TD - Chapitre 5 - EDS Maths - 1ère

C.1

1. a. On a les transformations algébriques suivantes :
$2\cdot(x-3)(x-1) = (2\cdot x-6)(x-1)$
$= 2\cdot x^2 - 2\cdot x - 6\cdot x + 6 = 2\cdot x^2 - 8\cdot x + 6 = f(x)$

b. Utilisons la forme factorisée :
$f(x) = 0$
$2\cdot(x-3)(x-1) = 0$
Un produit est nul si, et seulement si, au moins un de ses facteurs est nul :

$2=0$	$x-3=0$	$x-1=0$
Impossible	$x=3$	$x=1$

L'ensemble des solutions est : $\mathcal{S} = \{1\,;3\}$

c. De la forme factorisée, on en déduit le tableau de signes de la fonction f :

x	$-\infty$		1		3		$+\infty$
$2\cdot(x-3)$		$-$		$-$	0	$+$	
$x-1$		$-$	0	$+$		$+$	
$f(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

L'ensemble des solutions de cette équation est :
$\mathcal{S} = [1\,;3]$.

2. a.
- $f(x)+2 = (2\cdot x^2-8\cdot x+6)+2 = 2\cdot x^2 - 8\cdot x + 8$
- $2(x-2)^2 = 2(x^2-4\cdot x+4) = 2\cdot x^2 - 8\cdot x + 8$

On en déduit l'identité : $f(x)+2=2(x-2)^2$

b. Le carré d'un nombre étant toujours positif ou nul, pour tout nombre réel x, on a :
$(x-2)^2 \geqslant 0$
$2\cdot(x-2)^2 \geqslant 0$
D'après la question précédente :
$f(x)+2 \geqslant 0$
$f(x) \geqslant -2$

C.2

1. a. On a l'égalité :
$(21-2x)(2x+3) = 42x + 63 - 4x^2 - 6x$
$= -4x^2 + 36x + 63 = f(x)$

b. Résolvons l'équation suivante :
$f(x) = 0$
$(21-2x)(2x+3) = 0$
Un produit est nul si, et seulement si, au moins un de ses facteurs est nul. On obtient les deux équations suivantes :

$21-2x=0$	$2x+3=0$
$-2x=-21$	$2x=-3$
$x=\dfrac{-21}{-2}$	$x=-\dfrac{3}{2}$
$x=\dfrac{21}{2}$	

L'ensemble des solutions de cette équation est :
$\mathcal{S} = \left\{-\dfrac{3}{2}\,;\,\dfrac{21}{2}\right\}$

c. De la forme factorisée, on en déduit le tableau de signes :

x	$-\infty$		$-\frac{3}{2}$		$\frac{21}{2}$		$+\infty$
$21-2x$		$+$		$+$	0	$-$	
$2x+3$		$-$	0	$+$		$+$	
$(21-2x)(2x+3)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

L'ensemble des solutions de cette inéquation est :
$\left]-\dfrac{3}{2}\,;\,\dfrac{21}{2}\right[$

2. a.
- $f(x)-144 = (-4x^2+36x+63)-144$
$= -4x^2+36x-81$
- $-4\left(x-\dfrac{9}{2}\right)^2 = -4\left[x^2 - 2\times x\times\dfrac{9}{2} + \left(\dfrac{9}{2}\right)^2\right]$
$= -4\left(x^2 - 9x + \dfrac{81}{4}\right) = -4\cdot x^2 + 36\cdot x + 81$

On en déduit l'égalité : $f(x)-144=-4\cdot\left(x-\dfrac{9}{2}\right)^2$

b. Le carré d'un nombre étant toujours positif ou nul, on en déduit pour tout nombre réel x :
$\left(x-\dfrac{9}{2}\right)^2 \geqslant 0$
$-4\cdot\left(x-\dfrac{9}{2}\right)^2 \leqslant 0$
$f(x)-144 \leqslant 0$
$f(x) \leqslant 144$

C.3

	a	b	c	Δ
$2x^2+5x+1$	2	5	1	17
$-x^2+7x+3$	-1	7	3	61
x^2-5x+4	1	-5	4	9
$2x^2-4x-1$	2	-4	-1	24
$-x^2-x-1$	-1	-1	-1	-3
x^2+7	1	0	7	-28

C.4

a. Le polynôme $3\cdot x^2+5\cdot x+2$ a pour discriminant :
$\Delta = b^2 - 4\cdot a\cdot c = 5^2 - 4\times3\times2 = 25-24 = 1$

b. Le polynôme $-x^2-3\cdot x+2$ a pour discriminant :
$\Delta = b^2 - 4\cdot a\cdot c = (-3)^2 - 4\times(-1)\times2 = 9+8 = 17$

c. Le polynôme $2\cdot x^2-\dfrac{1}{3}\cdot x+1$ a pour discriminant :
$$\Delta = \left(-\frac{1}{3}\right)^2 - 4\times2\times1 = \frac{1}{9} - 8 = \frac{1}{9} - \frac{72}{9} = \frac{1-72}{9} = -\frac{71}{9}$$

C.5

a. L'expression $-2x^2+2x+1$ admet pour discriminant :
$\Delta = b^2 - 4\cdot a\cdot c = 2^2 - 4\times(-2)\times1 = 4+8 = 12$

b. L'expression x^2-x-1 admet pour discriminant :
$\Delta = b^2 - 4\cdot a\cdot c = (-1)^2 - 4\times1\times(-1) = 1+4 = 5$

c. L'expression $3x^2+x-2$ admet pour discriminant :
$\Delta = b^2 - 4\cdot a\cdot c = 1^2 - 4\times3\times(-2) = 1+24 = 25$

C.6

a. Cherchons les racines de x^2+4x-5 :

Le discrimant de ce polynome du second degré est :
$\Delta = b^2 - 4ac = 4^2 - 4\times1\times(-5) = 16 + 20 = 36$

On a la simplification : $\sqrt{\Delta} = \sqrt{36} = 6$

Le discriminant étant strictement positif, ce polynôme admet les deux racines suivantes :

$$x_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-4-6}{2} = \frac{-10}{2} = -5 \qquad x_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-4+6}{2} = \frac{2}{2} = 1$$

(b) Cherchons les racines de x^2+x+1 :

Le discrimant de ce polynome du second degré est :
$\Delta = b^2 - 4ac = 1^2 - 4\times1\times1 = -3$

Le discriminat de ce trinôme est strictement négatif ; il n'admet aucune racine.

(c) Cherchons les racines de $2x^2-13x+15$:

Le discrimant de ce polynome du second degré est :
$\Delta = b^2 - 4ac = (-13)^2 - 4\times2\times15 = 169 - 120 = 49$

On a la simplification : $\sqrt{\Delta} = \sqrt{49} = 7$

Le discriminant étant strictement positif, ce polynôme admet les deux racines suivantes :

$$x_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{13-7}{4} = \frac{6}{4} = \frac{3}{2} \qquad x_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{13+7}{4} = \frac{20}{4} = 5$$

(d) Cherchons les racines de $3x^2-6x+3$:

Le discrimant de ce polynome du second degré a pour valeur :
$\Delta = b^2 - 4ac = (-6)^2 - 4\times3\times3 = 36 - 36 = 0$

Le discriminant étant nul, ce polynôme du second degré admet une unique racine :
$$x = -\frac{b}{2\cdot a} = -\frac{-6}{2\times3} = \frac{6}{6} = 1$$

C.7

(a) Le polynôme $2x^2-3x-2$ admet pour discriminant :
$\Delta = b^2 - 4ac = (-3)^2 - 4\times2\times(-2) = 9 + 16 = 25$
On a la simplification : $\sqrt{\Delta} = \sqrt{25} = 5$

Le discriminant étant strictement positif, cette équation admetles deux racines suivantes :

$$x_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-(-3)-5}{2\times2} = \frac{-2}{4} = -\frac{1}{2} \qquad x_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-(-3)+5}{2\times2} = \frac{8}{4} = 2$$

(b) Le polynôme $-4x^2+12x-9$ admet pour discriminant :
$\Delta = b^2 - 4\cdot a\cdot c = 12^2 - 4\times(-4)\times(-9) = 144 - 144 = 0$

Le discriminant étant nul, on en déduit que ce polynôme admet une unique racine :
$$x = -\frac{b}{2\cdot a} = -\frac{12}{2\times(-4)} = \frac{12}{8} = \frac{3}{2}$$

(c) L'expression $3x^2-4x+2$ admet pour discriminant :
$\Delta = b^2 - 4ac = (-4)^2 - 4\times3\times2 = 16 - 24 = -8$

Le discriminant étant strictement négatif, ce polynôme n'admet aucune racine.

C.8

(a) Le polynôme du second degré $3x^2-5x+6$ a pour discriminant :
$\Delta = b^2 - 4ac = (-5)^2 - 4\times3\times6 = 25 - 72 = -47 < 0$

Le discriminant étant strictement négatif, ce polynôme n'admet aucune racine :
$S = \varnothing$

(b) Déterminons le discriminant du trinôme $3x^2-24x+48$ est :
$\Delta = b^2 - 4ac = 24^2 - 4\times3\times48 = 0$

Le discriminant de ce polynôme du second degré étant nul, ce polynôme admet une unique racine :
$$x_0 = -\frac{b}{2a} = -\frac{-24}{6} = 4$$

(c) Le polynôme $-2\cdot x^2+x+6$ admet pour discriminant :
$\Delta = b^2 - 4\cdot a\cdot c = 1^2 - 4\times(-2)\times6 = 1 + 48 = 49$
On remarque la simplification : $\sqrt{\Delta} = \sqrt{49} = 7$

Le discriminant étant strictement positif, on en déduit que ce polynôme admet les deux racines :

$$x_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2\cdot a} = \frac{-1-7}{2\times(-2)} = \frac{-8}{-4} = 2 \qquad x_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2\cdot a} = \frac{-1+7}{2\times(-2)} = \frac{6}{-4} = -\frac{3}{2}$$

C.9

(a) Le discrimant du polynome $x^2+2x-15$ est :
$\Delta = b^2 - 4ac = 2^2 - 4\times1\times(-15) = 64$

On a la simplification : $\sqrt{\Delta} = \sqrt{64} = 8$

Le discrimant est strictement positif ; ce polynôme admet les deux racines :

$$x_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-2-8}{2} = -5 \qquad x_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-2+8}{2} = 3$$

(b) Le discrimant du polynome $3x^2-5x+7$ est :
$\Delta = b^2 - 4ac = (-5)^2 - 4\times3\times7 = 25 - 84 = -59$

Le discriminant étant strictement négatif, le polynôme $3x^2-5x+7$ n'admet aucune racine.

C.10

(a) Le discrimant du polynome $3x^2-24x+48$ est :
$\Delta = b^2 - 4ac = (-24)^2 - 4\times3\times48 = 576 - 576 = 0$

Le discriminant étant nul, le polynôme $3x^2-24x+48$ admet une unique racine.
$$x = -\frac{b}{2a} = -\frac{-24}{2\times3} = 4$$

(b) Le discriminant du polynome $-4{\cdot}x^2-x+3$ est :

$\Delta=b^2-4ac=\big(-1\big)^2-4\times(-4)\times3=1+48=49$

On a la simplification : $\sqrt{\Delta}=\sqrt{49}=7$

Le discriminant étant strictement positif, le polynôme $-4{\cdot}x^2-x+3$ admet pour racines :

$$x_1=\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{-(-1)-7}{2\times(-4)}=\frac{1-7}{-8}=\frac{-6}{-8}=\frac{3}{4}$$

$$x_2=\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{-(-1)+7}{2\times(-4)}=\frac{1+7}{-8}=\frac{8}{-8}=-1$$

C.11

(a) Le discriminant du polynôme $-2{\cdot}x^2-5{\cdot}x-3$ a pour valeur :

$\Delta=b^2-4{\cdot}a{\cdot}c=\big(-5\big)^2-4\times(-2)\times(-3)=25-24=1$

On a la simplification : $\sqrt{\Delta}=\sqrt{1}=1$

Le discriminant étant strictement positif, on en déduit les deux racines du polynôme :

$$x_1=\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2{\cdot}a}=\frac{-(-5)-1}{2\times(-2)}=\frac{4}{-4}=-1$$

$$x_2=\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2{\cdot}a}=\frac{-(-5)+1}{2\times(-2)}=\frac{6}{-4}=-\frac{3}{2}$$

On en déduit que les racines de ce polynôme sont :

$-\dfrac{3}{2}$ et -1

(b) Le polynôme $2{\cdot}x^2+5{\cdot}x+2$ admet pour discriminant :

$\Delta=b^2-4{\cdot}a{\cdot}c=5^2-4\times2\times2=25-16=9$

On a la simplification : $\sqrt{\Delta}=\sqrt{9}=3$

Le discriminant étant strictement positif, on en déduit les deux raînces du polynôme :

$$x_1=\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2{\cdot}a}=\frac{-5-3}{2\times2}=\frac{-8}{4}=-2$$

$$x_2=\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2{\cdot}a}=\frac{-5+3}{2\times2}=\frac{-2}{4}=-\frac{1}{2}$$

Les solutions sont : -2 ou $-\dfrac{1}{2}$

C.12

(a) Le polynôme x^2+x-2 admet pour discriminant :

$\Delta=b^2-4{\cdot}a{\cdot}c=1^2-4\times1\times(-2)=1+8=9$

On a la simplification : $\sqrt{\Delta}=\sqrt{9}=3$

Le discriminant étant strictement positif, ce polynôme admet les deux racines :

$$x_1=\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2{\cdot}a}=\frac{-1-3}{2\times1}=\frac{-4}{2}=-2$$

$$x_2=\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2{\cdot}a}=\frac{-1+3}{2\times1}=\frac{2}{2}=1$$

Les solutions sont : -2 ; 1

(b) Le polynôme $3{\cdot}x^2+4{\cdot}x+2$ admet pour discriminant :

$\Delta=b^2-4{\cdot}a{\cdot}c=4^2-4\times3\times2=16-24=-8$

Le discriminant étant strictement négatif, ce polynôme n'admet aucune racine.

C.13

(a) Le discriminant de ce polynôme a pour valeur :

$\Delta=b^2-4{\cdot}a{\cdot}c=1^2-4\times\dfrac{2}{3}\times(-3)=1+8=9$

On a la simplification : $\sqrt{\Delta}=\sqrt{9}=3$

Le discriminant étant strictement positif, ce polynôme admet les deux racines :

$$x_1=\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2{\cdot}a}=\frac{-1-3}{2\times\frac{2}{3}}=\frac{-4}{\frac{4}{3}}=-4\times\frac{3}{4}=-3$$

$$x_2=\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2{\cdot}a}=\frac{-1+3}{2\times\frac{2}{3}}=\frac{2}{\frac{4}{3}}=2\times\frac{3}{4}=\frac{3}{2}$$

Le polynôme $\dfrac{2}{3}{\cdot}x^2+x-3$ admet pour ensemble de racines :

$\mathcal{S}=\Big\{-3\,;\,\dfrac{3}{2}\Big\}$

(b) Le discriminant de ce polynôme a pour valeur :

$$\Delta=b^2-4{\cdot}a{\cdot}c=\Big(-\frac{11}{3}\Big)^2-4\times(-2)\times(-1)=\frac{121}{9}-8=\frac{121}{9}+\frac{72}{9}=\frac{49}{9}$$

On a la simplification : $\sqrt{\Delta}=\sqrt{\dfrac{49}{9}}=\dfrac{7}{3}$

Le discriminant étant strictement positif, ce polynôme admet les deux racines :

$$x_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2{\cdot}a} = \frac{-\left(-\frac{11}{3}\right)-\frac{7}{3}}{2\times(-2)} = \frac{\frac{11}{3}-\frac{7}{3}}{2\times(-2)} = \frac{\frac{4}{3}}{2\times(-2)} = \frac{4}{3}\times\left(-\frac{1}{4}\right) = -\frac{1}{3}$$

$$x_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2{\cdot}a} = \frac{-\left(-\frac{11}{3}\right)+\frac{7}{3}}{2\times(-2)} = \frac{\frac{11}{3}+\frac{7}{3}}{2\times(-2)} = \frac{\frac{18}{3}}{2\times(-2)} = \frac{6}{-4} = -\frac{3}{2}$$

Le polynôme $\frac{2}{3}{\cdot}x^2+x-3$ admet pour ensemble de racines :

$\mathcal{S} = \left\{-\frac{1}{3}\,;\,-\frac{3}{2}\right\}$

(c) Le discriminant de ce polynôme a pour valeur :

$$\Delta = b^2-4{\cdot}a{\cdot}c = (-3)^2-4\times3\times\frac{2}{3} = 9-4\times2 = 9-8 = 1$$

On a la simplification : $\sqrt{\Delta} = \sqrt{1} = 1$

Le discriminant étant strictement positif, ce polynôme admet les deux racines :

$$x_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2{\cdot}a} = \frac{-(-3)-1}{2\times3} = \frac{3-1}{6} = \frac{2}{6} = -\frac{1}{3}$$

$$x_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2{\cdot}a} = \frac{-(-3)+1}{2\times3} = \frac{3+1}{6} = \frac{4}{6} = -\frac{2}{3}$$

Le polynôme $\frac{2}{3}{\cdot}x^2+x-3$ admet pour ensemble de racines :

$\mathcal{S} = \left\{-3\,;\,\frac{3}{2}\right\}$

C.14

(a) Le polynôme $\frac{2}{7}{\cdot}x^2-\frac{5}{3}{\cdot}x-\frac{7}{3}$ admet pour discriminant :

$$\Delta = b^2-4{\cdot}a{\cdot}c = \left(-\frac{5}{3}\right)^2-4\times\frac{2}{7}\times\left(-\frac{7}{3}\right)$$
$$= \frac{25}{9}+\frac{8}{3} = \frac{25}{9}+\frac{24}{9} = \frac{49}{9}$$

Le discriminant étant strictement positif, on en déduit que ce polynôme admet deux racines.

On a la simplification : $\sqrt{\Delta} = \sqrt{\frac{49}{9}} = \frac{\sqrt{49}}{\sqrt{9}} = \frac{7}{3}$

Les deux racines de ce polynôme sont :

$$x_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2{\cdot}a} = \frac{\frac{5}{3}-\frac{7}{3}}{2\times\frac{2}{7}} = \frac{-\frac{2}{3}}{\frac{4}{7}} = -\frac{2}{3}\times\frac{7}{4} = -\frac{7}{6}$$

$$x_1 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2{\cdot}a} = \frac{\frac{5}{3}+\frac{7}{3}}{2\times\frac{2}{7}} = \frac{\frac{12}{3}}{\frac{4}{7}} = 4\times\frac{7}{4} = 7$$

L'ensemble des solutions de l'équation est :

$\mathcal{S} = \left\{-\frac{7}{6}\,;\,7\right\}$

(b) Le polynôme $-\frac{1}{2}{\cdot}x^2-\frac{4}{5}{\cdot}x+\frac{2}{5}$ admet pour discriminant :

$$\Delta = b^2-4{\cdot}a{\cdot}c = \left(-\frac{4}{5}\right)^2-4\times\left(-\frac{1}{2}\right)\times\frac{2}{5}$$
$$= \frac{16}{25}+\frac{8}{10} = \frac{16}{25}+\frac{20}{25} = \frac{36}{25}$$

Le discriminant étant strictement positif, on en déduit que ce polynôme admet deux racines.

On a la simplification : $\sqrt{\Delta} = \sqrt{\frac{36}{25}} = \frac{\sqrt{36}}{\sqrt{25}} = \frac{6}{5}$

Les deux racines de ce polynôme sont :

$$x_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2{\cdot}a} = \frac{\frac{4}{5}-\frac{6}{5}}{2\times\left(-\frac{1}{2}\right)} = \frac{-\frac{2}{5}}{-1} = \frac{2}{5}$$

$$x_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2{\cdot}a} = \frac{\frac{4}{5}+\frac{6}{5}}{2\times\left(-\frac{1}{2}\right)} = \frac{\frac{10}{5}}{-1} = -2$$

L'ensemble des solutions de l'équation est :

$\mathcal{S} = \left\{-2\,;\,\frac{2}{5}\right\}$

C.15

- La réponse (a) est fausse :
  $$-\frac{(-2)^3}{3}+(-2)^2+3\times(-2) = -\frac{-8}{3}+4-6$$
  $$= \frac{8+12-18}{3} = \frac{2}{3} \neq 0$$
  Le nombre -2 n'est pas une solution de l'équation.

- On a la factorisation suivante :
  $$-\frac{x^3}{3}+x^2+3{\cdot}x = -\frac{1}{3}{\cdot}x{\cdot}\left(x^2-3{\cdot}x-9\right)$$
  Ainsi, l'équation proposée se traduit par une équation-produit :
  $$-\frac{x^3}{3}+x^2+3{\cdot}x = 0$$
  $$-\frac{1}{3}{\cdot}x{\cdot}\left(x^2-3{\cdot}x-9\right) = 0$$
  Un produit est nul si, et seulement si, au moins un de ses facteurs est nul.

$$-\frac{1}{3}\cdot x = 0 \qquad x^2 - 3\cdot x - 9 = 0$$
$$x = 0$$

Le nombre 0 n'est pas une racine du second facteur. Etudions le nombre de racine du polynôme définissant le second facteur. Pour cela, regardons le signe de son discriminant :
$\Delta = b^2 - 4\cdot a\cdot c = (-3)^2 - 4\times1\times(-9) = 9+36 = 45 > 0$
Son discriminant étant strictement positif, on en déduit que ce polynôme admet deux racines distinctes.

Ces deux racines étant distinctes de 0, au total l'équation de l'énoncé admet trois solutions distinctes.

Ainsi, la réponse exacte est (b).

C.16

(1) Le polynôme x^2-3x+1 admet pour discriminant :
$\Delta = b^2-4\cdot a\cdot c = \left(-3\right)^2-4\times1\times1 = 9-4 = 5$

Le discriminant étant strictement positif, ce polynôme admet les deux racines :

$$x_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2\cdot a} = \frac{-(-3)-\sqrt{5}}{2\times1} = \frac{3-\sqrt{5}}{2\times1} \qquad x_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2\cdot a} = \frac{-(-3)+\sqrt{5}}{2\times1} = \frac{3+\sqrt{5}}{2\times1}$$

(2) Le polynôme $5x^2+5x+1$ admet pour discriminant :
$\Delta = b^2 - 4\cdot a\cdot c = 5^2 - 4\times5\times1 = 25-20 = 5$

Le discriminant étant strictement positif, ce polynôme admet les deux racines :

$$x_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{} = \frac{-5-\sqrt{5}}{2\times5} = \frac{-5-\sqrt{5}}{10} \qquad x_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{} = \frac{-5+\sqrt{5}}{2\times5} = \frac{-5+\sqrt{5}}{10}$$

C.17

(1) Le polynôme $x^2-7\cdot x+9$ admet pour discriminant :
$\Delta = b^2 - 4\cdot a\cdot c = \left(-7\right)^2 - 4\cdot1\cdot9 = 49-36 = 13$

Le discriminant étant strictement positif, le polynôme admet les deux racines :

$$x_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2\cdot a} = \frac{-(-7)-\sqrt{13}}{2\times1} = \frac{7-\sqrt{13}}{2} \qquad x_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2\cdot a} = \frac{-(-7)+\sqrt{13}}{2\times1} = \frac{7+\sqrt{13}}{2}$$

(2) Le polynôme $-2\cdot x^2-3\cdot x+1$ admet pour discriminant :
$\Delta = b^2 - 4\cdot a\cdot c = \left(-3\right)^2 - 4\times(-2)\times1 = 9+8 = 17$

Le discriminant étant strictement positif, le polynôme admet les deux racines :

$$x_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2\cdot a} = \frac{-(-3)-\sqrt{17}}{2\times(-2)} = \frac{3-\sqrt{17}}{-4} = \frac{-3+\sqrt{17}}{4} \qquad x_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2\cdot a} = \frac{-(-3)+\sqrt{17}}{2\times(-2)} = \frac{3+\sqrt{17}}{-4} = \frac{-3-\sqrt{17}}{4}$$

C.18

(1) Le polynôme $-3x^2+6x+1$ admet pour discriminant :
$\Delta = b^2-4\cdot a\cdot c = 6^2-4\times(-3)\times1 = 36+12 = 48$

On a la simplification : $\sqrt{\Delta} = \sqrt{48} = \sqrt{16\times3} = 4\sqrt{3}$

Le discriminant étant strictement positif, ce polynôme admet les deux racines :

$$x_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2\cdot a} = \frac{-6-4\sqrt{3}}{2\times(-3)} = \frac{-2\times\left(3-2\sqrt{3}\right)}{-2\times3} = \frac{3-2\sqrt{3}}{3} \qquad x_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2\cdot a} = \frac{-6+4\sqrt{3}}{2\times(-3)} = \frac{-2\times\left(3+2\sqrt{3}\right)}{-2\times3} = \frac{3+2\sqrt{3}}{3}$$

(2) Le polynôme $4x^2-6x+1$ admet pour discriminant :
$\Delta = b^2 - 4\cdot a\cdot c = \left(-6\right)^2 - 4\times4\times1 = 36-16 = 20$

On a la simplification :
$\Delta = \sqrt{20} = \sqrt{4\times5} = 2\sqrt{5}$

Le discriminant étant strictement positif, ce polynôme admet les deux racines :

$$x_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2\cdot a} = \frac{-(-6)-2\sqrt{5}}{2\times4} = \frac{6-2\sqrt{5}}{8} = \frac{2(3-\sqrt{5})}{2\times4} = \frac{3-\sqrt{5}}{4} \qquad x_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2\cdot a} = \frac{-(-6)+2\sqrt{5}}{2\times4} = \frac{6+2\sqrt{5}}{8} = \frac{2(3+\sqrt{5})}{2\times4} = \frac{3+\sqrt{5}}{4}$$

C.19 On a les transformations algébriques :

$$\frac{x-1}{x+1} = 1-2\cdot x$$
$$\frac{x-1}{x+1} - 1 + 2\cdot x = 0$$
$$\frac{x-1+\left(-1+2\cdot x\right)\left(x+1\right)}{x+1} = 0$$
$$\frac{x-1-x-1+2\cdot x^2+2x}{x+1} = 0$$
$$\frac{2\cdot x^2+2\cdot x-2}{x+1} = 0$$

Si un quotient est nul alors son numérateur est nul. Déterminons les racines du numérateur.

Le numérateur a pour discriminant :

$$\Delta = b^2 - 4{\cdot}a{\cdot}c = 2^2 - 4{\times}2{\times}(-2) = 4 + 16 = 20$$

On a la simplification :

$$\sqrt{\Delta} = \sqrt{20} = \sqrt{4{\times}5} = 2\sqrt{5}$$

Le discriminant étant strictement positif, ce polynôme admet les deux racines :

$$x_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2{\cdot}a} = \frac{-2-2\sqrt{5}}{2{\times}2} = \frac{2{\cdot}\big(-1-\sqrt{5}\big)}{2{\times}2} = \frac{-1-\sqrt{5}}{2}$$

$$x_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2{\cdot}a} = \frac{-2+2\sqrt{5}}{2{\times}2} = \frac{2{\cdot}\big(-1+\sqrt{5}\big)}{2{\times}2} = \frac{-1+\sqrt{5}}{2}$$

C.20 On a les transformations algébriques :

$$\frac{2x-1}{2x+1} = 1-x$$

$$\frac{2x-1}{2x+1} - 1 + x = 0$$

$$\frac{2x-1+\big(-1+x\big)\big(2x+1\big)}{2x+1} = 0$$

$$\frac{2x-1-2x-1+2x^2+x}{2x+1} = 0$$

$$\frac{2x^2+x-2}{2x+1} = 0$$

Si un quotient est nul alors son numérateur est nul. Son numérateur est un polynôme du second degré dont le dicriminant a pour valeur :

$$\Delta = b^2 - 4{\cdot}a{\cdot}c = 1^2 - 4{\times}2{\times}(-2) = 1 + 16 = 17$$

Le discriminant étant strictement positif, ce polynôme admet les deux racines :

$$x_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2{\cdot}a} = \frac{-1-\sqrt{17}}{2{\times}2} = \frac{-1-\sqrt{17}}{4}$$

$$x_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2{\cdot}a} = \frac{-1+\sqrt{17}}{2{\times}2} = \frac{-1+\sqrt{17}}{4}$$

C.21

- Le carré $ABCD$ a pour aire : $\mathcal{A}_1 = x{\times}x = x^2$
- Le carré $CEFG$ a pour aire : $\mathcal{A}_2 = \big(6-x\big)\big(3-x\big)$

L'aire $\mathcal{A}$ de la partie hachurée a pour expression :

$$\mathcal{A} = \mathcal{A}_1 + \mathcal{A}_2 = x^2 + \big(6-x\big)\big(3-x\big)$$
$$= x^2 + 18 - 6{\cdot}x - 3{\cdot}x + x^2 = 2{\cdot}x^2 - 9{\cdot}x + 18$$

Souhaitant que l'aire totale mesure $8\,cm^2$, on résoud l'équation :

$$\mathcal{A} = 8$$
$$2{\cdot}x^2 - 9{\cdot}x + 18 = 8$$
$$2{\cdot}x^2 - 9{\cdot}x + 18 - 8 = 0$$
$$2{\cdot}x^2 - 9{\cdot}x + 10 = 0$$

Le membre de gauche est un polynôme du second degré dont le discriminant a pour valeur :

$$\Delta = b^2 - 4{\cdot}a{\cdot}c = \big(-9\big)^2 - 4{\times}2{\times}10 = 81 - 80 = 1$$

On a la simpification : $\sqrt{\Delta} = \sqrt{1} = 1$

Le discriminant étant strictement positif, on en déduit que cette équation admet les deux solutions :

$$x_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2{\cdot}a} = \frac{-(-9)-1}{2{\times}2} = \frac{9-1}{4} = \frac{8}{4} = 2$$

$$x_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2{\cdot}a} = \frac{-(-9)+1}{2{\times}2} = \frac{9+1}{4} = \frac{10}{4} = \frac{5}{2}$$

On en déduit l'ensemble de cette équation : $\mathcal{S} = \left\{2\,;\,\frac{5}{2}\right\}$

C.22 Calculons les aires nécessaires à cet exercice :

- Le carré $ABCD$ a pour aire : $\mathcal{A}_{ABCD} = 10^2 = 100$
- Les deux carrés hachurés ont pour aire : $\mathcal{A}_H = x^2 + (10-x)^2$

La condition demandée s'énonce de la manière suivante :

$$x^2 + (10-x)^2 = \frac{5}{8}{\times}100$$
$$x^2 + (x^2 - 20x + 100) = \frac{125}{2}$$
$$2x^2 - 20x + 100 = \frac{125}{2}$$
$$2{\times}\big(2x^2 - 20x + 100\big) = 2{\times}\frac{125}{2}$$
$$4x^2 - 40x + 200 = 125$$
$$4x^2 - 40x + 200 - 125 = 0$$
$$4x^2 - 40x + 75 = 0$$

Etudions le discriminant de ce polynôme :

$$\Delta = b^2 - 4ac = (-40)^2 - 4{\times}4{\times}75 = 1600 - 1200 = 400$$

On a la simplification : $\sqrt{\Delta} = \sqrt{400} = 20.$

Le discriminant étant strictement positif, cette équation admet deux racines :

$$x_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-(-40)-20}{2{\times}4} = \frac{20}{8} = \frac{5}{2}$$

$$x_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-(-40)+20}{2{\times}4} = \frac{60}{8} = \frac{15}{2}$$

Il existe deux valeurs possibles pour x :

$$S = \left\{\frac{5}{2}\,;\,\frac{15}{2}\right\}$$

C.23

(1) Déterminons le discriminant du polynôme du membre de gauche :

$$\Delta = b^2 - 4{\cdot}a{\cdot}c = \left(-\frac{37}{2}\right) - 4{\times}1{\times}85 = \frac{1369}{4} - 340$$
$$= \frac{1369}{4} - \frac{1360}{4} = \frac{9}{4}$$

On a la simplification : $\sqrt{\Delta} = \sqrt{\frac{9}{4}} = \frac{3}{2}$

Le discriminant étant strictement positif, on a les deux racines :

$$x_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2 \cdot a} = \frac{-\left(-\frac{37}{2}\right)-\frac{3}{2}}{2\times 1} = \frac{\frac{37}{2}-\frac{3}{2}}{2} = \frac{\frac{34}{2}}{2} = \frac{17}{2}$$

$$x_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2 \cdot a} = \frac{-\left(-\frac{37}{2}\right)+\frac{3}{2}}{2\times 1} = \frac{\frac{37}{2}+\frac{3}{2}}{2} = \frac{\frac{40}{2}}{2} = 10$$

2) a) Le rectangle ayant $37\,m$ de périmètre, on doit avoir :

$$2 \cdot \big(L+\ell\big) = 37$$
$$L+\ell = \frac{37}{2}$$
$$\ell = \frac{37}{2} - L$$

b) Sachant que l'aire du rectangle est de $85\,m^2$, on a la relation :

$$L \times \ell = 85$$
$$L \cdot \left(\frac{37}{2} - L\right) = 85$$
$$\frac{37}{2} \cdot L - L^2 = 85$$
$$L^2 - \frac{37}{2} \cdot L + 85 = 0$$

D'après la question précédente, on a :

- $L = 10 \quad \Longrightarrow \quad \ell = \frac{17}{2}$
- $L = \frac{17}{2} \quad \Longrightarrow \quad \ell = 10$

Le rectangle a $\frac{17}{2}\,m$ pour longueur et $10\,m$ pour largeur.

C.24 Notons x sa longueur et y sa largeur.

les deux conditions sur le rectangle s'écrivent par :

- Son périmètre s'exprime par : $2\big(x+y\big) = 19$
- Son aire s'exprime par : $x \times y = 12$

De la première équation, on en déduit :

$$2\big(x+y\big) = 19$$
$$x+y = \frac{19}{2}$$
$$y = \frac{19}{2} - x$$

En substituant la valeur de y en fonction de x dans la seconde équation, on obtient :

$$x \times y = 12$$
$$x \times \left(\frac{19}{2} - x\right) = 12$$
$$\frac{19}{2}x - x^2 = 12$$
$$-x^2 + \frac{19}{2}x - 12 = 0$$
$$-2x^2 + 19x - 24 = 0$$

Déterminons le discriminant du membre de gauche :

$\Delta = b^2 - 4 \cdot a \cdot c = 19^2 - 4 \times (-2) \times (-24) = 361 - 192 = 169$

On a la simplification : $\sqrt{\Delta} = \sqrt{169} = 13$

Le discriminant étant strictement positif, on en déduit les deux racines suivantes :

$$x_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2 \cdot a} = \frac{-19-13}{2 \times (-2)} = \frac{-32}{-4} = 8$$

$$x_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2 \cdot a} = \frac{-19+13}{2 \times (-2)} = \frac{-6}{-4} = \frac{3}{2}$$

Etudions ces deux cas :

- Si $x = 8$ alors $y = \frac{3}{2}$.
- Si $x = \frac{3}{2}$ alors $y = 8$.

On en déduit que les dimensions de ce rectangle est $8\,m$ de longueur et $\frac{3}{2}\,m$ de largeur.

C.25

a) Le polynôme $x^2 - 3x + 2$ du second degré a pour discriminant :

$$\Delta = b^2 - 4ac = (-3)^2 - 4 \times 1 \times 2 = 9 - 8 = 1$$

On a la simplification : $\sqrt{\Delta} = \sqrt{1} = 1$

Ce polynôme admet les deux racines suivantes :

$$x_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-(-3)-1}{2\times 1} = \frac{3-1}{2} = \frac{2}{2} = 1$$

$$x_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-(-3)+1}{2\times 1} = \frac{3+1}{2} = \frac{4}{2} = 2$$

Ainsi, ce polynôme admet la factorisation suivante :

$$x^2 - 3x + 2 = a \cdot \big(x - x_1\big)\big(x - x_2\big) = \big(x-1\big)\big(x-2\big)$$

b) Le discriminant du polynôme $-2x^2 - 2x + 4$ a pour valeur :

$$\Delta = b^2 - 4ac = (-2)^2 - 4 \times (-2) \times 4 = 4 + 32 = 36$$

On a la simplification : $\sqrt{\Delta} = \sqrt{36} = 6$

Le discriminant étant strictement positif, les deux racines suivantes de ce polynôme sont :

$$x_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-(-2)-6}{2\times(-2)} = \frac{2-6}{-4} = \frac{-4}{-4} = 1$$

$$x_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-(-2)+6}{2\times(-2)} = \frac{2+6}{-4} = \frac{8}{-4} = -2$$

Il admet la forme factorisée suivante :

$$-2x^2 - 3x - 1 = a \cdot \big(x - x_1\big)\big(x - x_2\big)$$
$$= -2\big(x-1\big)\big[x-(-2)\big] = -2\big(x-1\big)\big(x+2\big)$$

c) Le trinôme $-x^2 + 2x - 1$ du second degré admet pour discriminant :

$$\Delta = b^2 - 4ac = 2^2 - 4 \times (-1) \times (-1) = 0$$

Ce polynôme admet une unique racine :

$x_0 = -\dfrac{b}{2a} = -\dfrac{2}{-2} = 1$

Il admet pour forme factorisée :

$-x^2 + 2x - 1 = a\cdot\left(x - x_0\right)^2 = -\left(x-1\right)^2$

(d) Le polynôme $4x^2+x+3$ admet pour discriminant :

$\Delta = b^2 - 4ac = 1^2 - 4\times4\times3 = 1 - 48 = -47$

On en déduit que ce polynôme n'admet pas de forme factorisée.

C.26

(a) Déterminons le discriminant de ce polynôme :

$\Delta = b^2 - 4\cdot a\cdot c = (-3)^2 - 4\times3\times(-6) = 9+72$

On a la simplification : $\sqrt{\Delta} = \sqrt{81} = 9$

Le discriminant étant strictement positif, ce polynôme admet les deux racines suivantes :

$x_1 = \dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2\cdot a} = \dfrac{-(-3)-9}{2\times3} = \dfrac{3-9}{6} = \dfrac{-6}{6} = -1$

$x_2 = \dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2\cdot a} = \dfrac{-(-3)+9}{2\times3} = \dfrac{3+9}{6} = \dfrac{12}{6} = 2$

Ainsi, on obtient la forme factorisée :

$3\cdot x^2 - 3\cdot x - 6 = 3\cdot\left[x-(-1)\right]\left(x-2\right) = 3\cdot\left(x+1\right)\left(x-2\right)$

(b) Etudions le discriminant du polynôme $2\cdot x^2+12\cdot x+18$:

$\Delta = b^2 - 4\cdot a\cdot c = 12^2 - 4\times2\times18 = 144 - 144 = 0$

Le discriminant étant nul, le polynôme admet une unique racine dont la valeur est :

$-\dfrac{b}{2\cdot a} = -\dfrac{12}{2\times2} = -\dfrac{12}{4} = -3$

Ainsi, ce polynôme admet la forme factorisée :

$2\cdot x^2 + 12\cdot x + 3 = 2\cdot\left[x - (-3)\right]^2 = 2\cdot\left(x+3\right)^2$

C.27

(a)
- Un moyen rapide était de reconnaitre l'identité remarquable connue depuis le collège :

  $x^2+2x+1 = \left(x+1\right)^2$

- Sinon, on factorise avec les nouveaux outils :
  L'expression $-4x^2+12x-9$ a pour discriminant :

  $\Delta = b^2 - 4\cdot a\cdot c = 2^2 - 4\times1\times1 = 4 - 4 = 0$

  On a la factorisation :

  $x^2 + 2\cdot x + 1 = 1\cdot\left(x + \dfrac{2}{2\times1}\right)^2 = \left(x+1\right)^2$

(b) L'expression $3x^2-4x+2$ a pour discriminant :

$\Delta = b^2 - 4\cdot a\cdot c = (-4)^2 - 4\times3\times2 = 16 - 24 = -8$

Le discriminant étant strictement négatif, cette expression n'admet pas de racine : elle ne peut se factoriser en produit de facteurs de premier degré.

(c) L'expression $-3x^2+4x-1$ a pour discriminant :

$\Delta = b^2 - 4\cdot a\cdot c = 4^2 - 4\times(-3)\times(-1) = 16 - 12 = 4$

On a la simplification : $\sqrt{4} = 2$

Le discriminant étant strictement positif, cette expression admet les deux racines suivantes :

$x_1 = \dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \dfrac{-4-2}{2\times(-3)} = \dfrac{-6}{-6} = 1$

$x_2 = \dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \dfrac{-4+2}{2\times(-3)} = \dfrac{-2}{-6} = \dfrac{1}{3}$

On a la factorisation suivante :

$-3x^2 + 4x - 1 = (-3)\left(x - \dfrac{1}{3}\right)\left(x-1\right)$

$= \left(-3x+1\right)\left(x-1\right)$

C.28

(a) Le polynôme $8x^2-24x+18$ admet pour discriminant :

$\Delta = b^2 - 4\cdot a\cdot c = (-24)^2 - 4\times8\times18 = 576 - 576 = 0$

Le discriminant étant nul, ce polynôme admet une unique solution :

$-\dfrac{b}{2a} = -\dfrac{-24}{2\times8} = \dfrac{24}{16} = \dfrac{3}{2}$

Ce polynôme admet la factorisation suivante :

$8x^2 - 24x + 18 = 8\left(x - \dfrac{3}{2}\right)^2 = 2\times2^2\times\left(x-\dfrac{3}{2}\right)^2$

$= 2\left[2^2\times\left(x-\dfrac{3}{2}\right)^2\right] = 2\left[2\times\left(x-\dfrac{3}{2}\right)\right]^2$

$= 2\left(2x - 2\times\dfrac{3}{2}\right)^2 = 2\left(2x-3\right)^2$

(b) Le polynôme $3x^2+x+1$ admet le discriminant suivant :

$\Delta = b^2 - 4\cdot a\cdot c = 1^2 - 4\times3\times1 = 1 - 12 = -11$

Le discriminant étant strictement négatif, on ne déduit que ce polynôme n'admet pas de forme factorisée.

(c) Le polynôme $-4x^2+x+3$ admet le discriminant suivant :

$\Delta = b^2 - 4\cdot a\cdot c = 1^2 - 4\times(-4)\times3 = 1 + 48 = 49$

On a la simplification suivante : $\sqrt{\Delta} = \sqrt{49} = 7$

Le discriminant étant strictement positif, ce polynôme admet les deux racines suivantes :

$x_1 = \dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \dfrac{-1-7}{2\times(-4)} = \dfrac{-8}{-8} = 1$

$x_2 = \dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \dfrac{-1+7}{2\times(-4)} = \dfrac{6}{-8} = -\dfrac{3}{4}$

On a la factorisation suivante :

$-4x^2 + x + 3 = -4\left[x - \left(-\dfrac{3}{4}\right)\right]\left(x-1\right)$

$= -4\left(x+\dfrac{3}{4}\right)\left(x-1\right) = \left[4\cdot\left(x+\dfrac{3}{4}\right)\right]\left(1-x\right)$

$= \left(4\cdot x + 3\right)\left(1-x\right)$

C.29

(1) Le polynôme $-2\cdot x^2-3\cdot x+5$ admet pour discriminant :

$\Delta = b^2 - 4\cdot a\cdot c = \left(-3\right)^2 - 4\times(-2)\times5 = 9 + 40 = 49$

On a la simplification : $\sqrt{\Delta} = \sqrt{49} = 7$

Le discriminant de ce polynôme du second degré étant strictement positif, on en déduit les deux racines suivantes :

$$x_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2{\cdot}a} = \frac{-(-3)-7}{2\times(-2)} = \frac{3-7}{-4} = \frac{-4}{-4} = 1$$

$$x_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2{\cdot}a} = \frac{-(-3)+7}{2\times(-2)} = \frac{3+7}{-4} = \frac{10}{-4} = -\frac{5}{2}$$

On en déduit la forme factorisée du polynôme :

$$-2{\cdot}x^2-3{\cdot}x+5 = -2\Big(x+\frac{5}{2}\Big)\big(x-1\big)$$
$$= -\big(2{\cdot}x+5\big)\big(x-1\big) = \big(2{\cdot}x+5\big)\big(1-x\big)$$

(2) (a) La bonne réponse est $\Big(x+\frac{5}{2}\Big)\big(1-x\big)$:

Car :

$$-2{\cdot}x^2-3{\cdot}x+5 = \big(2{\cdot}x+5\big)\big(1-x\big)$$
$$\frac{1}{2}{\cdot}\big(-2{\cdot}x^2-3{\cdot}x+5\big) = \frac{1}{2}{\cdot}\big(2{\cdot}x+5\big)\big(1-x\big)$$
$$-x^2-\frac{3}{2}{\cdot}x+\frac{5}{2} = \Big[\frac{1}{2}{\cdot}\big(2{\cdot}x+5\big)\Big]\big(1-x\big)$$
$$-x^2-\frac{3}{2}{\cdot}x+\frac{5}{2} = \Big(x+\frac{5}{2}\Big)\big(1-x\big)$$

(b) La bonne réponse est $\big(2{\cdot}x+5\big)\big(2-x\big)$:

Car :

$$-2{\cdot}x^2-3{\cdot}x+5 = \big(2{\cdot}x+5\big)\big(1-x\big)$$
$$-2{\cdot}x^2-3{\cdot}x+5+\big(1-x\big) = \big(2{\cdot}x+5\big)\big(1-x\big)+\big(1-x\big)$$
$$-2{\cdot}x^2-3{\cdot}x+5+\big(1-x\big) = \Big[\big(2{\cdot}x+5\big)+1\Big]\big(1-x\big)$$
$$-2{\cdot}x^2-3{\cdot}x+5+\big(1-x\big) = \big(2{\cdot}x+6\big)\big(1-x\big)$$

(c) La bonne réponse est $\big(2{\cdot}x+7\big){\cdot}x$:

Car de la factorisation :

$$-2{\cdot}x^2-3{\cdot}x+5 = \big(2{\cdot}x+5\big)\big(1-x\big)$$

On en déduit :

$$-2{\cdot}\big(x+1\big)^2-3{\cdot}\big(x+1\big)+5 = \Big[2{\cdot}\big(x+1\big)+5\Big]\Big[1-\big(x+1\big)\Big]$$
$$-2{\cdot}\big(x+1\big)^2-3{\cdot}\big(x+1\big)+5 = \big(2{\cdot}x+2+5\big)\big(1-x-1\big)$$
$$-2{\cdot}\big(x+1\big)^2-3{\cdot}\big(x+1\big)+5 = \big(2{\cdot}x+7\big){\cdot}\big(-x\big)$$
$$-2{\cdot}\big(x+1\big)^2-3{\cdot}\big(x+1\big)+5 = -\big(2{\cdot}x+7\big){\cdot}x$$

C.30

(a) Cherchons les racines de x^2+3x+4

L'étude du discriminant donne :

$$\Delta = b^2-4ac = 3^2-4\times1\times4 = -7 < 0$$

Le discriminant de ce polynome est strictement négatif ; il n'admet aucune racine.

Le coefficient du terme de degré 2 est positif.

Voici le tableau de signes :

x	$-\infty$	$+\infty$
x^2+3x+4	$+$	

(b) Cherchons les racines de $4x^2+3x-10$.

L'étude du discriminant donne :

$$\Delta = b^2-4ac = 3^2-4\times4\times(-10) = 169 > 0$$

On a la simplification : $\sqrt{\Delta} = \sqrt{169} = 13$

Les racines de ce polynome sont :

$$x_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-3-13}{8} = -2$$

$$x_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2} = \frac{-3+13}{8} = \frac{5}{4}$$

Le coefficient du terme de degré 2 est positif.

Voici le tableau de signes :

x	$-\infty$		-2		$\frac{5}{4}$		$+\infty$
$4x^2+3x-10$		$+$	0	$-$	0	$+$	

(c) Cherchons les racines de $4x^2-16x+16$.

L'étude du discriminant donne :

$$\Delta = b^2-4ac = (-16)^2-4\times4\times16 = 0$$

Ce polynôme est nul ; il admet une unique racine :

$$x_0 = -\frac{b}{2a} = -\frac{-16}{8} = 2$$

Le coefficient du terme de degré 2 est positif.

Voici le tableau de signes :

x	$-\infty$		2		$+\infty$
$4x^2-16x+16$		$+$	0	$+$	

C.31

(a) Le polynôme $3x^2+4x-4$ admet pour discriminant :

$$\Delta = b^2-4{\cdot}a{\cdot}c = 4^2-4\times3\times(-4) = 16+48 = 64$$

On a la simplification : $\sqrt{\Delta} = \sqrt{64} = 8$

Le discriminant étant strictement positif, ce polynôme admet les deux racines suivantes :

$$x_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2{\cdot}a} = \frac{-4-8}{2\times3} = \frac{-12}{6} = -2$$

$$x_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2{\cdot}a} = \frac{-4+8}{2\times3} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$$

Le coefficient du terme du second degré étant strictement positif, on en déduit le tableau de signes suivant :

x	$-\infty$		-2		$\frac{2}{3}$		$+\infty$
$3x^2+4x-4$		$+$	0	$-$	0	$+$	

(b) Le polynôme $-4x^2+2x+6$ admet pour discriminant :

$$\Delta = b^2-4{\cdot}a{\cdot}c = 2^2-4\times(-4)\times6 = 4+96 = 100$$

On a la simplification : $\sqrt{\Delta} = \sqrt{100} = 10$

Le discriminant étant strictement positif, ce polynôme admet les deux racines suivantes :

$$x_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2{\cdot}a} = \frac{-2-10}{2\times(-4)} = \frac{-12}{-8} = \frac{3}{2}$$

$$x_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2{\cdot}a} = \frac{-2+10}{2\times(-4)} = \frac{8}{-8} = -1$$

x	$-\infty$		-1		$\frac{3}{2}$		$+\infty$
$-4x^2+2x+6$		$-$	0	$+$	0	$-$	

C.32

(a) Le polynôme $2{\cdot}x^2{+}9{\cdot}x{+}10$ admet pour discriminant :

$$\Delta = b^2 - 4{\cdot}a{\cdot}c = 9^2 - 4\times2\times10 = 81 - 80 = 1$$

Le discriminant étant strictement positif, on a les deux racines suivantes :

$$x_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2{\cdot}a} = \frac{-9-1}{2\times2} = \frac{-10}{4} = -\frac{5}{2}$$

$$x_2 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2{\cdot}a} = \frac{-9+1}{2\times2} = \frac{-8}{4} = -2$$

Le signe du coefficient du second degré étant strictement négatif, on obtient le tableau de signes :

x	$-\infty$		$-\frac{5}{2}$		-2		$+\infty$
$2{\cdot}x^2{+}9x{+}10$		$+$	0	$-$	0	$+$	

(b) Le polynôme $12x^2{-}31x{+}20$ admet pour discriminant :

$$\Delta = b^2 - 4{\cdot}a{\cdot}c = \big(-31\big)^2 - 4\times12\times20 = 961 - 960 = 1$$

Le discriminant étant strictement positif, ce polynôme admet les deux racines suivantes :

$$x_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2{\cdot}a} = \frac{-(-31)-1}{2\times12} = \frac{31-1}{24} = \frac{30}{24} = \frac{5}{4}$$

$$x_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2{\cdot}a} = \frac{-(-31)+1}{2\times12} = \frac{31+1}{24} = \frac{32}{24} = \frac{4}{3}$$

En remarquant que $\frac{5}{4} < \frac{4}{3}$, on a le tableau de signes :

x	$-\infty$		$\frac{5}{4}$		$\frac{4}{3}$		$+\infty$
$12x^2{-}31{+}20$		$+$	0	$-$	0	$+$	

(c) Cherchons les racines de $-5x^2{-}3x{-}1$.
Le calcul du discrimant donne :

$$\Delta = b^2 - 4ac = (-3)^2 - 4\times(-5)\times(-1) = -11 < 0$$

Le discriminant est strictement négatif ; ce polynome n'admet aucune racine.

Le coefficient du terme de coefficent 2 est négatif.

Voici le tableau de signes :

x	$-\infty$		$+\infty$
$-5x^2{-}3x{-}1$		$-$	

C.33

(a) Le polynôme $x^2{-}x{-}2$ a pour discriminant :

$$\Delta = b^2 - 4{\cdot}a{\cdot}c = (-1)^2 - 4\times1\times(-2) = 1 + 8 = 9$$

On a la simplification suivante : $\sqrt{\Delta} = \sqrt{9} = 3$

Le discriminant étant strictement positif, ce polynôme admet les deux racines suivantes :

$$x_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-(-1)-3}{2\times1} = \frac{-2}{2} = -1$$

$$x_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-(-1)+3}{2\times1} = \frac{4}{2} = 2$$

Le coefficient du second degré étant positif, on a le tableau de signes suivant :

x	$-\infty$		-1		2		$+\infty$
$x^2{-}x{-}2$		$+$	0	$-$	0	$+$	

Ainsi, l'ensemble des solutions de cette équation est :

$$\mathcal{S} = \big]-1\,;\,2\big[$$

(b) Le polynôme $-9x^2{+}12x{-}4$ a pour discriminant :

$$\Delta = b^2 - 4{\cdot}a{\cdot}c = 12^2 - 4\times(-9)\times(-4) = 144 - 144 = 0$$

Le discriminant étant nul, ce polynôme admet une unique rqcine :

$$-\frac{b}{2a} = -\frac{12}{2\times(-9)} = \frac{12}{18} = \frac{2}{3}$$

Puisque le coefficient du second degré de ce polynôme est négatif, o a le tableau de signes suivant :

x	$-\infty$		$\frac{2}{3}$		$+\infty$
$-9x^2{+}12x{-}4$		$-$	0	$-$	

Ainsi, l'ensemble des solutions de cette équation est :

$$\mathcal{S} = \mathbb{R}$$

C.34

(1) Le polynôme $-4x^2{+}2x{+}2$ a pour discriminant :

$$\Delta = b^2 - 4{\cdot}a{\cdot}c = 2^2 - 4\times(-4)\times2 = 4 + 32 = 36$$

On a la simplification suivante : $\sqrt{\Delta} = \sqrt{36} = 4$

Le discriminant étant strictement positif, ce polynôme admet les deux racines suivantes :

$$x_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-2-6}{2\times(-4)} = \frac{-8}{-8} = 1$$

$$x_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-2+6}{2\times(-4)} = \frac{4}{-8} = -\frac{1}{2}$$

Le coefficient du second degré étant strictement négatif, on a le tableau de signes suivant :

x	$-\infty$		$-\frac{1}{2}$		1		$+\infty$
$-4x^2{+}2x{+}2$		$-$	0	$+$	0	$-$	

Ainsi, l'ensemble des solutions de cette équation est :

$$\mathcal{S} = \Big[-\frac{1}{2}\,;\,1\Big]$$

(2) Etudions le polynôme du second degré $3{\cdot}x^2{+}x{+}1$ dont le discriminant a pour valeur :

$$\Delta = b^2 - 4{\cdot}a{\cdot}c = 1^2 - 4\times3\times1 = 1 - 12 = -11$$

Le discriminant étant strictement négatif, ce polynôme n'admet aucune racine. Le coefficient du terme du second degré étant strictement positif, ce polynôme admet le tableau de signes :

x	$-\infty$	$+\infty$
$3{\cdot}x^2{+}x{+}1$	$+$	

Ainsi, l'inéquation $3{\cdot}x^2{+}x{+}1<0$ admet pour ensemble de solutions :

$\mathcal{S} = \varnothing$

C.35

ⓐ Etudions le discriminant du polynôme $6{\cdot}x^2{+}x{-}1$:

$\Delta = b^2 - 4{\cdot}a{\cdot}c = 1^2 - 4{\times}6{\times}(-1) = 1+24 = 25$

On a la simplification : $\sqrt{\Delta} = \sqrt{25} = 5$

Le discriminant étant strictement positif, on en déduit qu'il admet deux racines dont les valeurs sont :

$$x_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2{\cdot}a} = \frac{-1-5}{2{\times}6} = \frac{-6}{12} = -\frac{1}{2}$$

$$x_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2{\cdot}a} = \frac{-1+5}{2{\times}6} = \frac{4}{12} = \frac{1}{3}$$

Le coefficient du terme du second degré étant strictement positif, on a le tableau de signes ci-dessous :

x	$-\infty$		$-\frac{1}{2}$		$\frac{1}{3}$		$+\infty$
$6{\cdot}x^2{+}x{-}1$		$+$	0	$-$	0	$+$	

On en déduit que l'inéquation $6{\cdot}x^2{+}x{-}1\geqslant 0$ admet pour ensemble de solution :

$\mathcal{S} = \left]-\infty\,;-\frac{1}{2}\right]\cup\left[\frac{1}{3}\,;+\infty\right[$

ⓑ Le polynôme $-x^2{+}x{-}3>0$ a pour discriminant :

$\Delta = b^2 - 4{\cdot}a{\cdot}c = 1^2 - 4{\times}(-1){\times}(-3) = 1-12 = -11$

Le discriminant étant strictement négatif et le coefficient du terme du seconde degré étant négatif, ce polynôme admet pour tableau de signes :

x	$-\infty$	$+\infty$
$-x^2{+}x{-}3$	$-$	

Ainsi, l'ensemble des solutions de cette inéquation est :

$\mathcal{S} = \varnothing$ *(l'ensemble vide)*

C.36

ⓐ Etudions le signe de $-10x^2{-}13x{+}3$. Le discriminant de ce trinôme vaut :

$\Delta = b^2 - 4ac = (-13)^2 - 4{\times}(-10){\times}3$
$= 169 + 120 = 289 > 0$

Oon a la simplification suivante : $\sqrt{\Delta} = \sqrt{289} = 17$

Le discriminant est strictement positif ; ce trinôme admet les deux racines suivante :

$$x_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{13-17}{-20} = \frac{-4}{-20} = \frac{1}{5}$$

$$x_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{13+17}{-20} = \frac{30}{-20} = -\frac{3}{2}$$

Le coefficient du second degé est négatif. Voici le tableau de signes de ce trinôme :

x	$-\infty$		$-\frac{3}{2}$		$\frac{1}{5}$		$+\infty$
$-10x^2{-}13x{+}3$		$-$	0	$+$	0	$-$	

L'équation $-10x^2{-}13x{+}3\geqslant 0$ admet pour solutions, les nombres de l'ensemble :

$S = \left[-\frac{3}{2}\,;\frac{1}{5}\right]$

ⓑ Etudions le signe du facteur $x^2{+}x{+}1$. Le discriminant de ce trinôme est :

$\Delta = b^2 - 4ac = 1^2 - 4{\times}1{\times}1 = -3 < 0$

Le discriminant est strictement négatif ; ce polynôme n'admet aucune racine et possède le signe de son coefficient du second degré : ce trinôme est toujours positif

Ainsi, on obtient le tableau de signes suivant :

x	$-\infty$		$-\frac{1}{3}$		$+\infty$
$3x+1$		$-$	0	$+$	
x^2+x+1		$+$		$+$	
$(3x{+}1)(x^2{+}x{+}1)$		$-$	0	$+$	

L'inéquation $(3x{+}1)(x^2{+}x{+}1)<0$ admet pour ensemble de solutions :

$S = \left]-\infty\,;-\frac{1}{3}\right[$

C.37 Pour étudier la position relative des courbes $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$, considérons la comparaison :

$$f(x) < g(x)$$
$$x^2 - 6{\cdot}x + 7 < 2{\cdot}x^2 - 2{\cdot}x + 2$$
$$\big(x^2 - 6{\cdot}x + 7\big) - \big(2{\cdot}x^2 - 2{\cdot}x + 2\big) < 0$$
$$x^2 - 6{\cdot}x + 7 - 2{\cdot}x^2 + 2{\cdot}x - 2 < 0$$
$$-x^2 - 4{\cdot}x + 5 < 0$$

Le polynôme $-x^2{-}4{\cdot}x{+}5$ a pour discriminant :

$\Delta = b^2 - 4{\cdot}a{\cdot}c = (-4)^2 - 4{\times}(-1){\times}5 = 16 + 20 = 36$

On a la simplification : $\sqrt{\Delta} = \sqrt{36} = 6$

Puisque le discriminant est positif, on a les deux racines :

$$x_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2{\cdot}a} = \frac{-(-4)-6}{2{\times}(-1)} = \frac{4-6}{-2} = \frac{-2}{-2} = 1$$

$$x_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2{\cdot}a} = \frac{-(-4)+6}{2{\times}(-1)} = \frac{4+6}{-2} = \frac{10}{-2} = -5$$

Le coefficient du second degré de ce polynôme étant strictement négatif, on en déduit le tableau de signes suivant :

x	$-\infty$		-5		1		$+\infty$
$-x^2{-}4{\cdot}x{+}5$		$-$	0	$+$	0	$-$	

On en déduit :

- La courbe $\mathscr{C}_f$ se situe sous la courbe $\mathscr{C}_g$ sur l'ensemble $\left]-\infty\,;-5\right[\cup\left]1\,;+\infty\right[$.
- La courbe $\mathscr{C}_f$ se situe au-dessus de la courbe $\mathscr{C}_g$ sur l'ensemble $\left]-5\,;1\right[$.

C.38 On a les aires suivantes :

- Le carré $AMNP$ a ses côtés de mesure x. Son aire $\mathcal{A}$ a pour mesure :
  $\mathcal{A}=x^2$
- Le rectangle $MBCQ$ a pour mesure :
  $MB=5-x$; $BC=5\,cm$
  Son aire $\mathcal{A}'$ a pour mesure :
  $\mathcal{A}'=MB\times BC=\big(5-x\big)\times5=25-5\cdot x$

Déterminons les valeurs de x pour lesquelles l'aire du carre $AMNP$ est strictement supérieure à l'aire du rectangle $BCQM$:

$$\mathcal{A}\geqslant\mathcal{A}'$$
$$x^2\geqslant25-5\cdot x$$
$$x^2+5\cdot x-25\geqslant0$$

Le membre de gauche de cette inéquation est un polynôme du second degré dont le discriminant a pour valeur :
$\Delta=b^2-4\cdot a\cdot c=5^2-4\times1\times(-25)=25+100=125$

On a la simplification : $\sqrt{\Delta}=\sqrt{125}=\sqrt{25\times5}=5\cdot\sqrt{5}$

Le discriminant étant strictement positif, on en déduit que ce polynôme admet les deux racines suivantes :

$$x_1=\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2\cdot a}=\frac{-5-5\cdot\sqrt{5}}{2\times1}=\frac{-5-5\cdot\sqrt{5}}{2}$$
$$x_2=\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2\cdot a}=\frac{-5+5\cdot\sqrt{5}}{2\times1}=\frac{-5+5\cdot\sqrt{5}}{2}$$

Le coefficient du terme du second degré de ce polynôme étant strictement positif, il admet le tableau de signes suivant :

x	$-\infty$		$\frac{-5-5\sqrt{5}}{2}$		$\frac{-5+5\sqrt{5}}{2}$		$+\infty$
$x^2+5\cdot x-25$		$+$	0	$-$	0	$+$	

La valeur de x représentant la longueur du segment $[AB]$, on en déduit que celle-ci doit appartenir à l'intervalle $\big[0\,;5\big]$. On en déduit que l'ensemble des solutions est :

$$\mathcal{S}=\Big(\Big]-\infty\,;\frac{-5-5\sqrt{5}}{2}\Big[\cup\Big]\frac{-5+5\sqrt{5}}{2}\,;+\infty\Big[\Big)\cap\big[0\,;5\big]$$
$$=\Big]\frac{-5+5\sqrt{5}}{2}\,;5\Big]$$

C.39

1. On considère un polynôme du second degré dont le discriminant est strictement positif :

a. Calculer la somme des racines :

$$x_1+x_2=\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}+\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$$
$$=\frac{\big(-b-\sqrt{\Delta}\big)+\big(-b+\sqrt{\Delta}\big)}{2a}=\frac{-2b}{2a}=-\frac{b}{a}$$

b. Calculons le produit des racines de ce polynôme :

$$x_1\cdot x_2=\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}\times\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$$
$$=\frac{\big(-b-\sqrt{\Delta}\big)\big(-b+\sqrt{\Delta}\big)}{4a^2}=\frac{-\big(\sqrt{\Delta}+b\big)\big(\sqrt{\Delta}-b\big)}{4a^2}$$
$$=\frac{-\big(\Delta-b^2\big)}{4a^2}=\frac{-\big[(b^2-4ac)-b^2\big]}{4a^2}=\frac{-(-4ac)}{4a^2}$$
$$=\frac{4ac}{4a^2}=\frac{c}{a}$$

2. a. On remarque facilement que 2 est une racine de ce polynôme :
$2x^2+4x-16=x\times2^2+4\times2-16=8+8-16=0$

- Déterminons la seconde racine en utilisant la somme des racines :

$$x_1+x_2=-\frac{b}{a}$$
$$2+x_2=-\frac{4}{2}$$
$$x_2=-2-2$$
$$x_2=-4$$

Il est facile de vérifier que $2\big(x-2\big)\big(x+4\big)$ est la forme factorisée de ce polynôme.

- Il est également possible de déterminer la seconde racine en utilisant la valeur du produit des racines :

$$x_1\cdot x_2=\frac{c}{a}$$
$$2\cdot x_2=\frac{-16}{2}$$
$$x_2=\frac{-8}{2}$$
$$x_2=-4$$

Par cette méthode, on trouve également la même valeur pour cette seconde racine.

b. En lien avec la question 1 et en notant x_1 et x_2 les deux racines de ce polynôme, on a les relations suivantes sur les coefficients de ce polynôme :

$$\begin{cases}x_1+x_2=-\dfrac{b}{a}\\ x_1\cdot x_2=\dfrac{c}{a}\end{cases}\iff\begin{cases}3=-\dfrac{b}{a}\\ -10=\dfrac{c}{a}\end{cases}\iff\begin{cases}-3a=b\\ -10a=c\end{cases}$$

En choisissant 1 pour valeur de a, le polynôme recherché est :
$x^2-3x-10$

Facultatif:

Ce polynôme du second degré a pour valeur :
$\Delta=b^2-4ac=(-3)^2-4\times1\times(-10)=9+40=49$

Le discriminant étant strictement positif, ce polynôme admet les deux racines :

$$x_1=\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2\cdot a}=\frac{-(-3)-7}{2\times1}=\frac{-4}{2}=-2$$
$$x_1=\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2\cdot a}=\frac{-(-3)+7}{2\times1}=\frac{10}{2}=5$$

Les deux racines sont : -2 ; 5