Exam 1 - 03.02.2025

5

⇒ Exercice n°1

1°/ $U_{10} = U_2 + (10-2)R$

$\iff U_{10} = U_2 + 8R$

$\iff -42 = 4 + 8R$

2 $\iff -46 = 8R$

$\iff R = \frac{-46}{8}$

$\iff R = -5.75$

2°/ Par définition, $\forall n \in \mathbb{N}, U_n = U_0 + nR$

2 Ainsi $U_{10} = U_0 + 10 \times (-5{,}75)$

$\iff -42 = U_0 - 57{,}5$

$\iff U_0 = 15{,}5$

3°/ Finalement, on a :

1 $\forall n \in \mathbb{N}, \; U_n = 15{,}5 - 5{,}75n$

6

⇒ Exercice n°2

0.5 1°/ $\forall x \in \mathbb{R}, \; v'(x) = 2x$

2°/ (a) La fonction racine carré est définie sur $\mathbb{R}_+$

Ainsi, il est nécessaire que :

$$3x-2 \geq 0$$
$$\Leftrightarrow \quad 3x \geq 2$$
$$\Leftrightarrow \quad x \geq 2/3$$

1/

La fonction R est donc définie sur $\left[\frac{2}{3}; +\infty\right[$.

(b) $\forall x \in \left[\frac{2}{3}; +\infty\right[, \; u(x) = g(ax+b)$

avec $g(x) = \sqrt{x}$
$a = 3$
$b = -2$

2

Ainsi, $\forall x \in \left]\frac{2}{3}; +\infty\right[,$

$$u'(x) = a \times g'(ax+b)$$
$$= 3 \times \frac{1}{2\sqrt{3x-2}}$$
$$= \frac{3}{2\sqrt{3x-2}}$$

3°/ $\forall x \in \left]\frac{2}{3}; +\infty\right[$

$$f'(x) = u'(x)v(x) + u(x)v'(x)$$

w/ $u(x) = \sqrt{3x-2}$
$u'(x) = \frac{3}{2\sqrt{3x-2}}$
$v(x) = x^2-1$
$v'(x) = 2x$

$$= \frac{3}{2\sqrt{3x-2}} \times (x^2-1) + \sqrt{3x-2} \times 2x$$
$$= \frac{3x^2-3}{2\sqrt{3x-2}} + 2x\sqrt{3x-2}$$
$$= \frac{3x^2-3}{2\sqrt{3x-2}} + \frac{4x(3x-2)}{2\sqrt{3x-2}}$$
$$= \frac{15x^2-8x-3}{2\sqrt{3x-2}}$$

2.5

7

⇒ Exercice n°3

1.5 1°/ $(w_n) : \begin{cases} w_0 = 6 \\ w_{n+1} = w_n \times 1{,}2 \quad \forall n \in \mathbb{N} \end{cases}$

1.5 2°/ $\forall n \in \mathbb{N}, \; w_n = w_0 \times q^n = 6 \times 1{,}2^n$

1.5 3°/ $w_0 = 6 > 0$ et $q = 1{,}2 > 1$

Donc (w_n) est croissante

2.5 3°/ $S' = w_0 + w_1 + \dots + w_{15}$

$\Leftrightarrow S' = w_0 \times \dfrac{1 - q^{15-0+1}}{1-q}$

$\Leftrightarrow S' = 6 \times \dfrac{1-1{,}2^{16}}{1-1{,}2}$

$\Leftrightarrow S' = 6 \times \dfrac{1-1{,}2^{16}}{-0{,}2}$

$\Leftrightarrow S' = \dfrac{6}{-0.2} \times (1-1{,}2^{16})$

$\Leftrightarrow S' = -30(1-1{,}2^{16})$

⇒ Exercice n°5

3

On a $U_0 = 4$

$U_1 = 6$

$U_2 = 8$

$U_3 = 10$

...

Soit (U_n) définie sur $\mathbb{N}$ par $U_n = 4 + 2n$

1 Il s'agit d'une suite arithmétique de

premier terme 4 et de raison 2.

Ainsi $S' = 4 + 6 + 8 + 10 + \dots + 48$

$\Leftrightarrow S' = U_0 + U_1 + U_2 + U_3 + \dots + U_{22}$

$\Leftrightarrow S' = \dfrac{(U_0 + U_{22}) \times 23}{2}$ car $U_{22} = 4 + 22 \times 2$

$\Leftrightarrow S' = \dfrac{(4 + 48) \times 23}{2}$

$\Leftrightarrow S' = 598$

9 $\Rightarrow$ Exercice n°5

1°/ $f(x) = 2x^2 + 2x - 12$

On a $\alpha = \dfrac{-b}{2a} = \dfrac{-2}{2 \times 2} = \dfrac{-2}{4} = \dfrac{-1}{2}$

$\beta = f(\alpha) = 2 \times \left(-\frac{1}{2}\right)^2 + 2 \times \frac{-1}{2} - 12$
$= \frac{1}{2} - 1 - 12$
$= -12{,}5$

1,5

Ainsi $f(x) = 2\left(x + \frac{1}{2}\right)^2 - 12{,}5$

2°/ Comme $a = 2 > 0$, on a :

x	$-\infty$	$-\frac{1}{2}$	$+\infty$
f	$\searrow$	$-10{,}5$	$\nearrow$

1,5

3°/ $\Delta = b^2 - 4ac$

$= 2^2 - 4 \times 2 \times (-12)$

$= 100 > 0$ donc il y a 2 racines réelles

3.5/

$$x_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-2-\sqrt{100}}{2\times 2} = \frac{-2-10}{4} = \frac{-12}{4} = -3$$

$$x_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-2+\sqrt{100}}{2\times 2} = \frac{-2+10}{4} = \frac{8}{4} = 2$$

Donc les racines de f sont -3 et 2

1.5/ 4°/ Ainsi, $f(x) = 2(x+3)(x-2)$

5°/

1/

x	$-\infty$		-3		2		$+\infty$
$f(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

10

=> Exercice n°6

1°/ Béatrice : 2020 → 19 700 €

2021 → 20 400 € $+700€$

2022 → 21 100 € $+700€$

2/

Elsa : 2020 → 17 700 €

2021 → 18 585€

2022 → 19 515,25 €

2°/ ⓐ On a $u_0 = 19\,700$ et $u_{n+1} = u_n + 700$

1

Il s'agit donc d'une suite arithmétique

ⓑ On cherche k tel que :

$$u_k > 23\,210$$
$$u_0 + kr > 23\,210$$
$$19\,700 + 700k > 23\,210$$
$$700k > 3510$$
$$k > 5,01$$

2

⇝ Au bout de 6 ans.

ⓒ $\forall n \in \mathbb{N}$, $v_{n+1} = v_n \times 1,05$

$v_n = 17\,700 \times 1,05^n$

2

ⓓ $2029 = 2020 + 9$

On cherche donc u_9

1

On $u_9 = 17\,700 \times 1,05^9 \approx 27\,459$

3°/
```
def algo():
    A = 19700
    B = 17700
    n = 0
    while B < A :
        A = A + 700
        B = B * 1,05
        n = n + 1
    return n
```

2