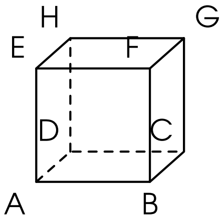
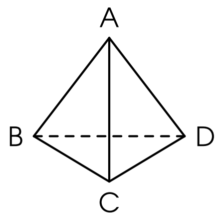
Lorsque l'exercice désigne le cube $ABCDEFGH$ (tétraèdre $ABCD$), il se réfère au cube (tétraèdre) représenté ci-dessous :





Vecteurs de l'espace

Exercice 1

Remplacer les pointillés par le sommet du cube ABCDEFGH qui convient.

(a) $\overrightarrow{B\ldots} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BG}$

(b) $\overrightarrow{B\ldots} = \overrightarrow{BE} + \overrightarrow{DC} + \overrightarrow{GD}$

(c) $\overrightarrow{C\ldots} = \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{DG}$

(d) $\overrightarrow{A\ldots} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{DE} + \overrightarrow{BD}$

Exercice 2

1. Reproduire le cube ABCDEFGH.
2. Placer le point K tel que $\overrightarrow{AK} = \overrightarrow{AE} + \frac{1}{2}\overrightarrow{BC}$.
3. Placer le point L tel que $\overrightarrow{EL} = \overrightarrow{EH} + \frac{1}{3}\overrightarrow{EF} + \overrightarrow{EA}$.

Exercice 3

Dans chacun des cas suivants, exprimer le vecteur $\overrightarrow{AB}$ en fonction du vecteur $\overrightarrow{AC}$.

(a) $4\overrightarrow{AB} + 3\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{0}$ (b) $2\overrightarrow{AB} - 3\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{BC}$

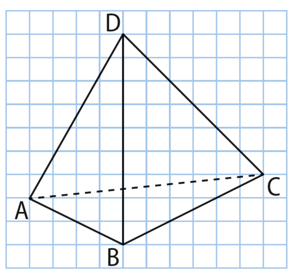
Exercice 4

On considère le cube ABCDEFGH.
Exprimer les vecteurs suivants comme combinaison linéaire des vecteurs $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AD}$ et $\overrightarrow{AE}$.

(a) $\overrightarrow{AF}$ (b) $\overrightarrow{AH}$ (c) $\overrightarrow{AG}$ (d) $\overrightarrow{EB}$ (e) $\overrightarrow{CF}$ (f) $\overrightarrow{BH}$

Exercice 5

On considère le tétraèdre $ABCD$ ci-contre :



1. Construire les points E et F tels que :
   $\overrightarrow{AE} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AD}$
   $\overrightarrow{BF} = \frac{2}{3}\overrightarrow{BC} + \frac{1}{2}\overrightarrow{CD}$
2. Construire les points K et L tels que :
   $\overrightarrow{CK} = \frac{2}{3}\overrightarrow{CB} + \frac{1}{6}\overrightarrow{CD}$ et $\overrightarrow{AL} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD}$.
3. Le point G est tel que $6\overrightarrow{CG} = 4\overrightarrow{CD} + 2\overrightarrow{CB}$
   (a) Exprimer $\overrightarrow{CG}$ en fonction de $\overrightarrow{CD}$ et $\overrightarrow{CB}$.
   (b) Placer le point G sur la figure.
4. Le point H est tel que $3\overrightarrow{HA} + \overrightarrow{HD} = \overrightarrow{0}$
   (a) Exprimer $\overrightarrow{AH}$ en fonction de $\overrightarrow{AD}$.
   (b) Placer le point H sur la figure.

Exercice 6

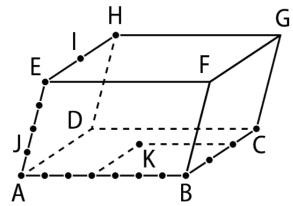
Dans le même tétraèdre $ABCD$:

1. Placer I, J et K, les milieux respectifs des arêtes $[CD]$, $[BD]$ et $[BC]$.
2. Construire les points E, F et G tels que :
   $\overrightarrow{AE} = 2\overrightarrow{AI}$, $\overrightarrow{AF} = 2\overrightarrow{AJ}$, $\overrightarrow{AG} = 2\overrightarrow{AK}$.
3. (a) Justifier que $BCEF$ est un parallélogramme.
   (b) Pourquoi les segments $[BE]$, $[CF]$ et $[DG]$ ont-ils le même milieu ? Justifier.

Exercice 7

$ABCDEFGH$ est un parallélépipède. Les graduations sur chaque arête sont régulières.

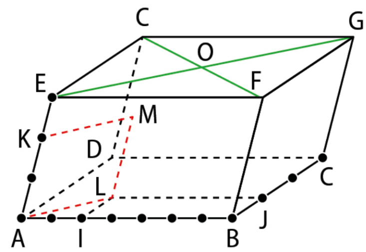
1. Exprimer $\overrightarrow{BK}$ en fonction de $\overrightarrow{BA}$ et $\overrightarrow{BC}$.
2. Exprimer $\overrightarrow{IJ}$ en fonction de $\overrightarrow{EA}$ et $\overrightarrow{EH}$.



Exercice 8

$ABCDEFGH$ est un parallélépipède. Les graduations sur chaque arête sont régulières. De plus, $BILJ$ et $ALMK$ sont des parallélogrammes.

1. Exprimer $\overrightarrow{AM}$ en fonction de $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AD}$ et $\overrightarrow{AE}$.
2. Exprimer $\overrightarrow{AO}$ en fonction de $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AD}$ et $\overrightarrow{AE}$.



Exercice 9

Dans un tétraèdre $ABCD$, I est le milieu de $[AB]$ et J le milieu de $[CD]$.
Exprimer $\overrightarrow{IJ}$ en fonction de $\overrightarrow{AD}$ et $\overrightarrow{BC}$.

Colinéarité et coplanarité

Exercice 10

Vrai ou faux ? Justifier.

1. Les vecteurs $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$ et $\overrightarrow{w}$ tels que $3\overrightarrow{u} + 4\overrightarrow{v} - 2\overrightarrow{w} = \overrightarrow{0}$ ne sont pas coplanaires.
2. A, B et C sont trois points non alignés. Le point M de l'espace tel que $\overrightarrow{AM} = 3\overrightarrow{AB} + 5\overrightarrow{AC}$ appartient au plan (ABC).

Exercice 11

ABCD est un tétraèdre. Justifier que les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ définis par $\vec{u} = 9\overrightarrow{AB} - 6\overrightarrow{AC} + 3\overrightarrow{AD}$ et $\vec{v} = 3\overrightarrow{AB} - 2\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD}$ sont colinéaires.

Exercice 12

On considère le cube ABCDEFGH.

1. $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{BC}$ sont-ils coplanaires ?
2. (a) Donner un représentant du vecteur $\overrightarrow{AD}$ dans le plan (BCG).
   (b) Les vecteurs $\overrightarrow{AD}$, $\overrightarrow{CF}$ et $\overrightarrow{BG}$ sont-ils coplanaires ?
3. $\overrightarrow{AE}$, $\overrightarrow{BC}$ et $\overrightarrow{AB}$ sont-ils coplanaires ?

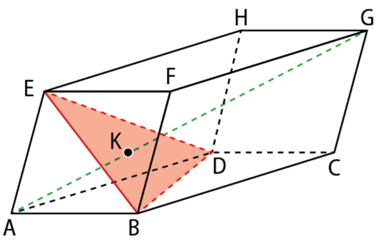
Exercice 13

A, B et C sont trois points non alignés et D est le point tel que $-3\overrightarrow{AD} + 5\overrightarrow{BD} + 2\overrightarrow{CD} = \vec{0}$.

1. Justifier que $\overrightarrow{AD}$, $\overrightarrow{BD}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont coplanaires.
2. (a) Justifier que $\overrightarrow{BD} = -\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}$.
   (b) Justifier que $\overrightarrow{CD} = -\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD}$.
   (c) En déduire que $\overrightarrow{AD} = \frac{5}{4}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$.

Exercice 14

$ABCDEFGH$ est un parallélépipède et K est le point de l'espace tel que $\overrightarrow{BK} = \frac{1}{3}\overrightarrow{BD} + \frac{1}{3}\overrightarrow{BE}$.



1. Démontrer que $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AE} = 3\overrightarrow{AK}$.
2. (a) Exprimer $\overrightarrow{AG}$ en fonction de $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AD}$, $\overrightarrow{AE}$.
   (b) En déduire que A, K et G sont alignés.

Exercice 15

$ABCDEFGH$ est un cube. Les points K et L sont tels que $\overrightarrow{AK} = \frac{3}{2}\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{AL} = 3\overrightarrow{AE}$.

1. Réaliser une figure.
2. (a) Exprimer $\overrightarrow{AG}$ en fonction de $\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{AE}$.
   (b) En déduire que $\overrightarrow{KG} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AE}$.
3. (a) Exprimer $\overrightarrow{KL}$ en fonction de $\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{AE}$.
   (b) En déduire que K, G et L sont alignés.

Exercice 16

$ABCD$ est un tétraèdre. Soit les points E, F et G tels que $\overrightarrow{AE} = \frac{1}{4}\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AF} = \frac{1}{4}\overrightarrow{AC} + \frac{1}{4}\overrightarrow{AD}$ et $\overrightarrow{AG} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \frac{3}{4}\overrightarrow{AC} + \frac{3}{4}\overrightarrow{AD}$.

1. Exprimer $\overrightarrow{EF}$ en fonction de $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{AD}$.
2. Exprimer $\overrightarrow{EG}$ en fonction de $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{AD}$.
3. En déduire que E, F et G sont alignés.

Exercice 17 Logique

« Si les points A, B, C et D sont alignés, alors les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont colinéaires. »

1. Cette proposition est-elle vraie ? Justifier.
2. La réciproque est-elle vraie ? Justifier.

Exercice 18

On considère le tétraèdre $ABCD$.
I, J, K et L sont les milieux respectifs des arêtes $[AB], [AC], [AD]$ et $[CD]$.

1. Justifier que $\overrightarrow{IJ} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$.
2. Justifier que $\overrightarrow{KL} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$.
3. En déduire que $\overrightarrow{IJ}$, $\overrightarrow{KL}$ et $\overrightarrow{AB}$ sont coplanaires.

Exercice 19

On considère le tétraèdre $ABCD$.
I est le milieu de $[BC]$, J est le milieu de $[BD]$, E et F sont définis par les égalités vectorielles $\overrightarrow{CE} = 2\overrightarrow{CD}$ et $\overrightarrow{BF} = \overrightarrow{AE}$.

1. Exprimer $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$ en fonction de $\overrightarrow{AI}$.
2. (a) Démontrer que $\overrightarrow{AF} - 2\overrightarrow{AI} = 2\overrightarrow{CD}$.
   (b) En déduire que $\overrightarrow{AF} - 2\overrightarrow{AI} = 4\overrightarrow{IJ}$.
   (c) Que peut-on dire de $\overrightarrow{AI}$, $\overrightarrow{AJ}$ et $\overrightarrow{AF}$?

Exercice 20

On considère le tétraèdre $ABCD$.
Le point E est tel que $\overrightarrow{AE} = \overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{CD} - \frac{1}{2}\overrightarrow{BD}$.
Montrer que $\overrightarrow{AE}$, $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont coplanaires.

Exercice 21

On considère le tétraèdre $ABCD$.
Les points M, N, P et Q sont définis par $\overrightarrow{AM} = 2\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AN} = 3\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{AP} = \frac{4}{3}\overrightarrow{AD}$ et $\overrightarrow{AQ} = -4\overrightarrow{AB} + 18\overrightarrow{AC} - 4\overrightarrow{AD}$

1. Exprimer les vecteurs $\overrightarrow{MN}$, $\overrightarrow{MP}$ et $\overrightarrow{MQ}$ en fonction des vecteurs $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{AD}$.
2. (a) Exprimer $6\overrightarrow{MN} - 3\overrightarrow{MP}$ en fonction de $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{AD}$.
   (b) Que peut-on dire de $\overrightarrow{MN}$, $\overrightarrow{MP}$ et $\overrightarrow{MQ}$?

Exercice 22 Logique

1. La proposition suivante est-elle vraie ?
   « Si les vecteurs $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{AD}$ ne sont pas coplanaires, alors ils ne sont pas colinéaires deux à deux. »
2. La réciproque est-elle vraie ?

Exercice 23

$ABCDEFGH$ est un cube. Le point K est tel que : $\overrightarrow{AK} = 6\overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{AD} - 3\overrightarrow{AE}$.

1. Exprimer $\overrightarrow{EG}$, $\overrightarrow{EB}$ et $\overrightarrow{EK}$ en fonction de $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AD}$ et $\overrightarrow{AE}$.
2. Déterminer deux réels x et y tels que $\overrightarrow{EK} = x\overrightarrow{EG} + y\overrightarrow{EB}$.
3. Que peut-on en déduire pour les vecteurs $\overrightarrow{EK}$, $\overrightarrow{EG}$ et $\overrightarrow{EB}$?
4. Que peut-on alors dire des points B, E, G, K ?