FUNGSI

FUNGSI

Misalkan *A* dan *B* himpunan.

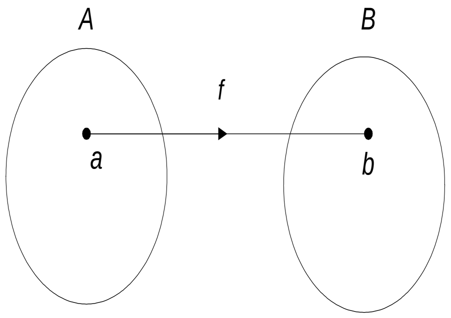
- Relasi biner *f* dari *A* ke *B* merupakan suatu fungsi jika *setiap* elemen di dalam *A* dihubungkan dengan tepat satu elemen di dalam *B*.
- Jika *f* adalah fungsi dari *A* ke *B* kita menuliskan

$$f : A \rightarrow B$$

- yang artinya *f* **memetakan** *A* ke *B*.
- *A* disebut **daerah asal** (*domain*) dari *f* dan *B* disebut **daerah hasil** (*codomain*) dari *f*.
- Nama lain untuk fungsi adalah **pemetaan** atau **transformasi**.

FUNGSI

- Kita menuliskan $f(a) = b$ jika elemen a di dalam A dihubungkan dengan elemen b di dalam B.
- Jika $f(a) = b$, maka b dinamakan **bayangan** (*image*) dari a dan a dinamakan **pra-bayangan** (*pre-image*) dari b.
- Himpunan yang berisi semua nilai pemetaan f disebut **jelajah** (*range*) dari f. Perhatikan bahwa jelajah dari f adalah himpunan bagian (mungkin *proper subset*) dari B.



FUNGSI

- Fungsi adalah relasi yang khusus:
  - Tiap elemen di dalam himpunan A harus digunakan oleh prosedur atau kaidah yang mendefinisikan f.
  - Frasa "dihubungkan dengan tepat satu elemen di dalam B" berarti bahwa jika $(a, b) \in f$ dan $(a, c) \in f$, maka $b = c$.

REPRESENTASI FUNGSI

Fungsi dapat dispesifikasikan dalam berbagai bentuk, diantaranya:

- Himpunan pasangan terurut.

  Seperti pada relasi.

- Formula pengisian nilai (*assignment*).

  Contoh: $f(x) = 2x + 10$, $f(x) = x^2$ dan $f(x) = 1/x$.

- Kata-kata

  Contoh: "*f* adalah fungsi yang memetakan besar gaji pegawai berdasarkan lama pengabdian".

REPRESENTASI FUNGSI

- Kode program (*source code*)

Contoh: Fungsi menghitung |*x*|

```
function abs(x:integer):integer;
    begin
      if x < 0 then
        abs:=-x
      else
        abs:=x;
  end;
```

Contoh

- **Contoh .** Relasi $f = \{(1, u), (2, v), (3, w)\}$ dari $A = \{1, 2, 3\}$ ke $B = \{u, v, w\}$ adalah fungsi dari A ke B. Di sini $f(1) = u$, $f(2) = v$, dan $f(3) = w$. Daerah asal dari f adalah A dan daerah hasil adalah B. Jelajah dari f adalah $\{u, v, w\}$, yang dalam hal ini sama dengan himpunan B.

Contoh

- **Contoh .** Relasi $f = \{(1, u), (2, u), (3, v)\}$ dari $A = \{1, 2, 3\}$ ke $B = \{u, v, w\}$ adalah fungsi dari A ke B, meskipun u merupakan bayangan dari dua elemen A. Daerah asal fungsi adalah A, daerah hasilnya adalah B, dan jelajah fungsi adalah $\{u, v\}$.

Contoh

- **Contoh .** Relasi $f = \{(1, u), (2, v), (3, w)\}$ dari $A = \{1, 2, 3, 4\}$ ke $B = \{u, v, w\}$ bukan fungsi, karena tidak semua elemen A dipetakan ke B.

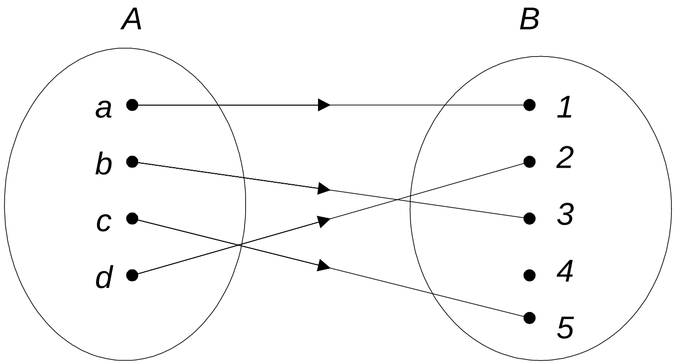
- **Contoh .** Relasi $f = \{(1, u), (1, v), (2, v), (3, w)\}$ dari $A = \{1, 2, 3\}$ ke $B = \{u, v, w\}$ bukan fungsi, karena 1 dipetakan ke dua buah elemen B, yaitu u dan v.

Contoh

- **Contoh .** Misalkan f : **Z** $\rightarrow$ **Z** didefinisikan oleh $f(x) = x^2$. Daerah asal dan daerah hasil dari f adalah himpunan bilangan bulat, dan jelajah dari f adalah himpunan bilangan bulat tidak-negatif.

FUNGSI SATU KE SATU (ONE TO ONE)

- Fungsi *f* dikatakan **satu-ke-satu** (*one-to-one*) atau **injektif** (*injective*) jika tidak ada dua elemen himpunan *A* yang memiliki bayangan sama.



Contoh

- **Contoh .** Relasi $f = \{(1, w), (2, u), (3, v)\}$ dari $A = \{1, 2, 3\}$ ke $B = \{u, v, w, x\}$ adalah fungsi satu-ke-satu,

  Tetapi relasi $f = \{(1, u), (2, u), (3, v)\}$ dari $A = \{1, 2, 3\}$ ke $B = \{u, v, w\}$ bukan fungsi satu-ke-satu, karena $f(1) = f(2) = u$.

Contoh

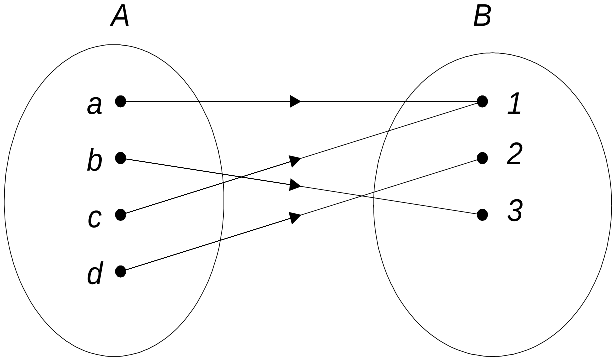
- **Contoh .** Misalkan $f : \mathbf{Z} \rightarrow \mathbf{Z}$. Tentukan apakah $f(x) = x^2+1$ dan $f(x) = x - 1$ merupakan fungsi satu-ke-satu?

<u>Penyelesaian</u>:

- (i) $f(x) = x^2 + 1$ bukan fungsi satu-ke-satu, karena untuk dua x yang bernilai mutlak sama tetapi tandanya berbeda nilai fungsinya sama, misalnya $f(2) = f(-2) = 5$ padahal $-2 \neq 2$.
- (ii) $f(x) = x - 1$ adalah fungsi satu-ke-satu karena untuk $a \neq b$, $a - 1 \neq b - 1$. Misalnya untuk $x = 2$, $f(2) = 1$ dan untuk $x = -2$, $f(-2) = -3$.

FUNGSI PADA (ONTO)

- Fungsi *f* dikatakan dipetakan **pada** (*onto*) atau **surjektif** (*surjective*) jika setiap elemen himpunan *B* merupakan bayangan dari satu atau lebih elemen himpunan *A*.
- Dengan kata lain seluruh elemen *B* merupakan jelajah dari *f*. Fungsi *f* disebut fungsi pada himpunan *B*.



Contoh

- **Contoh .** Relasi $f = \{(1, u), (2, u), (3, v)\}$ dari $A = \{1, 2, 3\}$ ke $B = \{u, v, w\}$ bukan fungsi pada karena w tidak termasuk jelajah dari f.

  Relasi $f = \{(1, w), (2, u), (3, v)\}$ dari $A = \{1, 2, 3\}$ ke $B = \{u, v, w\}$ merupakan fungsi pada karena semua anggota B merupakan jelajah dari f.

Contoh

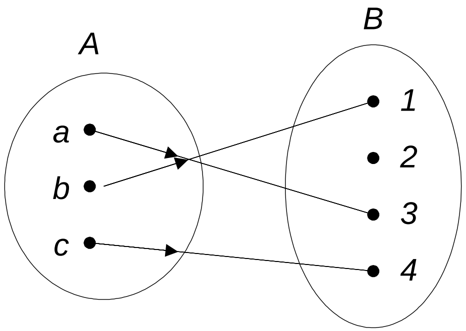
- **Contoh .** Misalkan $f : \mathbf{Z} \rightarrow \mathbf{Z}$. Tentukan apakah $f(x) = x^2 + 1$ dan $f(x) = x - 1$ merupakan fungsi pada?

Penyelesaian:

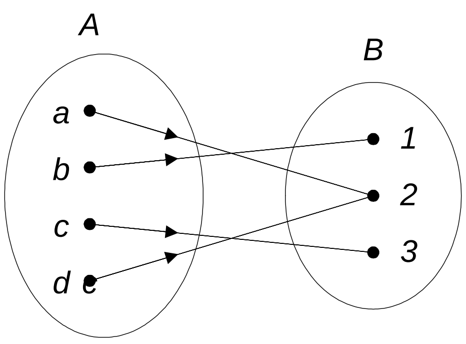
- (i) $f(x) = x^2 + 1$ bukan fungsi pada, karena tidak semua nilai bilangan bulat merupakan jelajah dari f.
- (ii) $f(x) = x - 1$ adalah fungsi pada karena untuk setiap bilangan bulat y, selalu ada nilai x yang memenuhi, yaitu $y = x - 1$ akan dipenuhi untuk $x = y + 1$.

Contoh

- Fungsi satu ke satu bukan pada

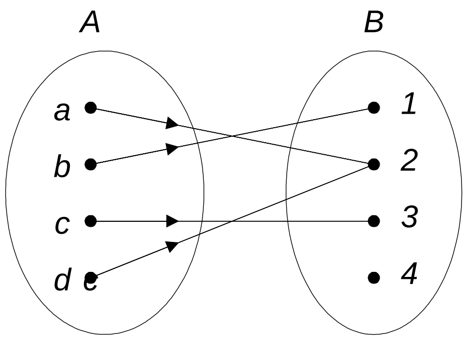


- Fungsi pada bukan satu ke satu

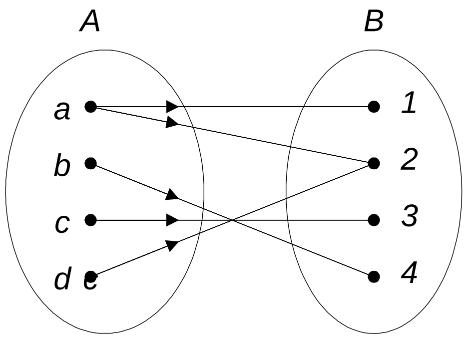


Contoh

- Bukan fungsi satu ke satu maupun pada



- Bukan fungsi



FUNGSI BERKORESPONDEN SATU KE SATU

- Fungsi *f* dikatakan **berkoresponden satu-ke-satu** atau **bijeksi** (*bijection*) jika ia fungsi satu-ke-satu (one to one) dan juga fungsi pada (onto).

Contoh

- **Contoh .** Relasi $f = \{(1, u), (2, w), (3, v)\}$ dari $A = \{1, 2, 3\}$ ke $B = \{u, v, w\}$ adalah fungsi yang berkoresponden satu-ke-satu, karena f adalah fungsi satu-ke-satu maupun fungsi pada.

- **Contoh .** Fungsi $f(x) = x – 1$ merupakan fungsi yang berkoresponden satu-ke-satu, karena f adalah fungsi satu-ke-satu maupun fungsi pada.

INVERS DARI FUNGSI

- Jika f adalah fungsi berkoresponden satu-ke-satu dari A ke B, maka kita dapat menemukan **balikan** (*invers*) dari f.
- Balikan fungsi dilambangkan dengan f^{-1}. Misalkan a adalah anggota himpunan A dan b adalah anggota himpunan B, maka

  $f^{-1}(b) = a$ jika $f(a) = b$.

INVERS DARI FUNGSI

- Fungsi yang berkoresponden satu-ke-satu sering dinamakan juga fungsi yang *invertible* (dapat dibalikkan), karena kita dapat mendefinisikan fungsi balikannya. Sebuah fungsi dikatakan *not invertible* (tidak dapat dibalikkan) jika ia bukan fungsi yang berkoresponden satu-ke-satu, karena fungsi balikannya tidak ada.

Contoh

- **Contoh .** Relasi $f = \{(1, u), (2, w), (3, v)\}$

  dari $A = \{1, 2, 3\}$ ke $B = \{u, v, w\}$ adalah fungsi yang berkoresponden satu-ke-satu. Balikan fungsi f adalah

  $f^{-1} = \{(u, 1), (w, 2), (v, 3)\}$
- Jadi, f adalah fungsi *invertible*.

Contoh

- **Contoh .** Tentukan balikan fungsi $f(x) = x - 1$.

Penyelesaian:

- Fungsi $f(x) = x - 1$ adalah fungsi yang berkoresponden satu-ke-satu, jadi balikan fungsi tersebut ada.

- Misalkan $f(x) = y$, sehingga $y = x - 1$, maka $x = y + 1$. Jadi, balikan fungsi balikannya adalah

$f^{-1}(x) = y + 1$.

Contoh

- **Contoh.** Tentukan balikan fungsi $f(x) = x^2 + 1$.
- Penyelesaian:
- Dari Contoh sebelumnya kita sudah menyimpulkan bahwa $f(x) = x^2 + 1$ bukan fungsi yang berkoresponden satu-ke-satu, sehingga fungsi balikannya tidak ada. Jadi, $f(x) = x^2 + 1$ adalah fungsi yang *not invertible*.

Komposisi dari dua buah fungsi.

- Misalkan g adalah fungsi dari himpunan A ke himpunan B, dan f adalah fungsi dari himpunan B ke himpunan C. Komposisi f dan g, dinotasikan dengan $f \circ g$, adalah fungsi dari A ke C yang didefinisikan oleh

$$(f \circ g)(a) = f(g(a))$$

Contoh

- **Contoh .** Diberikan fungsi $g = \{(1, u), (2, u), (3, v)\}$ yang memetakan $A = \{1, 2, 3\}$ ke $B = \{u, v, w\}$, dan fungsi $f = \{(u, y), (v, x), (w, z)\}$ yang memetakan $B = \{u, v, w\}$

  ke $C = \{x, y, z\}$.

  Fungsi komposisi dari A ke C adalah

  $f \circ g = \{(1, y), (2, y), (3, x) \}$

Contoh

- **Contoh .** Diberikan fungsi $f(x) = x – 1$ dan $g(x) = x^2 + 1$. Tentukan $f \circ g$ dan $g \circ f$.
- Penyelesaian:

(i) $(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(x^2 + 1) = x^2 + 1 – 1 = x^2$.

(ii) $(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(x – 1) = (x –1)^2 + 1 =$ $x^2 - 2x + 2$.

Beberapa Fungsi Khusus

1. Fungsi *Floor* dan *Ceiling*

Misalkan x adalah bilangan riil, berarti x berada di antara dua bilangan bulat.

- Fungsi *floor* dari x:

  $\lfloor x \rfloor$ menyatakan nilai bilangan bulat terbesar yang lebih kecil atau sama dengan x

- Fungsi *ceiling* dari x:

  $\lceil x \rceil$ menyatakan bilangan bulat terkecil yang lebih besar atau sama dengan x

Contoh

Beberapa contoh fungsi floor dan ceiling

$\lfloor 3.5 \rfloor = 3$ $\lceil 3.5 \rceil = 4$

$\lfloor 0.5 \rfloor = 0$ $\lceil 0.5 \rceil = 1$

$\lfloor 4.8 \rfloor = 4$ $\lceil 4.8 \rceil = 5$

$\lfloor -0.5 \rfloor = -1$ $\lceil -0.5 \rceil = 0$

$\lfloor -3.5 \rfloor = -4$ $\lceil -3.5 \rceil = -3$

Beberapa Fungsi Khusus

- **2. Fungsi modulo**

  Misalkan a adalah sembarang bilangan bulat dan m adalah bilangan bulat positif.
- a mod m memberikan sisa pembagian bilangan bulat bila a dibagi dengan m
- a mod $m = r$ sedemikian sehingga $a = mq + r$, dengan $0 \leq r < m$.

Contoh

- **Contoh .** Beberapa contoh fungsi modulo

  $25 \bmod 7 = 4$

  $16 \bmod 4 = 0$

  $3612 \bmod 45 = 12$

  $0 \bmod 5 = 5$

  $-25 \bmod 7 = 3$ (sebab $-25 = 7 \cdot (-4) + 3$)

Beberapa Fungsi Khusus

- **3. Fungsi Faktorial**

$$n! = \begin{cases} 1 & , n = 0 \\ 1 \times 2 \times \cdots . \times (n-1) \times n & , n > 0 \end{cases}$$

4. Fungsi Eksponensial

$$a^n = \begin{cases} 1 & , n = 0 \\ \underbrace{a \times a \times \cdots \times a}_{n} & , n > 0 \end{cases}$$

Untuk kasus perpangkatan negatif,

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n}$$

Beberapa Fungsi Khusus

- **5. Fungsi Logaritmik**
- Fungsi logaritmik berbentuk

$$y = {}^a\log x \leftrightarrow x = a^y$$

Beberapa Fungsi Khusus

- **Fungsi Rekursif**

  Fungsi *f* dikatakan fungsi rekursif jika definisi fungsinya mengacu pada dirinya sendiri.

  Contoh:

$$n! = 1 \times 2 \times \ldots \times (n-1) \times n = (n-1)! \times n.$$

$$n! = \begin{cases} 1 & , n = 0 \\ n \times (n-1)! & , n > 0 \end{cases}$$