KALKULUS I
MUH1B3

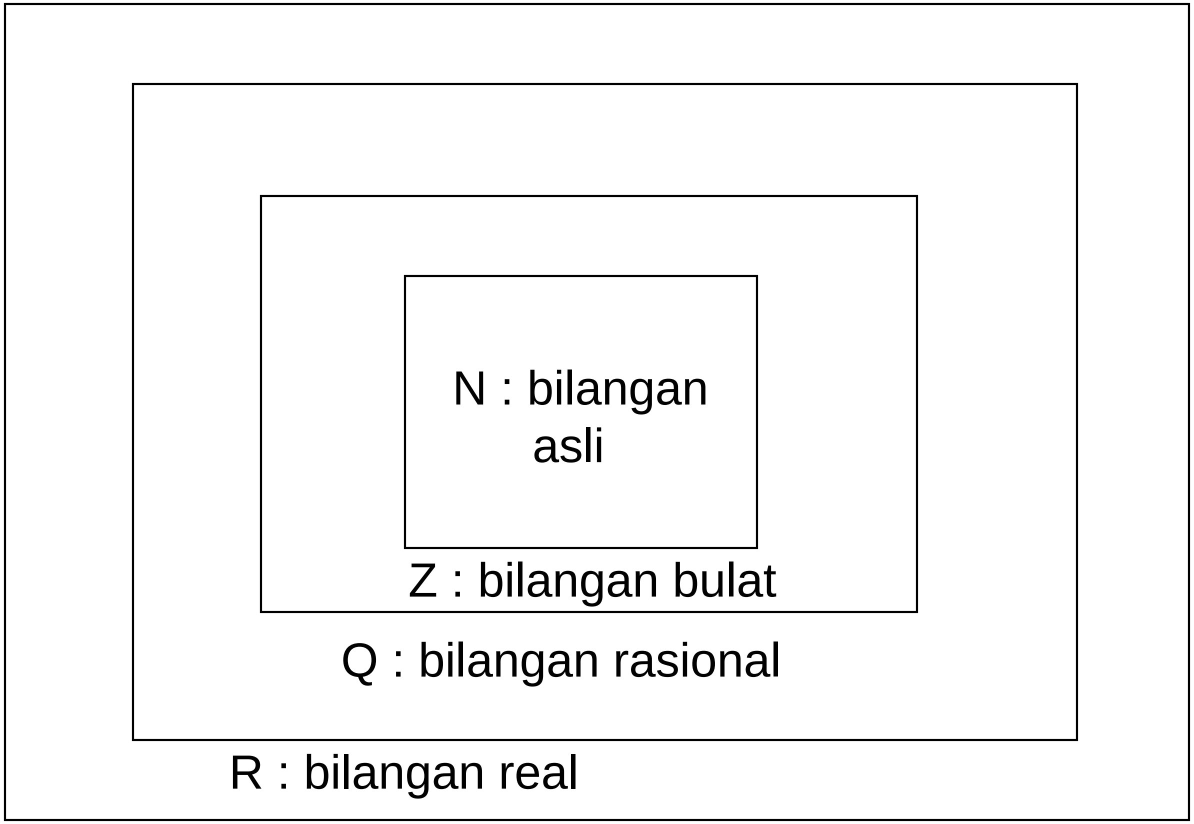
Program Perkuliahan Dasar dan Umum (PPDU)
Telkom University

- **Sistem Bilangan Real**

TUJUAN PEMBELAJARAN

- Mengetahui dan memahami definisi dan jenis-jenis sistem bilangan
- Menyelesaikan pertaksamaan
- Menyelesaikan pertaksamaan dengan nilai mutlak

SISTEM BILANGAN



N :
1,2,3,….

Z :
…,-2,-1,0,1,2,..

Q :

$$q = \frac{a}{b}, a, b \in Z, b \neq 0$$

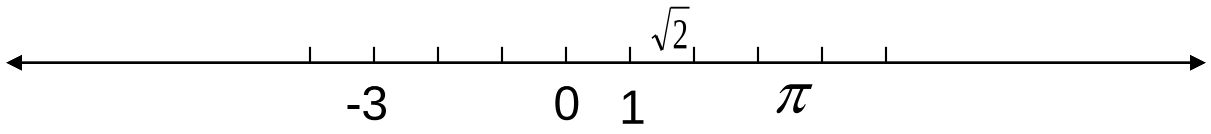
$$R = Q \cup Irasional$$

Contoh Bil Irasional

$$\sqrt{2}, \sqrt{3}, \pi$$

GARIS BILANGAN

Setiap bilangan real mempunyai posisi pada suatu garis yang disebut dengan garis bilangan(real)



Selang

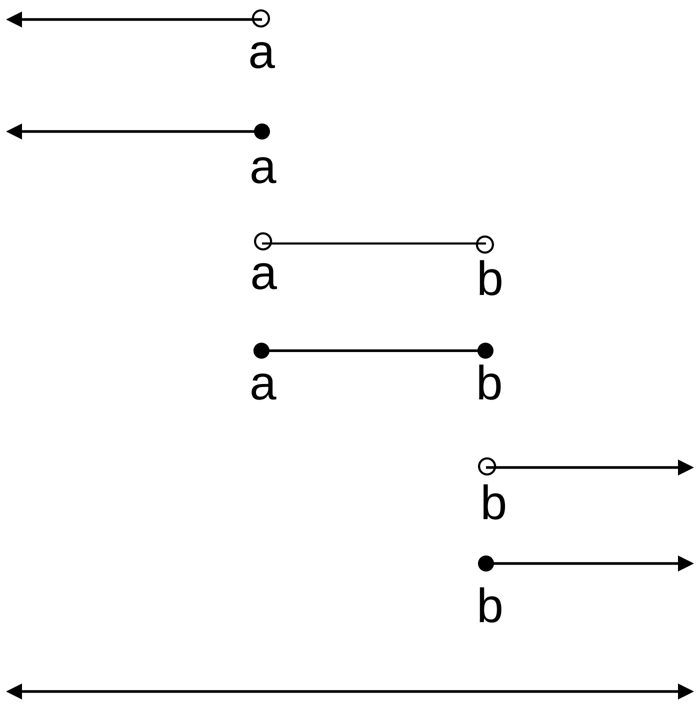
Himpunan bagian dari garis bilangan disebut selang

SELANG

Jenis-jenis selang

Himpunan	**selang**
$\{x \mid x < a\}$	$(-\infty, a)$
$\{x \mid x \le a\}$	$(-\infty, a]$
$\{x \mid a < x < b\}$	(a, b)
$\{x \mid a \le x \le b\}$	$[a, b]$
$\{x \mid x > b\}$	(b, ∞)
$\{x \mid x \ge b\}$	$[b, \infty)$
$\{x \mid x \in \Re\}$	$(-\infty, \infty)$

Grafik



SIFAT–SIFAT BILANGAN REAL

- Sifat-sifat urutan :
  - ❑Trikotomi

    Jika x dan y adalah suatu bilangan, maka pasti berlaku salah satu dari $x < y$ atau $x > y$ atau $x = y$
  - ❑Ketransitifan

    Jika $x < y$ dan $y < z$ maka $x < z$
  - ❑Perkalian

    Misalkan z bilangan positif dan $x < y$ maka $xz < yz$, sedangkan bila z bilangan negatif, maka $xz > yz$

PERTIDAKSAMAAN

- Bentuk umum pertidaksamaan :

$$\frac{A(x)}{B(x)} < \frac{D(x)}{E(x)}$$

- dengan A(x), B(x), D(x), E(x) adalah suku banyak (polinom) dan B(x) ≠ 0, E(x) ≠ 0

PERTIDAKSAMAAN

- Menyelesaikan suatu pertidaksamaan adalah mencari semua himpunan bilangan real yang membuat pertidaksamaan berlaku. Himpunan bilangan real ini disebut juga Himpunan Penyelesaian (HP)
- Cara menentukan HP :
  1. Bentuk pertidaksamaan diubah menjadi :

$$\frac{P(x)}{Q(x)} < 0$$

PERTIDAKSAMAAN

2. Faktorkan P(x) dan Q(x) menjadi faktor-faktor linier dan/ atau kuadrat
3. Tentukan titik pemecah (pembuat nol faktor linear) . Gambarkan titik-titik pemecah tersebut pada garis bilangan, kemudian tentukan tanda (+, -) pertidaksamaan di setiap selang bagian yang muncul

CONTOH :
TENTUKAN HIMPUNAN PENYELESAIAN

1 $13 \geq 2x - 3 \geq 5$

$$13 + 3 \geq 2x \geq 5 + 3$$

$$16 \geq 2x \geq 8$$

$$8 \geq x \geq 4$$

$$4 \leq x \leq 8$$

Hp = $[4,8]$

CONTOH :
TENTUKAN HIMPUNAN PENYELESAIAN

2 $-2 < 6 - 4x \le 8$

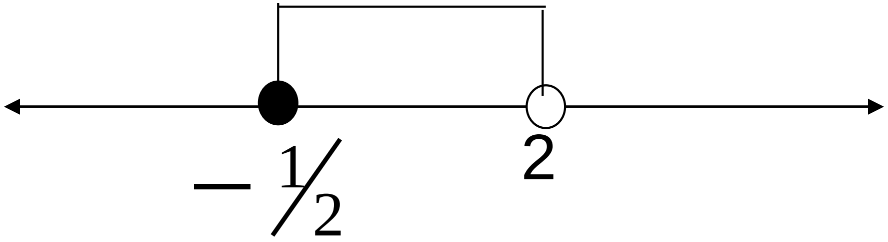
$-8 < -4x \le 2$

$8 > 4x \ge -2$

$-2 \le 4x < 8$

$-\frac{1}{2} \le x < 2$

Hp $= \left[-\frac{1}{2}, 2 \right)$

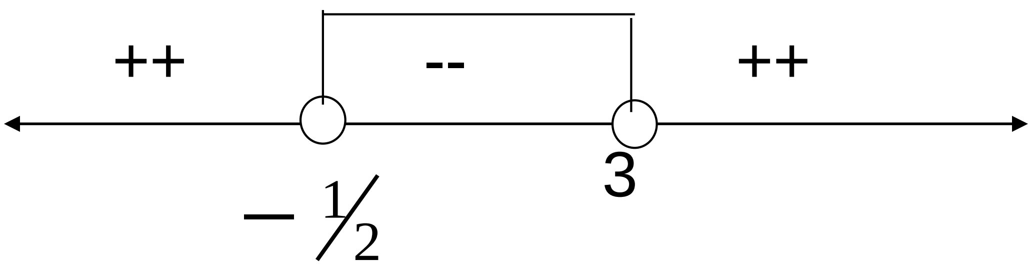


CONTOH :
TENTUKAN HIMPUNAN PENYELESAIAN

3 $\quad 2x^2 - 5x - 3 < 0$

$$(2x+1)(x-3) < 0$$

Titik Pemecah (TP) : $x = -\dfrac{1}{2}$ dan $x = 3$



Hp = $\left(-\dfrac{1}{2}, 3\right)$

CONTOH :
TENTUKAN HIMPUNAN PENYELESAIAN

4 $2x-4 \le 6-7x \le 3x+6$

$2x-4 \le 6-7x$ dan $6-7x \le 3x+6$

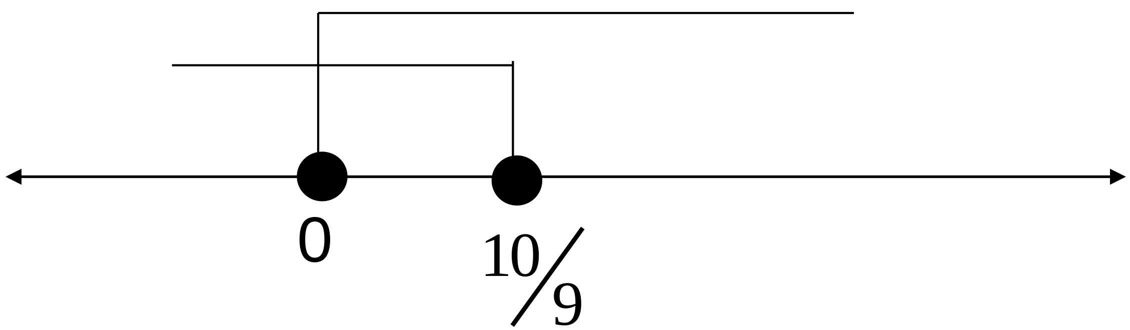
$2x+7x \le 6+4$ dan $-7x-3x \le -6+6$

$9x \le 10$ dan $-10x \le 0$

$x \le \dfrac{10}{9}$ dan $10x \ge 0$

$x \le \dfrac{10}{9}$ dan $x \ge 0$

$$\text{Hp} = \left(-\infty, \frac{10}{9}\right] \cap [0, \infty)$$



Dari gambar tersebut dapat disimpulkan :

$$\text{Hp} = \left[0, \frac{10}{9}\right]$$

CONTOH :
TENTUKAN HIMPUNAN PENYELESAIAN

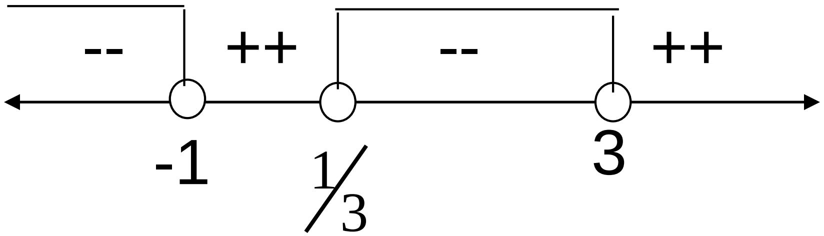
5. $$\frac{1}{x+1} < \frac{2}{3x-1}$$

$$\frac{1}{x+1} - \frac{2}{3x-1} < 0$$

$$\frac{(3x-1)-(2x+2)}{(x+1)(3x-1)} < 0$$

$$\frac{x-3}{(x+1)(3x-1)} < 0$$

TP : -1, $\frac{1}{3}$, 3



Hp = $\left(-\infty,-1\right) \cup \left(\frac{1}{3},3\right)$

CONTOH :
TENTUKAN HIMPUNAN PENYELESAIAN

6. $$\frac{x+1}{2-x} \le \frac{x}{3+x}$$

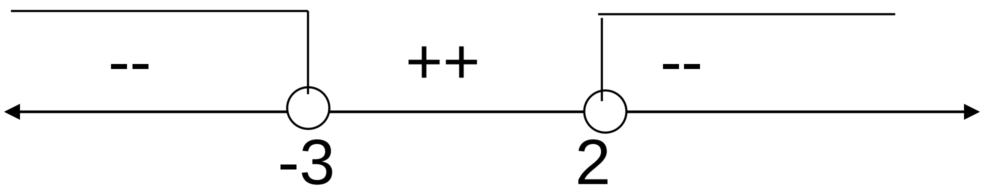
$$\frac{x+1}{2-x} - \frac{x}{3+x} \le 0$$

$$\frac{(x+1)(3+x) - x(2-x)}{(2-x)(3+x)} \le 0$$

$$\frac{2x^2+2x+3}{(2-x)(x+3)} \le 0$$

Untuk pembilang $2x^2 + 2x + 3$ mempunyai nilai Diskriminan (D) < 0, sehingga nilainya selalu positif, Jadi TP : 2,-3

Pembilang tidak menghasilkan titik pemecah.



Hp = $\left(-\infty,-3\right)\cup\left(2,\infty\right)$

PERTIDAKSAMAAN DGN NILAI MUTLAK

- Definisi :

$$|x| = \begin{cases} x & , x \geq 0 \\ -x & , x < 0 \end{cases}$$

Arti Geometris |x| : Jarak dari x ke titik 0(asal)

PERTIDAKSAMAAN NILAI MUTLAK

- Sifat-sifat nilai mutlak:

1 $|x| = \sqrt{x^2}$

2 $|x| \leq a, a \geq 0 \quad \leftrightarrow \quad -a \leq x \leq a$

3 $|x| \geq a, a \geq 0 \quad \leftrightarrow \quad x \geq a$ atau $x \leq -a$

4 $|x| \leq |y| \quad \leftrightarrow \quad x^2 \leq y^2$

5 $\left|\frac{x}{y}\right| = \frac{|x|}{|y|}$

6. Ketaksamaan segitiga

$$|x+y| \leq |x| + |y| \qquad |x-y| \geq \big||x| - |y|\big|$$

CONTOH : MENENTUKAN HIMPUNAN PENYELESAIAN

Contoh :

1. $|2x-5|<3$

Kita bisa menggunakan sifat ke-2.

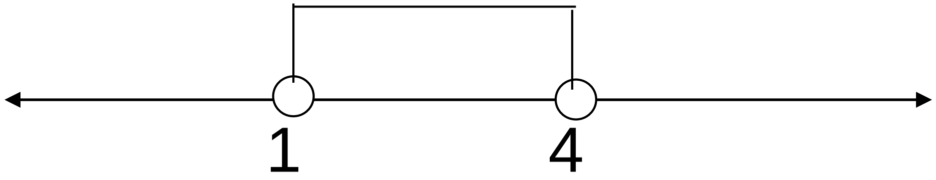
$$\Leftrightarrow -3 < 2x-5 < 3$$

$$\Leftrightarrow 5-3 < 2x < 3+5$$

$$\Leftrightarrow 2 < 2x < 8$$

$$\Leftrightarrow 1 < x < 4$$

Hp = $(1,4)$

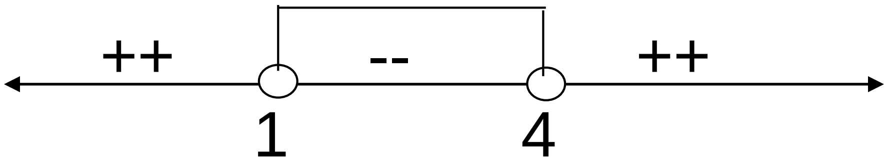


CONTOH : MENENTUKAN HIMPUNAN PENYELESAIAN

2. $|2x-5|<3$

Kita bisa juga menggunakan sifat ke-4,
karena ruas kiri maupun kanan keduanya positif.

$$\Leftrightarrow (2x-5)^2 < 9$$
$$\Leftrightarrow 4x^2 - 20x + 25 < 9$$
$$\Leftrightarrow 4x^2 - 20x + 16 < 0$$
$$\Leftrightarrow 2x^2 - 10x + 8 < 0$$
$$\Leftrightarrow (2x-2)(x-4) < 0$$



Hp = $(1,4)$

TP : 1, 4

CONTOH : MENENTUKAN HIMPUNAN PENYELESAIAN PAKAI DEFINISI

3. $|2x+3| \geq |4x+5|$

Kita bisa menggunakan sifat 4

$$\Leftrightarrow (2x+3)^2 \geq (4x+5)^2$$

$$\Leftrightarrow 4x^2 + 12x + 9 \geq 16x^2 + 40x + 25$$

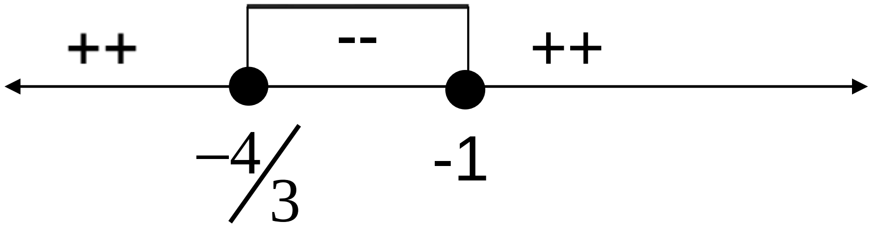
$$\Leftrightarrow -12x^2 - 28x - 16 \geq 0$$

$$\Leftrightarrow 3x^2 + 7x + 4 \leq 0$$

TP : $-\frac{4}{3}$, -1

CONTOH : MENENTUKAN HIMPUNAN PENYELESAIAN

Jika digambar pada garis bilangan :



Hp = $[\frac{-4}{3}, -1]$

CONTOH : MENENTUKAN HIMPUNAN PENYELESAIAN

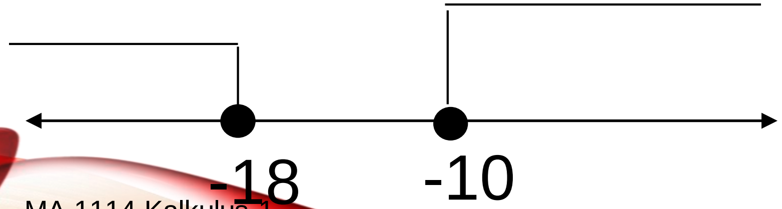
4. $$\left|\frac{x}{2}+7\right| \geq 2$$

$$\Leftrightarrow \frac{x}{2}+7 \geq 2 \quad \text{atau} \quad \frac{x}{2}+7 \leq -2$$

$$\Leftrightarrow \frac{x}{2} \geq -5 \quad \text{atau} \quad \frac{x}{2} \leq -9$$

$$\Leftrightarrow x \geq -10 \quad \text{atau} \quad x \leq -18$$

Hp = $\left[-10,\infty\right) \cup \left(-\infty,-18\right]$



CONTOH : MENENTUKAN HIMPUNAN PENYELESAIAN

5. $3|x-2|-|x+1| \geq -2$

Kita definisikan dahulu :

$$|x-2| = \begin{cases} x-2 & x \geq 2 \\ 2-x & x < 2 \end{cases} \qquad |x+1| = \begin{cases} x+1 & x \geq -1 \\ -x-1 & x < -1 \end{cases}$$

Jadi kita mempunyai 3 interval :

I	II	III
$(-\infty,-1)$	$[-1,2)$	$[2,\infty)$

CONTOH : MENENTUKAN HIMPUNAN PENYELESAIAN

I. Untuk interval $x < -1$ atau $(-\infty, -1)$

$$3|x-2| - |x+1| \geq -2$$

$$\Leftrightarrow 3(2-x) - (-x-1) \geq -2$$

$$\Leftrightarrow 6 - 3x + x + 1 \geq -2$$

$$\Leftrightarrow 7 - 2x \geq -2$$

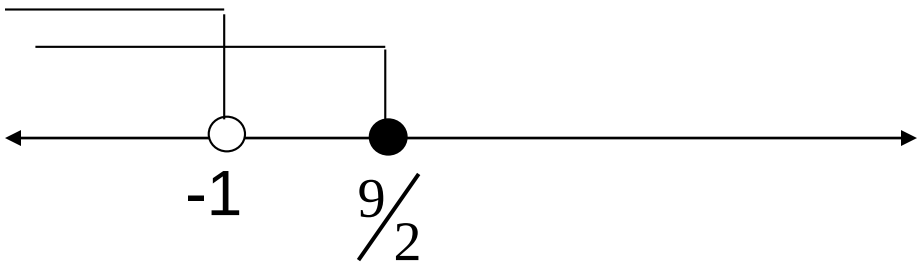
$$\Leftrightarrow -2x \geq -9$$

$$\Leftrightarrow 2x \leq 9$$

$$\Leftrightarrow x \leq \frac{9}{2} \quad \text{atau} \quad \left(-\infty, \frac{9}{2}\right]$$

CONTOH : MENENTUKAN HIMPUNAN PENYELESAIAN

Jadi Hp1 = $\left(-\infty, \frac{9}{2}\right] \cap (-\infty, -1)$



Dari gambar garis bilangan tersebut dapat disimpulkan bahwa hasil irisan kedua interval tersebut adalah $(-\infty, -1)$

sehingga Hp1 = $(-\infty, -1)$

CONTOH : MENENTUKAN HIMPUNAN PENYELESAIAN

II. Untuk interval $-1 \le x < 2$ atau $[-1,2)$

$$3|x-2|-|x+1| \ge -2$$

$$\Leftrightarrow 3(2-x)-(x+1) \ge -2$$

$$\Leftrightarrow 6-3x-x-1 \ge -2$$

$$\Leftrightarrow 5-4x \ge -2$$

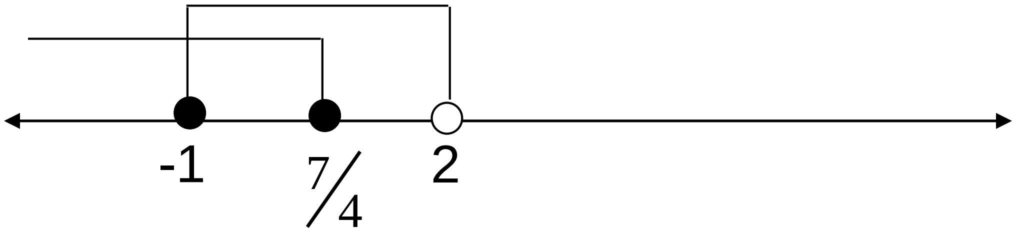
$$\Leftrightarrow -4x \ge -7$$

$$\Leftrightarrow 4x \le 7$$

$$\Leftrightarrow x \le \frac{7}{4} \quad \text{atau} \left(-\infty, \frac{7}{4}\right]$$

CONTOH : MENENTUKAN HIMPUNAN PENYELESAIAN

Jadi Hp2 = $\left(-\infty, \frac{7}{4}\right] \cap [-1, 2)$



Dari gambar garis bilangan tersebut dapat disimpulkan bahwa hasil irisan dua interval tersebut adalah $\left[-1, \frac{7}{4}\right]$

sehingga Hp2 = $\left[-1, \frac{7}{4}\right]$

CONTOH : MENENTUKAN HIMPUNAN PENYELESAIAN

III. Untuk interval $x \geq 2$ atau $[2, \infty)$

$$3|x-2| - |x+1| \geq -2$$

$$\Leftrightarrow 3(x-2) - (x+1) \geq -2$$

$$\Leftrightarrow 3x - 6 - x - 1 \geq -2$$

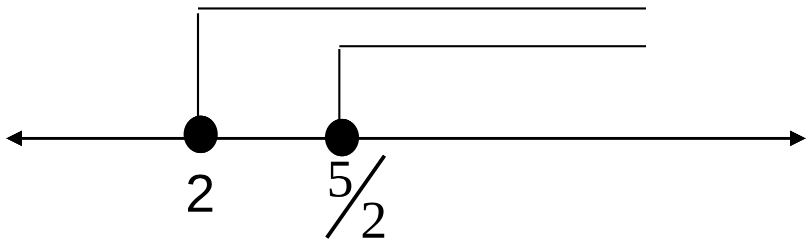
$$\Leftrightarrow 2x - 7 \geq -2$$

$$\Leftrightarrow 2x \geq 5$$

$$\Leftrightarrow x \geq \frac{5}{2} \quad \text{atau} \quad \left[\frac{5}{2}, \infty\right)$$

CONTOH : MENENTUKAN HIMPUNAN PENYELESAIAN

Jadi Hp3 = $\left[\frac{5}{2},\infty\right) \cap [2,\infty)$



Dari gambar garis bilangan tersebut dapat disimpulkan bahwa hasil irisan dua interval tersebut adalah $\left[\frac{5}{2},\infty\right)$ sehingga

Hp3 = $\left[\frac{5}{2},\infty\right)$

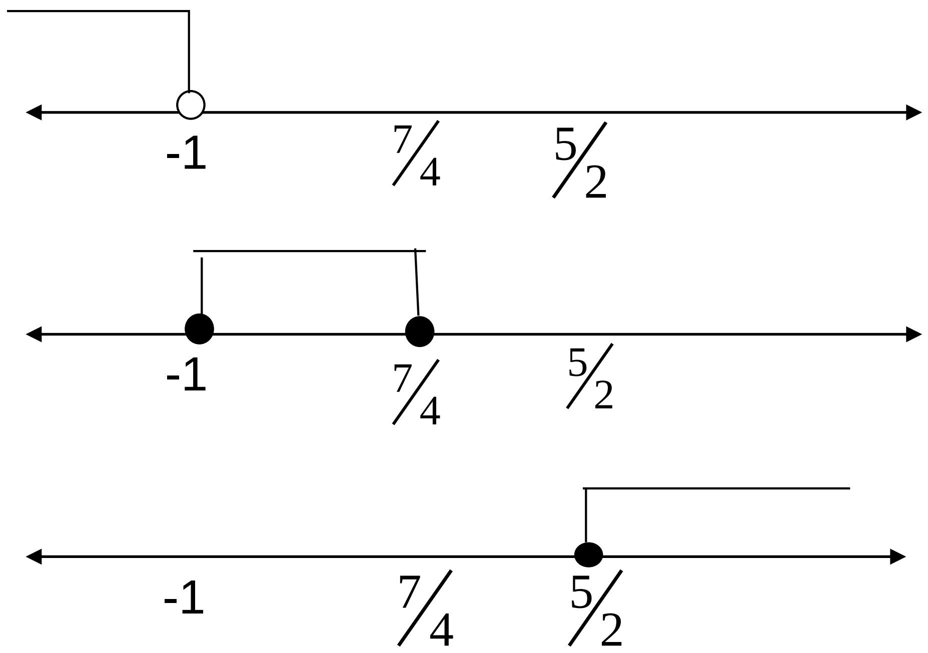
CONTOH : MENENTUKAN HIMPUNAN PENYELESAIAN

Hp = $\mathrm{Hp}1 \cup \mathrm{Hp}2 \cup \mathrm{Hp}3$

$$\mathrm{Hp} = (-\infty, -1) \cup \left[-1, \frac{7}{4}\right] \cup \left[\frac{5}{2}, \infty\right)$$

Untuk lebih mempermudah, masing-masing interval digambarkan dalam sebuah garis bilangan

CONTOH : MENENTUKAN HIMPUNAN PENYELESAIAN



Jadi Hp = $\left[-\infty, \dfrac{7}{4}\right] \cup \left[\dfrac{5}{2}, \infty\right)$

SOAL LATIHAN

Cari himpunan penyelesaian dari pertidaksamaan

1 $\dfrac{x+2}{4-2x} \geq 1-x$

2 $\dfrac{x-2}{x^2} \leq \dfrac{x+1}{x+3}$

3 $|2-x|+|3-2x| \leq 3$

4 $|x+1|^2 + 2|x+2| \geq 2$

5 $2x+3 \geq |4x+5|$

6 $||x|+3x| \leq 2$

7. $|x+1|-|x+2| \leq 2$

Terima Kasih