TD - Chapitre 1

E.1

> **Proposition-Définition :** tout polynôme du second degré $a\cdot x^2+b\cdot x+c$ admet une expression de la forme :
> $f : x \mapsto \alpha\cdot\left(x-\beta\right)^2+\gamma$
> où α, β, γ sont des nombres réels avec $\alpha\neq 0$.
> Cette expression s'appelle la **forme canonique**.

Associer à chacun des polynômes du second degré sa forme canonique :

$4x^2+8x+7$ ∘	∘ $(x+2)^2-5$
x^2+4x-1 ∘	∘ $(x-4)^2-4$
$x^2-8x+20$ ∘	∘ $4(x+1)^2+3$
$4x^2-16x+6$ ∘	∘ $4(x-2)^2-10$
$-4x^2-16x-12$ ∘	∘ $(x-4)^2+4$
$x^2-8x+12$ ∘	∘ $-4(x-2)^2+4$
$-4x^2+16x-12$ ∘	∘ $-4(x+2)^2+4$

E.2 Déterminer la forme canonique de chacune des expressions ci-dessous :

a) x^2-4x+1 b) x^2+6x+3

E.3 Déterminer la forme canonique de chacun des polynômes du second degré suivants :

a) x^2+4x-5 b) x^2-2x-1

E.4 Déterminer la forme canonique de chacun des polynômes du second degré suivants :

a) x^2+2x-3 b) x^2-6x-2
c) $x^2+12x+5$ d) $x^2-10x+5$

E.5 Donner la forme canonique de chacun des trinômes du second degré ci-dessous :

a) $2x^2+12x-4$ b) $3x^2+30x+12$

E.6 Donner la forme canonique de chacun des trinômes du second degré ci-dessous :

a) $2x^2+8x-6$ b) $3x^2+6x+6$
c) $9x^2+18x+27$ d) $5x^2+10x+2$

E.7 Déterminer la forme canonique de chacune des expressions ci-dessous :

a) x^2+x+2 b) x^2-3x-1
c) $x^2+\frac{1}{2}x-3$ d) $x^2+x-\frac{1}{3}$

E.8 Déterminer la forme canonique de chacun des polynômes du second degré suivants :

a) $x^2+\frac{1}{4}x+1$ b) x^2+x+1

E.9

> **Rappel :** pour résoudre une équation se présentant sous la forme de l'égalité de deux carrés, on utilise la troisième identité remarquable pour se ramener à une équation-produit :
>
> Résolvons l'équation $\left(x+1\right)^2=9$:
>
> $\left(x+1\right)^2=9$
> $\left(x+1\right)^2=3^2$
> $\left(x+1\right)^2-3^2=0$
>
> D'après l'identité remarquable :
> $\left[\left(x+1\right)+3\right]\left[\left(x+1\right)-3\right]=0$
> $\left(x+4\right)\left(x-2\right)=0$
>
> Un produit est nul si, et seulement si, au moins un de ses facteurs est nul :
>
> $x+4=0$; $x=-4$ | $x-2=0$; $x=2$
>
> Cette équation a pour solution : -4 et 2.

On considère le polynôme (P) : x^2+6x-7

1) Déterminer la forme canonique du polynôme P.
2) A l'aide de la forme canonique du polynôme, déterminer les deux solutions de l'équation : $x^2+6x-7=0$

E.10 On considère le polynôme $P=3\cdot x^2-12\cdot x+17$.

1) Parmi les expressions ci-dessous, laquelle est la forme canonique du polynôme P :
   - $3\cdot\left(x-2\right)^2+5$
   - $3\cdot\left(x+1\right)^2+7$
   - $3\cdot\left(x-3\right)^2-17$
2) En utilisant la forme canonique du polynôme P, résoudre l'équation : $3\cdot x^2-12\cdot x+17=8$

E.11 On considère le polynôme (P) : $x^2+4\cdot x+9$.

1) Déterminer les valeurs des nombres a et b réalisant l'identité : $x^2+4\cdot x+9=\left(x+a\right)^2+b$
2) En déduire que l'équation $x^2+4\cdot x+9=1$ n'admet aucune solution.

E.12 On considère l'équation : (E) : $2x^2+4x+4=20$.

1) Déterminer la forme canonique du polynôme : $2x^2+4x-16$.
2) En déduire les solutions de l'équation (E).

E.13 Pour chacune des fonctions, dresser le tableau de variations et donner les caractéristiques de leur extréma :

a) $f : x \longmapsto 2x^2+8x+1$ b) $g : x \longmapsto -x^2+2x+1$

E.14 Pour chacune des fonctions, dresser le tableau de variations et donner les caractéristiques de leur extréma :

1) $f(x)=-3x^2+9x-2$ 2) $g(x)=3x^2+2x+2$

E.15 Pour chacune des fonctions, dresser le tableau de variations et donner les caractéristiques de leur extréma :

1) $f : x \longmapsto \frac{1}{6}\cdot x^2 + \frac{1}{4}x + 1$ 2) $g : x \longmapsto -x^2 + 2\sqrt{3}x - 1$

E.16

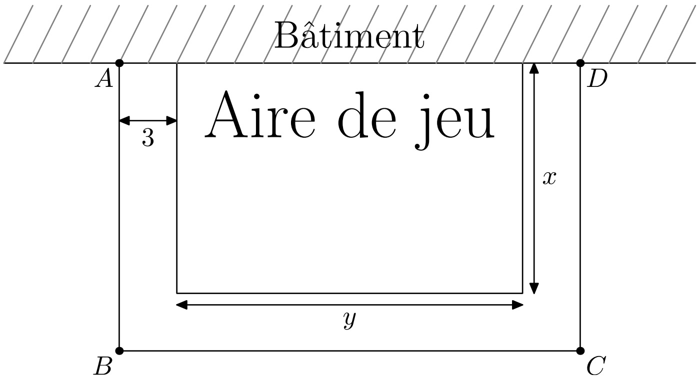
1) On considère la fonction f définie par :
$f(x) = a\cdot x^2 + 3x + 2 \quad \text{où } a \in \mathbb{R}$

Sachant que sa courbe représentative passe par le point de coordonnées $A(-2\,;-12)$, déterminer l'expression complète de la fonction f.

2) Soit g la fonction dont l'image d'un nombre réel x est définie par :
$g(x) = 3x^2 + b\cdot x + 1 \quad \text{où } b \in \mathbb{R}$

Sachant que le sommet de la parabole représentative de la fonction g a pour abscisse 1, déterminer l'expression complète de la fonction g.

E.17 On veut construire le long d'un bâtiment une aire de jeu rectangulaire. De plus, on souhaite que les dimensions de ce rectangle soient supérieures ou égales à $10\,m$. Cet espace de jeu est entouré sur trois côtés d'une allé de $3\,m$ de large comme l'indique le croquis ci-dessous.



L'ensemble est clôturé sur les trois côtés $[AB]$, $[BC]$ et $[CD]$.
On s'intéresse à la longueur $\mathscr{L}$ de la clôture :
$\mathscr{L} = AB + BC + CD$.
On note x et y les dimensions en mètres de l'aire de jeu *(la valeur de x et de y sont nécessairement positifs)*.

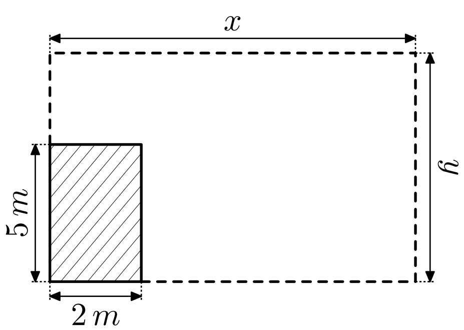
On dispose de 100 mètres de clôture qu'on souhaite entièrement utilisé :

1) a) Exprimer, dans ces conditions, la valeur de y en fonction de x.

b) Justifier que la valeur de x doit être inférieure à 44.

2) Déterminer les dimensions afin que les 100 mètres de clôtures soient utilisés et que l'aire de jeu soit maximale.

E.18 Dans son champ, un agriculteur possède un poulailler de forme rectangulaire et de dimensions $5\,m$ et $2\,m$. Il souhaite construire un enclos comme l'indique la figure ci-dessous avec $17\,m$ de clôture :



Les nombres x et y représentent les dimensions de ce champs.

Le poulailler est représenté par la partie hachurée, la clôture est représentée en pointillés et la partie extérieure dédiée aux poules est représentée par la partie blanche.

On note $\mathcal{A}$ l'aire de la partie extérieure.

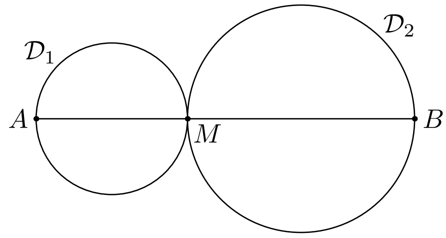
1) Etablir la relation suivante entre x et y :
$x + y = 12$

2) Démontrer que l'aire de l'espace extérieur a pour expression : $\mathcal{A}(x) = -x^2 + 12\cdot x - 10$

3) Dresser le tableau de variations de la fonction $\mathcal{A}$ sur $\mathbb{R}$.

4) Déterminer les valeurs de x et de y pour que l'aire de l'espace extérieur réservé aux poules soient maximale.

E.19 On considère un segment $[AB]$ de longueur $1\,m$, un point M appartenant au segment $[AB]$ et les deux disques $\mathcal{D}_1$ et $\mathcal{D}_2$ de diamètres respectif $[AM]$ et $[MB]$.



Déterminer le ou les emplacements du point M tels que la somme des aires des disques $\mathcal{D}_1$ et $\mathcal{D}_2$ soit minimale.