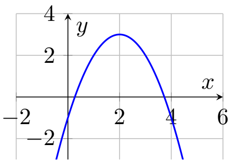
Convexité - Analyse de données

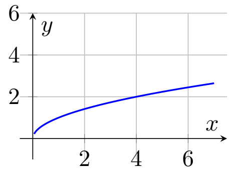
Exercice 1

Expliquer pourquoi ces fonctions représentées ci-dessous sont concaves.

ⓐ



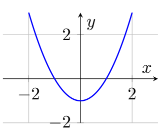
ⓑ



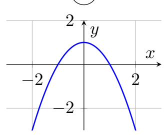
Exercice 2

À l'aide des graphiques ci-dessous, déterminer l'intervalle sur lequel la fonction f est concave ou convexe dans chacun des cas suivants :

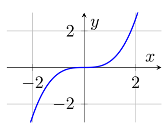
ⓐ



ⓑ



ⓒ



Exercice 3

À l'aide des tableaux ci-dessous, étudier la convexité de la fonction f dans chacun des cas suivants.

ⓐ

x	$-\infty$		0		1		$+\infty$
$f''(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
f'		$\searrow$	0	$\nearrow$	$\frac{1}{6}$	$\searrow$	

ⓑ

x	$-\infty$		$\frac{1}{4}$		$+\infty$
$f''(x)$		$-$	0	$+$	
f'		$\searrow$	$-\frac{1}{8}$	$\nearrow$	

Exercice 4

Soit f une fonction définie et deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$.
Indiquer si les affirmations sont vraies ou fausses, puis justifier.

1. Si la fonction f' est croissante sur $[4;7]$ alors f est concave sur cet intervalle.
2. Si $f''(x) > 0$ pour tout réel x de $[-1;2]$, alors f est convexe sur cet intervalle.

Exercice 5

On considère une fonction f définie et deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$.

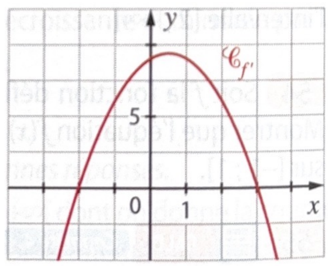
On donne l'affichage obtenu à l'aide d'un logiciel de calcul formel ci-dessous.

1	`f(x) :=x+exp(-x+1)`
	`x ->x+*exp(-x+1)`
2	`deriver(f(x),x)`
	`-exp(-x+1)+1`
3	`(deriver(deriver(f(x),x),x))`
	`exp(-x+1)`

1. En déduire que f est convexe sur $\mathbb{R}$.
2. Interpréter graphiquement le résultat précédent en utilisant les mots « sécantes » et « tangentes ».

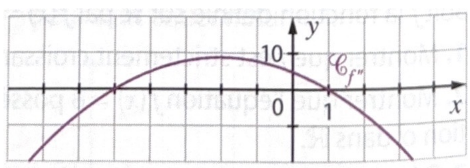
Exercice 6

Soit f une fonction définie, dérivable sur $\mathbb{R}$. On donne ci-contre la courbe représentative $\mathcal{C}_{f'}$ de la fonction dérivée de f.
Déterminer la convexité de f.



Exercice 7

Soit f une fonction définie, deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$. On donne ci-dessous la courbe représentative $\mathcal{C}_{f''}$ de la fonction dérivée seconde de f.
Déterminer la convexité de f.



Convexité - Par le calcul

Exercice 8

Soit f la fonction deux fois dérivable sur $[-5;7]$ définie par :

$$f(x) = (x - 2.5)e^{0.4x}$$

1. Montrer que $f'(x) = 0.4xe^{0.4x}$.
2. En déduire que $f''(x) = \frac{4}{25}e^{0.4x}(2,5 + x)$.
3. Étudier la convexité de f sur $[-5;7]$.

Exercice 9

Soit f une fonction définie sur l'intervalle $[0,5;12]$ qui a pour fonction dérivée f' définie sur $[0,5;12]$ par $f'(x) = \dfrac{1}{x-1}$.

1. Calculer $f''(x)$ pour tout x de $[0,5;12]$.
2. Déterminer par le calcul sur quel intervalle f est concave.

Exercice 10 — Logique

Soit la proposition : « Toute fonction polynôme du second degré est convexe sur $\mathbb{R}$. »

1. Cette proposition est-elle vraie ou fausse ?
2. Écrire sa négation. Est-elle vraie ?

Exercice 11

Étudier la convexité des fonctions :

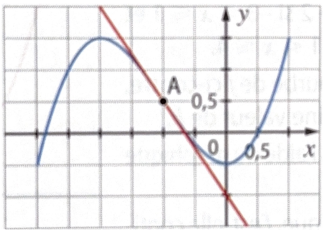
(a) f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = xe^{-x}$.

(b) g définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par $g(x) = \sqrt{x} - 3e^{x-3}$.

Point d'inflexion et convexité - Analyse

Exercice 12

Soit f une fonction définie sur $[-3;1]$. On donne la représentation graphique $\mathcal{C}_f$ de f dans un repère ainsi que la tangente à $\mathcal{C}_f$ en son point A d'abscisse -1.



1. Pourquoi A est un point d'inflexion de $\mathcal{C}_f$?
2. Expliquer pourquoi f est concave sur $[-3;-1]$ et est convexe sur $[-1;1]$.

Exercice 13

Soit f une fonction définie et deux fois dérivable sur $[-7;10]$. On donne ci-dessous le tableau de signes de sa fonction dérivée seconde.

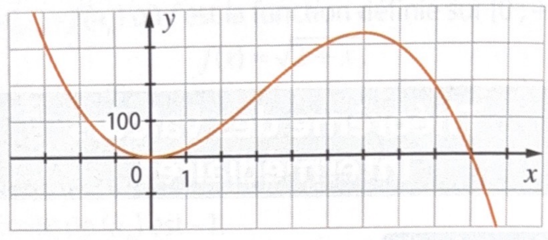
x	-7		-1		2		10
$f''(x)$		$-$	0	$+$	0	$+$	

On note $\mathcal{C}_f$ la courbe représentative de f. Choisir la ou les bonnes réponses.

1. f est convexe sur $[-1;2]$.
2. f est concave sur $[-5;0]$.
3. Le point A d'abscisse -1 de $\mathcal{C}_f$ est un point d'inflexion de cette courbe.
4. Le point B d'abscisse 2 de $\mathcal{C}_f$ est un point d'inflexion de cette courbe.

Exercice 14

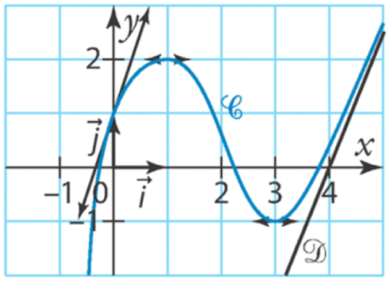
On donne ci-dessous la courbe représentative $\mathcal{C}_f$ d'une fonction f définie sur $\mathbb{R}$.



1. Déterminer graphiquement la convexité de f.
2. Préciser les éventuels points d'inflexion de $\mathcal{C}_f$.

Exercice 15

Soit f une fonction définie et dérivable sur $]-1;+\infty[$ dont la courbe représentative est donnée ci-contre :



1. Donner la valeur de $f'(0)$, $f'(1)$ et $f'(3)$.
2. Sur quels intervalles f semble-t-elle concave ? convexe ?
3. Conjecturer les coordonnées des éventuels points d'inflexion de f.

Exercice 16

Soit f une fonction dérivable sur l'intervalle $[0;15]$. On suppose que la fonction f' est continue sur $[0;15]$. Les variations de f sont données dans le tableau ci-dessous.

x	0		5		15
f'	30	$\searrow$	-5	$\nearrow$	20

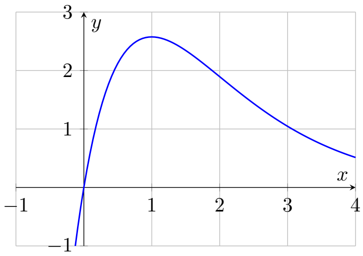
Indiquer si les affirmations sont vraies ou fausses, puis justifier.

1. La courbe représentative $\mathcal{C}_f$ de la fonction f admet une et une seule tangente parallèle à l'axe des abscisses.
2. La fonction f est convexe sur $[5;15]$.
3. La courbe représentative $\mathcal{C}_f$ possède deux points d'inflexion sur $[0;15]$.

Point d'inflexion et convexité - Calculs

Exercice 17

On considère la fonction f deux fois dérivable et définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 7xe^{-x}$, de courbe représentative C_f.



Partie A : conjectures

1. f semble-t-elle convexe ? Concave ?
2. C_f semble-t-elle avoir des points d'inflexion ?

Partie B : preuves

1. Calculer $f'(x)$ pour tout x réel et en déduire les variations de f.
2. (a) Calculer $f''(x)$ pour tout x réel.
   (b) Étudier le signe de $f''(x)$ et en déduire les éventuels points d'inflexion de C_f.

Exercice 18 — Logique

Soit f une fonction deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$, a un réel et $\mathcal{C}_f$ la courbe représentative de f.
Soit la proposition : « Si le point $A(a; f(a))$ est un point d'inflexion de $\mathcal{C}_f$ alors $f''(a) = 0$ »

1. Cette proposition est-elle vraie ?
2. Énoncer la réciproque. Est-elle vraie ?

Exercice 19

Soit f la fonction définie sur $[0; 10]$ par :

$$f(x) = x^3 - 15x^2 + 75x.$$

1. Déterminer $f'(x)$ et $f''(x)$.
2. Déterminer le sens de variation de f' puis son signe sur l'intervalle $[0; 10]$.
3. En déduire le sens de variation de f sur $[0; 10]$.
4. La courbe représentative $\mathcal{C}_f$ de f admet-elle un point d'inflexion ? Si oui préciser ses coordonnées.

Exercice 20

Déterminer les éventuels points d'inflexion de la courbe représentative de f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = x^3 - 21x^2 + 19.$$

Exercice 21

Déterminer les éventuels points d'inflexion de la courbe représentative de f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = x^4 - 2x^3 - 120x^2 + 3$$

Exercice 22

La directrice d'un parc de loisirs a créé un logo pour son site web symbolisant une rampe de lancement. Pour cela, elle a construit dans un repère la courbe $\mathcal{C}_f$ de la fonction f définie sur $[0; 5]$ par :

$$f(x) = 0,125x^3 - 0,75x^2 + 4.$$

1. Déterminer $f'(x)$.
2. Montrer que cette courbe $\mathcal{C}_f$ admet en deux points une tangente horizontale.
3. Déterminer le signe de $f'(x)$ puis en déduire les variations de f sur $[0; 5]$.
4. Montrer que $\mathcal{C}_f$ admet un point d'inflexion I dont on précisera ses coordonnées.
5. Déterminer une équation de la tangente T en ce point I.
6. Que peut-on dire de la position relative de T et de $\mathcal{C}_f$?

Exercice 23

Soit la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = (3,6x + 2,4)e^{-0,6x}$ et $\mathcal{C}_f$ sa courbe représentative.
Justifier si les affirmations sont vraies ou fausses.

1. Le point d'abscisse $\frac{8}{3}$ de $\mathcal{C}_f$ est un point d'inflexion de cette courbe.
2. La fonction f est convexe sur $[0; 1]$.

Exercice 24

Déterminer les points d'inflexion éventuels des courbes représentatives de la fonction f dans les cas suivants :

1. f est définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^3 - 5x^2 + 4x + 3$.
2. f est définie sur $\mathbb{R}\backslash\{0\}$ par $f(x) = \frac{1}{x} + \frac{3}{x}$.
3. f est définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \dfrac{x}{2}$.
4. f est définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = (x + 1)e^{-x}$.

Exercice 25

On donne le tableau de variation d'une fonction f et celui de sa fonction dérivée f'.

x	-3	0	4	7
f	85	4	36	-45

x	-3	2	7
f'	-63	12	-63

À l'aide de ces informations, tracer dans un repère une courbe pouvant représenter la fonction f.

Exercice 26

On donne le tableau de variation d'une fonction f et celui de sa fonction dérivée seconde f''.

x	-9		-6		0		3
f	-2	$\nearrow$	106	$\searrow$	-2	$\nearrow$	106

x	-9		-3		3
f''	-36	$\nearrow$	0	$\nearrow$	36

À l'aide de ces informations, tracer dans un repère une courbe pouvant représenter f.

Inégalités de convexité

Exercice 27

Soit f la fonction exponentielle définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = e^x$, de courbe représentative C_f.

(a) Déterminer l'équation de la tangente T à C_f au point d'abscisse 0.

(b) En déduire que, pour tout x réel : $1 + x \leq e^x$.

Exercice 28

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par $f(x) = x + \dfrac{1}{x}$.

1. Montrer que f est convexe sur $]0; +\infty[$.
2. Déterminer une équation de la tangente T à $\mathcal{C}_f$ en son point d'abscisse 1.
3. En déduire que pour tout réel x de $]0; +\infty[$, on a : $x + \frac{1}{x} \geq 2$.

Exercice 29

Soit f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^6 + 3x^2 + 6$.

1. Montrer que f est convexe sur $\mathbb{R}$.
2. Déterminer une équation de la tangente T à $\mathcal{C}_f$ en son point d'abscisse 1.
3. En déduire que pour tout réel x : $x^6 + 3x^2 + 6 \geq 12x - 2$.

Exercices supplémentaires

Exercice 30

Choisir la ou les bonnes réponses.

1. Parmi toutes les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ et dont l'expression est donnée ci-dessous, la seule qui est convexe sur $]0; +\infty[$ est :

   (a) $f(x) = -2e^{-2x}$ (c) $h(x) = x^3 - 6x + 1$

   (b) $g(x) = x^4 - 2x^3 + 3$ (d) $p(x) = -xe^x$

2. La fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = x^3 - 9x$ est convexe sur l'intervalle :

   (a) $]-\infty; +\infty[$ (c) $]-\infty; 0]$

   (b) $[0; +\infty[$ (d) $[-3; 3]$

3. La fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = -xe^{-x}$:

   (a) f est concave sur $[0; 1]$

   (b) f est concave sur $[0; +\infty[$

   (c) f est convexe sur $[0; +\infty[$

   (d) f est convexe sur $[0; 1]$

Exercice 31

Soit f une fonction définie et dérivable sur $I = [0.5; +\infty[$ telle que, $f'(x) = \dfrac{-x + 3}{x}$.

La courbe représentative de f est-elle située en dessous de chacune de ses tangentes ?

Exercice 32

On injecte à un patient un médicament puis on mesure régulièrement, pendant 15 heures, la concentration, en grammes par litre, de ce médicament dans le sang.
On admet que la concentration est modélisée par la fonction f définie sur $[0; 15]$ par $f(x) = (x + 2)e^{-0,5x}$, où x représente le nombre d'heures écoulées depuis l'instant initial et $f(x)$ la concentration, en grammes par litre, du médicament dans le sang.

1. On note f' la fonction dérivée de la fonction f. Calculer $f'(x)$ et en déduire le tableau de variation de la fonction f sur $[0; 15]$.
2. Montrer que pour tout réel x de $[0; 15]$:
$$f''(x) = (0,25x - 0,5)e^{-0,5x}$$
3. Étudier la convexité de la fonction f sur l'intervalle $[0; 15]$ et préciser l'abscisse d'un éventuel point d'inflexion.
4. Au bout de combien d'heures la baisse de concentration ralentit-elle ?

Exercice 33

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :
$$f(x) = x^5 + \frac{25}{3}x^4 + \frac{20}{3}x^3 - 80x^2 + 8x + 1$$

1. Montrer que, pour tout x réel, $f''(x) = 20(x - 1)(x + 2)(x + 4)$.
2. Étudier le signe de $f''(x)$ et en déduire l'étude complète de la convexité de f (convexité, concavité, points d'inflexion).
3. Donner une équation de la tangente à C_f, courbe représentative de f, au point d'abscisse -1.