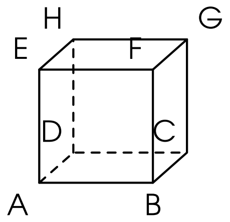
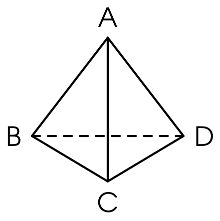
Lorsque l'exercice désigne le cube $ABCDEFGH$ (tétraèdre $ABCD$), il se réfère au cube (tétraèdre) représenté ci-dessous :





Droites

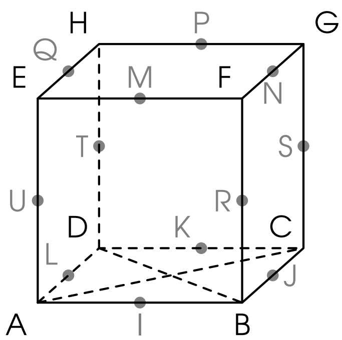
Exercice 1

ⓐ Deux vecteurs directeurs de (MP) : $\overrightarrow{MP}$ et $\overrightarrow{PM}$

ⓑ Deux vecteurs directeurs de (OD) : $\overrightarrow{OD}$ et $\overrightarrow{DO}$

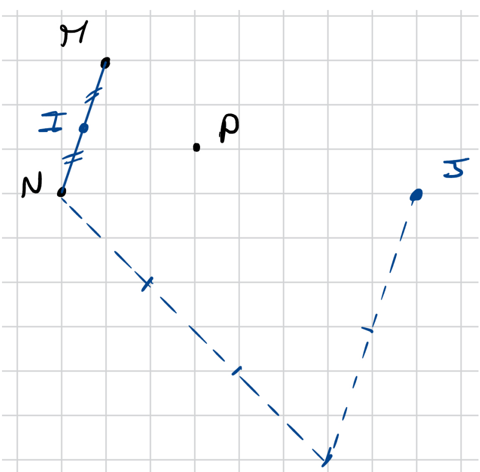
ⓒ Deux vecteurs directeurs de (ON) : $\overrightarrow{ON}$ et $\overrightarrow{NO}$

Remarque : On peut aussi exprimer ces vecteurs en fonction des arêtes du cube. Par exemple, pour (MP) : $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{EF}$ sont aussi des vecteurs directeurs.



Exercice 2

1. Figure :



2. Démonstration que $P \in (IJ)$:

Calculons $\overrightarrow{IP}$:

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{IP} &= \overrightarrow{IM} + \overrightarrow{MP} && (1)\\
&= -\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{MP} && (2)\\
&= -\frac{1}{2}\overrightarrow{MN} + \overrightarrow{MP} && (3)
\end{aligned}$$

Calculons $\overrightarrow{IJ}$:

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{IJ} &= \overrightarrow{IN} + \overrightarrow{NJ} && (4)\\
&= \overrightarrow{IM} + \overrightarrow{MN} + \overrightarrow{NJ} && (5)\\
&= -\frac{1}{2}\overrightarrow{MN} + \overrightarrow{MN} + 3\overrightarrow{MP} - 2\overrightarrow{MN} && (6)\\
&= \frac{1}{2}\overrightarrow{MN} + 3\overrightarrow{MP} - 2\overrightarrow{MN} && (7)\\
&= 3\overrightarrow{MP} - \frac{3}{2}\overrightarrow{MN} && (8)
\end{aligned}$$

On remarque que :

$$\overrightarrow{IP} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{MN} + \overrightarrow{MP} = \frac{1}{3}\left(3\overrightarrow{MP} - \frac{3}{2}\overrightarrow{MN}\right) = \frac{1}{3}\overrightarrow{IJ}$$

Donc $\overrightarrow{IP} = \frac{1}{3}\overrightarrow{IJ}$, ce qui prouve que $P \in (IJ)$.

Plans

Exercice 3

1. Quatre plans distincts : $(ABCD)$, $(EFGH)$, $(ABFE)$, $(DCGH)$

2. Pour chaque plan :

Plan $(ABCD)$:

1. Base : $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD})$
2. Repère : $(A; \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD})$

Plan $(EFGH)$:

1. Base : $(\overrightarrow{EF}, \overrightarrow{EH})$
2. Repère : $(E; \overrightarrow{EF}, \overrightarrow{EH})$

Plan $(ABFE)$:

1. Base : $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AE})$
2. Repère : $(A; \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AE})$

Plan $(DCGH)$:

1. Base : $(\overrightarrow{DC}, \overrightarrow{DH})$
2. Repère : $(D; \overrightarrow{DC}, \overrightarrow{DH})$

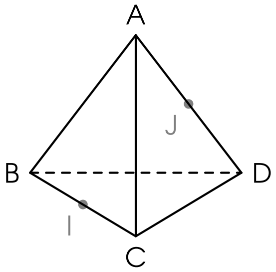
Exercice 4

1. Face (ABC) :

1. Deux vecteurs directeurs : $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$
2. Pour déterminer si $\overrightarrow{AI}$ est de la direction du plan (ABC), il faut vérifier s'il peut s'écrire comme combinaison linéaire de $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$. D'après la figure, I est le milieu de $[BC]$, donc $\overrightarrow{AI} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC})$. Donc oui, $\overrightarrow{AI}$ est de la direction du plan.

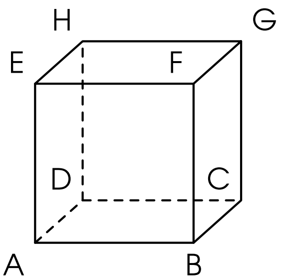
2. Face (ACD) :

1. Base du plan : $(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD})$
2. Pour placer J tel que $\overrightarrow{DJ}$ soit de la direction du plan (ACD), on peut prendre n'importe quel point du plan (ACD).



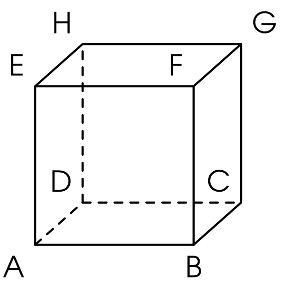
Positions relatives

Exercice 5



1. Dans le cube, D appartient au plan (ABC) car $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$ et le point C également. Donc (CD) est incluse dans le plan.
   Réponse : b incluse dans le plan (ABC)
2. Dans le cube, (AB) intersecte le plan (ADF) en A. Elle n'est pas incluse car $B \in (AB)$ et $B \notin (ADF)$.
   Réponse : a sécant au plan (ADF)
3. $H \notin (ABF)$ et $C \notin (ABF)$ donc (HF) n'est pas incluse dans le plan. De plus, (HC) est parallèle à $(EB) \in (ABF)$ donc (HC) est strictement parallèle au plan.
   Réponse : c strictement parallèle à (ADF)

Exercice 6



1. **Vrai :** $\overrightarrow{EG}$ relie deux sommets du plan (BEG), donc il appartient bien à la direction du plan (BEG).
2. **Faux :** $\overrightarrow{EF}$ et $\overrightarrow{HG}$ sont deux vecteurs colinéaires du plan égaux.
3. **Vrai :** $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{BC}$ sont deux vecteurs non colinéaires du plan (ABC), ils forment donc une base du plan, ils engendrent sa direction.
4. **Faux :** Par exemple, dans un cube, les droites (AB) et (EH) sont ni parallèles, ni sécante. Elles sont non-coplanaires.

Exercice 7

1. (ABC) **et** (FGH) **:** Ces deux plans sont les faces supérieure et inférieure du parallélépipède. Ils sont **strictement parallèles**.

2. (ABF) **et** (AEG) **:** Ces plans ont le point A en commun et ne sont pas confondus. Ils sont **sécants**.

3. (EFG) **et** (EHF) **:** On a $(EF) \in (EFG)$ et $(FG) \in (EFG)$ qui sont respectivement parallèles à (EF) et (EH) dans le plan (EHF). Ils sont donc parallèles et possède le point E en commum. Ils sont donc **confondus**.

4. (ADE) **et** (BFH) **:** On a $A \in (ADE)$ et $A \notin (BFH)$, ils ne sont donc pas confondus. De plus, $D \in (BFH)$ car $\overrightarrow{DF} = \overrightarrow{FH} - \overrightarrow{FB}$. Ces plans ont donc le point D en commun et ne sont pas confondus. Ils sont **sécants**.

Exercice 8

1. Calcul de $\overrightarrow{JI}$ **:**

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{JI} &= \overrightarrow{JA} + \overrightarrow{AI} \\
&= -\overrightarrow{AJ} + \overrightarrow{AI} \\
&= -\frac{3}{4}\overrightarrow{AB} + \frac{3}{4}\overrightarrow{AC} \\
&= \frac{3}{4}\overrightarrow{BA} + \frac{3}{4}\overrightarrow{AC} \\
&= \frac{3}{4}\overrightarrow{BC}
\end{aligned}$$

2. Si $\overrightarrow{JI} = \frac{3}{4}\overrightarrow{BC}$, alors la droite (IJ) est parallèle à la droite $(BC) \in (BCD)$ et donc au plan (BCD).

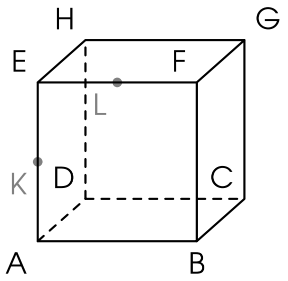
Exercice 9

1. Les vecteurs $\overrightarrow{BC}$ et $\overrightarrow{BD}$ forment une base de (BCD) car ils ne sont pas colinéaires (dans un tétraèdre, C et D ne sont pas alignés avec B).

2. Puisque $\overrightarrow{AE} = \overrightarrow{BC}$ et $\overrightarrow{AF} = \overrightarrow{BD}$, les vecteurs $\overrightarrow{AE}$ et $\overrightarrow{AF}$ forment une base du plan (AEF) identique à celle du plan (BCD). Les plans (AEF) et (BCD) sont donc **parallèles**.

Exercice 10

On a :



1. ⓐ K est le milieu de $[AE]$, donc $\overrightarrow{AK} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AE}$. Dans le cube, $\overrightarrow{AE}$ peut s'exprimer en fonction de $\overrightarrow{AD}$ et $\overrightarrow{AH}$: $\overrightarrow{AE} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AH}$ (car $ADHE$ est une face du cube). Donc K appartient au plan (ADH).

   ⓑ Les vecteurs $\overrightarrow{AD}$ et $\overrightarrow{KH}$ ne sont pas colinéaires car $(\overrightarrow{AD}; \overrightarrow{AE})$ est une base de (ADH) et $\overrightarrow{KH} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{KE} = \overrightarrow{AD} + \dfrac{1}{2}\overrightarrow{AE}$.

   ⓒ Les droites (AD) et (KH) sont **sécantes** car elles appartiennent au même plan (ADH) et ne sont pas parallèles.

2. Supposons par l'absurde que (AL) et (KH) sont parallèles.

   Cela signifie que (AL) et (KH) sont coplanaires.

   Or A, L et K appartiennent tous trois au plan (ABF).

   Donc H appartiendrai lui aussi au plan (ABF).

   C'est absurde car $ABCDEFGH$ est un cube et H est un point de (AED) qui n'appartient pas à (AE).

Exercice 11

1. Parallélisme de (IJ) et (BC) :
Calculons $\overrightarrow{IJ}$:

$$\begin{aligned}\overrightarrow{IJ} &= \overrightarrow{IB} + \overrightarrow{BJ}\\ &= -\overrightarrow{BI} + \overrightarrow{BJ}\\ &= -\frac{1}{3}\overrightarrow{BS} + \overrightarrow{BJ}\end{aligned}$$

Or $\overrightarrow{BJ} = \overrightarrow{BS} + \overrightarrow{SJ} = \overrightarrow{BS} + \frac{2}{3}\overrightarrow{SC}$
Donc :

$$\begin{aligned}\overrightarrow{IJ} &= -\frac{1}{3}\overrightarrow{BS} + \overrightarrow{BS} + \frac{2}{3}\overrightarrow{SC}\\ &= \frac{2}{3}\overrightarrow{BS} + \frac{2}{3}\overrightarrow{SC}\\ &= \frac{2}{3}(\overrightarrow{BS} + \overrightarrow{SC})\\ &= \frac{2}{3}\overrightarrow{BC}\end{aligned}$$

Donc $\overrightarrow{IJ} = \frac{2}{3}\overrightarrow{BC}$, les droites (IJ) et (BC) sont parallèles.
2. Sécance de (AJ) et (DI) :

Puisque $ABCD$ est un parallélogramme et $\overrightarrow{IF} = \dfrac{2}{3}\overrightarrow{BC} = \dfrac{2}{3}\overrightarrow{AD}$, on en déduit que $AIDJ$ est un trapèze.

Par conséquent, $[AJ]$ et $[DI]$ sont les diagonales du parallélogrammes, elles sont donc sécantes.

Exercice 12 Logique

1. La proposition est **fausse**.

Contre-exemple : Considérons dans l'espace deux droites non-coplanaires, comme (AB) et (EH) dans un cube $ABCDEFGH$. Ces droites n'ont aucun point commun mais ne sont pas parallèles car elles ne sont pas coplanaires.

2. La réciproque serait : "Si deux droites sont strictement parallèles, alors elles n'ont pas de point commun." Cette proposition est **vraie** par définition des droites strictement parallèles.

Exercice 13

1. Pour montrer que $F \in (BD)$, calculons $\overrightarrow{BF}$: $\overrightarrow{BF} = \overrightarrow{BE} + \overrightarrow{EF} = \frac{1}{5}\overrightarrow{BC} + \frac{1}{5}\overrightarrow{CD} = \frac{1}{5}\overrightarrow{BD}$.

Ceci prouve que $F \in (BD)$.

2. Pour montrer que $G \in (AB)$, calculons $\overrightarrow{AG}$: $\overrightarrow{AG} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BG} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BE} + \overrightarrow{EG} = \overrightarrow{AB} + \dfrac{1}{5}\overrightarrow{BC} + \dfrac{1}{5}\overrightarrow{CA} = \overrightarrow{AB} + \dfrac{1}{5}\overrightarrow{BA} = \dfrac{4}{5}\overrightarrow{AB}$

Donc $G \in (AB)$.

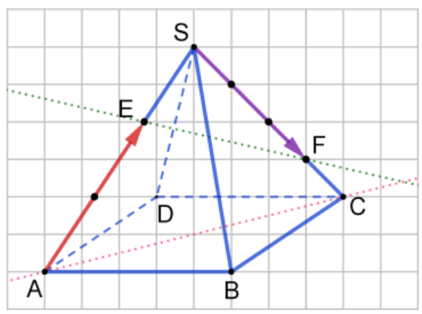
3. On a $\overrightarrow{FG} = \overrightarrow{FB} + \overrightarrow{BG} = -\dfrac{1}{5}\overrightarrow{BD} + \dfrac{1}{5}\overrightarrow{BA} = \frac{1}{5}\overrightarrow{DB} + \frac{1}{5}\overrightarrow{BA} = \dfrac{1}{5}\overrightarrow{DA}$

Donc $\overrightarrow{FG}$ et $\overrightarrow{DA}$ sont colinéaires.

Donc $(FG)//(DA)$.

Exercice 14

1. 2.



3. Démonstration que (EF) et (AC) sont sécantes :

E et F sont deux points du plan (SAC), donc les droites (EF) et (AC) sont soit sécantes, soit parallèles.

On a montrer qu'elles ne sont pas parallèles.

Exprimons $\overrightarrow{EF}$:

$$\begin{aligned}\overrightarrow{EF} &= \overrightarrow{ES} + \overrightarrow{SF} \\ &= -\overrightarrow{SE} + \frac{3}{4}\overrightarrow{SC} \\ &= -\frac{1}{3}\overrightarrow{SA} + \frac{3}{4}\overrightarrow{SC}\end{aligned}$$

Exprimons $\overrightarrow{AC}$:

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AC} &= \overrightarrow{AS} + \overrightarrow{SC} \\ &= -\overrightarrow{SA} + \overrightarrow{SC}\end{aligned}$$

Il n'existe pas de réel k tel que $\overrightarrow{EF} = k\overrightarrow{AC}$, donc les droites (EF) et (AC) sont sécantes.

Exercice 15

1. Colinéarité des vecteurs :
$\overrightarrow{IJ} = \overrightarrow{SJ} - \overrightarrow{SI} = \frac{1}{3}\overrightarrow{SB} - \frac{1}{3}\overrightarrow{SA} = \frac{1}{3}(\overrightarrow{AS} + \overrightarrow{SB}) = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB}$
Donc $\overrightarrow{IJ}$ et $\overrightarrow{AB}$ sont colinéaires.
De même : $\overrightarrow{JK} = \overrightarrow{SK} - \overrightarrow{SJ} = \frac{1}{3}\overrightarrow{SC} - \frac{1}{3}\overrightarrow{SB} = \frac{1}{3}(\overrightarrow{BS} - \overrightarrow{SC}) = \frac{1}{3}\overrightarrow{BC}$
Donc $\overrightarrow{JK}$ et $\overrightarrow{BC}$ sont colinéaires.
2. Parallélisme des plans (IJK) **et** (ABC) **:**
Les vecteurs $\overrightarrow{IJ}$ et $\overrightarrow{JK}$ (qui forment une base du plan (IJK)) sont respectivement colinéaires aux vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{BC}$ (qui forment une base du plan (ABC)).
Donc les plans (IJK) et (ABC) sont parallèles.

Exercice 16

1. **Justification que** $\overrightarrow{AI} = \overrightarrow{BL}$ **:**

   Dans le cube, exprimons ces vecteurs :
   •$\overrightarrow{AI} = \overrightarrow{AE} + \overrightarrow{EI} = \overrightarrow{AE} + \frac{1}{3}\overrightarrow{EH}$
   •$\overrightarrow{BL} = \overrightarrow{BF} + \overrightarrow{FL} = \overrightarrow{BF} + \frac{1}{3}\overrightarrow{FG}$

   Dans un cube : $\overrightarrow{AE} = \overrightarrow{BF}$ et $\overrightarrow{EH} = \overrightarrow{FG}$

   Donc $\overrightarrow{AI} = \overrightarrow{BL}$.

2. (a) **Expression des vecteurs** :

   •$\overrightarrow{IJ} = \overrightarrow{IE} + \overrightarrow{EJ} = -\dfrac{1}{3}\overrightarrow{EH} + \dfrac{1}{4}\overrightarrow{EF} = \dfrac{1}{4}\overrightarrow{EF} - \dfrac{1}{3}\overrightarrow{EH} = \dfrac{1}{4}\overrightarrow{EF} - \dfrac{1}{3}\overrightarrow{FG}$

   •$\overrightarrow{KL} = \overrightarrow{KG} + \overrightarrow{GL} = \dfrac{1}{2}\overrightarrow{HG} + \overrightarrow{GL} = \dfrac{1}{2}\overrightarrow{EF} - \dfrac{2}{3}\overrightarrow{FG}$

   (b) **Démonstration que** $(AIJ)//(BKL)$:

   $\overrightarrow{AI}$ et $\overrightarrow{IJ}$ sont deux vecteurs non colinéaires du plan (AIJ) qui sont respectivement colinéaires à $\overrightarrow{BL}$ et $\overrightarrow{KL}$ deux vecteurs non colinéaires du plan (BKL).

   On en déduit que les plans (AIJ) et (BKL) sont parallèles.

Exercice 17

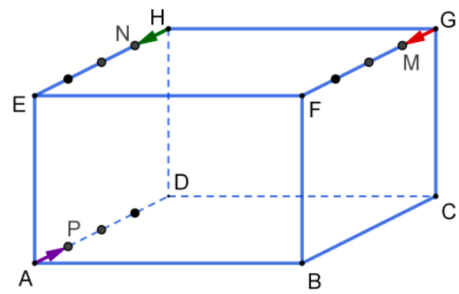
Pour démontrer que les plans (IJK) et (ABD) sont parallèles, il faut montrer que les vecteurs directeurs du plan (IJK) sont colinéaires aux vecteurs directeurs du plan (ABD).
I, J et K sont les milieux de $[BC]$, $[AC]$ et $[CD]$ respectivement.
On a : $\overrightarrow{JK} = \dfrac{1}{2}\overrightarrow{AD}$ et $\overrightarrow{IK} = \dfrac{1}{2}\overrightarrow{BD}$
$\overrightarrow{JK}$ et $\overrightarrow{IK}$ sont deux vecteurs non colinéaires du plan (IJK) qui sont respectivement colinéaires à $\overrightarrow{AD}$ et $\overrightarrow{BD}$ deux vecteurs non colinéaires du plan (ABD).
On en déduit que les plans (IJK) et (ABD) sont parallèles.

Exercice 18

Pour démontrer que $(BDE)//(CFH)$, montrons que les vecteurs directeurs de ces plans sont colinéaires.
Base du plan (BDE) : $(\overrightarrow{BD}, \overrightarrow{BE})$
Base du plan (CFH) : $(\overrightarrow{FH}, \overrightarrow{CH})$
Or, dans un parallélépipède rectangle :
•$\overrightarrow{BD} = \overrightarrow{FH}$ (vecteurs égaux)
•$\overrightarrow{BE} = \overrightarrow{CH}$ (vecteurs égaux)
Donc les plans ont les mêmes vecteurs directeurs, ils sont parallèles.

Exercice 19

1. **Figure :**



2. **Démonstration que** $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{GH}$ **:**

   $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{MG} + \overrightarrow{GE} + \overrightarrow{EN}$

   $\overrightarrow{MN} = -\overrightarrow{GM} + \overrightarrow{GF} + \overrightarrow{FE} + \dfrac{3}{4}\overrightarrow{EH}$

   $\overrightarrow{MN} = -\dfrac{1}{4}\overrightarrow{GF} + \overrightarrow{GF} + \overrightarrow{GH} - \dfrac{3}{4}\overrightarrow{GF}$

   $\overrightarrow{MN} = -\dfrac{1}{4}\overrightarrow{GF} - \dfrac{3}{4}\overrightarrow{GF} + \overrightarrow{GF} + \overrightarrow{GH}$

   Donc : $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{GH}$

3. **Démonstration que** $\overrightarrow{AN} = \overrightarrow{PH}$ **:**

   D'une part : $\overrightarrow{PH} = \overrightarrow{PA} + \overrightarrow{AH} = -\dfrac{1}{4}\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AH}$

   D'autre part : $\overrightarrow{AN} = \overrightarrow{AH} + \overrightarrow{HN} = -\dfrac{1}{4}\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AH}$

   Donc $\overrightarrow{AN} = \overrightarrow{PH}$

4. **Parallélisme des plans :**

$\overrightarrow{MN}$ et $\overrightarrow{AN}$ sont deux vecteurs non colinéaires du plan (AMN) qui sont respectivement colinéaires (égaux) à $\overrightarrow{GH}$ et $\overrightarrow{PH}$ deux vecteurs non colinéaires du plan (GHP).

On en déduit que les plans (AMN) et (GHP) sont parallèles.

Exercice 20

1. **Justification que** $(BCE) \parallel (ADF)$ **:**

   Les faces $ABCD$ et $CEFD$ sont des rectangles, donc :

   •$\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AD}$

   •$\overrightarrow{CE} = \overrightarrow{DF}$

   Les plans (BCE) et (ADF) ont donc des vecteurs directeurs égaux, ils sont parallèles.

2. **Sécant + intersection :**

   E et C sont des points communs aux plans (BCE) et (ECG). Ils sont donc soit confondus, soit sécants.

   Or $G \notin (BCE)$ car G appartient au plan (ADF) qui est strictement parallèles au plan (BCE) (Q1).

   Ainsi, les plan (BCE) et (ECG) sont sécants selon la droite (EC).

3. (a) $\overrightarrow{GH} = \overrightarrow{GA} + \overrightarrow{AH} = -\frac{2}{3}\overrightarrow{AF} + \frac{2}{3}\overrightarrow{AD} = \frac{2}{3}\overrightarrow{FA} + \frac{2}{3}\overrightarrow{AD} = \frac{2}{3}\overrightarrow{FD} = \frac{2}{3}\overrightarrow{EC}$

   (b) Puisque $\overrightarrow{GH} = \frac{2}{3}\overrightarrow{EC}$, les vecteurs sont colinéaires.

   Ainsi, (GH) et (EC) sont parallèles.

   Ainsi, G, H, E et C sont coplanaires.

   Le point H appartient donc au plan (ECG).

   (c) G et H sont des points communs aux plans (DFA) et (ECG). Ils sont donc soit confondus, soit sécants.

   Or $E \notin (DFA)$ car E appartient au plan (BCE) qui est strictement parallèles au plan (AFD) (Q1).

   Ainsi, les plan (BCE) et (AFD) sont sécants selon la droite (GH).

4. On a $d_1 \in (BCE)$ et $d_2 \in (ADF)$.

   Or $(BCE)//(ADF)$

   Donc $d_1//d_2$

Exercice 21

1. Comme $ABCD$ est un parallélogramme, (AB) est parallèles à (DC) et (DC) est incluse dans le plan (SDC). Donc (AB) est parallèle à une droite du plan (SDC). Donc $(AB)//(SDC)$.

2. Ces plans ont le point S en commun et ne sont pas confondus (car $A, B \notin (SDC)$). Donc ils sont sécants.

3. (a) La droite d passe par S et a pour vecteur directeur $\overrightarrow{AB}$. Comme $S \in (SAB)$ et $\overrightarrow{AB}$ est un vecteur du plan (SAB), la droite d est incluse dans (SAB).

   (b) On a :

   - $d \subset (SAB)$ (question précédente)

   - $d \subset (SDC)$ car $S \in (SDC)$ et $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$ est un vecteur directeur de (SDC)

   - d contient le point commun S des deux plans

   Donc d est bien la droite d'intersection.

Exercice 22

1. On a :

   •$\overrightarrow{EG} = \overrightarrow{EF} + \overrightarrow{FG} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}$

   •$\overrightarrow{EJ} = \overrightarrow{EA} + \overrightarrow{AJ} = -\overrightarrow{AE} + \frac{1}{4}\overrightarrow{AD}$

   •$\overrightarrow{IF} = \overrightarrow{IA} + \overrightarrow{AF} = -\overrightarrow{AI} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BF} = -\frac{3}{4}\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AE} = \frac{1}{4}\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AE}$

2. On a :

   $\frac{1}{4}\overrightarrow{EG} - \overrightarrow{EJ} = \frac{1}{4}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}) - (-\overrightarrow{AE} + \frac{1}{4}\overrightarrow{AD})$

   $= \frac{1}{4}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{4}\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AE} - \frac{1}{4}\overrightarrow{AD}$

   $= \frac{1}{4}\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AE} = \overrightarrow{IF}$

3. On vient de donner une combinaison linéaire de $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AE}$ et $\overrightarrow{IF}$.

   Ces trois vecteurs sont donc coplanaires.

   Or $(\overrightarrow{EG}; \overrightarrow{EJ})$ est une base du plan (ECJ), donc la droite (IF) est parallèle au plan (ECG).

Exercice 23

Analyse des affirmations :

a) Vrai. Par construction, $(EF) \parallel (AB)$ car $E \in [AC]$ et la parallèle à (AB) passant par E coupe $[BC]$ en F. Donc $\overrightarrow{EF}$ et $\overrightarrow{AB}$ sont colinéaires.

b) Faux. Les droites (EF) et (CD) ne sont pas coplanaires, donc pas parallèles.

c) Faux. Comme G et H sont les milieux respectifs de $[AD]$ et $[BD]$, on a : $\frac{GD}{DA} = \frac{HD}{BD} = 0.5$. D'après la réciproque de Thales, on a donc $(AB)//(GH)$.

Or $(AB)//(EF)$

Donc $(GH)//(EF)$

Donc elles sont coplanaires.

d) Vrai. (GH) est incluse dans les deux plans donc elle est l'intersection des deux.