Conjecture à la calculatrice

Exercice 1

On s'intéresse au nombre d'abonnés d'une plateforme de streaming de musique en France. En 2020, 30000 personnes sont abonnées à la plateforme. Chaque année, 90% des abonnés se réabonnent et il y a 10000 nouveaux abonnés.

1. Déterminer le nombre d'abonnés en 2021 et en 2022.
2. On note u_n le nombre d'abonnés (exprimé en milliers) en $2020+n$.
   (a) Donner la valeur de u_0, u_1 et u_2.
   (b) À l'aide de la calculatrice, déterminer les valeurs de u_{10}, u_{20} et u_{50}.
   (c) Conjecturer la limite de la suite (u_n).

Exercice 2

À l'aide de la calculatrice, conjecturer si les suites dont on donne le terme général admettent ou non une limite. La préciser dans ce cas.

1. $u_n = (-1)^n \times n$
2. $v_n = \frac{6n-3}{n+5}$
3. $w_n = n^2 - 2n$
4. $z_0 = 1$, $z_{n+1} = \frac{1}{2}z_n + 1$
5. $t_n = 0,9^n$

Définition de la limite

Exercice 3

Soit (v_n) la suite définie, pour tout $n \in \mathbb{N}$, par $v_n = 2 + 0,7^n$.

1. Conjecturer la limite de la suite (v_n).
2. Justifier que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n > 2$.
3. On admet que la suite (v_n) est strictement décroissante. À l'aide de la calculatrice, déterminer le plus petit entier naturel n tel que :
   (a) $v_n < 2,1$
   (b) $v_n < 2,01$
   (c) $v_n < 2,001$

Exercice 4

Soit (u_n) la suite définie, pour tout $n \in \mathbb{N}$, par $u_n = -n^2 + 5$.

1. Conjecturer la limite de la suite (u_n).
2. À l'aide de la calculatrice, déterminer le plus petit entier naturel n tel que :
   (a) $u_n < -10$
   (b) $u_n < -100$
   (c) $u_n < -1000$
3. Retrouver les résultats précédent par le calcul.

Exercice 5

Soit (u_n) la suite définie sur $\mathbb{N}$ par $u_n = 3n - 5$.

1. Sans calculatrice, déterminer à partir de quel rang $u_n > 1000$? $u_n > 10^6$?
2. En citant la définition, montrer que (u_n) diverge vers $+\infty$.

Exercice 6

Soit (v_n) la suite définie sur $\mathbb{N}$ par $u_n = 2 + \frac{1}{n^2}$.

1. À partir de quel rang a-t-on $v_n \in]1,99; 2,01[$?
2. En citant la définition, montrer que (v_n) converge vers 2.

Exercice 7 — Logique

Voici une proposition : « Si la suite (u_n) converge vers l, alors à partir d'un certain rang, tous les termes u_n appartiennent à $]l-0,2; l+0,2[$. »

1. Cette proposition est-elle vraie ? Justifier.
2. (a) Énoncer la réciproque.
   (b) La réciproque est-elle vraie ? Justifier.

BONUS. Traduire en mathématiques la proposition.

Exercice 8 — </> Algorithme

Soit (v_n) la suite définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $v_n = \frac{1}{2n+1}$.

1. À l'aide de la calculatrice, conjecturer la limite de la suite (v_n).
2. On veut déterminer le plus petit entier naturel n tel que $v_n < 0,001$.
   (a) Compléter l'algorithme en Python ci-dessous pour qu'il réponde au problème.

```
n=0
v=...
while ...:
    n=....
    v=....
print(...)
```

   (b) Déterminer cet entier à l'aide de la calculatrice.

Exercice 9 </> Algorithme

Soit (u_n) la suite définie sur $\mathbb{N}$ par $u_0 = 2$ et, pour tout entier naturel n par $u_{n+1} = \frac{2}{3}u_n + \frac{1}{3}n + 1$. Compléter la fonction Python ci-dessous pour qu'elle retourne le premier terme de la suite strictement supérieur à 4.

```
def demarrer_1():
    u=2
    n=0
    while ...:
        n=...
        u=...
    return ...
```

Exercice 10 </> Algorithme

Soit la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par :

$$u_n = \frac{4n+1}{n+1}$$

1. Écrire un algorithme en Python permettant de déterminer le rang à partir duquel les termes u_n appartiennent à l'intervalle $]4-a; 4+a[$ où a est un réel strictement positif fixé.
2. En déduire la limite de (u_n).

Opérations sur les limites

Exercice 11

Déterminer la limite quand n tend vers $+\infty$ des suites suivantes dont on donne le terme général :

1. $u_n = n^2 + n - 5$
2. $v_n = n^2\sqrt{n} + 2$
3. $w_n = -\dfrac{1}{2n-5}$

Exercice 12

Déterminer les limites suivantes :

1. $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n^2} - 10$
2. $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} \times \frac{1}{n}$
3. $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{3}{1+\frac{1}{n}}$

Exercice 13

Déterminer la limite (quand n tend vers $+\infty$) des suites suivantes dont on donne le terme général :

1. $u_n = 3n^2 + 2n$
2. $v_n = 2n + n \times \sqrt{n}$
3. $w_n = -\dfrac{4}{2+\frac{1}{n}}$

Exercice 14

En utilisant les règles des opérations sur les limites, déterminer la limite des suites suivantes définies pour tout $n \in \mathbb{N}$, dont le terme général est :

1. $u_n = n^2 + 2n - 4$
2. $v_n = -n^3 + 5$
3. $w_n = \dfrac{5}{3+\sqrt{n}}$
4. $a_n = n \times \sqrt{n}$

Exercice 15

Déterminer la limite des suites suivantes :

1. (u_n) définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $u_n = 2n - 1$
2. (v_n) définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $v_n = -3 + \dfrac{5}{n+2}$

Exercice 16

Déterminer la limite des suites suivantes.

1. (u_n) définie pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ par $u_n = \left(n + \frac{1}{n}\right)\left(\frac{1}{n^4} - 5\right)$.
2. (v_n) définie pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ par $v_n = \dfrac{3+n}{2+\frac{1}{n}}$

Exercice 17

Déterminer la limite de la suite (u_n) définie pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ par $u_n = (2-n^2)\left(\dfrac{1}{\sqrt{n}} - 2\right)$ et de la suite (v_n) définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $v_n = \dfrac{n^2+n}{4}$.

Formes indéterminées

Exercice 18

Pour chaque suite suivante, montrer que l'on a une forme indéterminée et lever la forme indéterminée à l'aide d'une factorisation.

1. $u_n = -n^3 + 2n^2$
2. $v_n = n^2 - 3n + 1$

Exercice 19

Déterminer la limite des suites de terme général :

1. $u_n = \dfrac{3n+1}{5n+2}$
2. $v_n = \dfrac{2n}{1-n^2}$

Exercice 20

En factorisant dans un premier temps, déterminer la limite des suites suivantes :

1. (u_n) définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $u_n = n^2 - 2n$
2. (v_n) définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $v_n = n - n^3$

Exercice 21

Déterminer la limite des suites suivantes :

1. (u_n) définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $u_n = 3n - n^2 + 2$
2. (v_n) définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $v_n = \dfrac{n+5}{n^2+1}$

Exercice 22

Déterminer la limite des suites suivantes :

1. (u_n) définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $u_n = n+3n^2-n^3$
2. (v_n) définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $v_n = \dfrac{n^3+2}{2n^2-1}$

Exercice 23

Déterminer les limites des suites de terme général :

1. $u_n = \dfrac{3n-12}{4-2n}$
2. $v_n = \dfrac{n^2+3}{n}$
3. $w_n = \dfrac{n^3+2n}{n^2-3}$
4. $z_n = n^2-n+2$
5. $t_n = \sqrt{n}-\sqrt{n-5}$

Exercice 24

Déterminer la limite des suites suivantes :

1. (u_n) définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $u_n = \dfrac{n^2+2n}{n+1}$
2. (v_n) définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $v_n = \dfrac{3n+\sqrt{n}}{2n+3}$

Exercice 25

Déterminer la limite des suites suivantes :

(a) $u_n = n^2-n$

(b) $u_n = -3n^2+6n+7$

(c) $u_n = \dfrac{-2n^2+3n+1}{3n^2+5n}$

(d) $u_n = -n^2+\sqrt{n}$

(e) $u_n = \dfrac{6\sqrt{n}-n}{\sqrt{n}+n}$

(f) $u_n = 5n^3-3n^2+2\sqrt{n}$

(g) $u_n = \dfrac{1}{\sqrt{n}}(-3n+5)$

Exercice 26

Soit (u_n) la suite définie pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ par $u_n = \dfrac{1}{n} \times (n^2-2)$.

1. Peut-on déterminer la limite de la suite (u_n) en utilisant les propriétés des opérations sur les limites ?
2. En développant, déterminer la limite de la suite (u_n).

Convergence de suites

Exercice 27

Vrai ou Faux ? Soient (u_n) et (v_n) deux suites telles que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n = \dfrac{1}{u_n}$. Les affirmations suivantes sont-elles vraies ou fausses ? On justifiera soigneusement.

1. « Si (u_n) converge, alors (v_n) converge aussi. »
2. « Si (u_n) diverge, alors (v_n) converge vers 0. »

Exercice 28

Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = -3$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $u_{n+1} = \dfrac{9}{6-u_n}$. Soit (v_n) la suite définie par $v_n = \dfrac{1}{u_n-3}$.

1. Démontrer que (v_n) est une suite arithmétique de raison $-\frac{1}{3}$.
2. En déduire l'expression de v_n puis de u_n en fonction de n.
3. Déterminer la limite de la suite (u_n).

Exercice 29

Soit (u_n) la suite définie pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ par $u_n = \dfrac{1}{n \times (n+1)}$.

1. Déterminer la limite de la suite (u_n).
2. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a : $u_n = \dfrac{1}{n} - \dfrac{1}{n+1}$.
3. En déduire, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, la somme $S_n = u_1+u_2+\cdots+u_n$.
4. Déterminer la limite en $+\infty$ de S_n.

En route vers le Grand Oral :

Exercice 30

Dans cet exercice, on modélise la population d'un village de la façon suivante :

- Au début de l'étude, il y a 900 habitants.
- Chaque année, 20% de la population de l'année précédente part et en même temps, 200 nouvelles personnes viennent s'installer.

On modélise la population du village à l'aide d'une suite (u_n). On prend $u_0 = 900$. u_n désigne la population du village n années après le début de l'étude.

1. Calculer u_1 et u_2.
2. Quelle est la relation qui existe entre u_{n+1} et u_n pour tout $n \in \mathbb{N}$?
3. Quel semble être le comportement de la population de ce village ?
4. Reprendre l'étude précédente lorsque la population initiale est de 10000 personnes. Que remarquez-vous ?

Exercices supplémentaires :

Exercice 31 Algorithme

On considère la suite u définie pour tout entier $n \geq 1$ par : $u_n = \dfrac{1}{n}$.

1. À quel résultat aboutit la mise en uvre de l'algorithme ci-contre ?

```
n prend la valeur 1
u prend la valeur 1
Tant Que u  10^-3 faire
    n prend la valeur n + 1
    u prend la valeur 1/n
Afficher n
```

2. Modifier cet algorithme pour obtenir la plus petite valeur N telle que, pour tout entier $n \geq N$, on a : $u_n < 10^{-6}$.
3. Soit ε un réel strictement positif. Démontrer qu'il existe un entier N tel que pour tout entier $n \geq N$, on a : $0 < u_n < \varepsilon$.

Exercice 32

Soit la suite (u_n) définie par $u_n = \dfrac{n^2+2}{n}$ pour $n \geq 1$.

1. Montrez qu'à partir d'un certain rang n_0 à déterminer, tous les termes de la suite appartiennent à l'intervalle $]10; +\infty[$.
2. Soit A un réel aussi grand que l'on veut (on peut supposer $A \geq 1$).
Montrez qu'à partir d'un certain rang n_0 à déterminer en fonction de A, tous les termes de la suite appartiennent à l'intervalle $]A; +\infty[$.
3. En déduire la limite de la suite (u_n).

Exercice 33 Algorithme

Nous allons utiliser la série de Leibniz pour approximer π.
On considère la suite (u_n) définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $u_n = \dfrac{(-1)^n}{2n+1}$.
On note S_n la somme des n premiers termes de la suite (u_n).
On admet que (S_n) converge vers $\frac{\pi}{4}$, mais la convergence est très lente.

Compléter le programme en Python ci-dessous pour qu'il calcule et affiche S_{100}, puis qu'il affiche $4 \times S_{100}$.

```
S = 0
u = 0
for i in range(........):
    u = ...
    S = ...
print(....)
print(....)
```