NOM Prénom : 2023/2024

21.03.2024

Devoir Surveillé

EDS 1ère

Conditions d'évaluation

Calculatrice : autorisée. Durée : 1h40

Compétences évaluées :

- ☐ Utiliser le produit scalaire pour démontrer une orthogonalité.
- ☐ Appliquer le théorème d'Al-Kashi pour calculer une longueur
- ☐ Appliquer l'égalité $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = 0$
- ☐ Utiliser le produit scalaire pour résoudre un problème de géométrie.
- ☐ Déterminer le cosinus et sinus d'un nombre réel
- ☐ Connaitre, pour des valeurs remarquables de x, $\cos(x)$ et $\sin(x)$.
- ☐ Étudier la parité et la périodicité des fonctions.
- ☐ Compléter une représentation graphique par parité et périodicité.
- ☐ Déterminer si une suite est arithmétique ou géométrique et en donner ses caractéristiques (premier terme, raison, ...)
- ☐ Calculer la somme de termes consécutifs d'une suite arithmétique ou géométrique.
- ☐ Déterminer les variations d'une suite arithmétique ou géométrique.
- ☐ Modéliser un phénomène discret par une suite arithmétique (linéaire) ou géométrique (exponentiel)

Remarques importantes :

- Le sujet comporte 7 exercices.
  Vous pouvez les traiter dans l'ordre que vous souhaitez.
  Assurez-vous d'avoir le sujet complet avant de commencer.
- Le sujet est sur 40 points. Le barème est donné à titre indicatif.
- **Pensez à inscrire votre nom sur chaque page du sujet et à le rendre avec la copie.**
- Toutes réponses, même incomplètes, seront prises en compte dans la notation.
- Vous pouvez utiliser le dos du sujet comme brouillon

Exercice 1 — Quadrilatère *(5 points)*

On considère le plan muni d'un repère orthonormé, on considère les quatre points suivants :

$$A(-3;2) \quad ; \quad B(-2;-2) \quad ; \quad C(2;-1) \quad ; \quad D(1;3)$$

1. Justifier que le quadrilatère $ABCD$ est un parallélogramme.
2. Calculer $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD}$. Que peut-on conclure sur la nature du quadrilatère $ABCD$?

Exercice 2 Démonstration (9 points)

Soient A et B deux points du plan.
Soient I le milieu de $[AB]$ et M un point quelconque du plan.
On a pour objectif de déterminer l'ensemble des points M vérifiant $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = 0$.

1. Rappeler la formule du théorème de la médiane.
2. Démontrer alors que $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = 0 \Leftrightarrow MI = \frac{1}{2}AB$.
3. En déduire quel ensemble forme tous les points M du plan vérifiant $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = 0$.
4. **Question indépendante :** Dans chaque cas, déterminer l'ensemble des points M vérifiant la relation donnée.
   a) $AB = 6$ et $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = 16$
   b) $AB = 4$ et $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = -10$

Exercice 3 QCM (7 points)

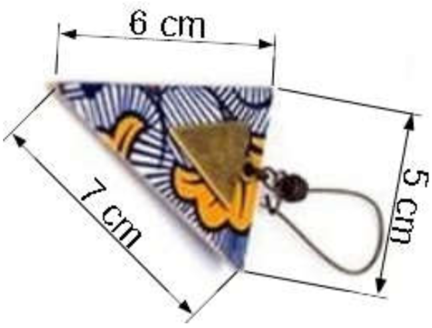
	a	b	c
1. Le point $I(1;0)$ est le point du cercle $\mathscr{C}$ associé au réel :	0	1	I n'appartient pas à $\mathscr{C}$
2. Le nombre réel $\frac{\pi}{4}$ est associé au même point du cercle $\mathscr{C}$ que le réel :	$-\frac{7\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{4}$	$\frac{9\pi}{4}$
3. $\cos 0$ est égal à :	0	1	π
4. $\sin 0$ est égal à :	0	1	π
5. $\sin\frac{\pi}{2}$ est égal à :	0	1	$\frac{\pi}{2}$
6. Si $\cos x > 0$ et $\sin x < 0$, alors x peut appartenir à l'intervalle :	$\left]-\frac{\pi}{2};0\right[$	$\left]\frac{\pi}{2};\pi\right[$	$\left]\frac{3\pi}{2};2\pi\right[$
7. Si $\cos x = \frac{1}{2}$ et $\sin x > 0$, alors :	$\sin x = \frac{1}{2}$	$\sin x = \frac{\sqrt{2}}{2}$	$\sin x = \frac{\sqrt{3}}{2}$
8. Si $\cos x = \frac{\sqrt{3}}{2}$ et $\sin x = \frac{1}{2}$, on peut avoir :	$x = \frac{\pi}{6}$	$x = \frac{13\pi}{6}$	$x = -\frac{\pi}{6}$
9. Le réel $\frac{3\pi}{4}$ est associé au point du cercle $\mathscr{C}$ de coordonnées :	$\left(-\frac{\sqrt{3}}{2};\frac{1}{2}\right)$	$\left(-\frac{\sqrt{2}}{2};\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$	$\left(-\frac{1}{2};\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$
10. $\cos\frac{4\pi}{3}$ est égal à :	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$-\cos\frac{\pi}{3}$

Exercice 4 Calcul d'un rang (2 points)

Soit la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ arithmétique de premier terme 2 et de raison $\frac{3}{4}$.
Déterminer le rang du terme ayant pour valeur $\frac{53}{4}$.

Exercice 5 Boucles d'oreilles *(6 points)*

Un artisan veut industrialiser sa fabrication de boucles d'oreille schématisés ci-dessous :

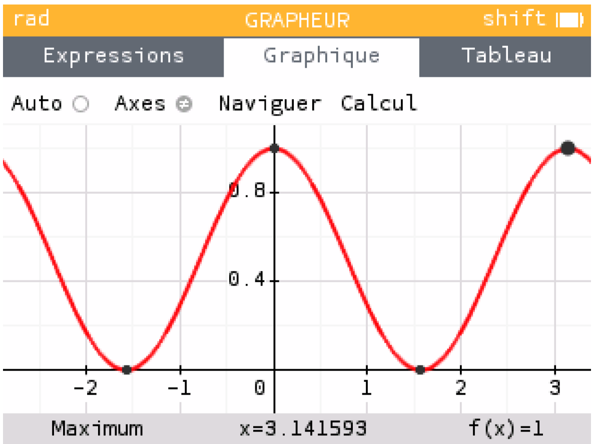


Pour ce faire, on doit aider le technicien de l'entreprise à déterminer les trois angles du triangle utilisé comme forme géométrique du bijoux.
Les mesures d'angles seront données en degré, avec une précision de 10^1.

Exercice 6 Déduction graphique *(5 points)*

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \cos^2(x)$.

1. On donne la représentation graphique de f ci-dessous :



   (a) Quel semble être la parité de f ? *(Aucune justification n'est attendue)*

   (b) Quel semble être la périodicité de f ? *(Aucune justification n'est attendue)*

2. Démontrer les deux conjectures émises à la question précédente.
3. Calculer $f'(x)$.

Exercice 7 **Forage** *(6 points)*

Le fonctionnement de certaines centrales géothermiques repose sur l'utilisation de la chaleur du sous-sol. Pour pouvoir exploiter cette chaleur naturelle, il est nécessaire de creuser plusieurs puits suffisamment profonds. Lors de la construction d'une telle centrale, on modélise le tarif pour le forage du premier puits par la suite (U_n) définie pour tout entier naturel n non nul, par :

$$U_n = 2000 \times 1,008^{n-1}$$

où u_n représente le coût en euros du forage de la n-ième dizaine de mètres.

On a ainsi $u_1 = 2000$ et $u_2 = 2016$, c'est-à-dire que le forage des dix premiers mètres coûte 2000 euros, et celui des dix mètres suivants coûte 2016 euros.

Dans tout l'exercice, arrondir les résultats obtenus au centième.

1. Calculer u_3. Interpréter dans le contexte.
2. Quelle est la nature de la suite ? Donner ses éléments caractéristiques.
3. Quel est le sens de variation de la suite (u_n) ?
4. Pour tout entier naturel n non nul, exprimer u_{n+1} en fonction de u_n.
5. En déduire le pourcentage d'augmentation du coût du forage de la $(n+1)$-ième dizaine de mètres par rapport à celui de la n-ième dizaine de mètres.
6. Quel sera le prix total de forage des 30 premiers mètres ?