

Exercice 1 Polynésie 2023 - J1

(X points)

*Les parties A et B peuvent être traitées indépendamment***Partie A**

On considère la fonction f définie sur \mathbb{R} par $f(x) = \left(x + \frac{1}{2}\right)e^{-x} + x$.

1. On détermine les limites de f en $-\infty$ et en $+\infty$.

- Limite en $-\infty$

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(x + \frac{1}{2}\right) = -\infty \\ \lim_{x \rightarrow -\infty} e^{-x} = +\infty \end{array} \right\} \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(x + \frac{1}{2}\right) e^{-x} = -\infty \quad \left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow -\infty} x = -\infty \end{array} \right\} \text{donc } \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$$

- Limite en $+\infty$

$f(x) = xe^{-x} + \frac{1}{2}e^{-x} + x$. On sait que $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^{-x} = 0$ et que

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty \text{ donc } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{e^x} = 0 \text{ donc } \lim_{x \rightarrow +\infty} xe^{-x} = 0.$$

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow +\infty} xe^{-x} = 0 \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{2}e^{-x} = 0 \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} x = +\infty \end{array} \right\} \text{donc } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$$

2. On admet que f est deux fois dérivable sur \mathbb{R} .

(a) Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = \left(x + \frac{1}{2}\right)e^{-x} + x$ donc

$$f'(x) = 1 \times e^{-x} + \left(x + \frac{1}{2}\right) \times (-1)e^{-x} + 1 = \left(-x + \frac{1}{2}\right)e^{-x} + 1, \text{ et donc}$$

$$f''(x) = -1 \times e^{-x} + \left(-x + \frac{1}{2}\right) \times (-1)e^{-x} = \left(x - \frac{3}{2}\right)e^{-x}.$$

(b) Le signe de f'' donne les variations de f' .

Pour tout x , $e^{-x} > 0$ donc $f''(x)$ est du signe de $\left(x - \frac{3}{2}\right)$.

- Si $x < \frac{3}{2}$, $f''(x) < 0$ donc f' est décroissante;
- Si $x > \frac{3}{2}$, $f''(x) > 0$ donc f' est croissante;
- Si $x = \frac{3}{2}$, $f''(x) = 0$ donc f' admet un minimum égal à
 $f'\left(\frac{3}{2}\right) = \left(-\frac{3}{2} + \frac{1}{2}\right)e^{-\frac{3}{2}} + 1 = 1 - e^{-\frac{3}{2}}$.

(c) La fonction f' admet pour minimum

$$f'\left(\frac{3}{2}\right) = 1 - e^{-\frac{3}{2}} \approx 0,78 > 0 ; \text{ donc pour tout } x \in \mathbb{R}, f'(x) > 0.$$

(d)

- La fonction f est dérivable sur \mathbb{R} donc continue sur \mathbb{R} .

- Pour tout réel x , $f'(x) > 0$ donc la fonction f est strictement croissante sur \mathbb{R} .

- $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$
- $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$

Donc, d'après le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires, l'équation $f(x) = 0$ admet une solution unique dans \mathbb{R} .

- (e) On appelle α la solution de l'équation $f(x) = 0$.

$$\left. \begin{array}{l} f(-1) \approx -2,36 < 0 \\ f(0) = 0,5 > 0 \end{array} \right\} \text{ donc } \alpha \in [-1 ; 0]$$

$$\left. \begin{array}{l} f(-0,3) \approx -0,03 < 0 \\ f(-0,2) \approx 0,17 > 0 \end{array} \right\} \text{ donc } \alpha \in [-0,3 ; -0,2]$$

$$\left. \begin{array}{l} f(-0,29) \approx -0,009 < 0 \\ f(-0,28) \approx 0,011 > 0 \end{array} \right\} \text{ donc } \alpha \in [-0,29 ; -0,28]$$

$$\left. \begin{array}{l} f(-0,286) \approx -0,001 < 0 \\ f(-0,285) \approx 0,0009 > 0 \end{array} \right\} \text{ donc } \alpha \in [-0,286 ; -0,285]$$

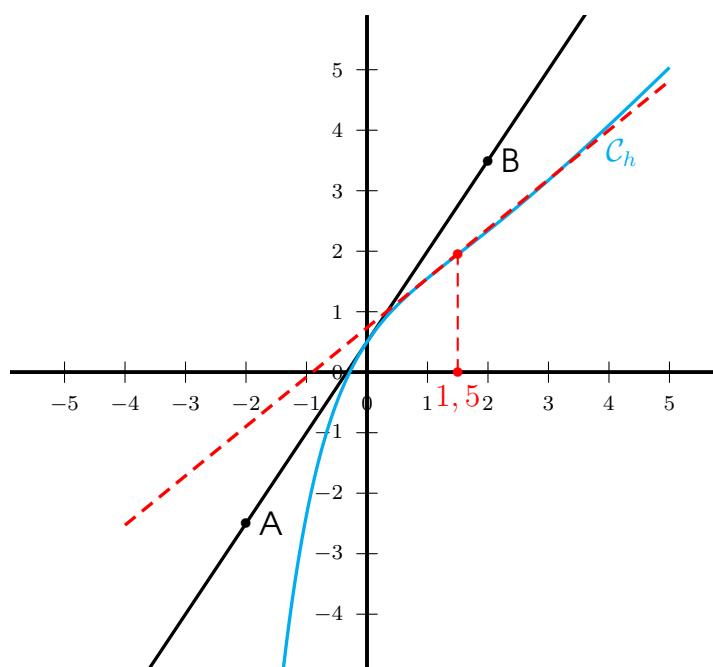
Donc $-0,285$ est une valeur approchée à 10^{-3} de la solution de l'équation $f(x) = 0$.

Partie B

On considère une fonction h , définie et dérivable sur \mathbb{R} , ayant une expression de la forme $h(x) = (ax + b)e^{-x} + x$, où a et b sont deux réels.

Dans un repère orthonormé ci-après figurent :

- la courbe représentative \mathcal{C}_h de la fonction h ;
- les points A et B de coordonnées respectives $(-2 ; -2,5)$ et $(2 ; 3,5)$.



1. Avec la précision permise par le graphique, on peut conjecturer que la courbe représentative de la fonction h admet un unique point d'inflexion d'abscisse 1,5.

2. On admet que $h''(x) = -\frac{3}{2}e^{-x} + xe^{-x}$.

$$h''(x) = 0 \iff -\frac{3}{2}e^{-x} + xe^{-x} = 0 \iff \left(x - \frac{3}{2}\right)e^{-x} = 0 \iff x - \frac{3}{2} = 0 \iff x = 1,5$$

La conjecture est donc vérifiée.

3. Déterminer une équation de la droite (AB) c'est chercher l'ensemble des points de coordonnées $(x ; y)$ tels que : $\frac{y - y_A}{x - x_A} = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}$.

$$\begin{aligned}\frac{y - y_A}{x - x_A} = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} &\iff \frac{y + 2,5}{x + 2} = \frac{3,5 + 2,5}{2 + 2} \iff \frac{y + 2,5}{x + 2} = \frac{6}{4} \iff y + 2,5 = \frac{6}{4}(x + 2) \\ &\iff y = \frac{3}{2}x + 3 - 2,5 \iff y = 1,5x + 0,5\end{aligned}$$

La droite (AB) a pour équation : $y = 1,5x + 0,5$.

4. La droite (AB) est tangente à la courbe représentative de la fonction h au point d'abscisse 0, donc $h'(0) = 1,5$.

$$h'(x) = a \times e^{-x} + (ax + b) \times (-1)e^{-x} + 1 = (-ax + a - b)e^{-x} + 1$$

$$h'(0) = 1,5 \iff (a - b)e^0 + 1 = 1,5 \iff a - b = 0,5$$

La droite (AB) coupe l'axe des ordonnées au point d'ordonnée 0,5 donc $h(0) = 0,5$.

$$h(0) = 0,5 \iff (0 + b)e^0 + 0 = 0,5 \iff b = 0,5$$

Comme $a - b = 0,5$, on en déduit que $a = 1$.

Donc $h(x) = (x + 0,5)e^{-x} + x = f(x)$.

Exercice 2 Madagascar 2021

1. La fonction g est continue et dérivable. $\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) = 1000x^{999} + 1$.

La fonction g' est continue et dérivable. $\forall x \in \mathbb{R}, g''(x) = 999 \times 1000x^{998} = 999000x^{998}$.

$\forall x \in \mathbb{R}, 999000x^{998} \geq 0$ et g'' s'annule sans changer de signe sur \mathbb{R} .

La fonction g est donc convexe sur \mathbb{R} .

Réponse b

2. D'après la représentation graphique de f' , on peut affirmer que $f'(0) = 1$. La pente de la tangente à \mathcal{C} au point d'abscisse 0 est égale à 1. Toute droite ayant la même pente est donc parallèle à cette tangente. C'est le cas de la droite d'équation $y = x$.

Réponse a

3. On considère la suite (u_n) définie pour tout entier naturel n par $u_n = \frac{(-1)^n}{n+1}$.

$$\forall n \in \mathbb{N}, -1 \leqslant (-1)^n \leqslant 1 \text{ donc } -\frac{1}{n+1} \leqslant u_n \leqslant \frac{1}{n+1}.$$

$$\text{Or } \forall n \in \mathbb{N}, n+1 \geqslant 1 \text{ donc } \frac{1}{n+1} \leqslant 1 \text{ et } -\frac{1}{n+1} \geqslant -1.$$

Donc $\forall n \in \mathbb{N}, -1 \leqslant u_n \leqslant 1$. La suite (u_n) est donc bornée.

Réponse c

4. Soit (v_n) une suite telle que $v_0 = k$ et $\forall n \in \mathbb{N}, v_n \times v_{n+1} < 0$. Cette inégalité nous permet d'affirmer que $\forall n \in \mathbb{N}$, deux termes consécutifs v_n et v_{n+1} sont de signes opposés. Donc les termes v_{n+1} et v_{n+2} le sont aussi. Donc on peut en déduire que $\forall n \in \mathbb{N}, v_n$ et v_{n+2} sont de même signe.

Donc v_0, v_2, \dots, v_{2k} , avec $k \in \mathbb{N}$ (tous les termes de rangs pairs), sont de même signe, donc du signe de k .

Réponse c

5. On considère la suite (w_n) définie pour tout entier naturel n par $w_{n+1} = 2w_n - 4$ et $w_2 = 8$.

$$\text{Donc } \forall n \in \mathbb{N}, w_n = \frac{w_{n+1} + 4}{2}.$$

$$w_1 = \frac{w_2 + 4}{2} = \frac{8 + 4}{2} = 6 \text{ et } w_0 = \frac{w_1 + 4}{2} = \frac{6 + 4}{2} = 5$$

Réponse b

Exercice 3 Madagascar 2021

L'objectif de cet exercice est d'étudier la suite (u_n) définie pour tout entier naturel n par :

$$\begin{cases} u_0 = 0 \\ u_1 = \frac{1}{2} \\ u_{n+2} = u_{n+1} - \frac{1}{4}u_n \end{cases}$$

Partie A : Conjecture

1. Voici le tableau complété (on peut calculer rapidement les termes à la main, puis vérifier à la calculatrice) :

n	0	1	2	3	4	5
u_n	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{5}{32}$

2. Par exploration à la calculatrice, les termes de la suite semblent décroître, tout en restant strictement positifs, on a $u_{100} \approx 8 \times 10^{-29}$, et $u_{1000} \approx 9 \times 10^{-299}$.

On suppose que la suite converge vers 0.

Partie B : Étude d'une suite auxiliaire

1. On a : $w_0 = u_1 - \frac{1}{2}u_0 = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \times 0 = \frac{1}{2}$.

2. On va établir la relation de récurrence de (w_n) . Soit n un entier naturel.

$$\begin{aligned} w_{n+1} &= u_{(n+1)+1} - \frac{1}{2}u_{(n+1)} \quad \text{en appliquant la définition de } w \text{ au rang } (n+1) \\ &= u_{n+2} - \frac{1}{2}u_{n+1} \\ &= \left(u_{n+1} - \frac{1}{4}u_n\right) - \frac{1}{2}u_{n+1} \quad \text{en appliquant la relation de récurrence de } u. \\ &= \frac{1}{2}u_{n+1} - \frac{1}{4}u_n \\ &= \frac{1}{2}\left(u_{n+1} - \frac{1}{2}u_n\right) \\ &= \frac{1}{2}w_n \quad \text{en appliquant la définition de } w \text{ au rang } n \end{aligned}$$

Ainsi, on a : $\forall n \in \mathbb{N}, w_{n+1} = \frac{1}{2}w_n$.

Cette relation de récurrence établit que (w_n) est une suite géométrique, de raison $q = \frac{1}{2}$, et de premier terme $w_0 = \frac{1}{2}$.

3. Puisque la suite est géométrique, on a la propriété classique :

$$\forall n \in \mathbb{N}, w_n = w_0 \times q^n = \frac{1}{2} \times \left(\frac{1}{2}\right)^n = \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}.$$

4. Soit n un entier naturel. On reprend la définition de (w_n) :

$$\begin{aligned} w_n = u_{n+1} - \frac{1}{2}u_n &\iff \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} = u_{n+1} - \frac{1}{2}u_n \quad \text{d'après l'expression explicite de } w_n \\ &\iff u_{n+1} = \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} + \frac{1}{2}u_n \end{aligned}$$

On arrive bien à la relation de récurrence demandée.

5. Pour tout n entier naturel, on pose : P_n l'affirmation : « $u_n = n \left(\frac{1}{2}\right)^n$ ».

Initialisation : On a d'une part $u_0 = 0$ et, d'autre part : $0 \times \left(\frac{1}{2}\right)^0 = 0 \times 1 = 0$.

L'affirmation est donc vraie au rang 0.

Héritéité : Pour un entier naturel n donné, on suppose que la propriété P_n est vraie, c'est-à-dire : $u_n = n \left(\frac{1}{2}\right)^n$.

$$\begin{aligned} \text{On a : } u_{n+1} &= \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} + \frac{1}{2}u_n \quad \text{d'après la relation de récurrence de la question B. 4} \\ &= \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} + \frac{1}{2} \times n \left(\frac{1}{2}\right)^n \quad \text{par hypothèse de récurrence} \\ &= \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} + n \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} \\ &= \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} \times (1+n) \\ u_{n+1} &= (n+1) \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} \quad \text{c'est l'affirmation } P_{n+1} \end{aligned}$$

Conclusion : L'affirmation P_0 est vraie, et, pour tout entier naturel n , la véracité de l'affirmation P_n est héréditaire, donc, par principe de récurrence :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = n \left(\frac{1}{2}\right)^n.$$

Partie C : Étude de la suite (u_n)

1. Soit n un entier naturel non nul, donc supérieur ou égal à 1 :

$$\begin{aligned} u_{n+1} - u_n &= (n+1) \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} - n \left(\frac{1}{2}\right)^n \quad \text{d'après la question B. 5.} \\ &= (n+1) \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} - n \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} \times 2 \\ &= \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} \times ((n+1) - 2n) \\ &= \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} \times (1-n) \end{aligned}$$

La différence $u_{n+1} - u_n$ est égale au produit de deux nombres de signe contraire, car, pour n entier naturel supérieur ou égal à 1 :

- $\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}$ est positif strictement;
- $(1-n)$ est négatif ou nul

La différence $u_{n+1} - u_n$ est donc négative ou nulle pour tout n supérieur ou égal à 1, on en déduit donc que la suite (u_n) est décroissante à partir du rang $n = 1$.

2. L'expression du terme général de la suite (u_n) permet d'affirmer que la suite est minorée par 0, car chaque terme est le produit de n , entier naturel, donc positif et de $\left(\frac{1}{2}\right)^n$, strictement positif, car $\frac{1}{2}$ est strictement positif.

De plus, la suite est décroissante, à partir du rang $n = 1$.

La suite est donc décroissante (à partir du rang $n = 1$) et minorée par 0 : on en déduit qu'elle converge, vers une limite ℓ dont on sait que $\ell \geqslant 0$.

3. On admet que la limite de la suite (u_n) est solution de l'équation : $\ell = \ell - \frac{1}{4}\ell$.

$$\begin{aligned}
\text{Résolvons cette équation : } \ell &= \ell - \frac{1}{4}\ell \iff \ell = \frac{3}{4}\ell \\
&\iff \ell - \frac{3}{4}\ell = 0 \\
&\iff \frac{1}{4}\ell = 0 \\
&\iff \ell = 0 \quad \text{car } \frac{1}{4} \neq 0
\end{aligned}$$

L'équation ayant une unique solution, puisque la limite doit être une solution de l'équation, on a donc la limite de la suite (u_n) qui est 0, l'unique solution de l'équation.

Cela vient confirmer notre conjecture de la **partie A**.

Exercice 4 Centres étrangers 2023 G2

S'il choisit de prendre les transports en commun un matin, il reprend les transports en commun le lendemain avec une probabilité égale à 0,8.

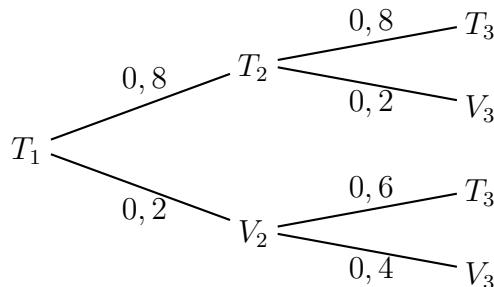
S'il utilise son vélo un matin, il reprend son vélo le lendemain avec une probabilité égale à 0,4.

Pour tout entier naturel n non nul, on note :

- T_n l'événement « Monsieur Durand utilise les transports en commun le n -ième jour »
- V_n l'événement « Monsieur Durand utilise son vélo le n -ième jour »
- On note p_n la probabilité de l'événement T_n ,

Le premier matin, il décide d'utiliser les transports en commun. Ainsi, la probabilité de l'événement T_1 est $p_1 = 1$.

1. 2^e et 3^e jours,



2. Calculer p_3

D'après la loi des probabilités totales : $p_3 = p(T_2 \cap T_3) + p(V_2 \cap T_3)$.

$p(T_2 \cap T_3) = p(T_2) \times p_{T_2}(T_3) = 0,8 \times 0,8 = 0,64$. De même :

$p(V_2 \cap T_3) = p(V_2) \times p_{V_2}(T_3) = 0,2 \times 0,6 = 0,12$.

Donc $p_3 = 0,64 + 0,12 = 0,76$.

3. Le 3^e jour, M. Durand utilise son vélo.

Calculer la probabilité qu'il ait pris les transports en commun la veille.

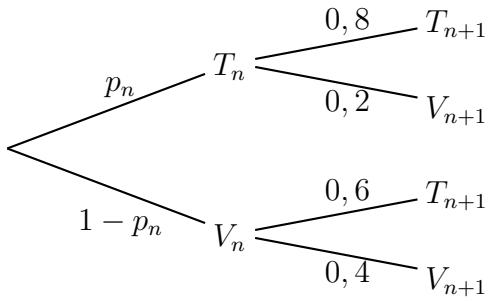
$$\text{On calcule } p_{V_3}(T_2) = \frac{p(V_3 \cap T_2)}{p(V_3)} = \frac{p(T_2 \cap V_3)}{p(V_3)}.$$

Or $p(V_3) = 1 - p_3 = 1 - 0,76 = 0,24$ et

$p(T_2 \cap V_3) = 0,8 \times 0,2 = 0,16$, d'où

$$p_{V_3}(T_2) = \frac{0,16}{0,24} = \frac{16}{24} = \frac{2}{3}.$$

4. Recopier et compléter l'arbre pondéré ci-dessous représentant la situation pour les n -ième et $(n+1)$ -ième jours.



5. Montrer que, pour tout entier naturel n non nul, $p_{n+1} = 0,2p_n + 0,6$.

On a $p_{n+1} = p(T_{n+1}) = p(T_n \cap T_{n+1}) + p(V_n \cap T_{n+1}) = 0,8p_n + 0,6(1-p_n) = 0,8p_n + 0,6 - 0,6p_n = 0,2p_n + 0,6$.

6. Montrer par récurrence que, pour tout entier naturel n non nul, on a

$$p_n = 0,75 + 0,25 \times 0,2^{n-1}.$$

Initialisation : pour $n = 1$, on a $p_1 = 0,75 + 0,25 \times 0,2^{1-1} = 0,75 + 0,25 \times 0,2^0 = 0,75 + 0,25 = 1$: la relation est vraie au rang 1.

Hérédité : soit $n \geq 1$ tel que $p_{n+1} = 0,75 + 0,25 \times 0,2^{n-1}$.

Alors d'après la question 5. $p_{n+1} = 0,2p_n + 0,6$, donc $p_{n+2} = 0,2p_{n+1} + 0,6$, d'où en utilisant l'hypothèse de récurrence :

$p_{n+2} = 0,2(0,75 + 0,25 \times 0,2^{n-1}) + 0,6 = 0,15 + 0,25 \times 0,2^n + 0,6 = 0,75 + 0,25 \times 0,2^n + 0,6$: l'égalité est vraie au rang $n + 1$.

Conclusion : la relation est vraie au rang et si elle vrai au rang n au moins égal à 1 elle l'est aussi au rang $n + 1$: d'après le principe de récurrence :

Pour tout entier naturel n non nul, $p_n = 0,75 + 0,25 \times 0,2^{n-1}$.

7. Déterminer la limite de la suite (p_n) et interpréter le résultat dans le contexte de l'exercice.

Comme $-1 < 0,2 < 1$, on sait que $\lim_{n \rightarrow +\infty} 0,2^{n-1} = 0$, donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} 0,25 \times 0,2^{n-1} = 0$ et par somme de limites $\lim_{n \rightarrow +\infty} p_n = 0,75 = \frac{3}{4}$.

Au bout d'un certain nombre de jours Monsieur Durand prendra les transports en commun 3 jours sur 4.