On considère la suite $(u_n)$ définie par $u_0 = 3$ et pour tout $n \in n\mathbb{N}$ :

$$u_{n+1} = \frac{4}{5 - u_n}.$$

**Partie A**

1. Recopier et compléter la fonction Python suivante `suite(n)` qui prend comme paramètre le rang $n$ et renvoie la valeur du terme $u_n$.

```
def suite(n) :
    u = 3
    for i in range(n) :
        u = 4/(5 - u)
    return u
```

2. À la première boucle on trouve $u_1 = \frac{4}{5-3} = \frac{4}{2} = 2$.

   À la seconde on trouve $u_2 = \frac{4}{5-2} = \frac{4}{3} \approx 1,333$.

3. À l'aide des affichages ci-dessous, émettre une conjecture sur le sens de variation et une conjecture sur la convergence de la suite $(u_n)$.

   Les affichages successifs sont des approximations de $u_2,\ u_5,\ u_{10},\ u_{20}$ et leur examen laisse à conjecturer que la la limite de la suite est égale à 1.

**Partie B**

On considère la fonction $f$ définie et dérivable sur l'intervalle $]-\infty\ ;\ 5[$ par :

$$f(x) = \frac{4}{5 - x}.$$

Ainsi, la suite $(u_n)$ est définie par $u_0 = 3$ et pour tout $n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = f\left(u_n\right)$.

1. La fonction $f$ quotient de fonctions dérivables sur $]-\infty\ ;\ 5[$, de dénominateur non nul puisque $x \neq 5$, est dérivable et sur cet intervalle :

   $f'(x) = 4 \times \left(-\frac{1 \times (-1)}{(5-x)^2}\right) = \frac{4}{(5-x)^2}$.

   Quotient de deux carrés cette dérivée est strictement positive, donc la fonction $f$ est strictement croissante sur $]-\infty\ ;\ 5[$.

2. *Initialisation* : on a vu que $u_1 = 2$ et on a $u_0 = 3$, donc

   $$1 \leqslant u_1 \leqslant u_0 \leqslant 4.$$

   L'encadrement est vrai au rang 0.

   *Hérédité* : soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $1 \leqslant u_{n+1} \leqslant u_n \leqslant 4$ : ces nombres étant rangés dans l'ordre croissant leur images par $f$ fonction strictement croissante pour des réels plus petits que 4, sont rangées dans le même ordre, soit

   $f(1) \leqslant f\left(u_{n+1}\right) \leqslant f\left(u_n\right) \leqslant f(4)$.

   Comme $f(1) = \frac{4}{5-1} = 1$ et $f(4) = \frac{4}{5-4} = 4$, on obtient

   $$1 \leqslant u_{n+2} \leqslant u_{n+1} \leqslant 4 :$$

   l'encadrement est vraie au rang $n+1$.

   *Conclusion* : l'encadrement est vrai au rang 0 et s'il est vrai au rang $n \in \mathbb{N}$ il l'est aussi au rang $n+1$ : d'après le principe de récurrence :

   pour tout $n \in \mathbb{N},\ 1 \leqslant u_{n+1} \leqslant u_n \leqslant 4$.

3. (a) Soit $x$ un réel de l'intervalle $]-\infty\ ;\ 5[$.

On a pour $x < 5$, $f(x) = x \iff \dfrac{4}{5-x} = x \iff 4 = x(5-x) \iff 4 = 5x - x^2 \iff x^2 - 5x + 4 = 0$.

(b) Résoudre $f(x) = x$ dans l'intervalle $]-\infty\ ;\ 5[$, revient d'après la question précédente à résoudre l'équation du second degré $x^2 - 5x + 4 = 0$.

Les racines de cette équation 1 et 4 sont évidentes (sinon on calcule le déterminant), donc :

$$x^2 - 5x + 4 = 0 \iff (x-1)(x-4) = 0 \iff \left\{\begin{array}{rcl} x-1 & = & 0 \\ & \text{ou} & \\ x-4 & = & 0 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rcl} x & = & 1 \\ & \text{ou} & \\ x & = & 4 \end{array}\right.$$

la solution 4 n'est pas vraisemblable puisque $x < 4$, on a donc $S = \{1\}$.

4. Avec $u_0 = 4$, on a $u_1 = \dfrac{4}{5-4} = \dfrac{4}{1} = 4$ et donc en répétant le calcul $u_n = 4$ quel que soit $n \in \mathbb{N}$.

Dans ce cas la suite est constante : tous ses termes sont égaux à 4.