8, 9, F

Devoir Surveillé 4

EDS Term.

Conditions d'évaluation

Calculatrice : autorisée. **Durée :** 1h40

Compétences évaluées :

- ◯ Je sais utiliser le produit scalaire dans l'espace.
- ◯ Je connais la définition de la continuité d'une fonction en un point ou sur un intervalle.
- ◯ Je sais utiliser le théorème des valeurs intermédiaires.
- ◯ Je sais définir les domaines de définition de fonctions ln complexes.
- ◯ Je sais résoudre des équations et inéquations complexes avec ln.
- ◯ Je connais les propriétés de ln.
- ◯ Je sais dériver avec ln (fonction simple et fonction composée).
- ◯ Je connais les formes de limites avec ln et je sais gérer les formes indéterminées.

Exercice 1 **Applications directes** *(11 points)*

Les questions suivantes sont indépendantes.

1. On considère la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \begin{cases} -x+3 & \text{si } x < 2 \\ x^2 - 4x + 6 & \text{si } x \geq 2 \end{cases}$$

La fonction f est-elle continue sur $\mathbb{R}$?

2. Soit la fonction f définie sur $[-10; 10]$ par $f(x) = -0.1x^3 + 2$.
   (a) Justifier qu'il existe une unique solution α à l'équation $f(x) = 0$ sur $[-10; 10]$.
   (b) Donner un encadrement de α à 10^{-2} près.
3. Soit f une fonction définie sur $[-5; 7]$ dont on donne le tableau de variations ci-dessous :

x	-5	-3	-1	3	7
f	4 ↗	5 ↘	-2 ↗	2 ↘	-4

Sans justification, donner le nombre de solutions des équations suivantes :

(a) $f(x) = 0$ (b) $f(x) = 3$ (c) $f(x)^2 = 1$

4. On note $\mathcal{C}_f$ la courbe représentative de la fonction f définie sur $]-1; +\infty[$ par :

$$f(x) = \ln(1+x)$$

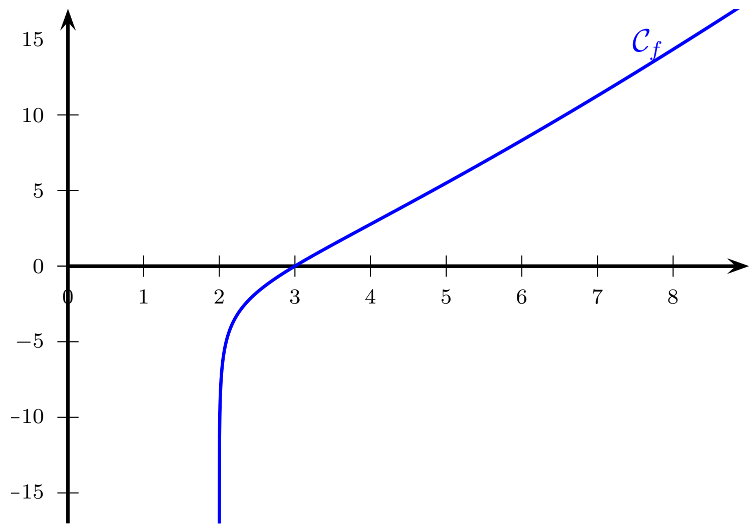
   (a) Déterminer une équation de la tangente T à $\mathcal{C}_f$ au point d'abscisse 0.
   (b) Étudier la convexité de la fonction f.
   (c) En déduire que pour tout x appartenant à $]-1; +\infty[$: $\ln(1+x) \leq x$.
5. Soit les points $A(-5; -4; 9)$, $B(-4; -10; 12)$, $C(-3; -2; 10)$, $D(7; 1; -5)$ et $E(-5; 6; 9)$.
   (a) Démontrer que les points A, B et C définissent un plan.
   (b) Démontrer que les droites (AB) et (DE) sont orthogonales.
   (c) Démontrer que la droite (DE) est orthogonale au plan (ABC).

Exercice 2 **Bac** **Étude d'une fonction** *(9 points)*

On considère la fonction f définie sur l'intervalle $]2\,;\,+\infty[$ par

$$f(x) = x\ln(x-2).$$

Une partie de la courbe représentative $\mathcal{C}_f$ de la fonction f est donnée ci-dessous.



1. Conjecturer, à l'aide du graphique, le sens de variation de f, ses limites aux bornes de son ensemble de définition ainsi que les éventuelles asymptotes.
2. Résoudre l'équation $f(x) = 0$ sur $]2\,;\,+\infty[$.
3. Calculer $\lim\limits_{\substack{x\to 2\\ x>2}} f(x)$.

   Ce résultat confirme-t-il l'une des conjectures faites à la question 1. ?
4. Démontrer que pour tout x appartenant à $]2\,;\,+\infty[$:

$$f'(x) = \ln(x-2) + \frac{x}{x-2}.$$

5. On considère la fonction g définie sur l'intervalle $]2\,;\,+\infty[$ par $g(x) = f'(x)$.
   a) Démontrer que pour tout x appartenant à $]2\,;\,+\infty[$, on a :

$$g'(x) = \frac{x-4}{(x-2)^2}.$$

   b) On admet que $\lim\limits_{\substack{x\to 2\\ x>2}} g(x) = +\infty$ et que $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = +\infty$.

   En déduire le tableau des variations de la fonction g sur $]2\,;\,+\infty[$. On fera apparaître la valeur exacte de l'extremum de la fonction g.

   c) En déduire que, pour tout x appartenant à $]2\,;\,+\infty[$, $g(x) > 0$.

   d) En déduire le sens de variation de la fonction f sur $]2\,;\,+\infty[$.
6. Étudier la convexité de la fonction f sur $]2\,;\,+\infty[$ et préciser les coordonnées d'un éventuel point d'inflexion de la courbe représentative de la fonction f.