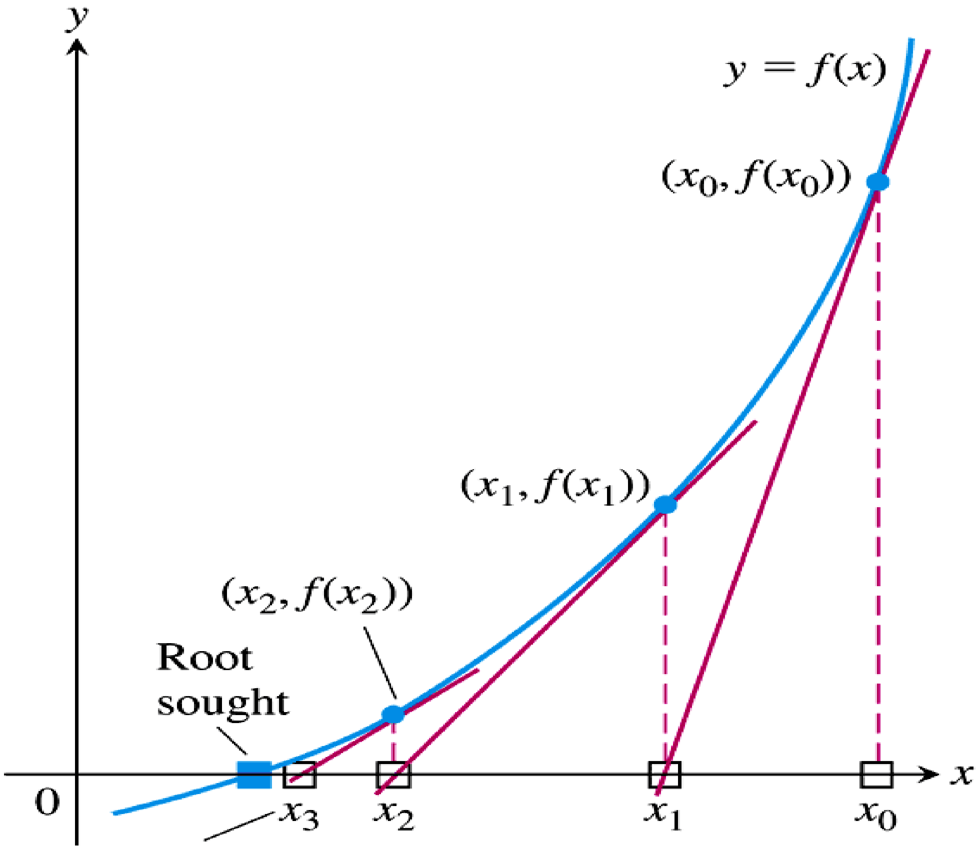
PHƯƠNG PHÁP TIẾP TUYẾN GIẢI PT $f(x)=0$

Hà Thị Ngọc Yến

Hà nội, 03/2020

Ý tưởng phương pháp



Ý tưởng phương pháp

- Thay thế đường cong $y = f\left(x\right)$ trên [a,b] bằng **TIẾP TUYẾN**

- Tìm giao điểm của dây cung với trục hoành thay cho giao điểm đường cong với trục hoành

Xây dựng công thức

Xét phương trình $f\left(x\right)=0$ và k.c.l nghiệm (a,b).

Gọi $M\left(x, f\left(x\right)\right)$ là điểm Fourie nếu $f\left(x\right)f''\left(x\right)>0.$

Chọn điểm Fourie là điểm ban đầu, tức là

Chọn $x_0 : f\left(x_0\right)f''\left(x_0\right)>0$ và đặt $M_0\left(x_0, f\left(x_0\right)\right).$

Gọi d_k là tiếp tuyến với đồ thị hàm số tại M_k.

Xây dựng công thức

$$d_0 \cap Ox \equiv (x_1, 0) \Rightarrow M_1(x_1, f(x_1))$$

$$d_1 \cap Ox \equiv (x_2, 0) \Rightarrow M_2(x_2, f(x_2))$$

....

$$d_{n-1} \cap Ox \equiv (x_n, 0) \Rightarrow x_n \approx x^*$$

Xây dựng công thức

- Phương trình đường thẳng d_k :

$$y = f'(x_k)(x - x_k) + f(x_k) \qquad (*)$$

- Vì $d_k \cap Ox \equiv (x_{k+1}, 0)$ nên ta có

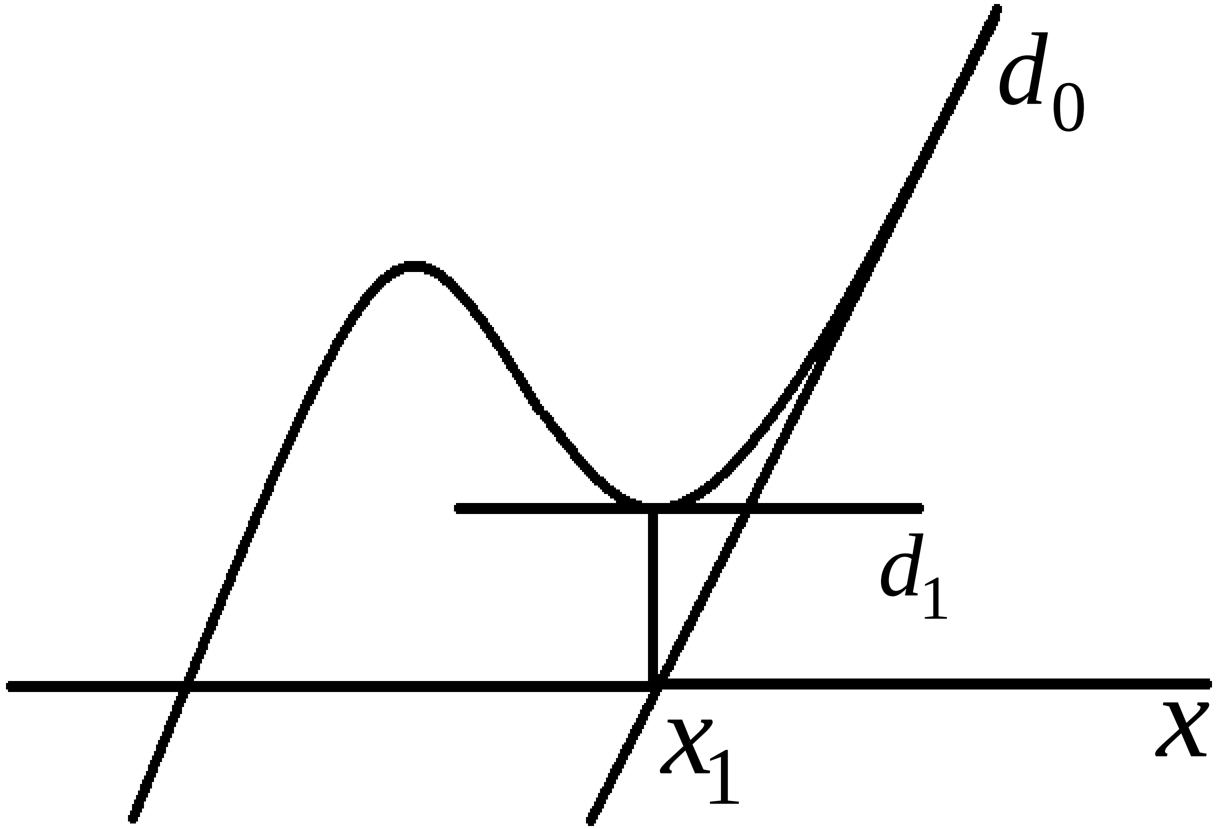
$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)} \qquad (**)$$

Sự hội tụ của phương pháp

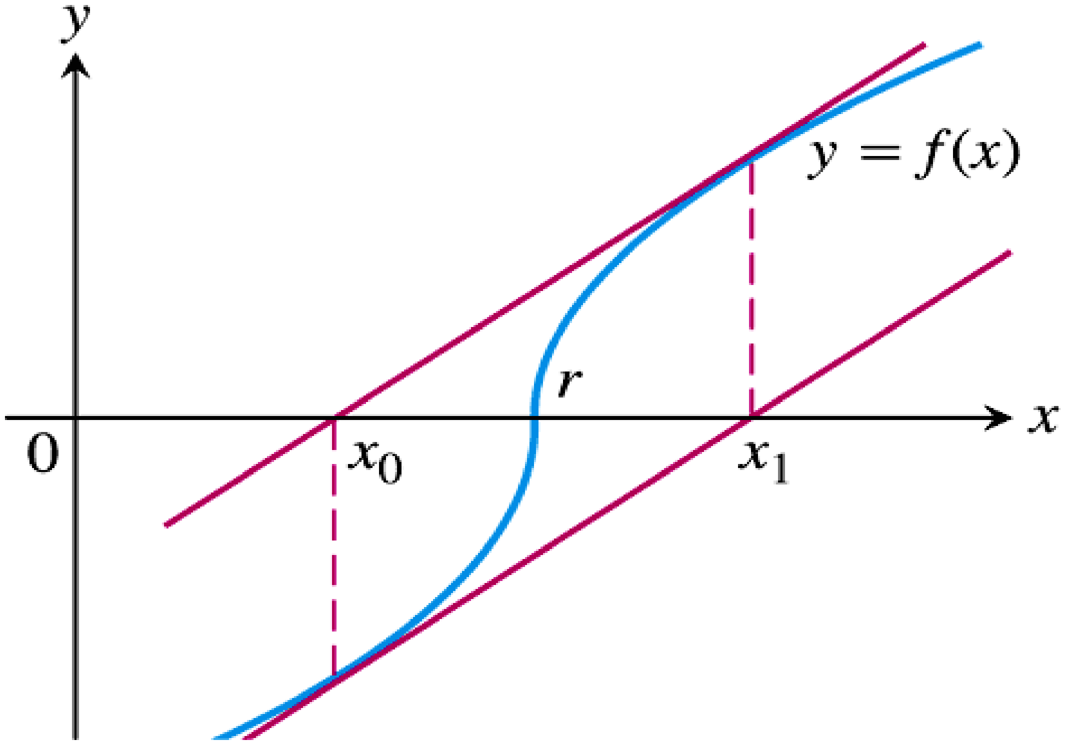
Điều kiện hội tụ:

- (a,b) là khoảng cách ly nghiệm
- f', f'' liên tục, xác định dấu không đổi trên [a,b]
- Chọn đúng $x_0 : f\left(x_0\right) f''\left(x_0\right) > 0.$

Tại sao $f' \neq 0$



Tại sao $f'' \neq 0$



Định lý về sự hội tụ

Với các điều kiện đã nêu trên dãy lặp (**) hội tụ đến nghiệm đúng của phương trình theo đánh giá sau

$$\left|x_n - x^*\right| \le \frac{\left|f\left(x_n\right)\right|}{m_1} \qquad (1)$$

$$\left|x_n - x^*\right| \le \frac{M_2}{2m_1}\left|x_n - x_{n-1}\right|^2 \qquad (2)$$

$$m_1 = \min_{x\in[a,b]}\left|f'\left(x\right)\right|;\ M_2 = \max_{x\in[a,b]}\left|f''\left(x\right)\right|$$

CM Định lý về sự hội tụ

- Các bước chứng minh:
  - ➢ Dãy $\left\{x_n\right\}$ đơn điệu và bị chặn.
  - ➢ Giới hạn của dãy là nghiệm của phương trình.
  - ➢ Chứng minh các công thức sai số

CM Định lý về sự hội tụ

- Dãy $\left\{x_n\right\}$ đơn điệu :

Trường hợp 1:

$$f'(x) > 0; f''(x) > 0 \quad \forall x \in [a;b]$$

Xét điểm $M\left(t, f(t)\right),\ t \in [a;b]$ bất kỳ.

Khi đó $f(x) - h_t(x) > 0 \quad \forall x \in [a;b], x \neq x_0$

$$h_t(x) := f'(t)(x-t) + f(t)$$

CM Định lý về sự hội tụ

- Ta có $f''(x) > 0 \;\; \forall x \in [a;b] \Rightarrow f(x_0) > 0$
- Mặt khác

$$h_{x_0}(x) := f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$$

$$h_{x_0}(x_1) = 0 < f(x_0) = h_{x_0}(x_0)$$

$$\Rightarrow a < x_1 < x_0,\; f(x_1) > h_{x_0}(x_1) = 0$$

- Lý luận tương tự

$$x_1 : \;\; f(x_1) > 0 \Rightarrow a < x_2 < x_1, f(x_2) > 0$$

CM Định lý về sự hội tụ

- Giới hạn của dãy là nghiệm của phương trình
- Gọi

$$\alpha := \lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty}\left(x_{n-1} - \frac{f\left(x_{n-1}\right)}{f'\left(x_{n-1}\right)} \right)$$

$$\Rightarrow \alpha = \alpha - \frac{f\left(\alpha\right)}{f'\left(\alpha\right)} \Rightarrow f\left(\alpha\right) = 0.$$

CT sai số mục tiêu

- Ta có

$$f(x_n) = f(x_n) - f(\alpha) = f'(c)(x_n - \alpha)$$

$$\Rightarrow |x_n - \alpha| = \left|\frac{f(x_n)}{f'(c)}\right| \leq \frac{|f(x_n)|}{m_1}$$

CT sai số theo hai xấp xỉ liên tiếp

- Ta có:

$$f\left(x_n\right) = h_{x_{n-1}}\left(x_n\right) + \frac{f''\left(c\right)}{2!}\left(x_n - x_{n-1}\right)^2$$

$$\Rightarrow f'\left(c_1\right)\left(x_n - \alpha\right) = \frac{f''\left(c\right)}{2!}\left(x_n - x_{n-1}\right)^2$$

$$\Rightarrow \left|x_n - \alpha\right| \le \frac{M_2}{2m_1}\left(x_n - x_{n-1}\right)^2$$

Thuật toán

- Input: f, a, b, ε
- Bước 1: Kiểm tra điều kiện f', f'' xác định dấu không đổi trên, $[a;b]$ gán biến dấu cho dấu của f''. (Có thể làm thủ tục riêng cho bước này)
- Bước 2: Chọn $x_0 = a$ nếu $f(a).sign > 0$ trái lại chọn $x_0 = b.$

Thuật toán

- Bước 3: Tính m_1 (có thể làm gói riêng)
- Bước 4: Tính

$$x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}$$

- Bước 5: Kiểm tra

$$\frac{|f(x_1)|}{m_1} \le \varepsilon$$

nếu thỏa mãn thì dừng, nếu không quay lại B4

Ví dụ

- Dùng phương pháp Newton tính $\sqrt[5]{17}$ với 6 chữ số đáng tin sau dấu phẩy

Ví dụ

- $\sqrt[5]{17}$ là nghiệm của phương trình $x^5 - 17 = 0.$

- Khoảng cách li nghiệm $(1;2)$

- Kiểm tra các điều kiện hội tụ của phương pháp

$$x_{n+1} = x_n - \frac{x_n^5 - 17}{5x_n^4} = \frac{4}{5}x_n - \frac{17}{5x_n^4};\ x_0 = 2$$

Ví dụ

- Cách 1: Dùng công thức sai số mục tiêu, ta có

$$\left|f\left(x_n\right)\right| \le m_1\varepsilon = 2.5\times 10^{-6}$$

n	x_n	$f\left(x_n\right)$
0	2	
1	1.8125	2.560956001
2	1.765040839	0.1306480311
3	1.762348599	3.9797x10^(-4)
4	1.762340348	8.0875x10^(-9)

Ví dụ

- Cách 2: Dùng CT sai số theo 2 xấp xỉ liên tiếp

$$|x_n - x^*| \le \frac{M_2}{2m_1}|x_n - x_{n-1}|^2 \le 0.5\times 10^{-6}$$

$$\Leftrightarrow |x_n - x_{n-1}| \le \frac{0.5\times 10^{-6}}{16} = 0.177\times 10^{-3}$$

- x_n, x_{n-1} trùng 3 chữ số sau dấu phẩy là đủ