

## Notion d'équation différentielle

### Exercice 1



- $F'(x) = 8x + 1$ .
- On a  $F'(x) = 8x + 1$ , donc  $f$  vérifie bien l'équation différentielle  $y' = 8x + 1$ .

### Exercice 2



- $u'(x) = 3$  et  $v'(x) = 3$ .
- On a  $u'(x) = 3$  et  $v'(x) = 3$ , donc  $u$  et  $v$  vérifient bien  $y' = 3$ .
- Par exemple :  $w(x) = 3x$  ou  $w(x) = 3x + 1$  (toute fonction de la forme  $w(x) = 3x + C$  avec  $C \in \mathbb{R}$ ).

### Exercice 3



On calcule  $g'(x) = -3e^{-3x}$ . Vérifions :  $g'(x) + 3g(x) = -3e^{-3x} + 3(4 + e^{-3x}) = -3e^{-3x} + 12 + 3e^{-3x} = 12$ . Donc  $g$  est bien solution de l'équation  $y' + 3y = 12$ .

## Primitives d'une fonction ( $y' = f$ )

### Exercice 4



- On utilise la formule  $(uv)' = u'v + uv'$  avec  $u(x) = x$  et  $v(x) = e^{3x}$ .  

$$F'(x) = 1 \cdot e^{3x} + x \cdot 3e^{3x} = e^{3x} + 3xe^{3x} = (1+3x)e^{3x} = f(x)$$
- On peut en déduire que  $F$  est une primitive de  $f$  sur  $\mathbb{R}$ .

### Exercice 5



- On calcule  $F'(x)$  avec la formule  $(uv)' = u'v + uv'$  :  

$$F'(x) = 1 \cdot \ln(x) + x \cdot \frac{1}{x} = \ln(x) + 1 = f(x)$$

Donc  $F$  est bien une primitive de  $f$  sur  $\mathbb{R}_+$ .
- Par exemple :  $G(x) = x \ln(x) + 1$  ou  $H(x) = x \ln(x) - 5$  (toute fonction de la forme  $x \ln(x) + C$  avec  $C \in \mathbb{R}$ ).

### Exercice 6



- Vrai.**  $(F + G)' = F' + G' = f + g$ .
- Faux.**  $(FG)' = F'G + FG' = fG + Fg \neq fg$  en général.
- Vrai.**  $(-F)' = -F' = -f$ .
- Faux.**  $(F^2)' = 2FF' = 2Ff \neq f^2$  en général.

### Exercice 7



- Une primitive de  $f$  sur  $\mathbb{R}$  est  $F(x) = x^3$  (ou  $F(x) = x^3 + C$  avec  $C \in \mathbb{R}$ ).

- On cherche  $F(x) = x^3 + C$  telle que  $F(1) = 0$ .  
 $F(1) = 1 + C = 0 \Rightarrow C = -1$ . La primitive cherchée est  $F(x) = x^3 - 1$ .

### Exercice 8



- $u(x) = \frac{1}{x^5} = x^{-5}$  avec  $n = -5$ .
- Une primitive de  $u(x) = x^{-5}$  est  $U(x) = \frac{x^{-4}}{-4} = -\frac{1}{4x^4}$ .  
 Donc  $k = -\frac{1}{4}$ .

### Exercice 9



- $f(x) = x^{-2}$ , donc  $F(x) = \frac{x^{-1}}{-1} = -\frac{1}{x}$ .
- $g(x) = x^{-3}$ , donc  $G(x) = \frac{x^{-2}}{-2} = -\frac{1}{2x^2}$ .
- $h(x) = 2x^{-3}$ , donc  $H(x) = 2 \cdot \frac{x^{-2}}{-2} = -\frac{1}{x^2}$ .

### Exercice 10



- Une primitive de  $f(x) = 2e^{2x}$  est  $F(x) = e^{2x}$ .
- Pour  $g(x) = e^{2x}$  :  $G(x) = \frac{1}{2}e^{2x}$ .  
 Pour  $h(x) = e^{ax}$  avec  $a \neq 0$  :  $H(x) = \frac{1}{a}e^{ax}$ .

### Exercice 11



- Posons  $u(x) = x^2$ . Alors  $u'(x) = 2x$  et  $f(x) = u'(x)e^{u(x)}$ .
- Une primitive de  $u'e^u$  est  $e^u$ , donc  $F(x) = e^{x^2}$ .

### Exercice 12



- Posons  $u(x) = \sin(x)$ . Alors  $u'(x) = \cos(x)$  et  $f(x) = u(x)^2 u'(x)$ .
- Une primitive de  $u^2 u'$  est  $\frac{u^3}{3}$ , donc  $F(x) = \frac{\sin^3(x)}{3}$ .

### Exercice 13



- On calcule  $g'(x) = -\sin(x) + \sin(x) + x \cos(x) = x \cos(x) = f(x)$ .  
 Donc  $g$  est une primitive de  $f$  sur  $\mathbb{R}$ .
- Toutes les primitives de  $f$  sont de la forme  $F(x) = \cos(x) + x \sin(x) + C$  avec  $C \in \mathbb{R}$ .

### Exercice 14



- Vrai.** Toute fonction continue sur  $\mathbb{R}$  admet des primitives sur  $\mathbb{R}$ . (propriété du cours)
- Vrai.** Toute fonction dérivable est continue.
- Vrai.** Une primitive est par définition dérivable, donc continue.

4. **Vrai.** Une primitive de  $f'$  est  $f + C$  avec  $C \in \mathbb{R}$ , donc en particulier  $f + 10$ .

### Exercice 15



1.  $g(x) = f''(x) + 2f'(x)$ . Une primitive est  $G(x) = f'(x) + 2f(x)$ .

2.  $h(x) = f'(-x)$ . Une primitive est  $H(x) = -f(-x)$ .

### Exercice 16



On a :

- $F$  est croissante sur  $[-3; -1]$ , donc  $F' > 0$  sur cet intervalle.
- $F$  est croissante sur  $[3; 5]$ , donc  $F' > 0$  sur cet intervalle.

Ces critères sont vérifiés par la fonction associée à la courbe 1, mais pas celle de la courbe 2.

### Exercice 17



On observe que :

- $F$  est croissante sur  $]-\infty; -1]$  et sur  $[1; +\infty[$ , donc  $f(x) = F'(x) \geq 0$  sur  $]-\infty; -1]$  et sur  $[1; +\infty[$ .
- $F$  est décroissante sur  $[-1; 1]$ , donc  $f(x) = F'(x) \leq 0$  sur  $[-1; 1]$ .
- $F$  atteint un minimum en  $x = 1$ , donc  $F'(1) = f(1) = 0$ .
- $F$  atteint un maximum en  $x = -1$ , donc  $F'(-1) = f(-1) = 0$ .

Réponses :

1. **Faux.**  $f(0) \neq 0$  car la tangente n'est pas horizontale.
2. **Vrai.**  $f(1) = 0$ .
3. **Faux.**  $f(x) \leq 0$  sur  $[-1; 0]$ .
4. **Vrai.**  $f(x) \geq 0$  sur  $[0; 1]$ .

### Exercice 18



#### Logique

1. **Vrai.** Si  $f \geq 0$  sur  $\mathbb{R}$ , alors  $F' = f \geq 0$ , donc  $F$  est croissante sur  $\mathbb{R}$ .

2. La réciproque est : « si  $F$  est croissante sur  $\mathbb{R}$ , alors  $f$  est positive sur  $\mathbb{R}$  ».

Cette réciproque est **vraie**. En effet, si  $F$  est croissante, alors  $F' \geq 0$ , c'est-à-dire  $f \geq 0$ .

### Exercice 19



1.  $F(x) = \frac{5x^4}{4} - \frac{3x^2}{2} + 7x$  et  $G(x) = \frac{2x^5}{5} - \frac{x^4}{8}$
2.  $F(x) = \frac{x^6}{6} - \frac{x^2}{2}$  et  $G(x) = \frac{4x^5}{5} - \frac{7x^2}{2} + \sqrt{2}x$
3.  $F(x) = 2 \sin(x) + 3 \cos(x)$  et  $G(x) = 10x - 3e^x + \frac{x^2}{2}$

4.  $f(x) = x^2 + x - 2$ , donc  $F(x) = \frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} - 2x$

$g(x) = 4x^2 + 4x + 1$ , donc  $G(x) = \frac{4x^3}{3} + 2x^2 + x$

5.  $F(x) = \frac{x^3}{15} + \frac{x}{6}$  et  $G(x) = \frac{12,4x^{10}}{10} - x^7 + 3x^5$

### Exercice 20



1.  $F(x) = \frac{3x^2}{2} + x + \ln(x)$  et  $G(x) = \frac{x^3}{3} - \frac{4}{x}$

2.  $F(x) = \frac{x^2}{2} - \frac{1}{2x^2}$  et  $G(x) = \frac{x^2}{2} - \frac{1}{2} \ln(x)$

3.  $f(x) = 7x^{-3}$ , donc  $F(x) = -\frac{7}{2x^2}$   
 $g(x) = 4x^{-1} - 3x^{-2} + x^{-4}$ , donc  $G(x) = 4 \ln(x) + \frac{3}{x} - \frac{1}{3x^3}$

4.  $f(x) = x^{-1} + 5x^{-2}$ , donc  $F(x) = \ln(x) - \frac{5}{x}$

$g(x) = x - 1 + 2x^{-1}$ , donc  $G(x) = \frac{x^2}{2} - x + 2 \ln(x)$

5.  $f(x) = 3 - 11x^{-2}$ , donc  $F(x) = 3x + \frac{11}{x}$

$g(x) = 5x^{-1/2} - x + 6$ , donc  $G(x) = 10\sqrt{x} - \frac{x^2}{2} + 6x$

6.  $f(x) = 4x^{-2} - \frac{1}{\sqrt{x}}$ , donc  $F(x) = -\frac{4}{x} - 2\sqrt{x}$

$g(x) = \frac{1}{\sqrt{x}} + x^2$ , donc  $G(x) = 2\sqrt{x} + \frac{1}{3}x^3$

### Exercice 21



Déterminer une primitive de chacune des fonctions  $f$  et  $g$  définies sur  $\mathbb{R}$  par leurs expressions.

1.  $f(x) = 3e^{3x+4}$  et  $g(x) = xe^{x^2-3}$

- $f$  est de la forme  $u'e^u$  :

$$f(x) = 3e^{3x+4} = \underbrace{3}_{u'} e^{\underbrace{3x+4}_{u}}$$

Donc une primitive est

$$F(x) = e^u + k = e^{3x+4} + k.$$

- $g$  est de la forme  $u'e^u$  :

$$g(x) = xe^{x^2-3} = \frac{1}{2} \underbrace{2x}_{u'} e^{\underbrace{x^2-3}_{u}}$$

Donc une primitive est

$$G(x) = \frac{1}{2} e^u + k = \frac{1}{2} e^{x^2-3} + k.$$

2.  $f(x) = x^2e^{-3}$  et  $g(x) = \frac{e^x}{e^x + 4}$

- $f$  est de la forme  $ax^n$  (avec  $a = e^{-3}$  et  $n = 2$ ) :

$$f(x) = x^2e^{-3} = e^{-3}x^2$$

Donc une primitive est

$$F(x) = e^{-3} \frac{x^3}{3} + k.$$

- $g$  est de la forme  $\frac{u'}{u}$  :

$$g(x) = \frac{e^x}{e^x + 4} = \frac{\overbrace{e^x}^{u'}}{\underbrace{e^x + 4}_u}$$

Donc une primitive est

$$G(x) = \ln|u| + k = \ln(e^x + 4) + k.$$

$$3. f(x) = 5e^{4-x} \quad \text{et} \quad g(x) = \frac{4x^3}{x^4 + 5}$$

- $f$  est de la forme  $u'e^u$  :

$$f(x) = 5e^{4-x} = 5e^{\overbrace{4-x}^{u}} = -5\underbrace{(-1)}_{u'} e^{\overbrace{4-x}^u}$$

Donc une primitive est

$$F(x) = -5e^u + k = -5e^{4-x} + k.$$

- $g$  est de la forme  $\frac{u'}{u}$  :

$$g(x) = \frac{4x^3}{x^4 + 5} = \frac{\overbrace{4x^3}^{u'}}{\underbrace{x^4 + 5}_u}$$

Donc une primitive est

$$G(x) = \ln|u| + k = \ln(x^4 + 5) + k.$$

$$4. f(x) = 4x(3x^2 - 8)^2 \quad \text{et} \quad g(x) = \frac{3x^2}{\sqrt{x^3 + 3}}$$

- $f$  est de la forme  $u'u^n$  (avec  $n = 2$ ) :

$$f(x) = 4x(3x^2 - 8)^2 = \frac{2}{3} \underbrace{6x}_{u'} \underbrace{(3x^2 - 8)^2}_u$$

Donc une primitive est

$$F(x) = \frac{2}{3} \frac{u^3}{3} + k = \frac{2}{9}(3x^2 - 8)^3 + k.$$

- $g$  est de la forme  $\frac{u'}{\sqrt{u}}$  :

$$g(x) = \frac{3x^2}{\sqrt{x^3 + 3}} = \frac{\overbrace{3x^2}^{u'}}{\underbrace{\sqrt{x^3 + 3}}_{\sqrt{u}}}$$

Donc une primitive est

$$G(x) = 2\sqrt{u} + k = 2\sqrt{x^3 + 3} + k.$$

$$5. f(x) = e^x(e^x + 4)^3 \quad \text{et} \quad g(x) = (2x - 1)^4$$

- $f$  est de la forme  $u'u^n$  (avec  $n = 3$ ) :

$$f(x) = e^x(e^x + 4)^3 = \underbrace{e^x}_{u'} \underbrace{(e^x + 4)^3}_u$$

Donc une primitive est

$$F(x) = \frac{u^4}{4} + k = \frac{(e^x + 4)^4}{4} + k.$$

- $g$  est de la forme  $u^n$  :

$$g(x) = (2x - 1)^4 = \frac{1}{2} \underbrace{2}_{u'} \underbrace{(2x - 1)^4}_u$$

Donc une primitive est

$$G(x) = \frac{1}{2} \frac{u^5}{5} + k = \frac{(2x - 1)^5}{10} + k.$$

$$6. f(x) = \sin(3x) - \cos(2x) ; \quad g(x) = \sin\left(5x + \frac{\pi}{4}\right)$$

- $f$  est de la forme  $u'\sin(u) - v'\cos(v)$  :

$$f(x) = \frac{1}{3} \times 3 \sin(3x) - \frac{1}{2} \times 3 \cos(2x)$$

Donc une primitive est

$$F(x) = \frac{1}{3} \times -\cos(u) - \frac{1}{2} \times \sin(u)$$

$$F(x) = -\frac{1}{3} \cos(3x) - \frac{1}{2} \sin(2x) + k.$$

- $g$  est de la forme  $u'\sin(u)$  :

$$g(x) = \sin\left(5x + \frac{\pi}{4}\right) = \underbrace{\frac{5}{u'}}_{u'} \underbrace{\sin\left(5x + \frac{\pi}{4}\right)}_u$$

Donc une primitive est

$$G(x) = -\frac{1}{5} \cos(u) + k = -\frac{1}{5} \cos\left(5x + \frac{\pi}{4}\right) + k.$$

$$7. f(x) = \sin(x)\cos(x) \quad \text{et} \quad g(x) = \sin(x)\cos^2(x)$$

- $f$  est de la forme  $u'u$  :

$$f(x) = \sin(x)\cos(x) = \underbrace{\cos(x)}_{u'} \underbrace{\sin(x)}_u$$

Donc une primitive est

$$F(x) = \frac{u^2}{2} + k = \frac{\sin^2(x)}{2} + k.$$

- $g$  est de la forme  $u'u^n$  (avec  $n = 2$ ) :

$$g(x) = \sin(x)\cos^2(x) = -\underbrace{(-\sin(x))}_{u'} \underbrace{(\cos(x))^2}_u$$

Donc une primitive est

$$G(x) = -\frac{u^3}{3} + k = -\frac{\cos^3(x)}{3} + k.$$

$$8. f(x) = \cos(x)e^{\sin(x)} ; \quad g(x) = \sin(x)(1 - \cos(x))^3$$

- $f$  est de la forme  $u'e^u$  :

$$f(x) = \cos(x)e^{\sin(x)} = \underbrace{\cos(x)}_{u'} e^{\underbrace{\sin(x)}_u}$$

Donc une primitive est

$$F(x) = e^u + k = e^{\sin(x)} + k.$$

- $g$  est de la forme  $u'u^n$  (avec  $n = 3$ ) :

$$g(x) = \sin(x)(1 - \cos(x))^3 = \underbrace{\sin(x)}_{u'} \left( \underbrace{1 - \cos(x)}_u \right)^3$$

Donc une primitive est

$$G(x) = \frac{u^4}{4} + k = \frac{(1 - \cos(x))^4}{4} + k.$$

$$9. f(x) = \frac{4x+2}{x^2+x+1} \quad \text{et} \quad g(x) = \frac{x-1}{(x^2-2x+4)^2}$$

- $f$  est de la forme  $\frac{u'}{u}$  :

$$f(x) = \frac{4x+2}{x^2+x+1} = 2 \frac{\overbrace{2x+1}^{u'}}{\underbrace{x^2+x+1}_u}$$

Donc une primitive est

$$F(x) = 2 \ln |u| + k = 2 \ln(x^2 + x + 1) + k.$$

- $g$  est de la forme  $\frac{u'}{u^2}$  :

$$g(x) = \frac{x-1}{(x^2-2x+4)^2} = \frac{1}{2} \frac{\overbrace{2(x-1)}^{u'}}{\underbrace{(x^2-2x+4)}_u^2}$$

Donc une primitive est

$$G(x) = \frac{1}{2} \times \frac{-1}{u} + k = -\frac{1}{2(x^2-2x+4)} + k.$$

$$10. f(x) = \frac{1}{e^x} \quad \text{et} \quad g(x) = \frac{3}{e^{-x}(e^x+1)}$$

- $f$  est de la forme  $e^u u'$  :

$$f(x) = \frac{1}{e^x} = e^{-x} = - \underbrace{(-1)}_{u'} e^{\overbrace{-x}^u}$$

Donc une primitive est

$$F(x) = -e^u + k = -e^{-x} + k.$$

- $g$  se simplifie puis est de la forme  $\frac{u'}{u}$  :

$$g(x) = \frac{3}{e^{-x}(e^x+1)} = \frac{3e^x}{e^x+1} = 3 \frac{\overbrace{e^x}^{u'}}{\underbrace{e^x+1}_u}$$

Donc une primitive est

$$G(x) = 3 \ln |u| + k = 3 \ln(e^x+1) + k.$$

### Exercice 22

Déterminer une primitive de la fonction  $f$  sur l'intervalle indiqué.

$$1. f(x) = \frac{2}{x}(\ln(x)+2)^2 \quad \text{sur } I = ]0; +\infty[$$

- $f$  est de la forme  $u'u^n$  (avec  $n = 2$ ) :

$$f(x) = \frac{2}{x}(\ln(x)+2)^2 = 2 \underbrace{\frac{1}{x}}_{u'} (\underbrace{\ln(x)+2}_u)^2$$

Donc une primitive est

$$F(x) = \frac{2}{3}u^3 + k = \frac{2}{3}(\ln(x)+2)^3 + k.$$

$$2. f(x) = \frac{2}{(3x-1)^2} + \frac{1}{3x-1} \quad \text{sur } I = ]\frac{1}{3}; +\infty[$$

- On traite terme à terme :

$$f(x) = \frac{2}{(3x-1)^2} + \frac{1}{3x-1}$$

- $\frac{2}{(3x-1)^2}$  est de la forme  $\frac{u'}{u^2}$  :

$$\frac{2}{(3x-1)^2} = \frac{2}{3} \frac{\overbrace{3}^{u'}}{\underbrace{(3x-1)}_u^2}$$

Donc une primitive de ce terme est

$$-\frac{2}{3} \frac{1}{u} + k = -\frac{2}{3(3x-1)} + k.$$

- $\frac{1}{3x-1}$  est de la forme  $\frac{u'}{u}$  :

$$\frac{1}{3x-1} = \frac{1}{3} \frac{\overbrace{3}^{u'}}{\underbrace{3x-1}_u}$$

Donc une primitive de ce terme est

$$\frac{1}{3} \ln(u) + k = \frac{1}{3} \ln(3x-1) + k.$$

- Ainsi, une primitive de  $f$  sur  $I$  est

$$F(x) = -\frac{2}{3(3x-1)} + \frac{1}{3} \ln(3x-1) + k.$$

$$3. f(x) = \frac{\ln(x)}{x} \quad \text{sur } I = ]0; +\infty[$$

- $f$  est de la forme  $u'u$  :

$$f(x) = \frac{\ln(x)}{x} = \underbrace{\frac{1}{x}}_{u'} \underbrace{\ln(x)}_u$$

Donc une primitive est

$$F(x) = \frac{u^2}{2} + k = \frac{(\ln(x))^2}{2} + k.$$

$$4. f(x) = \frac{1}{x \ln(x)} \quad \text{sur } I = ]1; +\infty[$$

- $f$  est de la forme  $\frac{u'}{u}$  :

$$f(x) = \frac{1}{x \ln(x)} = \underbrace{\frac{1}{x}}_{u'} \underbrace{\frac{1}{\ln(x)}}_u$$

Donc une primitive est

$$F(x) = \ln |u| + k = \ln(\ln(x)) + k$$

(sur  $I = ]1; +\infty[$ , on a  $\ln(x) > 0$ , donc  $\ln(\ln(x))$  est bien défini).

$$5. f(x) = \frac{-3 - e^x}{(e^x + 3x)^2} \quad \text{sur } I = [0; +\infty[$$

- $f$  est de la forme  $\frac{u'}{u^2}$  :

$$f(x) = \frac{-3 - e^x}{(e^x + 3x)^2} = -\frac{\underbrace{e^x + 3}_{u'}}{\underbrace{(e^x + 3x)^2}_{u}}$$

Donc une primitive est

$$F(x) = \frac{1}{u} + k = \frac{1}{e^x + 3x} + k.$$

$$6. f(x) = \frac{-7}{x(\ln(x) + 3)} \quad \text{sur } I = ]e^{-3}; +\infty[$$

- $f$  est de la forme  $\frac{u'}{u}$  :

$$f(x) = \frac{-7}{x(\ln(x) + 3)} = -7 \underbrace{\frac{1}{x}}_{u'} \underbrace{\frac{1}{\ln(x) + 3}}_u$$

Donc une primitive est

$$F(x) = -7 \ln |u| + k = -7 \ln(\ln(x) + 3) + k.$$

(sur  $I = ]e^{-3}; +\infty[$ , on a  $\ln(x) + 3 > 0$ , donc  $\ln(\ln(x) + 3)$  est défini).

$$7. f(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)} \quad \text{sur } I = ]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}[$$

- $f$  est de la forme  $\frac{u'}{u}$  :

$$f(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)} = -\underbrace{\frac{-\sin(x)}{\cos(x)}}_u$$

Donc une primitive est

$$F(x) = -\ln |u| + k = -\ln(\cos(x)) + k$$

(sur  $I = ]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}[$ , on a  $\cos(x) > 0$ , donc  $-\ln(\cos(x))$  convient).

$$8. f(x) = \frac{\cos(x)}{\sqrt{\sin(x)}} \quad \text{sur } I = ]0; \pi[$$

- $f$  est de la forme  $\frac{u'}{\sqrt{u}}$  :

$$f(x) = \frac{\cos(x)}{\sqrt{\sin(x)}} = \underbrace{\frac{\cos(x)}{\sqrt{\sin(x)}}}_u$$

Donc une primitive est

$$F(x) = 2\sqrt{u} + k = 2\sqrt{\sin(x)} + k.$$

$$9. f(x) = \frac{2}{x^2} e^{-\frac{1}{x}} \quad \text{sur } I = ]0; +\infty[$$

- $f$  est de la forme  $u'e^u$  :

$$f(x) = \frac{2}{x^2} e^{-\frac{1}{x}} = 2 \underbrace{\frac{1}{x^2}}_{u'} e^{-\frac{1}{x}}$$

Or  $(-\frac{1}{x})' = \frac{1}{x^2}$ , donc une primitive est

$$F(x) = 2e^u + k = 2e^{-\frac{1}{x}} + k.$$

### Exercice 23



1. Les solutions de (E) sont les fonctions  $f(x) = \frac{x^2}{2} + \cos(x) + C$  avec  $C \in \mathbb{R}$ .

2. On cherche  $C$  tel que  $f(0) = 2$  :

$$f(0) = 0 + 1 + C = 2 \Rightarrow C = 1.$$

$$\text{Donc } f(x) = \frac{x^2}{2} + \cos(x) + 1.$$

**Équation différentielles  $y' = ay$**

### Exercice 24



(a)  $y' = 5y$  avec  $a = 5$

(b)  $y' = -\frac{4}{3}y$  avec  $a = -\frac{4}{3}$

(c)  $y' = \frac{1}{2}y$  avec  $a = \frac{1}{2}$

(d)  $y' = \pi y$  avec  $a = \pi$

**Exercice 25**

1.  $2y' = 5y \Rightarrow y' = \frac{5}{2}y$  avec  $a = \frac{5}{2}$ .

2. Les solutions sont  $y(x) = Ce^{\frac{5}{2}x}$  avec  $C \in \mathbb{R}$ .

**Exercice 26**

1. Les solutions sont  $y(x) = Ce^x$  avec  $C \in \mathbb{R}$ .

2. On cherche  $f$  telle que  $f(0) = 1$ :

$$f(0) = Ce^0 = C = 1.$$

Donc  $f(x) = e^x$ , qui est bien la fonction exponentielle.

**Exercice 27**

(a)  $y(x) = Ce^{-2x}$  avec  $C \in \mathbb{R}$

(b)  $y' = \frac{2}{3}y$ , donc  $y(x) = Ce^{\frac{2}{3}x}$  avec  $C \in \mathbb{R}$

(c)  $y' = 0,1y$ , donc  $y(x) = Ce^{0,1x}$  avec  $C \in \mathbb{R}$

(d)  $y' = -\ln(2)y$ , donc  $y(x) = Ce^{-\ln(2)x} = C \cdot 2^{-x}$  avec  $C \in \mathbb{R}$

**Exercice 28**

(a)  $y(x) = Ce^{5x}$  et  $f(0) = C = 2$ , donc  $f(x) = 2e^{5x}$

(b)  $y' = -6y$ , donc  $y(x) = Ce^{-6x}$  et  $f(1) = Ce^{-6} = 1$ , d'où  $C = e^6$ .

$$\text{Donc } f(x) = e^{6-6x}$$

(c)  $y' = \frac{3}{2}y$ , donc  $y(x) = Ce^{\frac{3}{2}x}$  et  $f(4) = Ce^6 = 2$ , d'où  $C = 2e^{-6}$ .

$$\text{Donc } f(x) = 2e^{\frac{3}{2}x-6}$$

(d)  $y' = \frac{5}{2}y$ , donc  $y(x) = Ce^{\frac{5}{2}x}$  et  $f'(0) = \frac{5}{2}C = 5$ , d'où  $C = 2$ .

$$\text{Donc } f(x) = 2e^{\frac{5}{2}x}$$

**Exercice 29**

1. Les solutions de (E) sont  $N(t) = Ce^{at}$  avec  $C \in \mathbb{R}$ .

2. On a  $N(0) = C = 10^5$  et  $N(60) = 10^5 e^{60a} = 5000$ .

Donc  $e^{60a} = 0,05$ , d'où  $60a = \ln(0,05)$  et  $a = \frac{\ln(0,05)}{60}$ .

$$\text{Ainsi } N(t) = 10^5 e^{\frac{\ln(0,05)}{60}t}.$$

**Exercice 30**

1. Les solutions sont  $N(t) = Ce^{-(\ln 100)t}$  avec  $C \in \mathbb{R}$ .

$$N(0) = C = 1500, \text{ donc } N(t) = \boxed{1500e^{-(\ln 100)t}} = 1500 \cdot 100^{-t} = \frac{1500}{100^t}.$$

2.  $N(1) = \frac{1500}{100} = 15$  tours par minute.

3. On cherche  $t$  tel que  $N(t) = 1$ :

$$\frac{1500}{100^t} = 1 \Rightarrow 100^t = 1500 \Rightarrow t = \frac{\ln(1500)}{\ln(100)} = \frac{\ln(1500)}{2 \ln(10)}.$$

Valeur exacte :  $t = \frac{\ln(1500)}{2 \ln(10)}$  minutes.

Valeur approchée :  $t \approx 1,59$  minute  $\approx 1$  min 35 s.

**Exercice 31**

1.  $(E_1) : y(x) = Ce^{2x}$  et  $(E_2) : y(x) = Ke^x$  avec  $C, K \in \mathbb{R}$ .

2.  $f_1(x) = Ce^{2x}$  et  $f'_1(x) = 2Ce^{2x}$ .

$$f'_1(0) = 2C = 4 \Rightarrow C = 2.$$

$$\text{Donc } f_1(x) = 2e^{2x}.$$

3.  $f_2(x) = Ke^x$  et  $f'_2(x) = Ke^x$ .

$$f'_2(0) = K = 1.$$

$$\text{Donc } f_2(x) = e^x.$$

4. (a)  $f(x) = 2e^{2x} - e^x$ , donc  $f'(x) = 4e^{2x} - e^x$ .

Étude du signe de  $f'(x)$ :  $f'(x) = e^x(4e^x - 1)$ .

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow e^x = \frac{1}{4} \Leftrightarrow x = -\ln(4).$$

$f'(x) > 0$  pour  $x > -\ln(4)$  et  $f'(x) < 0$  pour  $x < -\ln(4)$ .

Donc  $f$  est décroissante sur  $]-\infty; -\ln(4)]$  et croissante sur  $[-\ln(4); +\infty[$ .

(b)  $f(x) = 0 \Leftrightarrow 2e^{2x} = e^x \Leftrightarrow 2e^x = 1 \Leftrightarrow e^x = \frac{1}{2} \Leftrightarrow x = -\ln(2)$ .

**Exercice 32**

Soit  $M(x; y)$  un point de la courbe. Le coefficient directeur de la tangente en  $M$  est  $y'(x)$ .

On a donc l'équation différentielle  $y' = 3y$ .

Les solutions sont  $y(x) = Ce^{3x}$  avec  $C \in \mathbb{R}$ .

La courbe passe par  $A(-1; 2)$ , donc  $2 = Ce^{-3}$ , d'où  $C = 2e^3$ .

L'équation de la courbe est  $y = 2e^{3x+3} = 2e^3e^{3x}$ .

**Équation différentielles**  $y' = ay + b$

**Exercice 33**

1. La solution constante vérifie  $y' = 0$ , donc  $0 = 10y + 20$ , d'où  $y = -2$ .

2. L'équation homogène  $y' = 10y$  a pour solutions  $Ce^{10x}$ .

Les solutions de (E) sont donc de la forme  $y(x) = Ce^{10x} - 2$  avec  $C \in \mathbb{R}$ .

Vérification :  $y'(x) = 10Ce^{10x}$  et  $10y(x) + 20 = 10Ce^{10x} - 20 + 20 = 10Ce^{10x}$ .

**Exercice 34**

1. Les solutions de  $y' = -y$  sont  $y(x) = Ce^{-x}$  avec  $C \in \mathbb{R}$ .

2. La solution constante de (E) est  $y = 1$ .

Les solutions de (E) sont donc  $f(x) = Ce^{-x} + 1$  avec  $C \in \mathbb{R}$ .

Vérification :  $f'(x) = -Ce^{-x}$  et  $-f(x) + 1 = -Ce^{-x} - 1 + 1 = -Ce^{-x}$ .

### Exercice 35



1. La solution constante vérifie  $0 = -2y + 3$ , donc  $y = \frac{3}{2}$ .

2. Les solutions de  $y' = -2y$  sont  $Ce^{-2x}$ .

Les solutions de (E) sont  $y(x) = Ce^{-2x} + \frac{3}{2}$  avec  $C \in \mathbb{R}$ .

### Exercice 36



L'équation s'écrit  $y' = -3y + \frac{1}{2}$ .

La solution constante est  $y = \frac{1}{6}$ .

Les solutions générales sont  $f(x) = Ce^{-3x} + \frac{1}{6}$  avec  $C \in \mathbb{R}$ .

La courbe passe par  $A(2; 0)$ , donc  $0 = Ce^{-6} + \frac{1}{6}$ , d'où  $C = -\frac{e^6}{6}$ .

Ainsi  $f(x) = -\frac{e^6}{6}e^{-3x} + \frac{1}{6} = \frac{1}{6}(1 - e^{6-3x})$ .

### Exercice 37



1. L'équation différentielle est  $y' = -0,0002y + 0,02$ .

La solution constante est  $y = \frac{0,02}{0,0002} = 100$ .

Les solutions sont  $g(t) = Ce^{-0,0002t} + 100$  avec  $C \in \mathbb{R}$ .

$g(0) = C + 100 = 20$ , donc  $C = -80$ .

Ainsi  $g(t) = 100 - 80e^{-0,0002t}$ .

2. Au bout d'une heure ( $t = 3600$  s) :

$g(3600) = 100 - 80e^{-0,72} \approx 100 - 80 \times 0,4868 \approx 61,06^\circ C$ .

3. On cherche  $t$  tel que  $g(t) > 85$  :

$$100 - 80e^{-0,0002t} > 85$$

$$\Leftrightarrow -80e^{-0,0002t} > -15$$

$$\Leftrightarrow e^{-0,0002t} < \frac{3}{16}$$

$$\Leftrightarrow -0,0002t < \ln\left(\frac{3}{16}\right)$$

$$\Leftrightarrow t > \frac{\ln(15/80)}{-0,0002}$$

$$\Leftrightarrow t > 5000 \ln\left(\frac{16}{3}\right) \approx 8370 \text{ secondes.}$$

Soit 2 heures 19 minutes et 30 secondes.

## Équation différentielles $y' = ay + f$

1. Les solutions de  $y' = -2y$  sont  $y(x) = Ce^{-2x}$  avec  $C \in \mathbb{R}$ .

2. On vérifie :  $g'(x) = -0,4 \sin(x) + 0,2 \cos(x)$ .

Ainsi, on a :  $g'(x) + 2g(x) = -0,4 \sin(x) + 0,2 \cos(x) + 2 \times (0,4 \cos(x) + 0,2 \sin(x)) = -0,4 \sin(x) + 0,2 \cos(x) + 0,8 \cos(x) + 0,4 \sin(x) = \cos(x)$

Donc  $g$  est solution de (E).

3. Les solutions de (E) sont  $y(x) = Ce^{-2x} + 0,4 \cos(x) + 0,2 \sin(x)$  avec  $C \in \mathbb{R}$ .

### Exercice 39



1. On vérifie :  $u'(x) = e^{-x} - xe^{-x} = (1-x)e^{-x}$ .  
 $-u(x) + e^{-x} = -xe^{-x} + e^{-x} = (1-x)e^{-x} = u'(x)$ .  
Donc  $u$  est solution de (E).

2. Les solutions de  $y' = -y$  sont  $Ce^{-x}$ .

Les solutions de (E) sont  $y(x) = Ce^{-x} + xe^{-x} = (C+x)e^{-x}$  avec  $C \in \mathbb{R}$ .

### Exercice 40



1.  $g$  est solution de (E) si  $g'(x) + 2g(x) = x$ .  
 $g'(x) = a$  et  $g'(x) + 2g(x) = a + 2ax + 2b = x$ .  
Par identification :  $2a = 1$  et  $a + 2b = 0$ , d'où  $a = \frac{1}{2}$  et  $b = -\frac{1}{4}$ .

2. Les solutions de (E) sont  $y(x) = Ce^{-2x} + \frac{x}{2} - \frac{1}{4}$  avec  $C \in \mathbb{R}$ .

### Exercice 41



1.  $u$  est solution si  $u'(x) - 2u(x) = xe^x$ .

$$u'(x) = ae^x + (ax+b)e^x = (ax+a+b)e^x.$$

$$u'(x) - 2u(x) = (ax+a+b)e^x - 2(ax+b)e^x = (-ax+a-b)e^x = xe^x.$$

Par identification :  $-a = 1$  et  $a - b = 0$ , d'où  $a = -1$  et  $b = -1$ .

2. Les solutions de (E) sont  $y(x) = Ce^{2x} + (-x-1)e^x$  avec  $C \in \mathbb{R}$ .

3.  $y(0) = C - 1 = 0$ , donc  $C = 1$ .

La solution est  $y(x) = e^{2x} - (x+1)e^x$ .

### Exercice 42



1.  $u$  est solution si  $u'(x) - 2u(x) = 4x^2 - 4x$ .

$$u'(x) = 2ax+b \text{ et } u'(x) - 2u(x) = 2ax+b - 2ax^2 - 2bx - 2c = -2ax^2 + (2a-2b)x + (b-2c).$$

Par identification :  $-2a = 4$ ,  $2a - 2b = -4$  et  $b - 2c = 0$ .

D'où  $a = -2$ ,  $b = 0$  et  $c = 0$ .

Donc  $u(x) = -2x^2$ .

2. Les solutions sont  $y(x) = Ce^{2x} - 2x^2$  avec  $C \in \mathbb{R}$ .

3.  $f'(x) = 2Ce^{2x} - 4x$  et  $f'(1) = 2Ce^2 - 4 = 2$ .

Donc  $2Ce^2 = 6$ , d'où  $C = 3e^{-2}$ .

La solution est  $f(x) = 3e^{2x-2} - 2x^2$ .

## Synthèse

### Exercice 43



1. Soit  $g(x) = h(x)e^{-x}$ .

(a)  $g'(x) = h'(x)e^{-x} - h(x)e^{-x} = (h'(x) - h(x))e^{-x}$ .

$g$  est solution de  $(E_n)$  si  $g'(x) + g(x) = \frac{x^n}{n!}e^{-x}$ .  
 $(h'(x) - h(x))e^{-x} + h(x)e^{-x} = h'(x)e^{-x} = \frac{x^n}{n!}e^{-x}$ .

Donc  $g$  est solution si et seulement si  $h'(x) = \frac{x^n}{n!}$ .

(b) Une primitive de  $\frac{x^n}{n!}$  est  $h(x) = \frac{x^{n+1}}{(n+1)!}$ .

Une solution particulière de  $(E_n)$  est donc  $g(x) = \frac{x^{n+1}}{(n+1)!}e^{-x}$ .

2. (a) Les solutions de  $y' = -y$  sont  $Ce^{-x}$ .

Les solutions de  $(E_n)$  sont  $y(x) = Ce^{-x} + \frac{x^{n+1}}{(n+1)!}e^{-x}$  avec  $C \in \mathbb{R}$ .

(b)  $f(0) = C = 0$ , donc  $f(x) = \frac{x^{n+1}}{(n+1)!}e^{-x}$ .

3. **Initialisation :** Pour  $n = 1$ ,  $f_1$  est solution de  $y' + y = f_0 = e^{-x}$  avec  $f_1(0) = 0$ .

D'après la question 2.b,  $f_1(x) = \frac{x^1}{1!}e^{-x} = xe^{-x}$ . La propriété est vraie au rang 1.

**Héritéité :** Supposons que  $f_n(x) = \frac{x^n}{n!}e^{-x}$  pour un certain  $n \geq 1$ .

$f_{n+1}$  est solution de  $y' + y = f_n = \frac{x^n}{n!}e^{-x}$  avec  $f_{n+1}(0) = 0$ .

C'est l'équation  $(E_n)$ , donc d'après la question 2.b :

$$f_{n+1}(x) = \frac{x^{n+1}}{(n+1)!}e^{-x}.$$

La propriété est vraie au rang  $n+1$ .

**Conclusion :** Par récurrence, pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ ,  $f_n(x) = \frac{x^n}{n!}e^{-x}$ .