TD - Dérivées de fonctions composées

Rédaction et technique de dérivation

Exercice 1

Déterminer les fonctions dérivées des fonctions suivantes sur le domaine d'étude précisé :

1. $f_1(x) = 3x^{-4} + 5 - 2x$ sur $D_1 = \mathbb{R}^*$
2. $f_2(x) = x\sqrt{x}$ sur $D_2 = \mathbb{R}_+^*$
3. $f_3(x) = \dfrac{3x+1}{x+2}$ sur $D_3 = \mathbb{R} \setminus \{-2\}$
4. $f_4(x) = \cos(4x-3)$ sur $D_4 = \mathbb{R}$
5. $f_5(x) = (1-x)^4$ sur $D_5 = \mathbb{R}$

Exercice 2

Pour chacune des fonctions suivantes, déterminer l'ensemble de définition, de dérivabilité puis la fonction dérivée.

1. $f : x \mapsto (3x+7)^5$
2. $g : x \mapsto \dfrac{2}{(5x+3)^3}$
3. $h : x \mapsto \sqrt{x+4}$
4. $k : x \mapsto e^{3x+1}$
5. $j : x \mapsto \sin(2x-5)$

Exercice 3

Déterminer les fonctions dérivées des fonctions suivantes :

1. f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = (3x-1)(x^2+5)$
2. g définie sur $\mathbb{R}$ par : $g(x) = (x+1)e^x$
3. h définie sur $\mathbb{R}$ par : $h(x) = \dfrac{2x}{x^2+3}$
4. i définie sur $\mathbb{R}$ par : $i(x) = (3x^2-2x+1)^2$

Exercice 4

Déterminer le sens de variation de chacune des fonctions de l'exercice précédent.

Dérivées secondes

Exercice 5

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = 2x^4 - 3x^3 + 5x^2 - 7x + 4$

1. Déterminer la dérivée première $f'(x)$ de la fonction f.
2. En déduire l'expression de la dérivée seconde $f''(x)$.

Exercice 6

Pour chaque fonction ci-dessous, déterminer les fonctions dérivées et dérivées secondes.

1. $f_1(x) = 3x^3 + 4x^2 + 2x - 1$
2. $f_2(x) = e^x(4x^2 + 3x - 2)$
3. $f_3(x) = \sin(5x+2)$
4. $f_4(x) = e^{4x+2}$
5. $f_5(x) = \cos(4x+5)$

Fonctions composées

Exercice 7

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \sqrt{x^2+1}$.

1. f est de la forme $\sqrt{u}$. Donner l'expression de la fonction u.
2. (a) Donner l'expression $(\sqrt{u})'$ en fonction de u et u'.
   (b) Calculer $u'(x)$, puis $f'(x)$.

Exercice 8

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = e^{x^2+1}$.

1. f est de la forme e^u. Donner l'expression de la fonction u.
2. (a) Donner l'expression $(e^u)'$ en fonction de u et u'.
   (b) Calculer $u'(x)$, puis $f'(x)$.

Exercice 9

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = (e^x+1)^2$. Montrer que, pour tout réel x, $f'(x) = 2e^x(e^x+1)$.

Exercice 10

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \dfrac{1}{(x^2+1)^3}$.

1. f est de la forme u^n avec $n = -3$. Donner l'expression de u.
2. Donner l'expression de $(u^{-3})'$ en fonction de u et u'.
3. Calculer $u'(x)$ puis $f'(x)$.

Exercice 11

Pour chacune des fonctions suivantes, déterminer l'ensemble de définition, de dérivabilité puis la fonction dérivée.

1. $f : x \mapsto (3x^3+7)^8$
2. $g : x \mapsto \dfrac{1}{(2x-1)^4}$
3. $h : x \mapsto \sqrt{x^2+4}$
4. $k : x \mapsto e^{3x^2-6x+1}$
5. $j : x \mapsto \sin(2x-5)$

Exercice 12

Calculer la dérivée des fonctions suivantes :

1. $f_1(x) = \dfrac{1}{(x^2+x+1)^3}$
2. $f_2(x) = 3(1-x)^3$
3. $f_3(x) = x\sqrt{x^2+4}$
4. $f_4(x) = e^{(4x^2+2x+1)^3}$
5. $f_5(x) = \sqrt{e^{(3x^2-4x-5)^5}}$

Exercice 13

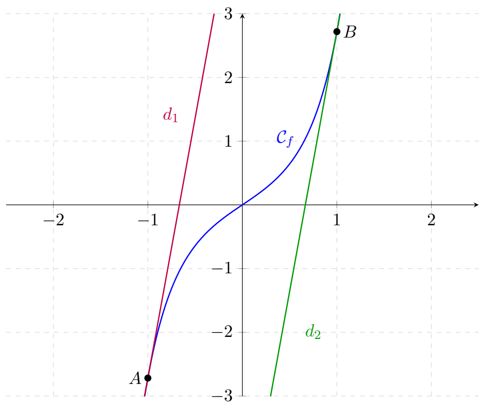
Calculer $f'(x)$ puis $f''(x)$.

1. $f(x) = \dfrac{1}{x+1}$
2. $f(x) = \dfrac{1}{(1+x)^3}$
3. $f(x) = (2-3x)e^{1-x}$

Exercice 14

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = xe^{x^2}$.

Sur la figure ci-dessous, on a représenté la courbe $\mathcal{C}_f$ représentative de f ainsi que ces tangentes d_1 et d_2 aux points A et B d'abscisses respectives -1 et 1.



Les tangentes d_1 et d_2 sont-elles parallèles ? Justifier.

Exercice 15

Déterminer les fonctions dérivées de :

1. f définie sur $]-1;+\infty[$ par $f(x) = \sqrt{x^2+2x+1}$
2. g définie sur $\mathbb{R}\setminus\{-\frac{1}{2}\}$ par $g(x) = \dfrac{(2x+1)^3}{4x+1}$
3. h définie sur $[2;+\infty[$ par $h(x) = \sqrt{\dfrac{x-2}{x+1}}$
4. k définie sur $\mathbb{R}\setminus\{\frac{2}{5}\}$ par $k(x) = \left(\dfrac{4x-3}{5x-2}\right)^3$
5. j définie sur $\mathbb{R}\setminus\{-1\}$ par $g(x) = e^{\dfrac{x-2}{x+1}}$

Étude de fonctions

Exercice 16

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^3e^{-x}$.

1. Montrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = x^2e^{-x}(2-x)$
2. Étudier le signe de $f'(x)$.
3. En déduire les variations de f.

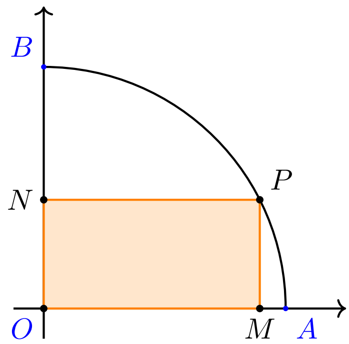
Exercice 17

L'objectif est d'étudier les variations de la fonction f sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = (x-1)e^x + x$.

1. Déterminer la fonction f' dérivée de la fonction f.
2. (a) Montrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f''(x) = e^x(1+x)$.
   (b) Étudier le signe de $f''(x)$.
   (c) En déduire les variations de la fonction f'.
3. Déterminer le signe de $f'(x)$.
4. En s'intéressant au minimum de f', conclure sur les variations de la fonction f.

Exercice 18

Le point P appartient au quart de cercle de centre O, de rayon 4 et d'extrémités A et B.



On construit le rectangle $OMPN$ où M appartient à $[OA]$ et N à $[OB]$. On pose $x = OM$.

1. À quel intervalle I appartient x ?
2. Montrer que l'aire de $OMPN$ est $f(x) = x\sqrt{16-x^2}$.
3. Montrer que $f'(x) = \dfrac{16-2x^2}{\sqrt{16-x^2}}$ et étudier les variations de la fonction f sur I.
4. En déduire la position du point P pour que le rectangle $OMPN$ ait une aire maximale.

Exercice supplémentaire

Exercice 19

En sciences physiques, une différentielle est une dérivée par rapport à une variable donnée. Pour chacune des formules suivantes, calculer les différentielles données. On sera parfois amené à exprimer les grandeurs physiques en fonction des autres. Toutes les grandeurs sont positives.

1. Calculer $\frac{dA}{db}$ puis $\frac{dA}{dh}$ avec $A = \frac{b\times h}{2}$
2. Calculer $\frac{dW}{dI}$ puis $\frac{dP}{dI}$ avec $W = RI^2t$
3. Calculer $\frac{dl}{dt}$ puis $\frac{dt}{dl}$ avec $l = l_0(1+\alpha t)$
4. Calculer $\frac{dW}{dr}$, $\frac{dv}{dW}$ puis $\frac{dr}{dW}$ avec $W = \frac{1}{2}rv^2$
5. Calculer $\frac{dC}{dv}$ avec $C = \varepsilon\frac{S}{d-v}$