Principes additif et multiplicatifs

Exercice 1

E et F sont disjoints avec $|E| = 4$ et $|F| = 5$.
$|E \cup F| = |E| + |F| = 4 + 5 = 9$ (principe additif car E et F sont disjoints)
$|E \times F| = |E| \times |F| = 4 \times 5 = 20$ (principe multiplicatif)
$|E^2| = |E \times E| = |E|^2 = 4^2 = 16$
$|E^3| = |E|^3 = 4^3 = 64$

Exercice 2

L'affirmation est **fausse**.
Justification : Chaque équipe élit 1 capitaine parmi ses 11 joueurs. Il y a donc $11 \times 11 = 121$ façons de former un binôme de capitaines (un capitaine de chaque équipe).

Exercice 3

1. $E = \{a, b, c, d, e\}$ et $F = \{1, 2, 3\}$
   Comme $E \cap F = \varnothing$ (ensembles disjoints) : $|E \cup F| = 5 + 3 = 8$
   $|E \times F| = 5 \times 3 = 15$
2. Paul doit faire deux choix successifs :
   - Paris $\to$ Lyon : $2 + 3 = 5$ parcours possibles - Lyon $\to$ Marseille : 2 parcours possibles
   Nombre total de parcours : $5 \times 2 = 10$ parcours différents.

Exercice 4

Damien et Constance font trois choix successifs :
Première activité : 2 choix (bowling ou spa)
Restaurant : 4 choix
Film au cinéma : 6 choix
Nombre total de possibilités : $2 \times 4 \times 6 = 48$ possibilités.

Exercice 5

1. Il y a 6 femmes et 5 hommes.
   Nombre de couples possibles : $6 \times 5 = 30$.
   Réponse : **b) 30**
2. Éric choisit 1 furet parmi 3, puis 1 chien parmi 4 OU 1 chat parmi 5.
   Nombre de choix : $3 \times (4 + 5) = 3 \times 9 = 27$.
   Réponse : **c) 27**

Dénombrement de k-uplets

Exercice 6

$E = \{a, b, c\}$

a. **Vraie**. (a, c) est bien un 2-uplet de E car $a \in E$ et $c \in E$.
b. **Vraie**. (b, c, a) est bien un 3-uplet de E car $b, c, a \in E$.
c. **Fausse**. (c, b, c, a) contient deux fois c, donc ce n'est pas un 4-uplet d'éléments distincts.
d. **Fausse**. $d \notin E$, donc (a, c, d) n'est pas un 3-uplet de E.

Exercice 7

$E = \{0, 1\}$

1. $(0, 0, 1)$ est un 3-uplet de E, donc $k = 3$.
2. Les 3-uplets de E sont : $(0, 0, 0)$, $(0, 0, 1)$, $(0, 1, 0)$, $(0, 1, 1)$, $(1, 0, 0)$, $(1, 0, 1)$, $(1, 1, 0)$, $(1, 1, 1)$.
   Il y en a 8.
3. Formule : nombre de k-uplets d'un ensemble à n éléments = n^k.
   Ici : $n = 2$, $k = 3$, donc $2^3 = 8$.

Exercice 8

$E = \{a, b, c, d\}$

1. Les 2-uplets de E sont : (a, a), (a, b), (a, c), (a, d), (b, a), (b, b), (b, c), (b, d), (c, a), (c, b), (c, c), (c, d), (d, a), (d, b), (d, c), (d, d).
   Il y en a 16.
2. Formule : $n^k = 4^2 = 16$.
3. Les couples d'éléments distincts sont : (a, b), (a, c), (a, d), (b, a), (b, c), (b, d), (c, a), (c, b), (c, d), (d, a), (d, b), (d, c).
   Il y en a 12.

Exercice 9

$E = \{p, i, 3, 1, 4\}$ a 5 éléments.
Nombre de 4-uplets de E : $5^4 = 625$.

Exercice 10 </> Algorithme

1. `uplet(3,2)` retourne $3^2 = 9$.
2. Ce programme calcule le nombre de k-uplets d'un ensemble à n éléments, soit n^k.

Exercice 11

$E = \{a, b, 1, 2\}$ a 4 éléments.

1. Nombre de 5-uplets de E : $4^5 = 1\,024$.
2. Pour un 5-uplet commençant par b : le premier élément est fixé, il reste 4 choix pour chacune des 4 positions suivantes.
   Nombre de 5-uplets commençant par b : $4^4 = 256$.

Exercice 12

Le code PIN utilise les chiffres $\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$.

1. Code à 4 chiffres : $10^4 = 10\,000$ codes différents.
2. Code commençant par 3 : le premier chiffre est fixé, 10 choix pour chacun des 3 chiffres suivants.

   Nombre de codes : $10^3 = 1\,000$.
3. Code à 6 chiffres : $10^6 = 1\,000\,000$ codes.

   Combinaisons supplémentaires : $1\,000\,000 - 10\,000 = 990\,000$.

Exercice 13

1. Le personnage a 4 directions possibles (gauche, droite, haut, bas) pour chaque déplacement.

   Nombre de chemins différents : $4^7 = 16\,384$.
2. Le personnage a 4 directions possibles (gauche, droite, haut, bas) pour son premier déplacement puis 3 directions possibles (tous sauf l'opposé de celui choisit) pour chacun des 6 déplacements restants.

   Nombre de chemins différents : $4 \times 3^6 = 2\,916$.

Exercice 14

Chaque enfant peut être une fille (F) ou un garçon (G). Il y a 6 enfants.

1. Nombre total de fratries : $2^6 = 64$.
2. Fratries dont l'aîné est un garçon : le premier enfant est fixé (G), 2 choix pour chacun des 5 suivants.

   Nombre de fratries : $2^5 = 32$.
3. Le 2^e, 4^e et 5^e enfant sont des filles : ces 3 positions sont fixées (F), 2 choix pour chacune des 3 autres positions.

   Nombre de fratries : $2^3 = 8$.

Exercice 15

Chaque point peut être petit ou gros (2 possibilités). Il y a 6 points.

1. Nombre de symboles différents : $2^6 = 64$.
2. Si la personne ne distingue que les 3 points de la première colonne, elle a $2^3 = 8$ possibilités pour déchiffrer le symbole.