NOM Prénom : 2024/2025

05.05.2025

Examen EDS

Maths 1ère

Conditions d'évaluation

Calculatrice : autorisée. Durée : 2h00

- Le sujet comporte **5 exercices**.
  Vous pouvez les traiter dans l'ordre que vous souhaitez.
  Assurez-vous d'avoir le sujet complet avant de commencer.
- Le sujet est sur 40 points.
- **Pensez à inscrire votre nom le sujet et à le rendre avec la copie.**
- Numérotez les pages de votre copie (1/n, 2/n, ..., n/n)
- Tout élément de réponse sera pris en compte dans la notation.

Exercice 1 — Étude complète d'une fonction *(6 points)*

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^3 + 3x^2 + 3x - 63$. On appelle $\mathcal{C}$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé.

1. Déterminer $f'(x)$.
   $f'(x) = 3x^2 + 6x + 3 = 3(x^2 + 2x + 1) = 3(x+1)^2$.
2. Étudier le signe de $f'(x)$ sur $\mathbb{R}$.
   Pour tout réel x, $3 > 0$ et $(x+1)^2 \geq 0$ (s'annule pour $x = -1$). Ainsi, $f'(x)$ est positive quel que soit le réel x et $f(-1) = 0$.
3. Établir le tableau de variations de la fonction f sur $\mathbb{R}$.
   Puisque pour tout réel x, $f'(x) \geqslant 0$, la fonction f est croissante sur $\mathbb{R}$.
4. Justifier que la tangente à la courbe $\mathcal{C}$ au point d'abscisse -1 est la droite $\mathcal{D}$ d'équation $y = -64$.
   Une équation réduite de la tangente à la courbe $\mathcal{C}$ au point d'abscisse -1 est :
   $$y - f(-1) = f'(-1)(x+1).$$
   Avec :
   $$f(-1) = -1 + 3 - 3 - 63 = -64 \text{ et } f'(-1) = 3(-1+1)^2 = 3 \times 0 = 0,$$
   l'équation devient $y - (-64) = 0$ ou $y = -64$.
5. Déterminer en quels points de la courbe $\mathcal{C}$ la tangente à la courbe est parallèle à la droite d'équation $y = 3x - 100$.
   La droite a un coefficient directeur égal à 3. La tangente à la courbe $\mathcal{C}$ est parallèle à la droite si :

$$\begin{aligned}
& f'(x) = 3 \\
\iff & 3(x+1)^2 = 3 \\
\iff & (x+1)^2 = 1 \\
\iff & (x+1)^2 - 1 = 0 \\
\iff & (x+1+1)(x+1-1) = 0 \\
\iff & x(x+2) = 0.
\end{aligned}$$

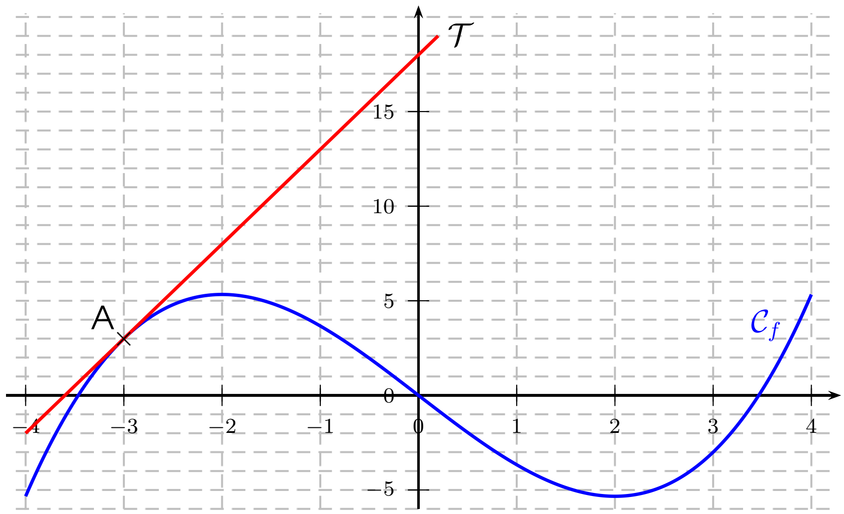
Il y a donc deux solutions : $x = 0$ et $x = -2$.
Pour $x = 0$, $f(0) = -63$ et pour $x = -2$, $f(-2) = -8 + 12 - 6 - 63 = -65$.
Les tangentes aux points $(0\,;\,-63)$ et $(-2\,;\,-65)$ sont parallèles à la droite d'équation $y = 3x - 100$.

Exercice 2 **Questionnaire à choix multiples** *(10 points)*

Cet exercice est un QCM et comprend dix questions indépendantes.
Pour chacune d'elles, une seule des réponses proposées est exacte.
Pour chaque question, indiquer le numéro de la question et recopier sur la copie la lettre correspondant à la réponse choisie.
Aucune justification n'est demandée, mais il peut être nécessaire d'effectuer des recherches au brouillon pour aider à déterminer votre réponse.
Chaque réponse correcte rapporte 1 point. Une réponse incorrecte ou une absence de réponse n'apporte, ni ne retire de point.

Question 1

On donne ci-contre la courbe représentative $\mathcal{C}_f$ d'une fonction f. Cette courbe a une tangente $\mathcal{T}$ au point $A(-3\ ;\ 3)$.



L'équation réduite de cette tangente est :

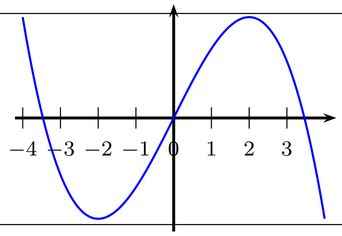
a. $y = \frac{1}{5}x - 3,7$	**b.** $y = \frac{1}{5}x + 18$	**c.** $y = 5x + 18$	**d.** $y = 5x - 3,7.$

Le coefficient directeur de la tangente $\mathcal{T}$ est égal à 5 et son ordonnée à l'origine est 18.
L'équation réduite de $\mathcal{T}$ est donc :

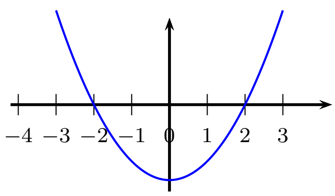
$$y = 5x + 18.$$

Question 2

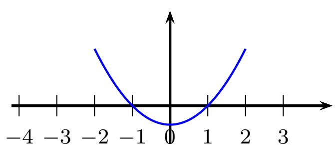
On reprend la fonction f de la question précédente. La représentation graphique de sa fonction dérivée est :



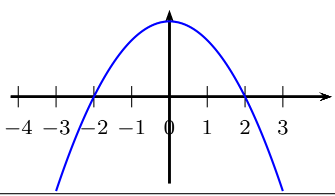
a.



b.



c.



d.

La seule fonction positive sur $]-\infty\,;\,-2[$ et sur $]2\,;\,+\infty[$, négative ailleurs est la fonction de **b.**

Question 3

L'expression $\cos(x+\pi)+\sin(x+\frac{\pi}{2})$ est égale à :

a. $-2\cos(x)$	**b.** 0	**c.** $\cos(x)+\sin(x)$	**d.** $2\cos(x)$.

On a : $\cos(x+\pi)+\sin\left(x+\dfrac{\pi}{2}\right) = -\cos x + \cos x = 0$.

Question 4

On considère la fonction polynôme du second degré f définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = -2x^2+4x+6$$

Cette fonction est strictement positive sur l'intervalle :

a. $]-\infty;-1[\cup]3;+\infty[$	**b.** $]-1;3[$
c. $]-\infty;-3[\cup]1;+\infty[$	**d.** $]-3;1[$.

On cherche les racines du trinôme :

$$\Delta = 16-4\times(-2)\times 6 = 16+64 = 64 > 0,$$

il y a donc deux racines :

$$x_1 = \frac{-4+\sqrt{64}}{-4} = -1 \quad \text{et} \quad x_2 = \frac{-4-\sqrt{64}}{-4} = 3.$$

On sait que le trinôme est négatif sauf entre les racines où il est positif.
Réponse : $]-1\,;\,3[$.

Question 5

Soit la suite arithmétique (u_n) de premier terme $u_0 = 2$ et de raison $0,9$. On a :

a. $u_{50} = 47$	**b.** $u_{50} = 100,9$	**c.** $u_{50} = -47$	**d.** $u_{50} = -100,9$.

On sait que, pour tout naturel n :

$$u_n = u_0 + n\times r = 2+0{,}9n,$$

donc en particulier :

$$u_{50} = 2+50\times 0{,}9 = 2+45 = 47.$$

Question 6

Soit la suite géométrique (v_n) de premier terme $v_0 = 2$ et de raison 0,9. La somme des 37 premiers termes de la suite (v_n) est :

a. $2\times\dfrac{1-0,9^{38}}{1-0,9}$	**b.** $2\times\frac{1-0{,}9^{37}}{1-0{,}9}$	**c.** $0,9\times\dfrac{1-2^{38}}{1-2}$	**d.** $0,9\times\dfrac{1-2^{37}}{1-2}$.

On sait que, pour tout naturel n, $v_n = v_0\times q^n = 2\times 0{,}9^n$.
Donc :

$$\begin{aligned} S_{36} &= v_0+v_1+\ldots+v_{36} \\ &= 2+2\times 0{,}9+2\times 0{,}9^2+\ldots+2\times 0{,}9^{36}. \end{aligned}$$

D'où :

$$0{,}9S_{36} = 2 \times 0{,}9 + 2 \times 0{,}9^2 + \ldots + 2 \times 0{,}9^{37}.$$

On en déduit par différence des deux lignes précédentes que :

$$0{,}9S_{36} - S_{36} = 2 \times 0{,}9^{37} - 2, \text{ d'où } -0{,}1S_{36} = 2\left(0{,}9^{37} - 1\right),$$

et finalement :

$$S_{36} = \frac{2\left(0{,}9^{37} - 1\right)}{-0{,}1} = 20 \times \left(1 - 0{,}9^{37}\right) = 2 \times \frac{1 - 0{,}9^{37}}{1 - 0{,}9}.$$

Question 7

Un programme Python qui retourne la somme des entiers de 1 à 100 est :

a. def Somme() : s=0 While s<100 : s=s+1 return (s)	**b.** def Somme() : s=0 While s<100 : s=2*s+1 return (s)	**c.** def Somme() : s=0 for k in range 101 : s=s+k return(s)	**d.** def Somme() : s=0 for k in range . 100 : s=s+k return(s)

Le programme correct est le troisième.

Question 8

On a $x \in \left[-\frac{\pi}{2}\ ;\ 0\right]$ et $\cos x = 0,8$ alors :

a. $\sin x = 0,6$	**b.** $\sin x = -0,6$	**c.** $\sin x = -0,2$	**d.** $\sin x = 0,2.$

De $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$ ou $\sin^2 x = 1 - \cos^2 x = 1 - 0{,}64 = 0{,}36.$

Comme $x \in \left[-\frac{\pi}{2}\ ;\ 0\right]$, on sait que $\sin x < 0$, donc $\sin x = -0{,}6.$

Question 9

Le nombre $\frac{13\pi}{4}$ est associé au même point du cercle trigonométrique que le réel :

a. $-\frac{14\pi}{4}$	**b.** $-\frac{3\pi}{4}$	**c.** $\frac{7\pi}{4}$	**d.** $\frac{19\pi}{4}$.

$\frac{13\pi}{4} = \frac{16\pi}{4} - \frac{3\pi}{4}$, donc le point associé au réel $\frac{13\pi}{4}$ est le même que celui qui est associé à $-\frac{3\pi}{4}$.

Question 10

Dans un repère orthonormé du plan, on considère les points A$(3\ ;\ -1)$, B$(4\ ;\ 2)$ et C$(1\ ;\ 1)$.

Le produit scalaire $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$ est égal à :

a. -4	**b.** 2	**c.** 4	**d.** 8

$$\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}1\\3\end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}-2\\2\end{pmatrix}.$$

D'où :

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 1 \times (-2) + 3 \times 2 = -2 + 6 = 4.$$

Exercice 3 **Sites de production** *(10 points)*

Une entreprise qui fabrique des aiguilles dispose de deux sites de production, le site A et le site B. Le site A produit les trois-quarts des aiguilles, le site B l'autre quart.
Certaines aiguilles peuvent présenter un défaut. Une étude de contrôle de qualité a révélé que :

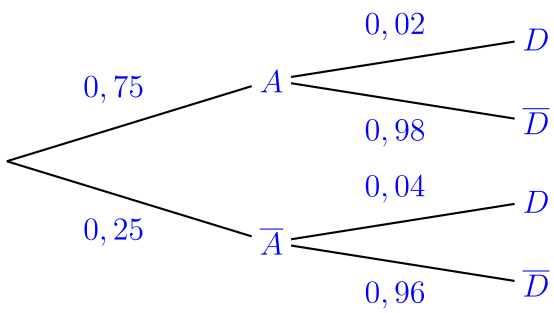
- 2 % des aiguilles du site A sont défectueuses ;
- 4 % des aiguilles du site B sont défectueuses.

Les aiguilles provenant des deux sites sont mélangées et vendues ensemble par lots.
On choisit une aiguille au hasard dans un lot et on considère les évènements suivants :

- A : l'aiguille provient du site A ;
- B : l'aiguille provient du site B ;
- D : l'aiguille présente un défaut.

L'évènement contraire de D est noté $\overline{D}$.

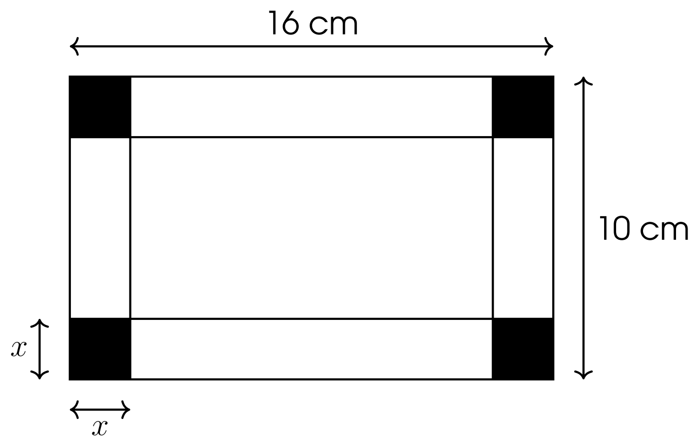
1. D'après les données de l'énoncé, donner la valeur de la probabilité de l'évènement A que l'on notera $P(A)$.
   Le site A produit les trois-quarts des aiguilles donc $P(A) = 0,75$.
2. Recopier et compléter sur la copie l'arbre de probabilités ci- dessous en indiquant les probabilités sur les branches.



3. Quelle est la probabilité que l'aiguille ait un défaut et provienne du site A ?
   La probabilité que l'aiguille ait un défaut et provienne du site A est :
   $P(A \cap D) = 0,75 \times 0,02 = 0,015$.
4. Montrer que $P(D) = 0,025$.
   D'après la formule des probabilités totales :
   $P(D) = P(A \cap D) + P\left(\overline{A} \cap D\right) = 0,75 \times 0,02 + 0,25 \times 0,04 = 0,025$.
5. Après inspection, l'aiguille choisie se révèle défectueuse.
   Quelle est la probabilité qu'elle ait été produite sur le site A ?
   La probabilité qu'elle ait été produite sur le site A est :
   $P_D(A) = \dfrac{P(A \cap D)}{P(D)} = \dfrac{0,015}{0,025} = 0,6$.

Exercice 4 **Patron d'une boîte** *(7 points)*

On veut réaliser, dans le patron ci-dessous, une boîte rectangulaire **sans couvercle**. Les longueurs sont exprimées en cm.



1. Quelles sont les valeurs possibles de x ?
   Pour que la boîte ait une hauteur x positive et que les découpes soient possibles, il faut que $x < \frac{10}{2} = 5$ et $x < \frac{16}{2} = 8$. Donc $x \in]0\,;\,5]$.
2. Vérifier que le volume V de cette boîte sexprime, en fonction de x, par :

$$\mathcal{V}(x) = 4x^3 - 52x^2 + 160x.$$

Le volume de la boîte est donné par :

$$\begin{aligned}\mathcal{V}(x) &= \text{longueur} \times \text{largeur} \times \text{hauteur}\\ &= (16-2x)(10-2x)\cdot x\\ &= (160-32x-20x+4x^2)\cdot x\\ &= (160-52x+4x^2)\cdot x\\ &= 4x^3-52x^2+160x\end{aligned}$$

3. (a) Vérifier que :

$$\mathcal{V}'(x) = 12x^2 - 104x + 160$$

et étudier le signe de $\mathcal{V}'(x)$ sur lintervalle $[0\ ;\ 5]$.
On dérive :

$$\mathcal{V}'(x) = 12x^2 - 104x + 160$$

On résout $\mathcal{V}'(x) = 0$:

$$\Delta = (-104)^2 - 4 \times 12 \times 160 = 10816 - 7680 = 3136 \Rightarrow \sqrt{\Delta} = 56$$

$$x_1 = \frac{104-56}{24} = 2, \quad x_2 = \frac{104+56}{24} = \frac{160}{24} = \frac{20}{3} \approx 6.67$$

Sur $[0\,;5]$, seule la racine $x = 2$ est pertinente. On dresse le signe de $\mathcal{V}'(x)$:

x	0	2	5
$\mathcal{V}'(x)$	$+$	0	$-$

(b) Construire le tableau de variation de la fonction $\mathcal{V}$ sur lintervalle $[0\ ;\ 5]$.

x	0		2		5
$\mathcal{V}(x)$	0	$\nearrow$	$\mathcal{V}(2)$	$\searrow$	$\mathcal{V}(5)$

Calcul :

$$\mathcal{V}(2) = 4(2)^3 - 52(2)^2 + 160(2) = 32 - 208 + 320 = \boxed{144}$$

$$\mathcal{V}(5) = 4(125) - 52(25) + 160(5) = 500 - 1300 + 800 = \boxed{0}$$

(c) En déduire les dimensions de la boîte finale afin que le volume soit maximal.

D'après la question précédente, le volume maximal est de $144\ cm^3$ pour $x = 2$.

Or, quand $x = 2$, on a :

Longueur $= 16-2x = 12\ cm,$ Largeur $= 10-2x = 6\ cm,$ Hauteur $= x = 2\ cm$

$$\Rightarrow \boxed{\text{Dimensions optimales : } 12\ cm \times 6\ cm \times 2\ cm}$$

Exercice 5 **Régime alimentaire** *(7 points)*

Dans un souci de santé, Madame Lefèvre décide chaque jour entre deux options pour son repas du midi : un repas végétarien (noté V) ou un repas avec viande (noté M).
Si elle mange un repas végétarien un jour, elle choisira à nouveau un repas végétarien le lendemain avec une probabilité de 0,7.
Si elle mange un repas avec viande un jour, elle choisira un repas végétarien le lendemain avec une probabilité de 0,5.

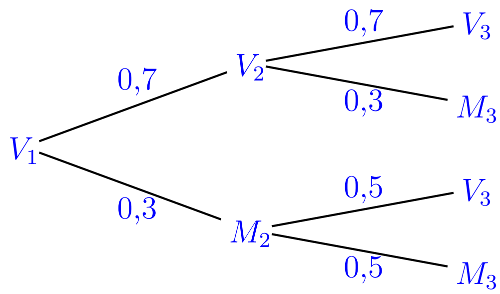
Pour tout entier naturel n non nul, on note :

- V_n l'évènement : "Madame Lefèvre mange végétarien le n-ième jour"
- M_n l'évènement : "Madame Lefèvre mange de la viande le n-ième jour"
- v_n la probabilité que Madame Lefèvre mange végétarien le n-ième jour. Autrement dit, $\mathbb{P}(V_n) = v_n$.

Le premier jour, elle commence avec un repas végétarien, donc $v_1 = 1$.

Partie A - Étude des premiers jours

1. Recopier et compléter larbre pondéré ci-dessous représentant la situation pour les 2e et 3e jours :



2. Calculer v_3. Interpréter.
On utilise la formule des probabilités totales :

$$\begin{aligned} v_3 &= \mathbb{P}(V_3) \\ &= \mathbb{P}(V_2 \cap V_3) + \mathbb{P}(M_2 \cap V_3) \\ &= \mathbb{P}(V_2)\mathbb{P}_{V_2}(V_3) + \mathbb{P}(M_2)\mathbb{P}_{M_2}(V_3) \\ &= 0.7 \times 0.7 + 0.3 \times 0.5 \\ &= 0.49 + 0.15 \\ &= 0.64 \end{aligned}$$

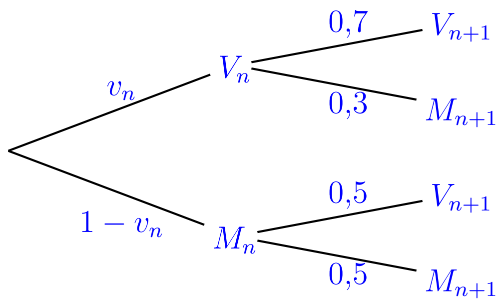
Ainsi, le 3^e jour, Mme Lefèvre mangera végétarien avec une probabilité de 0,64.

3. Le 3e jour, Madame Lefèvre mange un repas végétarien. Quelle est la probabilité quelle ait mangé de la viande la veille ?
On cherche $\mathbb{P}_{V_3}(M_2)$.

$$\mathbb{P}_{V_3}(M_2) = \frac{\mathbb{P}(M_2 \cap V_3)}{\mathbb{P}(V_3)} = \frac{0{,}3 \times 0{,}5}{0{,}64} = \frac{0{,}15}{0{,}64} \approx \boxed{0{,}234}$$

Partie B - Étude sur le long terme

1. Recopier et compléter larbre pondéré ci-dessous représentant la situation entre le n-ième et le $(n+1)$-ième jour :



2. Montrer que, pour tout $n \geq 1$, $v_{n+1} = 0,2v_n + 0,5$

   Par les probabilités totales :

$$\begin{aligned}
v_{n+1} &= \mathbb{P}(V_{n+1}) \\
&= \mathbb{P}(V_n \cap V_{n+1}) + \mathbb{P}(M_n \cap V_{n+1}) \\
&= \mathbb{P}(V_n)\mathbb{P}_{V_n}(V_{n+1}) + \mathbb{P}(M_n)\mathbb{P}_{M_n}(V_{n+1}) \\
&= v_n \times 0.7 + (1 - v_n) \times 0.5 \\
&= 0,7v_n + 0,5 - 0,5v_n \\
&= 0,2v_n + 0,5
\end{aligned}$$