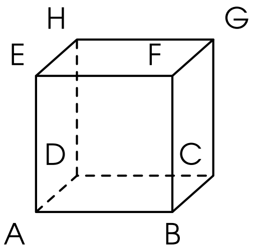
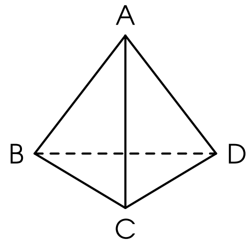
Lorsque cela est nécessaire, on se place dans un repère $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ de l'espace.

Lorsque l'exercice désigne le cube $ABCDEFGH$, il se réfère au cube représenté ci-contre.



Lorsque l'exercice désigne un tétraèdre $ABCD$, il se réfère au tétraèdre ci-contre.



Vecteurs de l'espace

Exercice 1

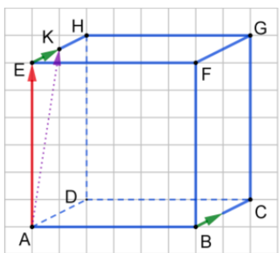
(a) $\overrightarrow{B...} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BG} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AH} = \overrightarrow{BH}$

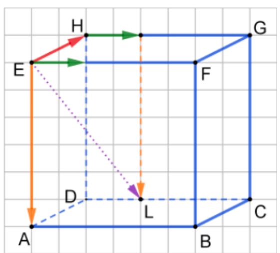
(b) $\overrightarrow{B...} = \overrightarrow{BE} + \overrightarrow{DC} + \overrightarrow{GD} = \overrightarrow{BE} + \overrightarrow{EF} + \overrightarrow{FA} = \overrightarrow{BA}$

(c) $\overrightarrow{C...} = \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{DG} = \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AF} = \overrightarrow{CF}$

(d) $\overrightarrow{A...} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{DE} + \overrightarrow{BD} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CF} + \overrightarrow{FH} = \overrightarrow{AH}$

Exercice 2





Exercice 3

(a) $4\overrightarrow{AB} + 3\overrightarrow{BC} = \vec{0} \Leftrightarrow \overrightarrow{AB} + 3\overrightarrow{AB} + 3\overrightarrow{BC} = \vec{0} \Leftrightarrow \overrightarrow{AB} + 3\overrightarrow{AC} = \vec{0} \Leftrightarrow \overrightarrow{AB = -3AC}$

(b) $2\overrightarrow{AB} - 3\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{BC} \Leftrightarrow 2\overrightarrow{AB} - 3\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AC} \Leftrightarrow 2\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{BA} = \overrightarrow{AC} + 3\overrightarrow{AC} \Leftrightarrow 3\overrightarrow{AB} = 4\overrightarrow{AC} \Leftrightarrow \overrightarrow{AB} = \frac{4}{3}\overrightarrow{AC}$

Exercice 4

(a) $\overrightarrow{AF} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AE}$

(b) $\overrightarrow{AH} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AE}$

(c) $\overrightarrow{AG} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AE}$

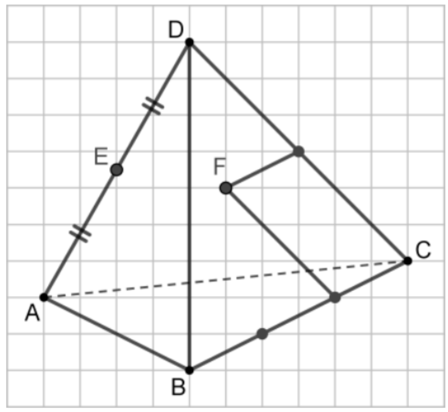
(d) $\overrightarrow{EB} = \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AE}$

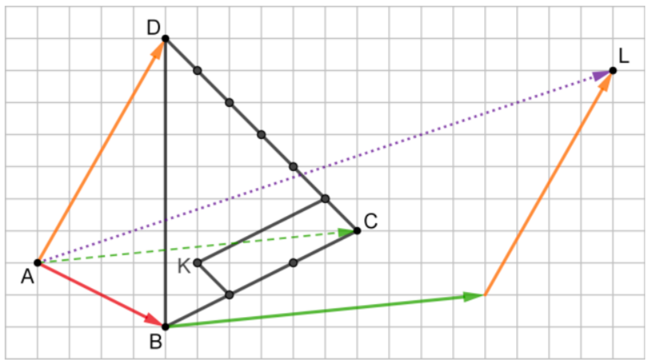
(e) $\overrightarrow{CF} = \overrightarrow{AE} - \overrightarrow{AD}$

(f) $\overrightarrow{BH} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AE} - \overrightarrow{AB}$

Exercice 5

1. Voici le tétraèdre :



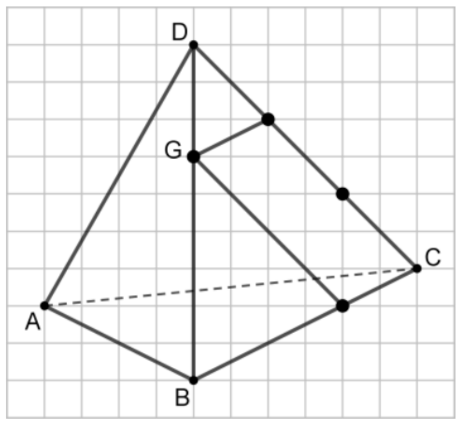


2.

3. Point G :

(a) $6\overrightarrow{CG} = 4\overrightarrow{CD} + 2\overrightarrow{CB}$ Donc $\overrightarrow{CG} = \frac{4}{6}\overrightarrow{CD} + \frac{2}{6}\overrightarrow{CB} = \frac{2}{3}\overrightarrow{CD} + \frac{1}{3}\overrightarrow{CB}$

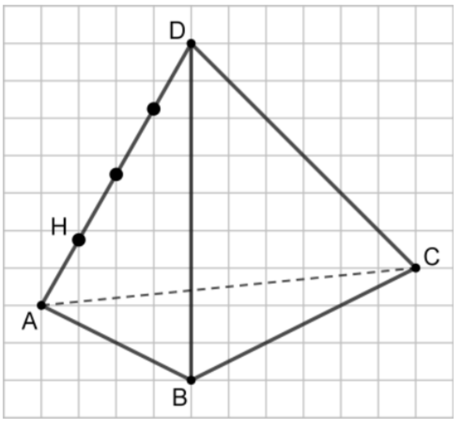
(b) On a :



4. Point H :

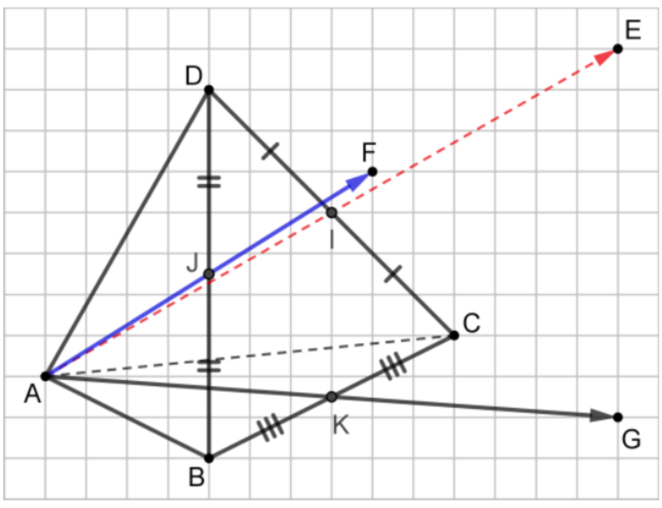
(a) $3\overrightarrow{HA} + \overrightarrow{HD} = \vec{0} \Leftrightarrow 3\overrightarrow{HA} + \overrightarrow{HA} + \overrightarrow{AD} = \vec{0} \Leftrightarrow 4\overrightarrow{HA} = -\overrightarrow{AD} \Leftrightarrow -4\overrightarrow{AH} = -\overrightarrow{AD} \Leftrightarrow \overrightarrow{AH} = \frac{1}{4}\overrightarrow{AD}$

(b) On a :



Exercice 6

1. On a :



2. Voir ci-dessus
3. (a) On a $BCEF$ parallélogramme si, et seulement si, $\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{FE}$. Or :

$$\begin{aligned}\overrightarrow{FE} &= \overrightarrow{FA}+\overrightarrow{AE}\\ &= 2\overrightarrow{JA}+2\overrightarrow{AI}\\ &= 2\overrightarrow{JI}\\ &= \overrightarrow{BC}\end{aligned}$$

   (b) $BCEF$ est un parallélogramme donc $[BE]$ et $[CF]$ ont même milieux. Et, par un raisonnement similaire, $DCGF$ est également un parallélogramme, donc $[CF]$ et $[DG]$ ont même milieux.
   D'ou le résultat attendu.

Exercice 7

1. $\overrightarrow{BK}=\frac{4}{7}\overrightarrow{BA}+\frac{2}{3}\overrightarrow{BC}$
2. $\overrightarrow{IJ}=\overrightarrow{IE}+\overrightarrow{EJ}=\frac{1}{2}\overrightarrow{HE}+\frac{3}{4}\overrightarrow{EA}=\frac{3}{4}\overrightarrow{EA}-\frac{1}{2}\overrightarrow{EH}$

Exercice 8

1. D'après la figure et les propriétés du parallélogramme ALMK : $\overrightarrow{AM}=\overrightarrow{AL}+\overrightarrow{LM}$
   Or $\overrightarrow{AL}=\overrightarrow{AI}+\overrightarrow{IL}=\frac{2}{7}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{3}\overrightarrow{BC}=\frac{2}{7}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{3}\overrightarrow{AD}$
   Et $\overrightarrow{LM}=\frac{2}{3}\overrightarrow{AE}$
   Donc $\overrightarrow{AM}=\frac{2}{7}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{3}\overrightarrow{AD}+\frac{2}{3}\overrightarrow{AE}$
2. $\overrightarrow{AO}=\overrightarrow{AE}+\overrightarrow{EO}=\overrightarrow{AE}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AE}+\frac{1}{2}(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC})=\overrightarrow{AE}+\frac{1}{2}(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD})=\overrightarrow{AE}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AD}$

Exercice 9

On a :

$$\begin{aligned}\overrightarrow{IJ} &= \overrightarrow{IA}+\overrightarrow{AJ}\\ &= -\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CJ}\\ &= \frac{1}{2}(2\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CD}-\overrightarrow{AB})\\ &= \frac{1}{2}(\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{BA})\\ &= \frac{1}{2}(\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{BC})\end{aligned}$$

Colinéarité et coplanarité

Exercice 10

1. **Faux.** Si $3\vec{u}+4\vec{v}-2\vec{w}=\vec{0}$, alors il existe une combinaison linéaire entre les trois vecteurs, ce qui signifie qu'ils sont coplanaires.
2. **Vrai.** Puisque $\overrightarrow{AM}=3\overrightarrow{AB}+5\overrightarrow{AC}$ et que A, B, C ne sont pas alignés, le point M appartient au plan (ABC) car $\overrightarrow{AM}$ s'exprime comme combinaison linéaire de deux vecteurs non colinéaires du plan.

Exercice 11

On a $\vec{u}=9\overrightarrow{AB}-6\overrightarrow{AC}+3\overrightarrow{AD}$ et $\vec{v}=3\overrightarrow{AB}-2\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AD}$
On remarque que $\vec{u}=3(3\overrightarrow{AB}-2\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AD})$
En fait, $\vec{u}=3\vec{v}$, donc les vecteurs sont colinéaires.

Exercice 12

1. **Oui**, $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{BC}$ sont coplanaires car $\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB}$.
2. (a) Un représentant de $\overrightarrow{AD}$ dans le plan (BCG) est $\overrightarrow{BC}$ car $\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{BC}$ et $\overrightarrow{BC}$ fait partie du plan (BCG).
   (b) **Oui**, $\overrightarrow{CF}$ et $\overrightarrow{BG}$ sont dans le plan (BGF) et $\overrightarrow{AD}$ admet un représentant dans ce plan également.
3. **Non**, $\overrightarrow{AE}$, $\overrightarrow{BC}$ et $\overrightarrow{AB}$ ne sont pas coplanaires car ils ne peuvent pas s'exprimer dans un même plan de l'espace. ($\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{BC}$ appartiennent au plan (ABC), mais E non, donc $\overrightarrow{AE}$ non plus).

Exercice 13

1. De la relation $-3\overrightarrow{AD}+5\overrightarrow{BD}+2\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{0}$, on déduit qu'il existe une combinaison linéaire non triviale des trois vecteurs égale au vecteur nul, donc ils sont coplanaires.
2. (a) $\overrightarrow{BD}=\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AD}-\overrightarrow{AB}$
   (b) $\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AD}-\overrightarrow{AC}$
   (c) En substituant dans la relation initiale : $-3\overrightarrow{AD}+5(\overrightarrow{AD}-\overrightarrow{AB})+2(\overrightarrow{AD}-\overrightarrow{AC})=\overrightarrow{0}$ $-3\overrightarrow{AD}+5\overrightarrow{AD}-5\overrightarrow{AB}+2\overrightarrow{AD}-2\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{0}$ $4\overrightarrow{AD}-5\overrightarrow{AB}-2\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{0}$ Donc $\overrightarrow{AD}=\frac{5}{4}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$

Exercice 14

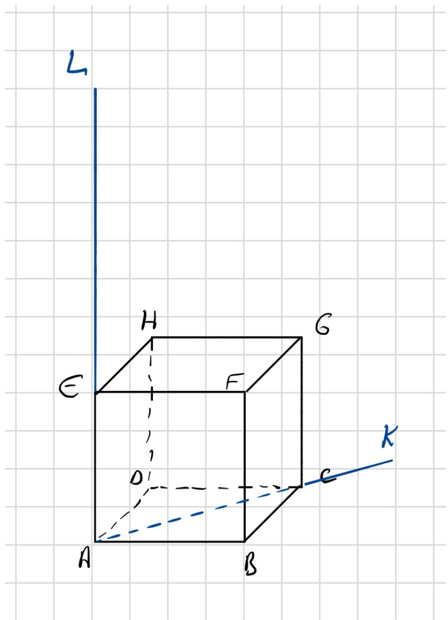
1. On a :

$$\begin{aligned}3\overrightarrow{AK} &= 3(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BK})\\ &= 3\overrightarrow{AB}+3\overrightarrow{BK}\\ &= 3\overrightarrow{AB}+3(\frac{1}{3}\overrightarrow{BD}+\frac{1}{3}\overrightarrow{BE})\\ &= 3\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BD}+\overrightarrow{BE}\\ &= 3\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AE}\\ &= \overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AE}\end{aligned}$$

2. (a) Dans un parallélépipède, $\overrightarrow{AG}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CG}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AE}$
   (b) D'après la question précédente, $\overrightarrow{AG}=3\overrightarrow{AK}$ Cela signifie que $\overrightarrow{AK}$ et $\overrightarrow{AG}$ sont colinéaires, donc A, K et G sont alignés.

Exercice 15

1. On a :



2. (a) Dans un cube, $\overrightarrow{AG}=\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AE}$
   (b) $\overrightarrow{KG}=\overrightarrow{KA}+\overrightarrow{AG}=-\frac{3}{2}\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AE}=-\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AE}$
3. (a) $\overrightarrow{KL}=\overrightarrow{AL}-\overrightarrow{AK}=3\overrightarrow{AE}-\frac{3}{2}\overrightarrow{AC}=-\frac{3}{2}\overrightarrow{AC}+3\overrightarrow{AE}$
   (b) On remarque que $\overrightarrow{KL}=3(-\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AE})=3\overrightarrow{KG}$ Donc $\overrightarrow{KL}$ et $\overrightarrow{KG}$ sont colinéaires, ce qui prouve que K, G et L sont alignés.

Exercice 16

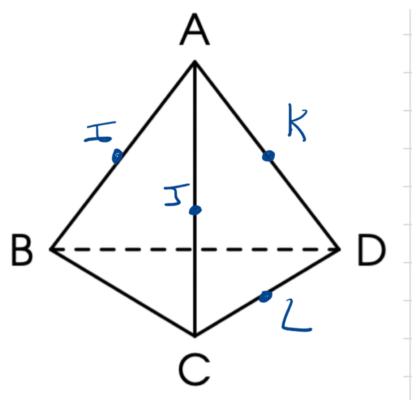
1. $\overrightarrow{EF}=\overrightarrow{EA}+\overrightarrow{AF}=\overrightarrow{AF}-\overrightarrow{AE}=(\frac{1}{4}\overrightarrow{AC}+\frac{1}{4}\overrightarrow{AD})-\frac{1}{4}\overrightarrow{AB}=-\frac{1}{4}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{4}\overrightarrow{AC}+\frac{1}{4}\overrightarrow{AD}$
2. $\overrightarrow{EG}=\overrightarrow{EA}+\overrightarrow{AG}=\overrightarrow{AG}-\overrightarrow{AE}=(-\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}+\frac{3}{4}\overrightarrow{AC}+\frac{3}{4}\overrightarrow{AD})-\frac{1}{4}\overrightarrow{AB}=-\frac{3}{4}\overrightarrow{AB}+\frac{3}{4}\overrightarrow{AC}+\frac{3}{4}\overrightarrow{AD}$
3. Pour montrer que E, F et G sont alignés : On remarque que $\overrightarrow{EG}=3\overrightarrow{EF}$ car : $\overrightarrow{EG}=-\frac{3}{4}\overrightarrow{AB}+\frac{3}{4}\overrightarrow{AC}+\frac{3}{4}\overrightarrow{AD}=3(-\frac{1}{4}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{4}\overrightarrow{AC}+\frac{1}{4}\overrightarrow{AD})=3\overrightarrow{EF}$

   Donc $\overrightarrow{EG}$ et $\overrightarrow{EF}$ sont colinéaires, ce qui prouve que E, F et G sont alignés.

Exercice 17 Logique

1. Cette proposition est **vraie**. Si les points A, B, C et D sont alignés, alors ils appartiennent à la même droite, et les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ ont la même direction (ou des directions opposées), donc ils sont colinéaires.
2. La réciproque est **fausse**. Si $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont colinéaires, cela signifie seulement que les droites (AB) et (CD) sont parallèles (ou confondues), mais les quatre points ne sont pas nécessairement alignés. Contre-exemple : dans un carré ABCD, $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{DC}$ sont colinéaires, mais A, B, C, D ne sont pas alignés.

Exercice 18



1. $\overrightarrow{IJ}=\overrightarrow{IA}-\overrightarrow{AJ}$

   Comme I est le milieu de $[AB]$ et J le milieu de $[AC]$:

   •$\overrightarrow{AI}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$ et

   •$\overrightarrow{AJ}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$

   Donc $\overrightarrow{IJ}=\overrightarrow{IA}+\overrightarrow{AJ}=\overrightarrow{AJ}-\overrightarrow{AI}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}-\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$
2. Comme K est le milieu de $[AD]$ et L le milieu de $[CD]$:

   •$\overrightarrow{AK}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AD}$ et

•$\overrightarrow{CL} = \frac{1}{2}\overrightarrow{CD}$

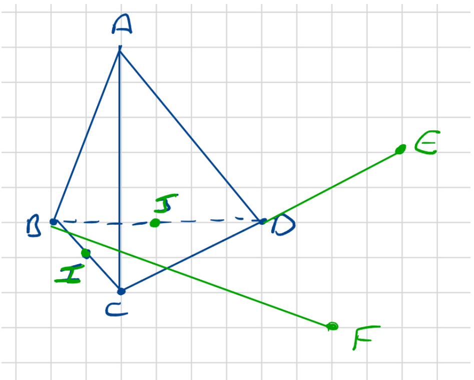
Donc : $\overrightarrow{KL} = \overrightarrow{KD} + \overrightarrow{DL} = \dfrac{1}{2}\overrightarrow{AD} + \dfrac{1}{2}\overrightarrow{DC} = \dfrac{1}{2}\overrightarrow{AC}$

3. On a $\overrightarrow{IJ} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{KL} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$

   On peut écrire : $\overrightarrow{IJ} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{KL}$

   Cette relation linéaire montre que les trois vecteurs sont coplanaires.

Exercice 19



1. Comme I est le milieu de $[BC]$, $\overrightarrow{BI} = \overrightarrow{IC} = \frac{1}{2}\overrightarrow{BC}$.

   Ainsi, $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AI} + \overrightarrow{IB} + \overrightarrow{AI} + \overrightarrow{IC} = 2\overrightarrow{AI} - \frac{1}{2}\overrightarrow{BC} + \frac{1}{2}\overrightarrow{BC} = 2\overrightarrow{AI}$.

2. (a) D'après la question précédente, $2\overrightarrow{AI} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$.

   Donc $\overrightarrow{AF} - 2\overrightarrow{AI} = \overrightarrow{AF} - \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AF} + \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{CA} = \overrightarrow{BF} + \overrightarrow{CA} = \overrightarrow{AE} + \overrightarrow{CA} = \overrightarrow{CE} = 2\overrightarrow{CD}$

   (b) Comme J est le milieu de $[BD]$ et $\overrightarrow{CD} = 2\overrightarrow{IJ}$ (propriété des milieux) : $\overrightarrow{AF} - 2\overrightarrow{AI} = 2\overrightarrow{CD} = 4\overrightarrow{IJ}$

   (c) De $\overrightarrow{AF} - 2\overrightarrow{AI} = 4\overrightarrow{IJ}$, on déduit : $\overrightarrow{AF} = 2\overrightarrow{AI} + 4\overrightarrow{IJ}$

   Cela montre que $\overrightarrow{AI}$, $\overrightarrow{AJ}$ et $\overrightarrow{AF}$ sont coplanaires.

Exercice 20

Pour montrer que $\overrightarrow{AE}$, $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont coplanaires :

$\overrightarrow{AE} = \overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{CD} - \frac{1}{2}\overrightarrow{BD}$

$\overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{BD} = \overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AB}$

Donc : $\overrightarrow{AE} = \overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}(\overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AC}) - \frac{1}{2}(\overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AB})$
$= \overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AD} - \frac{1}{2}\overrightarrow{AC} - \frac{1}{2}\overrightarrow{AD} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} = \frac{3}{2}\overrightarrow{AB} - \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$

Cette expression montre que $\overrightarrow{AE}$ s'écrit comme combinaison linéaire de $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$, donc les trois vecteurs sont coplanaires.

Exercice 21

1. Expression des vecteurs :

   •$\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AN} = \overrightarrow{AN} - \overrightarrow{AM} = 3\overrightarrow{AC} - 2\overrightarrow{AB} = -2\overrightarrow{AB} + 3\overrightarrow{AC}$

   •$\overrightarrow{MP} = \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AP} = \overrightarrow{AP} - \overrightarrow{AM} = \frac{4}{3}\overrightarrow{AD} - 2\overrightarrow{AB} = -2\overrightarrow{AB} + \frac{4}{3}\overrightarrow{AD}$

   •$\overrightarrow{MQ} = \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AQ} = \overrightarrow{AQ} - \overrightarrow{AM} = (-4\overrightarrow{AB} + 18\overrightarrow{AC} - 4\overrightarrow{AD}) - 2\overrightarrow{AB} = -6\overrightarrow{AB} + 18\overrightarrow{AC} - 4\overrightarrow{AD}$

2. (a) $6\overrightarrow{MN} - 3\overrightarrow{MP} = 6(-2\overrightarrow{AB} + 3\overrightarrow{AC}) - 3(-2\overrightarrow{AB} + \frac{4}{3}\overrightarrow{AD}) = -12\overrightarrow{AB} + 18\overrightarrow{AC} + 6\overrightarrow{AB} - 4\overrightarrow{AD} = -6\overrightarrow{AB} + 18\overrightarrow{AC} - 4\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{MQ}$

   (b) Puisque $6\overrightarrow{MN} - 3\overrightarrow{MP} = \overrightarrow{MQ}$, les vecteurs $\overrightarrow{MN}$, $\overrightarrow{MP}$ et $\overrightarrow{MQ}$ sont coplanaires (il existe une relation linéaire non triviale entre eux).

Exercice 22 Logique

1. Cette proposition est **vraie**. Si les vecteurs $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{AD}$ ne sont pas coplanaires, alors ils forment une base de l'espace, ce qui implique qu'aucun d'eux ne peut s'écrire comme combinaison des deux autres. En particulier, ils ne peuvent pas être colinéaires deux à deux.

2. La réciproque est **fausse** : « Si les vecteurs ne sont pas colinéaires, alors ils ne sont pas coplanaires ». Des vecteurs peuvent ne pas être colinéaires deux à deux tout en étant coplanaires. Par exemple, dans un plan, trois vecteurs non colinéaires deux à deux sont nécessairement coplanaires.

Exercice 23

1. Dans un cube :

   •$\overrightarrow{EG} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}$

   •$\overrightarrow{EB} = \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AE}$

   •$\overrightarrow{EK} = \overrightarrow{EA} + \overrightarrow{AK} = \overrightarrow{AK} - \overrightarrow{AE} = 6\overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{AD} - 3\overrightarrow{AE} - \overrightarrow{AE} = 6\overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{AD} - 4\overrightarrow{AE}$

2. Pour trouver x et y tels que $\overrightarrow{EK} = x\overrightarrow{EG} + y\overrightarrow{EB}$:
   $\overrightarrow{EK} = 6\overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{AD} - 4\overrightarrow{AE} = x(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}) + y(\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AE}) = (x+y)\overrightarrow{AB} + x\overrightarrow{AD} - y\overrightarrow{AE}$

   Par identification : $x + y = 6$, $x = 2$, $-y = -4$
   Donc $x = 2$ et $y = 4$.

3. Les vecteurs $\overrightarrow{EK}$, $\overrightarrow{EG}$ et $\overrightarrow{EB}$ sont coplanaires puisque $\overrightarrow{EK} = 2\overrightarrow{EG} + 4\overrightarrow{EB}$.

4. Les points B, E, G, K sont coplanaires (ils appartiennent au même plan).