

⚡ Conditions d'évaluation

Calculatrice : autorisée.

Durée : 100min

Compétences évaluées :

- ☐ Déterminer la nature d'une suite
- ☐ Calculer la somme des premiers termes d'une suite
- ☐ Déterminer le sens de variations d'une suite
- ☐ Dériver le produit de deux fonctions
- ☐ Dériver une fonction composée affine
- ☐ Étudier une fonction du second degré (signe, factorisation, variations)

Exercice 1 Étude arithmétique

(5 points)

Soit (u_n) une suite arithmétique telle que $u_2 = 4$ et $u_{10} = -42$.

1. Déterminer la valeur de la raison r de la suite.
2. Déterminer la valeur de u_0 .
3. En déduire, pour tout entier naturel n , l'expression explicite de la suite (u_n) .

Exercice 2 Dérivée composée

(6 points)

Soit f la fonction définie par $f(x) = \sqrt{3x-2} \times (x^2 - 1)$. Le but de l'exercice est de déterminer sa fonction dérivée f' .

1. On pose $v(x) = (x^2 - 1)$. Déterminer l'expression de $v'(x)$.
2. On pose $u(x) = \sqrt{3x-2}$.
 - (a) Déterminer le domaine de définition de la fonction u .
 - (b) Donner l'expression algébrique de sa fonction dérivée u' .
3. En vous aidant des questions précédentes, justifier que :

$$f'(x) = \frac{15x^2 - 8x - 3}{2\sqrt{3x-2}}$$

Exercice 3 Applications géométriques

(7 points)

Soit w_n la suite géométrique de premier terme $w_0 = 6$ et de raison 1,2.

1. Donner la forme récurrence de la suite (w_n) .
2. Donner la forme explicite de (w_n) .
3. En justifiant votre démarche, déterminer le sens de variation de la suite (w_n) .
4. Prouver que $S' = w_0 + w_1 + \dots + w_{15} = -30(1 - 1,2^{16})$.

Exercice 4 Somme astucieuse

(3 points)

En détaillant votre démarche, calculer $S = 4 + 6 + 8 + 10 + \dots + 48$.

Exercice 5 Second degré

(9 points)

On considère la fonction f définie sur \mathbb{R} par $f(x) = 2x^2 + 2x - 12$.

1. Déterminer la forme canonique de f .
2. En déduire le tableau de variation de la fonction f .
3. Déterminer, si elles existent, la ou les racines de la fonction.
4. Donner la forme factorisée de f .
5. Dresser le tableau de signe de la fonction f .

Exercice 6 Salaire

(10 points)

Béatrice et Elsa ont été embauchés au même moment dans une entreprise et ont négocié leur contrat à des conditions différentes :

- Béatrice a commencé en 2020 avec un salaire annuel de 19 700 € alors que le salaire de Elsa était, cette même année, de 17 700 €.
- Le salaire de Béatrice augmente de 700 € par an alors que celui de Elsa augmente de 5 % par an.

1. Quels étaient les salaires annuels de Béatrice et de Elsa en 2022 ?
2. On modélise les salaires de Béatrice et de Elsa à l'aide de suites.
 - (a) On note u_n le salaire de Béatrice en l'année $2020 + n$. On a donc $u_0 = 19\,700$. Quelle est la nature de la suite (u_n) ? Justifier.
 - (b) Déterminer en quelle année le salaire de Béatrice dépassera 23 210.
 - (c) On note v_n le salaire de Elsa en l'année $2020 + n$. Exprimer v_{n+1} en fonction de v_n , puis v_n en fonction de n .
 - (d) Calculer le salaire de Elsa en 2029. On arrondira le résultat à l'euro.
3. On veut déterminer à partir de quelle année le salaire de Elsa dépassera celui de Béatrice. Pour cela, on dispose du programme incomplet ci-dessous écrit en langage Python.

Compléter les quatre parties en pointillé du programme ci-dessous (**il ne vous est pas demandé de trouver la solution, uniquement de compléter le programme**) :

```
def algo():  
    A = 19700  
    B = 17700  
    n = 0  
    while ...:  
        A = ...  
        B = ...  
        n = ...  
    return n
```