TD - Chapitre 2

E.1 Soit f la fonction définie par la relation :
$f(x) = x^2 - 3{\cdot}x + 2$

(a) Etablir, pour tout $h \in \mathbb{R}$, l'identité :
$f(2+h) = h^2 + h$

(b) Pour $h \in \mathbb{R}$, déterminer une expression simplifiée de $f(1+h)$.

E.2 On considère la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par :
$$g(x) = \frac{x+1}{x^2+1}$$
Pour $h \in \mathbb{R}$, établir l'égalité suivante :
$$g(1+h) - g(1) = \frac{-h{\cdot}\big(h+1\big)}{h^2 + 2{\cdot}h + 2}$$

E.3

Définition : Soit f une fonction définie sur un intervalle I et a un nombre appartenant à I. On dit que la fonction f est **dérivable en a** si la limite suivante existe :
$$\lim_{\substack{h \mapsto 0 \\ h \neq 0}} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$
Alors cette limite s'appelle le **nombre dérivée en a de la fonction f** et on le note $\boldsymbol{f'(a)}$.

On considère la fonction f définie par :
$f : x \longmapsto 3{\cdot}x^2 - 2x$

(1) Pour tout $h \in \mathbb{R}$, établir l'identité :
$f(2+h) = 3{\cdot}h^2 + 10{\cdot}h + 8$

(2) (a) Etablir que : $\displaystyle\lim_{h \mapsto 0} \frac{f(2+h) - f(2)}{h} = 10$

(b) Donner la valeur de $f'(2)$.

E.4 On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :
$f(x) = x^2 - 3{\cdot}x + 1$

(1) Soit h un nombre réel non-nul. Montrer que :
$$\frac{f(2+h) - f(2)}{h} = h + 1$$

(2) En déduire la valeur de $f'(2)$

E.5 On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}\backslash\{-1\}$ par :
$$f(x) = \frac{x+3}{x+1}$$

(1) Etablir que pour tout entier h tel que $h+1 \neq 0$, on a :
$$\frac{f(1+h) - f(1)}{h} = -\frac{1}{h+2}$$

(2) En déduit le nombre dérivée de la fonction f en 1.

On note $\mathscr{C}_f$ la courbe représentative de la fonction f dans le plan muni d'un repère.

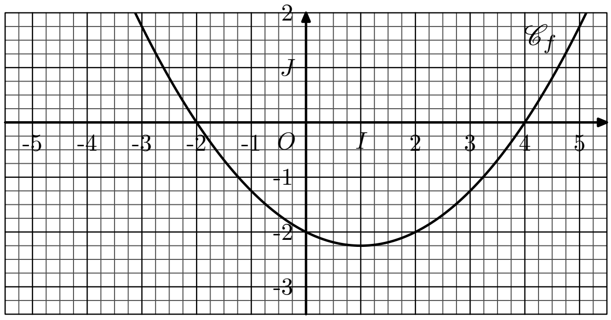
(3) Déterminer l'équation réduite de la tangente (T) à la courbe $\mathscr{C}_f$ au point d'abscisse 1.

E.6 On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :
$f(x) = x^2 + 3{\cdot}x + 1$

Déterminer le nombre dérivé de la fonction f en -1.

E.7 On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}\backslash\{-2\}$ par :
$$f(x) = \frac{2{\cdot}x + 1}{x + 2}$$
Déterminer le nombre dérivé de la fonction f pour $x = 1$.

E.8 On considère la fonction f définie par la relation est :
$$f(x) = \frac{1}{4}{\cdot}x^2 - \frac{1}{2}{\cdot}x - 2$$
Dans le plan muni d'un repère orthonormé $\big(O\,;I\,;J\big)$, on note $\mathscr{C}_f$ la courbe représentative de la fonction f :

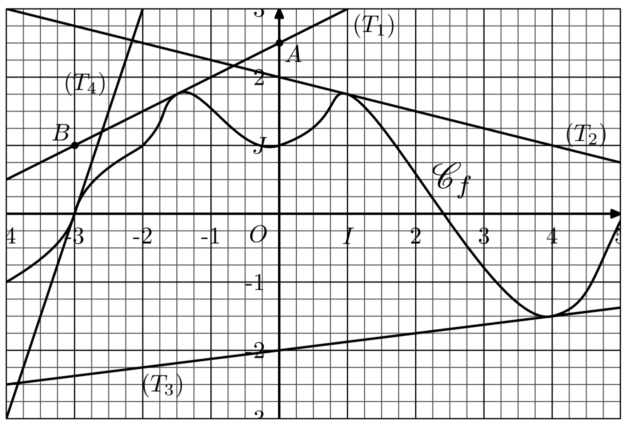


(1) (a) Effectuer le tracé de la droite (d) dont l'équation est :
$y = \dfrac{1}{2}{\cdot}x - 3$

(b) Effectuer le tracé de la droite (Δ) dont l'équation est :
$y = -\dfrac{3}{2}{\cdot}x - 3$

(2) Quelle particularité possède les droites (d) et (Δ) relativement à la courbe $\mathscr{C}_f$?

E.9 Ci-dessous est représentée, dans le repère $(O\,;I\,;J)$, la courbe $\mathscr{C}_f$ et quatre de ses tangentes :



(1) La droite (T_1) s'appelle :

"La tangente à la courbe $\mathscr{C}_f$ au point d'abscisse $-1{,}5$"

Nommer de même les trois autres droites.

(2) (a) La tangente (T_1) passe par les points $A(0\,;2{,}5)$ et $B(-3\,;1)$. Déterminer le coefficient directeur de la droite (T_1).

(b) Déterminer les coefficients directeurs des tangentes (T_2), (T_3) et (T_4).

E.10

Proposition : *(admis)* Soit f une fonction définie sur un intervalle I et dérivable en $a \in I$. On note $\mathscr{C}_f$ la courbe représentative de la fonction f dans le plan muni d'un repère.
La courbe $\mathscr{C}_f$ admet une tangente au point d'abscisse a et cette tangente a pour coefficient directeur le nombre $f'(a)$.

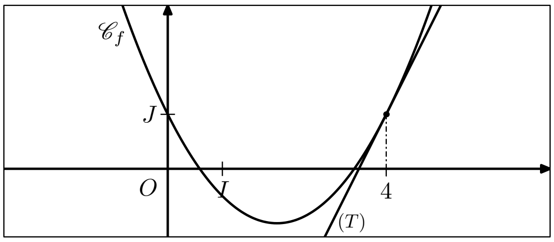
On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par la relation :
$f : x \longmapsto \dfrac{1}{2}{\cdot}x^2 - 2{\cdot}x + 1$

(1) (a) Montrer que, pour tout $h \in \mathbb{R}$, on a :

$$f(4+h)-f(4)=\frac{1}{2}\cdot h^2+2\cdot h$$

(b) Déterminer la valeur de la limite : $\lim_{h\mapsto 0}\frac{f(4+h)-f(4)}{h}$

(2) Dans le plan muni d'un repère $(O\,;I\,;J)$ orthonormé, sont tracées la courbe $\mathscr{C}_f$ représentative de la fonction f et la tangente (T) à la courbe $\mathscr{C}_f$ au point d'abscisse 4 :

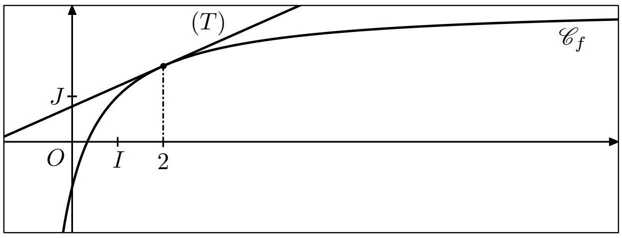


Donner le coefficient directeur de la tangente (T).

E.11 On considère la fonction f définie sur $]-1\,;+\infty[$ par :

$$f(x)=\frac{3\cdot x-1}{x+1}$$

Dans le plan muni du repère $(O\,;I\,;J)$ orthonormé, sont représentées la courbe $\mathscr{C}_f$ représentative de la fonction f et la tangente (T) à la courbe $\mathscr{C}_f$ au point d'abscisse 2.



(1) Pour tout $h\in[-1\,;1]$, établir l'identité :

$$\frac{f(2+h)-f((2)}{h}=\frac{4}{3\cdot(h+3)}$$

(2) Déterminer le coefficient directeur de la tangente (T).

E.12

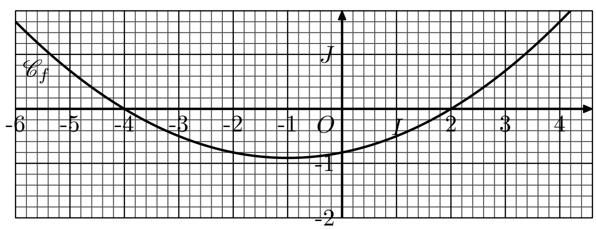
Proposition : soit f une fonction définie sur un intervalle I et dérivable en $a\in I$.
La tangente à la courbe $\mathscr{C}_f$ au point d'abscisse a a pour équation réduite :

$$y=f'(a)\cdot(x-a)+f(a)$$

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x)=0{,}1\cdot x^2+0{,}2\cdot x-0{,}8$$

On donne la courbe $\mathscr{C}_f$ représentative de la fonction f dans le repère $(O\,;I\,;J)$ orthonormé ci-dessous :



(1) (a) Pour tout $h\in\mathbb{R}$, établir l'identité :

$$\frac{f(2+h)-f(2)}{h}=0{,}1\cdot h+0{,}6$$

(b) En déduire le nombre dérivé de la fonction f en 2.

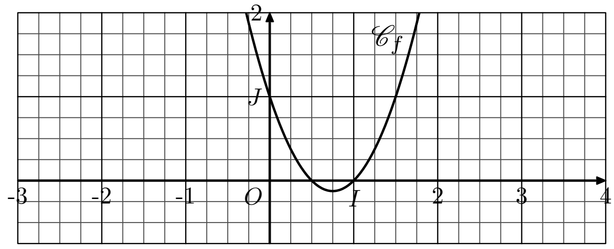
(2) (a) Déterminer l'équation réduite de la tangente (T) à la courbe $\mathscr{C}_f$ au point d'abscisse 2.

(b) Tracer la tangente (T) dans le repère ci-dessus.

E.13 On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x)=2\cdot x^2-3\cdot x+1$$

On note $\mathscr{C}_f$ la courbe représentative de la fonction f dans le repère $(O\,;I\,;J)$ ci-dessous

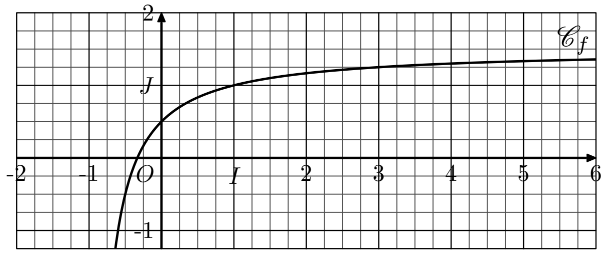


(1) Etablir que : $f'(1)=1$

(2) Déterminer l'équation réduite de la tangente (T) à la courbe $\mathscr{C}_f$ au point d'abscisse 1.

E.14 On considère la fonction f définie sur l'intervalle $]-1\,;+\infty[$ par : $f(x)=\frac{3\cdot x+1}{2\cdot x+2}$

Dans le plan muni d'un repère $(O\,;I\,;J)$ muni d'un repère orthonormé, est donnée la courbe $\mathscr{C}_f$ représentative de la fonction f.



(1) Démontrer que : $f'(1)=\frac{1}{4}$

(2) (a) Déterminer l'équation réduite de la tangente (T) à la courbe $\mathscr{C}_f$ au point d'abscisse 1.

(b) Tracer la tangente (T) dans le repère ci-dessous.

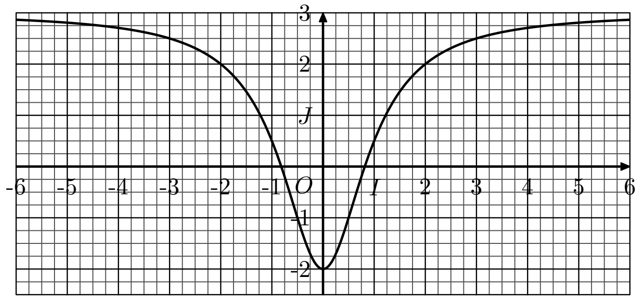
E.15 Soit f la fonction dont l'image d'un nombre réel x est définie par la relation : $f(x)=\frac{3\cdot x^2-2}{x^2+1}$

(1) (a) Pour tout nombre réel h non-nul, établir l'égalité :

$$\frac{f(1+h)-f(1)}{h}=\frac{5\cdot h+10}{2\cdot h^2+4\cdot h+4}$$

(b) En déduire la valeur du nombre dérivée $f'(1)$ de la fonction f en 1.

(2) On considère le plan muni d'un repère $(O\,;I\,;J)$ et on note $\mathscr{C}_f$ la courbe représentative de la fonction f.



(a) Déterminer l'équation de la tangente (T) à la courbe $\mathscr{C}_f$ au point d'abscisse 1.

(b) Tracer la tangente (T) dans le repère.

(3) Déterminer les coordonnées des différents point d'intersection de (T) et de $\mathscr{C}_f$.