

⚡ Conditions d'évaluation

Calculatrice : autorisée.

Durée : 45min

Compétences évaluées :

- ☐ Etudier les variations d'une fonction
- ☐ Déterminer les extremums d'une fonction
- ☐ Résoudre un problème d'optimisation
- ☐ Utiliser les propriétés algébriques de la fonction exponentielle
- ☐ Etudier le signe d'une expression avec des exponentielles
- ☐ Résoudre des équations et inéquations avec la fonction exponentielle
- ☐ Etudier une fonction contenant des exponentielles

Exercice 1 QCM

(7 points)

Pour chacune des questions, indiquer la (ou les) bonne(s) réponse(s). **Vous justifierez vos réponses à partir de la question 4.**

| | a | b | c |
|---|-------------------------------------|-------------------------------------|---|
| 1. La fonction exponentielle est : | croissante sur $[0; +\infty[$ | croissante sur $]-\infty; +\infty[$ | strictement positive sur $]-\infty; +\infty[$ |
| 2. $e^0 =$ | 0 | 1 | e |
| 3. $e =$ | 2,718 | $\exp(1)$ | 1 |
| 4. $e^5 \times e^3 =$ | e^8 | e^2 | e^{15} |
| 5. $\frac{e^{-1} \times e^3}{e \times e^2} =$ | $\frac{1}{e}$ | e | e^{-1} |
| 6. Pour tout réel x, on a $(e^x)^2 =$ | e^{x+2} | $2e^x$ | e^{2x} |
| 7. Pour tout réel x, on a $e^x \times e^{-x} =$ | 0 | e^{2x} | 1 |
| | | | |
| 9. Si $f(x) = 5e^{2x} + 10x$, alors : | $f'(x) = e^{2x} + 10$ | $f'(x) = 10(e^{2x} + 1)$ | $f'(x) = 5e^{2x} + 10$ |
| 10. Si $f(x) = e^{3x+1}$, alors : | $f'(x) = e^{3x+1}$ | $f'(x) = 3e^{3x+1}$ | $f'(x) = 3e^3$ |
| 11. Si $f(t) = 5e^{0,1t}$, alors : | $f'(t) = 0,5e^{0,1t}$ | $f'(t) = \frac{1}{2}e^{0,1t}$ | $f'(t) = 0,5e^{0,1}$ |
| 12. Si $f(t) = 2e^{1,256t}$, alors $\frac{f(t+1)}{f(t)} =$ | $\frac{2e^{1,256t+1}}{2e^{1,256t}}$ | $e^{1,256}$ | 3,511347967 |

Exercice 2 Tableaux

(6 points)

Le tableau ci-dessous représente le tableau de variations d'une fonction f définie sur \mathbb{R} :

| | | | | | | |
|------------------|-----------|------|------|------|-----|-----------|
| x | $-\infty$ | -4 | -2 | -1 | 2 | $+\infty$ |
| Signe de f' | | | | | | |
| Variation de f | | | | | | |
| Signes de f | | | | | | |

Compléter les lignes du signe de la fonction f' et du signe de la fonction f .

Vous citerez la propriété utilisée pour compléter la première ligne du tableau.

Exercice 3 Concentration de médicament

(7 points)

On injecte à un patient un médicament et on mesure régulièrement, pendant 15 heures, la concentration de ce médicament dans le sang, en gramme par litre (g/L). On obtient la courbe suivante.



1. Avec la précision permise par le graphique, indiquer :

- (a) la concentration à l'instant initial ;
- (b) l'intervalle de temps pendant lequel la concentration est supérieure ou égale à 0,4 g/L.

2. On admet que la concentration peut être modélisée par la fonction f définie sur $[0; +\infty[$ par :

$$f(t) = (t + 2) \times e^{-0,5t}$$

où t représente le nombre d'heures écoulées depuis l'instant initial et $f(t)$ est la concentration du médicament dans le sang (en g/L).

- (a) Justifier que pour tout réel $t \in [0; 15]$, on a :

$$f'(t) = -0,5t \times e^{-0,5t}$$

- (b) Résoudre l'inéquation suivante :

$$-0,5t \times e^{-0,5t} \geq 0$$

- (c) En déduire le tableau de variations complet de f .

- d) On estime que le médicament n'est plus actif lorsque sa concentration est strictement inférieure à 0,1 g/L. À l'aide de la calculatrice, déterminer pendant combien de temps le médicament est actif, à 0,1 h près.