DS4 - EDS Term

M

⇒ Exercice n°1

1°/ $\lim_{x \to 2^-} f(x) = 1$ 0.25

$\lim_{x \to 2^+} f(x) = 2^2 - 4\times 2 + 6 = 2$ 0.25

1.5

Ainsi $\lim_{x \to 2^-} f(x) \neq \lim_{x \to 2^+} f(x)$ 0.5
Donc f n'est pas continue en 4
Donc sur $\mathbb{R}$ non plus 0.5

2°/ * Variations:

$\forall x \in \mathbb{R}, \ f'(x) = -0,3x^2$ 0.25

0.5

Ainsi $f'(x)$ est toujours négative donc
f est toujours décroissante 0.25

* TVI

On a . $f(-10) = 102 < 0$ 0.25
. $f(10) = -98 > 0$ 0.25
. f est continue 0.25 et strictement 0.25
décroissante sur $[-10; 10]$

2.5

1.5

Ainsi, par le TVI ⊕ 0.25, il existe une
unique 0.25 solution $\alpha \in [-10; 10]$ tq $f(\alpha) = 0$

* Encadrement

$2,71 < \alpha <$ 0.5 $2,72$

0.5

3°/ ⓐ 3 solutions 0.5

1 ⓑ 1 solution 0.25

ⓒ 6 solutions 0.25

4°/ ⓐ $f(x) = \ln(1+x)$

$f'(x) = \frac{u'}{u} = \frac{1}{1+x}$ 0.5

1.5 Ainsi $T_0 : y = f'(0)(x-0) + f(0)$ 0.25

$\Leftrightarrow y = \frac{1}{1+0}(x-0) + \ln(1+0)$ 0.25 0.25

$\Leftrightarrow y = x$ 0.25

ⓑ $f''(x) = \frac{-u'}{u^2} = \frac{-1}{(1+x)^2}$ 0.5

1.5 Ainsi $\forall x \in]-1;+\infty[,\ f''(x) < 0$ 0.5

Donc f est concave sur cet intervalle. 0.5

ⓒ Comme f est concave, C_f est au dessous de ces tangentes. 0.5

1 Donc $f(x) \leq x$

$\Leftrightarrow \ln(1+x) \leq x$ 0.5

5°/ ⓐ $\vec{AB}\begin{pmatrix} -4+5 \\ -10+4 \\ 12-9 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \vec{AB}\begin{pmatrix} 1 \\ -6 \\ 3 \end{pmatrix}$ 0.25

$\vec{AC}\begin{pmatrix} -3+5 \\ -2+4 \\ 10-9 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \vec{AC}\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ 0.25

or $\vec{AB}$ et $\vec{AC}$ ne sont pas colinéaires 0.25

0.75 Donc ils forment une base d'un plan

ⓑ $\vec{DE}\begin{pmatrix}-5-7\\6-1\\9+5\end{pmatrix} \Leftrightarrow \vec{DE}\begin{pmatrix}-12\\5\\14\end{pmatrix}$

et $\vec{DE}\cdot\vec{AB} = 1\times(-12)+(-6)\times 5+3\times 14$

$= 0$ 0.25

0.5

Donc $(DE)\perp(AB)$ 0.25

ⓒ De plus

$\vec{DE}\cdot\vec{AC} = 2\times(-12)+2\times 5+1\times 14$

$= 0$ 0.25

0.75

Donc $(DE)\perp(AB)$ et $(DE)\perp(AC)$ 0.25

Donc $(DE)\perp(ABC)$ 0.25

⇒ Exercice n°2

1°/ 0 . f semble être croissante sur $]2;+\infty[$

0.25 . $\lim_{x\to 2^+} f(x) = -\infty$ et $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$

0.25 . asymptote verticale d'éq $x = 2$

asymptote oblique

0.5

2°/ $f(x) = 0$

$\Leftrightarrow x\ln(x-2) = 0$

$\Leftrightarrow \ln(x-2) = 0$ 0.25 (car $x \neq 0$)

$\Leftrightarrow e^{\ln(x-2)} = e^{0}$ 0.25

$\Leftrightarrow x - 2 = 1$

$\Leftrightarrow x = 3$ 0.25

1

$S = \{3\}$ 0.25

3°/ $\lim_{x\to 2^+} x = 2$

$\left.\begin{array}{l}\lim_{x\to 2^+} x-2 = 0^+ \\ \lim_{X\to 0^+} \ln(X) = -\infty\end{array}\right\}$ Par composition 0.25 $\lim_{x\to 2^+} \ln(2-x) = -\infty$ 0.25

Par prod, $\lim_{x\to 2^+} f(x) = -\infty$ 0.25

1

⇝ conjecture confirmée ! 0.25

4°/ $\forall x \in]2;+\infty[$

$f'(x) = u'(x)v(x) + u(x)v'(x)$ 0.25

$= \ln(x-2) + x \times \frac{1}{x-2}$

$= \ln(x-2) + \frac{x}{x-2}$ 0.25

w/ $u(x) = x$

$u'(x) = 1$

$v(x) = \ln(x-2)$

$v'(x) = \frac{1}{x-2}$ 0.5

1

5°/ a) $\forall x \in]2;+\infty[$

$g'(x) = f''(x)$ 0.25

$= \frac{1}{x-2}$ 0.25 $+ \frac{u'v - uv'}{v^2}$ 0.25

w/ $u(x) = x$

$u'(x) = 1$

$v(x) = x-2$

$v'(x) = 1$

1.5

$$= \frac{1}{x-2} + \frac{(x-2)-x}{(x-2)^2}$$ 0.5

$$= \frac{x-2}{(x-2)^2} + \frac{-2}{(x-2)^2}$$

$$= \frac{x-4}{(x-2)^2}$$ 0.25

(b) • $g'(x) > 0$

$\Leftrightarrow \frac{x-4}{(x-2)^2} > 0$

$\Leftrightarrow x-4 > 0$ (car $(x-2)^2 > 0$) -0.25

$\Leftrightarrow x > 4$ 0.5

• Ainsi, on a :

1.5

x	2		4		$+\infty$
$g'(x)$	$\|\|$	$-$	0	$+$	
g	$\|\|$ 0.25	$\searrow$	$\ln(2)+2$	$\nearrow$ 0.5	

$g(4) = \ln(4-2) + \frac{4}{4-2}$

$= \ln(2) + \frac{4}{2}$

$= \ln(2) + 2$ 0.25

(c) D'après la question précédente,

$\forall x \in]2;+\infty[, \; g(x) \geq \ln(2)+2$

Or $\ln(2)+2 \approx 2,69 > 0$ 0.25

0.5

Donc $\forall x \in]2;+\infty[, \; g(x) > 0$ 0.25

(d) Comme $g(x) = f'(x)$ 0.25 et $g(x) > 0$ 0.25 $\forall x \in]2;+\infty[$

0.5

On en déduit que $\forall x \in]2;+\infty[, \; f'(x) > 0$

Donc f est $\nearrow$ sur $]2;+\infty[$

6°/ $\forall x \in]2;+\infty[, \; f''(x) = g'(x)$

Ainsi $f''(x) < 0$ sur $]2;4[$ 0.25

$f''(x) = 0$ pour $x = 4$ 0.25

$f''(x) > 0$ sur $]4;+\infty[$ 0.25

1.5

Donc f est. concave sur $]2;4[$ 0.25

. convexe sur $]4;+\infty[$ 0.25

. admet un point d'inflexion 0.25

en $x=2$