Fonction logarithme népérien

Exercice 1

Dans chacun des cas suivants, justifier pourquoi l'expression $f(x)$ est calculable pour tous réels x de I.

1. $f(x) = \ln(x+2)$, $I =]-2\,;+\infty[$.
2. $f(x) = \ln(9-3x)$, $I =]-\infty\,;3[$.
3. $f(x) = \ln(x) + \ln(2-x)$, $I =]0\,;2[$.

Exercice 2

Dans chacun des cas, déterminer les valeurs de x pour lesquelles l'expression $f(x)$ est calculable.

1. $f(x) = \ln(x-4)$.
2. $f(x) = \ln(3x+5)$.

Exercice 3

Sans les calculer, déterminer le signe de chacun des nombres suivants :

a) $\ln(5)$
b) $\ln(0,9)$
c) $\ln\left(\frac{7}{8}\right)$
d) $\ln(\sqrt{2})$
e) $\ln(100)$
f) $\ln\left(3\times 10^{-2}\right)$

Exercice 4 Algorithme

On considère le script incomplet de la fonction `signe_ln` écrit en langage Python.

```
def signe_ln(x):
    if x ... :
        return("Positif")
    if x ... :
        return("Nul")
    if x ... :
        return(...)
```

1. Compléter ce programme afin que l'appel `signe_ln(x)` pour un réel x strictement positif, renvoie un message indiquant si $\ln(x)$ est positif, nul ou négatif.
2. Que renvoie chacun des appels suivants ?
   a) `signe_ln(3)`
   b) `signe_ln(0,3)`
   c) `signe_ln(1)`

Équations et inéquations

Exercice 5

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes :

a) $e^x = 1$
b) $e^x = 2$
c) $e^x = 0$

Exercice 6

Résoudre dans $]0;+\infty[$ les équations suivantes :

a) $\ln(x) = 13$
b) $\ln(x) = 1$
c) $\ln(x) = -1$

Exercice 7

Résoudre les équations suivantes dans $\mathbb{R}$:

a) $3e^x + 2 = 14$
b) $11 - e^{2x+1} = 4$

Exercice 8

Résoudre les inéquations suivantes dans $\mathbb{R}$:

a) $e^x > 3$
b) $e^{2x} < 7$
c) $e^x + 1 > 5$

Exercice 9

Résoudre dans $]0;+\infty[$ les inéquations suivantes :

a) $\ln(x) \geq \ln(3x)$
b) $1 + 2\ln(x) < 4$
c) $\ln(x^2+9) > 0$

Exercice 10

Après avoir déterminé les conditions d'existence, déterminer le signe des expressions :

a) $\ln(x-6)$
b) $\ln(5-3x)$
c) $\ln(4-x) - 2$

Exercice 11

Déterminer les conditions d'existence puis résoudre les équations et inéquations données.

a) $\ln(9-x^2) = 0$
b) $e^{\frac{x}{x+2}} = 3$
c) $\ln(2x^2 - 7x + 6) = \ln(10)$
d) $\ln\left(\frac{x}{x-2}\right) = 0$
e) $\ln(x^2) = \ln\left(\frac{1}{x^2}\right)$
f) $\ln(e^{2x}+1) = 1$
g) $\ln(x-3) > 1$
h) $\ln(x^2+5) \geq \ln(12)$
i) $e^{2-x} \leq 3$
j) $e^{x^2-1} > 2$
k) $\ln(4x^2 - x) \leq \ln(3x)$
l) $\ln(e^x - 1) \leq -1$

Exercice 12

Soit P définie sur $\mathbb{R}$ par $P(x) = x^2 - 2x - 15$.

1. Résoudre $P(x) = 0$, puis $P(x) < 0$.
2. En déduire les solutions de :
$$(\ln(x))^2 - 2\ln(x) - 15 = 0.$$
3. Déduire de Q1 l'ensemble des solutions de :
$$e^{2x} - 2e^x - 15 < 0.$$

Exercice 13

Résoudre les équations suivantes :

1. $(\ln(x))^2 + 2\ln(x) = 3$
2. $5e^{4x} - 13e^{2x} - 6 = 0$

Dérivée et variations

Exercice 14

Soit f définie sur $]0;+\infty[$ par $f(x) = 2\ln(x) + 1$.

1. Calculer $f'(x)$.
2. En déduire le sens de variation de f.

Exercice 15

Soit f définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par $f(x) = x - \ln(x)$.

1. Calculer $f'(x)$ et vérifier que $f'(x) = \dfrac{x-1}{x}$ pour tout réel $x \in]0;+\infty[$.
2. En déduire les variations de f.

Exercice 16

Étudier les variations de f définie sur $\mathbb{R}$ par :
$$f(x) = e^x\left(e^x - 1\right)$$

Exercice 17

Soit f la fonction définie sur $]0;+\infty[$ par :
$$f(x) = \frac{x-1}{x} \times \ln(x)$$

1. (a) Étudier les variations de la fonction g définie sur $]0;+\infty[$ par :
$$g(x) = x - 1 + \ln(x)$$
   (b) Calculer $g(1)$, puis en déduire le signe de $g(x)$ sur $]0;+\infty[$.
2. (a) Montrer que, pour tout $x \in]0;+\infty[$:
$$f'(x) = \tfrac{g(x)}{x^2}$$
   (b) En déduire les variations de la fonction f.

Exercice 18

Lors d'une réaction chimique, la concentration en moles par litre d'un produit est donnée en fonction du temps t (exprimé en minutes) par la fonction f définie pour $t \geq 0$ par :
$$f(t) = e^{-0{,}5t} - e^{-t}$$

1. À quel instant la concentration de ce produit est-elle maximale au cours de la réaction ?
2. À combien ce maximum est-il égal ?

Exercice 19

Soit f la fonction définie sur $]0;+\infty[$ par :
$$f(x) = \left(\ln(x)\right)^3 + x$$
et $\mathcal{C}$ sa courbe représentative.

1. Calculer $f'(x)$.
2. Déterminer une équation de T, la tangente à $\mathcal{C}$ en son point d'abscisse 1.
3. Étudier la position de $\mathcal{C}$ par rapport à T.

Exercice 20

1. Justifier que la fonction logarithme népérien est concave sur $]0;+\infty[$.
2. Écrire une équation de la tangente à la courbe représentative de la fonction logarithme népérien au point d'abscisse 1.
3. En déduire que pour tout réel x appartenant à $]0;+\infty[$: $\ln(x) \leq x - 1$.

Exercice 21

On note $\mathcal{C}_f$ la courbe représentative de la fonction f définie sur $]-1;+\infty[$ par $f(x) = \ln(1+x)$.

1. Déterminer une équation de la tangente T à $\mathcal{C}_f$ au point d'abscisse 0.
2. (a) Étudier la convexité de la fonction f.
   (b) En déduire que pour tout x appartenant à $]-1;+\infty[$: $\ln(1+x) \leq x$.

Exercice 22 Logique

Soit f une fonction dérivable sur $]0;+\infty[$ et la proposition : « Si $f(x) = \ln(x)$, alors $f'(x) = \dfrac{1}{x}$. »

1. Cette proposition est-elle vraie ?
2. (a) Énoncer la réciproque.
   (b) Est-elle vraie ?

Exercice 23

On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 1$, et pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = e \times \sqrt{u_n}$.

1. Démontrer, par récurrence, que :
$$\forall n \in \mathbb{N}, 1 \leq u_n \leq e^2.$$
2. (a) Démontrer que la suite (u_n) est croissante.
   (b) En déduire la convergence de (u_n).
3. Pour tout entier n, on pose $v_n = \ln(u_n) - 2$.
   (a) Montrer que (v_n) est géométrique de raison $\frac{1}{2}$.
   (b) Montrer que, pour tout entier naturel n,
$$v_n = -\tfrac{1}{2^{n-1}}$$
   (c) En déduire une expression de u_n en fonction de l'entier naturel n.
   (d) Calculer la limite de la suite (u_n).

Limites

Exercice 24

Soit f la fonction définie sur $]0;+\infty[$ par :

$$f(x) = 2x + 1 + \ln(x).$$

1. Justifier que la limite de f en 0 est égale à $-\infty$.
2. Justifier que la limite de f en $+\infty$ est $+\infty$.

Exercice 25

Soit f la fonction définie sur $]0;1[$ par :

$$f(x) = \frac{3}{\ln(x)}.$$

1. Rappeler la limite de $\ln$ en 0 puis en déduire la limite de f en 0.
2. Donner le signe de $\ln(x)$ pour $x \in]0;1[$.
3. Déterminer la limite de f en 1.

Exercice 26

Soit g la fonction définie sur $]-\infty;3[$ par :

$$g(x) = \ln(3-x).$$

1. (a) Déterminer $\lim\limits_{x\to-\infty} (3-x)$.
   (b) En déduire $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x)$.
2. (a) Justifier que $\lim\limits_{\substack{x\to 3\\ x<3}} (3-x) = 0^+$.
   (b) En déduire $\lim\limits_{\substack{x\to 3\\ x<3}} g(x)$.

Exercice 27

1. Rappeler $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ln(x)}{x}$.
2. En déduire $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(\dfrac{\ln(x)}{x} + 1\right)$.

Exercice 28

Soit f la fonction définie sur $]0;+\infty[$ par :

$$f(x) = \ln(x) - 3x.$$

1. Montrer que pour tout réel $x \in]0;+\infty[$, on a :
$$f(x) = x\left(\frac{\ln(x)}{x} - 3\right).$$
2. Déterminer alors la limite de f en $+\infty$.

Exercice 29

Déterminer les limites suivantes :

1. $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ln(x) - 3x}{2x^3}$
2. $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{(\ln(x))^2 + 2\ln(x) - 3}{x^3}$
3. $\lim\limits_{x\to 0} x^2 \ln(\sqrt{x})$
4. $\lim\limits_{x\to 0} \sqrt{x}\ln(x)$
5. $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{x+2}{x^2\ln(x)}$
6. $\lim\limits_{x\to 0^+} \left(\dfrac{1}{x} + \ln(x)\right)$
7. $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ln(x)}{\sqrt{x}}$
8. $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(x^2 + 2x - 3 - \ln(x)\right)$
9. $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ln(x) - 5x}{3x^2}$
10. $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ln(x)}{x+1}$

Exercice 30

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \ln(x^2 + 3x + 4)$.

1. Déterminer les limites de f aux bornes de son ensemble de définition.
2. Étudier les variations de la fonction f sur $\mathbb{R}$.

Exercice 31

Soit f la fonction définie sur $]0;+\infty[$ par :

$$f(x) = \ln\left(\frac{x^2}{x+1}\right).$$

1. Déterminer les limites de f aux bornes de son ensemble de définition.
2. Étudier les variations de f et dresser son tableau de variation.

Exercice 32

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \ln(1+e^x)$ et $\mathcal{C}_f$ sa courbe représentative dans un repère.

1. (a) Étudier les limites de f en $-\infty$ et en $+\infty$.
   (b) La courbe $\mathcal{C}_f$ admet-elle une asymptote horizontale ?
2. Dresser le tableau de variation de f.
3. Démontrer que l'équation $f(x) = m$ admet une unique solution pour tout réel m strictement positif.
4. Déterminer une équation de la tangente T à la courbe $\mathcal{C}_f$ au point d'abscisse 0.
5. Démontrer que la courbe $\mathcal{C}_f$ est située au-dessus de la droite d d'équation $y = x$.
6. Construire la courbe $\mathcal{C}_f$ et les droites T et d.

Propriétés algébriques

Exercice 33

Exprimer en fonction de $\ln(2)$.

(a) $\ln(8)$ | (b) $\ln(\sqrt{8})$ | (c) $\ln(\sqrt{8e})$

Exercice 34

1. Vérifier l'égalité $1000 = 2^3 \times 5^3$.
2. En déduire l'expression de $\ln(1000)$ en fonction de $\ln(2)$ et $\ln(5)$.

Exercice 35

Exprimer en fonction de $\ln(3)$ et $\ln(5)$.

(a) $\ln(15e)$

(b) $\ln(45e^2)$

(c) $\ln\left(\dfrac{3\times 25}{e^4}\right)$

Exercice 36

Écrire les réels suivants en utilisant une seule fois le symbole $\ln$:

(a) $5\ln(2) + \ln(8) - \ln(4)$

(b) $\ln\left(\dfrac{e^2}{5}\right) + \ln(125)$

Exercice 37

1. Simplifier l'expression :

$$\ln(\sqrt{2}-1) + \ln(\sqrt{2}+1).$$

2. Pour x réel appartenant à $]7;+\infty[$, on pose :

$$A = \ln(x-7) - 2\ln(x+3).$$

Écrire A sous la forme du logarithme d'un quotient.

Exercice 38

Montrer que $3\ln(\sqrt{2}+1) + \ln(5\sqrt{2}-7) \in \mathbb{N}$

Exercice 39

1. Simplifier les expressions suivantes :

   (a) $A = \ln\left(\frac{1}{2}\right) + \ln\left(\frac{2}{3}\right) + \ln\left(\frac{3}{4}\right)$

   (b) $B = \ln\left(\frac{1}{2}\right) + \ln\left(\frac{2}{3}\right) + \ln\left(\frac{3}{4}\right) + \cdots + \ln\left(\frac{8}{9}\right) + \ln\left(\frac{9}{10}\right)$

2. Soit n un entier naturel non nul. Simplifier :

$$D = \ln\left(\frac{1}{2}\right) + \ln\left(\frac{2}{3}\right) + \cdots + \ln\left(\frac{n}{n+1}\right).$$

Exercice 40

Les fonctions f et g suivantes sont-elles égales ?

1. $f(x) = \ln(x+1) + \ln(x)$ et $g(x) = \ln(x^2+x)$
2. $f(x) = \ln\left(x(x-1)^2\right) + \ln(x)$ et $g(x) = 2\ln(x-1) + \ln(x)$

Exercice 41

Démontrer que, pour tout réel x de $]0;+\infty[$:

1. $\ln\left(\frac{x}{1+x}\right) + \ln\left(1+\frac{1}{x}\right) = 0$
2. $\ln(\sqrt{e+x} - \sqrt{x}) + \ln(\sqrt{e+x} + \sqrt{x}) = 1$

Exercice 42

Soit (u_n) la suite définie, pour tout entier naturel n, par :

$$u_n = \frac{3}{2^n}.$$

Quelle est la nature de la suite définie, pour tout entier naturel n, par :

$$v_n = \ln(u_n)?$$

Exercice 43

Résoudre les équations/inéquations suivantes dans $\mathbb{R}$:

(a) $\ln(x-4) + \ln(x-2) = \ln(3)$

(b) $\ln(2x^2 - 17x) = 2\ln(3)$

(c) $\ln(x) - \ln(5) \leq 3\ln(2)$

(d) $\ln(x-5) + \ln(x+9) \leq 2\ln(3) + 3\ln(2)$

Exercice 44

Déterminer les conditions d'existence, puis résoudre les équations suivantes :

(a) $\ln(x-2) + \ln(x-32) = 6\ln(2)$

(b) $\ln\left((x-2)(x-32)\right) = 6\ln(2)$

Exercice 45

Déterminer le plus petit entier naturel n tel que :

$$0,8^n \leq 0,12.$$

Exercice 46

Déterminer les plus petits entiers naturels n tq :

1. $\left(\dfrac{1}{3}\right)^n < 10^{-6}$
2. $(1,15)^n \geq 2\times 10^3$

Problème de synthèse

Exercice 47

Soit f la fonction définie sur $]0;+\infty[$ par :

$$f(x) = \frac{1+\ln(x)}{x^2}$$

et $\mathcal{C}$ sa courbe représentative dans un repère du plan.

1. (a) Étudier la limite de f en 0.

   (b) Que vaut $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln(x)}{x^2}$?

   (c) En déduire la limite de f en $+\infty$.

   (d) En déduire les asymptotes éventuelles à la courbe $\mathcal{C}$.

2. (a) On note f' la fonction dérivée de la fonction f sur $\mathbb{R}_+^*$. Démontrer que, pour tout réel x appartenant à l'intervalle $\mathbb{R}_+^*$:

$$f'(x) = \frac{-1-2\ln(x)}{x^3}.$$

   (b) Résoudre sur $]0;+\infty[$ l'inéquation $-1-2\ln(x) > 0$. En déduire le signe de $f'(x)$ sur l'intervalle $]0;+\infty[$.

   (c) Dresser le tableau de variation de f.

3. (a) Démontrer que la courbe $\mathcal{C}$ a un unique point d'intersection avec l'axe des abscisses dont on précisera les coordonnées.

   (b) En déduire le signe de $f(x)$ sur $\mathbb{R}_+^*$.