TD - Chapitre 5 - EDS Maths - 1ère

E.1 On considère la fonction f dont l'image d'un nombre x est définie par : $f(x) = 2x^2 - 8x + 6$

1. a. Etablir l'égalité : $f(x) = 2\cdot(x-3)(x-1)$
   b. Résoudre l'équation : $f(x) = 0$.
   c. Résoudre l'inéquation : $f(x) \leqslant 0$.
2. a. Etablir l'égalité : $f(x)+2 = 2\big(x-2\big)^2$
   b. En déduire que, pour tout nombre x réel, on a : $f(x) \geqslant -2$

E.2 On considère la fonction f dont l'image d'un nombre x est définie par : $f(x) = -4x^2 + 36x + 63$

1. a. Etablir l'égalité : $f(x) = (21-2\cdot x)(2\cdot x+3)$
   b. Déterminer l'ensemble des solutions de l'équation : $f(x) = 0$.
   c. Résoudre l'inéquation : $f(x) > 0$
2. a. Etablir l'égalité : $f(x) - 144 = -4\cdot\Big(x - \dfrac{9}{2}\Big)^2$.
   b. En déduire que, pour tout nombre x réel, on a : $f(x) \leqslant 144$

E.3

Définition : le **discriminant** d'un polynôme $a\cdot x^2 + b\cdot x + c$ du second degré est un nombre qui se calcule à l'aide des coefficients du polynôme : $\Delta = b^2 - 4\times a\times c$

Compléter le tableau ci-dessous pour chacun des polynômes du second degré :

	a	b	c	$\Delta = b^2 - 4\cdot a\cdot c$
$2x^2+5x+1$				
$-x^2+7x+3$				
x^2-5x+4				
$2x^2-4x-1$				
$-x^2-x-1$				
x^2+7				

E.4 Déterminer le discriminant de chacun des polynômes du second degré ci-dessous :

a. $3\cdot x^2 + 5\cdot x + 2$ b. $-x^2 - 3\cdot x + 2$ c. $2\cdot x^2 - \dfrac{1}{3}\cdot x + 1$

E.5 Déterminer le discrimant des polynômes du second degré ci-dessous :

a. $-2x^2 + 2x + 1$ b. $x^2 - x - 1$ c. $3x^2 + x - 2$

E.6

Définition : les racines d'un polynôme sont les valeurs annulant ce polynôme.

Proposition : pour un polynôme $a\cdot x^2 + b\cdot x + c$ du second degré, le nombre de racines existantes dépend du discriminant :

$\Delta < 0$	$\Delta = 0$	$\Delta > 0$
Aucune racine	1 racine $-\dfrac{b}{2\cdot a}$	2 racine $\dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2\cdot a}$; $\dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2\cdot a}$

Déterminer les racines des polynômes ci-dessous :

a. $x^2 + 4x - 5$ b. $x^2 + x + 1$
c. $2x^2 - 13x + 15$ d. $3x^2 - 6x + 3$

E.7 Déterminer les racines des polynômes ci-dessous :

a. $2x^2 - 3x - 2$ b. $-4x^2 + 12x - 9$ c. $3x^2 - 4x + 2$

E.8 Déterminer les racines des polynômes ci-dessous :

a. $3x^2 - 5x + 6$ b. $3x^2 - 24x + 48$ c. $-2\cdot x^2 + x + 6$

E.9 Déterminer les racines des polynômes suivants :

a. $x^2 + 2x - 15$ b. $3x^2 - 5x + 7$

E.10 Déterminer les racines des polynômes suivants :

a. $3x^2 - 24x + 48$ b. $-4\cdot x^2 - x + 3$

E.11 Déterminer les racines des polynômes du second degré suivants :

a. $-2\cdot x^2 - 5\cdot x - 3$ b. $2\cdot x^2 + 5\cdot x + 2$

E.12 Déterminer les racines des polynômes du second degré suivants :

a. $x^2 + x - 2$ b. $3\cdot x^2 + 4\cdot x + 2$

E.13 Déterminer les racines des polynômes ci-dessous :

a. $\dfrac{2}{3}\cdot x^2 + x - 3$ b. $-2\cdot x^2 - \dfrac{11}{3}\cdot x - 1$ c. $3\cdot x^2 - 3\cdot x + \dfrac{2}{3}$

E.14 Résoudre les équations suivantes :

a. $\dfrac{2}{7}\cdot x^2 - \dfrac{5}{3}\cdot x - \dfrac{7}{3} = 0$ b. $-\dfrac{1}{2}\cdot x^2 - \dfrac{4}{5}\cdot x + \dfrac{2}{5} = 0$

E.15 Parmi les quatre propositions ci-dessous, laquelle est correcte?

L'équation $-\dfrac{x^3}{3} + x^2 + 3\cdot x = 0$ admet sur $\mathbb{R}$:

a. la solution est -2 b. trois solutions distinctes
c. aucune solution d. une unique solution

E.16 Déterminer les racines des polynômes du second degré :

a. $x^2 - 3x + 1$ b. $5x^2 + 5x + 1$

E.17 Déterminer les racines des polynômes du second degré :

a. $x^2 - 7x + 9$ b. $-2x^2 - 3x + 1$

E.18 Déterminer les racines des polynômes :

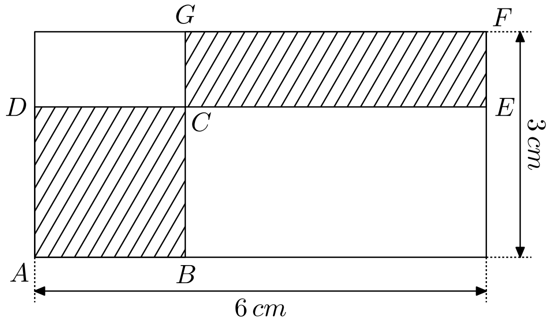
ⓐ $-3x^2+6x+1$ ⓑ $4x^2-6x+1$

Indication : pensez à simplifier le radical

E.19 Résoudre l'équation : $\dfrac{x-1}{x+1}=1-2{\cdot}x$

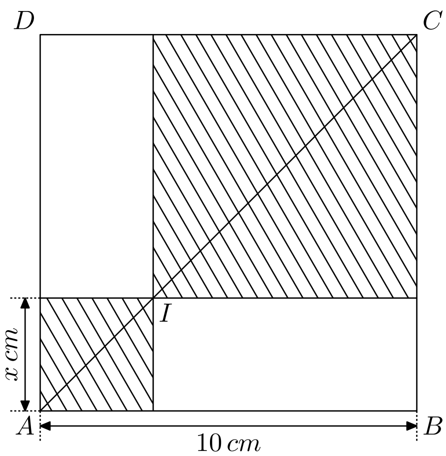
E.20 Résoudre l'équation : $\dfrac{2x-1}{2x+1}=1-x$

E.21 On considère le rectangle ci-dessous ayant pour dimension $6\,cm$ et $3\,cm$. A l'intérieur de ce rectangle, on construit le carré $ABCD$ et le rectangle $CEFG$ dont les côtés sont parallèles au rectangle les contenant.



On note x la longueur du segment $[AB]$. Déterminer s'il est possible que la partie hachurée de cette figure ait une aire de $8\,cm^2$.

E.22



On considère un carré $ABCD$ de 10 centimètres de côté ; un point I appartient à la diagonale $[AC]$, il est repéré comme l'indique la figure ci-dessous par la longueur x :

A partir de ce point I, on construit deux carrés de diagonale respectives $[AI]$ et $[IC]$.

Déterminer la valeur de x pour laquelle la somme des aires de ces deux carrés vaut les $5/8$ de l'aire du carré $ABCD$.

E.23

① Résoudre l'équation : $x^2-\dfrac{37}{2}{\cdot}x+85=0$

② On considère un rectangle ayant $37\,m$ pour périmètre et $85\,m^2$ pour aire. On notera respectivement L et ℓ, la longueur et la largeur de ce rectangle.

ⓐ Exprimer ℓ en fonction de L.

ⓑ Déterminer les dimensions de ce rectangle.

E.24 Un rectangle a pour périmètre $19\,m$ et pour aire $12\,m^2$.

Déterminer les dimensions de ce rectangle.

E.25

La factorisation d'un polynôme $a{\cdot}x^2+b{\cdot}x+c$ du second degré dépend de la valeur de son discriminant :

$\Delta<0$	$\Delta=0$	$\Delta>0$
Aucune factorisation	$a{\cdot}\left(x+\dfrac{b}{2{\cdot}a}\right)^2$	$a{\cdot}(x-\alpha)(x-\beta)$ où α et β sont les deux racines du polynômes

Factoriser, si possible, les expressions suivantes :

ⓐ x^2-3x+2 ⓑ $-2x^2-2x+4$

ⓒ $-x^2+2x-1$ ⓓ $4x^2+x+3$

E.26 Donner la forme factorisée des expressions suivantes :

ⓐ $3{\cdot}x^2-3{\cdot}x-6$ ⓑ $2{\cdot}x^2+12{\cdot}x+18$

E.27 Factoriser, si possible, les polynômes du second degré ci-dessous :

ⓐ x^2+2x+1 ⓑ $3x^2-4x+2$ ⓒ $-3x^2+4x-1$

Indication : présenter les résultats sous la forme :
$(a{\cdot}x+b)(c{\cdot}x+d)$ ou $(a{\cdot}x+b)^2$ avec $a,b,c,d\in\mathbb{Z}$

E.28 Factoriser, si possible, les expressions suivantes :

ⓐ $8x^2-24x+18$ ⓑ $3x^2+x+1$ ⓒ $-4x^2+x+3$

Indication : présenter les résultats sous la forme :
$(a{\cdot}x+b)(c{\cdot}x+d)$ ou $(a{\cdot}x+b)^2$ avec $a,b,c,d\in\mathbb{Z}$

E.29

① Factoriser l'expression : $-2{\cdot}x^2-3{\cdot}x+5$.

② Pour chaque proposition, une seule réponse est correcte. Cochez la case correspondant.

Indication : on utilisera le résultat de la question ①

ⓐ La forme de factorisée de $-x^2-\dfrac{3}{2}{\cdot}x+\dfrac{5}{2}$ est :

☐ $(x+5)(1-x)$ ☐ $\left(x+\dfrac{5}{2}\right)(1-x)$

☐ $(x+5)\left(1-\dfrac{1}{2}{\cdot}x\right)$ ☐ $\left(x+\dfrac{5}{2}\right)\left(\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{2}x\right)$

ⓑ La forme de factorisée de $-2{\cdot}x^2-3{\cdot}x+5+(1-x)$ est :

☐ $(2{\cdot}x+5)(1-x)$ ☐ $(2{\cdot}x+5){\cdot}x$

☐ $(2{\cdot}x+6)(1-x)$ ☐ $(2{\cdot}x+6)(2-x)$

ⓒ La forme de factorisée de $-2{\cdot}(x+1)^2-3{\cdot}(x+1)+5$ est :

☐ $(2{\cdot}x+6)(1-x)$ ☐ $(2{\cdot}x+6)(2-x)$

☐ $-(2{\cdot}x+7){\cdot}x$ ☐ $(2{\cdot}x+7)(2-x)$

E.30

Le tableau de signes d'un polynôme du second degré dépend du signe du coefficient du terme du second degré et du signe du discriminant.
Les six possibilités sont représentées ci-dessous :

	$\Delta<0$	$\Delta=0$	$\Delta>0$ (α et β sont les deux racines)
$a>0$	x : $-\infty$; $+\infty$ Signe : $+$	x : $-\infty$; $-b/2a$; $+\infty$ Signe : $+$ 0 $+$	x : $-\infty$; α ; β ; $+\infty$ Signe : $+$ 0 $-$ 0 $+$
$a<0$	x : $-\infty$; $+\infty$ Signe : $-$	x : $-\infty$; $-b/2a$; $+\infty$ Signe : $-$ 0 $-$	x : $-\infty$; α ; β ; $+\infty$ Signe : $-$ 0 $+$ 0 $-$

Etablir le tableau de signes des polynomes du second degré suivant :

(a) x^2+3x+4 (b) $4x^2+3x-10$ (c) $4x^2-16x+16$

E.31 Etablir le tableau de signes des expressions suivantes :

(a) $3x^2+4x-4$ (b) $-4x^2+2x+6$

E.32 Dresser le tableau de signes de chacune des expressions ci-dessous :

(a) $2{\cdot}x^2+9{\cdot}x+10$ (b) $12x^2-31x+20$ (c) $-5x^2-3x-1$

E.33 Résoudre les inéquations suivantes :

(a) $x^2-x-2<0$ (b) $-9x^2+12x-4\leqslant 0$

E.34 Résoudre les inéquations suivantes :

(a) $-4x^2+2x+2\geqslant 0$ (b) $3{\cdot}x^2+x+1<0$

E.35 Résoudre les inéquations :

(a) $6{\cdot}x^2+x-1\geqslant 0$ (b) $-x^2+x-3>0$

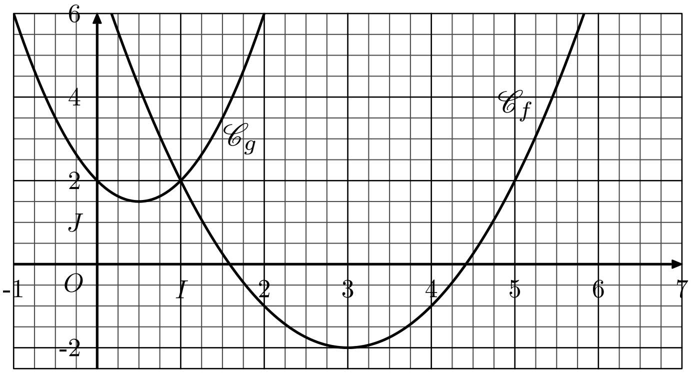
E.36 Résoudre les inéquations suivantes :

(a) $-10x^2-13x+3\geqslant 0$ (b) $(3x+1)(x^2+x+1)<0$

E.37 On considère les deux fonctions f et g définies sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x)=x^2-6{\cdot}x+7 \quad ; \quad g(x)=2{\cdot}x^2-2{\cdot}x+2$$

Dans le plan muni d'un repère orthogonal $(O\,;I\,;J)$, on donne les courbes $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$ représentatives respectivement des fonctions f et g.

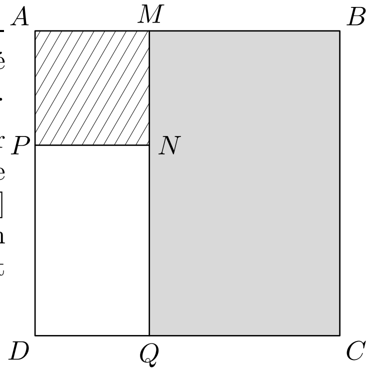


Déterminer la position relative des courbes $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$.

E.38

On considère la figure ci-contre où $ABCD$ est un carré dont les côtés mesurent $5\,cm$.

On considère un point M sur le segment $[AB]$ et on place le point P sur le segment $[AD]$ et les points N et Q afin que $AMNP$ soit un carré et $BCQM$ est un rectangle.



On note x la mesure du segment $[AM]$. Déterminer l'ensemble des valeurs de x afin que l'aire du carré $AMNP$ soit strictement supérieure à l'aire du rectangle $BCQM$.

E.39

(1) **Etude théorique :**

On admet que pour un trinôme ax^2+bx+c du second degré dont le discrimant Δ est strictement positif, ces deux racines s'expriment sous la forme :

$$x_1=\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} \quad ; \quad x_2=\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$$

(a) Montrer que la somme des racines vaut $-\dfrac{b}{a}$.

(b) Montrer que le produit des racines vaut $\dfrac{c}{a}$

(2) **Application :**

En utilisant les propriétés établies à la question précédentes, répondre aux questions suivantes :

(a) On considère le polynôme $2x^2+4x-16$. Après avoir vérifié que 2 est une racine de ce polynôme, déterminer la valeur de l'autre racine.

(b) Déterminer un trinôme du second degré admettant deux racines dont la somme des racines vaut 3 et le produit des racines vaut -10.