Déterminer la nature d'une suite

Exercice 1

Correction : Calculons les différences entre termes consécutifs :

$$u_1 - u_0 = 5 - 2 = 3 \quad (1)$$
$$u_2 - u_1 = 9 - 5 = 4 \quad (2)$$
$$u_3 - u_2 = 12 - 9 = 3 \quad (3)$$

Les différences ne sont pas constantes (3, 4, 3), donc (u_n) n'est pas arithmétique.

Exercice 2

Correction : Pour (u_n) :

$$u_1 - u_0 = 5 - 3 = 2 \quad (4)$$
$$u_2 - u_1 = 7 - 5 = 2 \quad (5)$$
$$u_3 - u_2 = 10 - 7 = 3 \quad (6)$$
$$u_4 - u_3 = 12 - 10 = 2 \quad (7)$$
$$u_5 - u_4 = 14 - 12 = 2 \quad (8)$$

Les différences ne sont pas constantes, donc (u_n) n'est pas arithmétique.

Pour (v_n) :

$$v_1 - v_0 = 3,5 - 6 = -2,5 \quad (9)$$
$$v_2 - v_1 = 1 - 3,5 = -2,5 \quad (10)$$
$$v_3 - v_2 = -1,5 - 1 = -2,5 \quad (11)$$
$$v_4 - v_3 = -4 - (-1,5) = -2,5 \quad (12)$$
$$v_5 - v_4 = -6,5 - (-4) = -2,5 \quad (13)$$

Les différences sont constantes, donc (v_n) est arithmétique de raison $r = -2,5$.

Réponse : (v_n) peut être conjecturée arithmétique, (u_n) n'est pas arithmétique.

Exercice 3

Correction :

1. $u_{n+1} - u_n = [2 + 3(n+1)] - [2 + 3n] = 2 + 3n + 3 - 2 - 3n = 3$
2. La différence est constante égale à 3, donc (u_n) est arithmétique de raison $r = 3$ et de premier terme $u_0 = 2$.

Exercice 4

Correction :

(a) $u_n = 4n+3$: $u_{n+1} - u_n = 4(n+1)+3-(4n+3) = 4$. Arithmétique, $r = 4$.

(b) $v_n = n^2 - 3$: $v_{n+1} - v_n = (n+1)^2 - 3 - (n^2 - 3) = 2n + 1$. Non arithmétique.

(c) $t_{n+1} = t_n + 7$: relation de récurrence arithmétique, $r = 7$.

(d) $w_n = 5 - 3n$: $w_{n+1} - w_n = 5 - 3(n+1) - (5 - 3n) = -3$. Arithmétique, $r = -3$.

(e) $k_n = (2n+3)^2 - 4n^2 = 4n^2 + 12n + 9 - 4n^2 = 12n + 9$: $k_{n+1} - k_n = 12$. Arithmétique, $r = 12$.

(f) $z_{n+1} = z_n + n$: la différence n n'est pas constante. Non arithmétique.

Exercice 5

Correction :

(a) $u_n = 5n^2$: $\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{5(n+1)^2}{5n^2} = \frac{(n+1)^2}{n^2}$. Non géométrique.

(b) $w_n = \frac{4^n}{3^{n+1}} = \frac{4^n}{3 \cdot 3^n} = \frac{1}{3} \cdot \left(\frac{4}{3}\right)^n$. Géométrique, $q = \frac{4}{3}$.

(c) $t_{n+1} = t_n + 2^n$: non géométrique (addition, pas multiplication).

(d) $v_n = 3 \times 4^n$: géométrique, $q = 4$.

(e) $k_n = \frac{4 \times (-5)^n}{3}$: géométrique, $q = -5$.

(f) $z_{n+1} = -3z_n$: géométrique, $q = -3$.

Exploiter les formules explicites et récurrentes

Exercice 6

Correction : Suite arithmétique : $u_n = u_1 + (n-1)r = 3 + (n-1) \times 5 = 3 + 5n - 5 = 5n - 2$

$$u_1 = 3 \quad (14)$$
$$u_2 = 8 \quad (15)$$
$$u_3 = 13 \quad (16)$$
$$u_4 = 18 \quad (17)$$
$$u_5 = 23 \quad (18)$$

Exercice 7

Correction : Suite géométrique : $v_n = v_0 \times q^n = 3 \times \left(-\frac{3}{2}\right)^n$

$$v_0 = 3 \quad (19)$$
$$v_1 = 3 \times \left(-\frac{3}{2}\right) = -\frac{9}{2} \quad (20)$$
$$v_2 = 3 \times \left(-\frac{3}{2}\right)^2 = 3 \times \frac{9}{4} = \frac{27}{4} \quad (21)$$
$$v_3 = 3 \times \left(-\frac{3}{2}\right)^3 = 3 \times \left(-\frac{27}{8}\right) = -\frac{81}{8} \quad (22)$$

Exercice 8

Correction : Suite géométrique : $u_n = u_0 \times q^n =$

$\frac{3}{8} \times 2^n$

$$u_0 = \frac{3}{8} \quad (23)$$
$$u_1 = \frac{3}{8} \times 2 = \frac{3}{4} \quad (24)$$
$$u_2 = \frac{3}{8} \times 4 = \frac{3}{2} \quad (25)$$
$$u_3 = \frac{3}{8} \times 8 = 3 \quad (26)$$
$$u_4 = \frac{3}{8} \times 16 = 6 \quad (27)$$
$$u_5 = \frac{3}{8} \times 32 = 12 \quad (28)$$

Exercice 9

Correction : Pour une suite arithmétique de raison 3 :

(a) $u_4 + 3 = u_4 + r = u_5$

(b) $u_{10} - 3 = u_{10} - r = u_9$

(c) $u_7 + 6 = u_7 + 2r = u_9$

Exercice 10

Correction : Pour une suite géométrique de raison 3 :

(a) $3 \times u_{10} = q \times u_{10} = u_{11}$

(b) $\frac{u_{12}}{3} = \frac{u_{12}}{q} = u_{11}$

(c) $u_5 \times 3^2 = u_5 \times q^2 = u_7$

Exercice 11

Correction : Analysons les premiers termes : $u_1 - u_0 = 4$, $u_2 - u_1 = 4$, $u_3 - u_2 = 4$. La suite est arithmétique de raison 4 et premier terme 3.

Les relations vérifiées sont :

(a) $u_{n+1} = u_n + 4$

(b) $u_{n+1} = 4 \cdot u_n$

(c) $u_n = 3 + 3 \cdot n$ (donnerait $u_1 = 6$)

(d) $u_n = 3 + 4 \cdot n$

Exercice 12

Correction :

1. Premier terme $u_0 = 3$, raison $r = 4$ (différence constante).
2. Relations vérifiées :
   (a) $u_{n+1} = u_n + 4$
   (b) $u_{n+1} = u_n + 3$
   (c) $u_n = 4n + 3$
   (d) $u_n = 3n + 4$

Exercice 13

Correction : Suite arithmétique : $u_0 = 5$, $r = -2$, donc $u_n = 5 - 2n$. $u_{27} = 5 - 2 \times 27 = 5 - 54 = -49$.

Expressions correctes :

(a) $u_{26} + 2$

(b) $u_{26} - 2$ (car $u_{27} = u_{26} + r$)

(c) $u_{26} + 5$

(d) $u_{26} - 5$

(e) $-2 + 5 \times 27$

(f) $5 - 2 \times 27$ (formule explicite)

Exercice 14

Correction :

1. Suite arithmétique de raison $r = -2$.
2. $u_n = u_0 + nr = 5 - 2n$.

Exercice 15

Correction :

1. $u_n = u_0 + nr = 3 + n \times \frac{2}{3} = 3 + \frac{2n}{3}$
2. $u_{112} = 3 + \frac{2\times112}{3} = 3 + \frac{224}{3} = \frac{9+224}{3} = \frac{233}{3}$

Exercice 16

Correction : Suite géométrique : $u_0 = 4$, $q = 3$, donc $u_n = 4 \times 3^n$. $u_{27} = 4 \times 3^{27}$.

Expressions correctes :

(a) $u_5 \times 3^{22}$ (car $u_{27} = u_5 \times q^{22}$)

(b) $u_5 \times 3^{27}$

(c) $u_{31} \times 3^4$

(d) $u_{31} \times 3^{-4}$ (car $u_{27} = u_{31} \times q^{-4}$)

Exercice 17

Correction : Pour une suite géométrique : $u_n = u_p \times q^{n-p}$

(a) $u_7 = u_3 \times q^4$

(b) $u_{25} = u_{11} \times q^{14}$

(c) $u_3 = u_8 \times q^{-5}$

(d) $u_{15} = u_{23} \times q^{-8}$

Exercice 18

Correction : Pour une suite arithmétique : $u_n = u_p + (n-p) \times r$

(a) $u_7 = u_4 + 3 \times r$

(b) $u_{25} = u_{11} + 14 \times r$

(c) $u_3 = u_6 + (-3) \times r$

(d) $u_{15} = u_{23} + (-8) \times r$

Exercice 19

Correction :

(a) $u_{12} = u_5 + 7 \times r$

(b) $u_{27} = u_{38} + (-11) \times r$

(c) $u_3 = u_6 + (-3) \times r$

(d) $u_{23} = u_{38} + (-15) \times r$

Déterminer les éléments caractéristiques

Exercice 20

Correction :

(a) $u_n = 7 + 8n$, $u_{100} = 7 + 800 = 807$

(b) $u_n = 3 - \frac{n}{2}$, $u_{100} = 3 - 50 = -47$

(c) $u_n = u_{25} + (n-25)r = 150 - 2(n-25) = 200 - 2n$, $u_{100} = 0$

(d) $r = \frac{u_{20}-u_8}{20-8} = \frac{117-45}{12} = 6$, $u_0 = u_8 - 8r = 45 - 48 = -3$, $u_n = -3 + 6n$, $u_{100} = 597$

Exercice 21

Correction :

(a) $u_n = 2 \times (-3)^n$, $u_{40} = 2 \times (-3)^{40} = 2 \times 3^{40}$

(b) $u_n = -5 \times \left(\frac{1}{2}\right)^n$, $u_{40} = -5 \times 2^{-40} = -\frac{5}{2^{40}}$

(c) $u_0 = \frac{u_1}{q} = \frac{10}{0{,}9} = \frac{100}{9}$, $u_n = \frac{100}{9} \times (0{,}9)^n$, $u_{40} = \frac{100}{9} \times (0{,}9)^{40}$

(d) $u_0 = \frac{u_5}{q^5} = \frac{96}{32} = 3$, $u_n = 3 \times 2^n$, $u_{40} = 3 \times 2^{40}$

Exercice 22

Correction :

(a) $u_5 = -1 + 5 \times 4 = 19$, $u_{10} = -1 + 10 \times 4 = 39$

(b) $u_0 = u_{12} - 12r = 9 - 4 = 5$, $u_6 = 5 + 2 = 7$

(c) $r = \frac{u_{10}-u_0}{10} = \frac{31-1}{10} = 3$, $u_{2018} = 1 + 2018 \times 3 = 6055$

(d) $r = \frac{u_{13}-u_5}{8} = \frac{-44-(-12)}{8} = -4$, $u_{50} = u_5 + 45r = -12 - 180 = -192$

Exercice 23

Correction :

(a) $q^4 = \frac{u_6}{u_2} = 16$, donc $q = 2$. $u_0 = \frac{u_2}{q^2} = 1$. $u_n = 2^n$.

(b) $q^5 = \frac{u_8}{u_3} = \frac{781250}{250} = 3125 = 5^5$, donc $q = 5$. $u_0 = \frac{u_3}{q^3} = 2$. $u_n = 2 \times 5^n$.

(c) $q^6 = \frac{u_{10}}{u_4} = \frac{3/512}{3/8} = \frac{1}{64} = \left(\frac{1}{2}\right)^6$, donc $q = \frac{1}{2}$. $u_0 = \frac{u_4}{q^4} = 6$. $u_n = 6 \times \left(\frac{1}{2}\right)^n$.

(d) $q = \frac{u_7}{u_6} = \frac{1/243}{1/9} = \frac{1}{27}$. $u_0 = \frac{u_6}{q^6} = 9$. $u_n = 9 \times \left(\frac{1}{27}\right)^n$.

Exercice 24

Correction :

1. $u_{n+1} = u_n + r$
2. (a) $v_0 = u_0 + 0 \times r = u_0$
   (b) $v_{n+1} = u_0 + (n+1)r = u_0 + nr + r = v_n + r$
   (c) Les suites ont même terme initial et même relation de récurrence, donc elles sont égales.
   (d) Par récurrence, $u_n = v_n = u_0 + nr$.

Exercice 25

Correction :

1. $u_0 = v_0 = u_0$ et $u_{n+1} = qu_n$, $v_{n+1} = u_0 q^{n+1} = q(u_0 q^n) = qv_n$. Les suites sont égales.
2. Pour $n \geqslant p$: $u_n = u_p \times q^{n-p}$ (formule générale).

Exercice 26

Correction : $r = \frac{u_{16}-u_{10}}{16-10} = \frac{14-5}{6} = \frac{3}{2}$ $u_0 = u_{10} - 10r = 5 - 15 = -10$

Exercice 27

Correction :

1. (a) $v_{14} = v_{11} \times q^3$
   (b) $q^3 = \frac{27/14}{4/7} = \frac{27}{14} \times \frac{7}{4} = \frac{27}{8}$, donc $q = \frac{3}{2}$
2. $v_0 = \frac{v_{11}}{q^{11}} = \frac{4/7}{(3/2)^{11}} = \frac{4}{7} \times \frac{2^{11}}{3^{11}}$

Exercice 28

Correction : $w_3 = w_0 \times q^3$, donc $q^3 = \frac{40}{5} = 8 = 2^3$, donc $q = 2$.

Exercice 29

Correction : $r = \frac{w_8-w_0}{8} = \frac{1-7}{8} = -\frac{3}{4}$ Premier terme : $w_0 = 7$, raison : $r = -\frac{3}{4}$.

Exercice 30

Correction : $r = \frac{v_{15}-v_7}{15-7} = \frac{39-13}{8} = \frac{26}{8} = \frac{13}{4}$ $v_0 = v_7 - 7r = 13 - \frac{91}{4} = \frac{52-91}{4} = -\frac{39}{4}$

Exercice 31

Correction : $q^3 = \frac{w_6}{w_3} = \frac{3/64}{3/8} = \frac{1}{8} = \left(\frac{1}{2}\right)^3$, donc $q = \frac{1}{2}$. $w_0 = \frac{w_3}{q^3} = \frac{3/8}{1/8} = 3$

Exercice 32

Correction :

1. Il semble y avoir une erreur dans l'énoncé ($u_4 = u_5 = 2$). En supposant $u_4 = \frac{2}{3}$ et $u_6 = \frac{27}{8}$: $q^2 = \frac{u_6}{u_4} = \frac{27/8}{2/3} = \frac{81}{16}$, donc $q = \frac{9}{4}$. $u_0 = \frac{u_4}{q^4} = \frac{2/3}{(9/4)^4} = \frac{2}{3} \times \frac{4^4}{9^4}$
2. (a) $u_n = u_0 \times \left(\frac{9}{4}\right)^n$
   (b) Pour $u_n = \frac{16}{27}$, résoudre $u_0 \times \left(\frac{9}{4}\right)^n = \frac{16}{27}$

Exercice 33

Correction :

1. Suite arithmétique, $u_0 = 80000$, $r = -3000$.
2. Récurrence : $u_{n+1} = u_n - 3000$, Explicite : $u_n = 80000 - 3000n$.
3. $u_n < 10000 \Leftrightarrow 80000 - 3000n < 10000 \Leftrightarrow n > \frac{70000}{3000} = 23,33...$ Donc au bout de 24 mois.

Exercice 34

Correction :

1. $u_1 = 500 \times 1,06 = 530$, $u_2 = 530 \times 1,06 = 562$ (arrondi)

2. $u_n = 500 \times (1,06)^n$

3. $u_6 = 500 \times (1,06)^6 \approx 709$ films.

Variations des suites

Exercice 35

Correction :

(a) $u_n = 4 \times (0,2)^n : 0 < q = 0,2 < 1$, suite décroissante.

(b) $z_{n+1} = 3z_n$ avec $z_0 = 5 > 0$ et $q = 3 > 1$: suite croissante.

(c) $v_n = -3 \times 4^n$ avec $v_0 = -3 < 0$ et $q = 4 > 1$: suite décroissante.

(d) $w_{n+1} = \frac{1}{5}w_n$ avec $0 < q = \frac{1}{5} < 1$: décroissante si $w_0 > 0$, croissante si $w_0 < 0$.

(e) $t_n = \frac{2}{3^{n-1}} = 2 \times 3 \times \left(\frac{1}{3}\right)^n = 6 \times \left(\frac{1}{3}\right)^n$: décroissante.

(f) $k_n = \frac{(-2)^n}{10}$: $q = -2$, ni croissante ni décroissante (alternée).

Exercice 36

Correction :

1. $u_0 = u_{10} - 10r = 65 - 70 = -5$
2. $u_n = -5 + 7n$
3. $r = 7 > 0$, donc suite croissante.

Exercice 37

Correction :

1. $r = \frac{u_{23}-u_{12}}{11} = \frac{107-52}{11} = 5$
2. $u_0 = u_{12} - 12r = 52 - 60 = -8$
3. $u_{55} = -8 + 55 \times 5 = 267$
4. $r = 5 > 0$, suite croissante.

Exercice 38

Correction :

1. Conjecture : suite arithmétique croissante.
2. $(3n+1)(n+5) = 3n^2+15n+n+5 = 3n^2+16n+5$
3. $u_n = \frac{3n^2+16n+5}{n+5} = \frac{(3n+1)(n+5)}{n+5} = 3n+1$ Suite arithmétique de premier terme 1 et de raison 3.

Exercice 39

Correction : Pour une suite géométrique $u_n = u_0 \times q^n$, le sens de variation dépend de u_0 et q : - Si $u_0 > 0$ et $q > 1$: croissante - Si $u_0 > 0$ et $0 < q < 1$: décroissante - Si $u_0 < 0$ et $q > 1$: décroissante - Si $u_0 < 0$ et $0 < q < 1$: croissante - Si $q < 0$: ni croissante ni décroissante

(a) $u_0 = 1 > 0, q = 1,5 > 1$
$\Rightarrow$ croissante

(b) $u_0 = -3 < 0, q = 1,5 > 1$
$\Rightarrow$ décroissante

(c) $u_0 = 20 > 0, q = 0,8 \in]0;1[$
$\Rightarrow$ décroissante

(d) $u_0 = -10 < 0, q = -0,8 < 0$
$\Rightarrow$ ni croissante ni décroissante

(e) $u_0 = 10 > 0, q = -1,2 < 0$
$\Rightarrow$ ni croissante ni décroissante

(f) $u_0 = -20, q = 1$
$\Rightarrow$ constante (tous les termes égaux à -20)

Sommes des termes d'une suites

Exercice 40

Correction :

1. Pour une suite arithmétique : $u_n = u_0 + nr$

$$u_n = 7 + 4n$$

2. Développons la somme :

$$u_0 + u_1 + \cdots + u_{20} = \sum_{k=0}^{20} u_k \quad (29)$$
$$= \sum_{k=0}^{20} (u_0 + kr) \quad (30)$$
$$= \sum_{k=0}^{20} u_0 + r\sum_{k=0}^{20} k \quad (31)$$
$$= 21u_0 + r\sum_{k=1}^{20} k \quad (32)$$
$$= u_0 \times 21 + r(1 + 2 + \cdots + 20) \quad (33)$$

Avec $\sum_{k=1}^{20} k = \frac{20\times21}{2} = 210$:

$$S = 21 \times 7 + 4 \times 210 = 147 + 840 = 987$$

3. (a) $u_0 + u_1 + \cdots + u_{100}$

$$S = 101\times7+4\times\frac{100 \times 101}{2} = 707+20200 = 20907$$

(b) $u_{50}+u_{51}+\cdots+u_{100}$ Cette somme contient $100 - 50 + 1 = 51$ termes.

$$S = \frac{51(u_{50} + u_{100})}{2} = \frac{51(207 + 407)}{2} = \frac{51 \times 614}{2} =$$

Exercice 41

Correction :

1. Pour une suite géométrique : $u_n = u_1 \times q^{n-1}$

$$u_n = 4 \times 2^{n-1}$$

2. $u_1 = 4 > 0$ et $q = 2 > 1$, donc (u_n) est strictement croissante.

3. Développons la somme :

$$u_1 + \cdots + u_{10} = \sum_{k=1}^{10} u_k \quad (34)$$
$$= \sum_{k=1}^{10} u_1 \times q^{k-1} \quad (35)$$
$$= u_1 \sum_{k=0}^{9} q^k \quad (36)$$
$$= u_1 \times (1 + q + q^2 + \cdots + q^9) \quad (37)$$

Avec $\sum_{k=0}^{9} q^k = \frac{1-q^{10}}{1-q} = \frac{1-2^{10}}{1-2} = 1023$:

$$S = 4 \times 1023 = 4092$$

4. $u_1 + u_2 + \cdots + u_{20}$

$$S = 4\times\frac{1-2^{20}}{1-2} = 4\times(2^{20}-1) = 4\times1048575 = 4194300$$

Exercice 42

Correction :

(a) $1+2+3+\cdots+500 = \frac{500\times501}{2} = 125250$

(b) $2+4+6+\cdots+200 = 2(1+2+\cdots+100) = 2\times\frac{100\times101}{2} = 10100$

(c) $50+51+52+\cdots+100 = \frac{51\times(50+100)}{2} = \frac{51\times150}{2} = 3825$

(d) Suite arithmétique de premier terme 4, raison 3, dernier terme 91. $91 = 4+3n \Rightarrow n = 29$, donc 30 termes.

$$S = \frac{30\times(4+91)}{2} = 15\times95 = 1425$$

Exercice 43

Correction :

(a) $S_1 = 32+64+128+\cdots+131072$ Suite géométrique : $u_1 = 32$, $q = 2$ $131072 = 32\times2^{n-1} \Rightarrow 2^{n-1} = 4096 = 2^{12} \Rightarrow n = 13$

$$S_1 = 32\times\frac{2^{13}-1}{2-1} = 32\times8191 = 262112$$

(b) $S_2 = 2-6+18-54+\cdots+118098$ Suite géométrique : $u_1 = 2$, $q = -3$ $118098 = 2\times(-3)^{n-1}$, donc $(-3)^{n-1} = 59049 = 3^{10}$ Comme $(-3)^{10} = 3^{10}$, on a $n = 11$

$$S_2 = 2\times\frac{1-(-3)^{11}}{1-(-3)} = 2\times\frac{1-(-177147)}{4} = 88574$$

(c) $S_3 = 3+5+\frac{25}{3}+\frac{125}{9}+\cdots+\frac{390625}{2187}$ $u_1 = 3$, $u_2 = 5$, $q = \frac{5}{3}$ $\frac{390625}{2187} = 3\times(\frac{5}{3})^{n-1}$ $(\frac{5}{3})^{n-1} = \frac{390625}{6561} = (\frac{5}{3})^8 \Rightarrow n = 9$

$$S_3 = 3\times\frac{1-(\frac{5}{3})^9}{1-\frac{5}{3}} = 3\times\frac{1-\frac{1953125}{19683}}{-\frac{2}{3}} = \frac{58593}{128}$$

(d) $S_4 = \frac{2}{3}+\frac{4}{15}+\frac{8}{75}+\cdots+\frac{2^{n+1}}{3\times5^n}$ $u_1 = \frac{2}{3}$, $q = \frac{2}{5}$

$$S_4 = \frac{2}{3}\times\frac{1-(\frac{2}{5})^n}{1-\frac{2}{5}} = \frac{2}{3}\times\frac{1-(\frac{2}{5})^n}{\frac{3}{5}} = \frac{10}{9}(1-(\frac{2}{5})^n)$$

Exercice 44

Correction : Suite arithmétique : $u_0 = 2$, $r = 5$

$$S = \frac{100\times(u_0+u_{99})}{2} = \frac{100\times(2+497)}{2} = 24950$$

Exercice 45

Correction : Suite arithmétique : $u_0 = 3$, $r = 5$

$$S = \frac{33\times(u_0+u_{32})}{2} = \frac{33\times(3+163)}{2} = 2739$$

Exercice 46

Correction : Suite arithmétique : $u_0 = -10$, $r = 3$, 85 termes

$$S = \frac{85\times(u_0+u_{84})}{2} = \frac{85\times(-10+242)}{2} = 9860$$

Exercice 47

Correction : Suite géométrique : $u_0 = 2$, $q = 2$

$$S = 2\times\frac{2^{100}-1}{2-1} = 2(2^{100}-1) = 2^{101}-2$$

Exercice 48

Correction : Suite géométrique : $u_0 = 12$, $q = 4$

$$S = 12\times\frac{4^{100}-1}{4-1} = 4(4^{100}-1) = \frac{4^{101}-4}{3}$$

Exercice 49

Correction :

1. $v_n = 12\times(\frac{1}{4})^n$
2. $\frac{3}{64} = 12\times(\frac{1}{4})^n$ $(\frac{1}{4})^n = \frac{1}{256} = (\frac{1}{4})^4 \Rightarrow n = 4$
3. $S = 12\times\frac{1-(\frac{1}{4})^{21}}{1-\frac{1}{4}} = 16(1-(\frac{1}{4})^{21}) = 16-\frac{16}{4^{21}}$

Exercice 50

Correction : Suite arithmétique : $u_n = 3+2n$ $S = u_{12}+\cdots+u_{84}$ contient $84-12+1 = 73$ termes

$$S = \frac{73\times(u_{12}+u_{84})}{2} = \frac{73\times(27+171)}{2} = 7227$$

Exercice 51

Correction : $v_n = 2-3n$ est une suite arithmétique de raison $r = -3$ $S' = v_4+\cdots+v_{15}$ contient 12 termes

$$S' = \frac{12\times(v_4+v_{15})}{2} = \frac{12\times(-10+(-43))}{2} = -318$$

Exercice 52

Correction :

1. Suite arithmétique : $u_n = 2+\frac{n}{4}$ $S = u_{11}+\cdots+u_{25}$ contient 15 termes
$$S = \frac{15\times(u_{11}+u_{25})}{2} = \frac{15\times(4,75+8,25)}{2} = 97,5$$
2. Suite géométrique : $v_n = 12\times(-\sqrt{3})^n$ $S' = v_5+\cdots+v_{13}$: 9 termes consécutifs
$$S' = v_5\times\frac{1-(-\sqrt{3})^9}{1-(-\sqrt{3})} = 12(-\sqrt{3})^5\times\frac{1-(-\sqrt{3})^9}{1+\sqrt{3}}$$
$$S' = -972\sqrt{3}\times\frac{1+27\sqrt{3}}{1+\sqrt{3}} = -972\sqrt{3}\times(27\sqrt{3}+1)/(1+\sqrt{3})$$

Exercice 53

Correction : Suite géométrique : $u_n = 4\times 3^n$ $S = u_{10}+\cdots+u_{18}$: 9 termes consécutifs
$$S = u_{10}\times\frac{1-3^9}{1-3} = 4\times 3^{10}\times\frac{3^9-1}{2} = 2\times 3^{10}\times(3^9-1)$$
$$S = 2\times 59049\times 19682 = 2324522178$$

Exercice 54

Correction :

1. $S = 27+9+3+1+\frac{1}{3}+\frac{1}{9}+\frac{1}{27}+\frac{1}{81}$ Suite géométrique : $u_0 = 27$, $q = \frac{1}{3}$
2. $\frac{1}{81} = 27\times(\frac{1}{3})^n \Rightarrow (\frac{1}{3})^n = \frac{1}{2187} = (\frac{1}{3})^7$ Donc $n = 7$ et la somme contient 8 termes.
3. $S = 27\times\frac{1-(\frac{1}{3})^8}{1-\frac{1}{3}} = 27\times\frac{1-\frac{1}{6561}}{\frac{2}{3}} = \frac{81}{2}\times\frac{6560}{6561} = \frac{265680}{6561} = \frac{9880}{243}$

Problèmes

Exercice 55

Correction :
Situation 1 : Suite arithmétique $h_{15} = 17$ m, croissance de 40 cm = 0,4 m par an $h_n = 17+0,4(n-15) = 11+0,4n$ pour $n\geq 15$
Situation 2 : Suite géométrique $s_0 = 1000$, taux 2% donc $q = 1,02$ $s_n = 1000\times 1,02^n$
Situation 3 : Ni arithmétique ni géométrique $P_n = 2\pi n$ (arithmétique de raison 2π) $A_n = \pi n^2$ (ni arithmétique ni géométrique)

Exercice 56

Correction :

1. Type 1 : $u_n = 1200+100n$ (arithmétique) Type 2 : $v_n = 1100\times 1,08^n$ (géométrique)
2.

Année	Type 1	Type 2
0	1200	1100
1	1300	1188
2	1400	1283
3	1500	1386
4	1600	1497
5	1700	1617

Type 2 devient plus intéressant à partir de la 4ème année.

3. Pour 10 ans : $u_{10} = 2200$, $v_{10} = 2377$ Conseiller le type 2.

Exercice 57

Correction :

1. $a_0 = 1450$ m, $a_1 = 1450,75$ m, $a_2 = 1451,5$ m
2. $a_{n+1}-a_n = 0,75$ (constante), donc (a_n) est arithmétique de raison $r = 0,75$ et de premier terme $a_0 = 1450$.
3. Durée : 15 min = 900 s $a_{900} = 1450+900\times 0,75 = 2125$ m

Exercice 58

Correction :
Situation 1 : Suite géométrique $u_n = u_0\times 0,95^n$ (5% tuées ⇒ 95% restantes) Pour avoir la moitié : $0,95^n = 0,5$ $n = \frac{\ln(0,5)}{\ln(0,95)} \approx 13,5$ heures
Situation 2 : Suite arithmétique $u_0 = 100$, puis chaque année : $50, 60, 70, \ldots$ $u_n = 100+50n+10\times\frac{n(n-1)}{2} = 100+45n+5n^2$ À 18 ans : $u_{18} = 100+45\times 18+5\times 18^2 = 2530$

Exercice 59

Correction :

1. $u_1 = 0,8\times 65+18 = 70$ $u_2 = 0,8\times 70+18 = 74$
2. Non arithmétique (différences non constantes) Non géométrique (rapports non constants)
3. (a) $v_{n+1} = u_{n+1}-90 = 0,8u_n+18-90 = 0,8u_n-72 = 0,8(u_n-90) = 0,8v_n$
   (b) (v_n) est géométrique de raison $q = 0,8$ et $v_0 = 65-90 = -25$
   (c) $v_n = -25\times 0,8^n$ $u_n = v_n+90 = 90-25\times 0,8^n$
   (d) $u_{10} = 90-25\times 0,8^{10} = 90-25\times 0,1074 \approx 87,3$
4. $u_{n+1}-u_n = -25\times 0,8^{n+1}+25\times 0,8^n = 25\times 0,8^n(1-0,8) = 5\times 0,8^n > 0$ Donc (u_n) est strictement croissante.

Exercice 60

Correction : À chaque étape, on ajoute un carré d'aire $(\frac{1}{2})^{2n}$ où n est le numéro de l'étape.
Aires successives : $\frac{1}{4}, \frac{1}{16}, \frac{1}{64}, \ldots$
Suite géométrique de premier terme $a = \frac{1}{4}$ et de raison $q = \frac{1}{4}$.
Aire totale = $\frac{\frac{1}{4}}{1-\frac{1}{4}} = \frac{\frac{1}{4}}{\frac{3}{4}} = \frac{1}{3}$
L'aire de la partie verte sera $\frac{1}{3}$ de l'aire du carré initial.