Calcul de produits scalaires

Exercice 1

Soit A, B et C trois points de lespace tels que :

$$AB = 8, \quad AC = 7 \quad \text{et} \quad \widehat{BAC} = \frac{\pi}{3}.$$

Calculer le produit scalaire $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$.

Exercice 2

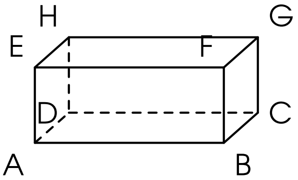
Soit A, B et C trois points de lespace tels que :

$$AB = 5, \quad AC = 16 \quad \text{et} \quad \widehat{BAC} = \frac{5\pi}{6}.$$

Calculer le produit scalaire $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$.

Exercice 3

On considère le pavé droit $ABCDEFGH$ tel que $AB = 4$, $AE = 2$ et $AD = 3$.



Déterminer les produits scalaires suivants :

a) $\overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{BF}$ | c) $\overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{AD}$ | e) $\overrightarrow{AE} \cdot \overrightarrow{GH}$

b) $\overrightarrow{CD} \cdot \overrightarrow{HD}$ | d) $\overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{HE}$ | f) $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AF}$

Exercice 4

Soit $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ trois vecteurs de lespace tels que

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = 5 \quad \text{et} \quad \vec{u} \cdot \vec{w} = -3.$$

Déterminer les produits scalaires suivants :

a) $\vec{v} \cdot (7\vec{u})$;

b) $\vec{v} \cdot \vec{u}$;

c) $\vec{u} \cdot (\vec{v} - \vec{w})$.

Exercice 5

Soit $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ trois vecteurs de lespace tels que :

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = -9 \quad \text{et} \quad \vec{u} \cdot \vec{w} = 6.$$

1. Déterminer le produit scalaire $\vec{u} \cdot (2\vec{v} + 3\vec{w})$.
2. Que peut-on en déduire pour les vecteurs $\vec{u}$ et $2\vec{v} + 3\vec{w}$?

Exercice 6

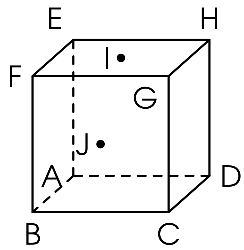
Soit A, B, C et D quatre points tels que :

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 6 \quad \text{et} \quad \overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{AC} = 5.$$

1. Exprimer $\overrightarrow{BD}$ en fonction de $\overrightarrow{BA}$ et $\overrightarrow{AD}$.
2. En déduire le produit scalaire $\overrightarrow{BD} \cdot \overrightarrow{AC}$.

Exercice 7

ABCDEFGH est un cube darête a. I est le centre du carré $EFGH$ et J le centre du carré $BCGF$.



1. Calculer les produits scalaires suivants :

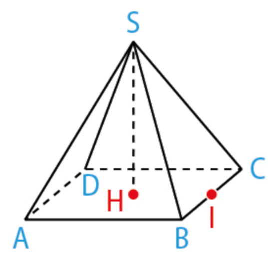
a) $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AF}$ | b) $\overrightarrow{EI} \cdot \overrightarrow{HF}$ | c) $\overrightarrow{BJ} \cdot \overrightarrow{CG}$

2. a) Démontrer que $\overrightarrow{IJ} = \frac{1}{2}\overrightarrow{EB}$.

   b) En déduire le produit scalaire $\overrightarrow{EA} \cdot \overrightarrow{IJ}$.

Exercice 8

$SABCD$ est une pyramide de base carrée $ABCD$ et de sommet S, telle que les faces SAB, SBC, SDC et SDA sont des triangles équilatéraux. H est le centre du carré $ABCD$ et I est le milieu de $[BC]$. On pose $AB = a$.



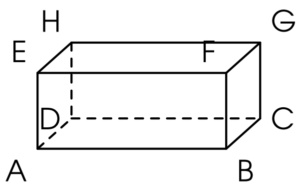
1. Calculer le produit scalaire $\overrightarrow{SA} \cdot \overrightarrow{SB}$.
2. Que représente le point H dans le triangle SAC ?
3. Calculer les produits scalaires suivants :

a) $\overrightarrow{SH} \cdot \overrightarrow{AC}$ | c) $\overrightarrow{HI} \cdot \overrightarrow{SA}$

b) $\overrightarrow{AH} \cdot \overrightarrow{DB}$ | d) $\overrightarrow{HI} \cdot \overrightarrow{DH}$

Exercice 9

ABCDEFGH est un parallélépipède rectangle tel que $AE = AD = a$ et $AB = 3a$. Calculer les produits scalaires suivants :

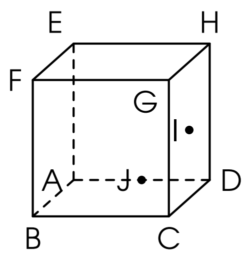


a) $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AF}$ | c) $\overrightarrow{EG} \cdot \overrightarrow{HF}$

b) $\overrightarrow{DB} \cdot \overrightarrow{CG}$ | d) $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AG}$

Exercice 10

ABCDEFGH est un cube de côté a. Le point I est le centre de la face $DCGH$ et J est le milieu du segment $[AD]$.



1. Exprimer les vecteurs $\overrightarrow{AI}$ et $\overrightarrow{BJ}$ en fonction des vecteurs $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AD}$ et $\overrightarrow{AE}$.
2. a) Calculer le produit scalaire $\overrightarrow{AI} \cdot \overrightarrow{BJ}$.

   b) Que peut-on en déduire pour les droites (AI) et (BJ) ?

Exercice 11

Vrai ou faux ? Justifier.

1. Pour tous points A, B et C tels que $AB = 9$ et $AC = 7$, on a $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 63$ ou $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = -63$.
2. Pour tous points A, B et C tels que $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 5$ on a $\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{AC} = -5$.

Exercice 12

$ABCDEFGH$ est un cube de côté a. On considère les points M et N définis par

$$\overrightarrow{AM} = 2\overrightarrow{AB}+3\overrightarrow{AD}+4\overrightarrow{AE} \quad \text{et} \quad \overrightarrow{AN} = \overrightarrow{AB}-2\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AE}.$$

1. Calculer le produit scalaire $\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{AN}$.
2. Que peut-on en déduire pour le triangle MAN ?

Exercice 13 Logique

On considère $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs de lespace. Soit lénoncé : « Si $\vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\|$, alors $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires. »

1. Dire si cet énoncé est vrai ou faux. Justifier.
2. Énoncer la réciproque. Est-elle vraie ?

Produits scalaires dans un repère orthonormé

Exercice 14

On considère deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$. Calculer dans chacun des cas suivants le produit scalaire $\vec{u} \cdot \vec{v}$:

a) $\vec{u}(-3\,;-1\,;0)$ et $\vec{v}(2\,;0\,;5)$
b) $\vec{u}(1\,;-1\,;3)$ et $\vec{v}(2\,;3\,;-2)$

Exercice 15 Algorithme

Compléter le script de la fonction `pro_scal` donné ci-contre afin que cette fonction Python retourne le produit scalaire des vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ dont les coordonnées dans un repère orthonormé sont saisies dans les listes `U` et `V`.

```
def pro_scal(U,V):
    p=0
    for i in range(3):
        p=p+...
    return p
```

Exercice 16

Soit $\vec{u}(7\,;-1\,;2)$ et $\vec{v}(-3\,;-11\,;5)$ deux vecteurs de lespace.

1. Calculer le produit scalaire $\vec{u} \cdot \vec{v}$.
2. Que peut-on en déduire pour les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$?

Exercice 17

Démontrer que les vecteurs de lespace $\vec{u}(-4\,;6\,;9)$ et $\vec{v}(3\,;-7\,;6)$ sont orthogonaux.

Exercice 18 Algorithme

On considère le script de la fonction `orth` donné ci-dessous.

```
def orth(x1,y1,z1,x2,y2,z2):
    p=x1*x2+y1*y2+z1*z2
    return(p==0)
```

1. Que renvoie lappel `orth(1,2,1,-1,1,-1)` ?
2. Que renvoie lappel `orth(3,0,2,1,2,3)` ?
3. À quoi peut servir cette fonction ?

Exercice 19

Soit $A(2\,;7\,;1)$, $B(5\,;-1\,;3)$ et $C(0\,;4\,;-3)$ trois points.

1. Déterminer les coordonnées de $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$.
2. Calculer le produit scalaire $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$.

Exercice 20

On considère les points $A(1\,;-3\,;2)$, $B(8\,;-4\,;5)$ et $C(2\,;1\,;1)$.

1. Justifier que $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont orthogonaux.
2. Que peut-on en déduire pour le triangle ABC ?

Exercice 21

On considère les points $A(4\,;2\,;-3)$, $B(6\,;4\,;0)$, $C(7\,;6\,;-2)$ et $D(5\,;4\,;-5)$.

1. Démontrer que le quadrilatère $ABCD$ est un parallélogramme.
2. a) Calculer le produit scalaire $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD}$.
   b) Que peut-on en déduire pour le parallélogramme $ABCD$?

Exercice 22

On considère les points $A(3\,;2\,;1)$, $B(10\,;6\,;-1)$, $C(9\,;8\,;-9)$ et $D(2\,;4\,;-7)$.

1. Démontrer que le quadrilatère $ABCD$ est un parallélogramme.
2. a) Démontrer que les vecteurs $\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{BD}$ sont orthogonaux.
   b) Que peut-on en déduire pour le parallélogramme $ABCD$?

Exercice 23

Soit $A(3\,;5\,;-4)$, $B(1\,;-2\,;-1)$ et $C(6\,;-3\,;0)$.

1. Quelle est la nature du triangle ABC ?
2. Calculer $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$.

Exercice 24

Soient $A(7\,;\,-2\,;\,-5)$, $B(5\,;\,4\,;\,4)$ et $C(5\,;\,1\,;\,1)$.

1. (a) Calculer le produit scalaire $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}$.
   (b) Calculer les longueurs AB et AC.
2. En déduire une valeur approchée à $0{,}01$ près de langle $\widehat{BAC}$ en degrés.

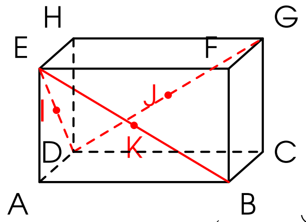
Exercice 25

Soit $A(7\,;\,-5\,;\,6)$, $B(0\,;\,-4\,;\,3)$, $C(1\,;\,-3\,;\,1)$ trois points de lespace et J le milieu de $[AC]$.

1. (a) Calculer le produit scalaire $\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{BJ}$.
   (b) Calculer les longueurs BC et BJ.
2. Déterminer une valeur approchée à $0{,}01$ près de langle $\widehat{CBJ}$ en degrés.

Exercice 26

Soit $ABCDEFGH$ le parallélépipède rectangle ci-dessous, avec $AB = 2$, $AD = AE = 1$. Soit I, J et K les milieux respectifs de $[DE]$, $[DG]$ et $[EB]$.



On se place dans le repère $\left(D;\ \overrightarrow{DA},\ \frac{1}{2}\overrightarrow{DC},\ \overrightarrow{DH}\right)$.

1. Démontrer que ce repère est orthonormé.
2. (a) Déterminer les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{IJ}$ et $\overrightarrow{IK}$, puis calculer le produit scalaire $\overrightarrow{IJ}\cdot\overrightarrow{IK}$ et les longueurs IJ et IK.
   (b) En déduire une valeur approchée à $0{,}01$ près de langle $\widehat{JIK}$ en degrés.

Exercice 27

On considère un cube $ABCDEFGH$ dont les arêtes sont de longueur 1. Lespace est rapporté au repère orthonormé $(D;\overrightarrow{DA},\overrightarrow{DC},\overrightarrow{DH})$. À tout réel x de lintervalle $]0;1[$, on associe le point M du segment $[DF]$ tel que $\overrightarrow{DM} = x\,\overrightarrow{DF}$.

1. Justifier que $M(x\,;x\,;x)$.
2. Existe-t-il une valeur de x telle que le triangle MEB soit rectangle en M ?

Formules de polarisation

Exercice 28

1. Rappeler lexpression de la norme dun vecteur en fonction des coordonnées de ce vecteur.
2. Dans chaque cas, calculer la norme de $\vec{u}$:
   (a) $\vec{u}(1\,;2\,;2)$
   (b) $\vec{u}(-2\,;-3\,;6)$
   (c) $\vec{u}(9\,;12\,;-8)$

Exercice 29

1. Rappeler la formule de polarisation donnant le produit scalaire $\vec{u}\cdot\vec{v}$ en fonction de $\|\vec{u}+\vec{v}\|$, $\|\vec{u}\|$ et $\|\vec{v}\|$.
2. En déduire le produit scalaire $\vec{u}\cdot\vec{v}$ lorsque $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont deux vecteurs tels que $\|\vec{u}\| = 8$, $\|\vec{v}\| = 3$ et $\|\vec{u}+\vec{v}\| = 7$.

Exercice 30

Soit A, B et C trois points de lespace tels que : $AB = 7$, $AC = 8$ et $BC = 5$.

1. (a) À laide dune formule de polarisation démontrer que :
   $\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{AC} = \frac{1}{2}\left(BC^2 - AB^2 - AC^2\right)$.
   (b) En déduire la valeur de $\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{AC}$ puis celle de $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}$.
2. Déterminer une valeur approchée à $0,01°$ près de langle $\widehat{BAC}$ en degrés.

Exercice 31

Soit A, B et C trois points de lespace tels que $AB = 6$, $AC = 5$ et $BC = 8$.

1. (a) À laide dune formule de polarisation déterminer le produit scalaire $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BC}$.
   (b) En déduire le produit scalaire $\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC}$.
2. Déterminer une valeur approchée à $0,01°$ près de langle $\widehat{ABC}$ en degrés.

Exercice 32 Logique

Soit A, B, C et D quatre points de lespace tels que $ABCD$ est un parallélogramme.

1. À laide dune formule de polarisation, démontrer que $\overrightarrow{DA}\cdot\overrightarrow{AB} = \frac{1}{4}\left(BD^2 - AC^2\right)$.
2. Démontrer alors la propriété suivante :
   « Un parallélogramme est un rectangle si et seulement si ses diagonales sont de même longueur. »

Exercice 33

Soit A, B, C et D quatre points de lespace tels que $ABCD$ est un parallélogramme. On suppose que $AC = 10$ et $BD = 4$. À laide dune formule de polarisation, calculer le produit scalaire $\overrightarrow{DA}\cdot\overrightarrow{AB}$.

Orthogonalité de droites et de plans

Exercice 34

Soit d la droite passant par le point $A(1\,;1\,;1)$ et de vecteur directeur $\vec{u}(7\,;5\,;3)$ et d' la droite passant par le point $B(4\,;0\,;2)$ et de vecteur directeur $\vec{v}(-4\,;5\,;1)$.

1. Calculer le produit scalaire $\vec{u}\cdot\vec{v}$.
2. En déduire que d et d' sont orthogonales.

Exercice 35

Soit $A(1\ ;-2\ ;7)$, $B(3\ ;-1\ ;10)$ et $C(-4\ ;5\ ;8)$ trois points.

1. (a) Déterminer les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$.
   (b) Calculer le produit scalaire $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$.
2. Que peut-on en déduire pour les droites (AB) et (AC) ?

Exercice 36

Soit $A(4\ ;-2\ ;1)$ et $B(-1\ ;2\ ;2)$ deux points. Le plan $\mathcal{P}$ passe par A et est dirigé par les vecteurs $\vec{v}(1\ ;1\ ;1)$ et $\vec{w}(1\ ;2\ ;-3)$.

1. Déterminer les coordonnées de $\overrightarrow{AB}$.
2. (a) Calculer les produits scalaires $\overrightarrow{AB} \cdot \vec{v}$ et $\overrightarrow{AB} \cdot \vec{w}$.
   (b) Que peut-on en déduire pour la droite (AB) et le plan $\mathcal{P}$?

Exercice 37 Logique

Soit d une droite de vecteur directeur $\vec{u}$, $\mathcal{P}$ un plan et $\vec{v}$ un vecteur non nul de la direction du plan $\mathcal{P}$.

1. La proposition suivante est-elle vraie ? « Si d est perpendiculaire à $\mathcal{P}$ alors $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$. »
2. (a) Énoncer la réciproque de la proposition précédente.
   (b) Cette réciproque est-elle vraie ?

Exercice 38

Soit les points $A(-5;-4;9)$, $B(-4;-10;12)$, $C(-3;-2;10)$, $D(7;1;-5)$ et $E(-5;6;9)$.

1. Démontrer que les points A, B et C définissent un plan.
2. Démontrer que les droites (AB) et (DE) sont orthogonales.
3. Démontrer que la droite (DE) est orthogonale au plan (ABC).

Exercice 39

Soit les points $A(7;-1;8)$, $B(10;3;6)$, $C(1;-2;6)$ et $D(-5;2;5)$.
Démontrer que les droites (AB) et (CD) sont orthogonales.

Exercice 40

Soit les points $M(2;5;-3)$, $N(11;8;-1)$, $R(1;-3;7)$ et $S(2;-6;7)$.
Démontrer que les droites (MN) et (RS) sont orthogonales.

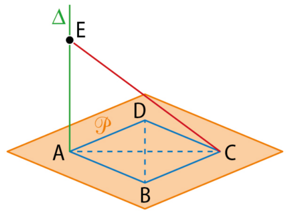
Exercice 41

Soit les points $A(1;1;1)$, $B(3;0;0)$, $C(2;1;0)$, $D(8;-1;3)$ et $E(12;3;7)$.

1. Démontrer que les points A, B et C définissent un plan.
2. Démontrer que la droite (DE) est orthogonale au plan (ABC).

Exercice 42

Soit $ABCD$ un carré dun plan $\mathcal{P}$. Δ est la perpendiculaire au plan $\mathcal{P}$ passant par A, et E est un point quelconque de Δ.

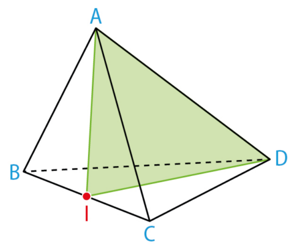


1. Justifier que les droites (DB) et (AC) sont perpendiculaires.
2. En déduire que les droites (DB) et (EC) sont orthogonales.

Exercice 43

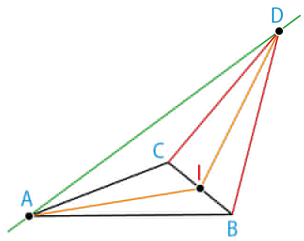
$ABCD$ est un tétraèdre régulier (chaque face est un triangle équilatéral) et I est le milieu du segment $[BC]$.

Démontrer que la droite (BC) est perpendiculaire au plan (IAD).



Exercice 44

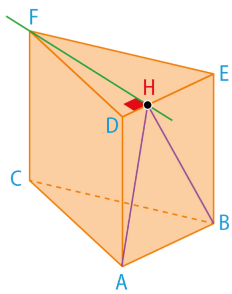
Soit ABC un triangle isocèle en A. On considère un point D non situé dans le plan (ABC) et tel que BCD soit isocèle en D. On note I le milieu de $[BC]$.



1. Démontrer que la droite (BC) est perpendiculaire au plan (AID).
2. En déduire que les droites (BC) et (AD) sont orthogonales.

Exercice 45

$ABCDEF$ est un prisme droit, ses faces $ABED$, $ADFC$ et $BEFC$ étant des rectangles.
On considère le point H, pied de la hauteur issue de F dans le triangle DEF.



1. (a) Démontrer que la droite (AD) est perpendiculaire au plan (DEF).
   (b) En déduire que (FH) est perpendiculaire au plan (ABE).
2. Démontrer que les triangles FHA et FHB sont rectangles.