

Московский государственный университет  
имени М.В. Ломоносова

Механико-математический факультет

Кафедра аэромеханики и газовой динамики

Отчет по  
выполнению задания 3

**Стационарное распределение тепла в цилиндрическом кольце**

Компьютерный практикум

Выполнил:  
студент 524 группы  
Дашиев Батор Жаргалович

Руководитель:  
к. ф. -м. н., доц  
Котова Гвиана Юрьевна

21 февраля 2025 г.

# Содержание

<b>1</b>	<b>Постановка задачи</b>	<b>3</b>
<b>2</b>	<b>Решение</b>	<b>3</b>
2.1	Аналитическое решение . . . . .	4
2.2	Вычислительная схема . . . . .	5
<b>3</b>	<b>Результаты численного расчета</b>	<b>6</b>
<b>4</b>	<b>Заключение</b>	<b>12</b>
	<b>Список используемой литературы</b>	<b>13</b>

# 1 Постановка задачи

Пусть имеется цилиндрическое кольцо толщины  $\delta = R_2 - R_1$ . Предположим, что на внутреннем радиусе  $\frac{\partial T}{\partial r}|_{r=R_1} = A \sin 2\varphi$ , а на внешнем поддерживается температура  $T|_{r=R_2} = B(1 + \cos \varphi)$ ,  $A$  и  $B$  – заданные константы. Необходимо найти стационарное температурное поле внутри кольца.

Задание:

1. Численно решить задачу и сравнить с аналитическим решением
  - (а) для разных значений  $A$  и  $B$ ;
  - (б) при разном выборе нормы;
2. Проверить, является ли задача подобна по радиусу, по амплитуде  $A, B$ .

# 2 Решение

В общем случае, когда физические условия в задаче о тепловом состоянии тела таковы, что плотность источников (стоков) тепла и граничные условия не зависят от времени, то с течением времени в теле устанавливается некоторое не зависящее от времени распределение температуры, то есть тепловое состояние тела выйдет на стационарный режим. Распределение температуры в таком случае описывается уравнением Пуассона  $\Delta T = -f$ , в частном случае, уравнением Лапласа  $\Delta T = 0$ .

Для поставленной задачи запишем уравнение Лапласа в полярных координатах

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial T}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 T}{\partial \varphi^2} = 0. \quad (1)$$

Необходимо численно решить краевую задачу Неймана для уравнения (1).

Найдем аналитическое решение этой задачи, для этого будем решать задачу методом Дирихле:

$$T(r; \varphi) = R(r)Y(\varphi).$$

Подставим в уравнение Лапласа (1), получим

$$Y(\varphi)R''(r) + \frac{1}{r}Y(\varphi)R'(r) + \frac{1}{r^2}Y''(\varphi)R(r) = 0$$

Разделим переменные:

$$r^2 \frac{R''(r)}{R(r)} + r \frac{R'(r)}{R(r)} = - \frac{Y''(\varphi)}{Y(\varphi)} = \text{const} = m^2.$$

Ясно, что при изменении функции на  $2\pi$  однозначная функция  $T(r; \varphi)$  должна вернуться к исходному значению, т.е. по  $\varphi$  должно выполняться условие периодичности  $T(r; \varphi) = T(r; \varphi + 2\pi)$ . Значит,  $Y(r; \varphi) = Y(r; \varphi + 2\pi)$ . Из решения уравнений

$$Y'' + m^2 Y = 0, \quad r^2 R''(r) + r R'(r) - m^2 R(r) = 0 \quad (2)$$

с учетом граничных условий и в силу периодичности  $Y(\varphi)$  получим решение

$$T(r; \varphi) = B + \frac{BR_2}{R_1^2 + R_2^2} \left( r + \frac{R_1^2}{r} \right) \cos \varphi + \frac{AR_1^3}{2(R_1^4 + R_2^4)} \left( r^2 - \frac{R_2^4}{r^2} \right) \sin 2\varphi. \quad (3)$$

## 2.1 Аналитическое решение

Рассмотрим ниже более подробно вывод аналитического решения. Сначала получим общие решения ОДУ (2).

$$Y_m'' + m^2 Y_m = 0 \iff \begin{cases} Y_m(\varphi) = A_m \cos(m\varphi) + B_m \sin(m\varphi), & m \neq 0 \\ Y_m(\varphi) = A_0 \varphi + B_0, & m = 0 \end{cases}$$

Уравнение на функцию  $R$  имеет вид уравнения Эйлера. Характеристический многочлен для данного уравнения Эйлера имеет следующий вид.

$$\lambda(\lambda - 1) + \lambda - m^2 = 0$$

$$\lambda = \pm m$$

Отсюда получаем:

$$R_m(r) = C_m r^m + D_m r^{-m}, \quad m \neq 0.$$

При нулевом коэффициенте  $m$  получаем решение следующего вида:

$$R_0(r) = C_0 \ln r + D_0.$$

Из теории известно, что решением уравнения будет ряд вида  $\sum_{m=0}^{\infty} R_m(r) Y_m(\varphi)$ . Однако исходя из вида граничных условий можем ограничиться лишь некоторыми компонентами. Будем искать решение в следующей форме (константы ниже являются переобозначенными в целях сокращения записи)

$$T(r; \varphi) = A_0 + \left( A_1 r + \frac{B_1}{r} \right) \cos \varphi + \left( A_2 r^2 + \frac{B_2}{r^2} \right) \sin 2\varphi.$$

Условие на внутренней границе кольца:

$$\begin{aligned} \left. \frac{\partial T}{\partial r} \right|_{r=R_1} &= \left( A_1 - \frac{B_1}{R_1^2} \right) \cos \varphi + 2 \left( A_2 R_1 - \frac{B_2}{R_1^3} \right) \sin 2\varphi = A \sin 2\varphi \Rightarrow \\ &\Rightarrow \begin{cases} A_1 R_1^2 - B_1 = 0 \\ 2A_2 R_1^4 - 2B_2 - A R_1^3 = 0 \end{cases} \end{aligned} \quad (4)$$

Условие на внешней границе кольца:

$$\begin{aligned} T|_{r=R_2} &= A_0 + \left( A_1 R_2 + \frac{B_1}{R_2} \right) \cos \varphi + \left( A_2 R_2^2 + \frac{B_2}{R_2^2} \right) \sin 2\varphi = B(1 + \cos \varphi) \Rightarrow \\ &\Rightarrow \begin{cases} A_0 - B = 0 \\ A_1 R_2^2 + B_1 - B R_2 = 0 \\ A_2 R_2^4 + B_2 = 0 \end{cases} \end{aligned} \quad (5)$$

Уравнения (4), (5) образуют замкнутую систему линейных уравнений на коэффициенты функции  $T(r; \varphi)$ . Решение сформулированной СЛАУ имеет вид:

$$\begin{cases} A_0 = B \\ A_1 = \frac{B R_2}{R_1^2 + R_2^2} \\ B_1 = \frac{B R_1^2 R_2}{R_1^2 + R_2^2} \\ A_2 = \frac{A R_1^3}{2(R_1^4 + R_2^4)} \\ B_2 = -\frac{A R_1^3 R_2^4}{2(R_1^4 + R_2^4)} \end{cases}$$

И, таким образом, аналитическое решение примет следующий вид

$$T(r; \varphi) = B + \frac{BR_2}{R_1^2 + R_2^2} \left( r + \frac{R_1^2}{r} \right) \cos \varphi + \frac{AR_1^3}{2(R_1^4 + R_2^4)} \left( r^2 - \frac{R_2^4}{r^2} \right) \sin 2\varphi$$

Перейдем далее к рассмотрению вычислительной схемы, реализующей численное решение поставленной задачи.

## 2.2 Вычислительная схема

В данной работе для численного решения поставленной задачи используется метод установления [1]. Данный метод заключается в решении нестационарного уравнения теплопроводности

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \Delta T \quad (6)$$

вместо изначально поставленного стационарного уравнения Лапласа. В качестве начального распределения можно взять произвольное, например тождественно нулевое. Поскольку мы работаем с ограниченной областью, и граничные условия, данные в постановке задачи являются стационарными, мы имеем право полагать, что решение нестационарного уравнения стремится к некоторому стационарному распределению. Предельное распределение температуры как раз-таки и является решением исходного стационарного уравнения.

Во внутренних узлах сетки (в полярных координатах) уравнение (6) аппроксимируется формулой

$$\frac{T_{i,j}^{k+1} - T_{i,j}^k}{\Delta t} = \frac{1}{r_i} \frac{1}{\Delta r} \left[ r_{i+1/2} \frac{T_{i+1,j}^k - T_{i,j}^k}{\Delta r} - r_{i-1/2} \frac{T_{i,j}^k - T_{i-1,j}^k}{\Delta r} \right] + \frac{1}{r_i^2} \frac{T_{i,j+1}^k - 2T_{i,j}^k + T_{i,j-1}^k}{(\Delta \varphi)^2}, \quad (7)$$

где верхний индекс отвечает за временную переменную, нижние – за радиальную и полярную переменные соответственно.

Аппроксимация граничного условия на внутренней границе кольца:

$$\frac{T_{1,j}^k - T_{0,j}^k}{\Delta r} = A \sin 2\phi_j, \quad (8)$$

и внешней границе:

$$T_{N,j}^k = B (1 + \cos \phi_j). \quad (9)$$

Ввиду того, что в разностной формуле (7) для производной по времени используется «разность вперед» схема становится явной. Следовательно для каждого последующего временного слоя пересчет происходит по явным формулам.

Для устойчивости разностной схемы необходимо выполнение условия Куранта-Фридрихса-Леви. Для данной постановки задачи условие будет иметь следующий вид

$$\Delta t \leq \frac{1}{2} \frac{(\Delta r)^2 (r \Delta \varphi)^2}{(\Delta r)^2 + (r \Delta \varphi)^2}.$$

Самое сильное ограничение будет достигаться при наименьшем радиусе, то есть на внутренней границе  $r = R_1$ . Таким образом, условие на шаг по времени будет иметь вид

$$\Delta t \leq \frac{1}{2} \frac{(\Delta R_1)^2 (R_1 \Delta \varphi)^2}{(\Delta R_1)^2 + (R_1 \Delta \varphi)^2}.$$

Теперь же обратимся непосредственно к результатам численного расчета, выполненного с использованием описанной выше схемы.

Обратимся далее к техническим подробностям реализации вычислительной разностной схемы и рассмотрению результатов численных расчетов.

### 3 Результаты численного расчета

Описанная выше численная схема реализовывалась на языке C++ (стандарт C++17). Шаг по радиальной переменной всюду ниже применяется одинаковый, равный 0.01. Шаг по полярной переменной (полярный угол  $\varphi$ ) возьмем равным  $1/360$ . Шаг по времени вычисляется исходя из критерия Куранта — Фридрихса — Леви (2.2). Визуализация распределения температуры реализовывалась на языке Python 3 с помощью модуля matplotlib.pyplot.

Прежде всего, с целью проверки корректности реализованной схемы численного вычисления, убедимся в сходимости решения, полученного численно, к аналитическому решению.

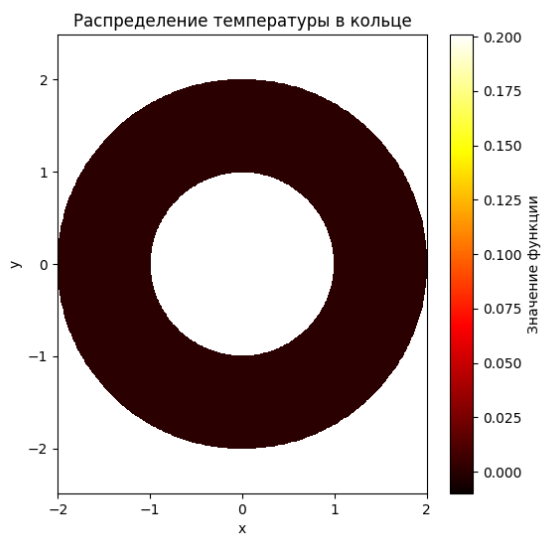
В качестве параметров задачи возьмем следующие величины:  $R_1 = 1$ ,  $R_2 = 2$ ,  $A = 0.1$ ,  $B = 0.1$ . В таблице приведены значения ошибки численного решения относительно аналитического по равномерной норме ( $C$ -норма) и по норме Минковского ( $L_1$ -норма) с течением фиктивно введенного времени. Обозначим  $T(r; \varphi)$  – аналитическое решение,  $\hat{T}(r; \varphi)$  – численное решение, а также обозначения для абсолютной и относительной ошибки:

$$\|v\|_{C_h} = \max_{x_i \in \omega_h} |v_i|, \quad \|v\|_{L^1, h} = h \sum_{x_i \in \omega_h} |v_i|, \quad \Delta(v, u)_\alpha = \|v - u\|_\alpha, \quad \delta(v, u)_\alpha = \frac{\|v - u\|_\alpha}{\|v\|_\alpha}.$$

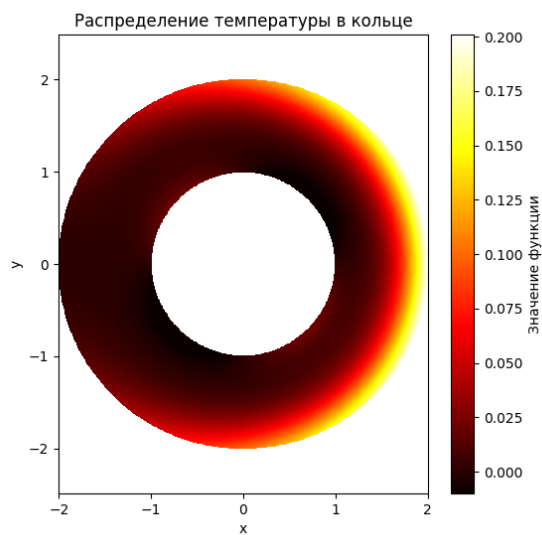
t	$\Delta(T, \hat{T})_{C_h}$	$\Delta(T, \hat{T})_{L_1, h}$	$\delta(T, \hat{T})_{C_h}$	$\delta(T, \hat{T})_{L_1, h}$
0	0.207527	0.952139	1	1
0.1	0.172183	0.529401	0.829692	0.556013
0.2	0.126399	0.376925	0.609073	0.395871
0.5	0.0441191	0.142844	0.212594	0.150025
1	0.00788412	0.0284771	0.0379908	0.0299086
1.5	0.0017808	0.00567717	0.00858107	0.00596255
2	0.00096369	0.00148935	0.00464368	0.00156421
2.5	0.000825705	0.00127943	0.00397878	0.00134375
3	0.000796419	0.00127538	0.00383766	0.00133949

Таким образом, можем заключить, что решение, полученное численное путем, с течением времени действительно сходится к аналитическому как по равномерной норме, так и по норме Минковского.

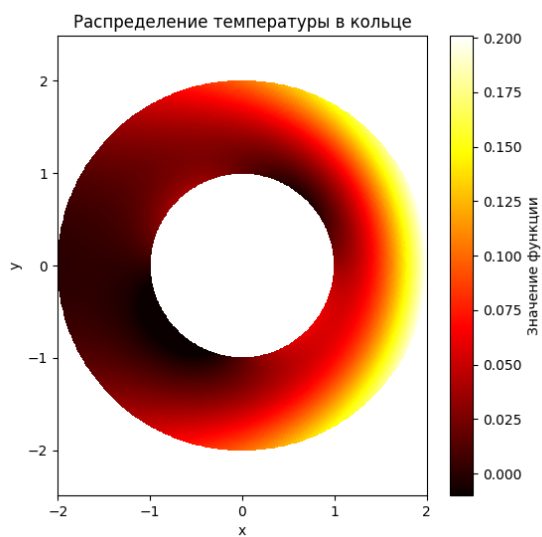
Приведем также явление сходимости произвольного начального распределения температуры к стационарному на тепловых графиках.



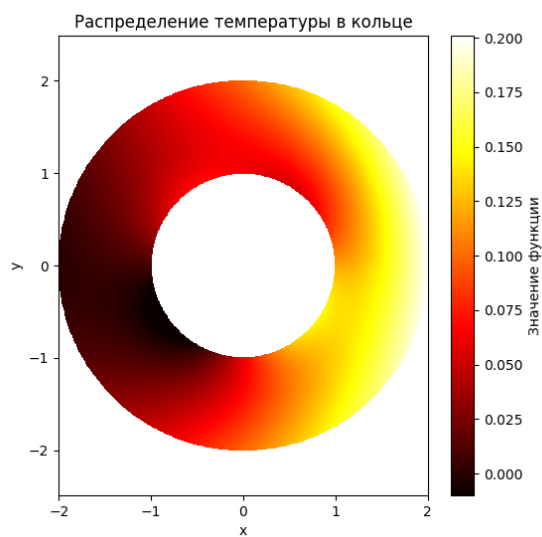
(a) Численное решение,  $t = 0$



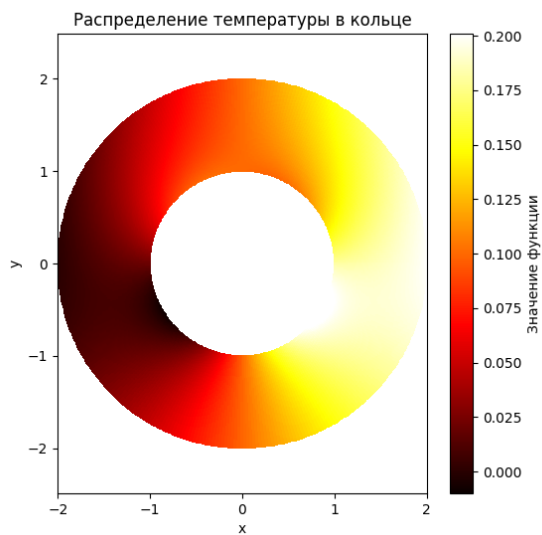
(b) Численное решение,  $t = 0.05$



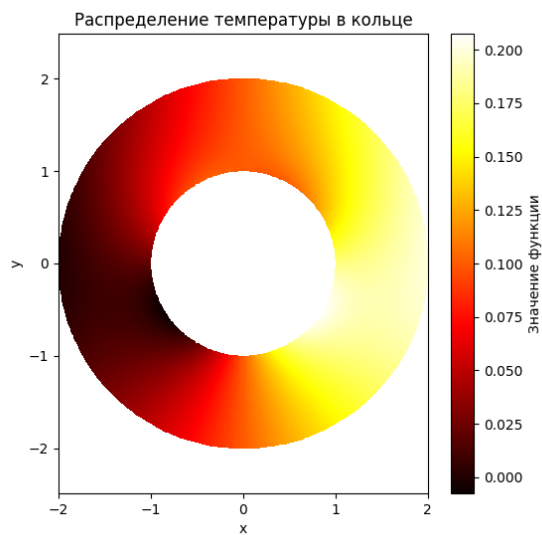
(c) Численное решение,  $t = 0.15$



(d) Численное решение,  $t = 0.4$



(e) Численное решение,  $t = 5$



(f) Аналитическое решение

Таким образом, факт сходимости к аналитическому решению прослеживается также и визуально исходя из графиков температуры в кольце.

Приведем ниже результаты расчетов при других значениях параметров задачи. Среди параметров имеем радиус внутренней границы  $R_1$ , радиус внешней границы  $R_2$  и амплитуды  $A$  и  $B$ .

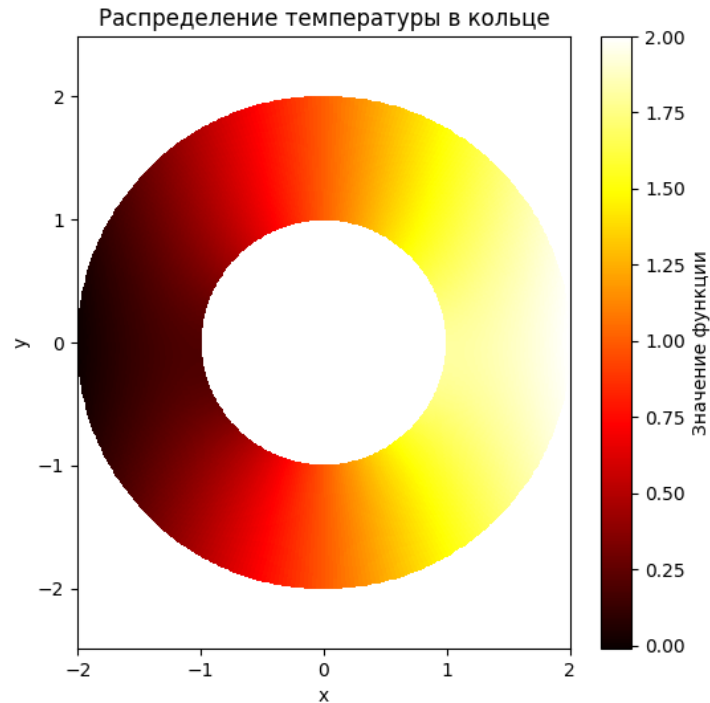


Рис. 2: Численное решение,  $R_1 = 1$ ,  $R_2 = 2$ ,  $A = 0.1$ ,  $B = 1$



Рис. 3: Численное решение,  $R_1 = 1$ ,  $R_2 = 2$ ,  $A = 1$ ,  $B = 0.1$



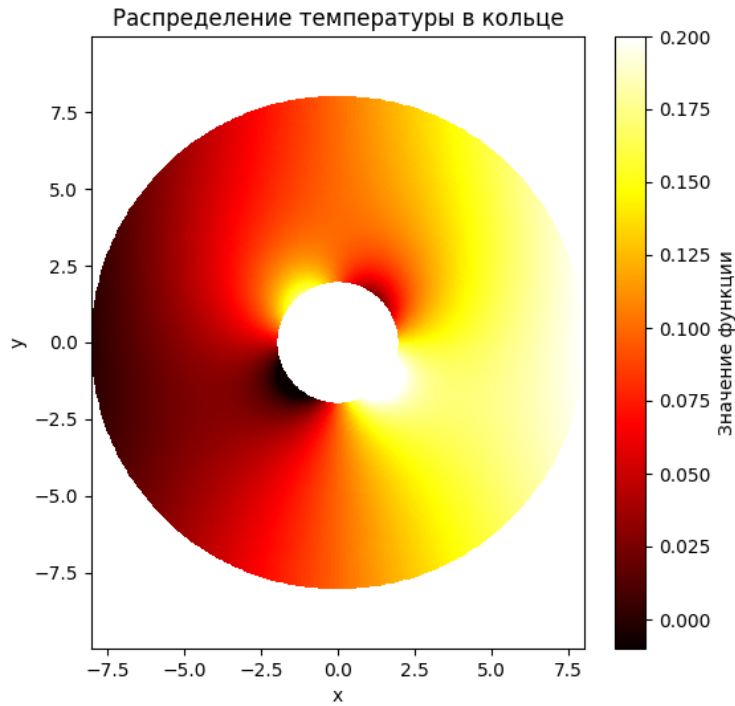


Рис. 4: Численное решение,  $R_1 = 2$ ,  $R_2 = 8$ ,  $A = 0.1$ ,  $B = 0.1$

Теперь обратимся к проверке подобия задачи по радиусу и по амплитудам  $A$  и  $B$ . Для этого проведем численный расчет задачи для трех конфигураций параметров: на базовой конфигурации  $R_1 = 1$ ,  $R_2 = 2$ ,  $A = 0.1$ ,  $B = 0.1$  (рис. 5); на увеличенных амплитудах в 10 раз относительно базовой конфигурации (рис. 6) и на уменьшенных и увеличенных в 10 раз радиусах относительно базовой конфигурации (рис. 7-8). Ниже представлены графики распределения температуры для перечисленных конфигураций параметров задачи.

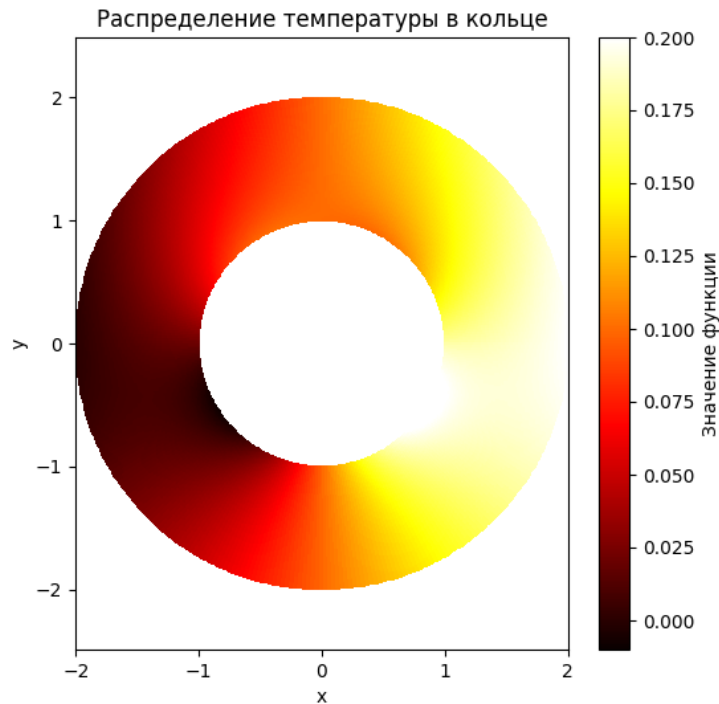


Рис. 5: Численное решение,  $R_1 = 1$ ,  $R_2 = 2$ ,  $A = 0.1$ ,  $B = 0.1$

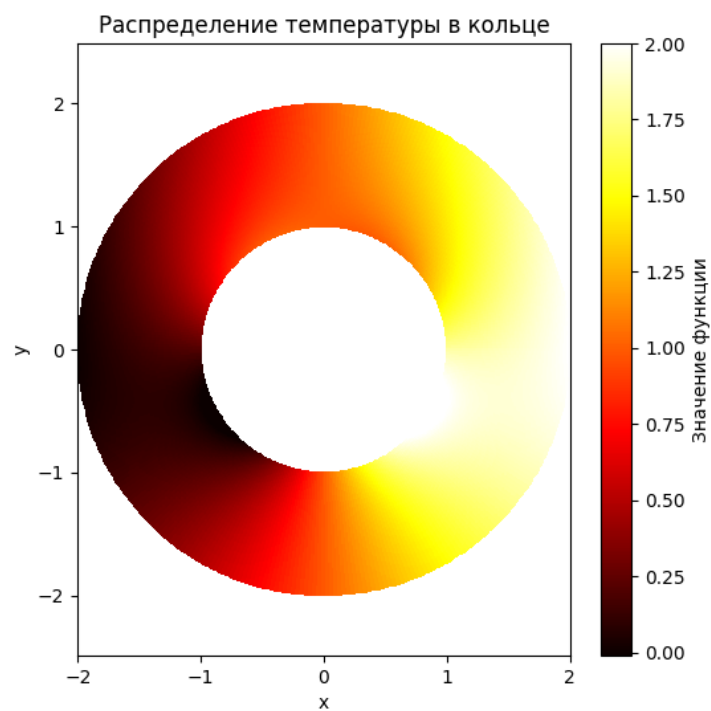


Рис. 6: Численное решение,  $R_1 = 1$ ,  $R_2 = 2$ ,  $A = 1$ ,  $B = 1$

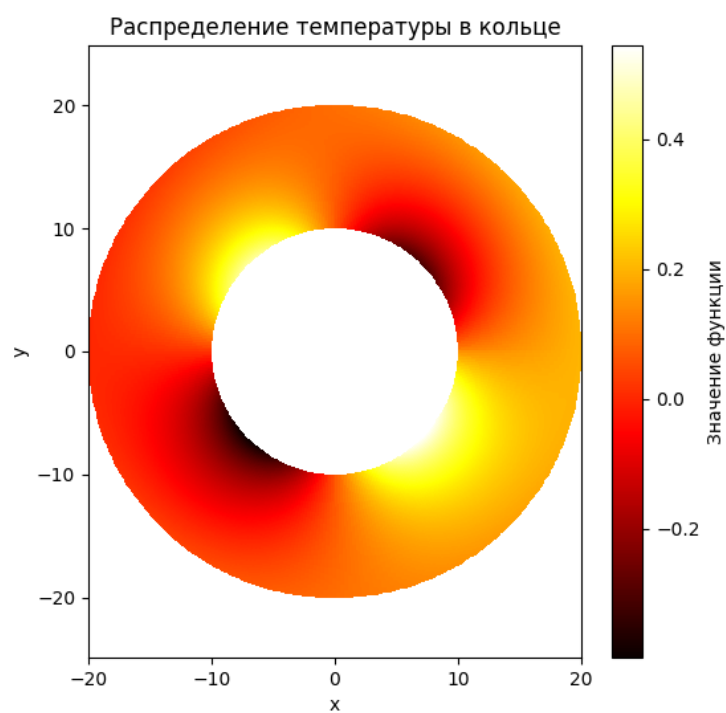


Рис. 7: Численное решение,  $R_1 = 10$ ,  $R_2 = 20$ ,  $A = 0.1$ ,  $B = 0.1$

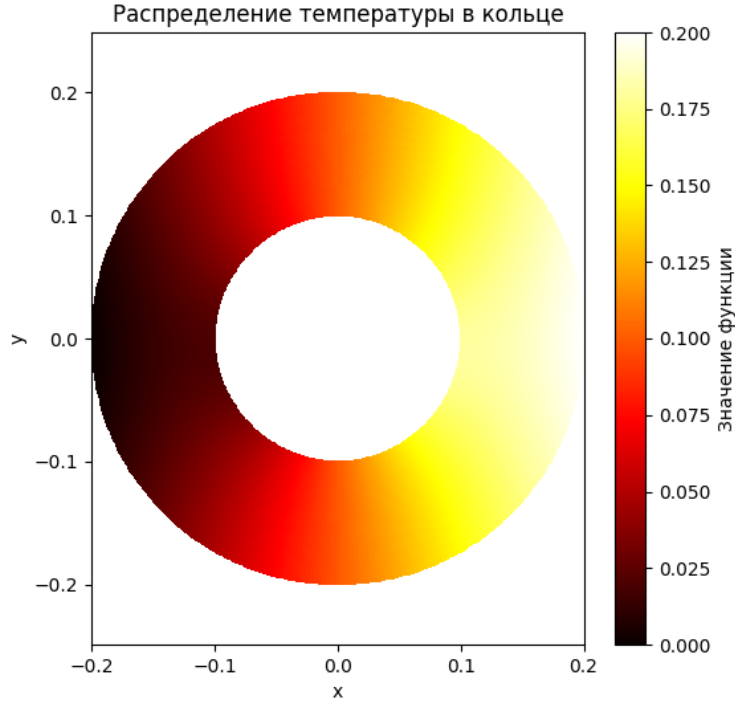


Рис. 8: Численное решение,  $R_1 = 0.1$ ,  $R_2 = 0.2$ ,  $A = 0.1$ ,  $B = 0.1$

Как можно заметить, наблюдается подобие по амплитудам  $A$  и  $B$ . При увеличении амплитуд в 10 раз качественно распределение температуры в кольце остается точно таким же, значения же увеличиваются пропорционально в 10 раз.

По радиусу же подобия в задаче нет, при больших радиусах распределение стремится к гармонике  $\sin 2\varphi$ , при малых – к  $\cos \varphi$ .

Данные утверждения можно объяснить, взглянув на формулу аналитического решения (3):

$$T(r; \varphi) = B \left[ 1 + \frac{R_2}{R_1^2 + R_2^2} \left( r + \frac{R_1^2}{r} \right) \cos \varphi \right] + A \frac{R_1^3}{2(R_1^4 + R_2^4)} \left( r^2 - \frac{R_2^4}{r^2} \right) \sin 2\varphi.$$

Нетрудно видеть, что при увеличении амплитуд  $A$  и  $B$  в одно и то же количество раз  $k$ , мы получим пропорционально увеличенную в  $k$  температуру. При этом характер распределения останется неизменным.

Чтобы отследить зависимость от радиуса, отнесем все радиальные переменные в выражении для температуры к  $R_1$ .

$$T(r; \varphi) = B \left[ 1 + \frac{\tilde{R}_2}{1 + \tilde{R}_2^2} \left( \tilde{r} + \frac{1}{\tilde{r}} \right) \cos \varphi \right] + A \frac{R_1}{2(1 + \tilde{R}_2^4)} \left( \tilde{r}^2 - \frac{\tilde{R}_2^4}{\tilde{r}^2} \right) \sin 2\varphi. \quad (10)$$

Итого, получили, что слагаемое с  $\sin 2\varphi$  имеет множитель  $R_1$ , в то время как слагаемое с  $\cos \varphi$  не имеет явной зависимости от  $R_1$ . Отсюда непосредственно вытекает тот факт, что при малых радиусах второе слагаемое в (10) будет мало по сравнению с первым, соответственно распределение температуры будет стремиться к виду  $\cos \varphi$ . При больших значениях радиуса получим обратную картину: будет преобладать второе слагаемое, и, следовательно, распределение будет иметь вид  $\sin 2\varphi$ .

## 4 Заключение

## Список литературы

- [1] С.К. Годунов, В.С. Рябенский // Разностные схемы. // Наука, 1977 (§35)
- [2] Д. Андерсон, Дж. Таннехил, Р. Плетчер // Вычислительная гидромеханика и теплообмен. // Мир, 1990 (том 2, §10.3)