Formule des cosinus

Exercice 1

Calculer $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$.

1. $AB = 1$, $AC = 5$ et $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = 40°$ $\approx 3,83$
2. $AB = 2,5$, $AC = 3$ et $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = 70°$ $\approx 2,57$
3. $AB = 4$, $AC = \frac{5}{3}$ et $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = -110°$ $\approx -2,28$

Exercice 2

Calculer $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$.

1. $AB = 2$, $AC = 6$ et $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = \frac{\pi}{4}$ $= 6\sqrt{2} \approx 8,49$
2. $AB = \sqrt{3}$, $AC = 1$ et $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = -\frac{\pi}{6}$ $= \frac{3}{2}$
3. $AB = 5$, $AC = \frac{3}{4}$ et $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = \frac{2\pi}{3}$ $= -\frac{15}{8} = -1,875$

Exercice 3

Les points A, B, C, D, E, F, G et H sont placés sur une droite graduée de façon à ce que $AB = BC = CD = DE = EF = FG = GH = 1$.

Déterminer les produits scalaires suivants.

1. $\overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{AG}$ $= 13$
2. $\overrightarrow{DC} \cdot \overrightarrow{DF}$ $= -2$
3. $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{DE}$ $= 1$
4. $\overrightarrow{CD} \cdot \overrightarrow{HD}$ $= -4$

Exercice 4

Dans chaque cas, calculer le produit scalaire $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$.

1. $AB = 6$, $AC = 2$ et $\widehat{BAC} = 30°$ $= 6\sqrt{3} \approx 10,39$
2. $AB = 2$, $AC = 3$ et $\widehat{BAC} = 120°$ $= -3$

Exercice 5

Dans chaque cas, calculer une mesure en degré de l'angle $\widehat{BAC}$.

1. $AB = 3$, $AC = 6$ et $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 9\sqrt{2}$

   $9\sqrt{2} = 3 \times 6 \times \cos(\alpha)$
   $\cos(\alpha) = \frac{9\sqrt{2}}{18} = \frac{\sqrt{2}}{2}$
   $\alpha = 45°$ ($\frac{\pi}{4}$ rad)

2. $AB = 2$, $AC = 5$ et $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = -8$ (on donnera une valeur approchée au degré près)

   $-8 = 2 \times 5 \times \cos(\alpha)$
   $\cos(\alpha) = \frac{-8}{10} = -0.8$
   $\alpha = 143°$

3. $AB = 3$, $AC = 7$ et $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 0$

   PS = 0 donc $\alpha = 90°$
   Sinon : $0 = 3 \times 7 \times \cos(\alpha)$
   Donc $\cos(\alpha) = 0$
   $\alpha = 90$

Exercice 6

Soient trois points A, B et C tels que :

$$AB = \sqrt{3},\ AC = 2 \text{ et } \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 1$$

Calculer la mesure de l'angle $\widehat{BAC}$.

$\sqrt{3} \times 2 \times \cos(\alpha) = 1$
$\cos(\alpha) = \frac{1}{2\sqrt{3}}$
$\alpha \approx 73,2°$

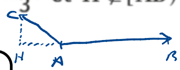
Projeté orthogonal

Exercice 7

Calculer $\vec{AB} \cdot \vec{AC}$

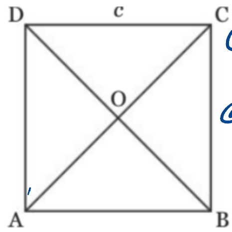
H est le projeté orthogonal du point C sur la droite (AB).

1. $AB = 4$, $AH = 3$ et $H \in [AB]$ — $\vec{AB} \cdot \vec{AC} = 4 \times 3 = 12$
2. $AB = 1$, $AH = 5$ et $H \notin [AB]$ — $\vec{AB} \cdot \vec{AC} = -1 \times 5 = -5$
3. $AB = 6$, $BH = \frac{19}{3}$ et $H \notin [AB]$ — Comme $BH = \frac{19}{3} \Rightarrow AH = BH - AB = \frac{19}{3} - 6 = \frac{1}{3}$. Donc $\vec{AB} \cdot \vec{AC} = -6 \times \frac{1}{3} = -2$



Exercice 8

On considère un carré ABCD de centre O et de côté c. Calculer les produits scalaires suivants.



1. $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$ $= c^2$
2. $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AO}$ $= \frac{1}{2}c^2$
3. $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD}$ $= -c^2$
4. $\overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{AD}$ $= c^2$
5. $\overrightarrow{DB} \cdot \overrightarrow{AB}$ $= c^2$
6. $\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{AC}$ $= -c^2$
7. $\overrightarrow{DB} \cdot \overrightarrow{OC}$ $= 0$

⑤ • $\sqrt{2}c \times \frac{\sqrt{2}}{2}c$
$= c^2$
• c^2

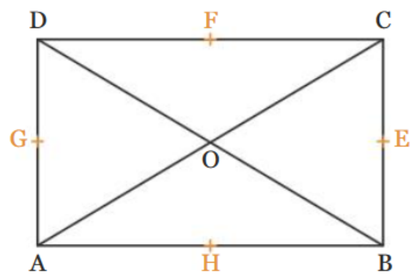
⑥ $= -\sqrt{2}c \times \frac{\sqrt{2}}{2}c$
$= -c^2$

Exercice 9

On considère le rectangle ABCD ci-après. E, F, G et H sont respectivement les milieux des côtés [BC], [CD], [DA] et [AB].

O est l'intersection des diagonales du rectangle.

Apparier chaque expression du produit scalaire avec son expression simplifiée.

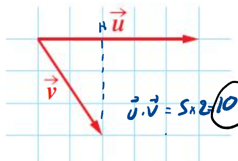


$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$	$\overrightarrow{AH} \cdot \overrightarrow{AB}$
$\overrightarrow{AG} \cdot \overrightarrow{AF}$	$\overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{AD}$
$\overrightarrow{AF} \cdot \overrightarrow{AB}$	$\overrightarrow{AG} \cdot \overrightarrow{AD}$
$\overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{AF}$	$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AB}$

Exercice 10

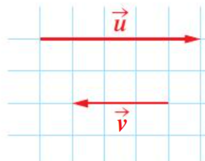
Les quadrillages suivants sont à mailles carrées de côté 1. Dans chaque cas, calculer $\vec{u} \cdot \vec{v}$.

1.



$\vec{u} \cdot \vec{v} = 5 \times 2 = 10$

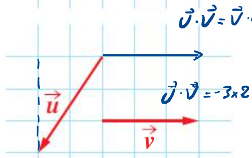
2.



col, sens opposé
$\vec{u} \cdot \vec{v} = -5 \times 3 = -15$

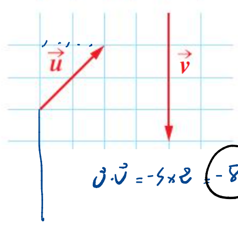
$\vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{v} \cdot \vec{u}$

3.



$\vec{u} \cdot \vec{v} = -3 \times 2 = -6$

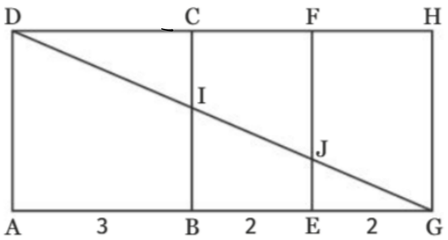
4.



$\vec{u} \cdot \vec{v} = -4 \times 2 = -8$

Exercice 11

Dans une unité de longueur donnée, on considère un carré ABCD dont le côté mesure 3, accolé à deux rectangles identiques BEFC et EGHF de largeur 2.

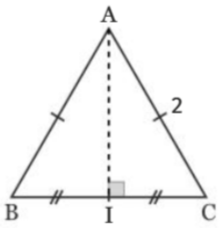


En utilisant la formule du projeté orthogonal, calculer les produits scalaires suivants.

1. $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC} = 9$
2. $\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BF} = -6$
3. $\overrightarrow{EI}\cdot\overrightarrow{AG}$ -14
4. $\overrightarrow{CF}\cdot\overrightarrow{GD}$ -14
5. $\overrightarrow{IC}\cdot\overrightarrow{HG}$
6. $\overrightarrow{EJ}\cdot\overrightarrow{FA}$

Exercice 12

Le triangle ABC est un triangle équilatéral dont le côté mesure 2 cm. I est le pied de la hauteur issue de A. Déterminer les valeurs exactes des produits scalaires suivants.

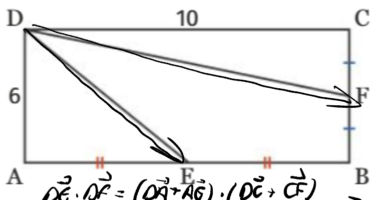


1. $\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{BA} = 2$
2. $\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BI} = 1$
3. $\overrightarrow{AI}\cdot\overrightarrow{AC}$ 3

Exercice 13

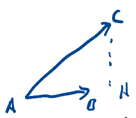
On considère le rectangle ABCD de longueur 10 et de largeur 6. E est le milieu du côté [AB] et F le milieu du côté [BC]. Déterminer les valeurs exactes des produits scalaires suivants.

1. $\overrightarrow{DA}\cdot\overrightarrow{DB} = 36$
2. $\overrightarrow{DC}\cdot\overrightarrow{DF} = 100$
3. $\overrightarrow{DA}\cdot\overrightarrow{DC} = 0$
4. $\overrightarrow{DE}\cdot\overrightarrow{DF}$
5. $\overrightarrow{DF}\cdot\overrightarrow{DB}$



$\vec{DE}\cdot\vec{DF} = (\vec{DA}+\vec{AE})\cdot(\vec{DC}+\vec{CF})$
$= \vec{DA}\cdot\vec{CF} + \vec{AE}\cdot\vec{DC}$
$= 18 + 50$
$= 68$

Exercice 14

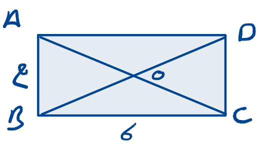


1. A, B et C étant trois points distincts du plan, rappeler une expression de $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}$ utilisant un projeté orthogonal. On illustrera cette relation par un schéma.

$\vec{AB}\cdot\vec{AC} = \vec{AB}\cdot\vec{AH}$

2. $ABCD$ est un rectangle de centre O tel que $AB = 2$ et $AD = 6$. Calculer les produits scalaires suivants.

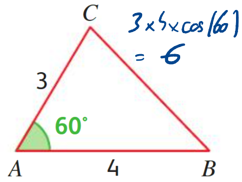
a. $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC} = 4$
b. $\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{AB} = 0$
c. $\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{CB} = -36$
d. $\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{BC} = 36$
e. $\overrightarrow{DO}\cdot\overrightarrow{DC} = 2$
f. $\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{AD} = -18$



Exercice 15

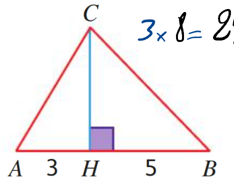
Dans chaque cas, calculer $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}$.

1.



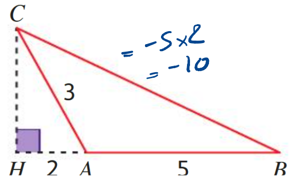
$3\times4\times\cos(60)$
$= 6$

2.



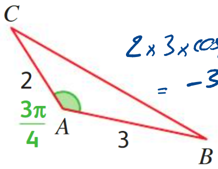
$3\times 8 = 24$

3.



$= -5\times2$
$= -10$

4.



$2\times3\times\cos\left(\frac{3\pi}{4}\right)$
$= -3\sqrt{2}$

Propriétés

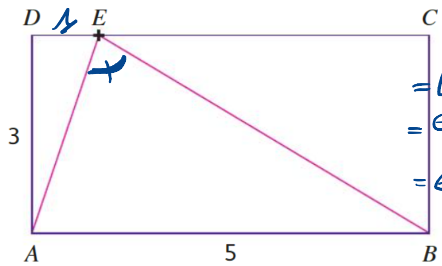
Exercice 16

Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs. Simplifier les expressions suivantes.

1. $(3\vec{u})\cdot(2\vec{v}) = 6\vec{u}\cdot\vec{v}$
2. $\left(\frac{7}{3}\vec{u}\right)\cdot(-6\vec{v}) = -14\,\vec{u}\cdot\vec{v}$
3. $\vec{u}\cdot(\vec{u}-\vec{v}) = \vec{u}\cdot\vec{u} - \vec{u}\cdot\vec{v}$
4. $(\vec{u}+\vec{v})^2 = \vec{u}\cdot\vec{u} + \vec{u}\cdot\vec{v} + \vec{v}\cdot\vec{u} + \vec{v}\cdot\vec{v}$
$= \vec{u}^2 + 2\vec{u}\cdot\vec{v}\cdot\vec{v}^2$

Exercice 17

$ABCD$ est un rectangle tel que $AB = 5$ et $AD = 3$.
E est le point de $[CD]$ tel que $DE = 1$.



$\vec{EA}\cdot\vec{EB}$
$= (\vec{ED}+\vec{DA})(\vec{EC}\cdot\vec{CB})$
$= \vec{ED}\cdot\vec{EC} + \vec{ED}\cdot\vec{CB}$
$\vec{DA}\cdot\vec{EC} + \vec{DA}\cdot\vec{CB}$
$= \vec{ED}\cdot\vec{EC} + 0 + 0 + DA^2$

1. En utilisant des décompositions vectorielles et la relation de Chasles, montrer que :

$$\overrightarrow{EA}\cdot\overrightarrow{EB} = \overrightarrow{ED}\cdot\overrightarrow{EC} + DA^2$$

2. En déduire la valeur du produit scalaire $\overrightarrow{EA}\cdot\overrightarrow{EB}$ $= -ED\times EC + 9$
$= -1\times4+9$
$= 5$

3. Justifier alors que $\cos\widehat{AEB} = \dfrac{1}{\sqrt{10}}$.

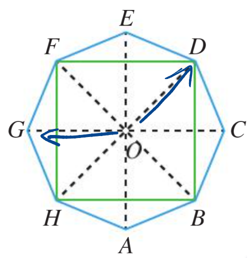
$\vec{EA}\cdot\vec{EB} = EA\times EB\times\cos(\widehat{AEB})$ or $EA = \sqrt{10}$ et $EB = 5$ donc $5 = \sqrt{10}\cdot5\times\cos$
$1 = \sqrt{10}\times\cos$
$\frac{1}{\sqrt{10}} = \cos(\widehat{AEB})$

En déduire une mesure en degré de l'angle AEB (on donnera une valeur arrondie au degré près).

$\widehat{AEB} \approx 72°$

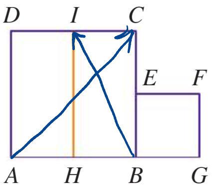
Exercice 18

61 On considère un octogone régulier $ABCDEFGH$ inscrit dans un cercle de centre O et de rayon 2. Déterminer les produits scalaires suivants.



1. $\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}$ $= 2\times2\times\cos(45°) = 2\sqrt{2}$
2. $\overrightarrow{OD}\cdot\overrightarrow{OH}$ $= -2\times2 = -4$
3. $\overrightarrow{OF}\cdot\overrightarrow{DC}$
$= \vec{OF}\cdot(\vec{DO}+\vec{OC})$
$= \vec{OF}\cdot\vec{DO} + \vec{OF}\cdot\vec{OC}$
$= 0 + 2\times2\times\cos(135)$
$= -2\sqrt{2}$
4. $\overrightarrow{GC}\cdot\overrightarrow{AE}$ $= 0$
5. $\overrightarrow{CO}\cdot\overrightarrow{CD}$
$= \vec{CO}\cdot(\vec{CO}+\vec{OD})$
$= \vec{CO}\cdot\vec{CO} + \vec{CO}\cdot\vec{OD}$
$= 2\times2 + 2\times2\times\cos(135)$
$= 4 - 2\sqrt{2}$
$\approx 1,17$
6. $\overrightarrow{HD}\cdot\overrightarrow{FB}$ $= 0$

Exercice 19



Sur la figure ci-contre, $ABCD$ est un carré de côté 10.
Les points E, I et H sont des milieux des côtés de $ABCD$.
$BEFG$ est un carré.
Calculer les produits scalaires :

1. $\overrightarrow{AH} \cdot \overrightarrow{FE}$ = -25 **2.** $\overrightarrow{AE} \cdot \overrightarrow{BG}$ = $(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BE})\cdot\overrightarrow{BG}$ = $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BG}+\overrightarrow{BE}\cdot\overrightarrow{BG}$ = 10·5+0 = 50 **3.** $\overrightarrow{AH} \cdot \overrightarrow{DG}$ = $\overrightarrow{AH}\cdot(\overrightarrow{DA}+\overrightarrow{AG})$ = $\overrightarrow{AH}\cdot\overrightarrow{DA}+\overrightarrow{AH}\cdot\overrightarrow{AG}$ = 0+5×15 = 75

4. $\overrightarrow{DB} \cdot \overrightarrow{FG}$ = 5×10 = 50 **5.** $\overrightarrow{IB} \cdot \overrightarrow{HF}$ = $(\overrightarrow{IH}+\overrightarrow{HB})\cdot(\overrightarrow{HG}+\overrightarrow{GF})$ = $\overrightarrow{IH}\cdot\overrightarrow{HG}+\overrightarrow{IH}\cdot\overrightarrow{GF}+\overrightarrow{HB}\cdot\overrightarrow{HG}+\overrightarrow{HB}\cdot\overrightarrow{GF}$ = 0 − 10×5 + 10×5 + 0 = 0 **6.** $\overrightarrow{BI} \cdot \overrightarrow{AC}$

Démonstrations

Exercice 20

1. En remarquant que $\|\vec{u}+\vec{v}\|^2 = (\vec{u}+\vec{v})^2$ et en utilisant la bilinéarité du produit scalaire, montrer l'identité $\|\vec{u}+\vec{v}\|^2 = \|\vec{u}\|^2 + 2\vec{u}\cdot\vec{v} + \|\vec{v}\|^2$.

2. De la même manière, exprimer $(\vec{u}+\vec{v})\cdot(\vec{u}-\vec{v})$ et $\|\vec{u}-\vec{v}\|^2$ en fonction de $\|\vec{u}\|^2$, $\|\vec{v}\|^2$ et $\vec{u}\cdot\vec{v}$.

Exercice 21

Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs du plan.

1. En s'inspirant de la démonstration de la relation $\vec{u}\cdot\vec{v} = \frac{1}{2}\left[\|\vec{u}+\vec{v}\|^2 - \|\vec{u}\|^2 - \|\vec{v}\|^2\right]$ vue dans le cours, démontrer que :

$$\vec{u}\cdot\vec{v} = \frac{1}{2}\left[\|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2 - \|\vec{u}-\vec{v}\|^2\right]$$

2. En déduire alors que :

$$\vec{u}\cdot\vec{v} = \frac{1}{4}\left[\|\vec{u}+\vec{v}\|^2 - \|\vec{u}-\vec{v}\|^2\right]$$

Exercice 22

Dans le plan muni d'un repère orthonormé, on considère $\vec{u}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$ deux vecteurs du plan.

1. Exprimer $\|\vec{u}\|^2$ ($\sqrt{x^2+y^2}$), $\|\vec{v}\|^2$ ($\sqrt{x'^2+y'^2}$) et $\|\vec{u}+\vec{v}\|^2$ ($\sqrt{(x+x')^2+(y+y')^2}$) en fonction de x, x', y et y'.

2. En utilisant la relation :

$$\vec{u}\cdot\vec{v} = \frac{1}{2}\left[\|\vec{u}+\vec{v}\|^2 - \|\vec{u}\|^2 - \|\vec{v}\|^2\right]$$

démontrer alors que $\vec{u}\cdot\vec{v} = xx' + yy'$.

$\vec{u}\cdot\vec{v} = \frac{1}{2}\left((x+x')^2+(y+y')^2 - x^2-y^2-x'^2-y'^2\right)$
$= \frac{1}{2}\left(x^2+2xx'+x'^2+y^2 \ldots\right)$
$= xx'+yy'$

Coordonnées

Exercice 23

Le plan est muni d'un repère orthonormé. Dans chaque cas, calculer le produit scalaire $\vec{u}\cdot\vec{v}$.

1. $\vec{u}\begin{pmatrix} 4 \\ 9 \end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix} -2 \\ 3 \end{pmatrix}$ **2.** $\vec{u}\begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix} -2 \\ 5 \end{pmatrix}$

19 17

Exercice 24

Préciser si les affirmations suivantes sont vraies ou fausses. Justifier.

Dans un repère orthonormé, soient $\vec{u}\begin{pmatrix} -3 \\ 2 \end{pmatrix}$, $\vec{v}\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$ et $\vec{w}\begin{pmatrix} 6 \\ -2 \end{pmatrix}$ et A, B et C tels que $\overrightarrow{AB} = \vec{u}$ et $\overrightarrow{AC} = \vec{v}$.

$\sqrt{(-3)^2+2^2} = \sqrt{13}$ −3·1+2×3 = 3 1·6+3·(−2) = 0

✓ **1.** $\|\vec{u}\| = \sqrt{13}$ ✗ **2.** $\vec{u}\cdot\vec{v} = -9$ ✓ **3.** $\vec{v}\cdot\vec{w} = 0$

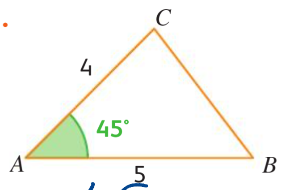
✓ **4.** $\|\vec{u}+\vec{v}\|^2 = 29$ **5.** $\cos\widehat{BAC} = \frac{3}{\sqrt{130}}$

$(-3+1)^2+(2+3)^2 = 4+25 = 29$

$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC} = AB\cdot AC\cdot\cos(BAC)$
$3 = \sqrt{13}\cdot\sqrt{10}\cdot\cos(BAC)$
$\cos(BAC) = \frac{3}{\sqrt{130}}$

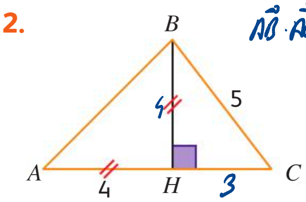
Exercice 25 Calculer $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}$

1.



$10\sqrt{2}$

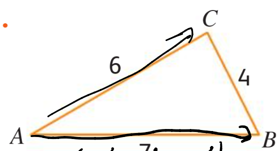
2.



$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC} = 7\times4 = 28$

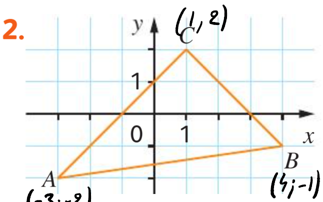
Exercice 26 Calculer $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}$

1.



$\frac{1}{2}(AB^2+AC^2-CB^2)$
$\frac{1}{2}(49+36-16)$
$\frac{1}{2}69 = 34{,}5$

2.



$\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} 7 \\ 1 \end{pmatrix}$ $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix} 4 \\ 4 \end{pmatrix}$ $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC} = 7\cdot4+1\cdot4 = 28+4 = 32$

Exercice 27

Dans le plan muni d'un repère orthonormé, on considère les vecteurs $\vec{u}\begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$.

$u+v\begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix}$ $u-v\begin{pmatrix} 1 \\ -5 \end{pmatrix}$

1. Calculer $\vec{u}\cdot\vec{v}$ (−4), $\|\vec{u}\|$ ($\sqrt{13}$) et $\|\vec{v}\|$. $\sqrt{5}$

2. Calculer de deux façons les nombres :

$\sqrt{3^2+(-1)^2} = \sqrt{10}$ = 10 $\sqrt{1^2+(-5)^2} = \sqrt{26}^2 = 26$

$\|\vec{u}+\vec{v}\|^2$ et $\|\vec{u}-\vec{v}\|^2$

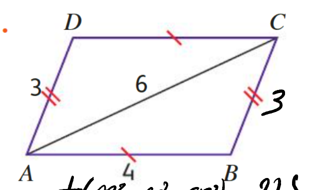
$\|u\|^2+2u\cdot v+\|v\|^2 = 13-8+5 = 10$ $\|u\|^2-2u\cdot v+\|v\|^2 = 13+8+5 = 26$

3. Calculer de deux façons $(\vec{u}+\vec{v})\cdot(\vec{u}-\vec{v})$.

3·1 + (−1)·(−5)

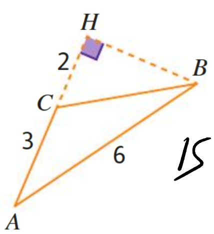
Exercice 28 Calculer $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}$

1.



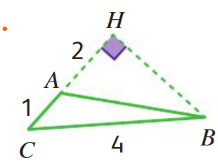
$\frac{1}{2}(AB^2+AC^2-CB^2) = 21{,}5$

2.



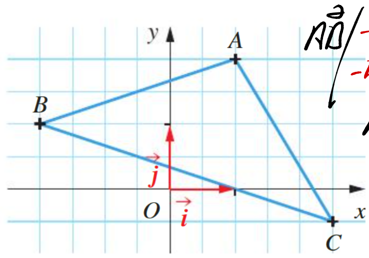
15

3.



−2

4.



$\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} -3 \\ -1 \end{pmatrix}$ $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix} 1{,}5 \\ -2{,}5 \end{pmatrix}$

−2