Notion d'équation différentielle

Exercice 1

1. $F'(x) = 8x + 1$.
2. On a $F'(x) = 8x+1$, donc f vérifie bien l'équation différentielle $y' = 8x + 1$.

Exercice 2

1. $u'(x) = 3$ et $v'(x) = 3$.
2. On a $u'(x) = 3$ et $v'(x) = 3$, donc u et v vérifient bien $y' = 3$.
3. Par exemple : $w(x) = 3x$ ou $w(x) = 3x + 1$ (toute fonction de la forme $w(x) = 3x+C$ avec $C \in \mathbb{R}$).

Exercice 3

On calcule $g'(x) = -3e^{-3x}$.
Vérifions : $g'(x) + 3g(x) = -3e^{-3x} + 3(4 + e^{-3x}) = -3e^{-3x} + 12 + 3e^{-3x} = 12$.
Donc g est bien solution de l'équation $y'+3y = 12$.

Primitives d'une fonction ($y' = f$)

Exercice 4

1. On utilise la formule $(uv)' = u'v + uv'$ avec $u(x) = x$ et $v(x) = e^{3x}$.
$F'(x) = 1{\cdot}e^{3x}+x{\cdot}3e^{3x} = e^{3x}+3xe^{3x} = (1+3x)e^{3x} = f(x)$.
2. On peut en déduire que F est une primitive de f sur $\mathbb{R}$.

Exercice 5

1. On calcule $F'(x)$ avec la formule $(uv)' = u'v + uv'$:
$F'(x) = 1 \cdot \ln(x) + x \cdot \dfrac{1}{x} = \ln(x) + 1 = f(x)$.
Donc F est bien une primitive de f sur $\mathbb{R}_+^*$.
2. Par exemple : $G(x) = x\ln(x) + 1$ ou $H(x) = x\ln(x)-5$ (toute fonction de la forme $x\ln(x)+C$ avec $C \in \mathbb{R}$).

Exercice 6

1. **Vrai**. $(F + G)' = F' + G' = f + g$.
2. **Faux**. $(FG)' = F'G + FG' = fG + Fg \neq fg$ en général.
3. **Vrai**. $(-F)' = -F' = -f$.
4. **Faux**. $(F^2)' = 2FF' = 2Ff \neq f^2$ en général.

Exercice 7

1. Une primitive de f sur $\mathbb{R}$ est $F(x) = x^3$ (ou $F(x) = x^3 + C$ avec $C \in \mathbb{R}$).
2. On cherche $F(x) = x^3 + C$ telle que $F(1) = 0$.
$F(1) = 1 + C = 0 \Rightarrow C = -1$.
La primitive cherchée est $F(x) = x^3 - 1$.

Exercice 8

1. $u(x) = \dfrac{1}{x^5} = x^{-5}$ avec $n = -5$.
2. Une primitive de $u(x) = x^{-5}$ est $U(x) = \dfrac{x^{-4}}{-4} = -\dfrac{1}{4x^4}$.
Donc $k = -\dfrac{1}{4}$.

Exercice 9

- $f(x) = x^{-2}$, donc $F(x) = \dfrac{x^{-1}}{-1} = -\dfrac{1}{x}$.
- $g(x) = x^{-3}$, donc $G(x) = \dfrac{x^{-2}}{-2} = -\dfrac{1}{2x^2}$.
- $h(x) = 2x^{-3}$, donc $H(x) = 2 \cdot \dfrac{x^{-2}}{-2} = -\dfrac{1}{x^2}$.

Exercice 10

1. Une primitive de $f(x) = 2e^{2x}$ est $F(x) = e^{2x}$.
2. Pour $g(x) = e^{2x}$: $G(x) = \dfrac{1}{2}e^{2x}$.
Pour $h(x) = e^{ax}$ avec $a \neq 0$: $H(x) = \dfrac{1}{a}e^{ax}$.

Exercice 11

1. Posons $u(x) = x^2$. Alors $u'(x) = 2x$ et $f(x) = u'(x)e^{u(x)}$.
2. Une primitive de $u'e^u$ est e^u, donc $F(x) = e^{x^2}$.

Exercice 12

1. Posons $u(x) = \sin(x)$. Alors $u'(x) = \cos(x)$ et $f(x) = u(x)^2u'(x)$.
2. Une primitive de u^2u' est $\dfrac{u^3}{3}$, donc $F(x) = \dfrac{\sin^3(x)}{3}$.

Exercice 13

1. On calcule $g'(x) = -\sin(x) + \sin(x) + x\cos(x) = x\cos(x) = f(x)$.
Donc g est une primitive de f sur $\mathbb{R}$.
2. Toutes les primitives de f sont de la forme $F(x) = \cos(x) + x\sin(x) + C$ avec $C \in \mathbb{R}$.

Exercice 14

1. **Vrai**. Toute fonction continue sur $\mathbb{R}$ admet des primitives sur $\mathbb{R}$. (propriété du cours)
2. **Vrai**. Toute fonction dérivable est continue.
3. **Vrai**. Une primitive est par définition dérivable, donc continue.

4. **Vrai**. Une primitive de f' est $f + C$ avec $C \in \mathbb{R}$, donc en particulier $f + 10$.

Exercice 15

1. $g(x) = f''(x) + 2f'(x)$. Une primitive est $G(x) = f'(x) + 2f(x)$.
2. $h(x) = f'(-x)$. Une primitive est $H(x) = -f(-x)$.

Exercice 16

On a :

— F est croissante sur $[-3; -1]$, donc $F' > 0$ sur cet intervalle.

— F est croissante sur $[3; 5]$, donc $F' > 0$ sur cet intervalle.

Ces critères sont vérifiés par la fonction associée à la courbe 1, mais pas celle de la courbe 2.

Exercice 17

On observe que :

— F est croissante sur $]-\infty; -1]$ et sur $[1; +\infty[$, donc $f(x) = F'(x) \geq 0$ sur $]-\infty; -1]$ et sur $[1; +\infty[$.

— F est décroissante sur $[-1; 1]$, donc $f(x) = F'(x) \leq 0$ sur $[-1; 1]$.

— F atteint un minimum en $x = 1$, donc $F'(1) = f(1) = 0$.

— F atteint un maximum en $x = -1$, donc $F'(-1) = f(-1) = 0$.

Réponses :

1. **Faux**. $f(0) \neq 0$ car la tangente n'est pas horizontale.
2. **Vrai**. $f(1) = 0$.
3. **Faux**. $f(x) \leq 0$ sur $[-1; 0]$.
4. **Vrai**. $f(x) \geq 0$ sur $[0; 1]$.

Exercice 18 — Logique

1. **Vrai**. Si $f \geq 0$ sur $\mathbb{R}$, alors $F' = f \geq 0$, donc F est croissante sur $\mathbb{R}$.
2. La réciproque est : « si F est croissante sur $\mathbb{R}$, alors f est positive sur $\mathbb{R}$ ».

   Cette réciproque est **vraie**. En effet, si F est croissante, alors $F' \geq 0$, c'est-à-dire $f \geq 0$.

Exercice 19

1. $F(x) = \dfrac{5x^4}{4} - \dfrac{3x^2}{2} + 7x$ et $G(x) = \dfrac{2x^5}{5} - \dfrac{x^4}{8}$
2. $F(x) = \dfrac{x^6}{6} - \dfrac{x^2}{2}$ et $G(x) = \dfrac{4x^5}{5} - \dfrac{7x^2}{2} + \sqrt{2}x$
3. $F(x) = 2\sin(x) + 3\cos(x)$ et $G(x) = 10x - 3e^x + \dfrac{x^2}{2}$
4. $f(x) = x^2 + x - 2$, donc $F(x) = \dfrac{x^3}{3} + \dfrac{x^2}{2} - 2x$

   $g(x) = 4x^2 + 4x + 1$, donc $G(x) = \dfrac{4x^3}{3} + 2x^2 + x$
5. $F(x) = \dfrac{x^3}{15} + \dfrac{x}{6}$ et $G(x) = \dfrac{12{,}4x^{10}}{10} - x^7 + 3x^5$

Exercice 20

1. $F(x) = \dfrac{3x^2}{2} + x + \ln(x)$ et $G(x) = \dfrac{x^3}{3} - \dfrac{4}{x}$
2. $F(x) = \dfrac{x^2}{2} - \dfrac{1}{2x^2}$ et $G(x) = \dfrac{x^2}{2} - \dfrac{1}{2}\ln(x)$
3. $f(x) = 7x^{-3}$, donc $F(x) = -\dfrac{7}{2x^2}$

   $g(x) = 4x^{-1} - 3x^{-2} + x^{-4}$, donc $G(x) = 4\ln(x) + \dfrac{3}{x} - \dfrac{1}{3x^3}$
4. $f(x) = x^{-1} + 5x^{-2}$, donc $F(x) = \ln(x) - \dfrac{5}{x}$

   $g(x) = x - 1 + 2x^{-1}$, donc $G(x) = \dfrac{x^2}{2} - x + 2\ln(x)$
5. $f(x) = 3 - 11x^{-2}$, donc $F(x) = 3x + \dfrac{11}{x}$

   $g(x) = 5x^{-1/2} - x + 6$, donc $G(x) = 10\sqrt{x} - \dfrac{x^2}{2} + 6x$
6. $f(x) = 4x^{-2} - \dfrac{1}{\sqrt{x}}$, donc $F(x) = -\dfrac{4}{x} - 2\sqrt{x}$

   $g(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x}} + x^2$, donc $G(x) = 2\sqrt{x} + \dfrac{1}{3}x^3$

Exercice 21

1. Forme $u'e^u$ avec $u(x) = 3x + 4$: $F(x) = e^{3x+4}$

   Forme $u'e^u$ avec $u(x) = x^2 - 3$: $G(x) = \dfrac{1}{2}e^{x^2-3}$
2. $f(x) = e^{-3}x^2$, donc $F(x) = \dfrac{e^{-3}x^3}{3}$

   Forme $\dfrac{u'}{u}$ avec $u(x) = e^x + 4$: $G(x) = \ln(e^x + 4)$
3. Forme $u'e^u$ avec $u(x) = 4 - x$: $F(x) = -5e^{4-x}$

   Forme $\dfrac{u'}{u}$ avec $u(x) = x^4 + 5$: $G(x) = \ln(x^4 + 5)$
4. On explicite la formule : $f(x) = \dfrac{4}{18} \times 3 \times 6x \times (3x^2 - 8)^2$. Forme $3(u')u^2$ avec $u = 3x^2 - 8$: $F(x) = \dfrac{2}{9}(3x^2 - 8)^3$

   Forme $\dfrac{u'}{2\sqrt{u}}$ avec $u(x) = x^3 + 3$: $G(x) = 2\sqrt{x^3 + 3}$
5. Forme $(u')(u)^3$ avec $u = e^x + 4$: $F(x) = \dfrac{(e^x + 4)^4}{4}$

   Forme $(u')u^4$ avec $u = 2x - 1$: $G(x) = \dfrac{(2x - 1)^5}{10}$
6. $F(x) = -\dfrac{1}{3}\cos(3x) - \dfrac{1}{2}\sin(2x)$

   $G(x) = -\dfrac{1}{5}\cos(5x + \frac{\pi}{4})$

7. Forme $(u')u$ avec $u = \sin(x)$: $F(x) = \dfrac{\sin^2(x)}{2}$

   Forme $(u')u^2$ avec $u = \cos(x)$: $G(x) = -\dfrac{\cos^3(x)}{3}$

8. Forme $(u')e^u$ avec $u = \sin(x)$: $F(x) = e^{\sin(x)}$

   Forme $(u')u^3$ avec $u = 1 - \cos(x)$: $G(x) = \dfrac{(1-\cos(x))^4}{4}$

9. Forme $\dfrac{u'}{u}$ avec $u = x^2 + x + 1$: $F(x) = 2\ln(x^2 + x + 1)$

   Forme $\dfrac{u'}{u^2}$ avec $u = x^2 - 2x + 4$: $G(x) = \dfrac{-1}{2(x^2 - 2x + 4)}$

10. $f(x) = e^{-x}$, donc $F(x) = -e^{-x}$

    $g(x) = 3e^x(e^x+1)^{-1}$, forme $\dfrac{u'}{u}$: $G(x) = 3\ln(e^x+1)$

Exercice 22

1. On a : $f(x) = \dfrac{2}{3} \times 3 \times \dfrac{1}{x} \times (\ln(x)+2)^2$. Forme $3u'(u)^2$ avec $u = \ln(x) + 2$: $F(x) = \dfrac{2(\ln(x)+2)^3}{3}$
2. $f(x) = 2(3x-1)^{-2} + (3x-1)^{-1}$, donc $F(x) = -\dfrac{2}{3(3x-1)} + \dfrac{\ln(3x-1)}{3}$
3. Forme $u'u$ avec $u = \ln(x)$: $F(x) = \dfrac{\ln^2(x)}{2}$
4. Forme $\dfrac{u'}{u}$ avec $u = \ln(x)$: $F(x) = \ln(\ln(x))$
5. Forme $\dfrac{u'}{u^2}$ avec $u = e^x + 3x$: $F(x) = \dfrac{1}{e^x + 3x}$
6. Forme $\dfrac{u'}{u}$ avec $u = \ln(x) + 3$: $F(x) = -7\ln(\ln(x) + 3)$
7. $f(x) = \tan(x) = \dfrac{\sin(x)}{\cos(x)}$, forme $\dfrac{u'}{u}$ avec $u = \cos(x)$: $F(x) = -\ln(\cos(x))$
8. Forme $\dfrac{u'}{2\sqrt{u}}$ avec $u = \sin(x)$: $F(x) = 2\sqrt{\sin(x)}$
9. Forme $(u')e^u$ avec $u = -\frac{1}{x}$: $F(x) = 2e^{-1/x}$

Exercice 23

1. Les solutions de (E) sont les fonctions $f(x) = \dfrac{x^2}{2} + \cos(x) + C$ avec $C \in \mathbb{R}$.
2. On cherche C tel que $f(0) = 2$:

   $f(0) = 0 + 1 + C = 2 \Rightarrow C = 1$.

   Donc $f(x) = \dfrac{x^2}{2} + \cos(x) + 1$.

Équation différentielles $y' = ay$

Exercice 24

ⓐ $y' = 5y$ avec $a = 5$

ⓑ $y' = -\dfrac{4}{3}y$ avec $a = -\dfrac{4}{3}$

ⓒ $y' = \dfrac{1}{2}y$ avec $a = \dfrac{1}{2}$

ⓓ $y' = \pi y$ avec $a = \pi$

Exercice 25

1. $2y' = 5y \Rightarrow y' = \dfrac{5}{2}y$ avec $a = \dfrac{5}{2}$.
2. Les solutions sont $y(x) = Ce^{\frac{5}{2}x}$ avec $C \in \mathbb{R}$.

Exercice 26

1. Les solutions sont $y(x) = Ce^x$ avec $C \in \mathbb{R}$.
2. On cherche f telle que $f(0) = 1$:

   $f(0) = Ce^0 = C = 1$.

   Donc $f(x) = e^x$, qui est bien la fonction exponentielle.

Exercice 27

ⓐ $y(x) = Ce^{-2x}$ avec $C \in \mathbb{R}$

ⓑ $y' = \dfrac{2}{3}y$, donc $y(x) = Ce^{\frac{2}{3}x}$ avec $C \in \mathbb{R}$

ⓒ $y' = 0{,}1y$, donc $y(x) = Ce^{0{,}1x}$ avec $C \in \mathbb{R}$

ⓓ $y' = -\ln(2)y$, donc $y(x) = Ce^{-\ln(2)x} = C \cdot 2^{-x}$ avec $C \in \mathbb{R}$

Exercice 28

ⓐ $y(x) = Ce^{5x}$ et $f(0) = C = 2$, donc $f(x) = 2e^{5x}$

ⓑ $y' = -6y$, donc $y(x) = Ce^{-6x}$ et $f(1) = Ce^{-6} = 1$, d'où $C = e^6$.

Donc $f(x) = e^{6-6x}$

ⓒ $y' = \dfrac{3}{2}y$, donc $y(x) = Ce^{\frac{3}{2}x}$ et $f(4) = Ce^6 = 2$, d'où $C = 2e^{-6}$.

Donc $f(x) = 2e^{\frac{3}{2}x-6}$

ⓓ $y' = \dfrac{5}{2}y$, donc $y(x) = Ce^{\frac{5}{2}x}$ et $f'(0) = \dfrac{5}{2}C = 5$, d'où $C = 2$.

Donc $f(x) = 2e^{\frac{5}{2}x}$

Exercice 29

1. Les solutions de (E) sont $N(t) = Ce^{at}$ avec $C \in \mathbb{R}$.
2. On a $N(0) = C = 10^5$ et $N(60) = 10^5 e^{60a} = 5000$. Donc $e^{60a} = 0{,}05$, d'où $60a = \ln(0{,}05)$ et $a = \dfrac{\ln(0{,}05)}{60}$.

   Ainsi $N(t) = 10^5 e^{\frac{\ln(0{,}05)}{60}t}$.

Exercice 30

1. Les solutions sont $N(t) = Ce^{-(\ln 100)t}$ avec $C \in \mathbb{R}$.

   $N(0) = C = 1500$, donc $N(t) = \boxed{1500e^{-(\ln 100)t}} = 1500 \cdot 100^{-t} = \dfrac{1500}{100^t}$.

2. $N(1) = \frac{1500}{100} = 15$ tours par minute.
3. On cherche t tel que $N(t) = 1$:
$\frac{1500}{100^t} = 1 \Rightarrow 100^t = 1500 \Rightarrow t = \frac{\ln(1500)}{\ln(100)} = \frac{\ln(1500)}{2\ln(10)}$.
Valeur exacte : $t = \frac{\ln(1500)}{2\ln(10)}$ minutes.
Valeur approchée : $t \approx 1{,}59$ minute $\approx$ 1 min 35 s.

Exercice 31

1. $(E_1) : y(x) = Ce^{2x}$ et $(E_2) : y(x) = Ke^x$ avec $C, K \in \mathbb{R}$.
2. $f_1(x) = Ce^{2x}$ et $f_1'(x) = 2Ce^{2x}$.
$f_1'(0) = 2C = 4 \Rightarrow C = 2$.
Donc $f_1(x) = 2e^{2x}$.
3. $f_2(x) = Ke^x$ et $f_2'(x) = Ke^x$.
$f_2'(0) = K = 1$.
Donc $f_2(x) = e^x$.
4. (a) $f(x) = 2e^{2x} - e^x$, donc $f'(x) = 4e^{2x} - e^x$.
Étude du signe de $f'(x)$: $f'(x) = e^x(4e^x - 1)$.
$f'(x) = 0 \Leftrightarrow e^x = \frac{1}{4} \Leftrightarrow x = -\ln(4)$.
$f'(x) > 0$ pour $x > -\ln(4)$ et $f'(x) < 0$ pour $x < -\ln(4)$.
Donc f est décroissante sur $]-\infty; -\ln(4)]$ et croissante sur $[-\ln(4); +\infty[$.
(b) $f(x) = 0 \Leftrightarrow 2e^{2x} = e^x \Leftrightarrow 2e^x = 1 \Leftrightarrow e^x = \frac{1}{2} \Leftrightarrow x = -\ln(2)$.

Exercice 32

Soit $M(x; y)$ un point de la courbe. Le coefficient directeur de la tangente en M est $y'(x)$.
On a donc l'équation différentielle $y' = 3y$.
Les solutions sont $y(x) = Ce^{3x}$ avec $C \in \mathbb{R}$.
La courbe passe par $A(-1; 2)$, donc $2 = Ce^{-3}$, d'où $C = 2e^3$.
L'équation de la courbe est $y = 2e^{3x+3} = 2e^3e^{3x}$.

Équation différentielles $y' = ay + b$

Exercice 33

1. La solution constante vérifie $y' = 0$, donc $0 = 10y + 20$, d'où $y = -2$.
2. L'équation homogène $y' = 10y$ a pour solutions Ce^{10x}.
Les solutions de (E) sont donc de la forme $y(x) = Ce^{10x} - 2$ avec $C \in \mathbb{R}$.
Vérification : $y'(x) = 10Ce^{10x}$ et $10y(x) + 20 = 10Ce^{10x} - 20 + 20 = 10Ce^{10x}$.

Exercice 34

1. Les solutions de $y' = -y$ sont $y(x) = Ce^{-x}$ avec $C \in \mathbb{R}$.
2. La solution constante de (E) est $y = 1$.
Les solutions de (E) sont donc $f(x) = Ce^{-x} + 1$ avec $C \in \mathbb{R}$.
Vérification : $f'(x) = -Ce^{-x}$ et $-f(x) + 1 = -Ce^{-x} - 1 + 1 = -Ce^{-x}$.

Exercice 35

1. La solution constante vérifie $0 = -2y + 3$, donc $y = \frac{3}{2}$.
2. Les solutions de $y' = -2y$ sont Ce^{-2x}.
Les solutions de (E) sont $y(x) = Ce^{-2x} + \frac{3}{2}$ avec $C \in \mathbb{R}$.

Exercice 36

L'équation s'écrit $y' = -3y + \frac{1}{2}$.
La solution constante est $y = \frac{1}{6}$.
Les solutions générales sont $f(x) = Ce^{-3x} + \frac{1}{6}$ avec $C \in \mathbb{R}$.
La courbe passe par $A(2; 0)$, donc $0 = Ce^{-6} + \frac{1}{6}$, d'où $C = -\frac{e^6}{6}$.
Ainsi $f(x) = -\frac{e^6}{6}e^{-3x} + \frac{1}{6} = \frac{1}{6}(1 - e^{6-3x})$.

Exercice 37

1. L'équation différentielle est $y' = -0{,}0002y + 0{,}02$.
La solution constante est $y = \frac{0{,}02}{0{,}0002} = 100$.
Les solutions sont $g(t) = Ce^{-0{,}0002t} + 100$ avec $C \in \mathbb{R}$.
$g(0) = C + 100 = 20$, donc $C = -80$.
Ainsi $g(t) = 100 - 80e^{-0{,}0002t}$.
2. Au bout d'une heure ($t = 3600$ s) :
$g(3600) = 100 - 80e^{-0{,}72} \approx 100 - 80 \times 0{,}4868 \approx 61{,}06°C$.
3. On cherche t tel que $g(t) > 85$:
$100 - 80e^{-0{,}0002t} > 85$
$\Leftrightarrow -80e^{-0{,}0002t} > -15$
$\Leftrightarrow e^{-0{,}0002t} < \frac{3}{16}$
$\Leftrightarrow -0{,}0002t < \ln\left(\frac{3}{16}\right)$
$\Leftrightarrow t > \frac{\ln(15/80)}{-0{,}0002}$
$\Leftrightarrow t > 5000\ln\left(\frac{16}{3}\right) \approx 8370$ secondes.
Soit 2 heures 19 minutes et 30 secondes.

Équation différentielles $y' = ay + f$

Exercice 38

1. Les solutions de $y' = -2y$ sont $y(x) = Ce^{-2x}$ avec $C \in \mathbb{R}$.
2. On vérifie : $g'(x) = -0{,}4\sin(x) + 0{,}2\cos(x)$.
   Ainsi, on a : $g'(x) + 2g(x) = -0.4\sin(x) + 0.2\cos(x) + 2 \times (0.4\cos(x) + 0.2\sin(x)) = -0.4\sin(x) + 0.2\cos(x) + 0.8\cos(x) + 0.4\sin(x) = \cos(x)$
   Donc g est solution de (E).
3. Les solutions de (E) sont $y(x) = Ce^{-2x} + 0{,}4\cos(x) + 0{,}2\sin(x)$ avec $C \in \mathbb{R}$.

Exercice 39

1. On vérifie : $u'(x) = e^{-x} - xe^{-x} = (1-x)e^{-x}$.
   $-u(x) + e^{-x} = -xe^{-x} + e^{-x} = (1-x)e^{-x} = u'(x)$.
   Donc u est solution de (E).
2. Les solutions de $y' = -y$ sont Ce^{-x}.
   Les solutions de (E) sont $y(x) = Ce^{-x} + xe^{-x} = (C+x)e^{-x}$ avec $C \in \mathbb{R}$.

Exercice 40

1. g est solution de (E) si $g'(x) + 2g(x) = x$.
   $g'(x) = a$ et $g'(x) + 2g(x) = a + 2ax + 2b = x$.
   Par identification : $2a = 1$ et $a + 2b = 0$, d'où $a = \dfrac{1}{2}$ et $b = -\dfrac{1}{4}$.
2. Les solutions de (E) sont $y(x) = Ce^{-2x} + \dfrac{x}{2} - \dfrac{1}{4}$ avec $C \in \mathbb{R}$.

Exercice 41

1. u est solution si $u'(x) - 2u(x) = xe^{x}$.
   $u'(x) = ae^{x} + (ax+b)e^{x} = (ax+a+b)e^{x}$.
   $u'(x) - 2u(x) = (ax+a+b)e^{x} - 2(ax+b)e^{x} = (-ax+a-b)e^{x} = xe^{x}$.
   Par identification : $-a = 1$ et $a - b = 0$, d'où $a = -1$ et $b = -1$.
2. Les solutions de (E) sont $y(x) = Ce^{2x} + (-x-1)e^{x}$ avec $C \in \mathbb{R}$.
3. $y(0) = C - 1 = 0$, donc $C = 1$.
   La solution est $y(x) = e^{2x} - (x+1)e^{x}$.

Exercice 42

1. u est solution si $u'(x) - 2u(x) = 4x^2 - 4x$.
   $u'(x) = 2ax + b$ et $u'(x) - 2u(x) = 2ax + b - 2ax^2 - 2bx - 2c = -2ax^2 + (2a-2b)x + (b-2c)$.
   Par identification : $-2a = 4$, $2a - 2b = -4$ et $b - 2c = 0$.
   D'où $a = -2$, $b = 0$ et $c = 0$.
   Donc $u(x) = -2x^2$.
2. Les solutions sont $y(x) = Ce^{2x} - 2x^2$ avec $C \in \mathbb{R}$.
3. $f'(x) = 2Ce^{2x} - 4x$ et $f'(1) = 2Ce^2 - 4 = 2$.
   Donc $2Ce^2 = 6$, d'où $C = 3e^{-2}$.
   La solution est $f(x) = 3e^{2x-2} - 2x^2$.

Synthèse

Exercice 43

1. Soit $g(x) = h(x)e^{-x}$.
   (a) $g'(x) = h'(x)e^{-x} - h(x)e^{-x} = (h'(x) - h(x))e^{-x}$.
   g est solution de (E_n) si $g'(x) + g(x) = \dfrac{x^n}{n!}e^{-x}$.
   $(h'(x) - h(x))e^{-x} + h(x)e^{-x} = h'(x)e^{-x} = \dfrac{x^n}{n!}e^{-x}$.
   Donc g est solution si et seulement si $h'(x) = \dfrac{x^n}{n!}$.
   (b) Une primitive de $\dfrac{x^n}{n!}$ est $h(x) = \dfrac{x^{n+1}}{(n+1)!}$.
   Une solution particulière de (E_n) est donc $g(x) = \dfrac{x^{n+1}}{(n+1)!}e^{-x}$.
2. (a) Les solutions de $y' = -y$ sont Ce^{-x}.
   Les solutions de (E_n) sont $y(x) = Ce^{-x} + \dfrac{x^{n+1}}{(n+1)!}e^{-x}$ avec $C \in \mathbb{R}$.
   (b) $f(0) = C = 0$, donc $f(x) = \dfrac{x^{n+1}}{(n+1)!}e^{-x}$.
3. **Initialisation :** Pour $n = 1$, f_1 est solution de $y' + y = f_0 = e^{-x}$ avec $f_1(0) = 0$.
   D'après la question 2.b, $f_1(x) = \dfrac{x^1}{1!}e^{-x} = xe^{-x}$.
   La propriété est vraie au rang 1.
   Hérédité : Supposons que $f_n(x) = \dfrac{x^n}{n!}e^{-x}$ pour un certain $n \geq 1$.
   f_{n+1} est solution de $y' + y = f_n = \dfrac{x^n}{n!}e^{-x}$ avec $f_{n+1}(0) = 0$.
   C'est l'équation (E_n), donc d'après la question 2.b :
   $f_{n+1}(x) = \dfrac{x^{n+1}}{(n+1)!}e^{-x}$.
   La propriété est vraie au rang $n+1$.
   Conclusion : Par récurrence, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $f_n(x) = \dfrac{x^n}{n!}e^{-x}$.