NOM Prénom : 2023/2024

23.04.2024 **Examen EDS** Maths 1ère

Examen EDS

Conditions d'évaluation

Calculatrice : autorisée.   Durée : 2h00

- Le sujet comporte **5 exercices**.
  Vous pouvez les traiter dans l'ordre que vous souhaitez.
  Assurez-vous d'avoir le sujet complet avant de commencer.
- Le sujet est sur 40 points.
- **Pensez à inscrire votre nom le sujet et à le rendre avec la copie.**
- Numérotez les pages de votre copie (1/n, 2/n, ..., n/n)
- Tout élément de réponse sera pris en compte dans la notation.

Exercice 1 Questionnaire à choix multiples *(5 points)*

Question 1

Pour x pièces produites, le coût de fabrication $C(x)$, en milliers d'euros est donné par

$$C(x) = 0,01x^3 - 0,135x^2 + 0,6x + 15, \text{ avec } x \in [0\ ;\ 30]$$

Pour 2 pièces produites, le coût de fabrication en euros est :

a. $15,74$	**b.** $157,4$	**c.** $1\,574$	**d.** $15\,740$

On a : $C(2) = 0,02 \times 2^3 - 0,135 \times 2^2 + 0,6 \times 2 + 15 = 15,74$
Ainsi, le coût de fabrication de 2 pièces est de 15,74 milliers d'euros, soit 15 740€.
Réponse d.

Question 2

On considère l'équation $x^2 + 2x - 8 = 0$.
On note S la somme des racines de cette équation et P leur produit.
Laquelle des affirmations suivantes est vraie ?

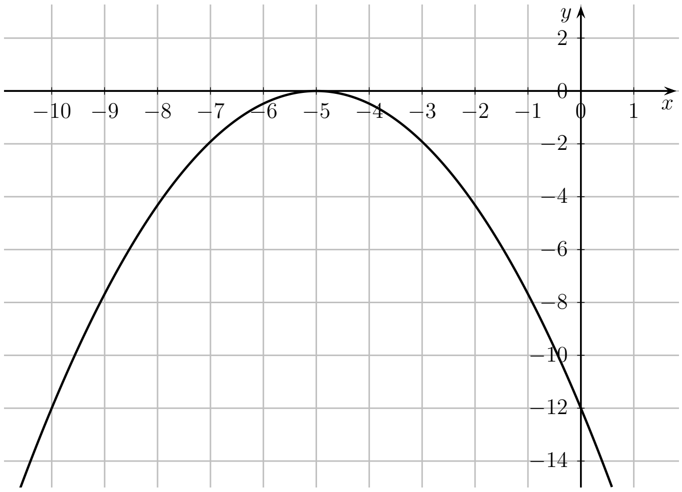
a. $S = 2$ et $P = -8$	**b.** $S = -2$ et $P = -8$
c. $S = -2$ et $P = 8$	**d.** $S = 2$ et $P = 8$

D'après le cours, si le polynôme du second degré $ax^2 + bx + c$ admet deux racines, leur somme est égale à $S = -\frac{b}{a}$ et leur produit est égal à $\frac{c}{a}$.
Ici $a = 1$, $b = 2$ et $c = -8$ donc $S = -2$ et $P = -8$.
Réponse b.

Question 3

Soit f une fonction polynôme du second degré donnée, pour tout nombre réel x par $f(x) = ax^2 + bx + c$, où a, b, c sont réels.

On note Δ son discriminant.
On donne ci-dessous $\mathcal{C}_f$ la courbe représentative de f et on suppose qu'elle admet l'axe des abscisses comme tangente en un de ses points.



On peut affirmer que :

a. $a < 0$ et $\Delta < 0$	**b.** $a > 0$ et $\Delta = 0$	**c.** $a < 0$ et $\Delta = 0$	**d.** $a < 0$ et $\Delta > 0$

La parabole est tournée vers les y négatifs donc $a < 0$.
La parabole est tangente à l'axe des abscisses donc $\Delta = 0$.
Réponse c.

Question 4

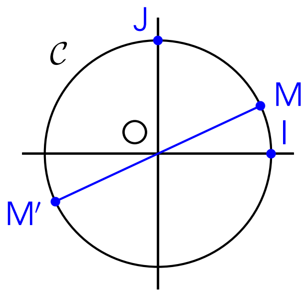
$\cos\left(x + \dfrac{\pi}{2}\right)$ est égal à :

a. $\cos(x) - \sin(x)$	**b.** $\cos\left(x - \dfrac{\pi}{2}\right)$	**c.** $\sin(x)$	**d.** $-\sin(x)$

Propriété du cercle trigonométrique.
Réponse d.

Question 5

On désigne par $\mathcal{C}$ le cercle trigonométrique.
Soit x un réel strictement positif et M le point de $\mathcal{C}$ associé au réel x.



Alors le point M′, symétrique de M par rapport à O, est associé au réel :

a. $-x$	**b.** $\pi + x$	**c.** $\pi - x$	**d.** $-\pi - x$

Les points M et M′ sont diamétralement opposés sur le cercle trigonométrique, donc les réels qui leur sont associés ont une différence de π.
Réponse b.

Exercice 2 **Transports écologiques** *(11 points)*

Dans un souci de préservation de l'environnement, Monsieur Durand décide de se rendre chaque matin au travail en utilisant son vélo ou les transports en commun.

S'il choisit de prendre les transports en commun un matin, il reprend les transports en commun le lendemain avec une probabilité égale à 0,8.

S'il utilise son vélo un matin, il reprend son vélo le lendemain avec une probabilité égale à 0,4.

Pour tout entier naturel n non nul, on note :

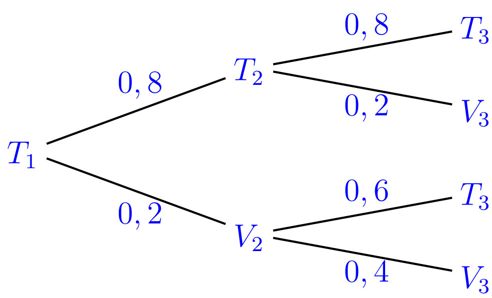
— T_n l'évènement « Monsieur Durand utilise les transports en commun le n-ième jour »

— V_n l'évènement « Monsieur Durand utilise son vélo le n-ième jour »

— On note p_n la probabilité de l'évènement T_n,

Le premier matin, il décide d'utiliser les transports en commun. Ainsi, la probabilité de l'évènement T_1 est $p_1 = 1$.

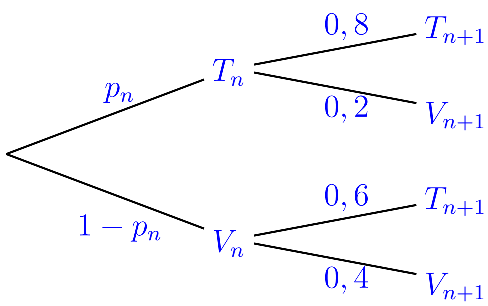
1. Recopier et compléter l'arbre pondéré ci-dessous représentant la situation pour les 2e et 3e jours,



2. Calculer p_3
D'après la loi des probabilités totales : $p_3 = \mathbb{P}(T_3) = \mathbb{P}(T_2 \cap T_3) + \mathbb{P}(V_2 \cap T_3)$.
Or : $\mathbb{P}(T_2 \cap T_3) = \mathbb{P}(T_2) \times \mathbb{P}_{T_2}(T_3) = 0,8 \times 0,8 = 0,64$.
De même : $\mathbb{P}(V_2 \cap T_3) = \mathbb{P}(V_2) \times \mathbb{P}_{V_2}(T_3) = 0,2 \times 0,6 = 0,12$.
Donc $p_3 = 0,64 + 0,12 = 0,76$.

3. Le 3e jour, M. Durand utilise son vélo.
Calculer la probabilité qu'il ait pris les transports en commun la veille. On calcule $\mathbb{P}_{V_3}(T_2) = \dfrac{\mathbb{P}(V_3 \cap T_2)}{\mathbb{P}(V_3)} = \dfrac{\mathbb{P}(T_2 \cap V_3)}{\mathbb{P}(V_3)}$.
Or $\mathbb{P}(V_3) = 1 - p_3 = 1 - 0,76 = 0,24$
et $\mathbb{P}(T_2 \cap V_3) = 0,8 \times 0,2 = 0,16$, d'où
$\mathbb{P}_{V_3}(T_2) = \dfrac{0,16}{0,24} = \dfrac{16}{24} = \dfrac{2}{3}$.

4. Recopier et compléter l'arbre pondéré ci-dessous représentant la situation pour les n-ième et $(n+1)$-ième jours.



5. Montrer que, pour tout entier naturel n non nul, $p_{n+1} = 0,2p_n + 0,6$. On a $p_{n+1} = \mathbb{P}(T_{n+1}) = \mathbb{P}(T_n \cap T_{n+1}) + \mathbb{P}(V_n \cap T_{n+1}) = 0,8p_n + 0,6(1 - p_n) = 0,8p_n + 0,6 - 0,6p_n = 0,2p_n + 0,6$.

Exercice 3 — Préparation d'un marathon *(8 points)*

Bob s'est fixé un objectif : participer à un marathon qui aura lieu très bientôt dans sa ville.

Pour cela, il désire programmer sa préparation au marathon de la manière suivante :

- lors du premier entraînement, il décide de courir 20 km ;
- il augmente ensuite, à chaque entraînement, la distance à courir de 5 %.

On peut modéliser la distance parcourue lors de ses entraînements par une suite (d_n), où, pour tout entier naturel n non nul, le nombre d_n désigne la distance à courir en kilomètre, lors de son n-ième entraînement. On a ainsi $d_1 = 20$.

1. Calculer d_2, puis vérifier que $d_3 = 22,05$.

   $d_2 = d_1 + d_1 \times \frac{5}{100} = 20 + 20 \times \frac{5}{100} = 21$, et $d_3 = d_2 + d_2 \times \frac{5}{100} = 21 + 21 \times \frac{5}{100} = 22,05$.
2. Pour tout entier naturel n non nul, exprimer d_{n+1} en fonction de d_n.

   On passe de d_n à d_{n+1} en ajoutant 5 %, donc en multipliant par $1 + \frac{5}{100} = 1,05$.
   Donc pour tout entier naturel n non nul, $d_{n+1} = 1,05 \times d_n$
3. Justifier que, pour tout entier naturel $n \geqslant 1$, $d_n = 20 \times 1,05^{n-1}$.

   La suite (d_n) est donc géométrique de premier terme $d_1 = 20$, et de raison $q = 1,05$.
   On en déduit que, pour tout entier naturel $n \geqslant 1$, $d_n = d_1 \times q^{n-1} = 20 \times 1,05^{n-1}$.
4. Quelle distance, arrondie à 1 m près, va courir Bob lors de son 10e entraînement ?

   La distance, arrondie à 1 m près, que va courir Bob lors de son 10e entraînement est
   $d_{10} = 20 \times 1,05^9$ soit $31,027$ km.
5. La distance à courir lors d'un marathon est de $42,195$ km. Bob estime qu'il sera prêt pour la course, s'il parvient à courir au moins 43 km lors d'un de ses entraînements.

   On complète le script suivant, écrit en langage Python, dont la valeur de n, après exécution de ce script, est le nombre minimal d'entraînements permettant à Bob d'être prêt pour le marathon.

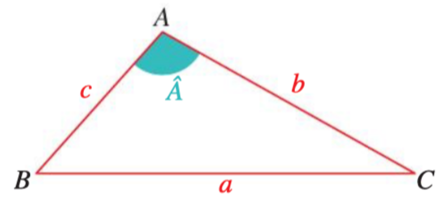
```
n = 1
d = 20
while d < 43 :
  n = n + 1
  d = 1.05*d
```

Exercice 4 **Théorème d'Al-Kashi** *(9 points)*

On s'intéresse au théorème d'Al-Kashi dont on donne l'énoncé ci-dessous :

Dans un triangle ABC, avec les notations de la figure ci-contre, on a :

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos(\widehat{A}).$$



On se propose de démontrer ce théorème puis de l'appliquer sur des cas concrets.

Les parties A et B sont indépendantes.

Partie A - Démonstration du théorème

1. Justifier l'égalité $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}$.
   La relation de Chasles donne : $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AC}$
   Ainsi, $\overrightarrow{BC} = -\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}$
2. En déduire le développement de $\overrightarrow{BC}^2$.
   On a : $\overrightarrow{BC}^2 = \left(\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}\right)^2 = ||\overrightarrow{AC}||^2 - 2\times\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AB} + ||\overrightarrow{AB}||^2 = AC^2 - 2\times\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AB} + AB^2$
3. Ecrire le produit scalaire $\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AB}$ à l'aide de la formule du cosinus.
   Par définition du produit scalaire, $\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AB} = AC \times AB \times \cos\left(\widehat{BAC}\right)$
4. En déduire l'égalité demandée.
   On a donc $BC^2 = AC^2 - 2\times\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AB} + AB^2$ et $\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AB} = AC \times AB \times \cos\left(\widehat{BAC}\right)$
   Ainsi, $BC^2 = AC^2 - 2 \times AC \times AB \times \cos\left(\widehat{BAC}\right) + AB^2$
   Or $BC = a$, $AC = b$ et $AB = c$
   Donc $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\left(\widehat{BAC}\right)$.

Partie B - Applications directes

On considère le triangle ABC tel que :

$$AB = 4cm \quad ; \quad \widehat{BAC} = 70° \quad \text{et} \quad AC = 2cm$$

1. A l'aide de la formule d'Al-Kashi, calculer BC.
   On donnera une valeur approchée du résultat au millimètre près.
   Dans le triangle ABC, on a :
   $$BC^2 = AC^2 + AB^2 - 2 \times AC \times AB \times \cos\left(\widehat{BAC}\right)$$
   Ainsi, $BC^2 = 2^2 + 4^2 - 2 \times 2 \times 4 \times \cos(70°) = 4 + 16 - 16\cos(70°) \approx 14,5$
   Par conséquent, $BC \approx \sqrt{14,5} \approx 3,8$cm
2. Donner la mesure, arrondi au degré près, de l'angle $\widehat{CBA}$.
   Dans le triangle ABC, on a :
   $$AC^2 = AB^2 + CB^2 - 2 \times AC \times AB \times \cos\left(\widehat{CBA}\right)$$
   Ainsi, $\cos\left(\widehat{CBA}\right) = \dfrac{4 - 16 - 14,5}{-2 \times 4 \times 3,8}$
   Par conséquent, $\widehat{CBA} \approx 29°$.

Exercice 5 **Courbes représentatives** *(7 points)*

Soit h la fonction définie sur [0 ; 26] par $h(x) = -x^3 + 30x^2 - 108x - 490$.

1. Soit h' la fonction dérivée de h.

   Exprimer $h'(x)$ en fonction de x.

   $h'(x) = -3x^2 + 30 \times 2x - 108 = -3x^2 + 60x - 108$

2. On note $\mathcal{C}$ la courbe représentative de h et $\mathcal{C}'$ celle de h'.

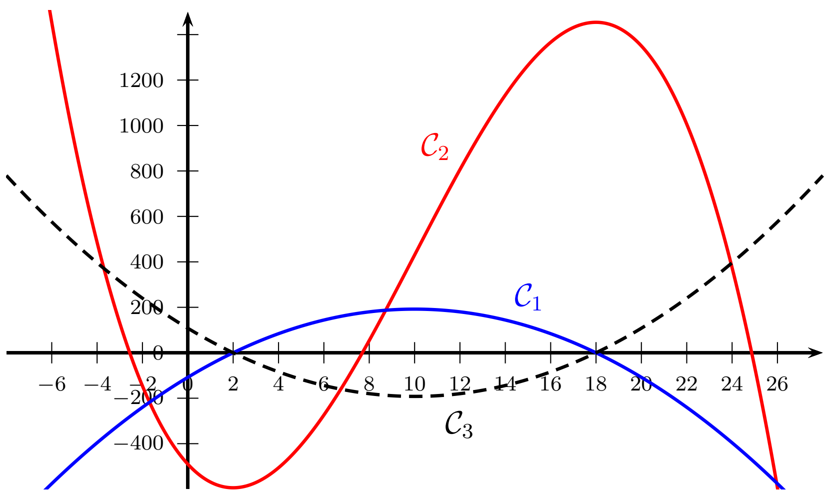
   (a) Identifier $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}'$ sur le graphique orthogonal ci-dessous parmi les trois courbes $\mathcal{C}_1$, $\mathcal{C}_2$ et $\mathcal{C}_3$ proposées.

   La courbe $\mathcal{C}$ représentant la fonction h est la courbe $\mathcal{C}_2$.

   La courbe $\mathcal{C}'$ représentant la fonction h' est la courbe $\mathcal{C}_1$.

   (b) Justifier le choix pour $\mathcal{C}'$.

   $h(0) = -490$ donc la courbe $\mathcal{C}_2$ représente la fonction h ; on peut donc voir que la fonction h est décroissante, puis croissante, puis décroissante. La fonction dérivée h' sera donc négative, puis positive, puis négative. Elle est donc représentée par la courbe $\mathcal{C}_1$.



3. Soit (T) la tangente à $\mathcal{C}$ au point A d'abscisse 0. Déterminer son équation réduite.

   La droite (T) a pour équation réduite : $y = h'(0)\,(x - 0) + h(0)$.

   $h(0) = -490$ et $h'(0) = -108$

   La droite (T) a donc pour équation réduite : $y = -108x - 490$.

4. Étudier le signe de $h'(x)$ puis dresser le tableau de variation de la fonction h sur [0 ; 26].

   $h'(x) = -3x^2 + 60x - 108$ est un polynôme de degré 2 dont le discriminant est $\Delta = b^2 - 4ac = 60^2 - 4 \times (-3) \times (-108) = 2\,304 = 48^2$

   Ce polynôme admet donc deux racines :

   $x' = \dfrac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \dfrac{-60 + 48}{-6} = 2$ et $x'' = \dfrac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \dfrac{-60 - 48}{-6} = 18$

   On en déduit le signe de $h'(x)$ puis le sens de variation de h.

   $h(0) = -490$, $h(2) = -594$, $h(18) = 1454$ et $h(26) = -594$

x	0		2		18		26
$h'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$h(x)$	-490	$\searrow$	-594	$\nearrow$	$1\ 454$	$\searrow$	-594