

TD - Chapitre 6 - EDS Maths - 1ère

C.1

- 1 La fonction f admet pour fonction dérivée :

$$f'(x) = 5 \times 2x + 2 \times 1 + 0$$

$$= 10x + 2$$
- 2 La fonction g admet pour fonction dérivée :

$$g'(x) = 3 \times 4x^3 - 5 \times 1 + 0$$

$$= 12x^3 - 5$$
- 3 La fonction h admet pour fonction dérivée :

$$h'(x) = 0 - 3 \times 2x$$

$$= -6x$$
- 4 La fonction j admet pour fonction dérivée :

$$j'(x) = 3 \times 2x - 1 + 0$$

$$= 6x - 1$$

C.2

- 1 La fonction f est une fonction polynôme qui admet pour dérivée :

$$f'(x) = (5 \cdot x^4) + 3 \cdot (2 \cdot x) - 1 + 0$$

$$= 5 \cdot x^4 + 6 \cdot x - 1$$
- 2 La fonction f est une fonction polynomiale qui admet pour dérivée :

$$f'(x) = 2 \cdot (7 \cdot x^6) - (2 \cdot x) - 2 + 0$$

$$= 14 \cdot x^6 - 2 \cdot x - 2$$

C.3

La dérivée f' de la fonction f a pour expression :

$$f'(x) = \frac{5}{3} \cdot (3 \cdot x^2) - \frac{2}{3} \cdot (2 \cdot x) + 3 \times 1 = 5 \cdot x^2 - \frac{4}{3} \cdot x + 3$$

C.4

- 1 La dérivée de la fonction f admet pour expression :

$$f'(x) = -3 + 0$$
- 2 La dérivée de la fonction g admet pour expression :

$$g'(x) = 4 \times (2x) + 0 = 8x$$
- 3 La dérivée de la fonction h a pour expression :

$$h(x) = 2 \times (2 \cdot x) + 3 = 4 \cdot x + 3$$
- 4 La dérivée de la fonction j admet pour expression :

$$j'(x) = 5 \times (3 \cdot x^2) - 2 \times (2 \cdot x) = 15 \cdot x^2 - 4 \cdot x$$

C.5

- 1 La fonction dérivée de la fonction h est :

$$h'(x) = 2 \times 2x = 4x$$

On en déduit la valeur du nombre dérivé de la fonction h en 1 :

$$h'(1) = 4 \times 1$$
- 2 La fonction dérivée de la fonction j est :

$$j'(x) = 5 - 3 \times 2x = -6x + 5$$

On en déduit la valeur du nombre dérivé de la fonction j en 1 :

$$j'(1) = -6 \times 1 + 5$$
- 3 La dérivée de la fonction k admet pour expression :

$$k'(x) = -2 \times (2 \cdot x) + 2 = -4 \cdot x + 2$$
- 4 La fonction k admet pour expression :

$$k'(x) = 3 \cdot (2x) - 2 = 6x - 2$$

C.6

- 1 On a les transformations algébriques suivantes :

$$f(x) = (3 \cdot x + 11)(4 - x) = 12x - 3 \cdot x^2 + 44 - 11x$$

$$= -3 \cdot x^2 + x + 44$$

Cette expression de la fonction sous la forme d'une somme permet d'obtenir facilement l'expression de sa fonction dérivée :

Ainsi, la dérivée de la fonction f est :

$$f'(x) = -3 \times 2 \cdot x + 1 = -6 \cdot x + 1$$

- 2 On a le développement suivant :

$$g(x) = (x + 1)(2 \cdot x - 4) = 2x^2 - 4 \cdot x + 2 \cdot x - 4$$

$$= 2x^2 - 2 \cdot x - 4$$

L'expression de la fonction g sous la forme d'une expression permet d'obtenir facilement l'expression de sa dérivée :

$$g'(x) = 4 \cdot x - 2$$

C.7

- 1 a La fonction dérivée f' de la fonction f admet pour expression :

$$f'(x) = \frac{1}{2} \cdot (3 \cdot x^2) - \frac{3}{2} \cdot (2 \cdot x) + 1 = \frac{3}{2} \cdot x^2 - 3 \cdot x + 1$$
- b On en déduit le nombre dérivé en 2 de la fonction f :

$$f'(2) = \frac{3}{2} \times 2^2 - 3 \times 2 + 1 = 6 - 6 + 1 = 1$$
- 2 a Le point de \mathcal{C}_f ayant pour abscisse 2 a pour coordonnées $(2; f(2))$.

Déterminons l'image du nombre 2 par la fonction f :

$$f(2) = \frac{1}{2} \times 2^3 - \frac{3}{2} \times 2^2 + 2 + 1 = 4 - 6 + 2 + 1 = 1$$

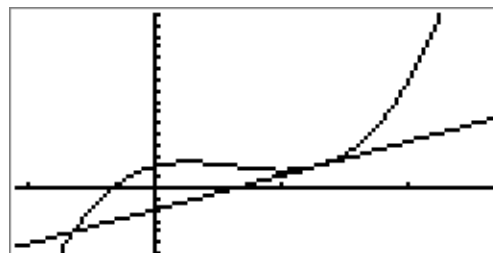
Ainsi, le point A a pour coordonnées $A(2; 1)$.
- b La formule donnant l'équation réduite d'une tangente permet d'obtenir l'équation réduite de la tangente (T) :

$$y = f'(2) \cdot (x - 2) + f(2)$$

$$y = 1 \cdot (x - 2) + 1$$

$$y = x - 2 + 1$$

$$y = x - 1$$
- 3 Voici la représentation des deux courbes de ces fonctions à l'aide d'une calculatrice :



C.8

- 1 a La fonction f' admet pour expression :

$$f'(x) = -\frac{2}{3} \cdot (3 \cdot x^2) - 3 \cdot (2 \cdot x) + 1 = -2 \cdot x^2 - 6 \cdot x + 1$$
- b Le nombre dérivé de la fonction f en -3 a pour valeur :

$$f'(-3) = -2 \cdot (-3)^2 - 6 \cdot (-3) + 1 = -18 + 18 + 1 = 1$$
- 2 a La courbe \mathcal{C}_f admet un seul point ayant -3 pour abscisse. celui-ci a pour coordonnées : $(-3; f(-3))$

Pour donner ses coordonnées, déterminons l'image du nombre -3 par la fonction f :

$$f(-3) = -\frac{2}{3} \cdot (-3)^3 - 3 \cdot (-3)^2 + (-3) + 10$$

$$= 18 - 27 - 3 + 10 = -2$$

Le point A a pour coordonnées : $A(-3; -2)$

- b) D'après la formule donnant l'équation réduite de la tangente à une courbe, on a l'équation réduite de la tangente (T) au point d'abscisse -3 :

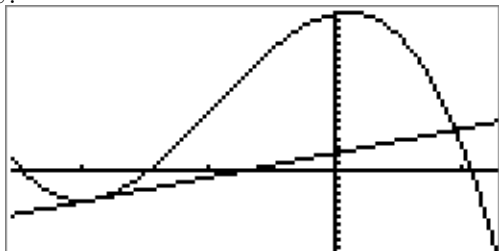
$$y = f'(-3) \cdot [x - (-3)] + f(-3)$$

$$y = 1 \cdot (x + 3) + (-2)$$

$$y = x + 3 - 2$$

$$y = x + 1$$

- 3) Voici la représentation obtenue à l'aide d'une calculatrice :



C.9

- 1) La fonction f a pour expression :

$$f(x) = 3 \times x^2$$

Ainsi, la fonction f' admet pour expression :

$$f'(x) = 3 \times (2x) = 6x$$

- 2) La fonction g a pour expression :

$$g(x) = \frac{1}{12}x^6 = \frac{1}{12} \times x^6$$

Ainsi, la fonction g' admet pour expression :

$$g'(x) = \frac{1}{12} \times (6 \cdot x^5) = \frac{1}{2} \cdot x^5$$

- 3) La fonction h a pour expression :

$$h(x) = 4\sqrt{x} = 4 \times \sqrt{x}$$

Ainsi, la fonction h' admet pour expression :

$$h'(x) = 4 \times \frac{1}{2\sqrt{x}} = \frac{2}{\sqrt{x}}$$

- 4) La fonction j a pour expression :

$$j(x) = \frac{\sqrt{x}}{2} = \frac{1}{2} \times \sqrt{x}$$

Ainsi, la fonction j' admet pour expression :

$$j'(x) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2\sqrt{x}} = \frac{1}{4\sqrt{x}}$$

- 5) La fonction k a pour expression :

$$k(x) = \frac{1}{2x} = \frac{1}{2} \times \frac{1}{x}$$

Ainsi, la fonction k' admet pour expression :

$$k'(x) = \frac{1}{2} \times \left(-\frac{1}{x^2}\right) = -\frac{1}{2x^2}$$

- 6) La fonction ℓ a pour expression :

$$\ell(x) = -\frac{2}{x} = -2 \times \frac{1}{x}$$

Ainsi, la fonction ℓ' admet pour expression :

$$\ell'(x) = -2 \times \left(-\frac{1}{x^2}\right) = \frac{2}{x^2}$$

C.10

- 1) La fonction f' dérivée de la fonction f admet pour expression :

$$f'(x) = \frac{1}{x} - x^2 = \left(-\frac{1}{x^2}\right) - 2 \cdot x = \frac{-1}{x^2} - \frac{(2 \cdot x) \cdot x^2}{x^2} = \frac{-1 - 2 \cdot x^3}{x^2}$$

- 2) La fonction f' dérivée de la fonction f admet pour expression :

$$\begin{aligned} f'(x) &= 1 + 2 \cdot x + \left(-\frac{1}{x^2}\right) = \frac{x^2}{x^2} + \frac{(2 \cdot x) \cdot x^2}{x^2} - \frac{1}{x^2} \\ &= \frac{x^2 + 2 \cdot x^3 - 1}{x^2} = \frac{2 \cdot x^3 + x^2 - 1}{x^2} \end{aligned}$$

- 3) La fonction f' dérivée de la fonction f admet pour expression :

$$f'(x) = 2 \cdot x + \frac{1}{2 \cdot \sqrt{x}} = \frac{(2 \cdot x) \cdot (2 \cdot \sqrt{x})}{2 \cdot \sqrt{x}} + \frac{1}{2 \cdot \sqrt{x}} = \frac{4 \cdot x \cdot \sqrt{x} + 1}{2 \cdot \sqrt{x}}$$

C.11

- 1) On a :

$$f'(x) = 1 + \left(-\frac{1}{x^2}\right) = 1 - \frac{1}{x^2}$$

On peut également obtenir l'expression suivante :

$$= \frac{x^2 - 1}{x^2}$$

- 2) On a :

$$g'(x) = \frac{2}{3} \cdot 3 \cdot x^2 - \frac{1}{2\sqrt{x}} = 2 \cdot x^2 - \frac{1}{2 \cdot \sqrt{x}}$$

On peut également obtenir l'expression suivante :

$$= \frac{4 \cdot x^2 \sqrt{x} - 1}{2 \cdot \sqrt{x}}$$

- 3) On a :

$$h'(x) = 3 \cdot \frac{1}{2 \cdot \sqrt{x}} - 2 \times 4 \cdot x^3 = \frac{3}{2 \cdot \sqrt{x}} - 8x^3$$

On peut également obtenir l'expression suivante :

$$= \frac{3 - 16 \cdot x^3 \cdot \sqrt{x}}{2 \cdot \sqrt{x}}$$

- 4) On a la simplification :

$$j(x) = \frac{3}{x} - \frac{1}{x} = \frac{2}{x} = 2 \cdot \frac{1}{x}$$

On a :

$$j'(x) = 2 \cdot \left(-\frac{1}{x^2}\right) = -\frac{2}{x^2}$$

C.12

- 1) La dérivée de la fonction f a pour expression :

$$f'(x) = 1 - \left(-\frac{1}{x^2}\right) = 1 + \frac{1}{x^2} = \frac{x^2 + 1}{x^2}$$

- 2) La fonction g admet pour expression :

$$g(x) = 2 \cdot \sqrt{x} = 2 \times \sqrt{x}$$

Ainsi, sa dérivée g' admet pour expression :

$$g'(x) = 2 \times \frac{1}{2\sqrt{x}} = \frac{1}{\sqrt{x}}$$

- 3) La fonction h admet pour expression :

$$h(x) = \frac{3}{x} - 2 \cdot \sqrt{x} = 3 \times \frac{1}{x} - 2 \times \sqrt{x}$$

Ainsi, sa dérivée h' admet pour expression :

$$\begin{aligned} h'(x) &= 3 \times \left(-\frac{1}{x^2}\right) - 2 \times \frac{1}{2\sqrt{x}} = \frac{-3}{x^2} - \frac{1}{\sqrt{x}} \\ &= -\frac{3\sqrt{x}}{x^2\sqrt{x}} - \frac{x^2}{x^2\sqrt{x}} = \frac{-3\sqrt{x} - x^2}{x^2\sqrt{x}} = -\frac{3\sqrt{x} + x^2}{x^2\sqrt{x}} \end{aligned}$$

- 4) La fonction j admet pour expression :

$$j(x) = 2 \cdot x^3 + \frac{2}{x} = 2 \times x^3 + 2 \times \frac{1}{x}$$

Ainsi, sa dérivée j' admet pour expression :

$$j'(x) = 2 \times (3x^2) + 2 \times \left(-\frac{1}{x^2}\right) = 6 \cdot x^2 - \frac{2}{x^2}$$

$$= \frac{6 \cdot x^4}{x^2} - \frac{2}{x^2} = \frac{6 \cdot x^4 - 2}{x^2}$$

C.13

a) $f(1) = u(1) \cdot v(1) = (3 \times 1 - 2)(2 - 1)$
 $= (3 - 2) \times 1 = 1 \times 1 = 1$

b) $f(3) = u(3) \cdot v(3) = (3 \times 3 - 2)(2 - 3)$
 $= (9 - 2) \times (-1) = -7$

c) $f\left(-\frac{1}{3}\right) = u\left(-\frac{1}{3}\right) \cdot v\left(-\frac{1}{3}\right) = \left[3 \times \left(-\frac{1}{3}\right) - 2\right] \left[2 - \left(-\frac{1}{3}\right)\right]$
 $= (-1 - 2) \left(2 + \frac{1}{3}\right) = -3 \left(\frac{6}{3} + \frac{1}{3}\right) = -3 \times \frac{7}{3} = -7$

C.14

- 1) L'expression de chacune de ces fonctions est donnée sous la forme d'un produit $u \cdot v$. Compléter le tableau ci-dessous afin d'identifier les deux facteurs de ce produit et leur dérivée respective.

$u(x)$	$v(x)$	$u'(x)$	$v'(x)$
$3 \cdot x^2 + 3x$	$2 \cdot x + 2$	$6 \cdot x + 3$	2
x^8	$3 - x$	$8 \cdot x^7$	-1

- 2) a) Avec les identifications faites à la question précédente et la formule de dérivation d'un produit, on obtient l'expression de la fonction dérivée f' :

$$f'(x) = u'(x) \cdot v(x) + u(x) \cdot v'(x)$$

$$= (6 \cdot x + 3)(2 \cdot x + 2) + (3 \cdot x^2 + 3 \cdot x) \times 2$$

$$= 12 \cdot x^2 + 12 \cdot x + 6 \cdot x + 6 + 6 \cdot x^2 + 6 \cdot x$$

$$= 18 \cdot x^2 + 24 \cdot x + 6$$

- b) Avec les identifications faites à la question précédente et la formule de dérivation d'un produit, on obtient l'expression de la fonction dérivée f' :

$$f'(x) = u'(x) \cdot v(x) + u(x) \cdot v'(x)$$

$$= 8 \cdot x^7 \cdot (3 - x) + x^8 \cdot (-1)$$

$$= x^7 \cdot (24 - 8x) + x^7 \cdot (-x)$$

$$= x^7 \cdot [(24 - 8x) + (-x)]$$

$$= x^7 \cdot (24 - 9x)$$

C.15

- 1) Compléter le tableau suivant:

$u(x)$	$v(x)$	$u'(x)$	$v'(x)$
$3 \cdot x^2 - 2$	$8 - x$	$6 \cdot x$	-1

- 2) La fonction f s'écrivant comme le produit de deux facteurs, sa fonction dérivée s'écrit sous la forme:

$$f'(x) = u'(x) \cdot v(x) + u(x) \cdot v'(x) = 6 \cdot x \cdot (8 - x) + (3 \cdot x^2 - 2) \cdot (-1)$$

$$= 48 \cdot x - 6 \cdot x^2 - 3 \cdot x^2 + 2 = -9 \cdot x^2 + 48 \cdot x + 2$$

C.16

- 1) L'expression de la fonction f est donnée sous la forme du produit des fonctions u et v où:

$$u(x) = x^5 \quad ; \quad v(x) = x^2 - 1$$

qui admettent les fonctions dérivées:

$$u'(x) = 5 \cdot x^4 \quad ; \quad v'(x) = 2x$$

Ainsi, la fonction g admet pour dérivée la fonction g' dont l'expression est:

$$f'(x) = u'(x) \cdot v(x) + u(x) \cdot v'(x) = 5 \cdot x^4 \cdot (x^2 - 1) + x^5 \cdot (2x)$$

$$= 5 \cdot x^6 - 5 \cdot x^4 + 2 \cdot x^6 = 7 \cdot x^6 - 5 \cdot x^4$$

- 2) L'expression de la fonction g est donnée sous la forme du produit des fonctions u et v définies par:

$$u(x) = 2 \cdot x^2 - 5 \cdot x + 1 \quad ; \quad v(x) = 1 - x^2$$

qui admettent pour dérivées:

$$u'(x) = 4 \cdot x - 5 \quad ; \quad v'(x) = -2 \cdot x$$

La formule de dérivation d'un produit permet d'obtenir l'expression de la fonction g' dérivée de la fonction g :

$$g'(x) = u'(x) \cdot v(x) + u(x) \cdot v'(x)$$

$$= (4 \cdot x - 5)(1 - x^2) + (2 \cdot x^2 - 5 \cdot x + 1)(-2 \cdot x)$$

$$= 4 \cdot x - 4 \cdot x^3 - 5 + 5 \cdot x^2 - 4 \cdot x^3 + 10 \cdot x^2 - 2 \cdot x$$

$$= -8 \cdot x^3 + 15 \cdot x^2 + 2 \cdot x - 5$$

C.17

- 1) Voici le tableau complété:

$u(x)$	$v(x)$	$u'(x)$	$v'(x)$
$\frac{1}{x}$	$x^2 - 1$	$-\frac{1}{x^2}$	$2x$
$5 \cdot x + \frac{2}{x}$	$3 - 2 \cdot x^3$	$5 - \frac{2}{x^2}$	$-6 \cdot x^2$

- 2) a) La fonction f s'écrivant comme le produit des deux facteurs u et v , sa fonction dérivée s'écrit sous la forme:

$$f'(x) = u'(x) \cdot v(x) + u(x) \cdot v'(x)$$

$$= -\frac{1}{x^2} \cdot (x^2 - 1) + \frac{1}{x} \cdot 2x = \frac{-(x^2 - 1)}{x^2} + 2$$

$$= \frac{-x^2 + 1 + 2 \cdot x^2}{x^2} = \frac{x^2 + 1}{x^2}$$

- b) La fonction g s'écrivant comme le produit des deux facteurs u et v , sa fonction dérivée s'écrit sous la forme:

$$g'(x) = u'(x) \cdot v(x) + u(x) \cdot v'(x)$$

$$= \left(5 - \frac{2}{x^2}\right)(3 - 2x^3) + \left(5x + \frac{2}{x}\right)(-6x^2)$$

$$= 15 - 10x^3 - \frac{6}{x^2} + 4x - 30x^3 - 12x$$

$$= -40x^3 - 8x + 15 - \frac{6}{x^2}$$

C.18

- 1) Voici le tableau complété:

$u(x)$	$v(x)$	$u'(x)$	$v'(x)$
x	\sqrt{x}	1	$\frac{1}{2\sqrt{x}}$
$x^2 + 1$	\sqrt{x}	$2x$	$\frac{1}{2\sqrt{x}}$

- 2) a) La fonction f s'écrivant comme le produit de deux facteurs, sa fonction dérivée f' admet pour expression:

$$\begin{aligned}
 f'(x) &= u'(x) \cdot v(x) + u(x) \cdot v'(x) = 1 \cdot \sqrt{x} + x \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}} \\
 &= \sqrt{x} + \frac{x}{2\sqrt{x}} = \frac{2\sqrt{x} \times \sqrt{x}}{2\sqrt{x}} + \frac{x}{2\sqrt{x}} = \frac{2x + x}{2\sqrt{x}} \\
 &= \frac{3x}{2\sqrt{x}} = \frac{3\sqrt{x} \cdot \sqrt{x}}{2\sqrt{x}} = \frac{3\sqrt{x}}{2}
 \end{aligned}$$

b La fonction g s'écrivant comme le produit de deux facteurs, sa fonction dérivée g' admet pour expression :

$$\begin{aligned}
 g'(x) &= u'(x) \cdot v(x) + u(x) \cdot v'(x) = 2x \cdot \sqrt{x} + (x^2 + 1) \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}} \\
 &= \frac{4x \cdot \sqrt{x} \times \sqrt{x}}{2\sqrt{x}} + \frac{x^2 + 1}{2\sqrt{x}} = \frac{4x^2}{2\sqrt{x}} + \frac{x^2 + 1}{2\sqrt{x}} \\
 &= \frac{4x^2 + x^2 + 1}{2\sqrt{x}} = \frac{5x^2 + 1}{2\sqrt{x}}
 \end{aligned}$$

C.19

a $\left(\frac{u}{v}\right)(0) = \frac{u(0)}{v(0)} = \frac{3 \times 0 - 2}{2 - 0} = \frac{-2}{2} = -1$

b L'image de 2 par la fonction v est nulle :
 $v(2) = 2 - 2 = 0$

Ainsi, la fonction g , définie par le quotient de u par v n'est pas définie pour $x=2$ car son dénominateur sera nul.

c $\left(\frac{u}{v}\right)\left(-\frac{1}{4}\right) = \frac{u\left(-\frac{1}{4}\right)}{v\left(-\frac{1}{4}\right)} = \frac{3 \cdot \left(-\frac{1}{4}\right) - 2}{2 - \left(-\frac{1}{4}\right)} = \frac{-\frac{3}{4} - 2}{2 + \frac{1}{4}}$

$$= \frac{-\frac{3}{4} - \frac{8}{4}}{2 + \frac{1}{4}} = \frac{-\frac{11}{4}}{\frac{8}{4} + \frac{1}{4}} = \frac{-\frac{11}{4}}{\frac{9}{4}} = -\frac{11}{4} \times \frac{4}{9} = -\frac{11}{9}$$

C.20

1 Compléter le tableau suivant :

u	v	u'	v'
$5 \cdot x + 2$	$3 \cdot x - 2$	5	3
$x^2 - 3$	$x + 1$	$2 \cdot x$	1

2 ● L'expression de la dérivée f' est donnée par la formule :

$$\begin{aligned}
 f'(x) &= \frac{u'(x) \cdot v(x) - u(x) \cdot v'(x)}{[v(x)]^2} = \frac{5 \cdot (3x - 2) - (5x + 2) \cdot 3}{(3x - 2)^2} \\
 &= \frac{15x - 10 - 15x - 6}{(3x - 2)^2} = \frac{-16}{(3x - 2)^2}
 \end{aligned}$$

● L'expression de la dérivée f' est donnée par la formule :

$$\begin{aligned}
 f'(x) &= \frac{u'(x) \cdot v(x) - u(x) \cdot v'(x)}{[v(x)]^2} = \frac{2x \cdot (x + 1) - (x^2 - 3) \cdot 1}{(x + 1)^2} \\
 &= \frac{2x^2 + 2x - x^2 + 3}{(x + 1)^2} = \frac{x^2 + 2x + 3}{(x + 1)^2}
 \end{aligned}$$

C.21

1 Par identification du numérateur et dénominateur de chaque quotient, voici le tableau complété :

$u(x)$	$v(x)$	$u'(x)$	$v'(x)$
$3 - 2x$	$x + 1$	-2	1
x^2	$2x + 1$	$2x$	2

2

● La formule de dérivation d'un quotient permet d'obtenir l'expression de la fonction f' :

$$\begin{aligned}
 f'(x) &= \frac{u'(x) \cdot v(x) - u(x) \cdot v'(x)}{[v(x)]^2} = \frac{-2 \cdot (x + 1) - (3 - 2x) \times 1}{(x + 1)^2} \\
 &= \frac{-2x - 2 - 3 + 2x}{(x + 1)^2} = \frac{-5}{(x + 1)^2}
 \end{aligned}$$

● La formule de dérivation d'un quotient permet d'obtenir l'expression de la fonction f' :

$$\begin{aligned}
 f'(x) &= \frac{u'(x) \cdot v(x) - u(x) \cdot v'(x)}{[v(x)]^2} \\
 &= \frac{2x \cdot (2x + 1) - x^2 \cdot (2)}{(2x + 1)^2} = \frac{4x^2 + 2x - 2x^2}{(2x + 1)^2} = \frac{2x^2 + 2x}{(2x + 1)^2}
 \end{aligned}$$

C.22

L'expression de la fonction f est donnée sous la forme du quotient des fonctions u et v telles que :

$$u(x) = 3 \quad ; \quad v(x) = 2 - x$$

qui admettent pour dérivées :

$$u'(x) = 0 \quad ; \quad v'(x) = -1$$

La formule de dérivation d'un quotient permet d'obtenir l'expression de la fonction f' , dérivée de la fonction f :

$$\begin{aligned}
 f'(x) &= \frac{u'(x) \cdot v(x) - u(x) \cdot v'(x)}{[v(x)]^2} = \frac{0 \times (2 - x) - 3 \times (-1)}{(2 - x)^2} \\
 &= \frac{3}{(2 - x)^2}
 \end{aligned}$$

C.23

La fonction f est définie par le produit des fonctions u et v définies par :

$$u(x) = x^2 + x + 1 \quad ; \quad v(x) = 2x^2 - 1$$

qui admettent pour dérivée :

$$u'(x) = 2x + 1 \quad ; \quad v'(x) = 4x$$

La formule de dérivation d'un quotient permet d'obtenir l'expression de la fonction f' , dérivée de la fonction f :

$$\begin{aligned}
 f'(x) &= \frac{u'(x) \cdot v(x) - u(x) \cdot v'(x)}{[v(x)]^2} \\
 &= \frac{(2x + 1) \cdot (2x^2 - 1) - (x^2 + x + 1) \cdot 4x}{(2x^2 - 1)^2} \\
 &= \frac{4x^3 - 2x + 2x^2 - 1 - 4x^3 - 4x^2 - 4x}{(2x^2 - 1)^2} \\
 &= \frac{-2x^2 - 6x - 1}{(2x^2 - 1)^2}
 \end{aligned}$$

C.24

la fonction f est définie par le produit des fonctions u et v définies par :

$$u(x) = 4 \quad ; \quad v(x) = x^2 - 2x + 3$$

qui admettent pour dérivées :

$$u'(x) = 0 \quad ; \quad v'(x) = 2x - 2$$

La formule de dérivation d'un quotient permet d'obtenir l'expression de la fonction f' , dérivée de la fonction f :

$$\begin{aligned}
 f'(x) &= \frac{u'(x) \cdot v(x) - u(x) \cdot v'(x)}{[v(x)]^2} = \frac{0 \cdot (x^2 - 2x + 3) - 4 \cdot (2x - 2)}{(x^2 - 2x + 3)^2} \\
 &= \frac{-8x + 8}{(x^2 - 2x + 3)^2}
 \end{aligned}$$

C.25

La fonction f est définie par le quotient des fonction u et v où :

$$u(x) = x^2 - 3x + 1 \quad ; \quad v(x) = 2x + 1$$

qui admettent pour dérivée :

$u'(x) = 2 \cdot x - 3$; $v'(x) = 2$
Ainsi, la dérivée f' de la fonction f admet pour dérivée :

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{u'(x) \cdot v(x) - u(x) \cdot v'(x)}{[v(x)]^2} \\ &= \frac{(2 \cdot x - 3) \cdot (2 \cdot x + 1) - (x^2 - 3 \cdot x + 1) \cdot 2}{(2 \cdot x + 1)^2} \\ &= \frac{4x^2 + 2x - 6x - 3 - 2x^2 + 6x - 2}{(2 \cdot x + 1)^2} = \frac{2x^2 + 2x - 5}{(2 \cdot x + 1)^2} \end{aligned}$$

C.26

- ① Pour qu'un quotient soit défini, il faut que son dénominateur soit non-nul.

Etudions le polynôme $x^2 - 5 \cdot x + 6$. Ce polynôme admet pour discriminant :

$$\Delta = b^2 - 4 \cdot a \cdot c = (-5)^2 - 4 \times 1 \times 6 = 25 - 24 = 1$$

Le discriminant de ce polynôme étant strictement positif, ce polynôme admet les racines suivantes :

$$\begin{array}{l|l} x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2 \cdot a} & x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2 \cdot a} \\ = \frac{-(-5) - 1}{2 \times 1} & = \frac{-(-5) + 1}{2 \times 1} \\ = \frac{5 - 1}{2} & = \frac{5 + 1}{2} \\ = \frac{4}{2} & = \frac{6}{2} \\ = 2 & = 3 \end{array}$$

On en déduit l'ensemble de définition de la fonction h :

$$\mathcal{D}_h = \mathbb{R} \setminus \{2; 3\}$$

- ② L'expression de la fonction h est donnée sous la forme d'un quotient où :

$$u(x) = x^2 - 2 \cdot x + 1 \quad ; \quad v(x) = x^2 - 5 \cdot x + 6$$

qui admettent pour dérivée les deux fonctions :

$$u'(x) = 2 \cdot x - 2 \quad ; \quad v'(x) = 2 \cdot x - 5$$

La formule de dérivation d'un quotient permet d'obtenir l'expression de la fonction h' :

$$\begin{aligned} h'(x) &= \frac{u'(x) \cdot v(x) - u(x) \cdot v'(x)}{[v(x)]^2} \\ &= \frac{(2x - 2)(x^2 - 5x + 6) - (x^2 - 2x + 1)(2x - 5)}{(x^2 - 5x + 6)^2} \\ &= \frac{2x^3 - 10x^2 + 12x - 2x^2 + 10x - 12 - (2x^3 - 5x^2 - 4x^2 + 10x + 2x - 5)}{(x^2 - 5x + 6)^2} \\ &= \frac{2 \cdot x^3 - 12 \cdot x^2 + 22 \cdot x - 12 - (2 \cdot x^3 - 9 \cdot x^2 + 12 \cdot x - 5)}{(x^2 - 5 \cdot x + 6)^2} \\ &= \frac{2 \cdot x^3 - 12 \cdot x^2 + 22 \cdot x - 12 - 2 \cdot x^3 + 9 \cdot x^2 - 12 \cdot x + 5}{(x^2 - 5 \cdot x + 6)^2} \\ &= \frac{-3 \cdot x^2 + 10 \cdot x - 7}{(x^2 - 5 \cdot x + 6)^2} \end{aligned}$$

C.27 La fonction g est définie par le quotient des deux fonctions u et v définies par :

$$u(x) = 5 \cdot x - x^2 \quad ; \quad v(x) = 3 - x^2$$

qui admettent pour dérivées les fonctions :

$$u'(x) = 5 - 2 \cdot x \quad ; \quad v'(x) = -2 \cdot x$$

L'expression de la fonction g' dérivée de la fonction g est donnée par :

$$\begin{aligned} g'(x) &= \frac{u'(x) \cdot v(x) - u(x) \cdot v'(x)}{[v(x)]^2} \\ &= \frac{(5 - 2 \cdot x) \cdot (3 - x^2) - (5x - x^2) \cdot (-2 \cdot x)}{(3 - x^2)^2} \\ &= \frac{15 - 5 \cdot x^2 - 6 \cdot x + 2 \cdot x^3 + 10 \cdot x^2 - 2 \cdot x^3}{(3 - x^2)^2} \\ &= \frac{5 \cdot x^2 - 6 \cdot x + 15}{(3 - x^2)^2} \end{aligned}$$

C.28 L'expression de la fonction f est donnée sous la forme du quotient des fonctions u et v définie par :

$$u(x) = 2 \cdot x - 1 \quad ; \quad v(x) = x^2 + x$$

qui admettent pour dérivée :

$$u'(x) = 2 \quad ; \quad v'(x) = 2 \cdot x + 1$$

La formule de dérivation d'un quotient permet d'obtenir l'expression de la fonction f' :

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{u'(x) \cdot v(x) - u(x) \cdot v'(x)}{[v(x)]^2} \\ &= \frac{2 \times (x^2 + x) - (2 \cdot x - 1) \times (2 \cdot x + 1)}{(x^2 + x)^2} \\ &= \frac{2 \cdot x^2 + 2 \cdot x - (4 \cdot x^2 - 1)}{[x \cdot (x + 1)]^2} = \frac{-2 \cdot x^2 + 2 \cdot x + 1}{x^2 \cdot (x + 1)^2} \\ &= -\frac{2 \cdot x^2 - 2 \cdot x - 1}{x^2 \cdot (x + 1)^2} \end{aligned}$$

C.29

- a La fonction f est définie par l'expression :

$$f(x) = u(4x - 2)$$

où la fonction u est définie par :

$$u(x) = x^7 \quad ; \quad u'(x) = 7 \cdot x^6$$

D'après la formule de dérivation de la composée par une fonction affine permet d'obtenir l'expression de la fonction f' :

$$f'(x) = 4 \times [7(4x - 2)^6] = 28 \cdot (4x - 2)^6$$

- b La fonction g est définie par l'expression :

$$g(x) = u(5 - 3x)$$

où $u(x) = \frac{1}{x}$; $u'(x) = -\frac{1}{x^2}$

La formule de dérivation de la composée par une fonction affine permet d'obtenir l'expression de la fonction g' :

$$g'(x) = -3 \times \left[-\frac{1}{(5 - 3x)^2} \right] = \frac{3}{(5 - 3x)^2}$$

C.30

- a La fonction f est la composée de la fonction u par la fonction racine carrée où :

$$u(x) = \frac{1}{3}x - 2 \quad ; \quad u'(x) = \frac{1}{3}$$

La formule de dérivation de la fonction racine carrée permet d'obtenir l'expression de la fonction f :

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{u'(x)}{2\sqrt{u(x)}} = \frac{\frac{1}{3}}{2\sqrt{\frac{1}{3}x - 2}} = \frac{1}{3} \times \frac{1}{2\sqrt{\frac{1}{3}x - 2}} \\ &= \frac{1}{3 \times 2\sqrt{\frac{1}{3}x - 2}} = \frac{1}{6\sqrt{\frac{1}{3}x - 2}} \end{aligned}$$

- b La fonction g est définie par une expression de la forme :

$$g(x) = \sqrt{u(x)}$$

où $u(x) = 3x - 1$; $u'(x) = 3$

Ainsi, la fonction dérivée g' admet pour expression :

$$g'(x) = \frac{u'(x)}{2\sqrt{u(x)}} = \frac{3}{2\sqrt{3x-1}}$$

C.31

1 On a les transformations algébriques suivantes :

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \frac{\sqrt{5 \cdot (x+h) + 1} - \sqrt{5 \cdot x + 1}}{h}$$

Le facteur $\sqrt{5 \cdot (x+h) + 1} + \sqrt{5 \cdot x + 1}$ est non-nul :

$$\begin{aligned} &= \frac{(\sqrt{5 \cdot (x+h) + 1} - \sqrt{5 \cdot x + 1})(\sqrt{5 \cdot (x+h) + 1} + \sqrt{5 \cdot x + 1})}{h \cdot (\sqrt{5 \cdot (x+h) + 1} + \sqrt{5 \cdot x + 1})} \\ &= \frac{(\sqrt{5 \cdot (x+h) + 1})^2 - (\sqrt{5 \cdot x + 1})^2}{h \cdot (\sqrt{5 \cdot (x+h) + 1} + \sqrt{5 \cdot x + 1})} \\ &= \frac{5 \cdot (x+h) + 1 - (5 \cdot x + 1)}{h \cdot (\sqrt{5 \cdot (x+h) + 1} + \sqrt{5 \cdot x + 1})} \\ &= \frac{5 \cdot x + 5 \cdot h + 1 - 5 \cdot x - 1}{h \cdot (\sqrt{5 \cdot (x+h) + 1} + \sqrt{5 \cdot x + 1})} \\ &= \frac{5 \cdot h}{h \cdot (\sqrt{5 \cdot (x+h) + 1} + \sqrt{5 \cdot x + 1})} \\ &= \frac{5}{\sqrt{5 \cdot (x+h) + 1} + \sqrt{5 \cdot x + 1}} \end{aligned}$$

2 Le nombre dérivée de la fonction f en x sur son ensemble de dérivabilité est donnée par la limite :

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

Or, on a les deux limites suivantes :

$$\lim_{h \rightarrow 0} 5 = 5 \quad ; \quad \lim_{h \rightarrow 0} \sqrt{5 \cdot (x+h) + 1} + \sqrt{5 \cdot x + 1} = 2 \cdot \sqrt{5 \cdot x + 1}$$

On en déduit la valeur du nombre dérivé :

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{5}{\sqrt{5 \cdot (x+h) + 1} + \sqrt{5 \cdot x + 1}} \\ &= \frac{5}{2 \cdot \sqrt{5 \cdot x + 1}} \end{aligned}$$