NOM Prénom : 2025/2026

Correction

Bac Blanc 1

EDS Term.

Exercice 1 Nouvelle Calédonie 2023

(*X points*)

1. (a)

$$u_1 = 5u_0 - 4 \times 0 - 3 = 5 \times 3 - 4 - 3 = 15 - 7 = \boxed{12}$$

(b)

$$u_2 = 5u_1 - 4 \times 1 - 3 = 5 \times 12 - 4 - 3 = 60 - 7 = \boxed{53}$$

(c) Il semble que la suite (u_n) soit croissante et tende vers $+\infty$.

2. (a) Soit P_n la proposition $u_n \geqslant n+1$.
Initialisation : $u_0 = 3$ et $0+1 = 1$.
$3 \geqslant 1$. La proposition est donc vraie au rang $n = 0$.

Hérédité : on suppose la proposition vraie au rang $n \in \mathbb{N},\ u_n \geqslant n+1$ (hypothèse de récurrence). On va vérifier qu'alors elle est vraie au rang suivant.

$$\begin{aligned} u_n \geqslant n+1 &\iff 5u_n \geqslant 5(n+1) \\ &\iff 5u_n - 4n - 3 \geqslant 5n + 5 - 4n - 3 \\ &\iff u_{n+1} \geqslant n+2 = (n+1)+1 \end{aligned}$$

La proposition est donc héréditaire.

Conclusion : la proposition P_n est vérifiée au rang $n = 0$ et est héréditaire, donc, d'après le principe de récurrence, elle est vraie pour tout entier naturel n : $u_n \geqslant n+1$.

(b) On a : $\lim\limits_{n\to+\infty} (n+1) = +\infty$. Puisque $u_n \geqslant n+1$, par comparaison, on a :

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} u_n = +\infty}$$

3. (a)

$$\begin{aligned} v_{n+1} &= u_{n+1} - (n+1) - 1 \\ &= 5u_n - 4n - 3 - n - 1 - 1 \\ &= 5u_n - 5n - 5 \\ &= 5\left(u_n - n - 1\right) \\ &= 5v_n \end{aligned}$$

La suite (v_n) est donc une suite géométrique de raison $q = 5$ et de premier terme $v_0 = u_0 - 0 - 1 = 2$.

(b) Puisque (v_n) est une suite géométrique de raison 5 et de premier terme $v_0 = 2$, on a :

$$\boxed{v_n = 2 \times 5^n}$$

(c) $v_n = u_n - n - 1 \iff u_n = v_n + n + 1$. Donc :

$$\boxed{u_n = 2 \times 5^n + n + 1}$$

(d) Puisque $5 > 1$, la suite de terme général 5^n est strictement croissante, donc $5^{n+1} \geqslant 5^n$.

$$\begin{aligned}
5^{n+1} \geqslant 5^n &\iff 2 \times 5^{n+1} \geqslant 2 \times 5^n \\
&\iff 2 \times 5^{n+1} + (n+1) + 1 \geqslant 2 \times 5^n + (n+1) + 1 \\
&\iff u_{n+1} \geqslant 2 \times 5^n + n + 2 \\
&\iff u_{n+1} \geqslant 2 \times 5^n + n + 1 \\
&\iff u_{n+1} \geqslant u_n
\end{aligned}$$

La suite (u_n) est donc croissante.

4. (a)

```
def suite():
  u=3
  n=0
  while u<10**7:
    u= 5*u-4*n-3
    n=n+1
  return n
```

(b)

u	n	u < 10^7
3	0	VRAI
12	1	VRAI
53	2	VRAI
254	3	VRAI
1 255	4	VRAI
6 256	5	VRAI
31 257	6	VRAI
156 258	7	VRAI
781 259	8	VRAI
3 906 260	9	VRAI
19 531 261	10	FAUX

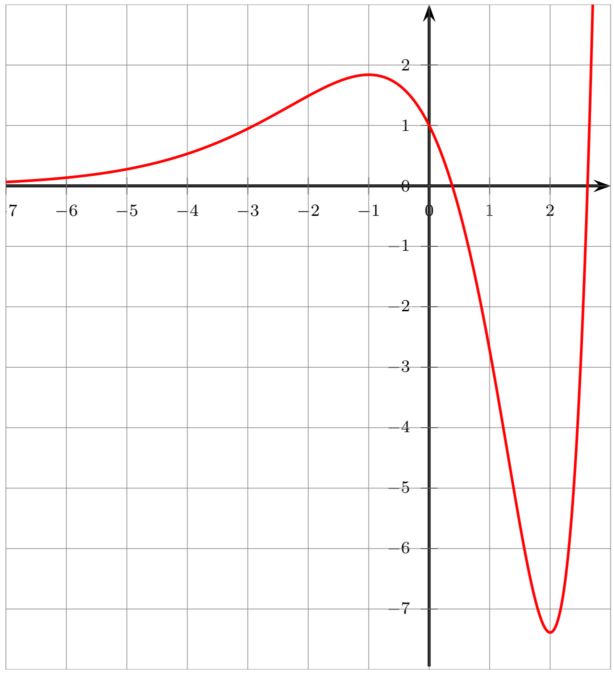
La valeur renvoyée par cette fonction est $n = 10$. C'est le rang à partir duquel $u_n \geqslant 10^7$.

Exercice 2 **Amérique du Nord 2023** *(X points)*

Partie A

Le plan est muni d'un repère orthogonal.

On considère une fonction f définie et dérivable sur $\mathbb{R}$. On note f' sa fonction dérivée. On donne ci-dessous la courbe représentative de la fonction dérivée f'.



1. Le sens de variation de la fonction f sur $\mathbb{R}$ est donné par le signe de la dérivée f'.
   - Sur $]-\infty\,;\ 0,4[$, $f' > 0$ donc f est strictement croissante.
   - Sur $]0,4\,;\ 2,6[$, $f' < 0$ donc f est strictement décroissante.
   - Sur $]2,6\,;\ +\infty[$, $f' > 0$ donc f est strictement croissante.
2. La fonction f est convexe sur les intervalles sur lesquels la dérivée f' est croissante, soit sur $]-\infty\,;\ -1[$ et sur $]2\,;\ +\infty[$.

Partie B

On admet que la fonction f de la partie **A** est définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = (x^2 - 5x + 6)\,\mathrm{e}^x$.
On note $\mathcal{C}$ la courbe représentative de la fonction f dans un repère.

1. a) On détermine la limite de la fonction f en $+\infty$.

$$\left.\begin{array}{l}\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\left(x^2-5x+6\right) = \lim_{x\to+\infty} x^2 = +\infty \\ \displaystyle\lim_{x\to+\infty} e^x = +\infty\end{array}\right\} \Longrightarrow \lim_{x\to+\infty}\left(x^2-5x+6\right)e^x = +\infty$$

donc $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$

   b) On détermine la limite de la fonction f en $-\infty$.

Pour $x \neq 0$, $f(x) = x^2\left(1 - \dfrac{5}{x} + \dfrac{6}{x^2}\right)e^x = x^2e^x\left(1 - \dfrac{5}{x} + \dfrac{6}{x^2}\right)$

$$\left.\begin{array}{l}\displaystyle\lim_{x\to-\infty} x^2e^x = 0 \\ \displaystyle\lim_{x\to-\infty}\left(1-\frac{5}{x}+\frac{6}{x^2}\right) = 1\end{array}\right\} \Longrightarrow \lim_{x\to-\infty} x^2e^x\left(1-\frac{5}{x}+\frac{6}{x^2}\right) = 0$$

donc $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} f(x) = 0$

2. La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et :
$f'(x) = (2x-5)\,e^x + (x^2-5x+6)\times e^x = (2x-5+x^2-5x+6)\,e^x = (x^2-3x+1)\,e^x$
3. Pour déterminer le sens de variation de la fonction f, on étudie le signe de $f'(x)$.
Pour tout x, $e^x > 0$ donc $f'(x)$ est du signe de $x^2 - 3x + 1$.
$\Delta = (-3)^2 - 4\times 1\times 1 = 5 > 0$; $x' = \dfrac{-(-3)-\sqrt{5}}{2\times 1} = \dfrac{3-\sqrt{5}}{2}$ et $x'' = \dfrac{3+\sqrt{5}}{2}$

x	$-\infty$		$\frac{3-\sqrt{5}}{2}$		$\frac{3+\sqrt{5}}{2}$		$+\infty$
x^2-3x+1		$+$	0	$-$	0	$+$	
e^x		$+$		$+$		$+$	
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
f		croissante		décroissante		croissante	

4. La tangente $(\mathcal{T})$ à la courbe $\mathcal{C}$ au point d'abscisse 0 a pour équation réduite : $y = f'(0)\,(x-0) + f(0)$.
   - $f(x) = (x^2-5x+6)\,e^x$ donc $f(0) = 6e^0 = 6$
   - $f'(x) = (x^2-3x+1)\,e^x$ donc $f'(0) = 1e^0 = 1$

   $\mathcal{T}$ a pour équation réduite $y = 1\,(x-0)+6$ soit $y = x+6$.

On admet que la fonction f est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$. On note f'' la fonction dérivée seconde de la fonction f. On admet que, pour tout réel x, on a $f''(x) = (x+1)(x-2)\mathrm{e}^x$.

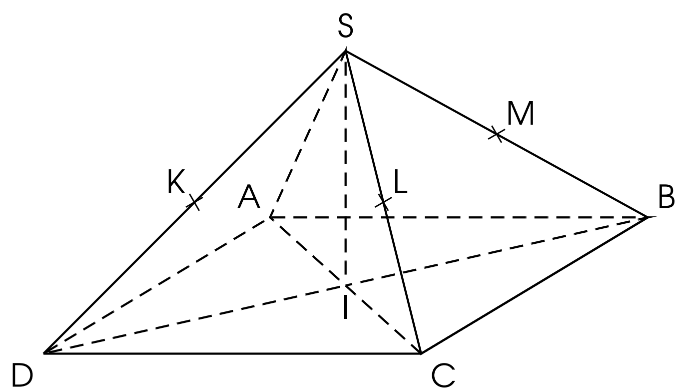
5. a) Pour étudier la convexité de la fonction f sur $\mathbb{R}$, on étudie le signe de $f''(x)$.

x	$-\infty$		-1		2		$+\infty$
$x+1$		$-$	0	$+$		$+$	
$x-2$		$-$		$-$	0	$+$	
e^x		$+$		$+$		$+$	
$f''(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
f		convexe		concave		convexe	

   b) Sur $[-1\ ;\ 2]$, la fonction f est concave donc la courbe $\mathcal{C}$ est en dessous de ses tangentes, et en particulier en dessous de la tangente $\mathcal{T}$ car $0 \in [-1\ ;\ 2]$.
   Donc, pour tout x appartenant à l'intervalle $[-1\ ;\ 2]$, on a $f(x) \leqslant x+6$.

Exercice 3 QCM *(X points)*

Partie A - Sujet 0 - Mars 2021



SABCD est une pyramide régulière à base carrée ABCD dont toutes les arêtes ont la même longueur. Le point I est le centre du carré ABCD. On suppose que : IC = IB = IS $= 1$.
Les points K, L et M sont les milieux respectifs des arêtes [SD], [SC] et [SB].

1. Les droites suivantes ne sont pas coplanaires :

a. (DK) et (SD) **b.** (AS) et (IC) $\boxed{\textbf{c.}\ \text{(AC) et (SB)}}$ **d.** (LM) et (AD)

On procède par élimination.

- Les droites (DK) et (SD) sont sécantes en D donc coplanaires ; on élimine **a.**
- Les droites (AS) et (IC) sont sécantes en A donc coplanaires ; on élimine **b.**
- Les droites (LM) et (AD) sont toutes deux parallèles à (BC) donc parallèles entre elles ; elles sont donc coplanaires ; on élimine **d.**

Réponse c.

Pour les questions suivantes, on se place dans le repère orthonormé de l'espace $\left(\text{I}\ ;\ \overrightarrow{\text{IC}},\ \overrightarrow{\text{IB}},\ \overrightarrow{\text{IS}}\right)$.
Dans ce repère, on donne les coordonnées des points suivants :

$$\text{I}(0\ ;\ 0\ ;\ 0)\ ;\ \text{A}(-1\ ;\ 0\ ;\ 0)\ ;\ \text{B}(0\ ;\ 1\ ;\ 0)\ ;\ \text{C}(1\ ;\ 0\ ;\ 0) ; \text{D}(0\ ;\ -1\ ;\ 0)\ ;\ \text{S}(0\ ;\ 0\ ;\ 1).$$

2. Les coordonnées du milieu N de [KL] sont :

a. $\left(\frac{1}{4}\ ;\ \frac{1}{4}\ ;\ \frac{1}{4}\right)$ $\boxed{\textbf{b.}\ \left(\frac{1}{4}\ ;\ -\frac{1}{4}\ ;\ \frac{1}{2}\right)}$ **c.** $\left(-\frac{1}{4}\ ;\ \frac{1}{4}\ ;\ \frac{1}{2}\right)$ **d.** $\left(-\frac{1}{2}\ ;\ \frac{1}{2}\ ;\ 1\right)$

- Le milieu K de [SD] a pour coordonnées $\left(0\ ;\ -\frac{1}{2}\ ;\ \frac{1}{2}\right)$.
- Le milieu L de [SC] a pour coordonnées $\left(\frac{1}{2}\ ;\ 0\ ;\ \frac{1}{2}\right)$.
- Le milieu N de [KL] a donc pour coordonnées $\left(\frac{1}{4}\ ;\ -\frac{1}{4}\ ;\ \frac{1}{2}\right)$.

Réponse b.

3. Les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{\text{AS}}$ sont :

a. $\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}$ $\boxed{\textbf{b.}\ \begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}}$ **c.** $\begin{pmatrix}2\\1\\-1\end{pmatrix}$ **d.** $\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$

Réponse b.

Partie B - Sujet 0 - Janvier 2024

4. Une urne contient cinquante boules numérotées de 1 à 50. On tire successivement trois boules dans cette urne, **sans remise**. On appelle « tirage » la liste non ordonnée des numéros des trois boules tirées. Quel est le nombre de tirages possibles, **sans tenir compte de l'ordre des numéros** ?

a. 50^3 **b.** $1 \times 2 \times 3$ **c.** $50 \times 49 \times 48$ **d.** $\dfrac{50 \times 49 \times 48}{1 \times 2 \times 3}$

$\dbinom{50}{3} = \dfrac{50 \times 49 \times 48}{1 \times 2 \times 3}$

Réponse d.

5. On effectue dix lancers d'une pièce de monnaie. Le résultat d'un lancer est « pile » ou « face ». On note la liste ordonnée des dix résultats.
Quel est le nombre de listes ordonnées possibles ?

a. 2×10 **b.** 2^{10}

c. $1 \times 2 \times 3 \times \cdots \times 10$ **d.** $\dfrac{1 \times 2 \times 3 \times \cdots \times 10}{1 \times 2}$

Il y a 2 résultats possibles si on effectue 1 lancer, 2^2 résultats possibles si on effectue 2 lancers, etc., 2^{10} résultats possibles si on effectue 10 lancers.

Réponse b.

Exercice 4 — Centres étrangers 2024 J1 (X points)

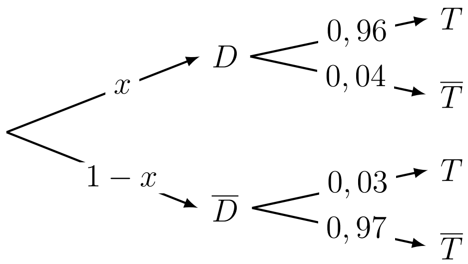
Partie A

1. f est dérivable sur son ensemble de définition, en tant que fraction rationnelle.
$$\forall x \in [0~;~1],\quad f'(x) = \frac{0,96 \times (0,93x + 0,03) - (0,96x \times 0,93)}{(0,93x + 0,03)^2} = \frac{0,8928x + 0,0288 - 0,8928x}{(0,93x + 0,03)^2} = \frac{0,0288}{(0,93x + 0,03)^2}$$
On arrive donc bien à l'expression demandée.

2. On a une fonction dérivée qui est le quotient d'un numérateur strictement positif par un dénominateur qui est le carré d'un réel non nul, donc strictement positif également, donc pour tout x dans $[0~;~1]$, $f'(x)$ est strictement positif.
On en déduit que la fonction f est strictement croissante sur $[0~;~1]$.

Partie B

1. On a l'arbre suivant :



2. Ici, on nous demande de déterminer : $P(D \cap T)$
$P(\mathrm{D} \cap \mathrm{T}) = P(D) \times P_D(T) = x \times 0,96 = 0,96x$.

3. Les évènements D et $\overline{D}$ partitionnent l'univers, donc, d'après la loi des probabilités totales, on a :
$$P(T) = P(D \cap T) + P(\overline{D} \cap T) = 0,96x + (1-x) \times 0,03 = 0,96x + 0,03 - 0,03x = 0,93x + 0,03$$
On arrive bien à la probabilité annoncée.

4. Dans cette question, on veut calculer $P_T(D)$.
Par définition des probabilités conditionnelles, on a : $P_T(D) = \dfrac{P(D \cap T)}{P(T)}$.
D'après les questions précédentes, cela donne : $P_T(D) = \dfrac{0,96x}{0,93x + 0,03} = f(x)$.
On est, dans cette question, avec 50 sportifs dopés sur les 1 000 testés, donc en choisissant un sportif au hasard, on est en situation d'équiprobabilité et donc la probabilité qu'un sportif soit dopé est, pour cette question $x = \dfrac{50}{1\,000} = 0,05$.
La probabilité demandée est donc bien $f(0,05) = \dfrac{0,96 \times 0,05}{0,93 \times 0,05 + 0,03} = \dfrac{32}{51} \approx 0,627$ soit environ 0,63 au centième près.

5. a) La valeur prédictive positive du test est donc la probabilité $P_T(D)$. D'après la question **4. a.**, pour toute probabilité x dans $[0~;~1]$, on a : $\quad P_T(D) = f(x)$.

On veut donc résoudre, dans $[0~;~1]$, l'inéquation : $\quad f(x) \geqslant 0,9$.

$$\begin{aligned}
f(x) \geqslant 0,9 &\iff \frac{0,96x}{0,93x+0,03} \geqslant 0,9 \\
&\iff 0,96x \geqslant 0,9(0,93x+0,03) \quad \text{car sur } [0~;~1], \quad 0,93x+0,03>0 \\
&\iff (0,96-0,9\times 0,93)x \geqslant 0,9\times 0,03 \\
&\iff 0,123x \geqslant 0,027 \\
&\iff x \geqslant \frac{27}{123} = \frac{9}{41}
\end{aligned}$$

C'est donc pour x supérieur à $\dfrac{9}{41} \approx 0,22$ que la valeur prédictive positive du test sera supérieure ou égale à 0,9.

b) Si on accepte comme vraie l'affirmation « les sportifs les plus performants [sont les] plus fréquemment dopés », alors le fait de restreindre la population testée aux sportifs les plus performants doit avoir pour conséquence de faire augmenter x, la proportion de sportifs dopés dans la population testée.

Comme la valeur prédictive positive est donnée par $f(x)$ et que la fonction f est strictement croissante sur $[0~;~1]$, plus x augmente, plus $f(x)$ augmente et donc plus on teste une population où la proportion de dopés est élevée (ce qui est le cas si on ne teste que les sportifs les plus performants), meilleure est la valeur prédictive positive du test.