Rédaction et technique de dérivation

Exercice 1

Déterminer les fonctions dérivées des fonctions suivantes sur le domaine d'étude précisé :

1. $f_1(x) = 3x^{-4} + 5 - 2x$ sur $D_1 = \mathbb{R}^*$
   $f_1'(x) = 3 \times (-4) \times x^{-5} + 0 - 2 = -12x^{-5} - 2 = -\frac{12}{x^5} - 2$
2. $f_2(x) = x\sqrt{x}$ sur $D_2 = \mathbb{R}_+^*$
   $f_2(x) = x \times x^{1/2} = x^{3/2}$
   $f_2'(x) = \frac{3}{2}x^{1/2} = \frac{3\sqrt{x}}{2}$
3. $f_3(x) = \dfrac{3x+1}{x+2}$ sur $D_3 = \mathbb{R} \setminus \{-2\}$
   En utilisant la formule $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v-uv'}{v^2}$:
   $u = 3x+1$, $u' = 3$, $v = x+2$, $v' = 1$
   $f_3'(x) = \frac{3(x+2)-(3x+1)\times 1}{(x+2)^2} = \frac{3x+6-3x-1}{(x+2)^2} = \frac{5}{(x+2)^2}$
4. $f_4(x) = \cos(4x-3)$ sur $D_4 = \mathbb{R}$
   En utilisant la dérivation des fonctions composées :
   $f_4'(x) = -\sin(4x-3) \times 4 = -4\sin(4x-3)$
5. $f_5(x) = (1-x)^4$ sur $D_5 = \mathbb{R}$
   $f_5'(x) = 4(1-x)^3 \times (-1) = -4(1-x)^3$

Exercice 2

Pour chacune des fonctions suivantes, déterminer l'ensemble de définition, de dérivabilité puis la fonction dérivée.

1. $f : x \mapsto (3x+7)^5$
   $D_f = \mathbb{R}$ (polynôme)
   Dérivabilité : $\mathbb{R}$ (fonction composée de fonctions dérivables)
   $f'(x) = 5(3x+7)^4 \times 3 = 15(3x+7)^4$
2. $g : x \mapsto \dfrac{2}{(5x+3)^3}$
   $D_g = \mathbb{R} \setminus \{-\frac{3}{5}\}$ (dénominateur non nul)
   Dérivabilité : $\mathbb{R} \setminus \{-\frac{3}{5}\}$
   $g(x) = 2(5x+3)^{-3}$
   $g'(x) = 2\times(-3)(5x+3)^{-4}\times 5 = -30(5x+3)^{-4} = -\frac{30}{(5x+3)^4}$
3. $h : x \mapsto \sqrt{x+4}$
   $D_h = [-4; +\infty[$ (radicande ≥ 0)
   Dérivabilité : $]-4; +\infty[$ (dérivée non définie en $x = -4$)
   $h'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x+4}} \times 1 = \frac{1}{2\sqrt{x+4}}$
4. $k : x \mapsto e^{3x+1}$
   $D_k = \mathbb{R}$ (fonction exponentielle)
   Dérivabilité : $\mathbb{R}$
   $k'(x) = e^{3x+1} \times 3 = 3e^{3x+1}$
5. $j : x \mapsto \sin(2x-5)$
   $D_j = \mathbb{R}$ (fonction trigonométrique)
   Dérivabilité : $\mathbb{R}$
   $j'(x) = \cos(2x-5) \times 2 = 2\cos(2x-5)$

Exercice 3

Déterminer les fonctions dérivées des fonctions suivantes :

1. f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = (3x-1)(x^2+5)$
   En utilisant $(uv)' = u'v + uv'$:
   $u = 3x-1$, $u' = 3$, $v = x^2+5$, $v' = 2x$
   $f'(x) = 3(x^2+5) + (3x-1)(2x) = 3x^2 + 15 + 6x^2 - 2x = 9x^2 - 2x + 15$
2. g définie sur $\mathbb{R}$ par : $g(x) = (x+1)e^x$
   $g'(x) = 1 \times e^x + (x+1) \times e^x = e^x + (x+1)e^x = e^x(1+x+1) = e^x(x+2)$
3. h définie sur $\mathbb{R}$ par : $h(x) = \dfrac{2x}{x^2+3}$
   $u = 2x$, $u' = 2$, $v = x^2+3$, $v' = 2x$
   $h'(x) = \frac{2(x^2+3)-2x\times 2x}{(x^2+3)^2} = \frac{2x^2+6-4x^2}{(x^2+3)^2} = \frac{6-2x^2}{(x^2+3)^2}$
4. i définie sur $\mathbb{R}$ par : $i(x) = (3x^2-2x+1)^2$
   $i'(x) = 2(3x^2-2x+1) \times (6x-2) = 2(6x-2)(3x^2-2x+1)$

Exercice 4

Déterminer le sens de variation de chacune des fonctions de l'exercice précédent :

1. $f'(x) = 9x^2 - 2x + 15$
   $\Delta = 4 - 4 \times 9 \times 15 = 4 - 540 = -536 < 0$
   Comme $a = 9 > 0$ et $\Delta < 0$, $f'(x) > 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.
   Donc f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.
2. $g'(x) = e^x(x+2)$
   $e^x > 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$, donc le signe de $g'(x)$ est celui de $(x+2)$.
   $g'(x) > 0 \Leftrightarrow x > -2$ et $g'(x) < 0 \Leftrightarrow x < -2$
   g est décroissante sur $]-\infty; -2[$ et croissante sur $]-2; +\infty[$.
3. $h'(x) = \frac{6-2x^2}{(x^2+3)^2}$
   $(x^2+3)^2 > 0$ pour tout $x \neq 0$, donc le signe de $h'(x)$ est celui de $(6-2x^2)$.
   $6 - 2x^2 > 0 \Leftrightarrow x^2 < 3 \Leftrightarrow -\sqrt{3} < x < \sqrt{3}$
   h est croissante sur $]-\sqrt{3}; 0[$ et sur $]0; \sqrt{3}[$, décroissante sur $]-\infty; -\sqrt{3}[$ et sur $]\sqrt{3}; +\infty[$.
4. $i'(x) = 2(6x-2)(3x^2-2x+1)$
   $6x - 2 > 0 \Leftrightarrow x > \frac{1}{3}$
   Pour $3x^2 - 2x + 1$: $\Delta = 4 - 12 = -8 < 0$ et $a = 3 > 0$, donc $3x^2 - 2x + 1 > 0$ pour tout x.
   $i'(x) > 0 \Leftrightarrow x > \frac{1}{3}$
   i est décroissante sur $]-\infty; \frac{1}{3}[$ et croissante sur $]\frac{1}{3}; +\infty[$.

Dérivées secondes

Exercice 5

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = 2x^4 - 3x^3 + 5x^2 - 7x + 4$

1. $f'(x) = 8x^3 - 9x^2 + 10x - 7$
2. $f''(x) = 24x^2 - 18x + 10$

Exercice 6

Pour chaque fonction ci-dessous, déterminer les fonctions dérivées et dérivées secondes.

1. $f_1(x) = 3x^3 + 4x^2 + 2x - 1$
   $f_1'(x) = 9x^2 + 8x + 2$
   $f_1''(x) = 18x + 8$
2. $f_2(x) = e^x(4x^2 + 3x - 2)$
   $f_2'(x) = e^x(4x^2+3x-2)+e^x(8x+3) = e^x(4x^2 + 3x - 2 + 8x + 3) = e^x(4x^2 + 11x + 1)$
   $f_2''(x) = e^x(4x^2 + 11x + 1) + e^x(8x + 11) = e^x(4x^2+11x+1+8x+11) = e^x(4x^2+19x+12)$
3. $f_3(x) = \sin(5x + 2)$
   $f_3'(x) = 5\cos(5x + 2)$
   $f_3''(x) = -25\sin(5x + 2)$
4. $f_4(x) = e^{4x+2}$
   $f_4'(x) = 4e^{4x+2}$
   $f_4''(x) = 16e^{4x+2}$
5. $f_5(x) = \cos(4x + 5)$
   $f_5'(x) = -\sin(3x^2+4x+5)\times(4) = -4\sin(4x+5)$
   $f_5''(x) = -4 \times 4 \times \cos(4x + 5)$
   $f_5''(x) = -16\cos(4x + 5)$

Fonctions composées

Exercice 7

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \sqrt{x^2 + 1}$.

1. f est de la forme $\sqrt{u}$ avec $u(x) = x^2 + 1$.
2. (a) $(\sqrt{u})' = \frac{u'}{2\sqrt{u}}$
   (b) $u'(x) = 2x$
   $f'(x) = \frac{2x}{2\sqrt{x^2+1}} = \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$

Exercice 8

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = e^{x^2+1}$.

1. f est de la forme e^u avec $u(x) = x^2 + 1$.
2. (a) $(e^u)' = u'e^u$
   (b) $u'(x) = 2x$
   $f'(x) = 2x \cdot e^{x^2+1}$

Exercice 9

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = (e^x + 1)^2$.
f est de la forme u^2 avec $u(x) = e^x + 1$.
$(u^2)' = 2u \cdot u'$
$u'(x) = e^x$
$f'(x) = 2(e^x + 1) \cdot e^x = 2e^x(e^x + 1)$

Exercice 10

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \frac{1}{(x+1)^3}$.

1. f est de la forme u^n avec $n = -3$ et $u(x) = x^2 + 1$.
2. $(u^{-3})' = -3u^{-4} \cdot u' = -3 \cdot \frac{u'}{u^4}$
3. $u'(x) = 2x$
   $f'(x) = -3 \cdot \frac{2x}{(x^2+1)^4} = -\frac{6x}{(x^2+1)^4}$

Exercice 11

Pour chacune des fonctions suivantes, déterminer l'ensemble de définition, de dérivabilité puis la fonction dérivée.

1. $f : x \mapsto (3x^3 + 7)^8$
   $D_f = \mathbb{R}$, dérivabilité : $\mathbb{R}$
   $f'(x) = 8(3x^3 + 7)^7 \times 9x^2 = 72x^2(3x^3 + 7)^7$
2. $g : x \mapsto \frac{1}{(2x-1)^4}$
   $D_g = \mathbb{R} \setminus \{\frac{1}{2}\}$, dérivabilité : $\mathbb{R} \setminus \{\frac{1}{2}\}$
   $g'(x) = -4(2x - 1)^{-5} \times 2 = -\frac{8}{(2x-1)^5}$
3. $h : x \mapsto \sqrt{x^2 + 4}$
   $D_h = \mathbb{R}$ (car $x^2 + 4 > 0$ pour tout x), dérivabilité : $\mathbb{R}$
   $h'(x) = \frac{2x}{2\sqrt{x^2+4}} = \frac{x}{\sqrt{x^2+4}}$
4. $k : x \mapsto e^{3x^2-6x+1}$
   $D_k = \mathbb{R}$, dérivabilité : $\mathbb{R}$
   $k'(x) = (6x - 6)e^{3x^2-6x+1} = 6(x - 1)e^{3x^2-6x+1}$
5. $j : x \mapsto \sin(2x - 5)$
   $D_j = \mathbb{R}$, dérivabilité : $\mathbb{R}$
   $j'(x) = 2\cos(2x - 5)$

Exercice 12

Calculer la dérivée des fonctions suivantes :

1. $f_1(x) = \frac{1}{(x^2+x+1)^3}$
   $f_1'(x) = -3(x^2+x+1)^{-4}\times(2x+1) = -\frac{3(2x+1)}{(x^2+x+1)^4}$
2. $f_2(x) = 3(1 - x)^3$
   $f_2'(x) = 3 \times 3(1 - x)^2 \times (-1) = -9(1 - x)^2$
3. $f_3(x) = x\sqrt{x^2 + 4}$
   $f_3'(x) = \sqrt{x^2 + 4} + x \times \frac{2x}{2\sqrt{x^2+4}} = \sqrt{x^2 + 4} + \frac{x^2}{\sqrt{x^2+4}} = \frac{x^2+4+x^2}{\sqrt{x^2+4}} = \frac{2x^2+4}{\sqrt{x^2+4}}$
4. $f_4(x) = e^{(4x^2+2x+1)^3}$
   $f_4'(x) = e^{(4x^2+2x+1)^3} \times 3(4x^2+2x+1)^2 \times (8x+2)$
   $f_4'(x) = 6(4x + 1)(4x^2 + 2x + 1)^2 e^{(4x^2+2x+1)^3}$
5. $f_5(x) = \sqrt{e^{(3x^2-4x-5)^5}}$
   $f_5(x) = e^{\frac{(3x^2-4x-5)^5}{2}}$
   $f_5'(x) = e^{\frac{(3x^2-4x-5)^5}{2}} \times \frac{5(3x^2-4x-5)^4\times(6x-4)}{2}$
   $f_5'(x) = \frac{5(6x-4)(3x^2-4x-5)^4}{2}\sqrt{e^{(3x^2-4x-5)^5}}$

Exercice 13

Calculer $f'(x)$ puis $f''(x)$.

1. $f(x) = \frac{1}{x+1}$
   $f'(x) = -\frac{1}{(x+1)^2}$
   $f''(x) = \frac{2}{(x+1)^3}$
2. $f(x) = \frac{1}{(1+x)^3}$
   $f'(x) = -\frac{3}{(1+x)^4}$
   $f''(x) = \frac{12}{(1+x)^5}$
3. $f(x) = (2-3x)e^{1-x}$
   $f'(x) = -3e^{1-x}+(2-3x)(-1)e^{1-x} = e^{1-x}(-3-2+3x) = e^{1-x}(3x-5)$
   $f''(x) = 3e^{1-x} + (3x-5)(-1)e^{1-x} = e^{1-x}(3-3x+5) = e^{1-x}(8-3x)$

Exercice 14

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = xe^{x^2}$.

$f'(x) = e^{x^2} + x \times 2xe^{x^2} = e^{x^2} + 2x^2e^{x^2} = e^{x^2}(1+2x^2)$

En $x=-1$: $f'(-1) = e^1(1+2) = 3e$

En $x=1$: $f'(1) = e^1(1+2) = 3e$

Les tangentes d_1 et d_2 ont le même coefficient directeur $3e$, donc elles sont parallèles.

Exercice 15

Déterminer les fonctions dérivées de :

1. f définie sur $]-1;+\infty[$ par $f(x) = \sqrt{x^2+2x+1}$
   $f(x) = \sqrt{(x+1)^2} = |x+1|$
   Sur $]-1;+\infty[$, $x+1>0$, donc $f(x) = x+1$
   $f'(x) = 1$
2. g définie sur $\mathbb{R} \setminus \{-\frac{1}{2}\}$ par $g(x) = \frac{(2x+1)^3}{4x+1}$
   En utilisant $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v-uv'}{v^2}$:
   $u = (2x+1)^3$, $u' = 6(2x+1)^2$, $v = 4x+1$, $v' = 4$
   $g'(x) = \frac{6(2x+1)^2(4x+1)-(2x+1)^3\times 4}{(4x+1)^2}$
   $g'(x) = \frac{(2x+1)^2[6(4x+1)-4(2x+1)]}{(4x+1)^2} = \frac{(2x+1)^2[24x+6-8x-4]}{(4x+1)^2} = \frac{(2x+1)^2(16x+2)}{(4x+1)^2}$
3. h définie sur $[2;+\infty[$ par $h(x) = \sqrt{\frac{x-2}{x+1}}$
   $h'(x) = \frac{1}{2\sqrt{\frac{x-2}{x+1}}} \times \frac{(x+1)-(x-2)}{(x+1)^2} = \frac{1}{2\sqrt{\frac{x-2}{x+1}}} \times \frac{3}{(x+1)^2}$
   $h'(x) = \frac{3}{2(x+1)^2\sqrt{\frac{x-2}{x+1}}} = \frac{3\sqrt{x+1}}{2(x+1)^2\sqrt{x-2}} = \frac{3}{2(x+1)^{3/2}\sqrt{x-2}}$
4. k définie sur $\mathbb{R} \setminus \{\frac{2}{5}\}$ par $k(x) = \left(\frac{4x-3}{5x-2}\right)^3$
   $k'(x) = 3\left(\frac{4x-3}{5x-2}\right)^2 \times \frac{4(5x-2)-(4x-3)\times 5}{(5x-2)^2}$
   $k'(x) = 3\left(\frac{4x-3}{5x-2}\right)^2 \times \frac{20x-8-20x+15}{(5x-2)^2} = 3\left(\frac{4x-3}{5x-2}\right)^2 \times \frac{7}{(5x-2)^2}$
   $k'(x) = \frac{21(4x-3)^2}{(5x-2)^4}$
5. j définie sur $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$ par $j(x) = e^{\frac{x-2}{x+1}}$
   $j'(x) = e^{\frac{x-2}{x+1}} \times \frac{(x+1)-(x-2)}{(x+1)^2} = e^{\frac{x-2}{x+1}} \times \frac{3}{(x+1)^2}$
   $j'(x) = \frac{3e^{\frac{x-2}{x+1}}}{(x+1)^2}$

Étude de fonctions

Exercice 16

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^3e^{-x}$.

1. $f'(x) = 3x^2e^{-x}+x^3\times(-1)e^{-x} = e^{-x}(3x^2-x^3) = x^2e^{-x}(3-x)$
   Donc $f'(x) = x^2e^{-x}(3-x)$.
   Mais on nous demande de montrer que $f'(x) = x^2e^{-x}(2-x)$. Vérifions :
   $f'(x) = 3x^2e^{-x} - x^3e^{-x} = x^2e^{-x}(3-x)$
   Il y a une erreur dans l'énoncé. La forme correcte est $f'(x) = x^2e^{-x}(3-x)$.
2. Étude du signe de $f'(x) = x^2e^{-x}(3-x)$:
   $e^{-x} > 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$
   $x^2 \geq 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$, avec égalité seulement en $x=0$
   $3-x > 0 \Leftrightarrow x < 3$
   Donc $f'(x) > 0$ pour $x \in]-\infty;0[\cup]0;3[$ et $f'(x) < 0$ pour $x \in]3;+\infty[$
   $f'(0) = 0$
3. Variations de f :
   f est croissante sur $]-\infty;0]$ et sur $[0;3]$, donc sur $]-\infty;3]$
   f est décroissante sur $[3;+\infty[$
   f admet un maximum en $x=3$.

Exercice 17

L'objectif est d'étudier les variations de la fonction f sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = (x-1)e^x + x$.

1. $f'(x) = 1\cdot e^x+(x-1)\cdot e^x+1 = e^x+(x-1)e^x+1 = e^x(1+x-1)+1 = xe^x+1$
2. a) $f''(x) = e^x + x\cdot e^x = e^x(1+x)$
   b) Signe de $f''(x) = e^x(1+x)$:
   $e^x > 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$
   $1+x > 0 \Leftrightarrow x > -1$
   Donc $f''(x) > 0$ pour $x > -1$ et $f''(x) < 0$ pour $x < -1$
   c) Variations de f' :
   f' est décroissante sur $]-\infty;-1]$ et croissante sur $[-1;+\infty[$
   f' admet un minimum en $x=-1$.
3. Signe de $f'(x) = xe^x+1$:
   $f'(-1) = (-1)e^{-1}+1 = -\frac{1}{e}+1 = \frac{e-1}{e} > 0$
   Comme f' admet un minimum en $x=-1$ et $f'(-1) > 0$, on a $f'(x) > 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.
4. Conclusion sur les variations de f :
   Puisque $f'(x) > 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$, la fonction f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

Exercice 18

Le point P appartient au quart de cercle de centre O, de rayon 4 et d'extrémités A et B.

1. Le point M appartient à $[OA]$ avec $OA = 4$, donc $x = OM$ appartient à $I = [0; 4]$.
2. Dans le triangle rectangle OMP, on a $OM = x$ et $OP = 4$ (rayon du cercle).

   Par le théorème de Pythagore : $MP^2 = OP^2 - OM^2 = 16 - x^2$

   Donc $MP = \sqrt{16 - x^2}$

   L'aire du rectangle $OMPN$ est : Aire $= OM \times MP = x\sqrt{16 - x^2}$

   Donc $f(x) = x\sqrt{16 - x^2}$.
3. Calcul de $f'(x)$:

   $f(x) = x(16 - x^2)^{1/2}$

   $f'(x) = (16-x^2)^{1/2} + x \times \frac{1}{2}(16-x^2)^{-1/2} \times (-2x)$

   $f'(x) = \sqrt{16 - x^2} + x \times \frac{-x}{\sqrt{16-x^2}}$

   $f'(x) = \sqrt{16 - x^2} - \frac{x^2}{\sqrt{16-x^2}}$

   $f'(x) = \frac{16-x^2-x^2}{\sqrt{16-x^2}} = \frac{16-2x^2}{\sqrt{16-x^2}}$

   Étude des variations :

   $\sqrt{16 - x^2} > 0$ sur $[0; 4[$ (le dénominateur est positif)

   $16 - 2x^2 > 0 \Leftrightarrow x^2 < 8 \Leftrightarrow |x| < 2\sqrt{2}$

   Sur $[0; 4]$, on a $f'(x) > 0$ pour $x \in [0; 2\sqrt{2}[$ et $f'(x) < 0$ pour $x \in]2\sqrt{2}; 4]$

   f est croissante sur $[0; 2\sqrt{2}]$ et décroissante sur $[2\sqrt{2}; 4]$.
4. f admet un maximum en $x = 2\sqrt{2}$.

   Donc $OM = 2\sqrt{2}$ et $MP = \sqrt{16 - 8} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$

   Le point P est tel que $OM = MP = 2\sqrt{2}$, c'est-à-dire que le rectangle $OMPN$ est un carré de côté $2\sqrt{2}$.

Exercice supplémentaire

Exercice 19

En sciences physiques, une différentielle est une dérivée par rapport à une variable donnée.

1. $A = \frac{b \times h}{2}$

   $\frac{dA}{db} = \frac{h}{2}$ et $\frac{dA}{dh} = \frac{b}{2}$
2. $W = RI^2t$ et $P = \frac{W}{t} = RI^2$

   $\frac{dW}{dI} = 2RIt$ et $\frac{dP}{dI} = 2RI$
3. $l = l_0(1 + \alpha t)$

   $\frac{dl}{dt} = l_0\alpha$

   De $l = l_0(1 + \alpha t)$, on tire $t = \frac{l-l_0}{l_0\alpha}$

   $\frac{dt}{dl} = \frac{1}{l_0\alpha}$
4. $W = \frac{1}{2}rv^2$

   $\frac{dW}{dr} = \frac{v^2}{2}$

   $v = \sqrt{\frac{2W}{r}}$, donc $\frac{dv}{dW} = \frac{1}{2\sqrt{\frac{2W}{r}}} \times \frac{2}{r} = \frac{1}{r\sqrt{\frac{2W}{r}}} = \frac{1}{\sqrt{2Wr}}$

   De $W = \frac{1}{2}rv^2$, on tire $r = \frac{2W}{v^2}$

   $\frac{dr}{dW} = \frac{2}{v^2}$
5. $C = \varepsilon\frac{S}{d-v}$

   $\frac{dC}{dv} = \varepsilon S \times \frac{-1}{(d-v)^2} \times (-1) = \frac{\varepsilon S}{(d-v)^2}$