

Conjecture à la calculatrice

Exercice 1



1. En 2021 : $30000 \times 0,9 + 10000 = 27000 + 10000 = 37000$ abonnés.

En 2022 : $37000 \times 0,9 + 10000 = 33300 + 10000 = 43300$ abonnés.

2. (a) $u_0 = 30$ (milliers), $u_1 = 37$ (milliers), $u_2 = 43,3$ (milliers).

(b) On a la relation de récurrence : $u_{n+1} = 0,9u_n + 10$.

À la calculatrice :

$$u_{10} \approx 89,3 \text{ milliers} \quad (1)$$

$$u_{20} \approx 98,8 \text{ milliers} \quad (2)$$

$$u_{50} \approx 100,0 \text{ milliers} \quad (3)$$

(c) On conjecture que $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 100$ milliers.

Exercice 2



1. $u_n = (-1)^n \times n$: Cette suite oscille entre des valeurs positives et négatives de plus en plus grandes. Elle n'admet pas de limite.

2. $v_n = \frac{6n-3}{n+5}$: Pour de grandes valeurs de n , on observe que v_n se rapproche de 6. On conjecture $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = 6$.

3. $w_n = n^2 - 2n$: Cette suite croît vers l'infini. On conjecture $\lim_{n \rightarrow +\infty} w_n = +\infty$.

4. $z_0 = 1, z_{n+1} = \frac{1}{2}z_n + 1$: On calcule quelques termes et on observe une convergence vers 2. On conjecture $\lim_{n \rightarrow +\infty} z_n = 2$.

5. $t_n = 0,9^n$: Cette suite géométrique de raison $0,9 < 1$ converge vers 0. On conjecture $\lim_{n \rightarrow +\infty} t_n = 0$.

Définition de la limite

Exercice 3



1. On conjecture que $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = 2$.

2. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $0,7^n > 0$, donc $v_n = 2 + 0,7^n > 2$.

3. À la calculatrice :

(a) $v_n < 2,1 \Leftrightarrow 0,7^n < 0,1$. Le plus petit entier n tel que cette condition soit vérifiée est $n = 7$.

(b) $v_n < 2,01 \Leftrightarrow 0,7^n < 0,01$. Le plus petit entier n est $n = 13$.

(c) $v_n < 2,001 \Leftrightarrow 0,7^n < 0,001$. Le plus petit entier n est $n = 20$.

Exercice 4



1. On conjecture que $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = -\infty$.

2. À la calculatrice :

(a) $u_n < -10 \Leftrightarrow -n^2 + 5 < -10 \Leftrightarrow n^2 > 15$. Le plus petit entier n est $n = 4$.

(b) $u_n < -100 \Leftrightarrow n^2 > 105$. Le plus petit entier n est $n = 11$.

(c) $u_n < -1000 \Leftrightarrow n^2 > 1005$. Le plus petit entier n est $n = 32$.

3. Par le calcul :

(a) $u_n < -10 \Leftrightarrow n^2 > 15 \Leftrightarrow n \geq 4$ (car $\sqrt{15} \approx 3,87$).

(b) $u_n < -100 \Leftrightarrow n^2 > 105 \Leftrightarrow n \geq 11$ (car $\sqrt{105} \approx 10,25$).

(c) $u_n < -1000 \Leftrightarrow n^2 > 1005 \Leftrightarrow n \geq 32$ (car $\sqrt{1005} \approx 31,70$).

Exercice 5



1. $u_n > 1000 \Leftrightarrow 3n - 5 > 1000 \Leftrightarrow n > \frac{1005}{3} = 335$. Donc à partir du rang $n = 336$.

$$u_n > 10^6 \Leftrightarrow 3n - 5 > 10^6 \Leftrightarrow n > \frac{10^6+5}{3} \approx 333333,67. \text{ Donc à partir du rang } n = 333334.$$

2. **Définition** : Une suite (u_n) diverge vers $+\infty$ si pour tout réel $A > 0$, il existe un entier naturel N tel que pour tout $n \geq N$, on a $u_n > A$.

Démonstration : Soit $A > 0$. On cherche N tel que pour $n \geq N$, $u_n > A$. $u_n > A \Leftrightarrow 3n - 5 > A \Leftrightarrow n > \frac{A+5}{3}$.

Il suffit de prendre $N = \lfloor \frac{A+5}{3} \rfloor + 1$. Ainsi, (u_n) diverge vers $+\infty$.

Exercice 6



1. $v_n \in]1,99; 2,01[\Leftrightarrow |v_n - 2| < 0,01 \Leftrightarrow \frac{1}{n^2} < 0,01 \Leftrightarrow n^2 > 100 \Leftrightarrow n \geq 10$.

2. **Définition** : Une suite (v_n) converge vers l si pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un entier naturel N tel que pour tout $n \geq N$, on a $|v_n - l| < \varepsilon$.

Démonstration : Soit $\varepsilon > 0$. On cherche N tel que pour $n \geq N$, $|v_n - 2| < \varepsilon$. $|v_n - 2| = \frac{1}{n^2} < \varepsilon \Leftrightarrow n^2 > \frac{1}{\varepsilon} \Leftrightarrow n > \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}$.

Il suffit de prendre $N = \lfloor \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} \rfloor + 1$. Ainsi, (v_n) converge vers 2.

Exercice 7



Logique

1. Cette proposition est **vraie**. Si (u_n) converge vers l , alors pour $\varepsilon = 0,2$, il existe un rang N tel que pour tout $n \geq N$, $|u_n - l| < 0,2$, ce qui équivaut à $u_n \in]l - 0,2; l + 0,2[$.

2. (a) **Réciproque** : Si à partir d'un certain rang, tous les termes u_n appartiennent à $]l - 0,2; l + 0,2[$, alors la suite (u_n) converge vers l .

(b) Cette réciproque est **fausse**. Contre-exemple : $u_n = l + \frac{0,1}{n}$ pour $n \geq 1$. À partir du rang 1, tous les termes appartiennent à $]l - 0,2; l + 0,2[$ mais la suite converge vers l , pas nécessairement vers la valeur donnée.

BONUS. $(\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = l) \Rightarrow (\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geq N : |u_n - l| < \varepsilon) \Leftrightarrow (\exists N_0 \in \mathbb{N}, \forall n \geq N_0 : u_n \in]l - \varepsilon; l + \varepsilon[)$.

Exercice 8



Algorithmme

1. On conjecture que $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = 0$.

```
2. (a) n=0
      v=1
      while v >= 0.001:
          n=n+1
          v=1/(2*n+1)
      print(n)
```

- (b) $v_n < 0,001 \Leftrightarrow \frac{1}{2n+1} < 0,001 \Leftrightarrow 2n+1 > 1000 \Leftrightarrow n > 499,5$. Donc $n = 500$.

Exercice 9



Algorithmme

```
def demarrer_1():
    u=2
    n=0
    while u <= 4:
        n=n+1
        u=(2/3)*u+(1/3)*n+1
    return u
```

Exercice 10



Algorithmme

```
1. def appartient_intervalle(a):
    n = 1
    u = (4*n+1)/(n+1)
    while 4-a < u < 4+a:
        n = n + 1
        u = (4*n+1)/(n+1)
    return n
```

2. $u_n = \frac{4n+1}{n+1} = \frac{4(n+1)-3}{n+1} = 4 - \frac{3}{n+1}$. Quand $n \rightarrow +\infty$, $\frac{3}{n+1} \rightarrow 0$, donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 4$.

Opérations sur les limites

Exercice 11



1. $u_n = n^2 + n - 5$: Le terme de plus haut degré est n^2 , donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$.

$$2. v_n = n^2\sqrt{n} + 2 = n^{5/2} + 2 : \lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = +\infty.$$

$$3. w_n = -\frac{1}{2n-5} : \text{Quand } n \rightarrow +\infty, 2n-5 \rightarrow +\infty, \text{ donc } w_n \rightarrow 0^-. \text{ Ainsi } \lim_{n \rightarrow +\infty} w_n = 0.$$

Exercice 12



$$1. \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n^2} = 0, \text{ donc } \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{n^2} - 10 \right) = 0 - 10 = -10.$$

$$2. \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} = 0 \text{ et } \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} = 0, \text{ donc } \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{\sqrt{n}} \times \frac{1}{n} \right) = 0 \times 0 = 0.$$

$$3. \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} = 0, \text{ donc } \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{n} \right) = 1 + 0 = 1. \text{ Ainsi } \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{3}{1 + \frac{1}{n}} = \frac{3}{1} = 3.$$

Exercice 13



$$1. u_n = 3n^2 + 2n = n^2(3 + \frac{2}{n}) : \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty.$$

$$2. v_n = 2n + n\sqrt{n} = n(2 + \sqrt{n}) : \lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = +\infty.$$

$$3. w_n = -\frac{4}{2 + \frac{1}{n}} : \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(2 + \frac{1}{n} \right) = 2, \text{ donc } \lim_{n \rightarrow +\infty} w_n = -\frac{4}{2} = -2.$$

Exercice 14



$$1. u_n = n^2 + 2n - 4 : \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty.$$

$$2. v_n = -n^3 + 5 : \lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = -\infty.$$

$$3. w_n = \frac{5}{3 + \sqrt{n}} : \lim_{n \rightarrow +\infty} (3 + \sqrt{n}) = +\infty, \text{ donc } \lim_{n \rightarrow +\infty} w_n = 0.$$

$$4. a_n = n \times \sqrt{n} = n^{3/2} : \lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = +\infty.$$

Exercice 15



$$1. u_n = 2n - 1 : \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty.$$

$$2. v_n = -3 + \frac{5}{n+2} : \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{5}{n+2} = 0, \text{ donc } \lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = -3 + 0 = -3.$$

Exercice 16



$$1. u_n = \left(n + \frac{1}{n} \right) \left(\frac{1}{n^4} - 5 \right)$$

$$\text{On a } \lim \left(n + \frac{1}{n} \right) = +\infty \text{ et } \lim \left(\frac{1}{n^4} - 5 \right) = -5.$$

$$\text{Donc, par produit, } \lim u_n = -\infty.$$

$$2. v_n = \frac{3+n}{2+\frac{1}{n}}$$

$$\text{On a } \lim 3 + n = +\infty \text{ et } \lim 2 + \frac{1}{n} = 2$$

$$\text{Donc, par quotient, } \lim v_n = +\infty$$

Exercice 17

Pour $u_n = (2 - n^2) \left(\frac{1}{\sqrt{n}} - 2 \right)$:

On a $\lim 2 - n^2 = -\infty$ et $\lim \frac{1}{\sqrt{n} - 2} = -2$

Donc $\lim u_n = +\infty$

Pour $v_n = \frac{n^2+n}{4}$: $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = +\infty$.

Formes indéterminées**Exercice 18**

1. $u_n = -n^3 + 2n^2$: On a une forme indéterminée $-\infty + \infty$.

On factorise : $u_n = n^2(-n + 2) = n^2(2 - n)$

Quand $n \rightarrow +\infty$, $n^2 \rightarrow +\infty$ et $(2 - n) \rightarrow -\infty$, donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = -\infty$.

2. $v_n = n^2 - 3n + 1$: On a une forme indéterminée $+\infty - \infty$.

On factorise : $v_n = n^2 \left(1 - \frac{3}{n} + \frac{1}{n^2} \right)$

Quand $n \rightarrow +\infty$, $\left(1 - \frac{3}{n} + \frac{1}{n^2} \right) \rightarrow 1$, donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = +\infty$.

Exercice 19

1. $u_n = \frac{3n+1}{5n+2}$: On a une forme indéterminée $\frac{\infty}{\infty}$.

On divise par n : $u_n = \frac{3 + \frac{1}{n}}{5 + \frac{2}{n}}$

Quand $n \rightarrow +\infty$: $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \frac{3+0}{5+0} = \frac{3}{5}$.

2. $v_n = \frac{2n}{1-n^2}$: On a une forme indéterminée $\frac{\infty}{\infty}$.

On divise par n^2 : $v_n = \frac{\frac{2}{n}}{\frac{1}{n^2} - 1}$

Quand $n \rightarrow +\infty$: $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = \frac{0}{0-1} = 0$.

Exercice 20

1. $u_n = n^2 - 2n = n(n-2)$: $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$.

2. $v_n = n - n^3 = n(1 - n^2)$: $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = -\infty$.

Exercice 21

1. $u_n = 3n - n^2 + 2 = n^2 \left(\frac{3}{n} - 1 + \frac{2}{n^2} \right)$: $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = -\infty$.

2. $v_n = \frac{n+5}{n^2+1}$: On divise par n^2 : $v_n = \frac{\frac{1}{n} + \frac{5}{n^2}}{1 + \frac{1}{n^2}}$

$\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = \frac{0+0}{1+0} = 0$.

Exercice 22

1. $u_n = n + 3n^2 - n^3 = n^3 \left(\frac{1}{n^2} + \frac{3}{n} - 1 \right)$: $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = -\infty$.

2. $v_n = \frac{n^3+2}{2n^2-1}$: On divise par n^2 : $v_n = \frac{n + \frac{2}{n^2}}{2 - \frac{1}{n^2}}$
 $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = +\infty$.

Exercice 23

1. $u_n = \frac{3n-12}{4-2n}$: On divise par n : $u_n = \frac{3 - \frac{12}{n}}{\frac{4}{n} - 2}$

$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \frac{3-0}{0-2} = -\frac{3}{2}$.

2. $v_n = \frac{n^2+3}{n} = n + \frac{3}{n}$: $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = +\infty$.

3. $w_n = \frac{n^3+2n}{n^2-3}$: On divise par n^2 : $w_n = \frac{n + \frac{2}{n}}{1 - \frac{3}{n^2}}$
 $\lim_{n \rightarrow +\infty} w_n = +\infty$.

4. $z_n = n^2 - n + 2$: $\lim_{n \rightarrow +\infty} z_n = +\infty$.

5. $t_n = \sqrt{n} - \sqrt{n-5}$: On multiplie par la quantité conjuguée :

$$t_n = \frac{(\sqrt{n} - \sqrt{n-5})(\sqrt{n} + \sqrt{n-5})}{\sqrt{n} + \sqrt{n-5}} = \frac{n - (n-5)}{\sqrt{n} + \sqrt{n-5}} = \frac{5}{\sqrt{n} + \sqrt{n-5}}$$

 $\lim_{n \rightarrow +\infty} t_n = 0$.

Exercice 24

1. $u_n = \frac{n^2+2n}{n+1}$: On effectue la division euclidienne : $u_n = n + 1 + \frac{-1}{n+1}$
 $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$.

2. $v_n = \frac{3n+\sqrt{n}}{2n+3}$: On divise par n : $v_n = \frac{3 + \frac{1}{\sqrt{n}}}{2 + \frac{3}{n}}$
 $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = \frac{3+0}{2+0} = \frac{3}{2}$.

Exercice 25

1. $u_n = n^2 - n = n(n-1)$: $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$.

2. $u_n = -3n^2 + 6n + 7 = n^2(-3 + \frac{6}{n} + \frac{7}{n^2})$: $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = -\infty$.

3. $u_n = \frac{-2n^2+3n+1}{3n^2+5n}$: On divise par n^2 : $u_n = \frac{-2 + \frac{3}{n} + \frac{1}{n^2}}{3 + \frac{5}{n}}$

$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \frac{-2+0+0}{3+0} = -\frac{2}{3}$.

4. $u_n = -n^2 + \sqrt{n} = n^2(-1 + \frac{1}{n^{3/2}})$: $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = -\infty$.

5. $u_n = \frac{6\sqrt{n}-n}{\sqrt{n}+n}$: On divise par \sqrt{n} : $u_n = \frac{6 - \sqrt{n}}{1 + \sqrt{n}}$

On divise par \sqrt{n} : $u_n = \frac{\frac{6}{\sqrt{n}} - 1}{\frac{1}{\sqrt{n}} + 1}$

$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \frac{0-1}{0+1} = -1$.

$$6. u_n = 5n^3 - 3n^2 + 2\sqrt{n} = n^3(5 - \frac{3}{n} + \frac{2}{n^{5/2}}) : \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty.$$

$$7. u_n = \frac{1}{\sqrt{n}}(-3n + 5) = \frac{-3n + 5}{\sqrt{n}} = \frac{-3\sqrt{n} + \frac{5}{\sqrt{n}}}{1} = -3\sqrt{n} + \frac{5}{\sqrt{n}} \\ \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = -\infty.$$

Exercice 26



1. On ne peut pas directement appliquer les propriétés car on a une forme indéterminée $0 \times \infty$: $\frac{1}{n} \rightarrow 0$ et $(n^2 - 2) \rightarrow +\infty$.

$$2. \text{ En développant : } u_n = \frac{1}{n} \times (n^2 - 2) = \frac{n^2 - 2}{n} = n - \frac{2}{n} \\ \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty.$$

Convergence de suites

Exercice 27



1. **Faux.** Contre-exemple : $u_n = \frac{1}{n}$ converge vers 0, mais $v_n = \frac{1}{u_n} = n$ diverge vers $+\infty$.

2. **Faux.** Contre-exemple : $u_n = (-1)^n$ diverge (suite oscillante), mais $v_n = \frac{1}{u_n} = (-1)^n$ diverge aussi et ne converge pas vers 0.

Exercice 28



$$1. \text{ On a } u_{n+1} = \frac{9}{6 - u_n} \text{ et } v_n = \frac{1}{u_n - 3}.$$

$$v_{n+1} = \frac{1}{u_{n+1} - 3} = \frac{1}{\frac{9}{6 - u_n} - 3} = \frac{6 - u_n}{9 - 3(6 - u_n)} = \frac{6 - u_n}{9 - 18 + 3u_n} = \frac{6 - u_n}{3u_n - 9} \\ = \frac{6 - u_n}{3(u_n - 3)} = \frac{6 - u_n}{3(u_n - 3)}$$

$$\text{Or } 6 - u_n = 6 - 3 - \frac{1}{v_n} = 3 - \frac{1}{v_n} = \frac{3v_n - 1}{v_n}$$

$$\text{Et } u_n - 3 = \frac{1}{v_n}, \text{ donc :}$$

$$v_{n+1} = \frac{\frac{3v_n - 1}{v_n}}{3 \cdot \frac{1}{v_n}} = \frac{3v_n - 1}{3} = v_n - \frac{1}{3}$$

$$\text{Donc } (v_n) \text{ est arithmétique de raison } r = -\frac{1}{3}.$$

$$2. v_0 = \frac{1}{u_0 - 3} = \frac{1}{-3 - 3} = -\frac{1}{6}$$

$$v_n = v_0 + nr = -\frac{1}{6} - \frac{n}{3} = -\frac{1 + 2n}{6}$$

$$u_n = 3 + \frac{1}{v_n} = 3 + \frac{1}{-\frac{1 + 2n}{6}} = 3 - \frac{6}{1 + 2n}$$

$$3. \lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = -\infty, \text{ donc } \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 3 - 0 = 3.$$

Exercice 29



$$1. u_n = \frac{1}{n(n+1)} : \text{ Quand } n \rightarrow +\infty, n(n+1) \rightarrow +\infty, \text{ donc } \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0.$$

$$2. \text{ On a } \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} = \frac{n+1}{n(n+1)} - \frac{n}{n(n+1)} = \frac{n+1-n}{n(n+1)} = \frac{1}{n(n+1)}$$

$$3. S_n = \sum_{k=1}^n u_k = \sum_{k=1}^n \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} \right) = \left(\frac{1}{1} - \frac{1}{2} \right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3} \right) + \dots + \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \right) \\ \text{C'est une somme télescopique : } S_n = 1 - \frac{1}{n+1} = \frac{n}{n+1}.$$

$$4. \lim_{n \rightarrow +\infty} S_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n}{n+1} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{1 + \frac{1}{n}} = \frac{1}{1+0} = 1.$$

En route vers le Grand Oral :

Exercice 30



$$1. u_1 = 900 \times 0,8 + 200 = 720 + 200 = 920 \text{ habitants.}$$

$$u_2 = 920 \times 0,8 + 200 = 736 + 200 = 936 \text{ habitants.}$$

$$2. u_{n+1} = 0,8u_n + 200 \text{ pour tout } n \in \mathbb{N}.$$

3. On étudie la suite auxiliaire $v_n = u_n - l$ où l est la limite éventuelle.

$$\text{Si la suite converge, alors } \lim u_{n+1} = \lim u_n = l.$$

$$l = 0,8l + 200 \Rightarrow 0,2l = 200 \Rightarrow l = 1000.$$

$$v_n = u_n - 1000 \text{ et } v_{n+1} = u_{n+1} - 1000 = 0,8u_n + 200 - 1000 = 0,8u_n - 800 = 0,8(u_n - 1000) = 0,8v_n.$$

$$(v_n) \text{ est géométrique de raison } 0,8 \text{ et } v_0 = 900 - 1000 = -100.$$

$$v_n = -100 \times 0,8^n, \text{ donc } u_n = 1000 - 100 \times 0,8^n.$$

$$\text{Comme } 0 < 0,8 < 1, \lim_{n \rightarrow +\infty} 0,8^n = 0, \text{ donc } \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 1000.$$

La population converge vers 1000 habitants.

$$4. \text{ Si } u_0 = 10000 :$$

$$v_0 = 10000 - 1000 = 9000, \text{ donc } v_n = 9000 \times 0,8^n \text{ et } u_n = 1000 + 9000 \times 0,8^n.$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 1000 \text{ habitants.}$$

Remarque : Quelle que soit la population initiale, la suite converge toujours vers 1000 habitants. C'est la capacité d'équilibre du village.

Exercices supplémentaires :

Exercice 31



1. L'algorithme calcule le plus petit entier n tel que $u_n < 10^{-3}$, c'est-à-dire $\frac{1}{n} < 10^{-3}$.

$$\frac{1}{n} < 10^{-3} \Leftrightarrow n > 10^3 = 1000$$

L'algorithme affiche donc $n = 1001$.

```

2. n prend la valeur 1
   u prend la valeur 1
   Tant Que u > 10^-6 faire
       n prend la valeur n + 1
       u prend la valeur 1/n
   Afficher n

```

3. Soit $\varepsilon > 0$. On cherche N tel que pour tout $n \geq N$, $0 < u_n < \varepsilon$.
 $u_n < \varepsilon \Leftrightarrow \frac{1}{n} < \varepsilon \Leftrightarrow n > \frac{1}{\varepsilon}$
 Il suffit de prendre $N = \lfloor \frac{1}{\varepsilon} \rfloor + 1$. Ainsi, pour tout $n \geq N$, $0 < u_n < \varepsilon$.
 Ceci prouve que $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0$.

Exercice 32

1. $u_n = \frac{n^2 + 2}{n} = n + \frac{2}{n}$
 $u_n > 10 \Leftrightarrow n + \frac{2}{n} > 10$
 Pour n assez grand, $\frac{2}{n} \approx 0$, donc $u_n \approx n$.
 $u_n > 10 \Leftrightarrow n > 10 - \frac{2}{n}$
 Pour $n \geq 10$, on a $u_n \geq 10 + \frac{2}{10} = 10,2 > 10$.
 Vérifions : $u_9 = 9 + \frac{2}{9} = \frac{83}{9} \approx 9,22 < 10$ et $u_{10} = 10 + \frac{2}{10} = 10,2 > 10$.
 Donc $n_0 = 10$.

2. Soit $A \geq 0$. On cherche n_0 tel que pour tout $n \geq n_0$, $u_n > A$.
 $u_n > A \Leftrightarrow n + \frac{2}{n} > A$
 Pour n assez grand, $u_n \approx n$, donc $n > A$.
 Donc $n_0 = \lfloor A \rfloor + 1$.
3. D'après la question précédente, pour tout $A > 0$, il existe n_0 tel que pour tout $n \geq n_0$, $u_n > A$.
 Par définition, ceci signifie que $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$.

Exercice 33



```

S = 0
u = 0
for i in range(101):
    u = (-1)**i / (2*i + 1)
    S = S + u
print(S)
print(4*S)

```

Ce programme calcule $S_{100} = \sum_{n=0}^{100} \frac{(-1)^n}{2n+1}$ et affiche ensuite $4S_{100}$ qui est une approximation de π .