

## TD Chapitre 3

**E.1** Pour chaque question, déterminer les quatre premiers termes de la suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ :

(a)  $u_n = \frac{n+1}{n+2}$    (b)  $u_n = \sqrt{n^2 + n + 1}$    (c)  $u_n = \frac{n-2}{n+1}$

**E.2** Pour chacune des questions, déterminer les cinq premiers termes de la suite  $(u_n)$  définie par :

(a)  $u_n = \frac{3n^2 + n + 2}{n+2}$  pour tout  $n \in \mathbb{N}$

(b)  $u_n = \frac{2n^2 + n + 5}{n+1}$  pour tout  $n \in \mathbb{N}$

**E.3** On définit la suite par récurrence  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  par la relation:

$$u_0 = 5 ; u_{n+1} = 2 \cdot u_n - 1 \text{ pour tout } n \in \mathbb{N}$$

Déterminer les cinq premiers termes de la suite  $(u_n)$ .

**E.4** On considère la suite  $(u_n)$  définie pour tout  $n \in \mathbb{N}$  par les relations :

$$u_0 = 2 ; u_{n+1} = \frac{1}{2} \cdot u_n + 3 \text{ pour tout } n \in \mathbb{N}$$

Déterminer les quatre premiers termes de la suite  $(u_n)$ .

**E.5** On considère la suite  $(v_n)_{n \in \mathbb{R}}$  définie par :

$$v_{n+1} = \frac{1 - v_n}{1 + v_n} ; v_0 = 3$$

(1) Déterminer les cinq premiers termes de la suite  $(v_n)$ .

(2) Que remarque-t-on?

**E.6** Pour chaque question, déterminer les quatre premiers termes de la suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ :

(a)  $u_{n+1} = 2 \cdot u_n - 2 ; u_0 = 3$

(b)  $u_{n+1} = 2 \cdot u_n - 2 ; u_0 = 1$

(c)  $u_{n+1} = \frac{u_n - 2}{u_n + 1} ; u_0 = 2$

**E.7** On considère la suite  $(u_n)$  définie par :

$$\begin{cases} u_0 = 3 ; u_1 = 1 \\ u_{n+2} = 2 \cdot u_{n+1} + u_n \text{ pour tout } n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

Donner les cinq premiers termes de la suite  $(u_n)$ .

**E.8** On considère la suite  $(u_n)$  définie pour tout  $n \in \mathbb{N}$  par les relations :

$$u_0 = -1 ; u_{n+1} = u_n + n - 2 \text{ pour tout } n \in \mathbb{N}$$

Déterminer les quatre premiers termes de la suite  $(u_n)$ .

**E.9** On considère la suite  $(v_n)$  définie par :

$$v_0 = -3 ; v_{n+1} = n - 2 \cdot v_n \text{ pour tout } n \in \mathbb{N}$$

Donner les quatre premiers termes de la suite  $(v_n)$ .

**E.10**

(1) Soit  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ , la suite définie par la relation de récurrence et la condition initiale :

$$u_1 = 1 ; u_{n+1} = \frac{1}{1 + \frac{1}{u_n}} \text{ pour tout } n \in \mathbb{N}^*$$

Calculer les 4 premiers termes de la suite.

(2) Soit  $(v_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  la suite dont le terme de rang  $n$  a pour

valeur :  $v_n = \frac{1}{n}$  pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$

(a) Donner la valeur de  $v_1$ .

(b) Etablir l'identité suivante pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$  :

$$1 + \frac{1}{v_n} = n + 1$$

(c) En déduire que la suite  $(v_n)$  suit la relation de récurrence ci-dessous pour tout entier naturel non-nul :

$$v_{n+1} = \frac{1}{1 + \frac{1}{v_n}}$$

(3) Que pouvez-vous dire des suites  $(u_n)$  et  $(v_n)$ ?

**E.11**

(1) On considère la suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  dont le terme de rang  $n$  est défini par la relation de récurrence :

$$u_0 = 2 ; u_{n+1} = \frac{1}{3} \cdot u_n + 1 \text{ pour tout } n \in \mathbb{N}$$

Calculer les 4 premiers termes de la suite  $(u_n)$ .

(2) On considère la suite  $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$  définie explicitement par :

$$v_n = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^n + \frac{3}{2}$$

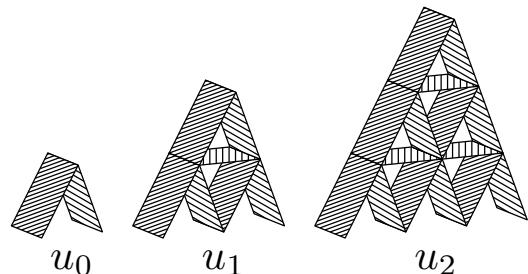
(a) Calculer les 4 premiers termes de la suite  $(v_n)$

(b) Etablir que pour tout entier naturel  $n$ , on a :

$$v_{n+1} - \frac{1}{3} \cdot v_n = 1$$

(3) En déduire l'égalité des suites  $(u_n)$  et  $(v_n)$ .

**E.12** On considère la construction d'un château de cartes :



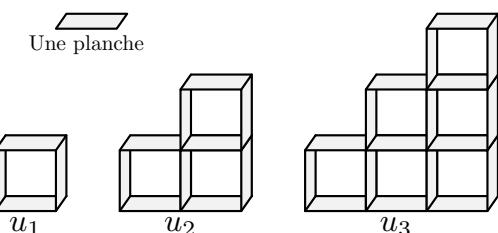
On considère la suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  désignant le nombre de cartes utilisées dans la construction du château à l'étape  $n$ .

(1) Déterminer les quatre premiers termes de la suite  $(u_n)$ .

(2) Pour tout entier naturel  $n$ , déterminer une expression du terme  $u_{n+1}$  en fonction du terme précédent  $u_n$  et du rang  $n$ .

(3) À quelle étape de construction peut-on arriver avec deux jeux de 72 cartes?

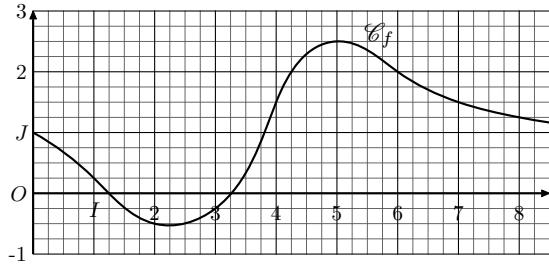
**E.13** On construit successivement un objet comme le représente le schéma ci-dessous :



Pour tout entier naturel  $n$  non-nul, on note  $u_n$  le nombre de planches nécessaires pour construire la figure à l'étape  $n$ .

Donner une relation de récurrence caractérisant la suite  $(u_n)$ .

**E.14** On considère la fonction  $f$  définie sur  $\mathbb{R}_+$  dont la courbe représentative  $\mathcal{C}_f$  est donnée dans le repère orthonormé  $(O; I; J)$  ci-dessous :



On définit la suite  $(u_n)$  par la relation :

$$u_n = f(n) \text{ pour tout entier } n \in \mathbb{N}.$$

**1** Justifier que le terme  $u_4$  a pour valeur  $\frac{3}{2}$ .

**2** **a** Déterminer la valeur des termes :

$$u_0 ; u_1 ; u_2 ; u_3 ; u_4 ; u_5 ; u_6$$

**b** Dire si les affirmations ci-dessous sont exacts ou non :

- “Les termes de la suite  $(u_n)$  pour  $i \in \{0; 1; 2\}$  sont ordonnés dans l’ordre décroissant.”
- “Les termes de la suite  $(u_n)$  pour  $i \in \{3; 4; 5\}$  sont ordonnés dans l’ordre croissant.”

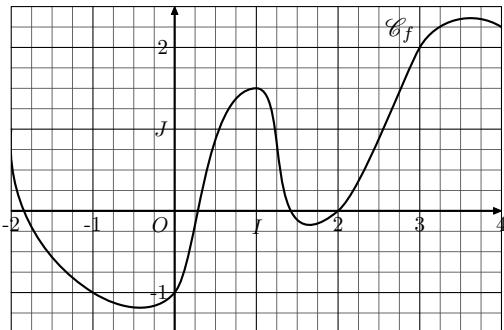
**E.15** On considère les deux suites  $(u_n)$  et  $(v_n)$  définies pour tout entier naturel  $n$  ( $n \in \mathbb{N}$ ):

$$u_n = 2n^2 - n + 1 ; v_n = \frac{4-n}{1+n}$$

**1** Déterminer les 5 premiers termes des ces deux suites.

**2** Conjecturer le sens de variations de la suite  $(u_n)$  et  $(v_n)$ .

**E.16** On considère la fonction  $f$  définie sur  $[-2; 4]$  dont la courbe représentative  $\mathcal{C}_f$  est donnée ci-dessous :



On considère la suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  définie par la relation

$$u_0 = 3 ; u_{n+1} = f(u_n) \text{ pour tout } n \in \mathbb{N}$$

**1** Compléter le tableau suivant avec les premiers termes de la suite  $(u_n)$ :

$n$	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$u_n$										

**2** Pour chacune des affirmations ci-dessous, préciser si elles sont vraies ou fausses :

- “la suite  $(u_n)$  est strictement décroissante sur  $\mathbb{N}$ .”
- “la suite  $(u_n)$  est constante à partir du rang 3.”

**E.17**

**1** On considère la suite  $(u_n)$  définie pour tout entier naturel  $n$  ( $n \in \mathbb{N}$ ) par :  $u_0 = 2$  ;  $u_{n+1} = \frac{1}{2} \cdot u_n - \frac{1}{4}$

- a** Déterminer les 4 premiers termes de la suite  $(u_n)$ .
- b** Conjecturer la variation de la suite  $(u_n)$

**2** On considère la suite  $(v_n)$  définie pour tout entier naturel  $n$  ( $n \in \mathbb{N}$ ) par :  $v_0 = -1$  ;  $v_{n+1} = \frac{1}{2} \cdot v_n - \frac{1}{4}$

- a** Justifier les comparaisons :  $v_0 < v_1 < v_2 < v_3$
- b** Conjecturer la variation de la suite  $(v_n)$

**E.18** On considère la suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  dont le terme de rang  $n$  est donné par la formule :  $u_n = n^2 - 7 \cdot n + 1$

**1** A l’aide de la calculatrice, compléter le tableau ci-dessous :

$n$	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$u_n$											

**2** Après avoir donner le tableau de variations de la fonction  $f$  dont l’image de  $x$  est définie par :

$$f(x) = x^2 - 7 \cdot x + 1$$

Etablir que la suite  $(u_n)$  est croissante à partir du rang 4.

**E.19** La suite  $(u_n)$  est définie par la formule explicite :

$$u_n = \frac{5+n}{n} \text{ pour tout } n \in \mathbb{N}^*$$

Déterminer le sens de variations de la suite  $(u_n)$ .

**E.20** Soit  $(w_n)$  la suite dont le terme de rang  $n$  est défini par :

$$w_n = 2n - \frac{25}{n} \text{ pour tout } n \in \mathbb{N}^*$$

Montrer que la suite  $(w_n)$  est croissante.

**E.21** On considère la suite  $(u_n)$  définie par :

$$u_n = \frac{1-n}{1+n} \text{ pour tout } n \in \mathbb{N}$$

**1** Déterminer une expression simplifiée de  $u_{n+1} - u_n$ .

**2** En déduire les variations de la suite  $(u_n)$  sur  $\mathbb{N}$ .

**E.22** On considère la suite  $(u_n)$  définie par :

$$u_n = \frac{3^n}{4} \text{ pour tout } n \in \mathbb{N}.$$

Montrer que  $(u_n)$  est strictement croissante.

**E.23** On considère la suite  $(u_n)$  définie pour tout entier naturel  $n$  ( $n \in \mathbb{N}$ ) par :  $u_n = \frac{5^n}{n+2}$

Montrer que la suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est une suite croissante sur  $\mathbb{N}$ .

**E.24** On considère la suite  $(u_n)$  définie par :

$$u_n = \frac{3^n}{2n+1} \text{ pour tout } n \in \mathbb{N}$$

Déterminer les variations de la suite  $(u_n)$  sur  $\mathbb{N}$ .