# DS3 - Chapitres 5, 6 et D

6

## ⇒ Exercice n°1

1°/ $f'(x) = u'(x)v(x) + u(x)v'(x)$ w/ $u(x) = 7x$
$= 7e^{-x} - 7xe^{-x}$ $u'(x) = 7$
$= 7e^{-x}(1-x)$ $v(x) = e^{-x}$
$v'(x) = -e^{-x}$

Or $f'(x) \geqslant 0$
$\Leftrightarrow 7e^{-x}(1-x) \geqslant 0$
$\Leftrightarrow 1-x \geqslant 0$ (car $7e^{-x} > 0, \forall x \in \mathbb{R}$)
$\Leftrightarrow 1 \geqslant x$

Ainsi, on a :

| $x$ | $-\infty$ | | $1$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | $+$ | $0$ | $-$ | |
| $f$ | | $\nearrow$ | $7e^{-1}$ | $\searrow$ | |

2°/ ⓐ $f''(x) = u'(x)v(x) + u(x)v'(x)$ w/ $u(x) = 7e^{-x}$
$= -7e^{-x}(1-x) - 7e^{-x}$ $u'(x) = -7e^{-x}$
$= 7e^{-x}(-1+x-1)$ $v(x) = 1-x$
$= 7e^{-x}(x-2)$ $v'(x) = -1$

ⓑ On a $f''(x) \geqslant 0$
$\Leftrightarrow 7e^{-x}(x-2) \geqslant 0$
$\Leftrightarrow x-2 \geqslant 0$ (car $7e^{-x} > 0$)
$\Leftrightarrow x \geqslant 2$

⇝ Ainsi $f$ admet bien un point d'inflexion en $x = 2$

6

## ⇒ Exercice n°2

1°/ On a $3 \times 2 = 6$

$3 \times 2 \neq 0$ ↯.

Donc $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ne sont pas colinéaires.

Donc $(\vec{u}; \vec{v})$ est une base de plan.

2°/ Soient $(a,b,c) \in \mathbb{R}^3$ tq $a\vec{u} + b\vec{v} + c\vec{w} = \vec{0}$

$$\begin{cases} 3a + 6b + 2c = 0 \\ 3a + 0b - 2c = 0 \\ 3a + 9b + 2c = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2c + 6b + 2c = 0 \\ 3a = 2c \\ 2c + 9b + 2c = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 6b + 4c = 0 \\ 3a = 2c \\ 9b + 4c = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 4c = -6b \\ 3a = 2c \\ 9b - 6b = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 4c = -6b \\ 3a = 2c \\ 3b = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} c = 0 \\ a = 0 \\ b = 0 \end{cases}$$

Donc $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ sont linéairement indépendant.

Donc ils forment une base de l'espace.

8

## ⇒ Exercice n°3

1°/ On a $-1 \leq (-1)^n \leq 1$

$$\frac{-1}{n+1} \leq \frac{(-1)^n}{n+1} \leq \frac{1}{n+1} \quad (\text{car } n+1 \neq 0)$$

$$1 - \frac{1}{n+1} \leq 1 + \frac{(-1)^n}{n+1} \leq 1 + \frac{1}{n+1}$$

Or $\lim_{+\infty} 1 - \frac{1}{n+1} = \lim_{+\infty} 1 + \frac{1}{n+1} = 1$

et $1 - \frac{1}{n+1} \leq U_n \leq 1 + \frac{1}{n+1}$

Donc, par le thm d'encadrement,

$\lim_{+\infty} U_n = 1$ (converge)

2°/ $V_n = (-2) \times \frac{5^{n+1}}{3^n} = (-10) \times \frac{5^n}{3^n} = (-10) \times \left(\frac{5}{3}\right)^n$

Or $\lim_{+\infty} -10 = -10$

$\lim_{+\infty} \left(\frac{5}{3}\right)^n = +\infty$ (car $q = \frac{5}{3} > 1$)

Donc, par produit, $\lim_{+\infty} V_n = -\infty$ (diverge)

3°/ On a $-1 \leq \cos(n) \leq 1$

$$5n^3 - 1 \leq z_n \leq 5n^3 + 1$$

Or $\lim_{+\infty} 5n^3 - 1 = +\infty$ et $z_n \geq 5n^3 - 1$

Donc, par comparaison $\lim_{+\infty} z_n = +\infty$