

On considère la suite (v_n) définie pour tout entier naturel n par : $v_0 = 1$ et

$$v_{n+1} = \frac{9}{6 - v_n}$$

Partie A

1. On souhaite écrire un algorithme affichant, pour tout entier naturel n donné, tous les termes de la suite, du rang 0 au rang n .
Parmi les 3 algorithmes suivants, un seul convient. Préciser lequel en justifiant la réponse.

Algorithme N° 1	Algorithme N° 2	Algorithme N° 3
Variables : v est un réel i et n sont des entiers naturels Début de l'algorithme : Lire n v prend la valeur 1 Pour i variant de 1 à n faire v prend la valeur $\frac{9}{6-v}$ Fin pour Afficher v Fin algorithme	Variables : v est un réel i et n sont des entiers naturels Début de l'algorithme : Lire n Pour i variant de 1 à n faire v prend la valeur 1 Afficher v v prend la valeur $\frac{9}{6-v}$ Fin pour Fin algorithme	Variables : v est un réel i et n sont des entiers naturels Début de l'algorithme : Lire n v prend la valeur 1 Pour i variant de 1 à n faire Afficher v v prend la valeur $\frac{9}{6-v}$ Fin pour Afficher v Fin algorithme

2. Pour $n = 10$, on obtient l'affichage suivant :

1	1,800	2,143	2,333	2,455	2,538	2,600	2,647	2,684	2,714
---	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------

Pour $n = 100$, les derniers termes affichés sont :

2,967	2,968	2,968	2,968	2,969	2,969	2,969	2,970	2,970	2,970
-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------

Quelles conjectures peut-on émettre concernant la suite (v_n) ?

3. (a) Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n , on a :

$$0 < v_n < 3$$

- (b) Démontrer que, pour tout entier naturel n , on a :

$$v_{n+1} - v_n = \frac{(3 - v_n)^2}{6 - v_n}$$

- (c) La suite (v_n) est-elle monotone ? Justifier.

On admettra que la suite (v_n) admet une limite ℓ . On dit qu'elle est convergente vers ℓ .

Partie B

On considère la suite (w_n) définie pour tout entier naturel n par :

$$w_n = \frac{1}{v_n - 3}$$

- Démontrer que (w_n) est une suite arithmétique de raison $-\frac{1}{3}$.
- En déduire l'expression de w_n en fonction de n , puis celle de v_n en fonction de n .
- Déterminer la limite de la suite (v_n) .