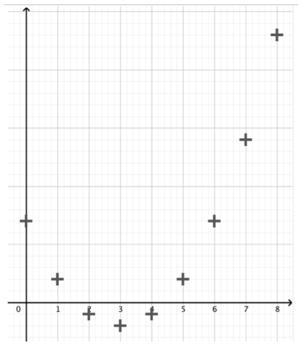
Majorants et minorants

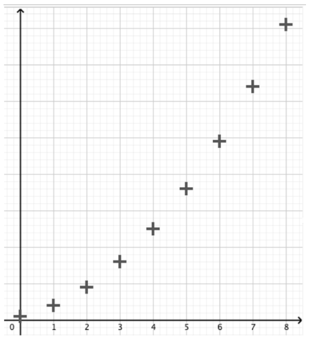
Exercice 1

Conjecturer les éventuelles majorations ou minorations des suites représentées ci-dessous :

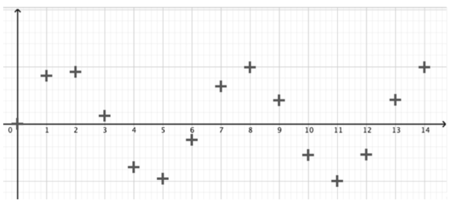
1. $u_n = (n-3)^2 - 2$



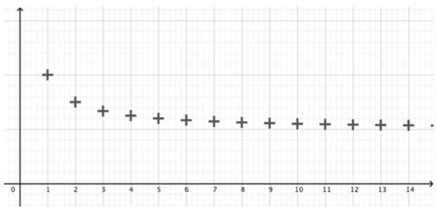
2. $u_n = (n+1)^2$



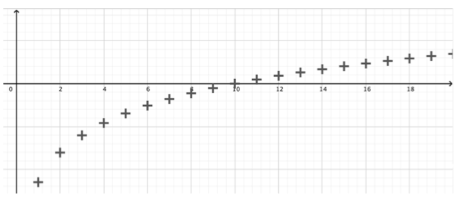
3. $u_n = \sin(n)$



4. $u_n = 1 + \frac{1}{n}$



5. $u_n = \ln\left(\frac{n}{10}\right)$



Exercice 2

1. Montrer dans chaque cas que la suite est bornée par $m = 0$ et $M = 2$:
   (a) $u_n = 2 - \frac{1}{n}$ pour $n \geq 1$
   (b) $v_n = 1 + \sin(n)$
2. Donner un minorant de la suite $w_n = n^2 - 2n + 6$
3. Montrer que la suite $x_n = \dfrac{n-2}{n+6}$ est minorée par -1

Exercice 3

1. Donner un minorant de la suite (u_n) définie pour tout entier n par $u_n = 5 + 2n\left(\dfrac{1}{3}\right)^n$.
2. Donner un majorant de la suite (s_n) définie pour tout entier n par $s_n = -2n^2 + 8n + 3$.
3. Montrer que la suite (v_n) définie pour tout entier n par $v_n = \frac{6n+2}{2n+1}$ est majorée par 3.

Exercice 4

Vrai ou Faux ? Justifier les réponses fausses par un contre-exemple.

1. Une suite négative est majorée par 0.
2. Si une suite est majorée ou minorée, alors elle est bornée.
3. Une suite décroissante est minorée par son premier terme.
4. Si une suite est bornée, alors elle est minorée.
5. Une suite positive est minorée par 0.
6. Une suite croissante est minorée par son premier terme.

Raisonnement par récurrence

Exercice 5

Soit (u_n) la suite définie sur $\mathbb{N}$ par $u_0 = 2$ et $u_{n+1} = 2u_n - 3$.
On va démontrer par récurrence que pour tout entier naturel n, $u_n = 3 - 2^n$.
Compléter :

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, appelons $P(n)$ la propriété : « .... ».

Initialisation : pour $n = \ldots$
On a $u_0 =$ ....
Donc $P(0)$ est vraie, la propriété est initialisée.

Hérédité : Soit $k \in \mathbb{N}$ fixé tel que $P(k)$ soit vraie, c'est-à-dire : ....
Montrons que $P(k+1)$ est vraie aussi (ie. $\ldots$).

$$
\begin{aligned}
u_{n+1} &= \text{................................(par def de } u_n) \\
&= \text{................................(par HR)} \\
&= \text{................................} \\
&= \text{................................}
\end{aligned}
$$

Donc $P(k+1)$ est vraie, la propriété est héréditaire.

Conclusion : Par principe de récurrence, $P(n)$ est donc vraie pour tout entier naturel n.

Exercice 6

Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = 5$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = 3u_n + 6$. Montrer, par récurrence, que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n > 0$.

Exercice 7

Soit (v_n) la suite définie par $v_0 = 1$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_{n+1} = \dfrac{v_n}{v_n + 1}$.

(a) Calculer les premiers termes de la suite (v_n) et conjecturer l'expression explicite de v_n.

(b) Démontrer, par récurrence, cette conjecture.

Exercice 8

Soit la suite (u_n) définie pour tout entier naturel n par : $u_0 = 2$ et $u_{n+1} = 5 - \dfrac{4}{u_n}$

(a) Calculer u_1 et u_2.

(b) Démontrer, par récurrence, que pour tout n, $1 \leq u_n \leq 4$.

(c) Montrer, par récurrence, que la suite (u_n) est croissante.

Exercice 9

Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = 9$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \sqrt{u_n}$.

(a) Rappeler le sens de variations de la fonction racine carrée.

(b) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $0 \leq u_n \leq 9$.

(c) Montrer, par récurrence, que (u_n) est strictement décroissante.

Exercice 10

Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = 10$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \sqrt{u_n + 5}$.

(a) Montrer, par récurrence, que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $2{,}5 \leq u_{n+1} \leq 10$

(b) Quelles conclusions peut-on en tirer ?

Exercice 11

Soit (r_n) la suite définie par $r_0 = 6$ et, pour tout entier n, $r_{n+1} = \sqrt{r_n + 4}$.

(a) Montrer par récurrence que, pour tout entier n, $2 \leq r_n \leq 6$.

(b) Que peut-on en déduire ?

Exercice 12

Montrer que pour tout entier $n \geq 6$: $2^n \geq (n+2)^2$.

Indication : on sera amené à résoudre dans $\mathbb{N}$ l'inéquation $k^2 + 2k - 1 \geq 0$.

Exercice 13

(a) Montrer que, pour tout entier naturel $n \geq 1$: $2^n \geq n$

(b) Que peut-on dire pour le cas $n = 0$?

(c) Étendre la propriété.

Exercice 14

Soit la suite (u_n) définie pour tout entier n par : $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = \dfrac{1}{3}u_n + n - 2$.

(a) Calculer u_1, u_2 et u_3.

(b) Démontrer par récurrence que, pour tout entier $n \geq 4$, $u_n \geq 0$.

Exercice 15

Démontrer à l'aide d'un raisonnement par récurrence que, pour tout entier naturel n non nul :

$$x^n - 1 = (x-1)(1 + x + x^2 + \cdots + x^{n-1})$$

Indication pour l'hérédité : on remarquera que : $x^{k+1} - 1 = x^{k+1} - x^k + x^k - 1$

Exercice 16

On pose $\Sigma_n = 1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2$ pour n un entier naturel non nul.

(a) Calculer Σ_1, Σ_2, Σ_3 et Σ_4.

(b) Exprimer Σ_{n+1} en fonction de Σ_n.

(c) Démontrer par récurrence que, pour tout n entier naturel non nul,

$$\Sigma_n = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

Exercice 17

Pour tout entier $n \geq 1$, on note $n!$ (on lit « factorielle n ») le nombre tel que :

$$n! = 1 \times 2 \times 3 \times \cdots \times n$$

Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel $n \geq 1$,

$$n! \geq 2^{n-1}$$