지식표현과 추론 – 5
불확실한 지식의 표현

이건명

충북대학교 소프트웨어학과

인공지능 : 튜링 테스트에서 딥러닝까지

학습 내용

- 함수 기반의 지식표현 방법에 대해서 알아본다.
- 불확실한 지식표현 방법에 대해서 알아본다.

- 불확실한 지식 표현
  - 불확실성의 초래 원인
  - 확신도
    - 확신도의 표현
    - 추론 결과의 확신도 계산
  - 확률기반 불확실성 표현
    - 확률
      - 확률값의 의미
      - 결합확률
      - 조건부 확률
      - 베이즈 정리
    - 규칙의 불확실성 표현
      - 충분 가능도 / 필요가능도
      - 사전 승률(prior odds) / 사후 확률(posterior odds)
      - 사후 확률
  - 퍼지 이론
    - 퍼지 집합
      - 소속정도
      - 소속 함수
    - 지식표현
      - 언어항의 정량적 표현
      - 퍼지 규칙
    - 퍼지 추론

1. 함수에 의한 지식 표현

❖ **기호 기반의 지식 표현**
- **기호**를 사용하여 대상 표현
- 대상 간의 **관계** 표현
- **규칙, 프레임, 의미망, 논리** 등

❖ **함수 기반의 지식 표현**

$$f(\boldsymbol{x}) = \frac{1}{1 + e^{-0.5+1.2x_1-0.3x_2+2.4x_3}}$$

- **비기호적** 지식표현
  - **기호 대신 수치값과 수치값을 계산하는 함수를 사용하여 지식을 표현**
- **신경망**과 **딥러닝**
  - 퍼셉트론(Perceptron) : 함수식 계산 출력 생성
  - 다층 퍼셉트론
- **서포트 벡터 머신**(SVM)
- **회귀**(regression) 모델
- …

2. 불확실한 지식 표현

❖ **불확실성의 원인**

- **약한 관련성의 지식**
  - **약한 인과성**(weak implication)이나 **애매한 연관관계**(vague association)인 지식의 표현

    ex. IF(조건)와 THEN(취해야 할 행동) 사이의 **연관성의 강도**

  ⇒ **확신도**(certainty degree) 사용 표현

  ⇒ **베이즈 정리**(Bayesian theorem) 사용 표현

- **부정확한 언어 사용**
  - 자연어(natural language)는 본질적으로 **모호**하고(vague) **부정확**(imprecise)

    ex. 자주(frequently), 크다(big), 무겁다(heavy)

  ⇒ **퍼지이론**(fuzzy theory) 사용 표현

불확실한 지식 표현

❖ **불확실성의 원인 – cont.**

- **불완전하거나**(incomplete) **결손된**(missing) **데이터에 기반한 지식**

  ⇒ '**알려지지 않은 것**(unknown)**'**으로 간주하고, **근사적인 추론 (approximate reasoning)** 진행

- **상충되는 지식의 통합**
  - **모순**된 견해(contradictory opinion)와 **상충**된 지식(conflicting knowledge)의 통합

  ⇒ 지식 소스 별로 **가중치** 부여

3. 확신도

- **확신도(certainty factor)**
  - **규칙(rule)**과 **사실(fact)**의 **신뢰정도**를 **[– 1,1]** 구간의 값으로 표현
    - **1** (단정적 신뢰), **–1** (단정적 불신)
  - 규칙과 사실에 **확신도** ***cf*** 부여
    - 규칙 : IF A THEN B $cf(r)$
    - 사실 : A $cf(A)$
    - 추론 결과: B $cf(B)$

IF	the sky is clear
THEN	the forecast is sunny {cf 0.8}

- **확신도 값**에 따른 **대응 단어**
  - –1.0 : 절대 아니다 (definitely not)
  - –0.8 : 거의 확실히 아니다 (almost certainly not)
  - –0.6 : 아마 아니 것이다 (probably not)
  - –0.4 : 어쩌면 아닐 것이다 (maybe not)
  - –0.2 ~ 0.2 : 모르겠다 (unknown)
  - 0.4 : 어쩌면 그럴 것이다 (maybe)
  - 0.6 : 아마 그럴 것이다 (probably)
  - 0.8 : 거의 확실하다 (almost certainly)
  - 1.0 : 확실하다 (definitely)

확신도

❖ 규칙에 대한 추론 결과의 확신도

IF **A** THEN **B** $cf(A \rightarrow B)$
A $cf(A)$

B $cf(B)$

$$cf(B) = cf(A) \times cf(A \rightarrow B)$$

IF **A** **and** **B** THEN **C** $cf(A \rightarrow B)$
A $cf(A)$
B $cf(B)$

C $cf(C)$

$$cf(C) = \min\{cf(A), cf(B)\} \times cf(A \rightarrow B)$$

IF **A** **or** **B** THEN **C** $cf(A \rightarrow B)$
A $cf(A)$
B $cf(B)$

C $cf(C)$

$$cf(C) = \max\{cf(A), cf(B)\} \times cf(A \rightarrow B)$$

확신도

❖ **규칙에 대한 추론 결과의 확신도 – cont.**

IF sky is clear
AND the forecast is sunny
THEN the action is 'wear sunglasses' $\{cf = 0.8\}$

'sky is clear' $cf = 0.9$,
'the forecast is sunny' $cf = 0.7$

'wear sunglasses' $cf = \min\{0.9, 0.7\} \times 0.8 = 0.7 \times 0.8 = 0.56$

IF sky is overcast
OR the forecast is rain
THEN the action is 'take an umbrella' $\{cf = 0.9\}$

'sky is overcast' $cf = 0.6$
'the forecast is rain' $cf = 0.8$

'take an umbrella' $cf = \max\{0.6, 0.8\} \times 0.9 = 0.8 \times 0.9 = 0.72$

확신도

❖ **규칙에 대한 추론 결과의 확신도 – cont.**

- **여러 규칙**에 의한 **동일 사실 추론**의 확신도 결합

IF **A** THEN **B** $cf(A \rightarrow B)$

A $cf(A)$

B $cf(B)$

$$cf_1(B) = cf(A) \times cf(A \rightarrow B)$$

IF **C** THEN **B** $cf(C \rightarrow B)$

C $cf(C)$

B $cf(B)$

$$cf_2(B) = cf(C) \times cf(C \rightarrow B)$$

$$cf(cf_1, cf_2) = \begin{cases} cf_1 + cf_2 \cdot (1 - cf_1) & \text{if } cf_1 \geq 0 \text{ and } cf_2 \geq 0 \\ \dfrac{cf_1 + cf_2}{1 - \min\{|cf_1|, |cf_2|\}} & \text{if } cf_1\text{와 } cf_2\text{중에서 하나만 음수} \\ cf_1 + cf_2 \cdot (1 + cf_1) & \text{if } cf_1 < 0 \text{ and } cf_2 < 0 \end{cases}$$

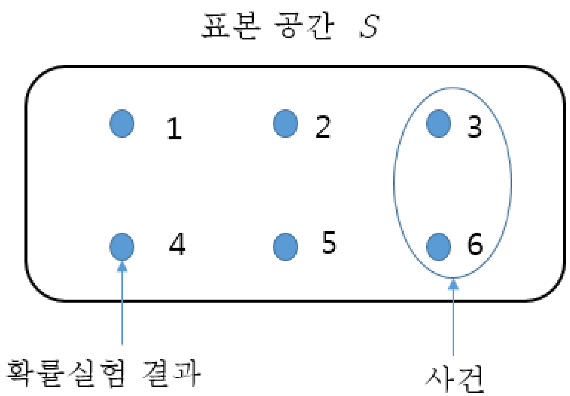
$$cf(cf_1, cf_2) = \frac{0.8 - 0.6}{1 - min\,[0.8, 0.6]} = 0.5$$

4. 확률기반 불확실성 표현

❖ 확률 (probability)

- 어떤 사건이 일어날 가능성

- **확률의 의미**
  - **상대빈도 확률**(relative frequency probability)
    - **빈도주의자 확률**(frequentist probability)
    - 전체 실험 회수 대비 관심 사건의 상대적 빈도



  - **주관적 확률**(subjective probability)
    - **확신** 또는 **믿음의 정도**(degree of belief)

확률기반 불확실성 표현

❖ **결합 확률**(joint probability)

- $P(A,B)$, $P(A \cap B)$, $P(AB)$
- 사건 A와 B가 **동시에 일어날** 확률
- 예.
  - A : 첫 번째 주사위 짝수, B : 두 번째 주사위 홀수
  - $P(A,B) = \frac{9}{36} = 0.25$

(1,1)	(1,2)	(1,3)	(1,4)	(1,5)	(1,6)
(2,1)	(2,2)	(2,3)	(2,4)	(2,5)	(2,6)
(3,1)	(3,2)	(3,3)	(3,4)	(3,5)	(3,6)
(4,1)	(4,2)	(4,3)	(4,4)	(4,5)	(4,6)
(5,1)	(5,2)	(5,3)	(5,4)	(5,5)	(5,6)
(6,1)	(6,2)	(6,3)	(6,4)	(6,5)	(6,6)

확률기반 불확실성 표현

❖ **조건부 확률**(conditional probability)

- $P(A|B)$
- B가 주어질 때 A가 일어날 확률
  - 'P of A given B'

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{P(AB)}{P(B)} = \frac{P(A,B)}{P(B)} \quad \text{where } P(B) > 0.$$

A : 두 주사위의 합이 8이다
B : 첫 번째 주사위는 3이다

(1,1)	(1,2)	(1,3)	(1,4)	(1,5)	(1,6)
(2,1)	(2,2)	(2,3)	(2,4)	(2,5)	(2,6)
(3,1)	(3,2)	(3,3)	(3,4)	(3,5)	(3,6)
(4,1)	(4,2)	(4,3)	(4,4)	(4,5)	(4,6)
(5,1)	(5,2)	(5,3)	(5,4)	(5,5)	(5,6)
(6,1)	(6,2)	(6,3)	(6,4)	(6,5)	(6,6)

$$P(A|B) = \frac{P(A,B)}{P(B)} = \frac{1/36}{6/36} = \frac{1}{6}$$

확률기반 불확실성 표현

❖ **베이즈 정리** (Bayesian theorem)

사후 확률 가능도 사전 확률

$$\boxed{P(A|B) = \frac{P(B|A)P(A)}{P(B)}}$$

증거

$$P(A|B) = \frac{P(A,B)}{P(B)} = \frac{P(B|A)P(A)}{P(B)}$$

- 사후 확률(posterior probability)
- 가능도(likelihood)
- 사전확률(prior probability)
- 증거(evidence)

확률기반 불확실성 표현

❖ **확률을 이용한 규칙의 불확실성 표현**

- **전문가**에 의한 각 **규칙**에 대한 **충분 가능도** LS, **필요 가능도** LN값 **부여**
- 규칙 : $\boldsymbol{A} \rightarrow \boldsymbol{B}$

IF today is rain
THEN tomorrow is rain

- **충분 가능도**(likelihood of sufficiency)
  - $LS = \dfrac{P(A|B)}{P(A|\neg B)}$

$$LS = \frac{p(today\ is\ rain \mid tomorrow\ is\ rain)}{p(today\ is\ rain \mid tomorrow\ is\ dry)}$$

- **필요 가능도**(likelihood of necessity)
  - $LN = \dfrac{P(\neg A|B)}{P(\neg A|\neg B)}$

$$LN = \frac{p(today\ is\ dry \mid tomorrow\ is\ rain)}{p(today\ is\ dry \mid tomorrow\ is\ dry)}$$

- **사실** 또는 **추론 결과**에 대한 **사전확률**(prior probability) **부여**

Rule: 1
IF today is rain {LS 2.5 LN .6}
THEN tomorrow is rain {prior .5}

Rule: 2
IF today is dry {LS 1.6 LN .4}
THEN tomorrow is dry {prior .5}

확률기반 불확실성 표현

❖ 확률을 이용한 규칙의 불확실성 추론

- 규칙 : $\boldsymbol{A} \rightarrow \boldsymbol{B}$

Rule: 1
IF today is rain {LS 2.5 LN .6}
THEN tomorrow is rain {prior .5}

- 사전 승률(prior odds)
  - $O(B) = \frac{P(B)}{1-P(B)}$

$$O(tomorrow\ is\ rain) = \frac{0.5}{1-0.5} = 1.0$$

- 사후 승률(posterior odds)
  - $O(B|A) = LS \times O(B)$
  - $O(B|\neg A) = LN \times O(B)$

$$O(tomorrow\ is\ rain \mid today\ is\ rain) = 2.5 \times 1.0 = 2.5$$

- 사후 확률
  - $P(B|A) = \frac{o(B|A)}{1+o(B|A)}$
  - $P(B|\neg A) = \frac{o(B|\neg A)}{1+o(B|\neg A)}$

$$p(tomorrow\ is\ rain \mid today\ is\ rain) = \frac{2.5}{1+2.5} = 0.71$$

5. 퍼지 이론

❖ 집합론

- **자연어의 단어(word)**는 궁극적으로 **집합**을 가리키는 표현
  - ‘자동차’는 자동차의 집합
  - ‘자동차 한 대’는 자동차 집합의 원소 하나

- **일반 집합(crisp set, classical set)** X
  - 원소 x는 X에 **속하거나**($x \in X$), X에 **속하지 않거나**($x \notin X$) 둘 중 하나
  - 집합에 **명확한 경계**를 긋고,
    집합의 원소에는 1, 원소가 아닌 것에는 0의 **소속**(membership)

퍼지 이론

❖ **개념**이나 **범주**가 항상 **이분적(二分的)**이지는 않다

- 자전거 vs 오토바이



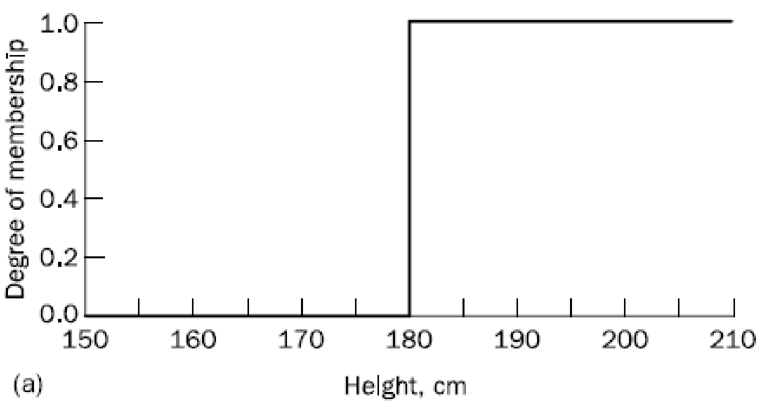
- **정도**(degree)의 문제

  ⇒ **퍼지 집합**(fuzzy set) 도입

퍼지 이론

❖ **퍼지집합(Fuzzy Set)**

- **원소**가 모임(collection)에 **어느 정도** 속한다는 것
- **명제**는 참 또는 거짓이 아니라 어느 정도는 **부분적으로 참**(이거나 **부분적으로 거짓**)
- **소속정도(membership degree)**는 [0,1] 범위의 실수값으로 표현



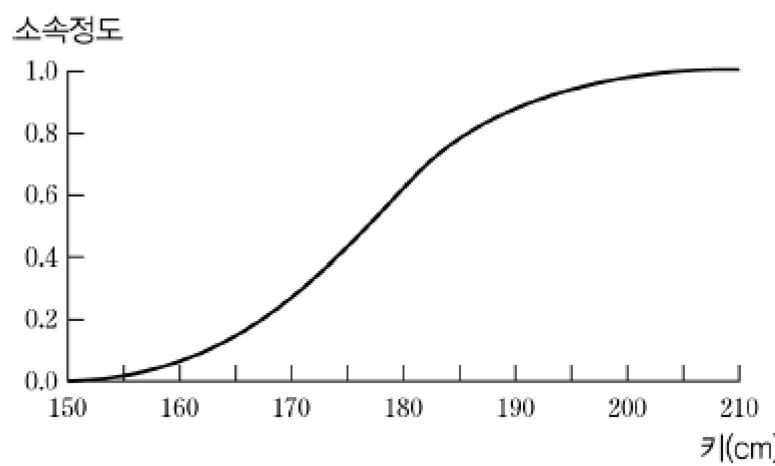


그림 3.16 '크다'를 나타내는 소속함수의 예

소속함수(membership function)

퍼지 이론

❖ **언어항을 포함한 지식 표현**

- **퍼지 규칙(fuzzy rule)** 사용
  - 소속함수로 표현된 **언어항**(linguistic term)을 **포함**하는 규칙

IF 서비스가 나쁘거나 음식이 별로이다 THEN 팁을 적게 준다
IF 서비스가 좋다 THEN 팁을 보통으로 준다
IF 서비스가 훌륭하거나 음식이 맛있다 THEN 팁을 많이 준다

- **언어항**
  - '**나쁘다**', '**좋다**', '**훌륭하다**', '**별로이다**', '**맛있다**', '**적다**', '**보통이다**', '**많다**'

↓

IF service = 나쁘다 OR food = 별로이다 THEN tip = 적다
IF service = 좋다 THEN tip = 보통이다
IF service = 훌륭하다 OR food = 맛있다 THEN tip = 많다

퍼지 이론

❖ 언어항을 포함한 지식 표현

- 언어항을 표현하는 소속함수

IF service = 나쁘다 OR food = 별로이다 THEN tip = 적다
IF service = 좋다 THEN tip = 보통이다
IF service = 훌륭하다 OR food = 맛있다 THEN tip = 많다

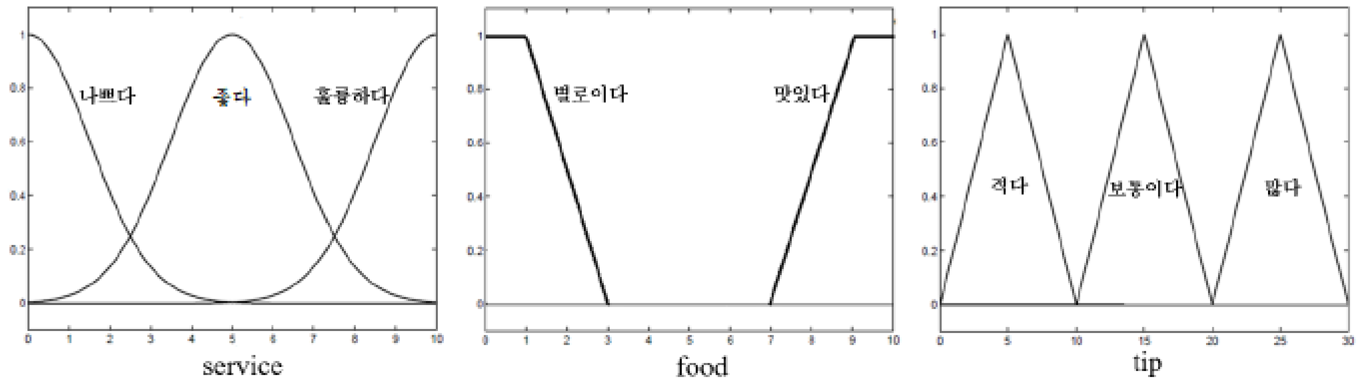


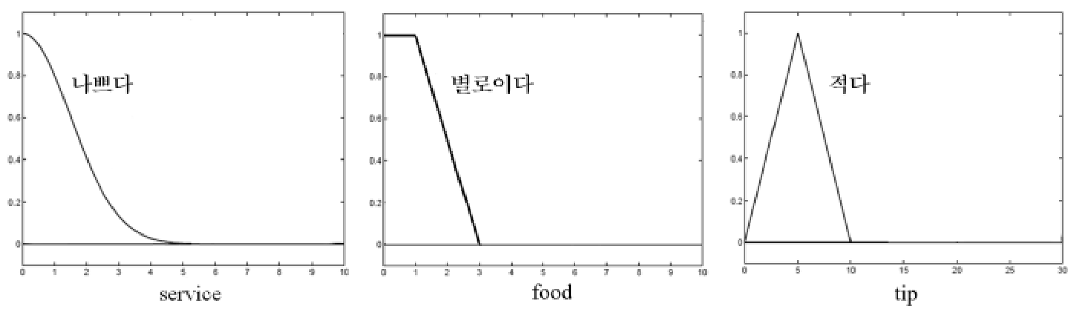
그림 3.17 언어항과 소속함수

퍼지 이론

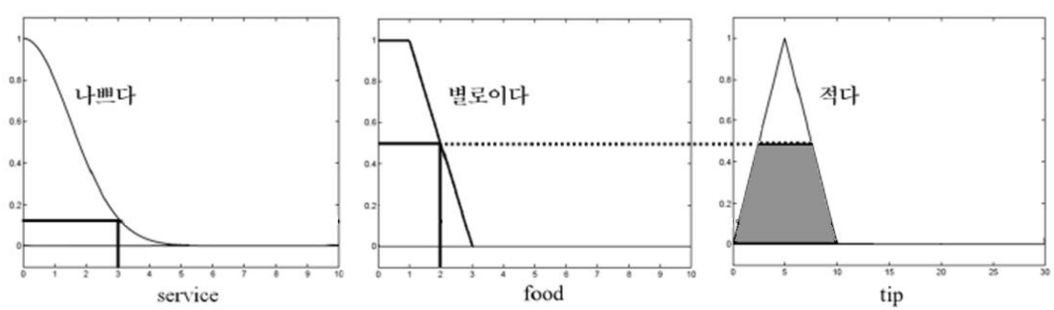
❖ **퍼지 추론**(fuzzy inference)

- **소속함수**로 표현된 **언어항**을 사용하는 **퍼지 규칙들** 대상
- 언어항의 **기호적인 대응**을 통한 추론 **대신**, **수치적인 추론**이 가능해짐
  - **수치값 입력**에 대해 **수치값 출력**을 생성

IF service = 나쁘다 OR food = 별로이다 THEN tip = 적다



service의 평가값이 3이고, food에 대한 평가값이 2일 때의 팁 계산
회색으로 표현된 퍼지 표현에 대한 수치값 필요

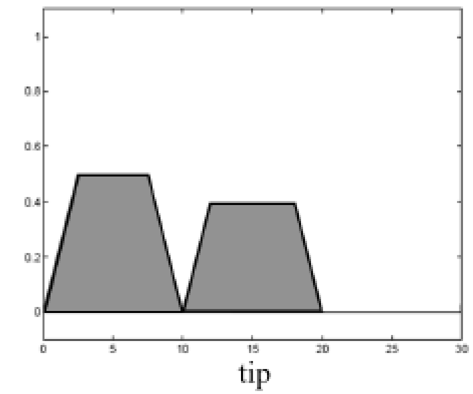


퍼지 이론

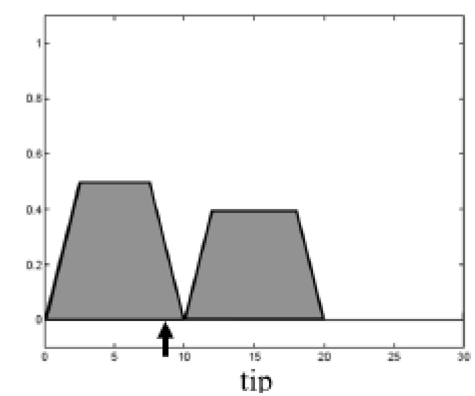
❖ **퍼지 추론**(fuzzy inference)

- 세 개의 퍼지 규칙에 대한 추론 결과

IF service = 나쁘다 OR food = 별로이다 THEN tip = 적다
IF service = 좋다 THEN tip = 보통이다
IF service = 훌륭하다 OR food = 맛있다 THEN tip = 많다



- **비퍼지화**(defuzzification)
  - 퍼지 추론의 결과를 **실수 값**으로 **변환**하는 것
  - 예. **무게중심**(center of gravity) **법**

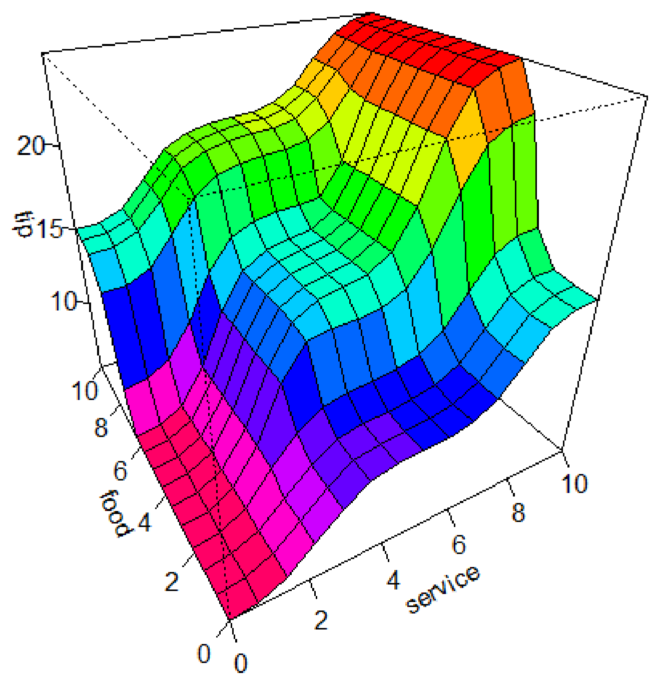


퍼지 이론

❖ **예. 레스토랑 팁 계산**

- 서비스 평가값(service)과 음식 평가값(food)에 따른 팁(tip)의 크기

IF 서비스가 나쁘거나 음식이 별로이다 THEN 팁을 적게 준다
IF 서비스가 좋다 THEN 팁을 보통으로 준다
IF 서비스가 훌륭하거나 음식이 맛있다 THEN 팁을 많이 준다



[실습] 퍼지 추론

❖ **scikit-fuzzy** 패키지 사용
- 소속함수 정의 지원
- 퍼지 추론 방법 지원
  - > **pip install scikit-fuzzy**
  - > **import skfuzzy as fuzz**

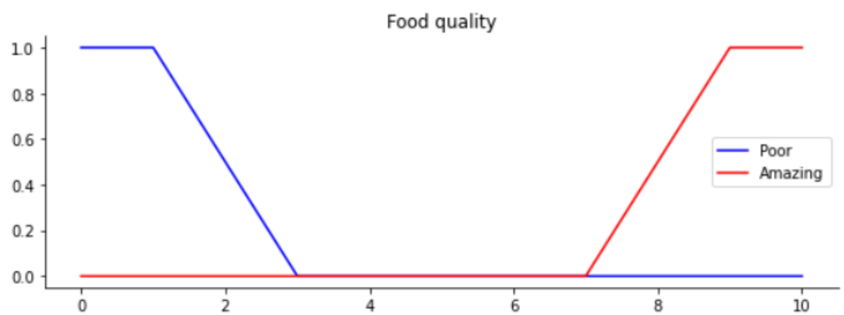
❖ **레스토랑 팁 계산 퍼지 규칙**

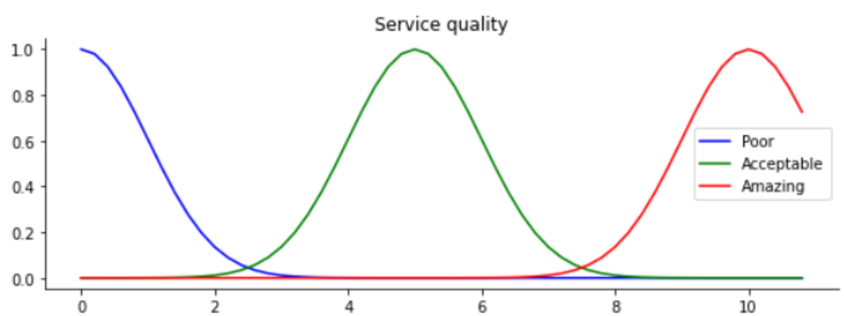
IF 서비스가 나쁘거나 음식이 별로이다 THEN 팁을 적게 준다
IF 서비스가 좋다 THEN 팁을 보통으로 준다
IF 서비스가 훌륭하거나 음식이 맛있다 THEN 팁을 많이 준다

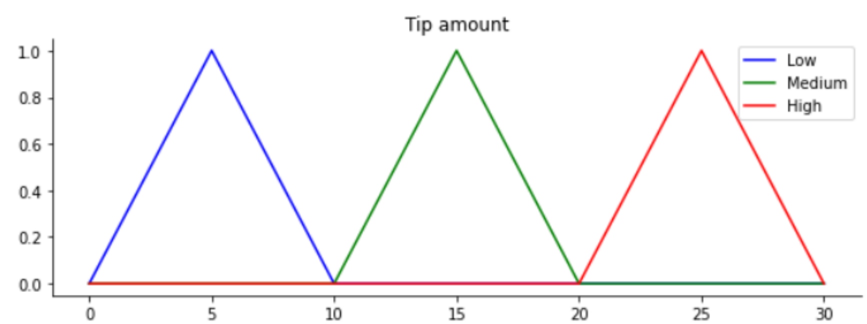
Rule 1: IF service = poor OR food = poor THEN tip = low
Rule 2: IF service = acceptable THEN tip = medium
Rule 3: IF service = amazing OR food = amazing THEN tip = high

```python
import numpy as np
import skfuzzy as fuzz
import matplotlib.pyplot as plt

x_qual = np.arange(0, 11, 1)   # 음식 품질의 범위
x_serv = np.arange(0, 11, 0.2) # 서버스 만족도
x_tip  = np.arange(0, 31, 1)   # 팁의 범위

# 소속함수 정의
qual_poor = fuzz.trapmf(x_qual, [0,0,1,3])  # 음식 품질. 사다리꼴 함수
qual_amazing = fuzz.trapmf(x_qual, [7,9,10,10])  # 맛있다

serv_poor = fuzz.gaussmf(x_serv, 0, 1)   # 서비스 만족도. 가우시안 소속함수
serv_acceptable = fuzz.gaussmf(x_serv, 5, 1)
serv_amazing = fuzz.gaussmf(x_serv, 10, 1)

tip_low = fuzz.trimf(x_tip, [0, 5, 10])  # 팁의 규모. 삼각 소속함수
tip_medium = fuzz.trimf(x_tip, [10, 15, 20])
tip_high = fuzz.trimf(x_tip, [20, 25,30])
```

```python
# 소속함수 그리기
fig, (ax0, ax1, ax2) = plt.subplots(nrows=3, figsize=(8, 9))

ax0.plot(x_qual, qual_poor, 'b', linewidth=1.5, label='Poor')
ax0.plot(x_qual, qual_amazing, 'r', linewidth=1.5, label='Amazing')
ax0.set_title('Food quality')
ax0.legend()

ax1.plot(x_serv, serv_poor, 'b', linewidth=1.5, label='Poor')
ax1.plot(x_serv, serv_acceptable, 'g', linewidth=1.5, label='Acceptable')
ax1.plot(x_serv, serv_amazing, 'r', linewidth=1.5, label='Amazing')
ax1.set_title('Service quality')
ax1.legend()

ax2.plot(x_tip, tip_low, 'b', linewidth=1.5, label='Low')
ax2.plot(x_tip, tip_medium, 'g', linewidth=1.5, label='Medium')
ax2.plot(x_tip, tip_high, 'r', linewidth=1.5, label='High')
ax2.set_title('Tip amount')
ax2.legend()

for ax in (ax0, ax1, ax2):
    ax.spines['top'].set_visible(False)
    ax.spines['right'].set_visible(False)
    ax.get_xaxis().tick_bottom()
    ax.get_yaxis().tick_left()

plt.tight_layout()
```



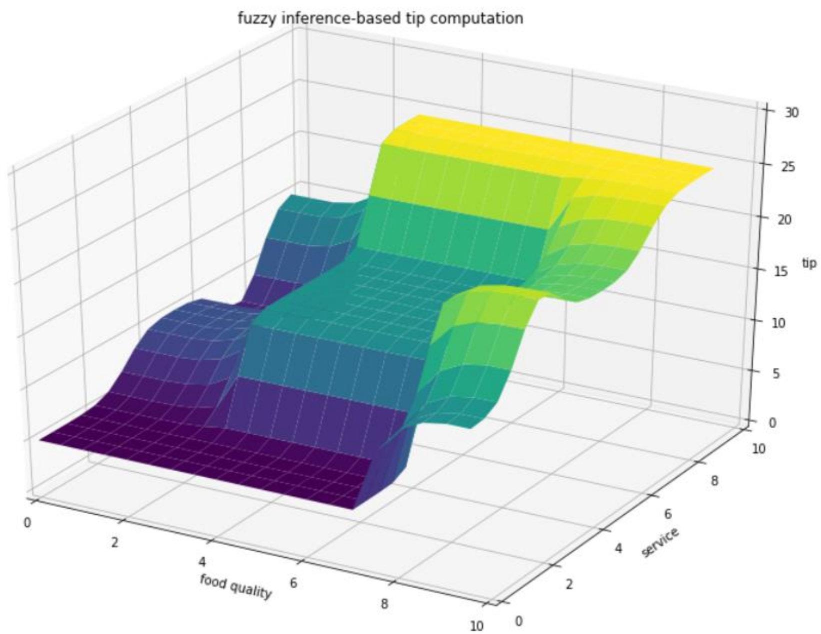




```python
# 범위 domain에서 정의된 소속함수 mf의 val에 대한 값
def membership(domain, mf, val):
  return fuzz.interp_membership(domain, mf, val)

# 퍼지 규칙을 적용한 food quality가 qual_val, service 정수가 serv_val일 때 tip 계산
def compute_tip_amount(qual_val, serv_val):
  qual_level_poor = fuzz.interp_membership(x_qual, qual_poor, qual_val)
  qual_level_amazing = fuzz.interp_membership(x_qual, qual_amazing, qual_val)

  serv_level_poor = fuzz.interp_membership(x_serv, serv_poor, serv_val)
  serv_level_acceptable = fuzz.interp_membership(x_serv, serv_acceptable, serv_val)
  serv_level_amazing = fuzz.interp_membership(x_serv, serv_amazing, serv_val)

  # Rule 1: IF service = poor OR food = poor THEN tip = low
  satisfaction_rule1 = np.fmax(qual_level_poor, serv_level_poor)
  tip_activation_low = np.fmin(satisfaction_rule1, tip_low)

  # Rule 2: IF service = acceptable THEN tip = medium
  tip_activation_medium = np.fmin(serv_level_acceptable, tip_medium)

  # Rule 3: IF service = amazing OR food = amazing THEN tip = high
  satisfaction_rule3 = np.fmax(qual_level_amazing, serv_level_amazing)
  tip_activation_high = np.fmin(satisfaction_rule3, tip_high)
  tip0 = np.zeros_like(x_tip)

  # 각 규칙의 추론결과 결합
  aggregated = np.fmax(tip_activation_low,
                     np.fmax(tip_activation_medium, tip_activation_high))
  # 비퍼지화
  tip = fuzz.defuzz(x_tip, aggregated, 'centroid')
  return tip

print('food quality score = 6.6, service score = 9일 때 팁: ', compute_tip_amount(6.6,9))
```

```
food quality score = 6.6, service score = 9일 때 팁:  24.992850007852898
```

```python
from mpl_toolkits import mplot3d
import matplotlib.pyplot as plt

d_qual = np.arange(0, 10, 0.5)   # 음식 품질의 범위
d_serv = np.arange(0, 10, 0.5) # 서비스 만족도의 범위

Q, S = np.meshgrid(d_qual, d_serv)
T = np.zeros_like(Q)

for i in range(20):
  for j in range(20):
    T[i,j] = compute_tip_amount(Q[i,j], S[i,j])

fig = plt.figure(figsize =(14, 10))
ax = plt.axes(projection ='3d')
ax.plot_surface(Q, S, T,rstride=1, cstride=1, cmap='viridis',
                       linewidth=0.4, antialiased=True)
ax.set_xlabel('food quality')
ax.set_xlim(0,10)
ax.set_ylabel('service')
ax.set_ylim(0,10)
ax.set_zlabel('tip')
ax.set_zlim(0,30)
ax.set_title('fuzzy inference-based tip computation')

plt.show()
```



Quiz

❖ **지식이 불확실하게 획득되는 경우로 가장 적합하지 않는 것을 선택하시오.**

① 약한 인과관계나 애매한 연관관계를 나타내는 경우
② 표현 대상이 무작위적인 특성을 보이는 경우
③ 선택된 지식 표현 방법이 부적절한 경우
④ 불완전하거나 결손된 데이터에 기반한 경우

❖ **불확실한 지식의 표현에 대한 설명으로 적합하지 않은 것을 선택하시오.**

① 규칙과 사실에 대한 확신도는 구간 [-1,1] 상의 표현한다.
② 지식의 불확실을 표현하기 위해 주관적 확률을 사용할 수 있다.
③ 베이즈 정리는 가능도, 사전 확률, 증거로 부터 사후 확률을 계산할 수 있도록 한다,
④ 사전 승률은 규칙의 조건부에 대한 발생 확률과 미발생 확률를 나타낸다.

Quiz

❖ **퍼지 이론에 대한 설명으로 적합하지 않은 것을 선택하시오.**

① 정성적으로 대상에 대한 언어항은 소속함수를 사용하여 표현할 수 있다.

② 소속함수는 구간 [0,1] 상의 값을 갖는다.

③ 소속함수의 값은 확률값으로 해석할 수 있다.

④ 퍼지 규칙은 소속함수로 표현된 언어항을 포함할 수 있다.

❖ **퍼지 추론에 대한 설명으로 적합하지 않은 것을 선택하시오.**

① 조건부에 OR로 연결된 언어항들이 있으면 입력의 각 언어항의 소속함수에 대한 소속함수 값의 큰 값을 규칙의 만족도로 사용한다.

② 조건부에 AND로 연결된 언어항들이 있으면 입력의 각 언어항의 소속함수에 대한 소속함수 값의 작은 값을 규칙의 만족도로 사용한다.

③ 퍼지 추론에 대한 소속함수로 표현된 추론 결과를 하나의 수치값으로 변환하는 것을 비퍼지화라고 한다.

④ 퍼지 추론을 할 때는 하나의 퍼지규칙만 사용된다.