Rappels de première

Exercice 1

1. La formule pour calculer $P_B(A)$ est : $P_B(A) = \dfrac{P(A\cap B)}{P(B)}$ avec $P(B) \neq 0$.
2. On cherche P(femme gauchère).
   Soit G l'événement "être gaucher" et F l'événement "être une femme".
   On a : $P(G) = 0{,}12$ et $P_G(F) = 0{,}37$.
   D'après la formule des probabilités composées : $P(F\cap G) = P(G) \times P_G(F) = 0{,}12 \times 0{,}37 = 0{,}0444$
   La probabilité qu'il s'agisse d'une femme gauchère est $0{,}0444$ soit $4{,}44\%$.

Exercice 2

1. La variable aléatoire X correspond au nombre de voyelles du mot tiré.
2. Les valeurs prises par X sont :
   - "le" : 1 voyelle
   - "hasard" : 2 voyelles
   - "conduit" : 3 voyelle
   - "le" : 1 voyelle
   - "monde" : 2 voyelles

   Donc X peut prendre les valeurs : $X(\Omega) = \{1; 2; 3\}$.
3. L'événement $\{X = 2\}$ correspond à "hasard" et "monde"

Exercice 3

Pour une loi de probabilité, la somme de toutes les probabilités doit égaler 1.
Soit p la valeur manquante. On a : $0{,}3 + 0{,}12 + p + 0{,}57 = 1$
$0{,}99 + p = 1$
$p = 1 - 0{,}99 = 0{,}01$
La valeur manquante est $0{,}01$.

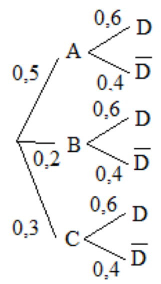
Exercice 4

1. $P(X \leq 3) = P(X = 0) + P(X = 1) + P(X = 2) + P(X = 3)$ $P(X \leq 3) = 0{,}2 + 0{,}11 + 0{,}1 + 0{,}02 = 0{,}43$
2. $P(X \geq 4) = P(X = 4) + P(X = 5) = 0{,}1 + 0{,}47 = 0{,}57$
   Ou bien : $P(X \geq 4) = 1 - P(X \leq 3) = 1 - 0{,}43 = 0{,}57$

Succession d'épreuves indépendantes

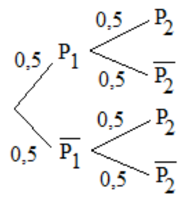
Exercice 5

1. (a) Les issues de la première épreuve sont : A, B et C.
   (b) Les issues de la seconde épreuve sont : D et $\overline{D}$.
2. L'arbre complété :



Exercice 6

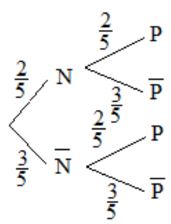
1. Oui, on peut modéliser cette expérience par une succession d'épreuves indépendantes car le résultat du premier dé n'influe pas le second.
2. On note P_1 l'événement "obtenir un nombre pair sur le premier dé" et P_2 l'événement "obtenir un nombre pair sur le second dé".



3. La probabilité d'obtenir un nombre pair sur chacun des deux dés est : $P(P_1 \cap P_2) = 0{,}5 \times 0{,}5 = 0{,}25$

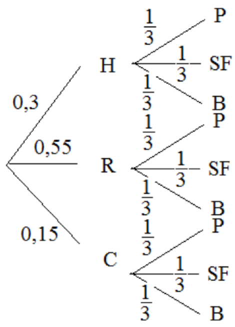
Exercice 7

1. La première boule tirée étant remise dans lurne, le premier tirage ninflue pas le second : on peut modéliser cette expérience aléatoire par une succession dépreuves indépendantes.
2. Arbre pondéré :



Exercice 8

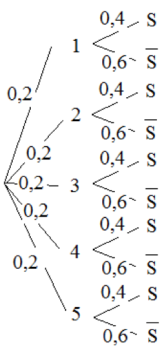
1. Oui, on peut modéliser cette expérience par une succession d'épreuves indépendantes car le choix du disque n'influe pas le choix du livre.
2. L'univers est : $\Omega = \{H, R, C\} \times \{P, SF, B\}$
3. L'arbre pondéré :



4. Les issues et leurs probabilités :
   - $(H, P) : 0{,}3 \times \frac{1}{3} = 0{,}1$
   - $(H, SF) : 0{,}3 \times \frac{1}{3} = 0{,}1$
   - $(H, B) : 0{,}3 \times \frac{1}{3} = 0{,}1$
   - $(R, P) : 0{,}55 \times \frac{1}{3} = \frac{0{,}55}{3} \approx 0{,}183$
   - $(R, SF) : 0{,}55 \times \frac{1}{3} \approx 0{,}183$
   - $(R, B) : 0{,}55 \times \frac{1}{3} \approx 0{,}183$
   - $(C, P) : 0{,}15 \times \frac{1}{3} = 0{,}05$
   - $(C, SF) : 0{,}15 \times \frac{1}{3} = 0{,}05$
   - $(C, B) : 0{,}15 \times \frac{1}{3} = 0{,}05$

Exercice 9

1. Oui, on peut modéliser cette expérience par une succession d'épreuves indépendantes car le choix de l'auteur n'influe pas la réussite de la photo.
2. L'univers est : $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5\} \times \{S, \overline{S}\}$ où S = "photo réussie".
3. L'arbre pondéré présente :



4. Les issues et leurs probabilités :
   - $(1, S)$, $(2, S)$, $(3, S)$, $(4, S)$, $(5, S) : 0{,}2 \times 0{,}4 =$ 0,08 chacune
   - $(1, \overline{S})$, $(2, \overline{S})$, $(3, \overline{S})$, $(4, \overline{S})$, $(5, \overline{S}) : 0{,}2 \times 0{,}6 =$ 0,12 chacune

Loi de Bernoulli

Exercice 10

Pour une loi de Bernoulli de paramètre $p = 0{,}2$:

- $E(X) = p = 0{,}2$
- $V(X) = p(1-p) = 0{,}2 \times 0{,}8 = 0{,}16$
- $\sigma(X) = \sqrt{V(X)} = \sqrt{0{,}16} = 0{,}4$

Exercice 11

1. Il y a $4 + 7 = 11$ jetons au total, dont 4 rouges. La probabilité d'obtenir un jeton rouge est $P(\text{rouge}) = \frac{4}{11}$.
2. X suit une loi de Bernoulli car :
   - X ne prend que deux valeurs : 0 et 1
   - $P(X = 1) = \frac{4}{11}$ (jeton rouge)
   - $P(X = 0) = \frac{7}{11}$ (jeton vert)

   Le paramètre de cette loi de Bernoulli est $p = \frac{4}{11}$.

Exercice 12

1. Soit p la probabilité d'obtenir Face et $2p$ celle d'obtenir Pile. On a : $p + 2p = 1$, donc $3p = 1$, soit $p = \frac{1}{3}$.
   Donc $P(\{X = 0\}) = P(\text{Pile}) = \frac{2}{3}$.
2. (a) X suit une loi de Bernoulli.

   (b) Son paramètre est $p = P(\{X = 1\}) = P(\text{Face}) = \frac{1}{3}$.

Exercice 13

1. X ne suit pas une loi de Bernoulli car elle prend 4 valeurs distinctes (1, 2, 3, 4), pas seulement 0 et 1.
2. X suit une loi de Bernoulli car :
   - X ne prend que deux valeurs : 0 et 1
   - $P(X = 1) = \frac{2}{3}$

   Le paramètre est $p = \frac{2}{3}$.

Exercice 14

Exemple : On lance un dé équilibré à 4 faces. X prend la valeur 1 si on obtient 1, et 0 sinon. $P(X = 1) = \frac{1}{4}$, donc X suit une loi de Bernoulli de paramètre $p = \frac{1}{4}$.

Exercice 15

1. Un dé équilibré a 6 faces : 1, 2, 3, 4, 5, 6. Les multiples de 3 sont : 3 et 6. X suit une loi de Bernoulli car elle prend les valeurs 0 et 1. Le paramètre est $p = P(X = 1) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$.
2. X suit une loi de Bernoulli car elle prend les valeurs 0 et 1. Le paramètre est $p = P(X = 1) = 0{,}53$.

Exercice 16

Vrai. Pour une loi de Bernoulli de paramètre $p = \frac{1}{4}$:

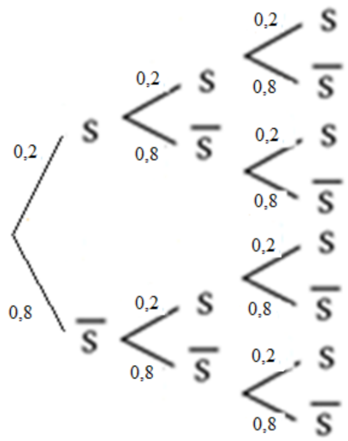
— $E(Y) = p = \frac{1}{4}$

— $V(Y) = p(1-p) = \frac{1}{4} \times \frac{3}{4} = \frac{3}{16}$

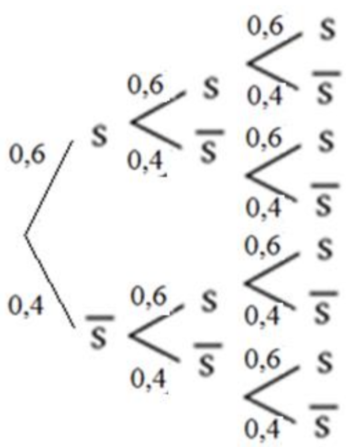
Schéma de Bernoulli

Exercice 17

1. Les paramètres de ce schéma de Bernoulli sont :
   — $n = 3$ (nombre d'épreuves)
   — $p = 0{,}4$ (probabilité de succès à chaque épreuve)
2. L'arbre complété :



Exercice 18



Exercice 19

On peut modéliser cette situation par un schéma de Bernoulli car :

— On répète 3 fois la même épreuve (lancer de basket)

— Les épreuves sont indépendantes

— Chaque épreuve a deux issues : succès (panier marqué) ou échec

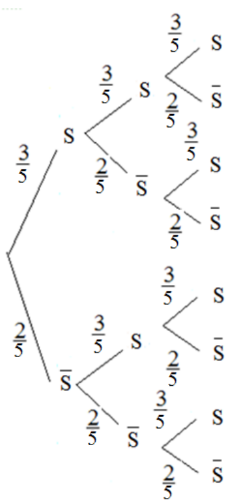
— La probabilité de succès est constante : $p = 0{,}85$

Les paramètres sont : $n = 3$ et $p = 0{,}85$.

Exercice 20

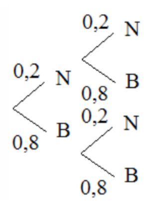
1. $P(S) = P(\text{boule verte}) = \frac{3}{5} = 0{,}6$.
2. Il s'agit d'un schéma de Bernoulli car :
   — On répète 3 fois la même épreuve avec remise
   — Les épreuves sont indépendantes (remise)
   — Probabilité de succès constante : $p = 0{,}6$

   Paramètres : $n = 3$ et $p = 0{,}6$.
3. L'arbre pondéré :



Exercice 21

1. On répète deux fois de façon identique et indépendante une épreuve de Bernoulli où le succès "tirer un jeton noir" a pour probabilité $0,2$. On identifie un schéma de Bernoulli de paramètres $n = 2$ et $p = 0,2$.
2. L'arbre pondéré :

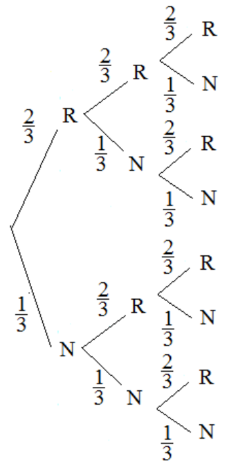


3. $P(X = 1) = \binom{2}{1} \times 0{,}2^1 \times 0{,}8^1 = 2 \times 0{,}2 \times 0{,}8 = 0{,}32$
   $P(X \geq 1) = 1 - P(X = 0) = 1 - 0{,}8^2 = 1 - 0{,}64 = 0{,}36$

Exercice 22

1. Soit r le nombre de boules rouges et n le nombre de boules noires. On a $r = 2n$ et la probabilité $p = \frac{r}{r+n} = \frac{2n}{3n} = \frac{2}{3}$.
2. (a) On répète trois fois de façon identique et indépendante une épreuve de Bernoulli dont la probabilité de succès est $\dfrac{2}{3}$. On identifie un schéma de Bernoulli de paramètres $n = 3$ et $p = \dfrac{2}{3}$.

ⓑ L'arbre pondéré :

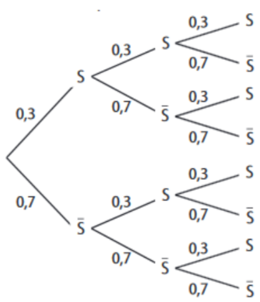


ⓒ $P(X=2) = \binom{3}{2} \times \left(\frac{2}{3}\right)^2 \times \frac{1}{3} = 3 \times \frac{4}{9} \times \frac{1}{3} = \frac{4}{9}$
$P(X \geq 2) = P(X=2) + P(X=3) = \frac{4}{9} + \left(\frac{2}{3}\right)^3 = \frac{4}{9} + \frac{8}{27} = \frac{12+8}{27} = \frac{20}{27}$

Loi Binomiale

Exercice 23

$X \sim \mathcal{B}(3; 0{,}3)$
En utilisant l'arbre pondéré :



— $P(X=0) = (0{,}7)^3 = 0{,}343$
— $P(X=1) = \binom{3}{1} \times 0{,}3^1 \times 0{,}7^2 = 3 \times 0{,}3 \times 0{,}49 = 0{,}441$
— $P(X \leq 1) = P(X=0) + P(X=1) = 0{,}343 + 0{,}441 = 0{,}784$

Exercice 24

1. Y suit une loi binomiale car :
   — On répète 5 fois la même épreuve (lancer de pièce)
   — Les épreuves sont indépendantes
   — Probabilité de succès constante : $p = 0{,}5$

   Paramètres : $n = 5$ et $p = 0{,}5$. Donc $Y \sim \mathcal{B}(5; 0{,}5)$.
2. $P(Y=2) = \binom{5}{2} \times 0{,}5^2 \times 0{,}5^3 = 10 \times 0{,}5^5 = 10 \times \frac{1}{32} = \frac{10}{32} = \frac{5}{16} = 0{,}3125$

Exercice 25

La probabilité dapparition du 3 nétant pas la même sur les deux dés, il ny a pas répétition dune même épreuve de Bernoulli : X ne suit pas une loi binomiale.

Exercice 26

Z ne suit pas une loi binomiale car les tirages se font sans remise. La probabilité de succès (tirer un bonbon rouge) change à chaque tirage car la composition du sachet évolue.

Exercice 27

1. X peut prendre les valeurs $0, 1, 2, ..., 15$.
2. Le nombre de chemins pour obtenir exactement 6 succès est $\binom{15}{6} = \frac{15!}{6! \times 9!} = 5005$.
3. $P(X=6) = \binom{15}{6} \times 0{,}4^6 \times 0{,}6^9 = 5005 \times 0{,}004096 \times 0{,}010078 \approx 0{,}207$

Exercice 28

1. Dans un jeu de 32 cartes, il y a 12 figures (4 valets + 4 dames + 4 rois). $P(\text{figure}) = \frac{12}{32} = \frac{3}{8} = 0{,}375$.
2. F suit une loi binomiale car :
   — On répète 5 fois la même épreuve avec remise
   — Les épreuves sont indépendantes
   — Probabilité de succès constante : $p = 0{,}375$

   Donc $F \sim \mathcal{B}(5; 0{,}375)$.

Exercice 29

1. X ne suit pas une loi binomiale car on ne répète pas un nombre fixe d'épreuves. On s'arrête dès qu'on trouve un retour.
2. X suit une loi binomiale $\mathcal{B}(100; 0{,}05)$ car :
   — On examine 100 ventes (nombre fixe d'épreuves)
   — Chaque vente est indépendante
   — Probabilité de retour constante : $p = 0{,}05$

Exercice 30

X suit une loi binomiale car :
— On interroge 5 personnes (nombre fixe)
— Chaque personne porte des lunettes indépendamment des autres
— Probabilité constante : $p = 0{,}71$

Donc $X \sim \mathcal{B}(5; 0{,}71)$.

Exercice 31

X ne suit pas une loi binomiale, on ne répète pas une épreuve de Bernoulli de façon identique puisque lunivers de lexpérience est modifié à chaque fois que lon mange un fruit.

Exercice 32 Logique

1. Cette proposition est fausse. Une loi binomiale avec $n > 1$ n'est pas une loi de Bernoulli.
2. Réciproque : "Si la v.a. X suit une loi de Bernoulli, alors elle suit une loi binomiale." Cette réciproque est vraie car une loi de Bernoulli est un cas particulier de loi binomiale avec $n = 1$.

Exercice 33 Calculatrice

$X \sim \mathcal{B}(25; 0{,}1)$

1. $P(X=0) = \binom{25}{0} \times 0{,}1^0 \times 0{,}9^{25} = 0{,}9^{25}$
   $P(X=1) = \binom{25}{1} \times 0{,}1^1 \times 0{,}9^{24} = 25 \times 0{,}1 \times 0{,}9^{24}$
   $P(X=2) = \binom{25}{2} \times 0{,}1^2 \times 0{,}9^{23} = 300 \times 0{,}01 \times 0{,}9^{23}$
2. $P(X=0) \approx 0{,}0718$, $P(X=1) \approx 0{,}1994$, $P(X=2) \approx 0{,}2659$
3. $P(X \geq 3) = 1 - P(X \leq 2) = 1 - (0{,}0718 + 0{,}1994 + 0{,}2659) = 1 - 0{,}5371 = 0{,}4629$

Exercice 34

$X \sim \mathcal{B}(8; p)$

1. $P(X=1) = \binom{8}{1} \times p^1 \times (1-p)^7 = 8p(1-p)^7$
2. $P(X=3) = \binom{8}{3} \times p^3 \times (1-p)^5 = 56p^3(1-p)^5$

Exercice 35 Calculatrice

$X \sim \mathcal{B}(30; 0{,}9)$

1. À l'aide de la calculatrice : $P(X=27) \approx 0{,}2361$
   $P(X \geq 27) = 1 - P(X \leq 26) \approx 0{,}6474$
2. $P(21 \leq X \leq 25) = P(X \leq 25) - P(X \leq 20) \approx 0{,}1754$

Exercice 36 Calculatrice

$Y \sim \mathcal{B}(200; 0{,}55)$
$P(90 \leq Y \leq 100) = P(Y \leq 100) - P(Y \leq 89) \approx 0{,}0869$

Exercice 37

$Z \sim \mathcal{B}(30; 0{,}6)$
$P(16 \leq Z \leq 22) = P(Z \leq 22) - P(Z \leq 15) = 0{,}956 - 0{,}175 = 0{,}781$ À 10^{-2} près : $P(16 \leq Z \leq 22) \approx 0{,}78$.

Exercice 38 Calculatrice

X compte le nombre de personnes sans religion dans un échantillon de 200.

1. $X \sim \mathcal{B}(200; 0{,}3)$
2. À l'aide de la calculatrice, le plus petit entier b tel que $P(X \leq b) \geq 0{,}9$ est $b = 68$.
3. Comme $P(X \leq 0) = 0$, $P(X \in [a; b]) > 0{,}9 \Leftrightarrow P(X \in [0; 68]) > 0,9$.
4. On peut affirmer que 90% des échantillons de 200 personnes interrogées comportent moins de 68 personnes se disant sans religion.

Exercice 39 Calculatrice

X compte le nombre d'adeptes de jeux vidéo dans un échantillon de 200.

1. $X \sim \mathcal{B}(200; 0{,}57)$
2. À l'aide de la calculatrice, le plus petit entier b tel que $P(X \leq b) \geq 0{,}95$ est $b = 125$.
3. $P(X \in [a; b]) = P(X \leq b) - P(X < a)$. Or $P(X \leq b) \geq 0,95$. Donc $a = 0$ fonctionne (car $P(X \leq 0) = 0$).
4. On peut affirmer que 95% des échantillons de 200 personnes interrogées comportent moins de 125 adeptes de jeux vidéo.

Exercice 40 Calculatrice

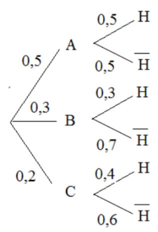
Y compte le nombre de personnes stressées dans un échantillon de 150.

1. $Y \sim \mathcal{B}(150; 0{,}53)$
2. À l'aide de la calculatrice :
   a est le plus petit entier tel que $P(Y \leq a) > 0{,}005$: $a = 64$
   b est le plus petit entier tel que $P(Y \leq b) \geq 0{,}995$: $b = 95$
3. $I = [64; 95]$ car $P(Y \in [64; 95]) \geq 0{,}99$.
4. Dans 99% des échantillons de 150 salariés, le nombre de personnes se disant stressées sera compris entre 64 et 95.

Problèmes

Exercice 41

1. Arbre pondéré :



2. $P(C \cap H) = P(C) \times P_C(H) = 0{,}2 \times 0{,}4 = 0{,}08$
3. $P(\overline{H}) = P(A) \times P_A(overlineH) + P(B) \times P_B(overlineH) + P(C) \times P_C(overlineH) = 0{,}5 \times 0{,}5 + 0{,}3 \times 0{,}7 + 0{,}2 \times 0{,}6 = 0{,}25 + 0{,}21 + 0{,}12 = 0{,}58$

Exercice 42

A et B sont indépendants, donc $P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$.

1. $P(A \cap B) = 0{,}4 \times 0{,}45 = 0{,}18$
   La probabilité de faire son trajet sans s'arrêter est $0{,}18$.
2. $P(\overline{A} \cap B) = P(\overline{A}) \times P(B) = 0{,}6 \times 0{,}45 = 0{,}27$
   Cet événement correspond à : "s'arrêter au premier feu mais pas au second".

Exercice 43

1. X suit une loi binomiale car :

— 5 joueurs effectuent l'épreuve (nombre fixe)

— Chaque joueur joue indépendamment

— Probabilité de succès constante : $p = 0{,}45$

Donc $X \sim \mathcal{B}(5; 0{,}45)$.

2. $P(X = 2) = \binom{5}{2} \times 0{,}45^2 \times 0{,}55^3 = 10 \times 0{,}2025 \times 0{,}166375 \approx 0{,}337$

3. $P(X \leq 2) = P(X = 0) + P(X = 1) + P(X = 2) \approx 0{,}55^5 + 5 \times 0,45 \times 0,55^4 + 0{,}337 \approx 0{,}593$

   Correction : $P(X \leq 2) \approx 0{,}593$

Exercice 44

1. $X \sim \mathcal{B}(15; 0{,}2)$ car :
   — 15 chiots vaccinés indépendamment
   — Probabilité de réaction forte : $p = 0{,}2$

2. $P(X = 1) = \binom{15}{1} \times 0{,}2^1 \times 0{,}8^{14} = 15 \times 0{,}2 \times 0{,}8^{14} \approx 0{,}1319$

   Cet événement signifie qu'exactement un chiot sur les 15 a une forte réaction.

3. $P(X \geq 2) = 1 - P(X \leq 1) = 1 - [P(X = 0) + P(X = 1)] = 1 - [0{,}8^{15} + 15 \times 0{,}2 \times 0{,}8^{14}] \approx 1 - 0{,}167 = 0{,}833$

Exercice 45

1. $X \sim \mathcal{B}(300; 0{,}97)$ car on peut assimiler à un tirage avec remise.

2. $P(X = 290) = \binom{300}{290} \times 0{,}97^{290} \times 0{,}03^{10} \approx 0{,}12$

3. "Au maximum un appareil non conforme" signifie $X \geq 299$. $P(X \geq 299) = P(X = 299) + P(X = 300) \approx 0{,}001$

Exercice 46

1. $X \sim \mathcal{B}(n; 0{,}05)$

2. Pour $n = 10$:
   — $P(X = 0) = 0{,}95^{10} \approx 0{,}60$
   — $P(X \geq 2) = 1 - P(X \leq 1) = 1 - [P(X = 0) + P(X = 1)] = 1 - [0{,}95^{10} + 10 \times 0{,}05 \times 0{,}95^9] \approx 1 - 0{,}91 = 0{,}09$

3. Si les allergies étaient indépendantes : $P(A \cap B) = 0{,}05 \times 0{,}4 = 0{,}02$

   Comme on observe effectivement $P(A \cap B) = 0{,}02$, les événements sont indépendants.

4. $Y \sim \mathcal{B}(100; 0{,}4)$
   a) À l'aide de la calculatrice : $a = 31$ et $b = 50$.
   b) $I = [31; 50]$ et $P(Y \in [31; 50]) \geq 0{,}95$.
   c) 30 nétant pas dans lintervalle considéré, on peut affirmer, au seuil de risque de 5%, que lhypothèse selon laquelle 40% de la population B est allergique au médicament B est erronée.