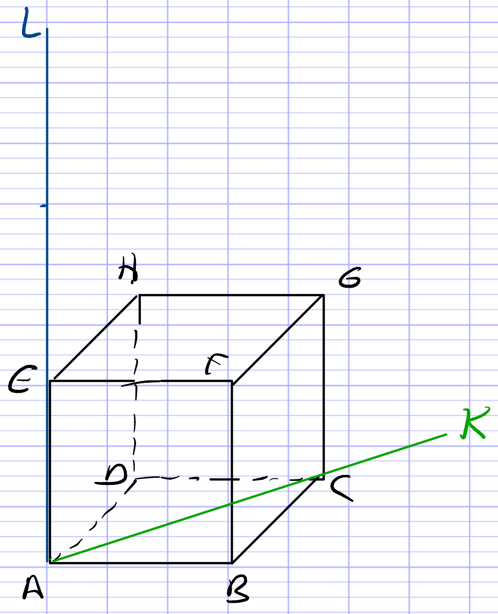
DS 1

3

⇒ Exercice n°1



1°/ ⓐ $\vec{AG} = \vec{AC} + \vec{CG}$
$= \vec{AC} + \vec{AE}$

ⓑ $\vec{KG} = \vec{KA} + \vec{AG}$
$= -\frac{3}{2}\vec{AC} + \vec{AC} + \vec{AE}$
$= \vec{AE} - \frac{1}{2}\vec{AC}$

2°/ ⓐ $\vec{KL} = \vec{KA} + \vec{AL}$
$= -\frac{3}{2}\vec{AC} + 3\vec{AE}$

Il existe une combinaison linéaire de $\vec{KL}$, $\vec{AC}$ et $\vec{AE}$
Ils sont donc coplanaires

ⓑ On a $\vec{KL} = 3\vec{AE} - \frac{3}{2}\vec{AC} = 3(\vec{AE} - \frac{1}{2}\vec{AC}) = 3\vec{KG}$
Donc $\vec{KL}$ et $\vec{KG}$ sont colinéaires
Donc K, L et G sont alignés.

4

⇒ Exercice n°2

1°/ a

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{+\infty} \frac{1}{n} = 0 \\ \lim\limits_{+\infty} n^2 - 2 = +\infty \end{array}\right\} \text{ Par produit } \underline{\text{FI}}$$

b $\forall n \in \mathbb{N}, \quad v_n = \frac{n^2}{n} - \frac{2}{n} = n - \frac{2}{n}$

On
$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{+\infty} n = +\infty \\ \lim\limits_{+\infty} \frac{-2}{n} = 0 \end{array}\right\} \text{ Par somme, } \lim\limits_{+\infty} v_n = +\infty$$

2°/ a $\forall n \in \mathbb{N}, \quad v_n = \frac{n^2+n}{4}$

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{+\infty} n^2+n = +\infty \\ \lim 4 = 4 \end{array}\right\} \text{ Par quotient } \lim\limits_{+\infty} v_n = +\infty$$

b $\forall n \in \mathbb{N}, \quad w_n = \frac{n^3+2n}{n^2-3} = \frac{n^2(n+\frac{2}{n})}{n^2(1-\frac{3}{n^2})} = \frac{n+\frac{2}{n}}{1-\frac{3}{n^2}}$

$$\left.\begin{array}{l} \left.\begin{array}{l} \lim\limits_{+\infty} n = +\infty \\ \lim\limits_{+\infty} \frac{2}{n} = 0 \end{array}\right\} \text{ Par somme } \lim\limits_{+\infty} n + \frac{2}{n} = +\infty \\ \left.\begin{array}{l} \lim\limits_{+\infty} 1 = 1 \\ \lim\limits_{+\infty} \frac{3}{n^2} = 0 \end{array}\right\} \text{ Par somme } \lim\limits_{+\infty} 1 - \frac{3}{n^2} = 1 \end{array}\right\} \text{ Par quotient, } \lim\limits_{+\infty} w_n = +\infty$$

c $\forall n \in \mathbb{N}, \quad z_n = \sqrt{n} - \sqrt{n-5} = \frac{(\sqrt{n} - \sqrt{n-5})(\sqrt{n} + \sqrt{n-5})}{\sqrt{n} + \sqrt{n-5}}$

$$= \frac{\sqrt{n}^2 - \sqrt{n-5}^2}{\sqrt{n} + \sqrt{n-5}} = \frac{n - n + 5}{\sqrt{n} + \sqrt{n-5}}$$

$$= \frac{5}{\sqrt{n} + \sqrt{n-5}}$$

Ainsi,
$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{+\infty} 5 = 5 \\ \lim\limits_{+\infty} \sqrt{n} + \sqrt{n-5} = +\infty \end{array}\right\} \text{ Par quotient } \lim\limits_{+\infty} z_n = 0$$

2

⇒ Exercice n°3

1°/ Oui, c'est la définition d'une limite infinie.

2°/ $\lim_{+\infty} U_n = +\infty \Rightarrow \forall A \in \mathbb{R}, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \geq n_0, U_n \in [A; +\infty[$

3°/ $\forall A \in \mathbb{R}, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \geq n_0, U_n \in [A; +\infty[\Rightarrow \lim_{+\infty} U_n = +\infty$

⇝ La réciproque est vraie.

2

⇒ Exercice n°3

On a : • 23 choix pour les quatres lettres
• 10 choix pour les chiffres.

Ainsi, dans les conditions de l'exercice, il y a $23 \times 23 \times 10 \times 10 \times 10 \times 23 \times 23 = 279\ 841\ 000$ plaques d'immatriculation possibles.

9

⇒ Exercice n°4

1°/ En 2020, il y a 50 000 arbres, soit 50 milliers
Donc $U_0 = 50$

2°/ $\forall n \in \mathbb{N}$; $U_{n+1} = 0{,}95\, U_n + 3$

3°/ Mq : $\forall n \in \mathbb{N}$, $U_{n+1} \geq U_n$

Init : $U_0 = 50$
$U_1 = 0{,}95 \times 50 + 3 = 50{,}5$
⇝ La pté est initialisée

Hérédité : Soit $k \in \mathbb{N}$ fixé. Supposons que, pour cet entier $u_k \leq u_{k+1}$

Mq la pté est vraie au rang suivant (ie. $u_{k+1} \leq u_{k+2}$)

$$u_k \leq u_{k+1} \quad \text{(par HR)}$$
$$0{,}95u_k \leq 0{,}95u_{k+1}$$
$$0{,}95u_k + 3 \leq 0{,}95u_{k+1} + 3$$
$$u_{k+1} \leq u_{k+2}$$

$\rightsquigarrow$ La pté est héréditaire

Conclusion : Par principe de récurrence, (u_n) est croissante

4°/ Init : $n=0$, $\cdot\, u_0 = 50$

$\cdot\, 60 - 10 \times 0{,}95^0 = 60 - 10 = 50$

$\rightsquigarrow$ La pté est initialisée

Hérédité : Soit $k \in \mathbb{N}$ fixé tq la pté soit vraie (ie. $u_k = 60 - 10 \times 0{,}95^k$)

Mq la pté est vraie au rang suivant (ie. $u_{k+1} = 60 - 10 \times 0{,}95^k$)

$$\begin{aligned} u_{k+1} &= 0{,}95u_k + 3 \quad \text{(par déf)} \\ &= 0{,}95(60 - 10 \times 0{,}95^k) + 3 \quad \text{(par HR)} \\ &= 57 - 10 \times 0{,}95^{k+1} + 3 \\ &= 60 - 10 \times 0{,}95^{k+1} \end{aligned}$$

$\rightsquigarrow$ La pté est héréditaire

Conclusion : Par principe de récurrence $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n = 60 - 10 \times 0{,}95^n$

0.5

0.5

5°/ $2026 = 2020 + 6$

Or $U_6 = 60 - 10 \times 0{,}95^6 \approx 52{,}649$

$\rightsquigarrow$ Il y aurait donc environ 52 649 arbres en 2026

6°/ $\lim\limits_{+\infty} 60 = 60$
$\lim\limits_{+\infty} -10 \times 0{,}95^n = 0$ } Par somme, $\lim\limits_{+\infty} U_n = 60$

$\rightsquigarrow$ Le nombre d'arbre dans la forêt va se stabiliser vers 60 000.