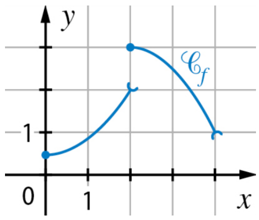
Continuité d'une fonction

Exercice 1

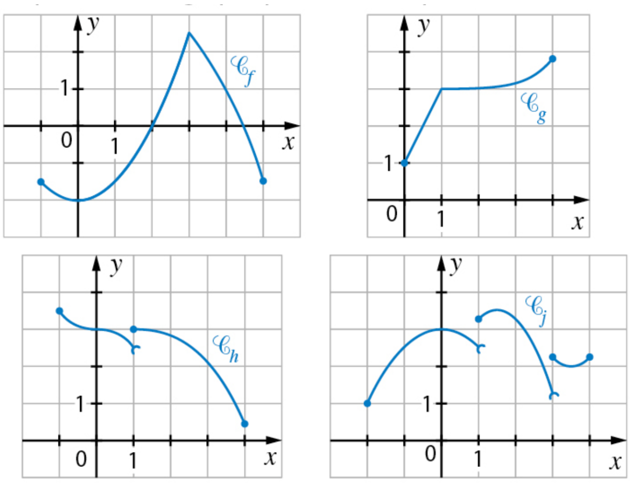
Soit f une fonction définie sur l'intervalle $[0\,;\,4]$ et dont on donne la représentation graphique dans un repère.



1. La fonction f est-elle continue en 3 ?
2. La fonction f est-elle continue en 2 ?

Exercice 2

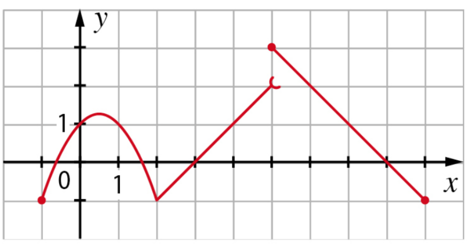
Soit f, g, h et j des fonctions dont on donne ci-dessous la représentation graphique.



1. Quelles sont les fonctions continues sur leur intervalle de définition ?
2. Pour celles qui ne sont pas continues, préciser en quels points.

Exercice 3

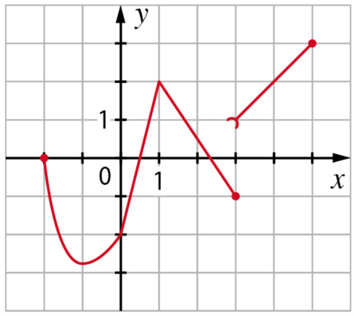
Soit f une fonction définie sur $[-1;9]$ dont on donne la courbe représentative ci-dessous.



1. La fonction f est-elle continue en 5 ?
2. La fonction est-elle continue sur $[-1;3]$?

Exercice 4

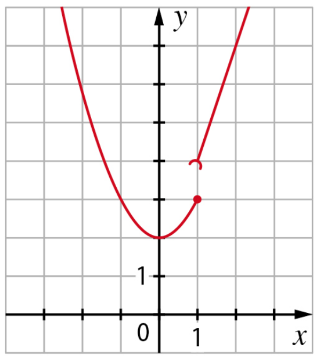
Soit f une fonction définie sur $[-2;5]$ dont on donne la courbe représentative ci-contre.



1. La fonction est-elle continue sur $[-2;5]$?
2. La fonction est-elle continue en 1 ?

Exercice 5

Soit b un réel, et soit f la fonction définie sur $[-3;4]$ par $f(x) = x^2 + bx + 2$ si $-3 \leq x \leq 1$ et $f(x) = 3x + 1$ si $1 < x \leq 4$.
On a tracé la courbe de f ci-contre, pour une certaine valeur de b.



1. Déterminer graphiquement la valeur de b.
2. Sur ce graphique, f est-elle continue en tout point de $[-3;4]$? Sinon, déterminer la valeur de b pour laquelle f est continue sur $[-3;4]$.

Exercice 6 Logique

Soit la proposition : « Si une fonction est dérivable sur un intervalle I alors elle est continue sur I. »

1. Cette proposition est-elle vraie ?
2. Énoncer la réciproque. Est-elle vraie ?

Théorème des valeurs intermédiaires

Exercice 7

Soit f la fonction définie sur $[-3;3]$ par :

$$f(x) = x^3 - 5x + 1$$

1. Calculer $f(-3)$ et $f(3)$.
2. Démontrer que l'équation $f(x) = 0$ possède au moins une solution dans l'intervalle $[-3;3]$.
3. Pourquoi l'équation $f(x) = 6$ admet-elle au moins une solution sur l'intervalle $[-3;3]$?

Exercice 8 **</> Algorithme**

Soit f une fonction continue sur $\mathbb{R}$. Compléter le script de la fonction `sol` afin que celle-ci retourne le booléen `True` si l'équation $f(x) = 0$ a au moins une solution dans l'intervalle $[a; b]$ et `False` sinon.

```
def sol(a,b):
    y1=f(a); y2=f(b)
    if ... :
        return True
    else:
        return False
```

Exercice 9

On donne le tableau de variation d'une fonction f :

x	5	8
f	4 ↘	-9

1. Pourquoi peut-on affirmer que f est continue sur $[5; 8]$?
2. (a) Donner les valeurs $f(5)$ et $f(8)$.
   (b) Justifier à l'aide du corollaire du théorème des valeurs intermédiaires que l'équation $f(x) = 0$ a une unique solution dans $[5; 8]$.

Exercice 10

Soit f définie sur $[0; 4]$ par $f(x) = x^3 + x - 9$.

1. (a) Calculer $f'(x)$.
   (b) Justifier que f est continue et strictement croissante sur $[0; 4]$.
   (c) Calculer $f(0)$ et $f(4)$.
2. Démontrer que l'équation $f(x) = 0$ a une unique solution α dans l'intervalle $[0; 4]$.
3. (a) Calculer $f(1)$ et $f(2)$.
   (b) En déduire un encadrement de α par deux entiers.

Exercice 11

Soit f la fonction définie sur l'intervalle $[1; 5]$ par $f(x) = 0,1x^9 - 1000$.

1. Justifier que f est continue et strictement croissante sur $[1; 5]$.
2. Démontrer que l'équation $f(x) = 0$ a une et une seule solution dans $[2; 3]$. On appelle α cette solution.
3. On obtient le tableau de valeurs ci-contre. Donner un encadrement d'amplitude $0,1$ de α.

X	Y1
2	-948.8
2.1	-920.6
2.2	-879.3
2.3	-819.9
2.4	-735.8
2.5	-618.5
2.6	-457
2.7	-237.4
2.8	57.846
2.9	450.71
3	968.3

Exercice 12 **Calculatrice**

Soit f la fonction définie sur l'intervalle $[0; 8]$ par $f(x) = x^3 + x - 4$. On appelle α l'unique solution de l'équation $f(x) = 50$ sur $[3; 4]$. Avec la calculatrice, on obtient le tableau de valeurs ci-contre. Donner un encadrement d'amplitude $0,01$ de α.

X	Y1
3.63	47.462
3.64	47.869
3.65	48.277
3.66	48.688
3.67	49.101
3.68	49.516
3.69	49.933
3.7	50.353
3.71	50.775
3.72	51.199
3.73	51.625

Exercice 13

Soit f la fonction définie sur $[-2; +\infty[$ par

$$f(x) = x^3 - 6x + 1.$$

1. Justifier que l'équation $f(x) = 0$ admet au moins une solution dans l'intervalle $[-2; 2]$.
2. (a) Montrer que f est strictement croissante sur $[2; +\infty[$.
   (b) Montrer que l'équation $f(x) = 0$ a une unique solution dans l'intervalle $[2; +\infty[$.

Exercice 14

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = x^3 - 8x + 1.$$

Montrer que l'équation $f(x) = 0$ possède une unique solution sur $[-1; 1]$.

Exercice 15 **Calculatrice**

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = 4x^5 + 2x - 2.$$

1. Montrer que f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.
2. Montrer que l'équation $f(x) = 8$ possède une unique solution α dans $\mathbb{R}$.
3. Déterminer un encadrement par balayage avec la calculatrice de α à 10^{-2} près.

Exercice 16 **Calculatrice**

f est définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = e^{4x+7} + x^3 - 10.$$

1. Étudier le sens de variation de f sur $\mathbb{R}$.
2. Montrer que l'équation $f(x) = 0$ possède une unique solution α dans $\mathbb{R}$.
3. Déterminer un encadrement de α à 10^{-2} près.

Exercice 17 **Calculatrice**

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = x^3 + 2x^2 + 10x.$$

1. Étudier les variations de f sur $\mathbb{R}$.
2. En déduire que l'équation $x^3 + 2x^2 + 10x = 20$ possède une unique solution α dans $\mathbb{R}$.
3. Donner une valeur approchée de α à $0,01$.

Exercice 18 — Algorithme

Soit f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^3 + x^2 - 5$.

1. Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution α dans l'intervalle $[1; 2]$.
2. On considère le programme Python :

```
def f(x):
    return x**3 + x**2 - 5

def sol(n):
    a = 1
    b = 2
    for k in range(n):
        m = (a+b)/2
        if f(a)*f(b) < 0:
            a = m
        else:
            b = m
    return (a, b)
```

   (a) Que renvoie l'appel `sol(3)` ?

   (b) Quelle valeur doit-on donner à l'entier n lors de l'appel `sol(n)` pour obtenir un encadrement d'amplitude $0,0625$ de α ?

Exercice 19

Un cube a pour arête x cm et un parallélépipède rectangle pour dimensions 6 ; 2 et $2x+5$cm. Déterminer la valeur de x pour que ces deux éléments aient le même volume. On donnera une valeur approchée à $0,01$ près.

Exercice 20 — Calculatrice

Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$g(x) = x^3 + x - 1.$$

1. Étudier les variations de g sur $\mathbb{R}$ et montrer que l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution α dans $\mathbb{R}$.
2. Donner un encadrement de α à $0,01$ près.
3. En justifiant, donner le signe de $g(x)$ sur $\mathbb{R}$.

Exercice 21 — Calculatrice

Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$g(x) = 2x^3 - 3x^2 - 1.$$

1. Étudier les variations de g.
2. Montrer que l'équation $g(x) = 0$ admet sur $\mathbb{R}$ une unique solution α. Donner un encadrement de α à $0,1$ près.
3. Déterminer le signe de $g(x)$ sur $\mathbb{R}$.
4. Soit f la fonction définie sur $]-1; +\infty[$ par :

$$f(x) = \frac{1-x}{x^3+1}.$$

   (a) Calculer $f'(x)$ puis exprimer $f'(x)$ en fonction de $g(x)$.

   (b) En déduire le signe de $f'(x)$ puis les variations de f sur $]-1; +\infty[$.

Exercice 22

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = x^4 + 3x^2 - 5x + 1.$$

1. Calculer pour tout réel x, $f'(x)$ puis $f''(x)$.
2. Déterminer le signe de $f''(x)$ puis dresser le tableau de variation de f'.
3. (a) Montrer que l'équation $f'(x) = 0$ possède une unique solution α sur $\mathbb{R}$ dont on donnera un encadrement à $0,1$ près.

   (b) En déduire le signe de $f'(x)$ sur $\mathbb{R}$.

   (c) Dresser le tableau de variation de f. On ne cherchera pas à calculer $f(\alpha)$.

Exercice 23

Vrai ou faux ? Justifier.
« Pour tout réel k de l'intervalle $]-2; 2[$, l'équation $x^3 - 3x = k$ admet trois solutions. »

Suites récurrentes

Exercice 24

Choisir la ou les bonnes réponses.
Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 2x + 7$ et (u_n) la suite définie par $u_0 = 8$ et la relation $u_{n+1} = f(u_n)$ pour tout entier naturel n.
Le terme u_1 est égal à :

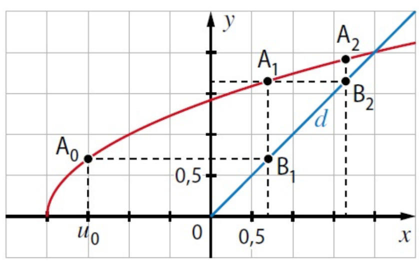
(a) 7 | (b) 23 | (c) 9 | (d) 53

Exercice 25

Soit f la fonction définie sur $]0\,; +\infty[$ par $f(x) = 1 + \dfrac{1}{x}$, et (u_n) la suite définie par $u_0 = 1$ et pour tout naturel n par $u_{n+1} = f(u_n)$.
Calculer u_1, u_2 et u_3.

Exercice 26

Soit une fonction f définie sur $[-2; +\infty[$ et (u_n) la suite définie par $u_0 = -1,5$ et $u_{n+1} = f(u_n)$ pour tout entier naturel n.
On a représenté ci-après la courbe représentative $\mathcal{C}_f$ de la fonction f et la droite d d'équation $y = x$.
Le point A_0 est le point de $\mathcal{C}_f$ d'abscisse u_0. On a construit les points B_1, A_1, B_2 et A_2 comme indiqué sur le graphique.



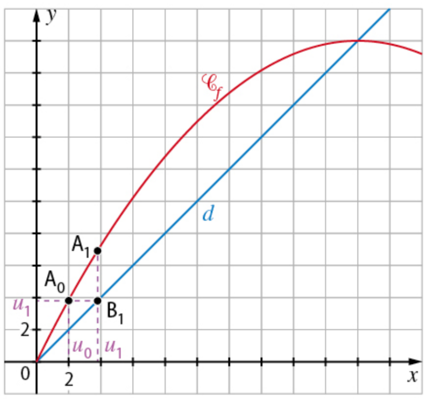
1. À quel terme de la suite (u_n) l'ordonnée de A_0 est-elle égale ?
2. Exprimer les coordonnées des points B_1, A_1, B_2 et A_2 à l'aide des premiers termes de la suite (u_n).

Exercice 27

Soit f la fonction définie sur $[0; +\infty[$ par :

$$f(x) = -\frac{1}{20}x(x-40)$$

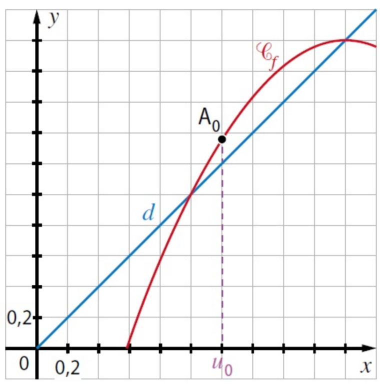
et (u_n) la suite définie par $u_0 = 2$ et la relation $u_{n+1} = f(u_n)$ pour tout entier naturel n.
On a représenté ci-dessous la courbe $\mathcal{C}_f$ de la fonction f et la droite d d'équation $y = x$.
On a ensuite placé le point A_0 de $\mathcal{C}_f$ d'abscisse u_0 puis construit les points B_1 de d et A_1 de $\mathcal{C}_f$ d'abscisse u_1.



1. Poursuivre la construction pour obtenir les termes u_2, u_3 et u_4 sur l'axe des abscisses.
2. Conjecturer le sens de variation de (u_n).

Exercice 28

Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = 1,2$ et pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = f(u_n)$ où f est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = -x^2 + 4x - 2$.
On donne ci-dessous la courbe représentative $\mathcal{C}_f$ de la fonction f ainsi que la droite d d'équation $y = x$.



1. Sur l'axe des abscisses, on a placé u_0. Construire u_1, u_2 et u_3 en laissant apparents les traits de construction.
2. Quelles conjectures peut-on émettre sur le sens de variation et la convergence de (u_n) ?

3. Étudier les variations de f sur $\mathbb{R}$.
4. Démontrer par récurrence que la suite (u_n) est croissante et majorée par 2.
5. Justifier que (u_n) converge vers un réel L, puis déterminer L.

Exercice 29

Soit I l'intervalle $[0; 1]$ et f définie sur I par :

$$f(x) = \frac{3x+2}{x+4}.$$

1. Étudier les variations de f puis en déduire que, pour tout réel $x \in I$, $f(x)$ appartient à I.
2. On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 0$ et $u_{n+1} = f(u_n)$ pour tout entier naturel n. Montrer que, pour tout entier naturel n, $u_n \in I$.
3. (a) Représenter graphiquement la fonction f dans un repère orthonormé d'unité graphique 10 cm ainsi que la droite d d'équation $y = x$.
   (b) Sur le graphique, placer u_0 sur l'axe des abscisses et construire u_1, u_2 et u_3.
   (c) Conjecturer graphiquement le sens de variation et la convergence de (u_n) ?
4. (a) À l'aide des variations de la fonction f sur $[0; 1]$, déterminer le sens de variation de la suite (u_n).
   (b) Justifier que la suite (u_n) est convergente et déterminer sa limite.

Exercice 30

Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = 1$ et pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = f(u_n)$ où f est la fonction définie sur $[0; +\infty[$ par :

$$f(x) = \sqrt{2+x}.$$

Indiquer si les affirmations sont vraies ou fausses, puis justifier.

1. $u_2 = 2$.
2. La suite (u_n) est croissante et majorée.
3. La limite de (u_n) est -1.

Exercice 31

Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = 2$ et $u_{n+1} = f(u_n)$ pour tout entier naturel n où f est la fonction définie sur $[1; +\infty[$ par :

$$f(x) = \sqrt{1+x}.$$

On admet que (u_n) est bien définie.

1. Étudier les variations de f sur $[1; +\infty[$.
2. Montrer que la suite (u_n) est décroissante et minorée par 1.
3. En déduire que (u_n) converge.
4. Déterminer la limite de (u_n).