Fonction logarithme népérien

Exercice 1

1. Pour que $f(x) = \ln(x+2)$ soit définie, il faut $x+2 > 0$, soit $x > -2$. Donc pour tout $x \in I =]-2;+\infty[$, on a bien $x+2 > 0$ et $f(x)$ est calculable.
2. Pour que $f(x) = \ln(9-3x)$ soit définie, il faut $9-3x > 0$, soit $9 > 3x$, donc $x < 3$. Ainsi pour tout $x \in I =]-\infty;3[$, on a $9-3x > 0$ et $f(x)$ est calculable.
3. Pour que $f(x) = \ln(x) + \ln(2-x)$ soit définie, il faut $x > 0$ ET $2-x > 0$, soit $x > 0$ et $x < 2$. Donc pour tout $x \in I =]0;2[$, les deux conditions sont vérifiées et $f(x)$ est calculable.

Exercice 2

1. $f(x) = \ln(x-4)$ est définie si et seulement si $x-4 > 0$, soit $x > 4$.
   Ensemble de définition : $]4;+\infty[$.
2. $f(x) = \ln(3x+5)$ est définie si et seulement si $3x+5 > 0$, soit $3x > -5$, donc $x > -\dfrac{5}{3}$.
   Ensemble de définition : $\left]-\dfrac{5}{3};+\infty\right[$.

Exercice 3

Rappel : $\ln(x) > 0$ si $x > 1$, $\ln(1) = 0$, et $\ln(x) < 0$ si $0 < x < 1$.

(a) $5 > 1$ donc $\ln(5) > 0$: **positif**

(b) $0 < 0,9 < 1$ donc $\ln(0,9) < 0$: **négatif**

(c) $0 < \dfrac{7}{8} < 1$ donc $\ln\left(\frac{7}{8}\right) < 0$: **négatif**

(d) $\sqrt{2} \approx 1,414 > 1$ donc $\ln(\sqrt{2}) > 0$: **positif**

(e) $100 > 1$ donc $\ln(100) > 0$: **positif**

(f) $3 \times 10^{-2} = 0,03 < 1$ donc $\ln\left(3 \times 10^{-2}\right) < 0$: **négatif**

Exercice 4 — </> Algorithme

1. Programme complété :

```python
def signe_ln(x):
    if x > 1:
        return("Positif")
    if x == 1:
        return("Nul")
    if 0 < x < 1:
        return("Négatif")
```

2. Résultats des appels :

(a) `signe_ln(3)` renvoie `"Positif"` car $3 > 1$

(b) `signe_ln(0,3)` renvoie `"Négatif"` car $0 < 0,3 < 1$

(c) `signe_ln(1)` renvoie `"Nul"` car $\ln(1) = 0$

Équations et inéquations

Exercice 5

(a) $e^x = 1 = e^0$ donc $x = 0$. $S = \{0\}$

(b) $e^x = 2$ donc $x = \ln(2)$. $S = \{\ln(2)\}$

(c) $e^x = 0$ n'admet pas de solution car $e^x > 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. $S = \varnothing$

Exercice 6

(a) $\ln(x) = 13$ donc $x = e^{13}$. $S = \{e^{13}\}$

(b) $\ln(x) = 1 = \ln(e)$ donc $x = e$. $S = \{e\}$

(c) $\ln(x) = -1$ donc $x = e^{-1} = \dfrac{1}{e}$. $S = \left\{\dfrac{1}{e}\right\}$

Exercice 7

(a)
$3e^x + 2 = 14$
$3e^x = 12$
$e^x = 4$
$x = \ln(4) = \ln(2^2) = 2\ln(2)$
$S = \{2\ln(2)\}$

(b)
$11 - e^{2x+1} = 4$
$e^{2x+1} = 7$
$2x + 1 = \ln(7)$
$2x = \ln(7) - 1$
$x = \dfrac{\ln(7)-1}{2}$
$S = \left\{\dfrac{\ln(7)-1}{2}\right\}$

Exercice 8

(a) $e^x > 3$ donc $x > \ln(3)$. $S =]\ln(3);+\infty[$

(b) $e^{2x} < 7$ donc $2x < \ln(7)$, soit $x < \dfrac{\ln(7)}{2}$.
$S = \left]-\infty;\dfrac{\ln(7)}{2}\right[$

(c) $e^x + 1 > 5$ donc $e^x > 4$, soit $x > \ln(4) = 2\ln(2)$.
$S =]2\ln(2);+\infty[$

Exercice 9

(a) $\ln(x) \geq \ln(3x)$ avec $x > 0$ et $3x > 0$ (vrai si $x > 0$)
La fonction $\ln$ est croissante donc : $x \geq 3x$, soit $-2x \geq 0$, donc $x \leq 0$.
Or $x > 0$, donc pas de solution. $S = \varnothing$

(b) $1+2\ln(x) < 4$ avec $x > 0$

$2\ln(x) < 3$

$\ln(x) < \dfrac{3}{2}$

$x < e^{3/2}$

$S =]0; e^{3/2}[$

(c) $\ln(x^2+9) > 0$ avec $x > 0$ (et $x^2+9 > 0$ toujours vrai)

$\ln(x^2+9) > \ln(1)$

$x^2+9 > 1$

$x^2 > -8$ toujours vrai.

$S =]0; +\infty[$

Exercice 10

(a) Condition d'existence : $x-6>0$, soit $x>6$.

$\ln(x-6) > 0 \Leftrightarrow x-6 > 1 \Leftrightarrow x > 7$

$\ln(x-6) = 0 \Leftrightarrow x = 7$

$\ln(x-6) < 0 \Leftrightarrow 6 < x < 7$

(b) Condition d'existence : $5-3x > 0$, soit $x < \dfrac{5}{3}$.

$\ln(5-3x) > 0 \Leftrightarrow 5-3x > 1 \Leftrightarrow 5-1 > 3x \Leftrightarrow x < \dfrac{4}{3}$

$\ln(5-3x) = 0 \Leftrightarrow x = \dfrac{4}{3}$

$\ln(5-3x) < 0 \Leftrightarrow \dfrac{4}{3} < x < \dfrac{5}{3}$

(c) Condition d'existence : $4-x > 0$, soit $x < 4$.

$\ln(4-x)-2 > 0 \Leftrightarrow \ln(4-x) > 2 \Leftrightarrow 4-x > e^2 \Leftrightarrow x < 4-e^2$

$\ln(4-x)-2 = 0 \Leftrightarrow x = 4-e^2$

$\ln(4-x)-2 < 0 \Leftrightarrow 4-e^2 < x < 4$

Exercice 11

(a) $\ln(9-x^2) = 0$

- CE : $9-x^2 > 0 \Leftrightarrow x^2 < 9 \Leftrightarrow -3 < x < 3$
- $\ln(9-x^2) = \ln(1) \Leftrightarrow 9-x^2 = 1 \Leftrightarrow x^2 = 8 \Leftrightarrow x = \pm 2\sqrt{2}$
- $S = \{-2\sqrt{2}; 2\sqrt{2}\}$

(b) $e^{\frac{x}{x+2}} = 3$

- CE : $x \neq -2$
- $\dfrac{x}{x+2} = \ln(3)$

$x = (x+2)\ln(3)$

$x = x\ln(3) + 2\ln(3)$

$x - x\ln(3) = 2\ln(3)$

$x(1-\ln(3)) = 2\ln(3)$

$x = \dfrac{2\ln(3)}{1-\ln(3)}$

- $S = \left\{\dfrac{2\ln(3)}{1-\ln(3)}\right\}$

(c) $\ln(2x^2-7x+6) = \ln(10)$

- CE : $2x^2-7x+6 > 0$.

$\Delta = 49-48 = 1$, racines : $x_1 = \dfrac{7-1}{4} = \dfrac{3}{2}$ et $x_2 = 2$.

Signe : positif sur $]-\infty; \frac{3}{2}[\cup]2; +\infty[$

- $2x^2-7x+6 = 10$

$2x^2-7x-4 = 0$

$\Delta = 49+32 = 81$

$x = \dfrac{7\pm 9}{4}$, soit $x = 4$ ou $x = -\dfrac{1}{2}$

Vérification CE : $-\dfrac{1}{2} \in]-\infty; \frac{3}{2}[$ ✓et $4 \in]2; +\infty[$ ✓

- $S = \left\{-\dfrac{1}{2}; 4\right\}$

(d) $\ln\left(\frac{x}{x-2}\right) = 0$

- CE : $\dfrac{x}{x-2} > 0$, soit $x \in]-\infty; 0[\cup]2; +\infty[$
- $\dfrac{x}{x-2} = 1$

$x = x-2$, impossible.

- $S = \varnothing$

(e) $\ln(x^2) = \ln\left(\frac{1}{x^2}\right)$

- CE : $x \neq 0$
- $2\ln|x| = -2\ln|x|$

$4\ln|x| = 0$

$\ln|x| = 0$

$|x| = 1$

$x = \pm 1$

- $S = \{-1; 1\}$

(f) $\ln(e^{2x}+1) = 1$

- CE : toujours vérifié
- $e^{2x}+1 = e$

$e^{2x} = e-1$

$2x = \ln(e-1)$

$x = \dfrac{\ln(e-1)}{2}$

- $S = \left\{\dfrac{\ln(e-1)}{2}\right\}$

(g) $\ln(x-3) > 1$

- CE : $x > 3$
- $x-3 > e$

$x > 3+e$

- $S =]3+e; +\infty[$

(h) $\ln(x^2+5) \geq \ln(12)$

- CE : toujours vérifié
- $x^2+5 \geq 12$

$x^2 \geq 7$

$|x| \geq \sqrt{7}$

- $S =]-\infty; -\sqrt{7}] \cup [\sqrt{7}; +\infty[$

(i) $e^{2-x} \leq 3$

- CE : toujours vérifier
- $2-x \leq \ln(3)$

$-x \leq \ln(3)-2$

$x \geq 2-\ln(3)$

- $S = [2-\ln(3); +\infty[$

j $e^{x^2-1} > 2$

- CE : toujours vérifier
- $x^2 - 1 > \ln(2)$

$x^2 > 1 + \ln(2)$

$|x| > \sqrt{1+\ln(2)}$

- $S =]-\infty; -\sqrt{1+\ln(2)}[\cup]\sqrt{1+\ln(2)}; +\infty[$

k $\ln(4x^2 - x) \leq \ln(3x)$

- CE : $4x^2 - x > 0$ et $3x > 0$

$x(4x-1) > 0$ et $x > 0$ donc $x > \dfrac{1}{4}$

- $4x^2 - x \leq 3x$

$4x^2 - 4x \leq 0$

$4x(x-1) \leq 0$

$0 \leq x \leq 1$

- Avec CE : $S = \left]\dfrac{1}{4}; 1\right]$

l $\ln(e^x - 1) \leq -1$

- CE : $e^x - 1 > 0$, soit $e^x > 1$, donc $x > 0$
- $e^x - 1 \leq e^{-1}$

$e^x \leq 1 + \dfrac{1}{e} = \dfrac{e+1}{e}$

$x \leq \ln\left(\dfrac{e+1}{e}\right) = \ln(e+1) - 1$

- $S =]0; \ln(e+1) - 1]$

Exercice 12

1. $P(x) = x^2 - 2x - 15 = 0$

   $\Delta = 4 + 60 = 64$

   $x = \dfrac{2 \pm 8}{2}$, soit $x = 5$ ou $x = -3$

   $P(x) < 0$ pour $x \in]-3; 5[$
2. Posons $X = \ln(x)$ avec $x > 0$:

   $X^2 - 2X - 15 = 0$

   $X = 5$ ou $X = -3$

   $\ln(x) = 5$ ou $\ln(x) = -3$

   $x = e^5$ ou $x = e^{-3}$

   $S = \{e^{-3}; e^5\}$
3. Posons $Y = e^x$ avec $Y > 0$:

   $Y^2 - 2Y - 15 < 0$

   $-3 < Y < 5$ avec $Y > 0$, donc $0 < Y < 5$

   $0 < e^x < 5$

   $e^x < 5$

   $x < \ln(5)$

   $S =]-\infty; \ln(5)[$

Exercice 13

1. $(\ln(x))^2 + 2\ln(x) = 3$ avec $x > 0$

   Posons $X = \ln(x)$:

   $X^2 + 2X - 3 = 0$

   $\Delta = 4 + 12 = 16$

   $X = \dfrac{-2 \pm 4}{2}$, soit $X = 1$ ou $X = -3$

   $\ln(x) = 1$ ou $\ln(x) = -3$

   $S = \{e^{-3}; e\}$
2. $5e^{4x} - 13e^{2x} - 6 = 0$

   Posons $Y = e^{2x} > 0$:

   $5Y^2 - 13Y - 6 = 0$

   $\Delta = 169 + 120 = 289 = 17^2$

   $Y = \dfrac{13 \pm 17}{10}$, soit $Y = 3$ ou $Y = -\dfrac{2}{5}$ (rejeté)

   $e^{2x} = 3$

   $2x = \ln(3)$

   $S = \left\{\dfrac{\ln(3)}{2}\right\}$

Dérivée et variations

Exercice 14

1. $f'(x) = 2 \times \dfrac{1}{x} = \dfrac{2}{x}$
2. Pour $x > 0$, $f'(x) = \dfrac{2}{x} > 0$, donc f est strictement croissante sur $]0; +\infty[$.

Exercice 15

1. $f'(x) = 1 - \dfrac{1}{x} = \dfrac{x-1}{x}$ pour $x > 0$. ✓
2. $f'(x) > 0 \Leftrightarrow x - 1 > 0 \Leftrightarrow x > 1$

   f est décroissante sur $]0; 1]$ et croissante sur $[1; +\infty[$.

Exercice 16

- $f(x) = e^x(e^x - 1) = e^{2x} - e^x$
- $f'(x) = 2e^{2x} - e^x = e^x(2e^x - 1)$
- $f'(x) = 0 \Leftrightarrow 2e^x = 1 \Leftrightarrow e^x = \dfrac{1}{2} \Leftrightarrow x = -\ln(2)$
- $f'(x) > 0 \Leftrightarrow e^x > \dfrac{1}{2} \Leftrightarrow x > -\ln(2)$
- f est décroissante sur $]-\infty; -\ln(2)]$ et croissante sur $[-\ln(2); +\infty[$.

Minimum : $f(-\ln(2)) = e^{-\ln(2)}(e^{-\ln(2)} - 1) = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{2} - 1\right) = -\dfrac{1}{4}$

Exercice 17

1. a $g'(x) = 1 + \dfrac{1}{x} = \dfrac{x+1}{x} > 0$ pour $x > 0$

   Donc g est strictement croissante sur $]0; +\infty[$.

   b $g(1) = 1 - 1 + \ln(1) = 0$

   Comme g est strictement croissante et $g(1) = 0$:

   - $g(x) < 0$ sur $]0; 1[$
   - $g(x) = 0$ pour $x = 1$
   - $g(x) > 0$ sur $]1; +\infty[$
2. a $f(x) = \dfrac{x-1}{x}\ln(x) = \left(1 - \dfrac{1}{x}\right)\ln(x)$

   $f'(x) = \dfrac{1}{x^2}\ln(x) + \left(1 - \dfrac{1}{x}\right) \times \dfrac{1}{x}$

   $= \dfrac{\ln(x)}{x^2} + \dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{x^2}$

   $= \dfrac{\ln(x) + x - 1}{x^2} = \dfrac{g(x)}{x^2}$ ✓

b) $x^2 > 0$ donc $f'(x)$ est du signe de $g(x)$.
D'après Q1, f est décroissante sur $]0;1]$ et croissante sur $[1;+\infty[$.
Minimum : $f(1) = 0$

Exercice 18

1. $f'(t) = -0,5e^{-0,5t} + e^{-t} = e^{-t}(1 - 0,5e^{0,5t})$
$f'(t) = 0 \Leftrightarrow 1 = 0,5e^{0,5t} \Leftrightarrow e^{0,5t} = 2 \Leftrightarrow 0,5t = \ln(2) \Leftrightarrow t = 2\ln(2)$ minutes
La concentration est maximale à $t = \ln(4) \approx 1,39$ minutes soit 1min 23s
2. $f(\ln(4)) = e^{-0,5\ln(4)} - e^{-\ln(4)} = 4^{-0,5} - 4^{-1} = \frac{1}{2} - \frac{1}{4} = \frac{1}{4}$ mol/L

Exercice 19

1. $f'(x) = 3(\ln(x))^2 \times \frac{1}{x} + 1 = \frac{3(\ln(x))^2 + x}{x}$
2. En $x = 1$: $f(1) = 0 + 1 = 1$ et $f'(1) = \frac{0+1}{1} = 1$
Équation de T : $y = f'(1)(x-1) + f(1) = 1(x-1) + 1 = x$
$T : y = x$
3. Étudions $h(x) = f(x) - x = (\ln(x))^3$
$h'(x) = 3(\ln(x))^2 \times \frac{1}{x}$
$h'(x) \geq 0$ pour tout $x > 0$, avec égalité seulement en $x = 1$.
h est croissante, $h(1) = 0$, donc :
- $h(x) < 0$ sur $]0;1[$: $\mathcal{C}$ en dessous de T
- $h(x) = 0$ en $x = 1$: $\mathcal{C}$ tangente à T
- $h(x) > 0$ sur $]1;+\infty[$: $\mathcal{C}$ au-dessus de T

Exercice 20

1. $\ln$ est dérivable sur $]0;+\infty[$ avec $(\ln)'(x) = \frac{1}{x}$.
$(\ln)''(x) = -\frac{1}{x^2} < 0$ pour tout $x > 0$.
Donc $\ln$ est concave sur $]0;+\infty[$.
2. En $x = 1$: $\ln(1) = 0$ et $(\ln)'(1) = 1$
Équation de la tangente : $y = 1 \times (x-1) + 0 = x - 1$
$T : y = x - 1$
3. Comme $\ln$ est concave, sa courbe est en dessous de toutes ses tangentes.
Donc pour tout $x \in]0;+\infty[$, $\ln(x) \leq x - 1$.

Exercice 21

1. En $x = 0$: $f(0) = \ln(1) = 0$ et $f'(x) = \frac{1}{1+x}$ donc $f'(0) = 1$
Équation de T : $y = 1 \times (x - 0) + 0 = x$
$T : y = x$
2. a) $f'(x) = \frac{1}{1+x}$ et $f''(x) = -\frac{1}{(1+x)^2} < 0$ sur $]-1;+\infty[$
Donc f est concave sur $]-1;+\infty[$.
b) Comme f est concave, sa courbe est en dessous de toutes ses tangentes.
En particulier, pour tout $x \in]-1;+\infty[$, $f(x) \leq x$, soit $\ln(1+x) \leq x$.

Exercice 22 Logique

1. Oui, cette proposition est vraie. Si $f(x) = \ln(x)$, alors par définition $f'(x) = \frac{1}{x}$ sur $]0;+\infty[$.
2. a) Réciproque : « Si $f'(x) = \frac{1}{x}$, alors $f(x) = \ln(x)$. »
b) Cette réciproque est **fausse**.
Contre-exemple : $f(x) = \ln(x) + 5$ vérifie $f'(x) = \frac{1}{x}$ mais $f(x) \neq \ln(x)$.
En fait, si $f'(x) = \frac{1}{x}$, alors $f(x) = \ln(x) + C$ où C est une constante.

Exercice 23

1. **Initialisation :** Pour $n = 0$, $u_0 = 1$ et $1 \leq 1 \leq e^2$ ✓
Hérédité : Soit $n \in \mathbb{N}$ fixé. Supposons que $1 \leq u_n \leq e^2$.
Alors $1 \leq \sqrt{u_n} \leq e$ (croissance de $\sqrt{\ }$)
Donc $e \leq e\sqrt{u_n} \leq e^2$, soit $e \leq u_{n+1} \leq e^2$
Or $e > 1$, donc $1 \leq u_{n+1} \leq e^2$ ✓
Conclusion : Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $1 \leq u_n \leq e^2$.
2. a) Montrons que $u_{n+1} \geq u_n$:
$u_{n+1} - u_n = e\sqrt{u_n} - u_n = \sqrt{u_n}\left(e - \sqrt{u_n}\right)$
D'après Q1, $1 \leq u_n \leq e^2$, donc $1 \leq \sqrt{u_n} \leq e$
Ainsi $e - \sqrt{u_n} \geq 0$
Par conséquent $u_{n+1} - u_n \geq 0$ et (u_n) est croissante.
b) (u_n) est croissante et majorée par e^2, donc elle converge.
3. a) $v_n = \ln(u_n) - 2$
$v_{n+1} = \ln(u_{n+1}) - 2 = \ln(e\sqrt{u_n}) - 2$
$= \ln(e) + \ln(\sqrt{u_n}) - 2 = 1 + \frac{1}{2}\ln(u_n) - 2$
$= \frac{1}{2}\ln(u_n) - 1 = \frac{1}{2}(\ln(u_n) - 2) = \frac{1}{2}v_n$
Donc (v_n) est géométrique de raison $\frac{1}{2}$.
b) $v_0 = \ln(1) - 2 = -2$
Donc $v_n = v_0 \times \left(\frac{1}{2}\right)^n = -2 \times \frac{1}{2^n} = -\frac{2}{2^n} = -\frac{1}{2^{n-1}}$ ✓
c) $v_n = \ln(u_n) - 2$, donc $\ln(u_n) = v_n + 2 = 2 - \frac{1}{2^{n-1}}$
$u_n = e^{2-1/2^{n-1}} = e^2 \times e^{-1/2^{n-1}} = e^{2-\frac{1}{2^{n-1}}}$

(d) $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{2^{n-1}} = 0$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = e^2$

Limites

Exercice 24

1. $\lim\limits_{x\to 0^+} \ln(x) = -\infty$ et $\lim\limits_{x\to 0^+} (2x+1) = 1$
   Par somme : $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = -\infty$
2. $\lim\limits_{x\to+\infty} \ln(x) = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} (2x+1) = +\infty$
   Par somme : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$

Exercice 25

1. $\lim\limits_{x\to 0^+} \ln(x) = -\infty$

   Donc $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{3}{\ln(x)} = \dfrac{3}{-\infty} = 0^-$
2. Pour $x \in]0;1[$, on a $\ln(x) < 0$.
3. $\lim\limits_{x\to 1^-} \ln(x) = \ln(1) = 0^-$ (limite par valeurs négatives)

   Donc $\lim\limits_{x\to 1^-} \dfrac{3}{\ln(x)} = \dfrac{3}{0^-} = -\infty$

Exercice 26

1. (a) $\lim\limits_{x\to-\infty} (3-x) = +\infty$

   (b) $\lim\limits_{X\to+\infty} \ln(X) = +\infty$ donc $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x) = +\infty$
2. (a) Lorsque $x \to 3$ avec $x < 3$, on a $3 - x \to 0$ par valeurs positives.
   Donc $\lim\limits_{\substack{x\to 3\\ x<3}} (3-x) = 0^+$ ✓

   (b) $\lim\limits_{X\to 0^+} \ln(X) = -\infty$ donc $\lim\limits_{\substack{x\to 3\\ x<3}} g(x) = -\infty$

Exercice 27

1. $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ln(x)}{x} = 0$ (croissance comparée)
2. Par somme : $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(\dfrac{\ln(x)}{x} + 1\right) = 0 + 1 = 1$

Exercice 28

1. Pour tout $x > 0$:

$$f(x) = \ln(x) - 3x = x\left(\frac{\ln(x)}{x} - 3\right)$$

2. $\lim\limits_{x\to+\infty} x = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ln(x)}{x} = 0$

   Donc $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(\dfrac{\ln(x)}{x} - 3\right) = -3$

   Par produit : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty \times (-3) = -\infty$

Exercice 29

1. $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ln(x) - 3x}{2x^3} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ln(x)}{2x^3} - \dfrac{3}{2x^2}$

   Par croissance comparée : $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ln(x)}{x^3} = 0$

   et $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{x^2} = 0$

   Donc $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ln(x) - 3x}{2x^3} = 0$
2. $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{(\ln(x))^2 + 2\ln(x) - 3}{x^3}$

   Par croissance comparée : $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{(\ln(x))^2}{x^3} = 0$, $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ln(x)}{x^3} = 0$

   Donc la limite est 0.
3. $\lim\limits_{x\to 0^+} x^2 \ln(\sqrt{x}) = \lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{x^2}{2} \ln(x)$

   Posons $X = \dfrac{1}{x}$, quand $x \to 0^+$, $X \to +\infty$

   $\dfrac{x^2}{2}\ln(x) = -\dfrac{1}{2X^2}\ln(X) \to 0$ par croissance comparée.

   Donc la limite est 0.
4. $\lim\limits_{x\to 0^+} \sqrt{x}\,\ln(x)$

   Posons $X = \dfrac{1}{x}$, quand $x \to 0^+$, $X \to +\infty$

   $\sqrt{x}\ln(x) = -\dfrac{\ln(X)}{\sqrt{X}} \to 0$ par croissance comparée.

   Donc la limite est 0.
5. $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{x+2}{x^2\ln(x)}$

   $\lim\limits_{x\to 0^+} (x+2) = 2$ et $\lim\limits_{x\to 0^+} x^2\ln(x) = 0^-$ (d'après Q4)

   Donc $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{x+2}{x^2\ln(x)} = -\infty$
6. $\lim\limits_{x\to 0^+} \left(\dfrac{1}{x} + \ln(x)\right)$

   $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{1}{x} = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to 0^+} \ln(x) = -\infty$

   Forme indéterminée. $\dfrac{1}{x} + \ln(x) = \dfrac{1 + x\ln(x)}{x}$

   D'après Q4, $\lim\limits_{x\to 0^+} x\ln(x) = 0$, donc $\lim\limits_{x\to 0^+} (1 + x\ln(x)) = 1$

   Et $\lim\limits_{x\to 0^+} x = 0^+$

   Donc $\lim\limits_{x\to 0^+} \left(\dfrac{1}{x} + \ln(x)\right) = +\infty$
7. $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ln(x)}{\sqrt{x}} = 0$ par croissance comparée
8. $\lim\limits_{x\to+\infty} (x^2 + 2x - 3 - \ln(x))$

   $\lim\limits_{x\to+\infty} x^2 = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \ln(x) = +\infty$

   Mais x^2 l'emporte, donc la limite est $+\infty$.
9. $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ln(x) - 5x}{3x^2} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ln(x)}{3x^2} - \dfrac{5}{3x}$
   Par croissance comparée : limite $= 0$

10. $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ln(x)}{x+1} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ln(x)}{x} \times \dfrac{x}{x+1}$

$\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ln(x)}{x} = 0$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x}{x+1} = 1$

Donc la limite est 0.

Exercice 30

1. f est définie sur $\mathbb{R}$ car $x^2+3x+4>0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$ ($\Delta = 9-16=-7<0$).

   $\lim\limits_{x\to-\infty} (x^2+3x+4) = +\infty$ donc $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$

   $\lim\limits_{x\to+\infty} (x^2+3x+4) = +\infty$ donc $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$

2. $f'(x) = \dfrac{2x+3}{x^2+3x+4}$

   $f'(x) = 0 \Leftrightarrow 2x+3=0 \Leftrightarrow x = -\dfrac{3}{2}$

   $f'(x) < 0$ sur $\left]-\infty; -\dfrac{3}{2}\right[$ et $f'(x) > 0$ sur $\left]-\dfrac{3}{2}; +\infty\right[$

   f décroît sur $\left]-\infty; -\dfrac{3}{2}\right]$ puis croît sur $\left[-\dfrac{3}{2}; +\infty\right[$

   Minimum : $f\left(-\dfrac{3}{2}\right) = \ln\left(\dfrac{9}{4} - \dfrac{9}{2} + 4\right) = \ln\left(\dfrac{7}{4}\right)$

Exercice 31

1. $f(x) = \ln\left(\dfrac{x^2}{x+1}\right)$ définie pour $x>0$ et $x \neq -1$, donc sur $]0;+\infty[$.

   $\lim\limits_{x\to0^+} \dfrac{x^2}{x+1} = 0$ donc $\lim\limits_{x\to0^+} f(x) = -\infty$

   $f(x) = \ln(x^2) - \ln(x+1) = 2\ln(x) - \ln(x+1)$

   $= \ln(x) + \ln(x) - \ln(x+1) = \ln(x) + \ln\left(\dfrac{x}{x+1}\right)$

   $\lim\limits_{x\to+\infty} \ln(x) = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x}{x+1} = 1$ donc $\lim\limits_{x\to+\infty} \ln\left(\dfrac{x}{x+1}\right) = 0$

   Par somme : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$

2. $f'(x) = \dfrac{2x}{x^2} - \dfrac{1}{x+1} = \dfrac{2}{x} - \dfrac{1}{x+1} = \dfrac{2(x+1)-x}{x(x+1)} = \dfrac{x+2}{x(x+1)}$

   Pour $x>0$: $f'(x)>0$ donc f est strictement croissante sur $]0;+\infty[$.

   Tableau de variation :

x	0	$+\infty$
$f'(x)$	$+$	
$f(x)$	$-\infty$ $\nearrow$	$+\infty$

Exercice 32

1. (a) $f(x) = \ln(1+e^x)$

   $\lim\limits_{x\to-\infty} e^x = 0$ donc $\lim\limits_{x\to-\infty} (1+e^x) = 1$

   Ainsi $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \ln(1) = 0$

   $\lim\limits_{x\to+\infty} e^x = +\infty$ donc $\lim\limits_{x\to+\infty} (1+e^x) = +\infty$

   Ainsi $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$

   (b) Oui, $\mathcal{C}_f$ admet la droite $y=0$ (axe des abscisses) comme asymptote horizontale en $-\infty$.

2. $f'(x) = \dfrac{e^x}{1+e^x} > 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$

   Donc f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

x	$-\infty$	$+\infty$
$f'(x)$	$+$	
$f(x)$	0 $\nearrow$	$+\infty$

3. f est continue et strictement croissante sur $\mathbb{R}$, avec $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = 0$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$.

   Donc pour tout $m>0$, il existe un unique $x \in \mathbb{R}$ tel que $f(x) = m$ (théorème de la bijection).

4. $f(0) = \ln(2)$ et $f'(0) = \dfrac{1}{2}$

   Équation de T : $y = \dfrac{1}{2}(x-0) + \ln(2) = \dfrac{x}{2} + \ln(2)$

   $T : y = \dfrac{x}{2} + \ln(2)$

5. Soit $h(x) = f(x) - x = \ln(1+e^x) - x = \ln(1+e^x) - \ln(e^x) = \ln(1+e^{-x}) > 0$

   Donc $h(x)>0 \Leftrightarrow f(x)-x>0 \Leftrightarrow f(x)>x$.

   La courbe $\mathcal{C}_f$ est située au-dessus de la droite $d : y = x$.

   <u>Alternative avec dérivé :</u>

   On a $h'(x) = \dfrac{e^x}{1+e^x} - 1 = \dfrac{e^x - 1 - e^x}{1+e^x} = -\dfrac{1}{1+e^x} < 0$

   Donc h est strictement décroissante.

   Or $h(0) = \ln(2) > 0$, donc :

   - Pour $x<0$: $h(x) > h(0) > 0$

   - Pour $x>0$: il faut vérifier la limite

   $\lim\limits_{x\to+\infty} h(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} (\ln(1+e^x) - x)$

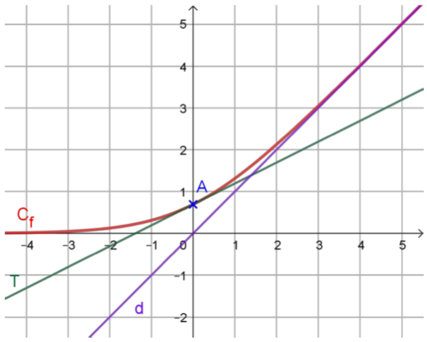
   $= \lim\limits_{x\to+\infty} (\ln(e^x(e^{-x}+1)) - x) = \lim\limits_{x\to+\infty} (x + \ln(e^{-x}+1) - x)$

   $= \lim\limits_{x\to+\infty} \ln(e^{-x}+1) = \ln(1) = 0$

   Donc $h(x)>0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$, ce qui signifie $f(x)>x$ pour tout x.

   La courbe $\mathcal{C}_f$ est située au-dessus de la droite $d : y = x$.

6. Construction :



Propriétés algébriques

Exercice 33

ⓐ $\ln(8) = \ln(2^3) = 3\ln(2)$

ⓑ $\ln(\sqrt{8}) = \ln(8^{1/2}) = \dfrac{1}{2}\ln(8) = \dfrac{3}{2}\ln(2)$

ⓒ $\ln(\sqrt{8e}) = \ln((8e)^{1/2}) = \dfrac{1}{2}\ln(8e) = \dfrac{1}{2}(\ln(8) + \ln(e))$

$= \dfrac{1}{2}(3\ln(2)+1) = \dfrac{3\ln(2)+1}{2} = \dfrac{3}{2}\ln(2) + \dfrac{1}{2}$

Exercice 34

1. $1000 = 8 \times 125 = 2^3 \times 5^3$ ✓
2. $\ln(1000) = \ln(2^3 \times 5^3) = \ln(2^3) + \ln(5^3) = 3\ln(2) + 3\ln(5)$

Exercice 35

ⓐ $\ln(15e) = \ln(15) + \ln(e) = \ln(3\times 5) + 1 = \ln(3) + \ln(5) + 1$

ⓑ $\ln(45e^2) = \ln(45) + \ln(e^2) = \ln(9\times 5) + 2$
$= \ln(3^2) + \ln(5) + 2 = 2\ln(3) + \ln(5) + 2$

ⓒ $\ln\left(\dfrac{3\times 25}{e^4}\right) = \ln(3\times 25) - \ln(e^4)$
$= \ln(3) + \ln(5^2) - 4 = \ln(3) + 2\ln(5) - 4$

Exercice 36

ⓐ $5\ln(2) + \ln(8) - \ln(4) = 5\ln(2) + \ln(2^3) - \ln(2^2)$
$= 5\ln(2) + 3\ln(2) - 2\ln(2) = \mathbf{6\ln(2)} (= \ln(2^6) = \ln(64))$

ⓑ $\ln\left(\dfrac{e^2}{5}\right) + \ln(125) = \ln(e^2) - \ln(5) + \ln(5^3)$
$= 2 - \ln(5) + 3\ln(5) = \mathbf{2 + 2\ln(5)} (= \ln(e^2) + \ln(5^2)$
$= \ln(25e^2))$

Exercice 37

1. $\ln(\sqrt{2}-1) + \ln(\sqrt{2}+1) = \ln\left((\sqrt{2}-1)(\sqrt{2}+1)\right)$
$= \ln(2-1) = \ln(1) = 0$
2. $A = \ln(x-7) - 2\ln(x+3) = \ln(x-7) - \ln((x+3)^2)$
$= \ln\left(\dfrac{x-7}{(x+3)^2}\right)$

Exercice 38

$3\ln(\sqrt{2}+1) + \ln(5\sqrt{2}-7)$
$= \ln((\sqrt{2}+1)^3) + \ln(5\sqrt{2}-7)$
$= \ln\left((\sqrt{2}+1)^3(5\sqrt{2}-7)\right)$
Calculons $(\sqrt{2}+1)^3$:
$(\sqrt{2}+1)^2 = 2 + 2\sqrt{2} + 1 = 3 + 2\sqrt{2}$
$(\sqrt{2}+1)^3 = (\sqrt{2}+1)(3+2\sqrt{2}) = 3\sqrt{2}+4+3+2\sqrt{2} = 7 + 5\sqrt{2}$
Donc $(\sqrt{2}+1)^3(5\sqrt{2}-7) = (7+5\sqrt{2})(5\sqrt{2}-7)$
$= 35\sqrt{2} - 49 + 50 - 35\sqrt{2} = 1$
Ainsi $3\ln(\sqrt{2}+1) + \ln(5\sqrt{2}-7) = \ln(1) = 0 \in \mathbb{N}$ ✓

Exercice 39

1. ⓐ $A = \ln\left(\frac{1}{2}\right) + \ln\left(\frac{2}{3}\right) + \ln\left(\frac{3}{4}\right)$
$= \ln\left(\frac{1}{2}\times\frac{2}{3}\times\frac{3}{4}\right) = \ln\left(\frac{1}{4}\right)$

ⓑ $B = \ln\left(\frac{1}{2}\times\frac{2}{3}\times\frac{3}{4}\times\cdots\times\frac{8}{9}\times\frac{9}{10}\right)$
Produit télescopique : $= \ln\left(\frac{1}{10}\right) = -\ln(10)$
2. $D = \ln\left(\frac{1}{2}\times\frac{2}{3}\times\cdots\times\frac{n}{n+1}\right) = \ln\left(\frac{1}{n+1}\right) = -\ln(n+1)$

Exercice 40

1. f définie sur $]0;+\infty[$ si $x>0$ et $x+1>0$, donc sur $]0;+\infty[$
g définie sur $\mathbb{R}$ si $x^2+x>0$, soit $x(x+1)>0$, donc sur $]-\infty;-1[\cup]0;+\infty[$
Domaines différents, donc $f \neq g$.
2. f définie si $x>0$ et $x-1\neq 0$, donc sur $]0;1[\cup]1;+\infty[$
$f(x) = \ln(x(x-1)^2) + \ln(x) = \ln(x) + 2\ln|x-1| + \ln(x) = 2\ln(x) + 2\ln|x-1|$
g définie si $x>1$
$g(x) = 2\ln(x-1) + \ln(x) = 2\ln(x-1) + \ln(x)$
Sur $]1;+\infty[$, $f(x) = 2\ln(x) + 2\ln(x-1) \neq g(x)$
Donc $f\neq g$.

Exercice 41

1. $\ln\left(\frac{x}{1+x}\right) + \ln\left(1+\frac{1}{x}\right) = \ln\left(\frac{x}{1+x}\right) + \ln\left(\frac{x+1}{x}\right)$
$= \ln\left(\frac{x}{1+x}\times\frac{x+1}{x}\right) = \ln(1) = 0$ ✓
2. $\ln(\sqrt{e+x}-\sqrt{x}) + \ln(\sqrt{e+x}+\sqrt{x})$
$= \ln\left((\sqrt{e+x}-\sqrt{x})(\sqrt{e+x}+\sqrt{x})\right)$
$= \ln((e+x)-x) = \ln(e) = 1$ ✓

Exercice 42

$u_n = \dfrac{3}{2^n} = 3\times\left(\dfrac{1}{2}\right)^n$

(u_n) est géométrique de raison $\dfrac{1}{2}$ et de premier terme $u_0 = 3$.

$v_n = \ln(u_n) = \ln\left(3\times\left(\dfrac{1}{2}\right)^n\right) = \ln(3) + n\ln\left(\dfrac{1}{2}\right)$
$= \ln(3) - n\ln(2)$
$v_{n+1} - v_n = \ln(3) - (n+1)\ln(2) - (\ln(3) - n\ln(2)) = -\ln(2)$
(v_n) est une suite **arithmétique** de raison $-\ln(2)$ et de premier terme $v_0 = \ln(3)$.

Exercice 43

(a) $\ln(x-4)+\ln(x-2)=\ln(3)$

- CE : $x>4$
- $\ln((x-4)(x-2))=\ln(3)$

$(x-4)(x-2)=3$

$x^2-6x+8=3$

$x^2-6x+5=0$

$(x-1)(x-5)=0$, donc $x=1$ ou $x=5$

Vérification CE : seul $x=5$ convient.

- $S=\{5\}$

(b) $\ln(2x^2-17x)=2\ln(3)$

- CE : $2x^2-17x>0$, soit $x(2x-17)>0$, donc $x<0$ ou $x>\dfrac{17}{2}$
- $\ln(2x^2-17x)=\ln(9)$

$2x^2-17x=9$

$2x^2-17x-9=0$

$\Delta=289+72=361=19^2$

$x=\dfrac{17\pm 19}{4}$, soit $x=9$ ou $x=-\dfrac{1}{2}$

Les deux vérifient les CE.

- $S=\left\{-\dfrac{1}{2};9\right\}$

(c) $\ln(x)-\ln(5)\leq 3\ln(2)$

- CE : $x>0$
- $\ln\left(\dfrac{x}{5}\right)\leq\ln(8)$

$\dfrac{x}{5}\leq 8$

$x\leq 40$

- $S=]0;40]$

(d) $\ln(x-5)+\ln(x+9)\leq 2\ln(3)+3\ln(2)$

- CE : $x>5$
- $\ln((x-5)(x+9))\leq\ln(9)+\ln(8)=\ln(72)$

$(x-5)(x+9)\leq 72$

$x^2+4x-45\leq 72$

$x^2+4x-117\leq 0$

$\Delta=16+468=484=22^2$

$x=\dfrac{-4\pm 22}{2}$, soit $x=9$ ou $x=-13$

Le trinôme est négatif entre les racines : $-13\leq x\leq 9$

- Avec CE : $S=]5;9]$

Exercice 44

(a) $\ln(x-2)+\ln(x-32)=6\ln(2)$

- CE : $x>32$
- $\ln((x-2)(x-32))=\ln(64)$

$(x-2)(x-32)=64$

$x^2-34x+64=64$

$x^2-34x=0$

$x(x-34)=0$, donc $x=0$ ou $x=34$

Seul $x=34$ vérifie les CE.

- $S=\{34\}$

(b) $\ln\big((x-2)(x-32)\big)=6\ln(2)$

- CE : $(x-2)(x-32)>0$, donc $x<2$ ou $x>32$

Équation identique : $(x-2)(x-32)=64$

Même résolution : $x=0$ ou $x=34$

Vérification CE : $x=0$ vérifie $x<2$ ✓ et $x=34$ vérifie $x>32$ ✓

- $S=\{0;34\}$

Exercice 45

$0,8^n\leq 0,12$

$\ln(0,8^n)\leq\ln(0,12)$

$n\ln(0,8)\leq\ln(0,12)$

Comme $\ln(0,8)<0$, en divisant on change le sens :

$n\geq\dfrac{\ln(0,12)}{\ln(0,8)}=\dfrac{\ln(12/100)}{\ln(4/5)}$

Calcul numérique : $\dfrac{\ln(0,12)}{\ln(0,8)}\approx\dfrac{-2,120}{-0,223}\approx 9,51$

Le plus petit entier n est donc $n=10$.

Exercice 46

1. $\left(\dfrac{1}{3}\right)^n<10^{-6}$

   $\ln\left(\left(\dfrac{1}{3}\right)^n\right)<\ln(10^{-6})$

   $n\ln\left(\dfrac{1}{3}\right)<-6\ln(10)$

   $-n\ln(3)<-6\ln(10)$

   $n\ln(3)>6\ln(10)$

   $n>\dfrac{6\ln(10)}{\ln(3)}\approx\dfrac{13,82}{1,099}\approx 12,58$

   Le plus petit entier est $n=13$.

2. $(1,15)^n\geq 2\times 10^3$

   $n\ln(1,15)\geq\ln(2000)$

   $n\geq\dfrac{\ln(2000)}{\ln(1,15)}\approx\dfrac{7,600}{0,140}\approx 54,29$

   Le plus petit entier est $n=55$.

Problème de synthèse

Exercice 47

1. (a) $\lim\limits_{x\to 0^+}(1+\ln(x))=-\infty$ et $\lim\limits_{x\to 0^+}x^2=0^+$

   Donc $\lim\limits_{x\to 0^+}f(x)=-\infty$

   (b) Par croissance comparée : $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln(x)}{x^2}=0$

   (c) $f(x)=\dfrac{1}{x^2}+\dfrac{\ln(x)}{x^2}$

   $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{x^2}=0$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln(x)}{x^2}=0$

   Donc $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=0$

   (d) La courbe $\mathcal{C}$ admet :

   - L'axe des ordonnées ($x=0$) comme asymptote verticale
   - L'axe des abscisses ($y=0$) comme asymptote horizontale en $+\infty$

2. (a) $f(x) = (1+\ln(x)) \times x^{-2}$

$f'(x) = \dfrac{1}{x} \times x^{-2} + (1+\ln(x)) \times (-2x^{-3})$

$= \dfrac{1}{x^3} - \dfrac{2(1+\ln(x))}{x^3} = \dfrac{1-2-2\ln(x)}{x^3}$

$= \dfrac{-1-2\ln(x)}{x^3}$ ✓

(b) $f'(x) > 0$

$\dfrac{-1-2\ln(x)}{x^3} > 0$

$-1-2\ln(x) > 0$ (car $x^3 > 0$)

$-2\ln(x) > 1$

$\ln(x) < -\dfrac{1}{2}$

$x < e^{-1/2} = \dfrac{1}{\sqrt{e}}$

(c) Calculons $f\left(\dfrac{1}{\sqrt{e}}\right)$:

$f\left(\dfrac{1}{\sqrt{e}}\right) = \dfrac{1+\ln(e^{-1/2})}{e^{-1}} = \dfrac{1-\frac{1}{2}}{e^{-1}} = \dfrac{1/2}{1/e} = \dfrac{e}{2}$

Tableau de variation :

x	0		$e^{-\frac{1}{2}}$		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
f	$-\infty$	$\nearrow$	$\frac{1}{2}e$	$\searrow$	0

3. (a) $f(x) = 0 \Leftrightarrow 1+\ln(x) = 0 \Leftrightarrow \ln(x) = -1 \Leftrightarrow x = e^{-1} = \dfrac{1}{e}$

Le point d'intersection avec l'axe des abscisses est $\left(\dfrac{1}{e}; 0\right)$.

D'après le théorème de la bijection (ou le tableau de variations), c'est l'unique point d'intersection.

(b) D'après le tableau de variations :

- $f(x) < 0$ sur $\left]0; \dfrac{1}{e}\right[$
- $f(x) = 0$ pour $x = \dfrac{1}{e}$
- $f(x) > 0$ sur $\left]\dfrac{1}{e}; +\infty\right[$

x	0		$\frac{1}{e}$		$+\infty$
$f(x)$		$-$	0	$+$	