Continuité d'une fonction

Exercice 1

D'après le graphique donné :

1. f est continue en 3, « on ne lève pas le stylo »autour la valeur 3 pour tracer la courbe.
2. f nest pas continue en 2, « on lève le stylo »autour la valeur 2 pour tracer la courbe.

Exercice 2

D'après les graphiques donnés :

1. Les fonctions continues sur leur intervalle de définition sont : f et g.
2. Pour les fonctions non continues :
   — h : discontinuité en $x = 1$.
   — j : discontinuité en $x = 1$ et $x = 3$.

Exercice 3

D'après le graphique donné :

1. En $x = 5$, il y a une discontinuité. En effet, $\lim_{x \to 5^-} f(x) = 2 \neq f(5) = 3$.
2. Sur l'intervalle $[-1; 3]$, la courbe peut être tracée sans lever le crayon. La fonction f est donc **continue** sur $[-1; 3]$.

Exercice 4

D'après le graphique donné :

1. Sur l'intervalle $[-2; 5]$, la courbe présente une discontinuité en $x = 3$. La fonction n'est donc **pas continue** sur $[-2; 5]$.
2. On a $\lim_{x \to 1^-} f(x) = \lim_{x \to 1^+} f(x) = f(1)$ donc f est continue en $x = 1$.

Exercice 5

1. D'après le graphique, on peut lire que la courbe passe par le point $(1, 3)$.
   Pour $x = 1$, on a $f(1) = 1^2 + b \times 1 + 2 = 1 + b + 2 = 3 + b$.
   D'après le graphique, $f(1) = 3$, donc $3 + b = 3$, d'où $b = 0$.
2. Sur le graphique, f présente une discontinuité en $x = 1$ car il y a un saut.
   Pour que f soit continue en $x = 1$, il faut que :
   $$\lim_{x \to 1^-} f(x) = \lim_{x \to 1^+} f(x) = f(1)$$
   Or $\lim_{x \to 1^-} f(x) = 1^2 + b \times 1 + 2 = 3 + b = 3$
   et $\lim_{x \to 1^+} f(x) = 3 \times 1 + 1 = 4$
   La fonction f n'est donc pas continue sur $[-3; 4]$.

Exercice 6 Logique

1. Cette proposition est **vraie**. C'est un théorème fondamental : toute fonction dérivable sur un intervalle est continue sur cet intervalle.
2. La réciproque est : "Si une fonction est continue sur un intervalle I alors elle est dérivable sur I."
   Cette réciproque est **fausse**. Contre-exemple : la fonction $f(x) = |x|$ est continue sur $\mathbb{R}$ mais n'est pas dérivable en $x = 0$.

Théorème des valeurs intermédiaires

Exercice 7

1. $f(-3) = (-3)^3 - 5(-3) + 1 = -27 + 15 + 1 = -11$
   $f(3) = 3^3 - 5(3) + 1 = 27 - 15 + 1 = 13$
2. f est un polynôme, donc continue sur $\mathbb{R}$ et en particulier sur $[-3; 3]$.
   On a $f(-3) = -11 < 0$ et $f(3) = 13 > 0$.
   $0 \in [-11; 13] = [f(-3); f(3)]$.
   D'après le théorème des valeurs intermédiaires, l'équation $f(x) = 0$ possède au moins une solution dans $[-3; 3]$.
3. $6 \in [-11; 13] = [f(-3); f(3)]$.
   D'après le théorème des valeurs intermédiaires, l'équation $f(x) = 6$ admet au moins une solution sur $[-3; 3]$.

Exercice 8 </> Algorithme

Le script complété :

```
def sol(a,b):
    y1=f(a); y2=f(b)
    if y1*y2 <= 0:
        return True
    else:
        return False
```

La condition `y1*y2 <= 0` signifie que $f(a)$ et $f(b)$ sont de signes opposés (ou l'un est nul), ce qui garantit l'existence d'une solution d'après le théorème des valeurs intermédiaires.

Exercice 9

1. Les fonctions polynômes sont continues sur $\mathbb{R}$, f est donc continue sur $\mathbb{R}$, donc sur $[5; 8]$.
2. a) D'après le tableau : $f(5) = 4$ et $f(8) = -9$.

(b) f est continue et strictement décroissante sur $[5; 8]$.
On a $f(5) = 4 > 0$ et $f(8) = -9 < 0$.
$0 \in [-9; 4] = [f(8); f(5)]$.
D'après le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires (fonction continue et strictement monotone), l'équation $f(x) = 0$ a une unique solution dans $[5; 8]$.

Exercice 10

1. (a) $\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) = 3x^2 + 1$

   (b) $\bullet f$ est un polynôme donc continue sur $\mathbb{R}$ et en particulier sur $[0; 4]$.
   $\bullet$ Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $x^2 \geq 0$, donc $3x^2 + 1 \geq 1 > 0$.
   Ainsi $f'(x) > 0$ sur $\mathbb{R}$, donc f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$ et en particulier sur $[0; 4]$.

   (c) $f(0) = 0^3 + 0 - 9 = -9$
   $f(4) = 4^3 + 4 - 9 = 64 + 4 - 9 = 59$

2. f est continue et strictement croissante sur $[0; 4]$.
On a $f(0) = -9 < 0$ et $f(4) = 59 > 0$.
$0 \in [-9; 59] = [f(0); f(4)]$.
D'après le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires, l'équation $f(x) = 0$ a une unique solution α dans $[0; 4]$.

3. (a) $f(1) = 1^3 + 1 - 9 = -7$
   $f(2) = 2^3 + 2 - 9 = 8 + 2 - 9 = 1$

   (b) On a $f(1) = -7 < 0$ et $f(2) = 1 > 0$.
   Comme f est strictement croissante, $\alpha \in]1; 2[$.
   Donc $1 < \alpha < 2$.

Exercice 11

1. $\bullet f$ est un polynôme donc continue sur $\mathbb{R}$ et en particulier sur $[1; 5]$.
$\bullet f'(x) = 0,1 \times 9x^8 = 0,9x^8$
Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $x^8 \geq 0$, donc $f'(x) \geq 0$.
De plus, $f'(x) = 0$ seulement si $x = 0$, et $f'(x) > 0$ si $x \neq 0$.
Donc f est strictement croissante sur $[1; 5]$ (car $0 \notin [1; 5]$).

2. $f(2) = 0,1 \times 2^9 - 1000 = 0,1 \times 512 - 1000 = 51,2 - 1000 = -948,8 < 0$
$f(3) = 0,1 \times 3^9 - 1000 = 0,1 \times 19683 - 1000 = 1968,3 - 1000 = 968,3 > 0$
f est continue et strictement croissante sur $[2; 3] \subset [1; 5]$.
On a $f(2) < 0$ et $f(3) > 0$.
D'après le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires, l'équation $f(x) = 0$ a une et une seule solution dans $[2; 3]$.

3. D'après le tableau de valeurs, $f(2,7) < 0$ et $f(2,8) > 0$.
Donc $2,7 < \alpha < 2,8$, ce qui donne un encadrement d'amplitude $0,1$.

Exercice 12 — Calculatrice

D'après le tableau de valeurs, on cherche la valeur de x telle que $f(x) = 50$.
On observe que $f(3,69) = 49,933 < 50$ et $f(3,7) = 50,353 > 50$.
Donc $3,69 < \alpha < 3,7$, ce qui donne un encadrement d'amplitude $0,01$.

Exercice 13

1. f est un polynôme donc continue sur $\mathbb{R}$ et en particulier sur $[-2; 2]$.
$f(-2) = (-2)^3 - 6(-2) + 1 = -8 + 12 + 1 = 5$
$f(2) = 2^3 - 6(2) + 1 = 8 - 12 + 1 = -3$
On a $f(-2) = 5 > 0$ et $f(2) = -3 < 0$.
$0 \in [-3; 5] = [f(2); f(-2)]$.
D'après le théorème des valeurs intermédiaires, l'équation $f(x) = 0$ admet au moins une solution dans $[-2; 2]$.

2. (a) $f'(x) = 3x^2 - 6$
   Sur $[2; +\infty[$, on a $x \geq 2$, donc $x^2 \geq 4$, donc $3x^2 \geq 12$, donc $3x^2 - 6 \geq 6 > 0$.
   Ainsi $f'(x) > 0$ sur $[2; +\infty[$, donc f est strictement croissante sur $[2; +\infty[$.

   (b) f est continue et strictement croissante sur $[2; +\infty[$.
   On a $f(2) = -3 < 0$.
   De plus, $\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty > 0$.
   D'après le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires, l'équation $f(x) = 0$ a une unique solution dans $[2; +\infty[$.

Exercice 14

$\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) = 3x^2 - 8$
Ainsi $f'(x) = 0 \Leftrightarrow 3x^2 = 8 \Leftrightarrow x^2 = \frac{8}{3} \Leftrightarrow x = \pm\sqrt{\frac{8}{3}}$
Or $\sqrt{\frac{8}{3}} = \frac{2\sqrt{6}}{3} \approx 1,63$
Sur $[-1; 1]$, on a $x^2 \leq 1 < \frac{8}{3}$, donc $3x^2 < 8$, donc $f'(x) < 0$.
Ainsi f est strictement décroissante sur $[-1; 1]$.
$f(-1) = (-1)^3 - 8(-1) + 1 = -1 + 8 + 1 = 8$
$f(1) = 1^3 - 8(1) + 1 = 1 - 8 + 1 = -6$
f est continue et strictement décroissante sur $[-1; 1]$.
On a $f(-1) = 8 > 0$ et $f(1) = -6 < 0$.
D'après le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires, l'équation $f(x) = 0$ possède une unique solution sur $[-1; 1]$.

Exercice 15 — Calculatrice

1. $f'(x) = 20x^4 + 2$

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $x^4 \geq 0$, donc $20x^4 \geq 0$, donc $f'(x) = 20x^4 + 2 \geq 2 > 0$.
Ainsi f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

2. f est continue et strictement croissante sur $\mathbb{R}$.
De plus, $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$.
Or $8 \in]-\infty; +\infty[$, donc l'équation $f(x) = 8$ possède une unique solution α dans $\mathbb{R}$.
3. Par balayage à la calculatrice, on trouve que $f(x) = 8 \Leftrightarrow 1,14 < \alpha < 1,15$ (encadrement à 10^{-2} près).

Exercice 16 — Calculatrice

1. $f'(x) = e^{4x+7} \times 4 + 3x^2 = 4e^{4x+7} + 3x^2$
Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $e^{4x+7} > 0$ et $x^2 \geq 0$, donc $f'(x) > 0$.
Ainsi f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.
2. f est continue et strictement croissante sur $\mathbb{R}$.
$\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = 0 + (-\infty) - 10 = -\infty$
$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty + (+\infty) - 10 = +\infty$
Or $0 \in \mathbb{R}$, donc l'équation $f(x) = 0$ possède une unique solution α dans $\mathbb{R}$.
3. Par balayage à la calculatrice, on trouve un encadrement de α à 10^{-2} près : $-1,14 < \alpha < -1,13$

Exercice 17 — Calculatrice

1. $f'(x) = 3x^2 + 4x + 10$
Le discriminant est $\Delta = 16 - 4 \times 3 \times 10 = 16 - 120 = -104 < 0$.
Comme le coefficient de x^2 est positif et $\Delta < 0$, on a $f'(x) > 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.
Donc f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.
2. L'équation $x^3 + 2x^2 + 10x = 20$ équivaut à $f(x) = 20$.
$\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$
$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$
Or $20 \in \mathbb{R}$, donc l'équation $f(x) = 20$ possède une unique solution α dans $\mathbb{R}$.
3. Par calculs à la calculatrice, on trouve une valeur approchée de α à $0,01$ près : $\alpha \approx 1,37$.

Exercice 18 — Algorithme

1. $f'(x) = 3x^2 + 2x = x(3x + 2)$
Sur $[1; 2]$, on a $f'(x) > 0$ (car $x \geq 1 > 0$ et $3x + 2 > 0$).
Donc f est strictement croissante sur $[1; 2]$.
$f(1) = 1 + 1 - 5 = -3 < 0$
$f(2) = 8 + 4 - 5 = 7 > 0$
f est continue et strictement croissante sur $[1; 2]$.
D'après le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires, l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution α dans $[1; 2]$.
2. (a) L'algorithme utilise la méthode de dichotomie.
Initialement : $a = 1$, $b = 2$
Itération 1 : $m = 1,5$, $f(1) \times f(1,5) = (-3) \times (-0,875) > 0$, donc $a = 1,5$
Itération 2 : $m = 1,75$, $f(1,5) \times f(1,75) < 0$, donc $b = 1,75$
Itération 3 : $m = 1,625$, etc.
`sol(3)` retourne un encadrement de α d'amplitude $\frac{1}{2^3} = 0,125$
(b) L'amplitude initiale est $2 - 1 = 1$.
Après n itérations, l'amplitude est $\frac{1}{2^n}$.
On veut $\frac{1}{2^n} = 0,0625 = \frac{1}{16} = \frac{1}{2^4}$.
Donc $n = 4$.

Exercice 19

Le volume du cube est $V_1 = x^3$.
Le volume du parallélépipède rectangle est $V_2 = 6 \times 2 \times (2x + 5) = 12(2x + 5) = 24x + 60$.
On cherche x tel que $V_1 = V_2$, soit $x^3 = 24x + 60$, soit $x^3 - 24x - 60 = 0$.
Soit $f(x) = x^3 - 24x - 60$.
Ainsi, $f'(x) = 3x^2 - 24$.
On obtient donc les tableaux suivants :

x	0		$2\sqrt{2}$		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
f	60	$\searrow$	$-32\sqrt{2} - 60$	$\nearrow$	$+\infty$

Sur $[0; 2\sqrt{2}]$, $f(x) < 0$. Donc pas de solution.
Sur $[2\sqrt{2}; +\infty[$, f est continue, strictement croissante et $0 \in [f(2\sqrt{2}); \lim_{x \to +\infty} f(x)[$.
Donc, d'après le corollaire du TVI, l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution $\alpha \in [2\sqrt{2}; +\infty[$ et donc sur $[0; +\infty[$.
Avec la calculatrice, on obtient : $\alpha \approx 5,85$.

Exercice 20 — Calculatrice

1. $g'(x) = 3x^2 + 1$
Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $g'(x) > 0$, donc g est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.
g est continue sur $\mathbb{R}$ et $\lim_{x \to -\infty} g(x) = -\infty$, $\lim_{x \to +\infty} g(x) = +\infty$
Ainsi, $0 \in]\lim_{x \to -\infty} g(x); \lim_{x \to +\infty} g(x)[$.
Donc, d'après le corollaire du TVI, l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution α dans $\mathbb{R}$.
2. Par calculs numériques, $0.68 < \alpha < 0,69$.

3. $g(0) = -1 < 0$ et g est strictement croissante.
Donc $g(x) < 0$ pour $x < \alpha$ et $g(x) > 0$ pour $x > \alpha$:

x	$-\infty$		α		$+\infty$
$g(x)$		$-$	0	$+$	

Exercice 21 Calculatrice

1. $g'(x) = 6x^2 - 6x = 6x(x-1) = 6(x-0)(x-1)$
Il s'agit d'un polynôme du second degré sous forme factorisée, on peut donner son tableau de signe :

x	$-\infty$		0		1		$+\infty$
$g'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
g	$-\infty$	$\nearrow$	-1	$\searrow$	-2	$\nearrow$	$+\infty$

2. • Sur $]-\infty;1]$, $g(0) = -1$ est le maximum. Donc, sur cet intervalle $g(x) < 0$.
• Sur $[1;+\infty[$, g est continue et strictement croissante.
On a $g(1) = -2 < 0$
et $\lim_{x\to+\infty} g(x) = +\infty > 0$
donc selon le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires, léquation $g(x) = 0$ possède une unique solution α dans $[1;+\infty[$ mais également dans $\mathbb{R}$.
Avec la calculatrice : $1,6 < \alpha < 1,7$.

3. On en déduit que : $g(x) < 0$ pour $x < \alpha$ et $g(x) > 0$ pour $x > \alpha$.

4. (a) $\forall x \in]-1;+\infty[$, $f'(x) = \dfrac{-(x^3+1)-(1-x)\times 3x^2}{(x^3+1)^2} = \dfrac{-x^3-1-3x^2+3x^3}{(x^3+1)^2} = \dfrac{2x^3-3x^2-1}{(x^3+1)^2} = \dfrac{g(x)}{(x^3+1)^2}$
(b) $(x^3+1)^2 > 0$ sur $]-1;+\infty[$, donc le signe de $f'(x)$ est le même que celui de $g(x)$.
$f'(x) < 0$ pour $x \in]-1;\alpha[$ et $f'(x) > 0$ pour $x \in]\alpha;+\infty[$.
Donc f est décroissante sur $]-1;\alpha[$ et croissante sur $]\alpha;+\infty[$.

Exercice 22

1. $f'(x) = 4x^3 + 6x - 5$
$f''(x) = 12x^2 + 6$

2. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $x^2 \geq 0$, donc $f''(x) = 12x^2+6 \geq 6 > 0$.
Donc f' est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

3. (a) f' est continue et strictement croissante sur $\mathbb{R}$.
$\lim\limits_{x\to-\infty} f'(x) = -\infty$ et $displaystylelim_{x\to+\infty} f'(x) = +\infty$.
Ainsi, $0 \in]\lim\limits_{x\to-\infty} f'(x); \lim\limits_{x\to+\infty} f'(x)[$
Donc selon le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires, léquation $f'(x) = 0$ possède donc une unique solution α dans $\mathbb{R}$.
Un encadrement de α a 0,1 près est : $0,6 < \alpha < 0,7$
(b) Comme f' est strictement croissante et $f'(\alpha) = 0$:

x	$-\infty$		α		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	

(c) On a donc :

x	$-\infty$		α		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
f	$+\infty$	$\searrow$	$f(\alpha)$	$\nearrow$	$+\infty$

Exercice 23

L'affirmation est **vraie**.
Soit $f(x) = x^3 - 3x - k$, avec $k \in]-2;2[$.
On a $f'(x) = 3x^2 - 3 = 3(x^2-1)$.
En étudiant le signe de $f'(x)$ et les limites de f, on obtient :

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
f	$-\infty$	$\nearrow$	$2-k$	$\searrow$	$-2-k$	$\nearrow$	$+\infty$

Comme $k \in]-2;2[$, on a : $2-k > 0$ et $-2-k < 0$.
On applique trois fois de suite, le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires à f, qui est continue et strictement monotone, respectivement sur les intervalles $]\infty;1]$, $[1;1]$ et $[1;+\infty[$.
Léquation $f(x) = 0$, qui équivaut à $x^3 3x = k$, possède bien exactement trois solutions.

Suites récurrentes

Exercice 24

$u_1 = f(u_0) = f(8) = 2\times 8 + 7 = 16 + 7 = 23$
La bonne réponse est **b)** 23.

Exercice 25

$u_0 = 1$
$u_1 = f(u_0) = f(1) = 1 + \frac{1}{1} = 1 + 1 = 2$
$u_2 = f(u_1) = f(2) = 1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$
$u_3 = f(u_2) = f\left(\frac{3}{2}\right) = 1 + \frac{1}{\frac{3}{2}} = 1 + \frac{2}{3} = \frac{5}{3}$

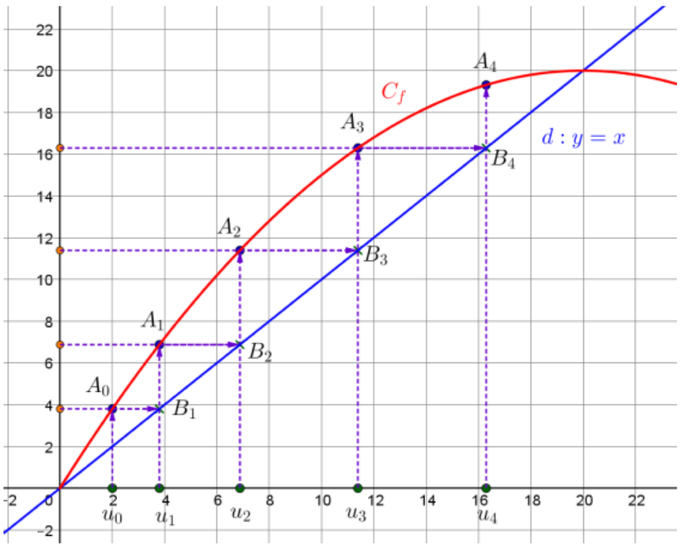
Exercice 26

1. L'ordonnée de A_0 est égale à $f(u_0) = u_1$.
2. En suivant la construction graphique :
   — B_1 a pour coordonnées $(u_1; u_1)$
   — A_1 a pour coordonnées $(u_1; u_2)$
   — B_2 a pour coordonnées $(u_2; u_2)$
   — A_2 a pour coordonnées $(u_2; u_3)$

Exercice 27

$f(x) = -\frac{1}{20}x(x-40) = -\frac{1}{20}x^2 + 2x$

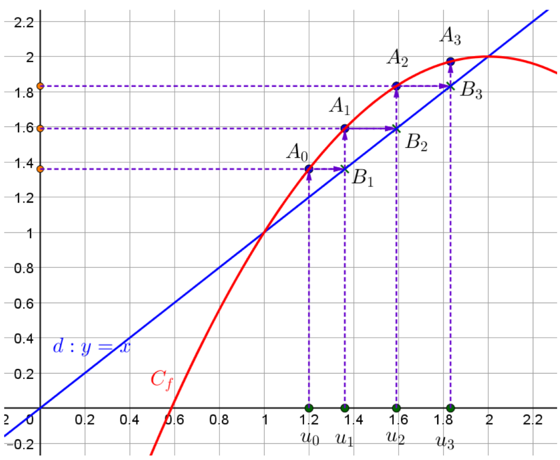
1. En suivant la méthode graphique de construction :



2. D'après la construction graphique, la suite (u_n) semble croissante.

Exercice 28

1. En suivant la construction graphique à partir de $u_0 = 1,2$:



2. D'après la construction, la suite (u_n) semble croissante et converger vers 2.
3. $f'(x) = -2x + 4$
   Ainsi, $f'(x) > 0$ pour $x < 2$ et $f'(x) < 0$ pour $x > 2$.
   Donc f est croissante sur $]-\infty; 2]$ et décroissante sur $[2; +\infty[$.
4. Montrons par récurrence que $u_n \leq u_{n+1} \leq 2$ pour tout n.
   Initialisation : $u_0 = 1,2$ et $u_1 = f(1,2) = -(1,2)^2 + 4(1,2) - 2 = -1,44 + 4,8 - 2 = 1,36$
   Donc $u_0 \leq u_1 \leq 2$.
   $P(0)$ est vraie. La propriété est initialisée.
   Hérédité : Soit $k \in \mathbb{N}$ fixé. Supposons $P(k)$ vraie (ie. $u_k \leq u_{k+1} \leq 2$)

   $u_k \leq u_{k+1} \leq 2$ (par HR)
   $f(u_k) \leq f(u_{k+1}) \leq f(2)$ (car f est strct croissante)
   $u_{k+1} \leq u_{k+2} \leq 2$ (car $f(2) = 2$)

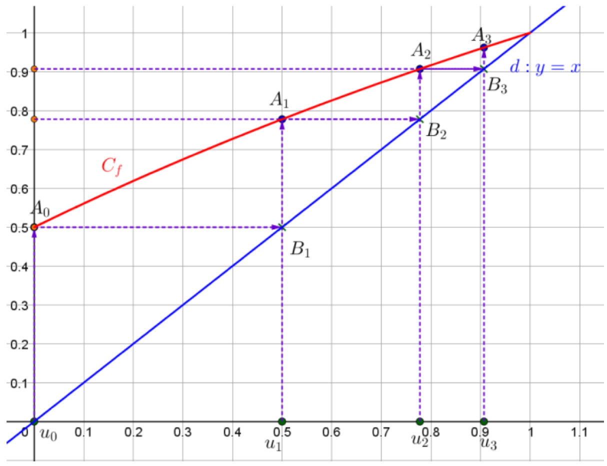
   La propriété est héréditaire.
   Conclusion : Par principe de récurrence, (u_n) est croissante et est majorée par 2.
5. La suite (u_n) est croissante et majorée par 2, donc elle converge vers un réel L qui vérifie $L = f(L)$ car f est continue sur $\mathbb{R}$ et, pour tout entier naturel $n, u_{n+1} = f(u_n)$.
   On a $L = -L^2 + 4L - 2 \Leftrightarrow L^2 - 3L + 2 = 0$, soit $(L-1)(L-2) = 0$.
   Donc $L = 1$ ou $L = 2$.
   Comme (u_n) est croissante et $u_0 = 1,2 > 1$, on a $L = 2$.

Exercice 29

$$f(x) = \frac{3x+2}{x+4}$$

1. $f'(x) = \dfrac{3(x+4) - (3x+2)}{(x+4)^2} = \dfrac{3x + 12 - 3x - 2}{(x+4)^2} = \dfrac{10}{(x+4)^2} > 0$
   Donc f est strictement croissante sur $I = [0; 1]$.
   $f(0) = \frac{2}{4} = \frac{1}{2} \in I$ et $f(1) = \frac{5}{5} = 1 \in I$
   Comme f est croissante sur I et $f(I) = [f(0); f(1)] = [\frac{1}{2}; 1] \subset I$,
   pour tout $x \in I$, $f(x) \in I$.
2. Pour tout entier naturel n, posons $P(n)$ la propriété « $0 \leq u_n \leq 1$ ».
   Initialisation : $u_0 = 0$ donc u_0 appartient à $[0; 1]$: $P(0)$ est vraie.
   Hérédité : Soit $k \in \mathbb{N}$ fixé. Supposons $P(k)$ vraie (ie. $0 \leq u_k \leq 1$)
   On a, par HR, $0 \leq u_k \leq 1$
   Or $\forall x \in [0; 1], f(x) \in [0, 1]$
   Donc $0 \leq f(u_k) \leq 1 \Leftrightarrow 0 \leq u_{k+1} \leq 1$.
   Donc $P(k+1)$ est vraie.
   Conclusion : Par principe de récurrence, u_n appartient bien à $[0; 1]$.
3. a) Construction graphique classique avec la courbe de f et la droite $y = x$. (voir ci-après)

ⓑ Voici :



ⓒ D'après le graphique, (u_n) semble croissante et converger vers 1.

4. ⓐ Pour tout entier naturel n, posons $P(n)$ la propriété « $u_n \leq u_{n+1}$ ».

Initialisation : $u_0 = 0; u_1 = 0,5$ donc $u_0 \leq u_1$

$P(0)$ est vraie.

Hérédité : Soit k un naturel fixé tel que $P(k)$ est vraie, à savoir tel que $u_k \leq u_{k+1}$.

On a $u_k \leq u_{k+1}$, or quel que soit lentier naturel n, u_n appartient à $[0; 1]$, intervalle sur lequel f est croissante donc $f(u_k) \leq f(u_{k+1})$ ce qui donne $u_{k+1} \leq u_{k+2}$.

$P(k+1)$ est vraie.

Conclusion : Selon le principe de récurrence, $P(n)$ est vraie donc (u_n) est bien croissante.

ⓑ (u_n) est croissante et majorée par 1, donc converge.

La limite L vérifie $L = f(L) = \frac{3L+2}{L+4}$.

Donc $L(L+4) = 3L+2$, soit $L^2 + L - 2 = 0$, soit $(L+2)(L-1) = 0$.

Donc $L = -2$ ou $L = 1$. Comme $L \geq 0$, on a $L = 1$.

Exercice 30

$f(x) = \sqrt{2+x}$ et $u_0 = 1$

1. **Faux.**

$u_0 = 1$

$u_1 = f(u_0) = \sqrt{2+1} = \sqrt{3}$

$u_2 = f(u_1) = \sqrt{2+\sqrt{3}} \neq 2$

2. **Vrai.** Par une récurrence immédiate, on peut montrer que $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \leq u_{n+1} \leq 2$.

3. **Faux.** La limite L vérifie $L = \sqrt{2+L}$, soit $L^2 = 2 + L$, soit $L^2 - L - 2 = 0$.

Donc $L = 2$ ou $L = -1$. Comme $\forall n, u_n \geq 0$, on a $L = 2 \neq -1$.

Exercice 31

$f(x) = \sqrt{1+x}$ et $u_0 = 2$

1. $f'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{1+x}} > 0$ sur $[1; +\infty[$, donc f est strictement croissante.

2. Montrons que $1 \leq u_{n+1} \leq u_n$

Initialisation : $u_0 = 2; u_1 = \sqrt{3}$ donc $1 \leq u_1 \leq u_0$

Donc $P(0)$ est vraie.

Hérédité : Soit k un entier naturel fixé tel que $P(k)$ est vraie.

On a : $1 \leq u_{k+1} \leq u_k$ donc u_k appartient à $[1; +\infty[$, intervalle sur lequel f est croissante donc $f(1) \leq f(u_{k+1}) \leq f(u_k)$, or $f(1) = 2$, donc il vient $1 \leq 2 \leq u_{k+2} \leq u_{k+1}$.

Ainsi, $P(k+1)$ est vraie.

Conclusion : Selon le principe de récurrence, $P(n)$ est vraie donc (u_n) est bien décroissante et minorée par 1.

3. (u_n) est décroissante et minorée par 1, donc converge.

4. La limite L vérifie $L = f(L)$ car f est continue sur $[1; +\infty[$ et pour tout entier, $u_{n+1} = f(u_n)$.

Ainsi, $L = \sqrt{1+L}$, soit $L^2 = 1+L$, soit $L^2 - L - 1 = 0$.

Donc $L = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ (nombre d'or) ou $L = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$.

Comme $L \geq 1$, on a $L = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$.