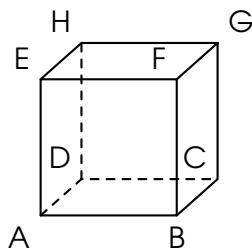


Lorsque cela est nécessaire, on se place dans un repère  $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$  de l'espace.



Lorsque l'exercice désigne le cube  $ABCDEFGH$ , il se réfère au cube représenté ci-contre.

### Premiers repérages

#### Exercice 1

1. Soit  $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$  une base de l'espace. On pose :  $\vec{u} = 3\vec{i} - 2\vec{j} + \vec{k}$ .

Quelles sont les coordonnées de  $\vec{u}$  dans la base  $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$  ?

2. Dans le repère  $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ , quelles sont les coordonnées du point A tel que  $\overrightarrow{OA} = -2\vec{i} + \vec{j} + 3\vec{k}$  ?

#### Exercice 2

Soit le cube ABCDEFGH.  
On se place dans le repère  $(A; \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE})$ .  
Dans ce repère, quels sont les coordonnées de A, B, C, F et G ?

#### Exercice 3

Soit  $\vec{u}(2; 4; -3)$  et  $\vec{v}(0; -5; 7)$ .  
Déterminer les coordonnées du vecteur  $\vec{w} = 3\vec{u} + 2\vec{v}$ .

#### Exercice 4

Soit A(9; -4; 1) et B(-1; 4; 3).  
1. Calculer les coordonnées du vecteur  $\overrightarrow{AB}$ .  
2. Calculer les coordonnées du milieu I de [AB].

#### Exercice 5

Soit A(-1; 2; 3), B(0; -1; 2) et C(2; -7; 0).  
1. Calculer les coordonnées du vecteur  $\overrightarrow{AB}$  puis celles du vecteur  $\overrightarrow{AC}$ .

2. (a) Justifier que les vecteurs  $\overrightarrow{AB}$  et  $\overrightarrow{AC}$  sont colinéaires.  
(b) Que peut-on en déduire ?

#### Exercice 6

On considère les points A(1; 0; 4), B(2; 0; 6), C(3; 4; 0) et D(2; 4; -2).  
Justifier que ABCD est un parallélogramme.

#### Exercice 7

Soit  $\vec{u}(3; 1; 2)$ ,  $\vec{v}(3; -2; 4)$  et  $\vec{w}(-3; 8; -8)$ .  
1. Calculer les coordonnées du vecteur  $2\vec{u} - 3\vec{v}$ .

2. Justifier que les vecteurs  $\vec{u}$ ,  $\vec{v}$  et  $\vec{w}$  sont coplanaires.

#### Exercice 8

Soit  $\vec{u}(-3; 2; 4)$ ,  $\vec{v}(-1; 2; 1)$  et  $\vec{w}(2; 0; -3)$ .

1. Calculer les coordonnées du vecteur  $\vec{u} - \vec{v} + \vec{w}$ .
2. Que peut-on en déduire ?

### Bases de plan et de l'espace

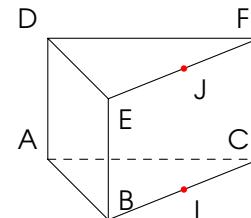
#### Exercice 9

$ABCDEFGH$  est un parallélépipède rectangle.

1. Quelle droite passe par D et est dirigée par le vecteur  $\overrightarrow{HF}$  ?
2. Quelle droite passe par F et est dirigée par le vecteur  $\overrightarrow{ED}$  ?
3. De quel plan passant par le point E les vecteurs  $\overrightarrow{AB}$  et  $\overrightarrow{AD}$  engendrent-ils la direction ?
4. De quel plan passant par le point B les vecteurs  $\overrightarrow{AH}$  et  $\overrightarrow{CH}$  engendrent-ils la direction ?

#### Exercice 10

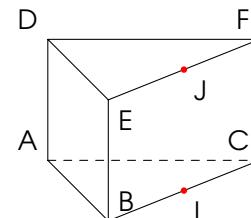
$ABCDEF$  est un prisme à base triangulaire. I est le milieu de [BC] et J est celui de [EF].



1. Justifier que les vecteurs  $\overrightarrow{AB}$  et  $\overrightarrow{AC}$  forment une base du plan (ABC).
2. (a) Justifier que  $(\overrightarrow{AI}, \overrightarrow{BC})$  est aussi une base du plan (ABC).  
(b) Compléter cette base pour former une base de l'espace.
3.  $(\overrightarrow{AI}, \overrightarrow{AE}, \overrightarrow{JC})$  est-elle une base de l'espace ?

#### Exercice 11

$ABCDEF$  est un prisme à base triangulaire. I est le milieu de [BC] et J est celui de [EF].



- (a) Décomposer le vecteur  $\vec{AI}$  dans la base  $(\vec{AB}, \vec{AC})$ .  
 (b) Décomposer le vecteur  $\vec{AB}$  dans la base  $(\vec{AI}, \vec{BC})$ .
- (a) Décomposer le vecteur  $\vec{AJ}$  dans la base  $(\vec{AB}, \vec{AC}, \vec{AD})$ .  
 (b) Décomposer le vecteur  $\vec{DI}$  dans la base  $(\vec{AB}, \vec{AC}, \vec{AD})$ .

### Exercice 12

ABCD est un tétraèdre. On définit les points E, F et G par les égalités :  $\vec{AE} + \vec{DE} = \vec{0}$ ,  $\vec{AF} - \vec{BF} - \vec{CF} = \vec{0}$  et  $\vec{BG} + \vec{CG} + \vec{DG} = \vec{0}$ .

- (a) Que peut-on dire du point E ?  
 (b) À quels plans appartiennent les points F et G ? Justifier.
- (a) Exprimer  $\vec{AE}$  en fonction de  $\vec{AD}$ .  
 (b) Exprimer  $\vec{AF}$  dans la base  $(\vec{AB}, \vec{AC})$ .  
 (c) En déduire l'expression du vecteur  $\vec{EF}$  dans la base  $(\vec{AB}, \vec{AC}, \vec{AD})$ .
- (a) Exprimer  $\vec{AG}$  dans la base  $(\vec{AB}, \vec{AC}, \vec{AD})$ .  
 (b) En déduire que les points E, F et G sont alignés.

### Repérages dans l'espace

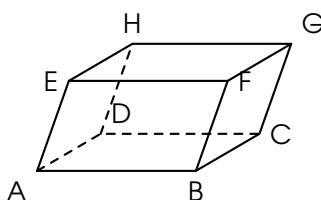
#### Exercice 13

Soit les points A(3; 0; -1), B(5; 1; -2) et C(-3; 2; 3).

Déterminer les coordonnées du point D tel que ABCD soit un parallélogramme.

#### Exercice 14

Soit les points A(1; -2; 3), B(1; 3; 2), D(-2; -1; 2) et E(3; 0; 6).



Déterminer les coordonnées des points C, F, G et H de sorte que ABCDEFGH soit un parallélépipède.

#### Exercice 15

On considère les vecteurs  $\vec{u}(-5; 6; -4)$ ,  $\vec{v}(1; 0; -2)$  et  $\vec{w}(0; 3; 5)$ .

- Démontrer que  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$  forment une base d'un plan.

- Démontrer que  $\vec{u}$ ,  $\vec{v}$  et  $\vec{w}$  forment une base de l'espace.

#### Exercice 16

Pour chacun des cas suivants, indiquer si les vecteurs  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$  forment une base d'un plan, en justifiant.

- $\vec{u}(1; 2; 3)$  et  $\vec{v}(4; 5; 6)$
- $\vec{u}(3; 9; -6)$  et  $\vec{v}(2; 6; -4)$
- $\vec{u}(4; -2; 1)$  et  $\vec{v}(2; -1; 0)$

#### Exercice 17

Soit  $t$  un réel. Déterminer l'unique valeur de  $t$  pour laquelle les vecteurs  $\vec{u}(t - 5; t; -2)$  et  $\vec{v}(3; -2; t)$  sont colinéaires.

#### Exercice 18

Démontrer que les vecteurs  $\vec{u}$ ,  $\vec{v}$  et  $\vec{w}$  forment une base de l'espace.

- $\vec{u}(1; 0; 3)$ ,  $\vec{v}(2; 1; 0)$  et  $\vec{w}(0; -4; -2)$
- $\vec{u}(3; 3; 3)$ ,  $\vec{v}(6; 0; 9)$  et  $\vec{w}(2; -2; 2)$

#### Exercice 19

Démontrer que les vecteurs  $\vec{u}$ ,  $\vec{v}$  et  $\vec{w}$  ne forment pas une base de l'espace.

- $\vec{u}(0; 3; 2)$ ,  $\vec{v}(3; 9; 18)$  et  $\vec{w}(1; 0; 4)$
- $\vec{u}(1; -1; 0)$ ,  $\vec{v}(0; 2; 1)$  et  $\vec{w}(2; 0; 1)$

#### Exercice 20

Indiquer si les vecteurs  $\vec{u}$ ,  $\vec{v}$  et  $\vec{w}$  forment une base de l'espace en justifiant.

- $\vec{u}(3; -9; 6)$ ,  $\vec{v}(1; -3; 2)$  et  $\vec{w}(-2; 6; -4)$
- $\vec{u}(0; 4; -5)$ ,  $\vec{v}(5; 1; 3)$  et  $\vec{w}(2; -6; 0)$

#### Exercice 21

On admet que les vecteurs  $\vec{u}(1; 0; 0)$ ,  $\vec{v}(1; 1; 0)$  et  $\vec{w}(1; 1; 1)$  forment une base de l'espace.

Déterminer les coordonnées du vecteur  $\vec{t}(3; 1; 2)$  dans la base  $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ .

#### Exercice 22

On admet que les vecteurs  $\vec{u}(0; 1; 1)$ ,  $\vec{v}(2; 3; 4)$  et  $\vec{w}(1; 1; 0)$  forment une base de l'espace.

Déterminer les coordonnées du vecteur  $\vec{t}(4; 2; 1)$  dans la base  $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ .

#### Exercice 23

Soit les vecteurs  $\vec{u}(0; 1; 2)$ ,  $\vec{v}(1; 1; 30)$  et  $\vec{w}(-1; 3; 1)$ .

- Démontrer que  $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$  est une base de l'espace.
- Déterminer les coordonnées du vecteur  $\vec{t}(5; -4; 5)$  dans cette base.

## Colinéarité et coplanarité dans un repère

### Exercice 24



Soit les points  $A(-1; 6; -2)$ ,  $B(3; 5; 1)$  et  $C(19; 1; 13)$ .

Démontrer que les points  $A$ ,  $B$  et  $C$  sont alignés.

### Exercice 25



Les points  $A(2; 3; 4)$ ,  $B(3; 5; 7)$  et  $C(1; 2; 3)$  sont-ils alignés ? Justifier.

### Exercice 26



Soit  $A(-3; 2; 1)$ ,  $B(-1; 6; 7)$ ,  $C(8; 6; 4)$  et  $D(4; 4; 2)$ .

1. Déterminer les coordonnées du point  $E$  tel que  $\overrightarrow{CE} = 3\overrightarrow{CD}$ .
2. En déduire que les points  $A$ ,  $B$  et  $E$  sont alignés.

### Exercice 27



#### Logique

La proposition suivante est-elle vraie ?

« Si une des coordonnées du vecteur  $\overrightarrow{AB}$  est nulle et que la coordonnée correspondante du vecteur  $\overrightarrow{CD}$  n'est pas nulle, alors  $\overrightarrow{AB}$  et  $\overrightarrow{CD}$  ne peuvent pas être colinéaires. »

### Exercice 28



Soit  $A(-2; -14; -24)$ ,  $B(-2; 8; 4)$ ,  $C(-1; 3; -7)$  et  $D(-3; 2; 1)$ .

1. Montrer que les vecteurs  $\overrightarrow{AB}$  et  $\overrightarrow{AC}$  ne sont pas colinéaires.
2. Démontrer que les points  $A$ ,  $B$ ,  $C$  et  $D$  sont coplanaires.

### Exercice 29



Soit  $A(1; 0; 1)$ ,  $B(3; 14; 9)$ ,  $C(12; 5; 0)$  et  $D(-2; 3; 4)$ .

1. Montrer que les vecteurs  $\overrightarrow{AB}$  et  $\overrightarrow{AC}$  ne sont pas colinéaires.
2. Démontrer que les points  $A$ ,  $B$ ,  $C$  et  $D$  sont coplanaires.

### Exercice 30



Les points  $A(2; 3; 4)$ ,  $B(3; 0; 4)$ ,  $C(5; 6; 7)$  et  $D(8; 7; 13)$  sont-ils coplanaires ? Justifier.

### Exercice 31



Soit  $A(-3; 0; 1)$ ,  $B(4; 2; 3)$ ,  $C(-5; 2; -3)$  et  $D(3; 0; 5)$ .

1. Montrer que les vecteurs  $\overrightarrow{AD}$  et  $\overrightarrow{BC}$  sont colinéaires.
2. Que peut-on en déduire pour les points  $A$ ,  $B$ ,  $C$  et  $D$  ?

### Exercice 32



Soit  $A(1; 2; 3)$ ,  $B(2; 0; 1)$  et  $C(2; -1; 3)$ .

1. Démontrer que les vecteurs  $\overrightarrow{AB}$  et  $\overrightarrow{AC}$  ne sont pas colinéaires.

2. Pour quelle valeur de  $z$  le point  $D(1; -3; z)$  appartient-il au plan  $(ABC)$  ?

### Exercice 33



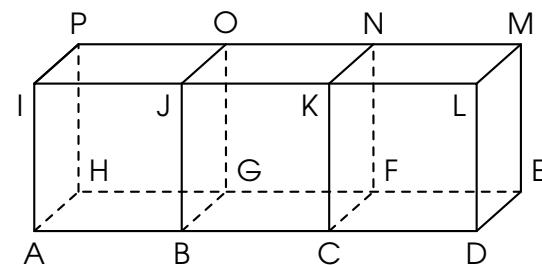
Soit  $A(1; 2; 3)$ ,  $B(4; -5; 6)$ ,  $C(0; 0; 3)$  et  $D(7; 8; -9)$ .

1. **a**) Calculer les coordonnées des vecteurs  $\overrightarrow{AB}$ ,  $\overrightarrow{AC}$  et  $\overrightarrow{AD}$ .
- b**) Démontrer que ces vecteurs ne sont pas coplanaires. Que peut-on en déduire pour les points  $A$ ,  $B$ ,  $C$  et  $D$  ?
2. Calculer les coordonnées de  $I$ , milieu de  $[AB]$ , et de  $J$ , milieu de  $[CD]$ .
3. Les points  $E$  et  $F$  sont tels que  $IACE$  et  $IBDF$  sont des parallélogrammes. Déterminer les coordonnées de  $E$  et  $F$ .
4. Justifier que  $J$  est le milieu du segment  $[EF]$ .

### Exercice 34



La figure ci-dessous est composée de trois cubes identiques.



1. Sans justifier, donner les coordonnées de chacun des points de cette figure dans le repère  $(A; \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AH}, \overrightarrow{AI})$ .

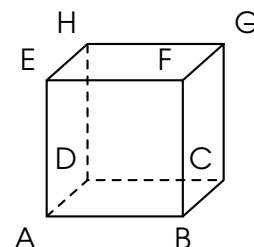
2. Déterminer les coordonnées des vecteurs  $\overrightarrow{DN}$ ,  $\overrightarrow{AM}$  et  $\overrightarrow{HC}$  dans ce repère.

3. Ces vecteurs sont-ils coplanaires ? Justifier.

### Exercice 35



$ABCDEFGH$  est un cube.



1. Donner les coordonnées des sommets du cube dans le repère  $(A; \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE})$ .

2. Les points  $I$  et  $J$  sont tels que  $\overrightarrow{AI} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB}$  et  $\overrightarrow{AJ} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AD}$ .