Convertir des angles

Exercice 1

1.

a) Le cercle C a pour rayon 1. Ainsi, sa circonférence a pour mesure :

$$P = 2\pi r = 2\pi \times 1 = 2\pi$$

b) Voici le tableau complété :

Valeur de α	0	360	180	90
Longueur de larc $\widehat{IM}$	0	2π	π	$\frac{\pi}{2}$

c) Ce tableau représente une situation de proportionnalité entre langle au centre définissant un arc du cercle C et la mesure de cet arc.

2. Voici le tableau complété :

Valeur de α	36	45	60	30
Longueur de larc $\widehat{IM}$	$\frac{\pi}{5}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{6}$

Exercice 2

1 Voici le tableau représentant une situation de proportionnalité :

Mesure en degré	Mesure en radian
90	$\frac{\pi}{2}$
60	$\frac{\pi}{3}$
45	$\frac{\pi}{4}$
30	$\frac{\pi}{6}$
72	$\frac{2\pi}{5}$
1	$\frac{\pi}{180}$

2 Voici le tableau représentant une situation de proportionnalité :

Mesure en radian	Mesure en degré
$\frac{\pi}{2}$	90
$\frac{\pi}{3}$	60
$\frac{\pi}{6}$	30
$\frac{3\pi}{5}$	108
$\frac{\pi}{12}$	15
$\frac{3\pi}{4}$	135

3 Compléter les pointillés ci-dessous avec les valeurs adéquates, approchées au millième près :

- 66° ≈ 1,15191 ≈ 1,152 rad
- 137° ≈ 2,39110 ≈ 2,391 rad
- 2 rad ≈ 114,59155 ≈ 114,592°
- 0,69 rad ≈ 39,53408 ≈ 39,534°

Exercice 3

a

	30°	60°	90°	120°	150°	180°	210°	240°	270°	300°	330°	360°
0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{5\pi}{6}$	π	$\frac{7\pi}{6}$	$\frac{4\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{5\pi}{3}$	$\frac{11\pi}{6}$	2π

b

	45°	90°	135°	180°	225°	270°	315°	360°
0	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{3\pi}{4}$	π	$\frac{5\pi}{4}$	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{7\pi}{4}$	2π

Se repérer sur le cercle trigonométrique

Exercice 4

1 Voici les angles au centre complétés :

- a : $\frac{2\pi}{3}$ b : $\frac{\pi}{2}$ c : $\frac{2\pi}{5}$
- d : $\frac{\pi}{3}$ e : $\frac{2\pi}{7}$ f : $\frac{\pi}{4}$
- g : $\frac{2\pi}{9}$ h : $\frac{\pi}{5}$ i : $\frac{2\pi}{11}$

2 Voici le nom de ces polygones réguliers :

- a : triangle équilatéral
- b : carré
- c : pentagone régulier
- d : hexagone régulier
- e : heptagone régulier
- f : octogone régulier
- g : ennéagone régulier
- h : décagone régulier
- i : hendécagone régulier

Exercice 5 Correction à faire

Exercice 6

a $\theta = \frac{-37\pi}{9}$

La mesure $\theta = \frac{-37\pi}{9}$ n'appartient pas à l'intervalle $]-\pi;\pi]$, car $\left|\frac{-37\pi}{9}\right| > \pi$. On cherche un entier k tel que :

$$\frac{-37\pi}{9} + 2k\pi \in]-\pi;\pi]$$

En prenant $k = 2$:

$$\frac{-37\pi}{9} + 2 \cdot \frac{18\pi}{9} = \frac{-\pi}{9}$$

Donc la mesure principale est $\boxed{\frac{-\pi}{9}}$.

b $\theta = \frac{20\pi}{3}$

La mesure $\theta = \frac{20\pi}{3}$ n'appartient pas à $]-\pi;\pi]$, car elle est strictement supérieure à π.

$$\frac{20\pi}{3} - 3 \cdot 2\pi = \frac{2\pi}{3}$$

Donc la mesure principale est $\boxed{\frac{2\pi}{3}}$.

(c) $\theta = \dfrac{61\pi}{11}$

La mesure $\theta = \dfrac{61\pi}{11}$ est hors de lintervalle $]-\pi;\pi]$.

$$\frac{61\pi}{11} - 3\cdot 2\pi = \frac{-5\pi}{11}$$

Donc la mesure principale est $\boxed{\dfrac{-5\pi}{11}}$.

(d) $\theta = \dfrac{-31\pi}{6}$

La mesure $\theta = \dfrac{-31\pi}{6}$ est inférieure à $-\pi$, donc hors de lintervalle.

$$\frac{-31\pi}{6} + 3\cdot 2\pi = \frac{5\pi}{6}$$

Donc la mesure principale est $\boxed{\dfrac{5\pi}{6}}$.

(e) $\theta = \dfrac{15\pi}{4}$

La mesure $\theta = \dfrac{15\pi}{4}$ est strictement supérieure à π.

$$\frac{15\pi}{4} - 2\cdot 2\pi = \frac{-\pi}{4}$$

Donc la mesure principale est $\boxed{\dfrac{-\pi}{4}}$.

Cosinus et sinus d'un réel

Exercice 7

a. $\dfrac{\pi}{4}$ et $\dfrac{3\pi}{4}$ $\cos(\frac{\pi}{4}) = \frac{\sqrt{2}}{2}$, $\cos(\frac{3\pi}{4}) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ $\sin(\frac{\pi}{4}) = \frac{\sqrt{2}}{2}$, $\sin(\frac{3\pi}{4}) = \frac{\sqrt{2}}{2}$

b. $\dfrac{\pi}{4}$ et $\dfrac{5\pi}{4}$ $\cos = \frac{\sqrt{2}}{2}$ et $-\frac{\sqrt{2}}{2}$ $\sin = \frac{\sqrt{2}}{2}$ et $-\frac{\sqrt{2}}{2}$

c. $\dfrac{\pi}{4}$ et $\dfrac{7\pi}{4}$ $\cos = \frac{\sqrt{2}}{2}$ dans les deux cas $\sin = \frac{\sqrt{2}}{2}$ et $-\frac{\sqrt{2}}{2}$

Exercice 8

a. $\dfrac{\pi}{6}$ et $\dfrac{5\pi}{6}$ $\cos = \frac{\sqrt{3}}{2}$ et $-\frac{\sqrt{3}}{2}$ $\sin = \frac{1}{2}$ dans les deux cas

b. $\dfrac{\pi}{6}$ et $-\dfrac{\pi}{6}$ $\cos$ identique, $\sin$ opposés : $+\frac{1}{2}$ et $-\frac{1}{2}$

c. $\dfrac{\pi}{6}$ et $-\dfrac{5\pi}{6}$ $\cos$ opposés : $+\frac{\sqrt{3}}{2}$ et $-\frac{\sqrt{3}}{2}$ $\sin$ opposés : $+\frac{1}{2}$ et $-\frac{1}{2}$

Exercice 9

a. $\cos(x) = \frac{2}{5} \Rightarrow x \approx \pm 1{,}159$

b. $\cos(x) = 0{,}7 \Rightarrow x \approx \pm 0{,}795$

c. $\cos(x) = -0{,}1 \Rightarrow x \approx \pm 1{,}671$

d. $\sin(x) = \frac{2}{7} \Rightarrow x \approx \pm 0{,}287$

e. $\sin(x) = 1 \Rightarrow x = \dfrac{\pi}{2} \approx 1{,}571$

f. $\sin(x) = -0{,}3 \Rightarrow x \approx -0{,}305$ ou $x \approx 3{,}447$

Exercice 10

Sachant que $\cos(a) = 0{,}3$, on utilise :

$$\sin^2(a) = 1 - \cos^2(a) = 1 - 0{,}09 = 0{,}91 \Rightarrow \sin(a) \approx \pm 0{,}954$$

a. $0 < a < \pi \Rightarrow \sin(a) > 0 \Rightarrow \boxed{\sin(a) \approx 0{,}954}$

b. $\pi < a < 2\pi \Rightarrow \sin(a) < 0 \Rightarrow \boxed{\sin(a) \approx -0{,}954}$

Exercice 11

Soit $a \in [0; \frac{\pi}{2}]$ et $\sin(a) = 0{,}7$

1. a. On calcule $a \approx \arcsin(0{,}7) \approx \boxed{0{,}775}$ rad.
   b. En utilisant l'identité $\cos^2(a) = 1 - \sin^2(a) = 1 - 0{,}49 = 0{,}51$, donc $\cos(a) \approx \boxed{0{,}714}$.
2. La valeur exacte est :

$$\cos(a) = \sqrt{1 - \sin^2(a)} = \sqrt{1 - 0{,}49} = \sqrt{0{,}51}$$

Exercice 12

Quatre réels ont le même cosinus, lintrus est :

$$\boxed{\frac{14\pi}{5}}$$

Explication :

— $\cos\left(\frac{\pi}{5}\right) = \cos\left(\frac{9\pi}{5}\right) = \cos\left(\frac{21\pi}{5}\right) = \cos\left(-\frac{11\pi}{5}\right)$ (car ce sont tous des angles cotermes modulo 2π)

— Mais $\frac{14\pi}{5}$ nest pas coterminal avec les autres **différent**.

Exercice 13

Quatre réels ont le même sinus, lintrus est :

$$\boxed{-\frac{13\pi}{7}}$$

Explication :

— $\sin\left(\frac{\pi}{7}\right) = \sin\left(\frac{13\pi}{7}\right)$

— $\sin\left(-\frac{8\pi}{7}\right) = \sin\left(\frac{6\pi}{7}\right)$

— $\sin\left(\frac{20\pi}{7}\right) = \sin(6\pi/7)$

— $\sin\left(-\frac{13\pi}{7}\right) = -\sin(13\pi/7) \neq$ les autres

Exercice 14

Proposition : « Si $x \in \left[0\,;\,\dfrac{\pi}{2}\right]$, alors $\sin(x) > 0$. »

1. Cette proposition est **fausse** car $\sin(0) = 0$. Elle n'est pas toujours vraie sur l'intervalle donné.
2. La réciproque est : « Si $\sin(x) > 0$, alors $x \in \left[0\,;\,\dfrac{\pi}{2}\right]$. »Cette proposition est **fausse** : par exemple, $\sin\left(\dfrac{3\pi}{4}\right) > 0$ mais $\dfrac{3\pi}{4} \notin \left[0\,;\,\dfrac{\pi}{2}\right]$.

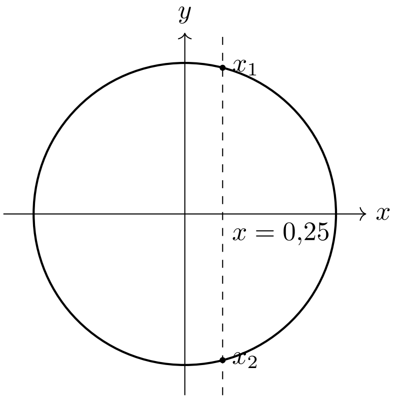
Exercice 15

Proposition : « Il existe un réel x tel que $\cos(x) < 2$. »

1. La proposition est **vraie** : en effet, pour tout réel x, $-1 \leq \cos(x) \leq 1 < 2$.
2. Sa négation est : « Pour tout réel x, $\cos(x) \geq 2$ », ce qui est **faux** car $\cos(x)$ est toujours compris entre -1 et 1.

Exercice 16

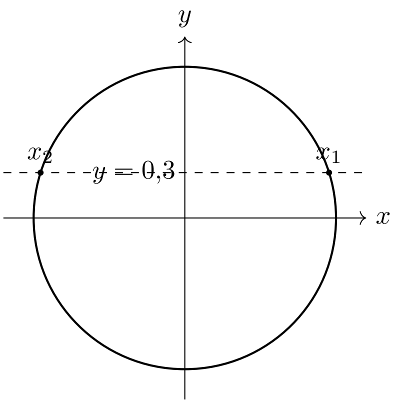
1. Deux points sur le cercle ont un cosinus de 0,25. On les trouve à l'intersection du cercle avec la droite verticale $x = 0.25$.



2. Pour $\cos(x) \geq 0{,}25$, on colorie larc de cercle situé entre ces deux points, sur la partie droite du cercle à droite de la droite $x = 0{,}25$.

Exercice 17

1. Deux points sur le cercle ont un sinus de 0,3. Ils correspondent aux intersections avec la droite horizontale $y = 0.3$.



2. Pour $\sin(x) \leq 0{,}3$, on colorie la zone du cercle en dessous de la droite $y = 0{,}3$.

Exercice 18

1. Les angles sont de $\frac{\pi}{5}$ chacun. Donc les abscisses (réels associés) sont : $A = \frac{2\pi}{5}$, $B = \frac{3\pi}{5}$, $C = \frac{4\pi}{5}$, $D = \pi$.
2. Signe du cosinus : $A : -$, $B : -$, $C : -$, $D : -$
   Signe du sinus : $A : +$, $B : +$, $C : -$, $D : 0$
3. Oui, car certains cosinus sont égaux par symétrie (ex : $\cos(A) = \cos(C)$ si les points sont symétriques).

Angles remarquables

Exercice 19

a. $\cos(0) = 1$

b. $\sin(0) = 0$

c. $\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$

d. $\sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$

e. $\cos(\pi) = -1$

f. $\sin(\pi) = 0$

Exercice 20

1. $\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2}$
2. Par les propriétés de la fonction cosinus :
   — $\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2}$ (car cos est paire),
   — $\cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) = -\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) = -\frac{1}{2}$ (par symétrie dans le cercle).

Exercice 21

1. $\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2}$ et $\sin\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$
2. $\frac{2\pi}{3} = \pi - \frac{\pi}{3}$ donc :
$$\cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) = -\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) = -\frac{1}{2}, \quad \sin\left(\frac{2\pi}{3}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$$
3. $\frac{4\pi}{3} = \pi + \frac{\pi}{3}$ donc :
$$\cos\left(\frac{4\pi}{3}\right) = -\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) = -\frac{1}{2}, \quad \sin\left(\frac{4\pi}{3}\right) = -\sin\left(\frac{\pi}{3}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

Exercice 22

1. $\cos\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$ et $\sin\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{2}$
2.
$$\cos\left(-\frac{\pi}{6}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}, \quad \sin\left(-\frac{\pi}{6}\right) = -\sin\left(\frac{\pi}{6}\right) = -\frac{1}{2}$$
3. $\frac{5\pi}{6} = \pi - \frac{\pi}{6}$ donc :
$$\cos\left(\frac{5\pi}{6}\right) = -\cos\left(\frac{\pi}{6}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2}, \quad \sin\left(\frac{5\pi}{6}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{2}$$

Exercice 23

$$\frac{33\pi}{4} = \frac{\pi}{4} + 8\pi \Rightarrow \text{même image que } \frac{\pi}{4}$$
$$\cos\left(\frac{33\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}, \quad \sin\left(\frac{33\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

Exercice 24

$$\frac{121\pi}{3} = \frac{\pi}{3} + 40\pi \Rightarrow \text{même image que } \frac{\pi}{3}$$
$$\cos\left(\frac{121\pi}{3}\right) = \frac{1}{2}, \quad \sin\left(\frac{121\pi}{3}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

Exercice 25 **Exercice 64**

a. $-\frac{\pi}{3}$: $\cos = \frac{1}{2}$, $\sin = -\frac{\sqrt{3}}{2}$

b. $\frac{17\pi}{4} \equiv \frac{\pi}{4}$: $\cos = \frac{\sqrt{2}}{2}$, $\sin = \frac{\sqrt{2}}{2}$

c. $-\frac{121\pi}{6} \equiv -\frac{\pi}{6}$: $\cos = \frac{\sqrt{3}}{2}$, $\sin = -\frac{1}{2}$

d. $\frac{13\pi}{3} \equiv \frac{\pi}{3}$: $\cos = \frac{1}{2}$, $\sin = \frac{\sqrt{3}}{2}$

e. $-\frac{5\pi}{4} \equiv \frac{3\pi}{4}$: $\cos = -\frac{\sqrt{2}}{2}$, $\sin = \frac{\sqrt{2}}{2}$

f. $\frac{13\pi}{6} \equiv \frac{\pi}{6}$: $\cos = \frac{\sqrt{3}}{2}$, $\sin = \frac{1}{2}$

g. $\frac{7\pi}{3} \equiv \frac{\pi}{3}$: $\cos = \frac{1}{2}$, $\sin = \frac{\sqrt{3}}{2}$

h. $\frac{15\pi}{4} \equiv \frac{-\pi}{4}$: $\cos = \frac{\sqrt{2}}{2}$, $\sin = -\frac{\sqrt{2}}{2}$

i. $\frac{2019\pi}{6} \equiv \frac{\pi}{2}$: $\cos = 0$, $\sin = 1$

Exercice 26

1. $\frac{2\pi}{5}$ radians $= \frac{360 \times 2}{5 \times 2} = 72°$

2. Points à placer : $\frac{2\pi}{5}, \frac{4\pi}{5}, \frac{6\pi}{5}, \frac{8\pi}{5}$
(angles : $72°, 144°, 216°, 288°$)

3. En utilisant les propriétés de symétrie :

$$A = \sin\left(\frac{2\pi}{5}\right) + \sin\left(\frac{4\pi}{5}\right) + \sin\left(\frac{6\pi}{5}\right) + \sin\left(\frac{8\pi}{5}\right) = 0$$

Exercice 27

1. Les points dabscisse $\frac{1}{2}$ sur le cercle trigonométrique correspondent aux angles dont le cosinus est $\frac{1}{2}$.
2. $\cos(x) = \frac{1}{2}$ $x = \frac{\pi}{3}$ ou $x = 2\pi - \frac{\pi}{3} = \frac{5\pi}{3}$.

   Réponse : $x \in \left\{\frac{\pi}{3}, \frac{5\pi}{3}\right\}$

Exercice 28

1. Sur le cercle, une abscisse de $\frac{\sqrt{2}}{2}$ correspond à un angle de $\pm\frac{\pi}{4}$.
2. Réponse : $x \in \left\{-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right\}$

Exercice 29

1. $\frac{3\pi}{7} \approx 77{,}14°$
2. On place les points dangle $\frac{3\pi}{7}$, $\frac{4\pi}{7}$, $\frac{10\pi}{7}$ et $\frac{11\pi}{7}$ sur le cercle.
3. En utilisant les propriétés :

$$\cos\left(\frac{3\pi}{7}\right) = -\cos\left(\frac{11\pi}{7}\right), \quad \cos\left(\frac{4\pi}{7}\right) = -\cos\left(\frac{10\pi}{7}\right)$$

Donc :

$$B = \cos\left(\frac{3\pi}{7}\right) - \cos\left(\frac{4\pi}{7}\right) + \cos\left(\frac{10\pi}{7}\right) - \cos\left(\frac{11\pi}{7}\right) = 0$$

Exercice 30

1. Une ordonnée de $\frac{\sqrt{3}}{2}$ est atteinte en $\frac{\pi}{3}$ et $\frac{2\pi}{3}$.
2. Dans $[-\pi; \pi]$, ces deux angles sont :

$$\frac{\pi}{3} \quad \text{et} \quad \frac{2\pi}{3}$$

Réponse : $x \in \left\{\frac{\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}\right\}$

Exercice 31

1.

$$A = \left(\cos\left(\frac{\pi}{4}\right), \sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\right) = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$$

$$B = \left(\cos\left(\frac{5\pi}{4}\right), \sin\left(\frac{5\pi}{4}\right)\right) = \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$$

2. Il sagit dune symétrie centrale (rotation de π autour de O).
3. Le point N est le symétrique de M par rapport à O.
4. - « Pour tout réel x, $\cos(x + \pi) = -\cos(x)$ »
   - « Pour tout réel x, $\sin(x + \pi) = -\sin(x)$ »