Dénombrement de k-arrangements

Exercice 1

Soit $E = \{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, e_6\}$ un ensemble à 6 éléments.

1. Expliquer pourquoi le nombre de 3-uplets d'éléments distincts de E est égal à $6 \times 5 \times 4$.
2. Combien y a-t-il de 4-uplets d'éléments distincts de E ?

Exercice 2 Algorithme

On considère l'algorithme ci-contre, où n est un entier naturel non nul.

```
f ← 1
Pour i allant de 1 à n faire :
f ← f ∗ i
Fin Pour
```

1. Déterminer ce que contient la variable f en fin d'algorithme pour $n = 4$.
2. Quel est le rôle de cet algorithme ?

Exercice 3

Soit $E = \{0, 1, 2\}$.

1. Quelle valeur doit-on donner à k pour qu'une permutation de E soit un k-uplet d'éléments distincts de E ?
2. Lister toutes les permutations de E. Combien y en a-t-il ?
3. Quelle formule du cours permet d'obtenir le résultat précédent ?

Exercice 4

Soit $E = \{e, f, g, h\}$.

1. (a) Expliquer pourquoi (e, g, f, e) n'est pas une permutation de E.
   (b) Expliquer pourquoi (e, g, f) n'est pas une permutation de E.
2. (a) Expliquer pourquoi le nombre de permutations de E est $4 \times 3 \times 2 \times 1$.
   (b) Comment note-t-on ce nombre ?

Exercice 5

1. Soit E un ensemble à 9 éléments. Combien y a-t-il de 4-uplets d'éléments distincts de E ?
2. Sven doit créer un code de sécurité composé de 6 chiffres sur son smartphone. Il décide de ne jamais utiliser deux fois le même chiffre et de ne jamais utiliser le chiffre 0.
   (a) Combien de codes peut-il alors créer ?
   (b) Jérémy a vu son ami taper 5 comme dernier chiffre. Combien de codes différents sont alors possibles s'il veut utiliser son code ?

Exercice 6

Lors d'un tournoi de danse opposant 10 couples, les 5 premiers couples remportent un prix différent selon le rang.

1. Déterminer le nombre de façons d'attribuer les 5 prix différents.
2. Fauve et son partenaire Maxime ont terminé 1^{er} de ce classement.
   (a) En déduire le nombre de façons d'attribuer les prix.
   (b) On sait de plus que Denitsa et son partenaire Christophe ont fini 4^{e}. Dénombrer alors les distributions de prix possibles.

Exercice 7

1. Soit E un ensemble à 9 éléments. Combien y a-t-il de permutations de E ?
2. La première phase de la coupe du monde de handball féminin est organisée en poules de 6 équipes.
   (a) Combien y a-t-il de classements possibles dans le groupe de la France ?
   (b) Combien y a-t-il de classements possibles dans ce groupe si la France termine première et l'Australie dernière ?

Exercice 8

Le mot « TAHMS »est un anagramme du mot « MATHS », car les deux mots sont composés des mêmes lettres. Combien d'anagrammes peut-on créer avec le mot « MATHS » ?

Exercice 9 Algorithme

Écrire une fonction `factorielle(n)` en Python qui prend en argument un entier naturel n et qui renvoie $n!$.

Exercice 10

Au cours d'une partie d'un jeu vidéo, 12 joueurs font une course de karting.

Indiquer si les affirmations sont vraies ou fausses, puis justifier.

(a) Il y a 12^{12} classements différents.

(b) Maria termine première. Il y a alors $11!$ classements différents possibles.

ⓒ Luigo, Bouseure et Tob finissent respectivement 3^{e}, 7^{e} et 9^{e}. Il y a alors $362\,880$ classements différents possibles.

Exercice 11 Logique

Soit n un entier naturel, tel que $n \geq 2$. Soit E un ensemble à n éléments. Soit la proposition : « Si p est une permutation de E, alors p est un n-uplet. »

1. Cette proposition est-elle vraie ? Justifier.
2. Énoncer sa réciproque, puis dire si celle-ci est vraie ou fausse, en justifiant.

Exercice 12 </> Algorithme

Soit E un ensemble à 8 éléments.

1. ⓐ Calculer le nombre de 4-uplets d'éléments distincts de E.
   ⓑ Combien y a-t-il de 10-uplets d'éléments distincts de E ? Justifier.
2. Soit k un entier naturel non nul. On considère l'algorithme incomplet ci-contre.

```
Si ............
    alors N ← 0
Sinon
    N ← 1
    Pour i allant de ... à ...
        N ← ......
    Fin Pour
Fin Si
```

   ⓐ Compléter cet algorithme afin que la variable N contienne en fin d'algorithme le nombre de k-uplets d'éléments distincts de E.
   ⓑ Programmer cet algorithme en langage Python, en créant une fonction de paramètre k, et vérifier les résultats obtenus aux questions 1.a. et 1.b.
   ⓒ Modifier votre programme afin d'obtenir le nombre de k-uplets d'éléments distincts d'un ensemble à n éléments, où n est un entier naturel non nul.

Exercice 13

1. Pour tout entier naturel n, on note $P(n)$ la propriété : « $2^n \leq n!$ »
   ⓐ La propriété $P(n)$ est-elle vraie pour $n = 0$? $n = 1$? $n = 2$? $n = 3$? $n = 4$? $n = 5$?
   ⓑ Conjecturer la valeur de l'entier n_0 à partir duquel $P(n)$ est vraie.
2. ⓐ Soit p un entier naturel. Justifier que $(p+1)! = (p+1)p!$.
   ⓑ Démontrer alors que $P(n)$ est vraie pour tout entier n tel que $n \geq n_0$, où n_0 est l'entier conjecturé à la question 1.b.

Combinaisons

Exercice 14

Soit E un ensemble à 5 éléments.
Choisir la ou les bonne.s réponse.s

1. Le nombre de parties de E à un élément est égal à :

   ⓐ 1 | ⓑ $\binom{5}{1}$ | ⓒ 5 | ⓓ 4

2. Le nombre de 5-combinaisons de E est égal à :

   ⓐ 1 | ⓑ $\binom{5}{0}$ | ⓒ 5 | ⓓ $\binom{5}{5}$

3. Le nombre $\binom{5}{2}$ est égal à :
   ⓐ $\dfrac{5!}{2!}$
   ⓑ $\dfrac{5!}{3! \times 2!}$
   ⓒ $\dfrac{5 \times 4}{2}$
   ⓓ au nombre de couples de E.

Exercice 15 Logique

Soit $E = \{e_1, e_2, e_3\}$ un ensemble à 3 éléments.
Soit F une partie de E.
On considère la proposition :
« Si $F = \{e_1, e_2\}$, alors F est une combinaison de deux éléments de E ».

1. Cette proposition est-elle vraie ?
2. ⓐ Énoncer la proposition réciproque.
   ⓑ Cette proposition réciproque est-elle vraie ? Justifier.

Exercice 16

Soit $E = \{p, q, r, s\}$.

1. ⓐ Lister les combinaisons de 3 éléments de E.
   ⓑ Combien y en a-t-il ?
   ⓒ Le nombre de combinaisons de 3 éléments de E est égal à $\binom{4}{3}$. Rappeler une formule permettant de calculer ce coefficient et vérifier le résultat obtenu à la question précédente.
2. ⓐ Sans les lister, déterminer le nombre de combinaisons de 2 éléments de E.
   ⓑ Vérifier le résultat précédent en listant toutes les combinaisons de 2 éléments de E.

Exercice 17

Dans chacun des cas suivants, dire si A est une combinaison de l'ensemble des élèves d'une classe ou non, en justifiant.

1. A est l'ensemble composé des deux délégués.
2. A est le classement des élèves lors d'un devoir, de la meilleure note à la moins bonne.
3. A est l'ensemble des élèves qui ont une note au-dessus de la moyenne de classe à un devoir.

Exercice 18

On note A l'ensemble des athlètes féminines disputant la finale du 100 m natation aux Jeux Olympiques. Dans cet ensemble, il y a trois françaises.
Dans chacun des cas suivants, dire si ce qui est considéré est un k-uplet d'éléments distincts de A, une permutation de A ou une combinaison de A, en justifiant.

1. Le classement de la finale (de la première à la dernière place).
2. Le podium (médaille d'or, d'argent, de bronze).
3. L'ensemble des trois françaises.

Exercice 19

1. Calculer $\dfrac{5!}{3! \times 2!}$.
2. Donner un coefficient binomial qui est égal à ce nombre.

Exercice 20

1. À l'aide d'une formule du cours, vérifier que $\dbinom{7}{4} = 35$.
2. À l'aide de la même formule, calculer $\dbinom{7}{5}$.

Exercice 21

1. Calculer $\dbinom{9}{3}$.
2. Calculer $\dbinom{9}{4}$ puis $\dbinom{9}{5}$.
3. Calculer $\dbinom{6}{k}$ pour tout entier k tel que $0 \leq k \leq 6$.
4. Avec la calculatrice, calculer $\dbinom{15}{9}$.

Exercice 22

1. Calculer $\dbinom{10}{3}$ puis $\dbinom{10}{7}$.
2. Vérifier les deux résultats précédents avec la calculatrice.

Exercice 23

1. On dispose d'un jeu de 52 cartes, toutes différentes. Une « main »de 8 cartes est un ensemble de 8 cartes dont l'ordre n'importe pas. Combien de « mains » de 8 cartes peut-on alors former ?
2. Pour l'anniversaire de Zoé, une plateforme de streaming lui offre 4 albums à choisir parmi une sélection qui en contient 9.
   (a) Combien de choix Zoé peut-elle réaliser ?
   (b) L'album qu'elle voulait est proposé dans les 9. Combien de choix comportant cet album peut-elle alors réaliser ?

Exercice 24

1. En Première générale, un élève doit choisir trois spécialités parmi les douze proposées. Combien de triplettes possibles y a-t-il ?
2. En Terminale, les élèves doivent garder deux des trois spécialités choisies en Première. Combien de possibilités s'offrent alors à Enzo qui arrive en Terminale pour choisir ses spécialités ?
3. (a) Un parcours est constitué d'une triplette de spécialités choisies en Première et d'une doublette de ces spécialités conservées en Terminale. Justifier qu'il y a alors 660 parcours différents.
   (b) Coline a choisi les maths en Première et Terminale. Combien de parcours correspondent à ce choix ?

Exercice 25

1. Marlène possède 5 jeans et 7 T-shirts. Elle part en vacances et décide d'emmener 2 jeans et 3 T-shirts.
   (a) Justifier que le nombre de possibilités qu'elle a pour choisir ses jeans et T-shirts est $\binom{5}{2} \times \binom{7}{3}$.
   (b) Calculer ce nombre.
2. Son mari Gaëtan possède quant à lui 10 jeans, 13 T-shirts et 7 paires de chaussures. Il décide de partir avec 8 jeans, 10 T-shirts et 4 paires de chaussures. Combien de manières a-t-il pour remplir sa valise ?

Exercice 26

Une urne contient 4 boules noires et 3 boules rouges indiscernables au toucher. On tire simultanément 2 boules au hasard.
On considère les événements :

- A : « les deux boules tirées sont de la même couleur » ;
- B : « une seule des deux boules tirées est rouge ».

Indiquer si les affirmations sont vraies ou fausses, puis justifier.

1. La probabilité de A est égale à $\frac{3}{7}$.
2. La probabilité de B est égale à $\frac{1}{7}$.

Triangle de Pascal

Exercice 27

On considère le triangle de Pascal ci-contre.

1					
1	1				
1	2	1			
1	3	3	1		
1	4	6	4	1	
1	5	10	10	5	1

Indiquer si les affirmations sont vraies ou fausses, puis justifier.

1. La ligne 6 de ce tableau (la dernière) est la ligne des coefficients de la forme $\binom{6}{k}$ où k est un entier variant de 0 à 6.
2. $\binom{4}{3} = 6$.
3. La première colonne est composée uniquement de « 1 »car pour tout entier naturel n, $\binom{n}{0} = 1$.
4. La ligne suivante de ce triangle est $1 \quad 6 \quad 15 \quad 20 \quad 15 \quad 6 \quad 1.$

Exercice 28

1. (a) Écrire les 8 premières lignes du triangle de Pascal.
   (b) En déduire la valeur de $\binom{7}{4}$.
2. On rappelle que $\binom{7}{4} = \frac{7!}{(7-4)! \times 4!}$.
   (a) Calculer $7!$, $(7-4)!$ et $4!$.
   (b) Retrouver alors les résultats de la question 1.b.

Exercice 29

1. À l'aide du triangle de Pascal, calculer les combinaisons suivantes : $\binom{8}{4}$ et $\binom{8}{5}$.
2. Quel coefficient du triangle peut-on alors calculer à l'aide de la relation de Pascal et en utilisant les deux coefficients de la question 1. ? Effectuer ce calcul.

Exercice 30

Lors d'un incendie, Christophe, chef des pompiers, doit créer une équipe de 4, 5 ou 6 soldats du feu pour entrer dans le bâtiment en flammes. Il dispose pour cela de 8 personnes.

1. Déterminer les coefficients $\binom{8}{4}$, $\binom{8}{5}$ et $\binom{8}{6}$. On pourra utiliser le triangle de Pascal.
2. En déduire le nombre d'équipes différentes que Christophe peut créer.

Exercice 31 Logique

Soit la proposition P : « Si un coefficient du triangle de Pascal est le premier d'une ligne, alors ce coefficient est 1. »

1. Cette proposition P est-elle vraie ou fausse ? Justifier.
2. Énoncer la réciproque de P et dire si elle est vraie ou fausse, en justifiant.

Exercice 32

1. Construire le triangle de Pascal jusqu'à la ligne 7 (c'est-à-dire jusqu'à $n = 6$).
2. Pour chaque ligne, additionner les nombres qui la composent. Que remarquez-vous concernant les résultats successifs ?
3. Quelle propriété du cours est alors illustrée ?

Dénombrement (général)

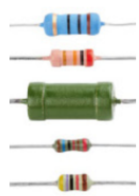
Exercice 33

On considère un gène qui contient deux allèles, éventuellement identiques. Il y a au total 6 allèles différents, notés $A_1, A_2, \ldots, A_6$.

1. Combien de couples d'allèles sont possibles ?
2. Déterminer le nombre de gènes qui contiennent les deux mêmes allèles.
3. Déterminer le nombre de gènes qui contiennent des allèles différents, peu importe l'ordre de ces allèles.

Exercice 34

Des anneaux de couleurs différentes sont présents sur les résistances. L'enchaînement des anneaux permet de déterminer la valeur en ohms de la résistance ainsi que la tolérance.



Les deux premiers anneaux peuvent chacun être représentés par 10 couleurs différentes, le troisième par 9 couleurs différentes et le dernier par 4.
Combien de résistances différentes à 4 anneaux y a-t-il ?

Exercice 35

Le bit (ou élément binaire) est une unité qui ne peut prendre que deux valeurs : 0 ou 1. Un octet est un ensemble de 8 bits ordonnés. Autrement dit, un octet est un 8-uplet de l'ensemble $\{0; 1\}$.

1. Combien d'octets différents y a-t-il ?
2. Combien d'octets commencent par 1 et finissent par 0 ?

3. Combien d'octets contiennent exactement trois 1 ?
4. Combien d'octets contiennent plus de 1 que de 0 ?

Exercice 36

Un sondage est fait auprès de 813 adolescents. L'objectif est de connaître leur artiste préférée entre Sia, Ariana Grande et Lady Gaga.
Parmi les 320 garçons, 140 préfèrent Lady Gaga et 62 préfèrent Sia. On dénombre 210 adolescents qui préfèrent Lady Gaga. Enfin, 175 adolescents qui préfèrent Sia sont des filles.

1. Combien d'adolescents préfèrent Sia ?
2. Combien de filles de cette étude préfèrent Ariana Grande ?
3. Pour les questions suivantes, on donnera les valeurs exactes puis on donnera les résultats en pourcentage, arrondis à $0,01\%$.
   (a) Quelle est la proportion de garçons préférant Ariana Grande ?
   (b) Parmi les adolescents préférant Lady Gaga, quelle est la proportion de filles ?

Exercice 37

Lors d'une partie d'un jeu, les joueurs disposent de deux dés à 6 faces, numérotées de 1 à 6. Pendant son tour, un joueur lance les deux dés et doit faire la somme des numéros qui sont sur les faces du dessus.

1. Quelle est la probabilité d'obtenir 5 comme résultat ?
2. Si un joueur obtient le résultat qui a la plus grande probabilité d'être réalisé, alors ce joueur déplace un pion censé gêner les autres joueurs. Déterminer alors le résultat que doit obtenir un joueur pour gêner les autres.

Exercice 38

On lance deux dés : un à 6 faces (numérotées de 1 à 6) et un dé à 4 faces (numérotées de 1 à 4). Après avoir lancé les deux dés, on réalise la différence du plus grand nombre obtenu par le plus petit. Par exemple, si on obtient « 2 »avec le dé à 6 faces et « 4 »avec le dé à 4 faces, alors le résultat obtenu est $4-2=2$.
Déterminer la probabilité de chaque issue de cette expérience aléatoire.

Exercice 39

Pour rentrer dans un immeuble, il faut composer un code de 4 caractères. Sur le clavier, il y a 3 lettres (A, B, C) et les 10 chiffres.

1. Combien de codes différents y a-t-il ?
2. Les 4 caractères du code sont différents. Combien de codes sont alors possibles ?
3. Pour composer le code, on a seulement besoin des touches « A », « C »et « 5 ». Combien de codes de 4 caractères utilisant ces trois touches sont alors possibles ?

Exercice 40

Indiquer si les affirmations sont vraies ou fausses, puis justifier.

1. Au cours d'une réunion d'entreprise à laquelle participent 20 personnes, tout le monde serre la main aux autres personnes. Il y a alors 380 poignées de main.
2. Lors d'un match de football, les 22 joueurs titulaires serrent la main des joueurs de l'équipe adverse et celle des 3 arbitres. Mais les joueurs d'une même équipe ne se serrent pas la main. Il en est de même pour les arbitres entre eux. Il y a alors 187 poignées de main.

Exercice 41

Jean-François dispose d'une pièce de 10 cts, de trois pièces de 5 cts, de huit pièces de 2 cts et de quinze pièces de 1 ct. Il veut s'acheter une chocolatine à 15 cts. On ne distingue pas les pièces de même valeur.
De combien de manières différentes Jean-François peut-il alors payer sa chocolatine ?

Exercice 42

Une urne contient huit boules : cinq noires, numérotées de 1 à 5, et trois rouges, numérotées 6, 7 et 8. Les boules sont indiscernables au toucher.

1. On extrait cinq boules successivement, avec remise. Déterminer :
   (a) le nombre total de tirages ;
   (b) le nombre de tirages tels que la première boule tirée est noire et la deuxième est rouge ;
   (c) le nombre de tirages tels que la première boule rouge tirée est en troisième position.
2. Reprendre la question 1. dans le cas où on extrait les cinq boules de l'urne successivement et sans remise.
3. On extrait simultanément deux boules de l'urne. Déterminer les probabilités des événements suivants : A : « les deux boules tirées sont rouges » ; B : « les deux boules tirées sont de même couleur ».

Les probabilités demandées seront données sous forme de fractions irréductibles.