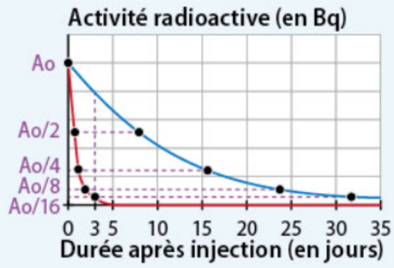
1. Découverte de la radioactivité par Henri Becquerel
2. Présentation du principe de la scintigraphie
3. Étude de la loi de décroissance radioactive
4. Comparaison et choix des isotopes
5. Conclusion

Les mots-clés

Fonctions exponentielles • Période d'un isotope radioactif • Équations différentielles

Support de présentation possible

- Henri Becquerel découvre la radioactivité. L'unité physique de la radioactivité, le becquerel (Bq) est nommée en son honneur.
- Principe d'une scintigraphie : on injecte au patient un produit radioactif qui se fixe sur l'organe étudié, et qui émet des rayonnements que l'on mesure à l'aide de gamma-caméras.
- Loi de décroissance exponentielle : $N'(t) = -\lambda N(t)$ où λ est une constante de désintégration liée à l'isotope.



- Le produit radioactif injecté est choisi en fonction de l'organe dont on veut étudier le fonctionnement.

Questions d'approfondissement possibles

Connaissez-vous des utilisations non médicales de la radioactivité ?

Expliquer comment comparer e^{-at} et e^{-bt}, a, b et t étant des réels positifs.

Proposer un algorithme qui permet de déterminer au bout de combien de temps l'activité d'un produit radioactif devient inférieure à un seuil donné.

Exposer les méthodes que l'on peut utiliser pour déterminer les limites d'une fonction.

Poursuite d'études et projet professionnel

- **Pourquoi étudier les fonctions exponentielles** ?
  De nombreux phénomènes physiques, biologiques ou socio-économiques sont modélisables par des fonctions exponentielles.
- **Dans quelles études peut-on approfondir ces notions ?**
  L'étude des fonctions exponentielles est approfondie dans de nombreuses formations de l'enseignement supérieur : licences scientifiques, licences d'économie, IUT scientifiques, écoles d'ingénieur, faculté de médecine…
- **Un exemple de métier ?**
  Le (la) **radiologue** est le (la) spécialiste de l'imagerie médicale : radiographie, échographie, scanner, IRM, scintigraphie… Compte-tenu de la haute technicité des appareils d'imagerie médicale, les radiologues sont le plus souvent spécialisés dans un domaine particulier.

CAP VERS LE BAC Des pistes pour le Grand oral

Question

Avec quels outils mathématiques peut-on mesurer l'accélération ou le ralentissement d'un phénomène économique ?

Pour se préparer

- Utiliser le dossier *Les clés du bac*, au début du manuel
- S'entraîner à l'expression orale en mathématiques : exercices 58, 122

Enjeu de la question

Les outils concernés sont des courbes logistiques qui modélisent certaines évolutions, dans le temps, des taux d'équipement comme les ordinateurs, les écrans de télévision… Ces évolutions sont caractérisées en général, par trois phases : un démarrage lent, une diffusion rapide et une saturation.

Plan possible

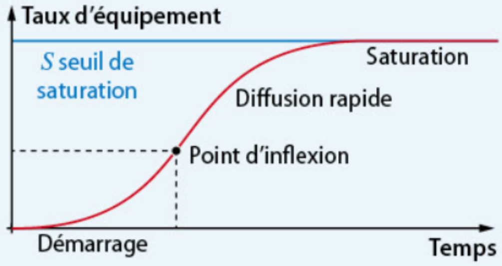
1. Les fonctions modélisant « la vie d'un produit »
2. Fonction logistique
3. Fonction de Gompertz
4. Fonction tangente hyperbolique
5. Conclusion (limites des modèles et avantages)

Les mots-clés

Dérivée seconde • Point d'inflexion • Fonctions logistiques • Saturation • Rythme de croissance • Convexité

Support de présentation possible

- Fonctions modélisant « la vie d'un produit »



- **Fonction logistique** définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=\dfrac{S}{1+\mathrm{e}^{-k(x-a)}}$ où S est la valeur maximale atteinte par f.
- **Fonction de Gompertz**, définie sur $[0\,;+\infty[$ par $f(x)=A\mathrm{e}^{-k\mathrm{e}^{-Bx}}$ où A, B et k sont des constantes avec $A>0$, $B\neq 0$ et $k\neq 0$.
- **L'INSEE** fournit le taux d'équipement en ordinateur des ménages en France sur la période de 2004–2011. Modélisation possible sur $[1\,;20]$, où x est le rang de l'année après 2004 par : $f(x)=-0{,}154x^2+5{,}45x+39{,}36$.

Questions d'approfondissement possibles

Qu'est-ce qui permet de dire pour une fonction croissante, deux fois dérivable, que sa croissance accélère ou ralentit ?

Citer des mathématiciens ayant créé ou développé le concept de fonction ou de courbe logistique.

Présenter l'étude de la fonction tangente hyperbolique.

Comment étudie-t-on la convexité d'une fonction ?

Poursuite d'études et projet professionnel

- **Pourquoi étudier les fonctions logistiques ?**
  De nombreux phénomènes (rendement des cultures, diffusion d'une innovation d'un produit de consommation sur un cycle de vie) sont modélisés à l'aide des fonctions logistiques.
- **Dans quelles études peut-on approfondir ces notions ?**
  L'étude des fonctions logistiques est approfondie dans beaucoup de formations de l'enseignement supérieur : licences d'économie et gestion, licences scientifiques, IUT scientifiques, écoles d'ingénieur…
- **Un exemple de métier ?**
  Un(e) **économétricien(ne)** est spécialiste en économétrie. C'est un(e) scientifique qui effectue des traitements mathématiques et statistiques de données économiques dont l'objectif est de fournir à ses employeurs des éléments fiables et quantifiés afin qu'ils puissent prendre des décisions.

Des pistes pour le Grand oral

Pour se préparer

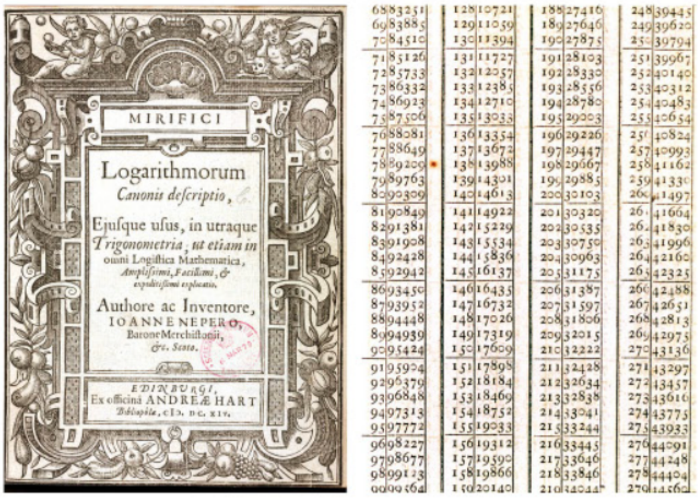
- Utiliser le dossier *Les clés du bac*, au début du manuel
- S'entraîner à l'expression orale en mathématiques : exercices **140**, **178**, **179**

Question

Pourquoi et comment ont été créés les logarithmes ?

Enjeu de la question

Au début du XVII^e siècle, les mathématiciens cherchent des méthodes pour effectuer les calculs plus rapidement. En effet suite au développement de plusieurs disciplines, en particulier l'astronomie et la navigation, les besoins en calculs vont en grandissant.



Plan possible

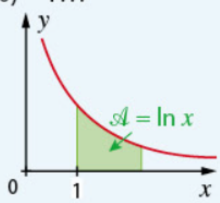
1. Introduction : les besoins en calcul au début du XVII^e siècle (astronomie, trigonométrie, etc.)
2. Remplacement des multiplications par des additions : le logarithme décimal
3. L'aire sous l'hyperbole : le logarithme népérien
4. Principe de fonctionnement des tables de logarithmiques

Les mots-clés

Fonction logarithme • Fonction exponentielle • Suites arithmétiques ou géométriques • Limites • Primitives • Équations différentielles

Support de présentation possible

- Recherche d'une fonction f vérifiant : $f(ab) = f(a) + f(b)$ pour tous réels a et b positifs
- **John Napier (ou Neper) (1550–1617)**
Il trouve un moyen de remplacer les multiplications par des additions, ce qui diminue fortement les temps de calcul.
- **Algorithme de Briggs**
- **Le logarithme décimal**
Considérons les deux progressions :
$0\,;1\,;2\,;3\,;4\,;\ldots\,;n$
$1\,;10\,;10^2\,;10^3\,;10^4\,;\ldots\,;10^n$
À chaque terme de la progression géométrique, on fait correspondre le terme de même rang de la progression arithmétique, on définit ainsi la fonction logarithme en base 10. On a : $\log(1) = 0$, $\log(10) = 1\ldots$
- Construction du logarithme népérien par **quadrature de l'hyperbole d'équation** $y = \dfrac{1}{x}$



Questions d'approfondissement possibles

Donner deux propriétés que l'on déduit de la relation fondamentale et les démontrer.

Quel est le lien entre le logarithme décimal et le logarithme népérien ?

Comment définit-on la fonction exponentielle en première et quel est son lien avec la fonction logarithme népérien ?

Donner le code Python de l'algorithme de Briggs.

Poursuite d'études et projet professionnel

- **Pourquoi étudier les logarithmes ?**
On les utilise pour construire des échelles de mesure adaptées à de nombreux phénomènes chimiques ou physiques dont la croissance est qualifiée d'exponentielle.
- **Dans quelles études peut-on approfondir ces notions ?**
L'étude des logarithmes est approfondie dans beaucoup de formations de l'enseignement supérieur : classes préparatoires, licences scientifiques, IUT scientifiques, écoles d'ingénieur.
- **Un exemple de métier ?**
L'**astrophysicien(ne)** étudie la physique et les propriétés des objets célestes (planètes, étoiles, galaxies). Il (elle) doit avant tout observer. Pour cela, il(elle) dispose d'instruments de mesure perfectionnés : télescopes, interféromètres, satellites ou sondes spatiales.

CAP VERS LE BAC

Des pistes pour le Grand oral

À la date de publication de ce manuel, certaines notions enseignées dans ce chapitre sont exclues de l'épreuve écrite.

Pour se préparer

- Utiliser le dossier *Les clés du bac*, au début du manuel
- S'entraîner à l'expression orale en mathématiques : exercice **113**, **142**

Question

Comment les mathématiques permettent-elles de modéliser un phénomène périodique ?

Enjeu de la question

La modélisation à l'aide de fonctions trigonométiques d'un phénomène périodique est un problème important en physique. Elle a de nombreuses applications en électricité, acoustique, optique, météorologie, cryptographie, médecine, etc.

Plan possible

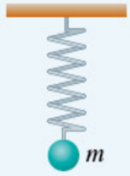
1. Présentation de quelques phénomènes périodiques
2. Principe de deux oscillateurs harmoniques : le système masse–ressort et oscillations libres d'un circuit LC
3. Système masse–ressort : résolution
4. Conclusion (limites des modèles et avantages)

Les mots-clés

Équations différentielles du second ordre • Fonctions trigonométriques • Période, fréquence, longueur d'onde

Support de présentation possible

• Le système masse-ressort est constitué d'une masse m accrochée à un ressort de raideur k contraint de se déplacer dans une seule direction. Si la position de la masse (par rapport à celle où elle est au repos) est notée $x(t)$, alors celle-ci est solution de l'équation différentielle du second ordre $x'' + \frac{k}{m}x = 0$.



• La charge q d'un condensateur de capacité électrique C, dans une bobine d'inductance L, est solution de l'équation différentielle du second ordre $q'' + \frac{1}{LC}q = 0$.

• Solutions de l'équation $y'' + \omega^2 y = 0$: $y = A\cos(\omega t) + B\sin(\omega t)$, avec A et B réels

Questions d'approfondissement possibles

Calculer la dérivée des fonctions : $t \mapsto \cos(\omega t + \varphi)$ et $t \mapsto \sin(\omega t + \varphi)$.

Expliquer la parité des fonctions sinus et cosinus sur le cercle trigonométrique.

Quelles sont les solutions de l'équation différentielle $y'' + \omega^2 y = 0$?

Comment peut-on déterminer la phase d'une fonction trigonométrique de la forme $t \mapsto A\cos(t) + B\sin(t)$?

Poursuite d'études et projet professionnel

- **Pourquoi étudier les fonctions trigonométriques ?**
  Les fonctions trigonométriques sont importantes pour modéliser des phénomènes périodiques et interviennent en électricité, acoustique, optique, météorologie, cryptographie, médecine, etc.
- **Dans quelles études peut-on approfondir ces notions ?**
  L'étude des fonctions trigonométriques est approfondie dans toutes les formations scientifiques de l'enseignement supérieur : CPGE, licences scientifiques, IUT, écoles d'ingénieur, BTS industriels.
- **Un exemple de métier ?**
  Sans un(e) **ingénieur(e)** du son, un concert ne serait qu'un brouhaha où seuls les instruments les plus puissants se feraient entendre. Grâce à lui (elle), cela devient un ensemble de sons équilibrés, nuancés, agréables à écouter. Ses connaissances techniques, scientifiques et artistiques, l'aident à capter et mixer des sons et effectuer des montages.

CAP VERS LE BAC

Des pistes pour le Grand oral

Question

Comment les mathématiques permettent-elles de modéliser l'évolution d'une population ?

Pour se préparer

- Utiliser le dossier *Les clés du bac*, au début du manuel
- S'entraîner à l'expression orale en mathématiques : exercices 130, 166, 167

Enjeu de la question

L'évolution démographique est un enjeu important pour les politiques publiques. Être capable d'anticiper l'évolution de la population ou son vieillissement permet d'orienter les décisions politiques.

Plan possible

1. Les modèles d'évolution, discrets ou continus
2. Le modèle de Malthus
3. Le modèle de Verhulst
4. Le modèle de Volterra
5. Conclusion (limites des modèles et avantages)

Les mots-clés

- Modèle continu • Modèle discret
- Suites • Limites • Fonction exponentielle
- Équations différentielles

Support de présentation possible

- **Malthus (1766–1864)**
Il suppose que la vitesse d'accroissement de la population est proportionnelle à la population (modèle non réaliste).
$f(t) = ke^{at}$ ou bien $u_n = C\alpha^n$.

- **Verhulst (1804–1849)**
Il précise le modèle de Malthus : la vitesse d'accroissement de la population est proportionnelle à la population et aussi à la capacité d'accueil encore disponible pour cette population.
$g(t) = \dfrac{1}{1 + be^{-ct}}$ ou bien $u_{n+1} = u_n + au_n\left(1 - \dfrac{u_n}{k}\right)$

- **Volterra (1860–1940)**
Modèle proie-prédateur.
Système : $\begin{cases} x_{n+1} = ax_n - bx_ny_n \\ y_{n+1} = cy_n - dx_ny_n \end{cases}$

Questions d'approfondissement possibles

Expliquer ce qu'on entend par malthusianisme et son lien avec le modèle de Malthus.

Comment étudie-t-on les suites définies par une relation de récurrence $u_{n+1} = f(u_n)$?

Quels sont les différents types d'équations différentielles que vous connaissez ? Et comment les résout-on ?

Expliquer comment on peut programmer le modèle de Volterra avec un tableur.

Poursuite d'études et projet professionnel

- **Pourquoi étudier les équations différentielles ?**
De nombreux phénomènes physiques, biologiques ou sociétaux sont modélisés par ce type d'équations fonctionnelles.
- **Dans quelles études peut-on approfondir ces notions ?**
L'étude des équations différentielles est approfondie dans beaucoup de formations de l'enseignement supérieur : classes préparatoires, licences scientifiques, IUT scientifiques, écoles d'ingénieur, école de commerce.
- **Un exemple de métier ?**
Le (la) **statisticien(ne)** effectue un traitement mathématique et statistique de données, simule des procédés, crée des outils de modélisation, anticipe, repère et planifie les tendances et les fluctuations futures.
Il (elle) peut intervenir dans la finance, la banque, la grande distribution, l'industrie pharmaceutique, l'énergie, la santé...

CAP VERS LE BAC Des pistes pour le Grand oral

À la date de publication de ce manuel, les notions enseignées dans ce chapitre sont exclues de l'épreuve écrite.

Pour se préparer

- Utiliser le dossier *Les clés du bac*, au début du manuel
- S'entraîner à l'expression orale en mathématiques : exercices **108**, **156**, **157**

Question

Comment les mathématiques interviennent-elles dans la mesure des inégalités de revenus ?

Enjeu de la question

À partir de données comme les revenus des ménages dans un pays ou des salaires dans les entreprises, on peut mesurer les inégalités et les comparer, en utilisant le calcul intégral.

Les mots-clés

Fonctions • Primitives • Convexité • Calcul intégral • Courbe de Lorenz • Coefficient de Gini

Plan possible

1. Répartition de données par déciles
2. Courbe de Lorenz
3. Coefficient de Gini
4. Comparaison

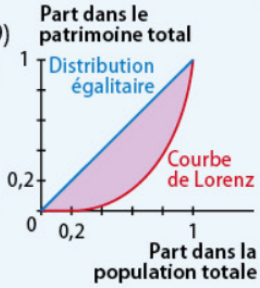
Support de présentation possible

- **Indicateurs de dispersion**

Notion de décile

- **Courbe de Lorenz**

Max O. Lorenz (1876–1959)
Représentation graphique d'une fonction L vérifiant les conditions :
L est définie sur $[0\,;1]$;
L est croissante sur $[0\,;1]$;
$L(0) = 0$ et $L(1) = 1$;
L est convexe sur $[0\,;1]$;
Pour tout réel x de $[0\,;1]$, $L(x) \leqslant x$



- **Coefficient de Gini**

Corrado Gini (1884–1965)
Coefficient associé à la fonction L, noté γ_L et défini par : $\gamma_L = 2 \times A_L$ où A_L est l'aire de la surface délimitée par la droite D et la courbe de la fonction L.

Questions d'approfondissement possibles

- Quelles sont les différentes méthodes de calcul d'une intégrale ?
- Comment peut-on mesurer une dispersion en mathématiques ?
- Comment peut-on interpréter un coefficient de Gini égal à 0 ? et égal à 1 ?
- Citer plusieurs applications du calcul intégral dans d'autres domaines.

Poursuite d'études et projet professionnel

- **Pourquoi étudier le calcul intégral ?**

Le calcul intégral intervient en physique, biologie et économie où des notions propres à ces matières sont éclairées par ce type de calcul.

- **Dans quelles études peut-on approfondir cette notion ?**

Le calcul intégral est étudié et approfondi dans de nombreuses formations de l'enseignement supérieur : classes préparatoires, licences scientifiques et économiques, IUT, écoles d'ingénieur et écoles de commerce.

- **Un exemple de métier ?**

L'**analyste financier** surveille la santé et la croissance ces sociétés cotées en Bourse afin de conseiller traders, gérants de portefeuille et concepteurs de produits financiers. Il (elle) analyse des bilans annuels d'entreprises, compare les informations recueillies pour émettre des recommandations. L'analyste financier, doté(e) d'un esprit de synthèse, d'une résistance au stress et d'une forte réactivité, travaille dans une banque, une société de bourse ou une compagnie d'assurances.

Des pistes pour le Grand oral

Question

Comment interpréter les résultats d'un test diagnostique en médecine ?

Pour se préparer

- Utiliser le dossier *Les clés du bac*, au début du manuel
- S'entraîner à l'expression orale en mathématiques : exercices 60, 131

Enjeu de la question

Des avancées majeures ont été réalisées en médecine ces dernières décennies. Depuis les années 1950, les tests de dépistage rapide (ou test de diagnostic rapide, en abrégé TDR) ont permis de détecter avec une grande fiabilité des maladies infectieuses comme l'angine, le paludisme ou encore le VIH.

Plan possible

1. Présentation du problème
2. Faux positifs
3. Intervalle de fluctuation d'une fréquence
4. Prise de décision sur un échantillon
5. Conclusion

Les mots-clés

Probabilités conditionnelles • Arbres pondérés • Loi binomiale • Fluctuation d'échantillonnage

Support de présentation possible

- **Formule de Bayes**

Pour deux événements A et B de probabilités non nulles :

$$P_B(A) = \frac{P_A(B) \times P(A)}{P(B)} = \frac{P_A(B) \times P(A)}{P_A(B) \times P(A) + P_{\bar{A}}(B) \times P(\bar{A})}$$

- **Loi binomiale**

Si X suit la loi $\mathcal{B}(n\,;p)$ alors pour tout entier k,

$$0 \leqslant k \leqslant n : P(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}.$$

- **Intervalle de fluctuation**

Soit X une variable aléatoire suivant une loi binomiale de paramètres n et p, a le plus petit entier tel que :
$P(X \leqslant a) > 0{,}025$ et b le plus petit entier tel que $P(X \leqslant b) \geqslant 0{,}975$.
Pour tout échantillon de taille n issu de la population, la fréquence d'apparition du succès se trouve dans l'intervalle $\left[\frac{a}{n}\,;\frac{b}{n}\right]$ avec une probabilité au moins égale à 95 %.

Questions d'approfondissement possibles

Énoncer la formule des probabilités totales.

Comment construit-on une règle de décision à l'aide de la loi binomiale ?

Quelles probabilités recouvrent les termes médicaux sensibilité, spécificité, valeur prédictive positive ou négative ?

Énoncer la loi des grands nombres et expliquer son rôle dans les problèmes d'échantillonnage.

Poursuite d'études et projet professionnel

- **Pourquoi étudier les probabilités ?**
  Les probabilités forment un champ mathématique qui dispose de nombreuses applications : en médecine, en sociologie, en économie, en biologie, en météorologie, dans la finance…
- **Dans quelles études peut-on approfondir ces notions ?**
  L'étude des probabilités est approfondie dans beaucoup de formations de l'enseignement supérieur : licences scientifiques ou économiques, études de médecine et assimilés, IUT, classes préparatoires, écoles d'ingénieur.
- **Un exemple de métier ?**
  Le (la) **bio-informaticien(ne)** utilise des domaines mathématiques tels que l'algorithmique ou les probabilités, et crée des logiciels et des bases de données pour recueillir les informations issues du monde vivant. Grâce à la puissance de calcul informatique, ces données peuvent être analysées, exploitées et comparées par les chercheurs en biologie ou en médecine.

Des pistes pour le Grand oral

À la date de publication de ce manuel, certaines notions enseignées dans ce chapitre sont exclues de l'épreuve écrite.

Pour se préparer

- Utiliser le dossier *Les clés du bac*, au début du manuel
- S'entraîner à l'expression orale en mathématiques : exercices 49, 107

Question

Comment les mathématiques permettent-elles de construire et d'interpréter des sondages ?

Enjeu de la question

Les sondages sont un outil visant à connaître et anticiper les décisions à partir d'échantillons réduits. Leur usage est déterminant dans des domaines allant de la politique à la consommation en passant par les questions de société. Ils sont justifiés par la loi des grands nombres.

Plan possible

1. La loi des grands nombres
2. L'écart-type comme indicateur de dispersion
3. Intervalles de confiance
4. Le choix des échantillons
5. Conclusion (critique des sondages régulièrement publiés)

Les mots-clés

Échantillonnage • Loi des grands nombres • Intervalle de confiance • Test d'hypothèse • Probabilités conditionnelles

Support de présentation possible

- **Échantillonnage :** un échantillon de taille n d'une variable aléatoire X est une liste de n variables aléatoires indépendantes et identiques suivant la loi de X.
- **La loi des grands nombres :** soit F_n la fréquence observée dans un échantillon de taille n d'un phénomène de probabilité p. Alors pour tout réel δ strictement positif, $\lim\limits_{n\to+\infty} P\left(|F_n - p| \geqslant \delta\right) = 0$.
- **L'écart-type comme indicateur de dispersion :** si l'écart-type des valeurs du phénomène observé est σ, alors $P\left(|F_n - p| \geqslant t\sigma\right) \leqslant \frac{1}{nt^2}$.
- **Intervalles de confiance :** l'écart-type d'un phénomène suivant une loi binomiale est majoré indépendamment de son paramètre p, ce qui permet de majorer $P\left(|p - f_n| \geqslant \delta\right)$ pour tout réel δ positif lorsque l'on ne dispose que d'une fréquence observée f_n.

Questions d'approfondissement possibles

Quel est l'ordre de grandeur habituel de la taille d'un échantillon dans un sondage ? Pourquoi ?

Expliquer ce que signifie : « Un intervalle de confiance au seuil de 5 % de la proportion des personnes votant pour le candidat A est [0,45 ; 0,49]. »

Proposer un programme Python simulant le tirage aléatoire d'un échantillon de 1 000 personnes selon un critère donné.

Donner un exemple d'une variable somme de deux variables aléatoires.

Poursuite d'études et projet professionnel

- **Pourquoi étudier les variables aléatoires ?**
  De nombreux phénomènes biologiques ou sociétaux sont modélisés par des tirages aléatoires, soit parce qu'ils le sont, soit parce que leurs mécanismes sont inconnus ou trop complexes.
- **Dans quelles études peut-on approfondir ces notions ?**
  L'étude des probabilités et des statistiques est approfondie dans l'enseignement supérieur : classes préparatoires, licences scientifiques, écoles de commerce, études de santé.
- **Un exemple de métier ?**
  Le (la) **chargé(e) d'études marketing** analyse les attentes des clients et l'offre de la concurrence pour assurer au maximum le succès commercial d'un nouveau produit. Il (elle) s'appuie entre autres sur des enquêtes pour analyser la prise de décision du consommateur et mettre en place une stratégie commerciale.