Rappels de première

Exercice 1 *(Probabilités conditionnelles)*

1. A et B étant deux évènements, rappeler la formule permettant de calculer $P_B(A)$.
2. Dans une population, on sait que 12% des individus sont gauchers et que, parmi ceux-ci, 37% sont des femmes. Si l'on choisit, au hasard, une personne dans cette population, quelle est la probabilité qu'il s'agisse d'une femme gauchère ?

Exercice 2 *(Variable aléatoire)*

On place dans un sac cinq étiquettes. Sur chaque étiquette, on écrit un mot de la phrase ci-dessous :

On tire une étiquette au hasard du sac et compte le nombre de voyelles du mot.

1. A quelle variable aléatoire X peut-on s'intéresser ?
2. Quelles sont les valeurs prises par X ?
3. Quelles sont les issues qui correspondent à l'évènement $X = 2$?

Exercice 3 *(Loi de probabilité)*

Une variable aléatoire X suit la loi donnée dans le tableau ci-dessous.

x_i	1	3	7	10
$P(X = x_i)$	0, 3	0, 12		0, 57

Quelle est la valeur manquante ?

Exercice 4 (Loi de probabilité)

Une variable aléatoire X suit la loi donnée dans le tableau suivant :

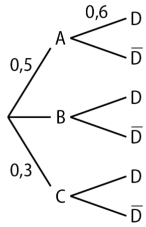
x_i	0	1	2	3	4	5
$P(X = x_i)$	0, 2	0, 11	0, 1	0, 02	0, 1	0, 47

1. Calculer $P(X \leq 3)$
2. Calculer $P(X \geq 4)$

Succession d'épreuves indépendantes

Exercice 5

On a représenté par un arbre pondéré ci-contre une expérience aléatoire à deux épreuves indépendantes.



1. (a) Quelles sont les issues de la première épreuve ?
   (b) Quelles sont les issues de la seconde épreuve ?
2. Reproduire et compléter l'arbre.

Exercice 6

On lance un dé tétraédrique et un dé cubique équilibrés. On s'intéresse à l'apparition d'un nombre pair sur chacun des deux dés.

1. Peut-on modéliser cette expérience aléatoire par une succession d'épreuves indépendantes ?
2. Réaliser un arbre pondéré illustrant la situation.
3. Déterminer la probabilité d'obtenir un nombre pair sur chacun des deux dés.

Exercice 7

Une urne contient trois boules blanches et deux boules noires, numérotées de 1 à 5. On tire au hasard une première boule de cette urne, on note sa couleur et on remet la boule dans l'urne. On tire une seconde boule et on note son numéro.
On note les événements :

- N : la première boule tirée est noire,
- P : le numéro indiqué sur la 2^{nd} boule est pair.

1. Justifier que l'on peut modéliser cette expérience aléatoire par une succession d'épreuves indépendantes.
2. Réaliser un arbre pondéré illustrant la situation.

Exercice 8

Charlotte écoute un disque vinyle au hasard dans sa collection constituée de 30% de hip-hop (H), 55% de rock (R) et 15% de musique classique (C). Pendant ce temps, elle lit un livre choisi au hasard parmi les trois présents sur sa table de chevet : un roman policier (P), un livre de science-fiction (SF) et une biographie (B).

1. Peut-on modéliser cette expérience aléatoire par une succession d'épreuves indépendantes ?

2. Représenter l'univers de cette expérience à l'aide d'un produit cartésien.
3. Représenter cette expérience aléatoire à l'aide d'un arbre pondéré.
4. Établir la liste des issues possibles et leurs probabilités.

Exercice 9

Ahmed se rend à un salon du livre. Cinq auteurs du genre médiéval-fantastique sont présents, leurs stands sont numérotés de 1 à 5. Ahmed choisit un des auteurs au hasard. On l'autorise à prendre une photo et une seule avec l'auteur choisi. Ahmed étant un piètre photographe, la probabilité qu'il réussisse sa photo est 0,4.

1. Peut-on modéliser cette expérience aléatoire par une succession d'épreuves indépendantes ?
2. Représenter l'univers de cette expérience à l'aide d'un produit cartésien.
3. Représenter cette expérience aléatoire à l'aide d'un arbre pondéré.
4. Établir la liste des issues possibles et leurs probabilités.

Loi de Bernoulli

Exercice 10

Soit X une variable aléatoire suivant la loi de Bernoulli de paramètre $p = 0{,}2$.
Déterminer l'espérance et la variance de X, puis son écart-type.

Exercice 11

Une boîte contient quatre jetons rouges et sept jetons verts. On tire au hasard un jeton de cette boîte.

1. Quelle est la probabilité d'obtenir un jeton rouge ?
2. Soit X la variable aléatoire qui, à chaque tirage, associe 1 lorsque le jeton tiré est rouge, et 0 si le jeton tiré est vert. Expliquer pourquoi X suit une loi de Bernoulli et préciser son paramètre.

Exercice 12

Une pièce truquée a deux fois plus de chance de tomber sur « Pile »que sur « Face ».
On lance une fois cette pièce et on définit la variable aléatoire X telle que l'événement $\{X = 1\}$ est « obtenir Face »et l'événement $\{X = 0\}$ est « obtenir Pile ».

1. Quelle est la proba de l'événement $\{X = 0\}$?
2. (a) Quelle est la loi suivie par la variable X ?
   (b) Quel est son paramètre ?

Exercice 13

Dans chacun des cas suivants, déterminer si la variable aléatoire X proposée suit ou non une loi de Bernoulli. Si oui, préciser alors le paramètre de cette loi.

1. On tire au hasard une carte d'un jeu de 32 cartes. X prend la valeur 1 si la carte tirée est un *carreau*, 2 si c'est un *cur*, 3 si c'est un *trèfle* et 4 si c'est un *pique*.
2. Environ deux tiers de la population française est titulaire du permis de conduire. On interroge au hasard un passant dans la rue. X prend la valeur 1 si le passant est titulaire du permis de conduire, et 0 sinon.

Exercice 14

Proposer une expérience aléatoire dans laquelle une variable aléatoire suit une loi de Bernoulli de paramètre $p = \frac{1}{4}$

Exercice 15

Dans chacun des cas suivants, déterminer si la variable aléatoire X proposée suit ou non une loi de Bernoulli. Si oui, préciser alors le paramètre de cette loi.

1. On lance un dé équilibré. X prend la valeur 1 si le résultat est un multiple de 3, et prend la valeur 0 sinon.
2. On choisit au hasard un élève de Terminale d'un lycée comportant $53\,\%$ de filles. X prend la valeur 1 si l'élève est une fille, et 0 sinon.

Exercice 16

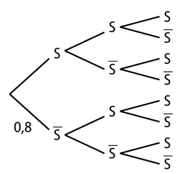
Vrai ou faux ? Si Y est une variable aléatoire suivant une loi de Bernoulli de paramètre $p = \dfrac{1}{4}$, alors

$$E(Y) = \frac{1}{4} \quad \text{et} \quad V(Y) = \frac{3}{16}.$$

Schéma de Bernoulli

Exercice 17

L'arbre pondéré ci-contre représente un schéma de Bernoulli pour lequel le succès est noté S.



1. Donner les paramètres de ce schéma de Bernoulli.
2. Reproduire et compléter cet arbre.

Exercice 18

Réaliser un arbre pondéré illustrant un schéma de Bernoulli de paramètres 3 et $0{,}6$.

Exercice 19

Un joueur de basket-ball réalise trois lancers de façon indépendante. La probabilité qu'il marque un panier à chaque lancer est $0{,}85$. Expliquer pourquoi on peut modéliser cette situation par un schéma de Bernoulli. En préciser les paramètres.

Exercice 20

Une urne contient deux boules rouges et trois boules vertes. On tire au hasard une boule de l'urne, on note sa couleur et on remet la boule dans l'urne. On note S l'événement « obtenir une boule verte » .

1. Déterminer la probabilité de l'événement S.
2. On répète trois fois l'expérience ci-dessus. Identifier un schéma de Bernoulli et en préciser ses paramètres.
3. Représenter la situation par un arbre pondéré.

Exercice 21

Une boîte contient dix jetons noirs et quarante jetons blancs. On tire au hasard, successivement *et avec remise*, deux jetons de la boîte ; on appelle *succès* le fait de tirer un jeton noir. Soit X la variable aléatoire qui, à chaque tirage de deux jetons, associe le nombre de jetons noirs tirés.

1. Identifier un schéma de Bernoulli et en préciser ses paramètres.
2. Représenter la situation par un arbre pondéré.
3. Calculer $P(X = 1)$, puis $P(X \geq 1)$.

Exercice 22

Une urne contient deux fois plus de boules rouges que de boules noires.

1. On tire une boule de l'urne. Quelle est la probabilité p que cette boule soit rouge ?
2. On tire trois fois de suite *avec remise* une boule de l'urne. Soit X la variable aléatoire qui, à chaque tirage de trois boules, associe le nombre de boules rouges tirées.
   - (a) Identifier un schéma de Bernoulli et en préciser ses paramètres.
   - (b) Réaliser un arbre pondéré.
   - (c) Déterminer $P(X = 2)$, puis $P(X \geq 2)$.

Loi Binomiale

Exercice 23

Soit X la variable aléatoire qui suit la loi binomiale de paramètres $n = 3$ et $p = 0,3$. En vous aidant d'un arbre pondéré, déterminer les probabilités $P(X = 0)$, $P(X = 1)$ et $P(X \leq 1)$.

Exercice 24

On lance une pièce de monnaie équilibrée cinq fois de suite et on appelle pour chaque lancer « succès » l'obtention d'un « Pile ».Soit Y la variable aléatoire qui, à chaque série de lancers, associe le nombre de succès obtenus.

1. Expliquer pourquoi Y suit une loi binomiale et en préciser les paramètres.
2. Quelle est la formule permettant de déterminer $P(Y = 2)$? Faire ce calcul.

Exercice 25

On dispose de deux dés équilibrés. Le premier est cubique, ses faces étant numérotées de 1 à 6 ; le second est tétraédrique, ses faces étant numérotées de 1 à 4. On lance le premier dé et on note le numéro obtenu, puis on fait de même avec le second dé. On note X la variable aléatoire égale au nombre de « 3 » obtenus sur l'ensemble des deux dés. X suit-elle une loi binomiale ? Si oui, donner ses paramètres.

Exercice 26

Un sachet de bonbons contient 15 bonbons rouges et 20 bonbons verts. On tire successivement quatre bonbons du sachet, sans jamais en remettre aucun dans le sac. Soit Z la variable aléatoire qui, à chaque tirage de quatre bonbons, associe le nombre de bonbons rouges obtenus. Expliquer pourquoi Z ne suit pas une loi binomiale.

Exercice 27

Soit X une variable aléatoire suivant une loi binomiale de paramètres $n = 15$ et $p = 0,4$.

1. Quelles sont les valeurs prises par X ?
2. Combien existe-t-il de chemins permettant d'obtenir exactement six succès ?
3. Expliquer pourquoi la probabilité de l'événement $\{X = 6\}$ est environ égale à $0,207$.

Exercice 28

On tire au hasard une carte d'un jeu de 32 cartes. On note la valeur de la carte, puis on la replace dans le jeu. On effectue ainsi cinq tirages successifs. On appelle F la variable aléatoire qui compte le nombre de figures obtenues (valet, dame ou roi) lors des cinq tirages.

1. Quelle est la probabilité d'obtenir une figure au premier tirage ?
2. Expliquer pourquoi F suit une loi binomiale. En préciser les paramètres.

Exercice 29

On sait que sur un site de vente en ligne, environ 5 % des commandes font l'objet d'un retour. Dans chacun des cas suivants, déterminer si la v.a. X proposée suit ou non une loi binomiale. Si oui, préciser alors les paramètres de cette loi.

1. On examine des ventes dans la base de données jusqu'à ce qu'on trouve un retour. On note alors X le nombre de ventes examinées.
2. On examine 100 ventes dans la base de données et on note X le nombre de retours.

Exercice 30

On estime que 71 % de la population française possède des lunettes de vue. On interroge cinq personnes au hasard dans la rue. On considère que ces cinq personnes portent des lunettes de vue de façon indépendante.
Soit X la variable aléatoire qui, à une série de cinq personnes interrogées, associe le nombre de personnes possédant des lunettes.
La variable aléatoire X suit-elle une loi binomiale ? Si oui, donner ses paramètres.

Exercice 31

Un panier contient 15 fraises et 35 framboises. On tire au hasard et successivement trois fruits, que l'on mange après chaque tirage.
Soit X la variable aléatoire qui compte le nombre de fraises mangées.
La variable aléatoire X suit-elle une loi binomiale ? Si oui, donner ses paramètres.

Exercice 32 Logique

Soit la proposition suivante : « Si la v.a. X suit une loi binomiale, alors elle suit une loi de Bernoulli. »

1. Cette proposition est-elle vraie ?
2. Énoncer la réciproque. Est-elle vraie ?

Exercice 33 Calculatrice

Soit X une variable aléatoire qui suit la loi binomiale de paramètres $n = 25$ et $p = 0,1$.

1. Déterminer les valeurs exactes de $P(X = 0)$, $P(X = 1)$ et $P(X = 2)$.
2. Déterminer les valeurs approchées à 10^{-4} près des probabilités de la question 1.
3. En déduire une valeur approchée à 10^{-4} près de $P(X \geq 3)$.

Exercice 34

Soit X une v.a. qui suit la loi binomiale de paramètres $n = 8$ et p, avec p réel de $[0; 1]$.

1. Exprimer, en fonction de p, la probabilité de l'événement $\{X = 1\}$.
2. Exprimer, en fonction de p, la probabilité de l'événement $\{X = 3\}$.

Exercice 35 Calculatrice

Soit X une variable aléatoire qui suit la loi binomiale de paramètres $n = 30$ et $p = 0,9$.

1. Calculer, à 10^{-4} près, $P(X = 27)$ et $P(X \geq 27)$.
2. Calculer, à 10^{-4} près, $P(21 \leq X \leq 25)$.

Exercice 36 Calculatrice

Soit Y une variable aléatoire qui suit la loi binomiale de paramètres $n = 200$ et $p = 0,55$. Calculer, à 10^{-4} près, $P(90 \leq Y \leq 100)$.

Exercice 37

Soit Z une v.a. qui suit la loi binomiale de paramètres $n = 30$ et $p = 0,6$. On donne $P(Z \leq 15) \approx 0,175$ et $P(Z \leq 22) \approx 0,956$. Déterminer, à 10^{-2} près, une valeur approchée de $P(16 \leq Z \leq 22)$.

Exercice 38 Calculatrice

Dans une population donnée, 30% des personnes interrogées se disent sans religion.
On appelle X la v.a. qui, à chaque échantillon de 200 personnes choisies au hasard, associe le nombre de personnes se disant sans religion.

1. Quelle est la loi suivie par la variable X ?
2. Donner le plus petit entier b tq $P(X \leq b) \geq 0,9$.
3. En déduire un intervalle $[a; b]$ tel que la probabilité $P(X \in [a; b])$ soit supérieure à 90%.
4. Interpréter le résultat précédent.

Exercice 39 Calculatrice

Une enquête réalisée auprès des Français de plus de 18 ans révèle que 57% d'entre eux disent jouer à des jeux vidéo.
Soit X la v.a. qui, à tout échantillon de 200 personnes de plus de 18 ans choisies au hasard, associe le nombre d'adeptes de jeux vidéo.

1. Quelle loi suit la variable X ?
2. Donner le plus petit entier b tq $P(X \leq b) \geq 0,95$.
3. En déduire un intervalle $[a; b]$ tel que la probabilité $P(X \in [a; b])$ soit supérieure à 95%.
4. Interpréter le résultat précédent.

Exercice 40 Calculatrice

Dans un grand groupe industriel, une étude montre que 53% des salariés se disent stressés par leur travail.
Soit Y la v.a. qui, à chaque échantillon de 150 salariés choisis au hasard, associe le nombre de personnes se disant stressées par leur travail.

1. Quelle loi suit Y ?
2. Déterminer les entiers a et b tels que a est le plus petit entier tel que $P(Y \leq a) > 0,005$ et b est le plus petit entier tel que $P(Y \leq b) \geq 0,995$.
3. En déduire un intervalle I tq $P(Y \in I) \geq 0,99$.
4. Interpréter le résultat précédent.

Problèmes

Exercice 41

Trois candidats A, B et C se présentent à une élection. Ils obtiennent respectivement la moitié, les trois dixièmes et le cinquième des suffrages. D'autre part, on sait que 50% des électeurs de A, 30% des électeurs de B et 40% des électeurs de C sont des hommes.

1. Décrire l'expérience avec un arbre pondéré.
2. En déduire la probabilité d'interroger un homme ayant voté pour le candidat C.
3. À l'aide de la formule des probabilités totales, déterminer la probabilité que la personne interrogée soit une femme.

Exercice 42

Sur son trajet pour aller au travail, un automobiliste rencontre deux feux tricolores. La probabilité pour que le feu soit vert au moment où il arrive à sa hauteur est $0,4$ pour le premier feu et $0,45$ pour le second feu.
On note A l'événement « le premier feu est vert » et B « le second feu est vert ». On fait l'hypothèse que ces deux événements sont indépendants.

1. Quelle est la probabilité que l'automobiliste fasse son trajet sans avoir à s'arrêter ?
2. Calculer $P(\overline{A} \cap B)$. Interpréter cet événement dans le contexte de l'exercice.

Exercice 43

Dans une équipe de basket, on sait que cinq joueurs réussissent leurs deux lancers francs successifs avec une probabilité égale à $0,45$. Lors d'un match, ils effectuent de façon indépendante deux lancers francs successifs.
On appelle succès le fait de réussir deux lancers francs successifs. On considère la v.a. X qui, à un match, associe le nombre de succès.

1. Montrer que X suit une loi binomiale dont on précisera les paramètres.
2. Calculer, à 10^{-3} près, la probabilité de l'événement $\{X = 2\}$.
3. Quelle est la probabilité, à 10^{-3} près, qu'il y ait au plus deux basketteurs qui réussissent leurs deux lancers francs ?

Exercice 44

Dans un chenil, on vaccine 15 chiots de façon indépendante.
Lors des vaccinations précédentes, 20% des chiots ont présenté une forte réaction au vaccin. Soit X la variable aléatoire qui, à un groupe de 15 chiots, associe le nombre de chiots qui ont eu une réaction forte suite à cette vaccination.

1. Quelle est la loi suivie par X ? En préciser les paramètres.
2. Calculer la probabilité de l'événement $\{X = 1\}$. Comment interpréter cet événement ?
3. Calculer la probabilité qu'au moins deux des chiots aient eu une forte réaction.

Exercice 45

Dans une fabrique d'appareils photo numériques, 97% des appareils sont conformes. On stocke l'ensemble des appareils dans des conteneurs de 300 unités.
Soit X la variable aléatoire qui, à chaque conteneur, associe le nombre d'appareils conformes.
On suppose que la production est suffisamment grande pour qu'on puisse assimiler cette épreuve à un tirage avec remise.

1. Quelle est la loi suivie par X ? En préciser les paramètres.
2. Déterminer $P(X = 290)$.
3. Déterminer, à 10^{-3} près, la probabilité qu'il y ait au maximum un appareil non conforme dans le conteneur.

Exercice 46

Dans une population de grand effectif, on a observé que 5% des individus sont allergiques au médicament A et que 40% sont allergiques au médicament B.
Ces allergies sont détectées par des tests effectués en laboratoire et ce de façon indépendante. On examine un échantillon de n analyses choisies au hasard. La variable aléatoire X associe à ces n analyses le nombre d'individus allergiques à A qu'elles révèlent.

1. Quelle est la loi de probabilité suivie par X ?
2. On suppose que $n = 10$. Calculer, à 10^{-2} près, les probabilités de chacun des événements suivants :
   — aucune analyse ne révèle l'allergie à A ;
   — au moins deux analyses révèlent l'allergie à A.
3. Un organisme tiers établit que 2% des individus sont allergiques à A et B simultanément. Peut-on en conclure que les événements « être allergique à A » et « être allergique à B » sont indépendants ?
4. On considère la variable aléatoire Y qui suit la loi binomiale de paramètres $n = 100$ et $p = 0,4$.
   (a) Déterminer les entiers a et b tels que a est le plus petit entier tel que $P(Y \leq a) > 0,025$ et b est le plus petit entier tel que $P(Y \leq b) \geq 0,975$.
   (b) En déduire un intervalle I tel que $P(Y \in I) \geq 0,95$.
   (c) Dans un échantillon de 100 analyses, on a observé que 30 individus révèlent l'allergie à B. Que peut-on en conclure ?