

Notion d'équation différentielle

Exercice 1



1. $F'(x) = 8x + 1$.
2. On a $F'(x) = 8x + 1$, donc f vérifie bien l'équation différentielle $y' = 8x + 1$.

Exercice 2



1. $u'(x) = 3$ et $v'(x) = 3$.
2. On a $u'(x) = 3$ et $v'(x) = 3$, donc u et v vérifient bien $y' = 3$.
3. Par exemple : $w(x) = 3x$ ou $w(x) = 3x + 1$ (toute fonction de la forme $w(x) = 3x + C$ avec $C \in \mathbb{R}$).

Exercice 3



On calcule $g'(x) = -3e^{-3x}$.
 Vérifions : $g'(x) + 3g(x) = -3e^{-3x} + 3(4 + e^{-3x}) = -3e^{-3x} + 12 + 3e^{-3x} = 12$.
 Donc g est bien solution de l'équation $y' + 3y = 12$.

Primitives d'une fonction ($y' = f$)

Exercice 4



1. On utilise la formule $(uv)' = u'v + uv'$ avec $u(x) = x$ et $v(x) = e^{3x}$.
 $F'(x) = 1 \cdot e^{3x} + x \cdot 3e^{3x} = e^{3x} + 3xe^{3x} = (1+3x)e^{3x} = f(x)$.
2. On peut en déduire que F est une primitive de f sur \mathbb{R} .

Exercice 5



1. On calcule $F'(x)$ avec la formule $(uv)' = u'v + uv'$:
 $F'(x) = 1 \cdot \ln(x) + x \cdot \frac{1}{x} = \ln(x) + 1 = f(x)$.
 Donc F est bien une primitive de f sur \mathbb{R}_+^* .
2. Par exemple : $G(x) = x \ln(x) + 1$ ou $H(x) = x \ln(x) - 5$ (toute fonction de la forme $x \ln(x) + C$ avec $C \in \mathbb{R}$).

Exercice 6



1. **Vrai.** $(F + G)' = F' + G' = f + g$.
2. **Faux.** $(FG)' = F'G + FG' = fG + Fg \neq fg$ en général.
3. **Vrai.** $(-F)' = -F' = -f$.
4. **Faux.** $(F^2)' = 2FF' = 2Ff \neq f^2$ en général.

Exercice 7



1. Une primitive de f sur \mathbb{R} est $F(x) = x^3$ (ou $F(x) = x^3 + C$ avec $C \in \mathbb{R}$).

2. On cherche $F(x) = x^3 + C$ telle que $F(1) = 0$.
 $F(1) = 1 + C = 0 \Rightarrow C = -1$.
 La primitive cherchée est $F(x) = x^3 - 1$.

Exercice 8



1. $u(x) = \frac{1}{x^5} = x^{-5}$ avec $n = -5$.
2. Une primitive de $u(x) = x^{-5}$ est $U(x) = \frac{x^{-4}}{-4} = -\frac{1}{4x^4}$.
 Donc $k = -\frac{1}{4}$.

Exercice 9



- $f(x) = x^{-2}$, donc $F(x) = \frac{x^{-1}}{-1} = -\frac{1}{x}$.
- $g(x) = x^{-3}$, donc $G(x) = \frac{x^{-2}}{-2} = -\frac{1}{2x^2}$.
- $h(x) = 2x^{-3}$, donc $H(x) = 2 \cdot \frac{x^{-2}}{-2} = -\frac{1}{x^2}$.

Exercice 10



1. Une primitive de $f(x) = 2e^{2x}$ est $F(x) = e^{2x}$.
2. Pour $g(x) = e^{2x}$: $G(x) = \frac{1}{2}e^{2x}$.
 Pour $h(x) = e^{ax}$ avec $a \neq 0$: $H(x) = \frac{1}{a}e^{ax}$.

Exercice 11



1. Posons $u(x) = x^2$. Alors $u'(x) = 2x$ et $f(x) = u'(x)e^{u(x)}$.
2. Une primitive de $u'e^u$ est e^u , donc $F(x) = e^{x^2}$.

Exercice 12



1. Posons $u(x) = \sin(x)$. Alors $u'(x) = \cos(x)$ et $f(x) = u(x)^2 u'(x)$.
2. Une primitive de $u^2 u'$ est $\frac{u^3}{3}$, donc $F(x) = \frac{\sin^3(x)}{3}$.

Exercice 13



1. On calcule $g'(x) = -\sin(x) + \sin(x) + x \cos(x) = x \cos(x) = f(x)$.
 Donc g est une primitive de f sur \mathbb{R} .
2. Toutes les primitives de f sont de la forme $F(x) = \cos(x) + x \sin(x) + C$ avec $C \in \mathbb{R}$.

Exercice 14



1. **Vrai.** Toute fonction continue sur \mathbb{R} admet des primitives sur \mathbb{R} . (propriété du cours)
2. **Vrai.** Toute fonction dérivable est continue.
3. **Vrai.** Une primitive est par définition dérivable, donc continue.

4. **Vrai.** Une primitive de f' est $f + C$ avec $C \in \mathbb{R}$, donc en particulier $f + 10$.

Exercice 15

1. $g(x) = f''(x) + 2f'(x)$. Une primitive est $G(x) = f'(x) + 2f(x)$.
2. $h(x) = f'(-x)$. Une primitive est $H(x) = -f(-x)$.

Exercice 16

On a :

- F est croissante sur $[-3; -1]$, donc $F' > 0$ sur cet intervalle.
- F est croissante sur $[3; 5]$, donc $F' > 0$ sur cet intervalle.

Ces critères sont vérifiés par la fonction associée à la courbe 1, mais pas celle de la courbe 2.

Exercice 17

On observe que :

- F est croissante sur $] -\infty; -1]$ et sur $[1; +\infty[$, donc $f(x) = F'(x) \geq 0$ sur $] -\infty; -1]$ et sur $[1; +\infty[$.
- F est décroissante sur $[-1; 1]$, donc $f(x) = F'(x) \leq 0$ sur $[-1; 1]$.
- F atteint un minimum en $x = 1$, donc $F'(1) = f(1) = 0$.
- F atteint un maximum en $x = -1$, donc $F'(-1) = f(-1) = 0$.

Réponses :

1. **Faux.** $f(0) \neq 0$ car la tangente n'est pas horizontale.
2. **Vrai.** $f(1) = 0$.
3. **Faux.** $f(x) \leq 0$ sur $[-1; 0]$.
4. **Vrai.** $f(x) \geq 0$ sur $[0; 1]$.

Exercice 18

1. **Vrai.** Si $f \geq 0$ sur \mathbb{R} , alors $F' = f \geq 0$, donc F est croissante sur \mathbb{R} .
2. La réciproque est : « si F est croissante sur \mathbb{R} , alors f est positive sur \mathbb{R} ».
Cette réciproque est **vraie**. En effet, si F est croissante, alors $F' \geq 0$, c'est-à-dire $f \geq 0$.

Exercice 19

1. $F(x) = \frac{5x^4}{4} - \frac{3x^2}{2} + 7x$ et $G(x) = \frac{2x^5}{5} - \frac{x^4}{8}$
2. $F(x) = \frac{x^6}{6} - \frac{x^2}{2}$ et $G(x) = \frac{4x^5}{5} - \frac{7x^2}{2} + \sqrt{2}x$
3. $F(x) = 2\sin(x) + 3\cos(x)$ et $G(x) = 10x - 3e^x + \frac{x^2}{2}$

4. $f(x) = x^2 + x - 2$, donc $F(x) = \frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} - 2x$
 $g(x) = 4x^2 + 4x + 1$, donc $G(x) = \frac{4x^3}{3} + 2x^2 + x$
5. $F(x) = \frac{x^3}{15} + \frac{x}{6}$ et $G(x) = \frac{12,4x^{10}}{10} - x^7 + 3x^5$

Exercice 20

1. $F(x) = \frac{3x^2}{2} + x + \ln(x)$ et $G(x) = \frac{x^3}{3} - \frac{4}{x}$
2. $F(x) = \frac{x^2}{2} - \frac{1}{2x^2}$ et $G(x) = \frac{x^2}{2} - \frac{1}{2}\ln(x)$
3. $f(x) = 7x^{-3}$, donc $F(x) = -\frac{7}{2x^2}$
 $g(x) = 4x^{-1} - 3x^{-2} + x^{-4}$, donc $G(x) = 4\ln(x) + \frac{3}{x} - \frac{1}{3x^3}$
4. $f(x) = x^{-1} + 5x^{-2}$, donc $F(x) = \ln(x) - \frac{5}{x}$
 $g(x) = x - 1 + 2x^{-1}$, donc $G(x) = \frac{x^2}{2} - x + 2\ln(x)$
5. $f(x) = 3 - 11x^{-2}$, donc $F(x) = 3x + \frac{11}{x}$
 $g(x) = 5x^{-1/2} - x + 6$, donc $G(x) = 10\sqrt{x} - \frac{x^2}{2} + 6x$
6. $f(x) = 4x^{-2} - \frac{1}{\sqrt{x}}$, donc $F(x) = -\frac{4}{x} - 2\sqrt{x}$
 $g(x) = \frac{1}{\sqrt{x}} + x^2$, donc $G(x) = 2\sqrt{x} + \frac{1}{3}x^3$

Exercice 21

Déterminer une primitive de chacune des fonctions f et g définies sur \mathbb{R} par leurs expressions.

1. $f(x) = 3e^{3x+4}$ et $g(x) = xe^{x^2-3}$
• f est de la forme $u'e^u$:

$$f(x) = 3e^{3x+4} = \underbrace{3}_{u'} e^{\underbrace{3x+4}_u}$$

Donc une primitive est

$$F(x) = e^u + k = e^{3x+4} + k.$$

- g est de la forme $u'e^u$:

$$g(x) = xe^{x^2-3} = \frac{1}{2} \underbrace{2x}_{u'} e^{\underbrace{x^2-3}_u}$$

Donc une primitive est

$$G(x) = \frac{1}{2} e^u + k = \frac{1}{2} e^{x^2-3} + k.$$

2. $f(x) = x^2e^{-3}$ et $g(x) = \frac{e^x}{e^x + 4}$
• f est de la forme ax^n (avec $a = e^{-3}$ et $n = 2$) :

$$f(x) = x^2e^{-3} = e^{-3}x^2$$

Donc une primitive est

$$F(x) = e^{-3} \frac{x^3}{3} + k.$$

- g est de la forme $\frac{u'}{u}$:

$$g(x) = \frac{e^x}{e^x + 4} = \frac{\overbrace{e^x}^{u'}}{\underbrace{e^x + 4}_u}$$

Donc une primitive est

$$G(x) = \ln |u| + k = \ln(e^x + 4) + k.$$

3. $f(x) = 5e^{4-x}$ et $g(x) = \frac{4x^3}{x^4 + 5}$

- f est de la forme $u'e^u$:

$$f(x) = 5e^{4-x} = 5e^{\overbrace{4-x}^u} = -5 \underbrace{(-1)}_{u'} e^{\overbrace{4-x}^u}$$

Donc une primitive est

$$F(x) = -5e^u + k = -5e^{4-x} + k.$$

- g est de la forme $\frac{u'}{u}$:

$$g(x) = \frac{4x^3}{x^4 + 5} = \frac{\overbrace{4x^3}^{u'}}{\underbrace{x^4 + 5}_u}$$

Donc une primitive est

$$G(x) = \ln |u| + k = \ln(x^4 + 5) + k.$$

4. $f(x) = 4x(3x^2 - 8)^2$ et $g(x) = \frac{3x^2}{\sqrt{x^3 + 3}}$

- f est de la forme $u'u^n$ (avec $n = 2$) :

$$f(x) = 4x(3x^2 - 8)^2 = \frac{2}{3} \underbrace{6x}_{u'} (\underbrace{3x^2 - 8}_u)^2$$

Donc une primitive est

$$F(x) = \frac{2}{3} \frac{u^3}{3} + k = \frac{2}{9} (3x^2 - 8)^3 + k.$$

- g est de la forme $\frac{u'}{\sqrt{u}}$:

$$g(x) = \frac{3x^2}{\sqrt{x^3 + 3}} = \frac{\overbrace{3x^2}^{u'}}{\underbrace{\sqrt{x^3 + 3}}_{\sqrt{u}}}$$

Donc une primitive est

$$G(x) = 2\sqrt{u} + k = 2\sqrt{x^3 + 3} + k.$$

5. $f(x) = e^x(e^x + 4)^3$ et $g(x) = (2x - 1)^4$

- f est de la forme $u'u^n$ (avec $n = 3$) :

$$f(x) = e^x(e^x + 4)^3 = \underbrace{e^x}_{u'} (\underbrace{e^x + 4}_u)^3$$

Donc une primitive est

$$F(x) = \frac{u^4}{4} + k = \frac{(e^x + 4)^4}{4} + k.$$

- g est de la forme u^n :

$$g(x) = (2x - 1)^4 = \frac{1}{2} \underbrace{2}_{u'} (\underbrace{2x - 1}_u)^4$$

Donc une primitive est

$$G(x) = \frac{1}{2} \frac{u^5}{5} + k = \frac{(2x - 1)^5}{10} + k.$$

6. $f(x) = \sin(3x) - \cos(2x)$; $g(x) = \sin\left(5x + \frac{\pi}{4}\right)$

- f est de la forme $u' \sin(u) - v' \cos(v)$:

$$f(x) = \frac{1}{3} \times 3 \sin(3x) - \frac{1}{2} \times 2 \cos(2x)$$

Donc une primitive est

$$F(x) = \frac{1}{3} \times -\cos(u) - \frac{1}{2} \times \sin(v)$$

$$F(x) = -\frac{1}{3} \cos(3x) - \frac{1}{2} \sin(2x) + k.$$

- g est de la forme $u' \sin(u)$:

$$g(x) = \sin\left(5x + \frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{5} \underbrace{5}_{u'} \sin\left(\underbrace{5x + \frac{\pi}{4}}_u\right)$$

Donc une primitive est

$$G(x) = -\frac{1}{5} \cos(u) + k = -\frac{1}{5} \cos\left(5x + \frac{\pi}{4}\right) + k.$$

7. $f(x) = \sin(x) \cos(x)$ et $g(x) = \sin(x) \cos^2(x)$

- f est de la forme $u'u$:

$$f(x) = \sin(x) \cos(x) = \underbrace{\cos(x)}_{u'} \underbrace{\sin(x)}_u$$

Donc une primitive est

$$F(x) = \frac{u^2}{2} + k = \frac{\sin^2(x)}{2} + k.$$

- g est de la forme $u'u^n$ (avec $n = 2$) :

$$g(x) = \sin(x) \cos^2(x) = -(\underbrace{-\sin(x)}_{u'}) (\underbrace{\cos(x)}_u)^2$$

Donc une primitive est

$$G(x) = -\frac{u^3}{3} + k = -\frac{\cos^3(x)}{3} + k.$$

8. $f(x) = \cos(x)e^{\sin(x)}$; $g(x) = \sin(x)(1 - \cos(x))^3$

- f est de la forme $u'e^u$:

$$f(x) = \cos(x)e^{\sin(x)} = \underbrace{\cos(x)}_{u'} e^{\underbrace{\sin(x)}_u}$$

Donc une primitive est

$$F(x) = e^u + k = e^{\sin(x)} + k.$$

- g est de la forme $u'u^n$ (avec $n = 3$) :

$$g(x) = \sin(x)(1 - \cos(x))^3 = \underbrace{\sin(x)}_{u'} \left(\underbrace{1 - \cos(x)}_u \right)^3$$

Donc une primitive est

$$G(x) = \frac{u^4}{4} + k = \frac{(1 - \cos(x))^4}{4} + k.$$

$$9. f(x) = \frac{4x+2}{x^2+x+1} \quad \text{et} \quad g(x) = \frac{x-1}{(x^2-2x+4)^2}$$

- f est de la forme $\frac{u'}{u}$:

$$f(x) = \frac{4x+2}{x^2+x+1} = 2 \frac{\underbrace{2x+1}_{u'}}{\underbrace{x^2+x+1}_u}$$

Donc une primitive est

$$F(x) = 2 \ln |u| + k = 2 \ln(x^2 + x + 1) + k.$$

- g est de la forme $\frac{u'}{u^2}$:

$$g(x) = \frac{x-1}{(x^2-2x+4)^2} = \frac{1}{2} \frac{\underbrace{2(x-1)}_{u'}}{\left(\underbrace{x^2-2x+4}_u \right)^2}$$

Donc une primitive est

$$G(x) = \frac{1}{2} \times \frac{-1}{u} + k = -\frac{1}{2(x^2-2x+4)} + k.$$

$$10. f(x) = \frac{1}{e^x} \quad \text{et} \quad g(x) = \frac{3}{e^{-x}(e^x+1)}$$

- f est de la forme $e^u u'$:

$$f(x) = \frac{1}{e^x} = e^{-x} = - \underbrace{(-1)}_{u'} e^{\underbrace{-x}_u}$$

Donc une primitive est

$$F(x) = -e^u + k = -e^{-x} + k.$$

- g se simplifie puis est de la forme $\frac{u'}{u}$:

$$g(x) = \frac{3}{e^{-x}(e^x+1)} = \frac{3e^x}{e^x+1} = 3 \frac{\underbrace{e^x}_{u'}}{\underbrace{e^x+1}_u}$$

Donc une primitive est

$$G(x) = 3 \ln |u| + k = 3 \ln(e^x + 1) + k.$$

Exercice 22



Déterminer une primitive de la fonction f sur l'intervalle indiqué.

$$1. f(x) = \frac{2}{x}(\ln(x) + 2)^2 \quad \text{sur } I =]0; +\infty[$$

- f est de la forme $u'u^n$ (avec $n = 2$) :

$$f(x) = \frac{2}{x}(\ln(x) + 2)^2 = 2 \frac{\underbrace{1}_x}{\underbrace{x}_{u'}} \left(\underbrace{\ln(x) + 2}_u \right)^2$$

Donc une primitive est

$$F(x) = \frac{2}{3}u^3 + k = \frac{2}{3}(\ln(x) + 2)^3 + k.$$

$$2. f(x) = \frac{2}{(3x-1)^2} + \frac{1}{3x-1} \quad \text{sur } I =]\frac{1}{3}; +\infty[$$

- On traite terme à terme :

$$f(x) = \frac{2}{(3x-1)^2} + \frac{1}{3x-1}$$

- $\frac{2}{(3x-1)^2}$ est de la forme $\frac{u'}{u^2}$:

$$\frac{2}{(3x-1)^2} = \frac{2}{3} \frac{\underbrace{3}_{u'}}{\left(\underbrace{3x-1}_u \right)^2}$$

Donc une primitive de ce terme est

$$-\frac{2}{3} \frac{1}{u} + k = -\frac{2}{3(3x-1)} + k.$$

- $\frac{1}{3x-1}$ est de la forme $\frac{u'}{u}$:

$$\frac{1}{3x-1} = \frac{1}{3} \frac{\underbrace{3}_{u'}}{\underbrace{3x-1}_u}$$

Donc une primitive de ce terme est

$$\frac{1}{3} \ln(u) + k = \frac{1}{3} \ln(3x-1) + k.$$

- Ainsi, une primitive de f sur I est

$$F(x) = -\frac{2}{3(3x-1)} + \frac{1}{3} \ln(3x-1) + k.$$

$$3. f(x) = \frac{\ln(x)}{x} \quad \text{sur } I =]0; +\infty[$$

- f est de la forme $u'u$:

$$f(x) = \frac{\ln(x)}{x} = \underbrace{\frac{1}{x}}_{u'} \underbrace{\ln(x)}_u$$

Donc une primitive est

$$F(x) = \frac{u^2}{2} + k = \frac{(\ln(x))^2}{2} + k.$$

4. $f(x) = \frac{1}{x \ln(x)}$ sur $I =]1; +\infty[$

- f est de la forme $\frac{u'}{u}$:

$$f(x) = \frac{1}{x \ln(x)} = \frac{\overbrace{\frac{1}{x}}^{u'}}{\underbrace{\ln(x)}_u}$$

Donc une primitive est

$$F(x) = \ln|u| + k = \ln(\ln(x)) + k$$

(sur $I =]1; +\infty[$, on a $\ln(x) > 0$, donc $\ln(\ln(x))$ est bien défini).

5. $f(x) = \frac{-3 - e^x}{(e^x + 3x)^2}$ sur $I = [0; +\infty[$

- f est de la forme $\frac{u'}{u^2}$:

$$f(x) = \frac{-3 - e^x}{(e^x + 3x)^2} = -\frac{\overbrace{e^x + 3}^{u'}}{\underbrace{(e^x + 3x)^2}_u}$$

Donc une primitive est

$$F(x) = \frac{1}{u} + k = \frac{1}{e^x + 3x} + k.$$

6. $f(x) = \frac{-7}{x(\ln(x) + 3)}$ sur $I =]e^{-3}; +\infty[$

- f est de la forme $\frac{u'}{u}$:

$$f(x) = \frac{-7}{x(\ln(x) + 3)} = -7 \frac{\overbrace{\frac{1}{x}}^{u'}}{\underbrace{\ln(x) + 3}_u}$$

Donc une primitive est

$$F(x) = -7 \ln|u| + k = -7 \ln(\ln(x) + 3) + k.$$

(sur $I =]e^{-3}; +\infty[$, on a $\ln(x) + 3 > 0$, donc $\ln(\ln(x) + 3)$ est défini).

7. $f(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)}$ sur $I =]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}[$

- f est de la forme $\frac{u'}{u}$:

$$f(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)} = -\frac{\overbrace{-\sin(x)}^{u'}}{\underbrace{\cos(x)}_u}$$

Donc une primitive est

$$F(x) = -\ln|u| + k = -\ln(\cos(x)) + k$$

(sur $I =]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}[$, on a $\cos(x) > 0$, donc $-\ln(\cos(x))$ convient).

8. $f(x) = \frac{\cos(x)}{\sqrt{\sin(x)}}$ sur $I =]0; \pi[$

- f est de la forme $\frac{u'}{\sqrt{u}}$:

$$f(x) = \frac{\cos(x)}{\sqrt{\sin(x)}} = \frac{\overbrace{\cos(x)}^{u'}}{\sqrt{\underbrace{\sin(x)}_u}}$$

Donc une primitive est

$$F(x) = 2\sqrt{u} + k = 2\sqrt{\sin(x)} + k.$$

9. $f(x) = \frac{2}{x^2} e^{-\frac{1}{x}}$ sur $I =]0; +\infty[$

- f est de la forme $u'e^u$:

$$f(x) = \frac{2}{x^2} e^{-\frac{1}{x}} = 2 \underbrace{\frac{1}{x^2}}_{u'} e^{\overbrace{-\frac{1}{x}}^u}$$

Or $(-\frac{1}{x})' = \frac{1}{x^2}$, donc une primitive est

$$F(x) = 2e^u + k = 2e^{-\frac{1}{x}} + k.$$

Exercice 23



1. Les solutions de (E) sont les fonctions $f(x) = \frac{x^2}{2} + \cos(x) + C$ avec $C \in \mathbb{R}$.

2. On cherche C tel que $f(0) = 2$:

$$f(0) = 0 + 1 + C = 2 \Rightarrow C = 1.$$

$$\text{Donc } f(x) = \frac{x^2}{2} + \cos(x) + 1.$$

Équation différentielles $y' = ay$

Exercice 24



(a) $y' = 5y$ avec $a = 5$

(b) $y' = -\frac{4}{3}y$ avec $a = -\frac{4}{3}$

(c) $y' = \frac{1}{2}y$ avec $a = \frac{1}{2}$

(d) $y' = \pi y$ avec $a = \pi$

Exercice 25

- $2y' = 5y \Rightarrow y' = \frac{5}{2}y$ avec $a = \frac{5}{2}$.
- Les solutions sont $y(x) = Ce^{\frac{5}{2}x}$ avec $C \in \mathbb{R}$.

Exercice 26

- Les solutions sont $y(x) = Ce^x$ avec $C \in \mathbb{R}$.
- On cherche f telle que $f(0) = 1$:
 $f(0) = Ce^0 = C = 1$.
Donc $f(x) = e^x$, qui est bien la fonction exponentielle.

Exercice 27

- $y(x) = Ce^{-2x}$ avec $C \in \mathbb{R}$
- $y' = \frac{2}{3}y$, donc $y(x) = Ce^{\frac{2}{3}x}$ avec $C \in \mathbb{R}$
- $y' = 0,1y$, donc $y(x) = Ce^{0,1x}$ avec $C \in \mathbb{R}$
- $y' = -\ln(2)y$, donc $y(x) = Ce^{-\ln(2)x} = C \cdot 2^{-x}$ avec $C \in \mathbb{R}$

Exercice 28

- $y(x) = Ce^{5x}$ et $f(0) = C = 2$, donc $f(x) = 2e^{5x}$
- $y' = -6y$, donc $y(x) = Ce^{-6x}$ et $f(1) = Ce^{-6} = 1$, d'où $C = e^6$.
Donc $f(x) = e^{6-6x}$
- $y' = \frac{3}{2}y$, donc $y(x) = Ce^{\frac{3}{2}x}$ et $f(4) = Ce^6 = 2$, d'où $C = 2e^{-6}$.
Donc $f(x) = 2e^{\frac{3}{2}x-6}$
- $y' = \frac{5}{2}y$, donc $y(x) = Ce^{\frac{5}{2}x}$ et $f'(0) = \frac{5}{2}C = 5$, d'où $C = 2$.
Donc $f(x) = 2e^{\frac{5}{2}x}$

Exercice 29

- Les solutions de (E) sont $N(t) = Ce^{at}$ avec $C \in \mathbb{R}$.
- On a $N(0) = C = 10^5$ et $N(60) = 10^5 e^{60a} = 5000$.
Donc $e^{60a} = 0,05$, d'où $60a = \ln(0,05)$ et $a = \frac{\ln(0,05)}{60}$.
Ainsi $N(t) = 10^5 e^{\frac{\ln(0,05)}{60}t}$.

Exercice 30

- Les solutions sont $N(t) = Ce^{-(\ln 100)t}$ avec $C \in \mathbb{R}$.
 $N(0) = C = 1500$, donc $N(t) = 1500e^{-(\ln 100)t} = 1500 \cdot 100^{-t} = \frac{1500}{100^t}$.
- $N(1) = \frac{1500}{100} = 15$ tours par minute.

- On cherche t tel que $N(t) = 1$:

$$\frac{1500}{100^t} = 1 \Rightarrow 100^t = 1500 \Rightarrow t = \frac{\ln(1500)}{\ln(100)} = \frac{\ln(1500)}{2\ln(10)}.$$

Valeur exacte : $t = \frac{\ln(1500)}{2\ln(10)}$ minutes.

Valeur approchée : $t \approx 1,59$ minute ≈ 1 min 35 s.

Exercice 31

- $(E_1) : y(x) = Ce^{2x}$ et $(E_2) : y(x) = Ke^x$ avec $C, K \in \mathbb{R}$.
- $f_1(x) = Ce^{2x}$ et $f_1'(x) = 2Ce^{2x}$.
 $f_1'(0) = 2C = 4 \Rightarrow C = 2$.
Donc $f_1(x) = 2e^{2x}$.
- $f_2(x) = Ke^x$ et $f_2'(x) = Ke^x$.
 $f_2'(0) = K = 1$.
Donc $f_2(x) = e^x$.
- (a) $f(x) = 2e^{2x} - e^x$, donc $f'(x) = 4e^{2x} - e^x$.
Étude du signe de $f'(x) : f'(x) = e^x(4e^x - 1)$.
 $f'(x) = 0 \Leftrightarrow e^x = \frac{1}{4} \Leftrightarrow x = -\ln(4)$.
 $f'(x) > 0$ pour $x > -\ln(4)$ et $f'(x) < 0$ pour $x < -\ln(4)$.
Donc f est décroissante sur $] -\infty; -\ln(4)[$ et croissante sur $[-\ln(4); +\infty[$.
- (b) $f(x) = 0 \Leftrightarrow 2e^{2x} = e^x \Leftrightarrow 2e^x = 1 \Leftrightarrow e^x = \frac{1}{2} \Leftrightarrow x = -\ln(2)$.

Exercice 32

Soit $M(x; y)$ un point de la courbe. Le coefficient directeur de la tangente en M est $y'(x)$.
On a donc l'équation différentielle $y' = 3y$.
Les solutions sont $y(x) = Ce^{3x}$ avec $C \in \mathbb{R}$.
La courbe passe par $A(-1; 2)$, donc $2 = Ce^{-3}$, d'où $C = 2e^3$.
L'équation de la courbe est $y = 2e^{3x+3} = 2e^3 e^{3x}$.

Équation différentielles $y' = ay + b$

Exercice 33

- La solution constante vérifie $y' = 0$, donc $0 = 10y + 20$, d'où $y = -2$.
- L'équation homogène $y' = 10y$ a pour solutions Ce^{10x} .
Les solutions de (E) sont donc de la forme $y(x) = Ce^{10x} - 2$ avec $C \in \mathbb{R}$.
Vérification : $y'(x) = 10Ce^{10x}$ et $10y(x) + 20 = 10Ce^{10x} - 20 + 20 = 10Ce^{10x}$.

Exercice 34

- Les solutions de $y' = -y$ sont $y(x) = Ce^{-x}$ avec $C \in \mathbb{R}$.

2. La solution constante de (E) est $y = 1$.

Les solutions de (E) sont donc $f(x) = Ce^{-x} + 1$ avec $C \in \mathbb{R}$.

Vérification : $f'(x) = -Ce^{-x}$ et $-f(x) + 1 = -Ce^{-x} - 1 + 1 = -Ce^{-x}$.

Exercice 35



1. La solution constante vérifie $0 = -2y + 3$, donc $y = \frac{3}{2}$.

2. Les solutions de $y' = -2y$ sont Ce^{-2x} .

Les solutions de (E) sont $y(x) = Ce^{-2x} + \frac{3}{2}$ avec $C \in \mathbb{R}$.

Exercice 36



L'équation s'écrit $y' = -3y + \frac{1}{2}$.

La solution constante est $y = \frac{1}{6}$.

Les solutions générales sont $f(x) = Ce^{-3x} + \frac{1}{6}$ avec $C \in \mathbb{R}$.

La courbe passe par $A(2; 0)$, donc $0 = Ce^{-6} + \frac{1}{6}$,

d'où $C = -\frac{e^6}{6}$.

Ainsi $f(x) = -\frac{e^6}{6}e^{-3x} + \frac{1}{6} = \frac{1}{6}(1 - e^{6-3x})$.

Exercice 37



1. L'équation différentielle est $y' = -0,0002y + 0,02$.

La solution constante est $y = \frac{0,02}{0,0002} = 100$.

Les solutions sont $g(t) = Ce^{-0,0002t} + 100$ avec $C \in \mathbb{R}$.

$g(0) = C + 100 = 20$, donc $C = -80$.

Ainsi $g(t) = 100 - 80e^{-0,0002t}$.

2. Au bout d'une heure ($t = 3600$ s) :

$g(3600) = 100 - 80e^{-0,72} \approx 100 - 80 \times 0,4868 \approx 61,06^\circ\text{C}$.

3. On cherche t tel que $g(t) > 85$:

$$100 - 80e^{-0,0002t} > 85$$

$$\Leftrightarrow -80e^{-0,0002t} > -15$$

$$\Leftrightarrow e^{-0,0002t} < \frac{3}{16}$$

$$\Leftrightarrow -0,0002t < \ln\left(\frac{3}{16}\right)$$

$$\Leftrightarrow t > \frac{\ln(15/80)}{-0,0002}$$

$$\Leftrightarrow t > 5000 \ln\left(\frac{16}{3}\right) \approx 8370 \text{ secondes.}$$

Soit 2 heures 19 minutes et 30 secondes.

Équation différentielles $y' = ay + f$

Exercice 38



1. Les solutions de $y' = -2y$ sont $y(x) = Ce^{-2x}$ avec $C \in \mathbb{R}$.

2. On vérifie : $g'(x) = -0,4 \sin(x) + 0,2 \cos(x)$.

Ainsi, on a : $g'(x) + 2g(x) = -0,4 \sin(x) + 0,2 \cos(x) + 2 \times (0,4 \cos(x) + 0,2 \sin(x)) = -0,4 \sin(x) + 0,2 \cos(x) + 0,8 \cos(x) + 0,4 \sin(x) = \cos(x)$

Donc g est solution de (E).

3. Les solutions de (E) sont $y(x) = Ce^{-2x} + 0,4 \cos(x) + 0,2 \sin(x)$ avec $C \in \mathbb{R}$.

Exercice 39



1. On vérifie : $u'(x) = e^{-x} - xe^{-x} = (1-x)e^{-x}$.

$$-u(x) + e^{-x} = -xe^{-x} + e^{-x} = (1-x)e^{-x} = u'(x).$$

Donc u est solution de (E).

2. Les solutions de $y' = -y$ sont Ce^{-x} .

Les solutions de (E) sont $y(x) = Ce^{-x} + xe^{-x} = (C+x)e^{-x}$ avec $C \in \mathbb{R}$.

Exercice 40



1. g est solution de (E) si $g'(x) + 2g(x) = x$.

$$g'(x) = a \text{ et } g'(x) + 2g(x) = a + 2ax + 2b = x.$$

Par identification : $2a = 1$ et $a + 2b = 0$, d'où $a = \frac{1}{2}$ et $b = -\frac{1}{4}$.

2. Les solutions de (E) sont $y(x) = Ce^{-2x} + \frac{x}{2} - \frac{1}{4}$ avec $C \in \mathbb{R}$.

Exercice 41



1. u est solution si $u'(x) - 2u(x) = xe^x$.

$$u'(x) = ae^x + (ax+b)e^x = (ax+a+b)e^x.$$

$$u'(x) - 2u(x) = (ax+a+b)e^x - 2(ax+b)e^x = (-ax+a-b)e^x = xe^x.$$

Par identification : $-a = 1$ et $a - b = 0$, d'où $a = -1$ et $b = -1$.

2. Les solutions de (E) sont $y(x) = Ce^{2x} + (-x-1)e^x$ avec $C \in \mathbb{R}$.

3. $y(0) = C - 1 = 0$, donc $C = 1$.

La solution est $y(x) = e^{2x} - (x+1)e^x$.

Exercice 42



1. u est solution si $u'(x) - 2u(x) = 4x^2 - 4x$.

$$u'(x) = 2ax + b \text{ et } u'(x) - 2u(x) = 2ax + b - 2ax^2 - 2bx - 2c = -2ax^2 + (2a - 2b)x + (b - 2c).$$

Par identification : $-2a = 4$, $2a - 2b = -4$ et $b - 2c = 0$.

D'où $a = -2$, $b = 0$ et $c = 0$.

Donc $u(x) = -2x^2$.

2. Les solutions sont $y(x) = Ce^{2x} - 2x^2$ avec $C \in \mathbb{R}$.

3. $f'(x) = 2Ce^{2x} - 4x$ et $f'(1) = 2Ce^2 - 4 = 2$.

Donc $2Ce^2 = 6$, d'où $C = 3e^{-2}$.

La solution est $f(x) = 3e^{2x-2} - 2x^2$.

Synthèse

Exercice 43



1. Soit $g(x) = h(x)e^{-x}$.

$$\textcircled{a} \quad g'(x) = h'(x)e^{-x} - h(x)e^{-x} = (h'(x) - h(x))e^{-x}.$$

$$g \text{ est solution de } (E_n) \text{ si } g'(x) + g(x) = \frac{x^n}{n!}e^{-x}.$$
$$(h'(x) - h(x))e^{-x} + h(x)e^{-x} = h'(x)e^{-x} = \frac{x^n}{n!}e^{-x}.$$

$$\text{Donc } g \text{ est solution si et seulement si } h'(x) = \frac{x^n}{n!}.$$

$$\textcircled{b} \quad \text{Une primitive de } \frac{x^n}{n!} \text{ est } h(x) = \frac{x^{n+1}}{(n+1)!}.$$

Une solution particulière de (E_n) est donc

$$g(x) = \frac{x^{n+1}}{(n+1)!}e^{-x}.$$

2. \textcircled{a} Les solutions de $y' = -y$ sont Ce^{-x} .

$$\text{Les solutions de } (E_n) \text{ sont } y(x) = Ce^{-x} + \frac{x^{n+1}}{(n+1)!}e^{-x} \text{ avec } C \in \mathbb{R}.$$

$$\textcircled{b} \quad f(0) = C = 0, \text{ donc } f(x) = \frac{x^{n+1}}{(n+1)!}e^{-x}.$$

3. **Initialisation** : Pour $n = 1$, f_1 est solution de $y' + y = f_0 = e^{-x}$ avec $f_1(0) = 0$.

$$\text{D'après la question 2.b, } f_1(x) = \frac{x^1}{1!}e^{-x} = xe^{-x}.$$

La propriété est vraie au rang 1.

Hérédité : Supposons que $f_n(x) = \frac{x^n}{n!}e^{-x}$ pour un certain $n \geq 1$.

$$f_{n+1} \text{ est solution de } y' + y = f_n = \frac{x^n}{n!}e^{-x} \text{ avec } f_{n+1}(0) = 0.$$

C'est l'équation (E_n) , donc d'après la question 2.b :

$$f_{n+1}(x) = \frac{x^{n+1}}{(n+1)!}e^{-x}.$$

La propriété est vraie au rang $n+1$.

Conclusion : Par récurrence, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,
 $f_n(x) = \frac{x^n}{n!}e^{-x}.$