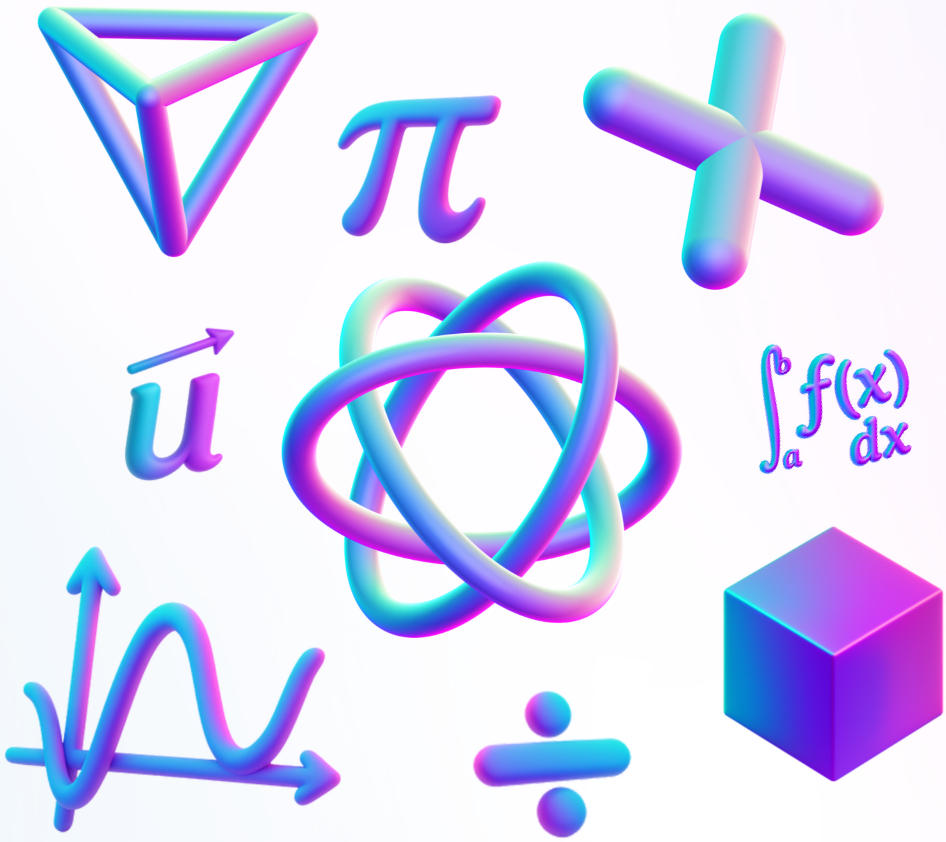
Mathématiques

Terminale Spécialité



2025 - 2026

Site Web

lycée L'immac
IMMACULÉE CONCEPTION

Table des matières

Chapitre 1
Logique et raisonnement

Objectifs :

- ☐ Je comprends la différence entre les types d'énoncé mathématiques.
- ☐ Je sais utiliser les quantificateurs.
- ☐ Je sais utiliser la notion de réciproque, contraposée et équivalence.
- ☐ Je connais les différents types de raisonnement.

I Vocabulaire mathématique

Définitions : Différents types d'énoncés

- **Axiome** : ....
....
....
- **Définition** : ....
....
- **Propriété** : ....
....
- **Proposition** : ....
....
....
- **Théorème** : ....
....
....
....
- **Corollaire** : ....
....
- **Lemme** : ....
....
- **Conjecture** : ....
....

II Les quantificateurs

Définition : Quantificateur universel

Le **quantificateur universel** s'écrit « $\forall$ » et signifie « pour tout » ou « quel que soit ».

Exemples :

- *« Le carré de tout nombre réel est positif ou nul » :* ....
- *« La moitié du produit de deux nombres entiers naturels successifs est un entier naturel » :* ....

Définition : Quantificateur existentiel

Le **quantificateur existentiel** s'écrit « $\exists$ » et signifie « il existe ».

Exemples :

- *« Il existe un nombre réel qui admet pour carré 2 » :* . . . .
- *« Il existe un nombre réel x tel que l'image de ce nombre par la fonction f soit négatif » :* . . . .

Remarque

- . . . .
- Attention à l'ordre des quantificateurs : « *Pour tout x, il existe un y tel que...* » est différent de « *Il existe un y tel que, pour tout x,...* »

III Implication, réciproque, contraposée, équivalence

Définition : Implication

. . . .

Exemples :

- *« Si $x = 3$, alors $x^2 = 9$ » :* . . . .
- *« Si $x = -4$, alors $x^2 < 0$ » :* . . . .

Définition : Réciproque

. . . .

Exemple :

- *La réciproque de « $x = 3 \Rightarrow x^2 = 9$ »est* . . . .
- *La réciproque de « $x \geq 9 \Rightarrow x^2 \geq 81$ »est* . . . .

Définition : Contraposée

. . . .

Exemple :

- *La contraposée de $x = 3 \Rightarrow x^2 = 9$ est* . . . .
- *La contraposée de « $x \geq 9 \Rightarrow x^2 \geq 81$ »est* . . . .

Remarque : Véracité d'une réciproque et d'une contraposée

Si une implication $P \Rightarrow Q$ est vraie, alors :

- Sa réciproque n'est pas toujours vraie
- Sa contraposée est toujours vraie. On dira donc qu'une implication et sa contraposée sont équivalente...

Définition : Équivalence

....
....
....
....
....
....

Exemple :

- *Soient trois points A, B, M du plan, M est le milieu de $[AB] \Leftrightarrow \overrightarrow{AM} = \overrightarrow{MB}$.*
- *Soient A, B et C trois points, ABC est rectangle en $B \Leftrightarrow AB^2 + BC^2 = AC^2$.*

Définition : Conditions nécessaires et suffisantes

Lorsque une implication $P \Rightarrow Q$ est vraie, alors :

- Q est une **condition nécessaire** à P. Il faut que la proposition Q soit vraie pour que la proposition P soit vraie.
- P est une **condition suffisante** à Q. En effet, il suffit que P soit vraie pour que Q soit vraie.

Lorsque une équivalence $P \Leftrightarrow Q$ est vraie, alors P est une **condition nécessaire et suffisante** pour Q.

Exemple :
L'équivalence « $xy = 0 \Leftrightarrow (x = 0$ ou $y = 0)$ »est vraie. La proposition « .... »est une condition nécessaire et suffisante à la proposition « (x = 0 ou y = 0) »

IV Les différents types de raisonnement

Définition : Raisonnement par déduction

Ce type de raisonnement consiste à appliquer des règles logiques à des faits ou propriétés connus pour en déduire une conclusion.

Exemple : Montrer que, pour tout réel $x \geq 7, (x-4)+3 \geq 12$.
....
....
....
....
....

Définition : Raisonnement par disjonction des cas

On divise la situation en plusieurs cas possibles. Si l'on démontre que la propriété est vraie dans chacun de ces cas, alors elle est vraie de manière générale.

Exemple : Montrer que, pour tout entier relatif n, $\frac{n(n+1)}{2}$ *est un entier.*

....
....
....
....
....

Définition : Raisonnement par contraposée

On montre que la contraposée de l'implication est vraie, ce qui prouve l'implication.

Exemple : Montrer que $\forall k, k' \in \mathbb{N}^2, kk' = 1 \Rightarrow (k = 1)$ *ou* $(k' = 1)$.

....
....
....
....
....

Définition : Raisonnement par l'absurde

On suppose que la propriété à démontrer est fausse, et on montre que cela mène à une contradiction.

Exemple : Montrer que $\dfrac{1}{3}$ *n'est pas un nombre décimal.*

....
....
....
....
....

Définition : Raisonnement par contre-exemple

Pour prouver qu'une propriété est **fausse**, il suffit de trouver un seul exemple qui la contredit.

Exemple : Montrer que cette implication est fausse : $x < 9 \Rightarrow x^2 < 81$.

....
....
....
....
....

Définition : Raisonnement par récurrence

Le raisonnement par récurrence est un type de raisonnement spécifique que l'on étudiera dans le prochain chapitre.

Chapitre 2
Suites et raisonnement par récurrence

Objectifs :

- ☐ Je connais les notions de suites majorées, minorées, bornées.
- ☐ Je sais trouver un majorant/minorant grâce aux méthodes classiques.
- ☐ Je maîtrise la rédaction du raisonnement par récurrence.
- ☐ Je sais faire une démonstration par récurrence mettant en jeu une égalité.
- ☐ Je sais faire une démonstration par récurrence mettant en jeu une inégalité.

I Suites majorées, minorées, bornées

Définition : Majorant et minorant

Soit (u_n) une suite.

- ....
- ....

Remarque

....

Remarques : Majorant/Maximum et minorant/minimum

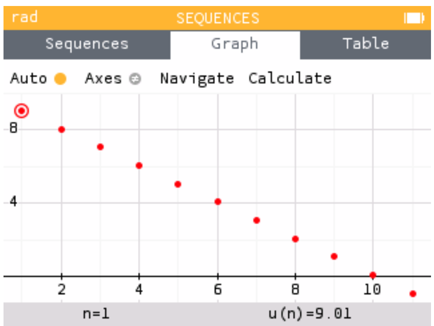
Il faudra veiller à ne pas confondre la notion de majorant/minorant avec celle de maximum/minimum :

- ....
  ....
- ....
  ....

Exemple :
Considérons la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par $u_n = 10 - 0.99n$, représentée ci-contre.
On admet que son maximum est .... pour $n = ...$

Ainsi, 10 est un majorant de (u_n) en tant que maximum, mais ....; ....; ....; ... sont également des majorants de (u_n) puisque tout les termes de la suite seront inférieurs.

Toutefois, la suite (u_n) étant strictement décroissante, elle n'admet pas de minorant.



Définition : Suite bornée

....
....

Méthode : Comment identifier un majorant ou un minorant ?

Pour déterminer ou justifier l'existence d'un minorant ou d'un majorant d'une suite, on pourra utiliser une des méthode suivante :

- Trouver une valeur « évidente ».
- Utiliser les variations de la fonction f si $u_n = f(n)$.
- Étudier le signe de $u_n - m$ ou $M - u_n$ pour justifier une borne.
- Utiliser un **raisonnement par récurrence**...

II Raisonnement par récurrence

Considérons une file illimitée de domino placés les uns devant les autres. On veut s'assurer que si on pousse le premier domino, toute la file tombera. Pour cela, nous allons devoir vérifier deux éléments :

- Est-ce que le premier domino fait tomber le second ? C'est l'initialisation.
- On choisit un domino au hasard, on dira qu'il s'agit du domino n. Est-ce que le domino n fait tomber le domino $n+1$? C'est l'hérédité.

S'il est possible de répondre « oui » au deux questions, alors on sera assuré que tous les dominos de la file vont tomber.

Définition : Hérédité

....
....

....

....
....

Propriété : Principe du raisonnement par récurrence

Soit $P(n)$ une propriété définie pour tout entier $n \geq n_0$. Si :

- ....
- ....

Alors ....

Exemple :
Si on reprend l'exemple des dominos, ma propriété serait : $P(n)$ *: « Le domino* n *fait tomber le domino* $n+1$ *».*
On a commencé par initialisé la propriété en vérifiant que $P(0)$ *était vraie (le domino 0 a fait tomber le domino 1).*
Puis on a vérifier que pour un entier n *fixé,* $P(n)$ *était vraie aussi (le domino* n *a fait tomber le domino* $n+1$*).*
Ainsi, ma propriété $P(n)$ *est vraie pour tout entier* $n \geq 0$ *(tout les dominos de la file vont tomber).*

Remarque : Attention !

....
....

Exemple : Dans l'exemple des dominos, si je m'assure que tout domino n fait tomber le domino $n+1$, mais que le domino 0 ne fait pas tomber le domino 1, il est évident que ma file ne tombera pas...

Méthode : Rédaction d'une récurrence

- **Initialisation** : on vérifie que $P(n_0)$ est vraie.
- **Hérédité** : on suppose $P(k)$ vraie, on montre que $P(k+1)$ est vraie.
- **Conclusion** : on conclut par le principe de récurrence.

Exemples :

- *Montrer, par récurrence, que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $1+2+\cdots+n = \frac{n(n+1)}{2}$.*
- *Soit (u_n) une suite définie sur $\mathbb{N}$ par $u_0 = 2$ et $u_{n+1} = 2u_n - 6$.*
  Montrer, par récurrence, que (u_n) est décroissante.
- *Soit (u_n) une suite définie sur $\mathbb{N}$ par $u_0 = 0$ et $u_{n+1} = \sqrt{4+u_n}$.*
  Montrer, par récurrence, que pour tout $n \geq 1$, $u_n \geq 2$.

III Un exemple important : l'inégalité de Bernoulli

Propriété : Inégalité de Bernoulli

. . . .

Démonstration au programme

Fixons $a \in \mathbb{R}_+^*$ et appelons $P(n)$ la propriété « $(1+a)^n \geq 1+na$ ».

Initialisation : pour $n =$ ......
On a .... et ....
On a bien ....
Donc $P(0)$ est vraie, la propriété est initialisée.

Hérédité : Soit $k \in \mathbb{N}$ fixé tel que $P(k)$ soit vraie. Autrement dit, on a :

.... (...)

Montrons que $P(k+1)$ est vraie aussi (ie. ....)

Donc $P(k+1)$ est vraie, la propriété est héréditaire.

Conclusion : Par principe de récurrence, $P(n)$ est donc vraie pour tout entier n.

Chapitre 3
Limites de suites

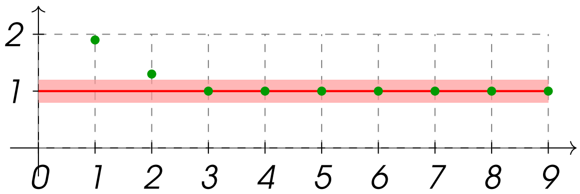
Objectifs :

- ☐ Je connais la définition d'une limite finie et infinie de suite.
- ☐ Je connais les limites des suites de référence.
- ☐ Je sais utiliser ma calculatrice pour conjecturer.
- ☐ Je maîtrise les opérations sur les limites.
- ☐ Je suis capable de rédiger une détermination de limite.
- ☐ Je sais lever une indétermination.

I Limite d'une suite

1 Suite convergente

Exemple :
La suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}^*$ par $u_n = 1 + \frac{1}{n}$ a pour limite 1.
En effet, les termes de la suite se resserrent autour de 1 à partir d'un certain rang.



Si on prend un intervalle ouvert quelconque contenant 1, tous les termes de la suite appartiennent à cet intervalle à partir d'un certain rang.
Intuitivement : dire que (u_n) tend vers L (ou a pour limite L) quand n tend vers $+\infty$, signifie que lorsque n est de plus en plus grand, les nombres u_n correspondant viennent s'accumuler autour de L.

Définition : Limite finie

....
....
....

Définition : Suite convergente

....

Remarque : Définition mathématique

Ainsi, une suite (u_n) est convergente si pour tout intervalle ouvert I contenant L, il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que, si $n \geq n_0$, alors $u_n \in I$.
Or tout intervalle ouvert contenant L contient un intervalle ouvert centré en L, c'est-à-dire de la forme $]L-\varepsilon; L+\varepsilon[$ avec ε un réel strictement positif.

On peut donc réécrire la définition : si pour tout $\varepsilon > 0$, l'intervalle $]L-\varepsilon; L+\varepsilon[$ contient tous les termes de la suite à partir d'un certain rang.
En mathématiques, cela donne donc :

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = L \Leftrightarrow \forall\epsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \geq n_0, u_n \in]L-\epsilon; L+\epsilon[$$

On admet les propriétés suivantes :

Propriété : Unicité de la limite (admise)

....

....

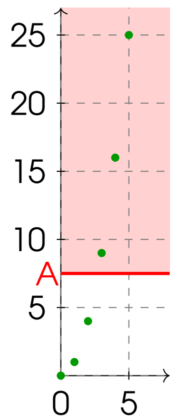
Propriété : Caractérisation (admise)

....

2 Suite divergente

Suites qui ont une limite infinie

Exemple :
La suite (u_n) *définie sur* $\mathbb{N}$ *par* $u_n = n^2$*, représentée ci-contre, a pour limite* $+\infty$.
En effet, les termes de la suite deviennent aussi grands que l'on souhaite à partir d'un certain rang.
Si on prend un réel A *quelconque, l'intervalle* $]A;+\infty[$ *contient tous les termes de la suite à partir d'un certain rang.*



Définition : Limite infinie

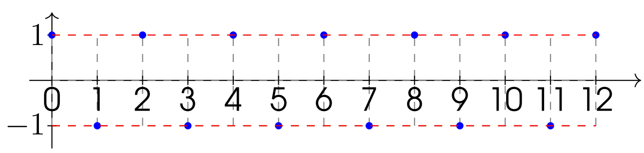
- ....
....
....
- ....
....
....

Suites qui n'ont pas de limite

Remarque

....

Exemple :
La suite de terme général $(-1)^n$ *prend alternativement les valeurs* -1 *et* 1*. Elle n'admet donc pas de limite finie, ni infinie.*



Suites divergentes

Définition : Suite divergente

....

....

....

Algorithme de seuil

Définition : Algorithme de seuil

Un algorithme de seuil est un algorithme qui permet de déterminer à partir de quel rang une suite (u_n) est inférieure ou supérieure à une valeur donnée.

Exemple :
On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 2$ et, pour tout entier n, par : $u_{n+1} = 4u_n$.
Cette suite est croissante et admet pour limite $+\infty$.
Voici un algorithme écrit en langage naturel et en Python :

En langage naturel	*En python*	*Explications*
Définir fonction seuil(A)	`def seuil(A):`	*On définit la fonction*
$n \leftarrow 0$	`n=0`	*On donne le rang du premier terme*
$u \leftarrow 2$	`u=2`	*On donne la valeur du premier terme*
Tant que $u < A$	`while u<a:`	*Tant que u est plus petit que le seuil...*
$n \leftarrow n+1$	`n=n+1`	*On calcule le rang du terme suivant*
$u \leftarrow 4u$	`u=4*u`	*Et la valeur du terme suivant*
Fin Tant que		*Quand u est plus grand, on arrête*
Afficher n	`return n`	*Et on affiche la valeur du rang.*

En appliquant cet algorithme avec $A = 100$, on obtient en sortie $n = 3$. A partir du terme u_3, les termes de la suite dépassent 100.

II Limites de suites de référence

Propriétés : Limites usuelles (partiellement démontrées)

- ....
....
....
- ....
....
....
- ....

Démonstration

- $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{n} = 0$
  Soit un intervalle quelconque ouvert $]-A;A[$, A réel positif non nul, contenant 0.
  Pour tout n, tel que $n > \frac{1}{A}$, on a : $0 < \frac{1}{n} < A$ (passage à l'inverse) et donc $\frac{1}{n} \in]-A;A[$.
  Ainsi, à partir d'un certain rang, tous les termes de la suite appartiennent à l'intervalle $]-A;A[$ ce qui signifie que $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{n} = 0$.
- $\lim\limits_{n\to+\infty} n^2 = +\infty$
  Soit I un intervalle de la forme $]A;+\infty[$ avec A réel strictement positif.
  $u_n \in]A;+\infty[\Leftrightarrow n^2 > A \Leftrightarrow n > \sqrt{A}$ (car n est positif)
  Soit n_0 un entier tel que $n_0 > \sqrt{A}$. Alors, pour tout entier $n \geq n_0$, $u_n \in I$.
  Donc (u_n) a pour limite $+\infty$.

III Opérations sur les limites

1 Limite d'une somme

Propriété : Limite d'une somme

$\lim\limits_{n\to+\infty} u_n =$	L	L	L	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$
$\lim\limits_{n\to+\infty} v_n =$	L'	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$
$\lim\limits_{n\to+\infty} (u_n + v_n) =$	....	....	....	....	....	....

Remarque : Forme Indéterminée (FI)

....

....

....

Exemple :
Déterminons $\lim\limits_{n\to+\infty} n^2 + n$

2 Limite d'un produit

Propriété : Limite d'un produit (admis)

$\lim\limits_{n\to+\infty} u_n =$	L	$L>0$	$L<0$	$L>0$	$L<0$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	0
$\lim\limits_{n\to+\infty} v_n =$	L'	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$\pm\infty$
$\lim\limits_{n\to+\infty} (u_n \times v_n) =$	....	....	....	....	....	....	....	....	....

Remarque : Règle des signes

Le tableau ci-dessus est exhaustif. On peut grandement le simplifier en utilisant la règle des signes.

$\lim\limits_{n\to+\infty} u_n =$	L	L	∞	0
$\lim\limits_{n\to+\infty} v_n =$	L'	∞	∞	∞
$\lim\limits_{n\to+\infty} (u_n \times v_n) =$	....	....	....	....

Exemple :

Déterminons $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\frac{1}{\sqrt{n}} + 1\right)(n^2+3)$

3 Limite d'un quotient

Propriété : Limite d'un quotient (admise)

$\lim\limits_{n\to+\infty} u_n =$	L	$L \neq 0$	L	∞	∞	0
$\lim\limits_{n\to+\infty} v_n =$	$L' \neq 0$	0	∞	L	∞	0
$\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{u_n}{v_n} =$	....	....	....	....	....	....

Exemple :
Déterminons $\lim_{n\to+\infty} \frac{2}{-n^2-3}$

Remarque

Tous ces résultats sont intuitifs. On retrouve un principe sur les opérations de limite semblable à la règle des signes établie sur les nombres relatifs.
Il est important cependant de reconnaître les formes indéterminées pour lesquelles il faudra utiliser des calculs algébriques afin de lever l'indétermination ou utiliser d'autres propriétés sur les calculs de limites.

Les quatre formes indéterminées sont, par abus d'écriture :

$$\infty - \infty \qquad 0 \times \infty \qquad \frac{\infty}{\infty} \qquad \frac{0}{0}$$

4 Levée d'indétermination

Méthode : Comment lever une indéterminée ?

Pour lever les indéterminées du type « $\infty - \infty$ » pour une somme ou « $\frac{\infty}{\infty}$ » pour un quotient, on procède généralement comme ceci :

- Pour une somme : on factorise par le monôme de plus haut degré pour ce ramener à un produit.
- Pour un quotient, on factorise le numérateur et le dénominateur par le monôme de plus haut degré pour simplifier la fraction.

Exemples :
Déterminer les cinq limites suivantes :

- $\lim_{n\to+\infty} n^2 - 5n + 1$
- $\lim_{n\to+\infty} n - 3\sqrt{n}$
- $\lim_{n\to+\infty} \frac{5n^2+4}{4n^2+3n}$
- $\lim_{n\to+\infty} \frac{3n^2+n}{n+3}$
- $\lim_{n\to+\infty} \sqrt{n+2} - \sqrt{n}$

Chapitre 4
Dérivées de fonctions composées

Objectifs :

- ☐ Je connais le tableau de dérivées de fonctions usuelles.
- ☐ Je suis capable de décomposer une fonction composée.
- ☐ Je connais le tableau de dérivées de fonctions composées.
- ☐ Je sais rédiger une étude de dérivabilité.

I Rappels sur les dérivées

Propriétés : Formules des dérivées usuelles (admises)

On considère trois nombres réels a, b et c et un nombre entier naturel n non-nul.

Expression f	Ensemble de définition	Ensemble de dérivabilité	Fonction dérivée f'
$f(x) = c$	....	....	$f'(x) = \dots\dots\dots$
$f(x) = ax + b$	....	....	$f'(x) = \dots\dots\dots$
$f(x) = x^2$	....	....	$f'(x) = \dots\dots\dots$
$f(x) = x^3$	....	....	$f'(x) = \dots\dots\dots$
$f(x) = x^n$	....	....	$f'(x) = \dots\dots\dots$
$f(x) = \sqrt{x}$	....	....	$f'(x) = \dots\dots\dots$
$f(x) = \frac{1}{x}$	....	....	$f'(x) = \dots\dots\dots$
$f(x) = \frac{1}{x^n}$	....	....	$f'(x) = \dots\dots\dots$
$f(x) = e^x$	....	....	$f'(x) = \dots\dots\dots$
$f(x) = \cos(x)$	....	....	$f'(x) = \dots\dots\dots$
$f(x) = \sin(x)$	....	....	$f'(x) = \dots\dots\dots$
$f(x) = \dots\dots\dots$	....	......	$f'(x) = \dots\dots\dots$

Propriétés : Formules de dérivation des opérations usuelles (admises)

Soient $k \in \mathbb{R}$, u et v deux fonctions dérivables sur I, de dérivées u' et v'.

Expression f	Fonction dérivée f'
$f = ku$	$f' = \dots\dots\dots\dots\dots\dots$
$f = u + v$	$f' = \dots\dots\dots\dots\dots\dots$
$f = u \times v$	$f' = \dots\dots\dots\dots\dots\dots$
$f = \frac{u}{v}$	$f' = \dots\dots\dots\dots\dots\dots$

Propriété : Équation réduite de la tangente (admise)

Une équation réduite de la tangente à la courbe de la fonction f au point d'abscisse a est :

....

Théorème

Soit f une fonction définie et dérivable sur un intervalle I.

- Si $f'(x) \leq 0$, alors f est .... sur I.
- Si $f'(x) \geq 0$, alors f est .... sur I.

II Dérivée seconde

Définition : Dérivée seconde

....
....
....

Exemple :
Soit f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 4x^5 - 3x^2 + 1$.

....

Remarques

- Tout comme on se sert du signe de la dérivée pour étudier les variations de la fonction, on se sert parfois du signe de la dérivée seconde pour étudier les variations de la dérivée.
- La dérivée seconde est utile pour savoir si une fonction est convexe ou concave... mais nous y reviendront plus tard.

III Fonction composée

1 Définition

Définition : Composition de u par v

Soient u et v deux fonctions telles que u est définie sur I à valeurs dans J (c'est-à-dire que pour tout $x \in I$, $u(x) \in J$) et v définie sur J.

$$u : \begin{array}{ccc} I & \rightarrow & J \\ x & \mapsto & u(x) \end{array} \quad \text{et} \quad v : \begin{array}{ccc} J & \rightarrow & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & v(x) \end{array}$$

On appelle **fonction composée de u par v** la fonction notée $v \circ u$ (si lit « v rond u ») définie sur I par $v \circ u : x \mapsto v(u(x))$. Autrement dit, on a :

$$v \circ u : \begin{array}{ccccc} I & \xrightarrow{u} & J & \xrightarrow{v} & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & u(x) & \mapsto & v(u(x)) \end{array}$$

Exemple :
Soit $u : x \mapsto 2x - 3$ et $v : x \mapsto \sqrt{x}$.
La fonction $v \circ u$ est définie sur $\left[\frac{3}{2}; +\infty\right[$ par $v \circ u(x) =$ ....

Remarques : Attention au domaine de définition !

- Dans l'exemple ci-dessus, $u(1)$ existe (et vaut -1) mais $v(u(1)) = v(-1)$ n'existe pas car la fonction racine carrée est définie sur $\mathbb{R}^+$. Il faut donc vérifier pour quelles valeurs de x, $u(x) > 0$.
- De même, $v \circ u$ et $u \circ v$ non pas forcément le même ensemble de définition. Ici, $u \circ v$ est définie sur $[0; +\infty[$ par $u \circ v(x) = u(v(x)) = 2\sqrt{x} - 3$.
- C'est un contre-exemple qui illustre le fait que la composition n'est pas commutative : $v \circ u \neq u \circ v$.

Remarque : Associativité

La composition est associative : $u \circ (v \circ w) = (u \circ v) \circ w$.

Propriété : Variations (admises)

- ....
  ....
- ....
  ....

2 Dérivée d'une composée

Théorème : Dérivée d'une fonction composée (admis)

Soient u et v deux fonctions (vérifiant les conditions de définition requises) dérivables, de dérivées respectives u' et v'.
Alors la fonction $v \circ u$ est dérivable, et sa dérivée s'écrit :

....

Autrement dit : pour tout réel x (vérifiant les conditions de définition requises) :

....

Exemple :

Soit $u(x) = 2x^2 - 3$ *et* $v(x) = \sqrt{x}$. *On a donc* $u'(x) =$ .... *et* $v'(x) =$ ....
Alors $(v \circ u)'(x) =$ ....

Remarque

Ce théorème généralise la formule de composition affine vue l'an passé :

....

En effet, en posant $g = v$ et $f(x) = ax + b$, on obtient la formule du théorème.

3 Tableau de dérivation des fonctions composées

Propriétés : Formules de dérivation de fonctions composées

Soient $a, b \in \mathbb{R}^2$, $n \in \mathbb{N}$ et u, v deux fonctions dérivables sur I, de dérivées u' et v'.

Expression f	Fonction dérivée f'
$f = au + b$	$f' = \dots\dots\dots\dots\dots\dots$
$f = u^2$	$f' = \dots\dots\dots\dots\dots\dots$
$f = u^3$	$f' = \dots\dots\dots\dots\dots\dots$
$f = u^n$	$f' = \dots\dots\dots\dots\dots\dots$
$f = \sqrt{u}$	$f' = \dots\dots\dots\dots\dots\dots$
$f = \frac{1}{u}$	$f' = \dots\dots\dots\dots\dots\dots$
$f = \frac{1}{u^n}$	$f' = \dots\dots\dots\dots\dots\dots$
$f = e^u$	$f' = \dots\dots\dots\dots\dots\dots$
$f = \dots\dots\dots$	$f' = \dots\dots\dots\dots\dots\dots$

Démonstration

- La fonction u^n est la composée de la fonction u suivie de $v : x \mapsto x^n$.
  Or, pour tout réel x, $(v \circ u)'(x) = u'(x) \times (v' \circ u)(x)$ avec $v'(x) = nx^{n-1}$.
  Donc, $(v \circ u)'(x) = u'(x) \times n \times (u(x))^{n-1} = n \times u'(x) \times (u(x))^{n-1}$
- La fonction $\sqrt{u}$ est la composée de la fonction u suivie de $v : x \mapsto \sqrt{x}$.
  Or, pour tout réel x, $(v \circ u)'(x) = u'(x) \times (v' \circ u)(x)$ avec $v'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$.
  Donc, $(v \circ u)'(x) = u'(x) \times \frac{1}{2\sqrt{u(x)}} = \frac{u'(x)}{2\sqrt{u(x)}}$
- La fonction e^u est la composée de la fonction u suivie de $v : x \mapsto e^x$.
  Or, pour tout réel x, $(v \circ u)'(x) = u'(x) \times (v' \circ u)(x)$ avec $v'(x) = e^x$.
  Donc, $(v \circ u)'(x) = u'(x) \times e^{u(x)}$

Exemple 1 *: Soit f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = (-2x^2 + 1)^3$.*
f est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme composée d'une fonction polynôme du 2nd degré et de la fonction cube, toutes deux dérivables sur $\mathbb{R}$.

Or $(u^3)' = \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$ *avec* $\begin{cases} u(x) = \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots + 1 \\ u'(x) = \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \end{cases}$

Ainsi, pour tout $x \in \mathbb{R}$: $f'(x) = \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$

Exemple 2 *: Soit g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = e^{3x^2-x+1}$.*
g est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme composée d'une fonction polynôme du 2nd degré et de la fonction exponentielle, toutes deux dérivables sur $\mathbb{R}$.

Or $(e^u)' = \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$ *avec* $\begin{cases} u(x) = \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ u'(x) = \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \end{cases}$

Ainsi, pour tout $x \in \mathbb{R}$: $g'(x) = \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$

Chapitre 5
Théorèmes de convergence

Objectifs :

- ☐ Je sais utiliser le théorème de comparaison pour déterminer une limite.
- ☐ Je sais utiliser le théorème d'encadrement pour déterminer une limite.
- ☐ Je maîtrise les théorèmes de convergence d'une suite.
- ☐ Je sais déterminer la limite d'une suite de la forme (q^n)
- ☐ Je sais utiliser le théorème du point fixe.

I Théorèmes sur les limites

Dans la suite, on considère trois suites (u_n), (v_n) et (w_n) ainsi qu'un entier N

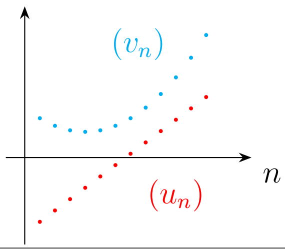
1 Comparaison

Théorème de comparaison (démontré)

....

....

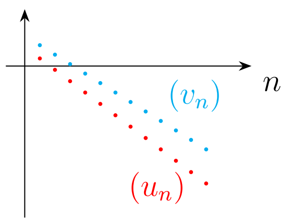
....



....

....

....



Démonstration au programme

Nous allons démontrer uniquement le premier cas.

Soit un nombre réel A.

- ....
  ....
- ....
- ....
- ....

....

....

....

Exemple :
Soit une suite (u_n) telle que, pour $n \geq 20$, on a $u_n > n^2$.

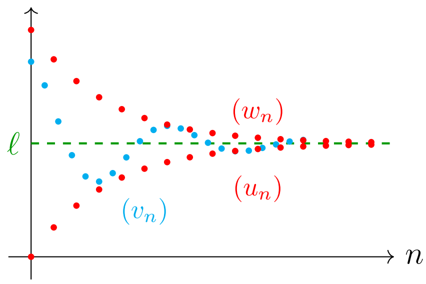
....
....

2 Encadrement

Théorème d'encadrement (admis)

Considérons également la suite (w_n).
....
....
....

....



Démonstration

Soit un intervalle ouvert I contenant L.

- $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = L$, donc l'intervalle I contient tous les termes de la suite à partir d'un certain rang que l'on note n_1.
- $\lim\limits_{n \to +\infty} w_n = L$, donc l'intervalle I contient tous les termes de la suite à partir d'un certain rang que l'on note n_2.
- À partir d'un certain rang, que l'on note n_3, on a $u_n \leq v_n \leq w_n$.
- Ainsi, pour tout $n \geq \max(n_1, n_2, n_3)$, l'intervalle I contient tous les termes de la suite (v_n).

Donc $\lim\limits_{n \to +\infty} v_n = L$

Exemple :
Considérons la suite définit par $v_n = \dfrac{\sin n}{n}$.

....
....
....
....

II Limite des suites géométriques

Propriété : Suites géométriques (rappel, admis)

Soit (u_n) une suite géométrique de raison q et de premier terme u_0.
Alors, pour tout entier naturel n, on a :

- $u_{n+1} = q \times u_n$ (formule de récurrence)
- $u_n = u_0 \times q^n$ (formule explicite)

Exemple :

Soit (u_n) une suite géométrique de raison -3 et de premier terme 5.
On a : . . . .

Propriétés : Limites de q^n (démontrées)

q	....	....	....	....
$\lim\limits_{n\to+\infty} q^n$	....	....	....	....

Démonstration au programme

Nous allons démontrer le cas $q > 1$ uniquement.

Prérequis : Inégalité de Bernoulli
Pour tout entier naturel n, on a :

....

démontrée dans le chapitre « SUITES ET RÉCURRENCE ».

. . . .

....

. . . .

Donc d'après le théorème de comparaison :

....

III Monotonie et convergence

1 Suites convergentes

Propriété : Lien entre convergence et suite bornée

. . . .
. . . .

Remarque

1. La réciproque est fausse. En effet : (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par $u_n = (-1)^n$ prend ses valeurs dans $[-1; 1]$ mais diverge.
2. La contraposée d'une implication étant toujours vraie, on peut énoncer le résultat suivant : Si une suite est non-bornée, alors elle est divergente.

Théorème de convergence monotone (admis)

- ....
....
- ....
....

Remarque

Attention, ce théorème est un théorème d'existence : il permet de prouver uniquement la convergence de la suite. Il ne donne pas explicitement la limite.

2 Suites divergentes

Propriété : Divergence

- ....
....
- ....
....

Démonstration au programme

- On considère une suite (u_n) croissante et non-majorée et un intervalle I de la forme $]A;+\infty[$ $(A \in \mathbb{R})$.
Comme la suite (u_n) n'est pas majorée, ...
....
Comme la suite (u_n) est croissante, ...
....
Donc ....
....
....
D'où ....
- On considère une suite (u_n) décroissante et non-minorée et la suite (v_n) de terme général $v_n = -u_n$.
La suite (v_n) est croissante et non-majorée donc, d'après le point précédent, elle a pour limite $+\infty$.
On en déduit que $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = -\infty$.

Chapitre 6
Convexité d'une fonction

Objectifs :

- ☐ Je connais les définitions de la convexité et de la concavité.
- ☐ Je maîtrise les propriétés liées à la convexité et à la concavité.
- ☐ Je sais identifier la convexité et la concavité sur une représentation graphique.
- ☐ Je connais la définition d'un point d'inflexion.
- ☐ Je connais les propriétés du point d'inflexion.
- ☐ Je sais identifier un point d'inflexion sur une représentation graphique.
- ☐ Je maîtrise les inégalités de convexité.

I Convexité d'une fonction

1 Définitions et propriétés

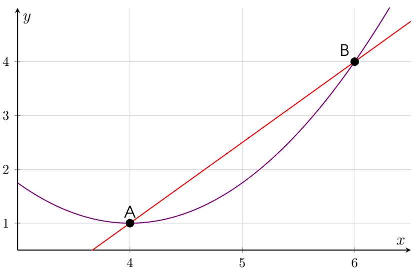
Définition : Sécante

Soient f une fonction et $\mathcal{C}_f$ sa courbe représentative dans un repère du plan, et A et B deux points de $\mathcal{C}_f$.

....

....

....



Définition : Convexité

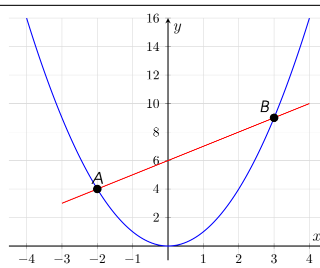
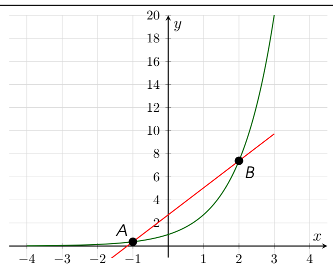
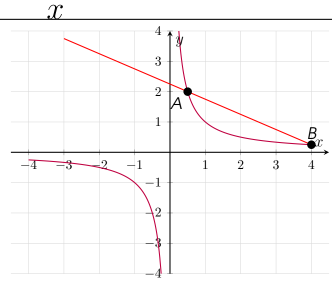
Soient f une fonction et $\mathcal{C}_f$ sa courbe représentative dans un repère du plan.

....

....

....

Exemples :

$x \mapsto x^2$ *est convexe sur* $\mathbb{R}$	$x \mapsto e^x$ *est convexe sur* $\mathbb{R}$	$x \mapsto \dfrac{1}{x}$ *est convexe sur* $\mathbb{R}_+^*$
		

Théorème : Convexité (démontré)

Soit f deux fois dérivable sur un intervalle I. Alors, on a :

- ....
- ....
- ....

Remarques

- Il y a équivalence entre ces trois propriétés.
- Attention à la réciproque : une fonction convexe n'est pas obligatoirement deux fois dérivable !

Démonstration au programme

Nous allons démontrer l'implication :

« Si f'' est positive sur I, alors f est au-dessus de chacune de ses tangentes »

Soit f une fonction définie et deux fois dérivable sur un intervalle I et telle que f'' est positive sur I. Soit a un réel de I. Une équation de la tangente à la courbe de f en son point d'abscisse a est donnée par :

$$y = \text{...}$$

Soit g la fonction définie pour tout réel x de I par : $g(x) =$ ....
g est dérivable sur I et pour tout réel x de I : $g'(x) =$ ....
Comme f'' est positive sur I, f' est une fonction croissante sur I donc :

- si $x \leq a$, on a ....
- si $x \geq a$, ...

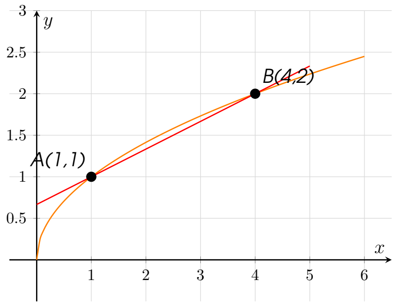
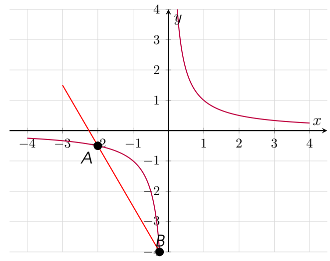
Ainsi, g admet donc un minimum en a et $g(a) = 0$:

On en déduit que g est toujours positive sur I ;
Or ....
La courbe de f est donc au-dessus de sa tangente en a, donc de toutes les tangentes.

Définition : Concavité

Soient f une fonction et $\mathcal{C}_f$ sa courbe représentative dans un repère du plan.
On dit que f est **concave** sur un intervalle I lorsque $\mathcal{C}_f$ est au-dessus de ses sécantes sur I.

Exemples :

$x \mapsto \sqrt{x}$ *est concave sur* $\mathbb{R}_+$	$x \mapsto \frac{1}{x}$ *est concave sur* $\mathbb{R}^*_-$
	

Propriété : Concavité

Soit f deux fois dérivable sur un intervalle I. Alors :

- ....
- ....
- ....
  ....

Exemple : Soit f la fonction définie et dérivable sur $\mathbb{R}$. Voici les variations de f'
Alors f est .... *sur* $]-\infty; 3]$ *et* .... *sur* $[3; +\infty[$.

x	$-\infty$	3	$+\infty$
f'	$+\infty$ ↘	0	↗ $+\infty$

Remarque : Lien convexité/concavité

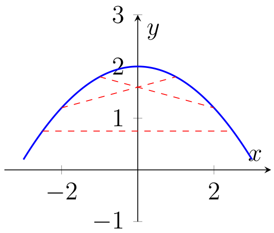
f est convexe sur I si et seulement si $-f$ est concave sur I.

Exemple :
On sait que $x \mapsto e^x$ est convexe sur $\mathbb{R}$ donc $x \mapsto -e^x$ est concave sur $\mathbb{R}$.

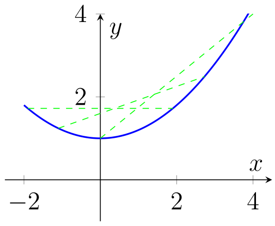
Méthode : Comment étudier GRAPHIQUEMENT la convexité d'une fonction ?

On donne la courbe représentative $\mathcal{C}_f$ d'une fonction f dérivable sur $[-3; 3]$ et celle d'une fonction g deux fois dérivable sur $[-2; 4]$.

Courbe $\mathcal{C}_g$



Courbe $\mathcal{C}_g$



- D'après les trois cordes, on peut conjecturer que f semble être concave sur $[-3; 3]$ car les cordes semblent être toutes en dessous de $\mathcal{C}_f$. (f' est donc décroissante sur $[-3; 3]$, et f'' est négative)
- Les tangentes semblent être toutes en dessous de $\mathcal{C}_g$ dont la fonction g semble être convexe sur $[-2; 4]$.

Méthode : Comment étudier ALGÉBRIQUEMENT la convexité d'une fonction ?

Étudions la convexité de f définie sur $]-2;+\infty[$ par $f(x)=\frac{1}{x+2}$.
f est dérivable sur $]-2;+\infty[$ et pour tout $x\in]-2;+\infty[$, $f'(x)=-\frac{1}{(x+2)^2}$.
f' est dérivable sur $]-2;+\infty[$ et pour tout $x\in]-2;+\infty[$, $f''(x)=\frac{2}{(x+2)^3}$.
Ainsi, pour tout $x\in]-2;+\infty[$, $f''(x)>0$ donc f est convexe.

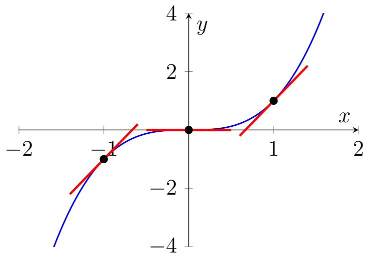
II Exploitation de la convexité

1 Point d'inflexion

Définition : Point d'inflexion

Soit f une fonction définie et dérivable sur un intervalle I.
....
....

Exemple :
Soit f la fonction cube et $\mathcal{C}_f$ sa courbe représentative.
On remarque que l'origine du repère $O(0;0)$ est un point d'inflexion pour $\mathcal{C}_f$.
En revanche, les tangentes en -1 et en 1 ne traversent pas la courbe : les points de coordonnées $(-1;f(-1))$ et $(1;f(1))$ ne sont donc pas des points d'inflexion.



Propriétés : Point d'inflexion (admises)

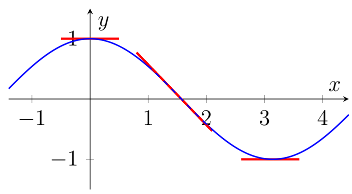
Soit f une fonction définie et dérivable sur un intervalle I.
1. ....
....
2. ....
....

Remarque

La condition f'' s'annule n'est pas une condition suffisante, il faut aussi que f'' change de signe en ce point pour qu'il y ait un point d'inflexion.

Méthode : Comment déterminer les points d'inflexion d'une courbe ?

Méthode 1 - Graphiquement
Soit une fonction f définie sur $[-1,4;4,45]$.
Sur $[-1,4;1,6]$, ...
....



Sur $[1,6;4,45]$, ...
De plus, la courbe change de convexité en $x=1,6$ et $f(1,6)=0$.
Donc ....

Chapitre 7
Limites de fonctions

Objectifs :

- ☐ Je maîtrise la notion de limite infinie et fini en l'infini.
- ☐ Je connais les limites des fonctions de référence en l'infini.
- ☐ Je maîtrise la notion de limite infinie en un nombre fini.
- ☐ Je connais la notion d'asymptotes horizontale et verticale.
- ☐ Je connais les théorèmes d'opérations des limites.
- ☐ Je maîtrise le théorème de comparaison et le théorème des gendarmes.
- ☐ Je connais les limites liées à l'exponentielle.
- ☐ Je sais lever une forme indéterminée.
- ☐ Je sais lever une indétermination avec des croissances comparées

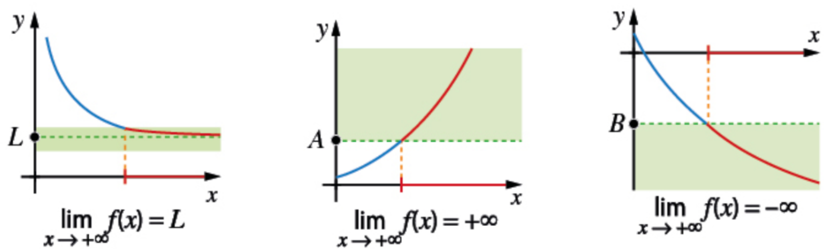
I Limites et asymptote

1 Limite en $+\infty$ ou en $-\infty$

Définitions : Limites en $+\infty$

Soit f étudiée sur un intervalle de la forme $[\alpha; +\infty[$.

- On dit que la limite de f en $+\infty$ est égale à L si, et seulement si, tout intervalle ouvert contenant L contient toutes les valeurs $f(x)$ dès que x est assez grand.
  On écrit $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = L$.
- On dit que la limite de f en $+\infty$ est égale à $+\infty$ si, et seulement si, tout intervalle $]A; +\infty[$ contient toutes les valeurs $f(x)$ dès que x est assez grand. On écrit $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$.
- On dit que la limite de f en $+\infty$ est égale à $-\infty$ si, et seulement si, tout intervalle $]-\infty; B[$ contient toutes les valeurs $f(x)$ dès que x est assez grand. On écrit $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$.



Remarque

Ces définitions sont analogues à celles données pour les limites d'une suite, « *dès que x est assez grand* » remplaçant « *à partir d'un certain rang* ».

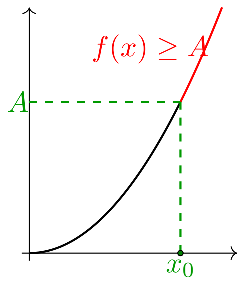
Remarques : Définitions mathématiques

Tout comme pour les suites, on peut donner la version mathématique des définitions précédentes :

1. ....
2. ....
3. ....

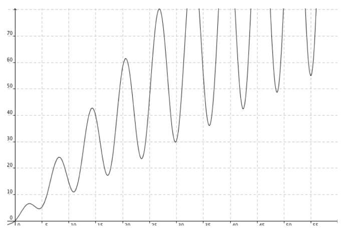
Exemple :
La fonction $f(x) = x^2$ a pour limite $+\infty$ lorsque x tend vers $+\infty$.
Par exemple : $f(100) = 10\ 000$, $f(1\ 000) = 1\ 000\ 000$, ...

Les valeurs de la fonction deviennent aussi grandes que l'on veut dès que x est suffisamment grand.

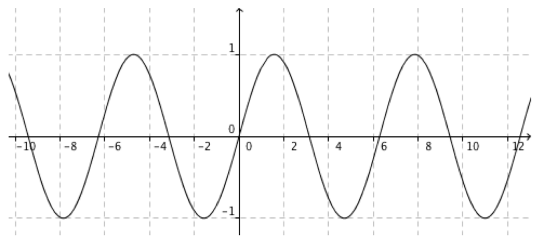


Remarques

- Une fonction qui tend vers $+\infty$ lorsque tend vers $+\infty$ n'est pas nécessairement croissante. Par exemple :



- Il existe des fonctions qui ne possèdent pas de limite infinie. C'est le cas des fonctions sinusoïdales.

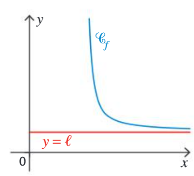


Remarque : Limite en $-\infty$

On peut énoncer des définitions similaires pour les limites en $-\infty$: « *dès que x est assez grand* »est alors remplacé par « *dès que x est négatif et assez grand en valeur absolue* ».

Définition : Asymptote horizontale

....
....
....
....



Propriétés : Limites de fonctions de références (démontrées)

	x^2	x^3	x^n (n pair)	x^n (n impair)	$\sqrt{x}$	$\frac{1}{x}$	e^x
$\lim\limits_{x \to +\infty}$	....	....	....	....	....	....	....
$\lim\limits_{x \to -\infty}$	....	....	....	....	....	....	....

Démonstration au programme

Nous allons démontrer que $\lim\limits_{n \to +\infty} e^x = +\infty$.

. . . .

Donc, ...

Or, ...

. . . .

Ainsi, ...

2 Limite finie ou infinie en un réel

Définitions : Limites en un réel a

Soit f étudiée sur $[a - r; a[$ ou sur $]a; a + r]$, avec r un réel positif non nul.

- La limite de f en a est égale à L si, et seulement si, tout intervalle ouvert contenant L contient toutes les valeurs $f(x)$ dès que x est suffisamment proche de a.
  On écrit $\lim\limits_{x \to a} f(x) = L$
- La limite de f en a est égale à $+\infty$ si, et seulement si, tout intervalle $]A; +\infty[$ contient toutes les valeurs $f(x)$ dès que x est suffisamment proche de a.
  On écrit $\lim\limits_{x \to a} f(x) = +\infty$
- La limite de f en a est égale à $-\infty$ si, et seulement si, tout intervalle $] - \infty; B[$ contient toutes les valeurs $f(x)$ dès que x est suffisamment proche de a.
  On écrit $\lim\limits_{x \to a} f(x) = -\infty$

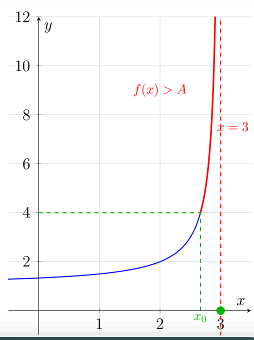
Exemple :

La fonction $f(x) = \dfrac{1}{3 - x} + 1$ *a pour limite* $+\infty$ *lorsque* x *tend vers* 3.

Par exemple : $f(2{,}99) = 101$, $f(2{,}999\,9) = 10\,001$, ...

Les valeurs de la fonction deviennent aussi grandes que l'on veut dès que x *est suffisamment proche de 3.*

La courbe de la fonction "se rapproche" de la droite d'équation $x = 3$ *sans jamais la toucher.*

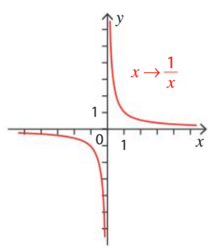


Remarque

Une fonction peut avoir une **limite "à droite"** et une **limite "à gauche"** qui sont différentes.

Par exemple, avec la fonction inverse, on a :

.... et ....

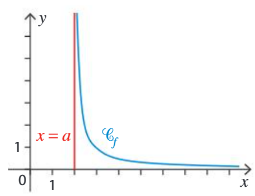


Définition : Asymptote verticale

. . . .

. . . .

. . . .



Propriétés : Limites de fonctions de références (admises)

On distingue deux cas :

- ....
....
- ....

	$\frac{1}{x}$	$\frac{1}{x^n}$ (n pair)	$\frac{1}{x^n}$ (n impair)
$\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}}$	....	....	....
$\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x<0}}$	....	....	....

II Opération sur les limites

Propriété : Limite d'une somme (admis)

$\lim\limits_{n\to+\infty} u(x) =$	L	L	L	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$
$\lim\limits_{n\to+\infty} v(x) =$	L'	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$
$\lim\limits_{n\to+\infty} (u(x)+v(x)) =$	....	....	....	....	....	....

Propriété : Limite d'un produit (admis)

$\lim\limits_{n\to+\infty} u(x) =$	L	L	∞	0
$\lim\limits_{n\to+\infty} v(x) =$	L'	∞	∞	∞
$\lim\limits_{n\to+\infty} (u(x)\times v(x)) =$	....	....	....	....

Propriété : Limite d'un quotient (admise)

$\lim\limits_{n\to+\infty} u(x) =$	L	$L\neq 0$	L	∞	∞	0
$\lim\limits_{n\to+\infty} v(x) =$	$L'\neq 0$	0	∞	L	∞	0
$\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{u(x)}{v(x)} =$	....	....	....	....	....	....

Remarque

Le choix entre « $+\infty$ »et « $-\infty$ »est déterminer par le signe de $u(x)$ et $v(x)$.

Attention aux limites valant 0 ! Il faudra déterminer si la fonction tend vers 0 en restant positive ou négative !

Exemple :
Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}\setminus 1$ par $f(x)=\frac{2x}{x-1}$.
On a :

Or, on a :

Méthode : Comment lever une indétermination ?

Pour lever les indéterminées, on procède généralement comme ceci :

- Pour une somme : on factorise par le monôme de plus haut degré pour ce ramener à un produit.
- Pour un quotient, on factorise le numérateur et le dénominateur par le monôme de plus haut degré pour simplifier la fraction.
- En utilisant un des théorèmes ci-après

III Théorèmes sur les limites

Dans tout ce qui suit, a, b et c désignent une valeur finie ou $\pm\infty$.

1 Composition des limites

Propriété : Composition des limites (admise)

Soit u une fonction définie sur I à valeur dans J et v une fonction définie sur J.
Si $\lim\limits_{n\to a} u(x) = b$ et $\lim\limits_{n\to b} v(x) = c$ alors $\lim\limits_{n\to a} v \circ u = \lim\limits_{n\to a} v(u(x)) = c$

Exemple : On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = e^{-x+3}$. On a :

2 Théorème de comparaison

Théorème de comparaison (admis)

Soient f et g deux fonctions définies au voisinage de a et qui vérifient sur ce voisinage $f(x) \leq g(x)$.

- . . . .
- . . . .
- . . . .

Exemple : Étudier la limite en $+\infty$ de $f(x) = 3x - 2 + \cos x$.
Pour tout x réel, ...
Or . . . .

3 Théorème des gendarmes

Théorème d'encadrement (admis)

Soient f, u et v trois fonctions définies au voisinage de a qui vérifient sur ce voisinage $u(x) \leq f(x) \leq v(x)$.
. . . .

Exemple : Étudier la limite en $+\infty$ de $f(x) = \frac{\sin x}{x}$.
On a : . . . .
Or . . . .

4 Croissances comparées

Propriétés : Croissances comparées

La fonction exponentielle l'emporte sur les puissances entières :

(a) .... (b) .... (c) ....

Démonstration au programme

Nous allons démontrer le (a).

Pour $n = 1$

Soit g la fonction définie sur l'intervalle $[0; +\infty[$ par $g(x) = e^x - \dfrac{x^2}{2}$.

La fonction g est dérivable sur $[0; +\infty[$ et pour tout réel $x \geq 0$, $g'(x) = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

La fonction g' est dérivable sur $[0; +\infty[$ et pour tout réel x positif, $g''(x) = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

Ainsi, sur $[0; +\infty[$, $g''(x) \geq 0$ (car $e^x \geq 1$). Donc, on a :

Ainsi, pour tout réel $x \geq 0$, $\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

Ainsi, pour tout réel $x > 0$, $\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

Or $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x}{2} =$ .... donc, d'après le théorème de comparaison, $\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

Pour n entier naturel supérieur ou égal à 2

Pour tout réel x non nul, $\dfrac{e^x}{x^n} = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

Or, $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x}{n} =$ .... et, d'après la première partie, $\lim\limits_{X \to +\infty} \dfrac{e^X}{X} =$ ....

Donc, par composition, $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{e^{\frac{x}{n}}}{\frac{x}{n}} =$ ....

De plus $\frac{1}{n} > 0$, donc $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(\dfrac{1}{n} \times \dfrac{e^{\frac{x}{n}}}{\frac{x}{n}} \right) =$ ....

Finalement, $\lim\limits_{x \to +\infty} X^n =$ .... donc, par composition, $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(\dfrac{1}{n} \times \dfrac{e^{\frac{x}{n}}}{\frac{x}{n}} \right)^n =$ ....

On a donc bien $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{e^x}{x^n} =$ ....

Chapitre 8
Continuité

Objectifs :

- ☐ Je connais la définition de la continuité d'une fonction.
- ☐ Je connais des exemples de fonctions discontinues.
- ☐ Je maîtrise le lien entre continuité et dérivabilité.
- ☐ Je sais utiliser le théorème des valeurs intermédiaires.
- ☐ J'utilise le théorème du point fixe pour calculer une limite.

I Continuité en un point

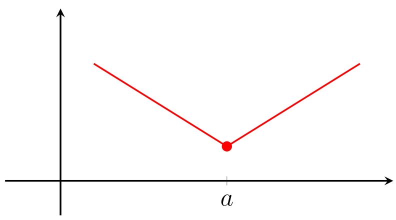
1 Notion de continuité

Définition : Continuité en un point

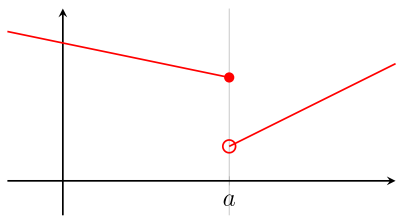
Soit une fonction f définie sur un intervalle ouvert I. Soit a un élément de I.

....

Exemples :



f est continue en a



f n'est pas continue en a

Définition : Continuité sur un intervalle

....

....

Remarque

Graphiquement, la continuité d'une fonction f sur un intervalle I se traduit par une courbe que l'on peut tracer « sans lever le crayon ».

2 Continuité des fonctions usuelles

Propriétés : Continuité des fonctions usuelles (admises)

- Les fonctions polynômes sont continues sur ....
- La fonction inverse $x \mapsto \frac{1}{x}$ est continue sur ....
- La fonction valeur absolue $x \mapsto |x|$ est continue sur ....
- La fonction racine carrée $x \mapsto \sqrt{x}$ est continue sur ....
- Les fonctions $x \mapsto \sin(x)$ et $x \mapsto \cos(x)$ sont continues sur ....
- La fonction $x \mapsto e^x$ est continue sur ....

Remarques

- D'une façon générale, toutes les fonctions construites par opération ou par composition à partir des fonctions ci-dessus sont continues sur leur ensemble de définition, en particulier les fonctions rationnelles.
- De même, on admet que dans un tableau de variation, les flèches traduisent la continuité ainsi que la stricte monotonie de la fonction.

II Continuité et dérivabilité

Propriété : Lien entre continuité et dérivabilité (démontrée)

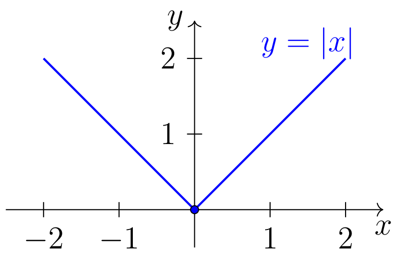
- ....
- ....

Démonstration

Soit a un réel de I tel que f est dérivable en a.
On a donc $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{f(x) - f(a)}{x - a} = f'(a)$ (taux d'accroissement de f en a)
Pour tout $x \neq a$, on pose $g(x) = \frac{f(x)-f(a)}{x-a}$.
On sait que f est dérivable en a donc $\lim\limits_{x \to a} g(x) = f'(a)$.
Or, pour $x \neq a$, on a $f(x) - f(a) = g(x)(x - a)$ et donc $f(x) = f(a) + g(x)(x - a)$.
Et donc finalement : $\lim\limits_{x \to a} f(x) = f(a) + 0 = f(a)$. Ainsi, f est continue en a.
On a choisi a quelconque dans I donc f est continue sur I.

Remarque : Réciproque fausse !

La réciproque est fausse !
Si une fonction est continue sur un intervalle I, sa représentation graphique est « en un seul morceau ». Si la fonction est dérivable, sa représentation graphique admet une tangente en chacun de ses points.
Par exemple, la fonction valeur absolue est continue sur $\mathbb{R}$ mais non dérivable en 0 :

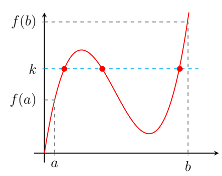


III Continuité et équation

1 Théorème des valeurs intermédiaires

Théorème : Théorème des valeurs intermédiaires (admis)

....
....
....
....



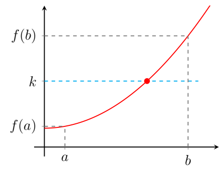
Remarque : Pour aller plus loin

Ce théorème résulte du fait que l'image d'un intervalle de $\mathbb{R}$ par une fonction continue est un intervalle de $\mathbb{R}$.

2 Théorème des valeurs intermédiaires renforcé

Théorème : Théorème des valeurs intermédiaires renforcé (admis)

....
....
....
....



Remarques

- On peut généraliser ce théorème à l'intervalle $I =]a;b[$. Dans ce cas, k doit être compris entre $\lim_{x \to a^+} f(x)$ et $\lim_{x \to b^-} f(x)$.
- Lorsque $k = 0$, on pourra montrer que $f(a) \times f(b) < 0$.
- Ce théorème est aussi appelé théorème de la bijection car la fonction réalise une bijection de I sur $f(I)$.

IV Méthode d'encadrement

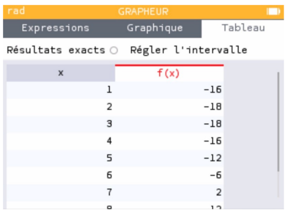
Lorsque qu'on travaille avec des fonctions un peu « compliquées », on ne peut pas toujours résoudre par le calcul une équation. On peut donc avoir besoin de donner une valeur approchée des solutions. Pour cela, on peut utiliser une de ces méthodes.

1 Encadrement par balayage

Méthode : Comment encadrer une solution par balayage ?

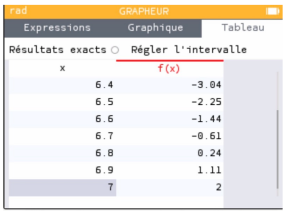
On entre la fonction dans la calculatrice , on créée des tableaux de valeurs successifs en divisant le pas par 10 à chaque fois.

Exemple : Cherchons la solution de $x^2 - 5x - 12 = 0$ *à* $0,001$ *près dans l'intervalle* $[1, 8]$.



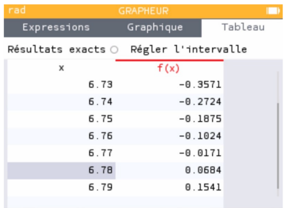
x	f(x)
1	-16
2	-18
3	-18
4	-16
5	-12
6	-6
7	2

On commence par aller de 1 à 8 avec un pas de 1.



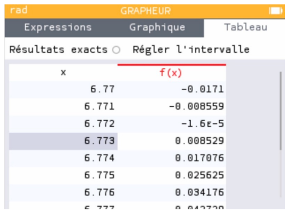
x	f(x)
6.4	-3.04
6.5	-2.25
6.6	-1.44
6.7	-0.61
6.8	0.24
6.9	1.11
7	2

On commence par aller de 6 à 7 avec un pas de 0.1.



x	f(x)
6.73	-0.3571
6.74	-0.2724
6.75	-0.1875
6.76	-0.1024
6.77	-0.0171
6.78	0.0684
6.79	0.1541

On commence par aller de 6.7 à 6.8 avec un pas de 0.01.



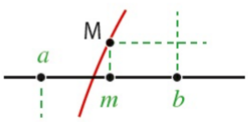
x	f(x)
6.77	-0.0171
6.771	-0.008559
6.772	-1.6ε-5
6.773	0.008529
6.774	0.017076
6.775	0.025625
6.776	0.034176

On commence par aller de 6.77 à 6.78 avec un pas de 0.001.

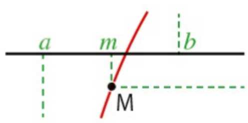
2 Encadrement par dichotomie

Méthode : Comment encadrer une solution par dichotomie ?

Le principe est de déterminer successivement l'intervalle dans lequel se situe la solution α, en divisant par deux l'amplitude de l'intervalle à chaque étape.
Pour cela, on calcule le milieu m de l'intervalle $[a;b]$ puis on regarde si la solution α se trouve dans $[a;m]$ ou bien dans $[m;b]$.



Si la solution est dans $[a;m]$, on réitère le procédé dans $[a;m]$.



Si la solution est dans $[m;b]$, on réitère le procédé dans $[m;b]$.

Remarques

- f doit être continue, strictement monotone sur l'intervalle $[a;b]$ et telle que $f(a)$ et $f(b)$ soit de signes contraires.
- Il est nécessaire de connaitre l'amplitude de l'encadrement demandé pour savoir quand s'arrêter.

Variables
A, B, M, ε, f (fonction)

Algorithme
Lire A, B, P
TantQue .... **faire :**
    ....
    Si ....
        ....
    Sinon
        ....
    FinSi
FinTantQue

Afficher : A, B

```python
from math import *

def f(x):
    y=x**3-5*x+2
    return y

def dichotomie(a,b,e):
    while ..............  :
        ..............
        if ..............:
            ..............
        else:
            ..............
    return a,b
```

V Application aux suites

Théorème du point fixe (démontré)

Soit une suite (u_n) définie par u_0 et $u_{n+1} = f(u_n)$ convergente vers l.
....
....

Démonstration

On sait que la suite (u_n) converge vers l donc $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = l$.
De plus, la fonction f est continue en l donc $\lim\limits_{x\to l} f(x) = f(l)$.
Par composition, on en déduit que : $\lim\limits_{n\to+\infty} f(u_n) = f(l) \Leftrightarrow \lim\limits_{n\to+\infty} u_{n+1} = f(l)$
Or $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \lim\limits_{n\to+\infty} u_{n+1} = l$ donc $f(l) = l$.

Exemple :
Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = 0$ et pour tout n naturel, $u_{n+1} = \sqrt{3u_n + 4}$.
On peut montrer (exercice) que la suite (u_n) est positive, croissante et majorée par 4 (par récurrence).
Ces conditions impliquent que (u_n) est convergente vers l.
La fonction $x \mapsto \sqrt{3x+4}$ est continue sur ....
....
Cette équation a deux solutions réelles : ..... et ...... Or on sait que $u_n \geq 0$.
On en déduit que la seule solution acceptable est ......
Ainsi, la suite (u_n) converge vers ......

Chapitre 9
Logarithme népérien

Objectifs :

- ☐ Je connais une définition de la fonction logarithme népérien.
- ☐ Je sais utiliser les propriétés de base de ln pour résoudre des équations simples.
- ☐ Je maîtrise la courbe de la fonction ln et les variations de la fonction ln.
- ☐ Je sais définir les domaines de définition de fonctions ln complexes.
- ☐ Je sais résoudre des équations et inéquations complexes avec ln.
- ☐ Je connais les propriétés de ln.
- ☐ Je sais dériver avec ln (fonction simple et fonction composée).
- ☐ Je connais les formes de limites avec ln et je sais gérer les formes indéterminées.

I Fonction réciproque

Définition : Fonction réciproque

Soient I et J deux intervalles.
D'après le TVI+, si $f : I \to J$ est une fonction continue et strictement monotone sur I, alors pour tout réel $a \in I$, il existe un unique réel $b \in J$ tel que $f(a) = b$.

....

....

Exemple :
La fonction carré (f sur $\mathbb{R}_+$) et racine carré (g) sont réciproques.
On a, par exemple, $f(....) = ...$ et $g(....) = ...$; $f(x) = ...$ et $g(....) = ...$

Remarque

Dans un repère orthonormé, les courbes représentatives de deux fonctions réciproques sont symétriques par rapport à la droite d'équation $y = x$ appelée première bissectrice du repère.

Propriété : Lien avec l'exponentielle (démontrée)

....

....

Démonstration

On considère un nombre réel k strictement positif.

- La fonction exponentielle est dérivable sur $\mathbb{R}$ donc elle est continue sur $\mathbb{R}$.
- De plus, elle est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.
- $\lim\limits_{x \to -\infty} e^x = 0$, $\lim\limits_{x \to +\infty} e^x = +\infty$ et $k \in]0; +\infty[$.

D'après le théorème des valeurs intermédiaires renforcé, l'équation $e^x = k$ admet donc une unique solution dans $\mathbb{R}$.

Définition : Logarithme népérien

....
....

Exemples : On a : $e^0 = 1$ *donc* $\ln(1) = ...$, $e^1 = e$ *donc* $\ln(e) = ...$, ...

Remarques

- Lorsqu'il n'y a pas d'ambiguïté, $\ln(x)$ se note plus simplement $\ln x$.
- Une valeur approchée du logarithme népérien d'un nombre réel strictement positif peut s'obtenir à la calculatrice.

II Fonction logarithme népérien

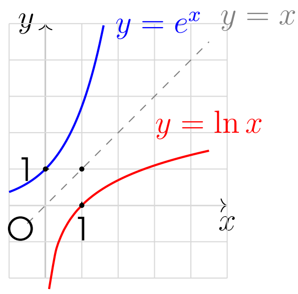
1 Première approche

Définition : Fonction logarithme népérien

....
....
....
....

Propriété : Courbe représentative (admise)

En tant que fonctions réciproques, les courbes représentatives des fonctions logarithmes népériens et exponentielles sont symétriques par rapport à la droite d'équation $y = x$ si le repère est orthonormé.



Propriétés : Premières propriétés (démontrées)

- ....
- ....
- ....
- ....

Exemples : $e^{\ln 5} = 5$, $\ln e^2 = 2$, $\ln e^{-3} = -3$

Démonstration

- $e^0 = 1$ donc $\ln 1 = 0$.
- $e^1 = e$ donc $\ln e = 1$.
- La fonction logarithme népérien de x est l'unique solution réelle de l'équation $e^y = x$, d'inconnue y et ainsi, $y = \ln x$. On en déduit que, pour tout nombre réel x strictement positif, $e^{\ln x} = x$.
- Pour tout nombre réel y, $x = e^y$ et donc $y = \ln x = \ln e^y$.

2 Signe et variations

Propriété : Sens de variations de la fonction $\ln$ (démontrée)

La fonction logarithme népérien est strictement croissante sur $]0;+\infty[$.

x	0 $\qquad\qquad$ $+\infty$
$\ln$	

Démonstration

On considère deux nombres réels strictement positifs a et b tels que $a < b$.
On a : $a < b \Leftrightarrow e^{\ln a} < e^{\ln b}$ (car $\exp$ est strictement croissante)
De même, comme la fonction exponentielle est strictement croissante sur $\mathbb{R}$, elle conserve l'ordre. On a donc $e^{\ln a} < e^{\ln b} \Leftrightarrow \ln a < \ln b$.
La fonction logarithme népérien est donc bien strictement croissante sur $]0;+\infty[$.

Propriété : Signe de la fonction $\ln$ (démontrée)

x	0 $\qquad$ 1 $\qquad$ $+\infty$
$\ln(x)$	

Démonstration

La fonction logarithme népérien étant strictement croissante sur $\mathbb{R}_+^*$ et $\ln 1 = 0$:

- Si $0 < x < 1$ alors $\ln x < \ln 1$ soit $\ln x < 0$
- Si $x > 1$ alors $\ln x > \ln 1$ soit $\ln x > 0$.

Propriétés : Équations et inéquations (admises)

Pour tous nombres réels x et y strictement positifs :

- $\ln x = \ln y \Leftrightarrow x = y$
- $\ln x < \ln y \Leftrightarrow x < y$

Exemples : Résoudre dans les inéquations et équations suivantes :

a) $e^x - 4 = 0 \Leftrightarrow$ ....

b) $\ln(x+3) = \ln 5 \Leftrightarrow$ ....

c) $\ln(6-2x) \geq \ln x \Leftrightarrow$ ....

d) $e^{5x} \leq 2 \Leftrightarrow$ ....

e) $\ln(3x+1) > 3 \Leftrightarrow$ ....

f) $\ln(x) - 5 = 0 \Leftrightarrow$ ....

g) $e^{3x+1} < 4 \Leftrightarrow$ ....

3 Dérivation

Propriété : Fonction dérivée

La fonction logarithme népérien est dérivable sur $]0;+\infty[$ et pour tout nombre réel x strictement positif : ....

Démonstration au programme

On admet que la fonction logarithme népérien est dérivable sur $]0;+\infty[$.
On appelle f la fonction définie sur $]0;+\infty[$ par $f(x)=e^{\ln x}$.

- D'une part, pour tout réel x strictement positif, $f(x)=e^{\ln x}=$ ....
- D'autre part, f est la composée de la fonction exponentielle dérivable sur $\mathbb{R}$ par la fonction logarithme népérien dérivable sur $]0;+\infty[$ donc elle est dérivable sur $]0;+\infty[$ et pour tout nombre réel x strictement positif : ....
....

On en déduit que, pour tout réel x strictement positif, ...

Remarques

- La fonction inverse étant à valeurs strictement positives sur $]0;+\infty[$, on retrouve que la fonction logarithme népérien est strictement croissante sur $]0;+\infty[$.
- **La fonction logarithme népérien étant dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$, elle est continue sur $\mathbb{R}_+^*$.**

Propriété : Composition (admise)

....
....
....

Exemples : Donner l'expression des dérivées de chacune des fonctions suivantes.

(a) f *définie sur* $\left]-\frac{1}{3};+\infty\right[$ *par* $f(x)=\ln(3x+2)$
....
....

(b) g *définie sur* $\mathbb{R}$ *par* $g(x)=\ln(x^2+2x+4)$
....
....

(c) h *définie sur* $]0;+\infty[$ *par* $h(x)=2\ln x+3\ln 2x$
....

4 Limites

Propriétés : Limites (démontrées)

....

Démonstration

Pour tout nombre réel A strictement positif, $\ln x>A \Leftrightarrow e^{\ln x}>e^A \Leftrightarrow x>e^A$.
Autrement dit, pour tout réel A strictement positif, il existe un nombre réel x_A, tel que pour tout réel x, $x>x_A$ implique $\ln x>A$. Donc, par définition, $\lim_{x\to+\infty}\ln x=+\infty$

Propriétés : Croissances comparées (démontrées)

- ....
- ....

Plus généralement, pour tout nombre entier naturel n non nul :

- ....
- ....

Démonstration au programme

- ....
- ....

III Propriétés algébriques

Propriétés algébriques (démontrées)

Pour tout nombres réels strictement positif x et y, on a :

(a) ....

(b) ....

(c) ....

(d) ....

(e) ....

Démonstration

(a) $e^{\ln(x \times y)} = x \times y = e^{\ln x} \times e^{\ln y} = e^{\ln x + \ln y}$. Donc $\ln(x \times y) = \ln(x) + \ln(y)$

(b) On a : $\ln\left(\frac{1}{x}\right) + \ln(x) = \ln\left(\frac{1}{x} \times x\right) = \ln 1 = 0$. Donc $\ln\left(\frac{1}{x}\right) + \ln(x) = 0 \Leftrightarrow \ln\left(\frac{1}{x}\right) = -\ln x$

(c) $\ln\left(\frac{x}{y}\right) = \ln\left(x \times \frac{1}{y}\right) = \ln x + \ln\left(\frac{1}{y}\right) = \ln x - \ln y$

(d) On démontre pour les entiers naturels en procèdant par récurrence.
Initialisation : ....
....
Hérédité : Soit $n \in \mathbb{N}$ fixé tel que, pour cet entier, $\ln(x^n) = n\ln(x)$.
Montrons que la propriété est vraie au rang $n+1$.
....
La propriété est héréditaire.
Conclusion : Par principe de récurrence, $\forall n \in \mathbb{N}, \ln(x^n) = n\ln(x)$.
On étant cette propriété aux entiers relatifs.

(e) On a : $2\ln\sqrt{x} = \ln\sqrt{x} + \ln\sqrt{x} = \ln(\sqrt{x} \times \sqrt{x}) = \ln x$
Donc $2\ln\sqrt{x} = \ln x \Leftrightarrow \ln\sqrt{x} = \dfrac{1}{2}\ln x$.

Exemples :

- $\ln(0,5) + \ln(2) =$ ....
....
- $\ln(4e) =$ ....
....
- $\ln\left(\dfrac{1}{e}\right) =$ ....
....
- $\ln(10) - \ln(5) =$ ....
....
- $\ln e^2 - \ln \dfrac{2}{e} =$ ....
....
- $1,2^n > 10 \Leftrightarrow$ ....
....
- $0,8^n < 0,1 \Leftrightarrow$ ....
....
- $\ln(x-3) + \ln(9-x) = 0 \Leftrightarrow$ ....
....

IV Tableau récapitulatif

Propriété	**Expression**
Définition	$y = \ln x \Leftrightarrow e^y = x$
Domaine de définition	$]0; +\infty[$
Valeurs particulières	$\ln 1 = 0$, $\ln e = 1$
Variation	Strictement croissante sur $]0; +\infty[$
Dérivée	$(\ln x)' = \dfrac{1}{x}$
Limites	$\lim\limits_{x \to 0^+} \ln x = -\infty$, $\lim\limits_{x \to +\infty} \ln x = +\infty$
Produit	$\ln(ab) = \ln a + \ln b$
Quotient	$\ln\left(\frac{a}{b}\right) = \ln a - \ln b$
Puissance	$\ln(a^n) = n \ln a$
Racine	$\ln \sqrt{a} = \frac{1}{2} \ln a$
Composition	$(\ln u)' = \dfrac{u'}{u}$
Croissance comparée	$\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\ln x}{x} = 0$, $\lim\limits_{x \to 0^+} x \ln x = 0$

Chapitre 10
Équations différentielles

Objectifs :

- ☐ Vérifier qu'une fonction est solution d'une équation différentielle
- ☐ Déterminer la primitive d'une fonction simple
- ☐ Résoudre une équation différentielle de la forme $y' = ay, y' = ay + b$ ou $y' = ay + b$.

I Notion d'équation différentielle

Définition : Équation différentielle

. . . .

. . . .

Exemple :
L'équation $(E) : y' = 2x$ est une équation différentielle. Résoudre cette équation revient à déterminer toutes les fonctions f, dérivables sur $\mathbb{R}$, telles que, pour tout $x \in \mathbb{R}, f'(x) = 2x$.

II Équations différentielles du type $y' = f$

Dans toute le suite, I désigne un intervalle de $\mathbb{R}$.

Définition : Primitive

Soit f une fonction définie sur I.

. . . .

. . . .

. . . .

Exemple :
La fonction F définie sur $\mathbb{R}$ par $F(x) = x^2$ est une solution de l'équation différentielle de l'exemple précédent.
En effet, F est dérivable sur $\mathbb{R}$ et, pour tout réel x, $F'(x) = 2x = f'(x)$.

Théorèmes (admis)

Soit f une fonction continue sur I et F une primitive de f sur I.

- **Existence :** . . . .
- **Non-unicité :** . . . .

  . . . .

  . . . .

Exemples :

- *La fonction F de l'exemple précédent est UNE solution de l'équation diff. $y' = 2x$.*
- *La fonction F est UNE primitive de la fonction $f(x) = 2x$.*
- *LES primitives de f sont les fonctions $x \mapsto x^2 + k$ où k est une constante réelle.*

Démonstration au programme

Nous allons démontrer la propriété 2.
Soit F et G deux primitives de la fonction f sur I.
Alors, pour tout réel x de I, on a $F'(x) =$ .... et $G'(x) =$ ....
On en déduit : ....
....
La fonction $F - G$ ....
....
....

Propriété(admise)

Soit $x_0 \in I$ et y_0 un réel quelconque.
....
....

Définition : Condition initiale

....
....

Exemple :
On vient de voir qu'il existaient une infinité de primitives pour la fonction $f(x) = 2x$. Ces dernières sont toutes de la forme $F(x) = x^2 + k$.
Toutefois, il existe UNE UNIQUE primitive de f qui vérifie en plus la condition initiale $F(0) = 2$.
En effet, ...
....

Propriétés : Primitives des fonctions usuelles (admises)

Par lecture inverse du tableau des dérivées, on obtient le tableau ci-dessous.

Fonction f	**Une primitive F**	**Intervalle de validité**
$f(x) = a$	$F(x) =$	$\mathbb{R}$
$f(x) = x$	$F(x) =$	$\mathbb{R}$
$f(x) = x^n$ ($n \in \mathbb{N}^*$)	$F(x) =$	$\mathbb{R}$
$f(x) = \dfrac{1}{x}$	$F(x) =$	$]0; +\infty[$
$f(x) = \dfrac{1}{x^2}$	$F(x) =$	$]-\infty; 0[$ ou $]0; +\infty[$
$f(x) = e^x$	$F(x) =$	$\mathbb{R}$
$f(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$	$F(x) =$	$]0; +\infty[$
$f(x) = -\sin(x)$	$F(x) =$	$\mathbb{R}$
$f(x) = \cos(x)$	$F(x) =$	$\mathbb{R}$

Propriétés : Opérations sur les primitives (admises)

Soient f et g deux fonctions de primitives respectives F et G sur I.
Soient k une constante réelle, u une fonction dérivable sur I.

Une fonction de la forme	admet pour primitive
$f+g$	....
kf	....
$u'e^u$	....
$2uu'$	....
$u'u^n$	....
$\frac{u'}{2\sqrt{u}}$	....
$\frac{u'}{u^2}$	.... $(u(x) \neq 0$ pour tout $x \in I)$
$\frac{u'}{u}$	....
$u'\cos(u)$	....
$-u'\sin(u)$	....
$u' \times (v' \circ u)$	....

Démonstration

(1) $(F+G)' = F' + G' = f + g$ donc une primitive de $f+g$ est $F+G$.

(2) $(kF)' = kF' = kf$ donc une primitive de kf est kF.

(3) $(e^u)' = u' \times e^u$donc une primitive de $u'e^u$ est e^u.

(4) $\left(\frac{u^n}{n+1}\right)' = \frac{1}{n+1} \times (n+1)u' \times u^n = u' \times u^n$ donc une primitive de $u' \times u^n$ est $\frac{1}{n+1}u^n$

(...) Conséquences des formules de dérivation.

Exemples :

- *Une primitive de $f(x) = 5x^2$ est la fonction F définie sur .... par ....*
- *Une primitive de $g(x) = x^3 + \frac{1}{x}$ est la fonction G définie sur .... par ....*

III Équations différentielles $y' = ay$

Définition : Équation diff. linéaire homogène du 1^e ordre

....

....

Exemples :

$y' + 3y = 0$ ou $2y' = 5y$ sont des équations différentielles de ce type (respectivement : $a =$ .... et $a =$ ....).

Propriété : Solutions de $y' = ay$ (démontrée)

Soit a un réel. ....
....
....

Remarques

- ....
  ....
- ....
  ....

Démonstration au programme

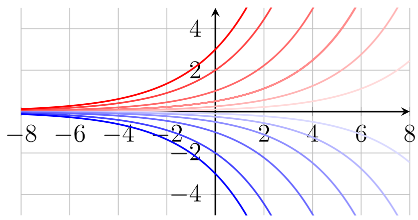
($\Rightarrow$) Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = Ce^{ax}$, où C est un réel.
Alors,$f'(x) = C \times ae^{ax} = af(x)$.
Puisque $f'(x) = af(x)$, pour tout réel x, f est bien solution de l'équation différentielle $y' = ay$.

($\Leftarrow$) Réciproquement, soit f une solution de l'équation différentielle $(E) : y' = ay$ et soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = e^{-ax} \times f(x)$.
g est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $g'(x) = e^{-ax} \times f'(x) + (-ae^{-ax})xf(x)$.
Puisque $f$mest solution de (E), $f'(x) = af(x)$ pour tout réel x et ainsi : $g'(x) = e^{-ax} \times af(x) - ae^{-ax} \times f(x) = 0$.
La fonction g est constante, soit $e^{ax} \times f(x) = C$, avec C réel.
Puisque e^{ax} est différent de 0 pour tout réel x, on obtient $f(x) = \dfrac{C}{e^{-ax}} = Ce^{ax}$.

Exemples :

- *Les solutions de $y' = 4y$ sont les fonctions de la forme* ....
- *Les solutions de $y' = -2y$ sont les fonctions de la forme* ....
- *Les solutions de $y' - 0.4y = 0$ sont les fonctions de la forme* ....

On peut représenter les courbes des fonctions solutions (en fonction de la valeur de C) :



Il existe toutefois une uniquement solution telle que $y(0) = 2$, il s'agit de ....

IV Équations différentielles $y' = ay + b$

Définition : Équation diff. linéaire du 1^e ordre à coef. constants

....
....

Remarques

L'équation différentielle $y' = ay + b$ $(a \neq 0)$ a toujours une **solution particulière constante**.
En effet, la fonction p définie sur $\mathbb{R}$ par $p(x) = -\frac{b}{a}$ est solution puisque, pour x :

$$p'(x) = \text{..............} \text{ et } \text{..}$$

Propriété : Solutions de $y' = ay = b$ (admise)

Soit a et b des réels, a non nul.

....

....

....

....

Autrement dit, les solutions de (E) sont de la forme :

....

Exemple : Résolvons $y' = -y + 4$.

- *L'équation homogène associée est* ....
- *La solution particulière constante est* ....

Les solutions générales de l'équation sont donc de la forme ....

V Équations différentielles $y' = ay + f$

Définition : Équation diff. linéaire du 1^e ordre

....

....

Propriété : Solutions générales de $y' = ay + f$ (admise)

Soit a un réel et f une fonction définie sur un intervalle I.
Toute solution dans I de l'équation différentielle (E) : $y' = ay + f$ est la somme d'une solution de l'équation homogène associée $y' = ay$ et d'une solution particulière de l'équation (E).

Remarque

Pour trouver la solution particulière, on peut utiliser la méthode de « variation de la constante ». Cette dernière n'étant pas au programme, un solution particulière vous sera toujours donné dans l'énoncé.

Exemple : Résolvons $y' = 2y + e^x$

- *L'équation homogène associé est* ....
- *L'équation différentielle $y = 2y + e^x$ admet pour solution particulière la fonction f : $x \mapsto -e^x$ puisque* ....

Donc, les solutions de (E) sont de la forme ....

Chapitre 11
Aires et intégrales

Objectifs :

- ☐ Je connais la définition de l'aire sous une courbe.
- ☐ Je connais la définition de l'intégrale d'une fonction continue sur un intervalle.
- ☐ Je maîtrise les premières propriétés des intégrales (relation de Chasles et positivité).

Dans l'intégralité du chapitre, on munit le plan d'un repère orthogonal $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

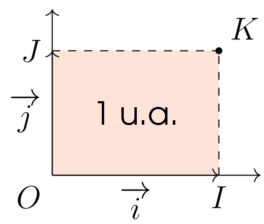
I Premières définitions

Définition : Unité d'aire (u.a.)

On considère les points I et J définis respectivement par $\vec{i} = \overrightarrow{OI}$ et $\vec{j} = \overrightarrow{OJ}$.
On note K le point tel que le quadrilatère $OIKJ$ soit un rectangle.

....

....



Remarque

$OIKJ$ peut être un carré lorsque le repère est orthonormé.

Exemple :
Lorsque $OI = 4$ cm et $OJ = 2$ cm, l'unité d'aire vaut ....

Définition : Domaine

Dans un repère, on considère la courbe représentative $\mathcal{C}$ d'une fonction f, continue et positive sur un intervalle $[a; b]$.

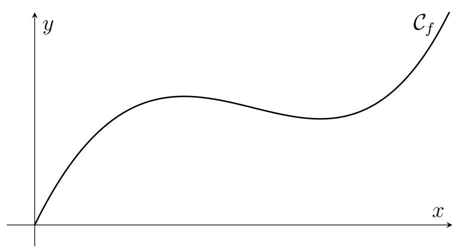
....

....

....

....

....



Propriété (admise)

....

II Notion d'intégrale

1 Intégrale positive

Définition : Intégrale d'une fonction continue et positive

On considère une fonction f continue et positive sur un intervalle $[a;b]$ et on note $\mathcal{C}$ sa courbe représentative.

....
....
....
....

Remarques

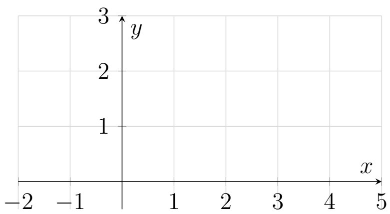
- ....
- ....
  ....
- ....

Point histoire

La notation $\int$ est due au mathématicien allemand **Gottfried W. Leibniz** (1646-1716). Ce symbole est un S stylisé et illustre le fait que l'intégrale de la fonction peut être approchée par une somme d'aires de rectangles notée : $\sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta x_i$
$f(x)dx$ correspond à l'aire d'un rectangle de hauteur $f(x)$ et de largeur dx.

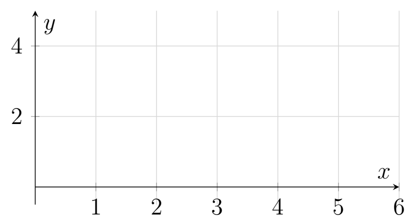
Exemples :

(a) *On considère la fonction f définie sur $[-1;4]$ par $f(x)=2$.*



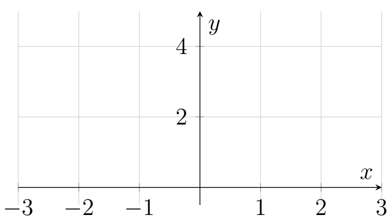
....

(b) *On considère la fonction f définie sur $[1;5]$ par $f(x)=-x+5$.*



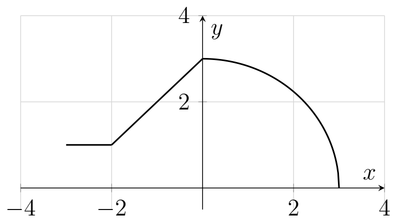
....

(c) *On considère la fonction f définie sur $[-2;2]$ par $f(x)=\frac{1}{2}x+3$.*



....

(d) *Soit f définie sur $[-3;3]$ dont on donne la courbe représentative :*



....

2 Première déduction

Dans le dernier exemple, nous avons « découpé » l'aire en plusieurs morceaux. Cette manipulation est permise grâce à la relation de Chasles :

Propriété : Relation de Chasles pour les intégrales (admise)

....

....

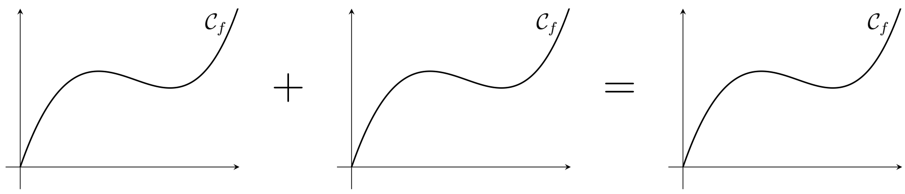
....

....

....

....

Graphiquement, cela donne :



Propriété : Conséquence (démontrée)

....

Démonstration

On a : ....

....

....

3 Intégrale négative

Définition : Intégrale d'une fonction continue et négative

On considère une fonction f continue et négative sur un intervalle $[a; b]$ et on note $\mathcal{C}$ sa courbe représentative.

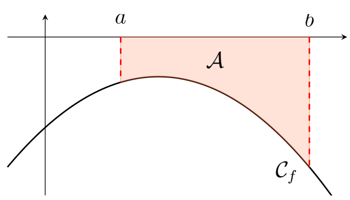
....

....

....

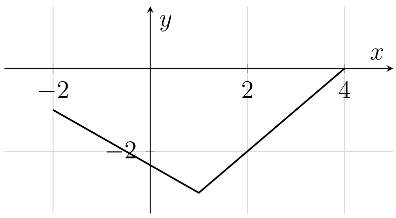
Remarques

- ....
  ....
  ....
- ....
  ....



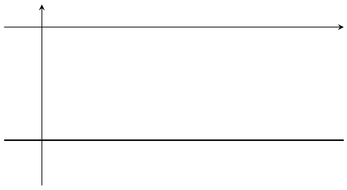
Exemples :

(a) *On considère la fonction f définie sur $[-2;4]$ dont on donne la courbe représentative ci-contre.*



....

(b) *On considère la fonction constante f définie sur l'intervalle $[a;b]$ par $f(x) = m$ (où $m \in \mathbb{R}^*_-$).*



....

4 Deuxième déduction

Les définitions suivantes permettent d'obtenir une nouvelle propriété sur les intégrale :

Propriété : Positivité de l'intégrale (admise)

On considère deux nombres réels a et b tels que $a < b$ et une fonction f, continue sur l'intervalle $[a;b]$.

- ....
- ....

Remarques

- Les réciproques sont fausses ! (voir la partie II-5)
- Attention à l'ordre des bornes de l'intégrale, la condition $a < b$ est importante.

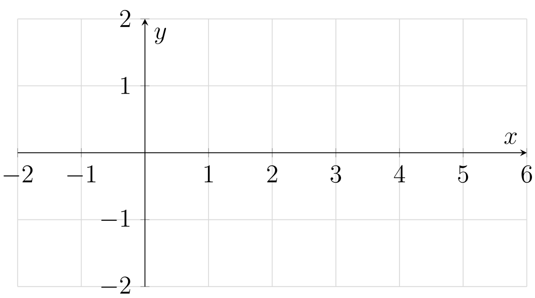
5 Intégrale d'une fonction

Définition : Intégrale d'une fonction continue et de signe quelconque

On considère une fonction f continue sur un intervalle $[a;b]$ et on note $\mathcal{C}$ sa courbe représentative.

....
....

Exemple :
On considère la fonction f définie sur $[-1;5]$ par $f(x) = \frac{1}{3}x - 1$.



Chapitre 12
Calcul intégral

Objectifs :

- ☐ Je connais le lien entre intégrale et primitive.
- ☐ Je maîtrise le théorème fondamental de l'analyse.
- ☐ Je maîtrise les propriétés des intégrales (relation de Chasles, linéarité, positivité, ordre).
- ☐ Je sais calculer l'aire entre deux courbes.
- ☐ Je connais la notion de valeur moyenne d'une fonction.
- ☐ Je sais utiliser l'intégration par parties.

I Intégrale et primitive

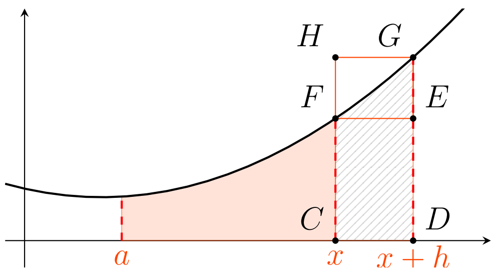
Théorème : Lien entre intégrale et primitive (démontré)

Soit f une fonction continue sur un intervalle I et soit a un élément de I.
....
....

Démonstration au programme

Cas où la fonction f est croissante sur $[a;b]$

Soit x un réel de $[a;b]$ et h un réel non nul tel que $x+h \in [a;b]$.



- **Cas où $h > 0$:** ....
....
....
....
....
....
....
....
- **Cas où $h < 0$:** de façon analogue, on a : $f(x+h) \leq \frac{F_a(x+h)-F_a(x)}{h} \leq f(x)$.

Or f est continue sur $[a;b]$ donc ....
D'après le théorème des gendarmes : ....
....

Propriété : Intégrale d'une fonction continue positive (démontré)

Soit f une fonction **continue** et **positive** sur un intervalle $[a;b]$.

....

....

....

Démonstration au programme

....

....

....

Par conséquent, $F(b) - F(a) =$ ....

Or ....

Donc, finalement, on a : ....

Propriété (admise)

Toute fonction continue sur un intervalle I admet des primitives sur I.

Cette propriété nous permet de généraliser le calcul d'intégrale :

Théorème Fondamental de l'Analyse (partiellement démontré)

Soit f une fonction **continue** sur un intervalle I, F une primitive de f et a, b deux réels de I.

....

....

....

Remarques

- Ce résultat ne dépend pas de la primitive choisie.
- Les nombres a et b sont nommés **bornes d'intégration**.

Exemples :
Calculer les intégrales suivantes :

- $A = \displaystyle\int_{-1}^{2} (x^3 + 4x)\, dx =$ ....

....

....

- $B = \displaystyle\int_{1}^{2} \left(x + \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2}\right) dx =$ ....

....

....

- $C = \displaystyle\int_{0}^{1} te^t\, dt =$ ....

....

....

II Propriétés des intégrales

1 Propriétés du chapitre précédent

Propriétés : Rappels du chapitre précédent (démontrée)

Soit f une fonction continue sur un intervalle I et a, b, c trois réels de I.

1. ....
2. ....
3. **Relation de Chasles :** ....
4. **Positivité :** ....

Démonstration

1. ....
2. ....
3. ....
4. C'est une conséquence de la définition de l'intégrale d'une fonction positive sur un intervalle.

2 Linéarité de l'intégrale

Propriété : Linéarité de l'intégrale (admise)

On considère deux fonctions f et g continues sur un intervalle $[a;b]$.

....

....

....

Exemples :

1. $\displaystyle\int_1^2 -7x^2\,dx =$ ....
2. $\displaystyle\int_1^2 6x^2 - 5x + 1\,dx =$ ....

3 Intégrale et ordre

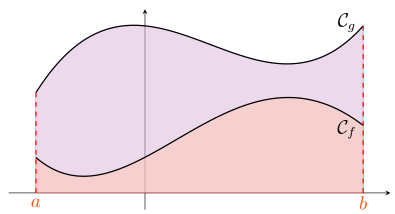
Propriété : Intégrale et ordre (démontrée)

On considère deux fonctions f et g continues sur un intervalle $[a;b]$.

....

....

....



Démonstration

Pour tout nombre réel x appartenant à $[a;b]$, $f(x) \leq g(x)$ donc $f(x) - g(x) \leq 0$.
On en déduit, par positivité de l'intégrale, que $\int_a^b f(x) - g(x)\,dx \leq 0$.
Finalement, en utilisant la linéarité de l'intégrale, $\int_a^b f(x)\,dx \leq \int_a^b g(x)\,dx$.

Exemple :
On considère la fonction f définie sur l'intervalle $[-1;1]$ par $f(x) = \dfrac{1}{8+x^2}$.

1. *Donner un encadrement de $f(x)$ pour tout nombre réel x appartenant à $[-1;1]$.*
   ....
2. *En déduire un encadrement de l'intégrale $I = \int_{-1}^{1} f(x)\,dx$ d'amplitude 0,1.*
   Ainsi ....
   Donc ....
   Conclusion : ....

III Intégration par parties

Propriété : Intégration par parties

On considère deux fonctions u et v dérivables sur un intervalle I telles que u' et v' soient continues sur I.
Soient a et b deux réels de I avec $a < b$. Alors :

....

Démonstration au programme

Les fonctions u et v sont dérivables sur I donc la fonction uv l'est aussi.

De plus, $(uv)' =$ ....
Donc pour tout réel x de I, $u(x)v'(x) =$ ....

Or, les fonctions u et v sont continues sur I car elles sont dérivables sur I.
De même, u' et v' sont continues, les fonctions uv' et $u'v$ le sont donc également.

Donc $\displaystyle\int_a^b u(x)v'(x)dx =$ ....
Or, une primitive de la fonction $(uv)'$ est la fonction ....
Donc $\displaystyle\int_a^b u(x)v'(x)dx =$ ....

Remarques

- La propriété reste vraie si $a > b$.
- Cette méthode permet de transformer le calcul de l'intégrale d'une fonction. Un bon choix des fonctions u et v' conduira au calcul de l'intégrale d'une fonction dont on sait déterminer une primitive.
- Il est parfois utile de remarquer que $\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b 1 \times f(x)\,dx$ pour effectuer une IPP en utilisant $u'(x) = 1$.

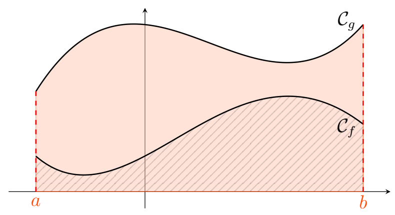
Exemple : calculer $\displaystyle\int_{-1}^{0} xe^x\,dx$
....
....
....
....

IV Applications

1 Aire entre deux courbes

Propriété : Aire entre deux courbes

On considère deux fonctions f et g continues sur un intervalle $[a;b]$ et on suppose que, pour tout nombre réel $x \in [a;b]$, $f(x) \leq g(x)$.
L'aire, exprimée en unité d'aire, du domaine délimité par les courbes représentatives des fonctions f et g et les droites d'équation $x = a$ et $x = b$ est égale à :



....

Exemple :
On considère les fonctions f et g définies sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x$ et $g(x) = x^2$.
Calculer l'aire, exprimée en unités d'aires, délimitée par les courbes représentatives des fonctions f et g et les droites d'équations $x = 0$ et $x = 1$.

....
....
....

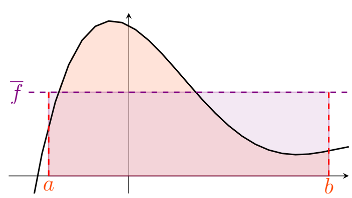
2 Valeur moyenne

Définition : Valeur moyenne

On considère une fonction f continue sur un intervalle $[a;b]$.
....
....

Remarque : Interprétation graphique

- La valeur moyenne d'une fonction f sur un intervalle $[a;b]$ est la valeur constante notée $\overline{f}$ telle que $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b \overline{f}\,dx$.
- Lorsque f est une fonction à valeurs positives, $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx$ est l'aire du rectangle dont les côtés ont pour longueur $\overline{f}$ et $b - a$.



Exemple :
On considère la fonction f définie sur l'intervalle $[0;2]$ par $f(x) = 2x$.
Calculer la valeur moyenne de f sur $[0;2]$.

....
....
....

Chapitre 13
Fonctions trigonométriques

Objectifs :

- ☐ Je sais résoudre des équations trigonométriques simples en cosinus.
- ☐ Je sais résoudre des équations trigonométriques simples en sinus.
- ☐ Je connais les caractéristiques des fonctions de référence cos et sin (domaine de définition, parité, périodicité, dérivées, variations, courbes, ...)

I Fonctions sinus et cosinus

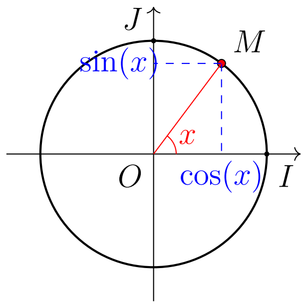
1 Définitions

On munit le plan d'un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

Définitions : Cosinus et sinus d'un nombre

On considère un point M du cercle trigonométrique correspondant à un nombre réel x.

- ....
....
- ....
....



Définitions : Fonctions sinus et cosinus

La fonction qui à tout réel x, exprimé en radians, associe le nombre $\cos(x)$ est appelée fonction cosinus (définie sur $\mathbb{R}$).

....

La fonction qui à tout réel x, exprimé en radians, associe le nombre $\sin(x)$ est appelée fonction sinus (définie sur $\mathbb{R}$).

....

Remarque

Les fonctions cosinus et sinus sont définies sur $\mathbb{R}$ et prennent leurs valeurs dans $[-1; 1]$.

2 Parité

Définitions : Fonctions paires et impaires

Soit f une fonction définie sur un intervalle I. Soit x un réel de I tel que $-x \in I$.

- Une fonction est dites **paire** si pour tout x, ...
La courbe représentative de la fonction sera alors ....
....
- Une fonction est dites **impaire** si pour tout x, ... La courbe représentative de la fonction sera alors ....
....

Propriété : Parité (admise)

Pour tout nombre réel x, $\cos(-x) = \cos(x)$ et $\sin(-x) = -\sin(x)$.
Par conséquent, la fonction **cosinus est paire** et la fonction **sinus est impaire**.

3 Périodicité

Définition : Périodicité

On considère une fonction f définie sur $\mathbb{R}$ et T un nombre réel non nul.
La fonction f est dite T-périodique lorsque, pour tout nombre réel x, $f(x+T) = f(x)$.

Remarques

En général, on choisit $T > 0$.
La courbe d'une fonction périodique est composée d'un « motif » que l'on reproduit indéfiniment, pour « connaître » la fonction sur $\mathbb{R}$, il suffit donc de l'étudier sur un intervalle d'amplitude T.

Propriétés : Périodicité des fonctions trigonométriques

Pour tout nombre réel x, on a : $\cos(x+2\pi) = \cos(x)$ et $\sin(x+2\pi) = \sin(x)$
Ainsi, les fonctions cosinus et sinus sont donc périodiques de période $\mathbf{2}\pi$.

Remarque

Plus généralement, pour tout nombre réel x et tout entier relatif k, on a : $\cos(x+2k\pi) = \cos(x)$ et $\sin(x+2k\pi) = \sin(x)$.

4 Dérivation

Propriétés : Dérivées des fonctions trigonométriques (admise)

Les fonctions cosinus et sinus sont dérivables sur $\mathbb{R}$ et pour tout nombre réel x on a :
....

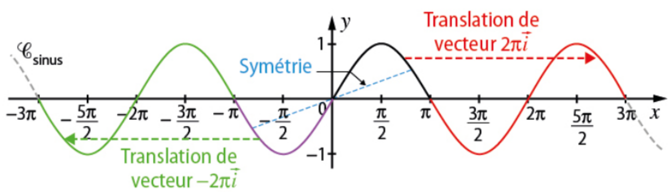
Propriétés : Dérivées et composées (admise)

Soit u une fonction dérivable sur intervalle I. Alors, on a :
....

5 Courbes représentatives

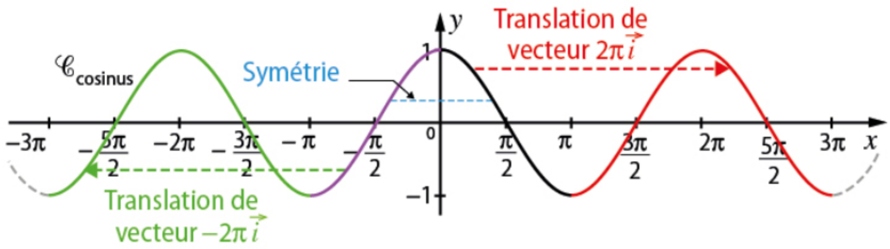
Propriété : Courbe représentative de la fonction $\sin$ (admises)

Pour tracer la courbe représentative de la fonction sinus, il suffit de l'étudier sur $[0;\pi]$, puis tenir compte des conséquences graphiques de la périodicité et de la parité..



Propriété : Courbe représentative de la fonction $\cos$ (admises)

En suivant la même démarche, on obtient la courbe de la fonction cosinus :



II Résolution d'équations trigonométriques

Propriété : Équation trigonométrique en cosinus (admise)

On considère un nombre réel a.

- Si $a \notin [-1;1]$, l'équation $\cos(x) = a$ n'a pas de solution.
- Si $a \in [-1;1]$, il existe un unique α dans $[0;\pi]$ tel que $\cos(\alpha) = a$ et l'équation $\cos(x) = a$ admet comme seules solutions les nombres réels de la forme :

$$x = \alpha + 2k\pi \text{ et } x = -\alpha + 2k\pi \text{ (où } k \in \mathbb{Z}\text{)}$$

Propriété : Équation trigonométrique en sinus (admise)

On considère un nombre réel a.

- Si $a \notin [-1;1]$, l'équation $\sin(x) = a$ n'a pas de solution.
- Si $a \in [-1;1]$, il existe un unique α dans $\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$ tel que $\sin(\alpha) = a$ et l'équation $\sin(x) = a$ admet comme seules solutions les nombres réels de la forme :

$$x = \alpha + 2k\pi \text{ et } x = \pi - \alpha + 2k\pi \text{ (où } k \in \mathbb{Z}\text{)}$$

Remarques

- De la même manière, on peut résoudre des inéquations trigonométriques.
- Il est vivement conseillé de réaliser un cercle trigonométrique pour visualiser.

Exemples :

(a) *Résoudre dans* $\mathbb{R}$ *l'équation* $\cos(x) = \frac{\sqrt{2}}{2}$

. . . .

. . . .

(b) *Résoudre dans* $[-\pi;\pi]$ *l'équation* $\cos(x) = \frac{\sqrt{2}}{2}$

. . . .

. . . .

(c) *Résoudre dans* $[0;2\pi]$ *l'équation* $\sin(x) = \frac{\sqrt{3}}{2}$

. . . .

. . . .

(d) *Résoudre dans* $]-\pi;\pi]$ *l'inéquation* $2\sin(x)+1\geq 0$

. . . .

. . . .

III Formulaire de trigonométrie

Propriétés générales (admises)

- **Domaine de définition** : $-1\leq\cos(x)\leq 1$ et $-1\leq\sin(x)\leq 1$
- **Parité** : $\cos(-x)=\cos(x)$ et $\sin(-x)=-\sin(x)$
- **Pythagore** : $\cos^2(x)+\sin^2(x)=1$
- **Périodicité** : $\cos(x+2k\pi)=\cos(x)$ et $\sin(x+2k\pi)=\sin(x)$
- **Angles supplémentaires** : $\cos(\pi-x)=-\cos(x)$ et $\sin(\pi-x)=\sin(x)$
- **Angles complémentaires** : $\cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right)=\sin(x)$ et $\sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right)=\cos(x)$
- **Autre relation** : $\cos(x+\pi)=-\cos(x)$ et $\sin(x+\pi)=-\sin(x)$

Propriétés : Formules d'addition (admises)

Pour tous nombres réels a et b, on a :

$$\begin{aligned}\cos(a+b)&=\cos(a)\cos(b)-\sin(a)\sin(b)\\ \sin(a+b)&=\sin(a)\cos(b)+\sin(b)\cos(a)\\ \cos(a-b)&=\cos(a)\cos(b)+\sin(a)\sin(b)\\ \sin(a-b)&=\sin(a)\cos(b)-\sin(b)\cos(a)\end{aligned}$$

Propriétés : Formules de duplication (admises)

Pour tout nombre réel a, on a :

$$\begin{aligned}&\cos(2a)=\cos^2(a)-\sin^2(a)=2\cos^2(a)-1=1-2\sin^2(a)\\ &\sin(2a)=2\sin(a)\cos(a)\end{aligned}$$

Propriétés : Formules de linéarisation (admises)

Pour tout nombre réel a, on a :

$$\cos^2(a)=\frac{1+\cos(2a)}{2}\quad\text{et}\quad\sin^2(a)=\frac{1-\cos(2a)}{2}$$

Propriété : Tangente (admise)

Pour tout nombre réel x dont le cosinus n'est pas nul :

$$\tan(x)=\frac{\sin(x)}{\cos(x)}$$

Chapitre A
Vecteurs de l'espace

Objectifs :

- ☐ Je maîtrise la notion de vecteur de l'espace.
- ☐ Je maîtrise la notion de vecteurs colinéaires dans l'espace.
- ☐ Je maîtrise la notion de vecteurs coplanaires dans l'espace.

I Vecteurs de l'espace

Les notions de vecteurs vues en géométrie plane se généralisent à l'espace.

1 Définition

Définition : Vecteur

Soient A et B deux points de l'espace distincts.
Le vecteur $\overrightarrow{AB}$ est caractérisé par :

- ....
- ....
- ....

Remarques

- Deux vecteurs sont **égaux** s'ils ont ....
- Deux vecteurs sont **opposés** s'ils ont ....
- Si $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$, on dit que $\vec{u}$ est un ....
- Si $\overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AB}$, alors on dira que D est ....
- Si A et B sont confondus, alors $\overrightarrow{AB}$ est ....

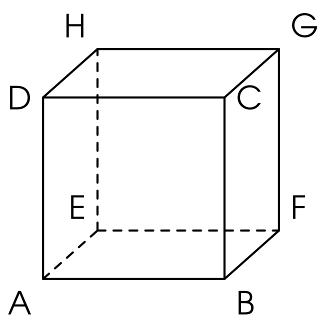
2 Propriétés caractéristiques

Propriétés (admises)

Soient A, B, C et D quatre points de l'espace.

- $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$ si, et seulement si, ...
- Pour tout vecteur $\vec{u}$ et tout point O, il existe un unique point M tel que $\overrightarrow{OM} = \vec{u}$.

Exemples : Dans le cube $ABCDEFGH$ ci-contre, on a :



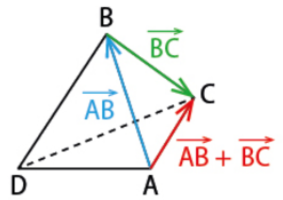
- ....
  ....
- *Les vecteurs $\overrightarrow{DA}$ et $\overrightarrow{BC}$ sont* ....
- *G est l'image du point D par la translation de vecteur* ....

3 Somme de deux vecteurs

La somme des vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ est un vecteur noté $\vec{u}+\vec{v}$ qui peut s'obtenir par :

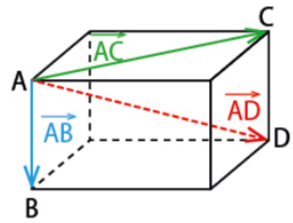
Propriété : Relation de Chasles (admise)

Soient A, B et C trois points de l'espace distincts.
On a : ....



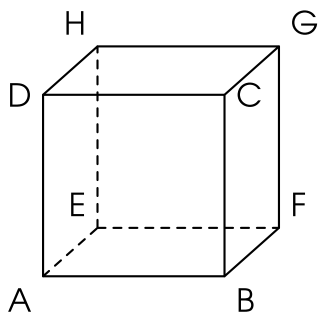
Propriété : Propriété du parallélogramme (admise)

Soit A, B, C et D quatre points de l'espace.
....
....



Exemples : Dans le cube $ABCDEFGH$ ci-contre, on a :

- *Par la relation de Chasles, $\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{DH} =$ ....*
- *Comme $DHGC$ est un parallélogramme, $\overrightarrow{DH}+\overrightarrow{HG} =$ ....*



4 Produit d'un vecteur par un réel et colinéarité

Définition : Vecteur $k\vec{u}$

Soit k un réel non nul et $\vec{u}$ un vecteur non nul.
Le vecteur $k\vec{u}$ est tel que :

- $k\vec{u}$ et $\vec{u}$ ont ....;
- Si $k>0$, alors $k\vec{u}$ et $\vec{u}$ ont .... ; sinon, ... ;
- $||k\vec{u}|| =$ ....

Définition : Vecteurs colinéaires

....

Remarque

Par convention, le vecteur nul est colinéaire à tout autre vecteur.

Propriété : Caractérisation des vecteurs colinéaires (admise)

Deux vecteurs non nuls $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires si et seulement si ....
....
....

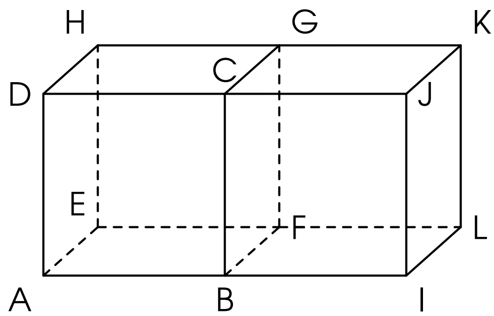
Propriétés : Utilisation de la colinéarité (admises)

Soient A, B, C et D quatre points distincts de l'espace.

- Les points A, B et C sont alignés si, et seulement si, ...
- Les droites (AB) et (CD) sont parallèles si, et seulement si, ...
  ....

Exemples : Soient deux cubes $ABCDEFGH$ et $BIJCFLKG$ placés côte à côte, on a :

- $\overrightarrow{AI} = ...\overrightarrow{AB}$
- $\overrightarrow{KH} = ...\overrightarrow{AB}$
- *Les vecteurs $\overrightarrow{AI}$, ..., ... et .... sont donc colinéaires.*
- *A, B et C sont donc alignés.*
- *Les droites ..... et ..... sont donc parallèles.*



Remarque

Dans l'espace, il n'existe pas de critère de colinéarité comme dans le plan (avec le déterminant).

5 Combinaisons linéaires de vecteurs

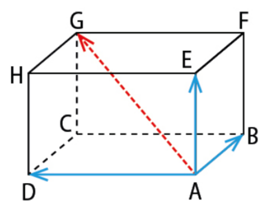
Définition : Combinaison linéaire

On considère trois vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$.
....
....

Remarque

Cette définition se généralise pour une combinaison linéaire de n vecteurs :
« *Soient $\vec{u}$, $\vec{v_1}, \vec{v_2}, ..., \vec{v_n}$ des vecteurs de l'espace. $\vec{u}$ est combinaison linéaire des vecteurs $\vec{v_1}, \vec{v_2}, ..., \vec{v_n}$ s'il existe des réels $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n$ tel que $\vec{u} = \alpha_1\vec{v_1} + \alpha_2\vec{v_2} + ... + \alpha_n\vec{v_n}$* »

Exemple :
Soit $ABCDEFGH$ un parallélépipède rectangle.
Une écriture du vecteur $\overrightarrow{AG}$ comme combinaison linéaire des vecteurs $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AD}$, et $\overrightarrow{AE}$ est $\overrightarrow{AG} =$ ....



Définition : Linéairement indépendant

....

....

Propriété (admise)

....

....

6 Vecteurs coplanaires

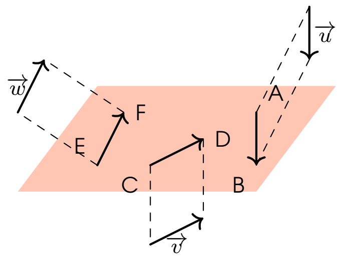
Définition : Vecteurs coplanaires

....

....

....

....



Remarques

- ....
- Si deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires, alors quel que soit le vecteur $\vec{w}$, les vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ sont coplanaires.

Théorème : Caractérisation des vecteurs coplanaires

Soient $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ trois vecteurs de l'espace tels que $\vec{u}$ et $\vec{v}$ **ne sont pas colinéaires.**

....

....

....

Exemples : Dans la configuration ci-contre, on a :

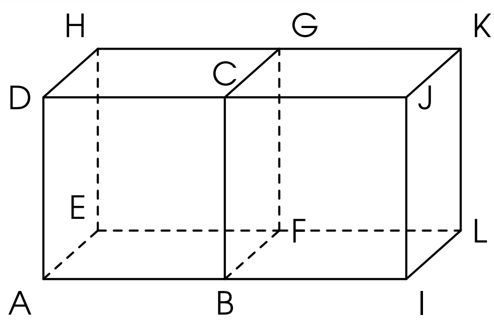
- *Les vecteurs $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{IJ}$ et $\overrightarrow{AJ}$ sont coplanaires car*

  ....

  ....
- *Les vecteurs $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{EL}$ et $\overrightarrow{FG}$ sont coplanaires car*

  ....

  ....



Chapitre B
Dénombrement (partie 1)

Objectifs :

- ☐ Je maîtrise le vocabulaire du dénombrement (élément, ensemble, partie, cardinal, union, intersection, p-liste, produit cartésien, ensembles disjoints).
- ☐ Je connais le principe additif et le principe multiplicatif.
- ☐ Je sais déterminer le nombre de p-uplet d'un ensemble à n éléments
- ☐ Je sais déterminer le nombre de parties d'un ensemble.

I Vocabulaire et définitions

1 Ensemble

Définition : Ensemble

. . . .

. . . .

. . . .

Définition : Cardinal d'un ensemble

. . . .

. . . .

. . . .

Exemples : avec $E = \{a; b; c\}$, card$(E) = 3$; $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{R}$ et $\mathbb{Q}$ ont une infinité d'éléments.

Remarques

- Pour lister un ensemble d'éléments isolés les uns des autres, on utilise des **accolades**.
- . . . .
  . . . .
- Deux ensembles A et B dont l'intersection est vide sont dits . . . .
  . . . .
- . . . .
  . . . .

2 Partie d'un ensemble

Définition : Partie

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

Exemple :
L'ensemble $F = \{a; b\}$ est inclus dans l'ensemble $E = \{a; b; c\}$.
On a $F \subset E$ et F est une partie de E.

Définitions : Union et intersection

- ....
  ....
- ....
  ....

Exemple : Avec $A = \{a; b; c; d; e\}$ *et* $B = \{b; e; f; g\}$*, on a :* ....

Remarques

- ....
  ....
- ....
  ....

Exemple :
L'ensemble des parties de $E = \{a; b; c\}$ *est* $\mathcal{P}(E) =$ ....

3 p-uplets

Définition : p-uplet ou p-liste

....
....
....

Remarques

- ....
- ....
- ....

Exemples :

- *Un code de carte bancaire est un 4-uplet de* $E = 0, 1, 2, ...9$.
- *Un « mot » de 5 lettres est un 5-uplet de l'alphabet.*

4 Produit cartésien

Définition : Produit cartésien

....
....
....

Exemple : Si $E = \{a; b; c\}$ *et* $F = \{f; g\}$*. Alors* $E \times F =$ ....

Remarque

....
....

Exemple :
• *L'ensemble* $\mathbb{R}^2$ *est l'ensemble des couples* (x, y) *avec* $x \in \mathbb{R}$ *et* $y \in \mathbb{R}$.
• *Si* $F = \{a, b\}$*, on retrouve* $F^2 =$ ....,
Il s'agit donc bien de l'ensemble des couples de F.

5 Dénombrement

Définition : Dénombrement

....

....

Exemples : Dans les exemples précédents : $|E| = 3$, $|B| = 4$, $|\mathcal{P}(E)| = 8$, $|E \times F| = 6$,...

II Principes fondamentaux

1 Principe additif et multiplicatif

Propriété : Principe additif

....

....

Exemple : Soient $A = \{a; b; c; d; e\}$ *et* $B = \{f; g; h\}$. *On a bien* $A \cap B = \varnothing$.
Le nombre d'éléments de $A \cup B$ *est donc :* ....

Propriété : Principe multiplicatif

....

....

Exemples :

- *Pour* $E = \{a; b; c\}$ *et* $F = \{f; g\}$, *le nombre d'éléments de* $E \times F$ *est* ....
- *On lance deux dés cubiques. Soit* $E = \{1; 2; 3; 4; 5; 6\}$ *l'ensemble des résultats possibles pour un dé. Alors* E^2 *est l'ensemble des couples possibles pour deux dés. On a par exemple :* $(1, 2) \in E^2$, $(6, 3) \in E^2$, $(5, 5) \in E^2$. *Il existe* ....

Remarque

On peut généraliser les deux propriétés ci-dessus à plus de deux ensembles.

2 Premières applications

Propriété : Nombre de p-uplets d'un ensemble à n éléments

....

....

Exemple : dans $E = \{a; b; c\}$, *le nombre de couples est* ....
En effet, les couples sont ....

Propriété : Nombre de parties (démontrée)

....

Démonstration

Soit $E = \{e_1, e_2, ..., e_n\}$. On associe à chaque partie P de E un unique n-uplet de l'ensemble $0; 1$ de la manière suivante : pour tout entier i entre 1 et n, on note 1 si e_i est dans P et 0 sinon. Par exemple, on associe à $\{e_1, e_3\}$ le n-uplet $\{1, 0, 1, 0, ..., 0\}$.
Ainsi le nombre de parties de E est égal au nombre de n-uplets de l'ensemble $\{0; 1\}$.

Exemple : Soit $E = \{1, 2, 3\}$. *Alors toutes les parties de* E *sont :* ....

Chapitre C
Droites et plans de l'espace

Objectifs :

- ☐ Je connais la définition d'une droite et d'un plan.
- ☐ Je connais l'interprétation vectorielle d'une droite de l'espace
- ☐ Je connais l'interprétation vectorielle d'un plan de l'espace.
- ☐ Je connais les différentes positions relatives de deux droites, de deux plans, et d'une droite et d'un plan dans l'espace.
- ☐ Je connais les différentes propriétés liées au parallélisme de droites et de plans dans l'espace.

I Droites de l'espace

1 Première approche

Définition : Droites

Une **droite** est un **ensemble infini de points alignés**, qui s'étend à l'infini dans les deux directions. En géométrie, une droite est définie par **deux points distincts**.

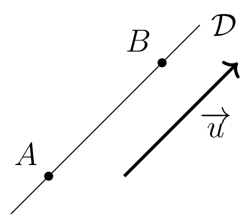
Propriété d'incidence (admise)

Par deux points distincts de l'espace, il passe une unique droite.

2 Interprétation vectorielle d'une droite de l'espace

Définition : Vecteur directeur

Soit $\mathcal{D}$ une droite et $\vec{u}$ un vecteur non nul.



. . . .

. . . .

. . . .

On dit qu'un vecteur directeur d'une droite **dirige** la droite.

Remarques

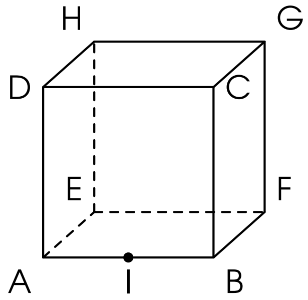
- Il existe une infinité de vecteurs directeurs pour une même droite.
- Tous les vecteurs directeurs d'une même droite sont colinéaires.

Propriété : Caractérisation vectorielle d'une droite (admise)

Soient A et B deux points distincts de l'espace.

. . . .

. . . .



Exemples : Dans le cube $ABCDEFGH$ ci-contre, on a :

- $\overrightarrow{AB}$, ..., ..., ..., ..., ..., ..., ... *sont des vecteurs directeurs de la droite* (AB).
- D *appartient à la droite passant par* C *de vecteur directeur* $\overrightarrow{IB}$ *car* ....

II Plans de l'espace

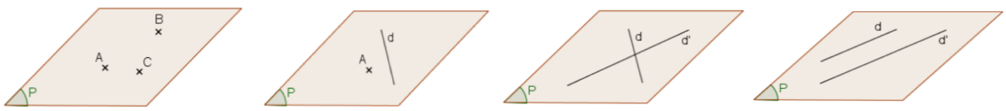
1 Première approche

Définition : Plans

....

Propriété : Caractérisation d'un plan (admise)

....
....
....



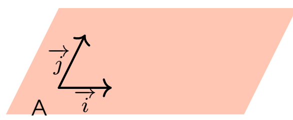
Définition : Coplanaire

....
....

2 Interprétation vectorielle d'un plan de l'espace

Définition : Plan défini par un point et deux vecteurs

....
....
....



Définition : Base et repère d'un plan

Soit $(A; \vec{i}\,; \vec{j}\,)$ un plan de l'espace. On dit alors que :

- ....
- ....
- ....

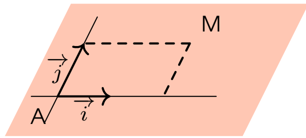
Remarques

- Dans un plan, il existe une infinité de couples de vecteurs directeurs.
- Tous couples de vecteurs directeurs d'un même plan sont coplanaires entre eux.
- ....
....

Propriété : Caractérisation vectorielle d'un plan (admise)

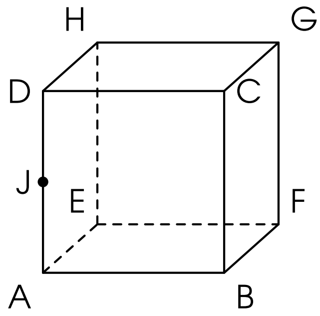
Le plan (ABC) est l'ensemble des points M de l'espace tels que :

- ....
- ....
- ....



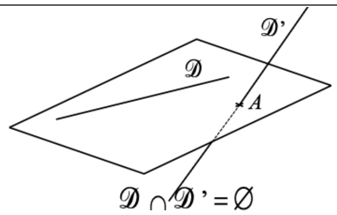
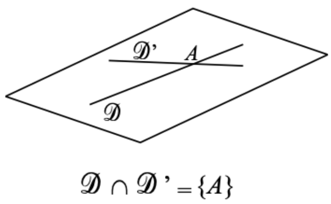
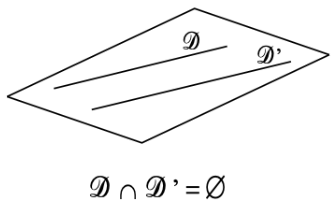
Exemples : Dans le cube $ABCDEFGH$ ci-contre, on a :

- $(........;........),(........,........),(........,........),...$ *forment des couples de vecteurs directeurs du plan (ABC).*
- $J \in (ABC)$ *car* ....

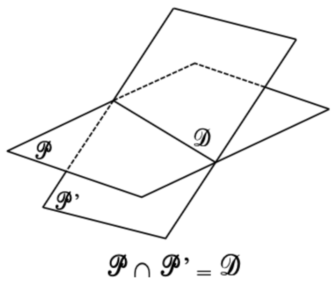
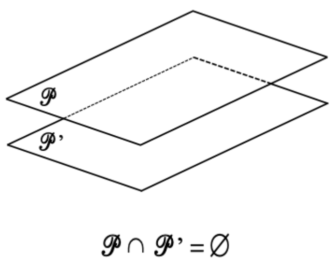
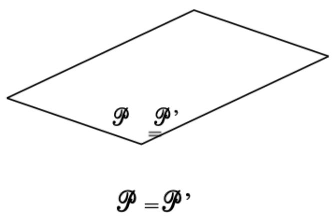


III Position relative

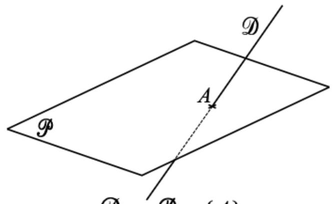
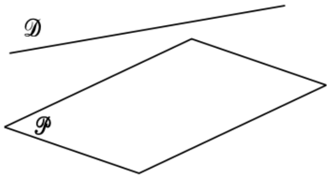
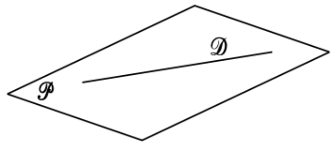
Propriété : Position relative de deux droites distinctes de l'espace (admis)

....	....	....
		
Les droites sont disjointes et ne sont pas contenues dans un même plan.	Les droites ont un unique point commun A.	Les droites sont disjointes et sont contenues dans un même plan.

Propriété : Position relative de deux plans de l'espace (admise)

....	....	....
		
L'intersection de deux plans sécants est une droite.	Les plans n'ont aucun point commun.	Pour que deux plans soient confondus, il suffit qu'ils aient trois points communs non alignés.

Propriété : Position relative d'un plan et d'une droite de l'espace (admise)

....	....	....
 $\mathcal{D} \cap \mathcal{P} = \{A\}$	 $\mathcal{D} \cap \mathcal{P} = \emptyset$	 $\mathcal{D} \subset \mathcal{P}$'
La droite et le plan ont un unique point commun.	La droite et le plan n'ont aucun point commun.	Pour qu'une droite soit incluse dans un plan, il suffit qu'ils aient deux points communs.

IV Parallélisme

1 Approche géométrique

Propriété 1 : Droites parallèles (admise)

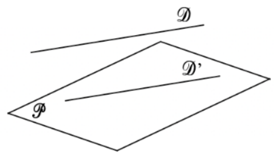
Deux droites parallèles à une même troisième droite sont ....

Propriété 2 : Plans parallèles (admise)

Deux plans parallèles à un même troisième plan sont ....

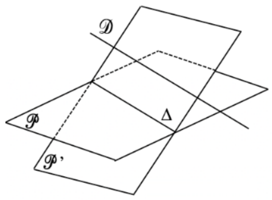
Propriété 3 : Droite parallèle à un plan (admise)

....
....
....



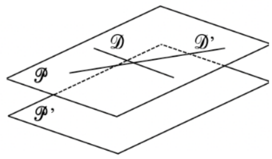
Propriété 4 : Droite et plans sécants (admise)

....
....
....



Propriété 5 : Condition de parallélisme de plans (admise)

....
....
....

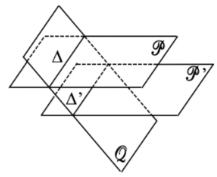


Propriété 6 : Plans parallèles coupés par un troisième (admise)

……………………………………………………………………

……………………………………………………………………

……………………………………………………………………

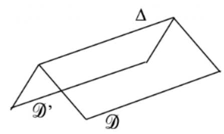


Théorème du toit (admis)

On considère deux droites parallèles $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$.

……………………………………………………………………

……………………………………………………………………



Remarque : Attention !

- ……………………………………………………………………
  ……………………………………………………………………
- ……………………………………………………………………
  ……………………………………………………………………

2 Approche vectorielle

Propriété : Parallélisme de deux droites (admise)

Une droite d de vecteur directeur $\vec{u}$ est parallèle à une droite d' de vecteur directeur $\vec{v}$ si, et seulement si, ……………………………………………………

Propriété : Parallélisme droite-plan (admise)

Une droite d de vecteur directeur $\vec{w}$ est parallèle à un plan $\mathcal{P}$ de base $(\vec{u}, \vec{v})$ si et seulement si ……………………………………………………

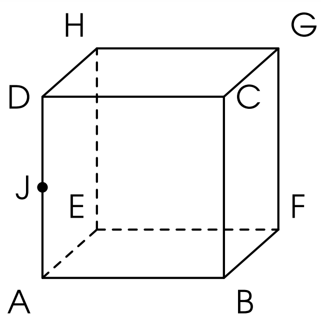
Propriété : Parallélisme de deux plans (admise)

Un plan $\mathcal{P}$ de base $(\vec{u}, \vec{v})$ est parallèle à un plan $\mathcal{P}'$ de base $(\vec{u'}, \vec{v'})$

- si, et seulement si, ……………………………………………………
- si, et seulement si, ……………………………………………………

Exemples : Dans le cube $ABCDEFGH$ ci-contre, on a :

- $(DG)//(ABF)$ car ……………………………………
  ……………………………………………………
  ……………………………………………………
- $(AEH)//(BFG)$ car ……………………………………
  ……………………………………………………
  ……………………………………………………



Chapitre D
Repérage dans l'espace

Objectifs :

- ☐ Je maîtrise la notion de coordonnées dans l'espace (extension de celle du plan).

I Base de plan (rappel)

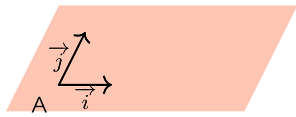
1 Interprétation vectorielle d'un plan de l'espace

Définition : Plan défini par un point et deux vecteurs

....

....

....



Définition : Base d'un plan

Soit $(A; \vec{i}; \vec{j})$ un plan de l'espace.

....

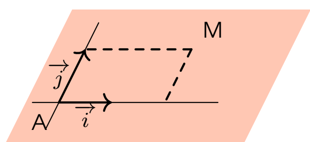
....

Remarques

- Dans un plan, il existe une infinité de couples de vecteurs directeurs.
- Tous couples de vecteurs directeurs d'un même plan sont coplanaires entre eux.

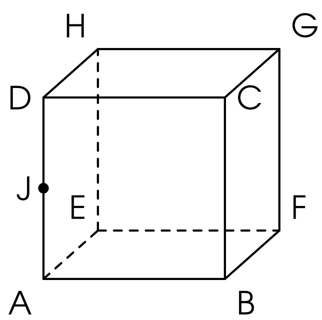
Propriété : Caractérisation vectorielle d'un plan (admise)

- Le plan (ABC) est l'ensemble des points M de l'espace tels que $\overrightarrow{AM}$ soit combinaison linéaire de $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$. Autrement dit, l'ensemble des points M tel qu'il que $\overrightarrow{AM} = x\overrightarrow{AB} + y\overrightarrow{AC}$ (avec x, y des réels)
- Le plan $(A; \vec{i}; \vec{j})$ est l'ensemble des points M de l'espace tels que $\overrightarrow{AM}$ soit combinaison linéaire de $\vec{i}$ et $\vec{j}$. Autrement dit, l'ensemble des points M tel qu'il que $\overrightarrow{AM} = x\,\vec{i} + y\,\vec{j}$ (avec x, y des réels)



Exemples : Dans le cube $ABCDEFGH$ ci-contre, on a :

- $(\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AD}), (\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BC}), (\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AB}), \ldots$ *forment des couples de vecteurs directeurs du plan* (ABC).
- $J \in (ABC)$ *car* $\overrightarrow{BJ} = \overrightarrow{BA} + \frac{1}{2}\overrightarrow{BC}$.



II Repères et coordonnées dans l'espace

1 Base et repère

Définition : Repère de l'espace

Soient $\overrightarrow{i}$, $\overrightarrow{j}$ et $\overrightarrow{k}$ trois vecteurs et O un point de l'espace.

- ....
- ....

Remarque

- ....
- ....

Exemple :
Dans un cube $ABCDEFGH$, $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE})$ forme une base de vecteurs de l'espace et $(A, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE})$ forme un repère de l'espace.

2 Coordonnées d'un point, d'un vecteur

Propriété : Existence et unicité des coordonnées (démontrée)

Soit $(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k})$ une base de l'espace.

....

....

Démonstration

Existence
Soit O et M deux points de l'espace tels que $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{OM}$.
On appelle $\mathcal{P}$ le plan passant par O et de base $(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$.
Puisque $\overrightarrow{k}$ n'est pas coplanaire avec $\overrightarrow{i}$ et $\overrightarrow{j}$, la droite d passant par M et de vecteur directeur $\overrightarrow{k}$ coupe le plan $\mathcal{P}$ en un point N.
$\overrightarrow{ON}$ est un vecteur du plan $\mathcal{P}$ donc il existe un couple de réels $(x; y)$ tel que $\overrightarrow{ON} = x\overrightarrow{i} + y\overrightarrow{j}$.
De même, M et N sont deux points de d, donc il existe un réel z tel que $\overrightarrow{NM} = z\overrightarrow{k}$
et on a = OM= ON + NM=x+ yj+zk.
Donc $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{OM} = \overrightarrow{ON} + \overrightarrow{NM} = x\overrightarrow{i} + y\overrightarrow{j} + z\overrightarrow{k}$.

Unicité
Supposons que $\overrightarrow{u} = x\overrightarrow{i} + y\overrightarrow{j} + z\overrightarrow{k}$ et $\overrightarrow{u} = x'\overrightarrow{i} + y'\overrightarrow{j} + z'\overrightarrow{k}$ alors $(x - x')\overrightarrow{i} + (y - y')\overrightarrow{j} + (z - z')\overrightarrow{k} = \overrightarrow{0}$ ce qui conduit, puisque $\overrightarrow{i}$, $\overrightarrow{j}$ et $\overrightarrow{k}$ ne sont pas coplanaires, à $x = x'$, $y = y'$ et $z = z'$.

Définition : Coordonnées d'un vecteur

....
....
....
....

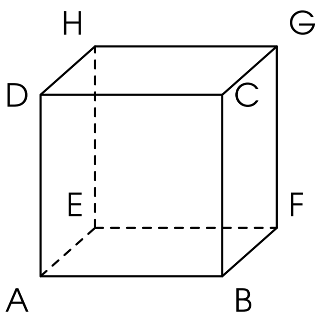
Définition : Coordonnées d'un point

Soit M un point de l'espace.

....
....
....
....

Exemples : Dans le cube $ABCDEFGH$ ci-contre, on a :

- *Dans le repère* $(A, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE})$*, on a :*
  — $G(...,...,...)$; $B(...,...,...)$; $E(...,...,...)$; ...
  — ....
- *Dans le repère* $(E, \overrightarrow{EF}, \overrightarrow{EH}, \overrightarrow{EA})$*, on a :*
  — $G(...,...,...)$; $B(...,...,...)$; $E(...,...,...)$; ...
  — ....



3 Propriétés

Les propriétés et les règles de calcul vues dans le plan pour les coordonnées de vecteurs et de points se prolongent dans l'espace en ajoutant simplement une 3e coordonnée.

Propriétés : Calcul avec les coordonnées (admises)

Dans un repère donné de l'espace, soient $\vec{u}(a;b;c)$ et $\vec{u'}(a';b';c')$ deux vecteurs, $A(x_A;y_A;z_A)$ et $B(x_B;y_B;z_B)$ deux points.

- Pour tout réel k, le vecteur $k\vec{u}$ a pour coordonnées : ....
- Le vecteur $\vec{u}+\vec{u'}$ a pour coordonnées : ....
- $\vec{u} = \vec{u'} \Leftrightarrow \begin{cases} .... \\ .... \\ .... \end{cases}$
- La norme de $\vec{u}$ est $||\vec{u}|| =$ ....
- Le vecteur $\overrightarrow{AB}$ a pour coordonnées : $\begin{pmatrix} .... \\ .... \\ .... \end{pmatrix}$
- Le milieu I de $[AB]$ a pour coordonnées : ....

Chapitre E
Dénombrement (partie 2)

Objectifs :

- ☐ Je connais la notion de factorielle.
- ☐ Je connais la différence entre arrangement et permutation.
- ☐ Je connais la notion de combinaison.
- ☐ Je connais les propriétés des combinaisons (triangle de Pascal).

I Arrangements et permutations

1 Factorielle

Définition : Factorielle n

. . . .

. . . .

Remarques

- . . . .
- . . . .
- . . . .

2 Arrangement

Définition : Arrangement

Soit E un ensemble de n éléments.

. . . .

. . . .

Remarquefondamentale

. . . .

Exemple :
On considère l'ensemble $E = \{a; b; o; p; r\}$.

- *Les triplets . . . . et . . . . sont des arrangements de 3 éléments de E.*
- *Les triplets . . . . et . . . . sont deux arrangements différents de 3 éléments.*
- *Le quintuplet . . . . est un arrangement de 5 éléments de E.*
- *Le sextuplet . . . . n'est pas un arrangement de E (car il y a répétition !).*

Propriété : Nombre d'arrangements (démontrée)

Le nombre d'arrangements de p éléments de E (avec card$(E) = n \geq p$) est :

. . . .

Démonstration

Cette formule s'établit par un raisonnement élémentaire.
Pour le premier élément que l'on choisit, on a n possibilités,
Pour le second, on a $(n-1)$ possibilités,
Pour le troisième, on a $(n-2)$ possibilités,
...
Pour le p^e, on a donc $(n-(p-1))$ possibilités.

Ainsi, il y a $n \times (n-1) \times (n-2) \times \ldots \times (n-(p-1))$ possibilités.

Exemples :

- *Dans l'exemple précédent, calculons le nombre d'arrangements à 3 éléments de E : il y a .... choix pour la 1ère lettre, ... choix pour la 2ème (pas de répétitions) et .... choix pour la 3ème. On a donc, d'après le principe multiplicatif : .... $\times$ .... $\times$ .... $=$ .... arrangements possibles, ou : ....*
- *Soit $E = \{a; b; c; d\}$. Tous les couples d'éléments distincts possibles sont ....*
  ..
  Le nombre d'arrangements de 2 éléments est donc : ....

3 Cas particulier : la permutation

Définition : Permutation

Soit E un ensemble de n éléments.
....
....

Propriété : Nombre de permutations

....

Exemple :
Soit $E = \{a; b; c\}$.
L'ensemble des permutations possibles sont : ....
Cela correspond à 3 choix pour la première composante, puis 2 choix pour la deuxième, et un dernier choix pour la troisième. On a ....

II Combinaisons

1 Définition

Définition : Combinaison

Soit E un ensemble de n éléments.
....
....

Remarque fondamentale

....

Exemple : On considère l'ensemble $E = \{1; 2; 3; 4; 5\}$.

- *Le sous-ensemble $\{1; 2; 3\}$ est appelé une combinaison de E à 3 éléments.*
- *Le sous-ensemble $\{2; 5\}$ est appelé une combinaison de E à 2 éléments.*
- *$\{1; 2\}$ et $\{2; 1\}$ correspondent à la même combinaison de E.*

Propriété : Nombre de combinaisons (admise)

....
....
....

Remarque

Le nombre $\binom{n}{p}$ (se lit « p parmi n ») de combinaisons de p parmi n porte aussi le nom de **coefficient binomial** en référence à une loi de probabilité, la loi binomiale (voir le chapitre G).

2 Propriétés de combinaisons

Propriétés : Combinaisons particulières (admise)

....
....
....

Propriété (démontrée)

Soit n un entier naturel. On a :
....

Démonstration au programme

Par définition, pour tout entier k tel que $0 \leq k \leq n$, $\binom{n}{k}$ est le nombre de combinaisons de k éléments de E.
Autrement dit, $\binom{n}{k}$ est le nombre de parties de E composées de k éléments.
Ainsi, par principe additif, $\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}$ est égal au nombre total de parties de E (la somme des parties allant de 0 à n éléments).
Or, nous avions vu qu'il y avait 2^n parties de E.
Par conséquent, $\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^n$.

3 Triangle de Pascal

Propriété : Relation (ou formule) de Pascal (démontrée)

Pour tout entier non nul n et pour tout entier naturel k tel que $0 \leq k \leq n-1$, on a :
....
....

Démonstration au programme

$$\binom{n}{p} + \binom{n}{p+1} = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$= \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$= \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$= \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$= \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$= \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$= \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Remarque : Triangle de Pascal

Le triangle de Pascal illustre cette situation :

Remarques

- On peut faire le lien avec les identités remarquables :
  $(a+b)^2 = 1a^2 + 2ab + 1b^2$ et $(a+b)^3 = 1a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + 1b^3$
- À la calculatrice : il est possible de vérifier les résultats à l'aide d'une calculatrice : la fonction se nomme "combinaison" ou "nCr".

Chapitre F
Produit scalaire dans l'espace

Objectifs :

- ☐ Je connais la définition du produit scalaire.
- ☐ Je connais les différentes expressions du produit scalaire.
- ☐ Je connais la définition de vecteurs orthogonaux et de droites orthogonales.
- ☐ Je connais la définition de vecteur normal.
- ☐ Je maîtrise la notion de droite perpendiculaire à un plan.
- ☐ Je maîtrise la notion de plans perpendiculaires.

I Approche géométrique

Définition : Lien avec le plan

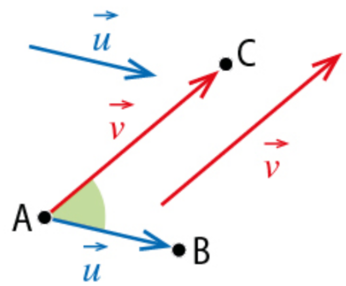
Le produit scalaire de deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ de l'espace est leur produit scalaire dans un plan les contenant.

La notion du produit scalaire dans l'espace prolonge donc celle du plan vue en 1^e :

Définition : Produit scalaire

Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs non nul de l'espace et A, B et C des points coplanaires de l'espace tels que $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$ et $\vec{v} = \overrightarrow{AC}$.
Le **produit scalaire** de $\vec{u}$ et $\vec{v}$ est le réel, noté $\vec{u} \cdot \vec{v}$, défini par :

$$\vec{u} \cdot \vec{v} \quad = \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$= \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

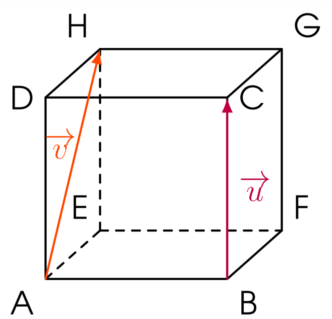


Le nombre $\vec{u} \cdot \vec{v}$ se lit "$\vec{u}$ scalaire $\vec{v}$ ".

Remarques : Conséquences

- Si $\vec{u} = \vec{0}$ ou $\vec{v} = \vec{0}$, alors ....
- Si $\vec{u} \perp \vec{v}$, alors $\cos(\vec{u}; \vec{v}) = \cos(\frac{\pi}{2}) =$ ..... Donc ....
- On admet que le produit scalaire de $\vec{u}$ et $\vec{v}$ est indépendant du plan et des représentants que l'on choisis.

Exemple :
Soit $ABCDEFGH$ le cube d'arête a ci-contre.
On note $\vec{u} = \overrightarrow{BC}$ et $\vec{v} = \overrightarrow{AH} = \overrightarrow{BG}$
On a : $\vec{u} \cdot \vec{v} =$ ....
Donc $\vec{u} \cdot \vec{v} =$ ....



Propriété : Produit scalaire et colinéarité (admise)

Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs non nuls et colinéaires. On a :

$$\vec{u}\cdot\vec{v} = \begin{cases} \text{..............................} & \text{si } \vec{u} \text{ et } \vec{v} \text{ ....} \\ \text{..............................} & \text{si } \vec{u} \text{ et } \vec{v} \text{ ....} \end{cases}$$

Exemple :
Dans le cube $ABCDEFGH$ de l'exemple précédent, $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont colinéaires de sens contraires. On a donc : $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CD} =$ ....

Propriété : Produit scalaire et projeté orthogonal (admise)

Si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont deux vecteurs non nuls et A, B et C trois points tels que $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$ et $\vec{v} = \overrightarrow{AC}$, alors $\vec{u}\cdot\vec{v} = \overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AK}\cdot\overrightarrow{AC}$ où H est le projeté orthogonal de C sur (AB) et K le projeté orthogonal de B sur (AC).

Remarque : Rappel

$\vec{u}\cdot\vec{u} = (\vec{u})^2 = \|\vec{u}\|^2$ est appelé carré scalaire.

Exemple :
On considère le cube précédent. Dans le plan (AGC), le projeté orthogonal de G sur (AC) est le point ..... Ainsi : $\overrightarrow{AG}\cdot\overrightarrow{AC} =$ ....

Propriétés opératoires (admises)

Pour tous vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$:

- **Symétrie :** ....
- **Bilinéarité :**
  - $(k\vec{u})\cdot\vec{v} =$ ....
  - $\vec{u}\cdot(\vec{v}+\vec{w}) =$ ....

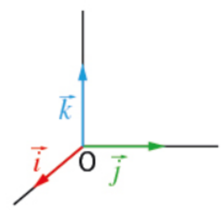
Exemples : Dans le cube $ABCDEFGH$ précédent, on a : $\overrightarrow{BF}\cdot\overrightarrow{AG} =$ ....
....

II Produit scalaire dans un repère de l'espace

Les formules suivantes ne sont valables que si l'espace muni d'un repère orthonormé.

Définitions : Base et repère orthonormé

- ....
....
....
- ....
....



Propriété : Expression analytique du produit scalaire (démontrée)

Dans un repère orthonormé de l'espace $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, soient $\vec{u}(x;y;z)$ et $\vec{v}(x';y';z')$.
On a :

$$\vec{u}\cdot\vec{v} = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Démonstration

Soient I, J et K les points de l'espace tels que $\vec{i} = \overrightarrow{OI}$, $\vec{j} = \overrightarrow{OJ}$ et $\vec{k} = \overrightarrow{OK}$.
On a $\vec{i}\cdot\vec{i} = OI \times OI \times \cos\widehat{IOI} = OI \times OI \times \cos 0 = 1 \times 1 \times 1 = 1$.
Par un raisonnement similaire, on a : $\vec{j}\cdot\vec{j} = 1$ et $\vec{k}\cdot\vec{k} = 1$.
De même, comme les vecteurs $\vec{i}$, $\vec{j}$ et $\vec{k}$ sont orthogonaux deux à deux : $\vec{i}\cdot\vec{j} = \vec{i}\cdot\vec{k} = \vec{j}\cdot\vec{k} = 0$.
De plus, on a : $\vec{u} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$ et $\vec{v} = x'\vec{i} + y'\vec{j} + z'\vec{k}$
Donc, par bilinéarité, $\vec{u}\cdot\vec{v} = (x\vec{i}+y\vec{j}+z\vec{k})\cdot(x'\vec{i}+y'\vec{j}+z'\vec{k}) = xx'(\vec{i}\cdot\vec{i}) + yy'(\vec{j}\cdot\vec{j}) + zz'(\vec{k}\cdot\vec{k}) + (xy'+yx')\vec{i}\cdot\vec{j} + (xz'+zx')\vec{i}\cdot\vec{k} + (yz'+zy')\vec{j}\cdot\vec{k} = xx'+yy'+zz'$

Propriétés : Conséquences (démontrées)

Dans un repère orthonormé de l'espace $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, soient $\vec{u}(x;y;z)$ et $\vec{v}(x';y';z')$ deux vecteurs et soient $A(x_A;y_A;z_A)$ et $B(x_B;y_B;z_B)$ deux points. On a :

- $\vec{u}\cdot\vec{u} = x^2+y^2+z^2$ donc $||\vec{u}|| = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$
- $AB = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

Démonstration

- D'une part, $\vec{u}\cdot\vec{u} = xx+yy+zz = x^2+y^2+z^2$ et, d'autre part, $\vec{u}\cdot\vec{u} = ||\vec{u}||^2$. Donc $||\vec{u}|| = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$.
- On a $\overrightarrow{AB}(x_B-x_A;y_B-y_A;z_B-z_A)$ et $AB = ||\overrightarrow{AB}||$. D'après le point précédent, on a donc : $AB\sqrt{(x_B-x_A)^2+(y_B-y_A)^2+(z_B-z_A)^2}$.

Exemple :
Si $A(1;-2;-1)$ *et* $B(-3;1;-4)$, *alors* $AB = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

Propriétés : "Identités remarquables" (démontrées)

Pour tous vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ de l'espace, on a :

1. $||\vec{u}+\vec{v}||^2 = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$
2. $||\vec{u}-\vec{v}||^2 = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$
3. $(\vec{u}+\vec{v})(\vec{u}-\vec{v}) = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

Démonstration

1. $||\vec{u}+\vec{v}||^2 = (\vec{u}+\vec{v})\cdot(\vec{u}+\vec{v}) = \vec{u}\cdot\vec{u} + \vec{u}\cdot\vec{v} + \vec{v}\cdot\vec{u} + \vec{v}\cdot\vec{v}$.
Or $\vec{u}\cdot\vec{u} = ||\vec{u}||^2$, $\vec{v}\cdot\vec{v} = ||\vec{v}||^2$ et $\vec{u}\cdot\vec{v} = \vec{v}\cdot\vec{u}$.
Donc $||\vec{u}+\vec{v}||^2 = ||\vec{u}||^2 + 2\vec{u}\cdot\vec{v} + ||\vec{v}||^2$.

2. $||\vec{u}-\vec{v}||^2 = ||\vec{u}+(-\vec{v})||^2 = ||\vec{u}||^2 + 2\vec{u}\cdot(-\vec{v}) + ||-\vec{v}||^2 = ||\vec{u}||^2 - 2\vec{u}\cdot\vec{v} + ||\vec{v}||^2$

Propriétés : Formules de polarisation (démontrées)

Pour tous vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ de l'espace, on a :

(1) $\vec{u} \cdot \vec{v} = \ldots\ldots\ldots\ldots$

(2) $\vec{u} \cdot \vec{v} = \ldots\ldots\ldots\ldots$

(3) $\vec{u} \cdot \vec{v} = \ldots\ldots\ldots\ldots$

Démonstration

(1) $||\vec{u} + \vec{v}||^2 = \ldots\ldots\ldots\ldots$

$\ldots\ldots\ldots\ldots$

(2) $||\vec{u} - \vec{v}||^2 = \ldots\ldots\ldots\ldots$

$\ldots\ldots\ldots\ldots$

(3) $||\vec{u} + \vec{v}||^2 - ||\vec{u} - \vec{v}||^2 = \ldots\ldots\ldots\ldots$

$\ldots\ldots\ldots\ldots$

Donc $\vec{u} \cdot \vec{v} = \ldots\ldots\ldots\ldots$

Remarque

La formule (2) permet de calculer le produit scalaire $\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{AB}$ uniquement à partir des longueurs AB, AC et BC.

III Orthogonalité

1 Entre deux vecteurs

Propriété : Vecteurs orthogonaux (admise)

$\ldots\ldots\ldots\ldots$

Remarque

$\ldots\ldots\ldots\ldots$

2 Entre deux droites

Définition : Droites orthogonales

$\ldots\ldots\ldots\ldots$

$\ldots\ldots\ldots\ldots$

Définition : Droites perpendicualaires

$\ldots\ldots\ldots\ldots$

$\ldots\ldots\ldots\ldots$

Propriété (démontrée)

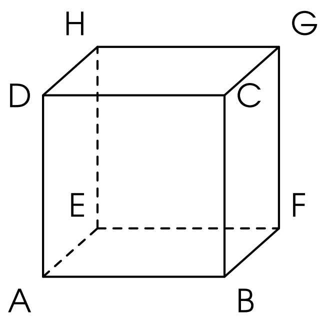
. . . .

. . . .

Démonstration

Les droites d_1 et d_2 sont orthogonales si et seulement si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont orthogonaux ce qui équivaut à $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$

Exemple :
Soit $ABCDEFGH$ un cube.



- *Les droites (AB) et (CG) sont orthogonales car $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CG} = 0$.*
- *Les droites (DH) et (HG) sont perpendiculaires car elles sont toutes deux incluses dans le plan (DHG) et $\overrightarrow{DH} \cdot \overrightarrow{HG} = 0$.*

Propriétés : Autres propriétés (admises)

- . . . .
  . . . .
- . . . .
  . . . .
- . . . .
  . . . .

Remarque

. . . .

. . . .

Exemple : Dans le cube ci-dessus, $(FE) \perp (EH)$ et $(FE) \perp (GC)$, mais (EH) et (GC) ne sont pas parallèles.

3 Entre une droite et un plan

Définition : Droite orhtogonale à un plan

. . . .

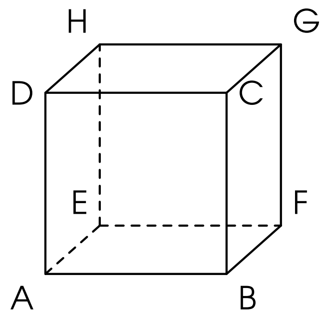
. . . .

. . . .

Propriété (admise)

. . . .
. . . .
. . . .

Exemple :
Soit $ABCDEFGH$ *un cube.*
On a $(BC) \perp (ACF)$ *car* . . . .
. . . .
. . . .



Propriétés (admises)

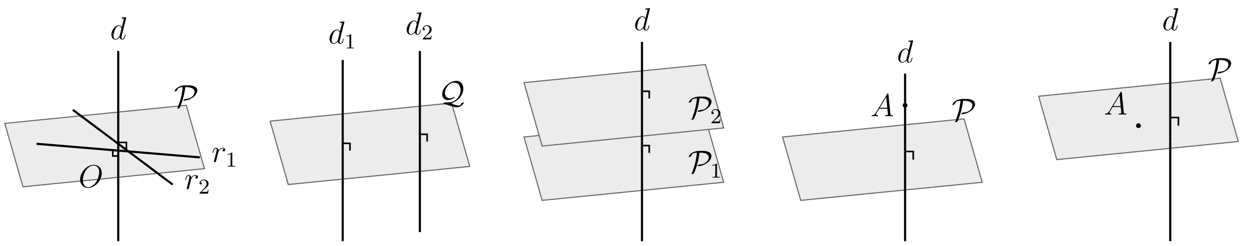
(a) Si une droite est orthogonale à un plan, alors elle est orthogonale à toute droite de ce plan.

(b) Si deux droites sont parallèles, alors tout plan orthogonal à l'une est orthogonal à l'autre.

(c) Si deux plans sont orthogonaux à une même droite alors ils sont parallèle

(d) Il existe une unique droite d passant par un point A et orthogonale à un plan $\mathcal{P}$ donné (figure 1).

(e) Il existe un unique plan $\mathcal{P}$ passant par un point A et orthogonale à une droite d donnée (figure 2).



Chapitre G
Loi binomiale

Objectifs :

- ☐ Je maîtrise les notions d'épreuve de Bernoulli et de schéma de Bernoulli.
- ☐ Je sais gérer une situation mettant en jeu une loi de Bernoulli (loi de probabilité, espérance, variance, écart-type).
- ☐ Je connais la définition de loi binomiale.
- ☐ Je sais gérer une situation mettant en jeu une loi binomiale (loi de probabilité, espérance, variance, écart-type).
- ☐ Je sais calculer $\mathbb{P}(X = k)$ à la main.
- ☐ Je sais gérer $\mathbb{P}(X \leq k), \mathbb{P}(X > k)$, etc...
- ☐ Je sais utiliser ma calculatrice.

I Quelques rappels

1 Généralités sur les probabilités

Définitions

- On appelle **univers des possibles** l'ensemble des issues d'une expérience. On le note Ω.
- Un **évènement** A est un sous-ensemble de Ω
- L'**évènement contraire** de A est noté $\overline{A}$. On a : $P(\overline{A}) = 1 - P(A)$
- L'évènement $A \cap B$ est l'**intersection** de A et B. Il se réalise uniquement si A et B se réalisent en même temps
- Deux évènements sont dits **disjoints** ou incompatibles si $A \cap B = \varnothing$
- L'évènement $A \cup B$ est la **réunion** de A et B. Il se réalise si au moins un des 2 évènements A ou B se réalise. On a : $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

Exemple :
Prenons pour expérience un lancer de dé. On a donc $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. On peut considérer sur cette expérience deux évènements A et B tels que A : "Obtenir 1" et B : "Obtenir un nombre pair". Ainsi, on a : $A = \{1\}$ et $B = \{2, 4, 6\}$. De plus, $A \cap B = \varnothing$ donc A et B sont incompatibles.

Définition : Probabilités conditionnelles

Soit A et B deux évènements de Ω tels que $P(A) \neq 0$.
La **probabilité conditionnelle** que l'évènement B se réalise sachant que l'évènement A est réalisé se note $P_A(B)$ et est définie par :

$$P_A(B) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$$

2 Variables aléatoires

Définition : Variable aléatoire

On définit une **variable aléatoire** en associant un nombre réel à chaque issue d'une expérience aléatoire. On note souvent les variables aléatoires par une majuscule : $X : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$

Exemple :
On lance 3 fois une pièce de monnaie. On peut définir une variable aléatoire donnant le nombre de "faces" obtenues.
C'est-à-dire 0, 1, 2 ou 3. On aura donc : $X(\Omega) = \{0, 1, 2, 3\}$

Définition : Loi de probabilité

La **loi de probabilité** d'une variable aléatoire X associe à chaque valeur x_i prise par X la probabilité p_i de l'évènement $(X = x_i)$.
On la représente souvent sous forme de tableau.

Exemple : Dans notre exemple précédent, on aurait donc :

x_i	0	1	2	3
$\mathbb{P}(X = x_i)$	$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{8}$

3 Espérance, variance et écart-type

Dans cette partie, X est une variable aléatoire dont la loi de probabilité est donnée par le tableau suivant.

x	x_1	x_2	$\cdots$	x_k
$\mathbb{P}(X = x_i)$	p_1	p_2	$\cdots$	p_k

Définition : Espérance

L'**espérance** de X est le nombre réel noté $\mathbb{E}[X]$ défini par :
....

Remarque

L'espérance se rapproche de la notion de « moyenne » en statistique.

Exemple : on considère une variable aléatoire Y dont la loi de probabilité est donnée par le tableau suivant.

y_i	-4	0	4	20
$p(Y = y_i)$	$0,5$	$0,2$	$0,2$	$0,1$

On a : $\mathbb{E}[Y] =$ ....

Remarques : Espérance et gain

- Lorsque X est une variable aléatoire donnant le gain algébrique à un jeu, $E(X)$ est le **gain moyen** que peut espérer un joueur sur un grand nombre de parties à ce jeu.
- Un jeu est **équitable** si l'espérance de la variable aléatoire donnant le gain algébrique est nulle.

Définition : Variance

La **variance** de X est le nombre réel noté $\mathbb{V}[X]$ défini par :
. . . .
. . . .
. . . .

Exemple : dans l'exemple précédent, on a :
. . . .
. . . .

Définition : Écart-type

L'écart-type de X est le nombre réel noté $\sigma(X)$ défini par :
. . . .

Exemple : dans l'exemple précédent, on a $\sigma(Y) =$ . . . .

II Succession d'épreuves indépendantes

Dans cette partie, on va s'intéresser à l'univers et aux probabilités de chaque issue lors d'une succession de n épreuves indépendantes $E_1, E_2, ..., E_n$.

Exemple : Dans la suite, on considèrera la succession de deux épreuves indépendantes :

- E_1 *: un lancer d'un dé équilibré*
- E_2 *: le tirage au sort d'une lettre de l'alphabet*

Propriété : Univers d'une succession d'épreuves (admise)

L'**univers** Ω **associé à cette succession de** n **épreuves indépendantes** est . . . .
. . . .
. . . .

Remarque

Une **issue** de la succession d'épreuves est donc . . . .
. . . .

Exemple : Dans notre expérience, l'univers de E_1 *est* . . . .
et l'univers de E_2 *est* . . . .
Ainsi l'ensemble des issues de la succession des épreuves est . . . .

Propriété : Evènements indépendants

Soit A et B deux évènements de Ω.
Ces deux évènements sont dits **indépendants** si la réalisation de l'un n'affecte pas la réalisation de l'autre. C'est à dire, si l'on a :

$$P_A(B) = \text{........} \quad \text{ou} \quad P_B(A) = \text{........}$$

Autrement dit, deux évènements A et B sont indépendants si et seulement si :

....

Exemple :
Nos deux expériences sont bien indépendantes puisque la réalisation de l'une n'influe pas sur la (non) réalisation de l'autre.

Propriété : Probabilités dans une succession d'épreuves (généralisation)

Pour toute liste $(A_1, A_2, ..., A_n)$ d'évènements concernant les n épreuves successives indépendantes, on a :

....

Exemple :
Dans notre expérience, si on a les évènements suivants :

- A : *"Obtenir un nombre pair", avec* $P(A) = \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$
- B : *"Obtenir une voyelle", avec* $P(B) = \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$

Alors, on aura : $P(A \cap B) = \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$

III Epreuve de Bernoulli et loi de Bernoulli

Définition : Epreuve de Bernoulli

....
....
....
....

Définition : Loi de Bernoulli

....
....
....

Ainsi, on a :

On notera : ....

Exemple :
On considère une urne avec trois boules vertes et cinq rouges indiscernables au toucher. On tire au hasard une boule.

Soit X *la variable aléatoire qui vaut 1 si on a obtenu une boule verte et 0 sinon.*
....
....
....
Ainsi, $p = \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$
et ....

Propriétés : Espérance, variance et écart-type (démontrées)

Si $X \sim b(p)$, alors :

....

....

....

Démonstration

On calcule l'espérance et la variance à partir du tableau de la loi de probabilité (voir fiche premiere) :

- ....
- ....
- ....

Exemple :
Dans l'exemple précédent, on a :
$\mathbb{E}[X] =$ ....,
$\mathbb{V}[X] =$ ....

IV Schéma de Bernoulli et loi binomiale

Définition : Schéma de Bernoulli

....

....

....

Exemple : On lance deux pièces équilibrées en considérant l'évènement S : "Obtenir Pile" comme succès.
Il s'agit d'un schéma de Bernoulli car ....

....

....

Ici, on a donc $n =$ ..... et $p =$ ......

Définition : Loi binomiale

....

....

....

....

On notera ....

Exemple : Dans l'exemple précédent, on a $X \sim$ .... Les issues sont équiprobables, on peut facilement donner le tableau représentant la loi de X :

Définition : Coefficient binomial

. . . .
. . . .
. . . .

Exemple :
Dans l'exemple précédent, on a :

- *Pour 0 succès, on a :* . . . .
- *Pour 1 succès, on a :* . . . .
- *Pour 2 succès, on a :* . . . .

Propriété : Expression de la loi binomiale (démontrée)

Soit $X \sim \mathcal{B}(n, p)$. Pour tout entier k compris entre 0 et n, on a :

. . . .

Démonstration au programme

Dans l'arbre modélisant un schéma de Bernoulli à n épreuves, l'événement $\{X = k\}$ est constitué de toutes les issues comportant k succès.
D'après une propriété des arbres pondérés, ces issues ont toutes la même probabilité . . . .
Or le nombre de chemins réalisant k succès pour n répétitions sur l'arbre associé a un schéma de Bernoull vaut le coefficient binomial . . . .
On obtient la formule en faisant la somme des probabilités de toutes ces issues, soit en multipliant . . . .
Autrement dit, ...

Exemple :
Reprenons le schéma de l'activité 2. On lance successivement 10 dés équilibrés. Quelle est la probabilité d'obtenir exactement 2 fois le 6 ?

. . . .
. . . .
. . . .
. . . .
. . . .
. . . .
. . . .
. . . .

Propriétés : Espérance, variance et écart-type (admise)

Soit $X \sim \mathcal{B}(n; p)$, on a :

. . . .
. . . .
. . . .

Cette propriété sera démontrée ultérieurement.

Chapitre H
Équations cartésiennes d'un plan

Objectifs :

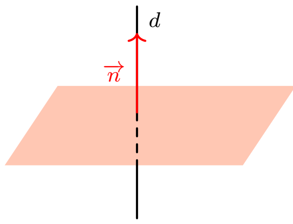
- ☐ Je maîtrise la notion d'équation cartésienne d'un plan.
- ☐ Je sais exploiter la notion de vecteur normal.
- ☐ Je sais trouver l'équation d'un plan par différentes méthodes.

I Vecteur normal d'un plan

1 Caractérisation d'un plan

Définition : Vecteur normal d'un plan

....
....
....



Propriétés (admises)

- ....
....
- Soit $\vec{n_1}$ et $\vec{n_2}$ deux vecteurs normal à un même plan $\mathcal{P}$. ....
....

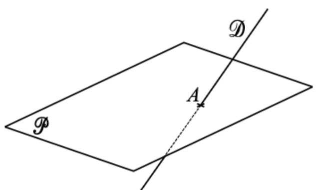
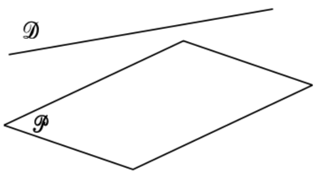
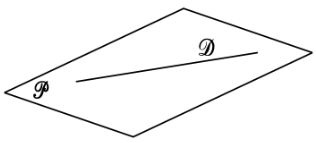
Propriété : Caractérisation vectorielle d'un plan 2 (admise)

Soit $\vec{n}$ un vecteur non nul et A un point de l'espace.
....
....

2 Position relative de plans et de droites

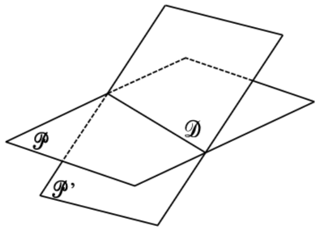
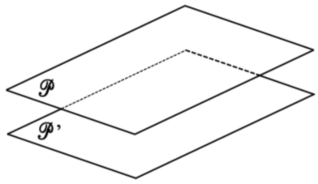
Propriété : Position relative d'un plan et d'une droite de l'espace (admise)

Soit $\mathcal{P}$ un plan de vecteur normal $\vec{n}$ et d une droite passant par un point A et de vecteur directeur $\vec{u}$.

Sécants	Parallèles	Incluse
 $\mathscr{D} \cap \mathscr{P} = \{A\}$	 $\mathscr{D} \cap \mathscr{P} = \varnothing$	 $\mathscr{D} \subset \mathscr{P}$'
....	....	....

Propriété : Position relative de deux plans de l'espace (admise)

Soient deux plans $\mathcal{P}$ et $\mathcal{P}'$ de vecteurs normaux $\vec{n}$ et $\vec{n'}$.

Sécants	Parallèles
 $\mathcal{P} \cap \mathcal{P}' = \mathcal{D}$	 $\mathcal{P} \cap \mathcal{P}' = \emptyset$
....	....

Remarque : Plans orthogonaux

Deux plans sont orthogonaux si l'un contient une droite orthogonale à l'autre.
Autrement dit, ...
....

II Équation cartésienne de plan

1 Équation cartésienne d'un plan

Théorème : Équation cartésienne de plan (démontré)

....
....
....
....
....
....

Démonstration au programme

$\boxed{\Rightarrow}$ Soit $\mathcal{P}$ un plan de vecteur normal $\vec{n}(a;b;c)$ et $A(x_0;y_0;z_0) \in \mathcal{P}$.
On a $M(x;y;z) \in P \Leftrightarrow$ ....
$\Leftrightarrow$ ....
$\Leftrightarrow$ ....

$\boxed{\Leftarrow}$ Réciproquement, puisque a, b et c ne sont pas tous les trois nuls, on peut supposer, par exemple, que a est différent de 0.
Le point $A\left(\frac{-d}{a};0;0\right)$ appartient donc au plan puisque ....
....
Or ....
....
....
Donc le plan admet bien pour vecteur normal $\vec{n}(a;b;c)$

Méthode : Déterminer l'équation cartésienne d'un plan

Méthode 1 - Avec un vecteur normal et un point

Déterminer l'équation du plan admet pour vecteur normal le vecteur $\overrightarrow{u}(2;1;3)$ passant par $A(2;4;9)$

1. On pose un point $M(x;y;z)$ et un calcule les coordonnés du vecteur $\overrightarrow{AM}$
   Soit $M(x;y;z)$ un point de l'espace.
   On a ....
   ....
   ....
2. On calcule le produit scalaire de $\overrightarrow{n}$ et $\overrightarrow{AM}$ pour obtenir l'équation cartésienne
   On a : ....
   ....
3. On conclut
   Ainsi ....

Méthode 2 - Avec trois points

Dans un repère orthonormé, on considère les points $A(2;-1;4)$, $B(2;1;4)$ et $C(3;-2;0)$.

1. Calculer les coordonnées de deux vecteurs formés par ces points.
   On a : ....
   ....
   ....
   De même, ...
   ....
   ....
2. On vérifie que les vecteurs ne sont pas colinéaires (sinon les points sont alignés)
   ....
   ....
3. On détermine les coordonnés d'un vecteur normal en résolvant un système
   Soit $\overrightarrow{n}(a;b;c)$ un vecteur normal au plan (ABC).
   ....
   ....
   ....
4. On détermine d à l'aide d'un des points du plan
   Ainsi, on a ....
   Or $A(2;-1;4) \in \mathcal{P}$, donc ....
5. On conclut
   ....

Chapitre I
Représentation paramétrique d'une droite

Objectifs :

- ☐ Je maîtrise la représentation paramétrique d'une droite.
- ☐ Je sais montrer la position relative de deux droites.
- ☐ Je sais montrer la position relative d'une droite et d'un plan.
- ☐ Je connais la définition du projeté orthogonal d'un point sur une droite/un plan.
- ☐ Je connais la définition de la distance d'un point à une droite (ou un plan).
- ☐ Je sais calculer la distance entre un point et une droite, ou un point et un plan.

I Représentation paramétrique d'une droite

Théorème : Représentation paramétrique d'une droite (démontré)

On munit l'espace d'un repère $(O; \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k})$.

....

....

....

....

....

....

....

....

Démonstration

$M(x; y; z) \in D \Leftrightarrow$ ....

....

....

....

....

....

....

Remarques

- ....
- ....
  ....
  ....

Exemple :
Soit $A(1; -2; 3)$ *et* $\overrightarrow{u}(3; 2; -1)$. *L'équation paramétrique de la droite* d *passant par* A *de vecteur directeur* $\overrightarrow{u}$ *est :*

II Applications

1 Position relative de deux droites

Méthode : Déterminer la position relative de deux droites

Pour déterminer la position relative de deux droites D et Δ, on procède ainsi :

1. On détermine si elles sont parallèles grâce à leur vecteur directeur.
2. **Si elles sont parallèles :** On vérifie si elles ont au moins un point en commun (confondus) ou non (strictement parallèles)
3. **Si elles ne sont pas parallèles :** On cherche s'il existe un point d'intersection.
   - Si oui, elles sont sécantes.
   - Si non, elles sont non-coplanaires.

Exemple :
Soient deux droites D et Δ dont les représentations paramétriques sont :

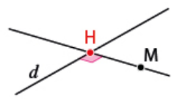
$$D : \begin{cases} x = 3t + 2 \\ y = -t - 1 \\ z = t + 1 \end{cases} \quad , \quad t \in \mathbb{R} \qquad \textit{et} \qquad \Delta : \begin{cases} x = s + 1 \\ y = 2s - 3 \\ z = -s + 2 \end{cases} \quad , \quad s \in \mathbb{R}$$

. . . .

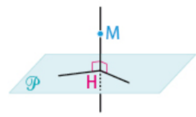
2 Projeté orthogonal

Définitions : Projeté orthogonal d'un point

- ....
....
....



- ....
....
....



Définition : Distance d'un point à un plan/une droite

....
....

Propriété : Lien entre distance et projeté orthogonal (démontrée)

....
....

Démonstration au programme

Soit $\mathcal{P}$ un plan et M un point. On note H le projeté orthogonal de M sur $\mathcal{P}$.

- **1er cas :** M appartient à $\mathcal{P}$
  Alors, ...
  ....
  ....
- **2nd cas :** M n'appartient pas à $\mathcal{P}$
  Soit A un point de $\mathcal{P}$ distinct de H.
  ....
  ....
  Ainsi, ...
  ....

Dans tous les cas, H est donc le point de $\mathcal{P}$ le plus proche de M.

Méthode : Détermination de la distance entre un point et un plan/une droite

Pour déterminer la distance entre un point et un plan/une droite :

1. On détermine une représentation paramétrique de la droite passant par ce point et orthogonale au plan/à la droite.
2. On trouve les coordonnées du point d'intersection avec la droite/le plan.
3. On calcule la distance entre les deux points.

Remarque : Formule de la distance

La distance entre deux points $A(x_A; y_A; z_A)$ et $B(x_B; y_B; z_B)$ est :
....

Chapitre J
Somme de variables aléatoires

Objectifs :

- ☐ Je sais utiliser ma calculatrice.
- ☐ Je connais la définition de somme de variables aléatoires.
- ☐ Je maîtrise la linéarité de l'espérance.
- ☐ Je connais les propriétés concernant la variance et l'écart-type.
- ☐ Je connais la notion d'échantillon.
- ☐ Je sais gérer les variables aléatoires somme et moyenne de l'échantillon.

I Opérations sur les variables aléatoires

1 Transformation affine

Définition

Soit X une variable aléatoire définie sur Ω qui prend les valeurs $X(\Omega) = \{a_1, a_2, \cdots, a_n\}$.

....

....

Remarque

Autrement dit, on note $aX + b$ la variable aléatoire définie sur Ω par : $(aX)(\omega) = a \times X(\omega) + b$, pour tout $\omega \in \Omega$.

Propriété (admise)

Soient X une variable aléatoire et Y la variable aléatoire définie par $Y = aX + b$ (avec a et b deux réels).

- L'espérance de Y est $\mathbb{E}[Y] =$ ....
- La variance de Y est $\mathbb{V}[Y] =$ ....
- L'écart-type de Y est $\sigma(Y) =$ ....

Exemple :
Un coiffeur se déplace à domicile. On note X le nombre de rendez-vous sur une journée. La loi de probabilité de X est donnée par le tableau ci-dessous.

x_i	0	1	2	3	4	5
p_i	0.03	0.09	0.15	0.38	0.18	0.17

Chaque rendez-vous lui rapporte 30 euros et ses frais de fonctionnement quotidiens s'élèvent à 15 euros. On note Y son gain quotidien. Ainsi $Y =$ ....
Or $\mathbb{E}[X] =$ ....
Donc $\mathbb{E}[Y] =$ ....
Son gain moyen journalier est donc de ....

2 Somme de variables aléatoires

Définition

. . . .
. . . .

Remarque

Autrement dit, on note $X+Y$ la variable aléatoire définie sur Ω par : $(X+Y)(\omega) = X(\omega)+Y(\omega)$, pour tout $\omega \in \Omega$.

Exemple : On lance deux dés cubiques équilibrés numérotés de 1 à 6.
On appelle X et Y les variables aléatoires associées respectivement à chaque dé.

- *$X+Y$ est la variable aléatoire* . . . .
- *$2X$ est la variable aléatoire* . . . .

Remarque

Le principe peut être généralisé à une somme de plusieurs variables aléatoires.

Propriété : Linéarité de l'espérance (admise)

Soient X et Y deux variables aléatoires. On a :

. . . .

Exemple : Si $X \sim \mathcal{B}(200;0.2)$ et $Y \sim \mathcal{B}(100;0.5)$, alors $\mathbb{E}[X+Y] =$ . . . .

Propriété : Variance d'une somme de variable aléatoire (admise)

Soient X et Y deux variables aléatoires **indépendantes**. On a :

. . . .

Exemple : Dans l'exemple précédent, X et Y sont bien indépendantes.
Ainsi, $\mathbb{V}[X+Y] =$ . . . .

II Somme et moyenne d'un échantillon

1 Échantillon

Définition : Échantillon

. . . .
. . . .
. . . .

Exemple : Ella prend le même train cinq jours par semaines.
On admet que la variable aléatoire X qui compte le nombre de retards suit la loi binomiale $\mathcal{B}(5;0.1)$.
En répétant cette expérience pendant 8 semaines, on peut construire un échantillon $(X_1, X_2, ..., X_8)$ de taille 8 de cette loi de probabilité.

2 Somme d'un échantillon

Définition : Variable aléatoire somme

On considère un échantillon $(X_1, X_2, \dots, X_n)$ de taille n d'une variable aléatoire X.
....
....

Exemple :
Dans l'exemple précédent, $S_8 = X_1 + X_2 + ... + X_8$ est la variable aléatoire somme de l'échantillon $(X_1, X_2, ..., X_8)$ qui compte le nombre de retard sur les 8 semaines de l'expérience.

Propriétés : Espérance, variance et écart-type (démontrée)

Soit S_n la somme d'un échantillon de taille n de variables aléatoires suivant la même loi. On a :

....

Démonstration

- $\mathbb{E}[S_n] = \mathbb{E}[X_1 + X_2 + \cdots + X_n] = \mathbb{E}[X_1] + \mathbb{E}[X_2] + \cdots + \mathbb{E}[X_n] = \mathbb{E}[X] + \cdots + \mathbb{E}[X] = n\mathbb{E}[X]$
- $\mathbb{V}[S_n] = \mathbb{V}[X_1 + X_2 + \cdots + X_n] = \mathbb{V}[X_1] + \mathbb{V}[X_2] + \cdots + \mathbb{V}[X_n] = \mathbb{V}[X] + \cdots + \mathbb{V}[X] = n\mathbb{V}[X]$
- $\sigma(S_n) = \sqrt{\mathbb{V}[S_n]} = \sqrt{n\mathbb{V}[X]} = \sqrt{n}\sqrt{\mathbb{V}[X]} = \sqrt{n}\sigma(X)$

3 Application à la loi binomiale

Propriété : Loi binomiale et somme (démontrée)

....
....
....

Démonstration

Pour toute variable aléatoire X_i où $i \in \{1, 2, \dots, n\}$, si l'on considère l'évènement « Obtenir 1 » de probabilité p comme succès alors $X_1 + X_2 + \cdots + X_n$ compte le nombre de succès lors de la réalisation des n épreuves de Bernoulli indépendantes. On en déduit que $X_1 + X_2 + \cdots + X_n$ suit une loi binomiale de paramètres n et p.

Exemple :
On considère des variables aléatoires indépendantes $X_1, X_2, \dots, X_{10}$ suivant une loi de Bernoulli de paramètre $p = 0,2$.
D'après la propriété précédente, $X = X_1 + X_2 + \cdots + X_{10}$ suit ....
....

Propriétés : Espérance, variance et écart-type (démontrée)

Soit $X \sim \mathcal{B}(n; p)$, on a :

....

Démonstration au programme

Soit $(X_1, X_2, \cdots, X_n)$ un échantillon de taille n de la loi de Bernoulli de paramètre p. On sait alors que $S_n = X_1 + X_2 + \cdots + X_n$ suit une loi binomiale de paramètres n, p. Or, on a :

- $\mathbb{E}[S_n] =$ ....
- $\mathbb{V}[S_n] =$ ....
- $\sigma(S_n) =$ ....

4 Moyenne d'un échantillon

Définition : Variables aléatoires somme et moyenne de l'échantillon

On considère un échantillon $(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ de taille n d'une variable aléatoire X.
....
....

Exemple : Pendant la fête de l'école, Sam a prévu de jouer 10 fois au jeu de la grenouille, dans lequel il peut gagner un certain nombre de points, noté X. Voici sa loi de probabilité :

x_i	0	5	10	20	50	100
p_i	0.6	0.2	0.1	0.06	0.03	0.01

La variable aléatoire M_n définie par $\frac{X_1+X_2+\cdots+X_n}{n}$, où X_i est le gain de la i^e partie, représente ....

Propriétés : Espérance, variance et écart-type (admises)

Soit M_n la moyenne d'un échantillon de taille n de variables aléatoires suivant la même loi. On a :

....

Démonstration

- $\mathbb{E}[M_n] = \mathbb{E}\left[\frac{1}{n}(X_1 + X_2 + \cdots + X_n)\right] = \frac{1}{n}\mathbb{E}[X_1 + X_2 + \cdots + X_n] = \frac{1}{n} \times n\mathbb{E}[X] = \mathbb{E}[X]$
- $\mathbb{V}[M_n] = \mathbb{V}\left[\frac{1}{n}(X_1 + X_2 + \cdots + X_n)\right] = \left(\frac{1}{n}\right)^2 \mathbb{V}[X_1 + X_2 + \cdots + X_n] = \frac{1}{n^2} \times n\mathbb{V}[X] = \frac{\mathbb{V}[X]}{n}$
- $\sigma(M_n) = \sqrt{\mathbb{V}[M_n]} = \sqrt{\frac{\mathbb{V}[X]}{n}} = \frac{\sqrt{\mathbb{V}[X]}}{\sqrt{n}} = \frac{\sigma(X)}{\sqrt{n}}$

Exemple : On reprend la situation de l'exemple précédent.
Au cours d'une partie, on a :

- $\mathbb{E}[X] =$ ....
- $\mathbb{V}[X] =$ ....
- $\sigma(X) \approx$ ....

Ainsi, au cours d'une série de 10 parties, on aurait :

- $\mathbb{E}[M_n] =$ ....
- $\mathbb{V}[M_n] =$ ....
- $\sigma(M_n) =$ ....

Chapitre K
Loi des grands nombres

Objectifs :

- ☐ Je maîtrise l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev
- ☐ Je sais mesurer la dispersion d'une variable aléatoire autour de son espérance en nombre d'écarts-type.
- ☐ Je maîtrise l'inégalité de concentration.
- ☐ Je sais utiliser l'inégalité de concentration pour mesurer la taille d'un échantillon.
- ☐ Je comprends la loi faible des grands nombres.

Remarque : Idée initiale

Supposons que l'on ne connaisse que l'espérance et la variance d'une variable aléatoire X.
Est-il possible d'avoir de l'information sur le comportement de cette variable aléatoire loin de son espérance ?
Ces événements sont rares, mais peut-on quantifier cette rareté ?

I Inégalité de Bienaymé-Tchebychev

1 Inégalité de Markov

Définition : Variable aléatoire positive ou nulle

Une variable aléatoire est dite **positive ou nulle** dans un univers Ω, lorsque toutes les valeurs prises par celle-ci sont des réels positifs ou nuls.

Exemple :
La variable aléatoire donnant le nombre de faces numérotées 1 obtenues sur dix lancers d'un dé est positive ou nulle.

Théorème : Inégalité de Markov (admis)

Soit X une variable aléatoire réelle positive ou nulle d'espérance $E(X)$. Alors pour tout réel a strictement positif,

$$\mathbb{P}(X \geq a) \leq \frac{\mathbb{E}[X]}{a}$$

Remarques

- Cela signifie que la probabilité que X prenne des valeurs plus grandes que a est d'autant plus petite que a est grand.
- On utilise cette inégalité quand on ne sait pas calculer une probabilité ou estimer une proportion.
- Si $a \leq E(X)$, l'inégalité de Markov n'a pas d'intérêt (on dit qu'elle est triviale).

Exemple : En 2015, le salaire brut mensuel moyen en France était de 2 442€.
On choisit un salarié au hasard et on note X la variable aléatoire donnant son salaire.
On sait alors que $\mathbb{P}(X \geq 7\,326) \leq$ ....

2 Inégalité de Bienaymé-Tchebychev

Théorème : Inégalité de Bienaymé-Tchebychev (démontré)

Soit X une variable aléatoire d'espérance $\mathbb{E}[X]$ et de variance $\mathbb{V}[X]$. Alors pour tout réel a strictement positif :

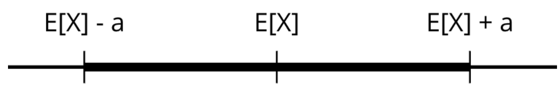
....

Démonstration

Soit $\Omega' = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ l'ensemble des valeurs prises par la variable aléatoire X et soit l'ensemble $A = \{|X - \mathbb{E}[X]| \geq a\}$ dont on note les éléments $a_1, a_2, \dots, a_k$.
Ces éléments $a_1, a_2, \dots, a_k$ appartiennent à A et pour tout i tel que $1 \leq i \leq k$, on a $|a_i - \mathbb{E}[X]| \geq a$.
On sait que : $\mathbb{V}[X] = (x_1 - \mathbb{E}[X])^2 P(X = x_1) + \cdots + (x_n - \mathbb{E}[X])^2 P(X = x_n)$
Tous les termes de cette somme sont positifs, donc si on ne garde dans cette somme que les termes portant sur les issues présentes dans A, la somme diminue. On a donc : $\mathbb{V}[X] \geq (a_1 - \mathbb{E}[X])^2 P(X = a_1) + \cdots + (a_k - \mathbb{E}[X])^2 P(X = a_k)$.
Par définition de A, chaque nombre $|a_i - \mathbb{E}[X]|$ est supérieur à a, donc chacun des nombres $(a_i - \mathbb{E}[X])^2$ est supérieur à a^2.
Ainsi $(a_1-\mathbb{E}[X])^2 P(X = a_1)+\cdots+(a_k-\mathbb{E}[X])^2 P(X = a_k) \geq a^2 P(X = a_1)+\cdots+a^2 P(X = a_k)$.
Donc $\mathbb{V}[X] \geq a^2 P(X = a_i) + \cdots + a^2 P(X = a_k)$.
Or $P(X = a_1) + \cdots + P(X = a_k) = P(X \in A)$.
D'où $\mathbb{V}[X] \geq a^2 P(X \in A)$.
Et ainsi $P(X \in A) \leq \frac{\mathbb{V}[X]}{a^2}$.
Soit encore $P(|X - \mathbb{E}[X]| \geq a) \leq \frac{\mathbb{V}[X]}{a^2}$.

Remarque : Interprétation et remarques

- La variable aléatoire X prendra avec une faible probabilité une valeur relativement lointaine de son espérance. Autrement dit, la probabilité que les valeurs prises par X s'écartent d'au moins a de l'espérance $E(X)$ est d'autant plus petite que a est grand.

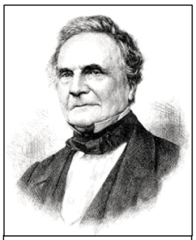


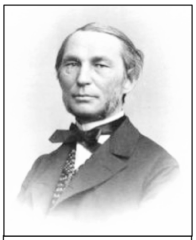
- On dit que $[E(X) - a; E(X) + a]$ est un **intervalle de fluctuation** de X.

Exemple : Dans une usine, la variable aléatoire L donnant la largeur en millimètres d'une puce électronique prise au hasard a pour espérance $E(L) = 12$ et pour variance $V(L) = 0{,}01$. Si la largeur d'une puce n'appartient pas à l'intervalle $]11; 13[$, c'est-à-dire si .... la puce n'est pas commercialisable.
D'après l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev, la probabilité qu'une puce ne soit pas commercialisable est donc : ....
....
....

Point histoire

Irénée-Jules Bienaymé est un mathématicien français qui a énoncé cette inégalité en 1853. Mais c'est **Pafnouti Tchebychev** qui l'a démontrée en 1867.
A noter que, excepté dans la littérature française, l'inégalité ne porte que le nom de Tchebychev.


Irénée-Jules Bienaymé
1796 – 1878


Pafnouti Tchebychev
1821 – 1894

Propriété : Application à $a = k\sigma$ (démontrée)

Soit X une variable aléatoire d'espérance $\mathbb{E}[X]$, de variance $\mathbb{V}[X]$ et d'écart-type $\sigma(X)$. Soit k un entier naturel non nul. On a alors :

....

Démonstration

On applique l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev avec $a = k\sigma(X)$. On a alors :

$$\mathbb{P}(|X - \mathbb{E}[X]| \geq k\sigma(X)) \leq \frac{\mathbb{V}[X]}{(k\sigma(X))^2} = \frac{\mathbb{V}[X]}{k^2\sigma(X)^2} = \frac{\mathbb{V}[X]}{k^2\mathbb{V}[X]} = \frac{1}{k^2}$$

Autrement dit, la probabilité que X prenne des valeurs appartenant à l'intervalle $[\mathbb{E}[X] - k\sigma(X); \mathbb{E}[X] + k\sigma(X)]$ est supérieure ou égale à $\frac{1}{k^2}$.

Exemple :
Dans l'exemple précédent, $\sigma(L) =$ ....
Ainsi la probabilité que la largeur de la puce soit éloignée d'au moins $k = 5$ *écarts-types, c'est-à-dire* $5 \times 0,1 = 0,5$ *de son espérance* 12 *est inférieure ou égale à* ....
....
....

Remarque

On mesure donc la dispersion d'une variable aléatoire autour de son espérance en nombre d'écarts-types.

II Inégalité de concentration

Remarque : Rappel

X est une variable aléatoire. Pour i de 1 à n, les X_i sont n variables aléatoires indépendantes suivant toutes la même loi de probabilité qui est celle de X. La variable aléatoire moyenne d'un échantillon de taille n de X est M_n avec :

$$M_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$$

Théorème : Inégalité de concentration (démontré)

Soit X une variable aléatoire d'espérance $\mathbb{E}[X]$ et de variance $\mathbb{V}[X]$. On pose M_n la variable aléatoire moyenne d'un échantillon de taille n de X. Alors, pour tout réel a, strictement positif,

....

Démonstration

On applique l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev à la variable aléatoire M_n :

$$\mathbb{P}(|M_n - \mathbb{E}[M_n]| \geq a) \leq \frac{\mathbb{V}[M_n]}{a^2} \Leftrightarrow \mathbb{P}(|M_n - \mathbb{E}[X]| \geq a) \leq \frac{\frac{1}{n}\mathbb{V}[X]}{a^2} = \frac{\mathbb{V}[X]}{na^2}$$

Exemple :
Dans une ville de 20 000 habitants, lors d'une consultation portant sur la rénovation du théâtre municipal, 75% des personnes consultées ont émis un avis positif.

1. *On interroge n personnes. Pour k allant de 1 à n, la variable aléatoire X_k donne 1 si la k-ième personne interrogée est favorable au projet et 0 sinon.*

   Donner la loi de probabilité de X_k, son espérance μ et sa variance V.

   ....
   ....
   ....
   ....

2. *On note M_n la variable aléatoire moyenne de $X_1, \dots, X_n$.*

   (a) *Donner un majorant de $\mathbb{P}(|M_{400} - 0.75| \geq 0.1)$. Interpréter.*

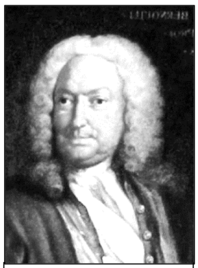
   ....
   ....
   ....
   ....
   ....
   ....
   ....
   ....

   (b) *Déterminer une taille n d'échantillon afin d'obtenir pour M_n une précision de 0,01 et un risque inférieur à 0,05. Peut-on envisager raisonnablement cette situation ?*

   ....
   ....
   ....
   ....
   ....
   ....

Point histoire

C'est **Jacques Bernoulli** qui publie l'une des premières versions de ce résultat dans son ouvrage posthume Ars Conjectandi en 1713. Il le démontre **uniquement dans le cas particulier de la loi binomiale**.



Jacques Bernoulli
1654 – 1705

III Loi faible des grands nombres

Propriété : Loi faible des grands nombres (admise)

Soit X une variable aléatoire d'espérance $\mathbb{E}[X]$.
On pose M_n la variable aléatoire moyenne d'un échantillon de taille n de X. Alors pour tout réel a strictement positif,

$$\lim_{n \to +\infty} P(|M_n - \mathbb{E}[X]| \geq a) = 0$$

Remarque

La loi des grands nombres traduit le fait que plus la taille de l'échantillon d'une variable aléatoire X est grande, plus l'écart entre la moyenne de cet échantillon et l'espérance de la variable aléatoire X est faible.
Ce résultat justifie la possibilité de définir des probabilités en prenant pour valeurs approchées les fréquences obtenues pour un « grand » nombre d'essais.
Autrement dit, la loi des grands nombres permet d'interpréter la probabilité comme une fréquence de réalisation, justifiant ainsi le principe des sondages, et présente l'espérance comme une moyenne : « l'espérance c'est ce qu'on espère trouver en moyenne ».

Exemple :
Prenons l'exemple d'une suite de variables aléatoires de Bernoulli de paramètre $\frac{1}{6}$.
On peut par exemple imaginer que l'on réalise une série de lancers avec un dé non truqué et que (X_n) est une suite de variables aléatoires qui prennent la valeur 1 lorsque l'on obtient un 6 et la valeur 0 lorsque l'on obtient un autre nombre.

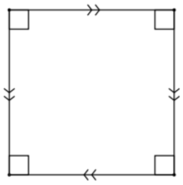
Ces variables aléatoires ont toutes pour espérance $\frac{1}{6}$ et pour variance $\frac{1}{6} \times \frac{5}{6} = \frac{5}{36}$, puisqu'elles suivent toutes une loi de Bernoulli de paramètre $\frac{1}{6}$.
Selon la loi des grands nombres, si on fait un grand nombre de lancers, et que l'on calcule la moyenne des valeurs des variables aléatoires qui tour à tour prendront la valeur 0 ou 1, alors la probabilité que la moyenne de ces valeurs, c'est-à-dire la moyenne de ces 0 et 1, s'éloigne de $\frac{1}{6}$ tend vers 0, lorsque le nombre de lancers tend vers l'infini.

Ce qui est très intuitif...

Formulaire de périmètres, aires et volumes

Figures Planes

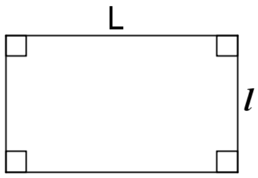
Le carré



Périmètre = c x 4

Aire = c^2

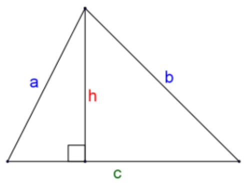
Le rectangle



Périmètre = (L + ℓ) x 2

Aire = L x ℓ

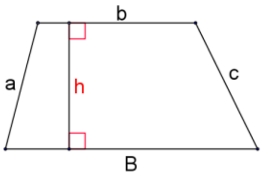
Le triangle



Périmètre = a + b + c

Aire = $\frac{c \times h}{2}$

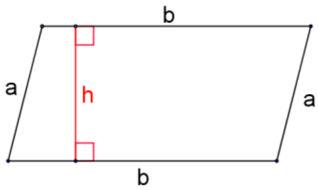
Le trapèze



Périmètre = a + b + c + B

Aire = $\frac{(B + b) \times h}{2}$

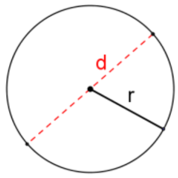
Le parallélogramme



Périmètre = a + b + a + b

Aire = b x h

Le cercle

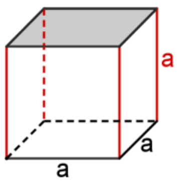


Longueur du cercle = d x π ou 2 π r

Aire du disque = πr^2

Solides

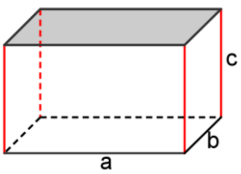
Le cube



Volume = a^3

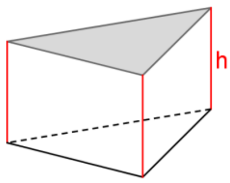
Aire totale = 6 x a^2

Le pave droit



Volume = a x b x c

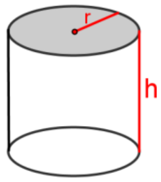
Le prisme



Volume = Aire de la base x h

Aire latérale = périmètre de la base x h

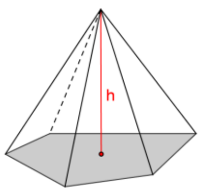
Le cylindre



Volume = $\pi r^2 h$

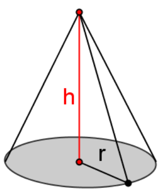
Aire latérale = $2\pi r h$

La pyramide



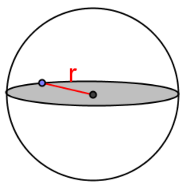
V = $\frac{\text{Aire de la base x h}}{3}$

Le cône



V = $\frac{\pi r^2 h}{3}$

La boule



Volume = $\frac{4}{3} \pi r^3$

Aire de la sphère = $4\pi r^2$

Voir ici les tableaux pour les conversions des longueurs, des aires et des volumes

Fiche Révision

Fonctions polynômes du second degré

Expression d'une fonction Polynôme du second degré

- Une fonction polynôme de degré 2 est une fonction définie sur $\mathbb{R}$.
- Sa forme développée est :

$$ax^2 + bx + c, \text{ avec } a \neq 0.$$

- Sa forme canonique est :

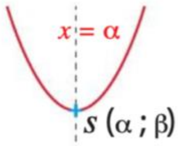
$$a(x-\alpha)^2 + \beta,$$

$$\text{où } \alpha = -\frac{b}{2a} \text{ et } \beta = f(\alpha).$$

Variation et représentation graphique

$a > 0$

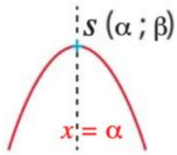
x	$-\infty$	$\alpha = -\frac{b}{2a}$	$+\infty$
$f(x)$	$\searrow$	β	$\nearrow$



La parabole est tournée « vers le haut ».

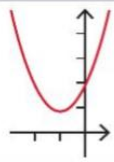
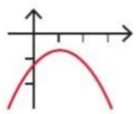
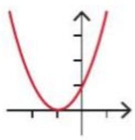
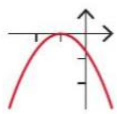
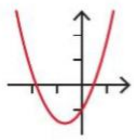
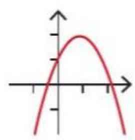
$a < 0$

x	$-\infty$	$\alpha = -\frac{b}{2a}$	$+\infty$
$f(x)$	$\nearrow$	β	$\searrow$



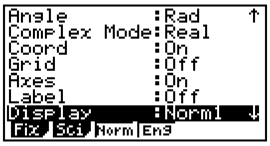
La parabole est tournée « vers le bas ».

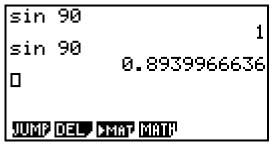
Résolution d'équation de degré 2 Factorisation éventuelle et signe d'un trinôme

Discriminant $\Delta = b^2 - 4ac$	Équation $f(x) = 0$	Factorisation de $f(x)$	Signe de $f(x)$	Représentation graphique $a > 0$	$a < 0$
$\Delta < 0$	Pas de solution dans $\mathbb{R}$	Ne se factorise pas dans $\mathbb{R}$	Du signe de a pour tout réel x		
$\Delta = 0$	Une seule solution dans $\mathbb{R}$ $-\frac{b}{2a}$	Pour tout réel x $f(x) = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2$	Du signe de a pour tout réel x, et s'annule en $-\frac{b}{2a}$		
$\Delta > 0$	Deux solutions réelles $x_1 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$ $x_2 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$ Somme $S = -\frac{b}{a}$ Produit $P = \frac{c}{a}$	Pour tout réel x $f(x) = a(x-x_1)(x-x_2)$	Du signe de a sauf entre les racines		

Précision de l'affichage, unités d'angle

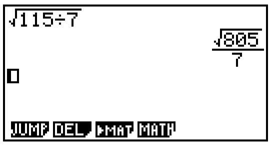
Instruction **SET UP**
Sélectionner Display puis Fix (touche **F1**)
Sélectionner le nombre de décimales souhaité.
Cinquième ligne : radians ou degrés pour les angles.

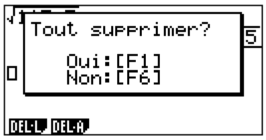


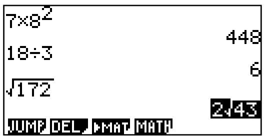


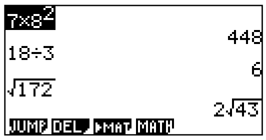
Effacer des calculs, modifier un calcul

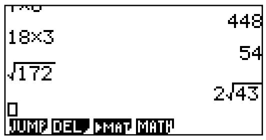
Pour tout effacer sélectionner DEL (touche **F2**) puis DEL-A (touche **F2**)
DEL-L permet un effacement sélectif
L'instruction **REPLAY** (touches flèches haut ▲ bas ▼ droite ▶ ou flèche gauche ◀) permet de modifier un calcul.







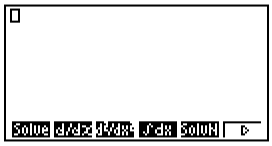


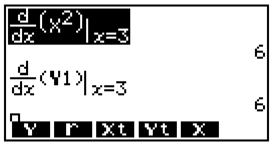


3 calculs saisies instruction **REPLAY** Le calcul modifié

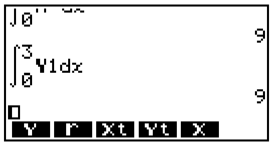
Dérivation - Intégration

Touche **OPTN** puis instruction CALC (touche **F4**)
Syntaxe de l'instruction d/dx (touche **F2**) :
d/dx(expression, valeur).
La fonction Y1 est obtenue par la touche **VARS** *puis l' instruction* GRPH





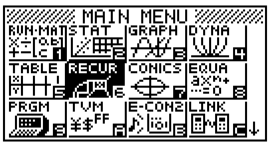
Touche **OPTN** puis instruction CALC (touche **F2**)
Syntaxe de l'instruction ∫ dx (touche **F4**)
∫ dx(expression, borne inf, borne sup).

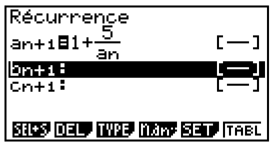


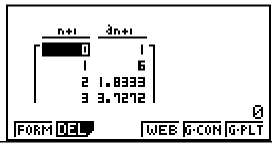
Suites

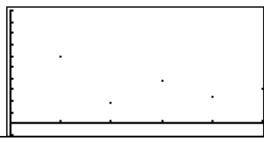
Dans le menu principal sélectionner RECUR puis saisir la suite.

Table et représentation graphique avec les menus habituels.
Pour plus de détails voir les fiches 320 et 330 (Construction en escalier)









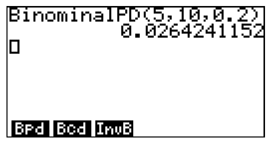
Probabilités :

Loi Binomiale :

Probabilité de l'évènement "$X = k$"

Touche OPTN , STAT (F5), DIST (F3) BINM (F5)et enfin BPd (F1)

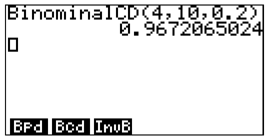
Renseigner : (le nombre de succès k, nombre d'essais, probabilité de succès)



Probabilité de l'évènement "$X \leq k$"

Touche OPTN , STAT (F5), DIST (F3) BINM (F5)et enfin Bcd (F2)

Renseigner : (le nombre de succès k, nombre d'essais, probabilité de succès)

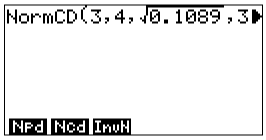


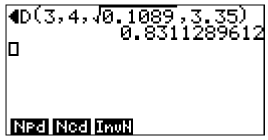
Loi Normale :

Probabilité de l'événement "$a < X < b$"

Touche OPTN , STAT (F5), DIST (F3) NORM (F1)

Sélectionner Ncd (F2) puis renseigner : (a, b, écart type, moyenne)



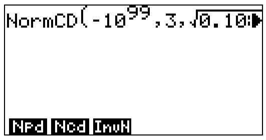


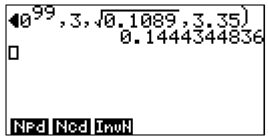
Probabilité des événements " $X < b$" et " $X > a$"

Pour calculer $P(X < b)$ on peut saisir comme borne inférieure une valeur très petite par exemple -10^{99}.

Touche OPTN , STAT (F5), DIST (F3) NORM (F1)

Sélectionner Ncd (F2) puis renseigner : (-10^99, b, écart type, moyenne)

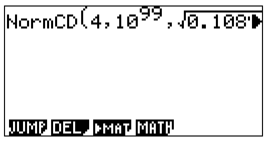


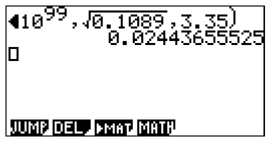


Pour calculer $P(X > a)$ on peut saisir comme borne supérieure une valeur très grande par exemple 10^{99}.

Touche OPTN , STAT (F5), DIST (F3) NORM (F1)

Sélectionner Ncd (F2) puis renseigner : (a, 10^{99}, écart type, moyenne)



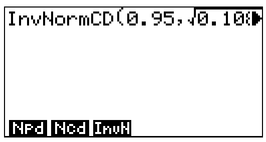


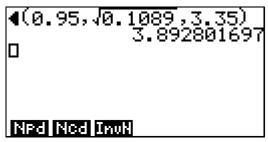
Déterminer m_1 tel que $P(X < m_1) = p_1$

Touche OPTN , STAT (F5), DIST (F3) NORM (F1)

Sélectionner InvN (F3)

puis renseigner : (p_1, écart type, moyenne)





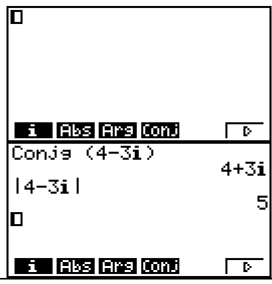
Calculs sur les nombres complexes.

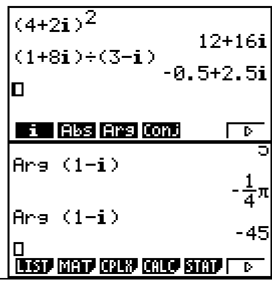
Pour obtenir le nombre **i**. Touche OPTN sélectionner CPLX (touche F3) et i (touche F1)

Dans le menu complexe (CPLX) on trouve les instructions :conjugué, partie réelle …

Noter que le module s'obtient avec ABS (touche F2)

Noter qu'un argument est donné en radian ou en degré en fonction du mode choisi.



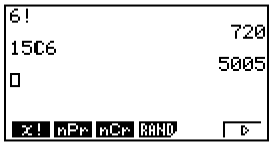


Factorielle - Coefficients binomiaux

Touche **OPTN** puis PROB (touches **F6** et **F3**)
Instructions x ! et nCr

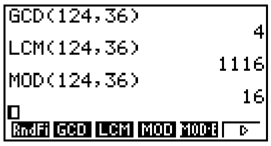
Pour $\begin{pmatrix} n \\ p \end{pmatrix}$*, séquence : « n nCr p » .*

Loi binomiale voir fiche 190



PGCD – PPCM et congruence

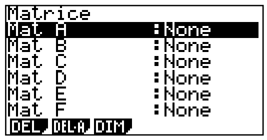
Touche **OPTN** puis menu NUM (touches **F6** puis **F4**)
Sélectionner GCD (touches **F6** puis **F2**) pour le PGCD
Sélectionner LCM (touches **F6** puis **F3**) pour le PPCM
Sélectionner MOD (touches **F6** puis **F4**) pour la congruence
Utiliser le séparateur **,** entre les deux entiers.

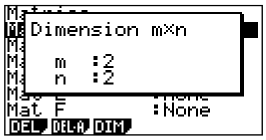


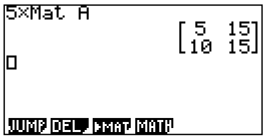
Matrice

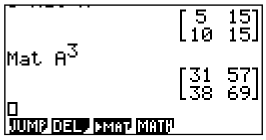
On donne $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$. Calculer $5A$, A^3 et A^{-1}

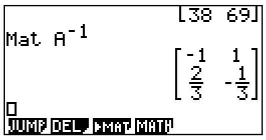
Dans le menu, , sélectionner ▷MAT (touche **F3**) puis sélectionner MAT A :.
Définir le format, ici $m = 2$ et $n = 2$.
Saisir les éléments de la matrice et retourner à l'écran de calcul (presser deux fois **EXIT**)
On saisit 5 × Mat A (pour Mat presser **SHIFT** puis **2**, et pour *A* utiliser **ALPHA** puis **X,Θ, T**)
On saisit ensuite Mat A ^3 puis Mat A ^-1







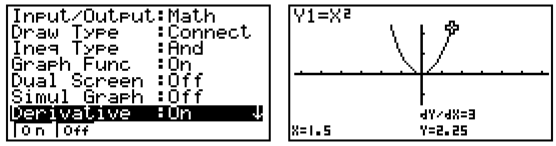




⇒ Compléments

Nombre dérivé à partir de l'écran graphique

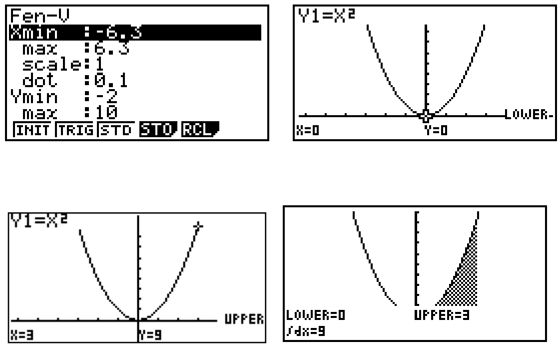
Introduire la fonction *f* par exemple en **Y1** et tracer la courbe. Ci-contre, la fonction carré.
Instruction **SET UP** (touches **SHIFT** **MENU**)
Sélectionner **Derivative** puis choisir **On** (touche **F1**).
Utiliser l'instruction **Trace** pour décrire la courbe.
En chaque point, l'écran affiche les coordonnées et le nombre dérivé.



Intégrale à partir de l'écran graphique

Introduire la fonction *f*, par exemple en **Y1,** et tracer la courbe.
Ci-contre, la fonction carré.
Instruction **V-Window**. Sélectionner **INIT**
Puis choisir X entre - 6,3 et 6,3 e qui correspond à une graduation décimale en pixels. On règle Y suivant la fonction étudiée.
Choisir l'instruction **G-Solv** (touche **F5**)
Puis sélectionner ∫ dx (touches **F6** puis **F3**)

En utilisant les touches flèche droite ➢ ou flèche gauche ≺ , renseigner borne inf (LOWER) et borne sup (UPPER).



Somme des termes d'une suite

On utilise pour cela les instructions **Seq** et **Sum**
→ L'instruction Seq s'utilise de la manière suivante :
Seq(expression, variable, valeur initiale, valeur finale, pas)
→Il suffit d'ajouter l'instruction **Sum** à la formule précédente
Pour la somme des 30 premiers termes de la suite $(4 + 2n)_n$
Il faut saisir la formule :
Sum(Seq(−4 + 2N , N , 0 ,29 , 1)

Instruction Seq
Séquence : **OPTN** LIST et Seq

Instruction **Sum**
séquence : **OPTN** LIST puis ➢ ➢ et Sum.