C.1

(a) On a les manipulations algébriques suivantes :

$$f(2+h) = (2+h)^2 - 3\cdot(2+h) + 2$$
$$= 2^2 + 4\cdot h + h^2 - 6 - 3\cdot h + 2$$
$$= 4 + h + h^2 - 4 = h^2 + h$$

(b) On a les transformations algébriques suivantes :

$$f(1+h) = (1+h)^2 - 3\cdot(1+h) + 2$$
$$= 1 + 2h + h^2 - 3 - 3h + 2 = h^2 - h$$

C.2

$$g(1+h) - g(1) = \frac{(1+h)+1}{(1+h)^2+1} - \frac{1+1}{1^2+1}$$
$$= \frac{h+2}{1+2\cdot h+h^2+1} - \frac{2}{2} = \frac{h+2}{h^2+2\cdot h+2} - 1$$
$$= \frac{h+2}{h^2+2\cdot h+2} - \frac{1\cdot(h^2+2\cdot h+2)}{h^2+2\cdot h+2}$$
$$= \frac{h+2-(h^2+2\cdot h+2)}{h^2+2\cdot h+2} = \frac{h+2-h^2-2\cdot h-2}{h^2+2\cdot h+2}$$
$$= \frac{-h^2-h}{h^2+2\cdot h+2} = \frac{-h\cdot(h+1)}{h^2+2\cdot h+2}$$

C.3

(1) On a les transformations algébriques suivantes :

$$f(2+h) = 3\cdot(2+h)^2 - 2\cdot(2+h) = 3\cdot(4+4\cdot h+h^2) - 4 - 2h$$
$$= 12 + 12\cdot h + 3\cdot h^2 - 4 - 2\cdot h = 3\cdot h^2 + 10\cdot h + 8$$

(2) (a)
- On a :
$$f(2) = 3\times 2^2 - 2\times 2 = 3\times 4 - 4 = 12 - 4 = 8$$
- On a la simplification du quotient :
$$\frac{f(2+h)-f(2)}{h} = \frac{(3\cdot h^2+10\cdot h+8)-8}{h} = \frac{3\cdot h^2+10\cdot h}{h}$$
$$= \frac{h\cdot(3\cdot h+10)}{h} = 3\cdot h + 10$$

On en déduit la limite :
$$\lim_{h\mapsto 0} \frac{f(2+h)-f(2)}{h} = \lim_{h\mapsto 0} 3\cdot h + 10 = 10$$

(b) On en déduit la valeur du nombre dérivée de la fonction f en 2 :
$$f'(2) = 10$$

C.4

(1) On a :
- $f(2+h) = (2+h)^2 - 3\cdot(2+h) + 1$
$$= (4+4h+h^2) - 6 - 3\cdot h + 1 = h^2 + h - 1$$
- $f(2) = 2^2 - 3\times 2 + 1 = 4 - 6 + 1 = -1$

On en déduit la simplification :
$$\frac{f(2+h)-f(2)}{h} = \frac{h^2+h-1-(-1)}{h} = \frac{h^2+h-1+1}{h}$$
$$= \frac{h^2+h}{h} = \frac{h\cdot(h+1)}{h} = h + 1$$

(2) On en déduit la valeur du nombre dérivée de la fonction f en 2 :
$$f'(2) = \lim_{h\mapsto 0} \frac{f(2+h)-f(2)}{h} = \lim_{h\mapsto 0} h + 1 = 1$$

C.5

(1) On a :
- $f(1+h) = \dfrac{(1+h)+3}{(1+h)+1} = \dfrac{h+4}{h+2}$
- $f(1) = \dfrac{1+3}{1+1} = \dfrac{4}{2} = 2$

On en déduit :
$$\frac{f(1+h)-f(1)}{h} = \frac{\frac{h+4}{h+2} - 2}{h} = \frac{\frac{h+4}{h+2} - \frac{2\cdot(h+2)}{h+2}}{h}$$
$$= \frac{\frac{h+4}{h+2} - \frac{2\cdot h+4}{h+2}}{h} = \frac{\frac{h+4-(2\cdot h+4)}{h+2}}{h}$$
$$= \frac{\frac{h+4-2\cdot h-4}{h+2}}{h} = \frac{\frac{-h}{h+2}}{h} = \frac{-h}{h+2}\times\frac{1}{h} = -\frac{1}{h+2}$$

(2) On en déduit la valeur du nombre dérivée :
$$f'(1) = \lim_{h\mapsto 0} \frac{f(1+h)-f(1)}{h} = \lim_{h\mapsto 0} -\frac{1}{h+2} = -\frac{1}{2}$$

(3) On a :
$$f(1) = \frac{1+3}{1+1} = \frac{4}{2} = 2$$

la tangente (T) la courbe $\mathscr{C}_f$ au point d'abscisse 1 a pour équation réduite :
$$y = f'(a)\cdot(x-a) + f(a)$$
$$y = -\frac{1}{2}\cdot(x-1) + 2$$
$$y = -\frac{1}{2}\cdot x - \frac{1}{2} + 2$$
$$y = -\frac{1}{2}\cdot x - \frac{3}{2}$$

C.6 Avant de déterminer la valeur du nombre dérivée en -1, effectuons les calculs suivants :

- On a les transformations algébriques suivantes :
$$f(-1+h) = (-1+h)^2 + 3\times(-1+h) + 1$$
$$= (-1)^2 + 2\times(-1)\times h + h^2 - 3 + 3\cdot h + 1$$
$$= 1 - 2\cdot h + h^2 - 3 + 3\cdot h + 1 = h^2 + h - 1$$
- $f(-1) = (-1)^2 + 3\times(-1) + 1 = 1 - 3 + 1 = -1$

Le nombre dérivée $f'(-1)$ de la fonction f en -1 a pour valeur :
$$f'(-1) = \lim_{h\mapsto 0} \frac{f(-1+h)-f(-1)}{h} = \lim_{h\mapsto 0} \frac{h^2+h-1-(-1)}{h}$$
$$= \lim_{h\mapsto 0} \frac{h^2+h}{h} = \lim_{h\mapsto 0} \frac{h\cdot(h+1)}{h} = \lim_{h\mapsto 0} h + 1 = 1$$

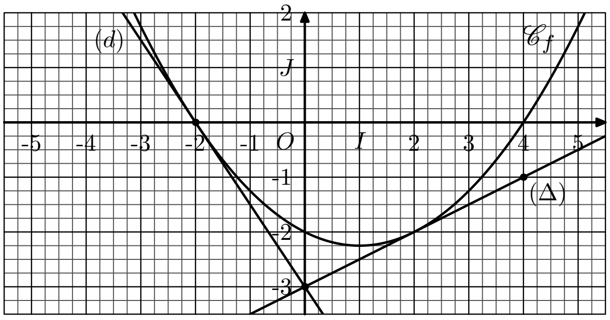
C.7

- Simplifions l'expression suivante :
$$\frac{f(1+h)-f(1)}{h} = \frac{\frac{2\cdot(1+h)+1}{(1+h)+2} - \frac{2\times 1+1}{1+2}}{h}$$
$$= \left(\frac{2+2\cdot h+1}{h+3} - \frac{2+1}{3}\right)\times\frac{1}{h} = \left(\frac{2\cdot h+3}{h+3} - \frac{3}{3}\right)\times\frac{1}{h}$$
$$= \left(\frac{2\cdot h+3}{h+3} - 1\right)\times\frac{1}{h} = \left(\frac{2\cdot h+3}{h+3} - \frac{h+3}{h+3}\right)\times\frac{1}{h}$$
$$= \left(\frac{(2\cdot h+3)-(h+3)}{h+3}\right)\times\frac{1}{h} = \frac{2\cdot h+3-h-3}{h+3}\times\frac{1}{h}$$
$$= \frac{h}{h+3}\times\frac{1}{h} = \frac{1}{h+3}$$
- On en déduit la limite :
$$\lim_{h\mapsto 0} \frac{f(1+h)-f(1)}{h} = \lim_{h\mapsto 0} \frac{1}{h+3} = \frac{1}{3}$$

- Ainsi, le nombre dérivé de la fonction f pour $x=1$ a pour valeur $\frac{1}{3}$.

C.8

1. Voici les tracés de ces deux droites :



a. Déterminons les coordonnées de deux points appartenant à la droite (d) :

x	0	4
y	-3	-1

b. Déterminons les coordonnées de deux points appartenant à la droite (Δ) :

x	-2	0
y	0	-3

2. Les droites viennent "*frôler*" la courbe en 1 seul point de contact.

C.9

1.
- La droite (T_2) est la tangente à la courbe $\mathscr{C}_f$ au point d'abscisse 1.
- La droite (T_3) est la tangente à la courbe $\mathscr{C}_f$ au point d'abscisse 4.
- La droite (T_4) est la tangente à la courbe $\mathscr{C}_f$ au point d'abscisse -3.

2. a. La droite (T_1) a pour coefficient directeur :
$$a = \frac{2{,}5-1}{0-(-3)} = \frac{1{,}5}{3} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$$

b. Graphiqment, on obtient les résultats suivants :
- La tangente (T_2) a pour coefficient directeur $-\frac{1}{4}$;
- La tangente (T_3) a pour coefficient directeur $\frac{1}{8}$;
- La tangente (T_4) a pour coefficient directeur 3.

C.10

1. a. On a les manipulations algébriques suivantes :
$$f(4+h)-f(4)=\Big[\frac{1}{2}\cdot(4+h)^2-2(4+h)+1\Big]-\Big(\frac{1}{2}\times4^2-2\times4+1\Big)$$
$$=\frac{1}{2}\cdot(16+8h+h^2)-8-2h+1-\Big(\frac{1}{2}\times16-8+1\Big)$$
$$=8+4h+\frac{1}{2}h^2-8-2h+1-(8-8+1)$$
$$=\frac{1}{2}h^2+2h+1-1=\frac{1}{2}h^2+2h$$

b. Ainsi, le quotient a pour valeur :
$$\frac{f(4+h)-f(4)}{h}=\frac{\frac{1}{2}h^2+2h}{h}=\frac{h\cdot\Big(\frac{1}{2}h+2\Big)}{h}=\frac{1}{2}h+2$$
On en déduit que lorsque h tend vers 0, cette expression tend vers 2. On obtient la limite :
$$\lim_{h\mapsto0}\frac{f(4+h)-f(4)}{h}=\lim_{h\mapsto0}\frac{1}{2}h+2=2$$

2. Le coefficient directeur c de la tangente (T) est le nombre dérivé en 4 de la fonction f.
On en déduit : $f'(4)=2$

C.11

1. On a les manipulations algébriques suivantes :
$$f(2{+}h)-f(2)=\frac{3(2+h)-1}{(2+h)+1}-\frac{3\times2-1}{2+1}$$
$$=\frac{6+3\cdot h-1}{h+3}-\frac{6-1}{3}=\frac{3\cdot h+5}{h+3}-\frac{5}{3}$$
$$=\frac{3\cdot(3\cdot h+5)}{3\cdot(h+3)}-\frac{5\cdot(h+3)}{3\cdot(h+3)}=\frac{9\cdot h+15}{3\cdot(h+3)}-\frac{5\cdot h+15}{3\cdot(h+3)}$$
$$=\frac{9\cdot h+15-(5\cdot h+15)}{3\cdot(h+3)}=\frac{9\cdot h+15-5\cdot h-15}{3\cdot(h+3)}=\frac{4\cdot h}{3\cdot(h+3)}$$
Simplifions l'expression du quotient :
$$\frac{f(2{+}h)-f((2)}{h}=\frac{\frac{4\cdot h}{3\cdot(h+3)}}{h}=\frac{4\cdot h}{3\cdot(h+3)}\times\frac{1}{h}=\frac{4}{3\cdot(h+3)}$$

2. On a les deux limites :
$$\lim_{h\mapsto0}4=4\quad;\quad\lim_{h\mapsto0}3\cdot(h+3)=3\times(0+3)=9$$
On endéduit la limite :
$$\lim_{h\mapsto0}\frac{f(2{+}h)-f((2)}{h}=\lim_{h\mapsto0}\frac{4}{3\cdot(h+3)}=\frac{4}{9}$$

C.12

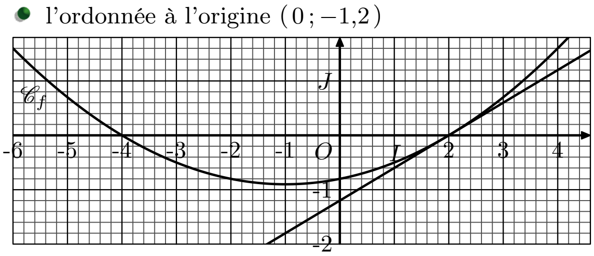
1. a.
- $f(2{+}h)=0{,}1\cdot(h+2)^2+0{,}2\cdot(2+h)-0{,}8$
$$=0{,}1\cdot(h^2+4\cdot h+4)+0{,}2\cdot h+0{,}4-0{,}8$$
$$=0{,}1\cdot h^2+0{,}4\cdot h+0{,}4+0{,}2\cdot h-0{,}4$$
$$=0{,}1\cdot h^2+0{,}6\cdot h$$
- $f(2)=0{,}1\times2^2+0{,}2\times2-0{,}8=0{,}1\times4+0{,}4-0{,}8$
$$=0{,}4-0{,}4=0$$

On a les transformations algébriques :
$$\frac{f(2{+}h)-f(2)}{h}=\frac{0{,}1\cdot h^2+0{,}6\cdot h}{h}=\frac{h\cdot(0{,}1\cdot h+0{,}6)}{h}$$
$$=0{,}1\cdot h+0{,}6$$

b. Le nombre dérivé de la fonction f en 2 a pour valeur :
$$f'(2)=\lim_{h\mapsto0}\frac{f(2{+}h)-f(2)}{h}=\lim_{h\mapsto0}0{,}1\cdot h+0{,}6=0{,}6$$

2. a. La tangente (T) a pour équation réduite :
$$y=f'(2)\cdot(x-2)+f(2)$$
$$y=0{,}6\cdot(x-2)+0$$
$$y=0{,}6\cdot x-1{,}2$$

b. Pour tracer la droite (T), nous pouvons utiliser les deux points suivants :
- le point de contact de coordonnées $(2\,;0)$
- l'ordonnée à l'origine $(0\,;-1{,}2)$



C.13

1. On a :

- $f(1+h) = 2{\cdot}(1+h)^2 - 3{\cdot}(1+h) + 1$
$\quad = 2{\cdot}(1 + 2{\cdot}h + h^2) - 3 - 3{\cdot}h + 1$
$\quad = 2 + 4{\cdot}h + 2{\cdot}h^2 - 3 - 3{\cdot}h + 1 = 2{\cdot}h^2 + h$
- $f(1) = 2{\times}1^2 - 3{\times}1 + 1 = 2 - 3 + 1 = 0$

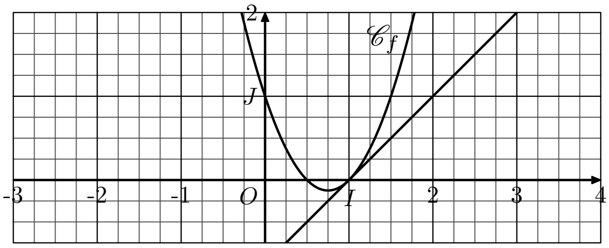
On en déduit l'expression du quotient :

$$\frac{f(1{+}h) - f(1)}{h} = \frac{2{\cdot}h^2 + h - 0}{h} = \frac{h{\cdot}(2{\cdot}h + 1)}{h} = 2{\cdot}h + 1$$

Le nombre dérivé de la fonction f en 1 a pour valeur :

$$f'(1) = \lim_{h\mapsto 0} \frac{f(1{+}h) - f(1)}{h} = \lim_{h\mapsto 0} 2{\cdot}h + 1 = 1$$

2. La tangente (T) à la courbe $\mathscr{C}_f$ au point d'abscisse 1 a pour équation réduite :
$y = f'(1){\cdot}(x - 1) + f(1)$
$y = 1{\cdot}(x - 1) + 0$
$y = x - 1$



C.14

1. On utilisera les expressions suivantes :
- $f(1{+}h) = \dfrac{3{\cdot}(1 + h) + 1}{2{\cdot}(1 + h) + 2} = \dfrac{3 + 3{\cdot}h + 1}{2 + 2{\cdot}h + 2} = \dfrac{3{\cdot}h + 4}{2{\cdot}h + 4}$
- $f(1) = \dfrac{3{\times}1 + 1}{2{\times}1 + 2} = \dfrac{3 + 1}{2 + 2} = \dfrac{4}{4} = 1$

On a les transformations algébriques suivantes :

$$\frac{f(1{+}h) - f(1)}{h} = \frac{\dfrac{3{\cdot}h + 4}{2{\cdot}h + 4} - 1}{h} = \frac{\dfrac{3{\cdot}h + 4}{2{\cdot}h + 4} - \dfrac{2{\cdot}h + 4}{2{\cdot}h + 4}}{h}$$

$$= \frac{\dfrac{(3{\cdot}h + 4) - (2{\cdot}h + 4)}{2{\cdot}h + 4}}{h} = \frac{\dfrac{3{\cdot}h + 4 - 2{\cdot}h - 4}{2{\cdot}h + 4}}{h}$$

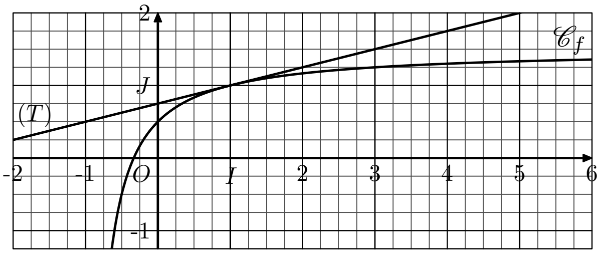
$$= \frac{\dfrac{h}{2{\cdot}h + 4}}{h} = \frac{h}{2{\cdot}h + 4} \times \frac{1}{h} = \frac{1}{2{\cdot}h + 4}$$

On en déduit la valeur du nombre dérivé de la fonction f en 1 :

$$f'(1) = \lim_{h\mapsto 0} \frac{f(1{+}h) - f(1)}{h} = \lim_{h\mapsto 0} \frac{1}{2{\cdot}h + 4} = \frac{1}{4}$$

2. a. La tangente (T) a pour équation réduite :
$y = f'(1){\cdot}(x - 1) + f(1)$
$y = \dfrac{1}{4}{\cdot}(x - 1) + 1$
$y = \dfrac{1}{4}{\cdot}x - \dfrac{1}{4} + 1$
$y = \dfrac{1}{4}{\cdot}x + \dfrac{3}{4}$

b. Pour tracer la tangente, on utilise :
- le point de contact qui a pour coordonnées $(1\,;1)$
- l'ordonnée à l'origine qui définit le point de coordonnées $\left(0\,;\dfrac{3}{4}\right)$



C.15

1.
- $f(1{+}h) = \dfrac{3{\cdot}(1 + h)^2 - 2}{(1 + h)^2 + 1} = \dfrac{3{\cdot}(h^2 + 2{\cdot}h + 1) - 2}{(h^2 + 2{\cdot}h + 1) + 1}$
$\quad = \dfrac{3{\cdot}h^2 + 6{\cdot}h + 3 - 2}{(h^2 + 2{\cdot}h + 1) + 1} = \dfrac{3{\cdot}h^2 + 6{\cdot}h + 1}{h^2 + 2{\cdot}h + 2}$
- $f(1) = \dfrac{3{\times}1^2 - 2}{1^2 + 1} = \dfrac{3 - 2}{1 + 1} = \dfrac{1}{2}$
- $\dfrac{f(1{+}h) - f(1)}{h} = \dfrac{\dfrac{3{\cdot}h^2 + 6{\cdot}h + 1}{h^2 + 2{\cdot}h + 2} - \dfrac{1}{2}}{h}$

$$= \frac{\dfrac{(3{\cdot}h^2 + 6{\cdot}h + 1){\cdot}2}{(h^2 + 2{\cdot}h + 2){\cdot}2} - \dfrac{1{\cdot}(h^2 + 2{\cdot}h + 2)}{2{\cdot}(h^2 + 2{\cdot}h + 2)}}{h}$$

$$= \frac{6{\cdot}h^2 + 12{\cdot}h + 2 - h^2 - 2{\cdot}h - 2}{2{\cdot}(h^2 + 2{\cdot}h + 2)} \times \frac{1}{h}$$

$$= \frac{5{\cdot}h^2 + 10{\cdot}h}{2{\cdot}h{\cdot}(h^2 + 2{\cdot}h + 2)} = \frac{h{\cdot}(5{\cdot}h + 10)}{h{\cdot}(2{\cdot}h^2 + 4{\cdot}h + 4)}$$

$$= \frac{5{\cdot}h + 10}{2{\cdot}h^2 + 4{\cdot}h + 4}$$

On en déduit la valeur de la limite :

$$f'(1) = \lim_{h\mapsto 0} \frac{f(1{+}h) - f(1)}{h} = \lim_{h\mapsto 0} \frac{5{\cdot}h + 10}{2{\cdot}h^2 + 4{\cdot}h + 4} = \frac{10}{4} = \frac{5}{2}$$

2. a. De la question précédente, on en déduit que le coefficient directeur de la tangente (T) a pour valeur $\dfrac{5}{2}$. Son équation réduite est de la forme :
$y = \dfrac{5}{2}{\cdot}x + b \qquad$ où $b \in \mathbb{R}$

Le point de coordonnées $\left(1\,;\dfrac{1}{2}\right)$ étant le point de contact, il appartient à $\mathscr{C}_f$ et à (T).

$\dfrac{1}{2} = \dfrac{5}{2}{\times}1 + b$

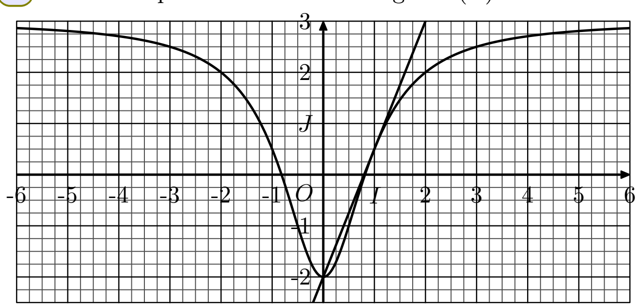
$b = \dfrac{1}{2} - \dfrac{5}{2}$

$b = -2$

On en déduit l'équation réduite de (T) :

$y = \dfrac{5}{2}{\cdot}x - 2$

b. Voici la représentation de la tangente (T) :



3. Résolvons l'équation suivante :

$$f(x) = \frac{5}{2}x - 2$$

$$\frac{3{\cdot}x^2 - 2}{x^2+1} - \frac{5{\cdot}x - 4}{2} = 0$$

$$\frac{2{\cdot}\big(3{\cdot}x^2 - 2\big)}{2{\cdot}\big(x^2+1\big)} - \frac{\big(5{\cdot}x - 4\big)\big(x^2+1\big)}{2{\cdot}\big(x^2+1\big)} = 0$$

$$\frac{6{\cdot}x^2 - 4 - \big(5{\cdot}x^3 + 5{\cdot}x - 4{\cdot}x^2 - 4}{2{\cdot}\big(x^2+1\big)} = 0$$

$$\frac{6{\cdot}x^2 - 4 - 5{\cdot}x^3 - 5x + 4{\cdot}x^2 + 4}{2{\cdot}\big(x^2+1\big)} = 0$$

$$\frac{-5{\cdot}x^3 + 10{\cdot}x^2 - 5{\cdot}x}{2{\cdot}\big(x^2+1\big)} = 0$$

$$\frac{-5{\cdot}x{\cdot}\big(x^2 - 2{\cdot}x + 1\big)}{2{\cdot}\big(x^2+1\big)} = 0$$

$$\frac{-5{\cdot}x{\cdot}\big(x-1\big)^2}{2{\cdot}\big(x^2+1\big)} = 0$$

Si un quotient est nul alors son numérateur est nul ; on en déduit les solutions de l'équation précédente :

$\mathcal{S} = \big\{0\,;1\big\}$

Ainsi, la courbe $\mathscr{C}_f$ et la tangente (T) s'intercepte en deux points de coordonnées :

$(\,0\,;-2\,)$; $\Big(1\,;\frac{1}{2}\Big)$