MATHÉMATIQUES

PREMIÈRE SPÉCIALITÉ

2025 - 2026

Scan me

lycée L'immac
IMMACULÉE CONCEPTION

K. Blayassi

Table des matières

Chapitre 1 - Second degré (partie 1) **2**
Fiche 1 - Déterminer si une fonction est un polynôme du second degré 2
Fiche 2 - Donner la forme canonique d'un trinôme 4
Fiche 3 - Etudier les variations d'un trinôme 5

Chapitre 2 - Dérivation locale **6**
Fiche 4 - Calculer un taux de variation 6
Fiche 5 - Calculer un nombre dérivé 7
Fiche 6 - Déterminer graphiquement un nombre dérivé 8
Fiche 7 - Déterminer l'équation réduire d'une tangente 9

Chapitre 3 - Généralités sur les suites **10**
Fiche 8 - Calculer les termes d'une suite 10
Fiche 9 - Étudier les variations d'une suite 12

Chapitre 4 - Trigonométrie **13**
Fiche 10 - Convertir des angles 13
Fiche 11 - Se repérer sur le cercle trigonométrique 14
Fiche 12 - Déterminer le cosinus ou le sinus d'un nombre réel 16

Chapitre 5 - Second degré (partie 2) **18**
Fiche 13 - Résoudre une équation du second degré 18
Fiche 14 - Factoriser un trinôme 19
Fiche 15 - Déterminer le signe d'un polynôme 20

Chapitre 6 - Dérivation globale **21**
Fiche 16 - Dériver une fonction usuelle 21
Fiche 17 - Dériver la somme de deux fonctions 22
Fiche 18 - Dériver le produit de deux fonctions 23
Fiche 19 - Dériver le quotient de deux fonctions 24
Fiche 20 - Dériver une fonction composée affine 25

Chapitre 7 - Produit scalaire **26**
Fiche 21 - Calculer un produit sclaire en connaissant deux longueurs et un angle 26
Fiche 22 - Calculer un produit scalaire avec le projeté orthogonal 27
Fiche 23 - Calculer avec le produit scalaire 28
Fiche 24 - Calculer un produit scalaire avec des normes 30

Chapitre 8 - Suites arithmétiques et géométriques **31**
Fiche 25 - Déterminer la nature d'une suite 31
Fiche 26 - Déterminer les variations d'une suite arithmétique ou géométrique . . 33
Fiche 27 - Calculer la somme des termes d'une suite arithmétique ou géométrique 35

Chapitre 9 - Probabilités conditionnelles et indépendance **37**
Fiche 28 - Calculer des probabilités conditionnelles 37
Fiche 29 - Utiliser un arbre pondéré pour modéliser un problème 38
Fiche 30 - Utiliser la formule des probabilités totales 39
Fiche 31 - Déterminer si deux événements sont indépendants 40

Chapitre 10 - Application au produit scalaire **41**
Fiche 32 - Démontrer que deux vecteurs sont orthogonaux 41
Fiche 33 - Calculer une longueur ou un angle avec Al-Kashi 42
Fiche 34 - Déterminer l'ensemble des points tels que $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = k$ 43

Chapitre 11 - Variation d'une fonction **44**
Fiche 35 - Etudier les variations d'une fonction 44
Fiche 36 - Déterminer les extremums d'une fonction 45

Chapitre 12 - Variables aléatoires **47**
Fiche 37 - Modéliser une situation à l'aide d'une variable aléatoire 47
Fiche 38 - Déterminer la loi de probabilité d'une variable aléatoire 48
Fiche 39 - Calculer une espérance, une variance et un écart-type 49

Chapitre 13 - Fonction exponentielle **51**
Fiche 40 - Utiliser les propriétés algébriques de l'exponentielle 51
Fiche 41 - Résoudre des équations et inéquations avec des exponentilles 53
Fiche 42 - Etudier une fonction contenant des exponentielles 54

Chapitre 14 - Géométrie analytique **55**
Fiche 43 - Exploiter le lien entre vecteur normal et equation cartésienne 55
Fiche 44 - Déterminer si deux droites sont perpendiculaires 56
Fiche 45 - Déterminer l'équation cartésienne d'un cercle 57

Chapitre 15 - Fonctions trigonométriques **58**
Fiche 46 - Connaitre les fonctions trigonométriques 58

Déterminer si une fonction est un polynôme du second degré

I Comment faire ?

Méthode : Comment déterminer si une fonction est un polynôme du 2^{nd} degré ?

Algébriquement :

1. On développe au maximum l'expression algébrique de la fonction
2. On simplifie l'expression
3. Si la fonction peut s'écrire sous la forme $f(x) = ax^2 + bx + c$ avec a non nul, la fonction est un polynôme du second degré.

Graphiquement :

1. On représente graphiquement la fonction
2. Si la courbe représentative de la fonction est une parabole, la fonction est un polynôme du second degré.

Exemples : $f(x) = 5x^2 - \frac{4}{5}x + 2$ ....

$k(x) = (x-5)(x+2)$ ....

$g(x) = -3x + 2$ ....

$h(x) = 2x^4 + 21x + 7$ ....

II Pourquoi ?

Définition : Fonction polynôme du second degré

....

....

....

....

Remarque

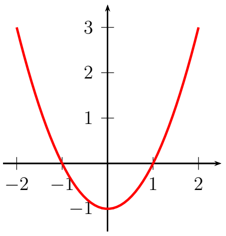
....

Définition : Parabole

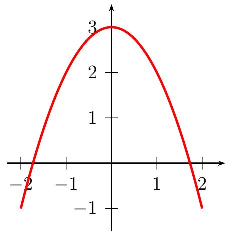
Les fonctions polynomiales du second degré sont représentées par des **paraboles**.

Exemples :

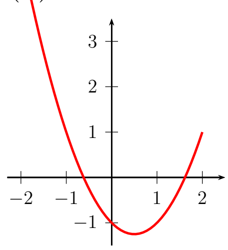
$f(x) = x^2 - 1$



$f(x) = -x^2 + 3$



$f(x) = x^2 - x - 1$



Donner la forme canonique d'un trinôme

I Comment faire ?

Méthode algébrique : Comment déterminer la forme canonique d'un trinôme ?

On prendra pour exemple $f(x) = 6x^2 + 5x - 3$.

1. On factorise l'expression de f par le coefficient de x^2 :

   ....

2. On met en évidence une identité remarquable.

   $$\ldots\ldots\ldots\ldots = \ldots\ldots\ldots\ldots$$
   $$= \ldots\ldots\ldots\ldots$$
   $$= \ldots\ldots\ldots\ldots$$

3. On développe et simplifie :

   ....

Méthode calculatoire : Comment déterminer la forme canonique d'un trinôme ?

On prendra pour exemple $f(x) = 6x^2 + 5x - 3$.

1. On calcule α : ....
2. On calcule β : ....
3. On donne la forme canonique :

   ....

II Pourquoi ?

Propriété : Forme canonique (démontrée)

Pour toute fonction polynôme définie par $ax^2 + bx + c$, il existe deux réels α et β tels que :

$$ax^2 + bx + c = a(x - \alpha)^2 + \beta$$

....

Démonstration

Voir cahier d'exercice

Propriété (admise)

....

Étudier les variations d'un trinôme

I Comment faire ?

Méthode : Comment étudier les variations d'un trinôme du second degré ?

On prendra pour exemple : $f(x) = 2x^2 - 12x + 20$

1. On identifie les coefficients du trinôme. ....
2. Calculer les coordonnées $(\alpha; \beta)$ du sommet de la parabole.
   ....
3. Dresser le tableau de variation en fonction du signe de a.
   ....

II Pourquoi ?

Propriété : Variations (admise)

Soit f une fonction polynôme du second degré, définie par $f(x) = ax^2 + bx + c$.

- ....
- ....

Remarques

Quand a est positif, la courbe représentative "sourit".
Quand a est négatif, la courbe représentative est "triste".

Propriété : Sommet de la parabole (admis)

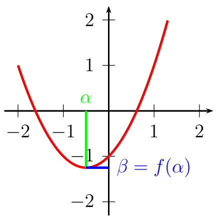
Soit f une fonction polynôme du second degré définie par $f(x) = a(x-\alpha)^2+\beta$ avec $a \neq 0$.

- ....
- ....

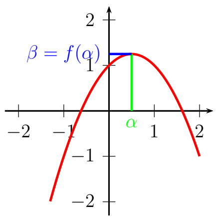
Cet extremum est appelé **sommet** de la parabole.

Exemples :

Si $a > 0$



Si $a < 0$



Propriété : Axe de symétrie (admis)

....

Calculer un taux de variation

I Comment faire ?

Méthode : Comment calculer un taux de variation ?

On cherchera a calculer le taux de variation de $f(x) = x^2$ en $a = 1$.

1. On calcule $f(a)$

   ....

2. Soit $h \in \mathbb{R}^*$, on calcule $f(a+h)$

   ....

3. On calcule le taux de variation de f en a, noté $T_{f,a}(h)$, avec les résultats précédents.

   ....

   ....

4. On simplifie au maximum

   ....

   ....

II Pourquoi ?

Définition : Taux de variation

....

....

....

....

....

....

Remarque : Lien avec la Seconde

....

....

....

....

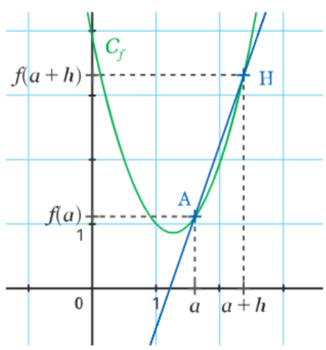
....

....

....

....

....



Remarque : En physique

....

....

Calculer un nombre dérivé

I Comment faire ?

Méthode : Comment calculer le nombre dérivé de f en a ?

Soit f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2 + 2x - 3$.
On cherche à montrer si f est dérivable en $x = 2$ ou non. Si oui, on calculera ensuite $f'(2)$.

1. On calcule le taux d'accroissement de f en a (voir Fiche 4)

   ....

   ....

   ....

2. On fait tendre h vers zéro. Si le résultat est un réel, c'est le nombre dérivé de f en a. Si le résultat dépend de h, alors f n'est pas dérivable en a.

   ....

3. On conclut

   ....

II Pourquoi ?

Définition : Nombre dérivé

....

....

....

....

....

Remarques

L'expression "tend vers un nombre" signifie "se rapproche de plus en plus de ce nombre".
Pour gagner du temps, on note généralement :

....

Remarques

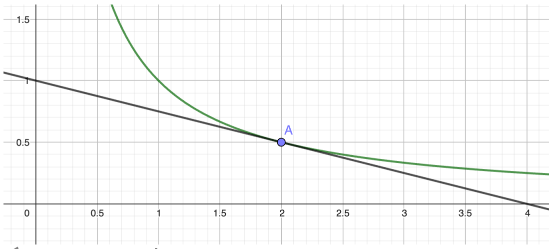
- En physique, lorsque $y = f(x)$, le nombre dérivé $f'(x)$ est noté $\frac{dy}{dx}$.
- Si $f(a)$ représente la distance parcourue par un objet à l'instant a, alors le nombre dérivé $f'(a)$ représente sa vitesse instantanée de déplacement au même instant.
- Une fonction peut NE PAS être dérivable en un réel a. Par exemple, les fonctions $x \to \sqrt{x}$ et $x \to |x|$ ne sont pas dérivable en 0. (voir DHC)

Déterminer graphiquement un nombre dérivé

I Comment faire ?

Méthode : Comment déterminer graphiquement un nombre dérivé ?

On considère la fonction f représentée ci-contredéfinie sur $\mathbb{R}_+^*$ et la tangente à cette courbe au point A d'absicce 2. On cherchera à déterminer $f'(2)$.



1. Repérer la tangente à la courbe au point d'abscisse a.
   Ici, la tangente au point d'absisse 2 est dessinée en verte.

1. Lire le coefficient directeur de cette tangente ou le calculer avec la forme $\dfrac{y_B - y_A}{x_B - x_A}$ (où A et B sont deux points de la tangente).

   ....

2. On conclut : le coefficient directeur de la tangente correspond au nombre dérivé recherché !

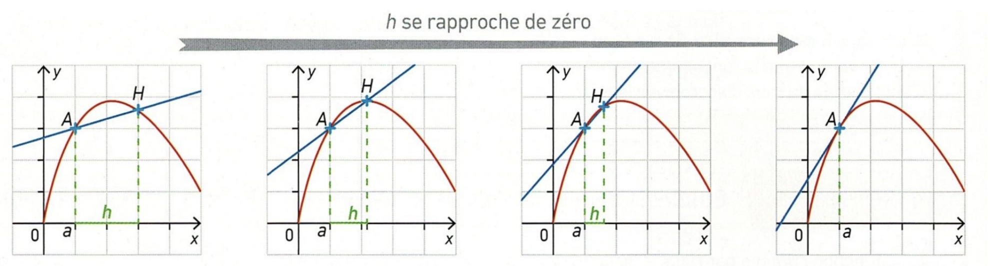
   ....

II Pourquoi ?

Remarque : Approche graphique

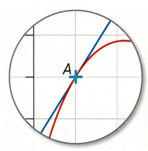
Soit f une fonction définie sur un intervalle I, a un nombre appartenant à cet intervalle et h un nombre réel non nul tel que $a+h \in I$. Soit $A(a, f(a))$ et $H(a+h, f(a+h))$ deux points de la courbe représentative de f.

Lorsque h tend vers zéro, la droite (AH) de coefficient directeur $\dfrac{f(a+h)-f(a)}{h}$ occupe alors une position limite que l'on va définir.



Définition : Tangente

....
....
....
....



Déterminer l'équation réduite d'une tangente

I Comment faire ?

Méthode : Comment déterminer l'équation réduite d'une tangente ?

On cherche à déterminer l'équation réduite de la tangente à la courbe représentative de f définie par $f(x) = x^3 - x^2 + x - 1$ au point d'abscisse $a = 1$

1. On calcule $f(a)$:

   ....

2. On calcule $f'(a)$ (voir fiche 5)

   ....

   ....

   ....

3. On applique la forme : $T_A : y = f'(a)(x - a) + f(a)$ et on développe/simplifie.

   ....

   ....

II Pourquoi ?

Propriété (démontré)

Soit f une fonction dérivable en a.

....

....

....

Démonstration au programme

La tangente T_A au point $A(a, f(a))$ de la courbe représentative de f est une droite. Elle a donc pour équation réduite : $y = mx + p$ où m et p sont des réels que l'on cherche à déterminer.

....

....

Déterminons maintenant p. ....

....

On peut donc remplacer p par cette expression dans l'équation réduite de T_A :

....

Ainsi, on obtient bien que : ....

Calculer les termes d'une suite

I Comment faire ?

Méthode : Comment calculer les termes d'une suite ? (par le calcul)

Prenons pour exemple les suites (u_n) et (v_n) définies par : $u_n = 3n + 4$ et $v_0 = 2$, $v_{n+1} = 2v_n$.

1. Déterminer si la suite est définie explicitement ou par une relation de récurrence :
   ....
   ....
   ....
2. Si la suite est définie explicitement, on remplace n par le rang du terme que l'on souhaite calculer :
   ....
3. Si la suite est définie par une relation de récurrence, on calcule les termes les uns après les autres :
   ....
   ....

Méthode : Comment calculer les termes d'une suite ? (avec la calculatrice)

Avec la Casio Graph 35+E

1. Se rendre dans le menu RECUR
2. Appuyer sur TYPE (F3) pour choisir entre une suite définie explicitement ($a_n =$ ...) ou par récurrence ($a_{n+1} =$ ...).
3. Taper l'expression de la suite
4. Appuyer sur SET (F5) et entrer le premier range et le dernier rang dont vous souhaitez calculer les termes.
5. Revenez en arrière (EXIT) puis appuyez sur TABL.

ASTUCE : Si une erreur de condition s'affiche, appuyez deux fois sur F1 et recommencez l'étape 5.

II Pourquoi ?

1 Définition d'une suite

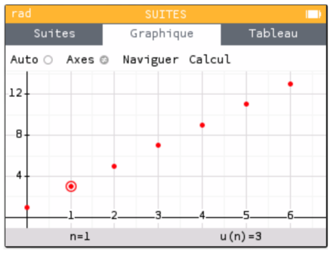
Intuitivement, une suite numérique est une liste ordonnée (l'ordre est important) et infinie de nombres réels. Nous allons définir ce concept avec plus de rigueur :

Définition : Suite numérique

....
....
....
....
....

Remarques

- ....
  ....
- ....
- ....
  ....



Exemples :
On peut considérer la suite (u_n) *des nombres entiers naturels impairs : 1, 3, 5, ...*
On a donc : $u_0 = ...,\ u_1 = ...,\ u_2 = ...,\ u_3 = ...,\ ...$
On dit que : ....

2 Formule explicite

Définition : Suite définie par une formule explicite

....
....
....

Exemples :
Soit (u_n) *la suite définie pour tout naturel* n *par* $u_n = n^2 + 7n - 3$.
Cette suite est définie explicitement puisque $u_n = f(n)$ *avec* $f(x) =$ ....
Ainsi, on a : $u_1 =$ ...., $u_{100} =$ ....

3 Relation de récurrente

Définition : Suite définie par relation de récurrence

Une suite est définie par **une relation de récurrence** lorsqu'elle est définie par :

- ....
- ....

....
....

Exemples :
On définit la suite (v_n) *par* $v_0 = 3$ *et pour tout entier naturel* n, $v_{n+1} = 4v_n - 6$.
On a donc : ....

Remarque

Pour calculer des termes de rang important avec une suite définie par récurrence, on pourra écrire un algorithme avec Python pour calculer les termes successifs de la suite. Par exemple, avec la suite définie précédemment :

```
def suite(n) :
  v=...
  for i in range(1, n+1):
    v=..........
  return v
```

```
>> suite(100)

67108866
```

Étudier les variations d'une suite

I Comment faire ?

Méthode : Comment étudier les variations d'une suite ?

Il existe trois méthodes différentes. Il faut savoir utiliser les trois !
Prenons pour exemple la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}^*$ par $u_n = \frac{1}{n}$.

Méthode 1 - Étudier le signe de $u_{n+1} - u_n$

1. Si pour tout entier n, $u_{n+1} - u_n > 0$ alors $u_{n+1} > u_n$ donc (u_n) est croissante.
2. Si pour tout entier n, $u_{n+1} - u_n < 0$ alors $u_{n+1} < u_n$ donc (u_n) est décroissante.

....

....

....

Méthode 2 - Comparer $\dfrac{u_{n+1}}{u_n}$ à 1

1. Si tous les termes de la suite sont strictement positifs, on calcule $\dfrac{u_{n+1}}{u_n}$.
2. Si pour tout entier n, $\frac{u_{n+1}}{u_n} > 1$, alors $u_{n+1} > u_n$. Donc (u_n) est croissante.
3. Si pour tout entier n, $\frac{u_{n+1}}{u_n} < 1$, alors $u_{n+1} < u_n$. Donc (u_n) est décroissante.

....

....

....

Méthode 3 - Variation de la fonction

1. Si la suite est définie explicitement, on étudie le sens de variation de la fonction f telle que $u_n = f(n)$.

....

II Pourquoi ?

Définition : Variations d'une suite

On dit qu'une suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ est :

- **croissante** si et seulement si, ...
- **décroissante** si et seulement si, ...
- **constante** si et seulement si, ...

Remarques

- Pour certaines suites, les inégalités ne sont vraies que pour $n \geq k$ (avec $k \in \mathbb{N}$). On dit alors que (u_n) est (dé)croissante *à partir du rang* k.
- Comme pour les fonctions, si on remplace les inégalités larges par des inégalités strictes, on parle de suite **strictement croissante** ou **strictement décroissante**.
- Lorsqu'une suite est croissante ou décroissante, on dit qu'elle est monotone.
- ....

Convertir des mesures d'angles

I Comment faire ?

Méthode : Comment convertir des mesures d'angles ?

Méthode 1 : Convertir des degrés en radians

On mutliplie la mesure en degré par $\dfrac{\pi}{180}$: Par exemple, $150° = 150 \times \dfrac{\pi}{180} = \dfrac{5\pi}{6}$rad

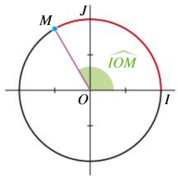
Méthode 2 : Convertir des radians en degrés

On multiplie la mesure en radian par $\dfrac{180}{\pi}$: Par exemple, $\dfrac{5\pi}{3}$rad $= \dfrac{5\pi}{3} \times \dfrac{180}{\pi} = 300°$

Remarque

On peut également utiliser un tableau de proportionnalité :

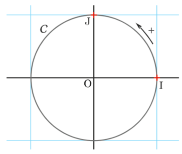
Mesure de l'angle $\widehat{IOM}$ en degré	....	....	....	....
Longueur de l'arc $\widehat{IM}$ = Mesure en radian	....	....	....	....



II Pourquoi ?

Définition : Cercle trigonométrique

Dans un repère orthonormé (O, I, J), le cercle de centre O et de rayon 1 parcouru de I vers J (dans le sens inverse des aiguilles d'une montre) est appelé le **cercle trigonométrique**.



Remarque

On dit généralement qu'on tourne dans le "sens trigonométrique" ou dans le "sens direct".

Propriété : Longueur d'arc (admise)

Sur le cercle trigonométrique, la longueur de l'arc de cercle $\widehat{IM}$ (dans la même unité de longueur que celle du repère) est proportionnelle à la mesure en degré de l'angle $\widehat{IOM}$.

Définition : Un radian

La mesure en radian d'un angle correspond à la longueur de l'arc de cercle formé par cet angle sur le cercle trigonométrique.

Propriété : Conversion en radian (admise)

Les mesures d'un angle en degré et en radian sont proportionnelles.
On en déduit le tableau de conversion suivant avec des valeurs usuelles à connaître :

$\times \dfrac{180}{\pi}$ (radian → degré) ; $\times \dfrac{\pi}{180}$ (degré → radian)

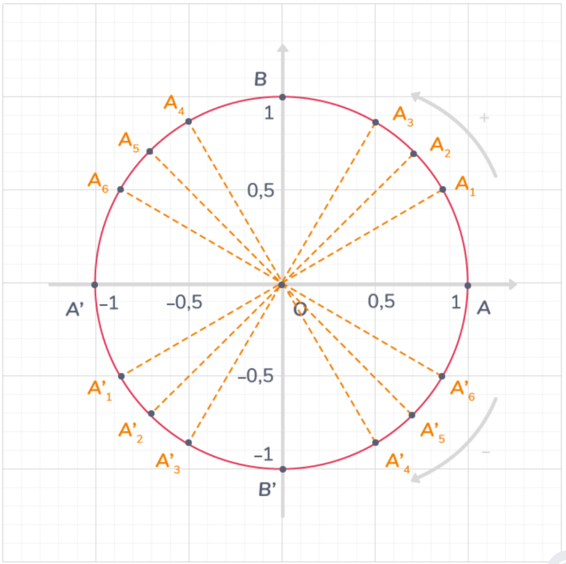
Mesure en degré	30	45	60	90	180	1	$\frac{180}{\pi}$
Mesure en radian	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{\pi}{180}$	1

Se repérer sur le cercle trigonométrique

I Comment faire ?

Méthode : Comment se repérer sur le cercle trigonométrique ?

On prendra pour exemple le point associé au réel $\frac{7\pi}{3}$



1. Si le réel n'appartient pas à l'intervalle $]-\pi;\pi]$, déterminer la mesure principale de l'angle.

   ....

   ....

   ....

   ....

   ....

2. On vérifie le signe de la mesure principale de l'angle.

   ....

   ....

   ....

3. On place le point.

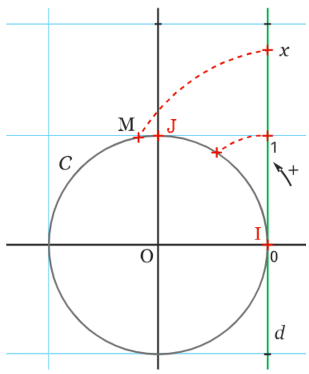
   ....

   ....

   ....

II Pourquoi ?

On se place dans un repère orthonormé (O, I, J). On considère le cercle trigonométrique et la tangente (d) au cercle au point I. On définit sur cette droite un repère d'origine I comme illustré ci-contre.



Définition : Point-image

....

....

....

Propriété (démontré)

....
....
....

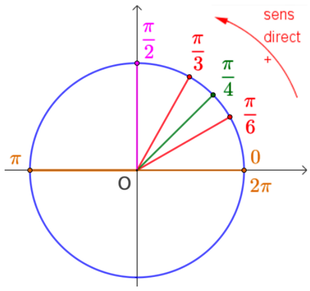
Démonstration

Principe : Le périmètre du cercle trigonométrique est de 2π u.l. Ainsi, pour tout point M appartenant au cerlce, on peut alors soit calculer la longueur de l'arc $\widehat{IM}$, soit "faire un tour de plus" (ou plusieurs) jusqu'à revenir au point M. On aura donc parcourut la longueur de l'arc $\widehat{IM}$ augmentée de 2π par nombre de tours effectué.
Remarque : En parcourant le cercle dans le sens indirect, les valeurs seront négatives.

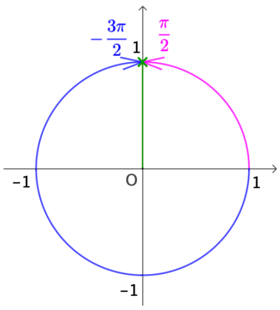
Exemple : $\pi = \mathbf{3}\pi - 1 \times 2\pi$ *ou encore* $\pi = -\mathbf{5}\pi + 3 \times 2\pi$.
Donc $\pi, 3\pi$ *et* -5π *ont le même point image : ......*

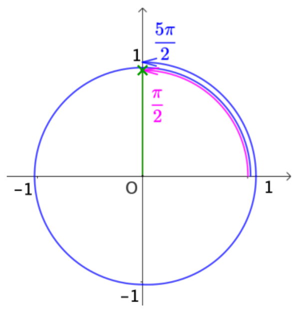
Remarques

- Voici quelques mesures remarquables sur le cercle trigonométrique :

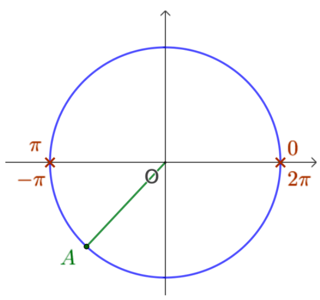


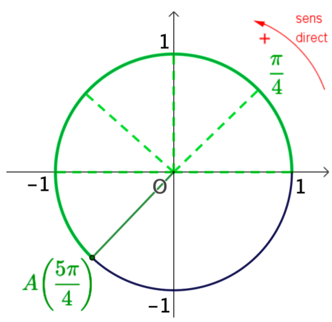
- Chaque angle admet une infinité de mesure en radian. Par exemple, l'angle droit correspond à $\frac{\pi}{2}$ rad mais aussi $\frac{-3\pi}{2}$rad, $\frac{5\pi}{2}$rad, ... On parle de mesure principale lorsqu'elle appartient à l'intervalle $]-\pi;\pi]$.

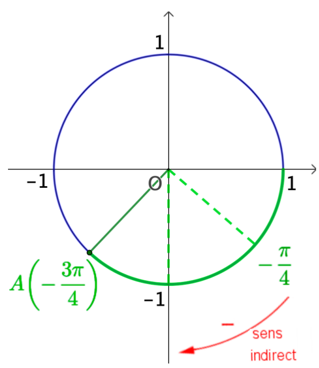




- Les mesures remarquables permettront de lire un grand nombre de valeurs sur le cercle :







Déterminer le cosinus ou le sinus d'un nombre réel

I Comment faire ?

Méthode : Comment déterminer le cosinus ou le sinus d'un nombre réel ?

On prendra pour exemple l'angle de mesure $\frac{13\pi}{4}$rad.

1. Si nécéssaire, on détermine le mesure principale de l'angle. (voir fiche 11)

   ....

   ....

   ....

2. Si le mesure de l'angle fait parti des valeurs remarquables, on conclut. Sinon, on utilise les angles associés (symétrie sur le cercle) pour déterminer le cosinus et le sinus.

   ....

   ....

   ....

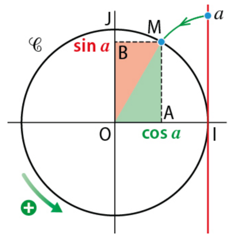
II Pourquoi ?

1 Définition et propriétés

Définition : Cosinus et sinus d'un réel

Soit M le point du cercle trigonométrique associé au nombre x.

- ....
  ....
- ....
  ....



Propriétés (démontrées)

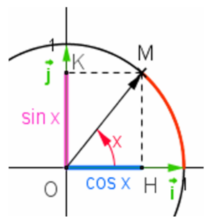
① ....

② ....

Démonstration

① Le cercle est de rayon 1. donc $-1 \leq \sin(x) \leq 1$ et $-1 \leq \cos(x) \leq 1$.

② Dans le triangle OHM rectangle en H, le théorème de Pythagore permet d'établir que : $\cos^2(x) + \sin^2(x) = OM^2 = 1$.



Exemples :

On a $\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2}$ *et* $\sin\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

Donc $-1 \leq \sin\left(\frac{\pi}{3}\right) \leq 1$, $-1 \leq \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) \leq 1$ *et* $\cos^2\left(\frac{\pi}{3}\right) + \sin^2\left(\frac{\pi}{3}\right) = 1$

2 Valeurs remarquables

Propriétés : Valeurs remarquables (partiellement démontrées)

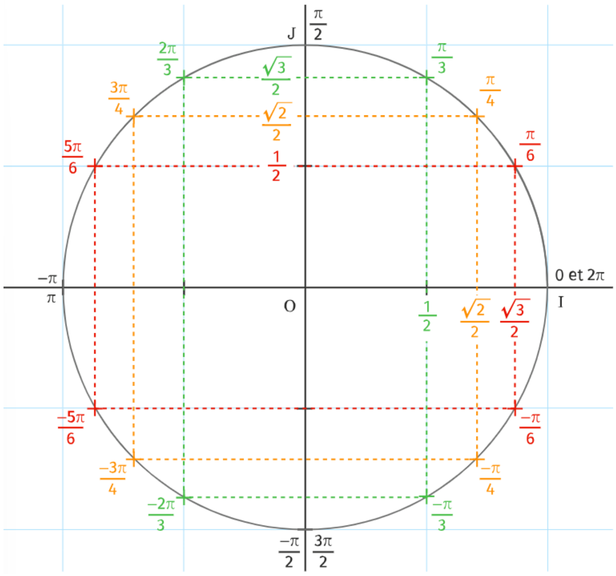
angle	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
$\cos(x)$								
$\sin(x)$								

Démonstration au programme

DHC Démonstrations de $\sin\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$, $\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2}$ et $\sin\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

Remarque

A l'aide de la symétrie axiale (selon l'axe des abscisses ou des ordonnées) ou de la symétrie centrale, on peut en déduire le cosinus et le sinus de nombreux autres angles :



Exemples :

1. *Calculons* $\cos\left(\frac{5\pi}{6}\right)$.

   On sait que ....

   Or, par symétrie par rapport à l'axe des ordonnées, on en déduit que :

   ....

   ....

   ....

2. *Calculons* $\sin\left(\frac{5\pi}{4}\right)$.

   On sait que ....

   Or, par symétrie centrale de centre O, on en déduit que :

   ....

   ....

   ....

Résoudre une équation du 2^{nd} degré

I Comment faire ?

Méthode : Comment résoudre une équation du 2^{nd} degré

On cherchera à résoudre l'équation $3x^2 + 5x + 2 = 0$

1. On repère les coefficients a, b et c du trinôme.

   ....

2. On calcule le discriminant $\Delta = b^2 - 4ac$.

   ....

3. On donne les racines en fonction du signe du discriminant.
   Si $\Delta > 0$, il y a deux racines réelles : $x_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$ et $x_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$.
   Si $\Delta = 0$, il y a une unique racine réelle : $x_0 = \frac{-b}{2a}$.
   Si $\Delta < 0$, il n'y a pas de racine réelle.

   ....
   ....
   ....

4. On conclut.

   ....

II Pourquoi ?

Définition : Equations du second degré

....
....

Définition : Racines

....
....

Définition : Discriminant

Soit $ax^2 + bx + c$ un trinôme du second degré, avec $a \neq 0$.

....
....

Propriété : Résolution dans $\mathbb{R}$ (démontrée)

Soit $ax^2 + bx + c$ un trinôme du second degré et Δ son discriminant.

- ....
- ....
  ....
- ....
  ....

Factoriser un polynôme du 2^{nd} degré

I Comment faire ?

Méthode : Comment factoriser un polynôme du 2^{nd} degré ?

Prenons pour exemple la fonction polynômiale du second degré $f(x) = 3x^2 + 5x + 2$

1. On identifie le coefficient de x^2

   ....

2. On détermine les racines du polynôme (voir fiche 12)

   ....

   ....

3. Si il y a deux racines, la forme factorisée est $f(x) = a(x - x_1)(x - x_2)$.
   Si il y une unique racine, la forme factorisée est $f(x) = a(x - x_0)^2$
   Si il n'y a pas de racine, on ne peut pas factoriser le polynôme dans $\mathbb{R}$.

   ....

   ....

   ....

II Pourquoi ?

Propriété : Factorisation d'un trinôme (admise)

Soit f un trinôme du second degré défini par $f(x) = ax^2 + bx + c$.

- **Si $\Delta > 0$,** ....
- **Si $\Delta = 0$,** ....
- **Si $\Delta < 0$,** ....

Remarque

Si on connait déjà les racines d'un polynôme du second degré, cette propriété nous permet de retrouver le polynôme.

Exemple : Quel est le polynôme du 2^{nd} degré passant par $A(0; 1)$ et qui s'annule en -2 et 4 ?

On sait que le polynôme s'annule en $x_1 = -2$ et $x_2 = 4$. Il possède donc deux racines réelles.
Sa forme factorisée sera donc $f(x) = a(x - x_1)(x - x_2) =$ ....
On peut ensuite développer l'expression pour obtenir sa forme réduite :

....

Or comme la courbe représentative du polynôme passe par $A(0; 1)$, on en déduit que :

....

Au final, le polynôme recherché était donc $f(x) =$ ....

Étudier le signe d'un polynôme du 2nd degré

I Comment faire ?

Méthode : Comment étudier le signe d'un polynôme du 2nd degré ?

Prenons pour exemple la fonction polynômiale du second degré $f(x) = 3x^2 + 5x + 2$

1. On identifie le coefficient a de x^2

   ....

2. On détermine les racines du polynôme (voir fiche 12)

   ....

3. Si il n'y a pas de racine réelle, $f(x)$ est du signe de a.
   Si il y a une unique racine, $f(x)$ est du signe de a et f s'annule en x_0
   Si il y a deux racines, f s'annule en x_1 et x_2 et $f(x)$ sera du signe de a à l'extérieur des racines.
   Ici, il y a deux racines réelles et $a > 0$. On peut donc dresser le tableau de signe suivant :

II Pourquoi ?

Propriété : Signe d'un trinôme (admis)

Soit f un trinôme du second degré défini par $f(x) = ax^2 + bx + c$.

- **Si $\Delta < 0$,** ....
- **Si $\Delta = 0$,** ....
- **Si $\Delta > 0$,** alors :

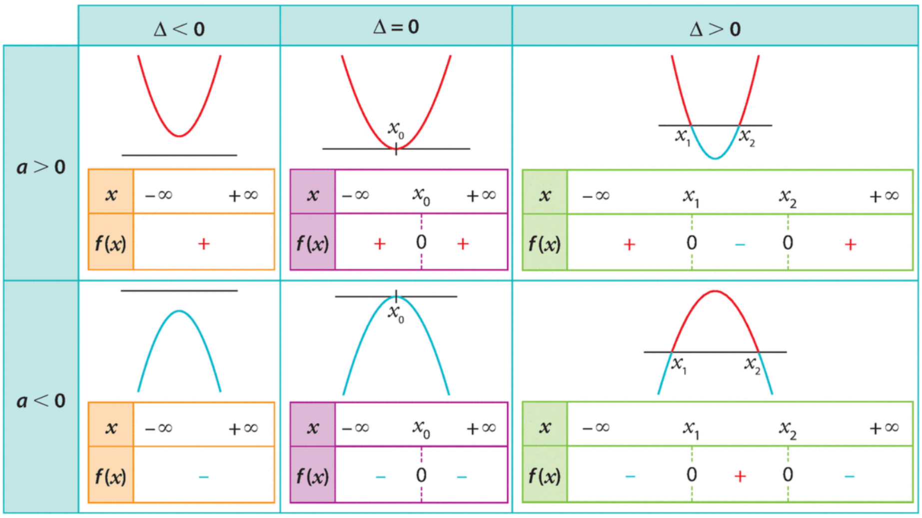
si $a > 0$

x	$-\infty$				$+\infty$
$f(x)$		0		0	

si $a < 0$

x	$-\infty$				$+\infty$
$f(x)$		0		0	

En résumé...



Dériver les fonctions usuelles

I Comment faire ?

Méthode : Comment dériver les fonctions usuelles ?

Fonction	Domaine de définition	Domaine de dérivabilité	Dérivée
$f(x) = k$	$\mathbb{R}$	.....	.....
$f(x) = x$	$\mathbb{R}$	.....	.....
$f(x) = mx + p$	$\mathbb{R}$	.....	.....
$f(x) = x^2$	$\mathbb{R}$	.....	.....
$f(x) = x^n$	$\mathbb{R}$	.....	.....
$f(x) = \frac{1}{x}$	$\mathbb{R}^*$	.....	.....
$f(x) = \frac{1}{x^n}$	$\mathbb{R}$	.....	.....
$f(x) = \sqrt{x}$	$\mathbb{R}_+$	.....	.....
$f(x) = e^x$	$\mathbb{R}$	.....	.....
$f(x) = \sin(x)$	$\mathbb{R}$	.....	.....
$f(x) = \cos(x)$	$\mathbb{R}$	.....	.....

II Pourquoi ?

Définition : Fonction dérivable

....
....
....

Exemple : Soit la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = x$. Soit a un réel.
Pour $h \neq 0$, on a : $T_{g,a}(h) =$ ....
La fonction g est donc dérivable en toute valeur a de $\mathbb{R}$ et $g'(a) =$ ....
Donc la fonction dérivée g' est définie sur $\mathbb{R}$ par $g'(x) =$ ....

Remarque

Attention, toute les fonctions ne sont pas dérivable sur leur domaine de définition entier !
Par exemple, la fonction racine carré n'est pas dérivables en 0 !

Démonstration au programme

Voir DHC 2

Dériver une somme de fonctions

I Comment faire ?

Méthode : Comment dériver une somme de fonctions ?

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}_+$ par $f(x) = x^3 + x^2 + \sqrt{x}$.

1. On identifie chaque terme constituant l'expression algébrique de la fonction.

   ....

2. On dérive séparément chaque terme. (voir fiche 15)

   ....

3. On détermine le domaine de dérivabilité de la fonction f. Il s'agit de l'intersection des domaines de dérivabilité de chaque terme.

   ....

   ....

4. La dérivée de notre fonction est la somme des dérivées de chaque terme.

   ....

   ....

II Pourquoi ?

On considère u et v, deux fonctions dérivables sur un intervalle I.

Propriété (admise)

....

Propriété (Déduite)

....

Exemple : Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 5x^2$.
On remarque que, pour tout réel x, $f(x) = k \times u(x)$ avec $k =$ .... et $u(x) =$ ....
La fonction u est dérivable sur ..... donc f est dérivable sur ..... de dérivée : $f'(x) =$ ....

Démonstration

Cette propriété peut être démontrée en utilisant la précédente.
Soit f une fonction définie sur I par $f(x) = k \times u(x)$, avec u une fonction définie sur I.
Pour tout réel x, on peut écrire que $f(x) = \underbrace{u(x) + u(x) + ... + u(x)}_{k \text{ fois}}$.

Ainsi, $f'(x) = u'(x) + u'(x) + ... + u'(x) = k \times u'(x)$.

Remarque

- On en déduit que les fonctions polynômes du second degré sont dérivables sur $\mathbb{R}$.
- On dit que la dérivée d'une somme est la somme des dérivées. Toutefois, ce n'est pas vrai pour le produit.

Dériver le produit de deux fonctions

I Comment faire ?

Méthode : Comment dériver le produit de deux fonctions ?

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = (x^2 - 5x + 1)(3x + 4)$.

1. On identifie les deux facteurs constituant l'expression algébrique de la fonction.

   ....

2. On dérive séparément chaque produit. (voir fiche 15 et 16)

   ....

3. On applique la formule de la dérivée d'un produit : $(u \times v)' = u'v + uv'$

   ....

4. On simplifie et factorise, si possible, l'expression de la dérivée.

   ....

II Pourquoi ?

Propriété (démontrée)

....

Démonstration au programme

Soient u et v deux fonctions dérivables sur un intervalle I.
On veut démontrer que pour tout a de I, on a :

$$\lim_{h \to 0} \frac{(uv)(a+h) - (uv)(a)}{h} = u'(a)v(a) + u(a)v'(a)$$

Calculons le taux d'accroissement de (uv) en a (avec $h \neq 0$) :

$$\begin{aligned} \frac{(uv)(a+h) - (uv)(a)}{h} &= \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ &= \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ &= \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ &= \dots\dots\dots\dots\dots\dots \end{aligned}$$

Or, on a :

- ....
- ....
- ....

Ainsi, ...

Dériver le quotient de deux fonctions

I Comment faire ?

Méthode : Comment dériver le quotient de deux fonctions ?

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par $f(x) = \dfrac{2x^2+4x-5}{\sqrt{x}}$.

1. On identifie le dividende et le diviseur constituant l'expression algébrique de la fonction.

   ....

   ....
2. On dérive séparément chaque produit. (voir fiche 15 et 16)

   ....

   ....
3. On applique la formule de la dérivée d'un produit : $(\dfrac{u}{v})' = \dfrac{u'v-uv'}{v^2}$

   ....

   ....

   ....
4. On simplifie et factorise, si possible, l'expression de la dérivée.

   ....

II Pourquoi ?

Propriété (admise)

Si, pour tout réel x de I, $v(x) \neq 0$, alors la fonction $\dfrac{u}{v}$ est dérivable sur I et

....

Remarque

Si $v(x) \neq 0$ et $u(x) = 1$ pour tout réel x de I, alors :

....

Exemples :

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^*$ par $f(x) = \dfrac{1}{x^2}$. (On a bien $x^2 \neq 0$ si $x \neq 0$)

On remarque que, pour tout réel positif x, $f(x) = \dfrac{1}{v(x)}$ avec $v(x) =$ ....

La fonction v est dérivable sur $\mathbb{R}$ donc f est dérivable sur $\mathbb{R}^*$ de dérivée :

....

Ainsi, pour tout réel x, $f'(x) =$ ....

Dériver une fonction de la forme $x \mapsto g(ax+b)$

I Comment faire ?

Méthode : Comment dériver une fonction de la forme $x \mapsto g(ax+b)$?

On considère les fonctions $f_1(x) = (3x+1)^2$ et $f_2(x) = \sqrt{5x+2}$

1. On identifie la fonction de référence.

   ....
   ....
   ....

2. On dérive cette fonction de référence.

   ....
   ....

3. On identifie les coefficients m et p de la fonction affine "cachée" dans la fonction de référence.

   ....
   ....
   ....

4. On applique la formule $f'(x) = m \times g'(mx+p)$.

   ....
   ....
   ....
   ....

II Pourquoi ?

Théorème (admis)

Soit g une fonction dérivable sur un intervalle I.
....
....
....
....

Exemples :
On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = (5x+8)^4$.
f est de la forme $f : x \mapsto g(mx+p)$ avec $g(x) =$ ...., $m =$ .... et $p =$ ....
De plus, g est dérivable sur .... et, pour tout réel x, on a $g'(x) =$ ....
On en déduit que f est dérivable sur .... et, pour tout réel x, on a :

$$f'(x) = m \times g'(mx+p) = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Calculer un produit scalaire avec 2 normes et 1 angle

I Comment faire ?

Méthode : Comment calculer un produit scalaire avec 2 longueurs et 1 angle ?

On se place dans un triangle équilatéral ABC de côté 5 unités. Calculons $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$

1. On détermine, si nécessaire, la norme des deux vecteurs.

   ....

2. On détermine la mesure de l'angle formé par les deux vecteurs lorsque on les représente avec la même origine.

   ....

3. On applique la formule : $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = ||\overrightarrow{AB}|| \times ||\overrightarrow{AC}|| \times \cos(\widehat{BAC})$

   ....

II Pourquoi ?

Définition : Produit scalaire

Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs non nul du plan.
Il existe trois points A, B et C tels que $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$ et $\vec{v} = \overrightarrow{AC}$.

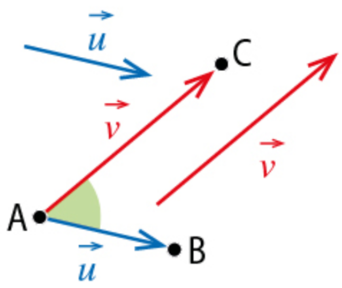
....

....

.... = ...

= ....

....



Remarque

- ....

  ....
- ....

  ....
- Si $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont colinéaires et de même sens alors $\cos(\widehat{BAC}) = \cos(0°) = ...$ et s'ils sont colinéaires de sens contraires alors $\cos(\widehat{BAC}) = \cos(180°) = ...$ Ainsi, on obtient la propriété suivante :

Propriété : Produit scalaire et vecteurs colinéaires

Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs non nuls et colinéaires.

- ....
- ....

Propriété : Carré scalaire (démontrée)

....

....

Calculer un produit scalaire avec le projeté orthogonal

I Comment faire ?

Méthode : Comment calculer un produit scalaire avec le projeté orthogonal

On se place dans une configuration de la définition ci-dessous. On veut calculer $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$.

1. On détermine le projeté orthogonal de C sur la droite (AB)

   ....

2. $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AH}$ sont colinéaires, on compare donc leurs sens (identiques ou contraires).

   ....

3. On applique la formule : $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = ||\overrightarrow{AB}|| \times ||\overrightarrow{AH}||$ s'ils sont dans le même sens, $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = -||\overrightarrow{AB}|| \times ||\overrightarrow{AH}||$ sinon.

   ....

II Pourquoi ?

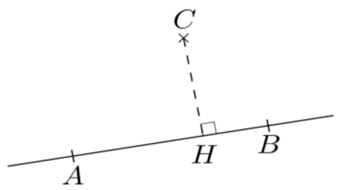
Définition : Projeté orthogonal

Dans le plan, on considère une droite (AB) et un point C.

....

....

....



Propriété (conjecturée)

Pour tout points A, B et C distincts du plan.

....

Propriété : Produit scalaire et vecteurs colinéaires (rappel fiche 20)

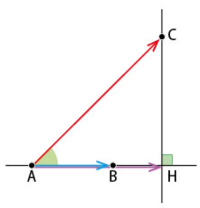
Soient $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ deux vecteurs non nuls et colinéaires.

- ....
- ....

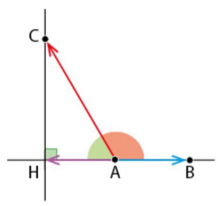
Propriété (conséquence)

Soient A, B et C trois points distincts du plan et H le projeté orthogonal de C sur (AB).

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = \ldots\ldots\ldots\ldots = \begin{cases} \ldots\ldots\ldots\ldots & \text{si } \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots & \text{si } \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{cases}$$



$\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AH}$ de même sens



$\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AH}$ de sens contraires

Calculer avec le produit scalaire

I Comment faire ?

Méthode : Comment calculer avec le produit scalaire

On utilise les même règles qu'avec la multiplication.
On fera attention à différencier $\times$ et $\cdot$.

II Pourquoi ?

Soient $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$ et $\overrightarrow{w}$ trois vecteurs du plan.

Propriété : Symétrie (démontrée)

....

Démonstration

Propriété : Bilinéarité (partiellement démontrée)

1 ....

2 ....

Démonstration

2 Si $k > 0$, on a $\cos(k\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}) = \cos(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$ et $||k\overrightarrow{u}|| = k||\overrightarrow{u}||$.
Donc $\overrightarrow{u} \cdot (k\overrightarrow{v}) = ||\overrightarrow{u}|| \times ||k\overrightarrow{v}|| \times \cos(\overrightarrow{u}, k\overrightarrow{v}) = ||\overrightarrow{u}|| \times k||\overrightarrow{v}|| \times \cos(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}) = k \times (\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v})$.
De même avec $k < 0$ sauf que $\cos(k\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}) = -\cos(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$ et $||k\overrightarrow{u}|| = -k||\overrightarrow{u}||$

Remarque

- Comme le produit scalaire est symétrique, on a aussi $(\overrightarrow{v} + \overrightarrow{w}) \cdot \overrightarrow{u} = \overrightarrow{v} \cdot \overrightarrow{u} + \overrightarrow{w} \cdot \overrightarrow{u}$ et $(k\overrightarrow{v}) \cdot \overrightarrow{v} = k(\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v})$.
- Le produit scalaire est dit **bilinéaire** car il est linéaire (distributif) à gauche et à droite.

Propriétés : Identités remarquables

1 ....

2 ....

3 ....

Démonstration

① ....

....

② ....

....

③ ....

....

Propriétés : Identités remarquable pour les normes (démontrée)

① ....

② ....

③ ....

Démonstration

① et ② $\Longrightarrow$ Exercice 20

③ On a $\overrightarrow{u}^2 = ||\overrightarrow{u}||^2$ et $\overrightarrow{v}^2 = ||\overrightarrow{v}||^2$ d'où le résultat.

Propriétés : Nouvelles formules du produit scalaire (démontrées)

① ....

② ....

③ ....

Démonstration

① $||\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}||^2 = ||\overrightarrow{u}||^2 + 2\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v} + ||\overrightarrow{v}||^2 \Leftrightarrow 2\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v} = ||\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}||^2 - ||\overrightarrow{u}||^2 - ||\overrightarrow{v}||^2 \Leftrightarrow \overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v} = \frac{1}{2}(||\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}||^2 - ||\overrightarrow{u}||^2 - ||\overrightarrow{v}||^2)$

② et ③ Voir Exercice 21

Remarque

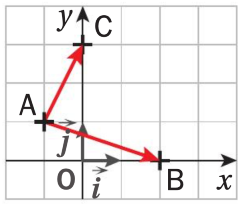
Ces formules du produit scalaire permettent principalement de déterminer des longueurs lorsque le produit scalaire est déjà connu.

Calculer un produit scalaire avec des coordonnées

I Comment faire ?

Méthode : Comment calculer un produit scalaire aavec des coordonnées ?

Prenons pour exemple la configuration du plan ci-contre. On cherche à calculer $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$.



1. Vérifier que le repère est bien orthonormé.

   ....

   ....

2. On détermine les coordonnées des deux vecteurs.

   ....

3. On applique la formule : $\vec{u} \cdot \vec{v} = xx' + yy'$.

   ....

II Pourquoi ?

Propriété : Expression en base orthonormée du produit scalaire (démontrée)

....

....

....

....

Démonstration

$\Longrightarrow$ Exercice 21

Déterminer la nature d'une suite

I Comment faire ?

Méthode : Comment déterminer la nature d'une suite ?

Méthode 1 - Déterminer si une suite est arithmétique ou non

On considère les suites (u_n) et (v_n) définies sur $\mathbb{N}$ par $u_0 = 2$, $u_{n+1} = u_n + 6$ et $v_n = -5n^2 + 7$. Ces suites sont-elles arithmétiques ?

1. On calcule la différence $u_{n+1} - u_n$:

$$\begin{aligned} u_{n+1} - u_n &= (u_n + 6) - u_n \\ &= u_n + 6 - u_n \\ &= 6 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} v_{n+1} - v_n &= (-5(n+1)^2 + 7) - (-5n^2 + 7) \\ &= -5(n^2 + 2n + 1) + 7 + 5n^2 - 7 \\ &= -5n^2 - 10n - 5 + 7 + 5n^2 - 7 \\ &= -10n - 5 \end{aligned}$$

2. Si la différence est constante et indépendante de n, alors la suite est arithmétique de raison $u_{n+1} - u_n$. Sinon, la suite n'est pas arithmétique.
   Ici, $u_{n+1} - u_n = 6 \in \mathbb{R}$ donc (u_n) est arithmétique de raison 6.
   Par contre, $v_{n+1} - v_n = -10n - 5$ (dépend de n) donc (v_n) n'est pas arithmétique.

Méthode 2 - Déterminer si une suite est géométrique ou non

On considère la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par $u_n = 6 \times 0,4^n$. On veut démontrer qu'elle est géométrique.

1. On calcule $\dfrac{u_{n+1}}{u_n}$.

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{6 \times 0,4^{n+1}}{6 \times 0,4^n} = 0,4$$

2. Si le quotient est constant (indépendant de n), alors la suite est géométrique.
   Ici, $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} = 0,4$. Donc (u_n) est géométrique de raison $0,4$.

II Pourquoi ?

1 Suites arithmétiques

Définition : Suite arithmétique

Une suite (u_n) est dite arithmétique lorsqu'il existe un nombre réel r tel que, pour tout entier naturel n :

$$u_{n+1} = u_n + r$$

Le nombre réel r est appelé la **raison** de la suite (u_n)

Exemple : La suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par $u_0 = -5$ et $u_{n+1} = u_n + 6$ est une suite arithmétique de raison 6 et de premier terme $u_0 = -5$.

Propriété : Forme explicite (démontrée)

Si (u_n) est une suite arithmétique de raison r et de premier terme u_p (avec $p \in \mathbb{N}$), alors pour tout entier naturel $n \geq p$ on a :

$$u_n = u_p + (n-p)r$$

En particulier, si le premier terme de la suite est de rang $p = 0$ alors :

$$u_n = u_0 + nr$$

Démonstration au programme

On a, par définition, $u_n = u_{n-1} + r$
Or, $u_{n-1} = u_{n-2} + r$, donc $u_n = u_{n-1} + r = (u_{n-2} + r) + r = u_{n-2} + 2r$.
Or, $u_{n-2} = u_{n-3} + r$, donc $u_n = ... = u_{n-2} + 2r = (u_{n-3} + r) + 2r = u_{n-3} + 3r$
Et on continue ainsi jusqu'au terme de rang $(n-p)$:

$$u_n = ... = u_{n-(n-p)} + (n-p)r = u_{n-n+p} + (n-p)r = u_p + (n-p)r$$

Définition : Éléments caractéristiques

On appelle **éléments caractéristiques** d'une suite (u_n) les informations suivantes : sa nature, son premier terme et sa raison.

2 Suites géométriques

Définition : Suite géométrique

Une suite (u_n) une dite **géométrique** lorsqu'il existe un réel non nul q tel que, pour tout entier naturel n,

$$u_{n+1} = u_n \times q$$

Le nombre réel q est appelé la **raison** de la suite (u_n).

Exemple : La suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par $u_0 = 6$ et $u_{n+1} = \frac{3}{4}u_n$ est une suite géométrique de premier terme 6 et de raison $\frac{3}{4}$.

Propriété : Forme explicite (démontrée)

Si (u_n) est une suite géométrique de raison q et de premier terme u_p (avec $p \in \mathbb{N}$), alors pour tout entier $n \geq p$, on a :

$$u_n = u_p \times q^{n-p}$$

En particulier, si le premier terme de la suite est de rang $p = 0$, alors :

$$u_n = u_0 \times q^n$$

Démonstration au programme

On a, par définition, $u_n = u_{n-1} \times q$
Or, par définition également, $u_{n-1} = u_{n-2} \times q$.
Donc $u_n = ... = u_{n-2} \times q^2$.
En itérant ce procédé, on obtient donc, $u_n = ... = u_p \times q^{n-p}$

Déterminer les variations d'une suite arithmétique ou géométrique

I Comment faire ?

Méthode : Déterminer les variations d'une suite arithmétique ou géométrique ?

Méthode 1 - Si la suite est arithmétique On considère la suite arithmétique définie sur $\mathbb{N}$ par $u_n = 8n + 4$.

1. Déterminer la raison de la suite (voir fiche 24)
   On a $u_{n+1} - u_n = 8n + 32 - 8n - 4 = 28$.
   Donc (u_n) est une suite arithmétique de raison 28.
2. Si la raison est positive, la suite est croissante.
   Si la raison est nulle, la suite est constante.
   Si la raison est négative, la suite est décroissante.
   On a $r = 28 > 0$. La suite est donc croissante.

Méthode 2 - Si la suite est géométrique
On considère la suite (u_n) définit par $u_n = 3 \times 1,2^n$.

1. Déterminer la raison et le premier terme de la suite (voir fiche 26).
   On a $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} = \dfrac{3 \times 1,2^{n+1}}{3 \times 1,2^n} = 1,2$
   De même, $u_0 = 3 \times 1,2^0 = 3$.
   Finalement, (u_n) est une suite géométrique de premier terme $u_0 = 3$ et de raison $q = 1,2$.
2. En utilisant le signe du premier terme et en comparant la raison à 1, conclure sur les variations. Ici, $u_0 > 0$ et $q > 1$. La suite (u_n) est donc croissante.

II Pourquoi ?

1 Suites arithmétiques

Propriété (démontrée)

Soit (u_n), une suite arithmétique de raison r.

- (u_n) est croissante si $r > 0$.
- (u_n) est constante si $r = 0$.
- (u_n) est décroissante si $r < 0$.

Démonstration

Soit (u_n) une suite arithmétique de raison r.
Alors, par définition, $u_{n+1} - u_n = r$.
Le signe de $u_{n+1} - u_n$ est donc celui de r.

Donc, par exemple, si $r > 0$, alors $u_{n+1} - u_n > 0$, donc $u_{n+1} > u_n$.
Ce qui signifie que (u_n) est croissante.

2 Suites géométriques

Propriété : Variation (admise)

Soit (u_n) une suite géométrique de raison q et de premier terme non nul u_0.

Si $u_0 > 0$ alors (u_n) sera :

- croissante si $q > 1$.
- constante si $q = 1$.
- décroissante si $0 < q < 1$.

Si $u_0 < 0$ alors (u_n) sera :

- décroissante si $q > 1$.
- constante si $q = 1$.
- croissante si $0 < q < 1$.

Démonstration

Soit (u_n) une suite géométrique de raison q et de premier terme u_0 non nul.
Supposons $u_0 > 0$.

On a : $u_{n+1} - u_n = u_0 q^{n+1} - u_0 q^n = u_0 q^n (q-1)$.
Or $u_0 > 0$, le signe dépend donc de q.

Si $q = 1$, alors $u_{n+1} - u_n = u_0 \times 1 \times 0 = 0$. Donc $u_{n+1} = u_n$. La suite est donc croissante.
Si $0 < q < 1$, alors $q^n > 0$ et $(q-1) < 0$. Donc $u_{n+1} - u_n < 0 \Leftrightarrow u_{n+1} < u_n$. Donc (u_n) est décroissante.
Si $q > 1$, alors $q^n > 0$ et $(q-1) > 0$. Donc $u_{n+1} - u_n > 0 \Leftrightarrow u_{n+1} > u_n$. Donc (u_n) est croissante.

Calculer la somme des termes d'une suite arithmétique ou géométrique

I Comment faire ?

Méthode : Comment calculer la somme des termes d'une suite ?

On veut calculer la somme $S = 10 + 13 + 16 + ... + 163$ et $T = -3 + 9 - 27 + 81 - 243 + 729$

1. On détermine la nature de la suite
   Pour S : Il s'agit des termes d'une suite arithmétique puisqu'il faut ajouter 3 pour passer d'un terme à l'autre.
   Pour T : Ici, on remarque qu'il faut multiplier par -3 pour passer d'un terme à l'autre. Il s'agit donc bien d'une suite géométrique.
2. On identifie le premier terme, le dernier terme et le nombre de termes :
   Pour S :
   - Ici le premier terme est $u_0 = 10 + 3 \times 0 = 10$.
   - Le dernier terme est $u_{51} = 10 + 3 \times 51 = 163$.
   - Et il y a donc 52 termes dans la somme.

   Pour T :
   - Ici, le premier terme est $u_1 = (-3)^1 = -3$.
   - Le dernier terme est $u_6 = (-3)^6 = 729$.
   - Et la raison de la suite est $q = -3$.
3. On calcule la somme en appliquant la bonne formule :

$$S = 10 + 13 + 16 + \cdots + 163 = \frac{(u_0 + u_{51}) \times (51 - 0 + 1)}{2} = \frac{(10 + 163) \times 52}{2} = 4498$$

$$T = -3 + 9 - 27 + 81 - 243 + 729 = (-3) \times \frac{1 - (-3)^6}{1 - (-3)} = 546$$

II Pourquoi ?

1 Suites arithmétiques

Propriété (démontrée)

Pour tout entier naturel n non nul,
$$1 + 2 + 3 + ... + n = \frac{n(n+1)}{2}$$

Démonstration au programme

On pose $S = 1+2+3+...+(n-1)+n$. On peut donc aussi écrire que $S = n+(n-1)+...+3+2+1$.

Ainsi, on a :

$$\begin{array}{ccccccccccc} S & = & 1 & + & 2 & + & \dots & + & (n-1) & + & n \\ S & = & n & + & (n-1) & + & \dots & + & 2 & + & 1 \\ \hline 2S & = & 1+n & + & 2+(n-1) & + & \dots & + & (n-1)+2 & + & n+1 \end{array}$$

Ainsi, $2S = (n+1) + (n+1) + \dots + (n+1) + (n+1) = (n+1) \times n$. Donc, $S = \dfrac{n(n+1)}{2}$

Propriété : Généralisation (admise)

Soit (u_n) une suite arithmétique. On a :

$$u_p + u_{p+1} + \dots + u_{n-1} + u_n = \frac{(n-p+1) \times (u_p + u_n)}{2}$$

Autrement dit, on a :

$$S = \frac{\text{nombre de termes} \times (\text{premier terme} + \text{dernier terme})}{2}$$

2 Suites géométriques

Propriété (démontrée)

Pour tout entier n non nul et pour tout réel $q \neq 1$,

$$S = 1 + q + q^2 + \dots + q^n = \frac{1-q^{n+1}}{1-q}$$

Démonstration au programme

Soit $n \in \mathbb{N}$ et $q \neq 1$. On pose $S = 1 + q + q^2 + \dots + q^n$, donc $q \times S = q + q^2 + \dots + q^n + q^{n+1}$.

$$\begin{array}{ccccccccccccc} S & = & 1 & + & q & + & q^2 & + & \dots & + & q^n & & \\ qS & = & & & q & + & q^2 & + & \dots & + & q^n & + & q^{n+1} \\ \hline S-qS & = & 1 & + & 0 & + & 0 & + & \dots & + & 0 & - & q^{n+1} \end{array}$$

Ainsi, $S - qS = 1 - q^{n+1} \Leftrightarrow (1-q)S = 1 - q^{n+1} \Leftrightarrow S = \dfrac{1-q^{n+1}}{1-q}$

Propriété : Généralisation (admise)

Soit (u_n) une suite géométrique de raison q. On a :

$$u_p + u_{p+1} + \dots + u_{n-1} + u_n = u_p \times \frac{1-q^{n-p+1}}{1-q}$$

Autrement dit, on a :

$$S = \text{premier terme} \times \frac{1 - \text{raison}^{\text{nombre de terme}}}{1 - \text{raison}}$$

Calculer des probabilités conditionnelles

I Comment faire ?

Méthode : Comment calculer des probabilités conditionnelles ?

Le tableau ci-dessous donne le nombre d'élèves reçus au baccalauréat dans une classe de Terminale. On choisit un élève au hasard. On veut déterminer la probabilité que l'élève soit reçu sachant que c'est une fille.

	Reçu	Non reçu	Total
Filles	18	1	19
Garçons	13	3	16
Total	31	4	35

1. Identifier l'évènement dont on veut calculer la probabilité et l'évènement condition.
   ....
   ....
   ....
2. Ecrire la formule puis calcule la probabilité.
   ....
3. Conclure.
   ....

II Pourquoi ?

On considère une expérience aléatoire, d'univers associé Ω, muni d'une loi de probabilité $\mathbb{P}$.

Définition : Probabilités conditionnelles

Soient A et B deux évènements de Ω avec $\mathbb{P}(A) \neq 0$.
....
....
....

Propriétés (démontrées)

Soient A et B deux évènements de probabilités non nulles.

- ....
- ....

Démonstration

- Par définition, on a : $\mathbb{P}_A(B) = \dfrac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(A)} \Leftrightarrow \mathbb{P}_A(B) \times \mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(A \cap B)$

  De même, on a : $\mathbb{P}_B(A) = \dfrac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(B)} \Leftrightarrow \mathbb{P}_B(A) \times \mathbb{P}(B) = \mathbb{P}(A \cap B)$

Exemple : À la montagne, 80% des vacanciers pratiquent le ski alpin (S) et 20% la randonnée en raquettes. 60% des skieurs et 50% des marcheurs sont des hommes (H). On choisit un vacancier au hasard.

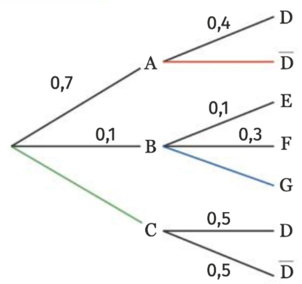
- $\mathbb{P}(S \cap H) =$ ....
  La probabilité que le vacancier choisi soit un homme pratiquant le ski est égale à ....
- $\mathbb{P}_S(\overline{H}) =$ ....
  Si le vacancier pratique le ski, la probabilité que ce soit une femme est de ....

Utiliser un arbre pondéré pour résoudre un problème

I Comment faire ?

Méthode : Comment utiliser un arbre pondéré pour résoudre un problème ?

On considère l'arbre pondéré ci-contre.



Méthode 1 - Compléter un arbre pondéré

On cherchera à compléter les différents noeuds de l'arbre.

1. On fait la somme de toutes les probabilités du noeud, elle doit être égale à 1.
   Premièrement, on a : ....
   Ensuite, ...
   Finalement, ...
2. On en déduit la probabilité manquante.
   Premièrement, ...
   Ensuite, ...
   et ....

Méthode 2 - Calculer une intersection sur un arbre pondéré

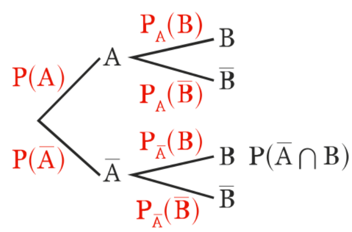
On cherchera à calculer $\mathbb{P}(A \cap D)$.

1. On écrit le chemin à parcourir.
   Ici, ...
2. On remplace par les valeurs et on calcule.
   On a donc ....

II Pourquoi ?

Propriétés (admises)

1. ....
   ....
   ....
2. ....
   ....
   ....
   ....
   ....

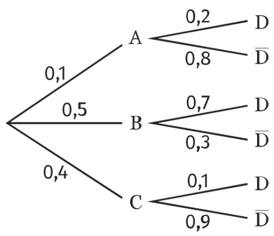


Utiliser la formule des probabilités totales

I Comment faire ?

Méthode : Comment utiliser la formule des probabilités totales ?

On considère l'arbre ci-contre. On cherche à calculer $\mathbb{P}(D)$.



1. On vérifie que les évenements du premier noeud forment bien une partition de l'univers.

   ....

   ....

   ....

2. On écrit la formule des probabilités totales.

   ....

3. On effectue les calculs en détaillant les intersections.

   ....

   ....

4. On conclut

   ....

II Pourquoi ?

Définition : Partition de l'univers

....

....

....

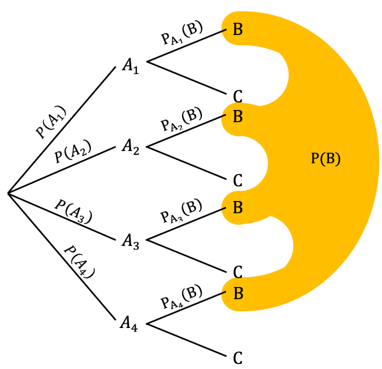
Remarques

- ....
  ....
- ....
  ....

Propriété (admise)

Soient $A_1, A_2, A_3, ..., A_n$ des évènements d'un univers Ω, de probabilités non nulles, qui forment une partition de l'univers Ω.
Pour tout évènement B de l'univers Ω, on a la formule suivante :

....



Déterminer si deux événements sont indépendants

I Comment faire ?

Méthode : Comment déterminer si deux événements sont indépendants ?

On tire au hasard une carte dans un jeu de 32 cartes.

Méthode 1 - Avec la définition

1. On détermine la probabilité des événements A et B.
   L'événement A "la carte tirée est un as" a pour probabilité : ....
   L'événement B "la carte tirée est un coeur" a pour probabilité : ....
2. On déterminer la probabilité de leur intersection.
   L'événement $A \cap B$ est "la carte tirée est l'as de coeur" de probabilité : ....
3. Si $\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A) \times \mathbb{P}(B)$, les événements sont indépendants.
   ....

Méthode 2 - Avec la propriété

1. On calcule $\mathbb{P}_A(B)$ (ou $\mathbb{P}_B(A)$) : ....
2. On calcule $\mathbb{P}(B)$ (ou $\mathbb{P}(A)$) : ....
3. Si $\mathbb{P}_A(B) = \mathbb{P}(B)$ (ou $\mathbb{P}_B(A) = \mathbb{P}(A)$), les événements sont indépendants : ....

II Pourquoi ?

Définition : Evènements indépendants

Soient A et B deux évènements de probabilités non nulles.
....

Propriété (démontrée)

Soient A et B deux évènements de probabilités non nulles.
....

Remarques

- L'égalité $\mathbb{P}_A(B) = \mathbb{P}(B)$ traduit le fait que la réalisation de A ne modifie pas le probabilité de l'évènement B.
- Attention à ne pas confondre évènements indépendants et incompatibles !

Propriété (admise)

Soient A et B deux évènements de probabilités non nulles.
....

Exemple : Soient A et B deux évènements tels que $\mathbb{P}(A) = 0,8$, $\mathbb{P}(B) = 0,35$ et $\mathbb{P}(A \cap B) = 0,28$.

1. *Montrer que A et B sont indépendants.*
2. *Calculer $\mathbb{P}(A \cup B)$ puis $\mathbb{P}(\overline{A} \cap B)$.*

Démontrer que deux vecteurs sont orthogonaux

I Comment faire ?

Méthode : Comment démontrer que deux vecteurs sont orthogonaux ?

Soit $\vec{u}\begin{pmatrix}-4\\5\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}9\\2\end{pmatrix}$. On cherche à déterminer si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont orthogonaux ou non.

1. Calculer le produit scalaire de $\vec{u}$ et $\vec{v}$.

   ....

   ....

2. Si le produit scalaire est nul, les vecteurs sont orthogonaux. Sinon, non.

   ....

   ....

II Pourquoi ?

Définition : Vecteurs orthogonaux

....

....

....

....

Propriété (démontrée)

Pour tout vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ du plan :

....

....

Démonstration

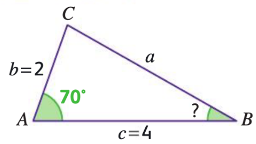
- Montrons, en premier, que si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont orthogonaux alors $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$
  Comme vu au chapitre 7, $\vec{u} \cdot \vec{v} = ||\vec{u}|| \times ||\vec{v}|| \times \cos(\vec{u};\vec{v})$.
  Or, si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont orthogonaux, alors $\cos(\vec{u};\vec{v}) = \cos(\frac{\pi}{2}) = 0$.
  Donc $\vec{u} \cdot \vec{v} = ||\vec{u}|| \times ||\vec{v}|| \times 0 = 0$.
- Montrons maintenant que si $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$ alors $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont orthogonaux.
  Comme $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ne sont pas nuls, $||\vec{u}|| \neq 0$ et $||\vec{v}|| \neq 0$.
  Ainsi, $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0 \Leftrightarrow ||\vec{u}|| \times ||\vec{v}|| \times \cos(\vec{u};\vec{v}) = 0 \Leftrightarrow \cos(\vec{u};\vec{v}) = 0$
  Or, $\cos(\vec{u};\vec{v}) = 0 \Leftrightarrow (\vec{u};\vec{v}) = \frac{\pi}{2} + k\pi \Leftrightarrow \vec{u}$ et $\vec{v}$ sont orthogonaux.

Calculer une longueur ou un angle avec Al-Kashi

I Comment faire ?

Méthode : Comment calculer une longueur avec Al-Kashi ?

On considère le triangle ABC ci-contre. On veut calculer $BC = a$.



1. On écrit la relation du théorème d'Al-Kashi en isolant directement la longueur dont on souhaite calculer la longueur.
   ....
2. On remplace les inconnues du membre de droite par les valeurs numériques.
   ....
3. On effectue les calculs. Attention aux réglages de votre calculatrice !
   ....
4. On détermine notre longueur en prenant la racine carré.
   ....

Méthode : Calculer une mesure d'angle avec Al-Kashi ?

On considère le triangle ABC précédent avec $a = 3,8cm$. On cherche la mesure de $\widehat{CBA}$.

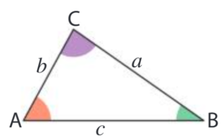
1. On écrit l'égalité d'Al-Kashi dont le côté opposé à notre angle est isolé.
   ....
   ....
2. On remplace avec les données connues.
   ....
   ....
3. On isole le cosinus
   ....
4. Avec la touche `acos` de votre calculatrice, déterminer la mesure de l'angle.
   ....

II Pourquoi ?

Théorème : Al-Kashi

Dans un triangle ABC, avec les notations ci-contre, on a :

....



Démonstration au programme

Considérons le même triangle ABC que ci-dessus. Dans ce triangle, on a :

- D'une part : ....
- D'autre part : ....

Ainsi, on a : ....
Et, finalement, ...

Déterminer l'ensemble des points tels que $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = k$

I Comment faire ?

Méthode : Comment déterminer l'ensemble des points tels que $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = k$?

On cherchera à déterminer l'ensemble des points M tels que $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = 10$ avec $AB = 5$.

1. Remplacer le produit scalaire par le théorème de la médiane.

   ....

2. On remplace AB par sa mesure et on simplifie.

   ....

3. Si MI^2 est négatif, il n'existe pas d'ensemble. Si $MI^2 = 0$ alors l'ensemble est réduit au point I. Sinon, il s'agit de l'ensemble des points du cercle de centre I et de rayon MI.

   ....

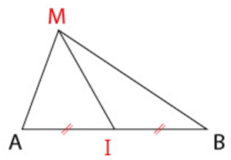
   ....

II Pourquoi ?

Propriété : Théorème de la médiane (démontrée)

Soient A et B deux points données et I le milieu de $[AB]$.
Pour tout point M, on a :

....



Démonstration

On a : $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = (\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IA}) \cdot (\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IB}) = \overrightarrow{MI} \cdot \overrightarrow{MI} + \overrightarrow{MI} \cdot \overrightarrow{IB} = \overrightarrow{IA} \cdot \overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IA} \cdot \overrightarrow{IB}$.
Or, on a :

- $\overrightarrow{MI} \cdot \overrightarrow{MI} = \overrightarrow{MI}^2 = MI$
- $\overrightarrow{IA} \cdot \overrightarrow{IB} = \left(-\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}\right) \cdot \left(\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}\right) = -\frac{1}{4}\overrightarrow{AB}^2 = -\frac{1}{4}AB^2$
- $\overrightarrow{MI} \cdot \overrightarrow{IB} + \overrightarrow{IA} \cdot \overrightarrow{MI} = \overrightarrow{MI} \cdot \overrightarrow{IB} + \overrightarrow{MI} \cdot \overrightarrow{IA} = \overrightarrow{MI} \cdot (\overrightarrow{IB} + \overrightarrow{IA})$

  Or I est le milieu de $[AB]$, on a donc $(\overrightarrow{IB} + \overrightarrow{IA}) = \overrightarrow{0}$. Donc $\overrightarrow{MI} \cdot \overrightarrow{IB} + \overrightarrow{IA} \cdot \overrightarrow{MI} = 0$.

Ainsi, $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = MI^2 + 0 - \frac{1}{4}AB^2 = MI^2 - \frac{1}{4}AB^2$

Propriété : Ensemble des points M tels que $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = 0$ (démontrée)

Soient deux points distincts A et B du plan et I le milieu du segment $[AB]$.
L'ensemble des points M du plan tel que $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = 0$ est le cercle de diamètre $[AB]$.

Démonstration au programme

On a ....
Ainsi, M vérifie $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = 0$ si, et seulement si M appartient au cercle de centre I et de rayon $\frac{1}{2}AB$, autrement dit au cercle de diamètre AB.

Étudier les variations d'une fonction

I Comment faire ?

Méthode : Comment étudier les variations d'une fonction ?

Soit f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2 + 4x + 3$. On cherche à dresser son tableau de variations.

1. Justifier que f est dérivable (et son intervalle de dérivabilité).

   ....

2. On détermine sa dérivée (voir fiches 15 à 19).

   ....

3. On étudie le signe de la dérivée

   ....

4. On en déduit le sens de variation de la fonction f.
   Si f' est positive, f est croissante. Si f' est négative, f est décroissante.

II Pourquoi ?

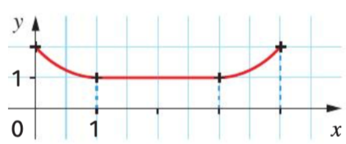
On considère une fonction f définie et dérivable sur un intervalle I.

Théorème (admis)

- ....
  ....
  ....
- ....
  ....
  ....
- ....
  ....
  ....

Exemple : Soit f la fonction définie et dérivable sur $[0;4]$ représentée ci-dessous.

- *Sur $[0;1]$, f est décroissante donc f' est* ....
- *Sur $[1;3]$, f est constante donc f' est* ....
- *Sur $[3;4]$, f est croissante donc f' est* ....



Déterminer les extremums d’une fonction

I Comment faire ?

Méthode : Comment déterminer les extremums d’une fonction ?

On considère les fonctions $f(x) = x^2 + 4x + 3$ et $g(x) = x^3$.

1. On dérive la fonction (voir fiches 15 à 19).

   ....
   ....

2. On cherche pour quelles valeurs de x la fonction dérivée s’annule.

   ....
   ....
   ....

3. On étudie le signe avant et après la ou les valeurs trouvées. Si la fonction dérivée change de signe, elle admet un extremum local, sinon non.

   ....
   ....
   ....
   ....
   ....

II Pourquoi ?

Définitions : Minimum et maximum

Soient f une fonction définie sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ et a un réel de l’intervalle.

- ....
  ....
  ....
- ....
  ....
  ....

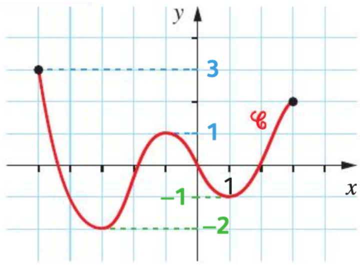
Définition : Extremum

....
....
....

Définition : Extremum local

....
....
....

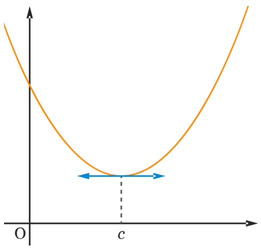
Exemple : Soit f la fonction définie sur $I = [-5;3]$ dont la courbe représentative est donnée ci-dessous.

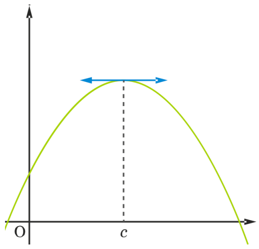


- *Le maximum de f sur I est ....., il est atteint en $x =$ ......*
- *Le minimum de f sur I est ....., il est atteint en $x =$ ......*
- *Le réel 1 est un .... de f car 1 est le .... de f sur .... entre autre.*
- *Le réel -1 est un minimum local de f car -1 est le minimum de f sur l'intervalle $]0;2[$.*
- *3 et -2 sont les extremums de f. 1 et -1 sont des extremums locaux de f.*

Propriété : Lien avec la dérivation (admises)

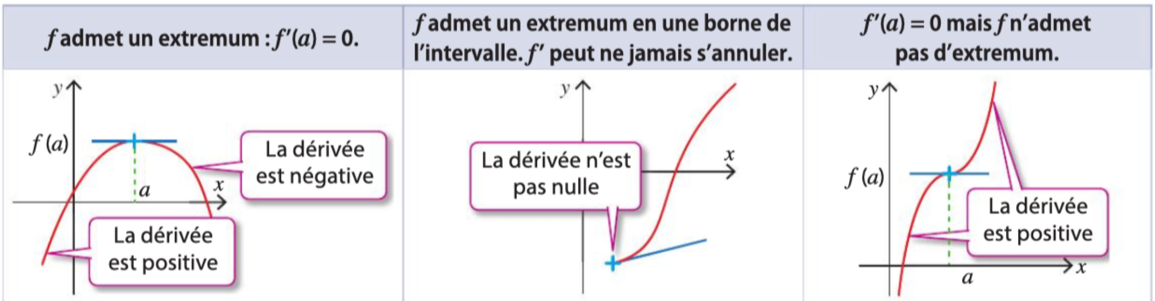
Soient f une fonction dérivable sur un intervalle ouvert I et c un réel de I.
Si f admet un extremum local en c, alors $f'(c) = 0$.





Remarque

Attention, la réciproque n'est pas toujours vraie ! Parfois, $f'(c) = 0$ mais aucun extremum local n'est atteint en c. Il faut une condition supplémentaire.



Propriété (admise)

....

....

....

Modéliser une situation à l'aide d'une variable aléatoire

I Comment faire ?

Méthode : Comment modéliser une situation à l'aide d'une variable aléatoire ?

II Pourquoi ?

Définition : Variable aléatoire

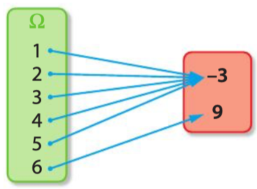
....

....

Remarque

Autrement dit, définir une variable aléatoire X sur Ω consiste à associer un nombre réel à chaque issue de l'expérience aléatoire.

Exemple : Dans une foire, une jeu consiste à lancer un dé. Si on obtient 6, le joueur gagne 6€ sinon, il doit payer 3€.
Si on note X le gain du joueur, X est une variable aléatoire définie sur $\Omega = \{1; 2; 3; 4; 5; 6\}$, et qui peut prendre les valeurs -3 et 6.
On note $X(\Omega) = \{-3; 6\}$



Remarque

- Comme Ω est fini, l'ensemble des valeurs prises par X, c'est-à-dire des images par X, est fini. On parle de **variable aléatoire discrète**.
- Pour une même expérience aléatoire, on peut définir plusieurs variables aléatoires.
- On nomme en général les variables aléatoires avec une lettre majuscule, par exemple X, Y, Z ou S.

Définition (notations)

Soit a un nombre réel. On note :

- ....
- ....
  ....
- ....

Exemple :
Dans le jeu précédent, lorsque le résultat du dé est 1, 2, 3, 4 ou 5, X prend la valeur -3.
On note cet événement $\{X = -3\}$.

Déterminer la loi de probabilité d'une variable aléatoire

I Comment faire ?

Méthode : Comment déterminer la loi de probabilité d'une variable aléatoire ?

Dans une foire, une jeu consiste à lancer un dé. Si on obtient 6, le joueur gagne 6€ sinon, il doit payer 3€.

1. On précise notre modélisation.
   ....
   ....
   ....
2. On détermine la probabilité de chaque événement du type $\{X = k\}$.
   ....
   ....
   ....
   ....
3. On dresse le tableau représentant la loi de probabilité de X.

x_i	-3	9
$P(X=x_i)$	$\frac{5}{6}$	$\frac{1}{6}$

II Pourquoi ?

Définition : Loi de probabilité

....
....

Propriété (admise)

Soit X une variable aléatoire prenant les valeurs $x_1; x_2; ...; x_n$. On a alors :

....

Exemple : Dans le tableau précédent, on a bien $\frac{5}{6} + \frac{1}{6} = 1$.

Calculer une espérance, une variance et un écart-type

I Comment faire ?

Méthode : Comment calculer une espérance, une variance et un écart-type ?

On considère la variable aléatoire X de la fiche 48 dont la loi de probabilité est donné par le tableau ci-dessous :

x_i	-3	9
$P(X = x_i)$	$\frac{5}{6}$	$\frac{1}{6}$

Méthode 1 - Calcul de l'espérance

1. On fait la somme des produits de chaque valeur avec sa probabilité.

   ....

2. On conclut dans le contexte du problème.

   ....

Méthode 2 - Calcul de la variance et de l'écart-type

1. On commence par calculer l'espérance :

   ....

2. On utilise la formule pour calculer la variance.

   ....

3. On calcule l'écart-type en prenant la racine carré de la variance.

   ....

4. On conclut dans le contexte.

   ....

   ....

II Pourquoi ?

On considère une variable aléatoire X définie sur un univers Ω fini et dont la loi de probabilité est donnée par le tableau suivant.

x_i	x_1	x_2	$\dots$	x_n
$P(X = x_i)$	p_1	p_2	$\dots$	p_n

Définition : Espérance

L'**espérance** de la variable aléatoire X est le réel noté $\mathbb{E}[X]$ défini par :

....

Définition : Variance

La **variance** de la variable aléatoire X est le réel **positif** noté $\mathbb{V}[X]$ défini par :

....

Définition : Ecart-type

L'**écart type**, noté $\sigma(X)$, est le réel égal à la racine carrée de la variance :

....

Remarque : Interprétation

- ....
....
....
- ....
....
- ....
....

Propriétés : Linéarité de l'espérance (hors-programme)

Soient a et b deux réels.
On considère la variable aléatoire $Y = aX + b$ (toutes les valeurs prises par X sont multipliées par a puis on ajoute b, les probabilités restent identiques).
On a alors :

- $\mathbb{E}[Y] = a\mathbb{E}[X] + b$
- $\mathbb{V}[Y] = a^2\mathbb{V}[X]$

Utiliser les propriétés algébriques de l'exponentielle

I Comment faire ?

Méthode : Comment utiliser les propriétés algébriques de l'exponentielle ?

Méthode 1 - Notation $\exp$**.**

- ....
- ....
- ....
- ....

Méthode 2 - Notation e**.**

- ....
- ....
- ....
- ....

II Pourquoi ?

1 Premières propriétés

Définition : Fonction exponentielle

....
....
....
....
....

Remarque : Existence

L'existence de la fonction exponentielle est admise, mais peut-être conjecturer à l'aide de la méthode d'Euler.

Démonstration

Voir l'activité 41 et le DHC "Unicité"

Remarque : Déductions

La démonstration de l'unicité permet de donner deux propriétés de la fonction exponentielles :

- ....
- ....

Propriétés algébriques (démontrées)

Pour tout réels a et b, et pour tout entier n, on a :

- ....
- .... *(Relation fonctionnelle)*
- ....
- ....

Démonstration

1. Comme $\exp(a) \times \exp(-a) = 1 \Leftrightarrow \exp(-a) = \dfrac{1}{\exp(a)}$
2. Démontrons la relation fonctionne : $\exp(a+b) = \exp(a) \times \exp(b)$
   Soit y un réel, on définit h sur $\mathbb{R}$ par $h(x) = \exp(x+y) \times \exp(-x)$.
   Ainsi, $\forall x \in \mathbb{R}, h'(x) = 1 \times \exp(x+y) \times \exp(-x) + \exp(x+y) \times (-1) \times \exp(-x) = 0$.
   La fonction h est donc constante sur $\mathbb{R}$. Or $h(0) = \exp(y)$.
   Ainsi, pour tout réel x, on a $h(x) = \exp(y)$.
   On en déduit donc que, $\forall x \in \mathbb{R}, \exp(x+y)\exp(-x) = \exp(y) \Leftrightarrow \exp(x+y) = \dfrac{1}{\exp(-x)} \times \exp(y) \Leftrightarrow \exp(x) \times \exp(y)$
3. $\exp(a-b) = \exp(a+(-b)) = \exp(a) \times \exp(-b) = \exp(a) \times \dfrac{1}{\exp(b)} = \dfrac{\exp(a)}{\exp(b)}$
4. La dernière propriété est admise.

2 Notation e^x

Définition : Nombre e

....

Remarque

....

Propriété : Notation (démontrée)

....
....

Démonstration

Soit n un nombre entier. On a $\exp(n) = \exp(1 \times n) = \exp(1)^n = e^n$.
On étendra cette notation a tout les nombres réels.

Propriété algébriques (v2)

Avec la notation utilisant le nombre e, on a :

- ....
- ....
- ....
- ....

Remarque : Suites géométriques

Pour tout réel a, la suite (e^{na}) est une suite géométrique.

Démonstration

Soit a un réel. On définit la suite (u_n) sur $\mathbb{N}$ par $u_n = e^{na}$.
Pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = e^{(n+1)a} = e^{na+a} = e^{na} \times e^a = u_n \times e^a$.
Ainsi, la suite (u_n) est une suite géométrique de raison e^a et de premier terme $u_0 = e^0 = 1$.

Résoudre des équations et inéquations avec des exponentielles

I Comment faire ?

Méthode : Comment résoudre des équations et inéquations avec des exponentielles

Méthode 1 - Résolution d'équation
On cherchera à résoudre $e^{x^2+3x-4} - e^{x^2+5x} = 0$

1. On se ramène à une équation du type $e^X = e^Y$. Ici, ...
2. On en déduit que $X = Y$. Ainsi, ...
3. On résout l'équation. Finalement, ...

Méthode 2 - Résolution d'inéquation
On cherchera à résoudre $e^{x^2+3x-4} - e^{x^2+5x} < 0$

1. On se ramène à une inéquation du type $e^X ... e^Y$ où "..." $\in \{<, >, \leq, \geq\}$.
   Ici, ...
2. Par stricte croissance, $e^a < e^b \Leftrightarrow a < b$, on en déduit que $X...Y$.
   Ainsi, ...
3. On résout l'inéquation. On a donc, ...

II Pourquoi ?

Propriété : Représentation graphique (démontrées)

- La fonction exponentielle est strictement positive sur $\mathbb{R}$. Autrement dit, on a :

  ....

- La fonction exponentielle est strictement croissante sur $\mathbb{R}$. Autrement dit, on a :

  ....

Démonstration

- Démontrons que pour tout réels x, $e^x > 0$.
  Soit $x \in \mathbb{R}$, on peut écrire $e^x = e^{2\times\frac{x}{2}} = \left(e^{\frac{x}{2}}\right)^2$.
  Or le carré d'un nombre réel est toujours positif. On en déduit donc que $e^x \geq 0$.
  Or, on sait également que pour tout réel x, $e^x \neq 0$. Donc $e^x > 0$.
- Démontrons que la fonction exponentielle est strictement croissante.
  Par définition, on a $\exp'(x) = \exp(x)$.
  Or la fonction exponentielle est strictement positive sur $\mathbb{R}$.
  Ainsi, la fonction exponentielle est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

Remarques

- La fonction exponentielle a une croissance très rapide, d'où l'expression courante de "croissance exponentielle".
- La stricte croissance de la fonction exponentielle nous permettra de résoudre des équations/inéquations : $e^a = e^b \Leftrightarrow a = b \quad ; \quad e^a < e^b \Leftrightarrow a < b$

Etudier une fonction contenant des exponentielles

I Comment faire ?

Méthode : Comment étudier une fonction contenant des exponentielles

On cherche à dresser le tableau de variation de la fonction $f(x) = e^{x-4} - x$ définie sur $\mathbb{R}$.

1. On calcule la dérivée de f (voir fiches 15 à 19 + propriété)

   ....

2. On étudie le signe de la dérivée (voir fiche 42)

   ....

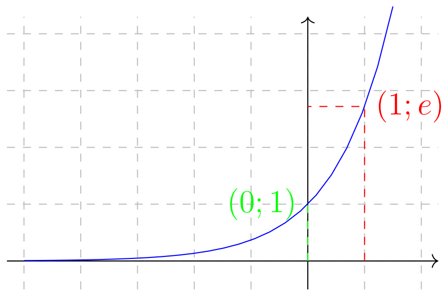
3. On dresse le tableau de variation de f (voir fiche 39)

II Pourquoi ?

Propriété : Courbe représentative

La courbe représentative de la fonction exponentielle permet de retrouver des propriétés fondamentales :

- ....
- ....
- ....
- ....



Propriétés (démontrées)

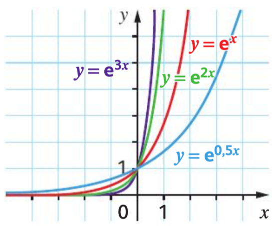
Soient a et b deux réels. La fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = e^{ax+b}$ est dérivable sur $\mathbb{R}$.

....

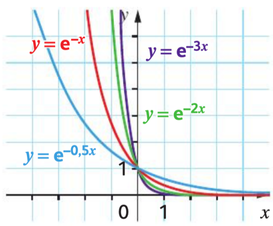
Démonstration

On rappelle la formule de la fiche 19 : Si $f(x) = g(ax+b)$ alors : $f'(x) = a \times g'(ax+b)$
Ici, $f(x) = \exp(ax+b)$ (on a donc $g(x) = \exp(x)$).
Par conséquent : $\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) = a \times \exp'(ax+b) = a \times \exp(ax+b)$.

Remarque : Représentation des fonctions $x \mapsto e^{kt}$



Croissance exponentielle



Décroissance exponentielle

Lien entre vecteur normal et équation cartésienne

I Comment faire ?

Méthode : Comment exploiter le lien entre vecteur normal et équation cartésienne ?

Méthode 1 - Déterminer un vecteur normal à partir d'une équation cartésienne

Soit d la droite d'équation : $-2x+3y-1=0$.

1. On identifie les coeffecients a et b de l'équation cartésienne. Ici, ...
2. Le vecteur normal à pour coordonnées $\overrightarrow{n}\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}$. Le vecteur normal de d est $\overrightarrow{n}\begin{pmatrix}\cdots\\\cdots\end{pmatrix}$.
3. On vérifie. Le vecteur directeur de d est $\overrightarrow{u}\begin{pmatrix}\cdots\\\cdots\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{n}=$ ....

Méthode 2 - Déterminer une équation cartésienne à partir d'un vecteur normal

Soit d' la droite passant par $A(1,2)$ de vecteur normal $\overrightarrow{n}\begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix}$.

1. On utilise la critère d'orthogonalité de deux vecteurs (fiche 32).

$$\begin{aligned} M\in d' &\Leftrightarrow \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ &\Leftrightarrow \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ &\Leftrightarrow \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ &\Leftrightarrow \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}$$

2. On conclut. La droite d' a pour équation cartésienne ....

II Pourquoi ?

Définition : Equation cartésienne

....

Propriété (démontrée en seconde)

....

Définition : Vecteur normal

....
....

Propriété (démontrée)

....

Démonstration

Le vecteur $\overrightarrow{u}\begin{pmatrix}-b\\a\end{pmatrix}$ est un vecteur directeur de d. Si $\overrightarrow{n}\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}$ alors, on a :

$$\overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{n}=x_{\overrightarrow{u}}x_{\overrightarrow{n}}+y_{\overrightarrow{u}}y_{\overrightarrow{n}}=(-b)\times a+a\times b=0$$

Ainsi, $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{n}$ sont orthogonaux. Le vecteur $\overrightarrow{n}$ est donc un vecteur normal à (d).

Déterminer si deux droites sont perpendiculaires

I Comment faire ?

Méthode : Comment déterminer si deux droites sont perpendiculaires ?

Soient d_1 et d_2 d'équation respective $3x - 6y + 2 = 0$ et $2x + y - 3 = 0$.
Les droites d et d' sont-elles perpendiculaires ?

1. On détermine les vecteurs normaux $\vec{n_1}$ et $\vec{n_2}$ des droites d_1 et d_2. (ou leurs vecteurs directeurs).

   ....

2. On calcule le produit scalaire des deux vecteurs.

   ....

3. Si le produit scalaire est nul, les droites sont perpendiculaires, sinon non.

   ....

   ....

II Pourquoi ?

Propriété (démontrée)

....

....

Démonstration

On suppose que d et d' sont perpendiculaires.
Si $\vec{u}$ est un vecteur directeur de d et $\vec{v}$ de d', alors $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont orthogonaux.
$\vec{v}$ étant normal à d et $\vec{u}$ à d', la propriété est vérifiée.

Réciproquement, si $\vec{u}$, vecteur normal à d, est orthogonal à $\vec{v}$, vecteur normal à d', alors $\vec{v}$ est un vecteur directeur de d et $\vec{u}$ de d'.
Ayant des vecteurs directeurs orthogonaux, d et d' sont perpendiculaires.

Remarques

- ....

  ....

- ....

  ....

Déterminer l'équation cartésienne d'un cercle

I Comment faire ?

Méthode : Comment déterminer l'équation cartésienne d'un cercle ?

On considère l'équation $x^2 + y^2 + 6x - 4y + 9 = 0$. Déterminer s'il s'agit d'un cercle, si oui, donner son équation cartésienne puis ces éléments caractéristiques.

1. Ecrire, si possible, l'équation sous la forme $(x - x_A)^2 + (y - y_A)^2 = r^2$.

$x^2 + y^2 + 6x - 4y + 9 = 0 \Leftrightarrow$ ....

$\Leftrightarrow$ ....

$\Leftrightarrow$ ....

2. En déduire les éléments caractéristiques : il s'agit d'un cercle de centre $A(x_a; y_a)$ et de rayon r.

....

II Pourquoi ?

Propriété (démontrée)

....

....

....

....

Démonstration

M appartient au cercle de centre $A(x_A; y_A)$ de rayon r si, et seulement si, $AM^2 = r^2$

Or, dans un repère orthonormé, $AM = \sqrt{(x - x_A)^2 + (y - y_A)^2}$

On a donc : $AM^2 = r^2 \Leftrightarrow \sqrt{(x - x_A)^2 + (y - y_A)^2}^2 = r^2 \Leftrightarrow (x - x_A)^2 + (y - y_A)^2 = r^2$

Exemples :

- *L'ensemble des points M tels que $(x - 3)^2 + (y + 2)^2 = 16$ est le cercle de centre $A(.....;.....)$ et de rayon ......*
- *Le cercle de centre $A(2, 3)$ et de rayon 3 admet pour équation cartésienne :* ....
....

Propriété : Forme développée (admise)

Tout cercle a une équation de la forme

....

avec a, b et c des réels.

Exemple : Dans l'exemple précédent, le cercle de centre $A(2, 3)$ et de rayon 3 admet pour équation cartésienne $(x - 2)^2 + (y - 3)^2 = 9$ soit $x^2 + y^2 - 4x - 6y + 4 = 0$.

Exploiter les fonctions trigonométriques

I Comment faire ?

Méthode : Comment déterminer la parité d'une fonction ?

Montrons que $f(x) = x^2$ est paire.

1. On calcule $f(-x)$.

   ....

2. Si $f(-x) = f(x)$, la fonction est paire. Si $f(-x) = -f(x)$, la fonction est impaire. Sinon, la fonction n'a pas de parité particulière.

   ....

Méthode : Comment montrer qu'une fonction est périodique ?

Montrons que $f(x) = \cos(x)$ est 2π-périodique.

1. On identifie la période k (dans l'énoncé ou sur le graphique)

   ....

2. On calcule $f(x+k)$.

   ....

3. Si $f(x+k) = f(x)$, la fonction est k-périodique, sinon non.

   ....

II Pourquoi ?

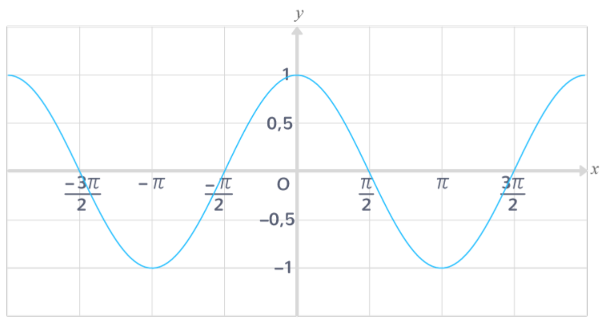
1 Définitions et représentations graphiques

Définition : Fonctions cosinus et sinus

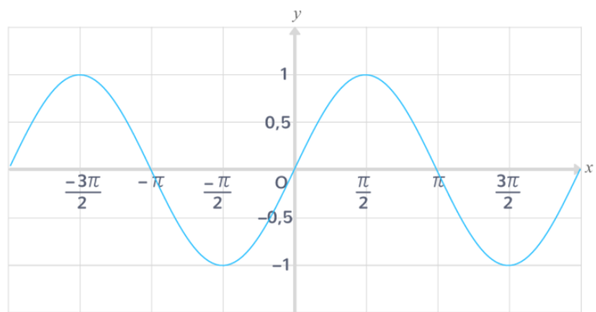
- ....
  ....
- ....
  ....

Définition : Sinusoïdes

Les courbes représentatives des fonctions cosinus et sinus sont des **sinusoïdes** :



Courbe représentative de la fonction cosinus



Courbe représentative de la fonction sinus

2 Périodicité

Propriétés

Les fonctions cosinus et sinus sont 2π-périodiques. Cela signifie que :

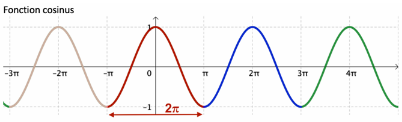
1. ....
2. ....

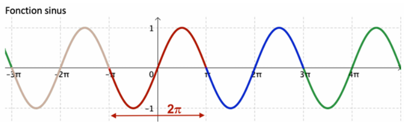
Démonstration

Les réels x et $x + 2k\pi$ ont le même point image sur le cercle trigonométrique. Ainsi, leurs cosinus et sinus sont identiques.

Remarque

Graphiquement, la périodicité se traduit par le fait qu'on retrouve le même morceaux de courbe sur chaque intervalle de longueur 2π.





3 Parité

Définitions : Fonctions paires et impaires

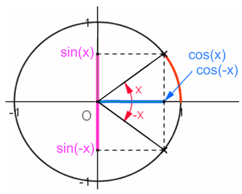
- ....
....
....
- ....
....
....

Propriétés (démontrées)

- ....
- ....

Démonstration

Les angles de mesures x et $-x$ sont symétriques par rapport à l'axe des abscisses donc : $\sin(-x) = -\sin(x)$ et $\sin(-x) = -\sin(x)$.



4 Dérivée

Propriétés (admises)

- ....
- ....