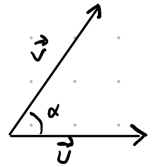
Chap 7
Produit Scalaire

DÉFINITION



$\vec{u}\cdot\vec{v} = \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\| \times \cos(\alpha)$

si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ colinéaire

Si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires
Alors $\alpha = 0°$ ou $\alpha = 180°$
Or $\cos(\alpha) = \pm 1$
Ainsi :
$\vec{u}\cdot\vec{v} = \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\|$ (si même sens)
$\vec{u}\cdot\vec{v} = -\|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\|$ (si sens contraire)

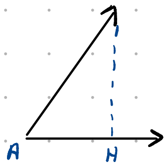
On remarque alors que :
$\vec{u}^{\,2} = \vec{u}\cdot\vec{u} = \|\vec{u}\|\times\|\vec{u}\| = \|\vec{u}\|^2$
On parle de carré scalaire

Si $\vec{u} \perp \vec{v}$

Si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont orthogonaux
Alors $\alpha = 90°$
Or $\cos(90°) = 0$
Donc $\vec{u}\cdot\vec{v} = 0$

Si on ne connait pas α

Si on ne connait pas α, on peut utiliser le
PROJETÉ ORTHOGONAL



$\vec{u}\cdot\vec{v} = \vec{u}\cdot\overrightarrow{AH}$

$\vec{u}$ et $\overrightarrow{AH}$ sont colinéaires :

PROPRIÉTÉ

Le produit scalaire est :
- symétrique : $\vec{u}\cdot\vec{v} = \vec{v}\cdot\vec{u}$
- distributif : $\vec{u}(\vec{v}+\vec{w}) = \vec{u}\cdot\vec{v} + \vec{u}\cdot\vec{w}$

On a :
- $(\vec{u}+\vec{v})^2 = \vec{u}^{\,2} + 2\vec{u}\cdot\vec{v} + \vec{v}^{\,2}$
- $(\vec{u}-\vec{v})^2 = \vec{u}^{\,2} - 2\vec{u}\cdot\vec{v} + \vec{v}^{\,2}$
- $(\vec{u}+\vec{v})\cdot(\vec{u}-\vec{v}) = \vec{u}^{\,2} - \vec{v}^{\,2}$

On en déduit que :
- $\|\vec{u}+\vec{v}\|^2 = \|\vec{u}\|^2 + 2\vec{u}\cdot\vec{v} + \|\vec{v}\|^2$
- $\|\vec{u}-\vec{v}\|^2 = \|\vec{u}\|^2 - 2\vec{u}\cdot\vec{v} - \|\vec{v}\|^2$
- $(\vec{u}+\vec{v})\cdot(\vec{u}-\vec{v}) = \|\vec{u}\|^2 - \|\vec{v}\|^2$

En isolant $\vec{u}\cdot\vec{v}$, on a

- $\vec{u}\cdot\vec{v} = \frac{1}{2}\left(\|\vec{u}+\vec{v}\|^2 - \|\vec{u}\|^2 - \|\vec{v}\|^2\right)$
- $\vec{u}\cdot\vec{v} = \frac{1}{2}\left(\|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2 - \|\vec{u}-\vec{v}\|^2\right)$
- $\vec{u}\cdot\vec{v} = \frac{1}{4}\left(\|\vec{u}+\vec{v}\|^2 - \|\vec{u}-\vec{v}\|^2\right)$

avec les coordonnées

Si $\vec{u}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix}$
Alors $\vec{u}\cdot\vec{v} = xx' + yy'$