TD - Convergences de suites

Rappels sur les limites de suites

Exercice 1

Déterminer la limite des suites dont on donne le terme général ci-dessous.

(a) $u_n = \sqrt{n} + n^2$

(b) $u_n = n^2 - n$

(c) $u_n = n^6 - n^4 + n^2$

(d) $u_n = \dfrac{1}{n^2}(2n+4)$

(e) $u_n = \dfrac{2}{n^2-4}$

(f) $u_n = \dfrac{3n^2+4}{2n+2}$

(g) $u_n = \dfrac{n^2-1}{n+1}$

(h) $u_n = \dfrac{n^2+n+1}{n^3}$

Comparaisons et encadrements

Exercice 2

Dans chaque cas, déterminer la limite de la suite (u_n) où, pour tout entier naturel n :

1. $u_n \geq \sqrt{n}$
2. $u_n < -n^3$

Exercice 3

Soit (u_n) la suite définie pour tout entier naturel n par : $u_n = 4n^2 + 1 + (-1)^n$.

1. (a) Que vaut $(-1)^n$ suivant les valeurs de n ?
   (b) Démontrer que pour tout entier naturel n, $u_n \geq 4n^2$.
2. En déduire la limite de la suite (u_n).

Exercice 4

Soit (v_n) la suite définie pour tout entier naturel n par : $v_n = -3n - (-1)^n$

1. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}$, $v_n \leq -3n + 1$.
2. En déduire la limite de la suite (v_n).

Exercice 5

Soit (w_n) la suite définie pour tout entier naturel n par : $w_n = -n^2 + 6\cos(n)$.

1. (a) Donner un encadrement de $\cos(n)$.
   (b) En déduire que, pour tout entier n, $w_n \leq -n^2 + 6$.
2. En déduire la limite de la suite (w_n).

Exercice 6

Indiquer si l'affirmation est vraie ou fausse, puis justifier.

« Si (u_n), (v_n) et (w_n) sont trois suites telles qu'à partir d'un certain rang $u_n \leq v_n \leq w_n$ et telles que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \lim\limits_{n\to+\infty} w_n = 2$, alors v_n converge vers 2. »

Exercice 7

1. Soit (u_n) une suite qui vérifie $u_n \geq 3n^2 - 1$ pour tout entier naturel n. Déterminer la limite de la suite (u_n).
2. Soit (u_n) une suite telle que $u_n \leq -5n$ pour tout entier naturel n. Déterminer la limite de la suite (u_n).
3. Soit (u_n) une suite telle que $\frac{1}{n} \leq u_n \leq \frac{2}{n}$ pour tout $n \geq 1$. Déterminer la limite de la suite (u_n).

Exercice 8

Soit (u_n) la suite de terme général $u_n = 1 + \dfrac{(-1)^n}{n+1}$.
Donner un encadrement de u_n, puis déterminer sa limite.

Exercice 9

Déterminer la limite de la suite (u_n) définie pour tout entier naturel n non nul, en utilisant les théorèmes de comparaison.

(a) $u_n = n - \sin n$

(b) $u_n = -n^2 + \cos n$

(c) $u_n = \dfrac{n}{2+\cos n}$

(d) $u_n = \dfrac{n - \sin n}{n^2+1}$

Exercice 10

Déterminer la limite de la suite (u_n) définie pour tout entier naturel n non nul, en utilisant les théorèmes de comparaison.

(a) $u_n = \dfrac{4n + (-1)^n}{n+2}$

(b) $u_n = 5n^3 + (-1)^n$

(c) $u_n = \dfrac{-n + (-1)^n}{2n - (-1)^n}$

(d) $u_n = \dfrac{n^2 + (-1)^n\sqrt{n}}{n}$

Exercice 11

Justifier si l'affirmation est vraie ou fausse.
« On considère une suite (v_n). Si, pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 1, $-1 \leq v_n \leq 1 + \frac{1}{n}$, alors la suite (v_n) converge. »

Exercice 12

Choisir la ou les bonnes réponses.
Soit (u_n) une suite.

1. Si $u_n = \frac{1}{n}$ pour tout entier naturel n non nul, alors :
   (a) la suite (u_n) converge vers 0.
   (b) il existe un rang à partir duquel tous les termes sont positifs.
   (c) on ne peut pas déterminer si la suite est convergente ou divergente.

2. Si pour tout entier naturel n, $u_n \leq 2 - 3n$, alors :

   (a) $\lim_{n\to+\infty} u_n = -\infty$.

   (b) la suite (u_n) converge.

   (c) il existe un rang à partir duquel tous les termes de la suite sont négatifs.

Exercice 13

Soit la suite (u_n) telle que $u_n = n^2 - 3n + 1$.

1. Montrer que $u_n > n(n-3)$ pour tout entier naturel n.
2. En déduire la limite de (u_n).

Exercice 14 Inversé

On lit le raisonnement suivant : « On a $u_n \leq w_n \leq v_n$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \lim\limits_{n\to+\infty} v_n = -5$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} w_n = -5$. »
Compléter le raisonnement et écrire un énoncé possible correspondant à cette résolution.

Exercice 15

Soit (u_n) la suite de terme général $u_n = 1 + \dfrac{(-1)^n}{n+1}$.
Donner un encadrement de u_n, puis déterminer sa limite.

Exercice 16

Soit (u_n) la suite de terme général $u_n = \dfrac{n^2}{n+1}$.

1. Montrer que $u_n > n - 1$ pour tout entier naturel n.
2. En déduire la limite de la suite (u_n).

Rappels sur les suites géométriques

Exercice 17

Soit (v_n) la suite géométrique de premier terme $v_0 = 5$ et de raison $q = 7$.

1. Donner l'expression de v_n en fonction de n.
2. Conjecturer à la calculatrice la limite de v_n.
3. On pose, pour tout entier naturel n, $S_n = v_0 + v_1 + \cdots + v_n$. Exprimer S_n en fonction de n.

Exercice 18

Dans chaque question, donner les éléments caractéristiques de la suite (u_n) géométrique définie sur $\mathbb{N}$.

(a) $u_0 = 3 \quad ; \quad u_{n+1} = 2 \cdot u_n$

(b) $u_n = 2^n$

(c) $u_0 = -2 \quad ; \quad u_{n+1} = \dfrac{u_n}{2}$

(d) $u_n = 3 \times 0{,}2^n$

Exercice 19

Déterminer, pour chaque question, la valeur exacte de la somme, puis le cas échéant sa valeur arrondie au centième :

(a) $S_1 = 1 + 4 + 4^2 + \cdots + 4^6$

(b) $S_2 = 1 + 0{,}2 + 0{,}2^2 + \cdots + 0{,}2^7$

(c) $S_3 = 1 + \dfrac{1}{6} + \left(\dfrac{1}{6}\right)^2 + \cdots + \left(\dfrac{1}{6}\right)^6$

(d) $S_4 = 1 + 1^1 + 1^2 + \cdots + 1^{10}$

Exercice 20

(a) Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite géométrique de premier terme 5 et de raison $\dfrac{2}{3}$. Déterminer la valeur de la somme :

$$S = u_{10} + u_{11} + \cdots + u_{21}$$

(b) Soit $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite géométrique de premier terme 12 et de raison $-\dfrac{1}{2}$. Déterminer la valeur de la somme :

$$S' = v_7 + v_8 + \cdots + v_{12}$$

Limites de q^n

Exercice 21

Déterminer la limite des suites suivantes définies pour tout entier naturel n en justifiant :

(a) $u_n = 3^n$

(b) $s_n = (-0,99)^n$

(c) $w_n = (-0,1)^n$

(d) $\zeta_n = e^n$

Exercice 22

Déterminer la limite, si elle existe, de chaque suite (u_n) définie par :

(a) $u_n = -25\left(\dfrac{5}{6}\right)^n$

(b) $u_n = -7\left(\sqrt{3}\right)^n$

(c) $u_n = -2\left(\dfrac{10}{7}\right)^n$

(d) $u_n = (-\pi)^n$

(e) $u_n = 3^{n+1}$

(f) $u_n = (-1)^n$

Exercice 23 </> Algorithme

Soit q un réel et (u_n) la suite définie par $u_n = q^n$ pour tout entier naturel n non nul.
Compléter la fonction Python ci-dessous pour qu'elle retourne un message indiquant si (u_n) est convergente ou divergente.

```
def conv(q):
    if -1<q<1:
        return ("...")
    else:
        return ("...")
```

Exercice 24

On considère la suite (u_n) définie, pour tout entier naturel n, par $u_n = \frac{6^n}{7^n}$. En écrivant u_n sous la forme $u_n = q^n$, avec q un réel à déterminer, étudier la convergence de la suite.

Exercice 25 — Logique

On considère la proposition : « Si $0 < q < 1$, alors la suite de terme général (q^n) a pour limite 0. »

1. Cette proposition est-elle vraie ?
2. (a) Énoncer sa contraposée et sa réciproque.
   (b) Sont-elles vraies ou fausses, justifer.

Exercice 26

Déterminer la limite éventuelle de (u_n) définie pour tout entier naturel n.

(a) $u_n = \dfrac{4}{7^n}$

(b) $u_n = \dfrac{2 \times 12^n}{6 \times 4^n}$

(c) $u_n = \dfrac{(-1)^n \times 3^n}{(-0,1)^n}$

(d) $u_n = \dfrac{(-4)^{n+1}}{5^n}$

Exercice 27

Déterminer la limite éventuelle de (u_n) définie pour tout entier naturel n.

(a) $u_n = 4^n + 7^n$

(b) $u_n = -2 \times 12^n + 3^n - 5$

(c) $u_n = 9^n - 3^n$

(d) $u_n = 1 + 0,5 + \ldots + 0.5^n$

(e) $u_n = 4^n + (-2)^n + 4$

(f) $u_n = \sum_{k=0}^{n} 2^k$

Exercice 28

Déterminer la limite éventuelle de (u_n) définie pour tout entier naturel n.

(a) $u_n = \dfrac{2^n - 3^n}{5^n + 4^n}$

(b) $u_n = \dfrac{2^n - 3^n}{3^n - 1}$

(c) $u_n = \dfrac{5^n + (-3)^n}{2^n + 3(-1)^n}$

Exercice 29

Déterminer la limite de chacune des suites définies pour tout entier naturel n non nul par :

(a) $u_n = 0.5^n \cos n$

(b) $u_n = 3^n + \sin n$

(c) $u_n = \frac{1}{n} \sin(2^n)$

Exercice 30 — Logique

Montrer, en raisonnant par l'absurde, que la suite (u_n) définie pour tout entier naturel n par $u_n = \dfrac{(-2)^n}{7}$ n'admet pas de limite.

Exercice 31 — Logique

Montrer que (v_n) définie pour tout entier naturel n par $v_n = 2\left(-\dfrac{15}{7}\right)^n$ n'admet pas de limite.

Exercice 32

Soit (u_n) la suite définie pour tout entier naturel n par :

$$\begin{cases} u_0 = 5 \\ u_{n+1} = -2u_n + 3 \end{cases}$$

On pose $v_n = u_n - 1$.

1. Montrer que la suite (v_n) est géométrique.
2. Déterminer le terme général de (u_n).
3. La suite (u_n) converge-t-elle ?

Exercice 33

Indiquer si l'affirmation est vraie ou fausse, puis justifier.
« Si q est un nombre réel tel que $-1 < q < 1$, alors la suite de terme général $\sum_{k=0}^{n} q^k$ converge. »

Exercice 34

Soit (v_n) la suite définie pour tout entier naturel n par :

$$\begin{cases} v_0 = -\dfrac{2}{3} \\ v_{n+1} = -2v_n + 1 \end{cases}$$

1. Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel n :
$$v_n = \frac{1}{3} - (-2)^n$$
2. Étudier la convergence de la suite (v_n).

Exercice 35

On considère la suite (u_n) définie pour tout entier naturel n par :

$$u_{n+1} = \frac{3u_n + 1}{2u_n + 4} \text{ et } u_0 = 1$$

1. Montrer que pour tout entier naturel n, u_n est supérieur ou égal à 0.
2. On peut alors introduire alors la suite auxiliaire (r_n) définie pour tout entier naturel n par : $r_n = \dfrac{2u_n - 1}{u_n + 1}$.
   (a) Montrer que la suite (r_n) est géométrique de raison $\frac{2}{5}$.
   (b) Expliciter r_n en fonction de n pour tout entier naturel n.
3. En déduire l'expression explicite de u_n en fonction de n pour tout entier naturel n.
4. En déduire la convergence de la suite (u_n) et donner sa limite.

Convergences monotones

Exercice 36

Soit la suite (u_n) définie par $u_0 = -2$ et pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = \frac{1}{2}u_n + 1$.

1. Démontrer par récurrence que cette suite est majorée par 2.
2. En déduire que la suite (u_n) est croissante.
3. La suite (u_n) est-elle convergente ?

Exercice 37

Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = 2020$ et pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = \sqrt{u_n}$.

1. Démontrer par récurrence que cette suite est minorée par 1.
2. Démontrer que la suite (u_n) est décroissante.
3. La suite (u_n) est-elle convergente ?
4. Conjecturer avec une calculatrice la limite de la suite (u_n).

Exercice 38

Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = 1,8$ et pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = \frac{2}{3-u_n}$.

1. Démontrer par récurrence que cette suite est bornée par 1 et 2.
2. Démontrer par récurrence que la suite (u_n) est décroissante.
3. La suite (u_n) est-elle convergente ?
4. Conjecturer avec une calculatrice la limite de la suite (u_n).

Exercice 39

Indiquer si les affirmations sont vraies ou fausses, puis justifier.

1. Toute suite convergente est décroissante ou croissante.
2. Toute suite croissante qui converge vers 0 est majorée par 0.
3. Une suite qui n'est pas minorée tend vers $-\infty$.

Exercice 40

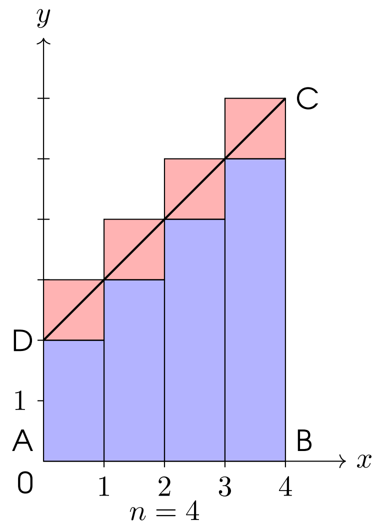
Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = \dfrac{1}{2}$ et pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = \dfrac{3u_n}{1+2u_n}$.

1. On considère la fonction f définie sur l'ensemble des réels positifs par $f(x) = \dfrac{3x}{1+2x}$.
   Dresser le tableau de variation de f sur son ensemble de définition.
2. (a) Montrer par récurrence que pour tout entier naturel n, on a $0 \leq u_n \leq 1$.
   (b) Étudier le sens de variation de la suite (u_n).
3. En déduire que la suite (u_n) est convergente.
4. Montrer que pour tout entier naturel n, $u_n = \frac{3^n}{3^n+1}$ et en déduire la limite de la suite (u_n).

Exercices supplémentaires

Exercice 41

Soit la fonction f définie sur l'intervalle $[0;4]$ par $f(x) = x + 2$.
On divise l'intervalle $[0;4]$ en 4 segments de largeur 1 et on construit quatre rectangles « inférieurs »en bleu et quatre rectangles « supérieurs »en rouge.
On appelle $\mathcal{A}$ l'aire du trapèze ABCD.



1. Calculer l'aire totale des rectangles inférieurs et l'aire totale des rectangles supérieurs.
2. En déduire un encadrement de $\mathcal{A}$.
3. Soit un entier naturel n supérieur ou égal à 1. On partage maintenant l'intervalle $[0;4]$ en n segments de largeur $\frac{4}{n}$ et on construit de la même manière n rectangles « inférieurs »et n rectangles « supérieurs ».
   On note u_n et v_n l'aire totale des rectangles « inférieurs »et « supérieurs ».
   (a) Donner u_4 et v_4.
   On peut montrer que, pour tout entier naturel n :
   $$u_n = 8\left(\frac{n-1}{n}+1\right) \text{ et } v_n = 8\left(\frac{n+1}{n}+1\right)$$
   (b) Justifier que, pour tout entier naturel n : $u_n < \mathcal{A} < v_n$
4. En considérant la suite (w_n) constante égale à $\mathcal{A}$, en déduire la valeur de $\mathcal{A}$.

Point Histoire : Cette méthode d'approximation de l'aire sous une courbe a été introduite par Riemann (1826-1866) et Simpson (1710-1761). Nous en reparlerons au chapitre 11.