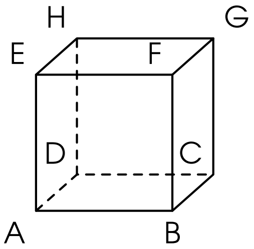
Lorsque cela est nécessaire, on se place dans un repère $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ de l'espace.

Lorsque l'exercice désigne le cube $ABCDEFGH$, il se réfère au cube représenté ci-contre.



Premiers repérages

Exercice 1

1. Les coordonnées de $\vec{u}$ dans la base $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ sont $(3; -2; 1)$.
2. Si $\overrightarrow{OA} = -2\vec{i} + \vec{j} + 3\vec{k}$, alors les coordonnées du point A dans le repère $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ sont $A(-2; 1; 3)$.

Exercice 2

Dans le repère $(A; \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE})$:

- A est à l'origine : $A(0; 0; 0)$
- B est tel que $\overrightarrow{AB} = 1 \cdot \overrightarrow{AB} + 0 \cdot \overrightarrow{AD} + 0 \cdot \overrightarrow{AE}$: $B(1; 0; 0)$
- C est tel que $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}$: $C(1; 1; 0)$
- F est tel que $\overrightarrow{AF} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AE}$: $F(1; 0; 1)$
- G est tel que $\overrightarrow{AG} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AE}$: $G(1; 1; 1)$

Exercice 3

$$\vec{w} = 3\vec{u} + 2\vec{v} \Leftrightarrow \vec{w} = 3\begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ -3 \end{pmatrix} + 2\begin{pmatrix} 0 \\ -5 \\ 7 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \vec{w}\begin{pmatrix} 6 \\ 12 \\ -9 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ -10 \\ 14 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \vec{w}\begin{pmatrix} 6 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix}$$

Exercice 4

1. $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} x_B - x_A \\ y_B - y_A \\ z_B - z_A \end{pmatrix} \Leftrightarrow \overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} -1-9 \\ 4+4 \\ 3-1 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} -10 \\ 8 \\ 2 \end{pmatrix}$
2. Le milieu I de $[AB]$ a pour coordonnées : $I\left(\frac{x_A + x_B}{2}; \frac{y_A + y_B}{2}; \frac{z_A + z_B}{2}\right) \Leftrightarrow I\left(\frac{9-1}{2}; \frac{4-4}{2}; \frac{1+3}{2}\right) \Leftrightarrow$ $I(4; 0; 2)$

Exercice 5

1. $\overrightarrow{AB}((0; -1; 2) - (-1; 2; 3)) \Leftrightarrow \overrightarrow{AB}(1; -3; -1)$
   $\overrightarrow{AC}((2; -7; 0) - (-1; 2; 3)) \Leftrightarrow \overrightarrow{AC}(3; -9; -3)$
2. (a) On remarque que $\overrightarrow{AC} = 3\overrightarrow{AB}$ car $(3; -9; -3) = 3(1; -3; -1)$.
   Donc les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont colinéaires.
   (b) On peut en déduire que les points A, B et C sont alignés.

Exercice 6

Pour que ABCD soit un parallélogramme, il faut que $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$.
$\overrightarrow{AB}((2; 0; 6) - (1; 0; 4)) \Leftrightarrow \overrightarrow{AB}(1; 0; 2)$
$\overrightarrow{DC}((3; 4; 0) - (2; 4; -2)) \Leftrightarrow \overrightarrow{DC}(1; 0; 2)$
On a bien $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$, donc ABCD est un parallélogramme.

Exercice 7

1. $2\vec{u} - 3\vec{v}(2(3; 1; 2) - 3(3; -2; 4)) \Leftrightarrow 2\vec{u} - 3\vec{v}((6; 2; 4) - (9; -6; 12)) \Leftrightarrow 2\vec{u} - 3\vec{v}(-3; 8; -8)$
2. On remarque que $2\vec{u} - 3\vec{v} = \vec{w}$, donc $\vec{w} = 2\vec{u} - 3\vec{v}$.
   Ceci montre que $\vec{w}$ s'exprime comme combinaison linéaire de $\vec{u}$ et $\vec{v}$, donc les vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ sont coplanaires.

Exercice 8

1. $\vec{u} - \vec{v} + \vec{w}((-3; 2; 4) - (-1; 2; 1) + (2; 0; -3))$
   $\Leftrightarrow \vec{u} - \vec{v} + \vec{w}((-3; 2; 4) + (1; -2; -1) + (2; 0; -3))$
   $\Leftrightarrow \vec{u} - \vec{v} + \vec{w}(0; 0; 0) = \vec{0}$
2. On peut en déduire que $\vec{u} = \vec{v} - \vec{w}$, donc les trois vecteurs sont liés par une relation linéaire et sont donc coplanaires.

Bases de plan et de l'espace

Exercice 9

1. La droite qui passe par D et est dirigée par le vecteur $\overrightarrow{HF}$ est la droite (DB).
2. La droite qui passe par F et est dirigée par le vecteur $\overrightarrow{ED}$ est la droite (FC).
3. Les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AD}$ engendrent la direction du plan $(EFGH)$ passant par le point E.
4. Les vecteurs $\overrightarrow{AH}$ et $\overrightarrow{CH}$ engendrent la direction du plan (BEG) passant par le point B.

Exercice 10

1. Dans le triangle ABC, les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ ne sont pas colinéaires (car A, B et C ne sont pas alignés). Ils forment donc une base du plan (ABC).

2. (a) (AI) et (BC) sont sécantes en I.
Les vecteurs $\overrightarrow{AI}$ et $\overrightarrow{BC}$ ne sont pas colinéaires.
Donc $(\overrightarrow{AI}, \overrightarrow{BC})$ est une base du plan (ABC).
(b) On peut compléter avec $\overrightarrow{AD}$ pour former la base $(\overrightarrow{AI}, \overrightarrow{BC}, \overrightarrow{AD})$ de l'espace.

3. Pour vérifier si $(\overrightarrow{AI}, \overrightarrow{AE}, \overrightarrow{JC})$ est une base de l'espace, il faut vérifier que ces trois vecteurs ne sont pas coplanaires.
Ici, $\overrightarrow{JC} = \overrightarrow{EI} = -\overrightarrow{AE} + \overrightarrow{AI}$.
Donc $\overrightarrow{JC}, \overrightarrow{AE}$ et $\overrightarrow{AI}$ sont coplanaires.
Donc $(\overrightarrow{JC}, \overrightarrow{AE}, \overrightarrow{AI})$ n'est pas une base de l'espace.

Exercice 11

1. (a)

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AI} &= \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BI}\\ &= \overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{BC}\\ &= \overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{BA} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}\\ &= \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}\end{aligned}$$

(b)

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AG} &= \overrightarrow{AI} + \overrightarrow{IB}\\ &= \overrightarrow{AI} - \frac{1}{3}\overrightarrow{BC}\end{aligned}$$

2. (a) On a :

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AI} &= \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BJ}\\ &= \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BI} + \overrightarrow{IJ}\\ &= \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BI} + \overrightarrow{AD}\\ &= \overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{AD}\\ &= \overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{BA} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD}\\ &= \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD}\end{aligned}$$

(b)

$$\begin{aligned}\overrightarrow{DI} &= \overrightarrow{DA} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BI}\\ &= -\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{BC}\\ &= -\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{BA} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}\\ &= -\overrightarrow{AD} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}\end{aligned}$$

Exercice 12

1. (a) De $\overrightarrow{AE} + \overrightarrow{DE} = \vec{0}$, on déduit $\overrightarrow{AE} = -\overrightarrow{DE} = \overrightarrow{ED}$.
Donc E est le milieu du segment $[AD]$.
(b) De $\overrightarrow{AF} - \overrightarrow{BF} - \overrightarrow{CF} = \vec{0}$, on a $\overrightarrow{AF} = \overrightarrow{BF} + \overrightarrow{CF}$.
Cela signifie que F est combinaison linéaire de $\overrightarrow{BF}$ et $\overrightarrow{CF}$.
Ainsi $\overrightarrow{AF}$, $\overrightarrow{BF}$ et $\overrightarrow{CF}$ sont coplanaires.
F appartient donc au même plan que A, B et C soit (ABC).

De même $\overrightarrow{BG} + \overrightarrow{CG} + \overrightarrow{DG} = \vec{0}$, on déduit que $\overrightarrow{BG}$, $\overrightarrow{CG}$ et $\overrightarrow{DG}$ sont coplanaire.
Donc G appartient au plan (BCD).

2. (a) $\overrightarrow{AE} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AD}$
(b) $\overrightarrow{AF} = \overrightarrow{BF} + \overrightarrow{CF}$
$\overrightarrow{AF} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AF} + \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AF}$
$\overrightarrow{AF} = -\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC} + 2\overrightarrow{AF}$
$-\overrightarrow{AF} = -\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC}$
$\overrightarrow{AF} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$
(c) $\overrightarrow{EF} = \overrightarrow{EA} + \overrightarrow{AF}$
$\overrightarrow{EF} = \overrightarrow{AF} - \overrightarrow{AE}$
$\overrightarrow{EF} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} - \frac{1}{2}\overrightarrow{AD}$

3. (a) $\overrightarrow{AG} = \frac{1}{3}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD})$
$\overrightarrow{AG} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AC} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AD}$
(b) $\overrightarrow{EG} = \overrightarrow{EA} + \overrightarrow{AG} = \overrightarrow{AG} - \overrightarrow{AE} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AC} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AD} - \frac{1}{2}\overrightarrow{AD}$
$= \frac{1}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AC} - \frac{1}{6}\overrightarrow{AD}$
Et $\overrightarrow{EF} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} - \frac{1}{2}\overrightarrow{AD}$
On voit que $\overrightarrow{EG} = \frac{1}{3}\overrightarrow{EF}$, donc les vecteurs sont colinéaires.
Par conséquent, les points E, F et G sont alignés.

Repérages dans l'espace

Exercice 13

Pour que ABCD soit un parallélogramme, il faut que $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$.
$\overrightarrow{AB} = (5;1;-2) - (3;0;-1) = (2;1;-1)$
Si $D(x;y;z)$, alors $\overrightarrow{DC} = (-3;2;3) - (x;y;z) = (-3-x;2-y;3-z)$
Pour que $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$:

$$-3 - x = 2 \Rightarrow x = -5 \quad (1)$$
$$2 - y = 1 \Rightarrow y = 1 \quad (2)$$
$$3 - z = -1 \Rightarrow z = 4 \quad (3)$$

Donc $D(-5;1;4)$.

Exercice 14

Pour un parallélépipède $ABCDEFGH$, on a :

— $\overrightarrow{AB} = (0;5;-1)$

— $\overrightarrow{AD} = (-3;1;-1)$

— $\overrightarrow{AE} = (2;2;3)$

Les coordonnées des autres sommets sont :

— $C = A + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} = (1;-2;3) + (0;5;-1) + (-3;1;-1) = (-2;4;1)$

— $F = A + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AE} = (1;-2;3) + (0;5;-1) + (2;2;3) = (3;5;5)$

— $G = A+\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AE} = (1;-2;3)+(0;5;-1)+(-3;1;-1) + (2;2;3) = (0;6;4)$

— $H = A + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AE} = (1;-2;3) + (-3;1;-1) + (2;2;3) = (0;1;5)$

Exercice 15

1. Pour que $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ forment une base d'un plan, ils doivent être non colinéaires.
   Si $\overrightarrow{u} = k\overrightarrow{v}$, alors $(-5;6;-4) = k(1;0;-2)$
   Cela donnerait $-5 = k$, $6 = 0$ et $-4 = -2k$.
   La deuxième équation est impossible, donc les vecteurs ne sont pas colinéaires et forment bien une base d'un plan.
2. Pour que $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$ et $\overrightarrow{w}$ forment une base de l'espace, ils doivent être non coplanaires.
   Il faut vérifier qu'il n'existe pas de réels λ et μ tels que $\overrightarrow{w} = \lambda\overrightarrow{u} + \mu\overrightarrow{v}$.
   $(0;3;5) = \lambda(-5;6;-4) + \mu(1;0;-2)$
   Cela donne le système :
   $$-5\lambda + \mu = 0 \qquad (4)$$
   $$6\lambda = 3 \qquad (5)$$
   $$-4\lambda - 2\mu = 5 \qquad (6)$$
   De la deuxième équation : $\lambda = \frac{1}{2}$
   De la première : $\mu = 5\lambda = \frac{5}{2}$
   Vérification dans la troisième : $-4 \cdot \frac{1}{2} - 2 \cdot \frac{5}{2} = -2 - 5 = -7 \neq 5$
   Le système n'a pas de solution, donc les vecteurs forment bien une base de l'espace.

Exercice 16

1. $\overrightarrow{u}(1;2;3)$ et $\overrightarrow{v}(4;5;6)$
   Si $\overrightarrow{u} = k\overrightarrow{v}$, alors $(1;2;3) = k(4;5;6)$
   Cela donnerait $1 = 4k$, $2 = 5k$ et $3 = 6k$, soit $k = \frac{1}{4}$, $k = \frac{2}{5}$ et $k = \frac{1}{2}$.
   Ces valeurs sont différentes, donc les vecteurs ne sont pas colinéaires et forment une base d'un plan.
2. $\overrightarrow{u}(3;9;-6)$ et $\overrightarrow{v}(2;6;-4)$
   On remarque que $\overrightarrow{u} = \frac{3}{2}\overrightarrow{v}$ car $(3;9;-6) = \frac{3}{2}(2;6;-4)$.
   Les vecteurs sont colinéaires et ne forment pas une base d'un plan.
3. $\overrightarrow{u}(4;-2;1)$ et $\overrightarrow{v}(2;-1;0)$
   Si $\overrightarrow{u} = k\overrightarrow{v}$, alors $(4;-2;1) = k(2;-1;0)$
   Cela donnerait $4 = 2k$, $-2 = -k$ et $1 = 0$.
   La troisième équation est impossible, donc les vecteurs ne sont pas colinéaires et forment une base d'un plan.

Exercice 17

Pour que $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ soient colinéaires, il faut qu'il existe un réel k tel que $\overrightarrow{u} = k\overrightarrow{v}$.
$(t-5;t;-2) = k(3;-2;t)$
Cela donne :
$$t - 5 = 3k \qquad (7)$$
$$t = -2k \qquad (8)$$
$$-2 = kt \qquad (9)$$
De la deuxième équation : $k = -\frac{t}{2}$
En substituant dans la première : $t - 5 = 3 \cdot (-\frac{t}{2}) = -\frac{3t}{2}$
$t - 5 = -\frac{3t}{2}$
$2t - 10 = -3t$
$5t = 10$
$t = 2$
Vérification : si $t = 2$, alors $k = -1$ et la troisième équation devient $-2 = (-1) \cdot 2 = -2$ OK
Donc $t = 2$.

Exercice 18

1. Pour $\overrightarrow{u}(1;0;3)$, $\overrightarrow{v}(2;1;0)$ et $\overrightarrow{w}(0;-4;-2)$
   Il faut vérifier qu'il n'existe pas de réels λ et μ tels que $\overrightarrow{w} = \lambda\overrightarrow{u} + \mu\overrightarrow{v}$.
   $(0;-4;-2) = \lambda(1;0;3) + \mu(2;1;0)$
   Cela donne :
   $$\lambda + 2\mu = 0 \qquad (10)$$
   $$\mu = -4 \qquad (11)$$
   $$3\lambda = -2 \qquad (12)$$
   De la deuxième : $\mu = -4$ De la troisième : $\lambda = -\frac{2}{3}$
   Vérification dans la première : $-\frac{2}{3} + 2(-4) = -\frac{2}{3} - 8 = -\frac{26}{3} \neq 0$
   Le système n'a pas de solution, donc les vecteurs forment une base de l'espace.
2. Pour $\overrightarrow{u}(3;3;3)$, $\overrightarrow{v}(6;0;9)$ et $\overrightarrow{w}(2;-2;2)$
   $(2;-2;2) = \lambda(3;3;3) + \mu(6;0;9)$
   Cela donne :
   $$3\lambda + 6\mu = 2 \qquad (13)$$
   $$3\lambda = -2 \qquad (14)$$
   $$3\lambda + 9\mu = 2 \qquad (15)$$
   De la deuxième : $\lambda = -\frac{2}{3}$
   En substituant dans la première : $3(-\frac{2}{3}) + 6\mu = 2 \Rightarrow -2 + 6\mu = 2 \Rightarrow \mu = \frac{2}{3}$

Vérification dans la troisième : $3(-\frac{2}{3}) + 9(\frac{2}{3}) = -2 + 6 = 4 \neq 2$
Le système n'a pas de solution, donc les vecteurs forment une base de l'espace.

Exercice 19

1. Pour $\vec{u}(0;3;2)$, $\vec{v}(3;9;18)$ et $\vec{w}(1;0;4)$
   Vérifions s'il existe λ et μ tels que $\vec{w} = \lambda\vec{u} + \mu\vec{v}$.
   $(1;0;4) = \lambda(0;3;2) + \mu(3;9;18)$
   Cela donne :
   $$3\mu = 1 \Rightarrow \mu = \frac{1}{3} \quad (16)$$
   $$3\lambda + 9\mu = 0 \quad (17)$$
   $$2\lambda + 18\mu = 4 \quad (18)$$
   De la première : $\mu = \frac{1}{3}$
   Substitution dans la deuxième : $3\lambda + 9 \cdot \frac{1}{3} = 0 \Rightarrow 3\lambda + 3 = 0 \Rightarrow \lambda = -1$
   Vérification dans la troisième : $2(-1)+18\cdot\frac{1}{3} = -2 + 6 = 4$
   Le système a une solution, donc les vecteurs sont coplanaires et ne forment pas une base de l'espace.
2. Pour $\vec{u}(1;-1;0)$, $\vec{v}(0;2;1)$ et $\vec{w}(2;0;1)$
   $(2;0;1) = \lambda(1;-1;0) + \mu(0;2;1)$
   Cela donne :
   $$\lambda = 2 \quad (19)$$
   $$-\lambda + 2\mu = 0 \quad (20)$$
   $$\mu = 1 \quad (21)$$
   De la première : $\lambda = 2$ De la troisième : $\mu = 1$
   Vérification dans la deuxième : $-2+2(1) = 0$

   Le système a une solution, donc les vecteurs sont coplanaires et ne forment pas une base de l'espace.

Exercice 20

1. Pour $\vec{u}(3;-9;6)$, $\vec{v}(1;-3;2)$ et $\vec{w}(-2;6;-4)$
   On remarque que $\vec{u} = 3\vec{v}$ et $\vec{w} = -2\vec{v}$.
   Ou encore que $\vec{v} - \vec{u} = \vec{w}$
   Les trois vecteurs sont tous colinéaires à $\vec{v}$, donc ils sont coplanaires et ne forment pas une base de l'espace.
2. Pour $\vec{u}(0;4;-5)$, $\vec{v}(5;1;3)$ et $\vec{w}(2;-6;0)$
   Vérifions s'il existe λ et μ tels que $\vec{w} = \lambda\vec{u}+\mu\vec{v}$.
   $(2;-6;0) = \lambda(0;4;-5) + \mu(5;1;3)$
   Cela donne :
   $$5\mu = 2 \Rightarrow \mu = \frac{2}{5} \quad (22)$$
   $$4\lambda + \mu = -6 \quad (23)$$
   $$-5\lambda + 3\mu = 0 \quad (24)$$
   De la première : $\mu = \frac{2}{5}$
   Substitution dans la deuxième : $4\lambda + \frac{2}{5} = -6 \Rightarrow 4\lambda = -6 - \frac{2}{5} = -\frac{32}{5} \Rightarrow \lambda = -\frac{8}{5}$
   Vérification dans la troisième : $-5(-\frac{8}{5})+3(\frac{2}{5}) = 8 + \frac{6}{5} = \frac{46}{5} \neq 0$
   Le système n'a pas de solution, donc les vecteurs forment une base de l'espace.

Exercice 21

Soit $\vec{t} = a\vec{u} + b\vec{v} + c\vec{w}$ avec $\vec{t}(3;1;2)$.
$(3;1;2) = a(1;0;0) + b(1;1;0) + c(1;1;1)$
$= (a+b+c; b+c; c)$
Cela donne :
$$a + b + c = 3 \quad (25)$$
$$b + c = 1 \quad (26)$$
$$c = 2 \quad (27)$$
De la troisième : $c = 2$ De la deuxième : $b = 1-c = 1 - 2 = -1$ De la première : $a = 3 - b - c = 3 - (-1) - 2 = 2$
Donc dans la base $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$: $\vec{t}(2;-1;2)$.

Exercice 22

Soit $\vec{t} = a\vec{u} + b\vec{v} + c\vec{w}$ avec $\vec{t}(4;2;1)$.
$(4;2;1) = a(0;1;1) + b(2;3;4) + c(1;1;0)$
$= (2b + c; a + 3b + c; a + 4b)$
Cela donne :
$$2b + c = 4 \quad (28)$$
$$a + 3b + c = 2 \quad (29)$$
$$a + 4b = 1 \quad (30)$$
De la troisième : $a = 1 - 4b$
Substitution dans la deuxième : $(1 - 4b) + 3b + c = 2 \Rightarrow 1 - b + c = 2 \Rightarrow c = 1 + b$
Substitution dans la première : $2b + (1 + b) = 4 \Rightarrow 3b + 1 = 4 \Rightarrow b = 1$
Donc $c = 1 + 1 = 2$ et $a = 1 - 4(1) = -3$
Dans la base $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$: $\vec{t}(-3;1;2)$.

Exercice 23

1. Pour montrer que $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ est une base de l'espace, vérifions qu'il n'existe pas de relation $\lambda\vec{u}+\mu\vec{v}+\nu\vec{w} = \vec{0}$ avec $(\lambda, \mu, \nu) \neq (0, 0, 0)$.
   $\lambda(0;1;2) + \mu(1;1;30) + \nu(-1;3;1) = (0;0;0)$
   $(\mu - \nu; \lambda + \mu + 3\nu; 2\lambda + 30\mu + \nu) = (0;0;0)$
   Cela donne :
   $$\mu - \nu = 0 \quad (31)$$
   $$\lambda + \mu + 3\nu = 0 \quad (32)$$
   $$2\lambda + 30\mu + \nu = 0 \quad (33)$$
   De la première : $\mu = \nu$

Substitution dans la deuxième : $\lambda + \nu + 3\nu = 0 \Rightarrow \lambda = -4\nu$

Substitution dans la troisième : $2(-4\nu) + 30\nu + \nu = 0 \Rightarrow -8\nu + 31\nu = 0 \Rightarrow 23\nu = 0 \Rightarrow \nu = 0$

Donc $\mu = 0$ et $\lambda = 0$.

La seule solution est $(\lambda, \mu, \nu) = (0, 0, 0)$, donc les vecteurs forment une base de l'espace.

2. Soit $\vec{t} = a\vec{u} + b\vec{v} + c\vec{w}$ avec $\vec{t}(5; -4; 5)$.
$(5; -4; 5) = a(0; 1; 2) + b(1; 1; 30) + c(-1; 3; 1)$
$= (b - c; a + b + 3c; 2a + 30b + c)$
Cela donne :

$$b - c = 5 \quad (34)$$
$$a + b + 3c = -4 \quad (35)$$
$$2a + 30b + c = 5 \quad (36)$$

De la première : $b = 5 + c$

Substitution dans la deuxième : $a+(5+c)+3c = -4 \Rightarrow a = -9 - 4c$

Substitution dans la troisième : $2(-9 - 4c) + 30(5 + c) + c = 5$

$-18 - 8c + 150 + 30c + c = 5$

$132 + 23c = 5$

$23c = -127$

$c = -\frac{127}{23}$

Donc $b = 5 - \frac{127}{23} = \frac{115-127}{23} = -\frac{12}{23}$

Et $a = -9 + 4 \cdot \frac{127}{23} = -9 + \frac{508}{23} = \frac{-207+508}{23} = \frac{301}{23}$

Dans la base $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$: $\vec{t}(\frac{301}{23}; -\frac{12}{23}; -\frac{127}{23})$.

Colinéarité et coplanarité dans un repère

Exercice 24

$\overrightarrow{AB} = (3; 5; 1) - (-1; 6; -2) = (4; -1; 3)$
$\overrightarrow{AC} = (19; 1; 13) - (-1; 6; -2) = (20; -5; 15)$
On remarque que $\overrightarrow{AC} = 5\overrightarrow{AB}$ car $(20; -5; 15) = 5(4; -1; 3)$.
Les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont colinéaires, donc les points A, B et C sont alignés.

Exercice 25

$\overrightarrow{AB} = (3; 5; 7) - (2; 3; 4) = (1; 2; 3)$
$\overrightarrow{AC} = (1; 2; 3) - (2; 3; 4) = (-1; -1; -1)$
Pour que les points soient alignés, il faut que $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ soient colinéaires.
Si $\overrightarrow{AC} = k\overrightarrow{AB}$, alors $(-1; -1; -1) = k(1; 2; 3)$.
Cela donnerait $-1 = k$, $-1 = 2k$ et $-1 = 3k$.
De la première : $k = -1$ De la deuxième : $k = -\frac{1}{2}$
De la troisième : $k = -\frac{1}{3}$
Ces valeurs sont différentes, donc les vecteurs ne sont pas colinéaires.
Les points A, B et C ne sont pas alignés.

Exercice 26

1. $\overrightarrow{CD} = (4; 4; 2) - (8; 6; 4) = (-4; -2; -2)$
$\overrightarrow{CE} = 3\overrightarrow{CD} = 3\overrightarrow{CD} = 3(-4; -2; -2) = (-12; -6; -6)$
Donc $E = C + \overrightarrow{CE} = (8; 6; 4) + (-12; -6; -6) = (-4; 0; -2)$
On peut également résoudre un système :

$$\begin{cases} x_E - 8 &= 3 \times (-4) \\ y_E - 6 &= 3 \times (-2) \\ z_E - 4 &= 3 \times (-2) \end{cases}$$

2. $\overrightarrow{AB} = (-1; 6; 7) - (-3; 2; 1) = (2; 4; 6)$
$\overrightarrow{AE} = (-4; 0; -2) - (-3; 2; 1) = (-1; -2; -3)$
On remarque que $\overrightarrow{AB} = -2\overrightarrow{AE}$ car $(2; 4; 6) = -2(-1; -2; -3)$.
Les vecteurs sont colinéaires, donc les points A, B et E sont alignés.

Exercice 27 — Logique

La proposition est vraie.
En effet, si $\overrightarrow{AB}$ a une coordonnée nulle et que la coordonnée correspondante de $\overrightarrow{CD}$ n'est pas nulle, alors il ne peut pas exister de réel k tel que $\overrightarrow{AB} = k\overrightarrow{CD}$.
Par exemple, si $\overrightarrow{AB}(0; b; c)$ et $\overrightarrow{CD}(a; d; e)$ avec $a \neq 0$, alors l'équation $0 = ka$ avec $a \neq 0$ impose $k = 0$, mais alors les autres coordonnées devraient aussi être nulles, ce qui n'est généralement pas le cas.

Exercice 28

1. $\overrightarrow{AB} = (-2; 8; 4) - (-2; -14; -24) = (0; 22; 28)$
$\overrightarrow{AC} = (-1; 3; -7) - (-2; -14; -24) = (1; 17; 17)$
Si $\overrightarrow{AB} = k\overrightarrow{AC}$, alors $(0; 22; 28) = k(1; 17; 17)$.
De la première coordonnée : $0 = k \cdot 1 \Rightarrow k = 0$
Mais si $k = 0$, alors $\overrightarrow{AB} = (0; 0; 0)$, ce qui n'est pas le cas.
Donc les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ ne sont pas colinéaires.

2. $\overrightarrow{AD} = (-3; 2; 1) - (-2; -14; -24) = (-1; 16; 25)$
Pour que les points soient coplanaires, il faut que $\overrightarrow{AD}$ soit combinaison linéaire de $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$.
Cherchons λ et μ tels que $\overrightarrow{AD} = \lambda\overrightarrow{AB} + \mu\overrightarrow{AC}$.
$(-1; 16; 25) = \lambda(0; 22; 28) + \mu(1; 17; 17)$
$= (\mu; 22\lambda + 17\mu; 28\lambda + 17\mu)$
Cela donne :

$$\mu = -1 \quad (37)$$
$$22\lambda + 17\mu = 16 \quad (38)$$
$$28\lambda + 17\mu = 25 \quad (39)$$

De la première : $\mu = -1$

Substitution dans la deuxième : $22\lambda + 17(-1) = 16 \Rightarrow 22\lambda = 33 \Rightarrow \lambda = \frac{3}{2}$
Vérification dans la troisième : $28 \cdot \frac{3}{2} + 17(-1) = 42 - 17 = 25$ OK
Le système a une solution, donc les points A, B, C et D sont coplanaires.

Exercice 29

1. $\overrightarrow{AB} = (3;14;9) - (1;0;1) = (2;14;8)$
   $\overrightarrow{AC} = (12;5;0) - (1;0;1) = (11;5;-1)$
   Si $\overrightarrow{AB} = k\overrightarrow{AC}$, alors $(2;14;8) = k(11;5;-1)$.
   Cela donnerait $2 = 11k$, $14 = 5k$ et $8 = -k$.
   De la première : $k = \frac{2}{11}$ De la deuxième : $k = \frac{14}{5}$
   De la troisième : $k = -8$
   Ces valeurs sont différentes, donc les vecteurs ne sont pas colinéaires.
2. $\overrightarrow{AD} = (-2;3;4) - (1;0;1) = (-3;3;3)$
   Cherchons λ et μ tels que $\overrightarrow{AD} = \lambda\overrightarrow{AB} + \mu\overrightarrow{AC}$.
   $(-3;3;3) = \lambda(2;14;8) + \mu(11;5;-1)$
   $= (2\lambda + 11\mu; 14\lambda + 5\mu; 8\lambda - \mu)$
   Cela donne :

$$2\lambda + 11\mu = -3 \tag{40}$$
$$14\lambda + 5\mu = 3 \tag{41}$$
$$8\lambda - \mu = 3 \tag{42}$$

   De la troisième : $\mu = 8\lambda - 3$
   Substitution dans la première : $2\lambda + 11(8\lambda - 3) = -3$
   $2\lambda + 88\lambda - 33 = -3$
   $90\lambda = 30$
   $\lambda = \frac{1}{3}$
   Donc $\mu = 8 \cdot \frac{1}{3} - 3 = \frac{8}{3} - 3 = -\frac{1}{3}$
   Vérification dans la deuxième : $14 \cdot \frac{1}{3} + 5(-\frac{1}{3}) = \frac{14}{3} - \frac{5}{3} = \frac{9}{3} = 3$
   Le système a une solution, donc les points A, B, C et D sont coplanaires.

Exercice 30

$\overrightarrow{AB} = (3;0;4) - (2;3;4) = (1;-3;0)$
$\overrightarrow{AC} = (5;6;7) - (2;3;4) = (3;3;3)$
$\overrightarrow{AD} = (8;7;13) - (2;3;4) = (6;4;9)$
• On a $z_{\overrightarrow{AB}} = 0$, mais $z_{\overrightarrow{AC}} \neq 0$, les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ ne sont donc pas colinéaires.
• Par conséquent, pour que les points soient coplanaires, il faut que $\overrightarrow{AD}$ soit combinaison linéaire de $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$.
Cherchons λ et μ tels que $\overrightarrow{AD} = \lambda\overrightarrow{AB} + \mu\overrightarrow{AC}$.
$(6;4;9) = \lambda(1;-3;0) + \mu(3;3;3)$
$= (\lambda + 3\mu; -3\lambda + 3\mu; 3\mu)$
Cela donne :

$$\lambda + 3\mu = 6 \tag{43}$$
$$-3\lambda + 3\mu = 4 \tag{44}$$
$$3\mu = 9 \tag{45}$$

De la troisième : $\mu = 3$
Substitution dans la première : $\lambda + 3(3) = 6 \Rightarrow \lambda = -3$
Vérification dans la deuxième : $-3(-3) + 3(3) = 9 + 9 = 18 \neq 4$
Le système n'a pas de solution, donc les points A, B, C et D ne sont pas coplanaires.

Exercice 31

1. $\overrightarrow{AD} = (3;0;5) - (-3;0;1) = (6;0;4)$
   $\overrightarrow{BC} = (-5;2;-3) - (4;2;3) = (-9;0;-6)$
   On remarque que $\overrightarrow{BC} = -\frac{3}{2}\overrightarrow{AD}$ car $(-9;0;-6) = -\frac{3}{2}(6;0;4)$.
   Les vecteurs $\overrightarrow{AD}$ et $\overrightarrow{BC}$ sont colinéaires.
2. Comme $\overrightarrow{AD}$ et $\overrightarrow{BC}$ sont colinéaires, les droites (AD) et (BC) sont parallèles.
   Si de plus ces droites se coupent ou sont confondues, alors les points A, B, C et D sont coplanaires.

Exercice 32

1. $\overrightarrow{AB} = (2;0;1) - (1;2;3) = (1;-2;-2)$
   $\overrightarrow{AC} = (2;-1;3) - (1;2;3) = (1;-3;0)$
   Si $\overrightarrow{AB} = k\overrightarrow{AC}$, alors $(1;-2;-2) = k(1;-3;0)$.
   De la première coordonnée : $k = 1$ De la deuxième : $-2 = -3k \Rightarrow k = \frac{2}{3}$ De la troisième : $-2 = 0$ (impossible)
   Les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ ne sont pas colinéaires.
2. Pour que D appartienne au plan (ABC), il faut que $\overrightarrow{AD}$ soit combinaison linéaire de $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$.
   $\overrightarrow{AD} = (1;-3;z) - (1;2;3) = (0;-5;z-3)$
   Cherchons λ et μ tels que $\overrightarrow{AD} = \lambda\overrightarrow{AB} + \mu\overrightarrow{AC}$.
   $(0;-5;z-3) = \lambda(1;-2;-2) + \mu(1;-3;0)$
   $= (\lambda + \mu; -2\lambda - 3\mu; -2\lambda)$
   Cela donne :

$$\lambda + \mu = 0 \tag{46}$$
$$-2\lambda - 3\mu = -5 \tag{47}$$
$$-2\lambda = z - 3 \tag{48}$$

   De la première : $\mu = -\lambda$
   Substitution dans la deuxième : $-2\lambda - 3(-\lambda) = -5 \Rightarrow -2\lambda + 3\lambda = -5 \Rightarrow \lambda = -5$
   Donc $\mu = 5$ et de la troisième : $-2(-5) = z - 3 \Rightarrow 10 = z - 3 \Rightarrow z = 13$
   Pour $z = 13$, le point $D(1;-3;13)$ appartient au plan (ABC).

Exercice 33

1. ⓐ On a :
$\overrightarrow{AB} = B - A = (4-1\,;-5-2\,;6-3) = (3\,;-7\,;3)$
$\overrightarrow{AC} = C - A = (0-1\,;0-2\,;3-3) = (-1\,;-2\,;0)$
$\overrightarrow{AD} = D - A = (7-1\,;8-2\,;-9-3) = (6\,;6\,;-12)$

ⓑ Pour démontrer que ces vecteurs ne sont pas coplanaires, nous devons vérifier qu'aucun des trois vecteurs ne peut s'écrire comme combinaison linéaire des deux autres.

Cherchons s'il existe des réels α et β tels que $\overrightarrow{AD} = \alpha\overrightarrow{AB} + \beta\overrightarrow{AC}$.

Cela revient à résoudre le système :

$$\begin{cases} 6 = 3\alpha - \beta \\ 6 = -7\alpha - 2\beta \\ -12 = 3\alpha + 0\beta \end{cases}$$

De la troisième équation : $3\alpha = -12$, donc $\alpha = -4$.

En substituant dans la première équation : $6 = 3(-4) - \beta = -12 - \beta$, donc $\beta = -18$.

Vérifions avec la deuxième équation : $-7(-4) - 2(-18) = 28 + 36 = 64 \neq 6$.

Le système n'a pas de solution, donc les trois vecteurs ne sont pas coplanaires.

On peut en déduire que les points A, B, C et D ne sont pas coplanaires.

2. Pour calculer les coordonnées des milieux, on utilise la formule du milieu.
I, milieu de $[AB]$: $I = \frac{A+B}{2} = \frac{(1,2,3)+(4,-5,6)}{2} = \left(\frac{5}{2}\,;-\frac{3}{2}\,;\frac{9}{2}\right)$
J, milieu de $[CD]$: $J = \frac{C+D}{2} = \frac{(0,0,3)+(7,8,-9)}{2} = \left(\frac{7}{2}\,;4\,;-3\right)$

3. • Pour que $IACE$ soit un parallélogramme, on doit avoir $\overrightarrow{IA} = \overrightarrow{EC}$.
On a $\overrightarrow{IA} = A - I = (1,2,3) - \left(\frac{5}{2}, -\frac{3}{2}, \frac{9}{2}\right) = \left(-\frac{3}{2}, \frac{7}{2}, -\frac{3}{2}\right)$
Or $\overrightarrow{IA} = \overrightarrow{EC}$, ce qui donne :

$$\begin{cases} \frac{-3}{2} = 0 - x_E \\ \frac{7}{2} = 0 - y_E \\ \frac{-3}{2} = 3 - z_E \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{3}{2} = x_E \\ \frac{-7}{2} = y_E \\ \frac{9}{2} = z_E \end{cases}$$

Donc $E\left(\frac{3}{2}; \frac{-7}{2}; \frac{9}{2}\right)$

• Pour que $IBDF$ soit un parallélogramme, on doit avoir $\overrightarrow{IB} = \overrightarrow{FD}$.
$\overrightarrow{IB} = B - I = (4,-5,6) - \left(\frac{5}{2}, -\frac{3}{2}, \frac{9}{2}\right) = \left(\frac{3}{2}, -\frac{7}{2}, \frac{3}{2}\right)$
Donc $F\left(\frac{11}{2}; \frac{23}{2}; \frac{-21}{2}\right)$

4. Pour vérifier que J est le milieu de $[EF]$, calculons les coordonnées du milieu de $[EF]$:
Milieu de $[EF] = \frac{E+F}{2} = \frac{1}{2}\left[\left(\frac{3}{2}, \frac{-7}{2}, \frac{9}{2}\right) + \left(\frac{11}{2}, \frac{23}{2}, -\frac{21}{2}\right)\right]$
$= \frac{1}{2}\left(\frac{14}{2}, \frac{16}{2}, -\frac{12}{2}\right) = \frac{1}{2}(7, 8, -6) = \left(\frac{7}{2}, 4, -3\right)$
On retrouve bien les coordonnées de J, donc J est effectivement le milieu du segment $[EF]$.

Exercice 34

1. Dans le repère $(A\,;\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AH}, \overrightarrow{AI})$, en supposant que chaque cube a une arête de longueur 1 :
$A(0;0;0)$, $B(1;0;0)$, $C(2;0;0)$, $D(3;0;0)$
$E(3;1;0)$, $F(2;1;0)$, $G(1;1;0)$, $H(0;1;0)$
$I(0;0;1)$, $J(1;0;1)$, $K(2;0;1)$, $L(3;0;1)$
$M(3;1;1)$, $N(2;1;1)$, $O(1;1;1)$, $P(0;1;1)$

2. Calculons les coordonnées des vecteurs demandés :
$\overrightarrow{DN} = N - D = (2;1;1) - (3;0;0) = (-1;1;1)$
$\overrightarrow{AM} = M - A = (3;1;1) - (0;0;0) = (3;1;1)$
$\overrightarrow{HC} = C - H = (2;0;0) - (0;1;0) = (2;-1;0)$

3. Pour déterminer si ces vecteurs sont coplanaires, nous cherchons s'il existe des réels α et β tels que $\overrightarrow{HC} = \alpha\overrightarrow{DN} + \beta\overrightarrow{AM}$.
Cela revient à résoudre le système :

$$\begin{cases} 2 = -\alpha + 3\beta \\ -1 = \alpha + \beta \\ 0 = \alpha + \beta \end{cases}$$

Les équations 2 et 3 donnent $\alpha + \beta = -1$ et $\alpha + \beta = 0$, ce qui est impossible.
Le système n'a pas de solution, donc les trois vecteurs ne sont pas coplanaires.

Exercice 35

1. Dans le repère $(A\,;\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE})$, en considérant que le cube a une arête de longueur 1 :
$A(0;0;0)$ (origine du repère)
$B(1;0;0)$ (sur l'axe $\overrightarrow{AB}$)
$C(1;1;0)$ (translation de B par $\overrightarrow{AD}$)
$D(0;1;0)$ (sur l'axe $\overrightarrow{AD}$)
$E(0;0;1)$ (sur l'axe $\overrightarrow{AE}$)
$F(1;0;1)$ (translation de B par $\overrightarrow{AE}$)
$G(1;1;1)$ (translation de C par $\overrightarrow{AE}$)
$H(0;1;1)$ (translation de D par $\overrightarrow{AE}$)

2. Déterminons les coordonnées des points I et J :
$\overrightarrow{AI} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB}$
Comme $\overrightarrow{AB} = (1;0;0)$, on a $\overrightarrow{AI} = \frac{1}{3}(1;0;0) = \left(\frac{1}{3};0;0\right)$
Donc $I = A + \overrightarrow{AI} = (0;0;0) + \left(\frac{1}{3};0;0\right) = \left(\frac{1}{3};0;0\right)$

$\overrightarrow{AJ} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AD}$

Comme $\overrightarrow{AD} = (0;1;0)$, on a $\overrightarrow{AJ} = \frac{2}{3}(0;1;0) = \left(0;\frac{2}{3};0\right)$

Donc $J = A + \overrightarrow{AJ} = (0;0;0) + \left(0;\frac{2}{3};0\right) = \left(0;\frac{2}{3};0\right)$