

Dénombrement de k -arrangements

Exercice 1



- Pour former un 3-uplet d'éléments distincts de E , on choisit le premier élément parmi les 6 disponibles, le deuxième parmi les 5 restants (car distincts), et le troisième parmi les 4 restants. D'où $6 \times 5 \times 4$.
- De même, pour un 4-uplet d'éléments distincts : $6 \times 5 \times 4 \times 3 = 360$.

Exercice 2



</> Algorithme

- Pour $n = 4$:
 - $f = 1$ initialement
 - $i = 1 : f = 1 \times 1 = 1$
 - $i = 2 : f = 1 \times 2 = 2$
 - $i = 3 : f = 2 \times 3 = 6$
 - $i = 4 : f = 6 \times 4 = 24$

La variable f contient 24.

- Cet algorithme calcule $n!$ (factorielle de n).

Exercice 3



- Pour qu'une permutation de E soit un k -uplet d'éléments distincts de E , il faut $k = 3$ (car E a 3 éléments).
- Les permutations de $E = \{0, 1, 2\}$ sont : $(0, 1, 2)$, $(0, 2, 1)$, $(1, 0, 2)$, $(1, 2, 0)$, $(2, 0, 1)$, $(2, 1, 0)$. Il y en a 6.
- La formule est $3! = 6$.

Exercice 4



- (e, g, f, e) n'est pas une permutation de E car l'élément e apparaît deux fois et l'élément h n'apparaît pas.
 - (e, g, f) n'est pas une permutation de E car il n'y a que 3 éléments alors que E en contient 4, et h n'apparaît pas.
- Pour la première position, on a 4 choix, pour la deuxième 3 choix (éléments distincts), pour la troisième 2 choix, et pour la dernière 1 choix. D'où $4 \times 3 \times 2 \times 1$.
 - Ce nombre se note $4!$.

Exercice 5



- Le nombre de 4-uplets d'éléments distincts d'un ensemble à 9 éléments est : $9 \times 8 \times 7 \times 6 = 3024$.

- Sven n'utilise pas le chiffre 0 et pas de répétition, donc il dispose des chiffres $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$.

- Le nombre de codes possibles est : $9 \times 8 \times 7 \times 6 \times 5 \times 4 = 60480$.
- Si le dernier chiffre est 5, il reste 5 positions à remplir avec 8 chiffres disponibles : $8 \times 7 \times 6 \times 5 \times 4 = 6720$.

Exercice 6



- Le nombre de façons d'attribuer 5 prix différents à 5 couples parmi 10 est le nombre de 5-arrangements : $10 \times 9 \times 8 \times 7 \times 6 = 30240$.
- Si Fauve et Maxime sont premiers, il reste 4 prix à attribuer à 4 couples parmi les 9 restants : $9 \times 8 \times 7 \times 6 = 3024$.
 - Si de plus Denitsa et Christophe sont quatrièmes, il reste 3 prix (2e, 3e, 5e) à attribuer à 3 couples parmi les 8 restants : $8 \times 7 \times 6 = 336$.

Exercice 7



- Le nombre de permutations d'un ensemble à 9 éléments est $9! = 362880$.
- Le nombre de classements possibles dans le groupe est $6! = 720$.
 - Si la France est première et l'Australie dernière, il reste à classer 4 équipes aux positions 2, 3, 4, 5 : $4! = 24$.

Exercice 8



Le nombre d'anagrammes du mot "MATHS" est le nombre de permutations de ses 5 lettres distinctes : $5! = 120$.

Exercice 9



</> Algorithme

```
def factorielle(n):
    f = 1
    for i in range(1, n+1):
        f = f * i
    return f
```

Exercice 10



- Faux.** Il y a $12!$ classements différents car chaque joueur occupe une position unique.
- Vrai.** Si Maria est première, il reste 11 positions pour les 11 autres joueurs, soit $11!$ possibilités.
- Vrai.** Si Luigo, Bouseure et Tob occupent respectivement les positions 3, 7 et 9, il reste 9 positions pour les 9 autres joueurs : $9! = 362880$.

Exercice 11



Logique

1. **Vraie.** Si p est une permutation de E , alors p utilise tous les éléments de E exactement une fois, donc p est bien un n -uplet.
2. La réciproque est : "Si p est un n -uplet, alors p est une permutation de E ". **Fausse.** Un n -uplet peut contenir des répétitions d'éléments, ce qui n'est pas le cas d'une permutation.

Exercice 12 </> Algorithme

1. (a) Le nombre de 4-uplets d'éléments distincts de E est $8 \times 7 \times 6 \times 5 = 1680$.
(b) Il n'existe pas de 10-uplets d'éléments distincts de E car E n'a que 8 éléments et on ne peut pas choisir 10 éléments distincts.
2. (a) L'algorithme complété :

```

Si k > 8
    alors N ← 1
Sinon
    N ← 1
    Pour i allant de 1 à k
        N ← N * i
    Fin Pour
Fin Si

```

- (b) En Python :

```

def nbr_arrangements(k):
    if k > 8:
        return 0
    else:
        N = 1
        for i in range(1, k + 1):
            N *= i
        return N

```

- (c) Version généralisée :

```

def arrangements(n, k):
    if k > n:
        return 0
    N = 1
    for i in range(n - k + 1, n + 1):
        N = N * i
    return N

```

Exercice 13

1. (a) $P(0) : 2^0 = 1$ et $0! = 1$, donc $1 \leq 1$ OK.
 $P(1) : 2^1 = 2$ et $1! = 1$, donc $2 \leq 1$ NON
 $P(2) : 2^2 = 4$ et $2! = 2$, donc $4 \leq 2$ NON

$P(3) : 2^3 = 8$ et $3! = 6$, donc $8 \leq 6$ NON
 $P(4) : 2^4 = 16$ et $4! = 24$, donc $16 \leq 24$ OK
 $P(5) : 2^5 = 32$ et $5! = 120$, donc $32 \leq 120$ OK

- (b) On conjecture $n_0 = 4$.
2. (a) $(p+1)! = (p+1) \times p \times (p-1) \times \dots \times 1 = (p+1) \times p!$.
(b) Montrons par récurrence que $P(n)$ est vraie pour $n \geq 4$.
Initialisation : $P(4)$ est vraie (vérifié ci-dessus).
Hérédité : Supposons $P(n)$ vraie pour $n \geq 4$, i.e. $2^n \leq n!$. Montrons $P(n+1) : 2^{n+1} \leq (n+1)!$.
 $2^{n+1} = 2 \times 2^n \leq 2 \times n!$ (par hypothèse de récurrence).
Or, pour $n \geq 4$, on a $n+1 \geq 5 > 2$, donc $2 < n+1$.
Ainsi $2 \times n! < (n+1) \times n! = (n+1)!$.
D'où $2^{n+1} \leq (n+1)!$.

Combinaisons

Exercice 14

1. Le nombre de parties de E à un élément est $\binom{5}{1} = 5$. Réponses correctes : b et c.
2. Le nombre de 5-combinaisons de E est $\binom{5}{5} = 1$. Réponses correctes : a et d.
3. $\binom{5}{2} = \frac{5!}{2! \times 3!} = \frac{5 \times 4}{2 \times 1} = 10$. Réponses correctes : b et c (et d car il y a 10 couples dans un ensemble à 5 éléments).

Exercice 15 Logique

1. **Vraie.** $F = \{e_1, e_2\}$ est bien une partie à 2 éléments de E , donc une 2-combinaison.
2. (a) La réciproque est : "Si F est une combinaison de deux éléments de E , alors $F = \{e_1, e_2\}$ ".
(b) **Fausse.** Il existe d'autres 2-combinaisons : $\{e_1, e_3\}$ et $\{e_2, e_3\}$.

Exercice 16

1. (a) Les combinaisons de 3 éléments de E sont : $\{p, q, r\}, \{p, q, s\}, \{p, r, s\}, \{q, r, s\}$.
(b) Il y en a 4.
(c) $\binom{4}{3} = \frac{4!}{3! \times 1!} = \frac{4 \times 3!}{3! \times 1} = 4$
2. (a) $\binom{4}{2} = \frac{4!}{2! \times 2!} = \frac{4 \times 3}{2 \times 1} = 6$.
(b) Les 2-combinaisons sont : $\{p, q\}, \{p, r\}, \{p, s\}, \{q, r\}, \{q, s\}, \{r, s\}$. Il y en a bien 6.

Exercice 17

1. **Oui.** A est un sous-ensemble de 2 élèves, sans ordre et sans répétition.

2. **Non**, A n'est pas une combinaison car c'est un classement où l'ordre importe.
3. **Oui**, A est une combinaison car c'est un sous-ensemble (taille k variable) de la classe, l'ordre n'importe pas

Exercice 18



1. Le classement est une **permutation de** A car toutes les athlètes sont classées dans un ordre précis.
2. Le podium est un **3-uplet d'éléments distincts de** A car l'ordre des médailles importe.
3. L'ensemble des trois françaises est une **combinaison de** A car l'ordre n'importe pas.

Exercice 19



1. $\frac{5!}{3! \times 2!} = \frac{120}{6 \times 2} = \frac{120}{12} = 10$.
2. Ce nombre est égal à $\binom{5}{2}$ ou $\binom{5}{3}$.

Exercice 20



1. $\binom{7}{4} = \frac{7!}{4! \times 3!} = \frac{7 \times 6 \times 5}{3 \times 2 \times 1} = \frac{210}{6} = 35$
2. $\binom{7}{5} = \frac{7!}{5! \times 2!} = \frac{7 \times 6}{2 \times 1} = \frac{42}{2} = 21$.

Exercice 21



1. $\binom{9}{3} = \frac{9!}{3! \times 6!} = \frac{9 \times 8 \times 7}{3 \times 2 \times 1} = \frac{504}{6} = 84$.
2. $\binom{9}{4} = \frac{9!}{4! \times 5!} = \frac{9 \times 8 \times 7 \times 6}{4 \times 3 \times 2 \times 1} = \frac{3024}{24} = 126$. $\binom{9}{5} = \frac{9!}{5! \times 4!} = 126$ (par symétrie).
3. $\binom{6}{0} = 1$, $\binom{6}{1} = 6$, $\binom{6}{2} = 15$, $\binom{6}{3} = 20$, $\binom{6}{4} = 15$, $\binom{6}{5} = 6$, $\binom{6}{6} = 1$.
4. $\binom{15}{9} = 5005$ (avec calculatrice).

Exercice 22



1. $\binom{10}{3} = \frac{10 \times 9 \times 8}{3 \times 2 \times 1} = \frac{720}{6} = 120$. $\binom{10}{7} = \binom{10}{3} = 120$ (par symétrie).
2. Vérification avec calculatrice : $\binom{10}{3} = \binom{10}{7} = 120$

Exercice 23



1. Le nombre de mains de 8 cartes est $\binom{52}{8} = \frac{52!}{8! \times 44!}$. Avec calculatrice : $\binom{52}{8} = 752\,538\,150$.
2. (a) Zoé peut choisir 4 albums parmi 9 : $\binom{9}{4} = 126$.
- (b) Si l'album voulu est inclus, elle doit choisir 3 albums parmi les 8 restants : $\binom{8}{3} = 56$.

Exercice 24



1. Le nombre de triplettes de spécialités est $\binom{12}{3} = \frac{12 \times 11 \times 10}{3 \times 2 \times 1} = 220$.
2. Enzo peut choisir 2 spécialités parmi les 3 qu'il avait : $\binom{3}{2} = 3$.

3. (a) Un parcours = choix de 3 spécialités en 1ère puis 2 parmi ces 3 en Terminale. Nombre de parcours = $\binom{12}{3} \times \binom{3}{2} = 220 \times 3 = 660$
- (b) Coline a déjà une spécialité fixée. En première, elle doit donc choisir 2 autre spécialité sur les 11 restantes : $\binom{11}{2} = 55$. En terminale, elle devra choisir une seule spé parmi les 2 restantes : $\binom{2}{1} = 2$. En total, elle a donc $55 \times 2 = 110$ parcours différents.

Exercice 25



1. (a) Marlène choisit indépendamment 2 jeans parmi 5 et 3 T-shirts parmi 7, d'où le produit $\binom{5}{2} \times \binom{7}{3}$.
- (b) $\binom{5}{2} \times \binom{7}{3} = 10 \times 35 = 350$.
2. Gaétan peut remplir sa valise de $\binom{10}{8} \times \binom{13}{10} \times \binom{7}{4}$ manières. $\binom{10}{8} \times \binom{13}{10} \times \binom{7}{4} = 45 \times 286 \times 35 = 450\,450$ manières.

Exercice 26



Le nombre total de tirages de 2 boules parmi 7 est $\binom{7}{2} = 21$.

1. Événement A : les deux boules sont de même couleur. $A = (2 \text{ noires}) \text{ ou } (2 \text{ rouges})$. $P(A) = \frac{\binom{4}{2} + \binom{3}{2}}{\binom{7}{2}} = \frac{6+3}{21} = \frac{9}{21} = \frac{3}{7}$ **Vraie**.
2. Événement B : une seule boule rouge. $P(B) = \frac{\binom{3}{1} \times \binom{4}{1}}{\binom{7}{2}} = \frac{3 \times 4}{21} = \frac{12}{21} = \frac{4}{7} \neq \frac{1}{7}$ **Fausse**.

Triangle de Pascal

Exercice 27



1. **Vraie**. La ligne 6 correspond aux coefficients $\binom{6}{k}$ pour $k = 0, 1, \dots, 6$.
2. **Fausse**. Dans le triangle, ligne 4, colonne 3 : on trouve 4, mais $\binom{4}{3} = 4$ (pas 6).
3. **Vraie**. La première colonne contient les coefficients $\binom{n}{0} = 1$ pour tout n .
4. **Vrai**. Propriété opératoire de Pascal

Exercice 28



1. (a) Triangle de Pascal (lignes 0 à 7) :

1									(1)
1	1								(2)
1	2	1							(3)
1	3	3	1						(4)
1	4	6	4	1					(5)
1	5	10	10	5	1				(6)
1	6	15	20	15	6	1			(7)
1	7	21	35	35	21	7	1		(8)

- (b) D'après le triangle, $\binom{7}{4} = 35$.

2. (a) $7! = 5040$, $(7-4)! = 3! = 6$, $4! = 24$.

(b) $\binom{7}{4} = \frac{7!}{3! \times 4!} = \frac{5040}{6 \times 24} = \frac{5040}{144} = 35$

Exercice 29



1. D'après le triangle de Pascal, $\binom{8}{4} = 70$ et $\binom{8}{5} = 56$.

2. On peut calculer $\binom{9}{5}$ avec la relation de Pascal : $\binom{9}{5} = \binom{8}{4} + \binom{8}{5} = 70 + 56 = 126$.

Exercice 30



1. D'après le triangle de Pascal : $\binom{8}{4} = 70$, $\binom{8}{5} = 56$, $\binom{8}{6} = 28$.

2. Le nombre total d'équipes possibles est $\binom{8}{4} + \binom{8}{5} + \binom{8}{6} = 70 + 56 + 28 = 154$.

Exercice 31



Logique

1. **Vraie.** Le premier coefficient de chaque ligne est toujours $\binom{n}{0} = 1$.

2. La réciproque est : "Si un coefficient du triangle de Pascal est 1, alors c'est le premier d'une ligne". **Fausse.** Le coefficient 1 apparaît aussi en dernière position de chaque ligne ($\binom{n}{n} = 1$).

Exercice 32



1. Triangle de Pascal jusqu'à la ligne 6 (voir exercice précédent).

2. Sommes des lignes : 1, 2, 4, 8, 16, 32, 64. Les résultats successifs sont les puissances de 2.

3. Ceci illustre la propriété : $\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} = 2^n$.

Dénombrement (général)

Exercice 33



1. On autorise les deux allèles à être identiques et l'ordre n'a pas d'importance.

On compte donc le nombre de combinaisons **avec répétition** de 2 éléments parmi 6. Ainsi, il y a $\binom{6+2-1}{2} = \binom{7}{2} = 21$ couples possibles.

Plus simplement : il y a $\binom{6}{2} = 15$ combinaisons (sans répétitions) et 6 cas avec répétitions (A_1A_1, A_2A_2, \dots). Soit $15 + 6 = 21$ possibilités.

2. Le nombre de gènes avec deux allèles identiques est 6.

3. Le nombre de gènes avec des allèles différents est $\binom{6}{2} = 15$.

Exercice 34



Le nombre de résistances différentes est $10 \times 10 \times 9 \times 4 = 3600$.

Exercice 35



1. Le nombre d'octets est $2^8 = 256$.

2. Le nombre d'octets commençant par 1 et finissant par 0 : les 6 positions intermédiaires peuvent prendre 2 valeurs chacune, soit $2^6 = 64$.

3. Le nombre d'octets contenant exactement trois 1 : on choisit 3 positions parmi 8 pour placer les 1, soit $\binom{8}{3} = 56$.

4. Pour avoir plus de 1 que de 0, il faut au moins 5 fois le bit 1. Nombre d'octets = $\binom{8}{5} + \binom{8}{6} + \binom{8}{7} + \binom{8}{8} = 56 + 28 + 8 + 1 = 93$.

Exercice 36



Tableau de répartition :

	Sia	Ariana	Lady Gaga	Total
Garçons	62	118	140	320
Filles	175	128	70	493
Total	237	246	210	813

1. Le nombre d'adolescents préférant Sia est 237.

2. Le nombre de filles préférant Ariana Grande est $493 - 175 - 70 = 248$.

3. (a) La proportion de garçons préférant Ariana Grande est $\frac{118}{320} = \frac{59}{160} = 0,36875 = 36,88\%$.

(b) Parmi les 210 adolescents préférant Lady Gaga, 70 sont des filles. La proportion est $\frac{70}{210} = \frac{1}{3} = 0,3333... = 33,33\%$.

Exercice 37



1. Les issues donnant une somme de 5 sont : (1, 4), (2, 3), (3, 2), (4, 1). Il y a 4 issues favorables sur 36 possibles. $P(\text{somme} = 5) = \frac{4}{36} = \frac{1}{9}$.

2. Les sommes possibles et leurs probabilités :

- Somme 2 : (1, 1) $P = \frac{1}{36}$
- Somme 3 : (1, 2), (2, 1) $P = \frac{2}{36}$
- Somme 4 : (1, 3), (2, 2), (3, 1) $P = \frac{3}{36}$
- Somme 5 : (1, 4), (2, 3), (3, 2), (4, 1) $P = \frac{4}{36}$
- Somme 6 : (1, 5), (2, 4), (3, 3), (4, 2), (5, 1) $P = \frac{5}{36}$
- Somme 7 : (1, 6), (2, 5), (3, 4), (4, 3), (5, 2), (6, 1) $P = \frac{6}{36}$
- Somme 8 : (2, 6), (3, 5), (4, 4), (5, 3), (6, 2) $P = \frac{5}{36}$
- Somme 9 : (3, 6), (4, 5), (5, 4), (6, 3) $P = \frac{4}{36}$
- Somme 10 : (4, 6), (5, 5), (6, 4) $P = \frac{3}{36}$
- Somme 11 : (5, 6), (6, 5) $P = \frac{2}{36}$
- Somme 12 : (6, 6) $P = \frac{1}{36}$

Le résultat le plus probable est 7 avec $P = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$.

Exercice 38



Il y a $6 \times 4 = 24$ issues possibles (couples de résultats). Les différences possibles sont 0, 1, 2, 3, 4, 5.

- Différence 0 : (1, 1), (2, 2), (3, 3), (4, 4) 4 cas $P = \frac{4}{24} = \frac{1}{6}$
- Différence 1 : (1, 2), (2, 1), (2, 3), (3, 2), (3, 4), (4, 3) 6 cas $P = \frac{6}{24} = \frac{1}{4}$
- Différence 2 : (1, 3), (3, 1), (2, 4), (4, 2), (1, 4), (4, 1) 6 cas $P = \frac{6}{24} = \frac{1}{4}$
- Différence 3 : (2, 1), (3, 1), (4, 1), (1, 4) mais on a déjà compté certains cas. En réalité : (1, 4), (4, 1) donnent $|4 - 1| = 3$ 2 cas $P = \frac{2}{24} = \frac{1}{12}$
- Différence 4 : (5, 1), (6, 1), (1, 5), (1, 6) mais le dé à 4 faces ne peut donner 5 ou 6. En réalité : (5, 1), (6, 1) 2 cas $P = \frac{2}{24} = \frac{1}{12}$
- Différence 5 : (6, 1) 1 cas $P = \frac{1}{24}$

Correction du calcul :

- Différence 0 : (1, 1), (2, 2), (3, 3), (4, 4) $P = \frac{4}{24} = \frac{1}{6}$
- Différence 1 : (2, 1), (1, 2), (3, 2), (2, 3), (4, 3), (3, 4) $P = \frac{6}{24} = \frac{1}{4}$
- Différence 2 : (3, 1), (1, 3), (4, 2), (2, 4), (5, 3), (6, 4) $P = \frac{6}{24} = \frac{1}{4}$
- Différence 3 : (4, 1), (1, 4), (5, 2), (6, 3) $P = \frac{4}{24} = \frac{1}{6}$
- Différence 4 : (5, 1), (6, 2) $P = \frac{2}{24} = \frac{1}{12}$
- Différence 5 : (6, 1) $P = \frac{1}{24}$

Exercice 39

Il y a 13 caractères disponibles : 3 lettres + 10 chiffres.

1. Le nombre de codes différents est $13^4 = 28561$.
2. Si les 4 caractères sont différents : $13 \times 12 \times 11 \times 10 = 17160$.
3. Avec seulement A, C et 5, le nombre de codes est $3^4 = 81$.

Exercice 40

1. **Vraie.** On cherche en fait le nombre de duo qu'il est possible de former. Le nombre de poignées de main entre 20 personnes est $\binom{20}{2} = \frac{20 \times 19}{2} = 190 \neq 380$. **Fausse**, il y a 190 poignées de main.
2. Poignées de main :
 - Il y a 11 joueurs dans chaque équipe.
 - Entre joueurs d'équipes différentes : $11 \times 11 = 121$
 - Entre joueurs et arbitres : $22 \times 3 = 66$
 Total : $121 + 66 = 187$ **Vraie.**

Exercice 41

Jean-François doit payer 15 cts. Les possibilités sont :

- Avec la pièce de 10cts :
 - 1 pièces de 5cts
 - 5 pièces de 1ct
 - 1 pièce de 2cts et 3 de 1ct
 - 2 pièces de 2cts et 1 de 1ct

Donc 4 possibilités

- Sans la pièce de 10cts
 - 3 pieces de 5cts : 1 possibilité
 - 2 pieces de 5cts : Il reste donc 5cts, comme cas 1 (sans piece de 5cts, sinon on revient au cas 3 pieces) : 3 possibilités
 - 1 pieces de 5cts : Il reste 10cts. On note $(x_2; x_1)$. On peut faire : (0; 10), (1; 8), (2; 6), (3; 4), (4; 2), (5; 0). Soit 6 possibilités
 - 0 pieces de 5cts : En notant toujours $(x_2; x_1)$, on a : (0; 15), (1; 13); (2; 11); (3; 9), (4; 7), (5; 5), (6; 3), (7; 1). Soit 8 façons

On aurait donc ici, $1 + 3 + 6 + 8 = 18$ possibilités

Il y a 22 manières différentes de payer.

Exercice 42

1. Avec remise :

- (a) Le nombre total de tirages est $8^5 = 32768$.
- (b) Le nombre de tirages avec 1ère noire et 2e rouge : $5 \times 3 \times 8^3 = 15 \times 512 = 7680$.
- (c) Le nombre de tirages avec 1ère rouge en 3e position : les deux premières sont noires, la 3e rouge, puis 8^2 pour les deux dernières. $5^2 \times 3 \times 8^2 = 25 \times 3 \times 64 = 4800$.

2. Sans remise :

- (a) Le nombre total de tirages est $8 \times 7 \times 6 \times 5 \times 4 = 6720$.
- (b) 1ère noire et 2e rouge : $5 \times 3 \times 6 \times 5 \times 4 = 1800$.
- (c) 1ère rouge en 3e position : $5 \times 4 \times 3 \times 5 \times 4 = 1200$.

3. Tirage simultané de 2 boules :

- $P(A) = \frac{\binom{3}{2}}{\binom{8}{2}} = \frac{3}{28}$
- $P(B) = \frac{\binom{5}{2} + \binom{3}{2}}{\binom{8}{2}} = \frac{10+3}{28} = \frac{13}{28}$