DS 14.12.2023

⇒ Exercice n°1 6

2/ 1°/ $f(x) = 0 \iff x^2 + 2x - 8 = 0$

Or $\Delta = b^2 - 4ac$
$= 2^2 - 4 \times 1 \times (-8)$
$= 36 > 0$ donc 2 racines réelles

$$x_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = -4$$

$$x_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = 2$$

Donc $f(x) = 0 \iff x \in \{-4 ; 2\}$

3/ 2°/

x	$-\infty$		-4		2		$+\infty$
$f(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

1/ 3°/ $f(x) < 0 \iff x \in]-4 ; 2[$

⇒ Exercice n°2

5

1°/ $f(x) = x^2 + x + 1$

$f'(x) = 2x + 1$ 1

et $f'(0) = 1$

$f'(-1) = -1$ 2

2°/ $\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = -x^3$

Donc, $\forall x \in \mathbb{R},\ f'(x) = -3x^2$ 1

et $f'(1) = -3$

$f'(0) = 0$ 5

3°/ $\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = g(5x+2)$

Donc $\forall x \in \mathbb{R},\ f'(x) = g'(5x+2)$

$= 5 \times g'(5x+2)$ 2

⇒ Exercice n°3

10

1°/ La suite est définie en fonction de n (son rang), elle est donc définie explicitement.

2.5 2°/ $\forall n \in \mathbb{N}, \quad U_n = n^3 + n^2 + 10n$

$$\rightarrow U_0 = 0^3 + 0^2 + 10 \times 0 = 0$$
$$U_1 = 1^3 + 1^2 + 10 \times 1 = 12$$
$$U_2 = 2^3 + 2^2 + 10 \times 2 = 32$$
$$U_3 = 3^3 + 3^3 + 10 \times 3 = 66$$

$\rightarrow (U_n)$ semble croissante

2 3°/ a) $U_{n+1} - U_n = (n+1)^3 + (n+1)^2 + 10(n+1) - n^3 - n^2 - 10n$

$$= (n^2+2n+1)(n+1) + n^2 + 2n + 1 + 10n + 10 - n^3 - n^2 - 10n$$
$$= \cancel{n^3} + \cancel{n^2} + 2n^2 + 2n + n + 1 + n^2 + 2n + 1 + \cancel{10n} + 10$$
$$- \cancel{n^3} - \cancel{n^2} - \cancel{10n}$$
$$= 2n^2 + n^2 + 2n + n + 2n + 1 + 1 + 10$$
$$= 3n^2 + 5n + 12$$

2 b) $f(x) = 3x^2 + 5x + 12$ $\qquad \Delta = 5^2 - 4 \times 3 \times 12$
$= -119 \underline{\underline{< 0}}$

Donc, on a :

x	$-\infty$ $\qquad\qquad$ $+\infty$
$f(x)$	$+$

1 c) Ainsi $\forall n \in \mathbb{N}, \quad U_{n+1} - U_n > 0$

2 d) $U_{n+1} > U_n$

Donc (U_n) est croissante.

470D

⇒ Exercice n°5

11

1

1°/ $\forall x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = 30x^5 + 18x^2$

3

2°/ $\forall x \in \mathbb{R}$,

$u(x) = 3x^2 - 2$

$u'(x) = 6x$

$v(x) = 6x - 7$

$v'(x) = 6$

$$\begin{aligned} f'(x) &= u'(x)v(x) + u(x)v'(x) \\ &= 6x(6x-7) + 6(3x^2-2) \\ &= 36x^2 - 42x + 18x^2 - 12 \\ &= 54x^2 - 42x - 12 \end{aligned}$$

3

3°/ $\forall x \in \mathbb{R}_+^*$,

$u(x) = x$

$u'(x) = 1$

$v(x) = \sqrt{x}$

$v'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$

$$\begin{aligned} f'(x) &= u'(x)v(x) + u(x)v'(x) \\ &= \sqrt{x} + x \times \frac{1}{2\sqrt{x}} \\ &= \frac{2\sqrt{x}^2}{2\sqrt{x}} + \frac{x}{2\sqrt{x}} \\ &= \frac{3x}{2\sqrt{x}} \\ &= \frac{3}{2}\sqrt{x} \end{aligned}$$

1

4°/ $\forall x \in \mathbb{R}_+^*$

$$\begin{aligned} f'(x) &= 3\sqrt{2}\,x^2 + 3 \times \frac{1}{2\sqrt{x}} \\ &= 3\sqrt{2}\,x^2 + \frac{3}{2\sqrt{x}} \end{aligned}$$

$3/$

5) $\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{-\frac{1}{2}\}$

$2x+1=0$
$2x=-1$
$x=-\frac{1}{2}$

$$f'(x) = \frac{u'v - uv'}{v^2}$$

$$= \frac{2x(2x+1) - 2x^2}{(2x+1)^2}$$

$$= \frac{4x^2 + 2x - 2x^2}{(2x+1)^2}$$

$$= \frac{2x^2 + 2x}{(2x+1)^2}$$

$u(x) = x^2$
$u'(x) = 2x$
$v(x) = 2x+1$
$v'(x) = 2$

⇒ Exercice n°4

4

3 1°/ $g(t) \geqslant 1{,}6 \iff \dfrac{4t}{t^2+1} \geqslant 1{,}6$

$\iff 4t \geqslant 1{,}6t^2 + 1{,}6$

$\iff 0 \geqslant 1{,}6t^2 - 4t + 1{,}6$

Or $\Delta = (-4)^2 - 4 \times 1{,}6^2$

$= 5{,}76 > 0$ donc 2 racines réelles

$x_1 = \dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = 0{,}5$

$x_2 = \dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = 2$

Donc

x	$-\infty$		0.5		2		$+\infty$
		$+$	0	$-$	0	$+$	

Donc $g(t) \geqslant 1{,}6 \iff t \in [0{,}5 ; 2]$

1 2°/ $g(t) > 2 \iff \dfrac{4t}{t^2+1} > 2$

$\iff 4t > 2t^2 + 2$

$\iff 0 > 2t^2 - 4t + 2$

Or $\Delta = (-4)^2 - 4 \times 2^2$

$= 0$

Donc $\forall x \in \mathbb{R},\ 2t^2 - 4t + 2 \geqslant 0$

Donc pas possible

+2 3°/ $u(t) = 4t$
$u'(t) = 4$
$v(t) = t^2+1$
$v'(t) = 2t$

$g'(t) = \dfrac{u'v - uv'}{v^2} = \dfrac{4(t^2+1) - 2t \times 4t}{(t^2+1)^2} = \dfrac{4t^2 + 4 - 8t^2}{(t^2+1)^2} = \dfrac{-4t^2+4}{(t^2+1)^2}$

⇒ Exercice n°6

5

1

1°/ $D_f = \mathbb{R}^*$ $f'(x) = \frac{-1}{x^2}$

2

2°/ (a) $T_{f,c}(h) = \dfrac{f(a+h) - f(a)}{h}$

$$= \frac{\frac{1}{a+h} - \frac{1}{a}}{h}$$

$$= \frac{1}{h}\left(\frac{a}{a(a+h)} - \frac{a+h}{a(a+h)}\right)$$

$$= \frac{1}{h}\left(\frac{-h}{a(a+h)}\right)$$

$$= \frac{-1}{a(a+h)}$$

$$= \frac{-1}{a^2+ah}$$

0.5

(b) $f'(a) = \lim_{h \to 0} T_{f,a}(h) = \frac{-1}{a^2}$

0.5

3°/ Comme $a \in \mathbb{R}^*$, cette formule est vraie pour tout les réel de domaine de définition

Donc $f'(x) = \frac{-1}{x^2}$