

Majorants et minorants

Exercice 1



Conjecturer les éventuelles majorations ou minorations des suites représentées ci-dessous :

1. $u_n = (n-3)^2 - 2$

D'après le graphique, la suite admet un minimum en $n = 3$.

Conjecture : La suite (u_n) est minorée et n'est pas majorée.

2. $u_n = (n+1)^2$

D'après le graphique, la suite est strictement croissante à partir de $n = 0$ et $u_0 = 1$.

Conjecture : La suite (u_n) est minorée par 1 et n'est pas majorée.

3. $u_n = \sin(n)$

D'après le graphique, les valeurs oscillent entre -1 et 1 .

Conjecture : La suite (u_n) est bornée par -1 et 1 .

4. $u_n = 1 + \frac{1}{n}$

D'après le graphique, la suite est décroissante et semble tendre vers 1.

Conjecture : La suite (u_n) est minorée par 1 et majorée par $u_1 = 2$.

5. $u_n = \ln\left(\frac{n}{10}\right)$

D'après le graphique, la suite est croissante et tend vers $+\infty$.

Conjecture : La suite (u_n) est minorée par $u_1 \approx -2,3$ et n'est pas majorée.

Exercice 2



1. (a) $u_n = 2 - \frac{1}{n}$ pour $n \geq 1$

On a $\frac{1}{n} > 0$, donc $u_n = 2 - \frac{1}{n} < 2$.

De plus, $\frac{1}{n} \leq 1$, donc $u_n = 2 - \frac{1}{n} \geq 2 - 1 = 1 \geq 0$.

(b) $v_n = 1 + \sin(n)$

Comme $-1 \leq \sin(n) \leq 1$, on a :

$$0 = 1 + (-1) \leq 1 + \sin(n) \leq 1 + 1 = 2$$

Donc $0 \leq v_n \leq 2$, la suite est bien bornée par 0 et 2.

2. Étudions la fonction $f(x) = x^2 - 2x + 6$. On a $f'(x) = 2x - 2$, donc $f'(x) = 0$ pour $x = 1$.

Le minimum de f est atteint en $x = 1$ avec $f(1) = 1 - 2 + 6 = 5$.

Donc $w_n \geq 5$ pour tout $n \geq 1$. Un minorant est 5.

3. Montrons que $x_n \geq -1$ pour tout $n \geq 1$.

Méthode 1

$$\frac{n-2}{n+6} \geq -1 \Leftrightarrow n-2 \geq -(n+6) \Leftrightarrow n-2 \geq -n-6$$

$$\Leftrightarrow 2n \geq -4 \Leftrightarrow n \geq -2$$

Comme $n \geq 1 > -2$, on a bien $x_n \geq -1$.

Méthode 2

On a $x_n \geq -1 \Leftrightarrow x_n + 1 \geq 0$. Or :

$$\begin{aligned} x_n + 1 &= \frac{-n+4}{n+1} + 1 \\ &= \frac{-n+4+n+1}{n+1} \\ &= \frac{5}{n+1} \end{aligned}$$

$$\text{Or } \frac{5}{n+1} \geq 0.$$

Exercice 3



1. Comme $n \geq 0$ et $\left(\frac{1}{3}\right)^n > 0$, on a $2n \left(\frac{1}{3}\right)^n \geq 0$.

$$\text{Donc } u_n = 5 + 2n \left(\frac{1}{3}\right)^n \geq 5.$$

Un minorant est 5.

2. Étudions la fonction $f(x) = -2x^2 + 8x + 3$. On a $f'(x) = -4x + 8$, donc $f'(x) = 0$ pour $x = 2$.

Le maximum de f est atteint en $x = 2$ avec $f(2) = -8 + 16 + 3 = 11$.

Donc $s_n \leq 11$ pour tout n . Un majorant est 11.

3. Montrons que $v_n \leq 3$ pour tout $n \geq 1$.

Méthode 1

$$\frac{6n+2}{2n+1} \leq 3 \Leftrightarrow 6n+2 \leq 3(2n+1) \Leftrightarrow 6n+2 \leq 6n+3$$

$$\Leftrightarrow 2 \leq 3$$

Cette inégalité est toujours vraie, donc $v_n \leq 3$.

Méthode 2 On étudie le signe de $v_n - 3$.

Exercice 4



Vrai ou Faux ? Justifier les réponses fausses par un contre-exemple.

1. Une suite négative est majorée par 0.

Vrai. Si $u_n < 0$ pour tout n , alors $u_n < 0$, donc 0 est un majorant.

2. Si une suite est majorée ou minorée, alors elle est bornée.

Faux. Contre-exemple : $u_n = n$ est minorée par 0 mais pas majorée, donc pas bornée.

3. Une suite décroissante est minorée par son premier terme.

Faux. Contre-exemple : $u_n = -n$ est décroissante mais $u_n < u_0 = 0$ pour $n \geq 1$, donc pas minorée par u_0 .

4. Si une suite est bornée, alors elle est minorée.
Vrai. Par définition, une suite bornée est à la fois majorée et minorée.
5. Une suite positive est minorée par 0.
Vrai. Si $u_n \geq 0$ pour tout n , alors 0 est un minorant.
6. Une suite croissante est minorée par son premier terme.
Vrai. Si (u_n) est croissante, alors $u_n \geq u_0$ pour tout n , donc u_0 est un minorant.

Raisonnement par récurrence

Exercice 5



Soit (u_n) la suite définie sur \mathbb{N} par $u_0 = 2$ et $u_{n+1} = 2u_n - 3$.

On va démontrer par récurrence que pour tout entier naturel n , $u_n = 3 - 2^n$.

Compléter :

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, appelons $P(n)$ la propriété :
 « $u_n = 3 - 2^n$ ».

Initialisation : pour $n = 0$

On a $u_0 = 2$ et $3 - 2^0 = 3 - 1 = 2$.

Donc $P(0)$ est vraie, la propriété est initialisée.

Hérédité : Soit $k \in \mathbb{N}$ fixé tel que $P(k)$ soit vraie, c'est-à-dire : $u_k = 3 - 2^k$

Montrons que $P(k+1)$ est vraie aussi (ie. $u_{k+1} = 3 - 2^{k+1}$).

$$\begin{aligned} u_{k+1} &= 2u_k - 3 \text{ (par définition de } u_n) \\ &= 2(3 - 2^k) - 3 \text{ (par HR)} \\ &= 6 - 2^{k+1} - 3 \\ &= 3 - 2^{k+1} \end{aligned}$$

Donc $P(k+1)$ est vraie, la propriété est héréditaire.

Conclusion : Par principe de récurrence, $P(n)$ est donc vraie pour tout entier naturel n .

Exercice 6



Appelons, pour tout entier n , $P(n)$ la propriété :
 « $u_n > 0$ ».

Initialisation : pour $n = 0$.

On a $u_0 = 5 > 0$.

Donc $P(0)$ est vraie, la propriété est initialisée.

Hérédité : Soit $k \in \mathbb{N}$ fixé tel que $P(k)$ soit vraie. Autrement dit, on a :

$$u_k > 0 \quad (\text{Hypothèse de Récurrence (HR)})$$

Montrons que $P(k+1)$ est vraie aussi (ie. $u_{k+1} > 0$).

$$\begin{aligned} u_k &> 0 \quad (\text{par HR}) \\ 3u_k &> 0 \\ 3u_k + 6 &> 6 > 0 \\ u_{k+1} &> 0 \end{aligned}$$

Donc $P(k+1)$ est vraie, la propriété est héréditaire.

Conclusion : Par principe de récurrence, la propriété $P(n)$ est donc vraie pour tout entier n .

Exercice 7



Soit (v_n) la suite définie par $v_0 = 1$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_{n+1} = \frac{v_n}{v_n + 1}$.

(a) On a :

$$\begin{aligned} v_0 &= 1 \\ v_1 &= \frac{v_0}{v_0 + 1} = \frac{1}{1+1} = \frac{1}{2} \\ v_2 &= \frac{v_1}{v_1 + 1} = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{2} + 1} = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{3}{2}} = \frac{1}{3} \\ v_3 &= \frac{v_2}{v_2 + 1} = \frac{\frac{1}{3}}{\frac{1}{3} + 1} = \frac{\frac{1}{3}}{\frac{4}{3}} = \frac{1}{4} \end{aligned}$$

Conjecture : $v_n = \frac{1}{n+1}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

(b) Appelons, pour tout entier n , $P(n)$ la propriété : « $v_n = \frac{1}{n+1}$ ».

Initialisation : pour $n = 0$.

On a $v_0 = 1$ et $\frac{1}{0+1} = 1$.

Donc $P(0)$ est vraie, la propriété est initialisée.

Hérédité : Soit $k \in \mathbb{N}$ fixé tel que $P(k)$ soit vraie. Autrement dit, on a :

$$v_k = \frac{1}{k+1} \quad (\text{Hypothèse de Récurrence (HR)})$$

Montrons que $P(k+1)$ est vraie aussi (ie. $v_{k+1} = \frac{1}{k+2}$).

$$\begin{aligned} v_{k+1} &= \frac{v_k}{v_k + 1} \text{ (par définition)} \\ &= \frac{\frac{1}{k+1}}{\frac{1}{k+1} + 1} \text{ (par HR)} \\ &= \frac{\frac{1}{k+1}}{\frac{1+k+1}{k+1}} \\ &= \frac{\frac{1}{k+1}}{\frac{k+2}{k+1}} \\ &= \frac{1}{k+2} \end{aligned}$$

Donc $P(k+1)$ est vraie, la propriété est héréditaire.

Conclusion : Par principe de récurrence, la propriété $P(n)$ est donc vraie pour tout entier n .

Exercice 8



Soit la suite (u_n) définie pour tout entier naturel n par : $u_0 = 2$ et $u_{n+1} = 5 - \frac{4}{u_n}$

(a) On a :

$$u_1 = 5 - \frac{4}{u_0} = 5 - \frac{4}{2} = 5 - 2 = 3$$

$$u_2 = 5 - \frac{4}{u_1} = 5 - \frac{4}{3} = \frac{15-4}{3} = \frac{11}{3}$$

(b) Appelons, pour tout entier n , $P(n)$ la propriété : « $1 \leq u_n \leq 4$ ».

Initialisation : pour $n = 0$.

On a $u_0 = 2$ et $1 \leq 2 \leq 4$.

Donc $P(0)$ est vraie, la propriété est initialisée.

Hérédité : Soit $k \in \mathbb{N}$ fixé tel que $P(k)$ soit vraie. Autrement dit, on a :

$$1 \leq u_k \leq 4 \quad (\text{Hypothèse de Récurrence (HR)})$$

Montrons que $P(k+1)$ est vraie aussi (ie. $1 \leq u_{k+1} \leq 4$).

Comme $1 \leq u_k \leq 4$, on a $\frac{1}{4} \leq \frac{1}{u_k} \leq 1$, donc $1 \leq \frac{4}{u_k} \leq 4$.

Par suite : $5 - 4 \leq 5 - \frac{4}{u_k} \leq 5 - 1$, soit $1 \leq u_{k+1} \leq 4$.

Donc $P(k+1)$ est vraie, la propriété est héréditaire.

Conclusion : Par principe de récurrence, la propriété $P(n)$ est donc vraie pour tout entier n .

(c) Appelons, pour tout entier n , $P(n)$ la propriété : « $u_{n+1} \geq u_n$ ».

Initialisation : pour $n = 0$.

On a $u_0 = 2$ et $u_1 = 3$.

Comme $3 \geq 2$, on a bien $u_1 \geq u_0$.

Donc $P(0)$ est vraie, la propriété est initialisée.

Hérédité : Soit $k \in \mathbb{N}$ fixé tel que $P(k)$ soit vraie. Autrement dit, on a :

$$u_{k+1} \geq u_k \quad (\text{Hypothèse de Récurrence (HR)})$$

Montrons que $P(k+1)$ est vraie aussi (ie. $u_{k+2} \geq u_{k+1}$).

$$\text{On a } u_{k+2} - u_{k+1} = \left(5 - \frac{4}{u_{k+1}}\right) - \left(5 - \frac{4}{u_k}\right) = \frac{4}{u_k} - \frac{4}{u_{k+1}}.$$

Comme $u_{k+1} \geq u_k > 0$ (par question b)), on a $\frac{1}{u_{k+1}} \leq \frac{1}{u_k}$, donc $\frac{4}{u_{k+1}} \leq \frac{4}{u_k}$.

Ainsi $u_{k+2} - u_{k+1} = \frac{4}{u_k} - \frac{4}{u_{k+1}} \geq 0$, soit $u_{k+2} \geq u_{k+1}$.

Donc $P(k+1)$ est vraie, la propriété est héréditaire.

Conclusion : Par principe de récurrence, la propriété $P(n)$ est donc vraie pour tout entier n .

Exercice 9



Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = 9$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \sqrt{u_n}$.

(a) La fonction $f(x) = \sqrt{x}$ est strictement croissante sur $[0, +\infty[$.

(b) Appelons, pour tout entier n , $P(n)$ la propriété : « $0 \leq u_n \leq 9$ ».

Initialisation : pour $n = 0$.

On a $u_0 = 9$ et $0 \leq 9 \leq 9$.

Donc $P(0)$ est vraie, la propriété est initialisée.

Hérédité : Soit $k \in \mathbb{N}$ fixé tel que $P(k)$ soit vraie. Autrement dit, on a :

$$0 \leq u_k \leq 9 \quad (\text{Hypothèse de Récurrence (HR)})$$

Montrons que $P(k+1)$ est vraie aussi (ie. $0 \leq u_{k+1} \leq 9$).

Comme la fonction racine carrée est croissante sur $[0, +\infty[$ et $0 \leq u_k \leq 9$, on a :

$$\sqrt{0} \leq \sqrt{u_k} \leq \sqrt{9}$$

$$0 \leq u_{k+1} \leq 3 \leq 9$$

Donc $P(k+1)$ est vraie, la propriété est héréditaire.

Conclusion : Par principe de récurrence, la propriété $P(n)$ est donc vraie pour tout entier n .

(c) Appelons, pour tout entier n , $P(n)$ la propriété : « $u_{n+1} < u_n$ ».

Initialisation : pour $n = 0$.

On a $u_0 = 9$ et $u_1 = \sqrt{9} = 3$.

Comme $3 < 9$, on a bien $u_1 < u_0$.

Donc $P(0)$ est vraie, la propriété est initialisée.

Hérédité : Soit $k \in \mathbb{N}$ fixé tel que $P(k)$ soit vraie. Autrement dit, on a :

$$u_{k+1} < u_k \quad (\text{Hypothèse de Récurrence (HR)})$$

Montrons que $P(k+1)$ est vraie aussi (ie. $u_{k+2} < u_{k+1}$).

Comme la fonction racine carrée est croissante sur $[0, +\infty[$ et $u_{k+1} < u_k$, on a :

$$\sqrt{u_{k+1}} < \sqrt{u_k}$$

$$u_{k+2} < u_{k+1}$$

Donc $P(k+1)$ est vraie, la propriété est héréditaire.

Conclusion : Par principe de récurrence, la propriété $P(n)$ est donc vraie pour tout entier n .

Exercice 10



Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = 10$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \sqrt{u_n + 5}$.

- (a) Appelons, pour tout entier n , $P(n)$ la propriété : « $2,5 \leq u_{n+1} \leq 10$ ».

Initialisation : pour $n = 0$.

On a $u_1 = \sqrt{u_0 + 5} = \sqrt{10 + 5} = \sqrt{15} \approx 3,87$.

Comme $2,5 \leq 3,87 \leq 10$, on a bien $2,5 \leq u_1 \leq 10$.

Donc $P(0)$ est vraie, la propriété est initialisée.

Hérédité : Soit $k \in \mathbb{N}$ fixé tel que $P(k)$ soit vraie. Autrement dit, on a :

$$2,5 \leq u_{k+1} \leq 10 \quad (\text{HR})$$

Montrons que $P(k+1)$ est vraie aussi (ie. $2,5 \leq u_{k+2} \leq 10$).

Par HR, on a $2,5 \leq u_{k+1} \leq 10$, donc $7,5 \leq u_{k+1} + 5 \leq 15$.

Comme la fonction racine carrée est croissante, on a :

$$\sqrt{7,5} \leq \sqrt{u_{k+1} + 5} \leq \sqrt{15}$$

Or $\sqrt{7,5} \approx 2,74 > 2,5$ et $\sqrt{15} \approx 3,87 < 10$.

Donc $2,5 \leq u_{k+2} \leq 10$.

Donc $P(k+1)$ est vraie, la propriété est héréditaire.

Conclusion : Par principe de récurrence, la propriété $P(n)$ est donc vraie pour tout entier n .

- (b) On peut conclure que la suite (u_n) est bornée.

Exercice 11



Soit (r_n) la suite définie par $r_0 = 6$ et, pour tout entier n , $r_{n+1} = \sqrt{r_n + 4}$.

- (a) Appelons, pour tout entier n , $P(n)$ la propriété : « $2 \leq r_n \leq 6$ ».

Initialisation : pour $n = 0$.

On a $r_0 = 6$ et $2 \leq 6 \leq 6$.

Donc $P(0)$ est vraie, la propriété est initialisée.

Hérédité : Soit $k \in \mathbb{N}$ fixé tel que $P(k)$ soit vraie. Autrement dit, on a : $2 \leq r_k \leq 6$ (HR)
Montrons que $P(k+1)$ est vraie aussi (ie. $2 \leq r_{k+1} \leq 6$).

Par HR, on a $2 \leq r_k \leq 6$, donc $6 \leq r_k + 4 \leq 10$.
Comme la fonction racine carrée est croissante, on a : $\sqrt{6} \leq \sqrt{r_k + 4} \leq \sqrt{10}$

Or $\sqrt{6} \approx 2,45 > 2$ et $\sqrt{10} \approx 3,16 < 6$.

Donc $2 \leq r_{k+1} \leq 6$.

Donc $P(k+1)$ est vraie, la propriété est héréditaire.

Conclusion : Par principe de récurrence, la propriété $P(n)$ est donc vraie pour tout entier n .

- (b) On peut en déduire que la suite (r_n) est bornée.

Exercice 12



Appelons, pour tout entier $n \geq 6$, $P(n)$ la propriété : « $2^n \geq (n+2)^2$ ».

Initialisation : pour $n = 6$.

On a $2^6 = 64$ et $(6+2)^2 = 8^2 = 64$.

Comme $64 \geq 64$, on a bien $2^6 \geq (6+2)^2$.

Donc $P(6)$ est vraie, la propriété est initialisée.

Hérédité : Soit $k \geq 6$ fixé tel que $P(k)$ soit vraie. Autrement dit, on a : $2^k \geq (k+2)^2$ (HR)
Montrons que $P(k+1)$ est vraie aussi (ie. $2^{k+1} \geq (k+3)^2$).

$$\begin{aligned} 2^{k+1} &= 2 \cdot 2^k \\ &\geq 2(k+2)^2 \quad (\text{par HR}) \\ &\geq 2(k^2 + 4k + 4) \\ &\geq 2k^2 + 8k + 8 \end{aligned}$$

Il nous faut montrer que $2k^2 + 8k + 8 \geq (k+3)^2 = k^2 + 6k + 9$.

Ceci équivaut à : $2k^2 + 8k + 8 \geq k^2 + 6k + 9$, soit $k^2 + 2k - 1 \geq 0$.

Résolvons $k^2 + 2k - 1 = 0$: $\Delta = 4 + 4 = 8$, donc $k = \frac{-2 \pm 2\sqrt{2}}{2} = -1 \pm \sqrt{2}$.

Comme $k^2 + 2k - 1 \geq 0$ pour $k \geq -1 + \sqrt{2} \approx 0,41$ et que $k \geq 6 > 0,41$, l'inégalité est vérifiée.

Donc $P(k+1)$ est vraie, la propriété est héréditaire.

Conclusion : Par principe de récurrence, la propriété $P(n)$ est donc vraie pour tout entier $n \geq 6$.

Exercice 13



- (a) Appelons, pour tout entier $n \geq 1$, $P(n)$ la propriété : « $2^n \geq n$ ».

Initialisation : pour $n = 1$.

On a $2^1 = 2 \geq 1$.

Donc $P(1)$ est vraie, la propriété est initialisée.

Hérédité : Soit $k \geq 1$ fixé tel que $P(k)$ soit vraie. Autrement dit, on a : $2^k \geq k$ (HR)

Montrons que $P(k+1)$ est vraie aussi (ie. $2^{k+1} \geq k+1$).

$$\begin{aligned} 2^{k+1} &= 2 \cdot 2^k \\ &\geq 2k \text{ (par HR)} \\ &\geq k+1 \text{ (car } 2k \geq k+1 \Leftrightarrow k \geq 1) \end{aligned}$$

Donc $P(k+1)$ est vraie, la propriété est héréditaire.

Conclusion : Par principe de récurrence, la propriété $P(n)$ est donc vraie pour tout entier $n \geq 1$.

- (b) Pour $n = 0$, on a $2^0 = 1$ et $0 \leq 1$, donc l'inégalité est encore vraie.

- (c) On peut étendre à : $\forall n \in \mathbb{N}, 2^n \geq n$.

Exercice 14



Soit la suite (u_n) définie pour tout entier n par : $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = \frac{1}{3}u_n + n - 2$.

- (a) On a :

$$\begin{aligned} u_1 &= \frac{1}{3}u_0 + 0 - 2 = \frac{1}{3} \cdot 1 - 2 = \frac{1}{3} - 2 = -\frac{5}{3} \\ u_2 &= \frac{1}{3}u_1 + 1 - 2 = \frac{1}{3} \cdot \left(-\frac{5}{3}\right) - 1 = -\frac{5}{9} - 1 = -\frac{14}{9} \\ u_3 &= \frac{1}{3}u_2 + 2 - 2 = \frac{1}{3} \cdot \left(-\frac{14}{9}\right) + 0 = -\frac{14}{27} \end{aligned}$$

- (b) Appelons, pour tout entier $n \geq 4$, $P(n)$ la propriété : « $u_n \geq 0$ ».

Initialisation : pour $n = 4$.

On a $u_4 = \frac{1}{3}u_3 + 3 - 2 = \frac{1}{3} \cdot \left(-\frac{14}{27}\right) + 1 = -\frac{14}{81} + 1 = \frac{67}{81} > 0$.

Donc $P(4)$ est vraie, la propriété est initialisée.

Hérédité : Soit $k \geq 4$ fixé tel que $P(k)$ soit vraie. Autrement dit, on a : $u_k \geq 0$ (HR)

Montrons que $P(k+1)$ est vraie aussi (ie. $u_{k+1} \geq 0$).

$$\begin{aligned} u_{k+1} &= \frac{1}{3}u_k + k - 2 \\ &\geq \frac{1}{3} \cdot 0 + k - 2 \text{ (par HR)} \\ &= k - 2 \\ &\geq 4 - 2 = 2 > 0 \text{ (car } k \geq 4) \end{aligned}$$

Donc $P(k+1)$ est vraie, la propriété est héréditaire.

Conclusion : Par principe de récurrence, la propriété $P(n)$ est donc vraie pour tout entier $n \geq 4$.

Exercice 15



Appelons, pour tout entier $n \geq 1$, $P(n)$ la propriété : « $x^n - 1 = (x-1)(1+x+x^2+\dots+x^{n-1})$ ».

Initialisation : pour $n = 1$.

On a $x^1 - 1 = x - 1$ et $(x-1)(1) = x - 1$.

Donc $P(1)$ est vraie, la propriété est initialisée.

Hérédité : Soit $k \geq 1$ fixé tel que $P(k)$ soit vraie. Autrement dit, on a : $x^k - 1 = (x-1)(1+x+x^2+\dots+x^{k-1})$ (HR)

Montrons que $P(k+1)$ est vraie aussi.

$$\begin{aligned} x^{k+1} - 1 &= x^{k+1} - x^k + x^k - 1 \text{ (indication)} \\ &= x^k(x-1) + x^k - 1 \\ &= x^k(x-1) + (x-1)(1+x+x^2+\dots+x^{k-1}) \\ &= (x-1)[x^k + 1 + x + x^2 + \dots + x^{k-1}] \\ &= (x-1)(1+x+x^2+\dots+x^{k-1}+x^k) \end{aligned}$$

Donc $P(k+1)$ est vraie, la propriété est héréditaire.

Conclusion : Par principe de récurrence, la propriété $P(n)$ est donc vraie pour tout entier $n \geq 1$.

Exercice 16

On pose $\Sigma_n = 1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2$ pour n un entier naturel non nul.

- (a) Calculer Σ_1 , Σ_2 , Σ_3 et Σ_4 .

$$\begin{aligned} \Sigma_1 &= 1^2 = 1 \\ \Sigma_2 &= 1^2 + 2^2 = 1 + 4 = 5 \\ \Sigma_3 &= 1^2 + 2^2 + 3^2 = 1 + 4 + 9 = 14 \\ \Sigma_4 &= 1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 = 1 + 4 + 9 + 16 = 30 \end{aligned}$$

- (b) $\Sigma_{n+1} = 1^2 + 2^2 + \dots + n^2 + (n+1)^2 = \Sigma_n + (n+1)^2$

- (c) Appelons, pour tout entier $n \geq 1$, $P(n)$ la propriété : « $\Sigma_n = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ ».

Initialisation : pour $n = 1$.

On a $\Sigma_1 = 1$ et $\frac{1 \cdot 2 \cdot 3}{6} = 1$.

Donc $P(1)$ est vraie, la propriété est initialisée.

Hérédité : Soit $k \geq 1$ fixé tel que $P(k)$ soit vraie. Autrement dit, on a : $\Sigma_k = \frac{k(k+1)(2k+1)}{6}$ (HR)

Montrons que $P(k+1)$ est vraie aussi.

$$\begin{aligned}\Sigma_{k+1} &= \Sigma_k + (k+1)^2 \text{ (question (b))} \\ &= \frac{k(k+1)(2k+1)}{6} + (k+1)^2 \text{ (par HR)} \\ &= \frac{k(k+1)(2k+1) + 6(k+1)^2}{6} \\ &= \frac{(k+1)[k(2k+1) + 6(k+1)]}{6} \\ &= \frac{(k+1)[2k^2 + k + 6k + 6]}{6} \\ &= \frac{(k+1)(2k^2 + 7k + 6)}{6} \\ &= \frac{(k+1)(k+2)(2k+3)}{6} \\ &= \frac{(k+1)((k+1)+1)(2(k+1)+1)}{6}\end{aligned}$$

Donc $P(k+1)$ est vraie, la propriété est héréditaire.

Conclusion : Par principe de récurrence, la

propriété $P(n)$ est donc vraie pour tout entier $n \geq 1$.

Exercice 17



Appelons, pour tout entier $n \geq 1$, $P(n)$ la propriété : « $n! \geq 2^{n-1}$ ».

Initialisation : pour $n = 1$.

On a $1! = 1$ et $2^{1-1} = 2^0 = 1$.

Comme $1 \geq 1$, on a bien $1! \geq 2^{1-1}$.

Donc $P(1)$ est vraie, la propriété est initialisée.

Hérédité : Soit $k \geq 1$ fixé tel que $P(k)$ soit vraie. Autrement dit, on a : $k! \geq 2^{k-1}$ (HR)

Montrons que $P(k+1)$ est vraie aussi (ie. $(k+1)! \geq 2^k$).

$$\begin{aligned}(k+1)! &= (k+1) \times k! \text{ (par définition)} \\ &\geq (k+1) \times 2^{k-1} \text{ (par HR)} \\ &\geq 2 \times 2^{k-1} \text{ (car } k+1 \geq 2 \text{ pour } k \geq 1) \\ &= 2^k\end{aligned}$$

Donc $P(k+1)$ est vraie, la propriété est héréditaire.

Conclusion : Par principe de récurrence, la propriété $P(n)$ est donc vraie pour tout entier $n \geq 1$.