

СТАЦИОНАРНОЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЕ ТЕПЛА В ЦИЛИНДРИЧЕСКОМ КОЛЬЦЕ

Пусть имеется цилиндрическое кольцо толщины $\delta = R_2 - R_1$. Предположим, что на внутреннем радиусе $\frac{\partial T}{\partial r}|_{R=R_1} = A \sin 2\phi$, а на внешнем поддерживается температура $T|_{R=R_2} = B(1 + \cos \phi)$, A и B заданные константы. Найти стационарное температурное поле внутри кольца.

Решение. В общем случае, когда физические условия в задаче о тепловом состоянии тела таковы, что плотность источников (стоков) тепла и граничные условия не зависят от времени, то с течением времени в теле устанавливается некоторое не зависящее от времени распределение температуры, то есть тепловое состояние тела выйдет на стационарный режим. Распределение температуры в таком случае описывается уравнением Пуассона $\Delta T = -f$, в частном случае, уравнением Лапласа $\Delta T = 0$.

Для поставленной задачи запишем уравнение Лапласа в полярных координатах

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial T}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 T}{\partial \phi^2} = 0 \quad (1)$$

Необходимо численно решить краевую задачу Неймана для уравнения (1).

Найдем аналитическое решение этой задачи, для этого будем решать задачу методом Дирихле:

$$T(r; \phi) = R(r)Y(\phi)$$

Подставим в уравнение Лапласа (1), получим

$$Y(\phi)R''(r) + \frac{1}{r}Y(\phi)R'(r) + \frac{1}{r^2}Y''(\phi)R(r) = 0 \quad (2)$$

Разделим переменные:

$$r^2 \frac{R''(r)}{R(r)} + r \frac{R'(r)}{R(r)} = - \frac{Y''(\phi)}{Y(\phi)} = \text{const} = m^2$$

Ясно, что при изменении функции на 2π однозначная функция $T(r; \phi)$ должна вернуться к исходному значению, т.е. по ϕ должно выполняться условие периодичности $T(r; \phi) = T(r; \phi + 2\pi)$. Значит, $Y(\phi) = Y(\phi + 2\pi)$. Из решения уравнений

$$Y'' + m^2 Y = 0, \quad r^2 R''(r) + r R'(r) - m^2 R(r) = 0 \quad (3)$$

с учетом граничных условий и в силу периодичности $Y(\phi)$ получим решение

$$T(r; \phi) = B \left(1 + \frac{R_2}{r} \frac{r^2 + R_1^2}{R_2^2 + R_1^2} \right) \cos(\phi) - A \frac{R_1^3}{2r^2} \frac{R_2^4 - r^4}{R_2^4 + R_1^4} \sin(2\phi) \quad (4)$$

Задание:

1. Численно решить задачу и сравнить с аналитическим решением
 - (a) для разных значений A и B ;
 - (b) при разном выборе нормы;
2. Проверить является ли задача подобна по радиусу, по амплитуде A , B .

Возможны изменения/дополнения в задании.

Список литературы

- [1] С. К. Годунов, В. С. Рябенький *Разностные схемы*. Наука, 1977 (§35)
- [2] Д. Андерсон, Дж. Таннехил, Р. Плетчер *Вычислительная гидромеханика и теплообмен*. Мир, 1990 (том 2, §10.3)