DS 2

⇒ Exercice n°1

1°) Deux plans peuvent être :
- sécants
- parallèles (strictement)
- confondus

2°) * $\vec{IJ} = \vec{IS} + \vec{SJ}$
$= \vec{SJ} - \vec{SI}$
$= \frac{1}{3}\vec{SB} - \frac{1}{3}\vec{SA}$
$= \frac{1}{3}(\vec{SB} - \vec{SA})$
$= \frac{1}{3}(\vec{SB} + \vec{AS})$
$= \frac{1}{3}(\vec{AS} + \vec{SB})$
$= \frac{1}{3}\vec{AB}$

Donc $\vec{IJ}$ et $\vec{AB}$ sont colinéaires

* $\vec{JK} = \vec{JS} + \vec{SK}$
$= \vec{SK} - \vec{SJ}$
$= \frac{1}{3}\vec{SC} - \frac{1}{3}\vec{SB}$
$= \frac{1}{3}(\vec{BS} + \vec{SC})$
$= \frac{1}{3}\vec{BC}$

Donc $\vec{JK}$ et $\vec{BC}$ sont colinéaires

3°) $(\vec{IJ} ; \vec{JK})$ forme une base du plan (IJK)
et $(\vec{AB} ; \vec{BC})$ forme une base du plan (ABC)

De plus $\vec{IJ}$ et $\vec{AB}$ sont colinéaires et $\vec{JK}$ et $\vec{BC}$ également

Les plans (IJK) et (ABC) sont donc parallèles.

⇒ Exercice n°2

1°/ $\forall x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = u'(x)v(x) + u(x)v'(x) + 1$ avec $u(x) = x + \frac{1}{2}$

$= 1e^{-x} - (x + \frac{1}{2})e^{-x} + 1$ $\quad u'(x) = 1$

$= (1 - x - \frac{1}{2})e^{-x} + 1$ $\quad v(x) = e^{-x}$

$= (-x + \frac{1}{2})e^{-x} + 1$ $\quad v'(x) = -e^{-x}$

$\forall x \in \mathbb{R}$, $f''(x) = u'(x)v(x) + u(x)v'(x)$ avec $u(x) = -x + \frac{1}{2}$

$= -e^{-x} - (-x + \frac{1}{2})e^{-x}$ $\quad u'(x) = -1$

$= (-1 + x - \frac{1}{2})e^{-x}$ $\quad v(x) = e^{-x}$

$= (x - \frac{3}{2})e^{-x}$ $\quad v'(x) = -e^{-x}$

2°/ On a $f''(x) \geq 0$

$\Leftrightarrow (x - \frac{3}{2})e^{-x} \geq 0$

$\Leftrightarrow x - \frac{3}{2} \geq 0$ (car exp fn positive)

$\Leftrightarrow x \geq \frac{3}{2}$

Ainsi, on a :

x	$-\infty$		$\frac{3}{2}$		$+\infty$
$f''(x)$		$-$	0	$+$	
f'		↘	$f'(\frac{3}{2})$	↗	

3°/ $\forall x \in \mathbb{R}, \quad f'(x) \geq f\left(\frac{3}{2}\right) \qquad$ (cf Q2)

Or $f\left(\frac{3}{2}\right) = \left(-\frac{3}{2} + \frac{1}{2}\right)e^{-3/2} = 1 - e^{-3/2} \approx 0{,}77$

Donc, $\forall x \in \mathbb{R}, \; f'(x) > 0$.

5°/ Par conséquent, on a :

x	$-\infty$		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	
f		$\nearrow$	

$\Longrightarrow$ <u>Exercice n°3</u>

On a $f(x) = x^2 e^{-x}$

Ainsi $f'(x) = 2x e^{-x} - x^2 e^{-x}$

$= (-x^2 + 2x)e^{-x}$

L'équation réduite de la tangente en a est

$$y = f(a)(x-a) + f(a)$$

Si l'axe des abscisses est tangent à $\mathcal{C}$ alors $y = 0$.

Ainsi $\begin{cases} f'(a) = 0 \\ f(a) = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} (-a^2 + 2a)e^{-a} = 0 \\ a^2 e^{-a} = 0 \end{cases}$

Il faut que le coefficient directeur ($f'(a)$) soit nul pour que la droite soit horizontale et que l'ordonnée à l'origine soit nulle.

$\iff \begin{cases} -a^2 + 2a = 0 & (\text{car } \exp \neq 0) \\ a^2 = 0 & (\text{car } \exp \neq 0) \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a(-a+2) = 0 \\ a = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a = 0 \ \underline{\text{ou}} \ a = 2 \\ a = 0 \end{cases}$$

Ainsi, la tangente admet pour equation $y = 0$ si $x = 0$.