# MATEMATIKA DISKRIT

# Apakah Matematika Diskrit Itu?

Matematika diskrit (discrete mathematics) adalah cabang matematika yang mengkaji objek – objek diskrit.

# Apakah Matematika Diskrit Itu?

Suatu benda disebut diskrit jika ia terdiri dari sejumlah berhingga elemen yang berbeda atau elemen – elemen yang tidak bersambungan. Seperti himpunan bilangan bulat (integer).

Matematika diskrit merupakan ilmu paling dasar dalam pendidikan informatika atau ilmu komputer

# Apakah Matematika Diskrit Itu?

Materi – materi yang termasuk dalam matematika diskrit adalah :

- Logika
- Teori Himpunan
- Matriks
- Relasi dan Fungsi
- Algoritma
- Dll

# Matematika Diskrit Dalam Kehidupan Sehari - hari

- Berapa banyak kemungkinan jumlah password yang dapat dibuat dari 8 karakter?
- Bagaimana menentukan lintasan terpendek dari suatu kota a ke kota b?
- Pembuatan plat nomor
- “Makanan murah tidak enak”, “makanan enak tidak murah”. Apakah kedua pernyataan tersebut menyatakan hal yang sama?

# LOGIKA

# Logika

- Perhatikan argumen di bawah ini:

  *Jika anda mahasiswa Informatika maka anda pasti belajar Bahasa Java. Jika anda tidak suka begadang maka anda bukan mahasiswa Informatika. Tetapi, anda tidak belajar Bahasa Java dan anda tidak suka begadang. Jadi, anda bukan mahasiswa Informatika.*

  Apakah kesimpulan dari argumen di atas valid?

  Alat bantu untuk memahami argumen tsb adalah **Logika**

# Logika

- Perhatikan argumen di bawah ini:

  *Jika anda mahasiswa Informatika maka anda pasti belajar Bahasa Java. Jika anda tidak suka begadang maka anda bukan mahasiswa Informatika. Tetapi, anda tidak belajar Bahasa Java dan anda tidak suka begadang. Jadi, anda bukan mahasiswa Informatika.*

  Apakah kesimpulan dari argumen di atas valid?

  Alat bantu untuk memahami argumen tsb adalah **Logika**

- Banyak teorema di dalam Ilmu Komputer/Informatika yang membutuhkan pemahaman logika.

- Contoh:

1. Dua buah bilangan bulat $a$ dan $b$ dikatakan relatif prima jika $gcd(a, b) = 1$.

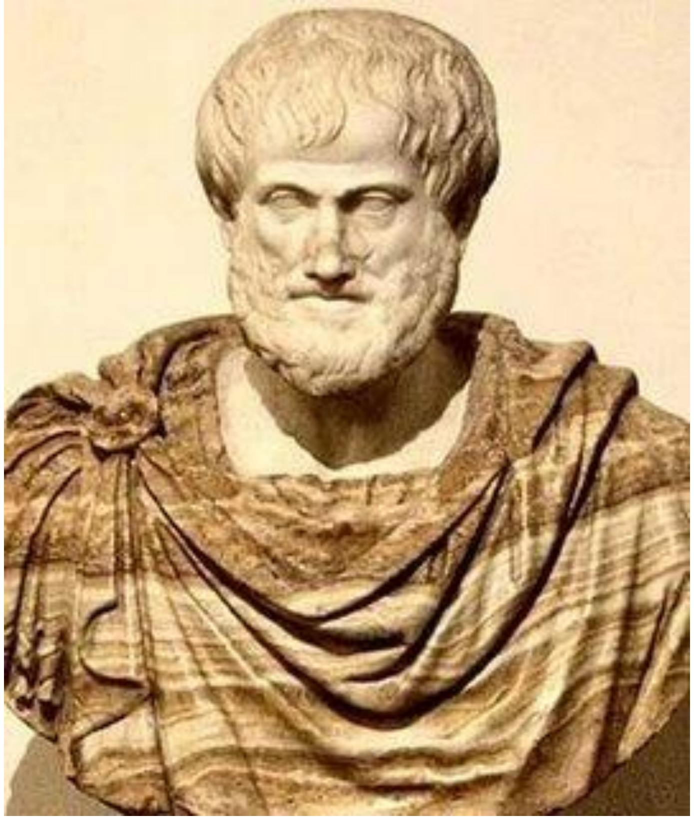
2. Syarat cukup graf dengan $n$ simpul mempunyai sirkuit Hamilton adalah derajat tiap simpul $\geq n/2$.

3. $T(n) = \Theta(f(n))$ jika dan hanya jika $O(f(n)) = \Omega(f(n))$.

- Bahkan, logika adalah pondasi dasar algoritma dan pemrograman.

- Contoh:

```
if x > y then
 begin
    temp:=x;
    x:=y;
    y:=temp;
 end;
```



Aristoteles, peletak dasar-dasar logika

# Proposisi

- Logika didasarkan pada pada hubungan antara kalimat atau pernyataan (*statements*).

- Hanya kalimat yang bernilai benar atau salah saja yang menjadi tinjauan → **proposisi**

- **Proposisi**: pernyataan yang bernilai benar (*true*) atau salah (*false*), tetapi tidak keduanya.

**Contoh.** Semua pernyataan di bawah ini adalah proposisi:

(a) 13 adalah bilangan ganjil

(b) Soekarno adalah alumnus UGM.

(c) $1 + 1 = 2$

(d) $8 \geq$ akar kuadrat dari $8 + 8$

(e) Ada monyet di bulan

(f) Hari ini adalah hari Rabu

(g) Untuk sembarang bilangan bulat $n \geq 0$, maka $2n$ adalah bilangan genap

(h) $x + y = y + x$ untuk setiap $x$ dan $y$ bilangan riil ■

**Contoh.** Semua pernyataan di bawah ini *bukan* proposisi

(a) Jam berapa kereta api Argo Bromo tiba di Gambir?

(b) Tolong tutup pintu!

(c) $x + 3 = 8$

(d) $x > 3$ ■

**Kesimpulan**: Proposisi adalah kalimat berita

- Pernyataan yang melibatkan peubah (*variable*) disebut **predikat**, **kalimat terbuka**, atau **fungsi proposisi**

  Contoh: “ $x > 3$”, “$y = x + 10$”

  Notasi: $P(x)$, misalnya $P(x)$: $x > 3$

- Predikat dengan *quantifier*: $\forall x\, P(x)$

- **Kalkulus proposisi**: bidang logika yang berkaitan dengan proposisi ➔ dipelajari dalam kuliah **IF2091** ini

- **Kalkulus predikat**: bidang logika yang berkaitan dengan predikatr dan *quantifier* ➔ dipelajari dalam kuliah **IF2092 Logika Informatika** (Semester 3 juga).

- Proposisi dilambangkan dengan huruf kecil *p*, *q*, *r*, ….

- **Contoh**:

  *p* : 13 adalah bilangan ganjil.

  *q* : Soekarno adalah alumnus UGM.

  *r* : 2 + 2 = 4

# Mengkombinasikan Proposisi

- Misalkan *p* dan *q* adalah proposisi.

  1. **Konjungsi** (*conjunction*): *p* dan *q*

     Notasi $p \wedge q$

  2. **Disjungsi** (*disjunction*): *p* atau *q*

     Notasi: $p \vee q$

  3. **Ingkaran** (*negation*) dari *p*: tidak *p*

     Notasi: $\sim p$

- *p* dan *q* disebut **proposisi atomik**
- Kombinasi *p* dengan *q* menghasilkan **proposisi majemuk** (*compound proposition*

**Contoh.** Diketahui proposisi-proposisi berikut:

$p$ : Hari ini hujan
$q$ : Murid-murid diliburkan dari sekolah

$p \wedge q$ : Hari ini hujan dan murid-murid diliburkan dari sekolah

$p \vee q$ : Hari ini hujan atau murid-murid diliburkan dari sekolah

$\sim p$ : Tidak benar hari ini hujan
(atau: Hari ini *tidak* hujan) ■

**Contoh.** Diketahui proposisi-proposisi berikut:

$p$ : Pemuda itu tinggi
$q$ : Pemuda itu tampan

Nyatakan dalam bentuk simbolik:

(a) Pemuda itu tinggi dan tampan
(b) Pemuda itu tinggi tapi tidak tampan
(c) Pemuda itu tidak tinggi maupun tampan
(d) Tidak benar bahwa pemuda itu pendek atau tidak tampan
(e) Pemuda itu tinggi, atau pendek dan tampan
(f) Tidak benar bahwa pemuda itu pendek maupun tampan

Penyelesaian:

(a) $p \wedge q$
(b) $p \wedge \sim q$
(c) $\sim p \wedge \sim q$
(d) $\sim(\sim p \vee \sim q)$
(e) $p \vee (\sim p \wedge q)$
(f) $\sim(\sim p \wedge \sim q)$

# Tabel Kebenaran

| $p$ | $q$ | $p \wedge q$ |
|---|---|---|
| T | T | T |
| T | F | F |
| F | T | F |
| F | F | F |

| $p$ | $q$ | $p \vee q$ |
|---|---|---|
| T | T | T |
| T | F | T |
| F | T | T |
| F | F | F |

| $p$ | $\sim q$ |
|---|---|
| T | F |
| F | T |

**Contoh.** Bentuklah tabel kebenaran dari proposisi majemuk $(p \wedge q) \vee (\sim q \wedge r)$.

| $p$ | $q$ | $r$ | $p \wedge q$ | $\sim q$ | $\sim q \wedge r$ | $(p \wedge q) \vee (\sim q \wedge r)$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| T | T | T | T | F | F | T |
| T | T | F | T | F | F | T |
| T | F | T | F | T | T | T |
| T | F | F | F | T | F | F |
| F | T | T | F | F | F | F |
| F | T | F | F | F | F | F |
| F | F | T | F | T | T | T |
| F | F | F | F | T | F | F |

Dua buah proposisi majemuk, $P(p, q, ..)$ dan $Q(p, q, ..)$ disebut **ekivalen** secara logika jika keduanya mempunyai tabel kebenaran yang identik.

Notasi: $P(p, q, \ldots) \Leftrightarrow Q(p, q, \ldots)$

**Contoh.** Hukum De Morgan: $\sim(p \wedge q) \Leftrightarrow \sim p \vee \sim q$.

| $p$ | $q$ | $p \wedge q$ | $\sim(p \wedge q)$ | $\sim p$ | $\sim q$ | $\sim p \vee \sim q$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| T | T | T | F | F | F | F |
| T | F | F | T | F | T | T |
| F | T | F | T | T | F | T |
| F | F | F | T | T | T | T |

# Hukum-hukum Logika

Disebut juga **hukum-hukum aljabar proposisi**.

| | |
|---|---|
| 1. Hukum identitas:<br>– $p \vee \mathbf{F} \Leftrightarrow p$<br>– $p \wedge \mathbf{T} \Leftrightarrow p$ | 2. Hukum *null*/dominasi:<br>– $p \wedge \mathbf{F} \Leftrightarrow \mathbf{F}$<br>– $p \vee \mathbf{T} \Leftrightarrow \mathbf{T}$ |
| 3. Hukum negasi:<br>– $p \vee {\sim}p \Leftrightarrow \mathbf{T}$<br>– $p \wedge {\sim}p \Leftrightarrow \mathbf{F}$ | 4. Hukum idempoten:<br>– $p \vee p \Leftrightarrow p$<br>– $p \wedge p \Leftrightarrow p$ |
| 5. Hukum involusi (negasi ganda):<br>– ${\sim}({\sim}\mathrm{p}) \Leftrightarrow p$ | 6. Hukum penyerapan (absorpsi):<br>– $p \vee (p \wedge q) \Leftrightarrow p$<br>– $p \wedge (p \vee q) \Leftrightarrow p$ |

| | |
|---|---|
| 7. Hukum komutatif:<br>– $p \vee q \Leftrightarrow q \vee p$<br>– $p \wedge q \Leftrightarrow q \wedge p$ | 8. Hukum asosiatif:<br>– $p \vee (q \vee r) \Leftrightarrow (p \vee q) \vee r$<br>– $p \wedge (q \wedge r) \Leftrightarrow (p \wedge q) \wedge r$ |
| 9. Hukum distributif:<br>– $p \vee (q \wedge r) \Leftrightarrow (p \vee q) \wedge (p \vee r)$<br>– $p \wedge (q \vee r) \Leftrightarrow (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$ | 10. Hukum De Morgan:<br>– $\sim(p \wedge q) \Leftrightarrow \sim p \vee \sim q$<br>– $\sim(p \vee q) \Leftrightarrow \sim p \wedge \sim q$ |

- **Contoh.** Tunjukkan bahwa $p \vee \sim(p \vee q)$ dan $p \vee \sim q$ keduanya ekivalen secara logika.

  Penyelesaian:

  $p \vee \sim(p \vee q) \Leftrightarrow p \vee (\sim p \wedge \sim q)$ (Hukum De Morgan)

  $\Leftrightarrow (p \vee \sim p) \wedge (p \vee \sim q)$ (Hukum distributif)

  $\Leftrightarrow \mathrm{T} \wedge (p \vee \sim q)$ (Hukum negasi)

  $\Leftrightarrow p \vee \sim q$ (Hukum identitas)

**Contoh .** Buktikan hukum penyerapan: $p \wedge (p \vee q) \Leftrightarrow p$

<u>Penyelesaian</u>:

| | |
|---|---|
| $p \wedge (p \vee q) = (p \wedge p) \vee (p \wedge q)$ | (Hukum distributif) |
| $= p \vee (p \wedge q)$ | (Hukum idempoten) |
| $= (p \vee p) \wedge (p \vee q)$ | (Hukum distributif) |
| $= p \wedge (p \vee q)$ | (Hukum idempoten) |

Gagal! Coba cari cara lain:

| | |
|---|---|
| $p \wedge (p \vee q) \Leftrightarrow (p \vee \mathrm{F}) \wedge (p \vee q)$ | (Hukum Identitas) |
| $\Leftrightarrow p \vee (\mathrm{F} \wedge q)$ | (Hukum distributif) |
| $\Leftrightarrow p \vee \mathrm{F}$ | (Hukum *Null*) |
| $\Leftrightarrow p$ | (Hukum Identitas) |

# Disjungsi Eksklusif

Kata "atau" (*or*) dalam operasi logika digunakan dalam salah satu dari dua cara:

*1. Inclusive or*

"atau" berarti "*p* atau *q* atau keduanya"

Contoh: "Tenaga IT yang dibutuhkan harus menguasai Bahasa C++ **atau** Java".

*2. Exclusive or*

"atau" berarti "*p* atau *q* tetapi bukan keduanya".

Contoh: "Ia dihukum 5 tahun **atau** denda 10 juta".

Operator logika disjungsi eksklusif: *xor*
Notasi: $\oplus$

Tabel kebenaran:

| $p$ | $q$ | $p \oplus q$ |
|---|---|---|
| T | T | F |
| T | F | T |
| F | T | T |
| F | F | F |

# Proposisi Bersyarat (kondisional atau implikasi)

- Bentuk proposisi: “jika *p*, maka *q*”
- Notasi: $p \rightarrow q$

  *p* : **hipotesis**, **antesenden**, **premis**, atau **kondisi**

  *q:* disebut **konklusi** (atau **konsekuen**).

- Tabel kebenaran implikasi

| $p$ | $q$ | $p \rightarrow q$ |
|---|---|---|
| T | T | T |
| T | F | F |
| F | T | T |
| F | F | T |

# Contoh.

a. Jika saya lulus ujian, maka saya mendapat hadiah dari Ayah
b. Jika suhu mencapai 80°C, maka *alarm* akan berbunyi
c. Jika anda tidak mendaftar ulang, maka anda dianggap mengundurkan diri

Cara-cara mengekspresikan implikasi $p \rightarrow q$:

- Jika *p*, maka *q*
- Jika *p*, *q*
- *p* mengakibatkan *q* (*p implies q*)
- *q* jika *p*
- *p* hanya jika *q*
- *p* syarat cukup untuk *q* (hipotesis menyatakan **syarat cukup** (*sufficient condition*) )
- *q* syarat perlu bagi *p* (konklusi menyatakan **syarat perlu** (*necessary condition*) )
- *q* bilamana *p* (*q whenever p*)

**Contoh.** Proposisi-proposisi berikut adalah implikasi dalam berbagai bentuk:

1. Jika hari hujan, maka tanaman akan tumbuh subur.
2. Jika tekanan gas diperbesar, mobil melaju kencang.
3. Es yang mencair di kutub mengakibatkan permukaan air laut naik.
4. Orang itu mau berangkat jika ia diberi ongkos jalan.
5. Ahmad bisa mengambil matakuliah Teori Bahasa Formal hanya jika ia sudah lulus matakuliah Matematika Diskrit.
6. Syarat cukup agar pom bensin meledak adalah percikan api dari rokok.
7. Syarat perlu bagi Indonesia agar ikut Piala Dunia adalah dengan mengontrak pemain asing kenamaan.
8. Banjir bandang terjadi bilamana hutan ditebangi.

## Soal Latihan 1.

Ubahlah proposisi di bawah ini dalam bentuk standard “jika *p* maka *q*”:

1) Syarat cukup agar pom bensin meledak adalah percikan api dari rokok.

2) Syarat perlu bagi Indonesia agar ikut Piala Dunia adalah dengan mengontrak pemain asing kenamaan.

**Jawaban**

1) Syarat cukup agar pom bensin meledak adalah percikan api dari rokok."

**Ingat**: $p \rightarrow q$ **dapat dibaca** $p$ syarat cukup untuk $q$

Susun sesuai format:

Percikan api dari rokok adalah syarat cukup agar pom bensin meledak."

Identifikasi proposisi atomik:

$p$ : Api memercik dari rokok

$q$ : Pom bensin meledak

**Notasi standard**: Jika $p$, maka $q$

Jika api memercik dari rokok, maka pom bensin meledak.

2) Syarat perlu bagi Indonesia agar ikut Piala Dunia adalah dengan mengontrak pemain asing kenamaan.

**Ingat**: $p \rightarrow q$ **dapat dibaca** $q$ syarat perlu untuk $p$

Susun sesuai format:

Mengontrak pemain asing kenamaan adalah syarat perlu bagi Indonesia agar ikut Piala Dunia

Identifikasi proposisi atomik:

$q$: Indonesia mengontrak pemain asing kenamaan

$p$: Indonesia ikut Piala Dunia

**Notasi standard**: Jika $p$, maka $q$

Jika Indonesia ikut Piala Dunia, maka Indonesia mengontrak pemain asing kenaman.

- Perhatikan bahwa dalam implikasi yang dipentingkan nilai kebenaran premis dan konsekuen, bukan hubungan sebab dan akibat diantara keduanya.

- Beberapa implikasi di bawah ini valid meskipun secara bahasa tidak mempunyai makna:

  "Jika 1 + 1 = 2 maka Paris ibukota Perancis"

  "Jika *n* bilangan bulat maka hari ini hujan"

**Contoh.** Dua pedagang barang kelontong mengeluarkan moto jitu untuk menarik pembeli. Pedagang pertama mengumbar moto "Barang bagus tidak murah" sedangkan pedagang kedua mempunyai moto "Barang murah tidak bagus". Apakah kedua moto pedagang tersebut menyatakan hal yang sama?

Penyelesaian:

$p$ : Barang itu bagus
$q$ : Barang itu murah.

Moto pedagang pertama: "Jika barang itu bagus maka barang itu tidak murah" atau $p \rightarrow \sim q$

Moto pedagang kedua: "Jika barang itu murah maka barang itu tidak bagus" atau $q \rightarrow \sim p$.

| $p$ | $q$ | $\sim p$ | $\sim q$ | $p \rightarrow \sim q$ | $q \rightarrow \sim p$ |
|---|---|---|---|---|---|
| T | T | F | F | F | F |
| T | F | F | T | T | T |
| F | T | T | F | T | T |
| F | F | T | T | T | T |

$\therefore$ $p \rightarrow \sim q \Leftrightarrow q \rightarrow \sim p$.

$\therefore$ Kedua moto tersebut menyatakan hal yang sama.

- Implikasi Dalam Bahasa Pemrograman

  `if c then S`

  `c:` ekspresi logika yang menyatakan syarat/kondisi
  `S:` satu atau lebih pernyataan.

  `S` dieksekusi jika `c` benar,
  `S` tidak dieksekusi jika `c` salah.

- Struktur *if-then* pada bahasa pemrograman berbeda dengan implikasi *if-then* yang digunakan dalam logika.

- Pernyataan *if-then* dalam bahasa pemrograman bukan proposisi karena tidak ada korespondensi antara pernyataan tersebut dengan operator implikasi ($\rightarrow$).

- *Interpreter* atau *compiler* tidak melakukan penilaian kebenaran pernyataan *if-then* secara logika. *Interpreter* hanya memeriksa kebenaran kondisi `c`, jika `c` benar maka `S` dieksekusi, sebaliknya jika `c` salah maka `S` tidak dieksekusi.

**Contoh.** Misalkan di dalam sebuah program yang ditulis dalam Bahasa Pascal terdapat pernyataan berikut:

```
if x > y then y:=x+10;
```

Berapa nilai *y* setelah pelaksanaan eksekusi if-then jika:

(i) $x = 2$, $y = 1$

(ii) $x = 3$, $y = 5$?

Penyelesaian:

(i) `x = 2` dan `y = 1`

Ekspresi `x > y` bernilai benar

Pernyataan `y:=x+10` dilaksanakan

Nilai *y* sekarang menjadi $y = 2 + 10 = 12$.

(ii) `x = 3` dan `y = 5`

Ekspresi `x > y` bernilai salah

Pernyataan `y:=x+10` tidak dilakukan

Nilai `y` tetap seperti sebelumnya, yaitu 5.

# Soal Latihan 2

Nyatakan pernyataan berikut:

"Anda tidak dapat terdaftar sebagai pemilih dalam Pemilu jika anda berusia di bawah 17 tahun kecuali kalau anda sudah menikah".

dalam notasi simbolik.

## Penyelesaian Soal Latihan 2

Anda tidak dapat terdaftar sebagai pemilih dalam Pemilu jika anda berusia di bawah 17 tahun kecuali kalau anda sudah menikah”.

Format: $q$ jika $p$

Susun ulang ke bentuk standard: Jika $p$, maka $q$

Jika anda berusia di bawah 17 tahun, kecuali kalau anda sudah menikah, maka anda tidak dapat terdaftar sebagai pemilih dalam Pemilu

Jika anda berusia di bawah 17 tahun, kecuali kalau anda sudah menikah, maka anda tidak dapat terdaftar sebagai pemilih dalam Pemilu

$m$ : Anda berusia di bawah 17 tahun.

$n$ : Anda sudah menikah.

$r$ : Anda dapat terdaftar sebagai pemilih dalam Pemilu.

maka pernyataan di atas dapat ditulis sebagai:

$$(m \wedge \sim n) \rightarrow \sim r$$

# Bikondisional (Bi-implikasi)

- Bentuk proposisi: "*p* jika dan hanya jika *q*"
- Notasi: $p \leftrightarrow q$

| $p$ | $q$ | $p \leftrightarrow q$ |
|---|---|---|
| T | T | T |
| T | F | F |
| F | T | F |
| F | F | T |

- $p \leftrightarrow q \Leftrightarrow (p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow p)$.

| $p$ | $q$ | $p \leftrightarrow q$ | $p \rightarrow q$ | $q \rightarrow p$ | $(p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow p)$ |
|---|---|---|---|---|---|
| T | T | T | T | T | T |
| T | F | F | F | T | F |
| F | T | F | T | F | F |
| F | F | T | T | T | T |

- Dengan kata lain, pernyataan "*p* jika dan hanya jika *q*" dapat dibaca "Jika *p* maka *q* dan jika *q* maka *p*".

- Cara-cara menyatakan bikondisional $p \leftrightarrow q$:
  (a) *p* jika dan hanya jika *q*.
  (b) *p* adalah syarat perlu dan cukup untuk *q*.
  (c) Jika *p* maka *q*, dan sebaliknya.
  (d) *p iff q*

**Contoh.** Proposisi majemuk berikut adalah bi-implikasi:

(a) 1 + 1 = 2 jika dan hanya jika 2 + 2 = 4.

(b) Syarat cukup dan syarat perlu agar hari hujan adalah kelembaban udara tinggi.

(c) Jika anda orang kaya maka anda mempunyai banyak uang, dan sebaliknya.

(d) Bandung terletak di Jawa Barat *iff* Jawa Barat adalah sebuah propinsi di Indonesia.

# Soal latihan 3

Sebagian besar orang percaya bahwa harimau Jawa sudah lama punah. Tetapi, pada suatu hari Amir membuat pernyataan-pernyataan kontroversial sebagai berikut:

(a) Saya melihat harimau di hutan.

(b) Jika saya melihat harimau di hutan, maka saya juga melihat srigala.

Misalkan kita diberitahu bahwa Amir kadang-kadang suka berbohong dan kadang-kadang jujur (bohong: semua pernyataanya salah, jujur: semua pernyataannya benar). Gunakan tabel kebenaran untuk memeriksa apakah Amir benar-benar melihat harimau di hutan?

# Penyelesaian soal latihan 3

(a) Saya melihat harimau di hutan.

(b) Jika saya melihat harimau di hutan, maka saya juga melihat srigala.

Misalkan

$p$ : Amir melihat harimau di hutan

$q$ : Amir melihat srigala

Pernyataan untuk (a): $p$

Pernyataan untuk (b): $p \rightarrow q$

Tabel kebenaran p dan $p \rightarrow q$

| $p$ | $q$ | $p \rightarrow q$ |
|---|---|---|
| T | T | T |
| T | F | F |
| F | T | T |
| F | F | T |

Kasus 1: Amir dianggap berbohong, maka apa yang dikatakan Amir itu keduanya salah ( $p$ salah, $p \rightarrow q$ salah)

Kasus 2: Amir dianggap jujur, maka apa yang dikatakan Amir itu keduanya benar ($p$ benar, $p \rightarrow q$ benar).

Tabel menunjukkan bahwa mungkin bagi $p$ dan $p \rightarrow q$ benar, tetapi tidak mungkin keduanya salah. Ini berarti Amir mengatakan yang sejujurnya, dan kita menyimpulkan bahwa Amir memang benar melihat harimau di hutan.

# Soal latihan 4

[LIU85] Sebuah pulau didiami oleh dua suku asli. Penduduk suku pertama selalu mengatakan hal yang benar, sedangkan penduduk dari suku lain selalu mengatakan kebohongan. Anda tiba di pulau ini dan bertanya kepada seorang penduduk setempat apakah di pulau tersebut ada emas atau tidak. Ia menjawab, "Ada emas di pulau ini jika dan hanya jika saya selalu mengatakan kebenaran". Apakah ada emas di pulau tersebut?

# Penyelesaian soal latihan 4

Ada emas di pulau ini jika dan hanya jika saya selalu mengatakan kebenaran

Misalkan

$p$ : Ada emas di pulau ini

$q$ : Saya selalu menyatakan kebenaran

Ekspresi logika: $p \leftrightarrow q$

Tinjau dua kemungkinan kasus:

**Kasus 1**, orang yang memberi jawaban adalah orang dari suku yang selalu menyatakan hal yang benar.

**Kasus 2**, orang yang memberi jawaban adalah orang dari suku yang selalu menyatakan hal yang bohong.

*Kasus 1*: orang tersebut selalu menyatakan hal yang benar. Ini berarti $q$ benar, dan jawabannya terhadap pertanyaan kita pasti juga benar, sehingga pernyataan bi-implikasi tersebut bernilai benar. Dari Tabel bi-implikasi kita melihat bahwa bila $q$ benar dan $p \leftrightarrow q$ benar, maka $p$ harus benar. Jadi, ada emas di pulau tersebut adalah benar.

*Kasus 2*: orang tersebut selalu menyatakan hal yang bohong. Ini berarti $q$ salah, dan jawabannya terhadap pertanyaan kita pasti juga salah, sehingga pernyataan bi-implikasi tersebut salah. Dari Tabel bi-implikasi kita melihat bahwa bila $q$ salah dan $p \leftrightarrow q$ salah, maka $p$ harus benar. Jadi, ada emas di pulau tersebut adalah benar.

| $p$ | $q$ | $p \leftrightarrow q$ |
|---|---|---|
| **T** | **T** | **T** |
| **T** | **F** | **F** |
| F | T | F |
| F | F | T |

Dari kedua kasus, kita selalu berhasil menyimpulkan bahwa ada emas di pulau tersebut, meskipun kita tidak dapat memastikan dari suku mana orang tersebut. ■

# Argumen

Argumen adalah suatu deret proposisi yang dituliskan sebagai

$$
\begin{array}{ll}
 & p_1 \\
 & p_2 \\
 & \vdots \\
 & p_n \\ \hline
\therefore & q
\end{array}
$$

yang dalam hal ini, $p_1$, $p_2$, …, $p_n$ disebut hipotesis (atau premis), dan $q$ disebut konklusi.

Argumen ada yang **sahih** (*valid*) dan **palsu** (*invalid*).

**Definisi**. Sebuah argumen dikatakan sahih jika konklusi benar bilamana semua hipotesisnya benar; sebaliknya argumen dikatakan palsu (*fallacy* atau *invalid*).

Jika argumen sahih, maka kadang-kadang kita mengatakan bahwa secara logika konklusi mengikuti hipotesis atau sama dengan memperlihatkan bahwa implikasi

$$(p_1 \land p_2 \land \ldots \land p_n) \to q$$

adalah benar (yaitu, sebuah tautologi). Argumen yang palsu menunjukkan proses penalaran yang tidak benar.

**Contoh.** Perlihatkan bahwa argumen berikut:

> *Jika air laut surut setelah gempa di laut, maka tsunami datang. Air laut surut setelah gempa di laut. Karena itu tsunami datang.*

adalah sahih.

<u>Penyelesaian</u>:

Misalkan:

$p$ : Air laut surut setelah gempa di laut

$q$ : Tsunami datang:

Argumen:

$$
\begin{array}{ll}
 & p \rightarrow q \\
 & p \\
\hline
\therefore & q
\end{array}
$$

Ada dua cara yang dapat digunakan untuk membuktikan kesahihan argumen ini.

*Cara 1*: Bentuklah tabel kebenaran untuk $p$, $q$, dan $p \rightarrow q$

| $p$ | $q$ | $p \rightarrow q$ | |
|---|---|---|---|
| **T** | **T** | **T** | (baris 1) |
| T | F | F | (baris 2) |
| F | T | T | (baris 3) |
| F | F | T | (baris 4) |

Argumen dikatakan sahih jika semua hipotesisnya benar, maka konklusinya benar. Kita periksa apabila hipotesis $p$ dan $p \rightarrow q$ benar, maka konklusi $q$ juga benar sehingga argumen dikatakan benar. Periksa tabel, $p$ dan $p \rightarrow q$ benar secara bersama-sama pada baris 1. Pada baris 1 ini $q$ juga benar. Jadi, argumen di atas **sahih**.

Cara 2: Perlihatkan dengan tabel kebenaran apakah

$$[\, p \wedge (p \rightarrow q) \,] \rightarrow q$$

merupakan tautologi. Tabel 1.16 memperlihatkan bahwa $[\, p \wedge (p \rightarrow q) \,] \rightarrow q$ suatu tautologi, sehingga argumen dikatakan sahih.

**Tabel 1.16** $[\, p \wedge (p \rightarrow q) \,] \rightarrow q$ adalah tautologi

| $p$ | $q$ | $p \rightarrow q$ | $p \wedge (p \rightarrow q)$ | $[\, p \wedge (p \rightarrow q) \,] \rightarrow q$ |
|---|---|---|---|---|
| T | T | T | T | T |
| T | F | F | F | T |
| F | T | T | F | T |
| F | F | T | F | T |

Perhatikanlah bahwa penarikan kesimpulan di dalam argumen ini menggunakan modus ponen. Jadi, kita kita juga telah memperlihatkan bahwa modus ponen adalah argmen yang sahih. ■

**Contoh.** Perlihatkan bahwa penalaran pada argumen berikut:

*"Jika air laut surut setelah gempa di laut, maka tsunami datang Tsunami datang. Jadi, air laut surut setelah gempa di laut"*

tidak benar, dengan kata lain argumennya palsu.

<u>Penyelesaian</u>:

Argumen di atas berbentuk

$$\begin{array}{l} p \to q \\ q \\ \hline \therefore p \end{array}$$

| $p$ | $q$ | $p \to q$ | |
|---|---|---|---|
| **T** | **T** | **T** | (baris 1) |
| T | F | F | (baris 2) |
| F | **T** | **T** | (baris 3) |
| F | F | T | (baris 4) |

Dari tabel tampak bahwa hipotesis $q$ dan $p \to q$ benar pada baris ke-3, tetapi pada baris 3 ini konklusi $p$ salah. Jadi, argumen tersebut tidak sahih atau palsu, sehingga penalaran menjadi tidak benar.

**Contoh.** Periksa kesahihan argumen berikut ini:

Jika 5 lebih kecil dari 4, maka 5 bukan bilangan prima.
5 tidak lebih kecil dari 4.

---

$\therefore$ 5 adalah bilangan prima

<u>Penyelesaian</u>:
Misalkan $p$ : 5 lebih kecil dari 4
$q$: 5 adalah bilangan prima.
Argumen:

$$p \to \sim q$$
$$\sim p$$
$$\therefore\ q$$

| $p$ | $q$ | $\sim q$ | $p \to \sim q$ | $\sim p$ |
|---|---|---|---|---|
| T | T | F | F | F |
| T | F | T | T | F |
| F | **T** | F | **T** | **T** |
| F | F | T | **T** | **T** |

Tabel memperlihatkan tabel kebenaran untuk kedua hipotesis dan konklusi tersebut. Baris ke-3 dan ke-4 pada tabel tersebut adalah baris di mana $p \to \sim q$ dan $\sim p$ benar secara bersama-sama, tetapi pada baris ke-4 konklusi $q$ salah (meskipun pada baris ke-3 konklusi $q$ benar). Ini berarti argumen tersebut palsu.

- Perhatikanlah bahwa meskipun konklusi dari argumen tersebut kebetulan merupakan pernyataan yang benar ("5 adalah bilangan prima" adalah benar),

- tetapi konklusi dari argumen ini tidak sesuai dengan bukti bahwa argumen tersebut palsu. ■

**Latihan**

1. Diberikan dua buah premis berikut:

   (i) Logika sulit atau tidak banyak mahasiswa yang menyukai logika.

   (ii) Jika matematika mudah, maka logika tidak sulit.

   Tunjukkan dengan pembuktian argumen (atau cara lain) apakah masing-masing konklusi berikut sah (valid) atau tidak berdasarkan dua premis di atas:

   a) Bahwa matematika tidak mudah atau logika sulit.

   b) Bahwa matematika tidak mudah, jika banyak mahasiswa menyukai logika.

2. Tentukan validitas argumen berikut:

   *Mahasiswa diperbolehkan mengambil mata kuliah Matematika Diskrit jika telah melewati tahun pertama dan berada pada semester ganjil. Mahasiswa jurusan Farmasi tidak diperbolehkan mengambil mata kuliah Matematika Diskrit. Dengan demikian mahasiswa jurusan Farmasi belum melewati tahun pertama atau sedang berada pada semester genap.*

3. Dari keempat argumen berikut, argumen manakah yang sahih?
   - Jika hari panas, maka Amir mimisan, tetapi hari ini tidak panas, oleh karena itu Amir tidak mimisan.
   - Jika hari panas, maka Amir mimisan, tetapi Amir tidak mimisan, oleh karena itu hari ini tidak panas.
   - Jika Amir mimisan maka hari panas, tetapi hari ini tidak panas, oleh karena itu Amir tidak mimisan.
   - Jika Amir tidak mimisan, maka hari tidak panas, tetapi Amir mimisan, oleh karena itu hari ini tidak panas.

# Aksioma, Teorema, *Lemma*, *Corollary*

**Aksioma** adalah proposisi yang diasumsikan benar. Aksioma tidak memerlukan pembuktian kebenaran lagi.

Contoh-contoh aksioma:

(a) Untuk semua bilangan real $x$ dan $y$, berlaku $x + y = y + x$ (hukum komutatif penjumlahan).
(b) Jika diberikan dua buah titik yang berbeda, maka hanya ada satu garis lurus yang melalui dua buah titik tersebut.

**Teorema** adalah proposisi yang sudah terbukti benar.

Bentuk khusus dari teorema adalah *lemma* dan *corolarry*.

- **Lemma**: teorema sederhana yang digunakan untuk pembuktian teorema lain

- **Corollary**: teorema yang dapat dibentuk langsung dari teorema yang telah dibuktikan.

- atau, *corollary* adalah teorema yang mengikuti teorema lain.

Contoh-contoh teorema:

a. Jika dua sisi dari sebuah segitiga sama panjang, maka sudut yang berlawanan dengan sisi tersebut sama besar.
b. Untuk semua bilangan real $x$, $y$, dan $z$, jika $x \leq y$ dan $y \leq z$, maka $x \leq z$ (hukum transitif).

Contoh *corollary*:

Jika sebuah segitiga adalah sama sisi, maka segitiga tersebut sama sudut.
*Corollary* ini mengikuti teorema (a) di atas.

Contoh *lemma*:

Jika $n$ adalah bilangan bulat positif, maka $n - 1$ bilangan positif atau $n - 1 = 0$.

## Contoh lainnya (dalam kalkulus)

- **Teorema**: $|x| < a$ jika dan hanya jika $-a < x < a$, dumana $a > 0$
- **Corollary**: $|x| \leq a$ jika dan hanya jika $-a \leq x \leq a$, dumana $a > 0$