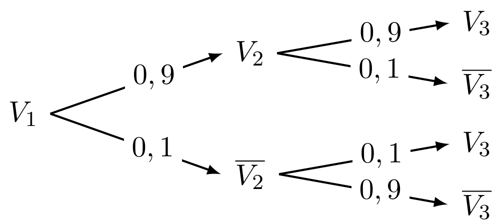
L'énoncé annonce des proportions, on va modéliser la situation de probabilité en assimilant les proportions à des probabilités.

Partie A

1. (a) D'après l'énoncé, on a donc : $P(V_1) = 1$ et, pour tout n naturel supérieur ou égal à 2 : $P_{V_{n-1}}(V_n) = 0,9$ et aussi $P_{\overline{V_{n-1}}}\left(\overline{V_n}\right) = 0,9$. (une transmission fidèle, c'est quand les machines $n-1$ et n détiennent la même valeur).

   On obtient l'arbre ci-contre :



   (b) Les évènements V_2 et $\overline{V_2}$ partitionnent l'univers, donc, d'après la loi des probabilités totales :
   $P(V_3) = P\big(V_3 \cap V_2\big) + P\left(V_3 \cap \overline{V_2}\right) = 0,9 \times 0,9 + 0,1 \times 0,1 = 0,81 + 0,01 = 0,82.$
   On arrive bien à $P(V_3) = 0,82$.

   (c) On demande de calculer : $P_{V_3}(V_2)$.
   D'après la définition, on a : $P_{V_3}(V_2) = \dfrac{P(V_3 \cap V_2)}{P(V_3)} = \dfrac{0,9 \times 0,9}{0,82} = \dfrac{81}{82} \approx 0,988.$
   À 10^{-3} près, la probabilité que la machine 2 détienne 1, sachant que la machine 3 détient 1 est d'environ 0,988.

2. (a) Soit n un entier naturel non nul.
   Les évènements V_n et $\overline{V_n}$ forment une partition de l'univers, donc, d'après la loi des probabilités totales :

$$\begin{aligned}
p_{n+1} &= P(V_{n+1}) \\
&= P\big(V_{n+1} \cap V_n\big) + P\big(V_{n+1} \cap \overline{V_n}\big) \\
&= P_{V_n}\left(V_{n+1}\right) \times P\big(V_n\big) + P_{\overline{V_n}}\big(V_{n+1}\big) \times P\big(\overline{V_n}\big) \\
&= 0,9 \times P\big(V_n\big) + 0,1 \times P\big(\overline{V_n}\big) \\
&= 0,9 \times p_n + 0,1 \times (1 - p_n) \\
&= 0,9p_n + 0,1 - 0,1p_n \\
&= 0,8p_n + 0,1
\end{aligned}$$

   On arrive donc bien à la relation de récurrence annoncée pour la suite (p_n).

   (b) Pour tout entier naturel non nul n, on pose :
   P_n est l'affirmation : « $p_n = 0,5 \times 0,8^{n-1} + 0,5$ ».
   Initialisation : on a, d'après l'énoncé : $p_1 = 1$,
   et, par ailleurs, on a : $0,5 \times 0,8^{1-1} + 0,5 = 0,5 + 0,5 = 1$.
   On constate donc que l'affirmation P_1 est vraie.
   Hérédité : soit n naturel non nul donné tel que l'affirmation P_n est vraie.
   D'après l'hypothèse de récurrence :

$$\begin{aligned} p_n = 0,5\times 0,8^{n-1}+0,5 &\implies 0,8p_n = 0,8\left(0,5\times 0,8^{n-1}+0,5\right)\\ &\implies 0,8p_n = 0,5\times 0,8^{n-1}\times 0,8+0,4\\ &\implies 0,8p_n = 0,5\times 0,8^{n}+0,4\\ &\implies 0,8p_n+0,1 = 0,5\times 0,8^{n}+0,4+0,1\\ &\implies 0,8p_n+0,1 = 0,5\times 0,8^{n}+0,5\\ &\implies p_{n+1} = 0,5\times 0,8^{n}+0,5 \quad \text{c'est } P_{n+1}\end{aligned}$$

Conclusion : on a prouvé que l'affirmation P_1 est vraie, et que, n étant un naturel non nul, la véracité de P_n entraîne celle de P_{n+1}. En vertu du principe de récurrence, on peut conclure que :

$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad u_n = 0,5\times 0,8^{n-1}+0,5.$

Autrement dit, on a établi par récurrence une expression explicite du terme général p_n.

c) Pour tout n entier naturel non nul, on a : $0,5\times 0,8^{n-1} = \dfrac{0,5}{0,8}\times 0,8^n = 0,625\times 0,8^n.$

Comme on a : $-1 < 0,8 < 1$ la propriété des limites de suites géométriques donne : $\lim\limits_{n\to+\infty} 0,8^n = 0$, puis $\lim\limits_{n\to+\infty} 0,625\times 0,8^n = 0.$

Puis, par limite de la somme, on a : $\lim\limits_{n\to+\infty} p_n = \lim\limits_{n\to+\infty} 0,625\times 0,8^n + 0,5 = 0,5.$

Ainsi, quand le nombre de machines tend vers plus l'infini, la probabilité que la dernière machine détienne la valeur 1 tend vers 0,5.

Partie B

1. L'instruction de la ligne 5 est une instruction conditionnelle : elle indique l'instruction de la ligne suivante ne s'exécutera qu'à la condition que le test `rand() < 0.1` renvoie la valeur `True`.

   Or, l'instruction `rand()` renvoie un nombre aléatoire dans $[0\ ;\ 1[$, donc la probabilité que ce nombre soit strictement inférieur à 0,1, c'est-à-dire dans l'intervalle $[0\ ;\ 0,1[$ est proportionnelle à l'amplitude de cet intervalle, la probabilité que cela arrive est donc de $\dfrac{0,1-0}{1-0} = 0,1.$

   La ligne 5 va rendre l'exécution de la ligne 6 aléatoire, avec une probabilité que la ligne 6 s'exécute égale à 0,1.

   C'est-à-dire que la ligne 6 doit avoir pour effet de "mal transmettre" la dernière donnée détenue, qui est stockée dans la variable `donnee`. Cette variable contient 0 ou 1. Si elle contenait 0, après la ligne 6 elle contiendra $1-0=1$, soit la valeur contraire. Si elle contenait 1, après la ligne 6, elle contiendra $1-1=0$, là encore, la valeur contraire.

   La ligne 6 a donc pour effet de modifier la donnée, pour simuler une transmission contraire.

2. Si l'appel `simulation(4)` renvoie `[1,1,1,1,1]`, cela signifie que l'on a eu 4 transmissions fidèles, entre 5 machines.

   La probabilité que cela arrive est donc :

   $0,9\times 0,9\times 0,9\times 0,9 = 0,9^4 = 0{,}656\,1 \approx 0,656.$

   De façon analogue l'appel `simulation(6)` renvoie une simulation de 6 transmissions entre 7 machines.

   Si l'appel renvoie `[1,0,1,0,0,1,1]`, cela signifie que les trois premières transmissions sont contraires (de 1 à 0, puis de 0 à 1, puis de 1 à 0), la quatrième transmission est fidèle (de 0 à 0), la cinquième est contraire (de 0 à 1) et la sixième et dernière est fidèle (de 1 à 1).

   La probabilité que cela arrive est donc :

   $0,1\times 0,1\times 0,1\times 0,9\times 0,1\times 0,9 = 0,9^2\times 0,1^4 = 8,1\times 10^{-5} \approx 0,000.$

   À 10^{-3} près, la probabilité d'obtenir `[1,1,1,1,1]` est d'environ 0,656, celle d'obtenir `[1,0,1,0,0,1,1]` est d'environ 0,000.