

Как вода точит камень

Власов Алексей, Литвинов Марк

vlasoff.al03@gmail.com, mark.litvinov.2003@mail.ru

Научные руководители: Челноков Григорий Ривенович,

Христофоров Михаил Игоревич

4 апреля 2022 г.

Данная работа — исследование модели протекания воды из физики. В последнее время она представляет интерес для ученых, в ней сравнительно недавно были получены свежие результаты. В работе содержится доказательство Теоремы А, использующее остальные предложения, леммы и теоремы без доказательств.

Работа была проделана на майской проектной программе 2021 года в Сириусе. Мотивировка предложенных результатов дана в проекте "Как вода точит камень".

Вводные определения и постановка задачи

Мы будем работать на действительной плоскости и отождествлять точки с комплексными числами естественным образом.

Определение 1. $\tau \in \mathbb{C}$ - комплексный корень 3-й степени из 1, равный $-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$.

Определение 2. n -замощением назовем любое замощение плоскости равными правильными шестиугольниками без просветов и наложений со стороны $\frac{1}{n}$ ориентированных так, что одна из сторон шестиугольников параллельна вектору i .

Определение 3. M_n назовем множество шестиугольников из n -замощения, попавших внутрь треугольника с вершинами в точках $A = 1$, $B = \tau$, $C = \tau^2$.

Определение 4. Назовем раскраской M_n любую покраску шестиугольников из M_n в 2 цвета: желтый и синий.¹

Определение 5. Будем говорить, что вода протекает между двумя ломаными, проходящими по периметру границы M_n , если существует последовательность синих шестиугольников $a_1, a_2, \dots, a_k \in M_n$ такая, что a_i имеет общую сторону с a_{i+1} , для всех $i = 1, 2, \dots, k-1$, и что одна из сторон a_1 является частью первой ломаной, одна из сторон a_k - частью второй ломаной.

Определение 6. Вероятность протекания для двух данных ломаных - доля всевозможных раскрасок шестиугольников из M_n таких, что между этими ломаными протекает вода.

Определение 7. $u_n(Z)$ - точка, являющаяся серединой стороны шестиугольника M_n , ближайшая для данной точки Z комплексной плоскости. Если таких точек несколько, выбирается любая.

¹всего различных раскрасок $2^{\#M_n}$, где $\#M_n$ - количество шестиугольников в M_n

Замечание 1. Стоит отметить, что на самом деле u - функция двух переменных: $\mathbb{C} \times \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{C}$. Ее аргумент - пара из точки комплексной плоскости, номера выбранного замощения и его расположения, а множество значений - середины отрезков n -замощения.

Определение 8. Пусть $X, Y \in \mathbb{C}$, $u_n(X)$ и $u_n(Y)$ лежат на границе M_n . Ломаной, соответствующей отрезку XY , назовем кратчайший участок границы M_n от $u_n(X)$ до $u_n(Y)$. Если их несколько, выберем любой.

Замечание 2. Далее это определение будет использовано только для отрезков AB и CD .

Теорема А (С.Смирнов, 2001). Пусть D - некоторая фиксированная точка на стороне AC в треугольнике ABC . Тогда предел при $n \rightarrow \infty$, к которому стремится вероятность протекания между ломаными, соответствующим отрезкам AB и CD , равен величине $\frac{CD}{AB}$.

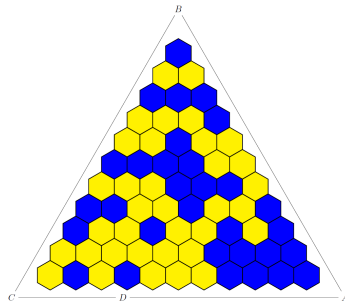


Рис. 1: Модель протекания воды

Пути из красных отрезков

Для решения задачи нам будет удобно перейти от раскрасок к ломаным, обладающим некоторыми свойствами.

Целью этого перехода является формулировка и доказательство предложения 1. А сейчас опишем, как именно мы осуществим переход.

Определение 9. Для фиксированных $A = 1$, $B = \tau$, $C = \tau^2$, $D \in \mathbb{C}$ и n -замощения будем называть **конфигурацией с особенностями** $u_n(A)$, $u_n(B)$, $u_n(C)$, $u_n(D)$ множество ребер такого графа, что его вершинами являются вершины шестиугольников M_n и все середины их ребер, а его ребра соединяют вершину шестиугольника с серединой ребра, исходящего из нее. При этом ребра, составляющие конфигурацию, устроены так, что степень вершин $u_n(A)$, $u_n(B)$, $u_n(C)$, $u_n(D)$ равна 1, а всех остальных - либо 0, либо 2.

Замечание 3. Каждая конфигурация с особенностями представляет собой объединение двух простых путей, соединяющих 4 особенные точки, и некоторого количества простых циклов.

Несложно понять, что все конфигурации разбиваются на три непересекающихся множества: в первом есть пути $u_n(A)u_n(B)$ и $u_n(C)u_n(D)$; во втором пути $u_n(A)u_n(C)$ и $u_n(B)u_n(D)$; в третьем $u_n(A)u_n(D)$ и $u_n(B)u_n(C)$. Тогда осмысленным становится следующее определение.

Определение 10. Зафиксируем n , n -замощение и точки A , B , C , D на комплексной плоскости. Для них рассмотрим все конфигурации с особенностями в $u_n(A)$, $u_n(B)$, $u_n(C)$, $u_n(D)$. Обозначим за $P(u_n(D) \leftrightarrow u_n(A))$ долю конфигураций с особенностями $u_n(A)$, $u_n(B)$, $u_n(C)$, $u_n(D)$, где точки $u_n(A)$ и $u_n(D)$ - концы одной ломаной. При этом доопределим $P(u_n(A) \leftrightarrow u_n(A)) = 1$.

Данные понятия формулировались для следующего предложения:

Предложение 1. Пусть дан M_n и точки $u_n(A), u_n(B), u_n(C), u_n(D)$ на его границе. Тогда при фиксированном n : $P(u_n(D) \leftrightarrow u_n(A))$ равняется вероятности протекания воды по шестиугольникам между ломаными $u_n(A)u_n(B)$ и $u_n(C)u_n(D)$, соответствующим отрезкам AB и CD при данном n .

Доказательство. Для доказательства утверждения покажем равносильность наличия протекания между указанными ломанными и наличия красного пути между вершинами $u_n(A)$ и $u_n(D)$. Сразу заметим: способ покраски ломаной в красный цвет на границе выбран так, что можно считать внешний граничный слой клеток окрашенным в синий цвет на границе с ломаными $u_n(A)u_n(B)$ и $u_n(C)u_n(D)$, а на границе с ломаными $u_n(B)u_n(C)$ и $u_n(D)u_n(A)$. При этом клетки вне M , одними из середин ребер которых являются $u_n(A), u_n(B), u_n(C), u_n(D)$ окрашены в оба цвета одновременно.

\Rightarrow Пусть имеется протекание между ломаными $u_n(A)u_n(B)$ и $u_n(D)u_n(C)$. Заметим, что данное протекание делит шестиугольники на две части. Тогда $u_n(A)$ не может быть соединена ни с $u_n(B)$, ни с $u_n(C)$, так как они лежат по разные стороны от протекания, а через него ребра не проходят. Значит $u_n(A)$ соединена с $u_n(D)$.

\Leftarrow Пусть имеется красный путь из $u_n(A)$ в $u_n(D)$. Тогда ближайший слой клеток по разные стороны от этого пути - цепочки из одноцветных шестиугольников, одна из которых будет синей, а другая желтой. Рассмотрим синюю: некоторые ее шестиугольники могут быть окажутся за границей M . Это возможно только на границах $u_n(A)u_n(B)$ и $u_n(C)u_n(D)$. Отбросим их, тогда получится, что у нас есть синий путь от ломаной $u_n(A)u_n(B)$ до $u_n(C)u_n(D)$, что и требовалось.

□

Наблюдаемая функция

Определение 11. Для n -замощения введем функцию на множестве середин всех сторон шестиугольников из M_n , включая $u_n(A), u_n(B), u_n(C)$ (τ определено в 1):

$$f_n(u_n(D)) \stackrel{\text{def}}{=} P(u_n(D) \leftrightarrow u_n(A)) + \tau P(u_n(D) \leftrightarrow u_n(B)) + \tau^2 P(u_n(D) \leftrightarrow u_n(C))$$

Предложение 2. Пусть z — общая вершина трех шестиугольников из M_n . Пусть p, q, r — середины их общих сторон, перечисленные в порядке против часовой стрелки. Тогда для функции f_n выполняется тождество треугольника:

$$(p - z)f_n(p) + (q - z)f_n(q) + (r - z)f_n(r) = 0. \quad (1)$$

Следующее предложение является более удобным следствием предыдущего.

Предложение 3. Рассмотрим цепочку из k шестиугольников из M_n , в которой соседние шестиугольники имеют общую сторону, и последний имеет общую сторону с первым. Обозначим через w_1, \dots, w_k центры этих шестиугольников и положим $w_{k+1} := w_1$. Тогда если $f(z)$ — любая функция, удовлетворяющая тождеству треугольника и определенная на множестве середин сторон шестиугольников n -замощения из M_n , то

$$\sum_{j=1}^k f\left(\frac{w_{j+1} + w_j}{2}\right) (w_{j+1} - w_j) = 0. \quad (2)$$

Доказательство предложения 3. Соединим w_j с w_{j+1} , получим цикл ψ . Рассмотрим все узлы шестиугольной решетки, которые расположены внутри цикла ψ . Напишем для каждого из этих узлов тождество треугольника. Сложим все полученные равенства. Тогда для любой середины Z отрезка AB находящейся строго внутри этого цикла, $f(z)$ будет посчитано с коэффициентами $z - a$ и $z - b$, то есть с коэффициентом $2z - a - b = 0$. Тогда в сумме останутся только вершины вида $\frac{w_{j+1}+w_j}{2}$ с коэффициентами $\frac{w_{j+1}+w_j}{2} - w$, где w - тот узел, в котором посчитана эта середина. Домножим полученное равенство на $2\sqrt{3}i$. Тогда вектор $\frac{w_{j+1}+w_j}{2} - w$ перейдет в вектор $w_{j+1} - w_j$. Мы получили равенство 2. \square

Замечание 4. Это дискретная переформулировка стандартного определения аналитичности.

Ключевые утверждения

Теорема 1. Существует функция $F(Z)$, заданная на всем треугольнике ABC , включая границу, и принимающая комплексные значения, такая что

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \max_{Z \in ABC} |F(Z) - f_n(u_n(Z))| = 0.$$

Эта теорема не будет доказана в данной статье, больше о ней можно прочитать, например, здесь.

Предложение 4. Функция $F(Z)$ из теоремы 1 непрерывна:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \max_{Z \in ABC} |F(Z) - F(u_n(Z))| = 0. \quad (3)$$

Доказательство. Для начала докажем следующий факт:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \max_{Z \in ABC} |F(u_n(Z)) - f_n(u_n(Z))| = 0$$

Зафиксируем $\varepsilon_0 > 0$. Тогда по определению функции $F(Z) : \exists n_0 \in \mathbb{N} : \forall n > n_0 : \forall Z \in ABC : |F(Z) - f_n(u_n(Z))| < \varepsilon_0$. Поскольку этот факт верен для любой точки Z и ближайшей к ней середине n -замоощения $u_n(Z)$, то в частности можно выбрать в роли Z саму точку $u_n(Z)$.

Теперь докажем теорему. Зафиксируем $\varepsilon_0 > 0$. Тогда по определению функции $F(Z)$ и вышедоказанному утверждению $\exists n_0 \in \mathbb{N} : \forall n > n_0 : \forall Z \in ABC : |F(Z) - F(u_n(Z))| \leq |F(Z) - f_n(u_n(Z))| + |F(u_n(Z)) - f_n(u_n(Z))| \leq \frac{\varepsilon_0}{2} + \frac{\varepsilon_0}{2} = \varepsilon_0$. \square

Предложение 5. Для любого правильного треугольника PQR , гомотетичного ABC и лежащего строго внутри ABC , и функции $F(Z)$ из теоремы 1 выполнено:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{j=1}^{l_n} F\left(\frac{w_{j+1,n} + w_{j,n}}{2}\right) (w_{j+1,n} - w_{j,n}) = 0, \quad (4)$$

где $w_{1,n}, w_{2,n}, \dots, w_{l_n,n}$ — центры шестиугольников n -го замоощения, пересекающих контур треугольника PQR , занумерованных в порядке обхода этого контура против часовой стрелки.

Доказательство теоремы 5. Докажем, что:

$$\forall \varepsilon > 0 \exists n_0 : \forall n > n_0 \left| \sum_{j=1}^{l_n} F\left(\frac{w_{j+1} + w_j}{2}\right) (w_{j+1} - w_j) \right| < \varepsilon$$

По определению функции $F(z)$:

$$\forall \varepsilon > 0 \exists n_0 : \forall n > n_0 |F(Z) - f_n(u_n(Z))| < \varepsilon$$

Мы уже знаем, что по предположению 3:

$$\sum_{j=1}^{l_n} f_n\left(\frac{w_{j+1} + w_j}{2}\right) (w_{j+1} - w_j) = 0$$

Вычтем это из подмодульного выражения:

$$\left| \sum_{j=1}^{l_n} \left(F\left(\frac{w_{j+1} + w_j}{2}\right) - f_n\left(\frac{w_{j+1} + w_j}{2}\right) \right) (w_{j+1} - w_j) \right|$$

По неравенству треугольника мы можем оценить это сверху, как:

$$\sum_{j=1}^{l_n} \left| F\left(\frac{w_{j+1} + w_j}{2}\right) - f_n\left(\frac{w_{j+1} + w_j}{2}\right) \right| |w_{j+1} - w_j|$$

$|w_{j+1} - w_j| = \frac{\sqrt{3}}{n}$, поскольку сторона шестиугольников $\frac{1}{n}$. По выбору n мы получаем, что:

$$\left| F\left(\frac{w_{j+1} + w_j}{2}\right) - f_n\left(\frac{w_{j+1} + w_j}{2}\right) \right| < \varepsilon$$

Значит мы можем оценить нашу сумму сверху, как $l_n \varepsilon \frac{\sqrt{3}}{n}$. Заметим, что для любых двух соседних шестиугольников участок границы PQR находящийся внутри них $\geq \frac{1}{n}$. Пусть длина границы PQR - a . Тогда $\frac{l_n}{2n} \leq a$, иначе получилось бы, что граница PQR внутри шестиугольников больше длины границы PQR . А значит $\frac{l_n}{n} \leq 2a$, следовательно $l_n \varepsilon \frac{\sqrt{3}}{n} \leq 2\sqrt{3}\varepsilon a$, что бывает сколь угодно малым при правильном выборе ε . \square

Определение 12. Обозначим через $[z; w]$ выпуклую оболочку векторов z и w , где $z, w \in \mathbb{C}$, иначе говоря $[z; w] \stackrel{\text{def}}{=} \{z + \lambda(w - z) | \forall \lambda \in [0, 1]\}$.

Предложение 6. Для любой точки D на границе треугольника ABC функция $F(Z)$ из теоремы 1 удовлетворяет условию:

$$F(D) \in \begin{cases} [1; \tau^2] & \text{при } D \in [A, C], \\ [\tau^2; \tau] & \text{при } D \in [C, B], \\ [\tau; 1] & \text{при } D \in [B, A]. \end{cases}$$

Доказательство. Пусть точка D лежит на отрезке $[A, C]$. Тогда из определения функции $F(Z)$ имеем:

$$F(D) = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(D_n)$$

Поскольку D лежит на отрезке AC , то ближайшая к ней середина $u_n(D)$ лежит на границе многоугольника M_n . Отсюда $P(u_n(B) \leftrightarrow u_n(D)) = 0$, так как если она не равна 0, то

существует расположение ломаных, соединяющих $u_n(A)$ и $u_n(C)$, $u_n(B)$ и $u_n(D)$, но в таком случае они пересекаются \Rightarrow противоречие.

Тогда: $\forall n \in \mathbb{N} : P(u_n(B) \leftrightarrow u_n(D) = 0 \Rightarrow f_n(u_n(Z)) = P(u_n(D) \leftrightarrow u_n(A)) + \tau^2 P(u_n(D) \leftrightarrow u_n(C))$

Иными словами $f_n(u_n(Z))$ представляется в виде выпуклой комбинации векторов 1 и τ^2 , и значит при всех n лежит на отрезке AC . Тогда и предел, поскольку он существует, лежит на этом отрезке. Тогда $F(D) \in [AC]$. Что и требовалось. Остальные случаи разбираются аналогично. \square

Теорема 2. *Существует не более одной функции $F(Z)$, заданной на всем треугольнике ABC , включая границу, принимающей комплексные значения и удовлетворяющей свойствам из предыдущих трех предложений.*

Это утверждение является классическим результатом комплексного анализа и не будет доказано в этой статье.

Лемма 1. *Тождественная функция $F(Z) = Z$ удовлетворяет предложениям: 4, 5, 6.*

Доказательство. По порядку докажем все три утверждения:

1. Тождественная функция непрерывна.
2. Покажем аналитичность:

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^{l_n} F\left(\frac{w_{j+1,n} + w_{j,n}}{2}\right) (w_{j+1,n} - w_{j,n}) &= \sum_{j=1}^{l_n} \frac{1}{2} (w_{j+1,n} + w_{j,n}) (w_{j+1,n} - w_{j,n}) = \\ &= \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{l_n} (w_{j+1,n}^2 - w_{j,n}^2) = 0 \end{aligned}$$

Выражение обращается в нуль, поскольку каждое слагаемое в виде квадрата встречается с плюсом и минусом.

3. Граничное условие для тождественной функции верно в силу выбора расположения точек A, B, C . \square

Доказательство Теоремы А

Мы ищем предел вероятности протекания воды между ломаными, соответствующими сторонам AB и CD при $n \rightarrow \infty$. Иными словами мы ищем предел некоторой последовательности. По предложению 1 члены этой последовательности совпадают с членами последовательности $\{P(u_n(D) \leftrightarrow u_n(A))\}$. Тогда нам достаточно найти $\lim_{n \rightarrow \infty} P(u_n(D) \leftrightarrow u_n(A))$

Из леммы 1 и теоремы 2 мы получаем, что определенная в теореме 1 функция $F(z)$ - тождественная функция. В частности, $F(D) = D$.

Тогда с одной стороны:

$$D = F(D) = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(u_n(D)) = \lim_{n \rightarrow \infty} (P(u_n(D) \leftrightarrow u_n(A)) + \tau^2 P(u_n(D) \leftrightarrow u_n(C)))$$

Но, с другой стороны, точка D представима единственным образом в виде выпуклой комбинации 1 и τ^2 :

$$D = 1 * \frac{DC}{AC} + \tau^2 * \frac{AD}{AC} \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} P(u_n(D) \leftrightarrow u_n(A)) = \frac{DC}{AC}$$

Это в точности то, что мы хотели доказать!