

Limites en $\pm\infty$

Exercice 1



Si $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 2$, alors la courbe de f admet une asymptote horizontale d'équation $y = 2$ en $+\infty$.

En observant les courbes proposées, seule celle qui se rapproche horizontalement de la droite $y = 2$ quand x tend vers $+\infty$ peut représenter la fonction f .

Exercice 2



D'après le tableau de variation :

- $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 4$.
- Puisque $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 4$, la courbe représentative de f admet une asymptote horizontale d'équation $d : y = 4$ en $+\infty$.
- La courbe part de $+\infty$ en $-\infty$, descend jusqu'au minimum $f(1) = -2$, puis remonte vers l'asymptote $y = 4$ en $+\infty$.

Exercice 3



D'après le tableau de variation :

- $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 2$.
- Puisque $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 2$, la courbe représentative de f admet une asymptote horizontale d'équation $d : y = 2$ en $+\infty$.
- La courbe part de $-\infty$ en $-\infty$, monte jusqu'au maximum $f(7) = 3$, puis descend vers l'asymptote $y = 2$ en $+\infty$.

Exercice 4



D'après le tableau de variation :

- $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 7$.
- Puisque $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 7$, la courbe \mathcal{C} admet une asymptote horizontale d'équation $y = 7$ en $+\infty$.
- Puisque $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$, pour tout réel $M > 0$, il existe un réel x_0 tel que pour tout $x < x_0$, on ait $f(x) > M$. En particulier, pour $M = 1000$, il existe x_0 tel que $f(x) > 1000$ pour tout $x < x_0$.

Exercice 5



- Vraie.** Si $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$, alors par définition, pour tout réel $M < 0$, il existe un réel x_0 tel que pour tout $x \geq x_0$, on ait $f(x) \leq M$. En particulier, pour $M = -1000$, il existe x_0 tel que $f(x) < -1000$ pour tout $x \geq x_0$.

- Fausse.** Une fonction décroissante sur \mathbb{R} peut avoir une limite finie en $+\infty$. Contre-exemple : $f(x) = -e^{-x}$ est décroissante sur \mathbb{R} et $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$.

Limites en un réel

Exercice 6



Si $\lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x > 1}} f(x) = +\infty$, alors la courbe de f admet

une asymptote verticale d'équation $x = 1$ et la courbe "explose" vers $+\infty$ quand on s'approche de $x = 1$ par la droite.

Parmi les courbes proposées, celles qui présentent cette caractéristique peuvent représenter la fonction f .

Exercice 7



- De $\lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x > 1}} f(x) = -\infty$, on déduit que \mathcal{C}_f admet une asymptote verticale d'équation $x = 1$.

De $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 3$, on déduit que \mathcal{C}_f admet une asymptote horizontale d'équation $y = 3$ en $+\infty$.

- Puisque f est croissante sur $]1; +\infty[$, la courbe part de $-\infty$ en $x = 1^+$ et croît vers l'asymptote $y = 3$ en $+\infty$.

Exercice 8



- De $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 1$, on déduit que \mathcal{C}_f admet une asymptote horizontale d'équation $y = 1$ en $-\infty$.

De $\lim_{\substack{x \rightarrow 3 \\ x < 3}} f(x) = +\infty$, on déduit que \mathcal{C}_f admet une asymptote verticale d'équation $x = 3$.

- Puisque f est croissante sur $] -\infty; 3[$, la courbe part de l'asymptote $y = 1$ en $-\infty$ et croît vers $+\infty$ en $x = 3^-$.

Exercice 9



- Tableau de variation :

x	-1	2	5
$f(x)$	$-\infty$	$+\infty$	2

- Ⓐ Oui, \mathcal{C}_f admet deux asymptotes verticales : $x = -1$ et $x = 2$.

- b) La courbe part de $-\infty$ en $x = -1^+$, croît vers $+\infty$ en $x = 2^-$, puis repart de $-\infty$ en $x = 2^+$ et croît jusqu'au point $(5, 2)$.

Exercice 10



- D'après le tableau : - En $x = -3$: asymptote verticale (limite $+\infty$ à droite) - En $x = 1$: asymptote verticale (limites $+\infty$ à gauche et $-\infty$ à droite) - En $+\infty$: asymptote horizontale $y = 2$
Les trois asymptotes sont : $x = -3$, $x = 1$ et $y = 2$.

- La courbe descend de $+\infty$ en $x = -3^+$, atteint un minimum en $x = 0$, remonte vers $+\infty$ en $x = 1^-$, repart de $-\infty$ en $x = 1^+$ et croît vers l'asymptote $y = 2$.

Exercice 11



- Par lecture graphique :

- $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 1$ (asymptote $d_3 : y = 1$)
- $\lim_{\substack{x \rightarrow -1 \\ x < -1}} f(x) = +\infty$
- $\lim_{\substack{x \rightarrow -1 \\ x > -1}} f(x) = -\infty$ (asymptote $d_1 : x = -1$)
- $\lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x < 1}} f(x) = -\infty$
- $\lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x > 1}} f(x) = +\infty$ (asymptote $d_2 : x = 1$)
- $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 1$ (asymptote $d_3 : y = 1$)

- Tableau de variation correspondant aux limites observées.

x	$-\infty$	-1	0	1	$+\infty$
f	2	$+\infty$	-3	$+\infty$	$-\infty$

Opérations sur les limites

Exercice 12



- a) $f(x) = -100 : \lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = -100$
 $g(x) = 0,1x : \lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = -\infty$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = +\infty$
- b) $f(x) = -7x : \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$
 $g(x) = 5x^2 : \lim_{x \rightarrow \pm\infty} g(x) = +\infty$
- c) $f(x) = 8 + 2x : \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$
 $g(x) = -2 - 0,1x^2 : \lim_{x \rightarrow \pm\infty} g(x) = -\infty$

- d) $f(x) = 6 - 5x^3 : \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$
 $g(x) = 8 + 21x^5 : \lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = -\infty$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = +\infty$
- e) $f(x) = 2e^x : \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$
 $g(x) = 17 - 9e^x : \lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = 17$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = -\infty$
- f) $f(x) = \frac{1}{x} - 2 : \lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = -2$
 $g(x) = 3 - \frac{5}{x} : \lim_{x \rightarrow \pm\infty} g(x) = 3$

Exercice 13



- $f(x) = \frac{1}{x} : \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = -\infty$ et $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = +\infty$
 $g(x) = 1 + \frac{2}{x} : \lim_{x \rightarrow 0^-} g(x) = -\infty$ et $\lim_{x \rightarrow 0^+} g(x) = +\infty$
 $h(x) = 1 - \frac{4}{x} : \lim_{x \rightarrow 0^-} h(x) = +\infty$ et $\lim_{x \rightarrow 0^+} h(x) = -\infty$
- $f(x) = 5 + \frac{1}{x^2} : \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = +\infty$ et $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = +\infty$
 $g(x) = 2 + \frac{5}{x^2} : \lim_{x \rightarrow 0^-} g(x) = +\infty$ et $\lim_{x \rightarrow 0^+} g(x) = +\infty$
 $h(x) = 2 - \frac{3}{x^2} : \lim_{x \rightarrow 0^-} h(x) = -\infty$ et $\lim_{x \rightarrow 0^+} h(x) = -\infty$

Exercice 14



Puisque $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$, on a $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{f(x)} = 0$.

Puisque $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 2$, on a $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{f(x)} = \frac{1}{2}$.

Exercice 15



- Vraie.** On peut prendre $g(x) = 2 - x$. Alors $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = -\infty$ et $f(x) + g(x) = x + 2 - x = 2$, donc $\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) + g(x)) = 2$.
- Vraie.** On peut prendre $k(x) = x$. Alors $\lim_{x \rightarrow +\infty} k(x) = +\infty$ et $h(x) \times k(x) = \frac{x}{x} = 1$, donc $\lim_{x \rightarrow +\infty} (h(x) \times k(x)) = 1$.

Exercice 16



- a) $\lim_{x \rightarrow +\infty} (-2 + 3x + 4\sqrt{x}) = +\infty$
- b) $\lim_{x \rightarrow -\infty} (2x^3 - x^2 + x + 7) = -\infty$
- c) $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} \left(5x^2 + 3x - \frac{19}{x} \right) = -\infty$
- d) $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x < 0}} \left(4 - 3x + \frac{1}{x^2} \right) = +\infty$
- e) $\lim_{x \rightarrow -\infty} (e^x + 2x - 3) = -\infty$
- f) $\lim_{x \rightarrow +\infty} (1 - x - 2e^x) = -\infty$
- g) $\lim_{x \rightarrow +\infty} (1 - \sqrt{2}x^2 - 5x\sqrt{x}) = -\infty$

$$(h) \lim_{x \rightarrow -\infty} \left((e^x - x) \left(\frac{1}{x} - 5 \right) \right)$$

Quand $x \rightarrow -\infty : e^x \rightarrow 0$, donc $e^x - x \rightarrow +\infty$
 $\frac{1}{x} - 5 \rightarrow -5$
 Donc la limite est $+\infty \times (-5) = -\infty$.

$$(i) \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(e^x \left(-5 + \frac{2}{x} \right) \right) = 0 \times (-5) = 0$$

$$(j) \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x < 0}} \left((x-1) \left(2 + \frac{3}{x^3} \right) \right)$$

$(x-1) \rightarrow -1$ et $\frac{3}{x^3} \rightarrow -\infty$, donc la limite est $(-1) \times (-\infty) = +\infty$.

$$(k) \lim_{x \rightarrow -\infty} ((7 - 2e^x)(2 + e^x))$$

Quand $x \rightarrow -\infty : e^x \rightarrow 0$, donc $(7 - 2e^x) \rightarrow 7$ et $(2 + e^x) \rightarrow 2$.

La limite est $7 \times 2 = 14$.

$$(l) \lim_{x \rightarrow +\infty} ((2x-3)(5e^x-1)) = +\infty$$

$$(m) \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} \left((1 - 2e^x) \left(1 + \frac{2}{x} \right) \right)$$

$(1 - 2e^x) \rightarrow 1 - 2 = -1$ et $\frac{2}{x} \rightarrow +\infty$, donc la limite est $(-1) \times (+\infty) = -\infty$.

$$(n) \lim_{x \rightarrow -\infty} ((1 - e^x)(1 - x))$$

Quand $x \rightarrow -\infty : (1 - e^x) \rightarrow 1$ et $(1 - x) \rightarrow +\infty$.

La limite est $1 \times (+\infty) = +\infty$.

Exercice 17 Logique

1. **Fausse.** La proposition $(\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = k) \Rightarrow (\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = k)$ est fausse.

Contre-exemple : $f(x) = k + \frac{1}{x+1}$ pour $x \neq -1$.
 On a $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = k$ mais $f(x) \neq k$ pour tout x .

2. **Vraie.** La réciproque $(\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = k) \Rightarrow (\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = k)$ est vraie car une fonction constante a pour limite sa valeur constante.

Exercice 18

$$(a) f(x) = x^3 + 2x^2 + 3 : \text{terme dominant } x^3$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty \text{ et } \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$$

$$(b) f(x) = -3x^2 - 8x + 11 : \text{terme dominant } -3x^2$$

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = -\infty$$

$$(c) f(x) = x^3 - 7x^2 + x - 1 : \text{terme dominant } x^3$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty \text{ et } \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$$

$$(d) f(x) = x + xe^x = x(1 + e^x)$$

$$\text{En } +\infty : \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$$

$$\text{En } -\infty : e^x \rightarrow 0, \text{ donc } f(x) \rightarrow -\infty$$

$$(e) f(x) = (x^3 + x^2 - x)(e^x - 1)$$

$$\text{En } +\infty : \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$$

$$\text{En } -\infty : e^x \rightarrow 0, \text{ donc } f(x) \rightarrow +\infty$$

Exercice 19



Algorithmique

Soit $f(x) = 3 - e^x$.

$$1. \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 3 - 0 = 3 \text{ et } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 3 - (+\infty) = -\infty.$$

Donc \mathcal{C}_f admet une asymptote horizontale $d : y = 3$ en $-\infty$.

$$2. \text{ Pour tout } x \in \mathbb{R} : f(x) = 3 - e^x < 3 \text{ car } e^x > 0.$$

Donc \mathcal{C}_f est en dessous de d .

$$3. \text{ La distance } MH = |f(x) - 3| = |3 - e^x - 3| = e^x.$$

Le programme calcule la valeur de x pour laquelle $e^x < 0,001$, c'est-à-dire pour laquelle la distance entre la courbe et l'asymptote devient inférieure à 0,001.

Exercice 20



Logique

Fausse pour $k = 0$.

Si $k = 0$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$, alors $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{f(x)}$ n'existe pas nécessairement (peut être $\pm\infty$).

La proposition est vraie pour tout $k \neq 0$.

Exercice 21



$$f(x) = \frac{1}{x-2} \text{ et } g(x) = \frac{-7x}{x-2}$$

En $-\infty$:

$$- \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0$$

$$- \lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = -7$$

En 2^- :

$$- x - 2 \rightarrow 0^-, \text{ donc } \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = -\infty$$

$$- -7x \rightarrow -14 < 0 \text{ et } x - 2 \rightarrow 0^-, \text{ donc } \lim_{x \rightarrow 2^-} g(x) = +\infty$$

Exercice 22



Soit $f(x) = \frac{2}{e^x - 1}$ définie sur \mathbb{R}_+^* .

$$1. \lim_{x \rightarrow +\infty} (e^x - 1) = +\infty, \text{ donc } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0.$$

$$2. (a) \text{ Pour } x > 0 : e^x > e^0 = 1, \text{ donc } e^x - 1 > 0.$$

$$(b) \text{ Quand } x \rightarrow 0^+ : e^x \rightarrow 1, \text{ donc } e^x - 1 \rightarrow 0^+.$$

$$\text{Par conséquent : } \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \frac{2}{0^+} = +\infty.$$

Exercice 23



Soit $f(x) = \frac{7}{-x^2 + 9}$ définie sur $[0; 3[\cup]3; +\infty[$.

$$1. \lim_{x \rightarrow +\infty} (-x^2 + 9) = -\infty, \text{ donc } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0.$$

$$2. (a) -x^2 + 9 = -(x^2 - 9) = -(x-3)(x+3)$$

Pour $x \in [0; 3[: x - 3 < 0$ et $x + 3 > 0$, donc $-x^2 + 9 > 0$.

Pour $x \in]3; +\infty[: x - 3 > 0$ et $x + 3 > 0$, donc $-x^2 + 9 < 0$.

$$(b) \text{ Quand } x \rightarrow 3^- : -x^2 + 9 \rightarrow 0^+, \text{ donc } \lim_{x \rightarrow 3^-} f(x) = +\infty.$$

$$\text{Quand } x \rightarrow 3^+ : -x^2 + 9 \rightarrow 0^-, \text{ donc } \lim_{x \rightarrow 3^+} f(x) = -\infty.$$

Exercice 24

D'après le tableau de variation de f :

1. $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 3$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$.

Donc $\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = \frac{1}{3}$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = 0$.

2. (a) D'après le tableau, f s'annule en $x = 1$ avec $f(x) > 0$ pour $x < 1$ et $f(x) < 0$ pour $x > 1$.

(b) Quand $x \rightarrow 1^-$: $f(x) \rightarrow 0^+$, donc $\lim_{x \rightarrow 1^-} g(x) = +\infty$.

Quand $x \rightarrow 1^+$: $f(x) \rightarrow 0^-$, donc $\lim_{x \rightarrow 1^+} g(x) = -\infty$.

Exercice 25

Soient $f(x) = 3 - \frac{2}{1+e^x}$ et $g(x) = 2 - \frac{3}{1+e^x}$.

1. En $-\infty$: $e^x \rightarrow 0$, donc $1 + e^x \rightarrow 1$.

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 3 - \frac{2}{1} = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = 2 - \frac{3}{1} = -1$$

En $+\infty$: $e^x \rightarrow +\infty$, donc $\frac{1}{1+e^x} \rightarrow 0$.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 3 - 0 = 3$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = 2 - 0 = 2$$

2. f a pour asymptotes $y = 1$ en $-\infty$ et $y = 3$ en $+\infty \Rightarrow$ Courbe 1

g a pour asymptotes $y = -1$ en $-\infty$ et $y = 2$ en $+\infty \Rightarrow$ Courbe 2

Exercice 26

Soit $f(x) = \frac{-2x^2+1}{x-1}$ définie sur $]1; +\infty[$.

En 1^+ : Le numérateur tend vers $-2 + 1 = -1$ et le dénominateur tend vers 0^+ .

Donc $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = -\infty$.

En $+\infty$: $f(x) = \frac{x^2(-2+\frac{1}{x^2})}{x(1-\frac{1}{x})} = \frac{x(-2+\frac{1}{x^2})}{1-\frac{1}{x}} \sim \frac{-2x}{1} = -2x$

Donc $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$.

Exercice 27

Soit $f(x) = \frac{-2x+1}{x^2-4}$ définie sur $]2; +\infty[$.

En 2^+ : Le numérateur tend vers $-4 + 1 = -3$ et le dénominateur tend vers $4 - 4 = 0^+$.

Donc $\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = -\infty$.

En $+\infty$: $f(x) = \frac{x(-2+\frac{1}{x})}{x^2(1-\frac{4}{x^2})} = \frac{-2+\frac{1}{x}}{x(1-\frac{4}{x^2})} \sim \frac{-2}{x}$

Donc $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$.

Exercice 28

Soit $f(x) = \frac{x\sqrt{x}-3}{1-x} = \frac{x^{3/2}-3}{1-x}$ définie sur $]1; +\infty[$.

En 1^+ : Le numérateur tend vers $1 - 3 = -2$ et le dénominateur tend vers 0^- .

Donc $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = +\infty$.

En $+\infty$: $f(x) = \frac{x^{3/2}(1-\frac{3}{x^{3/2}})}{-x(1-\frac{1}{x})} = \frac{-x^{1/2}(1-\frac{3}{x^{3/2}})}{1-\frac{1}{x}} \sim \frac{-\sqrt{x}}{1}$

Donc $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$.

Exercice 29

Soit $f(x) = \frac{e^x+3}{e^x+1}$ définie sur \mathbb{R} .

En $-\infty$: $e^x \rightarrow 0$, donc $f(x) \rightarrow \frac{0+3}{0+1} = 3$.

En $+\infty$: $f(x) = \frac{e^x(1+\frac{3}{e^x})}{e^x(1+\frac{1}{e^x})} = \frac{1+\frac{3}{e^x}}{1+\frac{1}{e^x}} \rightarrow \frac{1}{1} = 1$.

Exercice 30

Soit $f(x) = \frac{2x-5}{x^2+3x-4}$ définie sur $\mathbb{R}_+ \setminus \{1\}$.

1. (a) $x^2 + 3x - 4 = (x-1)(x+4)$

Pour $x \in \mathbb{R}_+ \setminus \{1\}$: $x+4 > 0$ toujours.

- Si $x \in]0; 1[$: $x-1 < 0$, donc $x^2+3x-4 < 0$.

- Si $x \in]1; +\infty[$: $x-1 > 0$, donc $x^2+3x-4 > 0$.

(b) En 1^- : Le numérateur tend vers $2-5 = -3$ et le dénominateur tend vers 0^- .

Donc $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = +\infty$.

En 1^+ : Le numérateur tend vers -3 et le dénominateur tend vers 0^+ .

Donc $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = -\infty$.

2. En $+\infty$: $f(x) = \frac{x(2-\frac{5}{x})}{x^2(1+\frac{3}{x}-\frac{4}{x^2})} = \frac{2-\frac{5}{x}}{x(1+\frac{3}{x}-\frac{4}{x^2})} \sim \frac{2}{x}$

Donc $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$.

Exercice 31

Soient $f(x) = \frac{-4+3x}{3-x}$, $g(x) = \frac{-3x^2+18x-22}{x^2-6x+9}$ et $h(x) = \frac{20-5x}{(3-x)^2}$.

1. En 3^+ :

Pour f : numérateur $\rightarrow -4 + 9 = 5 > 0$, dénominateur $\rightarrow 0^-$, donc $\lim_{x \rightarrow 3^+} f(x) = -\infty$.

Pour g : $x^2 - 6x + 9 = (x-3)^2$, donc $g(x) = \frac{-3x^2+18x-22}{(x-3)^2}$.

Numérateur en $x = 3$: $-27 + 54 - 22 = 5 > 0$, dénominateur $\rightarrow 0^+$, donc $\lim_{x \rightarrow 3^+} g(x) = +\infty$.

Pour h : numérateur $\rightarrow 20 - 15 = 5 > 0$, dénominateur $\rightarrow 0^+$, donc $\lim_{x \rightarrow 3^+} h(x) = +\infty$.

En $+\infty$:

$f(x) = \frac{x(3-\frac{4}{x})}{-x(1-\frac{3}{x})} = \frac{-(3-\frac{4}{x})}{1-\frac{3}{x}} \rightarrow -3$

$g(x) = \frac{x^2(-3+\frac{18}{x}-\frac{22}{x^2})}{x^2(1-\frac{6}{x}+\frac{9}{x^2})} \rightarrow \frac{-3}{1} = -3$

$h(x) = \frac{x(-5+\frac{20}{x})}{x^2(1-\frac{3}{x})^2} = \frac{-5+\frac{20}{x}}{x(1-\frac{3}{x})^2} \rightarrow 0$

2. $\mathcal{C}_1 \Rightarrow f$; $\mathcal{C}_2 \Rightarrow h$; $\mathcal{C}_3 \Rightarrow g$

Composition**Exercice 32**

Soit u définie sur \mathbb{R} avec $\lim_{x \rightarrow -\infty} u(x) = 1$ et

$\lim_{x \rightarrow +\infty} u(x) = +\infty$.

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} e^{u(x)} = e^1 = e \text{ (par composition avec } \lim_{X \rightarrow 1} e^X = e^1)$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} e^{u(x)} = +\infty \text{ (par composition avec } \lim_{X \rightarrow +\infty} e^X = +\infty)$$

Exercice 33



Soient u et v telles que $\lim_{x \rightarrow +\infty} u(x) = 2$ et $\lim_{x \rightarrow 2} v(x) = -\infty$.

Par composition : $\lim_{x \rightarrow +\infty} v(u(x)) = \lim_{X \rightarrow 2} v(X) = -\infty$.

Exercice 34



Soient $f(x) = x^2 + 2$ et $g(x) = \sqrt{x^2 + 2}$.

1. $g(x) = \sqrt{f(x)}$, donc g est la composée de f suivie de la fonction racine carrée.

2. $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$

Par composition : $\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = \lim_{X \rightarrow +\infty} \sqrt{X} = +\infty$.

Exercice 35



Soient $f(x) = 6 - x$, $g(x) = (6 - x)^2$ et $h(x) = e^{6-x}$.

1. $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 6 - (-\infty) = +\infty$

2. $g(x) = [f(x)]^2$ et $h(x) = e^{f(x)}$.

Par composition :

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = \lim_{X \rightarrow +\infty} X^2 = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} h(x) = \lim_{X \rightarrow +\infty} e^X = +\infty$$

3. $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 6 - (+\infty) = -\infty$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = \lim_{X \rightarrow -\infty} X^2 = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} h(x) = \lim_{X \rightarrow -\infty} e^X = 0$$

Exercice 36



1. $f(x) = \sqrt{x^2 + 3} = \sqrt{u(x)}$ avec $u(x) = x^2 + 3$

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} u(x) = +\infty, \text{ donc } \lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = +\infty$$

2. $f(x) = e^{1-0,5x} = e^{u(x)}$ avec $u(x) = 1 - 0,5x$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} u(x) = +\infty, \text{ donc } \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} u(x) = -\infty, \text{ donc } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$$

3. $f(x) = (5 - x)^3 = [u(x)]^3$ avec $u(x) = 5 - x$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} u(x) = +\infty, \text{ donc } \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} u(x) = -\infty, \text{ donc } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$$

4. $f(x) = \frac{1}{(x^2 + x + 1)^4} = \frac{1}{[u(x)]^4}$ avec $u(x) = x^2 + x + 1$

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} u(x) = +\infty, \text{ donc } \lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = 0$$

Exercice 37



1. $\lim_{x \rightarrow -\infty} (3x - 2) = -\infty$, donc $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^{3x-2} = 0$

2. $\lim_{x \rightarrow +\infty} (2 + x + e^{-x}) = +\infty$ (car $e^{-x} \rightarrow 0$), donc $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{2 + x + e^{-x}} = +\infty$

3. $\lim_{x \rightarrow +\infty} (-x^2 + x + 1) = -\infty$, donc $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^{-x^2+x+1} = 0$

4. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2}{x} = +\infty$, donc $\lim_{x \rightarrow 0} e^{\frac{2}{x}} = +\infty$

5. $\lim_{x \rightarrow -\infty} (2 - 3e^{2x}) = 2$ (car $e^{2x} \rightarrow 0$), donc $\lim_{x \rightarrow -\infty} (2 - 3e^{2x})^5 = 2^5 = 32$

6. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 - 1}{4x^2 + 1} = \frac{1}{4}$, donc $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{\frac{x^2 - 1}{4x^2 + 1}} = \frac{1}{2}$

Exercice 38



Soit $f(x) = e^{\frac{2}{x-1}}$ définie sur $]1; +\infty[$.

En 1^+ : $\frac{2}{x-1} \rightarrow +\infty$, donc $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = +\infty$.

En $+\infty$: $\frac{2}{x-1} \rightarrow 0$, donc $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = e^0 = 1$.

Exercice 39



Soient $f(x) = \sqrt{x^2 - 4} - x$ et $g(x) = \sqrt{x^2 - 4} + x$ définies sur $] -\infty; -2] \cup [2; +\infty[$.

1. $f(x) \times g(x) = (\sqrt{x^2 - 4})^2 - x^2 = x^2 - 4 - x^2 = -4$.

2. (a) En $+\infty$: $g(x) = x(\sqrt{1 - \frac{4}{x^2}} + 1) \sim x \times 2 = 2x$
Donc $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = +\infty$.

(b) Puisque $f(x) \times g(x) = -4$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = +\infty$:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-4}{g(x)} = 0.$$

3. (a) En $-\infty$: $f(x) = -x(\sqrt{1 - \frac{4}{x^2}} - 1)$

Or $\sqrt{1 - \frac{4}{x^2}} \rightarrow 1$, donc $f(x) \sim -x \times 0$

Plus précisément : $\sqrt{1 - \frac{4}{x^2}} = 1 - \frac{2}{x^2} + o(\frac{1}{x^2})$

Donc $f(x) \sim -x \times (-\frac{2}{x^2}) = \frac{2}{x} \rightarrow 0$.

Donc $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0$.

(b) $\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-4}{f(x)} = -\infty$.

Exercice 40



1. $\lim_{x \rightarrow -\infty} (2 + x^3) = -\infty$, donc $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^{2+x^3} = 0$.

L'affirmation est **vraie**.

2. L'affirmation est **fausse**.

Contre-exemple : $f(x) = -x$. Alors $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$ mais $f(f(x)) = f(-x) = -(-x) = x$, donc $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(f(x)) = -\infty$.

Comparaison et encadrement

Exercice 41



Soit $f(x) = x + 2 \sin(x)$ définie sur \mathbb{R} .

1. Pour tout $x \in \mathbb{R} : -1 \leq \sin(x) \leq 1$

Donc $-2 \leq 2 \sin(x) \leq 2$, et par conséquent :
 $x - 2 \leq x + 2 \sin(x) \leq x + 2$.

2. $\lim_{x \rightarrow +\infty} (x - 2) = +\infty$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} (x + 2) = +\infty$

Par encadrement : $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$.

3. $\frac{f(x)}{x} = \frac{x+2\sin(x)}{x} = 1 + \frac{2\sin(x)}{x}$

Or $-\frac{2}{x} \leq \frac{2\sin(x)}{x} \leq \frac{2}{x}$, donc $1 - \frac{2}{x} \leq \frac{f(x)}{x} \leq 1 + \frac{2}{x}$.

Puisque $\lim_{x \rightarrow +\infty} (1 - \frac{2}{x}) = 1$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} (1 + \frac{2}{x}) = 1$:

Par encadrement : $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = 1$.

Exercice 42



Soit $f(x) = 2 \cos(x) - x$ définie sur \mathbb{R} .

1. Pour tout $x \in \mathbb{R} : -1 \leq \cos(x) \leq 1$

Donc $-2 \leq 2 \cos(x) \leq 2$, et par conséquent :
 $-2 - x \leq 2 \cos(x) - x \leq 2 - x$.

2. $\lim_{x \rightarrow -\infty} (-2 - x) = +\infty$ et $\lim_{x \rightarrow -\infty} (2 - x) = +\infty$

Par encadrement : $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$.

$\lim_{x \rightarrow +\infty} (-2 - x) = -\infty$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} (2 - x) = -\infty$

Par encadrement : $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$.

3. (a) Pour $x < 0$: $\frac{f(x)}{x} = \frac{2 \cos(x) - x}{x} = \frac{2 \cos(x)}{x} - 1$

Or $-2 \leq 2 \cos(x) \leq 2$, donc pour $x < 0$:

$$\frac{2}{x} \leq \frac{2 \cos(x)}{x} \leq \frac{-2}{x}$$

D'où : $\frac{2}{x} - 1 \leq \frac{f(x)}{x} \leq \frac{-2}{x} - 1$.

(b) $\lim_{x \rightarrow -\infty} (\frac{2}{x} - 1) = -1$ et $\lim_{x \rightarrow -\infty} (\frac{-2}{x} - 1) = -1$

Par encadrement : $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = -1$.

Exercice 43



Soit h définie sur \mathbb{R} telle que $e^{x+1} - 1 \leq h(x) \leq 2e^{x+1} - 1$.

— En $-\infty$: $e^{x+1} \rightarrow 0$, donc $e^{x+1} - 1 \rightarrow -1$ et $2e^{x+1} - 1 \rightarrow -1$.

Par encadrement : $\lim_{x \rightarrow -\infty} h(x) = -1$.

— En $+\infty$: $e^{x+1} \rightarrow +\infty$, donc $e^{x+1} - 1 \rightarrow +\infty$.

Par comparaison : $\lim_{x \rightarrow +\infty} h(x) = +\infty$.

Exercice 44



Soit u définie sur \mathbb{R} telle que, pour tout réel x :

$$x - 1 \leq u(x) \leq 2x - 1.$$

Soit la fonction f définie sur \mathbb{R} par $f(x) = e^{u(x)}$.

1. Montrer que pour tout réel x , $e^{x-1} \leq f(x) \leq e^{2x-1}$.

Correction :

Pour tout réel x , on a par hypothèse :

$$x - 1 \leq u(x) \leq 2x - 1$$

La fonction exponentielle est strictement croissante sur \mathbb{R} , donc elle conserve l'ordre des inégalités.

En appliquant la fonction exponentielle aux trois membres de l'inégalité :

$$e^{x-1} \leq e^{u(x)} \leq e^{2x-1}$$

Or $f(x) = e^{u(x)}$, donc :

$$e^{x-1} \leq f(x) \leq e^{2x-1}$$

2. Calculer $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$.

Correction :

Limite en $-\infty$:

D'après la question précédente : $e^{x-1} \leq f(x) \leq e^{2x-1}$

Quand $x \rightarrow -\infty$:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} e^{x-1} = \lim_{x \rightarrow -\infty} e^{x-1} = 0 \quad (1)$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} e^{2x-1} = \lim_{x \rightarrow -\infty} e^{2x-1} = 0 \quad (2)$$

Par le théorème des gendarmes :

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0$$

Limite en $+\infty$:

Quand $x \rightarrow +\infty$:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} e^{x-1} = +\infty \quad (3)$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} e^{2x-1} = +\infty \quad (4)$$

Par le théorème des gendarmes :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$$

Croissance comparée

Exercice 45



Soit f la fonction définie sur \mathbb{R} par $f(x) = xe^{-20x}$.

1. Calculer la limite de f en $-\infty$.

Correction :

Quand $x \rightarrow -\infty$:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} x = -\infty \quad (5)$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} e^{-20x} = \lim_{X \rightarrow +\infty} e^X = +\infty \text{ (avec } X = -20x \text{)} \quad (6)$$

On a donc une forme indéterminée $(-\infty) \times (+\infty)$.

Posons $X = -x$, alors $x = -X$ et quand $x \rightarrow -\infty$, on a $X \rightarrow +\infty$.

$$f(x) = xe^{-20x} \quad (7)$$

$$= -Xe^{20X} \quad (8)$$

$$= -Xe^{20X} \quad (9)$$

D'après la croissance comparée, $\lim_{X \rightarrow +\infty} Xe^{20X} = +\infty$.

$$\text{Donc : } \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{X \rightarrow +\infty} (-Xe^{20X}) = -\infty$$

2. (a) Déterminer le réel a tel que pour tout réel x , on ait :

$$f(x) = a(-20xe^{-20x})$$

Correction :

On a $f(x) = xe^{-20x}$ et on veut $f(x) = a(-20xe^{-20x})$.

$$xe^{-20x} = a(-20xe^{-20x}) \quad (10)$$

$$xe^{-20x} = -20a \cdot xe^{-20x} \quad (11)$$

Pour que cette égalité soit vraie pour tout $x \neq 0$, il faut :

$$1 = -20a$$

$$\text{Donc : } a = -\frac{1}{20}$$

- (b) Calculer la limite de f en $+\infty$.

Correction :

D'après la question précédente : $f(x) = -\frac{1}{20}(-20xe^{-20x})$

Posons $u = -20x$. Quand $x \rightarrow +\infty$, on a $u \rightarrow -\infty$.

$$f(x) = -\frac{1}{20}(-20xe^{-20x}) \quad (12)$$

$$= -\frac{1}{20} \cdot ue^u \text{ (avec } u = -20x) \quad (13)$$

D'après la croissance comparée, $\lim_{u \rightarrow -\infty} ue^u = 0$.

$$\text{Donc : } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\frac{1}{20} \times 0 = 0$$

Exercice 46

Soit f la fonction définie sur $]0; +\infty[$ par :

$$f(x) = \frac{e^{0,1x}}{x}.$$

1. Calculer la limite de f en 0.

Correction :

Quand $x \rightarrow 0^+$:

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} e^{0,1x} = e^0 = 1 \quad (14)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} x = 0^+ \quad (15)$$

$$\text{Donc : } \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{e^{0,1x}}{x} = \frac{1}{0^+} = +\infty$$

2. (a) Déterminer le réel a tel que pour tout réel x strictement positif, on ait :

$$f(x) = a \times \frac{e^{0,1x}}{0,1x}.$$

Correction :

On a $f(x) = \frac{e^{0,1x}}{x}$ et on veut $f(x) = a \times \frac{e^{0,1x}}{0,1x}$.

$$\frac{e^{0,1x}}{x} = a \times \frac{e^{0,1x}}{0,1x} \quad (16)$$

$$\frac{e^{0,1x}}{x} = \frac{a \cdot e^{0,1x}}{0,1x} \quad (17)$$

En simplifiant par $e^{0,1x}$ (qui est toujours non nul) :

$$\frac{1}{x} = \frac{a}{0,1x}$$

$$\text{Donc : } \frac{1}{x} = \frac{a}{0,1x} \Rightarrow 0,1x = ax \Rightarrow a = 0,1$$

$$\text{Donc : } a = \frac{1}{10} = 0,1$$

- (b) Calculer la limite de f en $+\infty$.

Correction :

D'après la question précédente : $f(x) = 0,1 \times \frac{e^{0,1x}}{0,1x}$

Posons $u = 0,1x$. Quand $x \rightarrow +\infty$, on a $u \rightarrow +\infty$.

$$f(x) = 0,1 \times \frac{e^{0,1x}}{0,1x} \quad (18)$$

$$= 0,1 \times \frac{e^u}{u} \text{ (avec } u = 0,1x) \quad (19)$$

D'après la croissance comparée, $\lim_{u \rightarrow +\infty} \frac{e^u}{u} = +\infty$.

$$\text{Donc : } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0,1 \times (+\infty) = +\infty$$

Exercice 47

Calculer les limites suivantes :

Correction :

$$1. \lim_{x \rightarrow -\infty} (3xe^x + 2e^x - 1)$$

Quand $x \rightarrow -\infty$:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} 3xe^x = 0 \text{ (croissance comparée)} \quad (20)$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} 2e^x = 0 \quad (21)$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} (-1) = -1 \quad (22)$$

$$\text{Donc : } \lim_{x \rightarrow -\infty} (3xe^x + 2e^x - 1) = 0 + 0 - 1 = -1$$

$$2. \lim_{x \rightarrow -\infty} (1 - e^2 x - x^3 e^x)$$

Quand $x \rightarrow -\infty$:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} 1 = 1 \quad (23)$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} (-e^2 x) = +\infty \text{ (car } e^2 > 0 \text{ et } x \rightarrow -\infty) \quad (24)$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} (-x^3 e^x) = 0 \text{ (croissance comparée)} \quad (25)$$

$$\text{Donc : } \lim_{x \rightarrow -\infty} (1 - e^2 x - x^3 e^x) = +\infty$$

$$3. \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(2 - \frac{4e^x}{x} \right)$$

Quand $x \rightarrow +\infty$:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} 2 = 2 \quad (26)$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{4e^x}{x} = +\infty \text{ (croissance comparée)} \quad (27)$$

$$\text{Donc : } \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(2 - \frac{4e^x}{x} \right) = 2 - (+\infty) = -\infty$$

$$4. \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{e^x}{2x^2} \right)$$

Quand $x \rightarrow +\infty$:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} 1 = 1 \quad (28)$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{2x^2} = +\infty \text{ (croissance comparée)} \quad (29)$$

$$\text{Donc : } \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{e^x}{2x^2} \right) = 1 + (+\infty) = +\infty$$

$$5. \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{4e^x}{\sqrt{x}} \right)$$

Quand $x \rightarrow +\infty$:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} 1 = 1 \quad (30)$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{4e^x}{\sqrt{x}} = +\infty \text{ (croissance comparée)} \quad (31)$$

$$\text{Donc : } \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{4e^x}{\sqrt{x}} \right) = +\infty$$

$$6. \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{\sqrt{x} e^x}{x} \right)$$

On peut réécrire : $\frac{\sqrt{x} e^x}{x} = \frac{e^x}{\sqrt{x}}$

D'après la croissance comparée :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{\sqrt{x}} = +\infty$$

$$7. \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{5x}{e^x}$$

D'après la croissance comparée :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{e^x} = 0$$

$$\text{Donc : } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{5x}{e^x} = 5 \times 0 = 0$$

$$8. \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{5 - 3x}{e^x}$$

On peut factoriser par x au numérateur :

$$\frac{5-3x}{e^x} = \frac{x(\frac{5}{x}-3)}{e^x} = \frac{x}{e^x} \cdot \left(\frac{5}{x} - 3 \right)$$

Quand $x \rightarrow +\infty$:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{e^x} = 0 \text{ (croissance comparée)} \quad (32)$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{5}{x} - 3 \right) = -3 \quad (33)$$

$$\text{Donc : } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{5 - 3x}{e^x} = 0 \times (-3) = 0$$

$$9. \lim_{x \rightarrow -\infty} (5x - 1)e^x$$

On factorise par x : $(5x - 1)e^x = x(5 - \frac{1}{x})e^x$

D'après la croissance comparée :

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} x e^x = 0$$

$$\text{Et } \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(5 - \frac{1}{x} \right) = 5$$

$$\text{Donc : } \lim_{x \rightarrow -\infty} (5x - 1)e^x = 0$$

$$10. \lim_{x \rightarrow -\infty} (x^2 + x + 3)e^x$$

On factorise par x^2 : $(x^2 + x + 3)e^x = x^2(1 + \frac{1}{x} + \frac{3}{x^2})e^x$

D'après la croissance comparée :

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} x^2 e^x = 0$$

$$\text{Et } \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(1 + \frac{1}{x} + \frac{3}{x^2} \right) = 1$$

$$\text{Donc : } \lim_{x \rightarrow -\infty} (x^2 + x + 3)e^x = 0$$

$$11. \lim_{x \rightarrow +\infty} (3x - e^x)$$

On factorise par e^x : $3x - e^x = e^x(\frac{3x}{e^x} - 1)$

Quand $x \rightarrow +\infty$:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = +\infty \quad (34)$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x}{e^x} = 0 \text{ (croissance comparée)} \quad (35)$$

$$\text{Donc } \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{3x}{e^x} - 1 \right) = -1$$

$$\text{Donc : } \lim_{x \rightarrow +\infty} (3x - e^x) = (+\infty) \times (-1) = -\infty$$

$$12. \lim_{x \rightarrow +\infty} (3x^2 - 2e^x)$$

On factorise par e^x : $3x^2 - 2e^x = e^x(\frac{3x^2}{e^x} - 2)$

D'après la croissance comparée :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2}{e^x} = 0$$

$$\text{Donc } \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{3x^2}{e^x} - 2 \right) = -2$$

$$\text{Donc : } \lim_{x \rightarrow +\infty} (3x^2 - 2e^x) = -\infty$$

$$13. \lim_{x \rightarrow +\infty} (x^2 - xe^x)$$

On factorise par xe^x : $x^2 - xe^x = xe^x(\frac{x}{e^x} - 1)$

D'après la croissance comparée :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{e^x} = 0$$

$$\text{Donc } \lim_{x \rightarrow +\infty} (\frac{x}{e^x} - 1) = -1$$

$$\text{Et } \lim_{x \rightarrow +\infty} xe^x = +\infty \text{ (croissance comparée)}$$

$$\text{Donc : } \lim_{x \rightarrow +\infty} (x^2 - xe^x) = -\infty$$

$$14. \lim_{x \rightarrow -\infty} (e^x - x)e^x$$

$$(e^x - x)e^x = e^{2x} - xe^x$$

Quand $x \rightarrow -\infty$:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} e^{2x} = 0 \quad (36)$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} xe^x = 0 \text{ (croissance comparée)} \quad (37)$$

$$\text{Donc : } \lim_{x \rightarrow -\infty} (e^x - x)e^x = 0 - 0 = 0$$

$$15. \lim_{x \rightarrow -\infty} (3xe^{3x})$$

Posons $u = 3x$. Quand $x \rightarrow -\infty$, on a $u \rightarrow -\infty$.

$$3xe^{3x} = ue^u$$

D'après la croissance comparée :

$$\lim_{u \rightarrow -\infty} ue^u = 0$$

$$\text{Donc : } \lim_{x \rightarrow -\infty} (3xe^{3x}) = 0$$

$$16. \lim_{x \rightarrow -\infty} (2 - x)e^{2-x}$$

Posons $u = 2 - x$. Quand $x \rightarrow -\infty$, on a $u \rightarrow +\infty$.

$$(2 - x)e^{2-x} = ue^u$$

D'après la croissance comparée :

$$\lim_{u \rightarrow +\infty} ue^u = +\infty$$

$$\text{Donc : } \lim_{x \rightarrow -\infty} (2 - x)e^{2-x} = +\infty$$