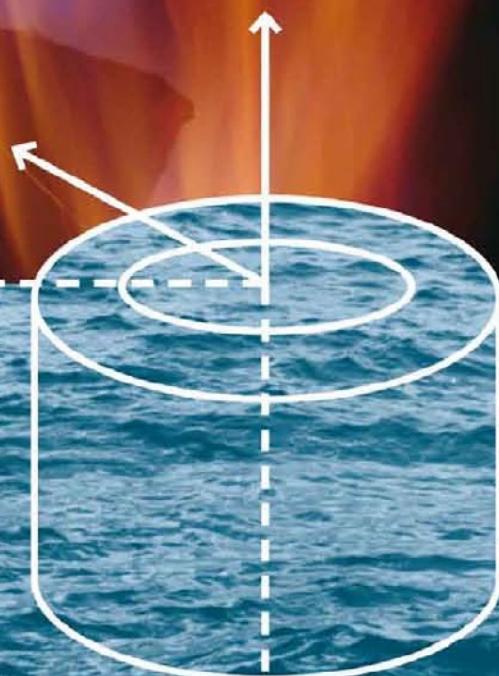


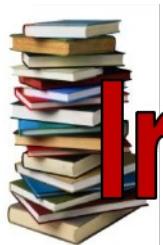
Francisco Alhama / Carmelo Nicolás Madrid

Análisis dimensional discriminado en **mecánica de fluidos** y **transferencia de calor**



EDITORIAL REVERTÉ

Subido por:



Interfase IQ

Libros de Ingeniería Química y más



<https://www.facebook.com/pages/Interfase-IQ/146073555478947?ref=bookmarks>

**Si te gusta este libro y tienes la posibilidad,
cómpralo para apoyar al autor.**

Análisis dimensional discriminado en mecánica de fluidos y transferencia de calor

Francisco Alhama / Carmelo Nicolás Madrid

Profesores de la Universidad Politécnica de Cartagena

Departamento de Física Aplicada



Barcelona · Bogotá · Buenos Aires · Caracas · México

**Análisis dimensional discriminado en mecánica
de fluidos y transferencia de calor**

Copyright © Francisco Alhama López, Carmelo Nicolás Madrid García

Edición en e-book:

© Editorial Reverté. S.A., 2012
ISBN: 978-84-291-9293-3

Edición en papel:

© Editorial Reverté. S.A., 2012
ISBN: 978-84-291-4373-7

Propiedad de:

EDITORIAL REVERTÉ, S. A.

Loreto, 13-15, Local B
08029 Barcelona
Tel: (34) 93 419 33 36
Fax: (34) 93 419 51 89
reverte@reverte.com
www.reverte.com

Reservados todos los derechos. La reproducción total o parcial de esta obra, por cualquier medio o procedimiento, comprendidos la reprografía y el tratamiento informático, y la distribución de ejemplares de ella mediante alquiler o préstamo públicos, queda rigurosamente prohibida sin la autorización escrita de los titulares del copyright, bajo las sanciones establecidas por las leyes.

A Juana Mari

F. Alhama

A mi esposa Adela y a mis hijos Adela, María y Nicolás

C. N. Madrid

Esta página se ha dejado intencionadamente en blanco

Esta página se ha dejado intencionadamente en blanco

Índice analítico

Prólogo	xi
Nomenclatura	xv

Capítulo 1 La discriminación: una extensión fundamental y necesaria del análisis dimensional clásico.....1

1.1 Introducción.....1
1.2 Aplicación del análisis dimensional. Lista de variables relevantes.....5
1.3 Revisión crítica del concepto y las aplicaciones del análisis dimensional clásico. Significado de los números adimensionales clásicos.....7
1.4 La discriminación: un concepto fundamental y necesario de carácter amplio 21
1.5 El análisis dimensional en los textos de ingeniería 24
1.6 Análisis dimensional, adimensionalización de las ecuaciones básicas y balances..... 30
1.7 Análisis dimensional y orden de magnitud de las soluciones..... 32

Capítulo 2 Fundamentos del análisis dimensional discriminado.....35

2.1 Introducción: bases dimensionales y uso de las diferentes geometrías 35
2.2 Bases dimensionales en la mecánica de fluidos. Fórmulas dimensionales de variables y de propiedades del medio ... 36

2.3	Bases dimensionales en la transmisión de calor. Fórmulas dimensionales de variables y de propiedades del medio	48
2.4	Homogeneidad de las ecuaciones en el análisis dimensional discriminado.	63
2.5	El teorema de π modificado	69
Capítulo 3 Aplicaciones en la mecánica de fluidos		71
3.1	Introducción.	71
3.2	Ejemplos	72
Capítulo 4 Aplicaciones en la transmisión de calor		135
4.1	Introducción.	135
4.2	Ejemplos	135
Capítulo 5 Los números adimensionales en el análisis dimensional discriminado: Su significado físico como balance de magnitudes		199
5.1	Introducción.	199
5.2	Un controvertido ejemplo: el número de Reynolds	201
5.3	Los números adimensionales ADD de mecánica de fluidos	210
5.4	Los números adimensionales ADD de transmisión de calor	224
5.5	Los números adimensionales ADD en problemas conjugados.	246
Capítulo 6 El proceso de adimensionalización de ecuaciones físicas bajo la perspectiva de la discriminación		249
6.1	Introducción.	249
6.2	La adimensionalización en su versión clásica	252
6.3	La adimensionalización discriminada. La búsqueda de magnitudes de referencia implícitas	255
6.4	Algunos ejemplos ilustrativos	257
6.5	La adimensionalización y el teorema de π	273

Capítulo 7 El análisis de escala y su conexión con el análisis dimensional discriminado 275

7.1 Introducción.....	275
7.2 El análisis de escala	276
7.3 Análisis dimensional, adimensionalización de ecuaciones y análisis de escala	278
7.4 Aplicaciones.....	280

Referencias 289

Índice alfabético. 297

Esta página se ha dejado intencionadamente en blanco

Prólogo

Sobre el texto

El presente trabajo es fruto de los trabajos que en la disciplina de análisis dimensional han llevado a cabo los autores en los últimos años. El concepto de discriminación no es nuevo y ha sido aplicado con éxito a numerosos problemas.

Su importancia, que supone un salto cualitativo esencial, permite añadir el calificativo de discriminado al concepto de análisis dimensional, para distinguirlo expresamente de su concepción clásica. En general, el análisis dimensional discriminado proporciona soluciones más precisas que el clásico y, en todo caso, más formales, y constituye un paso previo a la aplicación de técnicas analíticas. El menor esfuerzo que requiere, frente a las frecuentemente engorrosas deducciones matemáticas, compensa la aplicación del método al menos en una primera, y a veces muy útil, aproximación a la solución del problema.

¿Qué se aporta, pues, en el presente texto? La concepción de discriminación en el pasado reciente, fundamentalmente debida a Palacios [1964], se ha justificado en aspectos relacionados con la medición y sus unidades y, en consecuencia, su uso se ha ceñido a las direcciones del espacio. Bajo esta orientación, Palacios aplica esta teoría a numerosos problemas en todas las ramas de la ciencia. La concepción que damos en este texto transciende de los temas de medida y unidades, y es más ambiciosa en tanto que con ella, mediante una profundización en el análisis de los fenómenos físicos que tienen lugar en el problema (carácter vectorial de las magnitudes, acoplamiento o no entre los diferentes procesos físicos, fenómenos transitorios y estacionarios, existencia de magnitudes ocultas...), se orienta de forma adecuada la selección de la lista (o listas) de variables relevantes para cada fenómeno, la elección de bases dimensionales y hasta (directamente, en ocasiones) las expresiones de balance que constituyen, en definitiva, los monomios buscados.

En suma, los objetivos del texto pueden sintetizarse en:

- Profundizar en el concepto de discriminación, y extenderlo a magnitudes que hasta este momento no aparecen en los textos.
- Investigar la existencia y el significado de ciertas magnitudes ocultas, así como su orden de magnitud. Estas son magnitudes características del problema con un claro significado físico. Su agrupación con otras magnitudes de la lista relevante permite formar monomios adimensionales discriminados que constituyen la expresión de los balances (de fuerzas, energías...) existentes en el problema.
- Abordar el conocido proceso de adimensionalización de las ecuaciones bajo el enfoque de la discriminación.
- Profundizar en el significado de los nuevos números adimensionales obtenidos mediante la discriminación.
- Aplicar los objetivos anteriores al estudio de ciertos problemas fundamentales en los campos de mecánica de fluidos y transferencia de calor, áreas en las que la disciplina de análisis dimensional se ha demostrado muy fructífera a lo largo de décadas.
- Demostrar que los procesos de aplicación del análisis dimensional discriminado, en su versión del teorema de π , y de adimensionalización discriminada de ecuaciones, son dos variantes de aplicación de la teoría del análisis dimensional que, usando diferentes protocolos de aplicación, conducen invariablemente al mismo conjunto de monomios.

Como consecuencia del penúltimo objetivo, al que se dedica la parte fundamental del texto, se ha revisado desde la nueva perspectiva del análisis dimensional discriminado el papel de los números adimensionales clásicos que aparecen en las disciplinas de mecánica de fluidos y transmisión de calor (Reynolds, Nusselt, Coeficiente de fricción, Rayleigh, Boussinesq, Grashof...), muchos de los cuales pierden su carácter adimensional y han de ser agrupados con otras variables

generalmente geométricas formando nuevos números (monomios) que conservan su carácter adimensional bajo la perspectiva de la discriminación y que desempeñan un papel realmente independiente en la solución del problema.

El texto, que contiene numerosos ejemplos para su mejor compresión, está especialmente orientado para ser impartido en un curso de doctorado de tres o cuatro créditos, aunque también puede ser útil como disciplina complementaria en la formación de titulados superiores de ciencias aplicadas e ingeniería o de doctores que trabajan en estos campos.

En el capítulo 1, tras una revisión exhaustiva de cómo se trata el análisis dimensional clásico en numerosos libros de texto, tanto específicos de análisis dimensio-

nal como especializados en los temas de mecánica de fluidos y transmisión de calor, se justifica sin necesidad de hipótesis especiales la necesidad de discriminar. Los diferentes tipos de bases dimensionales y de ecuaciones de dimensión de muchas de las magnitudes usadas en mecánica de fluidos y transmisión de calor, para las geometrías más comunes, se presentan en el capítulo 2. Los capítulos 3 y 4 son los más extensos y recogen los resultados de aplicar la discriminación a ciertos problemas fundamentales seleccionados de mecánica de fluidos y transmisión de calor, respectivamente. El capítulo 5 resume el significado físico de los “nuevos” números adimensionales que proporciona la discriminación. La aplicación directa de la discriminación al proceso de adimensionalización de ecuaciones diferenciales se recoge en el capítulo 6. Por último, capítulo 7, se compara el análisis de escala con el análisis dimensional discriminado para estudiar las similitudes y diferencias entre ambas técnicas. Una detallada lista de referencias bibliográficas se incluye al final del texto.

Notas para su lectura

En relación con la **nomenclatura** utilizada, las letras mayúsculas en cursivas utilizan para designar las magnitudes de la base dimensional. Las llaves {} denotan la base dimensional y las magnitudes que contiene son las elegidas para la base propuesta. Los corchetes [] denotan la ecuación de dimensiones de la magnitud que encierran. En general se eligen letras minúsculas cursivas para las características físicas del medio y letras minúsculas no cursivas para las magnitudes físicas y las constantes. Las variables de posición se escriben, indistintamente en letras cursivas y no cursivas. En cuanto a los subíndices, su significado responde a lo mencionado en la sección “nomenclatura”. Sin embargo, en los ejemplos a lo largo del texto, se les han atribuido significados especiales que se explican puntualmente en los mismos.

Acerca de los **conocimientos previos** el alumno o lector debe conocer la técnica de aplicación del análisis dimensional: deducción de la base dimensional, determinación de las ecuaciones de dimensión y aplicación del teorema de **Pi**. El conocido texto Buckingham [1914], o mejor el más moderno de Palacios [1964], pueden considerarse textos adecuados de introducción para aquellos que quieran repasar estos temas. El capítulo 2 constituye, asimismo, una introducción básica a los conceptos relacionados con el análisis dimensional clásico.

En cuanto al **orden de la lectura**, el capítulo 1 da acceso directo a cualquiera de los capítulos 3 o 4. El capítulo 5 debe estudiarse tras la lectura de los dos anteriores. Para una completa comprensión de los capítulos 6 y 7 (el último puede considerarse una extensión del anterior) conviene leer previamente los anteriores 3 y 4.

Esta página se ha dejado intencionadamente en blanco

Nomenclatura

AE	Análisis de escala
ADC	Análisis dimensional clásico
ADD	Análisis dimensional discriminado
c_e	calor específico (J/kg K)
c_e'	calor específico volumétrico ($J/m^{-3}K$), $c_e' = \rho c_e$
Fo	número de Fourier, $Fo = \alpha t l^o$ enthalpía específica (J/kg)
k	coeficiente de transferencia de calor (Wm^{-2})
k	conductividad térmica ($Wm^{-1}K^{-1}$)
l	longitud(m)
Nu	número de Nusselt, $Nu = h l/k$
p	presión (N/m^2)
Pr	número de Prandtl, $Pr = \nu/\alpha$
Re	número de Reynolds, $Re = (vl)/\nu$
s	entropía específica ($J/kg K$)
t	tiempo (s)
u	energía interna específica (J/kg)
v	velocidad (m/s)
W	energía mecánica (J)
x, y, z	coordenadas espaciales (m)
α	difusividad térmica (m^2/s)
δ	espesor de capa límite (m)
δ_{ik}	delta de Kronecker
μ	viscosidad dinámica ($kg/m s$)
θ	temperatura (K)
ρ	densidad (kg/m^{-3})

ν	viscosidad cinemática (m^{-2}/s)
σ'	componente del tensor de esfuerzos asociado a las fuerzas de presión (N/m^2)
σ	tensor de esfuerzos (N/m^2)
ξ	radio de curvatura (m)
\propto	proporcional
[]	para expresar la ecuación de dimensiones
{}	para expresar la base dimensional
$\langle \rangle$	para expresar la lista relevante de variables

Letras mayúsculas cursivas (para las magnitudes de la base dimensional):

L	longitud
M	masa
T	tiempo
Q	energía transportada en forma de calor
θ	temperatura

Subíndices:

x, y, z	direcciones espaciales
ADC	referido al análisis dimensional clásico
ADD	referido al análisis dimensional discriminado
	alusivo a una dirección paralela a la velocidad de las partículas de fluido o a los planos deslizantes del mismo
⊥	ídем a una dirección perpendicular a los planos deslizantes o a estos mismos planos

Superíndices:

*	asigna el carácter de valor característico
---	--

La discriminación: una extensión fundamental y necesaria del análisis dimensional clásico

1.1 Introducción

Históricamente, el análisis dimensional conocido al que llamaremos “análisis dimensional clásico” (ADC, de aquí en adelante), se ha considerado como un primer paso que, con poco esfuerzo intelectual, permite abordar el estudio de numerosos problemas complejos de ciencias e ingeniería. Los mayores frutos de esta técnica se han logrado en los campos de mecánica de fluidos y transmisión de calor en su doble vertiente de búsqueda de grupos adimensionales, que permiten reducir el número de variables independientes que intervienen en la solución del problema, y de la aplicación de estos grupos para establecer la semejanza en el estudio de modelos (aspecto que no se expondrá en este texto). Podría decirse que se trata de una técnica de análisis que permite, en un tiempo mínimo, estimar una primera aproximación a la solución del problema sin necesidad de resolverlo en detalle e incluso, quizás, sin tener que formular las ecuaciones de gobierno. El análisis dimensional reduce al mínimo los grados de libertad de un problema, sugiriendo así las leyes de escala más económicas e inmediatas. Otra de las ideas principales que subyace en esta teoría, íntimamente relacionada con el teorema de Buckingham [1914], es que el resultado de un problema es independiente del sistema de unidades elegido para expresarlas.

Antiguos y recientes trabajos han tratado de obtener resultados a partir de esta técnica en otros campos de la ciencia tales como economía (gestión de inventarios e investigación de operaciones), de Jong [1967] y Vignaux [1986]; biología y medicina, Gunther [1975], McMahon y Bonner [1983], Stephens y Dunbar [1993], Tennekes [1997], Charnov y Skuladottir [2000], Hutchinson y García [2002] y Prothero [2002], psicología y ciencias del comportamiento, Lehman y Craig [1963] y Dodd [1963], y física moderna y astrofísica, Wilczek [1999] y Kurth [1972].

El interés sobre el análisis dimensional no ha decaído con el paso del tiempo, a pesar de que haya sido desplazado, en determinados textos de nivel, por técnicas más precisas analíticas, empíricas y semianalíticas. Más bien, al contrario, de forma continuada hasta estos últimos años, siguen publicándose y reeditándose libros sobre este tema; por ejemplo, Lin y Segel [1974], que estudian la relación del análisis dimensional con otros métodos de análisis, Taylor [1974], Sedov [1993], Jacoby [1991], González de Posada [1994], Barenblatt [1996], Sonin [2001], Herranz y Arenas [1989 y 2003] y Szirtes [2007]. Más aún, algunos autores como Hart [1994] y Kasprzak y col. [1990] tratan de construir una teoría matemática del análisis dimensional.

También son muchos los profesores que incluyen el análisis dimensional como un aspecto esencial de su docencia en ciencias e ingeniería, y que han desarrollado, para sus alumnos, resúmenes o programas sobre este tema que han colgado en la web, S. Brückner: J. F. Price y A. A. Sonin.

Sin embargo, a pesar de su uso extendido en el campo de la ingeniería, los resultados que proporciona el ADC son bastante limitados en problemas de cierto nivel. La causa fundamental de esta limitación estriba en que el ADC se ha estructurado históricamente como una teoría escalar; sin tener en cuenta, de

~~manera explícita que el carácter vectorial de la mayoría de las magnitudes físicas el ADC es una teoría que “no discrimina” ni el carácter vectorial inherente a la mayor parte de las magnitudes físicas, ni el carácter tensorial de gran parte de las características físicas de los medios materiales.~~

Durante décadas la aplicación del ADC, en los textos más extendidos al alcance de los estudiantes, ha asumido esta hipótesis “escalar” y solo cuando los resultados experimentales correspondientes a un problema específico han demostrado que los números adimensionales que proporcionaba no eran adecuados como grupos de variables que juegan un papel independiente en el problema, se adoptaban combinaciones de dichos números con otras magnitudes (del problema) para formar nuevos grupos adimensionales (monomios π) con los que expresar la solución de forma correcta. En este sentido, por ejemplo, es fre-

~~cuente encontrar el número de Reynolds (Re) en numerosas representaciones gráficas en mecánica de fluidos multiplicado por un cociente de longitudes características del problema. Lo mismo ocurre con el número de Nusselt (Nu) en el campo de la transferencia de calor. Sin embargo, la intervención de este tipo de agrupaciones no se justifica adecuadamente desde la perspectiva del análisis dimensional clásico.~~

Comentarios de índole similar cabe indicar en relación con el significado físico de los números adimensionales, tema que en muchos textos se trata sin el rigor adecuado. Es frecuente asignar a estos números el significado físico de un balance de fuerzas o energías sin la debida justificación, pues no se indica la región o el

dominio físico del proceso donde se aplican dichos balances. Se trata de un aspecto sobre el que algunos autores, como Arpaci y Larsen [1984] y Bejan [1995], manifiestan su discrepancia con las interpretaciones clásicas de ciertos números, tales como Re, Nu, etc.

Con todo, el concepto de discriminación, que arroja luz definitiva sobre estos controvertidos aspectos del ADC, no es ni mucho menos nuevo. Fue introducido de manera formal a mediados del siglo pasado por Palacios [1955, 1964], pero su difusión a nivel internacional y de manera sorprendente fue escasa y quedó circunscrita, prácticamente, a profesores y colegas de su entorno, quienes han aplicado este concepto a nuevos problemas, Herranz y Arenas [1989, 2003]. El texto de Palacios, cuya edición en castellano [1955] es ligeramente diferente a la edición en lengua inglesa [1964], contiene numerosos problemas en todas las disciplinas científicas (mecánica, termodinámica, electricidad y magnetismo, física cuántica...). Muchos de ellos (solo en los campos de mecánica de fluidos y termodinámica) han sido estudiados de nuevo por sus colegas Herranz y Arenas, quienes los han completado en algunos aspectos usando la discriminación en diferentes sistemas de coordenadas, siempre bajo la misma óptica en relación con el concepto de discriminación. Para estos autores y para Palacios, la discriminación está asociada al concepto de “medida” y se aplica solo a las variables espaciales. Fuera de este ámbito se pueden encontrar algunas contribuciones de tipo individual, tanto antiguas, Chida y Katto [1976], como recientes, Martynenko y Khramtsov [2005].

En los textos de Herranz y Arenas [1989] se aplica el análisis dimensional discriminado (ADD) a problemas de mecánica de fluidos y de transmisión de calor poniendo de manifiesto consistentemente los aspectos que atribuyen al ADD características novedosas de mayor potencialidad en relación con el ADC. En general, la aplicación de ADD por estos autores conduce a un menor número de monomios independientes en la solución de los problemas. Además, en algunos casos se asigna un significado físico a determinados números adimensionales como balance entre energía mecánica y energía calorífica. Sin embargo, no siempre se justifica en estos textos que el uso de la discriminación conduzca invariablemente a una mejor solución del problema, aspecto de interés esencial para nosotros.

Como se verá más adelante existen problemas en los que, gracias a la simetría de revolución, el uso del ADC conduce a la misma solución que el ADD, merced a una simplificación asociada a la existencia de proporcionalidad numérica entre variables del problema, lo que significa que una de ellas se suprime de la lista de variables relevantes en el ADC (se trata de variables del mismo orden de magnitud que darían lugar a factores, de forma que desaparecen al eliminar una de las variables). A nuestro modo de ver, una de las claves para aplicar correctamente el análisis dimensional es “justificar” formalmente, mediante razonamientos puramente físicos, la inclusión de todas y cada una de las magnitudes en la lista de variables relevantes del problema.

Un ejemplo. En el movimiento de una esfera en el seno de un fluido con formación de capa límite se han de considerar las variables radio de la esfera, R , y extensión de la capa límite (arco de esfera), s , por separado (véase su justificación en el Capítulo 3). El ADC proporciona inmediatamente un factor de forma, s/R , factor que en muchos textos no aparece, pues se ha eliminado injustificadamente el arco de la lista de variables relevantes del problema.

En este primer capítulo incluimos una sucinta pero completa revisión histórica del análisis dimensional y presentamos la solución de algunos problemas tipo que ponen de manifiesto las deficiencias del método en cuanto a los resultados que aporta (gran número de monomios adimensionales o factores de forma) cuando el número de variables involucradas es grande, bien a causa de los diferentes tipos de procesos que tienen lugar, bien a causa de la compleja geometría del problema. Posteriormente, se introduce el concepto de discriminación en su concepción más general, que transciende de su relación con la medida como afirman Palacios [1955, 1964] y Herranz y Arenas [1989, 2003]), indicando de manera pormenorizada las ventajas que presenta frente al ADC en todo tipo de problemas de cierta complejidad. Se finaliza el capítulo con una exposición del tratamiento que dan al tema de análisis dimensional los textos más conocidos de mecánica de fluidos, de transmisión de calor y de fenómenos de transporte.

Para finalizar se introduce al alumno o lector en el método de la adimensionalización de ecuaciones utilizando la discriminación, una técnica aparentemente ajena al análisis dimensional pero que sin embargo, invariablemente, conduce a los mismos grupos adimensionales que el ADD. La relación entre ambas técnicas permite determinar el orden de magnitud de las variables incógnitas, un tema sobre el que el ADC proporciona una información claramente ambigua.

Como se pondrá de manifiesto a lo largo del texto, la idea de discriminación, que subyace en todos los fenómenos físicos, permite interrelacionar, y hasta cierto punto equiparar, técnicas tan aparentemente distintas como el análisis dimensional y los procesos de adimensionalización de las ecuaciones.

Con la discriminación, los grupos formados por el AAD son los mismos que los derivados de la adimensionalización (discriminada) y éstos, a su vez, constituyen siempre un balance entre magnitudes del problema (fuerzas o energías, según la ecuación de que se trate). La única diferencia reside en que para adimensionalizar se requiere conocer el modelo matemático y para aplicar el AD se requiere conocer la lista de variables relevante del problema. Sin embargo, conocer esta lista con exactitud implica conocer los fenómenos que tienen lugar en el problema lo que, a su vez, ciertamente, permitiría escribir las ecuaciones del modelo, y viceversa. Esta relación no es posible establecerla sin la idea de discriminación.

1.2 Aplicación del análisis dimensional. Lista de variables relevantes

Remitimos a un texto básico de análisis dimensional para que el alumno o lector no familiarizado con esta técnica, en su vertiente de búsqueda de números adimensionales a partir de la lista relevante de variables, adquiera las nociones fundamentales inherentes a esta teoría: magnitudes primarias y secundarias, fundamentales y derivadas, bases dimensionales, ecuaciones dimensionales y teorema d^{er}. Uno adecuado podría ser el *Análisis Dimensional* de Palacios [1964].

El proceso clásico de aplicación del análisis dimensional no requiere conocer de antemano las ecuaciones de gobierno del problema, si bien es indispensable un profundo conocimiento de las leyes básicas y de los propios fenómenos que tienen lugar en el mismo, aspectos que permiten deducir el conjunto de parámetros (datos relevantes del problema referidos a la geometría y las condiciones de contorno e iniciales) y propiedades físicas relevantes, así como sus ecuaciones dimensionales. Todos los autores clásicos y modernos inciden, obviamente, en que los resultados del análisis dimensional dependen de la lista adoptada de variables relevantes: Palacios [1964], Smits [2000], Szirtes [2007], etc. No se trata de un tema baladí, como veremos más adelante. Para establecer correctamente esta lista es necesario conocer los fenómenos físicos que acontecen. Potter y Wiggert [1997], por ejemplo, dicen textualmente: “[...] no está claro, sin embargo, qué parámetros deberían ser incluidos en la lista relevante de variables. La selección de estos parámetros requiere una detallada comprensión de los fenómenos físicos envueltos. [...] debería considerarse que la selección de los parámetros apropiados es el paso primero y crucial para la aplicación del análisis dimensional”.

Por un lado, la inclusión de cada una de las variables características ha de estar justificada, debidamente, por la influencia que sus valores concretos ejercen en la solución o patrón de soluciones del problema; la discriminación permite incluir la misma magnitud más de una vez si los fenómenos a los que está asociada tienen lugar en diferentes direcciones espaciales. Por otro lado, la inclusión

de las propiedades físicas, generalmente de carácter tensorial o vectorial, está justificada por las leyes que intervienen en el fenómeno y que contienen y definen estas propiedades. El carácter vectorial o tensorial de ciertas constantes cuando se aplica la discriminación (como se verá más adelante) obliga a introducirlas más de una vez, asociándolas a cada dirección del espacio, pues tienen ecuaciones dimensionales diferentes. Por otro lado, la geometría del cuerpo debe quedar completamente definida en relación con su influencia en el proceso. Es frecuente especificar, por ejemplo, la geometría de una esfera mediante su radio, lo que la hace indistinguible geométricamente de otro cuerpo como el cubo; así, con discriminación es preciso añadir nuevas variables geométricas que especifiquen

completamente el cuerpo, lo que permite obtener la mejor solución posible. Una vez bien establecida es la llamada lista relevante de variables, la aplicación del teorema de π conduce a la obtención de los grupos adimensionales que son argumentos de las funciones de las que dependen las magnitudes incógnita buscadas.

En ocasiones ocurre que la aplicación del teorema de π expulsa alguna de las variables de la lista relevante. Sin duda se trata de una casualidad, digamos “dimensional” y que la expulsión de dicha variable ha sido fortuita. Lo normal es que la introducción de variables inadecuadas conduzca a resultados falsos. En todos los problemas estudiados en los capítulos 3 y 4 se comprueba que una precisa selección de variables conduce siempre a resultados correctos.

La obtención del orden de magnitud de las magnitudes ocultas se logra por la introducción de estas en la lista de variables relevantes del fenómeno considerado (que no ha de coincidir necesariamente con la lista completa de variables relevantes del problema cuando concurren simultáneamente varios fenómenos físicos) aplicando el teorema de π . Su significado, muchas veces deducido a posteriori, se extrae del propio monomio formado. Adviértase que la propia selección de la lista de variables (deducida generalmente bajo la asunción de ciertas hipótesis) induce a la existencia de estas magnitudes ocultas sin necesidad de considerar dichas hipótesis. Dicho de otro modo, solo existirán magnitudes ocultas si se han asumido ciertas hipótesis que conducen invariablemente a una determinada lista de variables relevantes. O también, si una determinada lista de variables relevantes conduce a la obtención de determinadas magnitudes ocultas, podemos asegurar la existencia de ciertas hipótesis en el problema.

Así pues, la búsqueda de variables ocultas se convierte quizás en el primer paso para obtener soluciones mediante el análisis dimensional ya que, por una parte, supone un primer conocimiento del orden de magnitud de ciertas magnitudes características no explícitas en el enunciado del problema y, por otra, puede ayudar a definir magnitudes de referencia que intervengan en la adimensionalización de otras magnitudes o a interpretar correctamente los balances del problema.

Para la búsqueda de cualquier otro tipo de variables se procede de igual modo. Si, en particular, esta depende de las coordenadas independientes (posición y tiempo), deben introducirse estas últimas, obviamente, en la lista de variables relevantes.

Según la elección de una base adecuada se seguirán las reglas indicadas en Palacios [1964] y se tendrá en cuenta la discriminación.

En síntesis, la correcta aplicación del análisis dimensional que permita alcanzar los resultados más precisos se puede concretar en las siguientes etapas:

- Primera** **Encuadrar el problema en una teoría física** y adoptar una base dimensional deducida de sus leyes fundamentales. La base ha de ser completa y sus magnitudes dimensionalmente independientes.
- Segunda** **Seleccionar la lista de variables relevantes**, incluidas las geométricas, a partir de las leyes físicas (fundamentales y constitutivas) envueltas en el

proceso, para lo que se requiere un considerable juicio físico y cierta experiencia. Incluir también las constantes universales y características necesarias. La lista debe ser completa y estricta (ni una más ni una menos de las necesarias), pero sin restricciones en cuanto a la elección de magnitudes, tales como ángulos o superficies. La geometría de los cuerpos que intervienen, así como los dominios de problema, han de especificarse adecuada y completamente según su influencia en problema.

- Tercera** **Discriminar las variables** y deducir las fórmulas dimensionales de estas en la base elegida.
- Cuarta** **Aplicar el teorema de π** para obtener el número y la forma de los monomios adimensionales independientes que puede formarse con las variables de la lista.
- Quinta** **Expresar la solución del problema** en función de los monomios deducidos.

Es frecuente buscar magnitudes incógnitas cuyo valor depende de dos o más fenómenos físicos independientes. Por ejemplo, la tensión del hilo de un péndulo simple en movimiento, cuando pasa por el punto más bajo depende (separadamente)

del peso colgante y de la velocidad (o del desplazamiento angular máximo), por lo que estas dos influencias deben determinarse por separado, y después sumarse para dar la tensión del hilo. Lo mismo ocurre con la fuerza derrastre sobre una esfera que se mueve a una velocidad constante en el seno de un fluido en reposo; dicha fuerza es la suma de la debida a efectos viscosos y la debida a efectos de inercia y, al igual que antes, cada componente ha de calcularse por separado y después determinar la fuerza total como suma de estas componentes. Este aspecto podría considerarse como una etapa más a la hora de aplicar correctamente el análisis dimensional.

1.3 Revisión crítica del concepto y las aplicaciones del análisis dimensional clásico. Significado de los números

adimensionales clásicos

Aunque ya en el Renacimiento y la Edad Media, incluso en la Antigua Grecia, se usaban algunos de los conceptos precursores de lo que hoy se conoce como análisis dimensional, tales como el significado de las magnitudes, la medida, las operaciones entre números representativos de diversas magnitudes, magnitudes primarias y derivadas, etc., no es hasta los siglos XVIII, XIX, con la discusión de Euler (Macagno [1971]) acerca de la homogeneidad dimensional, y XIX, con el establecimiento de los fundamentos del análisis dimensional por Fourier [1822] en su *Teoría analítica del calor*, cuando se asientan los fundamentos de esta técnica. Posteriormente, cabe

citar a un gran número de autores que han desarrollado otros aspectos puntuales de esta teoría, tales como Vaschy [1892], Riabouchinsky [1911] y Buckingham [1914, 1921], así como otros que han contribuido y tratado de construir una teoría global de análisis dimensional, tales como Rayleigh [1915], Bridgman [1922,1937], Langhaar [1951], Le Corbeiller [1966], Palacios [1964] y Drobot [1954]. Una interesante revisión histórico crítica hasta 1971, que incluye referencias al tema desde la propia Grecia, se recoge en el trabajo de Macagno citado anteriormente.

Son numerosos los libros de texto, clásicos y modernos, de ciencias e ingeniería que, en mayor o menor grado, enseñan y aplican el ADC en las disciplinas de mecánica de fluidos y de transmisión de calor. Entre estos mencionaremos los de Gröber y Erk [1967], Arpacı y Larsen [1984], Lienhard [1987], Kay y Nedderman [1990], Kreith y Bohm [1997], Baehr y Stephan [1998], Mills [1999], Kessler y Grenkorn [1999] y Martynenko y Khramtsov [2005]. Aunque las soluciones que proporciona el análisis dimensional clásico siempre son correctas, los resultados obtenidos en problemas de cierta complejidad son ciertamente pobres debido al gran número de monomios adimensionales y de factores de forma a los que conduce su aplicación. Quizás sea esa la razón por la que otros textos modernos no hacen referencia alguna al AD, aunque trabajen con muchos de los números adimensionales clásicos conocidos; por ejemplo, los textos de Ghebart y col. [1988], Kays y Crawford [1993], Özisik [1993], Incropera y DeWitt [1996], Holman [1997] y Rohsenow y col. [1998].

Cabe aplicar estos comentarios, asimismo, a la literatura científica que, general, da por buenos los resultados que el ADC ha proporcionado desde antiguo y que trabaja con sus números adimensionales u otros derivados de su combinación con otras variables del problema que la experiencia ha demostrado más idóneos. En los textos anteriores pueden encontrarse numerosas referencias a la literatura científica que hacen uso explícito de los resultados del ADC. Entre los trabajos que utilizan el análisis dimensional como técnica para obtener soluciones de problemas citaremos a:

- Remillard [1983] que emplea la teoría de matrices para mejorar la aplicación del teorema de π , aplicando estos procedimientos a problemas de aerodinámica y fluidos.
- Price [2002], que lo aplica a la teoría de modelos.
- Bohren [2003], que muestra con ejemplos ilustrativos la aplicación de esta técnica a la determinación de errores asociados a la simplificación de fórmulas físicas.
- Rajesh y Bijwe [2004], que aplican el análisis dimensional a problemas mecánicos de fricción.
- Pelesko, Cesky y Huertas [2004], que resuelven problemas de electromagnetismo.
- Hilfer y Helming [2004], que estudian problemas de flujo en medios porosos.
- Sonin y Huber [1978], Chun y Sonin [1985], Anderson y col. [1978] y Chiang [2004] que aplican el análisis dimensional a problemas de transferencia de calor.

- Song y Han [2005], Lokarnik [1991] y Hristov [2004-2007] que lo aplican a problemas en reactores y a otras cuestiones de ingeniería química.

Todos estos autores aplican el análisis dimensional en su concepción clásica (no discriminada).

Es importante mencionar también los trabajos de Adiutori [1982], un investigador que, explícitamente, rechaza la idea fundamental que subyace en el ADC: “la homogeneidad dimensional de los términos de las ecuaciones físicas”. Las ideas de Adiutori acerca de esta teoría “no homogénea” despertaron gran interés en su momento y fueron publicadas en las cubiertas de varias ediciones de la revista *Journal of Heat Transfer* [1989]. Para Adiutori, las leyes de enfriamiento de Newton, $j'' = h(\Delta\theta)$, y de conducción de calor de Fourier, $j = k(d\theta/dx)$, introdujeron artificialmente los coeficientes de transferencia de calor, h , y de conductividad térmica, k , respectivamente; coeficientes que no eran necesarios en su singular teoría.

A pesar del nivel avanzado de los textos mencionados, la aplicación del AD a la transmisión del calor se realiza según los casos partiendo de bases dimensionales de diferente multiplicidad. Por ejemplo, en transferencia de calor por convección se usa una base compuesta por 4 o 5 magnitudes, $\{L, M, T, \theta\}$ y $\{L, M, T, Q, \theta\}$, sin justificar formalmente cuándo se adopta una u otra. Así, McAdams [1954] usa la base $\{L, M, T, \theta\}$, mientras que Chapman [1960] y Gröber y Erk [1967] usan la base $\{L, M, T, Q, \theta\}$. Esta controversia también existe entre los primeros especialistas; así Bridgman [1922] usa la base de McAdams, mientras que Huntley [1952] usa la de Chapman y Gröber y Erk.

El ADC, tal como se ha recogido en los textos anteriores, no distingue ni el carácter vectorial de muchas magnitudes físicas (velocidad, aceleración, fuerza...), ni el carácter tensorial de muchas propiedades físicas de la materia (conductividad térmica, viscosidad, difusividad...). Una consecuencia directa de esta falta de discriminación es el gran número de monomios adimensionales que forman parte de la solución de muchos problemas de dificultad media y grande. Otra consecuencia es que, al no existir asociación entre las fuerzas o energías que intervienen en el problema con las direcciones espaciales en las que estas se manifiestan, es casi imposible relacionar los números adimensionales con balances de fuerzas o energías en los mismos dominios físicos. Es decir, estos balances suelen establecerse entre dominios diferentes del medio, lo que no tiene sentido desde el punto de vista físico. Veamos algunos ejemplos.

Ejemplo 1.1

La sección del conjunto aleta-recta-pared de la Figura 1.1, de un material anisotropo, está en contacto a un foco caliente en su cara AB y a un foco frío en sus caras CD, DE y EF; transmitiéndose calor por convección en dichas superficies. Las caras BC y AF, superficies de simetría del conjunto, son adiabáticas. Deduzca

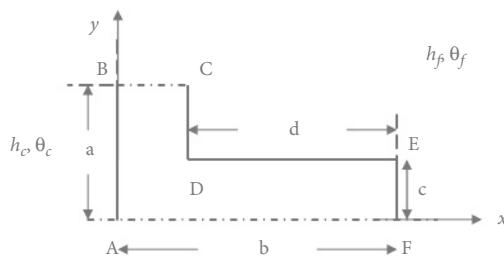


Figura 1.1 Conjunto aleta-recta-pared

los parámetros adimensionales independientes que caracterizan el proceso térmico en estado estacionario.

Solución

Partimos del siguiente conjunto relevante de variables independientes:

Magnitudes geométricas: a, b, c, d

Magnitudes térmicas: h_c, h_{fx}, h_{fy} (coeficientes de transferencia de calor de los focos caliente y frío), k_x, k_y (conductividades térmicas en las direcciones x e y)

ΔT_{fc} (diferencia de temperatura foco frío-foco caliente)

Con el fin de generalizar el proceso se consideran dos coeficientes de transmisión del calor distintos asociados al foco frío: uno relativo a las superficies verticales (CD y EF) y otro a la superficie horizontal (DE). El conjunto relevante de variables es, pues, $\{a, b, c, d, h_c, h_{fx}, h_{fy}, k_x, k_y, \Delta T_{fc}\}$. No se han incluido magnitudes como el calor específico, la densidad y la temperatura inicial, pues no juegan papel alguno en la solución del campo térmico estacionario. En la base dimensional $\{T, Q, \theta\}$ estas magnitudes tienen los exponentes dimensionales mostrados en la Tabla 1.1

Entre los posibles grupos de monomios adimensionales independientes que proporciona la aplicación del teorema de Π seleccionamos el siguiente (que incluye tres factores de forma):

$$\Pi_1 = \frac{b}{a} \Pi_2 = \frac{c}{a} \Pi_3 = \frac{d}{a} \Pi_4 = \frac{h_{fx}}{h_{fy} k_x} \Pi_5 = \frac{h_{fy}}{k_y} \Pi_6 = \frac{k_x}{k_y} \Pi_7 = \frac{h_c a}{\Delta T_{fc}}$$

Tabla 1.1 Exponentes dimensionales de las variables

	abcd				h_c	h_{fx}	h_{fy}	k_x	k_y	ΔT_{fc}
L	1111				-2	-2	-2	-1	-1	
T					-1	-1	-1	-1	-1	
Q					11111					
θ					-1	-1	-1	-1	-1	1

Así, desde el punto de vista del ADC, estos son los monomios adimensionales independientes que intervendrán como argumentos en la solución del problema. Cualquier magnitud incógnita (adimensional) como la distribución de temperatura estacionaria o el calor disipado depende de estos parámetros. En efecto, para determinar el campo térmico estacionario, $T = T(x,y)$, hemos de incluir en la lista anterior la variable incógnita y las coordenadas espaciales (x,y) . Los exponentes dimensionales de las variables de la nueva lista, $\langle a, b, c, d, x, y, h^c, h^{fx}, h^{fy}, k, \Delta T_{fc}, T \rangle$, se recogen en la Tabla 1.2.

Tabla 1.2 Exponentes dimensionales de las variables

	abcd	x	y	h_c	h_{fx}	h_{fy}	k_x	k_y	ΔT_{fc}	T
L	111111			-2	-2	-2	-1	-1		
T				-1	-1	-1	-1	-1		
Q				11111						
θ				-1	-1	-1	-1	-1	1	1

La inclusión de las nuevas magnitudes proporciona tres nuevos monomios,

$$\pi_8 = \frac{x}{a}, \quad \pi_9 = \frac{y}{a}, \quad \pi_{10} = \frac{T}{\Delta T_{fc}}$$

y la solución del problema es

$$\frac{T}{\Delta T_{fc}} = f\left(\frac{b}{a}, \frac{c}{a}, \frac{d}{a}, \frac{x}{a}, \frac{y}{a}, \frac{h_{fx}}{h^c}, \frac{h_{fy}}{k}, \frac{k_x}{k_y}, \frac{h_c a}{x}\right)$$

donde f es una función indeterminada de los argumentos indicados. Es evidente que la contribución del ADC a este problema (ciertamente elegido a propósito) es prácticamente nula y no sirve de mucho al investigador. Por ejemplo, el monomio $\Pi_y = h_c a / k_x$, cuya forma se identifica con la de un número de Biot, Bi, podría haberse presentado de modo diferente, combinando cualquiera de las longitudes con un coeficiente de convección y la conductividad térmica, con independencia

de que la combinación elegida tenga o no significado físico.

Ejemplo 1.2

El estudio de la aleta simple, recta rectangular anisótropa, mostrada en Figura 1.2, es una variante más simplificada del problema anterior. Las condiciones de contorno son isoterma en la base de la aleta (sección AB) y de convección en su superficie lateral (BC) y en su extremo (CD). La sección AD (adiabática) es de simetría. Estudie las aportaciones del ADC a la solución de campo térmico estacionario de esta aleta.

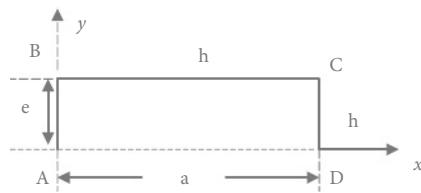


Figura 1.2 Aleta recta rectangular

Solución

Partimos del siguiente conjunto relevante de variables:

Magnitudes geométricas: a, e

Magnitudes térmicas: $h_x, h_y, k_x, k_y, \Delta T_o$ (diferencia de temperatura entre la temperatura de la base T_o y la temperatura del fluido lejos de la superficie de convección T_f)

La tabla formada por los exponentes dimensionales, en la base $\{L, T, Q, \theta\}$, es:

Tabla 1.3 Exponentes dimensionales de las variables

	a	e	h_x	h_y	k_x	k_y	ΔT_o
L	1	1	-2	-2	-1	-1	
T			-1	-1	-1	-1	
Q			1111				
θ			-1	-1	-1	-1	1

y da lugar (por aplicación del teorema de π) a cuatro monomios adimensionales independientes,

$$\Pi_1 = \frac{e}{a} = \Pi_2 \frac{h_x}{h_y}, \quad \Pi_3 = \frac{h_x}{k_y}, \quad \Pi_4 = \frac{h_y}{k_x} \quad Bi$$

Siguiendo el ejemplo anterior, para determinar la distribución de temperaturas, $\theta(x, y)$, añadiremos al cuadro anterior la variable $\Delta\theta = \theta(x, y) - \theta_i$ y las coordenadas espaciales x e y , Tabla 1.4.

El conjunto independiente de monomios es ahora

$$\Pi_1 = \frac{e}{a}, \quad \Pi_2 = \frac{h_x}{h_y} \Pi_3 = \frac{k_x}{k_y} \Pi_4 = \frac{h_y}{k_x} \Pi_5 = \frac{h_y a}{k_x^2} \Pi_6 = \frac{x}{a}, \quad \frac{y}{a}, \quad \frac{\Delta\theta}{\Delta T_o}$$

y proporciona la solución (algo más precisa que la del ejemplo anterior)

$$\frac{\Delta T}{\Delta T_o} = f \left(\frac{e}{a}, \frac{x}{a}, \frac{y}{a}, \frac{h_x}{h_y}, \frac{k_x}{k_y}, \frac{h_y a}{k_x} \right)$$

Tabla 1.4 Exponentes dimensionales de las variables

	a	e	x	y	h_x	h_y	k_x	k_y	ΔT_o	ΔT
L	1111				-2	-2	-1	-1		
T					-1	-1	-1	-1		
Q					1111					
θ					-1	-1	-1	-1	1	1

Ejemplo 1.3

Estudiar la aleta recta 1-D del Ejemplo 2 en los casos: (i) aleta de longitud “muy” larga; (ii) aleta de longitud muy larga y de espesor despreciable.

Solución

(i) La consideración de aleta muy larga significa que la disipación de calor ocurre en una pequeña parte de la misma cercana a la base y, por tanto, k_y no interviene, ya que el extremo de la aleta se encuentra a la misma temperatura que el fluido. La longitud a, Figura 1.2, no cabe introducirla en la lista de variables y, por ser el problema 1-D, tampoco intervienen k_y . Por consiguiente, la lista relevante se reduce al conjunto $\langle e, x, h_y, k_x, \Delta T, \Delta T_o \rangle$. Con el cuadro de exponentes dimensionales de la Tabla 1.4, la solución es

$$\frac{\Delta T}{\Delta T_o} = f \left(\frac{x}{e}, \frac{h_c a}{k} \right)$$

Si se desea encontrar una longitud característica, l^* , relacionada con la extensión de la aleta en donde existen gradientes de temperatura apreciables se obtendría la solución

$$l^* = f \left(\frac{x}{e}, \frac{h_c a}{k} \right)$$

(ii) Se elimina a, pero no puede eliminarse e aunque sea despreciable (pero no nula), ya que define la superficie de conducción del calor a lo largo de la aleta. La solución es la misma que en el caso anterior.

Puede apreciarse, como es obvio, que las soluciones del ADC son más precisas conforme aumenta el número de hipótesis simplificadoras del problema. En el Capítulo 2 se volverá a estudiar esta aleta bajo la perspectiva del ADD.

Ejemplo 1.4

Parámetros que caracterizan la transmisión de calor en una aguja larga de sección circular, Figura 1.3.

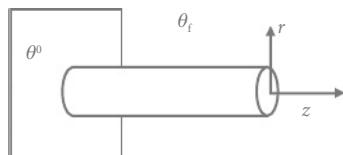


Figura 1.3 Aguja de sección circular

Con el término “larga” quiere indicarse que únicamente se produce transferencia de energía calorífica en una región limitada de la misma.

Solución

Desde el punto de vista geométrico, la aleta queda completamente definida por su diámetro, d , y por una longitud l^* , que represente la extensión de aleta endirección longitudinal en donde los gradientes de temperatura en esta dirección son apreciables. Desde el punto de vista térmico, hemos de considerar las siguientes variables: diferencia de temperaturas $\Delta T_o = T_o - T_p$, conductividad radial, k_r , conductividad axial, k_z , y coeficientes de transferencia de calor en la superficie lateral y en el extremo, h_{sl} y h_e respectivamente. Estos últimos sehan de incluir con independencia de que su valor numérico sea el mismo, ya que tienen diferentes ecuaciones dimensionales. Así, las variables independientes del problema son $\langle d, l^*, h_{sl}, h_e, k_r, k_z, \Delta T_o \rangle$.

Los exponentes dimensionales de estas variables en la base $\{L, Q, T, \theta\}$ se muestran en la Tabla 1.5.

Tabla 1.5 Exponentes dimensionales de las variables

	d	l^*	h_e	h_{sl}	k_r	k_z	ΔT_o
L	1	1	-2	-2	-1	-1	
T			-1	-1	-1	-1	
Q			1111				
θ			-1	-1	-1	-1	1

Se obtienen cuatro monomios:

$$\Pi_1 = \frac{l^*}{d} \Pi = \frac{k_z}{k_r} \Pi, \quad \Pi = \frac{h_e}{h_{sl}}, \quad \Pi^4 = \frac{h_{sl} l^*}{k_z}$$

En el caso 1-D, el monomio $\Pi_2 = k_z/k_r$ queda excluido. También, si el extremo de la aleta es adiabático, puede eliminarse el monomio $\Pi_3 = h_e/h_{sl}$.

Ejemplo 1.5

Sea un disco de radio R girando con una velocidad angular constante en el interior de un tambor en reposo. La distancia de separación entre la superficie del disco y el tambor z es muy pequeña en comparación con el radio del disco, de manera que el fluido viscoso comprendido entre el disco y el tambor se mueve en régimen laminar. Se desea determinar el momento de rotación, M_z que se ejercerá sobre el disco.

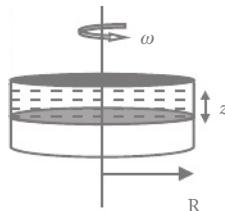


Figura 1.4 Disco en el interior de un tambor

El momento de rotación, M_z es función del radio del disco, R , de la distancia vertical de separación entre el disco y el tambor, z , de la velocidad angular de giro ω , y de la viscosidad del fluido μ . En la base dimensional de la mecánica $\{M, T\}$, los exponentes dimensionales de las variables $\{R, z, \omega, \mu, M_z\}$ se muestran en la Tabla 1.6:

Se pueden formar dos monomios adimensionales independientes

$$\pi_1 = \frac{z}{R}, \quad \pi_2 = \frac{M_z}{\mu \omega R^3}$$

que proporcionan la solución:

$$M_z = \mu \omega R^3 f\left(\frac{z}{R}\right)$$

Tabla 1.6 Exponentes dimensionales de las variables

	R	z	ω	μ	M_z
L	1	1		-1	2
T			-1	-1	-2
M				1	1

Es posible observar cómo el análisis dimensional clásico no puede precisar el modo en que el radio del disco y su distancia de separación con el tambor influyen en el momento de rotación. En el Capítulo 2 mostraremos como el ADD permite especificar la forma de la función indeterminada f y proporcionar un único monomio como solución del problema que permite conocer el orden de magnitud de M_z .

Ejemplo 1.6

Un fluido con una velocidad v^* se pone en contacto paralelamente con una placa horizontal en reposo sinándose un flujo laminar en las proximidades de la placa, Figura 1.5. La interacción mecánica entre los dos medios provoca modificaciones en el campo de velocidades del fluido en las proximidades de la placa. Dichas modificaciones se extienden en dirección perpendicular a ésta hasta una cierta distancia llamada “espesor de la capa límite”. Se desea determinar su orden de magnitud.

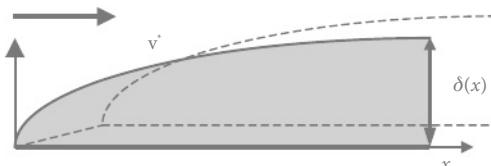


Figura 1.5 Flujo forzado sobre una placa horizontal. Capa límite

Este espesor, δ , es una función de la distancia medida desde el borde de ataque de la placa, x , de la velocidad del fluido no perturbado, v^* , y de las propiedades del fluido densidad, ρ , y viscosidad dinámica, μ . En la Tabla 1.7 se indican los exponentes dimensionales de las variables que intervienen, en la base dimensional empleada habitualmente en mecánica $\{L, M, T\}$.

Tabla 1.7 Exponentes dimensionales de las variables

	x	v^*	ρ	μ	δ
L	1	1	-3	-1	-1
T		-1		-1	
M			1	1	

Se obtienen dos monomios adimensionales:

$$\pi^1 = \frac{\delta}{x}, \quad \pi^2 = \frac{\rho v^* x}{\mu}$$

El monomio $\pi_2 = \rho v^* x / \mu$ tiene la forma de un número adimensional conocido, el número de Reynolds, Re_x . Así, la solución obtenida con el ADC es:

$$\frac{\delta}{x} = f(Re_x)$$

Las soluciones que proporciona el ADC de la mayor parte de los problemas (en los campos de mecánica de fluidos y transmisión de calor) son funciones o correlaciones entre los conocidos números adimensionales clásicos, tales

como Reynolds (Re), Nusselt (Nu), Grashof (Gr), Euler (Eu), etc. De hecho, el ADC proporciona estos números. En muchos casos sin embargo, aunque no sean erróneas, se trata de correlaciones ciertamente confusas desde un punto de vista (estrictamente) físico del problema, ya que no son grupos o números independientes en cuanto a la solución del problema.

Por ejemplo, de acuerdo con muchos autores (Schlichting [2000], Potter y Wiggert [1997]): si el número de Reynolds es relativamente pequeño, el flujo es laminar; si por el contrario es grande, el flujo es turbulento. Pero ¿acaso esta afirmación significa que un aumento de la longitud de la placa x se traduce en un cambio de flujo de laminar a turbulento? Parece evidente, a primera vista, que la respuesta es no. Entonces, ¿cuál es realmente el significado de Re?, ¿qué papel juega, si juega alguno, en relación con el tipo de flujo? ¿Qué puede decir el ADC sobre el significado de Re?

Más aún, no pocos autores, tales como Schlichting [2000], Smits [2000], Potter y Wiggert [1997], Fox y McDonald [1992], Streeter [1985] y Shames [1992], atribuyen a Re el significado de un cociente entre las fuerzas de inercia y las fuerzas viscosas del problema. Si admitimos, como parece adecuado, que el balance de estas fuerzas ha de tener lugar en la zona donde el flujo se ha distorsionado por la presencia de la placa, ¿un aumento de x supone un aumento de la relación “fuerzas de inercia/fuerzas viscosas”? De nuevo, un razonamiento físico inmediato no soporta tal afirmación.

Estas reflexiones referentes al número de Reynolds quizás (¿por qué no?) podrían extenderse a otros números adimensionales clásicos proporcionados por el ADC, como Fr (número de Froude), Cp (coeficiente de presión), Pe (Peclet), Ra (Rayleigh), Gr (Grashof), Nu (Nusselt), f (factor de fricción), C_f (coeficiente de arrastre), etc., cuyos significados de balances en general son aceptados por numerosos textos especializados, ver Tabla 1.8.

Es interesante constatar que no hay concordancia entre los autores a la hora de asignar un significado físico a algunos números adimensionales. Por un lado, existen autores, como Arpacı [1984] que han dedicado gran esfuerzo a esta tarea y que han intentado de asociar estos significados a los balances de los términos de las ecuaciones que rigen los procesos, encontrando con frecuencia significados muy complejos para algunos de estos números. Por otro lado, Van Driest [1946] atribuye significados físicos a los principales números adimensionales relacionados con la convección, y conecta dichos significados con los tipos de regímenes, laminar y turbulento.

Si no son correctas las interpretaciones habituales de estos números, ¿cuál es su verdadero significado físico, si es que lo hay?, ¿cuál es el punto de vista del ADD sobre esta interpretación?

En resumen, podemos afirmar que el principal inconveniente del ADC es que, en los problemas de interés de complejidad media o grande, conduce a un número de monomios mayor que el estrictamente necesario y de significados poco claros, proporcionando en suma una solución poco útil. Esto se debe a dos causas relacionadas entre sí: por un lado, al menor número de magnitudes fundamentales que conforman la base dimensional, y por otro, al propio carácter escalar de la teoría del ADC.

Tabla 1.8 Interpretación de los números adimensionales clásicos según algunos textos

Número o coeficiente adimensional (ADC)	Significado	Textos
Re(Reynolds)	fuerzas de inercia/fuerzas viscosas presión dinámica/tensión o esfuerzo viscoso	Smits [2000] Potter y Wiggert [1997] Shames [1992] Roshenow <i>et al.</i> [1998] Sacadura [1982] Cengel [2004] Thomas [1992] Brodkey y Hershey [1988] Grober y Erk [1967]
Fr(Froude)	fuerzas de inercia/fuerzas gravitacionales	Incropera y De Witt [1996] Smits [2000] Potter y Wiggert [1997] Shames [1992] Fox y McDonald [1992] Roshenow <i>et al.</i> [1998] Brodkey y Hershey [1988]
Cf(coef. de arrastre)	fuerzas de arrastre/fuerzas de inercia fuerzas de corte superficiales/ energía cinética por unidad de volumen del fluido sin perturbar	Smits [2000] Shames [1992] Kreith y Bohn [1997] Potter y Wiggert [1997] Fox y McDonald [1992]
Eu (Euler)	fuerzas de presión/fuerzas de inercia	Potter y Wiggert [1997] Shames [1992]
Cp (coef. de presión)		Smits [2000] Fox y McDonald [1992]
Ro(Rossby)	fuerzas de inercia/fuerzas de Coriolis	Smits [2000]
We(Weber)	fuerzas de inercia/fuerzas de tensión superficial	Shames [1992] Smits [2000] Potter y Wiggert [1997] Fox y McDonald [1992] Roshenow <i>et al.</i> [1998]

(continúa)

Número o coeficiente adimensional (ADC)	Significado	Textos
St(Strouhal)	fuerzas centrífugas/fuerzas de inercia	Smits [2000] Potter y Wiggert [1997]
M(Mach)	fuerzas de inercia/fuerzas de compresión velocidad de flujo/velocidad del sonido	Potter y Wiggert [1997] Shames [1992] Fox y McDonald [1992] Smits [2000] Potter y Wiggert [1997] Shames [1992] Fox y McDonald [1992]
Cl (coef. de elevación)	fuerzas de elevación/fuerzas de inercia	Smits [2000] Potter y Wiggert [1997]
Fo(Fourier)	tiempo adimensional; calor conducido/calor almacenado	Kreith y Bohn [1997] Roshenow <i>et al.</i> [1998] Incropera y De Witt, [1996]
Bi(Biot)	resistencia térmica interna del cuerpo/ídem superficial	Kreith y Bohn [1997] Roshenow <i>et al.</i> [1998]
Nu(Nusselt)	coeficiente de transferencia de calor por convección/ídem por conducción en una capa de fluido de espesor l'	Kreith y Bohn [1997] Burmeister [1995] Thomas [1992] Brodkey y Hershey [1988] Grober y Erk [1967] Incropera y De Witt [1996]
Pr(Prandtl)	difusividad de cantidad de movimiento/ídem térmica	Kreith y Bohn [1997] Sacadura [1982] Thomas [1992] Roshenow <i>et al.</i> [1998] Brodkey y Hershey [1988] Grober y Erk [1967]
Pe(Peclet)	RPr	Smits [2000] Kreith y Bohn [1997] Roshenow <i>et al.</i> [1998] Sacadura [1982] Burmeister [1995] Thomas [1992] Brodkey y Hershey [1988]

(continúa)

Número o coeficiente adimensional (ADC)	Significado	Textos
St(Stanton)	coeficiente de calor adimensional: $\text{Nu}/(\text{Re}\Pr)$	Kreith y Bohn [1997] Sacadura [1982] Thomas [1992] Roshenow <i>et al.</i> [1998] Brodkey y Hershey [1988] Grober y Erk [1967]
Gr(Grashof)	fuerzas de flotación/fuerzas viscosas	Kreith y Bohn [1997] Sacadura [1982] Incropera y De Witt [1996] Cengel [2004] Grober y Erk [1967]
Rd(Rayleigh)	GPr	Kreith y Bohn [1997] Roshenow <i>et al.</i> [1998]
Bo(Boussinesq)	Bo = GPr	Bejan [1984]
Ri(Richardson)	fuerzas de flotación/fuerzas de inercia	Thomas [1992] Bejan [1993]
Jh (coef. de Colburn)	coeficiente de transferencia de calor adimensional	Kreith [1997]
St(Strouhal)	fuerzas centrífugas/fuerzas de inercia	Smits [2000] Potter y Wiggert [1997]
Ec(Eckerct)	energía cinética del fluido sin perturbar / diferencia de entalpías en la capa límite	Kreith y Bohn [1997] Roshenow <i>et al.</i> [1998] Sacadura [1982] Thomas [1992]
Gz(Graetz)	flujo de entalpía/flujo conductor axial	Thomas [1992] Roshenow <i>et al.</i> [1998] Grober y Erk [1967]
Ja(Jacob)	calor sensible/calor latente	Roshenow <i>et al.</i> [1998]
Le(Lewis)	difusividad térmica/difusividad de masa	Roshenow <i>et al.</i> [1998] Incropera y De Witt [1996] Kessler y Greenkorn [1999]
Sc(Schmidt)	difusividad de momento/difusividad de masa	Roshenow <i>et al.</i> [1998] Incropera y De Witt [1996] Kessler y Greenkorn [1999]

1.4 La discriminación: un concepto fundamental y necesario de carácter amplio

En el contexto anterior, la discriminación surge como extensión cualitativa, fundamental y necesaria del análisis dimensional clásico, Madrid y Alhama [2006].

Las primeras ideas sobre discriminación fueron propuestas por Williams [1892]. Más tarde, en la segunda mitad del siglo XX, Huntley [1952] retoma la idea de Williams e introduce el concepto de método de las componentes de las dimensiones fundamentales (*the method of the components of fundamental dimensions*) lo que Runge [1952] llamó dimensiones vectoriales (*vectorial dimensions*). Levy [1946] critica a Runge a través de la traducción que Guillaume [1916] hace de él diciendo que las dimensiones vectoriales no son de utilidad alguna.

Pero sin duda fue Palacios [1964], basándose también en el carácter vectorial de ciertas magnitudes, quien hizo más por establecer formalmente el concepto de discriminación espacial y por aplicar el ADD a un gran número de problemas de ciencia e ingeniería. Palacios matiza: “el ADD aumenta el número de ecuaciones del problema pero trae consigo una disminución en el número de los términos adimensionales resultante haciendo la solución más precisa”. Finalmente, Mills [1995] sugiere una especie

de “análisis dimensional vectorial”, idea y propuesta por Huntley.

Mientras Huntley asume que las dimensiones espaciales deben ser consideradas independientes en la base dimensional (si bien no recoge aplicaciones de esta idea en su texto), sin hacer alusión a la medida, Palacios relaciona formalmente la discriminación con la medida matizando: *If a system of cartesian axes is taken, each equation breaks down into three and in each of these [...] There is then the possibility of using different units for the three components [...] which proves that the quantities L_x , L_y and L_z are dimensionally independent* (Palacios [1964], p. 72). “Si se adopta un sistema de ejes cartesianos, cada ecuación se separa en sus tres componentes y cada una de estas [...] Existe entonces la posibilidad de usar diferentes unidades para cada una de las tres componentes [...] lo que prueba que las magnitudes L_x , L_y y L_z son dimensionalmente independientes”. La edición en castellano de Palacios no se corresponde exactamente con la edición en inglés pero contiene en esencia la

misma idea: “En problemas en que todas las direcciones sean equivalentes, está indicado tomar la misma unidad en todas direcciones, pero en otros casos como sucede en Cristalografía, hay ventajas en utilizar diferentes unidades en cada eje [...] Dichos segmentos se comportan como magnitudes dimensionalmente independientes” (Palacios [1955], p. 91-92). *In problems in which all the spatial directions are equivalent, a same unit can be chosen for all directions, but in other cases, as occurs in Crystallography, there are some advantages in using different units for each axe [...] Such segments must be considered as independent quantities.*”

La idea de discriminación de Mills [1995], sin embargo, aunque se refiere a variables espaciales, no hace alusión expresa a la posibilidad de usar diferentes unidades

como causa de la discriminación. Este autor afirma: “el análisis dimensional vectorial permite que las longitudes medidas en diferentes coordenadas espaciales sean variables independientes”. La discriminación espacial también ha sido empleada por Arenas [1970], Madrid [1991], Madrid y col. [1989, 1990, 2006] y Prieto y col. [1994]. Martynenko y Khramtsov [2005] emplean también dimensiones diferentes de longitud para las tres direcciones cartesianas del espacio e indican, lo cual supone una ampliación del concepto de discriminación, que en procesos en los que interviene más de un medio pueden considerarse por separado dimensiones diferentes de la longitud para cada uno de los medios, mientras Herranz y Arenas [1989] amplían la discriminación espacial a coordenadas cilíndricas y esféricas.

Para estos últimos autores, que trabajaron estrechamente con Palacios, la discriminación está asociada también a la posibilidad de medir con diferentes unidades en distintas direcciones. Sin embargo, en su reciente texto de geometría física (Herranz y Arenas, [2003]), partiendo de la aplicación formal del AD a la geometría y de la consideración de leyes geométricas independientes, introducen bases en las que se combinan longitudes, superficies y ángulos, magnitudes (las dos últimas) que Palacios nunca consideró que pudieran formar parte de la base dimensional (al menos este autor no menciona ejemplo alguno en el que se asuma esta elección, quizás como consecuencia coherente de su propia idea de asociar discriminación a medida). Herranz y Arenas, sin embargo, en sus textos más clásicos [1989], apenas emplean bases discriminadas que contengan el ángulo, y optan preferentemente por discriminar las coordenadas cilíndricas en bases formadas por longitudes.

La importancia de adoptar el ángulo como magnitud independiente no es baladí; la primera consecuencia de esta asunción es que la velocidad angular queda claramente diferenciada, como magnitud, del tiempo (lo que no ocurre en el ADC). Además, dado que el ángulo tiene una clara orientación espacial, la velocidad angular queda asociada, también, a esa dirección; lo que limita la formación de ciertos monomios adimensionales en el ADD. Como podrá apreciarse en los capítulos 3 y 4, en problemas de cuerpos en rotación el uso de la discriminación conduce a resultados más precisos.

La introducción del ángulo en la base dimensional fue propuesta por Alhama y col [1991], quienes presentaron problemas en los que se mostraba que esta magnitud en ciertos problemas conducía a un menor número de monomios independientes en la solución. En relación con este tema, salvo posteriormente Herranz y Arenas [2003], no hemos encontrado autores que asuman o propongan esta tesis. Más bien al contrario. Así, en textos recientes, Smits [2000] afirma “algunas magnitudes son ya adimensionales, estas incluyen números puros, grados angulares o radianes, y deformaciones unitarias”. Igualmente, Potter y Wiggert [1997] toman el ángulo como una magnitud adimensional.

Otro tipo de discriminación, de carácter más amplio, ha sido empleado por algunos autores. Huntley [1952], por ejemplo, ya diferenciaba dos tipos de masa

en la misma base: una asociada al movimiento (efectos iniciales), masa inercial, y otra asociada a la cantidad de materia (efectos contables), masa contable. Mientras que Langhaar [1951] y, más tarde, Chapman [1960] incluyen el calor en la base para distinguir los dos tipos de energía: mecánica y térmica. Chida y Katto [1973] distinguen asimismo dos dimensiones de longitud diferentes en una misma dirección, cada una de ellas asociada a un medio físico diferente (sólido-fluido).

González de Posada [1992] llega a afirmar que “la aplicación del método discriminado no es posible en todos los casos debido a la falta de homogeneidad de las ecuaciones”. Para este autor que, al contrario de Palacios, no relaciona la discriminación con la posibilidad de medir con diferentes unidades en cada dirección espacial, esta no constituye de hecho un avance cualitativo en la aplicación del análisis dimensional en su vertiente de deducción de números adimensionales por aplicación del teorema de π (precisamente lo contrario de lo que defendemos en el presente texto). El autor simplemente asocia la discriminación a una concepción vectorial de las leyes que permite asignar diferentes fórmulas dimensionales a ciertas magnitudes de carácter vectorial, como la longitud, la velocidad y la fuerza; aunque su aplicación no siempre es posible, por ejemplo (según afirma) en teoría de elasticidad. Para González de Posada, el significado de discriminación carece del carácter general que pretendemos asignar en el presente texto. Este autor tampoco hace referencia al significado de los números adimensionales ni a la relación entre adimensionalización de ecuaciones y aplicación del teorema de π .

Podría asegurarse que, probablemente, han sido muchos los investigadores que han intuido, en mayor o menor grado, que la discriminación espacial (al menos) ha constituido un avance en la aplicación del análisis dimensional a un buen número de problemas pero, al mismo tiempo, han observado que en otros (como ocurre en mecánica de fluidos y transmisión de calor) la discriminación no solo no conducía a mejores resultados sino a peores, o incluso no se obtenían resultados. Trátese, por ejemplo, de obtener la fuerza ascensional de un cuerpo en rotación en el seno de un fluido respecto del cual se mueve con velocidad constante normal al vector axial de la velocidad angular (efecto Magnus). Es posible que esta paradoja, asociada a un conjunto de circunstancias inherentes al problema (como veremos en los capítulos 3 y 4), sin duda, también a una falta de profundización en los fenómenos físicos, hiciera desistir a estos investigadores de la asunción de la discriminación espacial como concepto incontrovertible y necesario en la teoría del análisis dimensional.

Con el objetivo de reconocer magnitudes diferentes, si existen y con independencia de cuál sea la causa de esa diferencia, la discriminación profundiza en la visión física del problema y busca el mayor número de magnitudes fundamentales que puedan ser consideradas en la base dimensional. Este número, sin embargo, no puede ser arbitrario, sino preciso, para definir completamente tanto la geometría del problema como el fenómeno físico envuelto. Como regla general

y de acuerdo con lo que mejor convenga para obtener los resultados más precisos, la base dimensional incluirá cualquier tipo de magnitud (longitudes, ángulos, superficies, fuerzas, calor, masa inercial, masa contable...) con las restricciones conocidas de que la base debe ser completa y de que las magnitudes que la definen son independientes unas de otras.

La discriminación espacial introduce tres longitudes en la base dimensional (una para cada coordenada espacial en el espacio 3-D) reconociendo el carácter vectorial de magnitudes tales como la altura, la profundidad, la anchura, la fuerza, la velocidad, etc., y atribuye diferentes ecuaciones de dimensión (de acuerdo con la coordenada espacial) a una misma magnitud. Por otro lado, en conexión con las magnitudes de carácter escalar tales como la energía y la masa, la discriminación permite que una misma magnitud asociada a efectos observables diferentes pueda incluirse de manera diferenciada en la base dimensional explicitando cada uno de esos efectos por separado. Esto ocurre, como se ha mencionado, anteriormente con la masa, m (masa inerte, m_p , masa gravitatoria, m_g , y cantidad de sustancia, m_s), cuando en un mismo problema se quiere contabilizar su cantidad o caudal y al mismo tiempo existen efectos iniciales o gravitatorios en el problema. El tiempo puede ser otro ejemplo cuando en el mismo problema se combinan procesos transitorios con otros de carácter armónico.

1.5 El análisis dimensional en los textos de ingeniería

Nos referimos en este apartado a libros de texto de carácter básico o aplicado y excluimos los dedicados específicamente a modelos.

Aunque, en líneas generales, la mayor parte de los libros de texto de ingeniería que estudian los campos de transmisión de calor y mecánica de fluidos dedican una sección al tema de fundamentos de análisis dimensional en su versión clásica –con la exposición de ejemplos de aplicación del teorema de π –, las diferencias entre ellos son significativas en relación con otros aspectos. La justificación o no de la lista de variables relevantes de un problema y la interpretación de

los números adimensionales en términos de balances de fuerzas o energías son dos de estos aspectos esenciales. Es importante hacer notar que en la mayoría de esos textos no se usa el análisis dimensional para resolver diferentes tipos de problemas de cierto nivel, particularmente en transmisión de calor, sino que los monomios adimensionales independientes se obtienen mediante la adimensionalización (clásica) de las ecuaciones diferenciales. En este sentido, Lienhard [1987] y Gröber y Erk [1967] son una excepción; los últimos emplean el teorema de π y las bases dimensionales clásicas para la solución del problema de convección libre sobre una placa vertical isoterma. También son muchos los textos en los que no se hace alusión alguna al análisis dimensional, aunque se aceptan los

números adimensionales clásicos e incluso, en algunos, se les asigna un significado de balance entre magnitudes del problema.

Es frecuente encontrar en estos textos monomios adimensionales tales como las conocidas relaciones de aspecto que, sin estar debidamente justificados (desde el punto de vista de la discriminación), funcionan como monomios independientes en la solución del problema. Como se verá más adelante, estas relaciones de aspecto, u otros grupos de variables aparentemente no justificables desde el punto de vista de la discriminación, son simplificaciones numéricas de monomios más complejos que sí pueden justificarse con la discriminación. El propio número de Reynolds constituye un ejemplo y puede ser un monomio independiente en algunos problemas, y dependiente en otros en función del tipo de la geometría. Sobre estos aspectos se insistirá en los capítulos 3 y 4.

Con la excepción de Mills [1995], que apunta una breve incursión al tema de la discriminación mediante su análisis dimensional vectorial, y Martynenko y Khramtsov [2005], todos los textos utilizan el análisis dimensional en su versión clásica. Martynenko y Khramtsov [2005], en el primer capítulo de su libro, aplican el análisis dimensional clásico al problema de convección para, posteriormente, usar la discriminación espacial con el objeto de disminuir el número de monomios adimensionales. Dan significados físicos a los números adimensionales clásicos (razones entre fuerzas o entre energías).

Shames [1992], Fox y McDonald [1992], Potter y Wiggert [1997], Smits [2000] y Crespo [2006] incluyen un capítulo dedicado al análisis dimensional, semejanza y adimensionalización de ecuaciones diferenciales, y dan significado físico en términos de balances de fuerzas a los números adimensionales clásicos de mecánica de fluidos.

Kay y Nedderman [1990] incorporan un capítulo completo para explicar el análisis dimensional, Capítulo 15. Utilizan indistintamente las bases $\{L, M, T, \theta\}$ y $\{L, M, T, Q, \theta\}$ en procesos con disipación térmica despreciable. En estos casos, cuando emplean la primera base, se elimina de la solución el monomio que da cuenta de la relación entre energía mecánica y calor. La base correcta es la segunda, pues en ningún caso su utilización conduce a un monomio con tal significado.

Arpaci y Larsen [1984] dedican el Capítulo 12 al análisis dimensional que para estos autores comprende tanto la aplicación del teorema del, empleando la base $\{L, M, T, Q\}$, como la adimensionalización de las ecuaciones diferenciales y la “similaridad física”, una técnica que compara directamente balances de fuerzas o energías en el problema. Contiene aportaciones propias respecto al significado físico de los números adimensionales.

Baehr y Stephan [1998], en línea con los autores anteriores, usan el análisis dimensional, empleando siempre la base $\{L, M, T, Q\}$, para obtener los números adimensionales a los que no asocian significados físicos. Asimismo, Gröber y Erk [1967] dedican un apartado del Capítulo 9 al análisis dimensional y dan significados

físicos a los números adimensionales. En convección emplean la base $\{L, M, T, Q, \theta\}$ sin ninguna justificación formal.

Isachenko y col. [1973] hacen mención al método del AD en el Capítulo 5 sin emplearlo posteriormente en el estudio de los diferentes problemas que se abordan en el libro. También tratan, aunque no muy extensamente, la semejanza y el proceso de adimensionalización de las ecuaciones diferenciales del modelo.

Karlekar y Desmond [1985] hacen mención al AD (teorema de π) en el Capítulo 8 para obtener los números adimensionales. A continuación les asignan directamente sin mayor justificación un significado físico. Emplean la base $\{L, M, T, \theta\}$ sin especificar su ámbito de aplicación.

Kreith y Bohm [1997] introducen el análisis dimensional (teorema de π) en el Capítulo 4 y determinan los números adimensionales con la base $\{L, M, T, \theta\}$. Muestran tablas de números adimensionales con sus significados físicos sin una justificación formal.

Kessler y Greenkorn [1999] dedican el Capítulo 5, muy extenso, al análisis dimensional y posteriormente lo emplean de manera generalizada para comprobar la homogeneización de las ecuaciones. Usan la modificación del teorema de π realizada por Palacios [1964] con el fin de determinar el número de monomios

que integren una justificación de cada problema. En convección emplean números adimensionales con sus significados físicos.

Mills [1995] utiliza correctamente las bases $\{L, M, T, \theta\}$ y $\{L, M, T, Q, \theta\}$ en procesos de convección, es decir, la primera de ellas cuando existe disipación viscosa, y la segunda cuando dicha disipación es despreciable. No asocia significado físico alguno a los diferentes números adimensionales que deduce.

Lienhard [1987] introduce el análisis dimensional en el Capítulo 4, paralelamente a aplicarlo de manera generalizada en cada problema que resuelve. Al modo de determinación de los monomios adimensionales lo llama “método de índices” (*method of indices*), al igual que Mills [1995]. En convección forzada y libre emplea la base $\{L, M, T, \theta\}$ y da significado a los números adimensionales que deduce.

Sacadura [1982] y Thomas [1992] hacen mención al análisis dimensional en los capítulos 4 y 6 respectivamente, para obtener los números adimensionales a los que asocian significados físicos. Emplean la base $\{L, M, T, \theta\}$ independiente mente del tipo de proceso analizado.

Welty [1981] aplica el análisis dimensional a los conceptos fundamentales de convección, Capítulo 5. A excepción del número de Prandtl, no asocia significado físico a los números adimensionales.

White [1988] introduce el análisis dimensional en un apartado del Capítulo 5 usando la base $\{L, M, T, \theta\}$ indistintamente para convección libre y forzada, considerando todas las variables (sean significativas o no) y resolviendo con ello un problema de carácter general, del que no se pueden extraer conclusiones, como él

mismo señala posteriormente. Propone la adimensionalización de las ecuaciones básicas como una técnica indirecta del análisis dimensional que, en su opinión, proporciona una mayor información. No presta especial interés a la interpretación física de los números adimensionales.

Zlokarnik [1991] comienza su texto con un capítulo de introducción al análisis dimensional, en el que realiza una detallada discusión histórica de esta materia, para posteriormente introducir los números adimensionales y resolver un gran número de problemas relativos a la ingeniería química. Emplea las dos bases, $\{L, M, T, \theta\}$ y $\{L, M, T, Q, \theta\}$, pero cuando utiliza la segunda introduce el equivalente mecánico del calor en la lista de variables y llega a soluciones correctas. Madrid [1987] justifica que dichas bases pueden utilizarse igualmente para problemas en los que exista conversión de energía mecánica en calorífica, incluyendo en la lista de variables el equivalente mecánico del calor; si no fuese así, la base pentadimensional sería aplicable exclusivamente a situaciones en las que dicha conversión sea despreciable.

Bejan [1995] solo hace referencia al análisis dimensional para compararlo con el análisis de escala, y afirma que el primero no es capaz de obtener los resultados refinados que proporciona el segundo. Asigna a muchos de los números clásicos, como lo hace el análisis dimensional discriminado, significados de carácter geométrico, en lugar de los significados de balances de fuerzas o energías que aparecen en los textos más clásicos. Este autor merece un estudio especial, ya que introduce una nueva técnica que denomina AE (análisis de escala), en contraposición con la del análisis dimensional clásico a la que considera poco o nada útil. El Capítulo 7 se dedica a profundizar en las similitudes y diferencias entre el AE y el ADD.

Burmeister [1995] no menciona el análisis dimensional aunque da significado físico únicamente al número de Peclet.

Cebeci [2002] y Cengel [2004] emplean el análisis dimensional únicamente para expresar relaciones funcionales adimensionales en algunos casos concretos, como los números de Peclet, Grashof y Reynolds.

Holman [1997], Kays y Crawford [1993], Ghebart y col. [1988], Incropera y DeWitt [1996], Öztürk [1993] y Rohsenow y col. [1998] no mencionan el análisis dimensional, pero proporcionan una tabla de números clásicos con sus significados físicos.

Otros libros que presentan una introducción al análisis dimensional son los de White [1994], Munson y col. [1998], Wilcox [2000], Kundu y Cohen [2001] y Rouse [1946].

Para terminar, nos referiremos extensamente al interesante texto de Szirtes [1998], dedicado íntegramente al análisis dimensional y al modelos. Szirtes afirma (Capítulo 10): “[...] dado que lo que se busca es reducir al máximo el número de grupos adimensionales tenemos tres formas de hacerlo.” En primer lugar, reducir

el número de variables del problema (*variable fusion*); dice textualmente “es de importancia capital reducir el número de variables tanto como sea posible [...]”, refiriéndose sin duda a que deben escribirse estrictamente las variables asociadas con el fenómeno o el aspecto parcial del problema que se estudie. En segundo lugar, unir variables adimensionales (*fuse dimensionless variables*), refiriéndose al caso en que dos variables diferentes actúan como si fueran una sola en el problema. En tercer lugar, aumentar el número de dimensiones de la base. Estas reglas parecen del todo lógicas pero, de hecho, son los requisitos formales para la aplicación del análisis dimensional que permiten obtener los resultados más precisos; Palacios [1964], por ejemplo, las recoge de forma explícita.

En los ejemplos de cálculo de la velocidad límite de caída de una gota, o del caudal de Posuille, propuestos por Szirtes, la introducción de la densidad de la gota es arbitraria, pues no existen fuerzas de inercia en ella. Lo mismo ocurre con la caída de una esfera en un fluido viscoso con la restricción de fuerzas de inercia despreciables (ejercicio discutido en el Capítulo 3); mediante una reflexión heurística deduce que las densidades de la esfera y de la gota deben juntarse para especificar así el peso aparente de la gota. Esto reduce la solución a dos monomios, en lugar de los tres iniciales. Sin embargo, una adecuada elección de variables conduce a una solución absolutamente precisa (un monomio).

En relación con el aumento del número de dimensiones de la base, el autor opta por una de las tres opciones siguientes: i) partir dimensiones (*dimension splitting*), ii) importar dimensiones (*importation*) o, iii) c) entremezclar sistemas dimensionales (*hybrid dimensioning*).

El caso i) es la discriminación de las dimensiones del espacio (el autor dice que esta discriminación es aplicable a la longitud y la masa). No obstante, afirma: “la discriminación de la longitud es la más común y, quizás, la de menos riesgo; es siempre una peligrosa tarea que debe ser hecha con extremo cuidado, y los resultados chequeados y rechequeados para detectar posibles errores. El investigador debe preguntarse si tienen sentido los resultados obtenidos y si satisfacen las condiciones de contorno en donde los valores numéricos de las variables son conocidos. Si dos direcciones son igualmente aplicables, entonces ambas deben tener de

exponente $1/2$, si las tres, $1/3$ ”. Creemos que, para Szirtes, “partir dimensiones” no es más que un artillugio operacional que, si bien en algunos problemas puede funcionar, no tiene carácter general, pues no es un procedimiento formal. Por ejemplo, en algunos problemas sirve para cruzar magnitudes que tienen distinta dimensión según la dirección espacial. En el problema del péndulo cónico, por ejemplo, este cruce permite conectar dos tiempos característicos: el asociado al periodo de giro (R/v) y el asociado al periodo de caída $(h/g)^{1/2}$, mientras que en el problema del coeficiente de rozamiento, el coeficiente permite conectar las fuerzas horizontales y normales del problema. La participación de la dimensión masa, menos común, se fundamenta en considerar la densidad asociada a los efectos

ineriales diferente de la densidad asociada a efectos contables (hipótesis adoptada por autores anteriores, como Huntley [1952]).

El caso ii) es otra forma de discriminación referida a magnitudes distintas de la longitud y la masa. Por ejemplo, la energía térmica (calor) y la energía mecánica cuando son independientes. Hipótesis asimismo ya adoptada por otros autores como Langhaar [1951], Chapman [1960] y Madrid [1987]. Por fin, el caso iii) se refiere al uso simultáneo en la base de las variables masa y fuerza y le confiere un interés académico. En este sentido dice (p. 457): “dado el elevado riesgo de esta práctica, antes de aceptar los resultados deben ser verificados por otros medios”. Pone como ejemplo el cálculo de la velocidad límite de caída de una esfera en un fluido viscoso con inercia despreciable. En él, al aplicar esta técnica de dos formas diferentes se obtienen resultados asimismo diferentes, por lo que uno de ellos es falso. El autor se limita a decir: “ambas soluciones son dimensionalmente correctas, pero numéricamente falsas”. Y continúa: “el método es falso aunque ocasionalmente proporcione resultados correctos. No lo use”.

Como se ve, no hay uniformidad en lo concerniente a la inclusión de la teoría de análisis dimensional en los textos de transmisión del calor, aunque sí en los de mecánica de fluidos, y mucho menos en su aplicación formal. Más bien parece

que se incluye lo capitulo que no se haya seguido en los textos o recogido en textos intercambiable de que muchos de los grupos obtenidos con el ADC no constituyen realmente monomios independientes en la solución. La incursión a los conceptos vectoriales adelantada por Huntley [1952], sin duda, no motivó suficientemente a la comunidad científica a excepción de Palacios [1964], cuyo texto quizás no fue lo suficientemente divulgado entre los investigadores en este campo, y más recientemente de Mills [1955].

¿Por qué muchos de los números clásicos no funcionan como grupos independientes? ¿Qué significado real tienen? Parece que muchos autores, como es frecuente, se limitaron a asumir lo anteriormente escrito por sus precursores en relación con el análisis dimensional sin profundizar en estos y otros aspectos, aceptando lo ya admitido y asumido como cierto. Otros autores, quizás más for-

males, adoptan una postura más prudente no incluyendo en sus textos referencia alguna al ADD.

No puede decirse, a pesar de todo, que las soluciones proporcionadas por el análisis dimensional clásico sean incorrectas. Se trata en general de soluciones menos precisas. Aunque sí es correcto afirmar que los números adimensionales que se obtienen con el ADC, en general, ni desempeñan un papel independiente en la solución del problema, ni tienen un significado físico preciso en función de las magnitudes que se balancean en las ecuaciones (fuerzas o energías). El ADD corrige estos aspectos. Así, muchas relaciones de aspecto que aparecen en ADC desaparecen con la aplicación del ADD y la mayoría de los números clásicos que son adimensionales

en el ADC dejan de serlo en el ADD, donde se agrupan entre ellos mismos o con otras magnitudes (ocultas o no del problema), de modo conveniente, para formar nuevos parámetros adimensionales que, por un lado, juegan efectivamente un papel independiente en la solución del problema y, por otro, tienen significado físico preciso en términos de las magnitudes que se balancean en el proceso.

Desde el punto de vista del ADC, atribuir a un número adimensional (Reynolds, Grashof, Pecllett, etc.) el significado de un balance entre fuerzas o energías es, en general, correcto. Sin embargo, al referir dicho balance a las regiones del medio en donde actúan dichas fuerzas o energías, no se obtienen tales números clásicos, sino otros que pueden deducirse mediante el ADD. En este sentido, los balances mencionados en los textos anteriores son en general erróneos.

Creemos que las ventajas que presenta la aplicación del ADD frente al ADC, principalmente la de obtener la solución más precisa posible con este tipo de técnicas, inspirará a los autores de textos clásicos de mecánica de fluidos y transmisión de calor a incluir en las futuras ediciones una referencia, cuando no una introducción extensa, al ADD.

1.6 Análisis dimensional, adimensionalización de las ecuaciones básicas y balances

La adimensionalización de las ecuaciones de gobierno de un problema es una técnica cuyo objeto es simplificar las ecuaciones y presentarlas de la forma “más universal” posible mediante variables adimensionales tomando como referencia valores característicos obtenidos del propio problema. Este proceso suele incluirse en algunos textos en el contexto de análisis dimensional. Se trata de una técnica aparentemente inconexa con el análisis dimensional que, sin embargo, conduce también a la formación de monomios adimensionales en función de los cuales puede expresarse la solución. En general, el tratamiento de la adimensionalización no contempla la discriminación, por lo que conduce a los mismos monomios adimensionales que el ADC, *solo* los factores de forma geométricos, que son monomios que proporciona el ADC pero falta adimensionalización.

Excepciones aisladas a la adimensionalización, digamos clásica, hasta donde sabemos, son las practicadas por Middelman [1998] y por Joshi y Nakayama [2003]. Middelman llama a esta técnica de adimensionalización “*inspectional analysis*”, un término acuñado mucho antes por Ruark [1935] como método para complementar al análisis dimensional. Para Middelman, las variables espaciales (y las velocidades, por ejemplo) de distinta dirección se adimensionalizan mediante magnitudes de referencia distintas. Joshi y Nakayama aplican una adimensionalización similar a las ecuaciones de convección forzada.

El proceso de adimensionalización es, pues, una manipulación matemática que conduce a los mismos resultados que el ADD o el ADC según se discrimine o no al realizarlo. El significado físico de los monomios encontrados es inmediato a través de los balances de fuerzas o energías de las propias ecuaciones, aunque mediante simples operaciones estos mismos monomios pueden interpretarse como balances de otras magnitudes.

La idea de discriminación es también aplicable, pues, a la adimensionalización y, de hecho, es necesaria para reducir al mínimo el correcto número de grupos adimensionales independientes que intervienen como argumentos en la solución. La elección de magnitudes de referencia adecuadas permite obtener variables normalizadas; es decir, variables cuyos valores numéricos están comprendidos en el intervalo [0,1]. Sin embargo, es muy frecuente adoptar otras referencias que dan lugar a variables cuyos valores no están normalizados. El inconveniente de la no existencia real de magnitudes de referencia en el problema, en muchos casos (por ejemplo, la falta de una longitud espacial concreta o de una velocidad en una dirección dada), puede subsanarse con la adopción de supuestas referencias o de magnitudes ocultas del problema. A posteriori, el proceso de adimensionalización conducirá a la determinación del orden de magnitud de dichas magnitudes ocultas.

Hasta donde hemos investigado, cuando se usa discriminación, el análisis dimensional discriminado y el proceso de adimensionalización discriminada conducen a los mismos resultados; es decir, a los mismos números adimensionales. Esta consecuencia permite reconocer que los balances asociados a los números adimensionales se refieren inequívocamente a regiones concretas del medio en las que se producen tales balances. Esta asociación no se da con la adimensionalización clásica.

Alternativamente, sería posible investigar directamente los balances de fuerzas o energías del problema en la región de interés (sin trabajar con las ecuaciones del proceso), lo que conduciría de nuevo a los mismos números adimensionales. Este camino, que requiere un minucioso conocimiento de las teorías físicas contenidas en el problema, parece intermedio entre el ADC y la adimensionalización, aunque es obvio que si se conocen los balances de fuerzas o energías del problema, seguramente es posible escribir las ecuaciones de su modelo matemático.

Si cada variable o constante física de la lista relevante de un problema, que debe ser completa, se justifica físicamente, es obvio que se consideran todos los balances que intervienen en el mismo que, a su vez, componen todos los términos de las ecuaciones que constituyen el modelo matemático del problema. En consecuencia, tanto la exclusión de variables relevantes como la inclusión de variables innecesarias conducen a monomios falsos. En este sentido, la aplicación del teorema de π es algo así como un procedimiento alternativo al de la adimensionalización, pues aunque no se requiera el conocimiento de la forma explícita de las

ecuaciones del problema, de hecho, sí se tienen en cuenta todos los posibles balances que constituyen la base para elaborar dicha ecuación. Así, el teorema de π no es más que una técnica formal para obtener directamente los monomios adimensionales que se derivan de los balances entre magnitudes que concurren en un problema.

En el Capítulo 6 se aplica la adimensionalización a algunos problemas fundamentales de mecánica de fluidos y transmisión de calor.

1.7 Análisis dimensional y orden de magnitud de las soluciones

En general, la solución de un problema mediante el análisis dimensional es una función de los números adimensionales resultantes de la aplicación del método, $F(\pi_1, \pi_2, \dots, \pi_n) = 0$. Cuando la lista relevante de variables se ha deducido correctamente, incluyendo todas y cada una de las variables y constantes físicas que intervienen en el proceso, los monomios adimensionales discriminados que resultan por aplicación del teorema de π siempre pueden expresarse mediante sencillas manipulaciones matemáticas, en forma de cocientes entre las fuerzas o energías que intervienen en el problema, o interpretarse en forma de cocientes adimensionales de otras magnitudes. Así pues, estos grupos adimensionales representan balances entre magnitudes que, precisamente por poder compararse, son del mismo orden de magnitud (de otra forma, si un tipo de fuerza o energía es despreciable, se suprimiría de la lista de variables relevantes las magnitudes o constantes características asociadas a ella y el teorema de π no proporcionaría ningún monomio asociado a ese balance).

En conclusión, los números adimensionales discriminados que intervienen en las soluciones son del orden de magnitud de la unidad; y en consecuencia, si despejamos el monomio que interese, que contenga la incógnita, en función de los restantes, $\pi_1 = f(\pi_2, \dots, \pi_n)$, la función $f(\pi_2, \dots, \pi_n)$ será también del orden de la

unidad. Es obvio que en el caso de obtener la mejor solución posible del problema mediante el ADD, aquella que esté formada por un único monomio adimensional, $F(\pi) = 0$, la solución explícita será, $\pi = C$, siendo C una constante adimensional del orden de la unidad.

La asociación de un orden de magnitud a los monomios adimensionales procedentes de la aplicación del análisis dimensional es un tema que, hasta donde conocemos, no se ha recogido en los textos. Esta es una diferencia cualitativa esencial entre el ADC y el ADD en lo referente al valor cuantitativo de los monomios resultantes, ligado obviamente a su interpretación física. Lo que

recogen con frecuencia estos textos es que, cuando la solución del problema es un único monomio, se iguala este a una constante numérica de valor desconocido, $\pi = C$. Así lo hacen tanto los libros clásicos de análisis dimensional como Bridgman [1922], Langhaar [1951], Palacios [1964] y Herranz y Arenas[1989], y otros más contemporáneos específicos o no de análisis dimensional, Mills [1955], Kreith y Bhon [1997], Smits [2000] y Szirtes [2007]. Concretamente, Smits [2000, p. 245] afirma como una conclusión destacada de la aplicación del análisis dimensional que “cuando solo existe un grupo adimensional, tal grupo debe tener un valor constante”. Igualmente, Potter y Wiggert [1997] escriben: “cuando la solución contiene un solo monomio, dicho monomio tiene el valor de una constante arbitraria que podría ser determinada por medio del análisis o la experimentación”.

Como vemos, el ADD va mucho más allá, pues en este caso asigna a dicho monomio el orden de magnitud unidad, $\pi = C \sim 1$, asignación siempre avalada por resultados analíticos o experimentales

¿Qué se puede decir en cuanto a los órdenes de magnitud cuando existen factores de forma? El término “factores de forma” en el ADC se asocia invariablemente a cocientes entre longitudes características del problema, tengan o no la misma dirección espacial. En el ADD, solo se permiten como factores de forma cocientes entre longitudes de la misma dirección, mientras que los cocientes entre longitudes de distinta dirección aparecen combinados con otras magnitudes para formar monomios adimensionales. Desde el punto de vista de los órdenes de magnitud es lógico atribuir a los factores de forma en el ADD un orden de magnitud, unidad para recoger la influencia relativa entre las magnitudes que forman el cociente (una frente a otra). Si una de ellas es muy grande (o muy pequeña) frente a la otra, la influencia relativa en el problema de una de ellas será despreciable y la podríamos eliminar de la lista de variables, con lo que el factor de forma desaparece. El hecho de que un factor de forma en ADD tenga un valor muy diferente de la unidad significa que existirá una región dentro del dominio físico del problema en la que los procesos físicos sean colaterales; es decir, los cambios de las variables del problema y las propias variables tendrán un valor despreciable.

Esta página se ha dejado intencionadamente en blanco

Fundamentos del análisis dimensional discriminado

2.1 Introducción: bases dimensionales y uso de las diferentes geometrías

En el Capítulo 1 se ha expuesto una breve revisión histórica del análisis dimensional y se ha reflexionado sobre la extensión que supone el uso de la discriminación, tanto cualitativamente, en su concepto, como cuantitativamente, por los generalmente más precisos resultados de su aplicación. La discriminación espacial, fundamentalmente en coordenadas cartesianas, desde sus primeros pasos (Williams [1892], Huntley [1952] y Palacios [1955]) supuso una gran aportación para resolver problemas de gran interés práctico. Posteriormente, el desarrollo generalizado de esta idea (Madrid [1987], Herranz y Arenas [1989, 2003], Alhama y col. [1991]) propició su extensa aplicación a problemas de cualquier tipo de geometría. De todos modos, el fundamento de esta técnica se encuentra, cualquiera que sea el tipo de discriminación empleado, en la posibilidad de establecer, de manera deductiva y rigurosa, según las leyes básicas de la teoría física en la que se incardina el fenómeno estudiado, el número de magnitudes que son independientes entre sí. Esto nos permite fijar tanto la base dimensional como la

lista de variables relevantes. La multiplicidad de la base dimensional deriva del número de leyes fundamentales de la teoría física en la que se encuadra el problema, mientras que el conjunto concreto de magnitudes que la componen puede ser elegido a conveniencia. Son posibles conjuntos de magnitudes para una base aquellas que ligadas por las leyes fundamentales de la teoría sean independientes entre sí. Así, el proceso de deducción de la base dimensional, de una teoría física es el primer paso en la aplicación del análisis dimensional ya que proporciona el marco de referencia para deducir las ecuaciones dimensionales de las magnitudes y constantes físicas de la lista relevante de variables y, a partir de estas, los exponentes dimensionales que por apli-

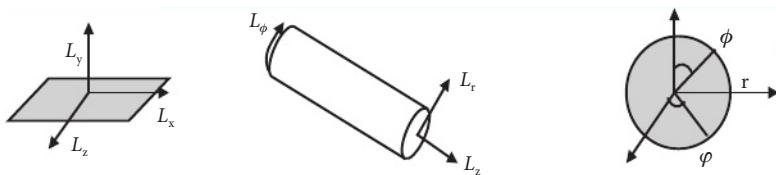


Figura 2.1 Coordenadas rectangulares, cilíndricas y esféricas

cación del teorema de π determinarán los monomios o los grupos adimensionales buscados.

Es frecuente que los fenómenos que concurren en un problema dado pertenezcan a teorías físicas diferentes y que sea necesario tener en cuenta, en consecuencia, las leyes fundamentales pertenecientes a dichas teorías. En estos casos, la base dimensional deberá deducirse en función de todo el conjunto de leyes.

La discriminación de las dimensiones del espacio consiste en sustituir en la base dimensional, según el sistema de ejes coordenados empleado para describir el fenómeno, la magnitud fundamental longitud por otras tres magnitudes asociadas a las diferentes direcciones del espacio, Figura 2.1. Así, por

ejemplo, si se considera un sistema de ejes coordenados cartesiano (x, y, z) la magnitud longitud de dimensión L en la base dimensional clásica, se sustituye por tres magnitudes longitud, cuyas dimensiones están asociadas a las tres direcciones espaciales de esta geometría, $\{L_x, L_y, L_z\}$. De igual modo se procedería con coordenadas cilíndricas y esféricas, tomando en lugar de L las dimensiones $\{L_r, \varphi, L_z\}$ y $\{L_r, \varphi, \theta\}$, respectivamente, donde φ y θ son magnitudes angulares.

Asimismo, siempre que se cumpla el principio de independencia entre magnitudes en el seno de cada teoría, podrían formar parte de la base dimensional magnitudes tales como superficies, perímetros, ángulos, volúmenes y otras de carácter geométrico; por ejemplo, son válidas las bases $\{L_x, S_x, L_z\}$, $\{L_x, S_x, S_y\}$, etc.

2.2 Bases dimensionales en la mecánica de fluidos. Fórmulas dimensionales de variables y de propiedades del medio

Las leyes fundamentales de la mecánica de fluidos son las mismas que las correspondientes a la mecánica de sólidos, pero se aplican a elementos de masa de fluido que ocupan elementos de volumen. Podrán añadirse a dichas leyes fundamentales aquellas que sean específicas de los fluidos (definición de presión, ley de capilaridad, ley de Newton de la viscosidad, etc.) sin que se altere la

Tabla 2.1

Fórmulas dimensionales en diferentes bases de magnitudes y propiedades físicas típicas en la mecánica de fluidos

Magnitud o propiedad física	Fórmula dimensional discriminada			Fórmula dimensional clásica
	Coordenadas rectangulares	Coordenadas cilíndricas	{L, φ, L _r , T, M}	
	{L _x , L _y , L _z , T, M}	{L _r , S _x , L _z , T, M}	{L, φ, L _r , T, M}	{L, T, M}
Longitud, l (m)	[l _x] = L _x [l _y] = L _y [l _z] = L _z	[l _x] = L _x [l _y] = S _x L _z [l _z] = L _z	[l _r] = L _r [l _z] = L _z [l _p] = φL _r	[l] = L
Superficie, S (m ²)	[S _x] = L _y L _z ... [S _z] = L _x S _x L _z ⁻¹	[S _x] = S _x [S _y] = L _x L _z [S _z] = L _x S _x L _z ⁻¹	[S _r] = φL _r L _z [S _z] = φL _r ² [S _φ] = L _r L _z	[S] = L ²
Volumen, V (m ³)	[V] = L _x L _y L _z	[V] = S _x L _x	[V] = φL _r ² L _z	[V] = L ³
Masa, m (kg)	[m] = M	[m] = M	[m] = M	[m] = M
Tiempo, t (s)	[t] = T	[t] = T	[t] = T	[t] = T
Densidad, ρ (kgm ⁻³)	[ρ] = ML _x ⁻¹ L _y ⁻¹ L _z ⁻¹	[ρ] = ML _x ⁻¹ S _x ⁻¹	[ρ] = = Mφ ⁻¹ L _r ⁻² L _z ⁻¹	[ρ] = ML ⁻³
Ángulo, φ (rad)			[φ] = φ	
Velocidad angular v, ω (rad/s)	[ω] = T ⁻¹	[ω] = T ⁻¹	[ω] = φ T ⁻¹	[ω] = T ⁻¹¹
Velocidad, v (m/s)	[v _x] = L _x T ⁻¹ ... [v _z] = L _z T ⁻¹	[v _x] = L _x T ⁻¹ [v _y] = S _x L _z ⁻¹ T ⁻¹ [v _z] = L _z T ⁻¹	[v _r] = L _r T ⁻¹ [v _p] = φL _r T ⁻¹ [v _z] = L _z T ⁻¹	[v] = LT ⁻¹
Fuerza, F (N)	[F _x] = ML _x T ⁻² ...	[F _x] = ML _x T ⁻² ...	[F _r] = ML _r T ⁻² ...	[F] = MLT ⁻²
Energía mecánica, w (J)	[w _x] = ML _x ² T ⁻² ...	[w _x] = ML _x ² T ⁻²	[w _r] = ML _r ² T ⁻² ...	[w] = ML ² T ⁻²
Presión, p (Pa)	[p _x] = = ML _x L _y ⁻¹ L _z ⁻¹ T ⁻² ... [p _r] = = ML _x S _x ⁻¹ T ⁻² ... [p] = ML ⁻¹ T ⁻²	[p _x] = = ML _x S _x ⁻¹ T ⁻² ... [p _r] = = Mφ ⁻¹ L _r ⁻¹ T ⁻² ... [p] = ML ⁻¹ T ⁻²	[p _r] = = Mφ ⁻¹ L _r ⁻¹ T ⁻² ... [p] = ML ⁻¹ T ⁻²	[p _r] = = Mφ ⁻¹ L _r ⁻¹ T ⁻² ... [p] = ML ⁻¹ T ⁻²

(continúa)

Magnitud o propiedad física	Fórmula dimensional discriminada			Fórmula dimensional clásica
	Coordenadas rectangulares	Coordenadas cilíndricas		
Viscosidad dinámica, μ $(\text{Nm}^2 \text{s}^{-1})$	$[\mu_{xy}] = [\mu_{yz}] = [ML_x^{-1}L_y^{-1}L_z^{-1}T^{-1}] \dots$	$[\mu_{xy}] = [\mu_{yz}] = [ML_x^{-1}S_x L_z^{-2}T^{-1}] \dots$	$[\mu_x] = [\mu_{\varphi z}] = [M\varphi^{-1}L^{-1}T^{-1}] \dots$	$[\mu] = ML^{-1}T^{-1}$
Viscosidad cinemática, $\nu(\text{m}^2\text{s}^{-1})$	$[\nu_x] = L_x^2 T^{-1} \dots$	$[\nu_x] = L_x^2 T^{-1} \dots$	$[\nu_r] = L_r^2 T^{-1} \dots$	$[\nu] = L^2 T^{-1}$

multiplicidad de la base, pues en cada una de ellas se introduce una nueva magnitud secundaria o una nueva constante característica del medio. En definitiva, del conjunto de leyes indicado se deduce que la multiplicidad de la base dimensional de la mecánica de fluidos, desde la óptica del ADC, es tres, siendo empleada habitualmente, de entre todas las posibles combinaciones, la formada por la longitud, la masa y el tiempo; esto es, $\{L, M, T\}$. Desde la perspectiva del ADD, de acuerdo con la geometría, las posibles simetrías y las direcciones preferentes en las que tienen lugar los procesos, puede resultar más conveniente emplear una base dimensional discriminada, bien en coordenadas cartesianas $\{L_x, L_y, L_z, M, T\}$, bien en cilíndricas $\{L_r, \varphi, L_z, M, T\}$ o bien en esféricas $\{L_r, \varphi, \theta, M, T\}$.

La discriminación en su concepción más general permite asimismo, y según mencionamos en la sección anterior, incluir en las bases dimensionales magnitudes tales como superficies o voltímenes, con la conocida restricción de que todas las magnitudes geométricas que formen parte de la base han de ser independientes. Así, por ejemplo, en lugar de la base dimensional $\{L_x, L_y, L_z, M, T\}$ podría adoptarse la base $\{L_x, S_x, L_z, M, T\}$.

En la Tabla 2.1 se presenta, a título de ejemplo, una síntesis de las fórmulas dimensionales, en diferentes bases, de las magnitudes y las características físicas que habitualmente intervienen en los problemas de mecánica de fluidos. Como se sabe, su deducción se lleva a cabo a través de las leyes fundamentales de la teoría y de las ecuaciones de definición de las magnitudes secundarias.

Veamos a continuación algunos ejemplos ilustrativos de la deducción de fórmulas dimensionales y de la eficacia del análisis dimensional discriminado.

Ejemplo 2.1

Use la discriminación para determinar la ecuación de dimensiones de la viscosidad dinámica para el flujo laminar de la Figura 2.2. Dedúzcalo de la ley de Newton.

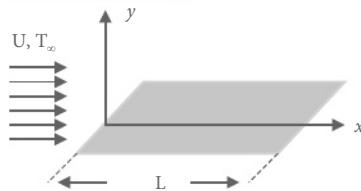


Figura 2.2 Flujo laminar en una placa horizontal

Solución

La ley de Newton es $f_v = S_v \mu (dv/dn)$, donde f_v es la fuerza total viscosa, S_v la superficie sobre la que actúa, μ el coeficiente de viscosidad dinámica y dv/dn el gradiente de velocidad en la dirección normal a la placa. Las ecuaciones de dimensión de f_v , S_v y dv/dn , en la base dimensional $\{L_x, L_y, L_z, M, T\}$, de acuerdo con la geometría de la figura, son:

$$[f_v] = L_x M T^{-2}$$

$$[S_v] = L_x L_z$$

$$[dv/dn] = L_x T^{-1} / L_y$$

con lo que

$$[\mu] = [f_v]/([S_v][dv/dn]) = (L_x M T^{-2}) / ((L_x L_z)(L_x T^{-1} / L_y)) = M L_x^{-1} L_y L_z^{-1} T^{-1}.$$

Sin discriminación, $[\mu] = M L^{-1} T^{-1}$.

Ejemplo 2.2

Deduzca la ecuación de dimensiones del coeficiente de viscosidad dinámica de un fluido newtoniano en coordenadas cilíndricas, Figura 2.3. Considere, ahora, que un medidor de viscosidad está formado por dos cilindros concéntricos, separados una distancia muy pequeña, en cuyo interior se encuentra confinado un fluido viscoso. ¿Puede expresar la viscosidad del fluido en función del par, aplicado al cilindro exterior, necesario para mantener el sistema girando con una velocidad angular uniforme, ω ?

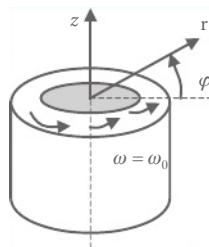


Figura 2.3 Cilindros concéntricos con un fluido viscoso en su interior

Solución

Si se tiene en cuenta la ley de Newton de la viscosidad, $f_v = S_v \mu (dv/dn)$, y se emplea la base dimensional $\{L_r, \varphi, L_z, M, T\}$, se cumple

$$[f_v] = L_r \varphi M T^{-2}$$

$$[S_v] = L_r \varphi L_z$$

$$[\partial v / \partial n] = L_r \varphi T^{-1} / L_r$$

siendo entonces

$$[\mu] = [f_v] / ([S_v] [\partial v / \partial n]) = (L_r \varphi M T^{-2}) / ((L_r \varphi L_z) (L_r \varphi T^{-1} / L_r)) = M \varphi^{-1} L_z^{-1} T^{-1}$$

Sin discriminación, $[\mu] = M L^{-1} T^{-1}$.

Para determinar la relación entre el coeficiente de viscosidad y el par aplicado hemos de considerar la siguiente lista de variables: altura de los cilindros, H , radio medio, R (dado que $R_1 \approx R_2$), velocidad angular, ω , viscosidad dinámica, μ , y par aplicado, M_z . La superficie de rozamiento no queda completamente caracterizada con las variables geométricas consideradas; por ello, hemos de incluir en la lista dicha superficie, S_r , o bien el perímetro del cilindro, P , dado que la altura ya ha sido incluida.

El cuadro de los exponentes dimensionales se recoge en la Tabla 2.1.

Tabla 2.2 Exponentes dimensionales de las variables

	R	H	P	ω	μ	M_z
L_r	1		1			2
φ			1	1	-1	1
L_z		1			-1	
T				-1	-1	-2
M					1	1

El conjunto de variables, en la base empleada, puede formar un solo monomio adimensional:

$$\pi = M_z / P \mu \omega H R$$

de donde,

$$M_z \sim P \mu \omega H R$$

El ADC, base $\{L, M, T\}$, conduce a la solución $M = \mu \omega H^3 f(R/H, P/H)$, menos precisa, pues depende de una función indeterminada de dos factores de forma. El ADD explica dicha función especificando de manera exacta el modo en que intervienen en la solución las variables geométricas, R, H y P.

Ejemplo 2.3

Resuelva el Ejemplo 1.5 del Capítulo 1 empleando el análisis dimensional discriminado: determinación del momento de rotación de un disco girando con velocidad angular constante en el interior de un tambor, Figura 2.4.

Recordemos que el ADC no proporcionó una solución precisa pues contenía una función indeterminada del cociente z/R .

Solución

Para su resolución con el ADD empleamos una base dimensional discriminada, $\{L_r, \varphi, L_z, T, M\}$, asociada a coordenadas cilíndricas, y la lista relevante de variables dada en el Ejemplo 1.5, $\langle R, z, \omega, \mu, M_r \rangle$.

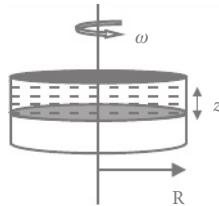


Figura 2.4 Disco en el interior de un tambor

Las ecuaciones dimensionales de las variables que intervienen son

$$[r] = L_r$$

$$[z] = L_z$$

$$[\omega] = \varphi T^{-1}$$

$$[\mu] = (L_r \varphi M T^{-2}) / ((L_t L_r \varphi) (L_t \varphi T^{-1} / L_z)) = L_r^{-2} \varphi^{-1} L_z M T^{-1}$$

$$[M_z] = (L_r \varphi M T^{-2}) (L_t) = L_r^2 \varphi M T^{-2}$$

y el cuadro de los exponentes dimensionales:

Tabla 2.3

Exponentes dimensionales de las variables

	R	z	ω	μ	M_z
L_r	1			-2	2
φ			1	-1	1
L^z		1		1	
T			-1	-1	-2
M				1	1

Como la característica de la matriz formada por los exponentes dimensionales es 5 y el número de variables también es 5, no se puede formar ningún monomio adimensional con la lista de variables en esa base. El problema aparentemente no tiene solución. Esto se debe a que el planteamiento del problema desde el punto de vista geométrico ha sido erróneo. Por una parte, el radio del disco representa el brazo del par de fuerzas que sirven el momento de rotación pero, sin embargo, en coordenadas cilíndricas no determina por sí solo la superficie del disco, superficie relacionada con las fuerzas viscosas que intervienen de manera directa en el proceso. Para especificar completamente la geometría bastaría con añadir a la lista de variables el perímetro o la superficie del disco.

Sea ahora la lista de variables $\langle R, z, P, \omega, \mu, M_z \rangle$, con P el perímetro, de dimensión $[P] = L_r \varphi$. Si ampliamos la Tabla 2.3 con la columna del perímetro, el nuevo conjunto de variables permite formar un único monomio adimensional,

$$\pi = M_z z / P \mu \omega R^3$$

que permite obtener la solución más precisa; esto es, la solución exacta del problema, salvo una constante numérica adimensional del orden de la unidad. Esta solución muestra explícitamente la dependencia del momento de rotación con el resto de variables que intervienen, en concreto con z y R , lo que no podía predecir el ADC.

$$M_z = C P \mu \omega R^3 / z$$

Como se trata de un disco completo, se cumple que $P = 2\pi R$ y, en consecuencia: $M_z = C \mu \omega R^4 / z$, relación funcional que coincide con la deducida analíticamente.

Este problema ha sido estudiado por Herranz y Arenas [1989] con una base dimensional discriminada que asume una degeneración espacial (no justificada) de las direcciones contenidas en el plano del tambor llegando a la solución correcta mediante este artificio que aplican a otros problemas estudiados en su texto.

Ejemplo 2.4

Se ha de resolver el Ejemplo 1.6 empleando el análisis dimensional discriminado: determine el espesor de la capa límite laminar de un flujo forzado sobre una placa horizontal finita, Figura 2.5.

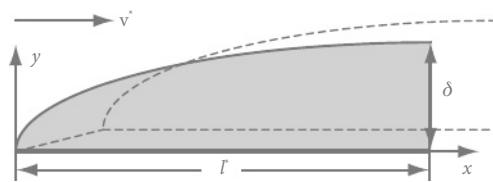


Figura 2.5 Flujo forzado sobre una placa horizontal. Capa límite

Solución

Las fórmulas dimensionales de las variables relevantes $\langle x, v^*, \rho, \mu, \delta \rangle$, en la base discriminada, $\{L_x, \rho, L_y, T, M\}$, son:

$$[x] = L_x$$

$$[z] = L_z$$

$$[\rho] = L_x L_y L_z M$$

$$[\mu] = (L_x M T^{-2}) / ((L_x L_z) (L_x T^{-1} / L_y)) = L_x^{-1} L_y^{-1} M T^{-1}$$

$$[\delta] = L_y$$

En el Tabla 2.4 se indican los exponentes dimensionales de las anteriores fórmulas.

Tabla 2.4 Exponentes dimensionales de las variables

	x	v^*	ρ	μ	δ
L_x	1	1	-1	-1	
L_y			-1	1	1
L_z			-1	-1	
T		-1		-1	
M			1	1	

La aplicación del teorema de π conduce a un solo monomio adimensional:

$$\pi = \rho v^* \delta^2 / \mu x$$

que proporciona la solución

$$\delta = C (\mu x / \rho v^*)^{1/2}$$

donde C es una constante sin dimensiones (de nuevo del orden de la unidad). La solución puede expresarse en función del número de Reynolds clásico $Re_x = \rho v^* x / \mu$ en la forma:

$$\delta/x = C (Re_x)^{-1/2}$$

De nuevo el ADD, en contraposición con el ADC, proporciona la solución más precisa posible. El conocido número de Reynolds, adimensional en el ADC (base $\{L, T, M\}$), pierde tal condición en la base dimensional discriminada $\{L_x, L_y, L_z, T, M\}$, donde su la fórmula dimensional es

$$[Re_x] = L_x^2 L_z^{-2}$$

Ejemplo 2.5

Un cuerpo de masa m describe una circunferencia de radio R con una velocidad angular constante ω . Determine la ecuación de dimensiones de la fuerza centrípeta en las bases $\{L_r, \varphi, M, T\}$ y $\{L_r, L_\varphi, M, T\}$.

Para el movimiento circular, la definición de la fuerza centrípeta es $f_c = m\omega^2 R$ o $f_c = mv_\varphi^2/R$, un vector dirigido hacia el centro de la circunferencia. La Tabla 2.5 muestra los exponentes dimensionales de las variables en la base $\{L_r, \varphi, M, T\}$.

Tabla 2.5 Exponentes dimensionales

	ω	R	m	v_φ	f_c
L		1		1	a
r	1			1	b
M			1		c
T	-1			-1	d

Solución

Base dimensional	Lista de variables	Fórmula dimensional
$\{L_r, \varphi, M, T\}$	$\langle \omega, m, R, f_c \rangle$	$[f_c] = L_r \varphi^2 M T^{-2}$
$\{L_r, \varphi, M, T\}$	$\langle v_\varphi, m, R, f_c \rangle$	$[f_c] = L_r \varphi^2 M T^{-2}$
$\{L_r, L_\varphi, M, T\}$	$\langle \omega, m, R, f_c \rangle$	$[f_c] = L_r^{-1} L_\varphi^2 M T^{-2}$
$\{L_r, L_\varphi, M, T\}$	$\langle v_\varphi, m, R, f_c \rangle$	$[f_c] = L_r^{-1} L_\varphi^2 M T^{-2}$

Quizás parezca un resultado algo extraño, tanto en la primera base, por la existencia del ángulo en la ecuación de dimensiones, como en la segunda, por la existencia de L_φ .

Ejemplo 2.6

Una pequeña esfera sujetada de un hilo inextensible gira con una velocidad angular constante manteniéndose en el mismo plano horizontal (péndulo cónico), Figura 2.6. Calcule la velocidad de giro, ω .

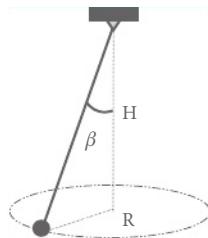


Figura 2.6 Esquema físico del péndulo cónico

Para cada posición de la trayectoria, el equilibrio dinámico impone que los componentes radial y vertical de la tensión del hilo, T_r y T_v , respectivamente, cumplan la condición $T_r/T_v = \tan(\beta) = R/H$. Los cálculos de ambas componentes de la tensión deben hacerse por separado. Así, para T_v , la lista de variables es $\langle g, m, T_v \rangle$, y para T_r , $\langle m, \omega, R, T_r \rangle$, Tabla 2.6.

Tabla 2.6 Exponentes dimensionales

	G	m	T_v	ω	R	T_r
L						
φ				1	1	1/2
L_v	1		1			
M		1	1			1
T	-2		-2	-1		-2

Se obtienen las soluciones

$$T_v \sim mg$$

$$T_r = m\omega^2 R$$

La condición de equilibrio (ajena al análisis dimensional) introduce la variable H y proporciona la solución buscada:

$$T_r/T_v = \tan(\beta) = R/H \sim \omega^2 R/g$$

o bien

$$\omega \sim (g/h)^{1/2} = (g \tan(\beta)/R)^{1/2}$$

A partir de ω , es inmediato obtener el periodo de revolución, $T_o = 2\pi/\omega$.

Szirtes aborda este problema utilizando una discriminación parcial, con la base $\{L_h, L_v, T\}$, sin justificar la no inclusión de la masa de la esfera en la lista de variables, y deduce el mismo resultado. Lo curioso es que, si se discriminan las tres direcciones espaciales separando L_h en sus componentes radial y tangencial, no se puede obtener resultado alguno. ¿Cómo es posible si existe una clara discri-

minación espacial entre la velocidad tangencial y el radio? Justo el hecho de que Szirtes degenera estas dos direcciones espaciales (radial y tangencial) es lo que le permite obtener la solución correcta. En consecuencia, podemos decir que solo un correcto planteamiento físico, calculando las fuerzas vertical y horizontal por separado, junto con la condición impuesta a estas fuerzas por el equilibrio, proporciona la solución correcta sin necesidad de reflexiones recurrentes, no forma-

les, a conveniencia. Herranz y Arénas determinan el periodo de giro a partir de las variables $\langle m, H, R, \varphi_0, f_c, T_o \rangle$, para ello han de usar la base tridimensional $\{L_r, L_\varphi, L_v, M, T\}$, usando para f_c la condición de equilibrio $f_r/f_v = T_r/T_v = \tan(\beta)$. Sin embargo, H no juega papel alguno en el conjunto de variables para el cálculo del periodo, por lo que la base está sobredimensionada, sobra la dimensión L_v . El conjunto de variables que permanece $\langle m, R, \varphi_0, f_c, T_o \rangle$ es equivalente al conjunto $\langle m, R, \alpha, f_c, T_o \rangle$ con el que se define la fuerza centrípeta.

Ejemplo 2.7

Un cuerpo cae deslizando sin rozamiento por un plano inclinado partiendo del reposo, Figura 2.7. Estudie la homogeneidad dimensional de la expresión del balance energético $mgh = (1/2)mv^2$. Porque el ADC proporciona una explicación directa a este problema, explicarán como se consigue aparentemente violar el ADD. Trataremos de explicar esta paradoja que se repetirá en algunos problemas de fluidos donde interviene la presión.

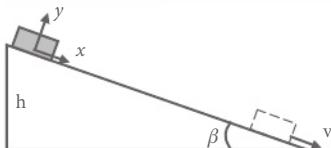


Figura 2.7 Esquema físico del problema

Efectivamente, la base dimensional del ADC $\{L, M, T\}$ permite comprobar de inmediato que las ecuaciones dimensionales de ambos términos de la expresión procederemos seleccionando por ejemplo la base $\{L_x, L_y, M, T\}$. Si aplicamos, sin más, las ecuaciones dimensionales de cada variable obtenemos

$$\begin{aligned}[mgh] &= ML_y^2 T^{-2} \\ [mv^2] &= ML_x^2 T^{-2}\end{aligned}$$

donde L_y denota la dirección vertical asociada a la gravedad. Así, los términos de la ecuación no son dimensionalmente homogéneos. Una reflexión sencilla, a partir del significado físico del balance permite deshacer la simplificación del trabajo de la fuerza peso y escribirlo en la forma $(mg \sin\beta)(h/\sin\beta)$, donde $(mg \sin\beta)$ es

el componente del peso que realmente desplaza el objeto una distancia ($h/\sin\beta$). Ahora podemos escribir

$$[(mg \sin\beta)(h/\sin\beta)] = [(mg \sin\beta)(h/\sin(\beta))] = MI_x^2 T^{-2}$$

expresión dimensionalmente homogénea a la de la energía cinética. Así, ocurre que muchas fórmulas físicas obtenidas por simplificaciones de tipo numérico no parecen dimensionalmente homogéneas en el ADD; mientras que, a causa de esa misma simplificación, sí lo son en el ADC, gracias a la degeneración de las direcciones del espacio. No es que el ADC proporcione mejores resultados que el ADD en estos problemas sino que, como siempre, la aplicación de la técnica del análisis dimensional requiere de ciertas reflexiones de carácter físico en cada problema. Aquí se trata de balancear el trabajo realizado por una fuerza que tiene una dirección específica para desplazar un objeto que sufre un desplazamiento específico, con el cambio de energía cinética del objeto (teorema de las fuerzas vivas).

Supóngase ahora una variante del problema en la que el plano inclinado tenga una forma curva, Figura 2.8. n y s denotan las componentes normal y tangencial al plano mientras que L_z es una dirección normal a las anteriores.

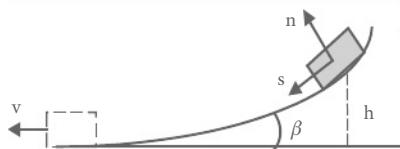


Figura 2.8 Esquema físico del problema

Para esta variante, el trabajo desarrollado por la componente tangencial de la fuerza peso a lo largo del trayecto no cambia (para un mismo recorrido en dirección vertical).

Sin embargo, la componente final de la velocidad es horizontal. Así, la homogeneidad dimensional con discriminación entre el trabajo realizado por la componente tangencial del peso y el cambio en la energía cinética del cuerpo no es posible. La razón es que si solo la componente tangencial del peso realiza trabajo, la componente normal sobre la partícula, resultante de la componente normal del peso y la reacción del plano, tiene precisamente el efecto de cambiar la dirección de la velocidad a través de la aceleración normal que imprime al cuerpo. Este cambio es el que causa la anomalía adimensional de las ecuaciones de las dos magnitudes numéricamente iguales (el trabajo de la componente tangencial del peso y el cambio en la energía cinética). Algo similar ocurre, como veremos en el Capítulo 3, con las partículas de un fluido estacionario que siguen sus líneas de corriente; allí también se da esta anomalía de homogeneidad entre magnitudes numéricamente iguales.

2.3 Bases dimensionales en la transmisión de calor.

Fórmulas dimensionales de variables y de propiedades del medio

Dado que la transmisión del calor engloba una gran diversidad de fenómenos, por ejemplo, desde la conducción pura, donde el movimiento del medio a través del cual se transmite la energía calorífica no influye en el proceso, hasta la convección, donde ocurre lo contrario, el sistema de leyes fundamentales necesario para determinar la multiplicidad de la base es distinto. En consecuencia, tanto la multiplicidad de la base como las magnitudes que pueden seleccionarse para formar parte de ella pueden resultar diferentes. Así, ha sido realizado un gran esfuerzo, por parte de Madrid [1987] y de Herranz y Arenas [1989, 2003], en identificar y distinguir las diferentes teorías dentro del campo de la transmisión de calor a las que corresponden diferentes bases dimensionales.

Entre las ventajas que presenta el resultado de esta clasificación podemos citar: (i) es inmediato encuadrar el problema que se desea resolver en una teoría cuya base dimensional haya sido deducida de manera precisa; (ii) la base dimensional adecuada al problema particular podría ser de multiplicidad mayor que la de la teoría, con lo que la aplicación del teorema de π conduce a una mejor solución (menor número de grupos adimensionales); (iii) los monomios adimensionales que proporciona el uso de la base adecuada cuando existe discriminación tienen significados físicos claros asociados a los balances de fuerzas o energías que realmente ocurren en el problema.

En este sentido, Madrid [1987] y Herranz y Arenas [1989, 2003] han considerado en el campo de la transmisión de calor tres teorías o grupos de fenómenos con identidad propia y han deducido sus correspondientes bases dimensionales: (i) transmisión de calor sin efectos mecánicos, (ii) transmisión de calor con efectos mecánicos y (iii) transmisión de calor con efectos mecánicos y disipación de energía despreciable.

2.3.1 Transmisión de calor sin efectos mecánicos

Se trata de la transmisión de calor sencinada por interacción entre las partículas (átomos o moléculas) que componen el cuerpo y que es independiente del posible movimiento de este. La ley fundamental de dicha teoría es la ley de Fourier que introduce la conductividad térmica del cuerpo, k , como constante característica. A ella puede añadirse la definición del calor específico por unidad de volumen del cuerpo, c_v , y la ley de enfriamiento de Newton que define el coeficiente de transmisión de calor, h , si se da una condición de contorno de este tipo.

El conjunto de estas tres leyes conduce a un sistema dimensional de multiplicidad cuatro y, en consecuencia, la base dimensional está compuesta por cuatro

Tabla 2.7

Fórmulas dimensionales en diferentes bases de magnitudes y propiedades físicas típicas en la transmisión de calor sin efectos mecánicos

Magnitud o propiedad física	Fórmula dimensional discriminada			
	Coordenadas rectangulares		Coordenadas cilíndricas	Fórmula dimensional clásica
	$\{L_x, L_y, L_z, Q, T, \theta\}$	$\{L_x, S_x, L_z, Q, T, \theta\}$	$\{L_r, \varphi, L_z, Q, T, \theta\}$	$\{L, Q, T, \theta\}$
Longitud, l (m)	$[l_x] = L_x$ $[l_y] = L_y$ $[l_z] = L_z$	$[l_x] = L_x$ $[l_y] = S_x L_z^{-1}$ $[l_z] = L_z$	$[l_r] = L_r$ $[l_z] = L_z$ $[l_\varphi] = \varphi L_r$	$[l] = L$
Superficie, S (m^2)	$[S_x] = L_y L_z$...	$[S_x] = S_x$ $[S_y] = L_x L_z$ $[S_z] = L_x S_x L_z^{-1}$	$[S_r] = \varphi L_r L_z$ $[S_z] = \varphi L_r^2$ $[S_\varphi] = L_r L_z$	$[S] = L^2$
Volumen, V (m^3)	$[V] = L_x L_y L_z$	$[V] = S_x L_x$	$[V] = \varphi L_r^2 L_z$	$[V] = L^3$
Tiempo, t (s)	$[t] = T$	$[t] = T$	$[t] = T$	$[t] = T$
Ángulo, φ (rad)			$[\varphi] = \varphi$	
Temperatura, θ (K)	$[\theta] = \theta$	$[\theta] = \theta$	$[\theta] = \theta$	$[\theta] = \theta$
Conductividad térmica, k (W/mK)	$[k_x] =$ $= Q L_x L_y^{-1} L_z^{-1} T^{-1} \theta^{-1}$...	$[k_x] =$ $= Q L_x S_x^{-1} T^{-1} \theta^{-1}$...	$[k_r] =$ $= Q \varphi^{-1} L_z^{-1} T^{-1} \theta^{-1}$...	$[k] =$ $= Q L^{-1} T^{-1} \theta^{-1}$...
Coeficiente de transmisión del calor, h (W/m^2K)	$[h_x] =$ $= Q L_y^{-1} L_z^{-1} T^{-1} \theta^{-1}$...	$[h_x] =$ $= Q S_x^{-1} T^{-1} \theta^{-1}$...	$[h_r] =$ $= Q L_r^{-1} \varphi^{-1} L_z^{-1} T^{-1} \theta^{-1}$...	$[h] =$ $= Q L^{-2} T^{-1} \theta^{-1}$...
Calor específico por unidad de volumen, c_e ($Jm^{-3}K^{-1}$)	$[c_e] =$ $= Q L_x^{-1} L_y^{-1} L_z^{-1} \theta^{-1}$	$[c_e] =$ $= Q L_x^{-1} S_x^{-1} \theta^{-1}$	$[c_e] =$ $= Q \varphi^{-1} L_r^{-2} L_z^{-1} \theta^{-1}$	$[c_e] =$ $= Q L^{-3} \theta^{-1}$
Difusividad térmica, α (m^2s^{-1})	$[\alpha_x] = L_x^2 T^{-1}$...	$[\alpha_x] = L_x^2 T^{-1}$...	$[\alpha_r] = L_r^2 T^{-1}$...	$[\alpha] = L^2 T^{-1}$

magnitudes independientes de entre las que intervienen en las leyes anteriores. Entre las posibles combinaciones se encuentra la formada por la longitud, el calor, el tiempo y la temperatura, de dimensiones L, Q, T, θ , que es la más ampliamente usada en los textos. Es obvio que en esta teoría no intervienen las leyes de la mecánica (asociadas al balance de fuerzas o de energías asociadas al trabajo de fricción o de otro tipo mecánico) ni la relación entre el calor y las magnitudes mecánicas.

En la Tabla 2.7 se presentan las fórmulas dimensionales de las magnitudes y características físicas de los cuerpos que intervienen en fenómenos de transmisión de calor sin efectos mecánicos, en diferentes bases dimensionales.

Ejemplo 2.8

A partir de la ley de Fourier, y empleando la discriminación, determine la ecuación de dimensiones de la conductividad térmica de la aleta, para el problema de conducción de calor, 2-D, de la Figura 2.9. Dedúzcalo de la ley de Fourier.

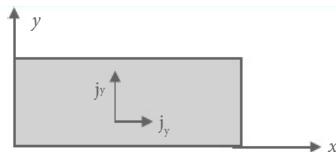


Figura 2.9 Conducción 2-D en aleta recta

Solución

Al ser un proceso 2-D, la ecuación de dimensiones de k es diferente según la dirección elegida. Para la conducción longitudinal (a lo largo de la aleta) la ley de Fourier se escribirá en la forma $j_x = S_x k_x (\partial \theta / \partial x)$, mientras que para la conducción transversal será $j_y = S_y k_y (\partial \theta / \partial y)$. A partir de

$$[j_x] = QT^{-1}, [j_y] = QT^{-1}$$

$$\begin{aligned} [S^x] &= LYL^z, [S^y] = L^xL^z \\ [\partial \theta / \partial x] &= \theta L_x^{-1}, [\partial \theta / \partial y] = \theta L_y^{-1} \end{aligned}$$

las ecuaciones dimensionales en la base $\{L_x, L_y, L_z, Q, T, \theta\}$ son

$$[k_x] = [j_x] / ([S_x][\partial \theta / \partial x]) = QT^{-1} / ((L_y L_z)(\theta L_x^{-1})) = Q L_y^{-1} L_z^{-1} T^{-1} \theta^{-1}$$

$$[k_y] = [j_y] / ([S_y][\partial \theta / \partial y]) = QT^{-1} / ((L_x L_z)(\theta L_y^{-1})) = Q L_x^{-1} L_z^{-1} T^{-1} \theta^{-1}$$

Sin discriminación, $[k] = Q L^{-1} T^{-1}$.

Ejemplo 2.9

Deduzca, a partir de la ley de Fourier, las dimensiones de la conductividad térmica en coordenadas cilíndricas suponiendo que la conducción es radial.

Solución

A partir de ley de Fourier para esta geometría, $j_r = S_r k_r (\partial \theta / \partial r)$,

$$[j_r] = QT^{-1},$$

$$[S_r] = L_r \varphi L_z,$$

$$[\partial \theta / \partial r] = \theta L_r^{-1},$$

con lo que la ecuación de dimensiones de la conductividad en la base dimensional $\{L_r, \varphi, L_z, M, T\}$ es

$$[k_r] = [j_r] / ([S_r] [\theta / \partial r]) = QT^{-1} / ((L_r \varphi L_z) (\theta L_r^{-1})) = Q\varphi^{-1} L_z^{-1} T^{-1} \theta^{-1}$$

Sin discriminación, $[k] = QL^{-1}T^{-1}$.

Ejemplo 2.10

Resolver con el ADD el ejemplo 1.1. Determine la distribución de temperaturas en el conjunto aleta recta-pared de la Figura 2.10, con las condiciones de contorno consideradas, superficies convectivas y aisladas.

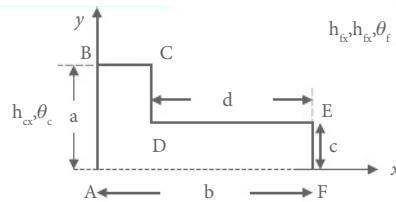


Figura 2.10 Conjunto aleta recta-pared

Solución

Desde el punto de vista de la discriminación espacial, al tratarse de un problema de conducción bidimensional $\theta(x, y)$, la conductividad térmica del material tiene diferente fórmula dimensional según la dirección de conducción considerada, por lo que hay que incluir las dos conductividades térmicas k_x y k_y en la lista de variables. Por otra parte, el coeficiente de transmisión del calor del foco frío por encontrarse asociado a superficies orientadas de manera diferente, vertical (DC y EF) y horizontal (DE), también tendrá diferente fórmula dimensional para cada superficie, h_x y h_y . En

consecuencia, la lista de variables relevantes es $\langle a, b, c, d, x, y, h_{cx}, h_{fx}, h_{fy}, k_x, k_y, \Delta\theta_{fc}, \theta \rangle$. Estas, en la base dimensional, $\{L_x, L_y, L_z, Q, T, \theta\}$, tienen las siguientes ecuaciones dimensionales:

$$\begin{aligned} [a] &= [c] = [y] = L_y \\ [b] &= [d] = [x] = L_x \\ [k^x] &= Q L_x^{-1} L_y^{-1} L_z^{-1} T^{-1} \theta^{-1} \\ [k_y] &= Q L_x^{-1} L_y^{-1} L_z^{-1} T_z^{-1} \theta^{-1} \\ [h_{cx}] &= [h_{fx}] = Q / (L_y L_z) (\theta) = Q L_y^{-1} L_z^{-1} T^{-1} \theta^{-1} \\ [h_{fy}] &= Q / (L_x L_z) (\theta) = Q L_x^{-1} L_z^{-1} T^{-1} \theta^{-1} \\ [\theta] &= [\Delta\theta_{fc}] = \theta \end{aligned}$$

El cuadro de los exponentes dimensionales es

Tabla 2.8 Exponentes dimensionales de las variables

	abcd				h_{cx}	h_{fx}	h_{fy}	k_x	k_y	$\Delta\theta_{fc}$	θ	x	Y	
L_x		1		1				-1	1	-1			1	
L_y	1		1		-1	-1		-1	1				1	
L_z					-1	-1	-1	-1	-1					
T					-1	-1	-1	-1	-1					
Q					1	1	11		1					
θ					-1	-1	-1	-1	-1	1	1			

Entre los posibles grupos de monomios independientes seleccionaremos el siguiente:

$$\begin{aligned} \pi_1 &= y/a \\ \pi_2 &= c/a \\ \pi &= x/b \\ \pi_4^3 &= d/b \\ \pi_5 &= h_{fx}/h_{cx} \\ \pi_6 &= h_{cx} b/k_x \\ \pi_7 &= h_{fx} b/k_x \\ \pi_8 &= h_{fy} a/k_y \\ \pi_9 &= \theta / (\Delta\theta_{fc}) \end{aligned}$$

que proporcionan la solución

$$\theta / (\Delta\theta_{fc}) = f(c/a, d/b, x/b, y/a, h_{fx}/h_{cx}, h_{cx} b/k_x, h_{fx} b/k_x, h_{fy} a/k_y)$$

donde f es una función arbitraria de los argumentos indicados. Aparecen tres números de Biot cuyos significados físicos corresponden a la relación entre convección y conducción en la aleta para cada una de las superficies convectivas. Es obvio que este ejemplo no ilustra las ventajas del ADD; en particular, debido a enorme número de monomios que intervienen, pero ilustra el significado físico de algunos de estos monomios; a saber, balance entre energías caloríficas de convección y conducción en cada superficie del proceso.

Ejemplo 2.11

Resolver con el ADD el Ejemplo 1.2. Determine la distribución de temperaturas en una aleta recta de perfil rectangular de la Figura 2.11. La base es isoterma mientras que las superficies lateral y del extremo son convectivas.

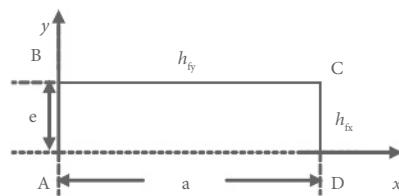


Figura 2.11 Aleta recta rectangular

Solución

El análisis dimensional discriminado impone dos coeficientes de transmisión de calor diferentes (h_x, h_y) en la lista de variables relevantes, uno para cada una de las superficies convectivas de distinta orientación. Asimismo, son necesarias dos conductividades térmicas (k_x, k_y) asociadas a la conducción en cada dirección espacial, x e y . Así, la lista de variables relevantes es $\langle x, y, a, e, h_x, h_y, k_x, k_y, \Delta\theta, \theta \rangle$. Los exponentes dimensionales obtenidos de sus ecuaciones de dimensión en la base $\{L_x, L_y, L_z, Q, T, \theta\}$ se muestran en la Tabla 2.9.

Tabla 2.9 Exponentes dimensionales de las variables

	a	e	x	y	h_{fx}	h_{fy}	k_x	k_y	$\Delta\theta_{fc}$	θ
L_x	1			1		-1	1	-1		
L_y		1	1		-1		-1	1		
L_z					-1	-1	-1	-1		
T					-1	-1	-1	-1		
Q					1	11		1		
θ					-1	-1	-1	-1	1	1

Los monomios que producen estas variables son los siguientes:

$$\begin{aligned}\pi_1 &= x/a \\ \pi_2 &= y/e \\ \pi_3 &= h_{fy} e/k_y \\ \pi_4 &= h_{fx} a/k_x \\ \pi_5 &= a^2 k_y / e^2 k_x \\ \pi_6 &= \theta / (\theta_0 - \theta_t)\end{aligned}$$

que conducen a la solución.

$$\theta/\Delta\theta = f(y/e, x/a, h_{fy} e/k_y, h_{fx} a/k_x, a^2 k_y / e^2 k_x)$$

donde el significado de los monomios π_3 y π_4 en términos de balance de calores de conducción y convección en cada superficie es claro.

Si estudiamos la solución que proporciona el ADC a este problema, con la lista de variables $\langle a, e, h, k \rangle$, que corresponde a la asunción de las hipótesis de aleta con conductividad isotrópica ($k_x = k_y$) y mismo coeficiente de convección en las superficies lateral y del extremo ($h_x = h_y$), vemos que se obtienen solo dos monomios. Entre las posibles parejas podemos elegir, por ejemplo, el factor de forma a/e y el número de Biotha/k. La discriminación, para esa misma lista $\langle a, e, h_x, h_y, k_x, k_y \rangle$ con-

duce a tres. Por ejemplo, la terna obtenida anteriormente³, $\pi_3^{h_{fy} e/k_y}, \pi_4^{h_{fx} a/k_x}$ y $\pi_5^{a^2 k_y / e^2 k_x}$. ¿Qué explicación cabe a este hecho? ¿Es posible que la solución proporcionada por el ADD sea más imprecisa? Evidentemente, no. En realidad, si una vez obtenida la solución del ADD (sin asumir hipótesis alguna), incluimos las hipótesis anteriores ($k_x = k_y$ y $h_x = h_y$), los tres monomios (adimensionales en el ADD) quedan reducidos a los dos obtenidos por el ADC (no adimensionales en el ADD).

Esta situación es frecuente cuando tienen lugar procesos de tipo isotrópico (que degeneran ciertos coeficientes del medio), cuando un coeficiente que aplica a diferentes regiones del medio tiene el mismo valor en ambas regiones (se degenera), o bien, cuando existen ciertas simetrías de revolución en el problema. En estos casos, la aplicación del ADC puede conducir a la solución más precisa, fruto de la existencia de alguna (o más de una) de las hipótesis anteriores. En estos casos es conveniente repasar los resultados del ADD para simplificar “numéricamente” los monomios obtenidos.

Así, en el problema que nos ocupa, el conjunto de tres (ADD) monomios

$\pi_a^3 \equiv h_{fy}^{h_{fy}} e^{k_y} / k_y^2$ y $\pi_b^4 \equiv h_{fx}^{h_{fx}} a^{k_x} / k_x^2$ y $\pi_c^5 \equiv a^2 k_y / e^2 k_x$ puede simplificarse al par (no ADD) $\pi_a^3 \equiv h_{fy} e/k_y$ y $\pi_b^4 \equiv h_{fx} a/k_x$. En los capítulos de aplicaciones (3 y 4) se volverá a insistir sobre este tipo de aparentes contradicciones en relación con la precisión de los resultados obtenidos por la aplicación de ambas técnicas (ADC y ADD) a ciertos problemas particulares.

Ejemplo 2.12

Parámetros que caracterizan la transmisión de calor en una aguja finita de sección circular, Figura 2.12.

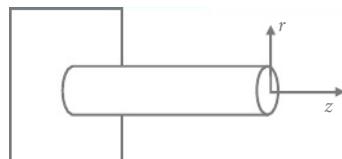


Figura 2.12

Aguja de sección circular

Solución

Desde el punto de vista geométrico, la aleta queda completamente definida por su diámetro, d , y su longitud, l . Entre las características térmicas relevantes consideraremos la conductividad radial, k_r , la axial, k_z , y el coeficiente de transferencia de calor por convección en la superficie lateral, h_{sl} y en el extremo, h_e . En síntesis, las variables relevantes del problema son $\langle d, l, h_{sl}, h_e, k_r, k_z \rangle$ y el correspondiente cuadro de exponentes dimensionales en la base $\{L_x, L_y, L_z, Q, T, \theta\}$,

Tabla 2.10 Exponentes dimensionales de las variables

	d	l	h_e	h_{sl}	k_r	k_z	$\Delta\theta$
L_r	1		-2	-1		-2	
j			-1	-1	-1	-1	
L_z		1		-1	-1	1	
T			-1	-1	-1	-1	
Q			1	11		1	
θ			-1	-1	-1	-1	1

Resultan tres monomios:

$$\pi_1 = h_e l / k_z$$

$$\pi_2 = l^2 k_r / d^2 k_z$$

$$\pi^3 = l h_{sl} / d k_z$$

El conjunto $(dk_z/h_{sl})^{1/2}$ representa una longitud característica en la dirección longitudinal de la aleta, l' , cuyo significado es conocido, la extensión de aleta donde tienen lugar gradientes térmicos longitudinales apreciables. Si $l \gg l'$, existe en la aleta una región de disipación despreciable cuya extensión es del orden de $l - l'$. En ese caso, ni l ni h_e deben formar parte de la lista de variables relevantes y quedará el número de monomios resultantes reducido a uno; el número de Biot transversal, $\Pi_{Biot} = dh_{sl}/k_r$.

También, si asumimos la hipótesis de conducción 1-D (axial), el monomio Π_2 no interviene, y la solución queda reducida a dos monomios. Si, ade-

más, la aleta es larga, tampoco interviene su longitud, por lo que no puede formarse monomio alguno, y ello significa que la solución del campo térmico de temperaturas es una función solo de la posición axial adimensional $x_{\text{adi}} = x/l'$.

Puede advertirse, a través de este ejemplo, la importancia del conocimiento del fenómeno físico a la hora de aplicar el análisis dimensional. Aquí se da el

caso de la existencia de una magnitud en el problema, la longitud de la aleta, que se conoce la teoría del fenómeno. Lo mismo ocurre con el coeficiente h_e , cuya introducción en la lista de variables depende del valor de l , o mejor de la relación l/l' . Por tanto, ningún problema debe abordarse sin previamente hacer una incursión profunda en la teoría del fenómeno físico en el que se incardina, para deducir las posibles hipótesis asumidas en su enunciado y no expresadas de forma explícita.

En relación con el significado físico de los monomios obtenidos podemos afirmar que $\Pi_1 = h_e l'/k_z$ representa un balance entre el calor transmitido por convección en el extremo y el transmitido por conducción axial. El monomio $\Pi_2 = l^2 k_r/d^2 k_z = (k_r/d^2)/(k_z/l^2)$ indica la relación entre la conducción axial y radial. Por último, el monomio $\Pi_3 = l^2 h_{sl}/d k_z = (k_r/d^2)/(k_z/l^2)$, indica la relación entre la conducción axial y la convección a través de la superficie

lateral.

2.3.2 Transmisión de calor con efectos mecánicos

En estos problemas, el movimiento del medio influye de manera determinante en la transferencia de energía calorífica que se produce de un lugar a otro del sistema. Son los problemas de convección. Para determinar la base dimensional de esta teoría deberemos partir de las leyes fundamentales de la mecánica, de la definición de trabajo mecánico y del principio de equivalencia entre energía mecánica y energía calorífica.

El sistema de leyes así establecido conduce a una base dimensional de multi-

plididad cuatro. Las más comunes entre las posibles, con el trabajo, Q , y el calor, W , tienen la misma ecuación dimensional en cada base; en la primera $[Q] = [W] = Q$ mientras que en la segunda $[Q] = [W] = LMT^{-2}$. Es obvio que en la base dimensional $\{L, Q, T, \theta\}$, las ecuaciones dimensionales de las magnitudes mecánicas se expresan en función de Q , mientras que en la base dimensional $\{L, M, T, \theta\}$ las ecuaciones dimensionales del calor se expresan en función de L , M y T .

Las fórmulas dimensionales de las magnitudes y las constantes características se muestran en la Tabla 2.11.

Tabla 2.11 Fórmulas dimensionales en diferentes bases de magnitudes y propiedades físicas típicas en la transmisión de calor con efectos mecánicos

Magnitud o propiedad física	Fórmula dimensional discriminada		Fórmula dimensional clásica	
	Coordenadas rectangulares	Coordenadas cilíndricas	$\{L, \varphi, L_r, Q, T, \theta\}$	$\{L, Q, T, \theta\}$
	$\{L_x, L_y, L_z, Q, T, \theta\}$	$\{L_x, S_x, L_z, Q, T, \theta\}$	$\{L_r, \varphi, L_z, Q, T, \theta\}$	$\{L, Q, T, \theta\}$
Longitud, l (m)	$[l_x] = L_x$ $[l_y] = L_y$ $[l_z] = L_z$	$[l_x] = L_x$ $[l_y] = S_x L_z^{-1}$ $[l_z] = L_z$	$[l_r] = L_r$ $[l_z] = L_z$ $[l_p] = \varphi L_r$	$[l] = L$
Superficie, S (m^2)	$[S_x] = L_y L_z$ $[S_y] = L_x L_z$ $[S_z] = L_x L_y$	$[S_x] = S_x$ $[S_y] = L_x L_z$ $[S_z] = L_x S_x L_z^{-1}$	$[S_r] = \varphi L_r L_z$ $[S_z] = \varphi L_r^2$ $[S_\varphi] = L_r L_z$	$[S] = L^2$
Volumen, V (m^3)	$[V] = L_x L_y L_z$	$[V] = S_x L_x$	$[V] = \varphi L_r^2 L_z$	$[V] = L^3$
Masa, m (kg) *	$[m_x] = L_x^{-2} Q T^2$ $[m_y] = L_y^{-2} Q T^2$ $[m_z] = L_z^{-2} Q T^2$	$[m_x] = L_x^{-2} Q T^2$ $[m_y] = S_x^{-2} L_z^{-2} Q T^2$ $[m_z] = L_z^{-2} Q T^2$	$[m] = M$	$[m] = L^{-2} Q T^2$
Tiempo, t (s)	$[t] = T$	$[t] = T$	$[t] = T$	$[t] = T$
Densidad, ρ ($kg m^{-3}$) ^(*)	$[\rho_x] = L_x^{-3} L_y^{-1} L_z^{-1} Q T^2$ $[\rho_y] = L_x^{-1} L_y^{-3} L_z^{-1} Q T^2$ $[\rho_z] = L_x^{-1} L_y^{-1} L_z^{-3} Q T^2$	$[\rho_x] = L_x^{-3} S_x^{-1} Q T^2$ $[\rho_y] = L_x^{-1} S_x^{-3} L_z^3 Q T^2$ $[\rho_z] = L_x^{-1} S_x^{-1} L_z^3 Q T^2$	$[\rho] = M \varphi^{-1} L_r^{-2} L_z^{-1}$ $[\rho] = L^{-5} Q T^2$	
Ángulo, φ (rad)			$[\varphi] = \varphi$	
Velocidad ángular, ω (rad/s)	$[\omega] = T^{-1}$	$[\omega] = T^{-1}$	$[\omega] = \varphi T^{-1}$	$[\omega] = T^{-1}$
Velocidad, v (m/s)	$[v_x] = L_x T^{-1}$ $[v_y] = L_y T^{-1}$ $[v_z] = L_z T^{-1}$	$[v_x] = L_x T^{-1}$ $[v_y] = S_x L_z^{-1} T^{-1}$ $[v_z] = L_z T^{-1}$	$[v_r] = L_r T^{-1}$ $[v_p] = \varphi L_r T^{-1}$ $[v_z] = L_z T^{-1}$	$[v] = L T^{-1}$

(continúa)

Magnitud o propiedad física	Fórmula dimensional discriminada		Fórmula dimensional clásica	
	Coordenadas rectangulares	Coordenadas cilíndricas		
Fuerza, F (N)	$[F_x] = L_x^{-1}Q$ $[F_y] = L_y^{-1}Q$ $[F_z] = L_z^{-1}Q$	$[F_x] = L_x^{-1}Q$ $[F_y] = S_x^{-1}L_zQ$ $[F_z] = L_z^{-1}Q$	$[F_r] = ML_rT^{-2}$...	$[F] = L^{-1}Q$
Energía mecánica, w (J)	$[w] = Q$	$[w] = Q$	$[w] = Q$	$[w] = Q$
Presión, p (Pa)	$[p] = L_x^1L_y^{-1}Q_z^{-1}$	$[p] = ML_xS_x^{-1}T^{-2}$	$[p_r] =$ $= M\varphi^{-1}L_z^{-1}T^{-2}$...	$[p] = L^{-3}Q$
Tempera- tura, θ (K)	$[\theta] = \theta$	$[\theta] = \theta$	$[\theta] = \theta$	$[\theta] = \theta$
Conducti- vidad té- rmica, k (W/m.K)	$[k_x] =$ $= QLL_y^{-1}L_z^{-1}T^{-1}\theta^{-1}$...	$[k_x] =$ $= QL_xS_x^{-1}T^{-1}\theta^{-1}$...	$[k_r] =$ $= Q\varphi^{-1}L_z^{-1}T^{-1}\theta^{-1}$...	$[k] =$ $= QL^{-1}T^{-1}\theta^{-1}$
Viscosidad dinámica, μ (Nm ² s ⁻¹)	$[\mu_{xy}] =$ $= L_x^{-3}L_yL_z^{-1}QT$...	$[\mu_{xy}] =$ $= L_x^{-3}S_xL_z^{-2}QT$...	$[\mu_r] =$ $= M\varphi^{-1}L_r^2L_zT^{-1}$...	$[\mu] = L^{-3}QT$
Viscosidad cinemática, ν (m ² s ⁻¹)	$[\nu_x] = L_x^2T^{-1}$...	$[\nu_x] = L_x^2T^{-1}$...	$[\nu_r] = L_r^2T^{-1}$...	$[\nu] = L^2 T^{-1}$
Calor espe- cífico por unidad de volumen c_e (Jm ³ K ⁻¹)	$[c_e] =$ $= QL_x^{-1}L_y^{-1}L_z^{-1}\theta^{-1}$	$[c_e] =$ $= QL_x^{-1}S_x^{-1}\theta^{-1}$	$[c_e] =$ $= Q\varphi^{-1}L_r^{-2}L_z^{-1}\theta^{-1}$	$[c_e] =$ $= QL^{-3}\theta^{-1}$
Difusividad térmica, α (m ² s ⁻¹)	$[\alpha_x] = L_x^{-2}T^{-1}$...	$[\alpha_x] = L_x^2T^{-1}$...	$[\alpha_r] = L_r^2T^{-1}$...	$[\alpha] = L^2 T^{-1}$

(*)En función de la dirección principal del movimiento del fluido, como ocurre en la mayor parte de los problemas, se deberá emplear una de las fórmulas dimensionales de la densidad del fluido.

Ejemplo 2.13

Sea un flujo de un fluido por el interior de un tubo en donde se produce transferencia de energía calorífica con disipación de energía por efectos viscosos. El calor pasa de la superficie interior del tubo al fluido en dirección radial. Deduzca las fórmulas dimensionales de la densidad del fluido, de la conductividad térmica y del coeficiente de transmisión del calor.

Solución

La base dimensional adecuada es $\{L_r, \varphi, L_z, Q, T, \theta\}$. La dirección principal del fluido es la del eje de simetría del tubo, Figura 2.1, dirección z . Entonces,

$$[F_z] [z] = Q, \quad [F_z] = L_z^{-1} Q, \quad [F_z] = [m] [a_z], \quad [m] = L_z^{-2} Q T^2$$

con lo que

$$[\rho] = [m]/[V] = Q \varphi^{-1} L_r^{-2} L_z^{-2} T^2$$

De acuerdo con la ley de Fourier $j_r = S_r k_r (\partial \theta / \partial r)$ y, sabiendo que $[S_r] = L_r \varphi L_z$ y $[\partial \theta / \partial r] = \theta L_r^{-1}$, deducimos que

$$[k_r] = [j_r] / ([S_r] [\partial \theta / \partial r]) = Q T^{-1} / ((L_r \varphi L_z) (\theta L_r^{-1})) = Q \varphi^{-1} L_z^{-1} T^{-1} \theta^{-1}$$

Nótese que, sin discriminación, $[k] = Q L^{-1} T^{-1}$. Por otra parte, a partir de la ley de enfriamiento de Newton, $j = h S_r \Delta \theta$, es inmediato deducir que

$$[h] = Q T^{-1} L_r^{-1} \varphi^{-1} L_z^{-1} \theta^{-1}$$

2.3.3 Transmisión de calor con efectos mecánicos y disipación de energía despreciable

En un gran número de procesos de transmisión de calor por convección en el seno de fluidos de viscosidad reducida o gradientes de velocidad pequeños, la disipación o conversión de energía mecánica en calorífica es despreciable y, en consecuencia, es posible eliminar del sistema de leyes asumido en el apartado anterior el principio de equivalencia de calor y trabajo de Joule, que conecta las leyes del calor y de la mecánica. El calor, Q , y el trabajo, W , se introducen pues mediante leyes independientes; sus medidas y unidades están relacionadas con las de otras magnitudes, pero no entre sí directamente, por lo que la elección de la unidad de Q es independiente de la elección de la unidad de W . Bajo este supuesto es inmediato deducir que la multiplicidad de la base dimensional es cinco y, de entre las posibles bases, la más extensamente empleada es

$\{L, Q, T, \theta, M\}$. Las ecuaciones dimensionales de Q y W son, pues, diferentes en esta base, $[Q] = Q$ y $[W] = LMT^{-2}$. La Tabla 2.12 muestra las fórmulas dimensionales de las magnitudes y constantes características.

Tabla 2.12

Fórmulas dimensionales en diferentes bases de magnitudes y propiedades físicas típicas en transmisión de calor con efectos mecánicos y con disipación de energía despreciable

Magnitud o propiedad física	Fórmula dimensional discriminada			Fórmula dimensional clásica
	Coordenadas rectangulares	Coordenadas cilíndricas	{ $L_x, L_y, L_z, Q, T, \theta, M$ }	
	{ $L_x, L_y, L_z, Q, T, \theta, M$ }	{ $L_x, S_x, L_z, Q, T, \theta, M$ }	{ $L_r, \varphi, L_z, Q, T, \theta, M$ }	{ L, Q, T, θ, M }
Longitud, l (m)	$[l_x] = L_x$ $[l_y] = L_y$ $[l_z] = L_z$	$[l_x] = L_x$ $[l_y] = S_x L_z^{-1}$ $[l_z] = L_z$	$[l_r] = L_r$ $[l_z] = L_z$ $[l_p] = \varphi L_r$	$[l] = L$
Su superficie, S (m^2)	$[S_x] = L_y L_z$...	$[S_x] = S_x$ $[S_y] = L_x L_z$ $[S_z] = L_x S_x L_z^{-1}$	$[S_r] = \varphi L_r L_z$ $[S_z] = \varphi L_r^2$ $[S] = L_r L_z$	$[S] = L^2$
Volumen, V (m^3)	$[V] = L_x L_y L_z$	$[V] = S_x L_x$	$[V] = \varphi L_r^2 L_z$	$[V] = L^3$
Masa, m (kg)	$[m] = M$	$[m] = M$	$[m] = M$	$[m] = M$
Tiempo, t (s)	$[t] = T$	$[t] = T$	$[t] = T$	$[t] = T$
Densidad, ρ ($kg m^{-3}$)	$[\rho] = M L_x^{-1} L_y^{-1} L_z^{-1}$	$[\rho] = M L_x^{-1} S_x^{-1}$	$[\rho] = M \varphi^{-1} L_r^{-2} L_z^{-1}$	$[\rho] = M L^{-3}$
Ángulo, φ (rad)			$[\varphi] = \varphi$	
Velocidad angular, ω (rad/s)	$[\omega] = T^{-1}$	$[\omega] = T^{-1}$	$[\omega] = \varphi T^{-1}$	$[\omega] = T^{-1}$
Velocidad, v (m/s)	$[v_x] = L_x T^{-1}$...	$[v_x] = L_x T^{-1}$ $[v_y] = S_x L_z^{-1} T^{-1}$ $[v_z] = L_z T^{-1}$	$[v_r] = L_r T^{-1}$ $[v_p] = \varphi L_r T^{-1}$ $[v_z] = L_z T^{-1}$	$[v] = L T^{-1}$
Fuerza, F (N)	$[F_x] = M L_x T^{-2}$...	$[F_x] = M L_x T^{-2}$...	$[F_r] = M L_r T^{-2}$...	$[F] = M L T^{-2}$

(continúa)

Magnitud o propiedad física	Fórmula dimensional discriminada			Fórmula dimensional clásica
	Coordenadas rectangulares	Coordenadas cilíndricas		
Energía mecánica, w (J)	$[w_x] = ML_x^{-2}T^{-2}$... $[w_x] = ML_x^{-2}T^{-2}$...	$[w_x] = ML_x^{-2}T^{-2}$... $[w_r] = ML_r^{-2}T^{-2}$...	$[w_r] = ML_r^{-2}T^{-2}$...	$[w] = ML^2T^{-2}$
Presión, p (Pa)	$[p_x] = ML_x^{-1}L_y^{-1}L_zT^{-2}$... $[p_x] = ML_xS_x^{-1}T^{-2}$...	$[p_x] = ML_xS_x^{-1}T^{-2}$... $[p_r] = M\varphi^{-1}L_z^{-1}T^{-2}$...	$[p_r] = M\varphi^{-1}L_z^{-1}T^{-2}$...	$[p] = ML^{-1}T^{-2}$
Tempera- tura, θ (K)	$[\theta] = \theta$	$[\theta] = \theta$	$[\theta] = \theta$	$[\theta] = \theta$
Conducti- vidad térmica, k (W/m.K)	$[k_x] =$ $= QL_xL_y^{-1}L_z^{-1}T^{-1}\theta^{-1}$... $[k_x] =$ $= QL_xS_x^{-1}T^{-1}\theta^{-1}$... $[k_r] =$ $= Q\varphi^{-1}L_z^{-1}T^{-1}\theta^{-1}$...	$[k_x] =$ $= QL_xS_x^{-1}T^{-1}\theta^{-1}$... $[k_r] =$ $= Q\varphi^{-1}L_z^{-1}T^{-1}\theta^{-1}$...	$[k_r] =$ $= Q\varphi^{-1}L_z^{-1}T^{-1}\theta^{-1}$...	$[k] = QL^{-1}T^{-1}\theta^1$
Viscosidad dinámica, μ (Nm s ⁻²)	$[\mu_x] =$ $= ML^{-1}L_x^{-1}L_y^{-1}L_zT^{-1}$... $[\mu_x] =$ $= ML^{-1}S_x^{-1}L^2T^{-1}$... $[\mu_r] =$ $= M\varphi^{-1}L^{-2}L_zT^{-1}$... $[\mu] =$ $= ML^{-1}T^{-1}$	$[\mu_x] =$ $= ML^{-1}S_x^{-1}L^2T^{-1}$... $[\mu_r] =$ $= M\varphi^{-1}L^{-2}L_zT^{-1}$... $[\mu] =$ $= ML^{-1}T^{-1}$	$[\mu_r] =$ $= M\varphi^{-1}L^{-2}L_zT^{-1}$... $[\mu] =$ $= ML^{-1}T^{-1}$	$[\mu] = ML^{-1}T^{-1}$
Viscosidad cinemática, ν (m ² s ⁻¹)	$[\nu_x] = L_x^2T^{-1}$... $[\nu_x] = L_x^2T^{-1}$... $[\nu_r] = L_r^2T^{-1}$... $[\nu] = L^2T^{-1}$	$[\nu_x] = L_x^2T^{-1}$... $[\nu_r] = L_r^2T^{-1}$... $[\nu] = L^2T^{-1}$	$[\nu_r] = L_r^2T^{-1}$... $[\nu] = L^2T^{-1}$	$[\nu] = L^2T^{-1}$
Calor espe- cífico de la unidad de volumen, c_e (J.m ⁻³ K ⁻¹)	$[c_e] = QL_x^{-1}L_y^{-1}L_z^{-1}\theta^{-1}$	$[c_e] = QL_x^{-1}S_x^{-1}\theta^{-1}$	$[c_e] =$ $= Q\varphi^{-1}L_r^{-2}L_z^{-1}\theta^{-1}$	$[c_e] = QL^{-3}\theta^{-1}$
Difusivi- dad té- rmica, α (m ² s ⁻¹)	$[\alpha_x] = L_x^2T^{-1}$... $[\alpha_x] = L_x^2T^{-1}$... $[\alpha_r] = L_r^2T^{-1}$... $[\alpha] = L^2T^{-1}$	$[\alpha_x] = L_x^2T^{-1}$... $[\alpha_r] = L_r^2T^{-1}$... $[\alpha] = L^2T^{-1}$	$[\alpha_r] = L_r^2T^{-1}$... $[\alpha] = L^2T^{-1}$	$[\alpha] = L^2T^{-1}$

Ejemplo 2.14

Una placa vertical isoterma transmite calor por convección libre con un fluido que la rodea, Figura 2.13. La disipación viscosa en el fluido es despreciable. Deduzca las fórmulas dimensionales de la densidad del fluido, de la conductividad térmica y del coeficiente de transmisión del calor.

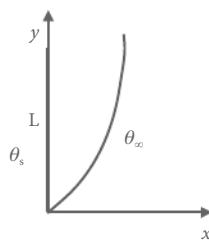


Figura 2.13 Geometría del problema

Solución

Adoptaremos la base dimensional $\{L_x, L_y, L_z, Q, T, \theta, M\}$. El movimiento del fluido, causado por las fuerzas de flotación debidas a la dilatación del fluido, en las proximidades de la placa es en dirección vertical. Para la densidad se tiene

$$[\rho] = [m]/[V] = M L_x^{-1} L_y^{-1} L_z^{-1}$$

Para la conductividad térmica, de acuerdo con la ley de Fourier $j = S_x k_x (\partial \theta / \partial x)$ y, teniendo en cuenta que $[S_x] = L_y L_z$ y $[\partial \theta / \partial x] = \theta L_x^{-1}$, deduce

$$[k_x] = [j_x] / ([S_x] [\partial \theta / \partial x]) = QT^{-1} / ((L_y L_z) (\theta L_x^{-1})) = QLL_x^{-1} L_y^{-1} L_z^{-1} T^{-1} \theta^{-1}$$

Por otra parte, de la ley de enfriamiento de Newton, $j_x = h S_x \Delta \theta$, se deduce

$$[h] = QT^{-1} L_y^{-1} L_z^{-1} \theta^{-1}$$

Adviértase que, sin discriminación, $[h] = QT^{-1} L^{-2} \theta^{-1}$.

La utilización de una base dimensional u otra debe decidirse una vez encuadrado el fenómeno físico que tiene lugar en una de las tres teorías establecidas. Esta cuestión, aparentemente sin importancia y frecuentemente obviada en los textos, es sin embargo esencial para obtener no solo soluciones más precisas del problema sino para evitar soluciones erróneas.

Por ejemplo, sea un problema de convección en el que puede considerarse

despreciable la disipación viscosa y del ~~que se resuelve con la base dimensional~~ ~~$\{L, Q, T, \theta\}$ o con la base $\{L, M, T, \theta\}$, la solución se describe en función de i monomios adimensionales, $i = n - h$, siendo h la característica de la matriz formada por los exponentes dimensionales de las variables. Sin embargo, si se resuelve con la base dimensional $\{L, Q, T, \theta, M\}$, obtendremos una solución formada por un monomio menos, $i = n - h'$, puesto que la característica de la matriz habrá aumentado en una unidad, $h' = h + 1$. Si se aplica la base adecuada (pentadimensional), se impide la aparición del monomio adimensional que expresa la relación entre energía mecánica y energía calorífica, mientras que con las bases tetradimensionales dicho monomio forma parte de la solución.~~

A cualquiera de las bases señaladas anteriormente como hemos mostrado le es aplicable la discriminación de las dimensiones del espacio. Así, se han considerado las bases dimensionales $\{L_x, L_y, L_z, Q, T, \theta\}$, $\{L_x, L_y, L_z, Q, T, \theta, M\}$, en coordenadas cartesianas, $\{L_r, \varphi, L_z, Q, T, \theta\}$, $\{L_r, \varphi, L_z, Q, T, \theta, M\}$, en coordenadas cilíndricas y $\{L_r, \varphi, \theta, Q, T, \theta\}$, $\{L_r, \varphi, \theta, Q, T, \theta, M\}$ en coordenadas esféricas (tablas 2.7, 2.11 y 2.12).

2.4 Homogeneidad de las ecuaciones en el análisis dimensional discriminado

La materialización de una teoría física es su conjunto de leyes cuya naturaleza es diferente. Existen *leyes llamadas de conservación* (masa, volumen, energía...), leyes de carácter empírico y leyes constitutivas o de definición de las constantes físicas que intervienen en la teoría, a las que se pueden añadir otras leyes de dependencia entre variables o de otro tipo. Cuando se utiliza el análisis dimensional para establecer, de acuerdo con las leyes de definición de las constantes en una base determinada, las ecuaciones de dimensión de las variables y constantes de la teoría, debe cumplirse que los términos de las ecuaciones de cada ley deben ser dimensionalmente homogéneos. Este es el llamado “principio de homogeneidad de las ecuaciones físicas”. En realidad, un teorema derivado de las reglas anteriores.

Es sabido que una de las ventajas fundamentales del principio de homogeneidad es la posibilidad de detectar errores en las ecuaciones y en las fórmulas físicas derivadas de las leyes fundamentales y que se aplican a la resolución de problemas concretos. La aplicación del ADC con tal fin ha sido frecuente tanto en el ámbito de la docencia como en el de la investigación. Se ha de tener en cuenta que este es el principio seguido por los métodos experimentales cuando se trata de obtener correlaciones empíricas que se ajusten a la solución del problema.

Ilustraremos mediante tres ejemplos, aplicando el ADD, cómo ecuaciones derivadas de las fundamentales de tres teorías diferentes cumplen el requisito de homogeneidad dimensional.

2.4.1 Ecuación 2-D, transitoria, de conducción en una placa

La ecuación de conducción es la expresión del balance calorífico en la placa. Utilizando la ecuación de Fourier, este balance para el caso 2-D, transitorio, se escribe en la forma

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\rho k \partial \theta}{\alpha} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(k \frac{\partial \theta}{\partial y} \right) = c_e \frac{\partial \theta}{\partial t}$$

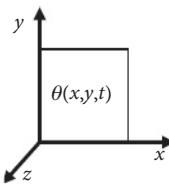


Figura 2.14 Geometría del problema

Este tipo de problema pertenece a la teoría de transmisión de calor por conducción pura cuya base dimensional, según el apartado anterior, es $\{L, Q, T, \theta\}$. Empleando un sistema de ejes coordinados como el representado en la Figura 2.14, la base dimensional discriminada adecuada es $\{L_x, L_y, L_z, Q, T, \theta\}$.

El primer miembro de la ecuación representa el flujo neto de calor que entra y sale por conducción de la placa; el primer sumando corresponde al calor transmitido en dirección x , y el segundo, al transmitido en dirección y . La fórmula dimensional de la conductividad térmica en cada dirección es, de acuerdo con la Tabla 2.5,

$$[k_x] = Q L_x^{-1} L_y^{-1} L_z^{-1} T^{-1} \theta^{-1}$$

$$[k_y] = Q L_x^{-1} L_y^{-1} L_z^{-1} T^{-1} \theta^{-1}$$

Por otra parte,

$$[c'_e] = Q L_x^{-1} L_y^{-1} L_z^{-1} T^{-1} \theta^{-1}$$

En consecuencia, las fórmulas dimensionales de cada término de la ecuación son

$$\left[\frac{\partial}{\partial x} \left(k_x \frac{\partial \theta}{\partial x} \right) \right] = \frac{Q L_x^{-1} L_y^{-1} L_z^{-1} T^{-1} \theta^{-1} \theta}{L_x^2} = Q L_x^{-1} L_y^{-1} L_z^{-1} T^{-1}$$

$$\left[\frac{\partial}{\partial y} \left(k_y \frac{\partial \theta}{\partial y} \right) \right] = \frac{Q L_x^{-1} L_y^{-1} L_z^{-1} T^{-1} \theta^{-1} \theta}{L_y^2} = Q L_x^{-1} L_y^{-1} L_z^{-1} T^{-1}$$

$$\left[c'_e \frac{\partial \theta}{\partial t} \right] = \frac{Q L_x^{-1} L_y^{-1} L_z^{-1} \theta^{-1} \theta}{T} = Q L_x^{-1} L_y^{-1} L_z^{-1} T^{-1}$$

Los términos son dimensionalmente homogéneos en la base dimensional discriminada utilizada, y su dimensión es la de energía calorífica en la unidad de tiempo y volumen.

2.4.2 Flujo estacionario en un canal recto

Sea un flujo estacionario de un fluido en un canal recto formado por dos placas paralelas, Figura 2.15, en el que se considera que el gradiente de presiones en la

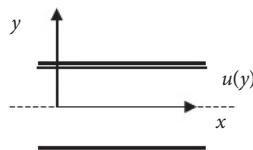


Figura 2.15 Geometría del problema

dirección del flujo, x , es constante. La ecuación de Navier-Stokes se reduce en este caso a la forma:

$$\frac{dp}{dx} = \mu \frac{d^2u}{dy^2}$$

Es un problema de mecánica de fluidos donde la base dimensional (discriminada) adecuada es $\{L_x, L_y, L_z, T, M\}$. Según la Tabla 2.1, las fórmulas dimensionales de la presión, fuerza por unidad de superficie en dirección x , y la viscosidad, fricción entre capas de fluidos paralelas contenidas en planos xz , en dicha base, son:

$$[p_x] = ML_x^{-1}L_y^{-1}L_z^{-1}T^{-2}$$

$$[\mu_x] = ML_x^{-1}L_y^{-1}L_z^{-1}T^{-1}$$

Por consiguiente, los términos

$$\left[\frac{dp}{dx} \right] = \frac{LL_y^{-1}L_z^{-1}MT^{-2}}{L_x} = L_y^{-1}L_z^{-1}MT^{-2}$$

$$\left[\mu \frac{d^2u}{dy^2} \right] = \frac{L_x^1 L_y^{-1} L_z^{-1} M T^{-1} L_x T^{-1}}{L_y^2} = L_y^{-1} L_z^{-1} M T^{-2}$$

son dimensionalmente homogéneos en la base de mecánica de fluidos. Su dimensión es la de una fuerza por unidad de volumen.

2.4.3 Ecuación de la energía para fluidos incompresibles

La ecuación de la energía en fluidos es el balance entre:

- (i) el cambio temporal de la energía interna y mecánica por unidad de masa,

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{2} \rho v^2 + \rho u \right)$$

- (ii) la densidad de flujo de energía asociada a la transferencia de masa,

$$\text{div} [(\rho v^2/2 + h)]$$

- (iii) la densidad de flujo de energía asociada a los procesos de fricción interna debidos a la viscosidad, los cuales tienen lugar bien en la totalidad del fluido, $\text{grad}(\theta) = 0$, o debido a una distribución espacial no uniforme, $\text{div}[-\mathbf{v} \cdot \boldsymbol{\sigma}']$, y
- (iv) densidad de flujo de calor asociada a los procesos de conducción, dependiente de $\text{grad}(\theta)$ debido a la existencia de procesos de disipación o de fuentes de calor en el interior del fluido. Este flujo, desarrollado en series de $\text{grad}(\theta)$, puede ser aproximado por

$$\text{div}[-k \text{grad}(\theta)]$$

balance que se escribe en la forma

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{2} \rho v^2 + \rho u \right) = -\text{div} [(\rho v^2/2 + h) - \mathbf{v} \cdot \boldsymbol{\sigma}' - k \text{grad}(\theta)]$$

Teniendo en cuenta ciertas relaciones termodinámicas, teoremas de conservación y leyes de Navier-Stokes, la ecuación anterior toma la forma:

$$\rho \theta [\partial s / \partial t + \mathbf{v} \cdot \text{grad}(s)] = \boldsymbol{\sigma}'_{ik} (\partial v_i / \partial x_k) + \text{grad}[k \text{grad}(\theta)]$$

donde, $[\partial s / \partial t + \mathbf{v} \cdot \text{grad}(s)]$ es el cambio total (local y convectivo) de la entropía específica del fluido, y

$\rho \theta [\partial s / \partial t + \mathbf{v} \cdot \text{grad}(s)]$ el calor específico almacenado en la unidad de tiempo.

Este último se debe a la energía disipada por los procesos viscosos $\boldsymbol{\sigma}'_{ik} (\partial v_i / \partial x_k)$, más la energía introducida en la masa de fluido por conducción térmica, $\text{grad}[k \text{grad}(\theta)]$.

El tensor de tensiones del fluido $\boldsymbol{\sigma}$, se compone de dos sumandos. Uno asociado a las fuerzas de fricción y otro asociado a las fuerzas de presión, $\boldsymbol{\sigma}_{ik} = \boldsymbol{\sigma}'_{ik} - p \delta_{ik}$. Usando la forma más general de $\boldsymbol{\sigma}'_{ik}$

$$\boldsymbol{\sigma}'_{ik} = \mu [(\partial v_i / \partial x_k) + (\partial v_k / \partial x_i) - (2/3) \delta_{ik} (\partial v_l / \partial x_l)] + \xi \delta_{ik} (\partial v_l / \partial x_l)$$

que tiene la ventaja de que la expresión entre corchetes se reduce a cero por contracción ($i = k$), el balance anterior, para fluidos incompresibles, se reduce a

$$\partial \theta / \partial t + \mathbf{v} \cdot \text{grad}(\theta) = \alpha \Delta(\theta) + (v/2c_p) [(\partial v_i / \partial x_k) + (\partial v_k / \partial x_i)]^2$$

$$\text{con } \alpha = k/(\rho c_p) \text{ y } v = \mu/\rho$$

Para un medio homogéneo e isotrópico en reposo, cuyas propiedades son independientes de la temperatura, la anterior ecuación se reduce a la ecuación de conducción de Fourier,

$$\partial \theta / \partial t = \alpha \Delta(\theta)$$

En el estudio de la transferencia de calor entre superficies sólidas y fluidos se distinguen dos casos:

- (i) transferencia de calor sin conversión de energía, en la cual el último término es despreciable, y
- (ii) transferencia de calor con conversión de energía mecánica a térmica (o viceversa), en la cual el último término de la ecuación anterior es del mismo orden de magnitud que los otros térmicos.

De acuerdo con lo mencionado en el apartado anterior, en el segundo caso la multiplicidad del la base es cuatro, siendo la base más extendida $\{L, Q, T, \theta\}$, mientras que en el primero la multiplicidad es cinco, siendo $\{L, M, Q, T, \theta\}$ la base más general.

Transferencia de calor sin conversión de energía

Las ecuaciones dimensionales de cada uno de los términos de la ecuación $\partial\theta/\partial t + v \cdot \nabla \theta = \alpha \Delta(\theta) + (\nu/2c_p) [(\partial v_i / \partial x_k) + (\partial v_k / \partial x_i)]^2$ son

$$[\partial\theta/\partial t] = \theta T^{-1}$$

$$[v \cdot \nabla \theta] = [\sum_{i,j,k} \{v_i (\partial/\partial x_j)\} \theta] = \theta T^{-1}, \text{ ya que } [v_i (\partial/\partial x_j)] = T^{-1}$$

La ecuación dimensional de cada uno de los sumandos de $\Delta(\theta)$ no es la misma. Sin embargo, los sumandos de $\alpha \Delta(\theta)$ tienen la misma ecuación dimensional, ya que α es una magnitud tensorial y sus componentes tienen diferentes ecuaciones dimensionales en ADD. Efectivamente, si la discriminación se aplica a la longitud asociada a la dirección del gradiente térmico, $L_{\text{grad}(\theta)}$, y a la superficie normal a esa dirección, que designaremos por $S_{\text{grad}(\theta)}$, las ecuaciones de dimensión de k y ρc_p son

$$[k] = \left[\frac{dQ}{dSdt (\partial\theta/\partial n)} \right] = QT^{-1} S_{\text{grad}(\theta)}^{-1} \theta L_{\text{grad}(\theta)}$$

$$[\rho c_p] = \left[\frac{1}{V} \frac{dQ}{d\theta} \right] = S_{\text{grad}(\theta)}^{-1} L_{\text{grad}(\theta)}^{-1} Q \theta^{-1}$$

donde V denota el volumen del fluido, $[V] = S_{\text{grad}(\theta)} L_{\text{grad}(\theta)}$. De esta forma,

$$[\alpha] = [k]/[\rho c_p] = L_{\text{grad}(\theta)}^{-2} T^{-1}$$

la dimensión típica de un coeficiente de difusión asociada a la difusión del calor en la dirección $L_{\text{grad}(\theta)}$.

Aplicando la discusión previa a la base discriminada $(L_x, L_y, L_z, Q, T, \theta, M)$, podemos escribir

$$[\alpha_x] = (L_{\text{grad}(\theta),x})^2 T^{-1}$$

$$[\alpha_y] = (L_{\text{grad}(\theta),y})^2 T^{-1}$$

$$[\alpha_z] = (L_{\text{grad}(\theta),z})^2 T^{-1}$$

y “ $\alpha \Delta(\theta)$ ” se puede expresar en forma matricial:

$$(\alpha_x \alpha_y \alpha_z)^T (\partial^2 / \partial x^2 \partial^2 / \partial y^2 \partial^2 / \partial z^2) \theta$$

cuyos sumandos son dimensionalmente homogéneos y tienen la ecuación de dimensión θT^{-1} , que es la misma que la dimensión de “ $\partial \theta / \partial t$ ” y “ $v \text{ grad}(\theta)$ ”.

Transferencia de calor con conversión de energía

En este caso, cuando existe disipación de calor por fricción, la base dimensional adecuada es $\{L, Q, T, \theta\}$ o su correspondiente base discriminada. Es fácil demostrar que los tres primeros términos de la ecuación $\partial \theta / \partial t + v \text{ grad}(\theta) = \alpha \Delta(\theta) + (v/2c_p)[(\partial v_i / \partial x_k) + (\partial v_k / \partial x_i)]^2$ son homogéneos y tienen la misma ecuación dimensional θT^{-1} .

Sin embargo, la deducción de la ecuación dimensional del último término presenta mayor dificultad.

La viscosidad cinemática (que caracteriza la difusión del momento) tiene la dimensión típica de un coeficiente de difusión, L_\perp^2/T , con L_\perp la dirección en la que se difunde el momento (normal a la velocidad, v).

Efectivamente, aplicaremos la discriminación eligiendo dos direcciones: una paralela a la velocidad del fluido (que coincide con la dirección de la fuerza de fricción, L_\parallel) y la otra normal a las superficies de fricción, L_\perp . Para completar la base se añade la superficie de fricción, S_\perp . En esta base, $\{L_\parallel, L_\perp, S_\perp, Q, T, \theta\}$, las ecuaciones dimensionales de la fuerza, masa y densidad son:

$$[W] = [Q] = Q; [F] = [W]/[r] = L_\parallel^{-1} Q$$

$$[m] = [F/a] = L_\parallel^{-1} Q / L_\parallel T^{-2} = L_\parallel^{-2} Q T^2$$

$$[\rho] = [m/V] = L_\parallel^2 T^2 / L_\perp^4 S_\perp = L_\parallel^2 S_\perp^{-1} T^2$$

de forma que la ecuación de dimensiones de la viscosidad dinámica μ , a partir de la ley de Newton, $F = \mu S(\partial v / \partial n)$, es

$$[\mu] = \left[\frac{F}{S(\partial v / \partial n)} \right] = L_\parallel^{-1} Q (S_\perp)^{-1} (L_\perp T_\perp^{-1} / L_\parallel)^{-1} = L_\parallel^{-2} L_\perp S_\perp^{-1} Q T$$

y la de la viscosidad cinemática, ν ,

$$[\nu] = [\mu]/[\rho] = L_\perp^2 T^{-1}$$

que tiene el mismo carácter tensorial que la difusividad térmica. En coordenadas rectangulares,

$$[\nu_i] = L_i^2 T^{-1} \quad i = x, y, z$$

y, usando la base anterior $\{L_{||}, L_{\perp}, S_{\perp}, Q, T, \theta\}$,

$$[(\partial v^i / \partial x^k)^2] = L_{||}^2 L_{\perp}^2 T^{-2}$$

$$[c_p] = \left[\frac{1}{m} \frac{dQ}{d\theta} \right] = L_{||}^2 T^{-2} \theta^{-1}$$

$$[(\nu_i / 2c_p)] = L_{||}^2 L_{\perp}^2 T \theta$$

con lo que

$$[(\nu_i / 2c_p)(\partial v_i / \partial x_k)^2] = \theta T^{-1}$$

En conclusión, la ecuación de la energía es también homogénea en la base discriminada.

2.5 El teorema de π modificado

En el texto de Palacios [1955] puede encontrarse tanto el enunciado de teorema de Buckingham en su forma sencilla (Buckingham [1914]) como la modificación que propone Palacios en relación con la deducción del número de monomios independientes, así como la justificación de esta modificación. Para Buckingham, este número es la diferencia entre el número de magnitudes y el número de unidades fundamentales para medir dichas magnitudes; para Palacios, el número de monomios es la diferencia entre el número de variables o magnitudes independientes del problema y la característica de la matriz formada con los exponentes dimensionales con relación a una base completa cualquiera.

Suponemos al lector familiarizado con la aplicación de este teorema y le remitimos al texto de Palacios para su aprendizaje si no es así.

Recientemente, Sonin [2004] propone una generalización de este teorema. Este organiza los grupos adimensionales convenientemente, de forma que los separa en subgrupos cuyas variables, eventualmente, solo aparecen en uno de esos subgrupos. De esta forma, si en un problema particular hay variables cuyos valores son fijos y están recogidas, todas y cada una de ellas en un subgrupo formado por n monomios, la solución del problema puede expresarse en función de $m - n$ monomios, siendo m el número total de monomios sencillos. Esta generalización, que descansa en el hecho de poder expresar el conjunto total de monomios de un problema de diferentes formas particulares, ya que combinaciones (productos, cocientes y potencias) entre monomios dan lugar a nuevos monomios,

y que Sonin ambiciosamente llama “generalización del teorema de”, aunque interesante en cuanto a que implementa un protocolo que se ha venido aplicando desde siempre en el análisis dimensional, tiene una aplicación muy limitada. Los investigadores en este campo saben cómo alcanzar los objetivos que este teorema presenta con la mayor destreza. No parece, en nuestra opinión, sensato atribuir el calificativo de generalización al teorema de π de Buckingham (asociado a la invarianza de las medidas físicas frente al sistema de unidades elegido) para cubrir un aspecto muy secundario referido a la posibilidad de presentar los grupos adimensionales de un problema de manera particular, máxime cuando su aplicación a casos prácticos puede ser muy escasa.

Aplicaciones en la mecánica de fluidos

3.1 Introducción

En este capítulo se presentan una serie de problemas fundamentales de mecánica de fluidos. Se justifica tanto la elección de la base dimensional discriminada adoptada como la selección de las variables de la lista relevante. Esta justificación es fundamental, ya que solo así se obtiene la solución correcta y más precisa del problema. Para ello es necesario profundizar en los aspectos físicos del problema, observando qué fuerzas o energías intervienen y, a partir de ellas, qué variables y características físicas juegan un papel diferenciado. Se determinan las ecuaciones dimensionales de todas las magnitudes y constantes dimensionales y se construye el cuadro de exponentes dimensionales. Mediante la utilización del teorema de π se deducen los monomios adimensionales que forman parte la solución. En muchos de los problemas se comparan los resultados con los proporcionados por el ADC.

La introducción de magnitudes ocultas se justifica por inspección física del problema, aunque dicha justificación puede determinarse a posteriori si la introducción de una magnitud oculta conduce invariablemente a la formación de un monomio en el que interviene esta. Cuando la solución está compuesta por un solo monomio que contiene la variable oculta, queda explícito el orden de magnitud de dicha variable de acuerdo con lo mencionado en el Capítulo 1.

Como veremos, la discriminación conducirá, en general, a un menor número de monomios adimensionales que el ADC. Además estos nuevos monomios, en contraste con los obtenidos por el ADC, tienen un claro significado físico en términos de balances de fuerzas, energías u otras magnitudes, aspecto que se estudiará con más detalle en el Capítulo 5.

La conexión entre los números o coeficientes adimensionales clásicos y los discriminados permite deducir el verdadero significado de los primeros que, en

general, se interpretan en términos de potencias de cocientes de longitudes características de los dominios físicos del problema.

3.2 Ejemplos

Ejemplo 3.1 Ecuaciones de Euler y Bernoulli

Considere una partícula de fluido que se mueve en un flujo estacionario 2-D como el representado en la Figura 3.1. La dirección intrínseca L_s es la marcada por la línea de corriente, mientras que L_n denota una dirección perpendicular a L_s en cada punto de la línea. Dado que se trata de un flujo estacionario, la partícula seguirá la dirección de la línea de corriente en la que está inmersa con una velocidad no constante, v . Estudie la homogeneidad de la ecuación de Euler que representa el balance de fuerzas en las direcciones de la línea de corriente y normal a ella. Analice la homogeneidad de la ecuación de Bernoulli, que deriva de la de Euler, en el ADC y el ADD.

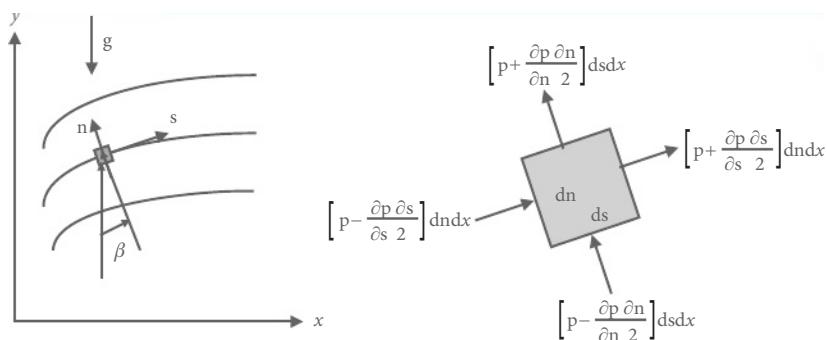


Figura 3.1 Partícula de fluido que sigue una línea de corriente

La elección de este como primer problema no es casual. Además de aclarar por qué los resultados del ADC son directamente satisfactorios y los más precisos, superando aparentemente a los del ADD, se trata de discutir la ecuación de dimensiones de la presión, una magnitud que aplicada al ADD permite degenerar las direcciones del espacio en muchos problemas a causa de la propiedad que tiene esta magnitud de proyectarse en cualquier dirección espacial. Como veremos en algunos de los problemas estudiados, muchas ecuaciones utilizadas en este campo son “aparentemente” no homogéneas en el ADD, mientras que sí lo son en el ADC.

Solución

Discutamos, en primer lugar, la ecuación de Bernoulli escrita en la conocida forma

$$p_1 + \frac{1}{2} \rho v_1^2 = \rho g y_1 \quad p_1 = \frac{1}{2} \rho v_1^2 - \rho g y_1 \quad \text{constante}$$

Usaremos la base dimensional $\{L_x, L_y, L_z, T, M\}$, o la intrínseca $\{L_s, L_n, L_z, T, M\}$, donde L_z denota la dirección saliente del papel en ambos casos. Es obvio que de la forma en que se ha escrito la ecuación de Bernoulli, al margen de la ecuación dimensional que se asigne a la presión, los términos $(1/2) \rho v_1^2$ y $\rho g y_1$ no pueden ser homogéneos con discriminación pues la dirección de la velocidad de la partícula y las direcciones de la gravedad y la altura desplazada no son las mismas. Esto es:

$$[\rho v_1^2] = [\rho] v_1^2 [L_s^2 T^{-2}] \neq [gv_1] [\rho] L_y^2 T^{-2}$$

En la base clásica $\{L, T, M\}$, si existe homogeneidad dimensional como podría comprobarse de inmediato:

$$[\rho v_1^2] = [\rho g v] [\rho L^2 T^{-2}] = ML^{-1} T^{-2}$$

Deduzcamos primero la ecuación de Euler que expresa el balance de fuerzas a lo largo de la línea de corriente y luego volvamos a la de Bernoulli, derivada de la primera. Las fuerzas que actúan sobre la partícula en la dirección s son las asociadas con la presión y con el peso de la partícula. Estas son, respectivamente,

$$\begin{aligned} f_{p,s} &= \left[\rho \left(\frac{\partial p}{\partial s} \right) \frac{ds}{2} \right] dndz \\ f_{p,s} &= -\rho g \sin(\beta) dsdndz \end{aligned}$$

Las ecuaciones dimensionales de ambas fuerzas son las mismas, ya que

$$[\partial p / \partial s] = ML_z^{-1} L_n^{-1} T^{-2}$$

$$[\rho g \sin(\beta)] = ML^z L^n L^s L^s T^{-1} \quad [ML^z L^n T^{-1}] \quad [p/s]$$

Por otro lado, el cambio de momento de la partícula puede escribirse en la forma

$$\rho((v + (\partial v / \partial s) ds - v) / dt) dsdndz = \rho v (\partial v / \partial s) dsdndz$$

Puede comprobarse que las ecuaciones de dimensión de $f_{p,s}$, $f_{p,s}$ y $\rho v (\partial v / \partial s)$ $dxdydz$ son las mismas. La ecuación del momento, en términos de fuerzas por unidad de volumen, llamada ecuación de Euler 1-D, queda pues en la forma

$$\rho v \left(\frac{\partial v}{\partial s} \right) = -\frac{\partial p}{\partial s} - \rho g \sin(\beta)$$

o bien multiplicando por v y reagrupando

$$\frac{dp}{\rho} + v \, dv + g \, \operatorname{sen}(\beta) \left(\frac{dy}{\operatorname{sen}(\beta)} \right) = 0$$

cuya homogeneidad dimensional es asimismo inmediata. La simplificación de la ecuación anterior en la forma

$$\frac{dp}{\rho} + v \, dv + gdv = 0$$

que equivale a sustituir $\operatorname{sen}(\beta)$ por $(\partial y / \partial s)$, es el origen de la aparente falta de homogeneidad. La ecuación de Bernoulli es la simplificación de la de Euler para fluidos de densidad constante,

$$\frac{p}{\rho} + \frac{1}{2} v^2 + gy = \text{constante}$$

Para apreciar mejor su homogeneidad dimensional con discriminación es más conveniente escribirla en la forma

$$\frac{p}{\rho} + \frac{1}{2} v^2 + g \operatorname{sen}(\beta) \left(\frac{y}{\operatorname{sen}(\beta)} \right) = \text{constante}$$

que permite atribuir al producto $(g \operatorname{sen}(\beta))((y/\operatorname{sen}(\beta))$ las dimensiones de $L^2 T^{-2}$.

En cuanto a la ecuación de Euler que expresa el balance de fuerzas normales a las líneas de corriente ocurre otro tanto similar. En la dirección n las fuerzas asociadas a la presión y al peso son, respectivamente,

$$f_{p,n} = \left[p \left(\frac{\partial p}{\partial n} \right) \frac{dn}{2} - dsdz \right] - p \left(\frac{\partial p}{\partial n} \right) \frac{dn}{2} - dsdz - \frac{\partial p}{\partial n} dsdndz$$

$$f_{p,n} = -\rho g \cos(\beta) dsdndz$$

Es fácil comprobar, como en el caso de las fuerzas paralelas a la línea de corriente, que la ecuación dimensional de ambas fuerzas es la misma, $-1 -1 -2$. Por otro lado, el cambio de momento tiene lugar en la dirección M_n . Su valor es, pues,

$$(\rho (\Delta v)^2 / \zeta) dsdndz$$

donde ζ es el radio de curvatura de la línea de corriente y Δv el incremento de velocidad en el sentido radial. De nuevo puede comprobarse que las ecuaciones de dimensión de $f_{p,n}$, $f_{p,n}$ y $(\rho v^2 / \zeta) dsdndz$ son las mismas. La nueva ecuación de Euler, en términos de fuerzas por unidad de volumen, queda pues en la forma

$$\rho \frac{v^2}{\zeta} = -\frac{\partial p}{\partial n} + \rho g \cos(\beta)$$

o bien multiplicando por dn y reagrupando:

$$\frac{dp}{\rho} - \frac{v^2}{\zeta} + g \cos(\beta) \left(\frac{dy}{\cos(\beta)} \right) = 0$$

cuya homogeneidad dimensional es, asimismo, inmediata. De nuevo, la simplificación de la ecuación anterior en la forma

$$\frac{dp}{\rho} + g dy = \frac{v^2}{\zeta}$$

o bien en la forma $(dp/\rho) + g dy = 0$, para líneas de corriente rectas, que equivale a sustituir $\cos(\beta)$ por $(\partial y / \partial n)$, es el sencro de la aparente no homogeneidad de estas ecuaciones.

Es importante entender que los efectos de las fuerzas asociadas a la presión normal a la línea de corriente y a la componente del peso en esa misma dirección no alteran el módulo de la velocidad, pero sí su dirección; lo que es importante para la discriminación espacial. Sin esta contribución, no puede entenderse el fallo en la homogeneidad dimensional entre las magnitudes siguientes: trabajo desarrollado por las fuerzas de presión y peso a lo largo de la línea, que son las que realmente cambian la energía cinética de las partículas de fluido, y la propia energía cinética de la partícula. Es una situación equivalente a la caída de un cuerpo por un plano inclinado (Ejemplo 2.7 del Capítulo 2).

Ejemplo 3.2 Flujo de un líquido no viscoso por vertederos de sección triangular y rectangular

Sea un recipiente muy extenso en una de cuyas paredes verticales existe un vertedero de sección triangular simétrica de ángulo α y altura h , Figura 3.2a), o un vertedero de sección rectangular de lados a y h , Figura 3.2b). Se desea determinar el caudal volumétrico de fluido, \dot{V} (m^3/s), que sale por el vertedero.

Solución

(a) Sección triangular

Sobre un elemento de fluido en el borde del vertedero actúan fuerzas de inercia aserradas a la densidad, ρ , y fuerzas de presión aserradas a la diferencia de pre-



Figura 3.2 Geometría del problema: a) vertedero triangular, b) vertedero rectangular

siones entre el interior y el exterior del vertedero, Δp . Así pues, el caudal es función de dichas variables y de la sección del vertedero S . La lista relevante de variables es, pues, $\langle S, \rho, \Delta p, \dot{V} \rangle$. Si tomamos el sistema de ejes coordinados de la Figura 3.2a), con el eje x en dirección perpendicular a la superficie del vertedero, la base dimensional discriminada es $\{L_x, L_y, L_z, T, M\}$ y las fórmulas dimensionales de las variables son

$$\begin{aligned}\dot{V} &= L_x L_y L_z T^{-1} \\ [S] &= L_y L_z \\ [\rho] &= L_x^1 L_y^M L_z^{-1} \\ [\Delta p] &= [F_x]/[S] = (L_x M T^{-2})/(L_y L_z) = L_x^{-1} L_z^{-1} M T^{-2}\end{aligned}$$

Tabla 3.1 Exponentes dimensionales de las variables del problema

	S	ρ	Δp	\dot{V}
L_x		-1	1	1
L_y	1	-1	-1	1
L_z	1	-1	-1	1
M		1	1	
T			-2	-1

Con los exponentes dimensionales de la Tabla 3.1 se deduce que las magnitudes de la lista pueden formar un único monomio adimensional,

$$\pi = \frac{\Delta p S^2}{\rho \dot{V}^2}$$

Teniendo en cuenta la definición de caudal volumétrico, $\dot{V} = v S$ (v , velocidad), el monomio toma la forma $\pi = \Delta p / \rho v^2$. La solución para el orden de magnitud del caudal es, pues,

$$\dot{V} = C \sqrt{\frac{\Delta p S^2}{\rho}}$$

Por otra parte, la diferencia de presiones en dirección horizontal se debe al peso de una columna de fluido de altura h . Aplicando el teorema de Bernoulli (Ejemplo 3.1), las magnitudes Δp y ρgh son, numéricamente del mismo orden de magnitud, $\Delta p \sim \rho gh$. Con ello, la solución para el caudal puede escribirse en la forma

$$\dot{V} = C \sqrt{\frac{\rho g h S^2}{\rho}} = C \sqrt{g h S^2}$$

Si el vertedero es de sección triangular, Figura 3.2), $S = h^2 \operatorname{tg}(\alpha/2)$, y por tanto

$$\dot{V} = C \sqrt{gh^5 g(\alpha/2)}$$

(b) Sección rectangular

Si el vertedero es de sección rectangular de lados a y h, $S = ah$, y

$$\dot{V} = C a \sqrt{gh^3}$$

Se ha de tener en cuenta que, si se parte de la lista de variables $\langle h, a, \rho, \Delta p, \dot{V} \rangle$ válida para vertederos triangulares (a , la base del triángulo) y rectangulares, la solución sería

$$\dot{V} = C a \sqrt{gh^3}$$

coherente con los resultados anteriores.

La expresión $\Delta p \sim \rho gh$ no es dimensionalmente homogénea (véase Ejemplo 3.1), por lo que las expresiones obtenidas a partir de ella tampoco lo son, no obstante se trata de soluciones numéricamente válidas. En este sentido, si se parte de la lista de variables $\langle S, \rho, \rho g, h, \dot{V} \rangle$ la aplicación del teorema de π con la base dimensional $\{L_x, L_y, L_z, T, M\}$ no proporciona solución alguna del problema.

Finalmente, es interesante observar que, fruto de las degeneraciones entre longitudes, la aplicación del ADC a este problema proporciona los siguientes resultados:

- (i) Con la lista de variables $\langle S, \rho, \Delta p, \dot{V} \rangle$ se obtienen los mismos resultados del ADD tanto para el vertedero triangular como rectangular.
- (ii) Para el vertedero triangular, si en lugar de S se considera h y α , es decir, con $\langle h, \rho, \Delta p = \rho gh, \alpha, \dot{V} \rangle$, el resultado es $\dot{V} = \sqrt{gh^5} f(\alpha)$. Si se consideran las variables $\langle h, a, \rho, \Delta p = \rho gh, \dot{V} \rangle$ el resultado es $\dot{V} = \sqrt{gh^5} f(h/a)$.
- (iii) Para el vertedero rectangular con la lista de variables $\langle h, a, \rho, \Delta p = \rho gh, \dot{V} \rangle$ el resultado es $\dot{V} = \sqrt{gh^5} f(h/a)$.

Ejemplo 3.3 Equilibrio dinámico de un fluido en rotación y de un fluido acelerado

(a) Fluido en rotación

Un fluido viscoso encerrado en un tubo cilíndrico vertical de radio R , que gira alrededor de su eje de rotación con una velocidad angular ω_0 , se encuentra en equilibrio dinámico, Figura 3.3. Calcule la presión en el fluido y la ecuación de la superficie libre.

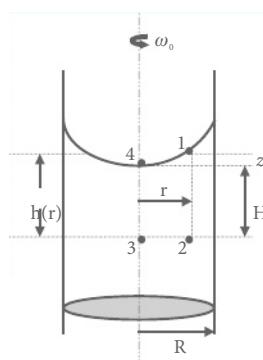


Figura 3.3 Geometría del problema

Solución

La condición de equilibrio dinámico es de carácter hidrostático, y la presión es una magnitud escalar que sirve para describir fuerzas en todas direcciones. Así, en un punto arbitrario, el valor de la presión puede determinarse hidrostáticamente (debido a la altura de la columna de fluido hasta la superficie libre, h , que depende de la posición, r), Δp_h , o bien como presión asociada a las fuerzas centrípetas del fluido en rotación, Δp_ω . La igualdad numérica de ambas diferencias de presión, $\Delta p_h = \Delta p_\omega$, determinará la ecuación de la superficie libre.

Emplearemos la base dimensional cilíndrica $\{L_r, \varphi, L_z, M, T\}$. Para $\Delta p_{h,1-2}$ Figura 3.3, a una profundidad H medida desde el punto más bajo de la superficie libre, las variables relevantes son $\langle \Delta p_{h,1-2}, \rho g, h \rangle$, Tabla 3.2, con $h = H + z$. Las variables ρ y g no juegan un papel separadamente, sino agrupadas para designar el peso del fluido que causa la presión hidrostática.

Tabla 3.2 Exponentes dimensionales

	ρg	h	φ	R	ρ	$\Delta p_{h,1-2}$	$\Delta p_{\omega,3-2}$
L_r	-2			1	-2	-2	
φ	-1		1		-1	-1	-1
L_z		1			-1	1	-1
M	1				1	1	1
T	-2		-1			-2-	2

Se obtiene un único monomio que proporciona el orden de magnitud de la diferencia de presiones; la solución es

$$\Delta p_{h,1-2} = p_{h,2} - p_1 \sim \rho g h$$

o bien

$$p_{h,2} \sim \rho gh + p_1$$

Para $\Delta p_{\omega,3-2}$, las variables relevantes son $\langle \Delta p_{\omega,3-2}, \rho, \omega, r \rangle$, Tabla 3.2, con r como distancia del punto al eje. Aquí interviene la densidad, debido a la inercia (existe aceleración centrípeta), pero no la gravedad. También se obtiene un único monomio, del que resulta la solución

$$\Delta p_{\omega,3-2} = p_{\omega,2} - p_3 \sim \rho \omega^2 r^2$$

o bien

$$p_{\omega,2} \sim \rho \omega^2 r^2 + p_3$$

donde p_3 es la presión (hidrostática) en 3, $p_3 \sim \rho g H + p_4 = \rho g H + p_1$. Al igualar numéricamente $p_{h,2}$ y $p_{\omega,2}$ se obtiene la ecuación de la superficie libre,

$$z \sim \omega^2 r^2 / g$$

Comentario

El ADC proporciona dos monomios para este problema, una solución mucho menos precisa, Herranz y Albino [1989]. Estos autores dicen textualmente que “la solución teórica solo es válida si se utiliza la misma unidad en los diferentes ejes de coordenadas. O sea, si no se discriminan las dimensiones del espacio”, ya que de no

ser así la solución teórica no sería homogénea. En nuestra opinión y nuestra experiencia, como se demuestra insistente en este texto, la aplicación de la discriminación conduce siempre a soluciones más precisas cuando se aplica correctamente, y ello con independencia de cuáles **son** las unidades de medida que se adopten para los ejes coordenados (véase, por ejemplo, el cálculo del espesor de la capa límite en este mismo capítulo). Pero es cierto, a veces, que la aplicación del ADC, sorprendentemente, conduce a las soluciones más precisas cuando se trata de problemas en donde las longitudes reales para cada dirección espacial son del mismo orden de magnitud. Por ejemplo, en un cuerpo esférico, la longitud radial y la perimetral son del mismo orden de magnitud y, en las correlaciones, estas variables aparecen simplificadas quedando todo en función de una de ellas, generalmente el radio; lo mismo ocurre en flujos transversales a tubos circulares donde el perímetro de mojado y el radio son, también, del mismo orden de magnitud. Estas simplificaciones no son posibles cuando las longitudes características no son del

mismo orden de magnitud (ejemplo de la capa límite) con un significado preciso de balances y, sencillamente, no puede obtenerse un monomio adimensional, que sin duda es un cociente de presiones, cuando estas tienen diferentes ecuaciones dimensionales (sea cual sea la discriminación elegida).

En resumen, la presión en equilibrio es una magnitud numéricamente igual en cualquier dirección; sin embargo, su ecuación de dimensiones es diferente para cada dirección. En consecuencia, no es posible obtener monomios adimensionales con discriminación cuyo significado sea el balance de presiones. Cada presión debe obtenerse mediante el análisis dimensional por separado para después igualar numéricamente sus expresiones, operación que no está relacionada con el AD.

(b) Fluido acelerado

Un fluido confinado en un recipiente se somete a un movimiento de aceleración constante en una dirección fija. Determine la ecuación de la superficie libre en estado de equilibrio dinámico, Figura 3.4.

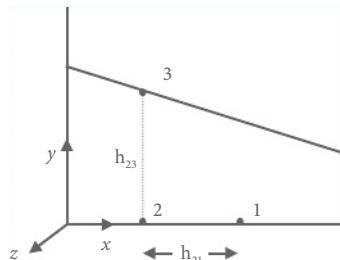


Figura 3.4 Geometría del problema

Solución

Como en el caso anterior, en cualquier punto del recipiente, la presión hidrostática se equilibra numéricamente con la debida a la presión causada por la aceleración. El cálculo, por separado, de las diferencias de presión Δp_{21} (causada por la aceleración) y Δp_{23} (hidrostática), numéricamente iguales, conduce a la ecuación de la superficie libre. Δp_{21} depende de la densidad del fluido, de la aceleración, y de la longitud h_{21} , $\langle \rho, a, h_{21}, \Delta p_{h,21} \rangle$. En la base dimensional discriminada $\{L_x, L_y, L_z, M, T\}$, los exponentes de las variables se indican en la Tabla 3.3. Asimismo, Δp_{23} depende del peso específico y de la altura h_{23} , $\langle \rho g, h_{23}, \Delta p_{v,23} \rangle$. Esta misma tabla muestra los exponentes dimensionales de estas variables.

Tabla 3.3 Exponentes dimensionales

	ρ	a	h_{21}	ρg	h_{23}	Δp_{21}	Δp_{23}
L_x	-1	1	1	-1		1	-1
L_y	-1				-1	-1	1
L_z	-1			-1		-1	1
M	1			11			1
T		-2		-2		-2	-2

En ambos casos se obtiene un solo monomio $p_{21} = \Delta p_{21}/\rho ah_{21}$ y $\pi_{p,23} = \Delta p_{23}/\rho gh_{23}$, que conduce a las soluciones:

$$\Delta p_{21} \sim \rho ah_{21} \text{ y } \Delta p_{23} \sim \rho gh_{23}$$

La igualdad numérica de ambas presiones, en el sistema de ejes de la figura, permite obtener la ecuación de la superficie libre

$$y = -\left(\frac{a}{g}\right)x$$

Ejemplo 3.4 Tiempo de vaciado de un depósito

Obtenga el orden de magnitud del tiempo de vaciado de un depósito por medio de un orificio situado en el fondo o en una pared lateral.

Solución

En primer lugar calcularemos la velocidad de salida. Los textos calculan esta incógnita a partir de la ecuación de Bernoulli para una línea de corriente que une la superficie del fluido con el orificio. Como ya se explicó en el Ejemplo 3.1, la ecuación de Bernoulli no es más que un balance energético entre los trabajos asociados a la presión y a la fuerza peso y el cambio de energía cinética de las partículas de fluido. Dado que en este caso las fuerzas de presión hacen un trabajo nulo, globalmente, ya que los puntos inicial y final de la línea de corriente (superficie del fluido y región de salida del orificio) tienen la misma presión, el único trabajo lo hacen las fuerzas peso que desplazan las partículas en el seno del campo gravitatorio. El trabajo desarrollado por estas fuerzas en cada desplazamiento infinitesimal a lo largo de la línea (Ejemplo 3.1) es $g \operatorname{sen}\beta (dy/\operatorname{sen}\beta) = g dy$. Este trabajo aumenta la energía cinética de la partícula en el mismo valor, pero debido a la curvatura de la línea (restricción similar a la existente cuando un objeto cae por un plano inclinado) impuesta por el resto de fluido la velocidad de la partícula en su movimiento por la línea cambia sucesivamente hasta hacerse vertical (orificio en la base del depósito) u horizontal (orificio en la superficie lateral). Ello se debe a las fuerzas de presión normales a la línea de corriente que, sin añadir energía a la partícula, cambian su dirección continuamente.

Como resultado final, la energía añadida a la partícula $(1/2)mv^2$ no es homogénea discriminadamente al trabajo realizado por la componente tangencial de la fuerza peso a lo largo de la linea, $g y$, ya que la velocidad ha cambiado de dirección (no de módulo) a lo largo del trayecto por efecto de las fuerzas ya mencionadas. Numéricamente, sin embargo, es correcto escribir la solución para la velocidad de salida:

$$v \sim (gh)^{1/2}$$

Un camino alternativo para abordar el cálculo de esta velocidad es el siguiente. Considérese que el fluido apenas se mueve en las cercanías pero lo suficientemente lejos del orificio donde la presión es aproximadamente la hidrostática, de valor ρgy . Gracias a la isotropía dimensional de esta presión, el fluido se

acelerará hacia el exterior del orificio por efecto de la fuerza asociada. Así, numéricamente, si s_o es la sección del orificio, se puede escribir

$$f_p = \rho g y s_o = m (v/t) = \rho s_o v^2$$

de donde se obtiene la misma solución para la velocidad.

Ahora, sabiendo que el caudal de salida es $q = s_o v \sim s_o (gh)^{1/2}$, el tiempo de vaciado, t_o , será del orden de Q/q (donde Q es el volumen del depósito), $Q = A_o h$ con A_o la sección horizontal del recipiente y h la altura del nivel de líquido desde el orificio. Es fácil obtener

$$t_o \sim \left(\frac{A_o}{s_o} \right) \sqrt{\frac{h}{g}}$$

Si se aplica el ADD, con la lista de variables $\langle \rho g, \rho, h_{21}, A_o, s_o, t_o \rangle$ y la base rectangular $\{L_x, L_y, L_z, M, T\}$ se obtiene un resultado incorrecto, $t_o \sim (h/g)^{1/2}$. Herranz y Arenas [1989] resuelven este problema fijando el orificio en el fondo del depósito, y se obtiene una solución menos precisa formada por dos monomios.

Ejemplo 3.5 Oscilaciones de un líquido en un tubo en U de sección circular

El fluido del tubo se separa de la posición de equilibrio hasta una altura h_{12} entre las superficies fluido-aire de ambas ramas, Figura 3.5. En estas condiciones se abandona dejándolo oscilar libremente. La longitud total de tubo ocupada por el fluido es h_o . Se desea calcular el periodo de oscilación.

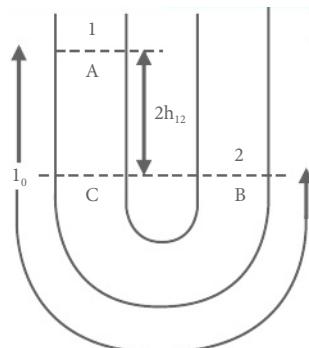


Figura 3.5 Geometría del problema

Solución

(a) Fuerzas viscosas despreciables

Con esta hipótesis, todas las partículas se mueven dentro del tubo con la misma velocidad instantánea con independencia de la densidad. El peso de la columna

de fluido sobre su sección, en B, impulsa el movimiento de todo el fluido del tubo. La presión exterior no influye, ya que afecta a las superficies libres de ambas ramas. Las variables que influyen en el tiempo que tarda el fluido en pasar por su posición de equilibrio, τ_o , son la fuerza impulsora por unidad de volumen, ρg , la densidad asociada a los efectos de inercia, ρ , la altura inicial h_{12} y la longitud de tubo ocupada por el fluido, l_o , que define la masa total de fluido que se mueve. En la base discriminada adecuada para el problema $\{L^e \varphi S^t M^f T\}$, los exponentes de las ecuaciones dimensionales de las anteriores variables se muestran en la Tabla 3.4.

Tabla 3.4 Exponentes dimensionales (viscosidad despreciable)

	ρg	ρ	h_{12}	l_o	τ_o
L_e		-1	1	1	
φ					
S_t	-1	-1			
M	1	1			
T	-2				1

Resultan dos grupos adimensionales:

$$\pi_\tau = g \tau_o^2 / h_{12}$$

$$\pi_h = h_{12} / l_o$$

que proporcionan, para el tiempo buscado, la solución

$$\tau_o = \sqrt{\frac{h_{12}}{g}} F\left(\frac{h_{12}}{l_o}\right)$$

El periodo es cuatro veces este tiempo; así,

$$T_o = 4\tau_o = 4\sqrt{\frac{h_{12}}{g}} F\left(\frac{h_{12}}{l_o}\right)$$

con F una función desconocida. Adviértase que cuando $h_2 \approx l_o$, es decir cuando la condición de partida es que todo el fluido se encuentra prácticamente a un lado del tubo, l_o desaparece del cuadro de variables y el periodo es solo función de la longitud de tubo ocupada por el fluido, h_2 . Su orden de magnitud es

$$T_o = 4\tau_o \sim 4\sqrt{\frac{h_{12}}{g}}$$

La velocidad máxima, v_o , que ocurre al pasar por la posición de equilibrio, se deduce del conjunto de variables $\langle \rho g, \rho, h_{12}, l_o, v_o \rangle$. Estas producen dos monomios:

$$\pi_v = v_o^2 / gh_{12}$$

$$\pi_h = h_{12} / l_o$$

y una velocidad de valor:

$$v_o = \sqrt{gh_{12}} \quad F\left(\frac{h_{12}}{l_o}\right)$$

que con $h_{12} \approx l_o$,

$$v_o \sim \sqrt{gh_{12}}$$

(b) Fuerzas viscosas no despreciables

Además de la viscosidad, μ , hay que incluir el radio del tubo, que determina la sección de las superficies de deslizamiento, $y\varphi_0 = 2\pi$, que informa de la geometría circular del tubo. La lista relevante de variables es, pues, $\langle \mu, \rho g, \rho, h_{12}, R, l_o, \varphi_o, \tau_o \rangle$. Sus exponentes dimensionales en la base anterior se muestran en la Tabla 3.5.

Tabla 3.5 Exponentes dimensionales con fuerzas viscosas

	μ	ρg	ρ	h_{12}	R	l_o	φ_o	τ_o
L_e	-1		-1	1		1		
φ	-1				-1		1	
S_t		-2	-1		$\frac{1}{2}$			
M	1	1	1					
T	-1	-2						1

Resultan tres monomios que pueden escribirse en la forma

$$\pi_\mu = \frac{\mu^2 h_{12}}{\rho^2 g \varphi_o R^4}; \quad \pi_\tau = \frac{\tau_o^2 g}{h_{12}}; \quad \pi_h = \frac{h_{12}}{l_o}$$

y la solución para el tiempo:

$$\tau_o = \sqrt{\frac{h_{12}}{g}} \quad F\left(\frac{h_{12}}{l_o}, \frac{\mu^2 h_{12}}{\rho^2 g \varphi_o R^4}\right)$$

El período de oscilación viene dado por $T_o = 4\tau_o$. Para la hipótesis $h_{12} \approx l_o$, desaparece uno de los monomios, y la solución se reduce a

$$\tau_o = \sqrt{\frac{h_{12}}{g}} \quad F\left(\frac{\mu^2 h_{12}}{\rho^2 g \varphi_o R^4}\right)$$

Una interpretación física de estos monomios se recoge en el Capítulo 5.

Palacios [1964] estudia el periodo de oscilación directamente y llega a las soluciones:

$$\begin{aligned} T_o &= C \left(m / (R^2 g \rho) \right)^{1/2} && \text{fluidos no viscosos} \\ T_v &= \left(m / (R^2 g \rho) \right)^{1/2} F[R^2/S, R^3 \rho^2 g / \mu^2] && \text{fluidos viscosos} \end{aligned}$$

Adviértase que el ADC proporciona, con las mismas variables, el mismo resultado que el ADD para el caso de fluidos con viscosidad despreciable; sin embargo, para fluidos viscosos aparte de la variable φ_o , que el ADC considera adimensional, se pueden escribir cuatro monomios adimensionales independientes, una solución menos precisa.

Cuando la densidad del fluido es muy grande, el movimiento (muy lento) se amortigua en exceso y las capas de fluido se deslizan con una velocidad constante creciente hacia el centro del tubo (velocidad nula en la superficie). En este caso, h_{12} no tiene significado como tampoco l_o ni la densidad del fluido, pues no hay fuerzas de inercia. El conjunto de variables que determinan la velocidad límite, función de la coordenada radial, es $\langle \mu, \rho g, R-r, \varphi_o, v \rangle$, donde $R-r$ indica la posición de la capa de fluido tomada desde la superficie del tubo y φ_o que completa la geometría del problema. En la base dimensional anterior, los exponentes de sus ecuaciones dimensionales se muestran en la Tabla 3.6.

Tabla 3.6 Exponentes dimensionales (viscosidad elevada)

	μ	ρg	$R-r$	φ_o	v
L_e	-1				1
φ	-1		-1/2	1	
S_t		-1	1/2		
M	1	1			
T	-1	-2			-1

La solución es el monomio

$$\pi = \frac{\rho g (R-r)^2}{\mu v} [0, 1]$$

que proporciona el orden de magnitud de v , que depende del radio,

$$v \sim \frac{\rho g (R-r)^2}{\mu}$$

En el centro del tubo $v \sim \rho g R^2 / \mu$. Como vemos, el ángulo φ_0 ha sido expulsado de la solución, por lo que sería posible justificar físicamente que tal magnitud no debe formar parte, estrictamente, de la lista de variables. En efecto, aunque dicho ángulo define la geometría, es fácil demostrar que las capas de fluido descendentes disminuyen la superficie de deslizamiento y su peso en la misma proporción al disminuir el radio, lo que hace que el equilibrio entre fuerzas viscosas y fuerzas peso sea independiente de φ_0 . Puede deducirse del cuadro anterior que, con esas variables, no es posible formar un tiempo característico que sí daría el ADC.

Ejemplo 3.6 Cilindros en rotación con fluidos viscosos

(a) Cilindro en rotación en el seno de un fluido

Un cilindro largo rota respecto de su eje, en el seno de un fluido viscoso indefinido, con una velocidad angular constante ω_0 . Se supone que se ha alcanzado la situación estacionaria en el fluido en las cercanías del cilindro (el fluido continúa difundiendo radialmente la cantidad de movimiento, comunicando a capas sucesivas y concéntricas de fluido el trabajo realizado por el momento aplicado). Se ha de determinar el momento por unidad de altura necesario para mantener el movimiento.

Solución

Con fuerzas de inercia despreciables (movimiento lento)

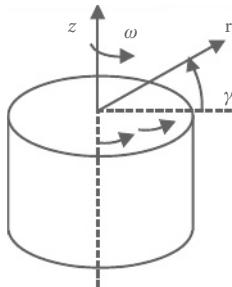


Figura 3.6 Geometría del problema

Las lista relevante de variables es $\langle \mu, \omega, R, \varphi, M_{\text{to}} \rangle$. R da cuenta del tamaño del cilindro (su extensión) mientras que φ define que se trata de un cilindro completo (no de un sector cilíndrico); la influencia de la densidad se desprecia por la hipótesis asumida. En la geometría cilíndrica clásica, Figura 3.6, y usando la base dimensional $\{L, \varphi, L, M, T\}$, los exponentes dimensionales de estas variables se muestran en la Tabla 3.7.

Tabla 3.7 Exponentes dimensionales (inercia despreciable)

	μ	ω	R	φ	M_{to}
L_r			1		2
φ	-1	1		11	
L_z	-1				-1
M	1				1
T	-1	-1			-2

El teorema de π proporciona como solución un único monomio:

$$\pi_M = \frac{M_{to}}{\mu\varphi\omega R^2}$$

que da el orden de magnitud de la variable buscada:

$$M^{to} \sim \mu\varphi\omega R^2$$

Por otra parte, es inmediato determinar la tensión tangencial en la superficie del cilindro, independiente de la geometría, a partir de la lista de variables $\langle \tau, \mu, \omega \rangle$. La solución es $\tau \sim \omega\mu$.

Con las listas de variables $\langle P, R, \mu, \omega, M_{to} \rangle$ o $\langle P, \varphi, \mu, \omega, M_{to} \rangle$ se obtiene la misma solución. Sin embargo, si se consideran como variables relevantes $\langle R, \mu, \omega, M_{to} \rangle$ o $\langle P, \mu, \omega, M_{to} \rangle$, el ADD no proporciona ninguna solución al problema, ya que las variables geométricas R y P, por sí solas, no determinan dimensionalmente la superficie de rozamiento, a menos que incluyamos también la variable angular φ . Adviértase que, debido a la proporcionalidad numérica entre R y P, la solución puede escribirse en la forma $M_{to} \sim \mu\omega R^2$, pero este monomio ($M_{to}/\mu\omega R^2$) no puede obtenerse mediante el ADD, ya que tiene dimensiones. El ADC, en la base $\{L, T, M\}$, y con la lista de variables $\langle P, R, \mu, \omega, M_{to} \rangle$, conduce a la solución menos precisa $M_{to} = \mu\omega R^2 f(R/P)$.

Tiempo que tarda en detenerse en ausencia de fuerzas externas aplicadas

Bajo la hipótesis de movimiento lento, cuando girando a velocidad angular se deja de aplicar la fuerza exterior al cilindro, el tiempo que tarda en detenerse depende de R (que define el momento de fuerzas viscosas que lo frena), P (que define el momento neto por unidad de altura), I/H (del momento de inercia del cilindro por unidad de altura), μ (viscosidad del fluido) y ω (velocidad angular inicial); $\langle P, R, I/H, \mu, \omega, t^* \rangle$.

Ahora, la tabla de exponentes dimensionales es:

Tabla 3.8

Exponentes dimensionales de las variables

	P	R	I/H	ω	μ	t^*
L_r	1	1	2			
φ	1			1	-1	
L_z			-1		-1	
T				-1	-1	1
M			1		1	0

Como el número de variables es 6 y la característica de la matriz formada por los exponentes dimensionales es 4, se pueden formar dos monomios adimensionales independientes:

$$\pi_{1,t1} = \mu H P R t^*/I$$

$$\pi_{2,t2} = \mu H P^2 / I \omega$$

La solución es, pues,

$$t^* = \left| \begin{array}{l} \text{---} \\ \mu H P R \end{array} \right| F \left| \begin{array}{l} \mu H P^2 \\ I \omega \end{array} \right|$$

Con fuerzas de inercia no despreciables

El perfil de velocidades en las cercanías de la superficie del cilindro depende del balance de fuerzas viscosas-inercia en la capa límite en torno al cilindro. La inclusión de la densidad en la Tabla 3.7, cuya ecuación de dimensiones es $[\rho] = ML_r^{-2}\varphi^{-1}L_z^{-1}$ da lugar a dos monomios adimensionales:

$$\pi_{M,1} = \frac{M_{to}}{\mu \varphi \omega R^2}$$

$$\pi_{M,2} = \frac{\rho \omega R^2}{\mu \varphi}$$

con lo que la solución queda en la forma

$$M_{to} = \mu \varphi \omega R^2 F \left(\frac{\rho \omega R^2}{\mu \varphi} \right)$$

Cálculo del espesor de la capa límite. La capa límite formada no es comparable a la capa límite clásica que aparece en flujos incidentes sobre placas planas, ya que aparte de los fenómenos inherentes a la capa límite propiamente dicha existe un fenómeno asociado a las fuerzas centrípetas del fluido en su rotación alrededor del cilindro. Las lista relevante de variables es $\langle \mu, \rho, \omega, \varphi, P, \delta_v \rangle$ donde el perímetro P está asociado a la dirección de las fuerzas viscosas y el ángulo φ es necesario para

definir la geometría de revolución del cilindro. La solución consta de dos monomios que, convenientemente elegidos, pueden escribirse en la forma

$$\pi_1 = \frac{\delta_v \varphi}{P}$$

$$\pi^2 = \frac{\rho \omega P^2}{\mu \varphi^3}$$

dando como resultado para el espesor de la capa límite

$$\delta_v = \left(\frac{P}{\varphi} \right) \left(F \frac{\rho \omega P^2}{\mu \varphi^3} \right) \sim R F \left(\frac{\rho \omega P^2}{\mu \varphi^3} \right)$$

Este problema es uno de la colección de siete problemas de fluidos asociados a cuerpos en rotación en los que Alhama y col. [1991] introdujeron por primera vez el ángulo en la base dimensional donde, hasta esa fecha, solo se habían considerado longitudes, demostrando que dicha introducción conducía a soluciones más precisas que las proporcionadas por las bases clásicas.

Herranz y Albino [1989] estudian este problema (solo el cálculo del momento de las fuerzas) usando diferentes bases dimensionales. Mencionan, que si debido a la aceleración existente se considera razonable incluir la densidad en la lista de variables, la solución usando la base cilíndrica anterior es más precisa que la lograda en la base discriminada degenerada que proponen $\{L_z, L_h, M, T\}$ y que la proporcionada por el ADC. En otro texto más reciente de estos autores (Herranz y Arenas, [2005]) vuelven a plantear el problema sin incluir la densidad aludiendo que “una vez alcanzada la velocidad ω , no intervendrá la densidad”.

(b) Fluido en el interior de un cilindro en rotación

Un cilindro largo que rota con una velocidad angular constante se detiene instantáneamente. En su interior, el fluido viscoso que se encontraba en condiciones estacionarias de giro vuelve al reposo transcurrido un tiempo t_o . Calcule este tiempo.

Solución

El tiempo buscado depende de la densidad (fuerzas de inercia), viscosidad, y R , $\langle \rho, \mu, R, t_o \rangle$; los exponentes dimensionales en la base $\{L_r, \varphi, L_z, M, T\}$ se muestran en

la Tabla 3.9.

Tabla 3.9

Exponentes dimensionales

	ρ	μ	R	t_o
L_r	-2		1	
φ	-1	-1		
L_z	-1	-1		
M	1	1		
T		-1		1

El único monomio posible,

$$\pi = \frac{\mu t_o}{\rho R^2}$$

proporciona el orden de magnitud buscado para el tiempo:

$$t_o \sim \frac{\rho R^2}{\mu}$$

Puede demostrarse que la lista de variables $\langle \rho, \mu, P, \varphi, t_o \rangle$, que también definen completamente el problema (es necesario incluir φ para informar que se trata de un cilindro de líquido), conduce a la misma solución. El problema también podría plantearse desde el punto de vista cinemático. La difusividad del momento es $\nu = \mu/\rho$, y sus dimensiones son $[\nu] = L_r^2 T^{-1}$. La lista de variables sería $\langle \nu, R, t_o \rangle$ y la solución $t \sim R^2/\nu$, que coincide con la anterior.

(c) Interacción entre dos cilindros separados por un fluido viscoso

Sean dos cilindros largos concéntricos de radios R_1 y R_2 , separados por un fluido de viscosidad μ . Si el cilindro exterior, de radio R_2 , gira con una velocidad angular uniforme ω y el interior se mantiene en reposo, determine el par por unidad de altura, M_f' , que se transmite al cilindro interior, Figura 3.7.

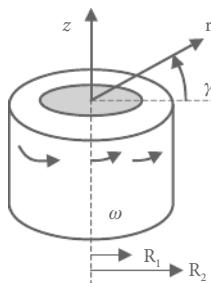


Figura 3.7 Geometría del problema

Solución

Cuando la separación entre cilindros es pequeña, el perfil de velocidades del fluido, una de las variables que determina el par, depende de la separación $R_2 - R_1$ y del cociente R_1/R_2 ; en lugar de estas dos variables consideramos directamente las variables R_1 y R_2 .

El par depende del perímetro, P_1 , que determina la superficie lateral sobre la que actúan las fuerzas viscosas, de sus radios, R_1 y R_2 , de la velocidad de giro del cilindro exterior, ω , y de la viscosidad del fluido, μ ; así las variables relevantes son $\langle P_1, R_1, R_2, \mu, \omega, M_f' \rangle$.

Tabla 3.10 Exponentes dimensionales de las variables

	P_1	R_1	R_2	ω	μ	M'_f
L_r	1	1	1			2
ϕ	1			1	-1	1
L^z					-1	-1
T				-1	-1	-2
M					1	1

La Tabla 3.10 conduce a dos monomios independientes,

$$\pi_1 = \frac{M_f}{\mu \omega P_1 R_1}$$

$$\pi_2 = \frac{R_1}{R_2}$$

de donde resulta el par transmitido al cilindro interior:

$$M_f = \mu \omega P_1 R_1 F\left(\frac{R_1}{R_2}\right)$$

Esta solución también es la del par transmitido al cilindro exterior cuando la situación es inversa, cilindro exterior en reposo e interior girando con una velocidad angular ω . Cuando $R_2/R_1 \gg 1$, el radio del cilindro exterior puede eliminarse de la lista de variables, y el momento sobre el cilindro interior vale $M'_f \sim \mu \omega P_1 R_1$, lo que está de acuerdo con el resultado del apartado a) de este problema. Adviértase por otro lado que, dado que P_1 y R_1 son del mismo orden de magnitud, $P_1 = \phi R_1$, la solución anterior puede escribirse en la forma

$$M'_f \sim \mu \omega R_1^2$$

Ejemplo 3.7 Flujo incidente horizontal sobre una esfera en reposo

Un fluido viscoso con velocidad uniforme U_0 incide horizontalmente sobre una esfera en reposo de radio R , Figura 3.8. Calcule la fuerza de arrastre que el fluido ejerce sobre la esfera.

Existen tres magnitudes que definen la geometría de este problema: dos ángulos, θ asociado al recorrido de las líneas de fluido sobre la superficie de la esfera, ϕ la abertura angular del sector esférico (para una esfera, 2π), y el radio R que caracteriza el tamaño de la esfera. En consecuencia, la base dimensional discriminada adecuada para este caso es $\{L_r, \theta, \phi, T, M\}$. La fuerza total de arrastre en la dirección del movimiento que el fluido ejerce sobre la esfera, f_a , resulta del efecto

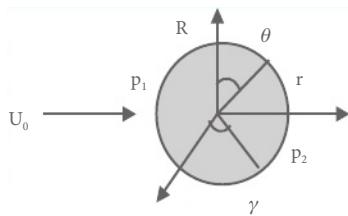


Figura 3.8 Flujo sobre una esfera en reposo

combinado de las fuerzas tangenciales y normales sobre su superficie. Pueden darse tres hipótesis.

Fuerzas de inercia despreciables (movimiento lento)

(a) Cálculo de las fuerzas viscosas tangenciales

Si s_θ define la longitud del arco asociado al sector esférico de la superficie viscosa en la dirección θ , las fuerzas tangenciales $f_{t\theta}$ son función de s_θ , de φ , de una velocidad característica tangencial a la superficie esférica U_θ ($U_\theta \sim U_0$) y de la viscosidad del fluido, $\mu_{\theta\varphi}$. Así, el conjunto relevante de variables es $\langle \mu_{\theta\varphi}, s_\theta, U_\theta, \varphi, f_{t\theta} \rangle$. Las fórmulas dimensionales de dichas variables en la basedimensional mencionada son:

$$\begin{aligned}[s_\theta] &= L^r \theta \\ [\varphi] &= \varphi\end{aligned}$$

$$[U_\theta] = L_r \theta T^{-1}$$

$$[f_{t\theta}] = L_r \theta M T^{-2}$$

$$[\mu_{\theta\varphi}] = ([f_{t\theta}])/([S] [dv/dn]) = (L_r \theta M T^{-2}) / (L_r^2 \theta \varphi) (L_r T^{-1} / L_r) = L_r^{-1} \theta^1 \varphi^{-1} M T^{-1}$$

Tabla 3.11 Exponentes dimensionales

	s_θ	φ	U_θ	$\mu_{\theta\varphi}$	$f_{t\theta}$
L_r	1	0	1	-1	1
θ	1		1	-1	1
φ	0	1	0	-1	0
M	00011				
T	0	0	-1	-1	-2

El cuadro de exponentes dimensionales, Tabla 3.11, proporciona un único monomio

$$\pi_{ft} = \frac{f_{t\theta}}{\mu_{\theta\varphi} \theta \varphi}$$

y la solución

$$f_{t,\theta} \sim \mu_{\theta\varphi} U_0 s_\theta \varphi$$

o, como U_0 es una fracción de U_o (del mismo orden de magnitud), s_θ es del orden de magnitud de R y φ es del orden de la unidad, se puede escribir

$$f_{t,\theta} \sim \mu_{\theta\varphi} U_o R$$

Dado que las superficies viscosas y el tamaño del sector esférico en sus dos direcciones quedan definidas también con R , φ y θ , igual que con s_θ y φ , es de esperar obtener el mismo resultado con el siguiente conjunto de variables $\langle \mu_{\theta\varphi}, U_o, f_{t,\theta}, R, \varphi, \theta \rangle$. En efecto, el cuadro de los exponentes dimensionales es ahora:

Tabla 3.12 Exponentes dimensionales

	R	θ	φ	U_0	$\mu_{\theta\varphi}$	$f_{t,\theta}$
L_r	1	0	0	1	-1	1
θ	0	1	0	1	-1	1
φ	0	0	1	0	-1	
M	0	0	0		1	1
T	0	0	0	-1	-1	-2

El único monomio posible es

$$\pi_{ft} = \frac{f_{t,\theta}}{\mu_{\theta\varphi} U_0 R \varphi \theta}$$

y la solución:

$$f_{t,\theta} \sim \mu_{\theta\varphi} U_0 R \varphi \theta \sim \mu_{\theta\varphi} U_o R$$

Por otra parte, para trabajar con la superficie viscosa, S , en la lista de variables es necesario reflexionar en los siguientes términos: para caracterizar con certeza que esa superficie sea la correspondiente a un sector de casquete esférico es necesario caracterizar el propio sector; para ello, además de añadir S , es preciso añadir, por ejemplo, los dos ángulos θ y φ que definen el sector o bien añadir uno de ellos

(θ, φ) más el radio (R) para caracterizar alguna de las longitudes del sector (θ, φ). Así, serán válidas las siguientes listas relevantes $\langle \mu_{\theta\varphi}, v_0, f_{t,\theta}, S, \theta, \varphi \rangle$, $\langle \mu_{\theta\varphi}, v_0, f_{t,\theta}, S, R, \varphi \rangle$ o $\langle \mu_{\theta\varphi}, v_0, f_{t,\theta}, S, R, \theta \rangle$. Para la primera lista se obtiene

$$\pi_{ft} = \frac{f_{t,\theta} (\theta \varphi)^{1/2}}{\mu_{\theta\varphi} v_0 S^{1/2}}$$

y, para las otras dos,

$$\pi_{ft} = \frac{f_{t,\theta} R}{\mu_{\theta\varphi} v_0 S}$$

que conducen, todas, a la solución

$$f_{t,0} \sim \mu_{0\phi} U_o R$$

La componente de estas fuerzas en dirección del movimiento, fuerza que realmente arrastra al cuerpo, es del mismo orden de magnitud que la fuerza tangencial total, por tratarse de una esfera, ya que es una proyección de dicha fuerza

sobre la dirección horizontal del movimiento.

(b) Cálculo de las fuerzas viscosas normales

Las magnitudes que intervienen son $\langle \mu_r, U_r, R, \theta, \varphi, f_n \rangle$. Las variables geométricas R , θ y φ son necesarias para caracterizar completamente la superficie sobre la que se calcula la fuerza y el coeficiente de viscosidad μ_{rr} está asociado a los esfuerzos normales relativos a las fuerzas viscosas. Las fórmulas dimensionales de las variables son:

$$[R] = L_r$$

$$[\theta] = \theta$$

$$[\varphi] = \varphi$$

$$[U_r] = L_r T^{-1}$$

$$[f_n] = L_r M T^{-2}$$

$$[\mu_{rr}] = ([f_n])/([S] [dv/dn]) = (L_r M T^{-2}) / (L_r^2 \theta \varphi) (L_r T^{-1} / L_r) = L_r^{-1} \theta^{-1} \varphi^{-1} M T^{-1}$$

(ver que $[\mu_{0\phi}] = [\mu_{rr}]$)

Tabla 3.13 Exponentes dimensionales

	R	θ	φ	U_r	μ_{rr}	F_n
L_r	1	0	0	1	-1	1
θ	0	1	0	0	-1	0
φ	0	0	1	0	-1	0
M	000011					
T	0	0	0	-1	-1	-2

De la Tabla 3.13 se obtiene solo el monomio

$$\pi_{fn} = \frac{f_n}{\mu_{rr} U_r R \varphi \theta}$$

que conduce a la solución

$$f_n \sim \mu_{rr} U_r R \varphi \theta$$

o bien, teniendo en cuenta que $(U_r \sim U_o)$,

$$f_n \sim \mu_{rr} v_o R$$

Por otra parte, si queremos emplear como variable geométrica la superficie viscosa, S , basta con incluir en la lista de variables, además de esta, la magnitud R que informe de la curvatura asociada a la superficie (que proporciona la proyección de la superficie sobre el plano normal a la dirección del flujo), con ello queda definida únicamente la superficie esférica (no es preciso considerar ninguno de los ángulos). Las variables relevantes son $\langle \mu_{rr}, U_r, R, S, f_n \rangle$ y el monomio resultante es $(f_n R / \mu_{rr} U_r^2 S)$.

La sustitución de R en la lista de variables anterior por alguno de los ángulos ϕ o θ no proporciona solución alguna; lo cual es de esperar, ya que no queda completamente definida la orientación de la superficie con respecto al flujo de fluido (aspecto fundamental en este ejemplo). Sin embargo, la sustitución de R por ambos ángulos ϕ y θ sí define dicha orientación y conduce, en consecuencia, a la solución correcta $f_n \sim \mu_{rr} U_r (\phi \theta)^{1/2} \sim \mu_{rr} v_o R$.

Finalmente, si se tienen en cuenta las listas de variables $\langle \mu_{rr}, U_r, R, S, \phi, f_n \rangle$ o $\langle \mu_{rr}, U_r, R, S, \theta, f_n \rangle$, resultan soluciones correctas pero se expulsa de ambas las magnitudes angulares porque no son necesarias.

Al igual que en el caso de las fuerzas tangenciales, la componente de la fuerza normal en la dirección del movimiento, fuerza que realmente arrastra al cuerpo, es del mismo orden de magnitud que la fuerza normal total, ya que es una proyección de dicha fuerza sobre la dirección horizontal del movimiento.

(c) Cálculo de la fuerza de arrastre total

Es la resultante de las dos anteriores. Por ser ambas del mismo orden de magnitud, la resultante es asimismo de este mismo orden, es decir $f_a = f_{t,0} + f_n \sim \mu v_o R$ (adviérase que, numéricamente, $\mu_{\phi\phi} = \mu_{rr} = \mu$). La fuerza real de arrastre es la proyección de la suma anterior sobre la horizontal (del mismo orden de magnitud).

La geometría particular del problema, que para el caso de una esfera completa supone por un lado la degeneración de los ángulos ϕ y θ y por otro que $S \sim R^2$, es lo que permite que el análisis dimensional clásico conduzca directamente a la solución correcta. Sin embargo, hacemos notar en este punto que, según nuestra opinión, una lista de variables bien definida, que exprese de manera precisa los efectos que intervienen en el proceso estudiado, debe conducir a resultados correctos, aunque posiblemente no de la misma exactitud, con el ADC y con el ADD. En el caso estudiado aquí, resulta que con la lista $\langle \mu_{rr}, U_r, R, f_n \rangle$ o $\langle \mu_{\phi\phi}, U_\phi, R, f_{t,0} \rangle$, el ADC conduce a una misma solución y con el ADD no se obtiene solución alguna. Sin duda, la degeneración geométrica mencionada anteriormente ha conducido a este resultado. Es evidente que las variables geométricas empleadas aquí con el ADD definen de manera precisa la región de interés y que, si usamos estas variables para resolver el problema mediante el ADC, se obtendrían soluciones menos precisas. Por ejemplo, con $\langle \mu_{\phi\phi}, U_\phi, f_{t,0}, R, \phi, \theta \rangle$, la solución (ADC) es $f_a = \mu_{\phi\phi} U_\phi R \psi(\phi, \theta)$ y con $\langle \mu_{rr}, U_r, R, \theta, \phi, f_n \rangle$, $f_a = \mu_{rr} U_r R \psi(\phi, \theta)$. O bien, con $\langle \mu_{rr}, U_r, R, S, f_n \rangle$ la solución es $f_a = \mu_{rr} U_r R \psi(S/R^2)$.

(d) Fuerzas viscosas despreciables (viscosidad despreciable)

Las fuerzas de presión normales asociadas a la inercia del fluido son las únicas que actúan sobre la esfera. Las magnitudes que intervienen en el problema son la densidad del fluido, ρ , asociada a los efectos de inercia (cambios de velocidades en el

fluido), la componente normal de la velocidad del fluido $U(U_r \sim U_o)$ y la superficie sobre la que actúa la fuerza, S , definida por R y los ángulos θ y φ . Así, es posible abordar el problema con las listas de variables $\langle S, \rho, U_r, f_{n,i} \rangle$ o $\langle R, \theta, \varphi, \rho, U_r, f_{n,i} \rangle$, Tablas, 3.14 y 3.15, respectivamente.

Tabla 3.14 Exponentes dimensionales

	S	ρ	U_r	$f_{n,i}$
L_r	2	-3	1	1
θ	1	-1	0	0
φ	1	-1	0	0
M	0101			
T	0	0	-1	-2

Tabla 3.15 Exponentes dimensionales

	R	θ	φ	U_r	ρ	$f_{n,i}$
L_r	1	0	0	1	-3	1
θ	0	1	0	0	-1	0
φ	0	0	1	0	-1	0
M	000011					
T	0	0	0	-1	0	-2

Cada una de estas tablas conduce a un único monomio:

$$\pi_{n,1} = \frac{f_{n,i}}{\rho U_r^2 S} \quad (\text{Tabla 3.14})$$

$$\pi_{n,2} = \frac{f_{n,i}}{\rho U_r^2 R^2 \theta \varphi} \quad (\text{Tabla 3.15})$$

que proporcionan las soluciones

$$f_{n,i} \sim \rho U_r^2 S \quad (\text{Tabla 3.14})$$

$$f_{n,i} \sim \rho U_r^2 R^2 \theta \varphi \quad (\text{Tabla 3.15})$$

ambas del mismo orden de magnitud, $f_{n,i} \sim \rho U_o^2 R^2$.

Caso general: intervención de fuerzas de inercia y viscosas

(a) Cálculo de la fuerza de arrastre

Se trata de una combinación de los casos anteriores pero, dada la naturaleza de la fuerza buscada, se trata de la resultante de tres fuerzas de diferente naturaleza,

la solución puede abordarse separadamente para cada una de estas fuerzas y luego, sencillamente, evaluar la resultante como suma de sus componentes horizontales (las verticales se anulan por simetría). Formalmente, el problema se plantea introduciendo, por separado, la lista global de magnitudes que afectan a cada una de las fuerzas incógnitas, junto con la fuerza correspondiente, y deduciéndolos los monomios adimensionales resultantes. En este sentido, lo que se ha hecho es “discriminar” la fuerza para hallar sus componentes individuales (viscósas tangenciales, viscósas normales y de presión asociadas a la inercia).

Los cálculos de estas fuerzas ya se han hecho en los apartados anteriores y los resultados son:

$$\text{Fuerzas viscósas tangenciales: } f_{t,v} \sim \mu_{0\phi} U_0 R \theta \varphi \sim \mu U_o R$$

$$\text{Fuerzas viscósas normales: } f_{n,v} \sim \mu_{rr} U_r R \varphi \theta \sim \mu U_o R$$

$$\text{Fuerzas viscósas totales: } f_v \sim \mu_{0\phi} U_0 R \theta \varphi + \mu_{rr} U_r R \varphi \theta \sim \mu U_o R$$

$$\text{Fuerzas de inercia normales: } f_{n,i} \sim \rho U_r^2 R^2 \theta \varphi \sim \rho U_o^2 R^2$$

de donde

$$f_a \sim \mu U_o R + \rho U_o^2 R^2$$

La expresión anterior, dividiendo por $\rho v_o^2 R^2$ o por $\mu v_o R$, puede escribirse en las formas

$$\frac{f_a}{\mu U_o R} \sim 1 + \left(\frac{\rho U_o R}{\mu} \right)$$

$$\frac{f_a}{\rho U_o^2 R^2} \sim 1 + \left(\frac{\mu}{\rho U_o R} \right)$$

o bien,

$$\frac{f_a}{\mu U_o R} \sim \psi \left(\frac{\rho U_o R}{\mu} \right)$$

$$\frac{f_a}{\rho U_o^2 R^2} \sim \psi \left(\frac{\mu}{\rho U_o R} \right)$$

donde ψ es una función arbitraria del argumento. Las últimas expresiones son las que se obtendrían de abordarse el problema de manera directa (y asumiendo $\mu_{0\phi} = \mu_{rr}$) considerando una lista de variables que incluya tanto las fuerzas de inercia (ρ) como las fuerzas viscósas ($\mu_{0\phi}, \mu_{rr}$), lo que supone considerar que ambas son del mismo orden de magnitud. Esta lista de variables proporcionaría dos nuevos monomios que no contienen la incógnita fuerza ($\mu_{rr}/(\rho U_o R)$ y $\mu_{0\phi}/\mu_{rr}$, este último numéricamente igual a la unidad. El primero, argumento de la función ψ , es un número de Reynolds adimensional con discriminación.

(b) Cálculo del espesor de la capa límite

Es posible obtener el espesor de la capa límite δ , que limita una región en donde se balancean las fuerzas de inercia y viscosas tangenciales, a partir de la lista de variables $\{\mu_{0\phi}, \rho, v_0, s_0, \delta\}$. La solución, $\pi_\delta = \rho v_0 \delta^2 / \mu_{0\phi} s_0$, proporciona el orden de magnitud de δ

$$\delta \sim \left(\frac{\mu_{0\phi} s_0}{\rho v_0} \right)^{1/2} \frac{\mu R}{\rho U_0}^{1/2}$$

El cociente $\rho v_0 \delta^2 / \mu_{0\phi} s_0$ se refiere a fuerzas en equilibrio actuando en una misma región, por lo que es del orden de la unidad; se trata de un nuevo número de Reynolds adimensional discriminado. Este número de Reynolds es completamente diferente del anterior, puesto que $\rho U_0 R / \mu$ representa un balance de fuerzas de naturaleza diferente que no están aplicadas en la capa límite.

Este problema se ha convertido en un clásico ejemplo de aplicación del análisis dimensional, Langhaar [1951], Arenas [1986] y Price [2002]. Sin embargo, ninguno de estos autores distingue los tipos de fuerzas que dan lugar a la fuerza global de arrastre. Además, su tratamiento no utiliza la discriminación. ¿Por qué el análisis dimensional clásico proporciona una solución correcta? Las razones son dos: en primer lugar, porque las fuerzas normales y las tangenciales son del mismo orden de magnitud y la lista de variables relevantes conducen a un mismo monomio (además, los coeficientes de viscosidad que intervienen en cada fuerza tienen el mismo valor numérico); en segundo lugar, porque los monomios resultantes a partir de la discriminación en coordenadas esféricas permiten, en general, ciertas simplificaciones (que no se dan en el sistema de ejes rectangulares) asociadas al hecho de que s (arco) $\sim R$ (radio) y S (superficie) $\sim R^2$. Hacemos notar que los monomios obtenidos empleando estas simplificaciones son numéricamente correctos, aunque no dimensionalmente en el ADD.

Ejemplo 3.8 Caída de una esfera en un fluido viscoso por efecto de su peso

Sea una esfera de radio R que cae libremente, partiendo del reposo, en un fluido viscoso. Se ha de determinar la velocidad final, v_o . Transcurrido un cierto tiempo, las fuerzas viscosas y de inercia alcanzarán un valor suficiente para equilibrar el peso aparente de la esfera.

Solución

El planteamiento es similar al de la esfera fija en el seno de un fluido con velocidad horizontal constante. Sobre el fluido actúan fuerzas viscosas tangenciales ($f_{t,v}$) y fuerzas viscosas normales ($f_{n,v}$), del mismo orden de magnitud, y fuerzas de inercia (f_i), cuya suma es la resultante de las fuerzas que frenan la esfera, f_r .

Por simetría, estas fuerzas tienen sentido vertical hacia arriba. Si v_o es la velocidad final de la esfera, de los resultados del Ejemplo 3.7 podemos escribir

$$f_{t,v} \sim f_{n,v} \sim \mu v_o R$$

$$f_i \sim \rho_f v_o^2 R^2$$

$$f_r = f_{t,v} + f_{n,v} + f_i \sim \rho_f v_o^2 R^2 + \mu v_o R$$

Esta resultante se equilibra con el peso aparente del fluido, $p_a = V(\rho_c - \rho_f)g = V(\Delta\rho)g$, donde ρ_c es la densidad del cuerpo y V su volumen. Así,

$$V(\Delta\rho)g \sim \rho_f v_o^2 R^2 + \mu v_o R$$

$$v_o \left[1 + \frac{\rho_f v_o R}{\mu} \right] \sim \frac{(\Delta\rho)g R^2}{\mu}$$

Esta expresión coincide con la llamada fórmula de Oseen:

$$v_o \left[1 + C_1 \left(\frac{\rho_f v_o R}{\mu} \right) \right] \sim C_2 \left[\frac{(\Delta\rho)g R^2}{\mu} \right]$$

donde C^1 y C^2 deben ser del orden de magnitud unidad. Este problema también es estudiado por Palacios [1964], quien no separa el cálculo de las fuerzas viscosas y de inercia, puesto que emplea el ADC, obteniendo en consecuencia una solución menos precisa que contiene una función indeterminada. También fue estudiado por Bridgman [1922], quien, al no tener en cuenta las fuerzas de inercia, obtiene la fórmula de Stokes.

La simplificación de este problema a los casos i) fuerzas de inercia despreciables y ii) fuerzas viscosas despreciables, es inmediata. Las soluciones son:

$$V(\Delta\rho)g \sim \mu v_o R$$

$$v_o \sim \frac{(\Delta\rho)g R^2}{\mu} \quad (\text{fórmula de Stokes}), \quad (\text{inercia despreciables})$$

$$V(\Delta\rho)g \sim \rho_f v_o^2 R^2$$

$$v_o \sim \left[\frac{(\Delta\rho)g R}{\rho_f} \right]^{1/2} \quad (\text{viscosas despreciables})$$

En el caso general, las tres fuerzas deben ser del mismo orden de magnitud, por lo que los balances anteriores son del orden de la unidad. La combinación de ambos balances que elimina las fuerzas de peso (para el caso general) proporciona el nuevo monomio $(\rho_f v_o R / \mu)$.

La representación gráfica F_v y F_i frente a la velocidad separa la región del plano en tres zonas, Figura 3.9: región de velocidades, donde $Re \sim 1$ (región alre-

dedor de la intersección de ambas curvas, donde las fuerzas de inercia y viscosas son del mismo orden de magnitud); región $Re \gg 1$ (zona de elevadas velocidades, donde las fuerzas viscosas son despreciables), y $Re \ll 1$ (zona de pequeñas velocidades donde las fuerzas de inercia son despreciables).

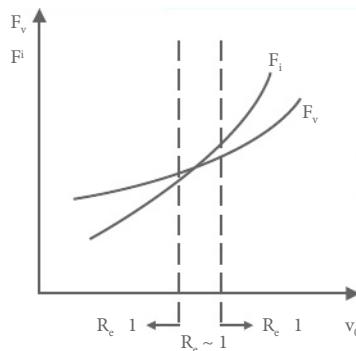


Figura 3.9 Regiones de flujo en la caída de una esfera

Ejemplo 3.9 Tamaño de las gotas desprendidas de un tubo delgado circular vertical en un campo gravitatorio.
Ídem bajo una fuerza centrífuga

(a) En un campo gravitatorio

Por la sección inferior de un tubo capilar de diámetro d_p , se desprenden muy lentamente gotas de un líquido de densidad ρ . Figura 3.10.

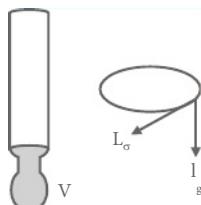


Figura 3.10 Geometría del problema

Solución

El fenómeno físico está asociado al balance de dos fuerzas, la fuerza peso de la gota formada, dependiente de su volumen, y la fuerza asociada a la tensión superficial, dependiente aproximadamente del tamaño o sección del tubo. Esta consideración permitiría determinar por separado ambas fuerzas para análisis dimensional e igualar sus órdenes de magnitud.

Así, $f_{\text{peso}} = \rho g V_o$ y $f_\sigma = \sigma \pi d_t$ donde ρ es la densidad del fluido, $V_o = (4/3)\pi R^3$ el volumen de la gota, σ la tensión superficial y d_t el diámetro del tubo. Al considerar las fuerzas del mismo orden demagnitud se obtiene la solución:

$$R \sim \left(\frac{\sigma d_t}{\rho g} \right)^{1/3}$$

Para el análisis dimensional, la lista relevante de variables del problema es $\langle l_\sigma, \sigma, \rho g, V_o \rangle$, donde l_σ es la longitud perimetral de la sección de desprendimiento (del orden de magnitud del perímetro del tubo capilar). Mientras que tiene sentido expresar la fuerza del peso por unidad de volumen, no ocurre lo mismo con las fuerzas de tensión superficial, que tienen sentido físicamente solo por unidad de longitud. Se ha considerado despreciable el efecto de la tensión superficial fluido-tubo, que definiría la curvatura de la gota por encima de la sección de estrangulamiento. Desde el punto de vista de la geometría asociada a los fenómenos que ocurren en el desprendimiento de la gota, es conveniente discriminar entre la longitud asociada a la fuerza que produce la tensión capilar de dimensión L_σ , una longitud vertical asociada a la dirección del peso y el volumen de dimensión V , que no queda definido por las dos anteriores. Atendiendo a lo anterior consideramos la base dimensional discriminada $\{L_\sigma, L_g, V, M, T\}$. Las fórmulas

dimensionales de las variables que intervienen en la base citada son:

$$[l_\sigma] = L_\sigma$$

$$[\sigma] = [f_\sigma/l_\sigma] = L_g L_\sigma^{-1} MT^{-2}$$

$$[\rho g] = [f_p/V] = V^{-1} MT^{-2}$$

$$[V] = V$$

y los exponentes dimensionales se muestran en la Tabla 3.16

Tabla 3.16 Exponentes dimensionales

	l_σ	σ	ρg	V
L_σ	1	-1		
L_g		1	1	
V			-1	1
M		1	1	
T		-2	-2	

Resulta un monomio

$$\pi = \frac{\rho g V}{\sigma l_\sigma}$$

que conduce a la solución

$$V \sim \frac{\sigma l_\sigma}{\rho g}$$

de la que puede deducirse fácilmente el orden de magnitud del radio de la gota

aproximadamente la fórmula puede observarse que debe darse a calcular la tensión de la gravedad por unidad de masa. La solución es $\eta \sim \sigma l_\sigma / g$. El ADC conduce a dos monomios y en consecuencia a una solución menos precisa,

$$V = l_\sigma^3 \psi(\rho g l_\sigma^2 / \sigma)$$

Este problema ha sido tratado por diferentes autores: Harkins y Brown [1919], Palacios [1964], Herranz y Arenas [1989] y Szirtes [2007]; proporcionando todos ellos una solución que contiene dos monomios adimensionales. Herranz y Arenas [2005] utilizan bases dimensionales discriminadas en las que intervienen fuerzas y consideran el efecto de la ascensión capilar obteniendo dos monomios. En ausencia de este último efecto obtienen un solo monomio.

(b) En un campo centrífugo

El tubo, en posición horizontal, gira sobre su extremo cerrado, Figura 3.11, con velocidad angular ω . El fluido que tiende a salir por efecto de la fuerza centrífuga se equilibra con las fuerzas de tensión superficial en la región de salida. La gota se desprenderá para un cierto tamaño en el que se equilibren las fuerzas centrífugas y de tensión superficial.

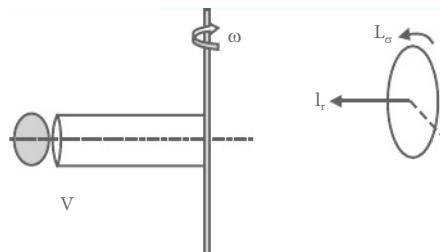


Figura 3.11 Geometría del problema

Solución

Las magnitudes que influyen en el tamaño de la gota desprendida, definida por su volumen, V_σ , son: l_σ , la longitud perimétral de la sección de desprendimiento; f_{cv} , fuerza centrífuga por unidad de volumen, y σ , el coeficiente de tensión superficial. Los exponentes dimensionales de las variables de esta lista, $\{l_\sigma, f_{cv}, \sigma, V_\sigma\}$, en la base $\{L_\sigma, L_r, V, M, T\}$, se muestran en la Tabla 3.17.

Tabla 3.17 Exponentes dimensionales

	l_σ	σ	$f_{c,v}$	V_o
L_σ	1	-1		
L_r	0	1	1	
V	0	0	-1	1
M	0	1	1	
T	0	-2	-2	

Resulta un monomio:

$$\pi = \frac{V_o f_{c,v}}{\sigma l_\sigma}$$

Sustituyendo la expresión de la fuerza centrífuga, $f_{c,v} = \rho \omega^2 l_o$, donde l_o es el radio de giro del extremo del tubo capilar, se obtiene

$$V_o \sim \frac{\sigma l_\sigma}{\rho l^o \omega^2}$$

La solución del ADC está formada por dos monomios:

$$\rho V_o = (\sigma / \omega^2) F(l_\sigma / l_o)$$

Ejemplo 3.10 Efectos de la tensión superficial

Se debe calcular la altura ascendida por un fluido en un tubo capilar.

Solución

La Figura 3.12 es un esquema del problema. La lista de variables relevantes es $\langle \rho g, f_{z,\sigma}, V_o \rangle$ o bien $\langle \rho g, f_{z,\sigma}, S_t, H \rangle$, donde $f_{z,\sigma}$ es la fuerza vertical asociada a la tensión superficial, $f_{z,\sigma} = l_o \sigma \cos(\phi)$, con ϕ el ángulo de conjunción, y S_t representa la sección transversal del tubo, variable necesaria junto con la altura para especificar el volumen.

El cuadro de exponentes dimensionales de estas variables en la base $\{L_p, L_z, M, T\}$ se muestra en la Tabla 3.18; designa la dimensión de la longitud asociada al arco de la sección del tubo L_p , la dimensión asociada su radio, l_o , la dimensión asociada a la altura.

Los monomios resultantes para las listas de variables $\langle \rho g, f_{z,\sigma}, V_o \rangle$ y $\langle \rho g, f_{z,\sigma}, H, S_t \rangle$, respectivamente son

$$\pi = \rho g V_o / f_{z,\sigma} \text{ y } \pi = \rho g H S_t / f_{z,\sigma}$$

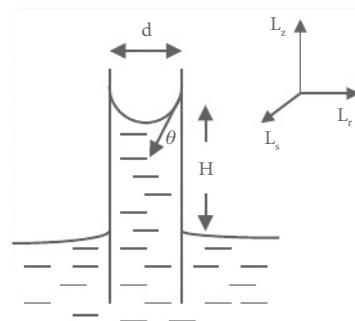


Figura 3.12 Esquema del problema

Tabla 3.18 Exponentes dimensionales

	$f_{z,\sigma}$	ρg	V_o	S_t	H
L_s	0	-1	1	1	
L_r	0	-1	1	1	
L_z	1	0	1		1
M	1	1			
T	-2	-2			

Así,

$$H \sim \frac{f_{z,\sigma}}{\rho g S_t}$$

Sustituyendo $f_{z,\sigma} = l_\sigma \sigma \cos(\theta)$, resulta

$$H \sim \frac{l_\sigma \sigma \cos(\theta)}{\rho g S_t}$$

que, para el caso de un capilar de sección circular de diámetro $D = \pi D$, se reduce a

$$H \sim \frac{\sigma \cos(\theta)}{\rho g D}$$

Planteándolo en términos de equilibrio de las fuerzas calculadas por separado:

Fuerza peso de la columna de fluido: $f_p = \rho g V_o$

Fuerza asociada a la tensión superficial: $f_{z,\sigma} = l_\sigma \sigma \cos(\theta)$
con $V_o = S_t H$. La igualdad entre ambas permite escribir el monomio

$$\pi_f = \rho g S_t H / (l_\sigma \sigma \cos(\theta))$$

y despejar el orden de magnitud de la altura buscada,

$$H \sim \sigma \cos(\theta) / (\rho g l_o)$$

Este planteamiento elimina el monomio que relaciona las longitudes H y l_o

Ejemplo 3.11 Vibración de gotas adheridas a una pared que las moja

Se ha de determinar el periodo de vibración de las gotas adheridas a una pared por efecto de la tensión superficial, en ausencia y en presencia de un campo gravitatorio.

Solución

(a) En ausencia de gravedad

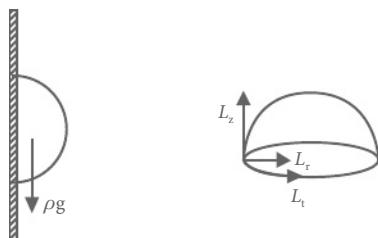


Figura 3.13 Geometría del problema

Estas gotas, en equilibrio tienen la forma de casquete esférico de curvatura constante, Figura 3.13. En el periodo de vibración, T , deberá influir una fuerza recuperadora vertical debida a la tensión superficial, σ , la densidad del fluido, ρ , asociada a la inercia, y las magnitudes geométricas que definen el volumen del casquete; a saber, el perímetro de la sección circular adherida a la pared, P , su radio, r , y la altura del casquete, h . La tabla de exponentes dimensionales del conjunto $\{f_{\sigma,z}, P, r, h, T_o\}$ en la base discriminada $\{L_z, L_s, L_h, M, T\}$ se muestra en la Tabla 3.19.

Tabla 3.19 Exponentes dimensionales

	ρ	$f_{\sigma,z}$	P, h, r, T			$_o$
L_z	-1	1		1		
L_t	-1		1			
L_r	-1				1	
M	1	1				
T		-2				1

Se puede formar un solo monomio:

$$\pi = \frac{\rho r Ph^2}{f_{\sigma,z} T_o^2}$$

que proporciona el orden de magnitud del periodo

$$T_o \sim h \left(\frac{\rho r P}{f_{\sigma,z}} \right)^{1/2}$$

o bien, en función de la tensión superficial,

$$T_o \sim h \left(\frac{\rho r}{\sigma} \right)^{1/2}$$

Para el caso particular de gotas semiesféricas ($h = r$ = radio de la esfera, R), la solución se simplifica a

$$T_o \sim \left(\frac{\rho R^3}{\sigma} \right)^{1/2}$$

Esta solución es también la del periodo de vibración de una gota esférica debido a la simetría de esta respecto del plano que la divide en dos. El problema se podría haber resuelto con la lista de variables $\langle \rho, \sigma_z, r, h, T_o \rangle$ en, donde, si se incluye σ (fuerza por unidad de longitud), no es necesario incluir la longitud P sobre la que actúa la fuerza.

Se trata de otro problema típico que aparece en muchos textos como ejemplo de aplicación del análisis dimensional. Gracias a la simplificación numérica de las variables geométricas que entran en juego (perímetro de mojado, del orden del radio de la gota, y volumen de la misma, del orden de R^3) se obtiene la solución exacta del periodo sin necesidad de discriminación. Lord Rayleigh dice: "es uno de los casos en que el AD conduce inmediatamente a una solución que sería difícil de obtener aplicando la teoría" (Palacios [1964], p. 119). Sin embargo, ninguno de los autores que aborda el problema introduce la discriminación ni estudia el caso general de gotas en forma de casquete esférico.

(b) Gotas en campo gravitatorio

Hay que añadir ρg a la lista relevante de variables que pasa a ser $\langle \rho, f_{\sigma,z}, \rho g, h, r, P, T_o \rangle$. Los exponentes dimensionales de estas variables se muestran en la tabla 3.20.

La aplicación del teorema de π proporciona dos monomios:

$$\Pi_1 = \frac{\rho r Ph^2}{f_{\sigma,z} T_o^2} \quad \Pi_2 = \frac{\rho grPh}{f_{\sigma,z}}$$

o bien,

$$\Pi_1 = \frac{T_o^2 g}{h} \quad \Pi_2 = \frac{\rho grPh}{f_{\sigma,z}}$$

Tabla 3.20 Exponentes dimensionales

	ρ	$f_{\sigma,z}$	ρg	h	r	P	T_o
L_z	-1	1		1			
L_t	-1		-1			1	
L_r	-1		-1		1		
M	1	1	1				
T		-2	-2			11	

quedando para el periodo la expresión

$$T_o = \sqrt{\frac{h}{g}} F \left(\frac{\rho g r P h}{f_{\sigma,z}} \right)$$

Ejemplo 3.12 Fuerza entre placas unidas por un líquido que las moja

En ausencia de gravedad, dos placas delgadas, están separadas una distancia pequeña, d , por un líquido que, por efecto de la tensión superficial, las atrae. La superficie de contacto fluido-placa es un círculo de radio R y centro O , Figura 3.14. Calcule la fuerza necesaria para mantener las placas separadas, f_o .

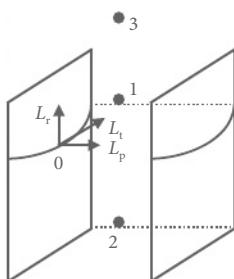


Figura 3.14 Geometría del problema

Solución

La fuerza necesaria para mantener las placas separadas, f_o , es una función de la diferencia de presiones Δp_{32} y de la superficie de mojado, S_o . Los exponentes dimensionales de las variables $\langle f_o, \Delta p_{32}, S_o \rangle$ en la base $\{L_r, L_p, L_t, M, T\}$, con L_r en la dirección radial sobre la placa partiendo de O, L_t en dirección circunferencial (circunferencia que encierra el círculo de mojado sobre la placa superior) y L_z en dirección normal a las placas, se muestran en la Tabla 3.21.

Tabla 3.21 Exponentes dimensionales

	Δp_{32}	S_o	σ_r	d	P	f_o	Δp_{12}
L_r	-1	1	1				1
L_t	-1	1	-1		1		-1
L^z	1			1		1	-1
M	11					1	1
T	-2		-2			-2-	2

Resulta un monomio:

$$\pi = \frac{f_o}{\Delta p_{32} S_o}$$

por lo que el orden de magnitud de f_o es

$$f_o \sim \Delta p_{32} S_o$$

Expresemos esta fuerza en función de variables independientes del problema. Dado que las presiones exteriores p y p_3 son iguales, se cumple que $\Delta p_{32} = \Delta p_{12} = p_1 - p_2$. Esta diferencia de presiones es función de σ_r , d y P (perímetro de mojado). Los exponentes de las variables $\langle \Delta p_{12}, \sigma_r, d, P \rangle$ se muestran en la misma tabla. La solución es el monomio

$$\pi = \frac{\Delta p_{12} d}{\sigma_r}$$

que proporciona el orden de magnitud de la diferencia de presiones buscada:

$$\Delta p_{12} \sim \sigma_r / d$$

Sustituyendo Δp_{12} en la expresión de f_o obtenemos la solución

$$f_o \sim \frac{\sigma_r S_o}{d}$$

Una vez más, queda de manifiesto que para buscar soluciones lo más precisas posibles se requiere una profunda comprensión de la teoría bajo estudio y mejorar las soluciones obtenidas con otras consideraciones de tipo físico; en este caso, el uso de la igualdad numérica (no dimensional) de las diferencias de presiones según direcciones diferentes.

Ejemplo 3.13 Flujo de Couette

Supóngase el flujo de un fluido confinado entre dos placas, Figura 3.15. La placa inferior está en reposo mientras la placa superior tiene una velocidad v_o . La sepa-

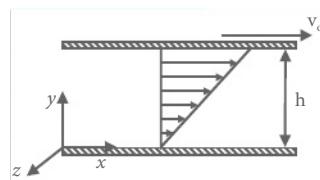


Figura 3.15 Geometría del flujo lineal de Couette

ración entre placas es suficientemente estrecha como para considerar que el perfil de velocidades del fluido es lineal.

En un instante dado se retira la placa superior, con lo que el fluido queda libre hasta detenerse por la acción de las fuerzas viscosas. Se tiene que determinar el espacio recorrido por una partícula de fluido hasta que se detiene y el tiempo empleado.

Solución

Para el cálculo de cualquiera de las incógnitas, l^* (longitud recorrida hasta detenerse) y t^* (tiempo empleado en el recorrido), la lista de variables, además de las

propias incógnitas, contiene las magnitudes siguientes: densidad, asociada a la existencia de fuerzas de inercia; viscosidad, μ , asociada a las fuerzas viscosas; velocidad característica, v_o , y espesor de la capa de fluido, h . Los exponentes dimensionales de estas magnitudes $\langle \mu, \rho, v_o, h, l^*, t^* \rangle$ en la base discriminada $\{L_x, L_y, L_z, M, T\}$, se muestran en la Tabla 3.22.

Tabla 3.22 Exponentes dimensionales

	μ	ρ	v_o	h	l^*	t^*
L_x	-1	-1	1		1	
L_y	1	-1		1		
L_z	-1	-1				
M	1	1				
T	-1		-1			1

Para cada problema $\langle \mu, \rho, v_o, h, l^* \rangle$ y $\langle \mu, \rho, v_o, h, t^* \rangle$ se obtiene un único monomio

$$\pi_{l^*} = \frac{\rho v_o h^2}{\mu l^*}$$

$$\pi_{t^*} = \frac{\rho h^2}{\mu t^*}$$

El primero de ellos es un número de Reynolds discriminado. Los órdenes de magnitud para I^* y t^* son

$$I^* \sim \frac{\rho v_o h^2}{\mu}$$

$$t^* \sim \frac{\rho h^2}{\mu}$$

Es razonable pensar en que t^* es independiente de v_o , pues la fuerza viscosa crece con el gradiente de velocidades y, por tanto, crece también la aceleración que frena las partículas. En términos del número de Reynolds definido habitualmente para este flujo,

$$I^* \sim \frac{\rho v_o h^2}{\mu} = h \text{ Re}_h$$

$$t^* \sim \frac{\rho h^2}{\mu} = \left(\frac{h}{v_o} \right) \text{ Re}_h$$

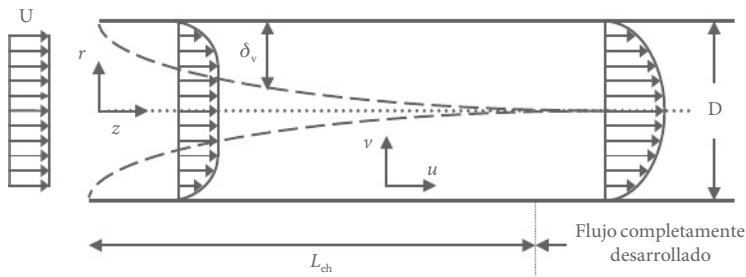
Es inmediato deducir que el ADC proporciona dos monomios para cada problema; es decir, la solución menos precisa:

$$I^* = h f \left(\frac{\rho v_o h}{\mu} \right) = h f (\text{Re}_h)$$

$$t^* \sim \left(\frac{h}{v_o} \right) f \left(\frac{\rho v_o h}{\mu} \right) = \frac{h}{v_o} f (\text{Re}_h)$$

Ejemplo 3.14 Flujo interno en tubos

Un fluido entra en un tubo circular de diámetro D con una velocidad uniforme U . La capa de fluido en contacto con la superficie del tubo frenará las capas adyacentes, con lo que se formará y desarrollará una capa límite de velocidad a lo largo del tubo cuyo espesor aumentará en la dirección del flujo hasta que alcance el centro del mismo, Figura 3.16. La región comprendida entre la sección de entrada y el punto en el que la capa límite alcanza el eje del tubo se llama región de entrada hidrodinámica; y la longitud de esta región, longitud hidrodinámica de entrada. El flujo en la región de entrada se llama flujo en desarrollo hidrodinámico. La región posterior a la de entrada hidrodinámica, en la que el perfil de velocidades está completamente desarrollado y permanece inalterado, se llama región hidrodinámica completamente desarrollada.



Longitud de entrada hidrodinámica

Figura 3.16 Flujo interno en tubos

(a) Longitud de entrada hidrodinámica, L_{eh}

El desarrollo del flujo en el interior del tubo depende del diámetro del tubo, D , de la velocidad característica del fluido (la del fluido no perturbado por el tubo o la velocidad media en una sección del tubo), U , y de las propiedades del fluido, densidad (inercia) y viscosidad (fricción). La tabla de los exponentes dimensionales de estas variables en la base dimensional $\{L_r, L_s, L_z, T, M\}$, donde L_s es la dimensión de la longitud en dirección del arco perimetral, es la siguiente:

Tabla 3.23 Exponentes dimensionales

	D	U	ρ	μ	L_{eh}
L_r	1	0	-1	1	
L_s	0	0	-1	-1	
L_z	0	-1	-1	-1	1
M	0011				
T	0	-1	0	-1	

Con estas variables se puede formar el monomio adimensional:

$$\pi_{\text{Leh}} = \frac{\rho U D^2}{\mu L_{\text{eh}}}$$

que proporciona el orden de magnitud de la longitud de entrada hidrodinámica

$$\frac{L_{\text{eh}}}{D} \sim \frac{\rho U D}{\mu} = \text{Re}_{\text{ADC}}$$

El análisis dimensional clásico conduce a un resultado menos preciso, pues no determina el orden de magnitud de dicha longitud. En función del número de Reynolds clásico, la solución de ADC es

$$L_{\text{eh}}/D = F(\text{Re}_{\text{ADC}})$$

(b) Perfil de velocidad del flujo laminar en la región completamente desarrollada, $z > L_{eh}$

El perfil de velocidades se mantiene inalterado en la dirección del movimiento, independiente de x . Como no existe movimiento en dirección radial, $v = 0$, y $u = u(r)$, las fuerzas iniciales se anulan y, en consecuencia, no existen aceleraciones (perfil independiente de la densidad). El movimiento del fluido a través

del tubo ha sido originado y mantenido por un gradiente de presiones (dp/dz). Así pues, la lista de variables es $\{R, r, dp/dz, \mu, u(r)\}$. Los exponentes dimensionales en la base $\{L_r, L_s, L_z, T, M\}$ se muestran en la Tabla 3.24.

Tabla 3.24 Exponentes dimensionales

	R	dp/dz	μ	r	$u(r)$
L_r	1	-1	1	1	0
L_s	0	-1	-1	0	0
L_z	0	0	-1	0	1
M	01100				
T	0	-2	-1	0	-1

Se obtienen dos monomios:

$$\pi_1 = \frac{\mu u(r)}{(dp/dz) R^2}$$

$$\pi_2 = \frac{r}{R}$$

y la solución

$$u(r) = \left(\frac{R^2}{\mu} \frac{dp}{dz} \right)^{1/2} F\left(\frac{r}{R}\right)$$

La solución analítica es de tipo parabólico, con un máximo en la línea central y un mínimo en la superficie del tubo,

$$u(r) = -\left(\frac{R}{4\mu} \frac{dp}{dz} \right)^{1/2} [1 - (r/R)^2]$$

La velocidad en el centro del tubo, u^* , puede determinarse sin más que eliminar en el cuadro anterior la variable r , lo que da un solo monomio:

$$\pi_u = \frac{\mu u^*}{(dp/dz) R^2}$$

y un orden de magnitud para esta velocidad:

$$u^* \sim \frac{R^2}{\mu} \left(\frac{dp}{dz} \right)^{1/2}$$

(c) Caída de presión y factor de fricción en la región completamente desarrollada

La caída de presión, Δp , es una magnitud de interés en tanto que está directamente relacionada con las necesidades de potencia de la bomba o el ventilador para mantener el flujo en el tubo. Siempre que la sección de flujo sea vertical (efectos gravitatorios despreciables) y que el área de la sección transversal sea

constante (velocidad media constante), la caída de presión por unidad de longitud es función del diámetro, D , de la velocidad media, u_m (del mismo orden de magnitud que la velocidad en el centro) y de la viscosidad del fluido, μ . Los exponentes dimensionales de la lista relevante, $\langle D, L, \mu, u_m, \Delta p \rangle$, se muestran en la Tabla 3.25.

Tabla 3.25 Exponentes dimensionales

	D	u_m	μ	$\Delta p/\Delta z$
L_r	1	0	1	-1
L_s	0	0	-1	-1
L_z	0	1	-1	
M	0011			
T	0	-1	-1	-2

Resulta un solo monomio adimensional:

$$\pi_{\Delta p} = \frac{(\Delta p/\Delta z) D^2}{\mu u_m}$$

que informa del orden de magnitud de Δp ,

$$\frac{\Delta p}{\Delta z} \sim \frac{\mu u_m}{D^2}$$

o bien, $\Delta p/\Delta z = C \mu u_m / D^2$, donde C es una constante adimensional. La teoría da $C = 32$ (la elección más adecuada es de R en lugar de D , ya que R define por completo la extensión en donde se producen los fenómenos da una constante de valor 8). La solución anterior puede expresarse en función de dos números adimensionales clásicos en mecánica de fluidos, Reynolds y Euler, definidos como:

$$Re_D = \frac{\rho u_m D}{\mu}$$

$$Eu = \frac{\Delta p}{\rho u_m^2}$$

resultando

$$\pi_{\Delta p} = \frac{(\Delta p/\Delta z) D^2}{\mu u_m} = \left(\frac{D}{\Delta z} \right) E_u \text{ Re}_D$$

o bien,

$$E_u = \left(\frac{\Delta p}{\Delta z} \right)^{1/2} \text{ Re}_D^{1/2}$$

También suele expresarse la caída de presión en función del factor de fricción, f , en la forma

$$f = \frac{(\Delta p/\Delta z) D}{2 \left(\frac{D}{\Delta z} \left(\frac{\Delta p}{\rho u_m^2} \right) \right)^{1/2}} = \frac{D}{\Delta z} E_u 2C \text{ Re}_D^{-1}$$

(d) Gasto volumétrico

Conocida la caída de presión por unidad de longitud del tubo, es posible determinar el gasto volumétrico, producto de la velocidad por la sección de paso. Mientras que el diámetro, la caída de presión por unidad de longitud y la viscosidad definen la velocidad media del fluido, para definir la sección, necesaria para obtener el gasto volumétrico, es preciso añadir una nueva variable geométrica (no basta el diámetro). Podemos incluir directamente la sección, A , con lo que la lista relevante de variables es $\langle D, A, \mu, \Delta p/\Delta z, Q \rangle$ y sus exponentes dimensionales los de la tabla siguiente.

Tabla 3.26 Exponentes dimensionales

	D	A	μ	$\Delta p/\Delta z$	Q
L_r	1	1	1	-1	1
L_s	0	1	-1	-1	1
L_z	0	0	-1	0	1
M	00110				
T	0	0	-1	-2	-1

La solución es un solo monomio adimensional:

$$\pi_Q = \frac{(\Delta p/\Delta z) AD^2}{\mu Q}$$

de donde,

$$Q = C \left(\frac{AD^2}{\mu} \right) \left(\frac{\Delta p}{\Delta z} \right)$$

Sustituyendo la sección circular $A = \pi D^2/4$, se obtiene la conocida ley de Poiseuille, con $C = 1/32$.

$$Q = C (\pi \Delta p D^4 / 4 \mu \Delta z)$$

(e) Flujo laminar en la región de entrada. Espesor de la capa límite,

distribución de velocidades y caída de presión
 Se analiza la zona viscosa dentro de la región de entrada hidrodinámica, $z \leq L_{ch}$ y $0 \leq r \leq R$, donde el perfil de velocidades se está desarrollando. La capa límite $\delta(z)$ dependerá de una velocidad característica, U , definida en la entrada del tubo, de la densidad del fluido, ρ (por existir aceleraciones), de la viscosidad, μ , y de la distancia z a la entrada del tubo. Así, la lista relevante de variables es $\langle R, \mu, \rho, z, U, \delta \rangle$, Tabla 3.27.

Tabla 3.27 Exponentes dimensionales

	R	μ	ρ	z	U	δ
L_r	1	1	-1	0	0	1
L_s		-1	-1	0	0	0
L_z		-1	-1	1	1	
M		11000				
T		-1	0	0	-1	

A diferencia del caso de flujo externo sobre una placa plana (como veremos más adelante) se obtienen dos monomios adimensionales:

$$\pi_{\delta 1} = \frac{\rho U R^2}{\mu z}$$

$$\pi_{\delta 2} = \frac{\delta}{R}$$

que proporcionan la solución

$$\frac{\delta}{R} = F\left(\frac{\rho U R^2}{\mu z}\right)$$

En régimen laminar, la velocidad del fluido varía tanto en la dirección del eje como en la dirección radial. En consecuencia, las variables que intervienen para determinar la componente axial de la velocidad, $u(r,z)$, son $\langle U, R, \mu, \rho, r, z, u(r,z) \rangle$. Sus exponentes dimensionales se indican en la tabla siguiente.

Tabla 3.28 Exponentes dimensionales

	U	R	μ	ρ	r	z	$u(r,z)$
L_r	0	1	1	-1	1	0	0
L_s	0		-1	-1	0	0	0
L_z	1		-1	-1	0	1	1
M	0		1	1	0	0	0
T	-1		-1	0	0	0	-1

Resultan tres monomios adimensionales:

$$\Pi_1 = \frac{u}{U}, \quad \Pi_2 = \frac{\rho U R^2}{\mu z}, \quad \Pi_3 = \frac{r}{R}$$

que conducen a una solución poco precisa:

$$\frac{u}{U} = F\left(\frac{\rho U R^2}{\mu z}, \frac{r}{R}\right)$$

Si se considera que la velocidad en la dirección radial (v) es constante ($v = v_0$), la velocidad en la dirección axial (u) se determina a partir de la ecuación (3.28) y la velocidad en la dirección normal (w) se determina a partir de la ecuación (3.29). La velocidad en la dirección normal (w) se determina a partir de la ecuación (3.29).

$$v = \left(\frac{\mu U}{\rho z} \right)^{1/2} F \frac{\rho U R^2}{\mu z}, \frac{r}{R}$$

o bien, con el fin de concentrar la dependencia con z en el argumento de la función indeterminada puede expresarse de la forma

$$v = \left(\frac{\mu}{\rho R} \right)^{1/2} F \frac{\rho U R^2}{\mu z}, \frac{r}{R}$$

La caída de presión en la región de entrada puede determinarse de la lista de variables $\langle D, \mu, \rho, z, u_m, \Delta p \rangle$, Tabla 3.29.

Tabla 3.29 Exponentes dimensionales

	D	Δp	μ	ρ	z	u_m
L_r	1	-1	1	-1	0	0
L_s	0	-1	-1	-1	0	0
L_z	0	0	-1	-1	1	1
M	011100					
T	0	-2	-1	0	0	-1

Se obtienen dos monomios adimensionales:

$$\pi_1 = \frac{\Delta p}{\rho u_m^2}$$

$$\pi_2 = \frac{\rho u_m D^2}{\mu z}$$

que conducen a la solución

$$\Delta p = \rho u_m^2 F\left(\frac{\rho u_m D^2}{\mu z}\right)$$

En función del factor de fricción $f = (\Delta p D / (1/2 \rho u_m^2 z))$ y del número de Reynolds clásico, $Re_D = \rho u_m D / \mu$, esta solución puede escribirse en la forma

$$f Re_D = F\left(\frac{D}{z} Re_D\right)$$

usada habitualmente para representar gráficamente f , Bejan [1984].

Ejemplo 3.15 Flujo en las cercanías de un disco en rotación

Consideremos el caso de un flujo en las cercanías de un disco plano, inmerso en un fluido viscoso en reposo, que gira alrededor del eje de simetría perpendicular a su plano con una velocidad angular uniforme ω . La capa delgada de fluido cercana al disco será arrastrada por fricción y expulsada hacia el exterior por acción de las fuerzas centrífugas. La velocidad del fluido en las cercanías del borde del disco tiene las componentes radial, angular y según el eje OZ, Figura 3.17. El caudal de fluido expulsado por el disco se repone merced al flujo axial continuamente arrastrado verticalmente hacia este y, de nuevo, expulsado hacia el exterior. Estudiaremos el espesor medio de la capa arrastrada por el disco en su borde y el caudal bombeado hacia fuera (o la velocidad de fluido en el borde).

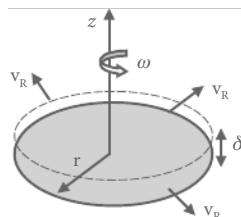


Figura 3.17 Geometría del problema

Solución

(a) Espesor de la capa de fluido en el borde del disco, δ

Las variables que determinan esta incógnita son: (i) las propiedades físicas del fluido, densidad y viscosidad (ρ y μ), que dan cuenta de los efectos inerciales y viscosos, respectivamente; (ii) la velocidad angular del disco, ω , y (iii) la geometría del disco definida por su radio, R , y su perímetro, P (o bien por el radio y el área del disco, A , o bien por el área y el perímetro). Adviértase que una sola de las variables geométricas no define completamente el disco. Por ejemplo, si en lugar de un disco completo el problema se refiere a un sector circular que gira sobre el mismo eje del círculo al cual pertenece, dicho sector necesita ser definido por el radio y por el perímetro de disco que abarca (o por el ángulo comprendido entre los radios que lo limitan); es decir, dos sectores diferentes del mismo radio no pueden especificarse exclusivamente por la única variable R . Las ecuaciones dimensionales del conjunto relevante de variables en la base $\{L_r, \varphi, L_z, T, M\}$ son:

$$[\rho] = M^{-2} L_r^{-2} \varphi^{-1} L_z^{-1}$$

$$[\omega] = \varphi T^{-1}$$

$$[R] = L_r$$

$$[P] = L_r \varphi$$

$$[\delta] = L_z$$

Para la ecuación de dimensiones de la viscosidad pueden considerarse dos fuerzas viscosas: la de dirección radial y la de dirección perimetral o circunferencial, asociadas a dos coeficientes de viscosidad μ_r y μ_t , respectivamente, obviamente del mismo valor numérico. Puede observarse que ambas ecuaciones de dimensión son idénticas por lo que solo una de ellas interviene en la lista relevante. Desde el punto de vista físico, ambas viscosidades tienen efectos diferentes sobre el fluido y causan, obviamente, el mismo espesor de capa límite en cada punto, de ahí que solo sea necesario determinar este espesor usando una cualquiera de estas viscosidades.

$$[\mu_r] = [f_r]/[S_z(\partial v_r/\partial z)] = L_r^{-2} \varphi^{-1} L_z T^{-1} M = [\mu]$$

$$[\mu_t] = [f_t]/[S_z(\partial v_t/\partial z)] = L_r^{-2} \varphi^{-1} L_z T^{-1} M = [\mu]$$

La aplicación del teorema de π a los exponentes dimensionales de estas variables, Tabla 3.30, proporciona un único monomio adimensional:

$$\pi_\delta = \frac{\delta^2 \rho \omega R}{\mu P}$$

que da el orden de magnitud de la variable buscada,

$$\delta \sim \left(\frac{\mu P}{\rho \omega R} \right)^{1/2}$$

Tabla 3.30 Exponentes dimensionales de las variables del problema

	ω	R	P	ρ	μ	δ
L_r		1	1	-2	-2	
φ	1		1	-1	-1	
L_z				-1	1	1
M				1	1	
T	-1				-1	

Adviértase que, como R y P son del mismo orden de magnitud, la solución puede simplificarse al monomio dimensional $\delta^{\vartheta}(\rho\omega/\mu)$ que conduce a la solución $\delta \sim (\mu/\rho\omega)^{1/2}$, numéricamente correcta.

Considerando la definición del número de Reynolds clásico, $Re = \rho\omega R^2/\mu$, la solución obtenida puede expresarse en la forma $Re \sim (R/\delta)^2$. Como la hipótesis de una capa delgada en el borde del disco supone la condición $\delta \ll R$, resulta que $Re \ll 1$ y, en consecuencia, la validez de las soluciones anteriores es solo válida para este rango de valores del número de Reynolds.

Es inmediato ver que la solución proporcionada por el ADC está formada por tres grupos adimensionales:

$$\pi_{\delta,1} = \delta/R$$

$$\pi_{\delta,2} = P/R$$

$$\pi_{\delta,3} = \rho\omega R^2/\mu$$

que conducen a una solución que contiene una función desconocida de dos argumentos,

$$\delta = R f(P/R, \rho\omega R^2/\mu)$$

Aun cuando no se incluya el perímetro en la lista de variables (lo que no es correcto de acuerdo con las indicaciones anteriores), la solución del ADC, menos precisa, no es capaz de informar del orden de magnitud de δ .

$$\delta = R f(\rho\omega R^2/\mu)$$

(b) Caudal volumétrico bombeado hacia fuera por el disco, q (m^3/s)

En relación con esta incógnita, las variables que influyen en su determinación son las mismas. La ecuación dimensional del caudal es $[q] = L_r^2 \varphi L_z T^{-1}$. Introduciendo los exponentes dimensionales de q en lugar de δ en la Tabla 3.30, el teorema de π conduce a un único monomio adimensional:

$$\pi_q = \frac{R}{q} \left(\frac{\mu \omega P R}{\rho} \right)^{1/2}$$

que proporciona el orden de magnitud de q ,

$$q \sim R \left(\frac{\mu \omega P R}{\rho} \right)^{1/2}$$

De nuevo, el ADC proporciona una solución muy pobre formada por tres

grupos:

$$\pi_{q,1} = P/R$$

$$\pi_{q,2} = \rho \omega R^2 / \mu$$

$$\pi_{q,3} = q / R^3 \omega$$

que conduce a la solución

$$q = R^3 \omega f(P/R, \rho \omega R^2 / \mu)$$

Por otro lado, con la lista incompleta y no justificada de variables, sin P , el ADC conduce a dos monomios:

$$\pi_{q,1} = \omega R^2 / \mu$$

$$\pi_{q,2} = q / R^3 \omega$$

cuya solución para el caudal es

$$q = R^3 \omega f(\rho R^2 \omega / \mu)$$

(c) Velocidad radial del fluido en el borde, v_R

La velocidad radial en el borde, v_R , cuya ecuación de dimensiones es $[v_R] = L_r T^{-1}$, se puede obtener a partir de las variables $\langle R, P, \omega, \rho, \mu, v_R \rangle$, cuyos exponentes dimensionales se muestran en la Tabla 3.31.

Tabla 3.31 Exponentes dimensionales de las variables del problema

	ω	R	P	ρ	μ	v_R
L_r		1	1	-2	-2	1
φ	1		1	-1	-1	
L_z				-1	1	
M				1	1	
T	-1				-1	-1

Con este cuadro se obtiene un único monomio

$$\pi_v = \frac{v_R P}{\omega R^2}$$

que para la velocidad proporciona el orden de magnitud

$$v_R \sim \frac{\omega R^2}{P}$$

Es interesante ver que el ADD expulsa de la solución las variables densidad y viscosidad. Téngase en cuenta que en la dirección radial no existe ningún balance de fuerzas de inercia-viscósas por lo que, directamente, ρ y μ podrían haber sido eliminadas de la lista de variables en el cálculo de v_R , lo que habría sido más formal en la deducción de la lista de variables. Alternativamente, v_R se puede obtener a partir del caudal, con $q = v_R \delta P$ y usando la solución anterior de δ .

El ADC proporciona de nuevo tres grupos:

$$\pi_{v1} = P/R$$

$$\pi_{v2} = \rho R^2 \omega / \mu$$

$$\pi_{v3} = R \omega / v_R$$

que conducen a una solución mucho más pobre:

$$v_R = R \omega f(P/R, \rho R^2 \omega / \mu)$$

(d) El caso $Re < 1$

Equivale a considerar fuerzas de inercia despreciables (movimiento lento). Las fuerzas viscósas se equilibran con las fuerzas de presión hidrostática (fuerzas gravitatorias), que hacen descender la columna de fluido para sustituir al fluido desplazado en sentido radial. Es decir, el balance ha de producirse entre las fuerzas hidrostáticas de presión por unidad de volumen en sentido circunferencial, $F_{h,p}$, y las fuerzas viscósas por unidad de volumen en el mismo sentido $F_{v,p}$.

Las variables que determinan el espesor de la capa, δ , son: $\langle F_{h,p}, \mu, \omega, R, P \rangle$, aunque puede considerarse el área, A , en lugar del perímetro, P . Las ecuaciones dimensionales de estas variables en la base $\{L_r, \varphi, L_z, T, M\}$ son:

$$[F_{h,p}] = M L_r^{-1} L_z^{-1} T^{-2}$$

$$[\mu] = L_r^{-2} \varphi^{-1} L_z T^{-1} M$$

$$[\omega] = \varphi T^{-1}$$

$$[R] = L_r$$

$$[P] = L_r \varphi$$

$$[\delta] = L_z$$

La Tabla 3.32 recoge los exponentes dimensionales.

Tabla 3.32 Exponentes dimensionales ($Re < 1$)

	ω	R	P	$F_{h,p}$	μ	δ
L_r		1	1	-1	-2	
φ	1			1	-1	
L				-1	1	1
\dot{M}				1	1	
T	-1			-2	-1	

La aplicación de teorema de π arroja un único monomio:

$$\pi_\delta = (\delta^2 F_{h,p}) / (\mu \omega R)$$

que informa del orden de magnitud del espesor de la capa límite,

$$\delta \sim \left(\frac{\mu \omega R}{F_{h,p}} \right)^{1/2}$$

Las fuerzas hidrostáticas de presión por unidad de volumen son causadas por el peso del fluido, y su valor numérico es $F_{h,p} = \rho g$. Adviértase que, dimensionalmente, $[F_{h,p}] = [M]^{1/2} [L^r]^{-1} [L^z]^{-2} [T]^{-2}$, mientras que $[\rho g] = [L^r]^{-1} [\varphi]^{-2} [T]^{-2} [M]^{-1}$, es decir $F_{h,p}$ y ρg no tienen la misma ecuación de dimensiones. Se trata del mismo efecto cruzado que aparece en la ecuación de Bernoulli o Euler (Ejemplo 3.1): la presión local debida al peso se transmite en todas direcciones, en particular en la dirección circumferencial, balanceándose con las fuerzas viscosas por unidad de volumen. Sustituyendo el valor de $F_{h,p}$ en la expresión anterior:

$$\delta \sim \left(\frac{\mu \omega R}{\rho g} \right)^{1/2}$$

Dejamos como ejercicio la solución menos precisa que proporciona el ADC.

Ejemplo 3.16 Flujo forzado laminar a lo largo de una placa horizontal:

espesor de capa límite, fuerza de arrastre, etc.

Sea una placa delgada, en reposo, inmersa en un fluido animado con una velocidad uniforme, v_o , Figura 3.18. El movimiento del fluido sobre la placa queda definido por un balance entre las fuerzas de inercia, caracterizadas por la densidad del fluido, ρ , y las fuerzas viscosas, caracterizadas por el coeficiente de viscosidad, μ , la velocidad del fluido no perturbado, U , y la longitud de la placa, l_o .

Con carácter general adoptaremos la base discriminada $\{ L_o, L_z, S_z, T, M \}$ que contiene la superficie de los planos deslizantes, S_z , relacionada más directamente con el problema físico. Los exponentes dimensionales de las variables independientes se muestran en la Tabla 3.33.

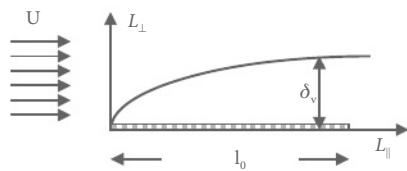


Figura 3.18 Geometría del problema

Tabla 3.33 Magnitudes independientes y sus exponentes dimensionales en la base $\{L_{\parallel}, L_{\perp}, S_{\perp}, T, M\}$

	U	l_o	ρ	μ
L_{\parallel}	1	1		
L_{\perp}			-1	1
S_{\perp}			-1	-1
T	-1			-1
M			1	1

Puede comprobarse que dichas variables no proporcionan ningún monomio adimensional. Con el análisis dimensional clásico, base $\{L, T, M\}$, Tabla 3.34, se obtiene un monomio, precisamente el conocido número de Reynolds clásico,

$$Re_{l_o} = \rho U l_o / \mu$$

La dimensión de este número en la base discriminada es $[Re_{l_o}] = L_{\parallel} L_{\perp}^{-1}$.

Tabla 3.34 Magnitudes independientes y sus exponentes dimensionales en la base $\{L, T, M\}$

	U	l_o	ρ	μ
L	1	1	-3	-1
T	-1			-1
M			1	1

(a) Cálculo del espesor de la capa límite de velocidad, δ_v

La lista de variables relevantes es $\{\rho, U, l_o, \mu, \delta_v\}$ y sus exponentes dimensionales, en la base $\{L_{\parallel}, L_{\perp}, S_{\perp}, T, M\}$ se muestran en la Tabla 3.33. Si se incorpora a ella $[\delta_v] = L_{\perp}$, la aplicación del teorema de π conduce al monomio adimensional

$$\pi = \frac{\rho U \delta_v^2}{\mu l_o}$$

que proporciona el orden de magnitud del espesor de la capa límite en el extremo de la placa,

$$\delta_v \sim \left(\frac{\mu l_o}{\rho U} \right)^{1/2}$$

Análogamente, puede deducirse la variación del espesor de la capa límite con la distancia al borde de ataque, x . Si se sustituye l_o por x , resulta $\delta_v(x) \sim \left(\frac{\mu x}{\rho U} \right)^{1/2}$, con la expresión que define un perfil parabólico para la capa límite.

El monomio puede escribirse de la forma

$$\pi = \left(\frac{\delta_v}{l_o} \right)^{1/2} \text{Re}_{l_o} = \text{Re}_{ADD}$$

que puede considerarse como un nuevo número de Reynolds discriminado, que es adimensional tanto en el ADC como en el ADD y que además tiene un significado físico preciso de balance de fuerzas dentro de la región perturbada del fluido (capa límite), de extensión ($\delta_v \times l_o$), véase Capítulo 5.

Dado que el movimiento del fluido está especificado por un balance exclusivo entre las fuerzas de inercia y viscosas, el parámetro Re_{ADD} es del orden de la unidad,

$\text{Re}_{ADD} \sim \text{Re}_{l_o}$. De acuerdo con lo anterior, el significado del número de Reynolds clásico, Re_{l_o} , es puramente geométrico, el cuadrado de la razón entre la longitud clásica de la placa y el espesor de la capa límite de velocidad (un significado ya conocido, Bejan [1984]). Habitualmente, un número mucho mayor que la unidad.

Sobre la hipótesis de la existencia de una capa límite en el problema: El cálculo de su espesor puede abordarse sin la necesidad de asumir esta hipótesis. Con las variables independientes de la Tabla 3.33 podríamos preguntarnos si existe una longitud característica en dirección perpendicular a la placa (magnitud oculta del problema) que especifique la extensión en dicha dirección de la región donde se balancean las fuerzas consideradas. Es obvio que, si introducimos dicha longitud en la lista de variables, se alcanza el mismo resultado.

(b) Cálculo del campo de velocidades en el interior de la capa límite

Tabla 3.35 Exponentes dimensionales en la base $\{L_{||}, L_{\perp}, S_{\perp}, T, M\}$

	x	y	U	ρ	μ	u
$L_{ }$	1		1			1
L_{\perp}		1		-1	1	
S_{\perp}				-1	-1	
T			-1		-1	-1
M				1	1	

La componente x de la velocidad, u , es función de la posición, x e y , ($0 \leq x \leq l_o$, $0 \leq y \leq \delta_v$), de la velocidad del fluido no perturbado, U , de la densidad, ρ , y del

coeficiente de viscosidad, μ , por lo que la lista relevante de variables es $\langle x, y, U, \rho, \mu, u \rangle$. En la base dimensional anterior, los exponentes dimensionales se muestran en la Tabla 3.35.

Se obtienen dos monomios:

$$\pi_{1,u} = \frac{u}{U}$$

$$\pi_{2,u} = \frac{\rho U y^2}{\mu x}$$

que conducen a la solución

$$\frac{u}{U} = f\left(\frac{\rho U y^2}{\mu x}\right)$$

Ecuación que expresa el perfil de velocidades en dirección x como una función del parámetro, $(\rho U y^2 / \mu x)$. En la bibliografía habitualmente se emplea el parámetro $\eta = y (\rho U / \mu x)^{1/2}$ para representar u/U .

La componente y de la velocidad, v , se determina de manera análoga sustituyendo en la Tabla 3.35 u por v , con $[v] = L^\perp T^{-1}$. También resultan dos monomios

$$\pi_{1,v} = \frac{vx}{Uy}$$

$$\pi_{2,v} = \frac{\rho U y^2}{\mu x}$$

que proporcionan la solución

$$v = \left(\frac{U y}{x} \right) f\left(\frac{\rho U y^2}{\mu x} \right)$$

Hacemos notar que del monomio $\pi_{1,v} = vx/Uy$ se deduce que $v^* = Uy/x$, una velocidad característica en dirección normal a la placa en la coordenada (x, y) . Particularmente en $y = \delta_v$, $v^* = U\delta_v/L$.

(c) Cálculo de la fuerza de arrastre ejercida por el fluido sobre la placa (drag force)

Esta fuerza sobre la placa se traduce en una caída de presión en el fluido (por unidad de longitud de placa), y de aquí en la potencia de bombeo necesaria para mantener la corriente de flujo de fluido. La tensión de corte se define como $\tau = \mu(\partial v / \partial n)$, con $(\partial v / \partial n)$ en la superficie de la placa, y su ecuación dimensional en la base adoptada es $[\tau] = ML_\parallel T^{-2} S_\perp^{-1}$. La lista relevante, que debe incluir la densidad ya que el perfil de velocidades depende de esta, es $\langle l_o, U, \rho, \mu, \tau \rangle$.

Tabla 3.36

Cuadro de exponentes dimensionales para la determinación de la fuerza de arrastre

	U	l_o	ρ	μ	τ
$L_{ }$	1	1			1
L_{\perp}			-1	1	
S_{\perp}			-1	-1	-1
T	-1			-1	-2
M			1	1	1

De estos exponentes se deduce un único monomio:

$$\pi_{\tau} = \frac{\tau^2 l_o}{\rho \mu U^3}$$

que conduce al orden de magnitud de la tensión de corte

$$\tau \sim \left(\frac{\rho \mu U^3}{l_o} \right)^{1/2}$$

Adviértase que muchos libros de texto definen el llamado coeficiente de fricción superficial (*skin friction coefficient*) como $c_f = \tau / (\rho U^2 / 2)$. Si se sustituye c_f en el monomio $\pi_{\tau} \sim Re_{l_o}^{-1/2}$ aparece la conocida relación entre este y el número de Reynolds clásico $c_f \sim Re_{l_o}^{-1/2}$. De nuevo, a pesar de que c_f es un número adimensional desde las perspectivas del ADD y de que algunos textos le asignan el significado “cociente entre esfuerzo cortante superficial/energía cinética por unidad de volumen del fluido no perturbado”, desde la perspectiva de ADD, c_f ni es adimensional ni su significado es el del cociente anterior. La dimensión de c_f es $[c_f] = L_{\perp} L_{||}^{-1}$, cociente entre la dimensión de una longitud perpendicular a la placa y de otra en dirección paralela, y su orden de magnitud puede deducirse que vale $c_f \sim \delta / l_o$.

Ejemplo 3.17 Flujo en una placa horizontal con succión

Un fluido de densidad ρ y viscosidad μ , animado de velocidad uniforme U , se mueve (con incidencia nula) en dirección paralela a una placa plana de longitud indefinida que presenta una succión uniforme en dirección perpendicular al flujo de velocidad v_s . Se considera que la cantidad de fluido succionada de la corriente principal es tan pequeña que únicamente las partículas de fluido en las inmediaciones de la superficie son succionadas. Esto es equivalente a decir que la razón entre la velocidad de succión, v_s , y la velocidad del fluido no perturbado, U , es muy pequeña.

Consideramos el sistema de ejes coordenados mostrado en la Figura 3.19. El ADD permite emplear la base dimensional $\{L_x, L_y, L_z, M, T\}$. En esta, los exponentes dimensionales de las variables independientes, ρ asociada a las fuerzas de inercia, μ asociada a las fuerzas viscosas, U y v_s , representados en la Tabla 3.37, no permiten la formación de ningún monomio adimensional. No se ha considerado la longitud de la placa por ser indefinida.

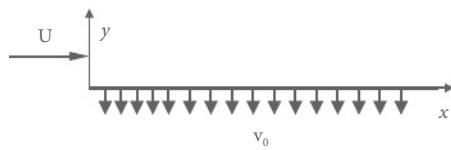


Figura 3.19 Esquema del problema

Tabla 3.37 Cuadro de los exponentes dimensionales

	U	v_o	ρ	μ
L_x	1		-1	-1
L_y		1	-1	1
L_z			-1	-1
M			1	1
T	-1	-1		-1

(a) Deducción de posibles longitudes características

Independientemente de conocer la o no de manera pormenorizada el flujo del fluido a lo largo de la placa o la consideración de ciertas hipótesis físicas de partida, podemos estudiar la existencia o no de longitudes ocultas que permitan establecer dichas hipótesis (regiones de flujo diferenciadas, balances de fuerzas, etc.). Este procedimiento puede adoptarse con carácter general cuando se abordan problemas de cierta complejidad en los que no se tiene toda la información necesaria para su resolución analítica.

Consideremos en primer lugar la existencia de una longitud característica en dirección paralela a la placa, dirección principal del movimiento del fluido, l^* , de dimensión, $[l^*] = L_x$. Si se añade a la Tabla 3.37 la columna correspondiente a l^* y se aplica el teorema de π , se obtiene el monomio

$$\pi_1 = \frac{\rho v_o^2 l^*}{\mu U}$$

que proporciona el orden de magnitud de esta longitud característica:

$$l^* \sim \frac{\mu U}{\rho v_o^2}$$

En segundo lugar, veamos si existe otra longitud característica en la dirección perpendicular a la placa, δ^* , con $[\delta^*] = L_y$. La introducción de esta variable en la Tabla 3.37 conduce de nuevo a un único monomio adimensional:

$$\pi_\delta = \frac{\rho v_o \delta^*}{\mu}$$

que informa sobre el orden de magnitud de esta longitud

$$\delta^* \sim \frac{\mu}{\rho v_0}$$

Las longitudes características, l^* y δ^* , definen los límites de una región caratterística (figura 3.20) en donde se altera la velocidad del fluido, cuyo per-

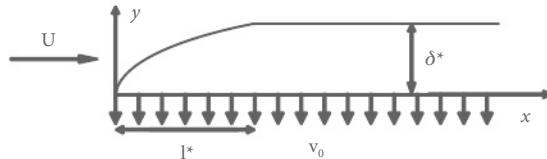


Figura 3.20 Regiones de flujo

Cabe preguntarse si la búsqueda de la longitud δ^* puede abordarse mediante argumentaciones de tipo físico. Obviamente, esto es posible: en la región de alteración del régimen del fluido cercana a la placa, la componente de la velocidad según y es $v_y = \text{cte}$ en todos los puntos en contacto con la placa y disminuye al alejarse de esta hasta un valor nulo en la zona no perturbada, mientras que la componente horizontal aumentará desde un valor nulo junto a la placa hasta su valor estacionario U lejos de esta. La distancia necesaria para que ello ocurra, que no depende de x , es precisamente δ^* . La interpretación física de los monomios se discute en el Capítulo 5.

(b) Estudio de la región $0 < x < l^*$

El espesor de la capa límite en la región inicial, $\delta(x) < \delta^*$, que define el perfil de dicha capa, es una función de la coordenada x y de las variables independientes del problema. Con $[x] = L_x$ y $[\delta] = L_y$, los exponentes dimensionales del conjunto de magnitudes y características físicas se muestran en la Tabla 3.38.

Tabla 3.38 Exponentes dimensionales

	U	v_0	ρ	μ	x	δ
L_x	1		-1	-1	1	
L_y		1	-1	1		1
L_z			-1	-1		
M			1	1		
T	-1	-1		-1		

Es posible formar dos monomios adimensionales:

$$\pi_1 = \frac{\rho v_o^2 \delta}{\mu}$$

$$\pi^2 = \frac{\rho v_o^2 x}{\mu U}$$

con lo que la solución para $\delta(x)$, en esta región ($x < l'$) es

$$\delta(x) = \left(\frac{\mu}{\rho v_o} \right)^{1/2} f \left(\frac{\rho v_o^2 x}{\mu U} \right)$$

Expresión que coincide con el resultado analítico de Schlichting [2000]. La distribución de velocidades depende tanto de x como de y , $u(x,y)$. La nueva tabla de exponentes es la 3.39.

Tabla 3.39 Exponentes dimensionales

	U	v_o	ρ	μ	x	y	$u(x,y)$
L_x	1		-1	-1	1		1
L_y		1	-1	1		1	
L_z			-1	-1			
M			1	1			
T	-1	-1		-1			-1

Ahora se obtienen tres monomios adimensionales:

$$\pi_1 = \frac{u(x,y)}{U}$$

$$\pi^2 = \frac{\rho v_o y}{\mu}$$

$$\pi_3 = \frac{\rho v_o^2 x}{\mu U}$$

de los que se deduce la solución

$$\frac{u(x,y)}{U} = f \left(\frac{\rho v_o y}{\mu}, \frac{\rho v_o^2 x}{\mu U} \right)$$

(c) Distribución de velocidades lejos del borde de ataque ($x > l^*$)

Ahora, la distribución de velocidad $u(x,y)$ no depende de x , Tabla 3.40,

Tabla 3.40 Exponentes dimensionales

	U	v_o	ρ	μ	y	$u(y)$
L_x	1		-1	-1		1
L_y		1	-1	1	1	
L_z			-1	-1		
M			1	1		
T	-1	-1		-1		-1

Los monomios resultantes son

$$\pi_1 = \frac{u(y)}{U}$$

$$\pi_2 = \frac{\rho v_o y}{\mu}$$

y la solución

$$\frac{u(y)}{U} = f\left(\frac{\rho v_o y}{\mu}\right)$$

Adviéntase que en esta región la componente vertical de la velocidad, v_o , es independiente de la posición.

(d) Tensión de corte en la superficie lejos del borde de ataque ($x > l^*$)

Como la tensión de corte se calcula en $y = 0$, y la distribución de velocidades es independiente de x , a las variables independientes se añade la columna de los exponentes dimensionales de la incógnita, τ_0 (Tabla 3.41),

$$[\tau_0] = [F_x/S_y] = (L_x M T^{-2}) / (L_x L_z) = L_z^{-1} M T^{-1}$$

Tabla 3.41 Exponentes dimensionales

	U	v_o	ρ	μ	τ_0
L_x	1		-1	-1	1
L_y		1	-1	1	
L_z			-1	-1	-1
M			1	1	1
T	-1	-1		-1	-2

Se obtiene un solo monomio adimensional:

$$\pi = \frac{\tau_o}{\rho v_o U}$$

que conduce al orden de magnitud de la tensión de corte

$$\tau_o \sim \rho v_o U$$

(e) Placa de longitud finita ($L_o < l^*$)

Si L_o es la longitud finita de la placa, el fluido en sus proximidades se encuentra alterado en toda su extensión y no llega a desarrollarse una capa de espesor constante, δ^* . Por consiguiente, el espesor de la capa límite aumenta con la distancia x al borde de ataque hasta alcanzar su valor límite para $x = L_o$, $\delta_{lim} = \delta(L_o)$. Las variables relevantes para la determinación de δ_{lim} y sus exponentes dimensionales se muestran en la Tabla 3.42.

Tabla 3.42 Exponentes dimensionales

	U	v_o	ρ	μ	L_o	δ_{lim}
L_x	1		-1	-1	1	
L_y		1	-1	1		1
L_z			-1	-1		
M			1	1		
T	-1	-1		-1		

Se obtienen dos monomios adimensionales:

$$\pi_1 = \frac{\rho v_o \delta_{lim}}{\mu}$$

$$\pi_2 = \frac{\rho v_o^2 L_o}{\mu U}$$

y la solución

$$\delta_{lim} = \left(\frac{\mu}{\rho v_o} \right)^f f \left(\frac{\rho v_o^2 L_o}{\mu U} \right)$$

Ejemplo 3.18 Fluido viscoso deslizándose por efecto de la gravedad por una pared vertical

Una capa de fluido viscoso de espesor d se desliza en régimen de velocidad completamente desarrollado (velocidad dependiente solo de x) por una pared vertical, Figura 3.21. Calcule la velocidad de descenso.

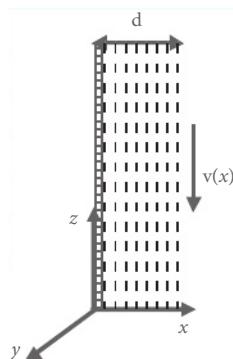


Figura 3.21 Geometría del problema

Solución

La velocidad depende de las fuerzas que se contraponen en el movimiento estacionario, viscosas y gravitatorias, así como de la posición; así, las variables relevantes son $\langle \mu, \rho g, x, v(x) \rangle$. Los exponentes dimensionales de estas en la base discriminada $\{L_x, L_y, L_z, M, T\}$ se muestran en la Tabla 3.43.

Tabla 3.43 Exponentes dimensionales

	μ	ρg	x	$v(x)$
L_x	1	-1		
L_y	-1	-1	1	
L_z	-1			1
M	1	1		
T	-1	-2		-1

La aplicación del teorema de π proporciona un solo monomio

$$\pi = \frac{\mu v(x)}{\rho g x^2}$$

que da el orden de magnitud de la velocidad

$$v(x) = \frac{\rho g x^2}{\mu}$$

La velocidad máxima, $v(x = d)$, es del orden de $\rho g d^2 / \mu$.

Ejemplo 3.19 Flujo laminar transversal a un cilindro horizontal

Sobre un cilindro largo en reposo, de radio R , se proyecta un fluido en dirección transversal al mismo, con una velocidad uniforme v_o (lejos del cilindro) y con una viscosidad μ , Figura 3.22. El flujo creado en torno al cilindro es laminar.

Determine el espesor máximo de la capa límite alrededor del cilindro.

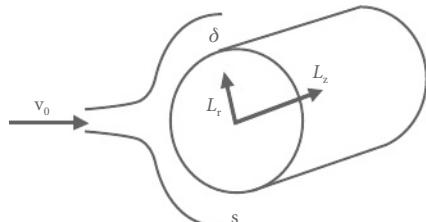


Figura 3.22 Geometría del problema

Solución

El fluido se desliza sobre la superficie lateral del cilindro formando una capa límite que comienza en el punto de estancamiento. La longitud a lo largo de la capa es el arco señalado con s en la figura. El espesor de la capa límite crece a lo largo del perímetro hasta un valor δ medido perpendicularmente a la superficie lateral. La velocidad característica es tangencial a la superficie en la dirección del arco y del orden de v_o . Con todo, la lista de variables, $\langle \mu, \rho, s, v_o, \delta \rangle$, incluye la densidad por los efectos inerciales, la viscosidad por los viscosos y el arco medido desde el punto de estancamiento. El radio R está asociado a los efectos inerciales globales fuera de la capa límite. En la base dimensional $\{L_r, \varphi, L_z, M, T\}$, los exponentes de estas variables se muestran en la Tabla 3.44.

Tabla 3.44 Exponentes dimensionales

	ρ	μ	v_o	s	δ
L_r	-2		11		1
φ	-1	-1	1	1	
L_z	-1	-1			
M	1	1			
T		-1	-1		

La solución es el monomio

$$\pi_\delta = \frac{\delta^2 \rho v_o}{\mu s}$$

que da un orden de magnitud para el espesor buscado

$$\delta \sim \left(\frac{\mu s}{\rho v_o} \right)^{1/2}$$

Dado que s y R (radio del cilindro) son del mismo orden de magnitud, la solución anterior puede escribirse en la forma $\delta \sim R^{1/2} (Re_R^2)^{1/2}$. El ADC, con las variables $\langle \mu, \rho, v_o, R, \delta \rangle$, proporciona para esta incógnita dos monomios: $\pi_1 = \delta/R$, $\pi_2 = \rho v_o R / \mu = Re_R$.

Aplicaciones en la transmisión de calor

4.1 Introducción

Se aplica el ADD a diferentes problemas fundamentales de transmisión del calor empleando para cada uno la base dimensional discriminada adecuada según lo descrito en el Capítulo 2. Recordemos que, en función del tipo de proceso, estas bases son $\{L, Q, T, \theta\}$, para procesos en los que no interviene la energía mecánica, $\{L, Q, T, \theta\}$ o $\{L, M, T, \theta\}$ indistintamente para procesos en los que existe conversión energía mecánica-energía calorífica (dissipación energética no despreciable), y $\{L, Q, T, \theta, M\}$ para procesos en los que no hay conversión entre ambas energías.

En cada problema se justificará tanto la elección dda base como la selección de las variables de la lista relevante mediante razonamientos físicos, así como la introducción de magnitudes ocultas, comparando los resultados con los obtenidos mediante el ADC u otras técnicas analíticas o experimentales. Como en el capítulo anterior, se aplica el teorema de π en la versión propuesta por Palacios [1956, 1964]. La discriminación conducirá a soluciones más precisas que el ADC y a monomios interpretables en forma de balances de magnitudes, según se verán en el Capítulo 5.

Los problemas expuestos a continuación, de diferente grado de dificultad, han sido seleccionados cuidadosamente. La mayor parte de ellos (excepto los de conducción de calor) son de capa límite y, en consecuencia, una prolongación de los estudiados en mecánica de fluidos, Capítulo 3.

4.2 Ejemplos

Ejemplo 4.1 Conducción bidimensional estacionaria en una placa rectangular

Se pretende determinar la distribución de temperaturas en una placa rectangular de altura H , anchura X y conductividad térmica k , Figura 4.1, en función de las condiciones de contorno.

Placa con bordes isotermos

Consideremos que los bordes verticales de la placa y el borde inferior se mantienen a temperatura T_1 y que el borde horizontal superior se mantiene a temperatura T_2

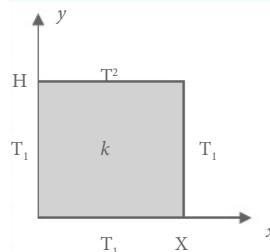


Figura 4.1 Conducción bidimensional estacionaria en una placa con bordes isotermos

Solución

Como se trata de un problema de conducción, la base dimensional adecuada para el ADC es $\{L, Q, T, \theta\}$ y para el ADD $\{L_x, L_y, L_z, Q, T, \theta\}$.

La lista relevante de variables está constituida por la incógnita del problema, $\Delta T(x, y) = T(x, y) - T_1$, por las coordenadas x e y , por las dimensiones de la placa, H y X , por la diferencia de temperatura entre los bordes $\Delta T_b = T_1 - T_2$, y por la conductividad térmica del material k . Por tratarse de conducción bidimensional incluiremos dos conductividades (anisotropía dimensional), una para cada dirección espacial. Así, la lista de variables relevantes es $\{x, y, X, H, k_x, k_y, \Delta T_b, \Delta T\}$. Los exponentes dimensionales de estas variables, en la base $\{k, L_y, L_z, Q, T, \theta\}$ se muestran en la Tabla 4.1.

Tabla 4.1 Exponentes dimensionales

	x	y	X	H	k_x	k_y	ΔT_b	ΔT
L_x	10101					-1	0	0
L_y	0101				-1100			
L_z	0000				-1	-1	0	0
Q	00001100							
T	0000				-1	-1	0	0
θ	00000					-1	1	1

La aplicación del teorema de π proporciona cuatro monomios adimensionales

$$\Pi_1 = \frac{\Delta T}{\Delta T_b} \Pi = \frac{1}{2} \Pi^{\frac{x}{X}}, \Pi = \frac{y}{H}, \quad \Pi^4 = \frac{k_x H^2}{k_y X^2}$$

con lo que la solución puede expresarse en la forma

$$\frac{\Delta T}{\Delta T_b} = \varphi \left(\frac{x}{X}, \frac{y}{H}, \frac{k_x H^2}{k_y X^2} \right)$$

donde φ es una función arbitraria de los argumentos indicados. La solución del ADC, más precisa, contiene cinco monomios $\pi_1, \Delta T_b, \pi_2, \pi_3, \pi_4$, donde $\pi_4 = H/X$ y $\pi_5 = k_x/k_y$. Solo cuando el material es isotrópico (numéricamente), $k_x = k_y$, las soluciones del ADC y del ADD coinciden. En este caso, el monomio $\pi_4 = k_x H^2/k_y X^2$ se reduce, numéricamente al cociente o al factor de forma geométrico H/X , no adimensional. La solución teórica para el caso isotrópico es

$$\frac{\Delta T}{\Delta T_b} = 2 \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{1 - (-1)^n}{n\pi} \right] \frac{\operatorname{senh}(n\pi y/X)}{\operatorname{senh}(n\pi H/X)} \operatorname{sen}(n\pi x/X)$$

Placa con tres bordes isotermos y uno convectivo

Consideremos que los bordes verticales de la placa y el borde inferior se mantienen a temperatura T_1 y que el borde horizontal superior se encuentra en contacto

con un fluido a una temperatura T^f .

Solución

La nueva lista de variables es $\langle x, y, X, H, k_x, k_y, h_y, \Delta T_b, \Delta T \rangle$ y los exponentes dimensionales en la base anterior se muestran en la Tabla 4.2.

Tabla 4.2 Exponentes dimensionales

	x	y	X	H	k_x	k_y	h_y	ΔT_o	ΔT
L_x	10101					-1	-1	0	0
L_y	0101				-11000				
L_z	0000				-1	-1	-1	0	0
Q	000011100								
T	0000				-1	-1	-1	0	0
θ	00000					-1	-1	1	1

La incorporación de h_y a la lista de variables proporciona un monomio adicional cuyo aspecto es el de un número de Biot, $Bi_H = h_y H / k_y$. La solución para el campo térmico es

$$\frac{\Delta T}{\Delta T_b} = \varphi \left(\frac{x}{X}, \frac{y}{H}, \frac{k_x H^2}{k_y X^2}, \frac{h_y H}{k_y} \right)$$

Es inmediato comprobar que el ADC proporciona un monomio más que el ADD. La diferencia entre los resultados ADD y ADC es, sin embargo, sustancial mientras que el ADD agrupa las conductividades y la geometría en un solo monomio, el ADC separa esta agrupación. Los monomios H/X y k_x/k_y del ADC no juegan un papel independiente en el problema por separado; es decir, un cambio en el valor de H/X no cambia forzosamente la solución del problema a menos

que el resto de los monomios no cambien su valor. La información proporcionada por el ADD es mucho más precisa, ya que el monomio $k_x H / k_y X$ si que desempeña un papel independiente en la solución del problema.

Así, si representamos los patrones del campo térmico (líneas de igual temperatura) o del flujo de calor, 2-D, en un dominio adimensional de las variables x' e y' ($x = x/X'$, $y' = y/H$), cuyos valores están en el rango [0,1], dichos patrones serán idénticos para valores constantes del monomio $k_x H^2 / k_y X^2$, con independencia del valor individual de las magnitudes o las constantes que lo forman. Esta información no la da el ADC.

Ejemplo 4.2 Conducción transitoria en una esfera con resistencia térmica interna despreciable

Una esfera que inicialmente se encuentra a una temperatura T_o se sumerge en un fluido a temperatura T_p . Se desea determinar el cambio que experimenta la temperatura de la esfera a lo largo del tiempo cuando la resistencia térmica interna es despreciable (modelo de características agrupadas o modelo “lump”).

Solución

Como se trata de un problema de conducción, la base dimensional adecuada es $\{L, Q, T, \theta\}$ para el ADC y $\{L, \theta, \varphi, Q, T, \theta\}$ para el ADD.

Al considerar la resistencia térmica interna despreciable no existen gradientes de temperatura en su interior, y en cualquier instante la temperatura se estima uniforme. El calor transferido por convección entre la superficie de la esfera y el fluido que le rodea provoca un cambio en el contenido de energía de la esfera. Así pues, la lista de variables queda constituida por la diferencia de temperatura, $\Delta T = T(t) - T_p$, siendo T la temperatura transitoria de la esfera, $\Delta T_o = T_o - T_p$, la diferencia de temperaturas inicial; V , el volumen; S , la superficie exterior de la esfera; c_e , su calor específico por unidad de volumen; h , el coeficiente de transmisión del calor, y t , el tiempo. En definitiva, $\langle V, S, c'_e, h, t, \Delta T_o, \Delta T \rangle$. Los exponentes dimensionales de estas magnitudes y constantes se muestran en la Tabla 4.3.

Este cuadro conduce a dos monomios adimensionales independientes:

$$\pi_1 = \frac{\Delta T}{\Delta T_o}$$

$$\pi_2 = \frac{h S t}{c'_e V}$$

Tabla 4.3 Exponentes dimensionales

	V	S	c'_e	h	t	ΔT_o	ΔT
L_r	3	2	-3	-2000			
θ	1	1	-1	-1000			
φ	1	1	-1	-1000			
Q	0011000						
T				-1100			
θ	0	0	-1	-1011			

siendo la solución para la temperatura de la esfera

$$\frac{\Delta T}{\Delta T_o} = \varphi \left(\frac{h S t}{c'_e V} \right)$$

La solución teórica es $\Delta T/\Delta T_o = \exp(hSt/c'_e V)$. El ADC proporciona una solución menos precisa, con un argumento más (factor de forma) en la función indeterminada,

$$\Delta T/\Delta T_o = \varphi(ht/c'_e S^{1/2}, V/S^{3/2})$$

La búsqueda de un tiempo característico (variable oculta) en el problema, independiente de las condiciones iniciales de temperatura, requeriría la lista de variables $\langle V, S, c', h, t^* \rangle$. El monomio que permite esta lista es

$$\pi_t = \frac{h St}{c'_e V}$$

y el orden de magnitud de este tiempo:

$$t \sim \frac{c'_e V}{h S}$$

Ejemplo 4.3 Convección forzada laminar a lo largo de una placa isotérmica horizontal

Consideremos un fluido a una temperatura T_f y con una velocidad uniforme v_o , que fluye paralelamente sobre una placa isotérmica de longitud l_o , a una temperatura T_s , Figura 4.2. La posición horizontal de la placa es irrelevante. Asumimos que la interacción térmica entre la superficie de la placa y el fluido tiene lugar en una estrecha región en las proximidades de la placa de espesor variable, δ_o , deno-

minada “capa límite térmica”. Se desea determinar el espesor de la capa límite térmica, δ_t y el coeficiente de transmisión del calor, h .

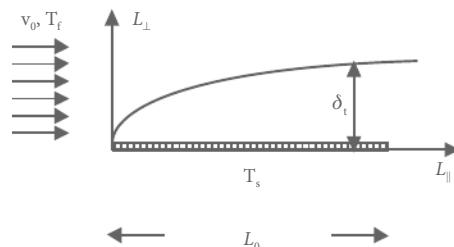


Figura 4.2 Geometría del problema

Solución

Tanto el espesor de la capa límite térmica como el coeficiente de transmisión del calor, definido a partir de la ley de enfriamiento de Newton $j = hS\Delta T$, dependen, en general, de la longitud de la placa, l_o , de la diferencia de temperaturas, $\Delta T = T_f - T_s$, de la velocidad del fluido no perturbado, v_0 , y de las propiedades del fluido densidad (asociada a las fuerzas de inercia), viscosidad dinámica (a las viscosas), calor específico de la unidad de volumen, $c'_e = \rho c_p$ y conductividad térmica, k . Así pues, las variables independientes del problema son $\langle \rho, v_0, l_o, k, \Delta T, \mu, c'_e \rangle$. Si consideramos despreciable la disipación de energía en el fluido por rozamiento viscoso, el problema queda inscrito dentro de aquellos fenómenos de transmisión de calor con efectos mecánicos, pero sin conversión energía mecánica en calor, para los que la base dimensional discriminada adecuada es $\{L_{||}, L_{\perp}, S_{\perp}, Q, T, \theta, M\}$. Los exponentes dimensionales de estas variables y constantes físicas, junto con los de las incógnitas, espesor de la capa límite y coeficiente de transmisión del calor, se muestran en la Tabla 4.4.

Tabla 4.4 Exponentes dimensionales de las magnitudes del problema térmico

	v_0	l_o	ΔT	r	m	k	c'_e	δ_t	h
$L_{ }$	1	1							
L_{\perp}				-1	1	1	-1	1	
S_{\perp}				-1	-1	-1	-1		-1
Q						1	1		1
T	-1				-1	-1			-1
θ			1			-1	-1		-1
M				1	1				

(a) Caso general

Asumimos que las fuerzas de inercia y viscosas son del mismo orden de magnitud, por lo que intervienen todas las variables independientes de la tabla, $\langle v_o, l_o, \Delta\theta, \rho, \mu, k, c'_e \rangle$. La aplicación del teorema de Π se aplica por separado para cada una de las incógnitas δ_t y h , cuyas listas relevantes son $\langle v_o, l_o, \Delta\theta, \rho, \mu, k, c'_e, \delta_t \rangle$, $\langle v_o, l_o, \Delta\theta, \rho, \mu, k, c'_e, h \rangle$, proporcionando dos monomios adimensionales en cada uno

de los casos. Para el espesor de la capa límite térmica se obtienen los monomios

$$\pi_{\delta t 1} = \delta_t \left(\frac{\mu l_o}{\rho v_o} \right)^{-1/2}$$

$$\pi_{\delta t 2} = \mu |c'_e| / \rho k = \nu / \alpha = \text{Pr}$$

que conducen a la solución

$$\delta_t = \left(\frac{\mu l_o}{\rho v_o} \right)^{1/2} \varphi(\text{Pr})$$

y para el coeficiente de transmisión del calor, los monomios

$$\pi_{h,1} = \left(\frac{h}{k} \right) \left(\frac{\mu l_o}{\rho v_o} \right)^{1/2}$$

$$\pi_{h,2} = \mu |c'_e| / \rho k = \nu / \alpha = \text{Pr}$$

que conducen a

$$h = k \left(\frac{\mu l_o}{\rho v_o} \right)^{-1/2} f(\text{Pr})$$

Estas soluciones se recogen en la literatura científica y en los libros de texto en términos de los números clásicos de Nusselt, Reynolds y Prandtl:

$$\frac{h}{k} \left(\frac{\mu l_o}{\rho v_o} \right)^{1/2} = f(\text{Pr})$$

$$\text{Nu}_{lo} \text{Re}_{lo}^{-1/2} = f(\text{Pr})$$

El ADC proporciona las soluciones menos precisas:

$$\delta_t / l_o = \varphi(\text{Re}_{lo}, \text{Pr})$$

$$\text{Nu}_{lo} = f(\text{Re}_{lo}, \text{Pr})$$

Esta última expresión, $\text{Nu}_{lo} = f(\text{Re}, \text{Pr})$, no refleja la relación entre Nu_{lo} y Re_{lo} obtenida por el ADD. Mientras que estos números, por separado, no desempeñan un papel independiente en la solución de acuerdo con el ADD, el ADC sí les asigna tal papel, lo cual es un error. La agrupación de ambos en la forma

$Nu_{lo} Re_{lo}^{-1/2} \propto hk^{-1}(l_o\mu/v_o\rho)^{1/2}$ es la que juega el papel independiente. La dimensión de estos números en la base discriminada es

$$[Nu_{lo}] = [h l_o / k] = L_{\parallel} \boxed{L_{\perp}^{-1}}$$

$$[Re_{lo}] = [v_o l_o / \nu] = \boxed{L_{\parallel}^2 L_{\perp}^{-2}}$$

Finalmente, si para resolver el problema se considera la misma lista de variables en la base dimensional $\{L_{\parallel}, L_{\perp}, S_{\perp}, Q, T, \theta\}$, válida para procesos en los que es significativa la conversión de energía mecánica en calor, aparece un nuevo monomio, denominado *número de Eckert*, $Ec = \rho v_o^2 / c'_e \Delta T$. En el problema planteado aquí se ha supuesto despreciable dicha transformación como hipótesis de partida y, en consecuencia, el número de Eckert no debe intervenir en la solución. Algunos autores, Zlokarnik [1991] y Baehr y Stephan [1998], emplean la base dimensional $\{L_{\parallel}, L_{\perp}, S_{\perp}, Q, T, \theta\}$ y a posteriori eliminan de la solución el número de Eckert. Desde la perspectiva de aplicación del análisis dimensional, es más formal el procedimiento de usar la base dimensional adecuada para cada problema, en lugar de usar una base extendida y simplificar, a posteriori, los resultados obtenidos.

(b) El caso asintótico $\delta_t \gg \delta_v$ o $Pr \ll 1$

Esta hipótesis se aplica a fluidos de elevada conductividad térmica, como los metales líquidos. En ellos, la capa límite velocidad es muy pequeña en comparación con la capa límite térmica, de forma que la transferencia de calor tiene lugar fundamentalmente en una región en la que la velocidad es la del fluido no perturbado. Significa que, en la mayor parte de esta región (capa límite térmica), toda ella menos la capa límite de velocidad, las fuerzas viscosas son nulas y, en consecuencia, también lo son las de inercia, por lo que se pueden eliminar μ y ρ de la lista relevante (Tabla 4.4). Esta queda en la forma $\langle v_o l_o \Delta T, k, c'_e, \delta \rangle$ y $\langle v_o l_o \Delta T, k, c'_e, h \rangle$ para la determinación de δ_t y h , respectivamente. Tanto para el espesor de la capa límite térmica como para el coeficiente de transmisión del calor resulta un único monomio

$$\pi_{\delta t} = \delta_t \left(\frac{k l_o}{c'_e v_o} \right)^{-1/2}$$

$$\pi^h = h \left(\frac{1}{k c'_e v_o} \right)^{1/2} = \left(\frac{h}{k} \right) \left(\frac{k l_o}{c'_e v_o} \right)^{1/2}$$

Los órdenes de magnitud de las incógnitas, δ_t y h , a partir de estos monomios (con $\alpha = k/c'_e$) son

$$\delta_t \sim \left(\frac{\alpha l_o}{v_o} \right)^{1/2}$$

$$h \sim k \left(\frac{\alpha l_o}{v_o} \right)^{-1/2}$$

Las soluciones que presentan libros de texto, Arpací y Larsen [1984] y Kays y Crawford [1993], por ejemplo, obtenidas mediante los métodos integral y de similaridad, se expresan en función de los números adimensionales clásicos Nusselt, Reynolds y Prandtl, en la forma

$$Nu_{lo} \sim Re_{lo}^{1/2} Pr^{1/2}$$

Para este caso límite, el ADD proporciona una solución mucho menos precisa, $Nu_{lo} = f(Re_{lo} Pr)$, con una función indeterminada de dos monomios.

Como se mencionó anteriormente, ni Nu ni Re son adimensionales desde la perspectiva del ADD. Por el contrario, es obvio que Pr es un número adimensional discriminado mientras que el producto $Re Pr$, llamado “número de Peclet”, no lo es y, por ende, no juega un papel independiente en la solución del problema.

La expresión $h \sim k(l_o \alpha/v_o)^{-1/2}$ puede escribirse como $Nu_{lo} \sim Re_{lo}^{-1/2} Pr^{1/2}$ introduciendo la viscosidad cinemática, α . De nuevo, puede deducirse que ninguno de los números clásicos, Nu_{lo} , Re_{lo} o Pr , juegan un papel independiente en la solución. Pr se une a Re en la forma $Re_{lo} Pr = Pe_{lo}$ (número de Peclet) y el producto, a su vez, está asociado a Nu_{lo} en la forma $Nu_{lo} (Pr Re_{lo})^{-1/2} = Nu_{lo} Pe_{lo}^{-1/2}$.

Como se vio en el Ejercicio 3.16 del capítulo anterior, en relación con los aspectos mecánicos de este problema, la magnitud oculta longitud característica, l^* , era del orden de magnitud de la capa límite de velocidad. Igualmente, en relación con los aspectos térmicos del problema, el grupo adimensional $Nu_{lo} Pe_{lo}^{1/2}$ puede ser escrito en la forma

$$Nu_{lo} Pe_{lo}^{-1/2} = (h/k)(l_o Pe_{lo}^{-1/2})$$

donde la longitud característica l^* , que hace adimensional el cociente h/k , está directamente relacionada (es del orden de magnitud) con el espesor de la capa límite térmica

$$\delta_t \sim l_o Pe_{lo}^{-1/2}$$

De hecho, el grupo $(h/k)(l_o Pe_{lo}^{-1/2})$ puede ser considerado como un número de Nusselt modificado, $h\delta_t/k$. Esta conclusión, obtenida mediante el ADD no está recogida en la literatura científica ni en los libros de texto. En resumen, el ADD proporciona el orden de magnitud correcto para el coeficiente de transferencia de calor e informa sobre el papel que juegan (o no) los conocidos números adimensionales clásicos.

(c) El caso asintótico $\delta_v \gg \delta_t$ o $Pr \gg 1$

Esta hipótesis se aplica a fluidos de alta viscosidad, como los aceites pesados. La capa límite de velocidad es mucho más gruesa que la térmica (muy cercana ala placa). En consecuencia, las velocidades y las aceleraciones del fluido son muy pequeñas en esta capa térmica, y los efectos de fricción e inercia son despreciables (aunque no nulos). Esto conduce a eliminar ρ y μ de la lista relevante de variables.

En contraste con el primer caso, la velocidad del fluido no perturbado tampoco debe incluirse en la lista de variables relevantes, pues no caracteriza el movi-

miento del fluido en la pequeña región de la capa límite térmica. La velocidad característica dentro de esta región debe ser una pequeña fracción de v_o , que denotaremos por $v^* = C v_o$, con $C \ll 1$ un factor numérico sin dimensiones. En suma, la lista relevante de variables que define el orden de magnitud de δ_t es $\langle v^*, l_o, k, \Delta T, k, c'_e \rangle$ y sus exponentes dimensionales en la base elegida se muestran en la Tabla 4.5.

Tabla 4.5

Magnitudes relevantes para la solución de δ_t y sus exponentes dimensionales, $\delta_v \gg \delta_t$ o $Pr \gg 1$

	v^*	l_o	ΔT	k	c'_e	δ_t
L_{\parallel}	1	1				
L_{\perp}				1	-1	1
S_{\perp}				-1	-1	
Q				1	1	
T	-1			-1		
θ			1	-1	-1	
M						

El único monomio adimensional que se forma es

$$\pi_{\delta_t} = \delta_t \left(\frac{c'_e v^*}{k l_o} \right)^{1/2} = \delta_t \left(\frac{v^*}{\alpha l_o} \right)^{1/2}$$

y el orden de magnitud para δ_v ,

$$\delta_v \sim \left(\frac{k l_o}{c'_e v^*} \right)^{1/2} \sim \left(\frac{\alpha l_o}{v^*} \right)^{1/2}$$

El conjunto de magnitudes que determina el coeficiente de transferencia de calor h y sus exponentes dimensionales se muestra en la Tabla 4.6. Se obtiene también un único monomio:

$$\pi_h = h \left(\frac{l_o}{k c'_e v^*} \right)^{1/2} = \left(\frac{h}{k} \right) \left(\frac{\alpha l_o}{v^*} \right)^{1/2}$$

una especie de número de Nusselt asociado a δ_t o v^* . El orden de magnitud de h es

$$h \sim k \left(\frac{\alpha l_o}{v^*} \right)^{-1/2}$$

Tabla 4.6

Magnitudes relevantes para obtener h y sus exponentes dimensionales, $\delta_v \gg \delta_t$ o $Pr \gg 1$

	v^*	l_o	ΔT	k	c'_e	h
L_{\parallel}	1	1				
L_{\perp}				1	-1	
S_{\perp}				-1	-1	-1
Q				1	1	1
T	-1			-1		-1
θ			1	-1	-1	-1
M						

Los resultados anteriores muestran la contribución cualitativa de la discriminación para la determinación de las magnitudes δ_t y h . La nueva hipótesis, asumida por muchos libros de texto (Bejan [1984] y Cebeci [2002]), es que el valor numérico de C es cercano al cociente δ_t/δ_v ; lo que supone considerar que, en la capa límite térmica, el perfil de velocidades es aproximadamente lineal. Basándonos en esta hipótesis, la sustitución de $v^* = (\delta_t/\delta_v)v_o$ en las expresiones de δ_t y h , proporciona los resultados

$$\delta_t \sim \left(\frac{\alpha l_o \delta_v}{v_o} \right)^{1/3}$$

$$h \sim k \left(\frac{\alpha l_o \delta_v}{v_o} \right)^{-1/3}$$

Ahora, sustituyendo δ_v (del Ejemplo 3.16) en las ecuaciones anteriores, δ_t y h pueden expresarse definitivamente, en función de las variables independientes del problema, en la forma

$$\delta_t \sim \left(\frac{\mu k^2 l_o^3}{\rho c_e'^2 v_o^3} \right)^{1/6}$$

$$h \sim k \left(\frac{\mu k^2 l_o^3}{\rho c_e'^2 v_o^3} \right)^{-1/6}$$

Es fácil escribir estas expresiones en función de los conocidos números adimensionales clásicos Nu_{lb} , Re_{lo} y Pr (como es usual en la literatura). Estas dependencias son

$$\delta_t \sim l_o Re_{lo}^{-1/2} Pr^{-1/3}$$

$$Nu_{lb} \sim Pr^{1/3} Re_{lo}^{-1/2}$$

Sin embargo, estas fórmulas finales no aportan nada relevante conceptualmente, ya que Nu_{lo} , Pr y Re_{lo} no son, individualmente, parámetros independientes del problema (tienen dimensiones en el ADD). Para terminar, es interesante señalar de nuevo que la expresión $l_o Re_{lo}^{-1/2} Pr^{-1/3}$ es la longitud oculta que hace adimensional el cociente h/k ; es decir, la longitud adecuada para formar el nuevo número de Nusselt adimensional discriminado.

Hacemos notar que en la determinación de todas las incógnitas hemos incluido ΔT en todos los cuadros de variables relevantes; sin embargo, en el proceso de deducción de los monomios, esta magnitud no interviene (ha sido expulsada). En efecto, ΔT solo determina el calor global transmitido bien por conducción, bien por convección, pero no interviene en ningún tipo de balance (sea de fuerzas o de energías). Esta razón es suficiente para que, en todos los casos se haya eliminado ΔT de la lista relevante de variables.

Finalmente, mencionaremos que, si debido a las características del fluido y del flujo la disipación de energía mecánica en calorífica por fricción (viscosidad) no es despreciable, las listas de variables no se modifican, pero sí que se modifica la base dimensional adecuada, que para este tipo de procesos es $\{L_x, L_y, L_z, Q, T, \theta\}$. Ello daría lugar a la aparición, en cada caso, de un monomio más:

$$\pi = \rho v_0^2 / (c'_e \Delta T)$$

Ejemplo 4.4 Convección forzada laminar a lo largo de una placa horizontal con flujo uniforme de calor (disipación viscosa despreciable)

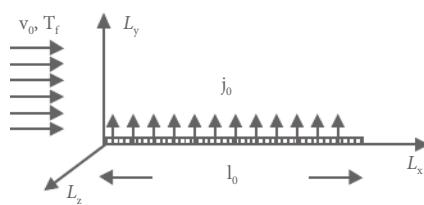


Figura 4.3 Geometría del problema

Se trata de una configuración típica que se aplica a la refrigeración de compresores de contorno conocida. El objetivo es determinar la distribución de temperaturas a lo largo de la placa y prever con ello problemas de sobrecalentamiento, quemado o fusión parcial. Sea una placa horizontal de anchura unidad inmersa en la corriente de un fluido con una velocidad uniforme v_o , a una temperatura T_f (lejos de la placa), Figura 4.3. La placa disipa un flujo constante de calor j_o (W/m^2) y la dissipación viscosa del fluido se considera despreciable. Los cálculos de los espesores de las capas límite de velocidad y térmica, tanto en el caso general como en los casos límite, no se han abordado debido a que el planteamiento es completamente similar al seguido en el caso de una placa isotérmica.

Solución

(a) Caso general

Las listas relevantes del problema se componen de las variables $\{v_o, l_o, j_o, \rho, \mu, k, c'_e, \delta_t\}$ y $\{v_o, l_o, j_o, \rho, \mu, k, c'_e, h\}$, según se quiera determinar el espesor de la capa límite térmica, δ_t , la diferencia de temperaturas, $\Delta T = T_{placa} - T_{fluido}$ o el coeficiente de transmisión de calor, h . La densidad se introduce por la existencia de aceleraciones en el fluido; la conductividad térmica está asociada a la conducción en su seno; la viscosidad, para dar cuenta de las fuerzas viscosas, y el calor específico en la unidad de volumen, $c'_e = \rho c_e$, para dar cuenta de la energía térmica almacenada.

Si discriminamos las dimensiones del espacio, Figura 4.3, la base dimensional adecuada es $\{L_x, L_y, L_z, T, M, \theta, Q\}$. Los exponentes dimensionales de las magnitudes y constantes físicas se muestran en la Tabla 4.7.

Tabla 4.7 Exponentes dimensionales de las magnitudes del problema térmico

	v_o	l_o	j_o	ρ	μ	k	$ c'_e $	δ_t	ΔT	h
L_x	1	1	-1	-1	-1	-1	-1			-1
L_y				-1	1	1	-1	1		
L_z			-1	-1	-1	-1	-1			-1
Q			1			1	1			1
T	-1		-1		-1	-1				-1
θ						-1	-1		1	-1
M				1	1					

La solución ADD proporciona dos monomios adimensionales para cada caso. Para δ_t estos monomios son

$$\Pi_1 = \frac{\mu c'_e}{\rho k} = \frac{\nu}{\alpha} \quad \text{Pr}$$

$$\pi_{2\delta_t} = \frac{\rho v_o \delta_t^2}{\mu l_o}$$

con lo que la solución para δ_t es

$$\delta_t = \left(\frac{\mu l_o}{\rho v_o} \right)^{1/2} \varphi(\text{Pr})$$

Para h , estos monomios son (por ejemplo):

$$\Pi_F = \frac{\mu c'_e}{\rho k} = \frac{\nu}{\alpha} \quad \text{Pr}$$

$$\pi^{2h} = \left(\frac{h}{k} \right) \left(\frac{\mu l_o}{\rho v_o} \right)^{1/2}$$

y la solución $\pi_{2h} = F(\pi_1)$ o

$$h = k \left(\frac{\mu l_o}{\rho v_o} \right)^{-1/2} \varphi(\text{Pr})$$

Para ΔT podemos proceder siguiendo dos caminos. Por un lado, directamente a partir de la lista $\langle l_o, j_o, v_o, k, \rho, c'_e, \mu, \Delta T \rangle$, que proporciona los monomios

$$\Pi_F = \frac{\mu c'_e}{\rho k} = \frac{\nu}{\alpha} \quad \text{Pr}$$

$$\pi^{2h} = \left(\frac{\Delta T k}{j_o} \right) \left(\frac{\mu l_o}{\rho v_o} \right)^{-1/2}$$

conduciendo a la solución

$$\Delta T = \left(\frac{j_o}{k} \right) \left(\frac{\mu l_o}{\rho v_o} \right)^{1/2} \varphi(\text{Pr})$$

Por otro lado, sabiendo que $j_o = h \Delta T$, es suficiente sustituir esta ecuación en $h = k (\mu l_o / \rho v_o)^{-1/2} \varphi(\text{Pr})$ para obtener la misma solución para la diferencia de temperaturas.

Si no discriminamos las direcciones del espacio (ADC), la base dimensional adecuada es $\{L, T, M, \theta, Q\}$. El cuadro de exponentes dimensionales se muestra en la Tabla 4.8.

Tabla 4.8 Exponentes dimensionales de las magnitudes (ADC)

	v_o	l_o	j_o	ρ	μ	k	c'_e	ΔT	h
L	1	1	-2	-3	-1	-1	-3		-2
Q			1			1	11		
T	-1		-1		-1	-1			-1
θ						-1	-1	1	-1
M				1	1				

La aplicación del teorema de π conduce a tres monomios adimensionales independientes:

$$\Pi_F = \frac{\rho v_o l_o}{\mu} Re_{l_o} = 2 \frac{\mu c'_e}{\rho k} = Pr, \quad \pi_h = \frac{h l_o}{k} Nu_{l_o}$$

que proporcionan la solución, $\pi_{3h} = f(\pi_1, \pi_2)$,

$$h = \frac{k}{l_o} \varphi \left(\frac{\rho v_o l_o}{\mu}, \frac{\mu c'_e}{\rho k} \right) \quad o \quad Nu_{l_o} = \varphi(Re_{l_o}, Pr)$$

El conjunto de variables $\langle v_o, l_o, j_o, \rho, \mu, k, c'_e, \Delta T \rangle$ también conduce a tres monomios independientes, dos de los cuales, π_1 y π_2 , son iguales a los anteriores y el tercero es

$$\pi_{3\Delta T} = \frac{j_o l_o}{k \Delta T} \quad (\text{una especie de número de Nusselt, } Nu_{j_o})$$

La solución para la diferencia de temperaturas es $\pi_{1\Delta T} = \varphi(\pi_1, \pi_2)$,

$$\Delta T = \frac{j_o l_o}{k} \varphi \left(\frac{\rho v_o l_o}{\mu}, \frac{\mu c'_e}{\rho k} \right) = \frac{j_o l_o}{k} \varphi(Re_{l_o}, Pr)$$

El ADC, pues, conduce a una solución menos precisa para todas las incógnitas. Los números Nu_{l_o} y Re_{l_o} no juegan un papel independiente en el problema, sino el número $Nu_{l_o} Re_{l_o}^{-1/2}$ que resulta de la combinación de ellos y que aporta directamente el ADD, además del número de Prandtl. Una inspección más profunda del producto $Nu_{l_o} Re_{l_o}^{-1/2}$ permite relacionarlo con un supuesto “número de Nusselt adimensional discriminado” que llamaremos $Nu_{\delta}^* = (j_o / \Delta T)(\delta^* / k) = h \delta^* / k$. Este sí es un (correctamente definido) número de Nusselt, ya que δ^* , magnitud oculta del problema (Madrid y Alhama [2005]), es una longitud característica normal a la placa, “ $\delta^* = (\mu d_o / \rho v_o)^{1/2} \varphi^{-1}(Pr)$ ”.

Caso límite $Pr \ll 1$

Como se sabe, para estos líquidos el espesor de la capa límite térmica es mayor que el de la capa límite viscosa. En consecuencia, en la región donde tiene lugar la

transferencia de calor, la velocidad es casi constante y las fuerzas de inercia (por tanto) despreciables. La lista de variables se reduce a $\langle v_o, l_o, j_o, k, c'_e, h \rangle$ para la incógnita h y $\langle v_o, l_o, j_o, k, c'_e, \Delta T \rangle$ para cada incógnita ΔT . El ADD conduce a un solo monomio en cada uno de los casos:

$$\pi_h = h \left(\frac{k c'_e v_o}{l_o} \right)^{-1/2}$$

$$\pi_{\Delta T} = \left(\frac{j_o}{\Delta T} \right) \left(\frac{k c'_e v_o}{l_o} \right)^{-1/2}$$

que proporcionan la soluciones (órdenes de magnitud de las variables)

$$h \sim \left(\frac{k c'_e v_o}{l_o} \right)^{1/2} \quad (\text{o } \text{Nu}_{l_o} \sim \text{Pe}_{l_o}^{1/2})$$

$$\Delta T \sim j_o \left(\frac{k}{c'_e v_o l_o} \right)^{-1/2}$$

mientras que el ADC conduce una solución menos precisa con dos monomios en cada caso:

$$\Pi_{\bar{h}} = \frac{h l_o}{k} \quad \bar{\alpha} = \frac{j_o l_o}{k \Delta T} \quad (\text{una especie de número de Nusselt})$$

$$\Pi_{\bar{h}} = \frac{v_o l_o c'_e}{k} \quad \frac{v_o l_o}{\alpha} \quad (\text{una especie de número de Peclet})$$

que proporcionan las soluciones

$$h = \left(\frac{k}{l_o} \right) \varphi \left(\frac{v_o l_o}{\alpha} \right) \quad \text{o} \quad \text{Nu}_{l_o} = \varphi(\text{Pe}_{l_o})$$

$$\Delta T = \left(\frac{j_o l_o}{k} \right) \varphi \left(\frac{v_o l_o}{\alpha} \right)$$

Como en el caso general,

$$= \Pi_h \quad h \left(\frac{k c'_e v_o}{l_o} \right)^{-1/2} \left(\frac{j_o l_o}{k c'_e v_o} \right)^{1/2} \quad \frac{h}{k} \quad \frac{\alpha l_o}{v_o}^{1/2}$$

puede ser considerado un número de Nusselt adimensional discriminado, Nu_{DDA} ,

$$\text{Nu}_{\text{ADD}} = \left(\frac{h}{k} \right) \left(\frac{\alpha l_o}{v_o} \right)^{1/2}$$

asumiendo que $(\alpha l_o / v_o)^{1/2}$ es una longitud característica térmica normal a la laca, $\delta^* = (\alpha l_o / v_o)^{1/2}$. Efectivamente, si buscáramos una magnitud oculta, δ^* , con este significado y usáramos la lista relevante de variables $\langle v_o, l_o, j_o, k, c'_e \rangle$, el ADD nos proporcionaría inmediatamente un monomio que daría esa solución para δ^* . Nu_{DDA} es el único grupo adimensional que juega un papel independiente en la solución de este problema.

Caso límite $Pr \gg 1$

Para el caso $Pr \gg 1$ hemos de considerar, análogamente a como hemos hecho en el Ejemplo 4.3, una velocidad característica $v^* = (\delta'_t/\delta_v)v_o$. El espesor de la capa límite térmica, δ'_v , se deduce de la lista de variables $\langle v^*, l_o, j_o, k, c'_e, \delta'_t \rangle$. Se obtiene un solo monomio:

$$\pi_{\delta'_v} = \delta'_t \left(\frac{c_e' v^*}{k l_o} \right)^{1/2} = \delta'_t \left(\frac{v^*}{\alpha l_o} \right)^{1/2}$$

y el orden de magnitud para δ'_t :

$$\delta'_t \sim \left(\frac{k l_o}{c'_e v^*} \right)^{1/2} \sim \left(\frac{\alpha l_o}{v^*} \right)^{1/2}$$

El espesor de la capa límite de velocidad fue deducida en el Ejemplo 3.16. Tomando las listas de variables $\langle v^*, l_o, j_o, k, c'_e, h \rangle$ y $\langle v^*, l_o, j_o, k, c'_e, \Delta T \rangle$ y empleando la velocidad característica anterior, se obtienen para cada caso los monomios

$$\pi_h = \left(\frac{k}{h l_o} \right) \left(\frac{\mu k^2}{\rho c_e'^2 v_o^3 l_o^3} \right)^{-1/6}$$

$$\pi_{\Delta T} = \left(\frac{j_o l_o}{k \Delta T} \right) \left(\frac{\mu k^2}{\rho c_e'^2 v_o^3 l_o^3} \right)^{1/6}$$

que proporcionan, respectivamente, los órdenes de magnitud de h y ΔT ,

$$h \sim \left(\frac{k}{l_o} \right) \left(\frac{\mu k^2}{\rho c_e'^2 v_o^3 l_o^3} \right)^{-1/6} \quad \text{o bien, } Nu_{l_o} \sim Re_{l_o}^{1/2} Pr^{1/3}$$

$$\Delta T = \left(\frac{j_o l_o}{k} \right) \left(\frac{\mu k^2}{\rho c_e'^2 v_o^3 l_o^3} \right)^{1/6} \quad \text{o bien, } \Delta T \sim \left(\frac{j_o l_o}{k} \right) Re_{l_o}^{1/2} Pr^{1/3}$$

Kays y Crawford [1993] proporcionan la solución en términos de los números adimensionales clásicos Nu_{l_o} y Re_{l_o} ($Nu_{l_o} = hl_o/k$, $Re_{l_o} = \rho v l_o / \mu$):

$$Nu_{l_o} = 458 \quad Re_{l_o}^{-1/2} = 1/3, \quad (Pr > 1)$$

Los números Nu_{l_o} y Re_{l_o} no desempeñan un papel independiente en el problema, como podría pensarse (erróneamente) de la solución de Kays. Desde la perspectiva del ADD, los números clásicos Nu_{l_o} , Re_{l_o} y Pe_{l_o} no son adimensionales y no representan balances de fuerzas o energías. Se relacionan con las variables geométricas del problema, según se verá en el Capítulo 5.

Ejemplo 4.5 Convección forzada a lo largo de una placa horizontal isotérmica con succión o inyección

Un fluido de densidad ρ y viscosidad μ , con una velocidad uniforme U y una temperatura T_p se mueve en dirección paralela a una placa horizontal isotérmica a

una temperatura T_s . Puede presentarse una succión uniforme de velocidad v_o en dirección perpendicular. Desde el punto de vista práctico existen aplicaciones asociadas a este tipo de proceso, como la inyección de un fluido (posiblemente el mismo tipo de fluido que el de la corriente principal) a través de una superficie permeable, con el fin de proteger la superficie de una temperatura extremadamente elevada.

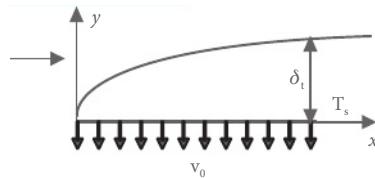


Figura 4.4 Capa límite térmica en una placa con succión

Desde el punto de vista de la transmisión del calor, interesa deducir tanto el espesor de la capa límite térmica como el coeficiente de transmisión del calor.

Solución

Espesor de la capa límite térmica

La base dimensional adecuada para este problema, de acuerdo con la geometría es $\{L_x, L_y, L_z, Q, T, \theta, M\}$ en el ADD o $\{L, Q, T, \theta, M\}$ en el ADC. En la zona de la placa donde tanto el perfil de velocidades como el de temperaturas se encuentra en desarrollo, $0 < x < l'$, Ejercicio 3.17, la lista de variables relevantes es $\{U, v_o, \rho, \mu, k, c'_e, x, \delta\}$.

Los exponentes dimensionales de las variables y las constantes físicas en la base anterior se muestran en la Tabla 4.9.

La aplicación del teorema de π proporciona tres monomios adimensionales:

$$\pi_1 = \frac{\rho U \delta_t^2}{\mu x}$$

$$\pi_2 = \frac{\rho v_o^2 x}{\mu Y} = \left(\frac{v_o}{U} \right)^2 \text{Re}_x \text{ ("Blowing parameter")}$$

$$\pi_3 = \frac{\mu c'_e}{\rho k} = \frac{\nu}{\alpha} \quad \text{Pr}$$

Tabla 4.9 Exponentes dimensionales de las variables de interés

	U	v_0	ρ	μ	k	c'	x	δ
L_x	1		-1	-1	-1	-1	1	
L_y		1	-1	1	1	-1		1
L_z			-1	-1	-1	-1		
Q					1	1		
T	-1	-1		-1	-1			
θ					-1	-1		
M			1	1				

Que, en términos de los números clásicos, da la solución para el espesor:

$$\delta_t = \left(\frac{\mu x}{\rho U} \right)^{1/2} \psi \left(\frac{v_0}{\alpha} \right), \frac{\rho v_0^2 x}{\mu U}$$

o

$$\frac{\delta_t}{x} = Re_x^{-1/2} \psi \left(Pr, \frac{v_0}{U} Re_x^{1/2} \right)$$

Coeficiente de transmisión del calor

El coeficiente de transmisión de calor se determina considerando la lista de variables $\langle U, v_0, \Delta T, \rho, \mu, k, c'_e, x, h \rangle$. Si añadimos a la Tabla 4.9 la diferencia de temperaturas entre la superficie sólida T_s y el fluido no perturbado T_p , $\Delta T = T_s - T_p$, $[\Delta T] = \theta$, y sustituimos la columna del espesor de la capa límite por la nueva incógnita, h , cuya ecuación dimensional es $[h] = L_x^{-1} L_z^{-1} Q T^{-1} \theta^{-1}$, tenemos la nueva Tabla 4.10.

Tabla 4.10 Exponentes dimensionales de las variables

	U	v_0	ΔT	ρ	μ	k	c'	x	h
L_x	1			-1	-1	-1	-1	1	-1
L_y		1		-1	1	1	-1		0
L_z				-1	-1	-1	-1		-1
Q						1	1		1
T	-1	-1			-1	-1			-1
θ			1			-1	-1		-1
M				1	1				

Esta nueva matriz de exponentes dimensionales es de característica 6, por lo que pueden formarse tres monomios adimensionales. El procedimiento algebraico permite seleccionar entre otros conjuntos el siguiente:

$$\pi_1 = \left(\frac{h}{k} \right) \left(\frac{\mu x}{\rho U} \right)^{1/2} = Nu_x Re_x^{-1/2}$$

$$\pi_2 = \frac{\rho v_o^2 x}{\mu U} = \left(\frac{v_o}{U} \right)^2 Re_x$$

$$\Pi_3 = \frac{\mu c'_e}{\rho k} = \frac{\nu}{\alpha} \quad Pr$$

La solución para h es

$$h = k \left(\frac{\rho U}{\mu x} \right)^{1/2} \psi \left(\frac{\nu}{\alpha}, \frac{\rho v_o^2 x}{\mu U} \right)$$

o

$$Nu_x = Re_x^{1/2} \psi \left(Pr, \frac{v_o}{U} Re_x^{1/2} \right)$$

en función de los parámetros adimensionales clásicos, como aparece en los textos.

La ecuación anterior ha sido tabulada por Kays y Crawford [1993], representando los valores de $Nu_x Re_x^{-1/2}$ en función de Pr y del parámetro $(v_o/U) Re_x^{-1/2}$. Volvemos a hacer notar que ni Re_x ni Nu_x son parámetros adimensionales en el ADD, mientras que sí lo son los monomios anteriores π_1 , π_2 y π_3 .

Ejemplo 4.6 Transmisión de calor entre un disco en rotación y un medio

fluído viscoso infinito

Una gran variedad de máquinas y equipos, tales como turbinas, motores eléctricos e intercambiadores de calor rotatorios, demandan datos sobre transferencia de calor por convección en sus sistemas de refrigeración. Estudiaremos aquí una configuración simple de tales sistemas. Un disco de radio R , sumergido en un fluido infinito en reposo, rota con velocidad angular ω (rad/s) alrededor de su eje de revolución, Figura 4.5. Sea ΔT la diferencia de temperaturas entre el fluido en reposo, no afectado por el movimiento, y el disco isotermo. Asumiremos que la disipación viscosa del fluido es despreciable. El problema puede extenderse al caso de un sector de disco que gira alrededor del mismo eje.

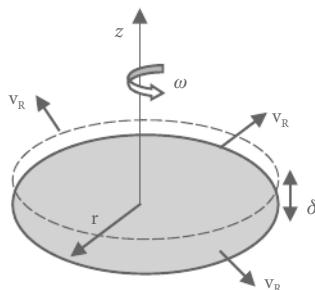


Figura 4.5 Geometría del problema

Solución

La lista de variables relevantes, para el caso más general (sector de disco), es $\langle R, P, \omega, \Delta T, \rho, \mu, k, c'_e, h \rangle$, donde P es el perímetro curvo del sector. La introducción de esta magnitud se justifica por la necesidad de definir completamente el sector de disco. La conductividad, k , y el calor específico, c'_e , caracterizan el proceso de transmisión de calor en el fluido. Por último, la aceleración producida en el fluido (inercia) y los efectos viscosos en el mismo fuerzan a introducir en la lista la densidad y la viscosidad, ρ y μ , respectivamente. El coeficiente de transferencia de calor, h , resulta ser la variable incógnita.

La hipótesis de disipación viscosa despreciable permite adoptar una base dimensional donde las magnitudes masa y calor coexisten. Dada la geometría del problema, consideramos la base discriminada $\{L_r, \varphi, L_z, T, M, \theta, Q\}$. Las ecuaciones dimensionales de las variables son

$$[R] = L_r$$

$$[P] = L_r \varphi$$

$$[\omega] = \varphi T^{-1}$$

$$[\Delta T] = \theta$$

$$[\rho] = \boxed{ML_r^{-2} \varphi^{-1} L_z^{-1}}$$

$$[\mu] = \boxed{L_r^{-2} \varphi^{-1} L_z T^{-1} M}$$

$$[k] = \boxed{L_r^{-2} \varphi^{-1} L_z T^{-1} \theta^{-1} Q}$$

$$[c'_e] = \boxed{L_r^{-2} \varphi^{-1} L_z^{-1} Q \theta^{-1}}$$

$$[h] = \boxed{L_r^{-2} \varphi^{-1} T^{-1} \theta^{-1} Q}$$

Tabla 4.11 Exponentes dimensionales en la base discriminada

	R	P	ω	ΔT	ρ	μ	k	c'_e	h
L_f	1	1			-2	-2	-2	-2	-2
φ		1	1		-1	-1	-1	-1	-1
L_z					-1	1	1	-1	
Q							1	1	1
T			-1			-1	-1		-1
θ				1			-1	-1	-1
M					1	1			

La aplicación del teorema de π al cuadro de exponentes adimensionales de estas magnitudes y constantes físicas, Tabla 4.11, conduce a dos monomios:

$$\pi_1 = \frac{h^2 \mu P}{\rho \omega R k^2} = \left(\frac{hR}{k} \right)^2 \left(\frac{\mu}{\rho \omega R^2} \right) \left(\frac{P}{R} \right)$$

$$\Pi_2 = \frac{\mu c'_e}{\rho k} = \frac{\nu}{\alpha} \quad \text{Pr}$$

que permiten despejar h en la forma $\pi_1 = \Phi(\pi_2)$. Así,

$$h = k \left(\frac{\rho \omega r}{\mu P} \right)^{1/2} \varphi(\text{Pr})$$

La función desconocida, $\varphi(\text{Pr})$, puede evaluarse mediante un experimento de laboratorio. La solución es aplicable, obviamente, a cualquier porción del disco definida por el contorno P.

La solución del ADC es mucho menos precisa (cuatro monomios). Con la base $\{L, M, T, Q, \theta\}$, las ecuaciones dimensionales de la lista relevante de variables son

$$[R] = [P] = L$$

$$[\Delta T] = \theta$$

$$[\omega] = T^{-1}$$

$$[k] = L^{-1} T^{-1} \theta^{-1} Q$$

$$[\rho] = ML^{-3}$$

$$[c'_e] = L^{-3} Q \theta^{-1}$$

$$[\mu] = L^{-1} T^{-1} M$$

$$[h] = L^{-2} T^{-1} \theta^{-1} Q$$

Tabla 4.12 Exponentes dimensionales en la base no discriminada

	R	P	ΔT	ω	ρ	μ	k	c'_e	h
L	1	1			-3	-1	-1	-3	-2
Q							1	1	1
T						-1	-1		-1
θ			1	-1			-1	-1	-1
M					1	1			

La aplicación del teorema de π , Tabla 4.12, conduce a cuatro monomios adimensionales. Entre la posible elección de estos, adoptamos la siguiente:

$$\pi_1 = R/P \quad (\text{factor de forma})$$

$$\pi_2 = hR/k \quad (\text{una especial de número de Nusselt})$$

$$\pi_3 = (\rho\omega R^2/\mu) \quad (\text{una especie de número de Reynolds})$$

$$\pi_4 = (\mu/\rho)/(k/c'_e) = \nu/\alpha = \text{Pr} \quad (\text{el número de Prandtl})$$

La solución para el coeficiente de transferencia de calor, $\pi_2 = \varphi(\pi_1, \pi_3, \pi_4)$, queda

$$h = \left(\frac{k}{R} \right) \varphi \left(\frac{P}{R}, \frac{\rho\omega R^2}{\mu}, \frac{\nu}{\alpha} \right)$$

El ADD, por una parte, ha eliminado el factor de forma y, por otra, ha reducido el número global de monomios de la solución debido al incremento del número de magnitudes de la base discriminada en relación con la no discriminada. Para un disco completo, $P/R = 2\pi$, Edwards, Denny y Mills [1979] proporcionan la solución empírica

$$Nu_R = 0,585 Re_R^{1/2} \varphi(\text{Pr})$$

con $\varphi(\text{Pr}) = (0,65 \text{ Pr}^{-1} + 0,95 \text{ Pr}^{-1/3})^{-1}$, donde $Nu_R = hR/k$ y $Re_R = (\rho\omega R^2/\mu)$. Se trata de una solución coherente con la proporcionada por el ADD. Es importante advertir una vez más que ni Nu_R ni Re_R juegan separadamente un papel independiente en la solución del problema, como podría pensarse a priori o derivarse de los resultados obtenidos con el ADC, ya que aparecen combinados en la forma $(hR/k)^2(\mu/\rho\omega R^2)$. Como consecuencia, ningún significado físico en términos de balances debería atribuirse a los monomios Nu_R y Re_R . Si escribimos la solución en la forma

$$\frac{h}{k} \left(\frac{\mu P}{\rho \omega R^2} \right)^{1/2} = \varphi(\text{Pr})$$

y consideramos “ $(\mu P/\rho \omega R)^{1/2} \varphi(\text{Pr})$ ” como una longitud térmica característica (magnitud oculta, δ), asociada al extremo del disco, el nuevo aspecto de la solución

$$(h\delta/k) \sim 1$$

es una especie de número de Nusselt corregido o discriminado, ($Nu_{\delta}^* = h\delta^*/k$). Una reflexión más profunda confirma que δ^* es, por un lado, el orden de magnitud del espesor de la capa límite térmica, variable que se puede obtener del problema estrictamente térmico mediante el ADD usando la lista relevante de variables $\langle P, R, \omega, \mu, c_e, k, \rho, \delta^* \rangle$, obteniéndose

$$\delta^* = \left(\frac{\mu P}{\rho \omega R^2} \right)^{1/2} f(\text{Pr})$$

La ecuación dimensional de δ^* , $[\delta^*] = [(\mu P / \rho \omega R)^{1/2}] = L_z$, es la de la dirección de difusión del flujo de calor, la correcta para un número de Nusselt bien definido (Madrid y Alhama [2006]).

Ejemplo 4.7 Convección forzada laminar sobre un cilindro con flujo transversal (dissipación viscosa despreciable)

Un fluido a una temperatura T_f con una velocidad U , incide transversalmente sobre un cilindro de diámetro $2r_0$ cuya superficie exterior se mantiene una temperatura uniforme T_p ($T_p > T_f$), produciéndose una transmisión de energía calorífica por convección forzada entre ambos. Debido a la viscosidad del fluido se forma una capa límite de velocidad (laminar) adyacente a la superficie sólida donde se producen los cambios de velocidad, Ejemplo 3.19, y una capa límite térmica donde tienen lugar cambios de temperatura. El espesor de la capa límite térmica aumenta conforme nos alejamos de la zona de estancamiento del sólido, (Figura 4.6), y el calor se transmite desde la superficie exterior del cilindro hasta el fluido atravesando dicha capa. Se desea determinar el espesor de la capa límite térmica δ y el coeficiente de transmisión del calor h .

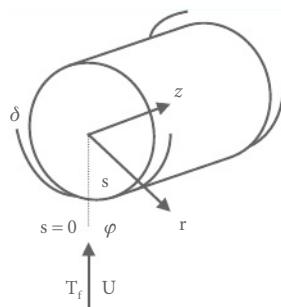


Figura 4.6 Geometría del problema

Solución

Se consideran las propiedades del fluido constantes, el régimen laminar y los efectos despreciables de las corrientes naturales originadas por el proceso de convección libre. Se trata pues de un problema de transmisión de calor por convec-

ción forzada pura. Asimismo, se supone que la disipación de energía mecánica en calorífica es despreciable. En consecuencia, dadas las características geométricas del problema, la base dimensional adecuada es $\{L_r, \varphi, L_z, Q, T, \theta, M\}$.

La posición de un elemento de volumen del fluido en las proximidades de la superficie exterior del cilindro queda especificada por una porción de arco s sobre la superficie, medida desde la parte frontal del cilindro, zona donde

comienza la formación de la capa límite. Como se mencionó en el Ejemplo 3.19, la componente tangencial (según el arco) de la velocidad, U_s , es la que interviene de manera predominante en el proceso, cumpliéndose $U_s = U \sin \varphi$, pero del mismo orden de magnitud que la velocidad del fluido no perturbado, $U \sim U_s$.

(a) Caso general

El espesor de la capa límite térmica, δ_t , será función de dicho arco s , de la densidad asociada a las fuerzas de inercia, ρ , de la viscosidad asociada a las fuerzas viscosas, μ , de la componente tangencial de la velocidad U_s , de la diferencia de temperaturas $\Delta T = T_p - T_\rho$, del calor específico por unidad de volumen, $c'_e = \rho c_p$ y de la conductividad térmica del fluido, k ; esto es, $\langle s, \Delta T, U_s, c'_e, \mu, \rho, k, \delta_t \rangle$.

Debido a que el espesor de la capa límite crece al aumentar el arco s , el coeficiente de transmisión del calor también será función de él y habremos de evaluar un coeficiente local, $h = h(s)$. La lista relevante de variables para determinar h es

$\langle \Delta T, s, U_s, c'_e, \mu, \rho, k, h \rangle$. La Tabla 4.13 muestra los exponentes dimensionales de estas variables en la base elegida para las dos incógnitas.

Tabla 4.13 Exponentes dimensionales de las variables que intervienen

	s	ΔT	U_s	$ c'_e $	μ	ρ	k	δ_t	h
L_r	1		1	-2		-2		1	-1
φ	1		1	-1	-1	-1	-1		-1
L_z				-1	-1	-1	-1		-1
Q				1			1		1
T			-1		-1		-1		-1
θ		1		-1			-1		-1
M					1	1			

Para el espesor de la capa límite térmica se obtienen dos monomios adimensionales:

$$\pi_{\delta t 1} = \delta_t \left(\frac{\mu s}{\rho U_s} \right)^{-1/2}$$

$$\pi_{\delta t 2} = \frac{\mu c'_e}{\rho k} = \frac{\nu}{\alpha} \quad \text{Pr}$$

que conducen a la solución

$$\delta_t = \left(\frac{\mu s}{\rho U_s} \right)^{1/2} \varphi(\Pr)$$

cuyo resultado más significativo es la proporcionalidad entre el espesor de la capa límite térmica y el arco, $\delta_t \sim s^{1/2}$.

En función de los números adimensionales clásicos $R_s = \rho U_s / \mu$ y $\Pr = \mu c_e' / \rho k$, esta solución puede escribirse en la forma

$$\delta_t = s \operatorname{Re}_s^{-1/2} \varphi(\Pr)$$

Del monomio $\pi_{\delta t 1}$ se deduce que el orden de magnitud del número de Reynolds clásico es $\operatorname{Re}_s \sim (s/\delta_t)^2$. Por otra parte, de nuevo, se pone de manifiesto en este caso que en flujos externos el número de Reynolds clásico no es adimensional en el ADD, pues en la base empleada resulta $[\operatorname{Re}_s] = \varphi^2$, ni por tanto juega un papel independiente en la solución.

Para el coeficiente de transmisión del calor también se obtienen dos monomios:

$$\pi_{h,1} = \frac{h}{k} \left(\frac{\mu s}{\rho U_s} \right)^{1/2}$$

$$\Pi_{h,\bar{z}} = \frac{\mu c_e'}{\rho k} = \frac{\nu}{\alpha} \quad \Pr$$

que conducen a

$$h = k \left(\frac{\mu s}{\rho U_s} \right)^{-1/2} f(\Pr)$$

o bien, en función de los números clásicos $\operatorname{Nu}_s = h(s/k)$ y $\Pr = \mu c_e' / \rho k = \nu / \alpha$,

$$\pi_{1h} = \operatorname{Nu}_s \operatorname{Re}_s^{-1/2}$$

$$\pi_{2h} = \Pr$$

Por tanto la solución es

$$\operatorname{Nu}_s = \operatorname{Re}_s^{-1/2} f(\Pr)$$

$-1/2$

que pone de manifiesto la relación directa entre Nu_s y $\operatorname{Re}_s^{-1/2}$, obtenida por diversos autores, para la convección forzada en flujo transversal, régimen laminar y para valores reducidos de Re .

Dado que s y r son del mismo orden de magnitud, estas soluciones se recogen en la literatura científica y en libros de texto en térmicos de los números clásicos de Nusselt, Reynolds y Prandtl. Así,

$$\frac{h}{k} \left(\frac{\mu r}{\rho U_s} \right)^{1/2} = f(\Pr)$$

$$\operatorname{Nu}_r \operatorname{Re}_r^{-1/2} = f(\Pr)$$

donde hubiera sido más correcto escribir $Nu_s Re_s^{-1/2} = f(Pr)$. El ADD, empleando la base $\{L, Q, T, \theta, M\}$ proporciona la solución $Nu = f(Re, Pr)$ que no refleja la relación entre Nu_r y Re_r obtenida por el ADD. El grupo adimensional $Nu_r Re_r^{-1/2} = hk^{-1} (r\mu/U\rho)^{1/2}$ es el que juega un papel independiente en la solución del problema, y no los números Nu y Re por separado.

La transmisión de calor por convección forzada en flujo transversal sobre superficies cilíndricas de sección circular interviene en un gran número de procesos que tienen lugar en equipos de intercambio calorífico como intercambiadores de calor de flujos cruzados.

El interés que ha suscitado el análisis de este tipo de procesos ha motivado la publicación de numerosos trabajos, Eckert y Soehngen [1], Churchill y Bernstein [2], Zukauskas y Ziugzda [3], Zukauskas [4], Kays y Crawford [5], cuya finalidad era determinar el coeficiente de transmisión del calor. Los resultados obtenidos concuerdan con la expresión general:

$$Nu = \varphi(Re, Pr)$$

y para valores reducidos de Re , cuando es predominante el régimen laminar, se ha encontrado que $Nu \propto Re^{1/2}$, resultado en perfecto acuerdo con lo obtenido mediante el ADD.

(b) El caso asintótico $\delta_t \gg \delta_v$ o $Pr \ll 1$

Esta hipótesis (fluidos de conductividad térmica elevada) implica que la capa límite de velocidad es muy pequeña en comparación con la capa límite térmica. Los razonamientos usados para el caso de convección forzada sobre una placa plana (Ejemplo 4.3) sirven igualmente para este problema. Así, la transferencia de calor tiene lugar fundamentalmente fuera de la capa límite de velocidad. En esta región, las fuerzas de inercia y fricción son despreciables, por lo que las variables μ y ρ se eliminan de las listas relevantes de variables, por lo que estas se reducen a $\langle s, \Delta T, U_s, c'_e, k, \delta_v \rangle$ y $\langle s, \Delta T, U_s, c'_e, k, h \rangle$. Adviértase que, fuera de la capa límite y en las cercanías del tubo, sí existen fuerzas de inercia, debido al obstáculo que constituye el propio tubo. Estas fuerzas, que no intervienen en el cálculo de las incógnitas, se equilibran con las fuerzas de sujeción del tubo.

Aplicando el teorema de π , tanto para el espesor de la capa límite térmica como para el coeficiente de transmisión del calor, resulta un único monomio:

$$\pi_{\delta_t} = \delta_t \left(\frac{k s}{c'_e U_s} \right)^{-1/2} = \delta_t \left(\frac{\alpha s}{U_s} \right)^{-1/2}$$

$$\pi_h = h \left(\frac{s}{k c'_e U_s} \right)^{1/2} = \left(\frac{h}{k} \right) \left(\frac{\alpha s}{U_s} \right)^{1/2}$$

Los órdenes de magnitud de las incógnitas, δ_t y h , a partir de estos resultados, son

$$\delta_t \sim \left(\frac{\alpha s}{U_s} \right)^{1/2}$$

$$h \sim k \left(\frac{\alpha s}{U_s} \right)^{-1/2}$$

La solución en función de los números adimensionales clásicos Nusselt, Reynolds y Prandtl es

$$\delta_t \sim s Pe^{-1/2}$$

$$Nu_s \sim Pe_s^{1/2}$$

Obsérvese que, dada la proporcionalidad numérica entre r y s , $Nu_r \sim Nu_s$ y $Re_r \sim Re_s$, ocurre que $Nu_r \sim Re_r^{1/2} Pr^{1/2} = Pe_r^{1/2}$. El ADD proporciona la solución $Nu_r = f(Re_r, Pr)$.

El grupo adimensional $Nu_s Pe_s^{-1/2}$ se puede escribir en la forma

$$Nu^s Pe^{s-1/2} = \left(\frac{h}{k} \right) \left(s Pe^{s-1/2} \right)$$

donde la longitud que hace adimensional el cociente h/k es del orden de magnitud del espesor de la capa límite térmica

$$\delta_t \sim s Pe_s^{-1/2}$$

De hecho, el grupo $(h/k)(s Pe_s^{-1/2})$ puede considerarse un número de Nusselt modificado, $h\delta_t/k$. Con todo, el ADD proporciona el orden de magnitud correcto para el coeficiente de transferencia de calor e informa del papel que juegan (o no) los conocidos números adimensionales clásicos.

(c) El caso asintótico $\delta_v \gg \delta_t$ o $Pr \gg 1$

La capa límite de velocidad de estos fluidos de alta viscosidad es mucho más gruesa que la térmica. Los efectos de fricción e inercia son despreciables, lo que conduce a eliminar ρ y μ de la lista relevante de variables. Como en el caso de la placa horizontal, la velocidad característica dentro de esta capa límite térmica es $U_s^* = CU_s$, con $C \ll 1$. En suma, la lista relevante de variables que define el orden de magnitud de δ_t es $\langle U_s^*, s, \Delta T, k, c'_e, \delta_v \rangle$. Los exponentes dimensionales en la base elegida se muestran en la Tabla 4.14.

El único monomio adimensional que se forma es

$$\pi_{\delta_t} = \delta_t \left(\frac{c'_e U_s^*}{k s} \right)^{1/2} = \delta_t \left(\frac{U_s^*}{\alpha s} \right)^{1/2}$$

Tabla 4.14

Magnitudes relevantes para la solución de δ_t y sus exponentes dimensionales, $\delta_t \gg \delta_c$ o $Pr \gg 1$

	U_s^*	s	ΔT	k	c'_e	δ_t
L_r	1	1			-2	1
φ	1	1		-1	-1	
L_z				-1	-1	
Q				1	1	
T	-1			-1		
θ			1	-1	-1	
M						

y el orden de magnitud para δ_t

$$\delta_t \sim \left(\frac{k s}{c'_e U_s^*} \right)^{1/2} \sim \frac{\alpha s}{U_s^*}^{1/2}$$

El conjunto de magnitudes que determina el coeficiente de transferencia de calor, h , y sus exponentes dimensionales se muestra en la Tabla 4.15.

Tabla 4.15

Magnitudes relevantes para obtener h y sus exponentes dimensionales, $\delta_t \gg \delta_c$ o $Pr \gg 1$

	U_s^*	s	ΔT	k	c'_e	h
L_r	1	1			-2	-1
φ	1	1		-1	-1	-1
L_z				-1	-1	-1
Q				1	1	1
T	-1			-1		-1
θ			1	-1	-1	-1
M						

Se obtiene también un único monomio:

$$\pi_h = h \left(\frac{k s}{c'_e U_s^*} \right)^{1/2} \sim \frac{h}{k} \frac{\alpha s}{U_s^*}^{1/2}$$

una especie de número de Nusselt asociado a δ_t o U_s^* . El orden de magnitud de h es

$$h \sim k \left(\frac{\alpha s}{U_s^*} \right)^{-1/2} \sim k \frac{\alpha r}{U_s^*}^{-1/2}$$

Asumiendo que C es aproximadamente δ_t/δ_v , la sustitución de $U_s^* = (\delta_t/\delta_v)U_s$ en las expresiones de δ_t y h , proporciona los resultados

$$\delta_t \sim \left(\frac{\alpha \delta}{U_s} \right)_v^{1/3} \sim \left(\frac{r_v}{U_s} \right)^{1/3}$$

$$h \sim k \left(\frac{\alpha \delta}{U_s} \right)_v^{1/3} \sim \left(\frac{r_v}{U_s} \right)^{-1/3}$$

Ahora, sustituyendo el espesor de la capa de velocidad δ_v (del Ejemplo 3.16) en las ecuaciones anteriores, δ_t y h pueden expresarse definitivamente en función de las variables independientes del problema, en la forma

$$\delta_t \sim s \left(\frac{\mu k^3}{\rho c_e'^2 v_o^3 s^3} \right)^{1/6} \sim \left(\frac{\mu k^2}{\rho c_e'^2 v_o^3 r^3} \right)^{1/6}$$

$$h \sim \frac{k}{s} \left(\frac{\mu k^3}{\rho c_e'^2 U_s^3 s^3} \right)^{-1/6} \sim \left(\frac{\mu k^2}{\rho c_e'^2 U_s^3 r^3} \right)^{-1/6}$$

En función de los conocidos números adimensionales, estas dependencias son

$$\delta_t \sim s \text{ Re}_s^{-1/2} \text{ Pr}^{-1/3} \sim r \text{ Re}_r^{-1/2} \text{ Pr}^{-1/3}$$

$$\text{Nu}_s \sim \text{Pr}^{1/3} \text{ Re}_s^{1/2} \quad \text{o} \quad \text{Nu}_r \sim \text{Pr}^{1/3} \text{ Re}_r^{1/2}$$

La expresión $\text{Re}_s^{-1/2} \text{ Pr}^{-1/3}$ es la longitud oculta que hace adimensional el cociente h/k ; es decir, la longitud adecuada para formar el nuevo número de Nusselt adimensional discriminado.

Ejemplo 4.8 Transmisión de calor por convección forzada laminar en el interior de tubos circulares

Se considera un fluido incompresible que entra en un tubo circular de diámetro constante, veloci-
tad constante, y temperatura constante. Al entrar en contacto con la superficie isoterma del interior del tubo, de temperatura T se producirá una trasferencia de energía calorífica por convección forzada. Se considera flujo laminar estacionario y se supone despreciable la conducción en dirección longitudinal frente a la conducción en dirección radial. También se estima despreciable la disipación por efectos viscosos en el fluido.

Desde el punto de vista de la mecánica de fluidos, en el Ejemplo 3.14 del capítulo anterior se estudió la región de entrada hidrodinámica (zona donde se desarrolla el perfil de velocidades) y la región de flujo completamente desarrollado (zona donde las variaciones de velocidad se han extendido a toda la sección del

tubo, siendo el perfil de velocidades independiente de posición longitudinal). Conceptos similares deben aplicarse para estudiar la transmisión del calor. Existe una primera zona en el tubo, denominada “región de entrada térmica”, en la que se desarrolla el perfil de temperaturas, Figura 4.7. El espesor máximo de dicho perfil es $\delta_t = R$. A partir de este punto, se dice que el perfil de temperaturas está completamente desarrollado. A la longitud en la que se desarrolla la capa de transición se le denomina “longitud de entrada térmica”, L_{et} .

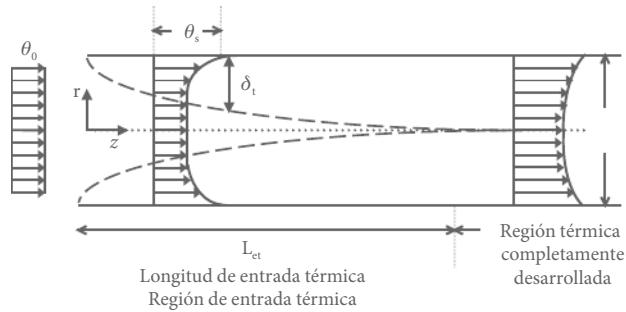


Figura 4.7 Desarrollo del perfil de temperatura en la convección forzada en un tubo

Solución

Longitud de entrada térmica

La longitud de entrada térmica es función del diámetro del tubo, D , de la velocidad característica del fluido, U , del calor específico de la unidad de volumen del fluido, $c'_e = \rho c_p$, y de su conductividad térmica, k . Los exponentes de la lista de variables, $\langle D, U, c'_e, k, L_{et} \rangle$, en la base adimensional discriminada $\{L_r, L_z, S_r, Q, T, \theta, M\}$ con S_r la dimensión de la superficie lateral del tubo, adecuada a la geometría del problema y a la hipótesis de disipación viscosa despreciable, se muestran en la Tabla 4.16.

Tabla 4.16 Longitud de entrada térmica. Exponentes dimensionales

	D	U	$ c'_e $	k	L_{et}
L_r	1	0	-1	1	0
L_z	01001				
S_r	0	0	-1	-1	0
Q	00110				
T	0	-1	0	-1	0
θ	0	0	-1	-1	0
M	00000				

Con estos exponentes se forma un solo monomio adimensional:

$$\pi_{Let} = \frac{k L_{et}}{U c'_e D^2}$$

que proporciona el orden de magnitud de la longitud de entrada térmica,

$$L_{et} \sim \frac{U c'_e D^2}{k} = D \left(\frac{UD}{\alpha} \right) = DP_{eD}$$

Este orden de magnitud está de acuerdo con los resultados de Kays y Perkins [1972] y Shah y Bhatti [1987]. Dado que el número de Peclet puede expresarse como $P_{eD} = Re_D Pr$, la comparación de la longitud de entrada térmica, L_{et} , con la longitud de entrada hidrodinámica (Ejemplo 3.14), L_{eh} , es inmediata:

$$L_{et}/L_{eh} \sim Pr$$

Este resultado permite afirmar que, para fluidos con $Pr \gg 1$ (agua y aceites), el perfil de velocidades se desarrolla más rápidamente que el perfil de temperaturas, mientras que para fluidos con $Pr \ll 1$ (metales líquidos) ocurre lo contrario.

La solución del ADC es menos precisa. Con la lista de variables $\langle D, U, c'_e, k, L_{et} \rangle$ y la base $\{L, Q, T, \theta, M\}$, resultan dos monomios

$$\pi_1 = \frac{U c'_e D}{k} = \frac{UD}{\alpha}$$

$$\pi_2 = L_{et}/D$$

y la solución

$$L_{et} = D \varphi(P_{eD})$$

Desde el punto de vista de la transmisión de calor, se pueden considerar tres zonas de características diferentes a lo largo del tubo: (i) la región $z < L_{et}$ y $z < L_{eh}$ (región de entrada térmica e hidrodinámica), en la que tanto el perfil de velocidades como el de temperatura se encuentran en desarrollo, (ii) la región $L_{eh} < z < L_{et}$ (región de entrada térmica), en la que el perfil de velocidades se encuentra desarrollado mientras que el de temperaturas se encuentra en des-

arrollo y (iii) la región $z > L_{et}$ en la que tanto los perfiles de velocidad como de temperatura se encuentran completamente desarrollados. En ciertos fluidos, la capa térmica puede desarrollarse antes que la capa de velocidad, pero no abordaremos este caso.

(a) Región de entrada térmica e hidrodinámica

Para determinar la distribución de temperaturas $\Delta T(r) = T_s - T(r)$, y el coeficiente de transmisión del calor, h , dado que tanto el perfil de velocidades como el de temperaturas se encuentran en desarrollo, hay que incluir en la lista de variables tanto las magnitudes asociadas a las fuerzas que determinan el perfil de velocidades, la densidad del fluido (fuerzas de inercia), la viscosidad (fuerzas viscosas) y

la velocidad característica del mismo, como las magnitudes asociadas al fenómeno de transmisión de calor, conductividad térmica, calor específico por unidad de volumen y diferencia de temperaturas $\Delta T_o = T_s - T_o$. Además, hay que incluir las variables geométricas z , r y R (o D), esta última para informar que se trata de una geometría cilíndrica. La conducción axial se asume despreciable. Así pues, las listas de variables para cada uno de los casos es $\langle r, R, z, \Delta T_o, U, \rho, \mu, c'_e, k, \Delta T(r) \rangle$ y

$\langle D, z, \Delta T_o, U, \rho, \mu, c'_e, k, h \rangle$; la introducción de D en el cálculo de h responde a que determinamos un coeficiente medio de transmisión de calor en la región. Los exponentes dimensionales de las variables y constantes físicas que intervienen en el primer caso se muestran en la Tabla 4.17.

Tabla 4.17

Exponentes dimensionales para el perfil de temperaturas (región de entrada térmica e hidrodinámica)

	r	R	z	ΔT_o	U	ρ	μ	c'_e	k	$\Delta T(r)$
L_r	1100000							-1	1	0
L_z	00101					-1	1	0	0	0
S_r	0000					-1	-1	-1	-1	0
Q	0	0	0	0	0	0		1	1	0
T	0000				-1	0	-1	0	-1	0
θ	0001000							-1	-1	1
M	00		0	0	01		1	00		0

Se pueden formar cuatro monomios adimensionales:

$$\pi_{1\Delta T} = \frac{\Delta T(r)}{\Delta T_o}$$

$$\pi_{2\Delta T} = \frac{r}{R}$$

$$\pi_{3\Delta T} = \frac{\rho U R^2}{\mu z}$$

$$\pi_{4\Delta T} = \frac{\mu c'_e}{\rho k}$$

que conducen a la solución:

$$\frac{\Delta T(r)}{\Delta T_o} = \varphi \left(\frac{r}{R}, \frac{\rho U R^2}{\mu z}, \frac{\mu c'_e}{\rho k} \right)$$

Teniendo en cuenta que $\pi_{3AT} = \rho UR^2/\mu z = (R/z)Re_R$, y que $\pi_{4AT} = \mu c'_e/\rho k = \nu/\alpha = Pr$, esta solución puede escribirse en función de los números adimensionales clásicos:

$$\frac{\Delta T(r)}{\Delta T_o} = \varphi\left(\frac{r}{R}, \frac{R}{z} Re_R, Pr\right)$$

En relación con h , los exponentes dimensionales de las variables y constantes físicas se muestran en la Tabla 4.18.

Tabla 4.18

Exponentes dimensionales para el coeficiente de transmisión de calor (región de entrada térmica e hidrodinámica)

	D	z	ΔT_o	U	ρ	μ	$ c'_e $	k	h
L_r	100000						-1	1	0
L_z	0101				-11000				
S_r	0	0	0		-1	-1	-1	-1	0
Q	0	0	0	0	0		1	1	0
T	0	0	0	-1	0	-1	0	-1	0
θ	001000						-1	-1	1
M	000011000								

La aplicación del teorema de π proporciona tres monomios:

$$\pi_{1h} = \frac{h D}{k}$$

$$\pi_{2h} = \frac{\rho U D^2}{\mu z}$$

$$\boxed{\pi_{3h} = \frac{\mu c'_e}{\rho k}}$$

que conducen a la solución

$$h = \frac{k}{D} \varphi\left(\frac{\rho U D^2}{\mu z}, \frac{\mu c'_e}{\rho k}\right)$$

o bien, en términos de los números adimensionales clásicos,

$$Nu_D = \varphi\left(\frac{D}{z} Re_D, Pr\right)$$

La solución que proporciona el ADD pone de manifiesto que los parámetros $(D/z)Re_D$ y Pr juegan un papel independiente y, en consecuencia, afectan de manera diferente al Nu_D . El problema de la región térmica e hidrodinámica ha sido resuelto numéricamente por Hornbeck [1965,1973] y Heaton y col. [1964]; sus resultados confirman, efectivamente, la dependencia mencionada.

Hacemos notar que, mientras que los números adimensionales Nu_D y Pr son adimensionales en el ADD, el número de Reynolds Re^D no lo es y se combina con el factor (D/z) para formar un nuevo parámetro adimensional discriminado (una especie de número de Reynolds discriminado), con un verdadero significado físico de balances de fuerzas, como discutiremos en el Capítulo 5.

$$\pi_{2h} = \rho U D^2 / \mu z = (D/z) Re_D = Re_{DDA}$$

El ADD conduce a soluciones más precisas que el ADC, que introduce un monomio más para ambas incógnitas:

$$\Delta T(r)/\Delta T_{\theta_o} = \varphi(r/R, R/z, Re_R, Pr)$$

$$Nu_D = \varphi(D/z, Re_D, Pr)$$

(b) Región de entrada térmica

En la región de entrada térmica, dado que el perfil de temperatura se encuentra en desarrollo, la evolución de la temperatura del fluido depende tanto de la coordenada radial, r , como de la coordenada axial, z , y, por tanto, la lista de variables es $\langle r, R, z, \Delta T_o, U, c'_e, k, \Delta T(r) \rangle$. No interviene la viscosidad ni la densidad, ya que el perfil de velocidades está desarrollado y que la conducción axial se asume despreciable. Sus exponentes dimensionales se muestran en la Tabla 4.19.

Con estas variables se pueden formar tres monomios:

$$\pi_{1\Delta T} = \frac{\Delta T(r)}{\Delta T_o}$$

$$\pi_{2\Delta T} = \frac{r}{R}$$

$$\pi_{3\Delta T} = \frac{U c'_e R^2}{k z}$$

y la solución:

$$\frac{\Delta T(r)}{\Delta T_o} = \varphi\left(\frac{r}{R}, \frac{U c'_e R^2}{k z}\right)$$

o bien teniendo en cuenta la definición del número de Peclet clásico, $Pe_R = UR/\alpha$,

$$\frac{\Delta T(r)}{\Delta T_o} = \varphi\left(\frac{r}{R}, \frac{R}{z} Pe_R\right)$$

Tabla 4.19

Exponentes dimensionales para el cálculo de la temperatura (región de entrada térmica)

	r	R	z	ΔT_o	U	c'_e	k	$\Delta T(r)$
L_r	11000					-1	1	0
L_z	0010	1000						
S_r	0000					-1	-1	0
Q	00000	110						
T	0000				-1	0	-1	0
θ	00010					-1	-1	1
M	00000000							

Para el cálculo del coeficiente medio h en esta región, la lista relevante de variables es $\langle D, z, \Delta T_o, U, c'_e, k, h \rangle$. Sus exponentes dimensionales se muestran en la Tabla 4.20.

Tabla 4.20

Exponentes dimensionales para el cálculo de h (región de entrada térmica)

	D	z	ΔT_o	U	c'_e	k	h
L_r	1000				-1	1	0
L_z	0101000						
S_r	0000				-1	-1	0
Q	0000110						
T	0	0	0	-1	0	-1	0
θ	0010				-1	-1	1
M	0000000						

Se obtienen dos monomios:

$$\pi_{1h} = \frac{hD}{k}$$

$$\pi_{2h} = \frac{Uc'_e D^2}{k z}$$

y la solución:

$$h = \frac{k}{D} \varphi \left(\frac{Uc'_e D^2}{k z} \right)$$

o, teniendo en cuenta que $\pi_{h2} = U c'_e D^2 / kz = (D/z) (UD/\alpha) = (D/z) Pe_D = (D/z) Re_D Pr$, en función de números adimensionales clásicos:

$$Nu_D = \varphi \left(\frac{D}{z} Re_D \right) Pe_D = \varphi \left(\frac{D}{z} Pe_D \right)$$

Las soluciones obtenidas mediante el ADD concuerdan con las obtenidas por métodos analíticos por Graetz [1883] y Nusselt [1910], primeros investigadores que abordaron el problema; debido a lo cual, este se conoce con el nombre de “problema de Graetz-Nusselt” (Gröber [1967]). Sieder y Tate [1936] proponen una representación funcional en la que Nu_D no depende separadamente de Re_D , Pr y D/z , sino de su producto, como queda explícito en la solución obtenida mediante el ADD.

Hacemos notar que en convección forzada en flujos internos, el número de Nusselt clásico, basado en el diámetro como longitud característica, es también un parámetro adimensional en el análisis dimensional discriminado; al contrario de lo que ocurría en flujos externos. Por otra parte, el número de Peclet clásico, tanto si se basa en el diámetro ($Pe_D = UD/A$) como en la coordenada axial ($Pe = Uz/A$) como longitud característica, no es adimensional en el análisis dimensional discriminado. Este número aparece agrupado con otras variables para constituirse en un nuevo número adimensional discriminado. En efecto, en el caso tratado aquí, este nuevo número es

$$\pi = \frac{U c'_e D^2}{k z}$$

que puede escribirse en la forma

$$\Pi = \frac{U c'_e D^2}{k z} = \left(\frac{D}{z} \right) Pe_D Pe_{ADD}$$

Se trata de una especie de número de Peclet modificado. En el Capítulo 5 se discute el significado físico del mismo en relación con los balances del problema.

Las soluciones del ADC contienen un monomio más:

$$\Delta T(r)/\Delta T_o = \varphi(r/R, R/z, Pe_R)$$

$$Nu_D = \varphi(D/z, Pe_D)$$

(c) Región completamente desarrollada

Dado que el desarrollo de la capa límite térmica ha alcanzado el eje del tubo (existe gradiente térmico radial en toda la sección del mismo), la temperatura T_h no juega ya papel alguno en el problema. En su lugar se considera como diferencia de temperaturas característica, ΔT_m , la diferencia entre la temperatura de la superficie del tubo y la temperatura media de mezcla, T_m , que depende de la coordenada z . Como en los casos anteriores, asumiendo la conducción axial despreciable, la lista de variables para determinar el perfil de temperaturas es $\langle r, R, \Delta T_m, U, c'_e, k, \Delta T(r) \rangle$,

donde la conductividad térmica está asociada a la conducción axial. No hemos introducido la coordenada z , pues asumimos que esta afecta a la distribución de la temperatura media de mezcla pero no a la temperatura adimensional $\Delta T(r)/\Delta T_m$. Esto es equivalente a asumir que el perfil $\Delta T(r)/\Delta T_m$ es el mismo a lo largo del tubo en esta región. Los exponentes dimensionales de estas variables, en la base $\{L_r, L_z, S_r, Q, T, \theta, M\}$, se muestran en la Tabla 4.21.

Tabla 4.21 Exponentes dimensionales (perfil de temperaturas completamente desarrollado)

	r	R	ΔT_m	U	c'_e	k	$\Delta T(r)$
L_r	1100				-1	1	0
L_z	0001000						
S_r	0	0	0		-1	-1	0
Q	0000110						
T	0	0	0	-1	0	-1	0
θ	0010				-1	-1	1
M	0000000						

La aplicación del teorema de π proporciona dos monomios adimensionales:

$$\pi_{1\Delta T} = \frac{\Delta T(r)}{\Delta T_m}$$

$$\pi_{2\Delta T} = \frac{r}{R}$$

de los que se obtiene la solución para la temperatura,

$$\frac{\Delta T(r)}{\Delta T_m} = \varphi\left(\frac{r}{R}\right) \quad o \quad \frac{T_s - T(r)}{T_s - T_m} = \varphi\left(\frac{r}{R}\right)$$

En algunos textos, como Lienhard [1987], Kays y Crawford [1993] e Incropera y De Witt [1996], esta expresión define el perfil de temperaturas completamente desarrollado.

Para determinar el coeficiente de transmisión del calor medio bastará con sustituir la última columna de la Tabla 4.21 por los exponentes dimensionales de la nueva incógnita, h , y con eliminar la coordenada espacial r , Tabla 4.22 ($D = 2R$). Se obtiene un solo monomio:

$$\pi_h = \frac{h D}{k} = \text{Nu}_D$$

Tabla 4.22 Exponentes dimensionales para el cálculo de h (flujo completamente desarrollado)

	D	ΔT_m	U	c'_e	k	h
L_r	1	0	0	-1	1	0
L_z	001000					
S_r	0	0	0	-1	-1	-1
Q	000111					
T	0	0	-1	0	-1	-1
θ	0	1	0	-1	-1	-1
M	000000					

Así, en flujos completamente desarrollados, el número de Nusselt es constante y del orden de la unidad,

$$\text{Nu}_D \sim 1$$

El resultado deducido analíticamente es $\text{Nu}_D = 3,675$ o $h = 3,675(k/D)$.

Cuando la conducción axial no es despreciable, dista de variables para el tálón lo de k_z y la conductividad térmica en esa dirección, ΔT_m , c'_e , k_z , k_r , h . La introducción de z se debe precisamente a la existencia de conducción axial y tiene por objeto definir la región para la que se busca un coeficiente medio de transmisión de calor. El cuadro de exponentes se muestra en la Tabla 4.23.

Tabla 4.23 Exponentes dimensionales para el cálculo de h (flujo de calor radial no despreciable)

	D	z	ΔT_m	U	c'_e	k_z	k_r	h
L_r	1000				-1	-1	1	0
L_z	01010200							
S_r	0000				-1	-1	-1	-1
Q	00001111							
T	0	0	0	-1	0	-1	-1	-1
θ	0010				-1	-1	-1	-1
M	00000000							

La solución está formada por tres monomios:

$$\pi_{h,1} = \frac{h D}{k_r}$$

$$\pi_{h,2} = \frac{k_r z}{c'_e UD}$$

$$\pi_{h,3} = \frac{k_z}{c'_e U z}$$

que conduce a la solución:

$$h = \frac{k_r}{D} f\left(\frac{k_r z}{c'_e UD}, \frac{k_z}{c'_e U z}\right)$$

donde f es una función desconocida. Incluso en el caso $\alpha_z = \alpha_r$, isotropía, la solución sigue formada por tres monomios.

El ADC proporciona para esta incógnita una solución incorrecta, tanto para el perfil de temperatura como para el coeficiente de transmisión del calor en el caso de conducción axial despreciable, puesto que hace intervenir en ella el monomio UR/α . Este resultado es además contradictorio, pues hace intervenir un monomio que contiene la velocidad, una magnitud que no juega papel alguno en problemas de conducción axial despreciable y flujo completamente desarrollado. Es un caso claro en el que el ADC conduce a una solución conceptualmente errónea. Cuando la conducción axial no es despreciable, el ADC conduce a una solución menos precisa formada por cuatro monomios $k_r D/k_r$, $k_r z/(c'_e UD)$, z/D y k_z/k_r .

Ejemplo 4.9 Convección natural en una capa límite laminar a lo largo de una placa vertical isoterma

Una placa vertical de altura L y temperatura T_s se pone en contacto con un fluido a una temperatura T_∞ lejos de la placa. Se han de determinar todas las variables características de este problema, tanto mecánicas como térmicas, en la zona de fluido próxima a la placa (capa límite), Figura 4.8. Se asumen las hipótesis: (i) disipación viscosa despreciable, (ii) placa isoterma y (iii) aproximación de Boussinesq, $\beta(T_s - T_\infty) \ll 1$.

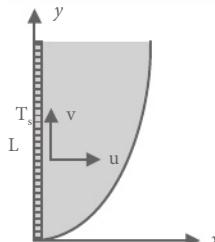


Figura 4.8 Capa límite a lo largo de una placa vertical isoterma bajo convección natural

Solución

Aunque no sean necesarias para la aplicación del teorema de π , escribiremos las ecuaciones del modelo para resaltar la complejidad de este conocido problema. Se trata de una simplificación de las ecuaciones generales de Navier-Stokes, más las asociadas con las condiciones de contorno:

$$u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} = -\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} - g\beta(T - T_\infty)$$

$$u \frac{\partial T}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial y} = \alpha \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}$$

$$\begin{aligned} u &= v \theta & y &\rightarrow T_s && \text{en } x = 0 \\ v &\theta & y &\rightarrow T_\infty && \text{en } x \rightarrow \infty \end{aligned}$$

Las dos primeras ecuaciones representan los balances de momento y energía en la capa límite, respectivamente, mientras que las otras dos se refieren a condiciones de contorno. Las fuerzas de flotación por unidad de diferencia de temperaturas, $F_{b,T} = \rho g \beta$, causadas por los cambios de densidad en regiones locales del

fluido, debidas a su vez a diferencias de temperatura, son las causantes directas del movimiento. Respecto a las propiedades del fluido, desde el punto de vista mecánico debemos considerar la densidad, ρ , que da cuenta de los efectos inerciales y el coeficiente de viscosidad dinámica, μ , asociado a los efectos viscosos; mientras que desde el punto de vista térmico las propiedades del fluido que influyen en la solución del problema son el calor específico c_p y la conductividad térmica k . Así, la lista de variables independientes es $\langle L, \Delta T, F_{b,T}, \rho, \mu, c_p, k \rangle$, donde $\Delta T = T_s - T_\infty$. Como la conversión de energía mecánica a térmica es despreciable, la base dimensional adecuada, teniendo en cuenta la discriminación espacial, es $\{L_x, L_y, L_z, Q, T, \theta, M\}$.

Las ecuaciones dimensionales de las constantes físicas se obtienen de sus ecuaciones de definición. El gradiente de velocidad que causa las fuerzas viscosas (verticales) es normal en la placa, por lo que la ley de Newton de la viscosidad es $F_v = S_{yz} \mu (dv_x/dx)$, donde S_{yz} es la superficie normal a la pared. De esta ley se

aplicando la ecuación dimensional de pared, la ley de Newton $S_{yz} dv_x/dx$ y un paso similar para la ecuación dimensional de pared, la ley de Fourier $\kappa dT/dy$, se deduce a la ecuación de dimensiones de la conductividad térmica. Así, el conjunto de ecuaciones dimensionales es

$$[L] = L_y$$

$$[\Delta T] = \theta$$

$$[F_{b,T}] = [\rho g \beta] = \left[L_x^{-1} L_z^{-1} \right] M T^{-2} \theta^{-1}$$

$$[\rho] = \left[L_x^{-1} L_y^{-1} L_z^{-1} \right] M$$

$$[\mu] = L_x L_y^{-1} L_z^{-1} T^{-1} \theta^{-1} Q$$

$$[c'_e] = L_x^{-1} L_y^{-1} L_z^{-1} \theta^{-1} Q$$

$$[k] = L_x L_y^{-1} L_z^{-1} T^{-1} \theta^{-1} Q$$

Tabla 4.24 Exponentes dimensionales de las variables independientes

	L	ΔT	$F_{b,T}$	ρ	μ	c'_e	k
L_x			-1	-1	1	-1	1
L_y	1			-1	-1	-1	-1
L_z			-1	-1	-1	-1	-1
Q						1	1
T			-2		-1		-1
θ		1	-1			-1	-1
M			1	1	1		

La Tabla 4.24, muestra los exponentes dimensionales de estas variables y de las constantes físicas. El número de monomios adimensionales independientes que se obtienen por aplicación de teorema de Π es la diferencia entre el número de variables y el rango de característica de la matriz formada por los exponentes dimensionales. El único monomio posible es el número de Prandtl,

$$\Pi_F = \frac{\mu c'_e}{\rho k} = \frac{\nu}{\alpha} \quad \text{Pr}$$

El resultado obtenido es esencialmente diferente y mucho más preciso que el proporcionado por el ADC, que contiene un segundo monomio, el número de Gr_L , frecuentemente usado en los textos como un número adimensional. Adviérase que el número de Prandtl es adimensional, tanto en bases discriminadas

como en no discriminadas.

(a) Caso general

Se asume que intervienen todas las variables de la Tabla 4.24; lo que equivale a admitir que existen las fuerzas de flotación, de inercia y viscosas, y que son del mismo orden de magnitud.

Cálculo de la velocidad del fluido y del espesor de las capas límite

Para determinar la velocidad característica paralela a la placa, v^* , cuya ecuación dimensional es $[v^*] = L_y T^{-1}$, es suficiente añadir esta magnitud a la lista de variables independientes, $\langle L, \Delta T, F_{b,T}, \rho, \mu, c'_e, k, v^* \rangle$. Como se trata de un problema acoplado, las magnitudes y los parámetros de la lista relevante de variables están

relacionados (se influyen) mutuamente, y ninguno puede ser eliminado de la lista. La aplicación del teorema de π conduce a dos monomios independientes:

$$\pi_1 = \frac{\mu c'_e}{\rho k} = \frac{\nu}{\alpha} = \text{Pr}$$

$$\pi_2 v^* = v^* (g\beta\Delta TL)^{-1/2}$$

quedando para v^* la solución

$$v^* = (g\beta\Delta TL)^{1/2} \varphi_1(\text{Pr})$$

Esta solución, que no se puede obtener por el ADC, puede expresarse en términos de los números clásicos de Gr_L , Ra_L y Bo_L , dado que están relacionados entre sí a través del número de Prandtl:

$$\text{Gr}_L = \frac{g\beta\Delta TL^3}{\nu^2}, \quad = \text{Ra}_L^{\frac{1}{2}} \text{Gr}_L^{\frac{1}{2}} \text{Pr} = \frac{T g \beta \Delta}{\alpha}^{\frac{3}{2}}, \quad \text{Bo}_L = \text{Gr}_L \text{Pr}^{\frac{1}{2}} = \frac{g \beta \Delta}{2}^{\frac{3}{2}}$$

como

$$v^* = \left(\frac{\nu}{L} \right) \text{Gr}_L^{1/2} \varphi_1(\text{Pr}) = \left(\frac{\nu}{L} \right) \text{Ra}_L^{1/2} \varphi_2(\text{Pr}) = \left(\frac{\nu}{L} \right) \text{Bo}_L^{1/2} \varphi_3(\text{Pr})$$

La solución que se obtiene mediante el ADC, empleando la base dimensional $\{L, Q, T, \theta, M\}$, es

$$v^* = \left(\frac{\nu}{L} \right) \text{Gr}_L^{1/2} \varphi(\text{Gr}_L, \text{Pr})$$

Desde la perspectiva del ADD, para el que ni Gr_L , ni Ra_L ni Bo_L son estrictamente (discriminadamente) números adimensionales, estas expresiones pueden ser consideradas como una manipulación conveniente con el fin de mantener el uso de los números adimensionales clásicos en los campos de mecánica de fluidos y de transferencia de calor en ingeniería. La correlación

$$v^* = \left(\frac{\nu}{L} \right) \text{Gr}_L^{1/2} \varphi_1(\text{Pr})$$

es ampliamente usada en la literatura para representar gráficamente v^* , Ostrach [1953] y Gebhart y col. [1988]. Sin embargo, Bejan [1995] usa la correlación, deducida de la anterior,

$$v^* = \left(\frac{\alpha}{L} \right) \text{Ra}_L^{1/2} \varphi_2(\text{Pr})$$

Por otro lado, el espesor de las capas límite de velocidad y térmica, δ_v y δ_t , respectivamente, cuyas ecuaciones dimensionales son las mismas, $[\delta_v] = [\delta_t] = L_x$,

pueden ser determinadas incluyendo, separadamente, cada una de estas en la lista relevante, quedando $\langle L, \Delta T, F_{b,T}, \rho, \mu, c'_e, k, \delta_v \rangle$ y $\langle L, \Delta T, F_{b,T}, \rho, \mu, c'_e, k, \delta_t \rangle$, respectivamente. Obviamente, tanto los monomios resultantes (dos) como las soluciones para los espesores de las capas límites, como era de esperar, tienen el mismo aspecto. Para la capa límite de velocidad se obtienen los monomios

$$\pi_1 = Pr$$

$$\pi_{2,\delta_v} = \delta_v \left(\frac{g\beta\Delta T}{v^2 L} \right)^{1/4}$$

y la solución para δ_v :

$$\delta_v = \left(\frac{g\beta\Delta T}{v^2 L} \right)^{-1/4} \varphi_4(Pr)$$

mientras que para la capa límite térmica se obtienen los monomios

$$\pi_1 = Pr$$

$$\pi_{2,\delta_t} = \delta_t \left(\frac{g\beta\Delta T}{v^2 L} \right)^{1/4}$$

y la solución para δ_t :

$$\delta_t = \left(\frac{g\beta\Delta T}{v^2 L} \right)^{-1/4} \varphi_7(Pr)$$

donde φ es una función arbitraria de Pr , diferente para cada solución. Los números clásicos Gr_L , Ra_L y Bo_L pueden ser de nuevo introducidos en estas soluciones, proporcionando la conexión entre ellos y las variables del problema:

$$\delta_v = L \phi Gr_L^{-1/4} \quad 4 \quad \text{y} \quad Pr = L \quad Ra_L^{-1/4} \quad 5 \quad \text{y} \quad Pr \neq L \quad Bo_L^{-1/4} \quad 6 \quad \text{y} \quad Pr$$

$$\delta_t = L \phi Gr_L^{-1/4} \quad 7 \quad \text{y} \quad Pr = L \quad Ra_L^{-1/4} \quad 8 \quad \text{y} \quad Pr \neq L \quad Bo_L^{-1/4} \quad 9 \quad \text{y} \quad Pr$$

Las soluciones obtenidas por los métodos de semejanza (o similaridad) e integral, así como los resultados experimentales, se presentan en general por medio de estas correlaciones Gebhart [1988], Bejan [1995], Squire [1965] y Burmeister [1993].

Aunque básicamente conducen a los mismos resultados, las soluciones que proporciona el ADD muestran que la mejor forma de convertir magnitudes conocidas en adimensionales es usar las escalas $(\Delta TL)^{-1/2}$ para v' y $(g\beta\Delta T/v^2 L)^{1/4}$ para δ y δ_v .

La aplicación del ADC a la determinación de los espesores de las capas límites conduce a los siguientes resultados, menos precisos:

$$\delta_v = L \varphi(Gr_L \ Pr \)$$

$$\boxed{\delta_t = L \varphi(Gr_L \ Pr \)}$$

Coefficiente de transferencia de calor

La transferencia de calor de la placa al fluido (o viceversa) se determina de la ley de Newton, $j = Sh(T_s - T_\infty)$, donde h es el coeficiente de transferencia de calor cuya ecuación dimensional se deduce de dicha ley: $[h] = QT^{-1}L_y^{-1}L_z^{-1}\theta^{-1}$. Incluyendo h en la lista relevante de variables, $\langle L, \Delta T, F_{b,T}, \rho, \mu, c_p, k, h \rangle$, resultan los siguientes monomios:

$$\pi^1 = \text{Pr}$$

$$\pi_{2h} = \frac{h}{k} \left(\frac{\nu^2 L}{g\beta\Delta T} \right)^{1/4}$$

que conducen a la solución:

$$h = k \left(\frac{g\beta\Delta T}{\nu^2 L} \right)^{1/4} \varphi_{10}(\text{Pr})$$

De nuevo, esta solución (que no es capaz de deducir el ADC) puede escribirse en términos de los números clásicos Nu_L , Ra_L , Gr_L o Bo_L ,

$$h = \frac{k}{L} Gr_L^{1/4} \varphi_{10}(\text{Pr}) = \frac{k}{L} Ra_L^{1/4} \varphi_{11}(\text{Pr}) = \frac{k}{L} Bo_L^{1/4} \varphi_{12}(\text{Pr})$$

o usando las definiciones de los números adimensionales clásicos,

$$Nu_L = Gr_L^{1/4} \varphi_{10}(\text{Pr}) = Ra_L^{1/4} \varphi_{11}(\text{Pr}) = Bo_L^{1/4} \varphi_{12}(\text{Pr})$$

correlaciones que pueden obtenerse también por los métodos integral y de similitud, Ostrach [1953], Squire [1965] y Sugawara y Michiyoshi [1951]. El ADC aporta una solución menos precisa: $Nu = \varphi(Gr_L, \text{Pr})$.

Para el ADD, las escalas adecuadas Ra_L y Nu_L son $k((g\beta\Delta\theta)/(\nu^2 L))^{1/4} = (k/L)(Gr_L)^{1/4}$ y $(Gr_L)^{1/4}$, respectivamente (escalas usadas por Oosthuizen y Naylor [1999]). Bejan [1995] y Ede [1967], sin embargo, usan la escala $(Ra)^{1/4}$, que no parece adecuada para el rango completo de números de Prandtl.

(b) El caso límite $\text{Pr} \gg 1$

La hipótesis $\text{Pr} \gg 1$ (fluidos de alta viscosidad) asume que las fuerzas de inercia son despreciables, por lo que las fuerzas de flotación son del mismo orden de magnitud que las fuerzas viscosas. Esta hipótesis conduce a eliminar ρ de la lista de variables relevantes, aunque permanece en la forma $F_{b,T} = \rho g \beta$ para representar las fuerzas de flotación por unidad de volumen y de diferencia de temperaturas. Eliminando ρ , la nueva lista de variables independientes es $\langle L, \Delta T, F_{b,T}, \mu, \rho c_p, k \rangle$ y la tabla de sus exponentes dimensionales (Tabla 4.20 eliminando ρ) no permite la formación de monomios adimensionales. Esto quiere decir que Pr no forma parte de la solución, como ocurría en el caso anterior. La inclusión de una veloci-

dad característica paralela a la placa, v^* , en la lista de variables independientes $\langle L, \Delta T, F_{b,T}, \mu, c'_e, k, v^* \rangle$ permite obtener un único monomio, a saber:

$$\pi_{v^*} = v^* \left(\frac{\nu}{g\beta\Delta TL\alpha} \right)^{1/2}$$

que proporciona la solución

$$v^* \sim \left(\frac{g\beta\Delta TL\alpha}{\nu} \right)^{1/2}$$

De forma similar, la solución para el espesor de la capa límite térmica asociada a la región en donde las fuerzas viscosas y de flotación se balancean (son del mismo orden de magnitud), δ_t , se obtiene introduciendo esta variable en la lista, $\langle L, \Delta T, F_{b,T}, \mu, c'_e, k, \delta_t \rangle$. El monomio obtenido es

$$\pi_{\delta_t} = \delta_t \left(\frac{g\beta\Delta T}{\nu\alpha L} \right)^{1/4}$$

y la solución para δ_t :

$$\delta_t \sim \left(\frac{\nu\alpha L}{g\beta\Delta T} \right)^{1/4}$$

Como se sabe, conforme el fluido aumenta su velocidad (moviéndose a lo largo de la placa), los gradientes de temperatura y las fuerzas de flotación disminuyen hasta desaparecer. Más allá de δ_t , las fuerzas viscosas están balanceadas con las de inercia en una región de espesor δ_v , Figura 4.9.

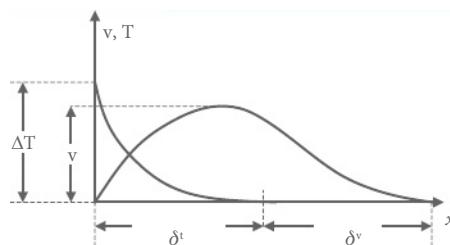


Figura 4.9 Regiones de capa límite para $Pr \gg 1$

La solución del ADD para δ_v , un problema puramente mecánico (no térmico, ya que no existe gradiente de temperaturas en esa zona), puede deducirse de la lista de variables $\langle L, \rho, \mu, v^*, \delta_v \rangle$, Tabla 4.25. La inclusión de L en esta lista se justifica porque δ_v es una función de la región ocupada por el fluido en movimiento; la cual, a su vez, depende de la longitud de la placa. Esto es equivalente a considerar la condición $v = v^*$, (para $x = \delta_t$, $0 < y < L$), como una condición de contorno para la determinación de δ_v .

Tabla 4.25 Exponentes dimensionales para la determinación de δ_v ($Pr \gg 1$)

	L	v^*	ρ	μ	δ_v
L_x			-1	1	1
L_y	1	1	-1	-1	
L_z			-1	-1	
M			1	1	
T		-1		-1	

La aplicación del teorema de π a esta tabla proporciona un único monomio:

$$\pi_{\delta_v} = \delta_v \left(\frac{v^*}{\nu L} \right)^{1/2}$$

con la solución para δ_v

$$\delta_v \sim \left(\frac{\nu L}{v^*} \right)^{1/2} = \left(\frac{\nu^3 L}{g \beta \Delta T \alpha} \right)^{1/4}$$

Es interesante advertir que $\delta_v > \delta_t$; ya que, comparando los resultados anteriores, $\delta_v/\delta_t \sim (\nu/\alpha)^{1/2} = Pr^{1/2} > 1$.

El problema de transferencia de calor se resuelve usando la lista de variables de la Tabla 4.24, excluyendo ρ e incluyendo el coeficiente h ; es decir, $\langle L, \Delta T, F_{b,T}, \mu, c'_e, k, h \rangle$.

Se obtiene el monomio

$$\pi_h = \left(\frac{h}{k} \right) \left(\frac{\nu \alpha L}{g \beta \Delta T} \right)^{1/4}$$

y la solución para h

$$h \sim k \left(\frac{g \beta \Delta T}{\nu \alpha L} \right)^{1/4}$$

En función de los números adimensionales clásicos, Ra_L , Gr_L , Bo_L y Nu_L , los anteriores resultados proporcionan las correlaciones siguientes:

$$\begin{aligned} \delta_t &\sim L \ Ra_L^{-1/4} = L \ Gr_L^{-1/4} \ Pr^{-1/4} = L \ Bo_L^{-1/4} \ Pr^{1/4} \\ \delta_v &\sim Ra_L^{-1/4} \ Pr^{-1/2} = L \ Gr_L^{-1/4} \ Pr^{1/4} = L \ Bo_L^{-1/4} \ Pr^{3/4} \\ h &\sim (k/L) \ Ra_L^{-1/4} = (k/L) \ Gr_L^{-1/4} \ Pr^{1/4} = (k/L) \ Bo_L^{-1/4} \ Pr^{-1/4} \\ Nu_L &\sim Ra_L^{-1/4} = Gr_L^{-1/4} \ Pr^{1/4} = Bo_L^{-1/4} \ Pr^{-1/4} \end{aligned}$$

Estas correlaciones están de acuerdo con las obtenidas por otros métodos analíticos y experimentales, Le Fevre [1956], Acrivos [1962], Kuiken [1968], Gebhart y col. [1988] y Bejan [1995].

El ADC conduce a las soluciones menos precisas:

$$v^* = (\alpha/L) \varphi(Ra_L)$$

$$\begin{aligned} \delta &= L \varphi(Ra_L) \\ Nu_L &= \varphi(Ra_L) \end{aligned}$$

$$\delta_v = L \varphi(Ra_L^{-1/4} Pr^{1/2})$$

Como se ha deducido, ni Ra ni Gr_L ni Bo_L juegan un papel independiente en la solución para las magnitudes desconocidas v^* , δ y h (o Nu_L). Adviértase, por ejemplo, que Ra es un grupo independiente en el ADC. En el ADD, Ra es un grupo dependiente que puede considerarse adecuado para adimensionalizar las incógnitas del problema, excepto para δ_v (donde las fuerzas de inercia son significativas). Por ejemplo, la expresión $(\sqrt{\alpha/L})/Ra_L^{1/2}$ es un perfil de velocidades adimensional, donde $(\alpha/L) Ra_L^{1/2}$ es una velocidad característica y, en $\delta/(L Ra_L^{-1/4})$, $L Ra_L^{-1/4}$ es una longitud característica.

(c) El caso límite $Pr \ll 1$

Bajo esta hipótesis, aplicable a líquidos de elevada difusividad térmica (metales), las fuerzas viscosas se consideran despreciables frente a las fuerzas de inercia y a las fuerzas de flotación, siendo las dos últimas en consecuencia del mismo orden de magnitud. La viscosidad puede ser eliminada de la lista relevante de variables independientes (Tabla 4.24), $\langle L, \Delta T, F_{b,T}, \rho, c'_e, k \rangle$. Con razonamientos similares a los del caso anterior ($Pr \gg 1$), es decir, añadiendo por separado a la lista de variables independientes anterior la velocidad característica paralela a la placa, v^* , el espesor de la capa límite térmica, δ_t , y el coeficiente de transferencia de calor h , el ADD aporta las siguientes soluciones:

$$v^* \sim (g\beta\Delta TL)^{1/2}$$

$$\delta_t \sim \left(\frac{\alpha^2 L}{g\beta\Delta T} \right)^{1/4}$$

$$h \sim k \left(\frac{g\beta\Delta T}{\alpha^2 L} \right)^{1/4}$$

que en términos de los números adimensionales clásicos se escriben

$$v^* \sim (\alpha/L) \boxed{Bo_L^{1/2}} = (\alpha/L) (Ra_L Pr)^{1/2} = (\alpha/L) (Gr_L Pr^2)^{1/2}$$

$$\delta_t \sim L \boxed{Bo_L^{-1/4}} = L (Ra_L Pr)^{-1/4} = L (Gr_L Pr^2)^{-1/4}$$

$$h \sim (k/L) \boxed{Bo_L^{1/4}} = (k/L) (Ra_L Pr)^{1/4} = (k/L) (Gr_L Pr^2)^{1/4}$$

De nuevo (como en el caso de $\text{Pr} \gg 1$) ni Ra_L ni Gr_L ni Bo_L juegan un papel independiente en las soluciones. El número adimensional clásico que mejor caracteriza estas variables incógnita, v^* , δ_t y h en el caso $\text{Pr} \ll 1$ es Bo_L (que juega el mismo rol que Ra para $\text{Pr} \gg 1$) en cuanto a la definición en función de él de longitudes y velocidades característica. Queda claro que la anchura del perfil de velocidades es la misma que la del perfil de la capa límite térmica $\delta_v \approx \delta_t$, ya que la velocidad también está fijada por las fuerzas de flotación, que dependen de las variaciones de temperatura existentes en la capa límite térmica (la velocidad tiende a cero conforme tienden acero las fuerzas de flotación).

Dentro de la capa límite térmica, el espesor en el que se desarrolla la velocidad o alcanza esta su máximo valor (Figura 4.10) $\delta_{v-\max}$ se obtiene de la lista de variables $\langle L, v^*, \Delta T, F_{b,T}, \mu, \delta_{v-\max} \rangle$, puesto que en dicha zona se produce un balance entre las fuerzas de flotación y las viscosas. Como c_e y k determinan el campo de velocidades, y estas variables no afectan al problema mecánico da determinación de $\delta_{v-\max}$.

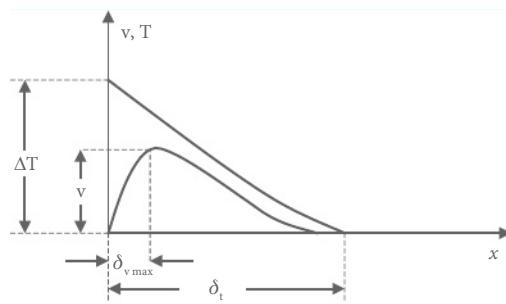


Figura 4.10 Región de capa límite para $\text{Pr} \ll 1$

La solución es

$$\delta_{v-\max} \sim \left(\frac{\nu v^*}{g\beta\Delta T} \right)^{1/2}$$

o, en términos de los números adimensionales clásicos,

$$\delta_{v-\max} \sim L(\text{Bo})^{-1/4} (\text{Pr})^{1/2} = L(\text{Gr})^{-1/4}$$

El cociente $\delta_t/\delta_{v-\max} \approx \delta_v/\delta_{v-\max} \approx (\text{Pr})^{-1/2}$ es superior a la unidad. Estos resultados están de acuerdo con los obtenidos por otros métodos, Le Fevre [1956], Kuiken [1969], Gebhart y col. [1988] y Bejan [1995].

Por otra parte, el ADC empleando la base dimensional $\{L, Q, T, \theta, M\}$ conduce a las siguientes soluciones:

$$v^* = (\alpha/L) \varphi(\text{Bo}_L)$$

$$\delta_t \sim L \varphi(\text{Bo}_L)$$

$$\text{Nu}_L = \varphi(\text{Bo}_L)$$

$$\delta_{v-\max} = L \varphi(\text{Gr})$$

En la Tabla 4.26 se sintetizan los resultados anteriores para apreciar de manera más sencilla las soluciones que aporta el ADD y el ADC en función de los números adimensionales clásicos. De esta tabla parece claro (como se ha mencionado) que Ra_L y Bo_L son los únicos monomios clásicos que determinan las soluciones de los casos límite $\text{Pr} \gg 1$ y $\text{Pr} \ll 1$, respectivamente, con la excepción de las soluciones para δ_v ($\text{Pr} \gg 1$) y $\delta_{v-\max}$ ($\text{Pr} \ll 1$), que son más complejas. No tiene sentido pues introducir Pr en estas soluciones. Es también importante señalar que formalmente el "aspecto" de las soluciones para ambos límites es el mismo, y podemos transformar unas en otras sin más que intercambiar Ra_L y Bo_L entre sí.

Tabla 4.26

Soluciones ADD y ADC y conexión con los números adimensionales clásicos

ADD		
$\text{Pr} \gg 1$	Caso general	$\text{Pr} \ll 1$
$v^* \sim (\alpha/L)\text{Ra}_L^{1/2}$	$v^* = (\nu/L)(\text{Gr}_L)^{1/2} \varphi_1(\text{Pr})$	$v^* \sim (\alpha/L)\text{Bo}_L^{1/2}$
$\delta_t \sim L\text{Ra}_L^{-1/4}$	$\delta_t = L(\text{Gr}_L)^{-1/4} \varphi_1(\text{Pr})$	$\delta_t \sim L\text{Bo}_L^{-1/4}$
$h \sim (k/L)\text{Ra}_L^{1/4}$ $\text{Nu}_L \sim \text{Ra}_L^{1/4}$	$h = (k/L)(\text{Gr}_L)^{-1/4} \varphi_1(\text{Pr})$ $\text{Nu}_L = (\text{Gr}_L)^{-1/4} \varphi_1(\text{Pr})$	$h \sim (k/L)\text{Bo}_L^{1/4}$ $\text{Nu}_L \sim \text{Bo}_L^{1/4}$
$\delta_v \sim L\text{Ra}_L^{-1/4}\text{Pr}^{1/2}$	$\delta_v = L(\text{Gr}_L)^{-1/4} \varphi_1(\text{Pr})$	$\delta_{v-\max} \sim L(\text{Bo})^{-1/4}(\text{Pr})^{1/2} = L(\text{Gr})^{-1/4}$

ADC		
$\text{Pr} \gg 1$	Caso general	$\text{Pr} \ll 1$
$v^* = (\alpha/L) \varphi(\text{Ra}_L)$	$v^* = (\nu/L) \varphi(\text{Pr}, \text{Gr})$	$v^* = (\alpha/L) \varphi(\text{Bo}_L)$
$\delta_t = L \varphi(\text{Ra}_L)$	$\delta_t = L \varphi(\text{Pr}, \text{Gr})$	$\delta_t \sim L \varphi(\text{Bo}_L)$
$\text{Nu}^L = \varphi(\text{Ra}^L)$	$\text{Nu}^L = \varphi(\text{Pr}, \text{Gr})$	$\text{Nu}^L = \varphi(\text{Bo}^L)$
$\delta_v = L \varphi(\text{Ra}_L^{-1/4} \text{Pr}^{1/2})$	$\delta_v = L \varphi(\text{Pr}, \text{Gr})$	$\delta_{v-\max} = L \varphi(\text{Gr})$

En relación con el caso general, las soluciones del ADD muestran que la influencia de Pr se recoge por completo en las funciones $\varphi(\text{Pr})$, ya que Gr_L es independiente de Pr . Esta circunstancia no se da si tomamos Ra_L y Bo_L en lugar de Gr_L para las soluciones del caso general.

Las ecuaciones dimensionales de los números adimensionales clásicos en la base empleada son $[\text{Gr}_L] = [\text{Ra}_L] = [\text{Bo}_L] = L_y^4 L_x^{-4}$.

Ejemplo 4.10 Convección natural laminar a lo largo de una placa vertical con flujo de calor conocido

En muchas aplicaciones, el calentamiento en la placa se debe a una radiación incidente desde el otro lado de la misma o a un calentamiento resistivo como ocurre

en los disipadores de componentes electrónicos. El problema de transferencia de calor en estos casos consiste en determinar la diferencia de temperaturas placa-ambiente para un flujo dado de calor por unidad de superficie de la placa, j_o . Consideraremos las siguientes hipótesis: (i) disipación viscosa despreciable, (ii) aproximación de Boussinesq ($\beta\Delta T \ll 1$, donde β es el coeficiente de expansión térmica del fluido) y iii) conducción paralela a la placa despreciable. La Figura 4.11 muestra un esquema del problema.

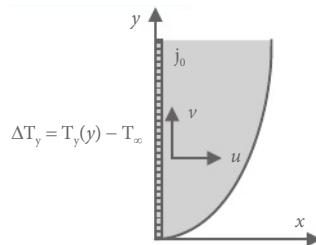


Figura 4.11 Geometría del problema

Además de la temperatura de la placa, se han de determinar las magnitudes características tanto mecánicas como térmicas en la región de fluido próxima a la placa (capa límite).

Solución

(a) Caso general

Las fuerzas de inercia, viscosas y de flotación son del mismo orden de magnitud. La lista relevante de variables independientes, cuya justificación es inmediata, es $\langle y, j_o, F_{b,T}, \rho, \mu, c'_e, k \rangle$. Sus ecuaciones dimensionales en la base $\{L_x, L_y, L_z, Q, T, \theta, M\}$ son

$$y \text{ (m), distancia desde el borde inferior de la placa} \quad [y] = L_y$$

$$j_o \text{ (Wm}^{-2}\text{), flujo de calor prescrito} \quad [j_o] = QT^{-1}L_y^{-1}L_z^{-1}$$

$$F_{b,T} = \rho g \beta \text{ (N), fuerza de flotación}$$

$$\text{por unidad de temperatura y de volumen} \quad [F_{b,T}] = L_x^{-1}L_z^{-1}MT^{-2}\theta^{-1}$$

$$\rho, \text{ densidad del fluido (fuerzas de inercia)} \quad [\rho] = L_x^{-1}L_y^{-1}L_z^{-1}M$$

$$\mu \text{ (kgm}^{-1}s^{-1}\text{), viscosidad del fluido (fuerzas viscosas)} \quad [\mu] = [F_v][S_{yz}^{-1}][dx/dv_x]$$

$$c'_e = \rho c_p \text{ (Jm}^{-3}k^{-1}\text{), calor específico del fluido} \quad [c'_e] = L_x^{-1}L_y^{-1}L_z^{-1}\theta^{-1}Q$$

$$k \text{ (WmK}^{-1}\text{), conductividad térmica del fluido} \quad [k] = L_xL_y^{-1}L_z^{-1}T^{-1}\theta^{-1}Q$$

La Tabla 4.27 muestra los exponentes dimensionales de estas variables y características físicas.

Tabla 4.27 Exponentes dimensionales de las variables independientes (caso general)

	y	j_o	$F_{b,T}$	ρ	μ	c'_e	k
L_x			-1	-1	1	-1	1
L_y	1	-1		-1	-1	-1	-1
L_z		-1	-1	-1	-1	-1	-1
Q		1				1	1
T		-1	-2		-1		-1
θ			-1			-1	-1
M			1	1	1		

La aplicación del teorema de π proporciona un solo monomio adimensional, el número de Prandtl,

$$\Pi^L = \frac{\mu c'}{\rho k} = \frac{\nu}{\alpha} \quad \text{Pr}$$

Para determinar cualquier magnitud de interés, velocidad, espesor de capa límite, etc., bastará con añadir sus exponentes dimensionales a la tabla anterior y volver a aplicar el teorema de π . El número de Prandtl, obviamente, formará parte de la solución.

Ya, de entrada, la aplicación del ADC, base $\{L, Q, T, \theta, M\}$, proporciona un nuevo monomio (además del de Prandtl) conocido como el número de Grashof modificado:

$$\Pi_2 = \text{Gr}_{*y} = \frac{\rho F_{b,T} j_o y^4}{\mu^2 k} \frac{g \beta j_o y^4}{\nu^2 k}$$

Velocidad vertical del fluido y espesor de la capa límite

La naturaleza conjugada del problema hace que el perfil de velocidades del fluido dependa del perfil de temperatura y viceversa. La lista relevante de variables para determinar la velocidad del fluido estará constituida tanto por las variables independientes mecánicas como por las térmicas, $\{y, j_o, F_{b,T}, \rho, \mu, c'_e, k, v^*\}$. Incorporando en la Tabla 4.27 una columna con los exponentes dimensionales de la velocidad vertical, $[v] = L_y T^{-1}$, y aplicando el teorema de π , resultan dos monomios:

$$\pi_1 = \text{Pr}$$

$$\pi_{2v} = v \cdot \left(\frac{k^2 \rho^3}{\mu F_{b,T}^2 j_o^2 y^3} \right)^{1/5}$$

con lo que la solución, $F(\pi_1, \pi_{2v}) = 0$, puede escribirse en la forma

$$v^* = \left(\frac{\mu F_{b,T} j_o^2 y^3}{k^2 \rho^3} \right)^{1/5} \varphi(Pr)$$

Para conocer el espesor de la capa límite térmica habría que resolver la ecuación

de la energía que está jacoplada a la del movimiento. Con el ADD las variables de la energía que están jacopladas a la del movimiento δ_t de dimensiones $[t]$, L_x , a la Tabla 4.27, y aplicamos el teorema de φ , se obtienen los monomios

$$\pi_1 = Pr$$

$$\pi_{2\delta_t} = \delta_t \left(\frac{\rho F_{b,T} j_o}{\mu^2 k y} \right)^{1/5}$$

de los que se deduce la solución

$$\delta_t = \left(\frac{\rho F_{b,T} j_o}{\mu^2 k y} \right)^{-1/5} \varphi(Pr)$$

Diferencia de temperaturas y coeficiente de transmisión del calor

Con el fin de determinar la diferencia de temperaturas entre la superficie de la placa y el fluido no perturbado $\Delta T(y) = T_s(y) - T_\infty$, añadimos a la lista de variables independientes la diferencia de temperaturas citada, $\langle y, j_o, F_{b,T}, \rho, \mu, c'_e, k, \Delta T(y) \rangle$. La Tabla 4.28, teniendo en cuenta que $[\Delta T(y)] = \theta$ muestra el nuevo conjunto de exponentes dimensionales.

Tabla 4.28 Exponentes dimensionales (caso general), cálculo de $\Delta T(y)$

	y	j_o	$F_{b,\theta}$	ρ	μ	c'_e	k	ΔT_y
L_x			-1	-1	1	-1	1	
L_y	1	-1		-1	-1	-1	-1	
L_z		-1	-1	-1	-1	-1	-1	
Q		1				1	1	
T		-1	-2		-1		-1	
θ			-1			-1	-1	1
M			1	1	1			

Se obtienen dos monomios adimensionales:

$$\pi_1 = Pr$$

$$\pi_{2\Delta T} = \Delta T_y \left(\frac{\rho F_{b,T} k^4}{\mu^2 j_o^4 y} \right)^{1/5}$$

y la solución, $F(\pi_1, \pi_{2\Delta T}) = 0$. Despejando la diferencia de temperaturas,

$$\Delta T_y = \left(\frac{\mu^2 j_o^4 y}{\rho F_{b,T} k^4} \right)^{1/5} \varphi(\text{Pr})$$

Esta solución, además de especificar la forma en que varía la temperatura superficial, $T^*(y)$ de la placa con la posición y con el resto de variables, permite expresar (a partir de la solución para el espesor de la capa límite térmica δ_t) el orden de magnitud de la densidad de calor transmitida por conducción en dirección normal a la placa a través de una capa de fluido de espesor δ_t , en la forma:

$$j_o \sim k \left(\frac{\Delta T_y}{\delta_t} \right)$$

A partir de ΔT_y puede calcularse el coeficiente de transmisión de calor local, h_y , de su propia definición, $h_y = j_o / \Delta T_y$,

$$h_y = j_o \left(\frac{\rho F_{b,T} k^4}{\mu^2 j_o^4 y} \right)^{1/5} \varphi(\text{Pr})$$

También puede determinarse directamente a partir de la Tabla 4.28, sustituyendo en ella los exponentes dimensionales de ΔT_y por los correspondientes al coeficiente de transmisión de calor local, h_y , cuya ecuación dimensional en la base considerada es $[h_y] = L_y^{-1} L_z^{-1} QT^{-1} \theta^{-1}$.

Todas estas incógnitas, por tradición, suelen expresarse en función de los números adimensionales clásicos, Prandtl, $\text{Pr} = \nu/\alpha$, Nusselt, $\text{Nu}_y = (h_y y)/k$ y el número modificado de Grashof definido como

$$\text{Gr}_y^* = \frac{\rho F_{b,T} j_o y^4}{\mu^2 k} = \frac{g \beta j_o y^4}{\nu^2 k}$$

Estas expresiones son

$$v^* = (\nu/y) \text{Gr}_y^{2/5} \varphi(\text{Pr})$$

$$\delta_t = y \text{Gr}_y^{1/5} \varphi(\text{Pr})$$

$$\Delta T_y = (j_o y/k) \text{Gr}_y^{-1/5} \varphi(\text{Pr})$$

$$\text{Nu}_y = \text{Gr}_y^{1/5} \varphi(\text{Pr})$$

Hacemos notar que las soluciones anteriores ponen de manifiesto que el número clásico Gr_y^* no desempeña un papel independiente en el problema como podría deducirse, aparentemente, de las expresiones anteriores. Se trata de un número no adimensional con la discriminación. En efecto, puede comprobarse fácilmente que, en la base dimensional empleada, su dimensión es $[\text{Gr}_y^*] = L_y^5 L_x^5$.

Así, en las expresiones finales siempre aparece combinado con otras variables para formar un nuevo grupo realmente adimensional. En las expresiones anteriores, estas combinaciones son $\tilde{v}/(\nu y) \text{Gr}_y^{2/5}$; $\delta_y/\text{Gr}_y^{-1/5}$, $\Delta T_y/(j_0 y/k) \text{Gr}_y^{-1/5}$ y $\text{Nu}_y/\text{Gr}_y^{1/5}$. Por otra parte, para cada valor de Pr , el ADD proporciona las escalas adecuadas para adimensionalizar cada una de las magnitudes incógnitas estudiadas: $\tilde{v}/(\nu y) \text{Gr}_y^{2/5}$ para \tilde{v} , $y \text{Gr}_y^{-1/5}$ para δ_y , $(j_0 y/k) \text{Gr}_y^{-1/5}$ para ΔT_y , $\text{Gr}_y^{1/5}$ para Nu_y .

En realidad, aunque es correcto decir que las soluciones anteriores valen para todo el rango de valores del número de Prandtl, órdenes de magnitud por encima y por debajo de la unidad caen dentro de los valores límite de Pr para los que las soluciones se simplifican, como veremos a continuación, pues solo se puede formar un monomio adimensional en ambos casos límite. Es decir, las soluciones anteriores son adecuadas para valores de Pr del orden de magnitud unidad. El significado físico de los monomios discutido en el Capítulo 5 está íntimamente relacionado con esta discusión.

Las soluciones anteriores están de acuerdo con los resultados de Sparrow [1955], Sparrow y Gregg [1956], que adoptan comodidad de longitud horizontal normal a la placa la escala $\text{Gr}_y^{-1/5}$ deducida anteriormente, y Gebhart col. [1988].

El ADC, con la base $\{L, Q, T, \theta, M\}$, conduce a resultados menos precisos que contienen dos argumentos en la función desconocida:

$$\tilde{v}^* = (\nu/y) \varphi(\text{Pr}, \text{Gr}_y^*)$$

$$\delta_y^* = y \varphi(\text{Pr}, \text{Gr}_y^*)$$

$$\Delta \theta_y^* = (j_0 y/k) \varphi(\text{Pr}, \text{Gr}_y^*)$$

$$\text{Nu}_y^* = \varphi(\text{Pr}, \text{Gr}_y^*)$$

(b) Caso límite $\text{Pr} \gg 1$

Este rango de valores implica un balance entre las fuerzas de flotación, $F_{b,T}$, y las fuerzas viscosas (fuerzas de inercia despreciables). Desde el punto de vista de la selección de las variables independientes, esta condición implica la eliminación de la densidad del fluido. La lista relevante queda, pues, de la forma $\{y, j_0, F_{b,T}, \mu, c'_e, k\}$. Los exponentes dimensionales se muestran en la Tabla 4.29.

Tabla 4.29

Exponentes dimensionales (caso límite $\text{Pr} \gg 1$)

	y	j_0	$F_{b,T}$	μ	c'_e	k
L_x			-1	1	-1	1
L_y	1	-1		-1	-1	-1
L_z		-1	-1	-1	-1	-1
Q		1			1	1
T		-1	-2	-1		-1
θ			-1		-1	-1
M			1	1		

La aplicación del teorema de π no proporciona ningún monomio, en contraposición a lo que ocurría en el caso general. ¿Significa ello que el número de Prandtl no juega ningún papel independiente en el problema? De acuerdo estrictamente con el ADD, la respuesta es sí.

Para determinar las magnitudes incógnitas de interés, v^* , δ_t , $\Delta T(y)$ y h_y , bastará con incluir sucesivamente estas y sus exponentes dimensionales en la tabla

anterior y aplicar el teorema de π . En todos los casos se obtiene un único monomio adimensional, la mayor información posible que puede alcanzarse con él ADD. Estos monomios, el orden de magnitud de las incógnitas y su expresión en función de los números adimensionales clásicos se expresan a continuación.

Para la velocidad vertical:

$$\pi_{v^*} = v^* \left(\frac{\mu j_o c_e' y^3}{k F_{b,T}^2 j_o^2 y^3} \right)^{1/5}, \quad |v^*| \sim \frac{k F_{b,T}^2 j_o^2 y^3}{\mu^2 c_e'^3}^{1/5}, \quad v^* \sim \left(\frac{\alpha}{y} \right) Ra_{*y}^{2/5}$$

Para el espesor de la capa límite térmica:

$$\pi_{\delta_t} = \delta_t \left(\frac{F_{b,T} j_o c_e'}{\mu k y} \right)^{1/5}, \quad |\delta_t| \sim \frac{\mu k^2 y}{F_{b,T} j_o c_e'}^{1/5}, \quad \delta_t \text{Ray}_{*y}^{-1/5}$$

Para la diferencia de temperaturas:

$$\Delta = \Pi_{\Delta T} \quad T_y \left(\frac{F_{b,T} j_o k^3}{\mu j_o y} \right)^{1/5}, \quad |\Delta| \sim \frac{\mu j_o^4 y}{F_{b,T} c_e' k^3}^{1/5}, \quad T_y \sim \left(\frac{j_o y}{k} \right) Ra_{*y}^{-1/5}$$

Para el coeficiente de transmisión del calor local:

$$\pi_{h_y} = \frac{h_y}{k} \left(\frac{\mu k^2 y}{F_{b,T} j_o c_e'} \right)^{1/5}, \quad |h_y| \sim k \left(\frac{F_{b,T} j_o c_e'}{\mu k^2 y} \right)^{1/5}, \quad Nu_y \sim Ra_{*y}^{1/5}$$

Estas soluciones ($Pr \gg 1$) se han expresado en función del número de Rayleigh modificado, como suele hacerse en la literatura,

$$Ra_{*y} = \frac{F_{b,T} j_o c_e' y^4}{\mu k^2} = \frac{g \beta j_o y^4}{\nu \alpha k}$$

Este número se relaciona con Gr_y^* y Pr de la forma $Ra_y^* = Gr_y^* Pr$. El número de Rayleigh modificado no juega un papel independiente en las soluciones, puesto que no es adimensional en la base discriminada, $[Ra_y^*] = L_y^5 L_x^5 y$ debe agruparse según el caso con otras variables del problema para formar verdaderos grupos adimensionales, $(\alpha/y v^*)^{5/2} Ra_y^*$, $(\delta_t/y) Ra_y^*$, $(\Delta T_y k/j_o y)^5 Ra_y^*$ y $Nu_y^{-5} Ra_y^* = (k/h_y y)^{-5} Ra_y^*$.

Como vemos, el ADD proporciona de manera explícita el orden de magnitud de todas las variables incógnitas, de modo que para obtener sus valores concretos (la constante adimensional de proporcionalidad) bastaría con realizar una única expe-

riencia en el laboratorio. La escala para hacer adimensional la longitud en dirección perpendicular a la placa es $\text{Ra}_y^{-1/5}$, mientras que la escala para la velocidad vertical es $(\alpha/y) \text{Ra}_y^{2/5}$. Todos los resultados anteriores concuerdan con los obtenidos por otros autores con diferentes métodos, Sparrow y Gregg [1956] y Bejan [1995].

Las soluciones del ADC son menos precisas:

$$v^* = (\alpha/y) \varphi(\text{Ra}_y^*)$$

$$\delta_t = y \varphi(\text{Ra}_y^*)$$

$$\Delta T_y = (j_o y/k) \varphi(\text{Ra}_y^*)$$

$$\text{Nu}_y = \varphi(\text{Ra}_y^*)$$

Caso límite $\text{Pr} \ll 1$

Supone despreciar las fuerzas viscosas frente a las de inercia y a las de flotación (metales líquidos), lo que significa eliminar de la lista de variables independientes la viscosidad, quedando esta en la forma $\langle y, j_o, F_{b,T}, \rho, c'_e, k \rangle$. Los exponentes dimensionales en la base $\{L_x, L_y, L_z, Q, T, \theta, M\}$, mostrados en la Tabla 4.30, no pueden formar ningún monomio. En consecuencia, los números adimensionales clásicos, construidos mediante combinación de variables independientes, Nu_y , Pr , Gr_y^* y Ra_y^* , no juegan un papel independiente en el problema.

Tabla 4.30 Exponentes dimensionales (caso límite $\text{Pr} \ll 1$)

	y	j_o	$F_{b,T}$	ρ	c'_e	k
L_x			-1	-1	-1	1
L_y	1	-1		-1	-1	-1
L_z		-1	-1	-1	-1	-1
Q		1			1	1
T		-1	-2			-1
θ			-1		-1	-1
M			1	1		

Para cada una de las magnitudes incógnitas, v^* , δ_t , ΔT_y y h_y , se obtiene un único monomio adimensional. Los resultados son los siguientes:

$$\pi_{v^*} \neq v^* \left(\frac{\rho^2 k c'_e}{F_{b,T}^2 j_o^2 y^3} \right)^{1/5}, \quad v^* \sim \left(\frac{\alpha}{y} \right) \text{Bo}_{*y}^{2/5}$$

$$\pi_{\delta_t} \neq \delta_t \left(\frac{F_{b,T} j_o c'_e^2}{\rho k^3 y} \right)^{1/5}, \quad \delta_t \sim y \text{Bo}_{*y}^{-1/5}$$

$$\Delta T_y = \pi_{\Delta T_y} T_y \left(\frac{F_{b,T} c'_e^2 k^2}{\rho j_o^4 y} \right)^{1/5}, \quad T_y \sim \left(\frac{j_o y}{k} \right) \text{Bo}_{*y}^{-1/5}$$

$$\pi_{h_y} = \frac{h_y}{k} \left(\frac{\rho k^3 y}{F_{b,T} j_b c_e'^2} \right)^{1/5} \sim k \left(\frac{F_{b,T} j_b c_e'^2}{\rho k^3 y} \right)^{1/5}, \quad Nu_y \sim Bo_{*y}^{1/5}$$

Las últimas ecuaciones se han expresado en función del número adimensional clásico llamado Boussinesq modificado,

$$Bo_{*y} = \frac{F_{b,T} j_b c_e'^2 y^4}{\rho k^3} = \frac{g \beta j_b y^4}{\alpha^2 k}$$

relacionado con los otros números de la forma

$$Bo_y^* = Ra_y^* Pr = Gr_y^* Pr^2$$

Las soluciones del ADD son formalmente idénticas a las obtenidas por Sparrow y Gregg [1956], y Bejan [1995]. Las escalas de longitud en dirección perpendicular a la placa, de velocidad vertical y de diferencia de temperaturas son $y Bo_{*y}^{-1/5}$, $(\alpha/y) Bo_{*y}^{2/5}$ y y/k , respectivamente. En la Tabla 4.31 se resume los resultados del ADD y del ADC para facilitar su comparación. En la parte ADD de esta tabla se pone de manifiesto que en los casos límite $Pr \gg 1$ y $Pr \ll 1$, los números clásicos de Ra_y^* y Bo_y^* , respectivamente, aparecen combinados con ciertas magnitudes caracterizan el problema, mientras que en el caso general es Pr el que juega un papel independiente.

Tabla 4.31

Resumen de las soluciones del ADD y ADC y conexión con los números adimensionales clásicos

ADD		
$Pr \gg 1$	Ca_{general}	$Pr \ll 1$
$v^* \sim (\alpha/y) Ra_{*y}^{2/5}$	$v^* = (\nu/y) Gr_{*y}^{2/5} \varphi(Pr)$	$v^* \sim (\alpha/y) Bo_{*y}^{2/5}$
$\delta_t \sim y Ra_{*y}^{-1/4}$	$\delta_t = y Gr_{*y}^{-1/5} \varphi(Pr)$	$\delta_t \sim y Bo_{*y}^{-1/5}$
$\Delta T_y \sim (j_0 y/k) Ra_{*y}^{-1/5}$	$\Delta T_y = (j_0 y/k) Gr_{*y}^{-1/5} \varphi(Pr)$	$\Delta T_y \sim (j_0 y/k) Bo_{*y}^{-1/5}$
$h_y \sim (k/y) Ra_{*y}^{1/5}$	$h_y = (k/y) Gr_{*y}^{1/5} \varphi(Pr)$	$h_y \sim (k/y) Bo_{*y}^{1/5}$
$Nu_y \sim Ra_{*y}^{1/5}$	$Nu_y = Gr_{*y}^{1/5} \varphi(Pr)$	$Nu_y \sim Bo_{*y}^{1/5}$

ADC		
$Pr \gg 1$	Ca_{general}	$Pr \ll 1$
$v^* = (\alpha/L) \varphi(Ra_y^*)$	$v^* = (\nu/y) \varphi(Pr, Gr_y^*)$	$v^* = (\alpha/y) \varphi(Bo_y^*)$
$\Delta T_y = (j_0 y/k) \varphi(Ra_y^*)$	$\delta_t = y \varphi(Pr, Gr_y^*)$	$\Delta T_y \sim (j_0 y/k) \varphi(Bo_y^*)$
$\delta_t = y \varphi(Ra_y^*)$	$\Delta T_y = (j_0 y/k) \varphi(Pr, Gr_y^*)$	$\delta_t \sim y \varphi(Bo_y^*)$
$Nu_L = \varphi(Ra_y^*)$	$Nu_y = \varphi(Pr, Gr_y^*)$	$Nu_y = \varphi(Bo_y^*)$

Ejemplo 4.11 Convección combinada en una capa límite laminar a lo largo de una placa vertical isoterma

La convección combinada tiene lugar cuando el calor transmitido por convección forzada y el transmitido por convección libre son comparables

entre sí. Consideraremos una placa vertical isoterma de longitud L , en el seno de un fluido que circula en dirección vertical hacia arriba con velocidad v_0 , Figura 4.12. La temperatura del fluido no perturbado y la de la placa son, respectivamente, T_f y T_0 , con $T_0 > T_f$ (fluido calentándose). Las propiedades del fluido, densidad, ρ , calor específico por unidad de volumen, $c'_e = \rho c_e$, viscosidad, μ , y conductividad térmica, k , son constantes. El flujo es estacionario y laminar, y la disipación viscosa es despreciable. Las fuerzas de flotación por unidad de volumen de fluido y de incremento de temperatura se definen de la forma $F_v = \rho g \beta$, con β el coeficiente de dilatación del fluido. Se ha de determinar el espesor de la capa límite, δ_p , y el coeficiente de transferencia de calor, h .

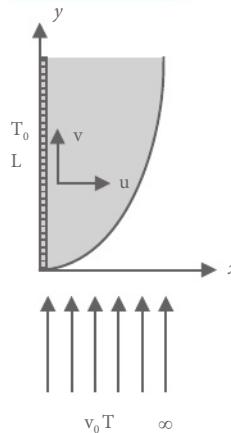


Figura 4.12 Capa límite a lo largo de una placa vertical bajo convección combinada

(a) Caso general

El problema se encuadra en los procesos de transmisión del calor con efectos mecánicos, sin disipación de energía mecánica en calorífica, caso en el que la base dimensional adecuada con discriminación es $\{L_x, L_y, L_z, Q, T, \theta, M\}$. Dado que en el caso general las fuerzas de flotación, de inercia y viscosas son comparables, las listas de variables relevantes son $\langle L, \Delta T, v_0, F_{b,T}, \rho, \mu, c'_e, k, \delta_p \rangle$ para el espesor de la capa límite térmica y $\langle L, \Delta T, v_0, F_{b,T}, \rho, \mu, c'_e, k, h \rangle$ para el coeficiente de transmisión del calor. Los exponentes dimensionales de estas variables se muestran en la Tabla 4.32.

Tabla 4.32 Exponentes dimensionales

	L	ΔT	v_o	$F_{b,T}$	ρ	μ	c'_e	k	h	δ_t
L_x				-1	-1	1	-1	1		1
L_y	1		1		-1	-1	-1	-1	-1	
L^z				-1	-1	-1	-1	-1	-1	
Q							1	1	1	
T			-1	-2		-1		-1	-1	
θ		1		-1			-1	-1	-1	
M				1	1	1				

Como el número de magnitudes que intervienen es 9 y la característica de la matriz formada por los exponentes dimensionales es 6, pueden formarse tres monomios adimensionales independientes para la solución de δ_t :

$$\begin{aligned}\pi_{\delta_t,1} &= \delta_t \left(\frac{\rho F_{b,T} \Delta T}{\mu^2 L} \right)^{1/4} = \delta_t \frac{g \beta \Delta T L}{v^2} \\ \pi_{\delta_t,2} &= \frac{F_{b,T} \Delta T L}{\rho v_o^2} = \frac{g \beta \Delta T L}{v_o^2} \\ \pi_{\delta_t,3} &= \frac{\mu c'_e}{\rho k} = \frac{v}{\alpha}\end{aligned}$$

siendo la solución

$$\delta_t = \left(\frac{v^2 L}{g \beta \Delta T} \right)^{1/4} \varphi \left(\frac{g \beta \Delta T L}{v_o^2}, \frac{v}{\alpha} \right)$$

En función de los números clásicos, puede expresarse en la forma

$$\delta_t = L \text{Gr}_L^{-1/4} \varphi \left(\frac{\text{Gr}_L}{\text{Re}_L^2}, \text{Pr} \right)$$

Para el coeficiente de transferencia de calor, los monomios son

$$\begin{aligned}\pi_{h,1} &= h \left(\frac{\mu^2 L}{\rho F_{b,T} \Delta T k^4} \right)^{1/4} = h \frac{v^2 L}{g \beta \Delta T k^4} \\ \pi_{h,2} &= \frac{F_{b,T} \Delta T L}{\rho v_o^2} = \frac{g \beta \Delta T L}{v_o^2} \\ \pi_{h,3} &= \frac{\mu c'_e}{\rho k} = \frac{v}{\alpha}\end{aligned}$$

que conducen a la solución:

$$h = k \left(\frac{g\beta\Delta T}{v^2 L} \right)^{1/4} \varphi_1 \left(\frac{g\beta\Delta TL}{v_o^2}, \frac{\nu}{\alpha} \right)$$

con φ_1 , una función desconocida de los monomios adimensionales. $g\beta(\Delta T)L/v_o^2$

y v/α . En función de los números adimensionales clásicos, la solución puede expresarse en las formas

$$Nu_c = Gr_L^{1/4} \varphi_1 \left(\frac{Gr_L}{Re_L^2}, Pr \right), \quad Nu_c = Re_L^{1/2} \varphi_1 \left(\frac{Gr_L}{Re_L^2}, Pr \right)$$

Las soluciones que suministra el ADC en la base $\{L, Q, T, \theta, M\}$, menos precisas, pueden escribirse de las formas

$$Nu_c = \varphi_{1ADC}(Gr_L, (Gr_L/Re_L^2)Pr)$$

$$Nu_f = \varphi_{2ADC}(Re_L, (Gr_L/Re_L^2)Pr)$$

Es de prever que la solución hallada para la convección combinada se aproxime a las correspondientes de convección forzada pura y de convección libre pura en los casos límite; de acuerdo con los ejemplos 4.3 y 4.10, estas soluciones eran, respectivamente

$$Nu_{L,f} = Re_L^{1/2} \phi_2(Pr)$$

$$Nu_{L,n} = Gr_L^{1/4} \phi_1(Pr)$$

donde las funciones $\phi_1(Pr)$ y $\phi_2(Pr)$ son del mismo orden de magnitud (unidad), como se demuestra atendiendo al significado físico de los monomios $Nu_f Re_L^{-1/2}$ y $Nu_n Gr_L^{-1/4}$ (Capítulo 5) para los casos de convección libre y combinada por separado; Chen y col. [1986], justifican también tal afirmación. De esta forma, las funciones ϕ_1 y ϕ_2 deberán estar relacionadas con las funciones ϕ_1 y ϕ_2 .

Con todo, la influencia relativa de uno u otro tipo de convección la da el monomio

$$(Gr_L/Re_L^2)$$

denominado parámetro de flotación, que en convección combinada es del orden de la unidad. Este parámetro, adimensional con discriminación, se puede escribir en la forma

$$\frac{Gr_L}{Re_L^2} = \frac{g\beta\Delta TL}{v_o^2} = \frac{\rho g\beta\Delta T}{\rho v_o^2/L} \sim \frac{\text{fuerzas de flotación}}{\text{fuerzas de inercia}}$$

donde el significado deducido marca claramente su papel en la convección combinada. Si $Gr_L/Re_L^2 \gg 1$ ($\rho \gg 1$) son las fuerzas de flotación (olas de inercia) predominantes, el parámetro de flotación (en ambos casos) no interviene en la solución, la cual converge a la de convección libre pura (o forzada pura).

Caso límite $Pr \ll 1, \delta_t \gg \delta_v$

Se consideran despreciables las fuerzas viscosas frente a las de flotación e inercia. Eliminando la viscosidad de la lista de variables se obtienen los monomios independientes siguientes:

$$\begin{aligned}\pi_{\delta_t,1} &= \delta_t \left(\frac{F_{b,T} \Delta T c'^2}{k^2 L^e} \right)^{1/4} = \delta_t \left(\frac{g \beta \Delta T}{\alpha^2 L} \right)^{1/4} \\ \pi_{h,1} &= h \left(\frac{\rho L}{F_{b,T} \Delta T k^2 c_e'^2} \right)^{1/4} = h \left(\frac{L}{g \beta \Delta T k^2 c_e'^2} \right)^{1/4} \\ \Pi_{h,2} &= \frac{F_{b,T} \Delta T L}{\rho v_o^2} \quad \frac{g \beta \Delta T L}{v_o^2}\end{aligned}$$

con lo que la solución para δ_t es

$$\delta_t = \left(\frac{\alpha^2 L}{g \beta \Delta T} \right)^{1/4} \phi \left(\frac{g \beta \Delta T L}{v_o^2} \right)$$

y para h ,

$$h = \left(\frac{g \beta \Delta T k^2 c_e'^2}{L} \right)^{1/4} \phi \left(\frac{g \beta \Delta T L}{v_o^2} \right)$$

que en función de los números adimensionales clásicos pueden escribirse en las formas

$$\delta_t = L \Phi_{L,c}^{-1/4} \left(\frac{Gr_L}{Re_L^2} \right)^{1/4}, \text{ bien } \quad t = \left(\frac{Pe}{L} \right)^{-1/2} \left(\frac{Gr_L}{Re_L^2} \right)$$

$$Nu_{L,c} = Bo_L^{1/4} \phi_3 \left(\frac{Gr_L}{Re_L^2} \right)^{1/4}, \text{ bien } \quad Nu = \left(\frac{Pe}{L} \right)^{1/2} \phi_4 \left(\frac{Gr_L}{Re_L^2} \right)$$

Solu^cs que convergen a las correspondientes de convección forzada pura ($Gr_L \gg 1, Re_L^2 \gg 1$), donde este monomio no juega un papel independiente en la solución,

$$(\delta_t/L)_n \sim \boxed{Bo_L^{-1/4}}$$

$$(\delta_t/L)_f \sim \boxed{Pe_L^{-1/2}}$$

$$Nu_{L,n} \sim \boxed{Bo_L^{1/4}}$$

$$Nu_{L,f} \sim \boxed{Pe_L^{1/2}}$$

Caso límite $Pr \gg 1, \delta_t \ll \delta_v$

Se consideran despreciables las fuerzas de inercia frente a las de flotación y visco-sas. Eliminando la densidad de la lista de variables se obtienen los monomios independientes siguientes:

$$\begin{aligned}\pi_{\delta t,1} &= \delta t \left(\frac{F_{b,T} \Delta T c'_e}{\mu k L} \right)^{1/4} = \delta t \left(\frac{g \beta \Delta T}{\nu \alpha L} \right)^{1/4} \\ \pi_{h,1} &= h \left(\frac{\mu L}{F_{b,T} \Delta T k^3 c'_e} \right)^{1/4} = h \left(\frac{\nu L}{g \beta \Delta T k c'_e} \right)^{1/4} \\ \Pi_{h,2} &= \delta t^{1/2} \frac{F_{b,T} \Delta T k L}{\mu c'_e v^{*2}} \frac{g \beta \Delta T \alpha L}{\nu v^{*2}}\end{aligned}$$

donde v^* tiene el significado dado en el problema de convección forzada (Ejemplo 4.3). La solución para δ_t es

$$\begin{aligned}\delta_t &= \left(\frac{\nu \alpha L}{g \beta \Delta T} \right)^{1/4} \phi \left(\frac{g \beta \Delta T \alpha L}{\nu v^{*2}} \right) \\ \text{y para } h &= \left(\frac{g \beta \Delta T k c'_e}{\nu L} \right)^{1/4} \phi \left(\frac{g \beta \Delta T \alpha L}{\nu v^{*2}} \right)\end{aligned}$$

que, en función de los números adimensionales clásicos, pueden escribirse en las formas

$$\begin{aligned}\delta_t &= L \frac{Ra_L^{-1/4}}{Pe_L^2} , \text{ bien } \quad \delta_t \sim Pe_L^{-1/2} \frac{Ra_L}{Pe_L^2} \\ Nu_{L,c} &= Ra_L^{1/4} \phi \left(\frac{Ra_L}{Pe_L^2} \right), \text{ bien } \quad Nu_L \sim Pe_L^{1/2} \phi \left(\frac{Ra_L}{Pe_L^2} \right)\end{aligned}$$

Soluciones que convergen a las correspondientes de convección forzada pura, $Ra_L/Pe_L^2 \gg 1$ (velocidades altas), o libre pura $Gr_L/Re_L^2 \gg 1$ (velocidades pequeñas), donde este monomio no juega un papel independiente en la solución:

$$(\delta_t/L)_n \sim Ra_L^{-1/4}$$

$$(\delta_t/L)_f \sim Pe_L^{-1/2}$$

$$Nu_{L,n} \sim Ra_L^{1/4}$$

$$Nu_{L,f} \sim Pe_L^{1/2}$$

Esta página se ha dejado intencionadamente en blanco

Los números adimensionales en el análisis dimensional discriminado. Su significado físico como balance de magnitudes

5.1 Introducción

Llegados a este punto, hemos decidido aislar este capítulo, que sin embargo no es más que una extensión de los resultados de los problemas ya estudiados en los capítulos 3 y 4, y un análisis del tema. Con ello, solo pretendemos dar la importancia merecida al carácter de los monomios adimensionales en cuanto a su significado físico; carácter del que carecen, en general, los monomios deducidos del ADD.

Es usual, tanto en la mecánica de fluidos como en la transmisión de calor, sentirse atraídos por la labor de presentar las soluciones en función de los números adimensionales con objeto de hacerlas más compactas o universales y para facilitar su representación gráfica.

Muchos de los libros de texto que estudian explícitamente estos campos de la ingeniería asocian un significado físico a los números adimensionales clásicos, Fo , Bi , Re , Eu , Pr , Nu , Fr , Ra , Gr , Bo ... en términos de balances de fuerzas o energías. Entre ellos están Gröber y Erk [1933], Arpaci y Larsen [1984], Thomas [1992], Incropera y DeWitt [1996], Kreith y Bohn [1997] y Kessler y Grennkorn [1999]. Otros textos son más precavidos en este sentido e incluso evitan hacer referencias a cualquier tipo de balance, Bejan [1984] y Kays y Crawford [1999]. Este es, sin duda, un tema controvertido cuyo origen está en el uso habitual de estos números clásicos para establecer las soluciones de los problemas en forma de correlaciones empíricas.

Pero ¿qué sucede con los monomios deducidos por ADD?, ¿tienen un claro significado físico? Como veremos en este capítulo, hasta donde hemos investigado en los problemas de los capítulos precedentes 4 y 5, los monomios deducidos por el ADD tienen en general un significado físico de balances, o potencias de balances, entre pares de fuerzas o pares de energías. Si la expresión adoptada para

el monomio, de entre las posibles, es directamente un balance de fuerzas (o energías), la respuesta a la pregunta anterior es rotundamente sí. En este caso, una consecuencia es que el valor de su orden de magnitud es la unidad. Pero lo mismo ocurre si la expresión adoptada para el monomio es una potencia (por ejemplo, el cuadrado) de un balance de fuerzas, su orden de magnitud es también la unidad.

Por lo tanto, si en un problema solo se forma un monomio ADD, es obvio que las fuerzas o energías balanceadas en el mismo son del mismo orden de magnitud. Si se forman dos o más monomios y se expresan todos también como balances de potencias unidad, la función indeterminada que aparece en la solución, con independencia del monomio que despeje, es también del orden de la unidad.

Sin embargo, los monomios adimensionales que se obtienen al aplicar el teorema de π a un problema pueden expresarse alternativamente; a veces, mediante manipulaciones matemáticas, en forma de relaciones de otras magnitudes (velocidad, longitud, tiempo, etc.) asociadas a fenómenos o leyes distintas, o relaciones tales como el balance entre el momento de fuerzas y el cambio de momento lineal o entre el trabajo de las fuerzas aplicadas y el cambio de la energía cinética del cuerpo.

Siempre en relación con los significados de balance de fuerzas o energías atribuidos a los monomios de ADD, suele ocurrir que los dominios en los que se aplican las fuerzas (o energías) balanceadas no son los mismos; por lo que el significado real del monomio es puramente geométrico y su orden de magnitud no es la unidad, sino el cociente de las magnitudes espaciales que definen el dominio o, a veces, cuando el problema contiene más de un factor de forma, relaciones geométricas más complejas. La conexión entre los números adimensionales clásicos (Re_{ADC} , Nu_{ADC} , Ra_{ADC} , Gr_{ADC} , C_{fADC} , etc.) y los discriminados (Re_{ADD} , Nu_{ADD} , Ra_{ADD} , Gr_{ADD} , etc.) permite también interpretar los primeros en términos de las variables del problema.

No obstante, en geometrías particulares (coordenadas cilíndricas con flujos externos y problemas de discos o esferas) donde se da una proporcionalidad numérica de orden de magnitud unidad entre las diferentes variables geométricas

(arco y radio, por ejemplo), ciertos números clásicos como Re y Nu tienen efectivamente el significado físico de balances de fuerzas o energías en la región de capa límite, y son del orden de magnitud la unidad. En estos casos se trata de monomios que también son adimensionales con discriminación. Veremos en este capítulo que estas coincidencias de significado quedan debidamente justificadas en cada caso.

Los problemas estudiados en los capítulos anteriores permiten justificar las deducciones y conclusiones expuestas. Por ejemplo, el número de Re clásico puede significar tanto una relación entre longitudes, cuando no es realmente dimensional, como un balance de fuerzas cuando es realmente un número adi-

mensional discriminado. En el primer caso, el orden de magnitud no es la unidad, mientras que en el segundo caso sí lo es.

En el ADD, cuando en un problema en la lista relevante no se introducen variables geométricas locales y sí variables globales que delimitan el dominio, porque lo que se quiere obtener es una solución global, los monomios adimensionales que surgen tienen un significado físico dentro del dominio. Lo mismo ocurre si se introducen en la lista variables locales; en este caso, se obtienen balances locales. La mezcla de variables geométricas locales (coordenadas de posición, velocidades locales...) y globales (procedentes de la geometría del objeto o de las condiciones de contorno) debe hacerse con cuidado y solo cuando ambas sean necesarias en la lista relevante. Dichas magnitudes dan sentido siempre a la formación de variables adimensionales (posición, velocidad...).

La naturaleza conjugada de algunos de los problemas de calor puede que no permita asociar significados sencillos de balance a los monomios adimensionales discriminados, y mucho menos a los clásicos. Así, es posible que surjan complicadas relaciones de balance para algunos de ellos, como se verá más adelante. Lo propio en cada problema es usar, de entre las posibles combinaciones entre ellos, aquellos cuyo significado físico sea el más sencillo. En la práctica, esto signifi-

ficaría establecer nuevas correlaciones empíricas para cada problema; lo que chocaría frontalmente con las correlaciones habituales usadas extensamente en la literatura y aceptadas por toda la comunidad científica.

Una aclaración especial merece la magnitud presión, ya que su valor, en equilibrio, es numéricamente igual en cualquier dirección, pero no su ecuación de dimensiones. Así, no es posible obtener monomios adimensionales con discriminación cuyo significado sea el balance de presiones asociadas a diferentes direcciones. En este tipo de problemas se procederá calculando por separado la presión para cada dirección espacial (ver ejemplos 3.1 a 3.4 del Capítulo 3).

La estructura del capítulo sigue la discusión del significado de los números adimensionales para cada problema estudiado en los capítulos 3 y 4 (en el orden establecido en los mismos). Por su carácter básico y con objeto de aclarar muchas ideas en relación con el significado físico de los números adimensionales, se dedica un epígrafe especial al número de Reynolds.

5.2 Un controvertido ejemplo: el número de Reynolds

Como es sabido, el número de Reynolds, Re , se viene usando en la literatura científica y en los libros de texto desde hace décadas (Knudsen y Katz [1958], Schlichting [1965], Incropera y De Witt [1996] y Kreth y Bohn [1997]) para caracterizar los fluidos. Valores bajos de este número se asocian a flujos laminares,

mientras que valores altos lo hacen a regímenes turbulentos. La expresión general clásica Re es

$$\text{Re}_l^* = \frac{\rho v^* l^*}{\mu} = \frac{v^* l^*}{\nu}$$

* * *

donde v^* y l^* son una velocidad y una longitud característica del problema. Fue precisamente el mismo Osborne Reynolds [1893] quien estableció, a finales del siglo XIX, este grupo adimensional para distinguir el tipo de flujo (laminar o turbulento) en un conducto cerrado. Más tarde, este número fue aplicado a otros tipos de flujo que contienen objetos completamente sumergidos en el fluido. Sin embargo, los razonamientos de Reynolds para deducir su número no se hicieron en base al análisis dimensional, sino a la búsqueda de una expresión para balancear las fuerzas existentes en el problema (inercia y viscosas). Este es un razonamiento absolutamente correcto siempre que las longitudes para las que se evalúan estas fuerzas sean las adecuadas; esto es, siempre que definan la región donde rigen las fuerzas. Como consecuencia de las investigaciones de Reynolds, muchos textos (ver Tabla 1.8) confieren a Re el significado de “fuerzas de inercia/fuerzas viscosas”, argumentando que el orden de magnitud de estas fuerzas por

unidad de volumen es $\rho v^* l^*/l^*$ y $\mu v^* /l^*$, respectivamente. Como veremos de inmediato, la elección inadecuada de longitudes no asigna a Re este significado físico (Madrid y Alhama [2005]).

El hecho de que, como era de esperar, Re fuera un número adimensional en la teoría del ADC validó, quizás, a los ojos de la comunidad científica de la época las conclusiones de Reynolds. Schlichting [1965], por ejemplo, deduce Re por razonamientos puramente dimensionales (ADC).

De acuerdo con el tipo de flujo, Figura 5.1, el número de Reynolds se define, en general, en la forma:

$$\text{Placa plana: } \text{Re}_L = \rho v_\infty L / \mu$$

$$\text{Flujo externo en tubos: } \text{Re}_D = \rho v_\infty D / \mu$$

$$\text{Flujo interno en conductos largos: } \text{Re}_D = \rho v_\infty D / \mu$$

El sufijo L o D se refiere a la longitud característica adoptada (l^*) para la definición de Re, y v_∞ es la velocidad del fluido en la región no perturbada. Dado que solo existe una longitud real en el problema, en cada geometría, razonamientos clásicos de tipo adimensional, como el de Schlichting para la placa plana, conducen a las expresiones anteriores para las otras dos geometrías.

Procedamos ahora mediante el análisis dimensional discriminado. Para aplicar el ADD usaremos la base $\{L_r, L_s, L_z, M, T\}$ en todas las geometrías de la Figura 5.1. L_s denota la dirección de la velocidad del fluido, L_r es la dirección normal a los planos de deslizamiento del fluido y L_z es la tercera coordenada perpendicular a las dos

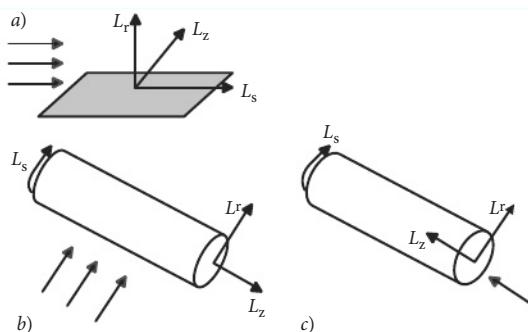


Figura 5.1 Tipos de flujo: a) placa plana, b) flujo externo en tuberías, c) flujo interno en tubos

anteriores. La lista relevante de variables independientes y sus ecuaciones dimensionales en la base anterior son

Placa plana, $\langle L, v_\infty, \rho, \mu \rangle$:

- L longitud de la placa (en la dirección de la velocidad del fluido)
- v velocidad del fluido lejos de la placa
- ρ densidad del fluido (fuerzas de inercia)
- μ viscosidad dinámica del fluido (fuerzas viscosas)

$$[L] = L_s$$

$$[v_\infty] = L_s T^{-1}$$

$$[\rho] = M L_s^{-1} L_r^{-1} L_z^{-1}$$

$$[\mu] = M L_r L_s^{-1} L_z^{-1} T^{-1}$$

Flujo externo en tubos circulares, $\langle s, R, v_\infty, \rho, \mu \rangle$:

- s longitud del arco que define el perímetro de mojado
- v_∞ velocidad del fluido lejos del tubo
- ρ densidad del fluido (fuerzas de inercia)
- μ viscosidad dinámica del fluido (fuerzas viscosas)

$$[s] = L_s$$

$$[v_\infty] = L_s T^{-1}$$

$$[\rho] = M L_r^{-1} L_s^{-1} L_z^{-1}$$

$$[\mu] = M L_r L_s^{-1} L_z^{-1} T^{-1}$$

El diámetro del tubo, D , influye en las fuerzas de inercia del fluido fuera de la capa límite, fuerzas que se contrarrestan con las de sujeción del tubo. Pero D no ha de considerarse en la lista de variables relevantes que influyen en los fenómenos de capa límite.

Flujo interno en conductos largos, $\langle D, v_\infty, \rho, \mu \rangle$:

D diámetro del tubo (define la longitud transversal del dominio en donde se han de establecer los balances de fuerzas)

v_∞ velocidad no perturbada del fluido

ρ densidad del fluido (fuerzas de inercia)

μ viscosidad dinámica del fluido (fuerzas viscosas)

$$[D] = L_r$$

$$[v_\infty] = L_s T^{-1}$$

$$[\rho] = M L_r^{-1} L_s^{-1} L_z^{-1}$$

$$[\mu] = M L_r L_s^{-1} L_z^{-1} T^{-1}$$

En relación con el flujo externo en tubos es preciso aclarar por qué se introduce s y no el diámetro del tubo y, a su vez, se elimina dicho diámetro. Ningún libro, hasta donde sabemos, procedería de este modo al aplicar el análisis dimensional a este problema. Pero, como hemos dicho en el Capítulo 1, para aplicar correctamente el análisis dimensional es preciso comprender a fondo los fenómenos físicos que tienen lugar en el problema, en particular si se trata de fenómenos complejos o simultáneos. Este es el caso del presente problema. En primer lugar se dan fenómenos de inercia asociados al diámetro del tubo; el fluido en la región cercana al tubo ha de esquivarlo cambiando su velocidad. Estas fuerzas de inercia, que pueden ser importantes, empujan al tubo (junto con las fuerzas viscosas que se producen en la capa límite) en la dirección de la velocidad no perturbada del fluido, y son compensadas por los elementos de sujeción del mismo. Este aspecto del problema no se estudia. En segundo lugar, ocurren fenómenos de capa límite en el perímetro del tubo. En esta región (de capa límite) otras fuerzas de inercia se balancean con las fuerzas viscosas, balance para el cual el diámetro del tubo no tiene una influencia (al menos directa) y sí el perímetro que define esta capa límite.

Los dominios espaciales en donde se establecen los balances no quedan completamente definidos por las longitudes que, en cada caso, aparecen en las listas relevantes de variables. Estos dominios (2-D) necesitan otra longitud para ser especificados (en el sentido L_r para la placa plana y el flujo externo en tubos, y en el sentido L_s para el flujo interno). La Tabla 5.1 muestra los exponentes dimensionales de las variables anteriores para cada geometría.

(a) Placa plana

La aplicación del teorema de π al cuadro de exponentes no proporciona ningún monomio adimensional. Sin embargo, es posible obtener un monomio si se

Tabla 5.1 Exponentes dimensionales de las variables independientes

a) Placa plana				
	L	v_∞	ρ	μ
L_r			-1	1
L_s	1	1	-1	-1
L_z			-1	-1
M			1	1
T		-1		-1
b) Flujo externo en tubos				
	s	v_∞	ρ	μ
L_r			-1	1
L_s	1	1	-1	-1
L_z			-1	-1
M			1	1
T		-1		-1
c) Flujo interno en conductos				
	D	V_∞	ρ	μ
L_r	1		-1	1
L_s		1	-1	-1
L_z			-1	-1
M			1	1
T		-1		-1

busca una longitud oculta del problema δ de dimensión $[\delta] = L^r$, que defina la región en donde se aplica el balance de fuerzas. Este monomio es

$$\pi = \frac{\rho v_\infty \delta^2}{\mu L}$$

Hacemos notar que el teorema de π proporciona como solución, además de la anterior, cualquiera de entre todas las potencias de dicho monomio, pero se ha elegido esta concreta para darle una interpretación directa como veremos de inmediato.

El orden de magnitud de δ es

$$\delta \sim \left(\frac{\mu L}{\rho v_\infty} \right)^{1/2}$$

En términos del número de Reynolds clásico, $\delta \sim L (Re_L)^{-1/2}$.

Puede deducirse una relación entre el monomio y un balance de fuerzas en la región de capa límite. En efecto,

$$\frac{F_i}{F_v} \sim \frac{\rho v_\infty^2 / L}{\mu v_\infty / \delta^2} \Pi = Re_{ADD}^{-1}$$

un número de Re adimensional discriminado con un claro significado físico de balance de fuerzas.

Así, el ADD no conduce a Re_L , pero sí a un nuevo número, Re_{DDA} , cuya relación con el Re clásico es

$$Re_{ADD} = \left(\frac{\delta}{L} \right)^2 \left(\frac{\rho v_\infty L}{\mu} \right) = \frac{\delta^2}{L} Re_L$$

Notemos dudas de que la introducción de en la lista de variables no es en absoluto una idea tonta. La existencia de las fuerzas viscosa y de inercia, que han de ser forzosamente balanceadas, requiere una región o un dominio en la que se aplique dicho balance. De ahí, la necesidad de una longitud en la dirección. Por otro lado, la combinación de las variables (L, v_∞, ρ, μ) en un problema no es posible sin la existencia de la magnitud oculta; la razón es que para relacionar órdenes de magnitud de fuerzas de inercia y viscosas se necesita de la definición de un dominio. En este sentido, análisis dimensional discriminado, balance "formal" de magnitudes en un dominio, definición del modelo matemático y posterior adimensionalización del mismo, son procedimientos que conducen a un mismo resultado: la búsqueda de los grupos adimensionales en función de los cuales pueda expresarse la solución desconocida. Esta es una reflexión que ahora adelantamos y que, a modo de síntesis del trabajo presentado en el libro, se expone a final del texto (Capítulo 7).

para este número es inmediata. Asociar al número Re_L un significado físico en términos de la geometría del dominio, Bejan [1984], el cuadrado de la esbeltez de la región de capa límite, de valor muy superior a la unidad:

$$Re_L \sim \left(\frac{L}{\delta} \right)^2 \gg 1$$

y su ecuación dimensional para esta geometría es

$$[Re_L] = L_s^2 L_r^{-2}$$

(b) Flujo externo un tubos circulares

Igual que en el caso anterior, con las variables de la tabla, el ADD no proporciona ningún monomio. Al introducir la magnitud oculta, δ , de dimensión $[\delta] = L_r$, para confinar la región de capa límite, se obtiene un monomio que, convenientemente elegido, se expresa del modo

$$\pi = \frac{\rho v_\infty \delta^2}{\mu s}$$

Este monomio informa del orden de magnitud de δ

$$\delta \sim \left(\frac{\mu s}{\rho v_\infty} \right)^{1/2}$$

En términos del hipotético número de Reynolds (ADC) asociado al perímetro s , $Re_s = \rho v_\infty s / \mu$,

$$\delta \sim s (Re_s)^{-1/2}$$

Como en el caso anterior, el monomio formado es una especie de número de Reynolds con discriminación, Re_{ADD} , con un significado físico inequívoco y que desempeña una función como argumento independiente en la solución del problema:

$$Re_{ADD} = \left(\frac{\delta}{s} \right)^2 \left(\frac{\rho v_\infty s}{\mu} \right) = \frac{\delta^2}{s} Re_s$$

Escribiendo este monomio en la forma

$$Re_{ADD} \sim \frac{\rho v_\infty^2 / s}{\mu v_\infty / \delta^2}$$

vemos que representa el cociente entre fuerzas de inercia y viscosas.

La interpretación de Re_s , de orden de magnitud muy superior a la unidad, es la misma que en el caso de la placa plana, el cuadrado de la esbeltez de la región

de capa límite,

$$Re_s \sim \left(\frac{s}{\delta} \right)^2 \gg 1$$

y sus dimensiones para esta geometría

$$[Re_L] = L_s^2 L_r^{-2}$$

Cociente de longitudes físicamente equivalentes al del caso placa plana.

En los textos y en la literatura científica el número adimensional clásico, usado para este tipo de flujo y geometría, Re_D , es un Reynolds asociado al diáme-

tro del tubo. Dada la proporcionalidad numérica entre las variables arco y radio, ambos números (Re_s y Re_D) son del mismo orden de magnitud.

(c) Flujo interno en tubos

La longitud axial del tubo, L , no es relevante (a menos que se trate de tubos cortos). La Tabla 5.1c no proporciona ningún monomio. La introducción de una longitud característica axial, l^* de dimensión $[l^*] = L_z$, como variable oculta que caracterice la región del tubo en el que se producen los balances de las fuerzas viscosas y de inercia asociados a las constantes físicas μ y ρ , respectivamente, permite formar el monomio, que convenientemente se expresa en la forma

$$\pi = \frac{\rho v_\infty D^2}{\mu l^*}$$

proporciona el orden de magnitud de l^*

$$l^* \sim \frac{\rho v_\infty D^2}{\mu}$$

El espesor de esta capa es, obviamente, el radio del tubo, R . El monomio $\pi D^{2/3}(l^*)$ tiene el aspecto de un número de Reynolds adimensional discriminado para esta geometría, Re_{ADD} . Su relación con el clásico, $Re_D = \rho v_\infty D / \mu$

$$Re_{ADD} = \frac{\rho v_\infty D^2}{\mu l^*} = \left(\frac{D}{l^*} \right) Re_D$$

permite asociar un significado a este último; de nuevo, la esbeltez de la capa límite, $Re_D \sim l^*/D$. Ahora, la fórmula dimensional de Re_D es $[Re_D] = L_s L_r^{-1}$. Si expresamos el monomio en la forma $Re_{ADD} = (\rho v_\infty^2 / l^*) / (\mu v_\infty / D^2)$, se trata del cociente entre las fuerzas de inercia y las viscosas.

Para flujos internos con $L < l^*$, es la longitud L la que determina la capa límite cuyo espesor es δ^* , y no R ($\delta^* < R$). La lista de variables es $\langle L, v_\infty, \rho, \mu, \delta^* \rangle$. Los exponentes dimensionales, Tabla 5.2, proporcionan el monomio cuyo aspecto vuelve a ser el de un número de Reynolds adimensional discriminado, $Re_{L(ADD)}$

$$\pi = \frac{\rho v_\infty \delta^{*2}}{\mu L} = Re_{L(ADD)}$$

que da un orden de magnitud para δ^*

$$\delta^* \sim \left(\frac{\mu L}{\rho v_\infty} \right)^{1/2}$$

Tabla 5.2 Exponentes dimensiones (flujo interno en tubos cortos)

	L	v_∞	ρ	μ	d
L_r			-1	1	1
L_s	1	1	-1	-1	
L^z			-1	-1	
M			1	1	
T		-1			-1

La conexión entre $Re_{L(ADD)}$ y el número clásico para este caso Re_D

$$Re_{L(ADD)} = \left(\frac{\delta^{*2}}{DL} \right) Re_D$$

permite asociar al último un significado físico en términos de las magnitudes geométricas que definen el dominio de la capa límite:

$$Re_D \sim \left(\frac{DL}{\delta^{*2}} \right) \gg 1$$

La fórmula dimensional de Re_D es la misma que en los casos anteriores, $L_z L_r^{-1}$, así como su significado físico, $Re_{ADD} = (\rho v_\infty^2 / L) / (\mu v_\infty / \delta^2)$, cociente entre las fuerzas de inercia y las viscosas.

En la Tabla 5.3 se muestran los órdenes de magnitud de las fuerzas viscosas y de inercia para las tres geometrías estudiadas y se resume el significado y la expresión del nuevo número de Reynolds obtenido con la discriminación, así como su relación con el Re clásico (ADC).

Tabla 5.3 El número de Reynolds en términos de balance de fuerzas

	Placa plana	Flujo transversal en tubos circulares	Flujo interno en conductos	
			$L > l^*$	$L < l^*$
Fuerzas de inercia f_i	$\rho v_\infty^2 / l^*$	$\rho v_\infty^2 / s$	$\rho v_\infty^2 / l^*$	$\rho v_\infty^2 / L$
Fuerzas viscosas f_v	$\mu v_\infty / \delta^2$	$\mu v_\infty / \delta^2$	$\mu v_\infty / D^2$	$\mu v_\infty / \delta^2$
Grupo adimensional $Re_{ADD} = f_i / f_v$	$\rho v_\infty \delta^2 / (\mu L) = Re_L (\delta^2 / L)^2$	$\rho v_\infty \delta^2 / (\mu s) = Re_s (\delta^2 / s)^2$	$\rho v_\infty D^2 / (\mu l^*) = Re_D (D / l^*)$	$\rho v_\infty \delta^2 / (\mu L) = Re_D (\delta^2 / LD)$

5.3 Los números adimensionales ADD de mecánica de fluidos

Ejemplo 5.1 Ecuación de Bernoulli

Los tres posibles monomios que pueden formarse en relación con la ecuación de Bernoulli, a lo largo de una línea de corriente, derivan de los siguientes balances:

- Fuerzas de presión a lo largo de la línea de corriente ~ Fuerzas de inercia.
- Fuerzas de presión a lo largo de la línea ~ Fuerzas gravitatorias, componentes tangenciales.
- Fuerzas gravitatorias, componentes tangenciales ~ Fuerzas de inercia.

En ausencia de gravedad, fluidos en tubos horizontales, por ejemplo, el primer balance proporciona el monomio

$$\pi_{p,\rho} = \frac{p}{\rho v^2} \quad (\text{Número de Euler})$$

utilizado frecuentemente para adimensionalizar la presión respecto a una energía cinética por unidad de volumen, característica del fluido asociada a una velocidad de referencia, v .

En ausencia de velocidad (hidrostática), las fuerzas gravitatorias se equilibran con la presión mediante el monomio

$$\pi_{pg} = \frac{p}{\rho gh}$$

Por último, para fluidos a presión constante, tubos inclinados de sección constante, por ejemplo, el monomio resultante

$$\pi_{g,\rho} = \frac{v_{\text{tangencial}}^2}{g_{\text{tangencial}} l_{\text{tangencial}}}$$

numéricamente igual a

$$\pi_{g,\rho} = \frac{v^2}{\rho g} \quad (\text{Número de Froude})$$

representa el intercambio entre energía potencial y cinética del fluido, $\rho v^2 / \rho gh$. Si se trata de un tubo curvo de la misma sección, hay que tener presente lo dicho en el Ejemplo 3.1, para salvar la anomalía adimensional del monomio anterior. Si las tres fuerzas son del mismo orden de magnitud, la solución del problema está formada por dos monomios, ambos de orden de magnitud unidad.

En relación con la dirección normal a las líneas de corriente, los posibles monomios derivan de los siguientes balances:

- Fuerzas de presión normales a la línea ~ Fuerzas gravitatorias, componentes normales.
- Fuerzas de presión normales a la línea de corriente ~ Fuerzas centrípetas.

- Fuerzas gravitatorias, componentes normales ~ Fuerzas centrípetas.
En las líneas de corriente no curvas, $\zeta = \infty$, por ejemplo, tubos inclinados de sección constante, el primer balance proporciona el monomio

$$\pi_{p,g} = \frac{p}{\rho gh}$$

que da cuenta del incremento de presión con la altura (presión hidrostática); representa un balance entre las componentes normales de las fuerzas de presión y gravitatorias.

En ausencia de gravedad, el monomio formado es

$$\pi_{p,g} = \frac{\Delta p_n}{\rho v^2 \zeta}$$

con $\Delta p_n = dp/dn$, y da cuenta de la relación entre las componentes normales de las fuerzas de presión y las de inercia (centrípetas).

Por último, en los casos de p constante, el monomio resultante es

$$\pi_{g,\rho} = \frac{g_n}{v^2/\zeta}$$

que muestra la relación entre la componente normal de las fuerzas de gravedad y las de inercia (aceleración centrípeta). Cuando las componentes normales de las fuerzas asociadas a la presión y la gravedad son del mismo orden de magnitud y las líneas de corriente son curvas, los monomios anteriores son del orden de la unidad, y la solución está formada por dos de los tres monomios.

Ejemplo 5.2 Flujo de un líquido no viscoso por vertederos de sección triangular y rectangular

El monomio deducido para el flujo

$$\frac{\Delta p S^2}{\rho \dot{V}^2}$$

teniendo en cuenta que $\dot{V}^2 = v_o^2 S^2$, siendo v_o la velocidad de salida por el vertedero, puede escribirse en la forma $\Delta p / \rho v_o^2$, que representa un balance entre las fuerzas de presión y las fuerzas de inercia, conocido como número de Euler.

Ejemplo 5.3 Equilibrio dinámico de un fluido en rotación y de un fluido acelerado

Para el fluido en rotación, la solución $z \sim \omega^2 r^2/g$, escrita en la forma

$$\pi = \frac{\omega^2 r^2}{gz} = \frac{\rho \omega^2 r^2}{\rho g z}$$

tiene el significado indirecto del cociente “presión asociada a la fuerza centrípeta”/“presión hidrostática”, si bien es un monomio dimensional en el ADD, ya que se ha obtenido de igualar valores numéricos de presiones en diferente dirección. No obstante, su orden de magnitud es la unidad.

Para el fluido acelerado, el monomio $y/((a/g)x)$, que puede escribirse en la forma

$$\pi = \frac{\rho g \Delta y}{\rho a \Delta x}$$

da cuenta (indirecta) entre la fuerza debida a la presión hidrostática (causada por la fuerza exterior) y las fuerzas de inercia, un monomio con dimensiones en el ADD, pero del orden de magnitud unidad.

Ejemplo 5.4 Tiempo de vaciado de un depósito

El monomio obtenido para el tiempo de vaciado de un depósito

$$t_o \sim \left(\frac{A_o}{s_o} \right) \left(\frac{h}{g} \right)^{1/2}$$

es A_o/s_o veces el tiempo de caída libre del fluido para recorrer la altura h del depósito. Este tiempo también se puede determinar a partir de una velocidad característica de caída (deducida del intercambio en energía cinética-energía potencial) y de la propia altura del depósito. La interpretación del monomio anterior es directa; es como si se dividiera el depósito en (A_o/s_o) depósitos de altura h que se vacían sucesivamente.

Ejemplo 5.5 Oscilaciones de un líquido en un tubo en U de sección circular

Para el caso de fuerzas viscosas despreciables, el monomio resultante, puesto en la forma $\tau_o/(h_{12}/g)^{1/2}$ representa un tiempo característico, τ_o , del orden de magnitud del tiempo de caída libre de una partícula de fluido una distancia h_{12} ; mientras que el monomio $\pi_h = h_{12}/l_o$ informa de la relación entre la altura desviada de la posición de equilibrio respecto a la longitud de tubo ocupada por el fluido

(también puede interpretarse en términos de cociente de masas, como la masa desplazada del equilibrio en relación con la masa total de fluido). Este último monomio corrige el tiempo de caída debido a la influencia relativa de la masa total de fluido que ha de moverse y la masa que determina la fuerza impulsora. En relación con el cálculo de la velocidad máxima, en este proceso hay un intercambio continuo de las energías potencial y cinética. El balance entre dichas energías (sus valores máximos) para una partícula del fluido es uno de los monomios resultantes del cálculo de esa velocidad:

$$\pi_v = \frac{v_o^2}{gh_{12}} \sim \frac{(1/2)mv_o^2}{mgh_{12}} \sim \frac{\text{energía cinética máxima}}{\text{energía potencial máxima}}$$

un verdadero π_{ADD} . En presencia de fuerzas viscosas se obtienen tres monomios, dos de los cuales coinciden con el caso anterior. El tercero, $(\mu^2 h)/(g\rho^2 R^4)$, escrito en la forma

$$\frac{hv^2}{gR^4} = \frac{(h/g)}{(R^4/v^2)} \sim \frac{\tau_o^2}{(R^2/v)^2}$$

con $v = \mu/\rho$, la viscosidad cinemática asociada a la difusión del momento lineal, es el cuadrado del cociente de dos tiempos característicos: el de caída libre del líquido una altura $h_{12}/2$, τ_o y el necesario para difundir el momento lineal una distancia R , $\tau_r \sim R^2/v$. Por otro lado, es posible escribir este monomio en la forma

$$\frac{hv^2}{gR^4} = \frac{h^2 v^2}{ghR^4} = \frac{h^2 v^2}{v_{max}^2 R^4} = \frac{(vv_{max}/R^2)^2}{(v_{max}^2/h)^2} \left(\frac{\text{fuerzas viscosas}}{\text{fuerzas de inercia}} \right)^2$$

con lo que es posible asignarle el significado del balance de fuerzas que sucede en el problema; su raíz cuadrada es el cociente fuerzas viscosas/fuerzas de inercia, un π_{ADD} .

Con todo, puede concluirse que los monomios obtenidos, en el caso más complejo de fuerzas viscosas no despreciables, son una consecuencia de los balances que tienen lugar en el problema en el dominio físico en el que se mueve el fluido. Las operaciones algebraicas entre estos monomios, que permiten la eliminación de ciertas variables, es conveniente que se den en forma matemática, en términos de balances de esas mismas u otras magnitudes.

El ADC da cuatro monomios para este problema, dos de ellos son factores de forma y el tercero es una magnitud considerada adimensional, φ_o , que también es un factor de forma en el ADC. Puede demostrarse fácilmente que el significado del monomio $R^3 \rho^2 g / \mu^2$ deducido por Palacios [1964] es puramente geométrico, el cociente R/h o una relación de aspecto del dominio físico del problema.

En cuanto al monomio formado para un movimiento muy lento del fluido, en donde la velocidad es solo una función del radio, es decir, caída por el tubo sin oscilación armónica, $\pi = \rho g(R-r)^2/(\mu v)$, se trata de un balance entre las fuerzas

gravitatorias y las fuerzas viscosas; de nuevo, un π_{ADD} . Este balance se aprecia mejor escribiendo el monomio en la forma

$$\pi = \frac{\rho g}{\mu v / (R - r)^2}$$

Ejemplo 5.6 Cilindro que gira en el seno de un fluido

El monomio que da el orden de magnitud del momento aplicado al cilindro para mantener el movimiento es

$$\pi_M = \frac{M_{t_0}}{\mu \varphi \omega R^2}$$

Este monomio es la relación entre dicho momento, M_{t_0} , y el momento de las fuerzas viscosas por unidad de altura,

$$M_{vis} = F_v R = \mu(S/H)(dv/dr)R \sim \mu\varphi R(\omega R/R)R = \mu\varphi\omega R^2$$

En el ADC se obtuvieron dos monomios: un factor de forma, $\varphi = P/R$ con P el perímetro, y el otro, $M_{t_0}/\omega\mu R^2$ que tiene un significado en términos de la geometría del cilindro, precisamente el inverso del factor de forma, R/P .

En relación con el tiempo que tarda en detenerse al cesar el momento aplicado al cilindro, t^* , el monomio

$$\frac{\mu H P R t^*}{I} = \frac{\mu H P R \omega}{I \omega / t^*}$$

representa la relación entre el par de fuerzas viscosas y el cambio del momento lineal global del cilindro, mientras que el monomio

$$\frac{\mu H P^2}{I \omega} = \frac{\mu H P^2 \omega}{I \omega^2}$$

es la relación entre el trabajo global de las fuerzas viscosas y la variación de la energía cinética de rotación. Los monomios proporcionados por el ADC, que no son factores de forma, se interpretan físicamente en términos de las magnitudes geométricas (de manera no simple en algún caso). $M_{t_0}/\mu\omega R^2$ tiene el significado de P/R (orden de magnitud unidad), al igual que $H R^2 t^* / I$, mientras que $H R^2 / I \omega = ((\mu H P^2 \omega) / (I \omega^2)) (P^2 / R^2)$ es el cociente entre el trabajo global de las fuerzas viscosas y la variación total de la energía cinética de rotación multiplicado por $(P/R)^2$, de nuevo del orden de magnitud unidad.

Con fuerzas de inercia no despreciables aparece un nuevo monomio, $\rho\omega R^2 / (\mu\varphi)$, cuyo significado, escrito en la forma

$$\frac{\rho(\omega R)^2 / (\mu\varphi)}{\mu(\omega R)/R^2}$$

es el de balance entre las fuerzas de inercia y las viscosas en la superficie del cilindro (un número de Re adimensional discriminado).

En el cálculo del espesor de la capa límite aparecen los monomios $\delta_v \phi/P$ y $\rho \omega P^2 / \mu \phi^3$. El primero de ellos es un factor de forma en el ADD cuyo orden de magnitud debe ser la unidad para que influya en la solución del problema. El segundo, ya discutido en el párrafo anterior, expresado en la forma

$$\frac{\rho \omega P^2}{\mu \phi^3} = \left(\frac{\rho \omega^2 R^2/P}{\mu \omega R/v^2} \right) \left(\frac{P}{\phi \delta_v} \right)^2$$

debe ser también del orden de la unidad. El primer paréntesis es, efectivamente, del orden de la unidad, puesto que expresa el cociente entre las fuerzas viscosas y las de inercia dentro de la capa límite. El segundo paréntesis es también del orden de la unidad, resultado coherente con el orden de magnitud del primer monomio $\delta_v \phi/P$.

En relación con la búsqueda del tiempo que tarda en detenerse un fluido en el interior de un cilindro, girando ambos estacionariamente, cuando se detiene el cilindro, se obtiene la solución

$$\pi_1 = \frac{\tau_o^2}{R^2/\nu}$$

que se interpreta como el tiempo necesario para difundir el momento lineal la distancia R (separación entre cilindros).

Por último, en lo referente a la interacción entre dos cilindros separados por un fluido viscoso, aparece por un lado un factor de forma adimensional discriminado y del orden de la unidad (cociente de radios de los cilindros) y por otro el monomio cociente entre el par aplicado al cilindro exterior (o interior) y el de las fuerzas viscosas del fluido.

Ejemplo 5.7 Flujo incidente horizontal sobre una esfera en reposo

En este problema se ha abordado directamente el cálculo de los órdenes de magnitud de las fuerzas que luego se han balanceado para obtener los monomios buscados. La solución ADD es interesante, puesto que, en el caso general, contiene dos números de Reynolds adimensionales, uno de ellos con el aspecto de un número de Reynolds clásico. Ambos tienen el mismo significado físico, como debíamos esperar, pero referido a regiones y a fenómenos diferentes dentro del problema.

Cuando se considera el caso general de intervención de fuerzas de inercia (no en la capa límite) y viscosas siempre aparece el monomio

$$\frac{\rho U_o R}{\mu}$$

cuyo aspecto es el de un número de Reynolds clásico que, sin embargo, para esta geometría se comporta como un número adimensional discriminado con un significado físico de cociente de fuerzas inercia/viscosas, $Re_{ADD,1} = \rho U_o R / \mu$ (¡Pero no en la región de capa límite!). Este Reynolds es del orden de la unidad, en el caso general, e interviene en la solución de las fuerzas, mientras que en los casos límite no interviene en la solución.

Por otro lado, el monomio

$$\frac{\rho v_\theta \delta^2}{\mu_{\theta\phi} s_\theta}$$

obtenido en el cálculo del espesor de la capa límite, es otro número de Reynolds adimensional discriminado ($Re_{ADD,2}$) que interviene en el problema cuyo significado es de nuevo el balance entre las fuerzas de inercia y las viscosas. ¡Pero esta vez en la región de capa límite! Estas fuerzas siempre se equilibran, por lo que el orden de magnitud de $Re_{ADD,2}$ es la unidad.

Gracias a las simplificaciones numéricas que ocurren en el problema, la solución ADC es tan precisa como la ADD. Sin embargo, dado que la solución ADC solo contiene la variable geométrica R (el radio), es difícil asociar los monomios ADC directamente con los cocientes de fuerza del problema. De hecho, esta aso-

sociación no ha sido mencionada por ninguno de los autores que abordan tal problema de forma clásica, aunque en 1951, 1960 y 1968, entre 1980 y 1990, entre 2000 y 2002, estos autores se dan cuenta de que tal explicación no es conveniente por no ser general, pues falla en la mayoría de los problemas con otras geometrías.

Ejemplo 5.8 Caída de una esfera en un fluido viscoso por efecto de la gravedad

La simplificación de este problema a los casos de las fuerzas de inercia o viscosas despreciables proporciona, respectivamente, los órdenes de magnitud

$$V(\Delta\rho)g \sim \mu v_o R,$$

$$V(\Delta\rho)g \sim \rho_f v_o^2 R^2$$

balance entre fuerzas viscosas y gravitatorias y entre fuerzas de inercia y gravita-

En el caso general, las tres fuerzas deben ser del mismo orden de magnitud, por lo que los balances anteriores siguen siendo del orden de la unidad. La combinación de ambos balances, que elimina las fuerzas de gravedad (para el caso general), proporciona el nuevo monomio $(\rho_f v_o R / \mu)$. Se trata de un número de Reynolds bien definido (orden de magnitud unidad). Su significado nada tiene que ver con el Reynolds que aparece en la capa límite en convección forzada sobre una placa plana, por ejemplo. Allí, su significado es puramente geométrico, y su orden resulta diferente de la unidad; aquí, su significado es el balance entre dos fuerzas independientes del mismo orden de magnitud que tienen influencia

en el problema. Así, $(\rho V_o R / \mu) \sim 1$. En caso contrario, unas fuerzas son despreciables frente a las otras, y el monomio no juega un papel relevante en la solución.

Ejemplo 5.9 Tamaño de las gotas desprendidas de un tubo delgado circular

Para el caso de gotas desprendidas en un campo gravitatorio, el monomio obtenido mediante el ADD, $\rho g V_o / \sigma l_o$, describe un balance entre las fuerzas gravitatorias de la gota y la fuerza asociada a la tensión superficial, un verdadero π_{ADD} . Los monomios obtenidos mediante el ADC no pueden interpretarse en términos de balances, obviamente. Uno de ellos ha de interpretarse en función de otro. Por ejemplo, el monomio $(\rho g l_o^2 / \sigma)$ se interpreta como el cociente l_o^3/V , magnitudes asociadas a la geometría del problema.

Para gotas en un campo centrífugo, el monomio resultante, $\rho V_o \omega^2 l_o / \sigma l_o$, representa obviamente el balance entre las fuerzas centrífuga y de tensión superficial, $\rho V_o \omega^2 l_o$ y σl_o , respectivamente; otro verdadero π_{ADD} .

Ejemplo 5.10 Efectos de la tensión superficial: capilares

Para la altura ascendida por la fuerza capilar, el monomio salía, directamente, de los equilibrios de fuerzas, es por lo que el primer monomio

$$\pi_f = \frac{\rho g V_o}{C_o \sigma d_t}$$

tiene el significado del cociente entre la fuerza gravitatoria de la columna de fluido y la fuerza asociada a la tensión superficial, un verdadero Π_{ADD} .

Ejemplo 5.11 Vibración de gotas adheridas a una pared que las moja

En ausencia de gravedad se forma un solo monomio que, para gotas semiesféricas, es

$$\pi = \frac{\sigma T_o^2}{\rho R^3}$$

Su interpretación es directa a partir de la segunda ley de Newton: fuerza recuperadora ($f_{\sigma,z}$) igual a cambio de la cantidad de movimiento $dp/dt = m(d^2h/dt^2)$, también un π_{ADD} . En órdenes de magnitud:

$$\sigma P \sim \rho PRh \frac{h}{T_o^2}$$

Así, el monomio anterior no es más que el balance entre la fuerza aplicada y el cambio de momento lineal.

En presencia del campo gravitatorio aparece un segundo monomio cuyo significado está asociado al tiempo de caída libre:

$$\pi = \frac{T_o}{(h/g)^{1/2}}$$

La solución es una correlación entre los dos tiempos deducidos de ambos monomios. Pues en la forma $T_o/(h/g)^{1/2}$, el cociente entre fuerzas gravitatorias y de inercia, es un verdadero π_{ADD} del orden de magnitud unidad.

Ejemplo 5.12 Fuerza entre placas por acción de la tensión superficial

En este problema se igualan presiones de distinta ecuación de dimensiones para llegar a deducir la incógnita. Así pues, el monomio $f_o d / \sigma_r S_o$ es dimensional en el ADD y tiene un orden de magnitud unidad y una interpretación indirecta. Si tienen una interpretación directa los primeros monomios correspondientes a los cálculos de presiones, $f_o / (\Delta p_{32} S_o)$ y $\Delta p_{12} d / \sigma_r$, como balances de fuerza de atracción/fuerza de presión en dirección normal a la placa y fuerza de presión en dirección radial/fuerza de tensión superficial, respectivamente, ambos del orden de magnitud unidad y verdaderos π_{ADD} .

Ejemplo 5.13 Flujo de Couette

En el flujo estacionario las fuerzas viscosas se equilibran con las exteriores aplicadas a la placa que mantiene el movimiento, Figura 3.15. Así, el único monomio que representa el balance en términos de fuerzas por unidad de volumen de fluido es

$$\pi \sim \frac{f_{ext}}{f_v} \sim \frac{f_{ext}}{\mu v_o / h^2}$$

Cuando cesa el movimiento de la placa, el flujo se detiene al cabo de cierto tiempo, t^* , tras haber recorrido un determinado espacio l^* . Los monomios que se obtuvieron para estas incógnitas, verdaderos π_{ADD} del orden de la unidad,

$$\Pi_l = \frac{\rho v h^2}{\mu l^*} \quad \Pi_t = t^* \frac{\rho h^2}{\mu t^*}$$

tienen los siguientes significados físicos por unidad de volumen:

$$\pi_l = \frac{\rho v^2 / l^*}{\mu v / h^2} \sim \frac{\text{fuerzas de inercia}}{\text{fuerzas viscosas}}$$

$$\pi_t = \frac{\rho v / t^*}{\mu v / h^2} \sim \frac{\text{cambio de la cantidad de movimiento}}{\text{fuerzas viscosas}}$$

Ejemplo 5.14 Flujo interno en tubos

Para la longitud de entrada hidrodinámica, L_{eh} , el monomio formado

$$\pi_{Leh} = \frac{\rho U D^2}{\mu L_{eh}}$$

representa un balance entre fuerzas de inercia y fuerzas viscosas en la región hidrodinámica de entrada del tubo (donde también existen fuerzas de presión). En efecto,

$$\frac{\text{fuerzas de inercia}}{\text{fuerzas viscosas}} \sim \frac{\rho U^2 / L_{eh}}{\mu U / D^2} = \frac{L_{eh}}{D} \text{ Re}_{ADD}$$

Donde Re_{ADD} es un número de Reynolds adimensional discriminado de orden de magnitud unidad. El significado del número clásico Re_D está asociado a la esbeltez de la región hidrodinámica de entrada:

$$\text{Re}_D = \frac{\rho U D}{\mu} \sim \frac{L_{eh}}{D}$$

En la región completamente desarrollada, el monomio resultante para la determinación de la velocidad característica en el centro del tubo, u^* ,

$$\pi_{Leh} = \frac{(dp/dz) R^2}{\mu u^*}$$

indica un balance entre las fuerzas de presión y las fuerzas viscosas en esa región (fuerzas de inercia despreciables). Efectivamente,

$$\frac{\text{fuerzas de presión}}{\text{fuerzas viscosas}} \sim \frac{(dp/dz)}{\mu u^* / R^2} = \pi_u$$

En esta misma región, el cálculo de la caída de presiones en el fluido conduce al monomio $\pi_{u_m}^{\Delta p} = (\Delta p / \Delta z) / (D / u_m^2)$, cuyo significado físico es el mismo que el de π_u , un balance entre fuerzas de presión y fuerzas viscosas a lo largo del tubo. Efectivamente,

$$\frac{\text{fuerzas de inercia}}{\text{fuerzas viscosas}} \sim \frac{(\Delta p / \Delta z)}{\mu u_m^2 / D^2} = \frac{\Delta p}{D} \text{ ADD}$$

donde π_{ADD} es un número adimensional discriminado de orden de magnitud unidad. La relación entre este monomio y los números de Euler y Reynolds clásicos ($Eu = \Delta p / \rho u_m^2$), $\pi_{\Delta p} = \pi_{ADD} = Eu \text{ Re}_D (D / \Delta z)$, asocia a esta expresión el significado de balance anterior entre fuerzas de presión y fuerzas viscosas. Así, tanto

Eu como Re_D no pueden expresarse en términos de un balance de fuerzas en el que una de ellas sea la de inercia. Nótese que Eu es un número adimensional discriminado en el que la caída de presión en el tubo se balancea con la energía cinética del fluido. También en la práctica suele expresarse la caída de presión en función del factor de fricción, f , definido como:

$$f = \frac{(\Delta P / \Delta z) / D}{(I / 2 \rho u_m^2)} = \frac{1}{2} \left(\frac{D}{\Delta z} \right) Eu = \frac{1}{2} Re_D^{-1}$$

Por idénticos razonamientos, el factor f carece de significado físico.

En cuanto al monomio obtenido para el cálculo volumétrico,

$$\pi_Q = \frac{\Delta p A D^2}{\mu Q \Delta z}$$

es inmediato comprobar que, como la velocidad media es Q/A , este monomio se convierte en el monomio π_u anterior (deducido para el cálculo de la velocidad), por lo que tiene el mismo significado físico de balance entre fuerzas de presión y fuerzas viscosas.

En relación con el flujo en la región de entrada, cálculo del espesor de la capa límite, aparecen dos monomios: el factor de forma $\pi_2 = \delta/R$ y el monomio $\pi_1 = (\rho U R^2 / \mu z)$ que, combinado con el anterior, representa el balance entre fuerzas de inercia y viscosas en la región de flujo parcialmente desarrollado, un Re_{ADD} ya estudiado.

En el cálculo de velocidades, para la componente axial intervienen tres monomios: $\pi_1 = u/U$, una velocidad adimensional, $\pi_2 = (\rho U R^2 / \mu z)$, discutido anteriormente (fuerzas de inercia/fuerzas viscosas) y $\pi_3 = r/R$, una coordenada adimensional. En cuanto a la componente radial, tenemos los monomios, r/R , coordenada adimensional, $\rho U R^2 / \mu z$, ya discutido, y $\rho v^2 z / (\mu U)$, que puesto en la forma (empleando la ecuación de continuidad)

$$\frac{\rho v^2 z}{\mu U} = \frac{\rho U^2 / z}{\mu U / R^2} \sim \frac{\text{fuerzas de inercia}}{\text{fuerzas viscosas}}$$

significa un balance de fuerzas inercia y fuerzas de viscosas, un Re_{ADD} local. Advierta que en el cálculo de la velocidad el monomio que se dedujo fue, en realidad, $v / (\mu U / \rho z)^{1/2} = Re_{ADD}^{1/2}$, cuyo orden de magnitud también es del orden de la unidad.

La caída de presión en la región de entrada da dos monomios: $(\Delta p / \rho u_m^2)$, que balancea las fuerzas de presión con las de inercia y $(\rho u_m D^2 / \mu z)$, que balancea las de inercia con las viscosas, ambos del orden de magnitud unidad. Por último, el coeficiente de fricción, $c_f = (\Delta p D / (1/2 \rho u_m^2 z))$ es un número dimensional. Es inmediato comprobar que sus dimensiones son inversas a las de Re_D ; esto es, $[c_f] = L_r / L_z$.

Ejemplo 5.15 Flujo en las cercanías de un disco en rotación

El monomio que resulta de calcular el espesor de la capa límite, Π_δ , tiene el significado físico siguiente:

$$\Pi_\delta = \frac{\rho \omega R \delta^2}{\mu P} = \frac{\rho (\omega R)^2 / P}{\mu \omega R / \delta^2} \sim \text{Re}_{\text{ADD}} \quad \frac{\text{fuerzas de inercia}}{\text{fuerzas viscosas}} = 1$$

un verdadero número de Re adimensional discriminado relacionado con el Re_R clásico de la forma

$$\text{Re}_{\text{ADD}} = \left(\frac{\delta^2}{P/R} \left(\frac{\rho \omega R^2}{\mu} \right) \right) = \frac{\delta^2}{P R} \quad \text{Re}_R$$

Así, Re_R no es un parámetro adimensional discriminado, su ecuación dimensional es $[\text{Re}_R] = L_r^2 \varphi / L_z^2$, y su orden de magnitud, PR/δ^2 .

Para el cálculo de la velocidad radial obtuvimos el monomio

$$\Pi_v = \frac{\omega R}{P v_R}$$

que no es sino una forma del principio de conservación de la masa en las inmediaciones del borde del disco, un monomio adimensional discriminado del orden de magnitud unidad.

En relación con el caudal volumétrico bombeado hacia fuera por el disco, q , el monomio

$$\Pi_q = \left(\frac{R}{q} \right) \left(\frac{\mu \omega P R}{\rho} \right)^{1/2}$$

teniendo en cuenta la definición de caudal volumétrico y empleando el resultado anterior de la velocidad radial, puede escribirse en la forma

$$\Pi_q^2 = \left(\frac{q}{R} \right)^2 \left(\frac{\rho}{\mu \omega P R} \right) \propto \frac{\rho \omega R \delta^2}{\mu P} \quad \text{Re}_{\text{ADD}} \quad \frac{\text{fuerzas de inercia}}{\text{fuerzas viscosas}} = 1$$

Por último, para el caso $\text{Re}_R < 1$ (fuerzas de inercia despreciables), el significado del monomio obtenido es

$$= \Pi_\delta \quad \frac{\delta^2 F_{h,p}}{\mu \omega R} \quad \frac{F_{h,p}}{\mu \omega R / \delta^2} \quad \frac{\text{fuerzas hidrostáticas de presión}}{\text{fuerzas viscosas}} = 1$$

**Ejemplo 5.16 Flujo forzado laminar a lo largo de una placa horizontal:
espesor de la capa límite, fuerza de arrastre**

El monomio ADD que resulta al buscar el espesor de la capa límite

$$\pi = \frac{\rho \delta^2}{\mu l_o} = Re_{ADD}$$

es el balance de fuerzas dentro de la capa límite, por lo que su valor es del orden de la unidad. En efecto, en esta región, las fuerzas viscosas por unidad de volumen son del orden de $F_v \sim \mu U / \delta_v^2$, mientras que las fuerzas de inercia por unidad de volumen valen $F_i \sim \rho U^2 / l_o$, así pues,

$$Re_{ADD} \sim \frac{\text{fuerzas de inercia}}{\text{fuerzas viscosas}} = \frac{\rho U^2 / l_o}{\mu U / \delta_v^2} = \frac{\rho U \delta_v^2}{\mu l_o} = \pi^{-1}$$

La búsqueda del espesor de la capa límite mediante el ADC proporciona, además del factor de forma, δ_v / l_o , el número de Reynolds clásico, Re_{l_o} , de orden de magnitud $\gg 1$. Su significado es geométrico, $(l_o / \delta_v)^2$.

El monomio $\rho U^2 / (\mu x)$, que aparece en el cálculo de velocidades, es un Relocal y representa el cociente fuerzas de inercia/fuerzas viscosas en esa región. Por otra parte, el monomio $v x / (U y)$, que aparece en este mismo apartado, es una forma de la conservación de la masa de fluido o una ecuación de continuidad, del orden de magnitud unidad. Si expresamos la solución del cálculo de velocidades en la forma $f(\pi_{1,v})$, se deduce inmediatamente que $\pi_{1,v}$, $\pi_{2,v}$ y $f(\pi_{2,v})$ son del orden de la unidad.

Finalmente, el monomio obtenido en el cálculo de la fuerza de arrastre ejercida por el fluido sobre la placa puede expresarse en la forma

$$\tau = \frac{\tau^2 l_o}{\rho U^3 \mu} \left(\frac{\tau}{l_o / 2 \rho U^2} \right)^{1/2} Re_{l_o} c_f^2 Re_{l_o} c_f^2 \left(\frac{l_o}{\delta_v} \right)^2$$

El ADC asume como adimensional el llamado “coeficiente de fricción”, sin embargo, desde la perspectiva del ADD es un parámetro con dimensiones. Estas son -1^{-1}

placa. Igualmente, entre los $\pi_{1,v}$ y $\pi_{2,v}$ existe un balance; ya que la referencia $U^2 / 2$ no está asociada a regímenes viscosos.

También el monomio π_τ , teniendo en cuenta que $\tau \sim \mu U / \delta_v$, expresa un balance entre fuerzas viscosas y fuerzas de inercia:

$$\pi_\tau = \frac{\tau^2 l_o}{\rho U^3 \mu} \frac{\mu}{\rho U \delta_v^2} Re_{ADD}^{-1} \frac{U^2}{\rho U^2 / l_o} \frac{\text{fuerzas viscosas}}{\text{fuerzas de inercia}}$$

aunque debería hacerse su evaluación en la región de capa límite próxima a la placa, que es dónde se define τ .

Ejemplo 5.17 Flujo en una placa horizontal con succión

En la determinación de las longitudes características paralela y perpendicular a la placa se obtuvieron, respectivamente, los monomios

$$\frac{\rho v_o^2 l^*}{\mu U} \quad \frac{\rho v_o \delta^*}{\mu}$$

El primero de ellos, teniendo en cuenta la ecuación del movimiento en la dirección paralela a la placa y la ecuación de continuidad, $U/l^* \sim v_o/\delta^*$, puede escribirse en la forma

$$\frac{\rho v_o^2 l^*}{\mu U} \sim \frac{\rho U^2 / \delta^{*2}}{\mu U/l^*} \quad \frac{\text{fuerzas de inercia}}{\text{fuerzas viscosas}}$$

El segundo, aplicando también la ecuación de continuidad, tiene el mismo significado:

$$\pi_\delta = \frac{\rho v_o \delta^*}{\mu} \left(\frac{\rho v_o \delta^*}{\mu} \right) \left(\frac{U \delta^*}{v_o l^*} \right) \sim \frac{\rho U^2 / \delta^{*2}}{\mu U/l^*} \quad \frac{\text{fuerzas de inercia}}{\text{fuerzas viscosas}}$$

El hecho de que se obtenga el mismo monomio para la determinación de ambas longitudes características, l^* y δ^* , solo significa que ambas están acopladas (lógicamente, a través de la ecuación de continuidad aplicada a la región de desarrollo de $\delta(x)$).

El monomio que surge en el cálculo de la tensión de corte en la superficie, lejos del borde de ataque, usando la ecuación de continuidad, si se refiere a una sección de placa S_o en donde $\tau_o \sim f_c/S_o$ y si se tiene en cuenta que $m \sim \rho S_o l^*$, puede expresarse en la forma

$$\pi_\tau = \frac{\tau_o}{\rho v_o U} \sim \frac{f_c}{m U^2 / l^*} \sim \frac{\text{fuerzas de corte}}{\text{fuerzas másicas de inercia en la dirección del movimiento}}$$

Para placas de longitudes inferiores a l^* , los monomios son idénticos a los anteriores, pero definidos en las nuevas regiones.

Ejemplo 5.18 Fluido viscoso deslizándose por una pared vertical

El cálculo de la velocidad característica máxima para el descenso de una delgada capa de fluido viscoso sobre una pared vertical proporciona el monomio

$$\pi = \frac{\mu v_{\max}}{\rho g d^2} = \frac{\mu v_{\max} / d^2}{\rho g} \sim \frac{\text{fuerzas viscosas}}{\text{fuerzas gravitatorias}}$$

que da cuenta del balance fuerzas viscosas por unidad de volumen, del orden de $\mu v_{\max} / d^2$, y fuerzas gravitatorias por unidad de volumen, ρg , un Π_{ADD} . La apli-

ción del ADC proporciona un número de Reynolds, $Re = \rho v_{\max} d / \mu$, cuya relación con el anterior balance es

$$\frac{\rho g d^2}{\mu v_{\max}} = \left(\frac{gd}{\mu v_{\max}^2} \right) Re_d$$

En este problema, Re carece de significado como balance de fuerzas en tanto que las fuerzas de inercia son despreciables. La ecuación de dimensiones es $Re \sim L_y/L_x$.

Ejemplo 5.19 Flujo laminar transversal a un cilindro

El monomio formado $\pi = \rho v_o \delta^2 / (\mu s)$, escrito en la forma

$$\pi = \frac{\rho v_o^2 / s}{\mu v_o / \delta^2} \sim \frac{\text{fuerzas de inercia}}{\text{fuerzas viscosas}}$$

constituye un balance entre las fuerzas de inercia y las viscosas dentro de la capa límite, un número de Reynolds adimensional discriminado, Re_{ADD} . Es corriente en la bibliografía encontrar para este problema el número de Reynolds clásico $Re_D = \rho v_o D / \mu$. Expresado este en función de Re_{ADD}

$$Re_{ADD} = \frac{\rho v_o \delta^2}{\mu s} = \left(\frac{\delta^2}{s D} \right) Re_D$$

lo que da a Re_D un significado geométrico, $Re_D \sim sD/\delta^2$.

5.4 Los números adimensionales ADD de transmisión de calor

Ejemplo 5.20 Conducción bidimensional estacionaria en una placa rectangular

Los tres primeros monomios, $\Delta T / \Delta T_b$, x/X e y/H constituyen la adimensionalización de las variables temperatura y posición. El monomio formado a partir de las conductividades k_x y k_y y las variables geométricas que definen la longitud de la placa constituyen un balance entre los calores netos transmitidos por conducción en cada una de las direcciones x e y :

$$\begin{aligned} \pi_4 &= \frac{k_x H^2}{k_y X^2} = \\ &= \frac{k_x (\Delta T / X^2)}{k_y (\Delta T / H^2)} \sim \frac{\text{flujo neto de calor por conducción en la dirección } x}{\text{flujo neto de calor por conducción en la dirección } y} \sim 1 \end{aligned}$$

Este monomio ADD es el único que caracteriza los patrones del campo térmico estacionario y flujo de corriente en la placa con contornos isotérmicos (con dos temperaturas máxima para expresar estas condiciones). El ADC separa el monomio anterior en dos: el factor de forma geométrico H/X y el cociente de conductividades; monomios que no son independientes para un mismo patrón (un mismo valor de π_4), ya que su combinación en la forma $k_x H^2/k_y X^2$ es constante.

En el caso de placas con un borde convectivo, el ADD proporciona un monomio más: un número de Biot en el que la longitud característica que contiene es la de la placa en la dirección normal al contorno convectivo (un Biot transversal). Solo así el número de Bi tiene una interpretación física en función de balances de calor. Por ejemplo, el número de Biot

$$Bi_H = \frac{h_y H}{k_y} = Bi_{ADD}$$

representa el balance entre la conducción en dirección vertical en el interior de la placa y en el borde convectivo (superior o inferior) y la convección existente en ese borde con el fluido que le rodea:

$$Bi^H = \frac{h_y \Delta T}{k_y \Delta T/H}$$

También, expresando Bi en la forma

$$Bi_H = \frac{1/h_y A}{H/k_y A} \sim \frac{\text{resistencia térmica a la conducción interna}}{\text{resistencia térmica a la convección}}$$

tiene el significado de cocientes de resistencias térmicas. Los monomios $k_x H^2/k_y X^2$ y $h_y H/k_y$ son del orden de magnitud unidad.

Ejemplo 5.21 Conducción transitoria en una esfera con resistencia térmica interna despreciable

El monomio $\Delta T/\Delta T_o$ representa una temperatura adimensional. En relación con el monomio $hSt/c'_e V$, si multiplicamos y dividimos por la diferencia de temperaturas, ΔT ,

$$\pi_2 = \frac{h S t}{c V} = \frac{h S \Delta T}{c V \Delta T/t}$$

representa el balance entre el calor transmitido por convección en la superficie de la esfera y el cambio del contenido de energía en la unidad de tiempo que sufre esta. Un monomio π_{ADD} .

Por otro lado, si el monomio lo expresamos en la forma

$$\pi_2 = \frac{t^*}{c'_e V / h S}$$

$c'_e V / (hS)$ tiene el significado alternativo de un tiempo característico del problema, una relación entre la capacidad calorífica del cuerpo y el calor que entre por convección por unidad de tiempo y por grado de temperatura.

En general, en los procesos transitorios con condiciones de contorno convectivas, las soluciones suelen venir dadas en función de los números adimensionales clásicos de Fourier y Biot definidos respectivamente como

$$Fo = \frac{\alpha t}{L_c^2} = \frac{k t}{c'_e L_c^2} = \frac{k \Delta T / L_c^2}{c'_e \Delta T / t}$$

$$Bi_H = \frac{h L_c}{k}$$

donde L_c representa una longitud característica del cuerpo. A cada uno de ellos se les asocia sendos significados físicos: Fo, calor transmitido por conducción en el interior del cuerpo/cambio del contenido de energía, y Bi, con el significado ya mencionado.

En este problema (modelo de constantes agrupadas o *modelolump*), sin embargo, no son aplicables ninguno de estos números al ser la conductividad térmica infinita. Sin embargo, teniendo en cuenta los significados físicos anteriores, resulta evidente que el producto Bi Fo conduce al significado físico del monomio $hSt/c'_e V$:

$$\frac{h St}{c'_e V} = \frac{h t}{c'_e L_c} \left(\frac{h L_c}{k} \right) \left(\frac{k t}{c'_e L_c^2} \right) \boxed{Bi \quad Fo} \quad ADD \sim 1$$

Para que los números Fo y Bi sean adimensionales en el ADD, la longitud característica del cuerpo que interviene en sus expresiones debe tener la dimensión $[L_c] = L_r$, por lo que debe ser del orden del radio de la esfera $L_c \sim V/S \sim R$.

Ejemplo 5.22 Convección forzada laminar a lo largo de una placa isotérmica horizontal

Caso general

Las fuerzas de inercia y viscosas son del mismo orden de magnitud. La aplicación del ADD para determinar, tanto el espesor de la capa límite térmica como el coeficiente de transmisión del calor, proporcionó los monomios

$$\pi_{\delta tl} = \delta_t \left(\frac{\mu l_o}{\rho v_o} \right)^{-1/2}$$

$$\pi_{h,1} = \left(\frac{h}{k} \right) \left(\frac{\mu l_o}{\rho v_o} \right)^{1/2}$$

$$\pi_{h,2} = \pi_{\delta t l^2} \frac{\mu c'_e}{\rho k} \frac{\nu}{\alpha} \text{ Pr}$$

El primero de ellos al cuadrado representa el cociente entre fuerzas de inercia y viscosas en el interior de la capa límite térmica:

$$\pi_{\delta t l}^2 = \frac{\rho v_o \delta_t^2}{\mu l_o} = Re_{ADD} = \frac{\rho v_o^2 / l_o}{\mu v_o / \delta_t^2} \sim \frac{F_i}{F_v} \sim 1$$

En consecuencia, $\pi_{\delta t l}^2$ puede considerarse como un verdadero número de Re adimensional, tanto en el ADC como en el ADD, con un significado físico real de balance de fuerzas. Adviértase que, si $\pi_{\delta t l}^2$ es del orden de la unidad, también lo es $\pi_{\delta t l}$ y, en consecuencia:

$$\delta_t \sim \left(\frac{\mu l_o}{\rho v_o} \right)^{-1/2}$$

Este hecho permite afirmar que la función de Pr que pondera el espesor de la capa límite, $\phi(\text{Pr})$, es también del orden de la unidad.

Nota: En el Ejemplo 4.3, podríamos haber buscado un monomio $\pi_{\delta t l}$ diferente (por ejemplo, un monomio que contuviera k en lugar de μ). El significado físico de este nuevo monomio al que llamaríamos $\pi_{\delta t l}'$ es, naturalmente, distinto al de $\pi_{\delta t l}$.

Teniendo en cuenta, ahora, el balance de energías, que llamaremos Nu_{ADD} ,

$$\left(\frac{\text{convección}}{\text{conducción}} \right)_{\text{superficie}} = Nu_{ADD} = \frac{h \Delta T}{k \Delta T / \delta_t} = \frac{h \delta_t}{k}$$

el significado físico del monomio $\pi_{h,1}$ es

$$\pi_{h,1} = \left(\frac{h}{k} \right)^{1/2} \left(\frac{\mu l_o}{\rho v_o} \right)^{1/2} = \left(\frac{h \delta_t}{k} \right) \left(\frac{\mu l_o}{\rho v_o \delta_t^2} \right)^{1/2} + \frac{\text{convección}}{\text{conducción}} \left(\frac{F_v}{F_i} \right)^{1/2}$$

La relación entre los números clásicos y los discriminados es la siguiente:

$$Nu_{ADD} = \frac{h \delta_t}{k} = \left(\frac{\delta_t}{l_o} \right) \left(\frac{h l_o}{k} \right) = \frac{\delta_t}{l_o} Nu_{l_o}$$

$$Re_{ADD} = \frac{\rho v_o \delta_t^2}{\mu l_o} = \left(\frac{\delta_t}{l_o} \right)^2 \left(\frac{\rho v_o l_o}{\mu} \right) = \frac{\delta_t}{l_o}^2 Re_{l_o}$$

lo que permite deducir un significado físico para Nu_{lo} y Re_{lo} en términos de magnitudes geométricas:

$$\begin{aligned}\text{Nu}_{lo} &\sim l_o/\delta_t \\ \text{Re}_{lo} &\sim (l_o/\delta_t)^2 \\ \text{con } [\text{Nu}_{lo}] &= L_{\parallel} L_{\perp}^{-1} \text{ y } [\text{Re}_{lo}] = L_{\parallel}^2 L_{\perp}^2\end{aligned}$$

Por último, el tercer monomio, $\pi_{h,2} = \pi_{\delta t 2}$, es el número de Prandtl con significado de transporte de momento/transporte de calor, o cociente de difusividad del momento lineal/difusividad térmica.

Nota: En concordancia con lo expresado para el monomio $\pi_{\delta t 1}$, en el Ejemplo 4.3, podríamos haber buscado un monomio π_{h1} diferente (por ejemplo, un monomio que no contuviera μ). El significado físico de este nuevo monomio al que llamaríamos π_{h1} sería distinto al de π_{h1} .

Si hacemos el cociente entre las soluciones correspondientes a los espesores de las capas límite térmica (Ejemplo 4.3) y de velocidad (Ejemplo 3.16), resulta

$$\delta_t/\delta_v = \varphi(\text{Pr}) \sim 1$$

Digamos, de nuevo, que el orden de magnitud del espesor de la capa térmica está ponderado por Pr . Si Pr es del orden de la unidad ($\nu \sim \alpha$) ambas magnitudes de transporte se difunden por igual, y las capas de velocidad y térmica son del mismo orden de magnitud y $\varphi(\text{Pr}) \sim 1$, resultado ya confirmado anteriormente.

Por otro lado, si Pr es mucho mayor (o menor) que la unidad, el espesor de la capa límite térmica es mucho menor (o mayor) que el espesor de la capa límite de la velocidad. Parece, y en efecto es así, que Pr recoge el efecto de acoplamiento entre los procesos de difusión térmica y de difusión del momento y corrige el valor del espesor de la capa límite térmica a través de la expresión anterior, $\delta_t = (l_o \mu / \nu_o \rho)^{1/2} \varphi(\text{Pr})$.

Un tanto parecido ocurre con la influencia de Pr en el análisis del coeficiente de transmisión del calor, h .

$$h = k \left(\frac{\mu l_o}{\rho v_o} \right)^{-1/2} f(\text{Pr})$$

Cuando $\text{Pr} \sim 1$, $h = k/\delta_t$. Si Pr es mucho mayor (o menor) que la unidad, h queda ponderado por Pr o por $f(\text{Pr})$.

Casos asintóticos

Para el caso asintótico $\delta_t \gg \delta_v$ o $\text{Pr} \ll 1$, el monomio asociado al cálculo del espesor de la capa límite térmica

$$\pi_{\delta t}^2 = \delta_t^2 \left(\frac{k l_o}{c'_e v_o} \right)^{-1}$$

escrito en la forma

$$\frac{\alpha / \delta_t^2}{l_o / v_o}$$

define el espesor de capa térmica como la profundidad que ha alcanzado la difusión del calor en el fluido durante el tiempo que tarde este en recorrer la placa con una velocidad v_o :

$$\pi_{\delta t}^2 = \frac{\alpha / \delta_t^2}{l_o / v_o} \sim \frac{\text{tiempo necesario para difundir el calor a una distancia } \delta_t}{\text{tiempo necesario para que la partícula de fluido recorra el camino } l_o}$$

El mismo monomio tiene otra expresión, de balance energético, puesto en la forma

$$\pi_{\delta t}^2 = \frac{c'_e v_o \Delta T / l_o}{k \Delta T / \delta_t^2} \sim \frac{\text{calor por convección-arrastre}}{\text{calor por conducción}}$$

donde el transporte por convección es en la dirección del flujo de fluido (paralelo a la placa), mientras que el de conducción es en la dirección normal al flujo (perpendicular a la placa). Se trata de un Pe adimensional discriminado, Pe_{ADD} , y es obvio que $(\pi_{\delta t}^2) = Pe_{ADD} \sim 1$. Su relación con el Peclet clásico, $Pe_l = v^o l^o / \alpha$, es

$$Pe_{ADD} = \frac{v_o \delta_t^2}{\alpha l_o} = \left(\frac{\delta_t}{l_o} \right)^2 Pe_{l_o}$$

En cuanto al monomio asociado al cálculo ddt , su significado físico es

$$\begin{aligned} \pi_h &= h \left(\frac{l_o}{k v_o c'_e} \right)^{1/2} = \\ &= \left(\frac{h \delta_t}{k} \right) \left(\frac{\alpha l_o}{v_o \delta_t^2} \right)^{1/2} \sim \left(\frac{\underset{\text{superficie}}{\text{convección}}} {\underset{\text{superficie}}{\text{conducción}}} \right)^{1/2} \frac{\underset{\text{conducción}}{\delta_t}}{\underset{\text{convección-arrastre}}{\delta_t}} \sim 1 \end{aligned}$$

Como en el caso general, el balance (convección/conducción)_{superficie} = $h \delta_t / k$ se denomina Nu_{ADD}, con lo que también se cumple que Nu_{ADD} = Nu_{ADD} (l_o / δ_t).

Por último, para el otro caso asintótico $\delta_v \gg \delta_t$ o $Pr \gg 1$, la interpretación del monomio que resulta del cálculo del espesor de la capa límite es la misma, con la excepción de que v_o se sustituye por una velocidad característica v^* . Lo mismo ocurre con el monomio resultante del cálculo de h .

Es necesario poner de manifiesto de nuevo que los números clásicos que usualmente se emplean en la literatura científica para expresar las soluciones de este problema, excepto Pr, no representan ningún balance entre fuerzas o energías en la región donde tiene lugar la interacción, tanto mecánica como térmica entre la superficie sólida y el fluido (capas límites), por esta razón no juegan un papel independiente en las soluciones. No obstante, puede asociarse a dichos

números un significado geométrico relacionado con el tamaño relativo de las dimensiones lineales de la región anteriormente citada. En efecto, de los resultados obtenidos en los casos límite se deduce que

$$\text{Pr} \gg 1, \quad \text{Nu}_{l_o} \sim \text{Re}_{l_o}^{1/2} \sim \frac{l_o}{\delta_t}$$

$$\text{Pr} \ll 1, \quad \text{Nu}_{l_o} \sim \text{Pe}_{l_o}^{1/2} \sim \frac{l_o}{\delta_t}$$

con lo que dichos números están relacionados con el cociente entre la longitud característica de la placa en dirección paralela y la longitud característica térmica en dirección normal a la placa. Ambas longitudes definen la extensión de la región 2-D, donde existen gradientes de temperatura apreciables.

Si la disipación de energía mecánica en calorífica por fricción no es despreciable, el nuevo monomio que interviene en las soluciones se conoce con el nombre de "número de Eckert":

$$\pi = \text{Ec} = \frac{\rho v_o^2}{c'_e \Delta T}$$

cuya interpretación es energía cinética/calor absorbido. Combinando este monomio con el del espesor de la capa límite térmica, puede escribirse en la forma

$$\text{Ec} = \frac{(\nu v_o \Delta T / \nu_t^2) l_o}{c'_e \Delta T} \sim \frac{\text{trabajo de rozamiento}}{\text{calorabsorbido}}$$

un número adimensional discriminado, Ec_{ADD} , en la base adecuada para este tipo de problemas $\{L_{||}, L_{\perp}, S_{\perp}, Q, T, \theta\}$.

Ejemplo 5.23 Convección forzada laminar a lo largo de una placa horizontal con flujo uniforme de calor

En este caso, la definición de h en la forma $j/\Delta T$ conduce a los mismos monomios que el problema anterior (placa isotérmica) con idénticas interpretaciones físicas. Igualmente, los números adimensionales clásicos para este problema, Nu , Re_{l_o} y Pe_{l_o} no son adimensionales en el ADD ni representan balances de fuerzas o energías, sino cocientes de longitudes características u ocultas en el problema.

Ejemplo 5.24 Convección forzada a lo largo de una placa horizontal isotérmica con succión o inyección

Mientras que los números clásicos, de nuevo, no tienen significado físico en términos de balance de fuerzas o energías, ni son del orden de magnitud unidad, el monomio obtenido para el espesor de la capa límite,

$$\pi_1 = \frac{\rho U \delta_t^2}{\mu x} \left(\frac{\delta_t}{x} \right) \text{Re}_x \quad \text{Re}_{ADD} \quad 1$$

es un verdadero Reynolds ADD, balance de fuerzas de inercia y viscosas en la capa límite.

También el llamado “Blowing parameter”, que puede expresarse en la forma

$$\pi_2 = \frac{\rho v_o^2 x}{\mu U} = \left(\frac{\rho U \delta_t^2}{\mu x} \right) \left(\frac{v_o / \delta_t}{U/x} \right)^2 \sim \left(\frac{F_i}{F_v} \right) \left(\frac{\text{flujo máximo vertical}}{\text{flujo máximo horizontal}} \right)^2$$

Puede asegurarse que $\pi_2^{1/2} = \pi_{ADD}$ es del orden de magnitud unidad, lo cual no puede afirmarse estrictamente para el monomio π_2 .

Por otra parte, manipulando el monomio que proporciona la solución pará, se deduce que

$$\left(\frac{h}{k} \left(\frac{\mu x}{\rho U} \right)^{1/2} \right) = \frac{h \delta_t}{k} \left(\frac{\mu x}{\rho U \delta_t^2} \right)^{1/2} \sim \left(\frac{q_{conv}}{q_{cond}} \right)_{\text{superficie}} \left(\frac{F_v}{F_i} \right)^{1/2} \sim 1$$

Además, el balance (convección/conducción)_{superficie} es un verdadero y discriminado Nu_{ADD}, relacionado con los números dimensionales clásicos en la forma

$$Nu_{ADD} \sim Nu_x Re_x^{-1/2}$$

Ejemplo 5.25 Transmisión de calor entre un disco en rotación y un medio fluido viscoso infinito

Podemos considerar los siguientes balances en este problema:

$$\begin{aligned} \frac{F_i}{F_v} &= \frac{\rho \omega^2 R^2 / P}{\mu \omega R / \delta^{*2}} = \frac{\rho \omega R \delta^{*2}}{\mu P} \quad Re_{ADD} \sim 1 \\ \left(\frac{q_{conv}}{q_{cond}} \right)_{\text{superficie}} &= \frac{h \Delta T}{k \Delta T / \delta^*} = \frac{h \delta^*}{k} \quad Nu_{ADD} \sim 1 \end{aligned}$$

Con ellos puede buscarse el significado físico de los monomios adimensionales del problema. El primer monomio $\pi_2 = Pr$, es de significado ya conocido. El monomio π_1 , asociado al coeficiente de transmisión del calor, se escribe en la forma

$$\pi_1^{1/2} = \left(\frac{h^2 \mu P}{\rho \omega R k^2} \right)^{1/2} \left(\frac{h \delta^*}{k} \left(\frac{\mu P}{\rho \omega R \delta^*} \right)^{1/2} \left(\frac{q_{conv}}{q_{cond}} \right)_{\text{superficie}} \left(\frac{F_v}{F_i} \right)^{1/2} \right)^{-1}$$

Como en los problemas anteriores, en el caso general, tanto δ^* como h son una función de Pr . El producto $(\mu P / \rho \omega R)^{1/2} \varphi'(Pr)$, con φ' una función arbitraria, es el orden de magnitud de δ^* y, como δ^* y δ_v , Ejemplo 3.15, son del mismo orden de magnitud, puede concluirse que $\varphi'(Pr)$ es también del orden de la unidad. Naturalmente, también $Pr \sim 1$.

Los números clásicos, Nu_k , Re_R obtenidos mediante el ADC son ya conocidos y, como en problemas anteriores, no juegan un papel independiente en las funciones de δ^* y h .

Ejemplo 5.26 Convección forzada laminar sobre un cilindro en flujo transversal

Para todos los casos estudiados, el significado de los números que aparecen en este problema,

$$\Pi_{\delta t 1} = \delta_t \left(\frac{\mu s}{\rho U_s} \right)^{-1/2} \pi \pi, \quad = \bar{\delta t} = \Pi_{h2} = \frac{\mu c'_e}{\rho k} \left(\frac{\nu}{\alpha} \right) \Pr, \quad h_1 = \frac{h}{k} = \frac{\mu s}{\rho U_s}^{1/2}$$

$\delta_t \gg \delta_v$ o $Pr \ll 1$

$$\pi_{\delta t} = \delta_t \left(\frac{k s}{c'_e U_s} \right)^{-1/2} \delta_t \left(\frac{\alpha s}{U_s} \right)^{1/3}, \quad \pi_h = h \left(\frac{s}{k c'_e U_s} \right)^{1/2} \left(\frac{h}{k} \right) \left(\frac{\alpha s}{U_s} \right)^{1/2}$$

$\delta_v \gg \delta_t$ o $Pr \gg 1$

$$\pi_{\delta t} = \delta_t \left(\frac{c'_e U_s^*}{k s} \right)^{1/2} \delta_t \left(\frac{U_s^*}{\alpha s} \right)^{1/2}, \quad \pi_h = h \left(\frac{k s}{c'_e U_s^*} \right)^{1/2} \left(\frac{h}{k} \right) \left(\frac{\alpha s}{U_s^*} \right)^{1/2}$$

es idéntico al expuesto para el problema de la placa, sin más que sustituir l_o por el perímetro s . La igualdad numérica entre s y r permite, asimismo, cambiar s por r y obtener expresiones (numéricamente válidas, no dimensionalmente), más simples, para los monomios finales.

Ejemplo 5.27 Transmisión de calor por convección forzada laminar en el interior de tubos circulares

La inversa del monomio obtenido para la longitud de entrada térmica es un número de Peclet adimensional discriminado:

$$\pi_{Let}^{-1} = \frac{U c'_e D^2}{k L_{et}} = Pe_{ADD}$$

con el significado

$$Pe_{ADD} = \frac{U c'_e D^2}{k L_{et}} = \frac{c'_e U \Delta T / L_{et}}{k \Delta T / D^2} \sim \frac{q_{conv-arrastre}}{q_{cond-radial}}$$

Su orden de magnitud es obviamente la unidad.

En la región de entrada térmica e hidrodinámica, en el cálculo del perfil de temperaturas intervienen los monomios

$$\Pi_{1\bar{\Delta T}} = \frac{\Delta T(r)}{\Delta T_o} = \Pi_{2\Delta T} = \frac{r}{R}, \quad \Pi_T = \frac{\rho U R^2}{\mu z}, \quad \Pi_{4\Delta T} = \frac{\mu c'_e}{\rho k}$$

El primero y el segundo son la temperatura y la posición adimensionales; el tercero, en la forma

$$\Pi_{3\Delta T} = \frac{\rho U^2 z}{\mu U R^2} = \frac{F_i}{F_v} = 1$$

es un balance de fuerzas, y el último es el conocido número de Pr.

Para el cálculo de h tenemos los monomios

$$\Pi_{\frac{hD}{k}} = \frac{h D}{k} \Pi = \Pi_{2h} = \frac{\rho U D^2}{\mu z}, \quad \Pi_{3h} = \frac{\mu c'_e}{\rho k}$$

El primero es un verdadero Nu adimensional, Nu_{ADD}, con significado físico de calor por convección/calor por conducción radial aplicado a toda la región.

El significado de los otros dos ya se ha discutido con anterioridad.
En la región de entrada térmica surgen tres monomios:

$$\Pi_{1\bar{\Delta T}} = \frac{\Delta T(r)}{\Delta T_o} = \Pi_{2\Delta T} = \frac{r}{R}, \quad \Pi_{3\Delta T} = \frac{U c'_e R^2}{k z}$$

de los cuales, el tercero puesto en la forma

$$\pi_{3\Delta T} = \frac{c'_e U \Delta T / z}{k \Delta T / R^2}$$

vuelve a significar calor por convección arrastre/calor por conducción radial.

Para el coeficiente h en esta región, los monomios

$$\Pi_{\frac{hD}{k}} = \frac{h D}{k} \Pi = \Pi_{2h} = \frac{U c' D^2}{k z}$$

tienen un significado ya conocido.

Para la región completamente desarrollada, los monomios resultantes, tanto para el cálculo de la distribución de temperaturas como del coeficiente h , son

$$\Pi_{1\bar{\Delta T}} = \frac{\Delta T(r)}{\Delta T_m} \Pi = \Pi_{2\Delta T} = \frac{r}{R}, \quad \Pi_h = \frac{h D}{k} = \text{Nu}_D = \text{Nu}_{ADD}$$

y tienen un significado también conocido.

En esta misma región, bajo la hipótesis de existencia de conducción axial en el proceso intervienen los monomios

$$\Pi_{\bar{\pi},1} \frac{h D}{k_r} = ,_2 h \frac{k_r z}{c'_e U D},^3 h \frac{k_z}{c'_e U z}$$

cuyos significados son $\pi = Nu$, ya conocidos, y

$$\begin{aligned}\Pi_{\bar{\pi},2}^{-1} & \frac{c'_e U D^2}{k_r z} \frac{c'_e U \Delta T/z}{k_r \Delta T/D^2} Pe_{R,ADD} \frac{q_{conv-arrastre}}{q_{cond-radial}} \\ \Pi_{\bar{\pi},3}^{-1} & \frac{c'_e U z}{k_z} \frac{c'_e U \Delta T/z}{k_r \Delta T/z^2} Pe_{z,ADD} \frac{q_{conv-arrastre}}{q_{cond-axial}}\end{aligned}$$

ambos monomios son dos tipos de número de Peclet adimensional discriminado, verdaderos monomios π_{ADD} del orden de magnitud unidad.

Ejemplo 5.28 Convección natural en capa límite laminar a lo largo de una placa vertical isotérmica

Caso general

Para el caso general, los monomios resultantes son

$$\begin{aligned}\Pi_F \quad Pe &= ,_{2v} \Delta v^* (g\beta \Pi L)^{-1/2}, \quad ,_{2,\delta_v} \delta_v \left(\frac{g\beta \Delta T}{v^2 L} \right)^{1/4} \\ \Pi_{\bar{\pi},\delta_t} \quad \delta_t & \left(\frac{g\beta \Delta T}{v^2 L} \right)^{1/4}, \quad \left(\frac{h}{2h} \right) \frac{h}{k} \frac{v^2 L}{g\beta \Delta T}^{1/4}\end{aligned}$$

Si elevamos al cuadrado los monomios π_{2,v^*} , π_{2,δ_v} y π_{2,δ_t} tenemos

$$\begin{aligned}\pi_{2,v^*}^2 &= \frac{v^{*2}}{g\beta \Delta T L} \frac{\rho v^{*2}/L}{\rho g\beta \Delta T} \frac{F_i}{F_b} - 1 \\ \pi_{2,\delta_v}^2 &= \left(\frac{g\beta \Delta T \delta_v^4}{v^2 L} \right)^{1/2} \frac{\rho g\beta \Delta T}{\mu \delta_v^2 v^* / \mu}^{1/2} \frac{\rho v^{*2}/L}{v^*/v^2}^{1/2} \left(\frac{F_i}{F_b} \right)^{1/2} \frac{F_i}{F_v}^{1/2} - 1 \\ \pi_{2,\delta_t}^2 &= \left(\frac{g\beta \Delta T \delta_t^4}{v^2 L} \right)^{1/2} \frac{\rho g\beta \Delta T}{\mu \delta_t^2 v^* / \mu}^{1/2} \frac{\rho v^{*2}/L}{v^*/v^2}^{1/2} \sim \left(\frac{F_i}{F_b} \right)^{1/2} \frac{F_i}{F_v}^{1/2} - 1\end{aligned}$$

donde F_i , F_b y F_v son las fuerzas de inercia, flotación y viscosas, respectivamente. Adviértase que los balances que expresan $(\pi_{2,\delta_v})^2$ y $(\pi_{2,\delta_t})^2$ se refieren a regiones distintas. Se trata de tres nuevos monomios π_{ADD} , de orden de magnitud unidad, asociados a productos de balances de las fuerzas del problema (el primero es un balance directo). Dado que los anteriores (π_{2,v^*} , π_{2,δ_v} y π_{2,δ_t}) son raíces de estos

monomios, puede asegurarse que su orden de magnitud también es la unidad. El primero podemos denominarlo $\pi_{ADD,ib} = v^*{}^2 / (g\beta\Delta T L)$, el segundo y el tercero elevados a la cuarta potencia se denominarán números de Grashof adimensionales discriminados asociados a δ_v y δ_t , respectivamente

$$Gr_{ADD\delta_v} = \frac{g\beta \Delta T \delta_v^4}{\nu^2 L} \quad 1, = \quad Gr_{ADD\delta_t} = \frac{g\beta \Delta T \delta_t^4}{\nu^2 L} \quad 1$$

Naturalmente, esto no significa que los monomios anteriores determinen, de manera completa, las incógnitas v^* , δ_t y δ_v , sino que estos cocientes, como se ha demostrado en el Ejemplo 5.28, vienen ponderados por una función de Pr. Para el caso, pues, en el que las tres fuerzas son del mismo orden de magnitud, las afirmaciones anteriores nos dicen que las funciones $\varphi_1(Pr)$, $\varphi_4(Pr)$ y $\varphi_7(Pr)$ que aparecen en las soluciones de v^* , δ_t y δ_v , son también del orden de magnitud unidad. Como consecuencia de lo anterior, en términos del número de Gr clásico, Gr_L , las variables v^* , δ_t y δ_v se expresan en la forma

$$\delta_v \sim L \quad Gr_L^{-1/4}, \quad v^* \sim \left(\frac{\nu}{L}\right) \quad Gr_L^{1/2}, \quad \delta_t \sim L \quad Gr_L^{-1/4}$$

lo que permite relacionar el Gr_L , cuya ecuación de dimensiones en el ADD es $L^4 \cdot T^4$, con los Gr_{ADD} y asociar un significado físico (geométrico, $(L/\delta^*)^4$)

$$Gr_{ADD\delta_v} = \left(\frac{\delta_v}{L}\right)^4 \quad Gr_L \cdot G \quad Gr_{ADD\delta_t} = \left(\frac{\delta_t}{L}\right)^4 \quad Gr_L$$

De estas expresiones resulta que $\delta_v = \delta_t$; es decir, el transporte de momento y el de calor tienen lugar en regiones cuyo espesor es del mismo orden de magnitud. Así, las difusividades del momento y del calor son del mismo orden de magnitud, o sea $Pr \approx 1$.

Esta conclusión pone de manifiesto el papel de Gr_L en el caso general. Mills [1995], empleando argumentos de análisis de escala (Bejan [1984]) deduce que $Pr \sim 1$ bajo esta hipótesis.

Gröber y Erk [1933] son los únicos autores que dan a $(\pi_{2,\delta_v})^2$ el significado de F_b/F_v . En contraste, muchos autores asocian el significado F_b/F_v a otros monomios adimensionales no discriminados. Por ejemplo, para Cebeci [2002], Incro-

pera y De Witt [1996], $F_b/F_v = g\beta\Delta T L^2/\nu^2$ es Gr_L^2 , mientras que para Gröber y Erk [1933], $Gr_L = F_i F_b/F_v^2$ y para Arpacı y Larsen [1984] $Ra_L = F_b/F_v$.

En relación con el monomio asociado a la determinación de h , el significado es

$$\begin{aligned} \pi_{2h} &= \left(\frac{h}{k}\right) \left(\frac{\nu^2 L}{g\beta \Delta T}\right)^{1/4} = \\ &= \left(\frac{h \delta_t}{k}\right) \left(\frac{\nu^2 L}{g\beta \Delta T \delta_t^4}\right)^{1/4} \sim \left(\frac{q_{conv}}{q_{cond}}\right)_{superficie} \frac{F_v}{F_b}^{1/4} \left(\frac{F_v}{F_i}\right)^{1/4} \sim 1 \end{aligned}$$

un monomio del orden de magnitud unidad. Llamando Nu_{ADD} al balance de energía anterior (un verdadero π_{ADD}),

$$\text{Nu}_{\text{ADD}} = \frac{h \delta_t}{k} \sim \frac{h \Delta T}{k \Delta T / \delta_t} \left(\frac{q_{\text{conv}}}{q_{\text{cond}}} \right)_{\text{superficie}}^{1/2} 1$$

una especie de número de Nusselt adimensional discriminado (Madrid y Alhama, [2005]), cuya relación con el Nu clásico, de ecuación dimensional $[\text{Nu}] \#_y L_x$, es

$$\text{Nu}_{\text{ADD}} = (\delta_t/L)\text{Nu}_L$$

Casos límites

Para $\text{Pr} \gg 1$, los monomios obtenidos son

$$\begin{aligned} \Pi_{v^*} &= v^* \left(\frac{\nu}{g\beta\Delta T L \alpha} \right)^{1/2}, \quad \delta_t = \delta_t \left(\frac{g\beta\Delta T}{\nu\alpha L} \right)^{1/4} \\ \Pi_{\delta_t} &= \delta_t \left(\frac{v^*}{\nu L} \right)^{1/2}, \quad h = \left(\frac{h}{k} \right) \left(\frac{\nu\alpha L}{g\beta\Delta T} \right)^{1/4} \end{aligned}$$

Partiendo de los balances de fuerzas y energías que rigen en este proceso,

$$\begin{aligned} \frac{F_b}{F_v} &= \frac{\rho g \beta g \Gamma}{\mu v^* / \delta_t^2} = \frac{\beta \Delta T / \delta_t^2}{\nu v^*} \sim 1 \\ \frac{q_{\text{conv-arrastre}}}{q_{\text{cond}}} &= \frac{c_p v^* \Delta T / L}{k \Delta T / \delta_t^2} = \frac{v^* \delta_t^2}{\alpha L} \sim 1 \end{aligned}$$

los significados de los monomios π_{v^*} y π_{δ_t} se interpretan en términos de balances en la forma

$$\begin{aligned} &= \Pi_{v^*} \left(\frac{\nu v^{*2}}{v \# g \alpha \Delta T L} \right)^{1/2} \left(\frac{v^* \delta_t^2}{L} \right)^{1/2} \left(\frac{\nu v^*}{g \beta \Delta T \delta_t^2} \right)^{1/2} \left(\frac{q_{\text{conv-arrastre}}}{q_{\text{cond}}} \right)^{1/2} \left(\frac{F_v}{F_b} \right)^{1/2} 1 \\ &= \Pi_{\delta_t} \left(\frac{g \beta \Delta T \delta_t^4}{\nu \alpha L} \right)^{1/4} \left(\frac{v^* \delta_t^2}{\alpha L} \right)^{1/4} \left(\frac{g \beta \Delta T \delta_t^2}{\nu v^*} \right)^{1/4} \left(\frac{q_{\text{conv-arrastre}}}{q_{\text{cond}}} \right)^{1/4} \left(\frac{F_b}{F_v} \right)^{1/4} 1 \end{aligned}$$

Hemos escrito orden de magnitud unidad para las expresiones anteriores merced al exponente (raíz cuadrada y raíz cuarta) de balances que son forzosamente del orden de magnitud unidad, afirmación que no puede establecerse en el caso de que hubieran sido potencias de números enteros. Se trata, indudablemente, de significados físicos complejos, sin duda relacionados con la naturaleza conjugada del problema, que entrañan un acoplamiento entre los fenómenos mecánico y térmico. Tales expresiones las utilizan Arpací y Larsen [1984], quienes incluyen un exhaustivo estudio mediante análisis dimensional de los procesos de transferencia de calor en convección forzada y natural.

Llamaremos

$$\begin{aligned} Pe_{ADD} &= \frac{v^* \delta_t^2}{\alpha L} \sim \frac{q_{conv-arrastre}}{q_{cond}} \sim 1 \\ Ra_{ADD} &= \frac{4}{\delta_t} \sim \frac{g \beta \Delta T \delta_t^4}{\nu \alpha L} \left(\frac{q_{conv-arrastre}}{q_{cond}} \right) \left(\frac{F_b}{F_i} \right) \sim 1 \end{aligned}$$

En cuanto al monomio π_{δ_v} , su cuadrado representa un balance entre fuerzas de inercia y viscosas en la región fuera de la capa límite térmica (Figura 4.9), un Re_{ADD} ,

$$\pi_{\delta_v}^2 = \frac{v^* \delta_v^2}{\nu L} = \frac{\rho v^{*2}/L}{\mu v^*/\delta_v^2} = \frac{F_i}{F_v} \sim 1$$

En relación con el coeficiente de transferencia de calor, h , partiendo del balance

$$\left(\frac{q_{conv}}{q_{cond}} \right)_{superficie} = \frac{h \Delta T}{k \Delta T / \delta_t} = \frac{h \delta_t}{k} \sim Nu_{ADD} \sim 1$$

al que hemos denominado Nu_{ADD} (un verdadero monomio π), el monomio π_h obtenido se interpreta en la forma

$$= \pi_h \left(\frac{h \delta_t}{k} \right) \left(\frac{\nu \alpha L}{g \beta \Delta T \delta_t^4} \right)^{1/4} \left(\frac{q_{conv}}{q_{cond}} \right)_{superficie} \left(\frac{F_v}{F_b} \right)^{1/4} \frac{q_{cond}}{q_{conv-arrastre}} \sim 1$$

La relación entre los números adimensionales ADD y los clásicos (haciendo uso en Ra_{ADD} de la expresión de v^* obtenida en el problema)

$$Ra_{ADD} = (\delta_t/L)^4 Ra_L$$

$$Pe_{ADD} = (\delta_t/L)^2 Pe_L$$

$$Nu_{ADD} = (\delta_t/L) Nu_L$$

$$Re_{ADD} = (\delta_t/L)^2 Re_L$$

permite asociar a los últimos órdenes de magnitud en términos de la relación de aspecto (δ_t/L) , $Ra_L \sim (L/\delta_t)^4$, $Pe_L \sim (L/\delta_t)^2$, $Nu_L \sim (L/\delta_t)$ y $Re_L \sim (L/\delta_t)^2$, así como determinar sus ecuaciones dimensionales, $[Ra] = L_y^4 L_x^{-4}$, $[Pe] = L_y^2 L_x^{-2}$, $[Nu] = L_y L_x^{-1}$ y $[Re] = L_y^2 L_x^{-2}$. En términos de orden de magnitud es inmediato deducir que $Nu_L \ll Pe \ll Ra$; en concreto, $Nu_L \sim Pe_L (\delta_t/L) \sim Ra_L (\delta_t/L)^3$.

Para el otro caso límite, $Pr \ll 1$, las fuerzas viscosas son despreciables y, de nuevo, tanto el balance entre las fuerzas F_i y F_b como entre los flujos de calor por convección y conducción, ambos del mismo orden de magnitud unidad, nos

conducen directamente a asociar significados físicos a los monomios deducidos por ADD. En efecto,

$$\frac{F_b}{F_i} = \frac{\rho g \beta \Delta T}{\rho v^* L} \sim \frac{g \beta \Delta T L}{v^* \delta_t^2} \sim 1$$

$$\frac{q_{\text{conv-arrastre}}}{q_{\text{cond}}} = \frac{c_v' v^* \Delta T / L}{k \Delta T / \delta_t^2} = \alpha v L \sim Pe_{\text{ADD}} \sim 1$$

donde Pe_{ADD} es un número adimensional discriminado cuya relación con el clásico Pe_L es inmediata en términos de las magnitudes geométricas que definen la capa límite térmica, L y δ_t . El monomio π_{δ_t} , en función de los balances anteriores, tiene el siguiente significado físico:

$$= \Pi_{\delta_t} \left(\frac{g \beta \Delta T \delta_t^4}{\alpha^2 L} \right)^{1/4} \left(\frac{F_b}{F_i} \right)^{1/4} \left(\frac{q_{\text{conv-arrastre}}}{q_{\text{cond}}} \right)^{1/2} \sim 1$$

A la cuarta potencia de este monomio la denominamos Bo_{ADD} :

$$Bo_{\text{ADD}} = \left(\frac{g \beta \Delta T \delta_t^4}{\alpha^2 L} \right) \left(\frac{F_b}{F_i} \right) \left(\frac{q_{\text{conv-arrastre}}}{q_{\text{cond}}} \right)^2 \sim 1$$

El monomio relacionado con $\delta_{v-\max}$ escrito en la forma

$$\frac{g \beta \Delta T \delta_{v-\max}^2}{\nu v^*} = \frac{g \beta \Delta T}{\nu v^* / \delta_{v-\max}^2} \sim \frac{F_b}{F_v} \sim 1$$

es un balance entre fuerzas de flotación y fuerzas viscosas en la región considerada (Ejemplo 5.28).

En relación con h , partiendo balance

$$\left(\frac{q_{\text{conv}}}{q_{\text{cond}}} \right)_{\text{superficie}} = \frac{h \Delta T}{k \Delta T / \delta_t} = \frac{h \delta_t}{k} \sim Nu_{\text{ADD}} \sim 1$$

el monomio π_h obtenido se interpreta en la forma

$$= \Pi_h \left(\frac{h \delta_t}{k} \right) \left(\frac{\alpha^2 L}{\nu v^* \beta \Delta T \delta_t^4} \right)^{1/4} \left(\frac{q_{\text{conv}}}{q_{\text{cond}}} \right)_{\text{superficie}}^{1/4} \left(\frac{F_b}{F_v} \right)^{1/4} \left(\frac{q_{\text{cond}}}{q_{\text{conv-arrastre}}} \right)^{1/4} \sim 1$$

La relación entre los números adimensionales ADD y los clásicos (haciendo uso para el Bo_{ADD} de la expresión de la velocidad v^* obtenida en el problema)

$$Bo_{\text{ADD}} = (\delta_t / L)^4 Bo_L$$

$$Pe_{\text{ADD}} = (\delta_t / L)^2 Pe_L$$

$$Nu_{\text{ADD}} = (\delta_t / L) Nu_L$$

permite asociar a los últimos órdenes de magnitud en términos de la relación de aspecto (δ_t/L), $Bo_L \sim (L/\delta_t)^4$, $Pe_L \sim (L/\delta_t)^2$ y $Nu_L \sim (L/\delta_t)$, así como determinar sus ecuaciones dimensionales, $[Bo_L] = L_y^4 L_x^{-4}$, $[Pe_L] = L_y^2 L_x^{-2}$ y $[Nu_L] = L_y L_x^{-1}$. Ver también que en términos de orden de magnitud es inmediato deducir que $Nu_L \ll Pe_L \ll Bo_L$; en concreto, $Nu_L \sim Pe_L (\delta_t/L) \sim Bo_L (\delta_t/L)^3$.

Como resumen de este apartado, la Tabla 5.4 muestra los resultados de los

casos límites $Pr \gg 1$ y $Pr \ll 1$, donde la influencia independiente del número de Pr es despreciable. Como advertimos en la tabla, $Ra_L^{1/2}$ y $Bo_L^{1/2}$ (para $Pr \gg 1$ y $Pr \ll 1$, respectivamente) tienen el mismo orden de magnitud que el número de Peclet clásico, Pe_L . Idéntica conclusión puede obtenerse para $Ra_L^{1/4}$ y $Bo_L^{1/4}$ en relación con Nu_L . Esta incoherencia, en relación con la independencia entre números clásicos, no surge en el ADD ya que solo interviene un número adimensional resultado de acoplar los anteriores. Los nuevos números adimensionales discriminados del ADD poseen las siguientes características: i) son realmente (discriminadamente) adimensionales, ii) juegan un papel independiente en las soluciones, lo que está conectado a i), iii) tienen un significado físico en términos de balances en la región donde están definidos, y iv) como consecuencia de iii), elegidos convenientemente, son del orden de magnitud unidad.

En cuanto a los números clásicos, por ejemplo en el caso de $Pr \gg 1$, Ra es del orden de magnitud de “la cuarta potencia de la razón de esbeltez, I_d^4 , de la capa límite (Bejan [1995])”, o “el cuadrado de la velocidad adimensional discriminada”,

Tabla 5.4

Resumen de los números adimensionales ADD. Significado físico y relación con los números clásicos

$1 \gg Pr$	$1 \ll Pr$
$Ra_{ADD} \sim \left(\frac{q_{conv-arrastre}}{q_{cond}} \right)^2 \left(\frac{F_b}{F_v} \right) \sim 1$ $Ra_{ADD} = (\delta_t/L)^4 Ra_L$ $\frac{q_{conv-arrastre}}{q_{cond}} = Pe_{ADD} = \left(\frac{\delta_t}{L} \right)^2 Pe_L \sim$ $\left(\frac{q_{conv}}{q_{cond}} \right)_{superficie} = Nu_{ADD} = \left(\frac{\delta_t}{L} \right) Nu_L \sim 1$	$Bo_{ADD} \sim \left(\frac{q_{conv-arrastre}}{q_{cond}} \right)^2 \left(\frac{F_b}{F_i} \right) \sim 1$ $Bo_{ADD} = (\delta_t/L)^4 Bo_L$ $\frac{q_{conv-arrastre}}{q_{cond}} = Pe_{ADD} = \left(\frac{\delta_t}{L} \right)^2 Pe_L \sim$ $\left(\frac{q_{conv}}{q_{cond}} \right)_{superficie} = Nu_{ADD} = \left(\frac{\delta_t}{L} \right) Nu_L \sim 1$
$Nu_L \sim Ra_L^{1/4}$ $Pe_L \sim Ra_L^{1/2}$ $Ra_L \sim (L/\delta_t)^4$ $Pe_L \sim (L/\delta_t)^2$ $Nu_L \sim L/\delta_t$	$Nu_L \sim Bo_L^{1/4}$ $Pe_L \sim Bo_L^{1/2}$ $Bo_L \sim (L/\delta_t)^4$ $Pe_L \sim (L/\delta_t)^2$ $Nu_L \sim L/\delta_t$

$v^*/(\alpha/L)$ " que, a su vez, es el número de Peclet o "la cuarta potencia de coeficiente de transferencia de calor adimensional (no discriminado), $h/(kL)$ " que, a su vez, es el número de Nusselt, Nu_L . Significados físicos similares, que carecen de interés práctico, pueden buscarse para los números clásicos Gr_L en el caso general, y Bo_L , para $Pr \ll 1$, números invariablemente unidos a Pr . Así, el significado físico que puede atribuirse a Bo_L es el mismo que el que se asignó al de Ra_L en el caso

$Pr \gg 1$, por ejemplo, "la cuarta potencia de la relación de aspecto -esbeltez- de la región de capa límite, $L/\delta_{v\text{-max}}$ ". Mientras que Gr_L es del orden de magnitud de la cuarta potencia de la relación de aspecto -esbeltez- $L/\delta_{v\text{-max}}$ ".

Ejemplo 5.29 Convección natural laminar a lo largo de una placa vertical con flujo de calor conocido

Caso general

Teniendo en cuenta que intervienen las tres fuerzas, inercia, viscosas y flotación, y usando la condición de contorno $j_o \sim k\Delta T/\delta_t$, en términos de orden de magnitud para expresar ΔT en función de j_o , pueden considerarse los siguientes balances, todos del orden de la unidad:

$$\begin{aligned} \frac{F_b}{F_v} &= \frac{g\beta \Delta T g}{v \cdot \frac{\delta_t^2}{t}} = \frac{\beta \Delta T \delta_t^2}{v^* k} \sim 1 \\ \frac{F_b}{F_i} &= \frac{g\beta \Delta T}{v^{*2}/y} = \frac{g\beta \Delta T y}{v^{*2}} = \frac{g\beta j_o \delta_t y}{v^{*2} k} \sim 1 \\ \frac{F_i}{F_v} &= \frac{v^{*2}/y}{\nu v^*/\delta_t^2} = \frac{v^* \delta_t^2}{\nu y} \sim 1 \end{aligned}$$

Por otro lado, los balances de energías son

$$\begin{aligned} \frac{q_{\text{conv-arrastre}}}{q_{\text{cond}}} &= \frac{v^* \delta_t^2}{\alpha y} \sim 1 \\ \left(\frac{q_{\text{conv}}}{q_{\text{cond}}} \right)_{\text{superficie}} &= \frac{h \delta_t}{k} \sim 1 \end{aligned}$$

Los monomios surgidos en este problema son los siguientes:

$$\pi_1 = Pr$$

$$\begin{aligned} \pi_{2v} &= v^* \left(\frac{k^2 \rho^3}{\mu F_{b,T} j_o^2 y^3} \right)^{1/5} = \left(\frac{k^2 v^{*5}}{\nu (g\beta)^2 j_o^2 y^3} \right)^{1/5} \\ \pi_{2\delta_t} &= \delta_t \left(\frac{\rho F_{b,T} j_o}{\mu^2 k y} \right)^{1/5} = \left(\frac{g\beta j_o \delta_t^5}{\nu^2 k y} \right)^{1/5} \end{aligned}$$

$$\pi_{2,\Delta T} = T_y \left(\frac{\rho F_{b,T} k^4}{\mu^2 j_o^4 y} \right)^{1/5} \quad \pi_h = \left(\frac{h_y}{j_o} \right) \left(\frac{\mu^2 j_o^4 y}{\rho F_{b,T} k^4} \right)^{1/5} = \left(\frac{v^2 h_y^5 y}{g \beta j_o k^4} \right)^{1/5}$$

El primero de ellos, Pr , ya ha sido estudiado. El resto, usando las expresiones de los balances anteriores y la condición de contorno $j_o \sim k\Delta T/\delta_t$, tienen el significado físico siguiente:

$$\begin{aligned}\pi_{2,v} &\sim \left(\frac{F_i}{F_b} \right)^{2/5} \frac{F_i}{F_v}^{1/5} \sim 1 \\ \pi_{2,\delta_t} &\sim \left(\frac{F_b}{F_v} \right)^{1/5} \frac{F_i}{F_v}^{1/5} \sim 1 \\ \pi_{2,\Delta T} &\sim \left(\frac{F_b}{F_v} \right)^{1/5} \frac{F_i}{F_v}^{1/5} \sim 1 \\ \pi_h &\sim \left(\frac{q_{\text{conv}}}{q_{\text{cond}}} \right) \left(\frac{F_v}{F_b} \right)^{1/5} \left(\frac{F_v}{F} \right)^{1/5} \sim 1\end{aligned}$$

(una vez más se ha puesto en las expresiones anteriores el orden de magnitud unidad de acuerdo con los razonamientos expuestos en el ejemplo anterior de la placa isotérmica). A la vista de estos sorprendentes y complejos resultados cabe preguntarse cuál es el origen de los mismos. Sin duda, la explicación se basa en primer lugar en la aparición de más de un monomio en el cálculo de las incógnitas; y, en segundo lugar, en la forma en la que se han buscado los monomios en los que intervienen las incógnitas. Por ejemplo, en la determinación de v^* aparecen dos monomios: el número de Pr y $\pi_{2,v}$; pero el segundo de ellos podría haber sido expresado de forma diferente combinando Pr y $\pi_{2,\Delta T}$, con lo que la expresión en términos de balances del nuevo $\pi_{2,v}$ sería otra. Lo mismo ocurriría con la determinación de las otras incógnitas. De este modo, la interpretación física de los monomios finales puede ser diferente según haya sido el proceso de cálculo seguido en su deducción.

Con el fin de compatibilizar la nomenclatura usada para designar los números adimensionales clásicos, llamaremos

$$\text{Gr}_{\text{ADD}}^* = \frac{5}{2\Delta T} \frac{g\beta j_o \delta_t^5}{v^2 k y}, \quad \text{Nu}_{\text{ADD}} = \frac{h \delta_t}{k}$$

con lo que la relación de estos números con los clásicos es

$$\text{Gr}_{\text{ADD}}^* = \left(\frac{\delta_t}{y} \right)^5 \text{Gr}_y^*, \quad \text{Nu}_{\text{ADD}} = \frac{\delta_t}{y} \text{Nu}_y$$

poniendo de manifiesto que los números clásicos no son adimensionales en el ADD, ni del orden de magnitud unidad, y su significado físico es el cociente entre magnitudes geométricas del problema.

Casos límites

Para $\text{Pr} \gg 1$ las fuerzas de inercia son despreciables frente a las de flotación y a las viscosas (ambas del mismo orden de magnitud). En consecuencia, solo es posible considerar los siguientes balances:

$$\begin{aligned}\frac{F_b}{F_v} &\sim \frac{g\beta v \Delta T}{v^* \delta_t^2} = \frac{g\beta \Delta T \delta_t^2}{v^* k} = 1 \\ \frac{q_{\text{conv-arrastre}}}{q_{\text{cond}}} &\sim \frac{v^* \delta_t^2}{\alpha v y} = Pe_{\text{ADD}} \sim 1 \\ \left(\frac{q_{\text{conv}}}{q_{\text{cond}}} \right)_{\text{superficie}} &\sim \frac{h \delta_t}{k} = Nu_{\text{ADD}} \sim 1\end{aligned}$$

Los monomios obtenidos son

$$\begin{aligned}\pi_{v^*} &= v^* \left(\frac{\mu^2 c_e'^3}{k F^{2T} j_o y^3} \right)^{1/5} = \left(\frac{23 v^5 \nu k}{\mu k^2 y} \right)^{1/5} \\ \pi_{\delta_t} &= \delta_t \left(\frac{F_{b,T} j_o c_e'}{\mu k^2 y} \right)^{1/5} = \frac{g\beta j_o \delta_t^5}{\nu \alpha k y} \\ \pi_{\Delta T} &= T_y \left(\frac{F_{b,T} c_e' k^3}{\mu j_o^4 y} \right)^{1/5} = \left(\frac{g\beta c_e' k^3 \Delta T_y^5}{\nu j_o^4 y} \right)^{1/5} \\ \pi_h &= \frac{h_y}{k} \left(\frac{\mu k^2 y}{F_{b,T} j_o c_e'} \right)^{1/5} = \left(\frac{\nu y \alpha h_y^5}{g\beta j_o k^4} \right)^{1/5}\end{aligned}$$

Sus significados, teniendo en cuenta que $j_o \sim k (\Delta T / \partial t)$, son

$$\begin{aligned}\pi_{v^*} &\sim \left(\frac{F_v}{F_b} \right)^{2/5} \left(\frac{q_{\text{conv-arrastre}}}{q_{\text{cond}}} \right)^{3/5} \sim 1 \\ \pi_{\Delta T} &\sim \left(\frac{F_b}{F_v} \right)^{1/5} \left(\frac{q_{\text{conv-arrastre}}}{q_{\text{cond}}} \right)^{1/5} \sim 1 \\ \pi_h &\sim \left(\frac{q_{\text{conv}}}{q_{\text{cond}}} \right)_{\text{superficie}}^{1/5} \left(\frac{F_v}{F_b} \right)^{1/5} \sim 1\end{aligned}$$

Llamaremos a $(\pi_{\delta_t})^5 = Ra_{\text{ADD}}^*$, con lo que la relación con el Ra_y^* clásico es

$$Ra_{\text{ADD}}^* = (\delta_t / y)^4 Ra_y^*$$

Para $\text{Pr} \ll 1$ se desprecian las fuerzas viscosas y, en consecuencia, los balances que rigen son los siguientes:

$$\begin{aligned}\frac{F_b}{F_i} &= \frac{g\beta g y}{v^* y} = \frac{\nu \beta_o \delta_t}{v^{*2} k} \sim 1 \\ \frac{q_{\text{conv-arrastre}}^{*2}}{q_{\text{cond}}} &\sim \frac{y \delta_t}{\alpha v^* y} = Pe_{\text{ADD}} \sim 1 \\ \left(\frac{q_{\text{conv}}}{q_{\text{cond}}} \right)_{\text{superficie}} &\sim \frac{h \delta_t}{k} = Nu_{\text{ADD}} \sim 1\end{aligned}$$

Los monomios obtenidos son

$$\begin{aligned}\pi_{v^*} &= \left(\frac{k^2 v^{*2}}{\alpha (g\beta)^2 j_o^2 y^3} \right), \quad \left(\frac{g\beta j_o (\delta_t^5)}{\alpha^2 k y} \right)_{\Delta T}, \quad \left(\frac{g\beta k^2 c_e'^2 \Delta T^5}{j_o^4 y} \right), \\ \pi_h &= \left(\frac{\alpha^2 y h^5}{g\beta j_o k^4} \right)\end{aligned}$$

Sus significados, teniendo en cuenta que $j_o \sim k (\Delta T / \delta_t)$, son

$$\begin{aligned}\pi_{v^*} &\sim \left(\frac{F_i}{F_b} \right)^{2/5} \left(\frac{q_{\text{conv-arrastre}}}{q_{\text{cond}}} \right)^{1/5} \sim 1 \\ \pi_{\delta_t} &\sim \left(\frac{F_b}{F_i} \right)^{1/5} \left(\frac{q_{\text{conv-arrastre}}}{q_{\text{cond}}} \right)^{2/5} \sim 1 \\ \pi_h &\sim \left(\frac{q_{\text{conv}}}{q_{\text{cond}}} \right)_{\text{superficie}} \left(\frac{q_{\text{cond}}}{q_{\text{conv-arrastre}}} \right)^{2/5} \left(\frac{F_i}{F_b} \right)^{1/5} \sim 1\end{aligned}$$

Llamaremos a $(\pi_{\delta_t})^5 = Bo_{\text{ADD}}^*$, con lo que la relación con el Bo_y^* clásico es

$$Bo_{\text{ADD}}^* = (\delta_t / y)^4 Bo_y^*$$

Como resumen de este apartado, la Tabla 5.5 muestra los resultados de los casos límites $\text{Pr} \gg 1$ y $\text{Pr} \ll 1$, donde la influencia independiente del número de Pr es despreciable. Como advertimos en la tabla, Ra_y^{*5} y $Bo_y^{*2/5}$ (para $\text{Pr} \gg 1$ y $\text{Pr} \ll 1$, respectivamente) tienen el mismo orden de magnitud que el número de Peclet clásico, Pe_y . Una conclusión similar puede obtenerse para $Ra_y^{*1/5}$ y $Bo_y^{*1/5}$ en relación con Nu_y . Esta incoherencia, en relación con la independencia entre números clásicos, no surge en el ADD, ya que solo interviene un número adimensional resultado de acoplar los anteriores. De nuevo, los nuevos números adimensionales discriminados surgidos en este problema disfrutan de las características mencionadas en el caso de la placa isotérmica.

Tabla 5.5

Resumen de los números adimensionales ADD. Significado físico y relación con los números clásicos

Pr*	Pr†
$\text{Ra}_{\text{ADD}}^* \sim \left(\frac{q_{\text{conv-arrastre}}}{q} \right)^{\frac{F_b}{F}} \sim 1$ $\text{Ra}_{\text{ADD}}^* = \left(\delta_t/y \right)^4 \text{Ra}_y^*$ $\frac{q_{\text{conv-arrastre}}}{q_{\text{cond}}} = \text{Pe}_{\text{ADD}} = \left(\frac{\delta_t}{y} \right)^2 \text{Pe}_y^* \sim 1$ $\left(\frac{q_{\text{conv}}}{q_{\text{cond}}} \right)_{\text{superficie}} = \text{Nu}_{\text{ADD}} = \left(\frac{\delta_t}{y} \right) \text{Nu}_y \sim 1$	$\text{Bo}_{\text{ADD}}^* \sim \left(\frac{q_{\text{conv-arrastre}}}{q} \right)^2 \left(\frac{F_b}{F} \right) \sim 1$ $\text{Bo}_{\text{ADD}}^* = \left(\delta_t/y \right)^4 \text{Bo}_y^*$ $\frac{q_{\text{conv-arrastre}}}{q_{\text{cond}}} = \text{Pe}_{\text{ADD}} = \left(\frac{\delta_t}{y} \right)^2 \text{Pe}_y^* \sim 1$ $\left(\frac{q_{\text{conv}}}{q_{\text{cond}}} \right)_{\text{superficie}} = \text{Nu}_{\text{ADD}} = \left(\frac{\delta_t}{y} \right) \text{Nu}_y \sim 1$
$\text{Nu}_y \sim \text{Ra}_y^{*1/5}$ $\text{Pe}_y \sim \text{Ra}_y^{*2/5}$ $\text{Ra}_y^* \sim (y/\delta_t)^5$ $\text{Pe}_y \sim (y/\delta_t)^2$ $\text{Nu}_y \sim y/\delta_t$	$\text{Nu}_y \sim \text{Bo}_y^{*1/5}$ $\text{Pe}_y \sim \text{Bo}_y^{*2/5}$ $\text{Bo}_y^* \sim (y/\delta_t)^5$ $\text{Pe}_y \sim (y/\delta_t)^2$ $\text{Nu}_y \sim y/\delta_t$

En cuanto a los números clásicos, por ejemplo en el caso de $\text{Pr} \gg 1$, Ra_y^* es del orden de magnitud de “la quinta potencia de la razón de esbeltez, y/δ_t , de la capa límite (Bejan [1995])”, o “la potencia 5/2 de la velocidad adimensional (no discriminada), $v^*/(\alpha/y)$ ” que, a su vez, es el número de Peclet, o “la quinta potencia de coeficiente de transferencia de calor adimensional (no discriminado) $h/(k/y)$ ” que, a su vez, es el número de Nusselt, Nu_y . Significados físicos similares, que carecen de interés práctico, pueden buscarse para los números clásicos Ra_y^* en el caso $\text{Pr} \gg 1$, y Bo_y^* para $\text{Pr} \ll 1$, números inváridamente unidos a Pr . Así, el significado físico que puede atribuirse a Bo_y^* es el mismo que se asignó al de Ra_y^* en el caso $\text{Pr} \gg 1$, por ejemplo “la quintapotencia de la relación de aspecto-esbeltez- de la región de capa límite, y/δ_t ”.

Ejemplo 5.30 Convección combinada para una placa vertical isotérmica

Además de intervenir los números adimensionales ya mencionados en los apartados de convección forzada y convección natural, cuyo significado ya se ha discutido, aparece aquí un nuevo número cuyo significado fue preciso adelantar en el Capítulo 4 para justificar su influencia en este problema. Se trata del número de flotación que repetimos de nuevo:

$$\frac{\text{Gr}_L}{\text{Re}_L^2} = \frac{g \beta \Delta T L}{v_o^2} = \frac{\rho g \beta \Delta T}{\rho v_o^2 / L} \frac{F_b}{F_i} \sim 1$$

Este número define la influencia preponderante de la convección forzada o la convección natural en el proceso conjugado.

Caso límite $\text{Pr} \ll 1, \delta_t \gg \delta_v$

El significado de $\pi_{\delta t,1}$ es

$$= \Pi_{\delta t,1}^{t,1} \left(\frac{g \beta \Delta T \delta_t^4}{\alpha^2 L} \right)^{1/4} \left(\frac{F_i}{F_b} \right)^{1/4} \left(\frac{q_{\text{conv-arrastre}}}{q_{\text{cond}}} \right)^{1/2} 1$$

El significado de $\pi_{h,1}$ es

$$= \Pi_{h,1}^{t,1} h \left(\frac{L}{g \beta \Delta T k^2 c_e'^2} \right)^{1/4} \left(\frac{q_{\text{conv}}}{q_{\text{cond}}} \left(\frac{F_i}{F_b} \right)^{1/4} \frac{q_{\text{cond}}}{q_{\text{conv-arrastre}}} \right)^{1/2} 1$$

mientras que el de $\pi_{h,2} = \rho v_o^2 / (F_b \Delta T L)$ es

$$\Pi_{h,2}^{t,1} = \frac{v_o^2}{g \beta \Delta T L} \frac{F_i}{F_b} 1$$

Caso límite $\text{Pr} \gg 1, \delta_t \ll \delta_v$

El significado de $\pi_{\delta t,1}$ es

$$= \Pi_{\delta t,1}^{t,1} \left(\frac{g \beta \Delta T \delta_t^4}{\nu \alpha L} \right)^{1/4} \left(\frac{F_b}{F_i} \right)^{1/4} \left(\frac{q_{\text{conv-arrastre}}}{q_{\text{cond}}} \right)^{1/4} 1$$

El significado de $\pi_{h,1}$ es

$$= \Pi_{h,1}^{t,1} h \left(\frac{\nu L}{g \beta \Delta T k^3 c_e'} \right)^{1/4} \left(\frac{q_{\text{conv}}}{q_{\text{cond}}} \left(\frac{F_v}{F_b} \right)^{1/4} \frac{q_{\text{cond}}}{q_{\text{conv-arrastre}}} \right)^{1/2} 1$$

mientras que el de $\pi_{h,2}$ es

$$\Pi_{h,2}^{t,1} = \frac{\nu v_o^2}{g \beta \Delta T \alpha L} \left(\frac{F_v}{F_b} \right) \left(\frac{q_{\text{conv-arrastre}}}{q_{\text{cond}}} \right)^{1/2} 1$$

En resumen, vuelven a obtenerse resultados semejantes en cuanto al significado físico, tanto de los números clásicos (Nu_L, Pe_L, Gr_L, Ra_L y Bo_L) como de los números adimensionales discriminados ($Nu_{ADD}, Pe_{ADD}, Gr_{ADD}, Ra_{ADD}$ y Bo_{ADD}). Los primeros están asociados a relaciones de aspecto geométricas, mientras que los segundos lo están a combinaciones de balances de fuerzas y energías que rigen en el dominio del problema. Adviértase que el significado de los números adimensionales discriminados es el mismo que se dio en los problemas de convección libre y forzada; aquí además de estos intervienen, como se ha mencionado anteriormente, dos nuevos números adimensionales discriminados, verdaderos números π_{ADD} , a saber, $g \beta \Delta T / v_o^2 = Gr_L / Re_L^2$, al que Thomas [1992] llama “número de

Richardson”, Ri (o mejor, Ri_{ADD}), y $g\beta\Delta T\alpha L/(\nu v_o^2) = Ra_L/Pe_L^2$, de nombre aún desconocido. Sus significados físicos son

$$Ri = \frac{Gr_L}{Re_L^2} \frac{g \beta \Delta T L}{v_o^2} \frac{F_b}{F_i} \sim 1$$

$$\zeta^? = \frac{Ra_L}{Pe_L^2} \frac{g \beta \Delta T \alpha L}{\sim \nu v_o^2} \left(\frac{F_b}{F_v} \right) \left(\frac{q_{cond}}{q_{conv-arrastre}} \right) \sim 1$$

5.5 Los números adimensionales ADD en problemas conjugados

En problemas conjugados, cuando se desea determinar una magnitud incógnita, en la lista de variables se incluyen tanto magnitudes independientes asociadas al problema térmico (ecuación de la energía) como, debido al acoplamiento, magnitudes relativas al movimiento del fluido (ecuación del momento); lo que provoca, como hemos mostrado, que las interpretaciones físicas de los monomios que resultan al aplicar el teorema de se basan, en general, en combinaciones entre fuerzas y balances entre energías.

La naturaleza compleja de estos problemas asociada al número de balances que tienen lugar hace que sea posible seleccionar los grupos adimensionales independientes de diferente forma. En consecuencia, es posible hacerlo buscando el significado más sencillo de cada grupo independiente. Dado que muchos de estos grupos adimensionales, no precisamente los más simples con frecuencia, se han venido empleando históricamente para expresar las soluciones en los textos de ingeniería, no tiene objeto práctico el intentar sustituirlos por otros, aunque sean de naturaleza más sencilla.

Debido a que el acoplamiento entre el problema mecánico y térmico es menor en la transmisión de calor por convección forzada, donde las ecuaciones del momento y de la energía pueden resolverse independientemente, que en la transmisión de calor por convección libre, donde dichas ecuaciones deben resolverse simultáneamente, los monomios resultantes en el primer caso están asociados más directamente a balances simples que los monomios obtenidos en el segundo caso, donde el acoplamiento es mayor.

En los problemas de convección forzada, debido a la condición de frontera de velocidad del fluido no perturbado, en cada uno de los posibles balances interviene una sola incógnita y por esta razón, debido al modo de proceder en el AD en cuanto a la elaboración de la lista de variables, es posible reproducir dichos balances en monomios π . Sin embargo, en convección libre, dado que no existe una velocidad característica conocida, en los balances entre fuerzas y entre ener-

gías intervienen, en general, más de una incógnita, por ejemplo v^* y δ_t , siendo imposible (si la elaboración de la lista de variables se lleva a cabo con el criterio general mencionado) que la aplicación del ADD conduzca a monomios π que reproduzcan estos balances simples.

Veamos, a modo de ejemplo, cuáles serían los números independientes de más fácil interpretación en dos problemas ya estudiados: convección forzada en una placa horizontal isoterma y convección libre en una placa vertical.

En la convección forzada laminar en una placa horizontal isoterma, teniendo en cuenta los diferentes casos tratados, resultaron los siguientes números adimensionales independientes asociados a balances:

$$\begin{aligned} \text{Nu}_{\text{ADD}} &= \frac{h \delta_t}{k} \sim \left(\frac{q_{\text{conv}}}{q_{\text{cond}}} \right)_{\text{superficie}} \\ \text{Re}_{\text{ADD}} &= \frac{v_o \delta_t^2}{\nu l_o} \sim \frac{F_i}{F_v} \\ \text{Pr} &= \frac{\nu}{\alpha} \sim \frac{\text{transporte de momento}}{\text{transporte de calor}} \\ \text{Pe}_{\text{ADD}} &= \frac{v_o \delta_t^2}{\alpha l_o} \sim \frac{q_{\text{conv-arrastre}}}{q_{\text{cond}}} \end{aligned}$$

y en la convección natural laminar en una placa vertical isoterma:

$$\begin{aligned} \text{Nu}_{\text{ADD}} &= \frac{h \delta_t}{k} \sim \left(\frac{q_{\text{conv}}}{q_{\text{cond}}} \right)_{\text{superficie}} \\ \text{Gr}_{\text{ADD}\delta_t} &= \frac{g \beta \Delta T \delta_t^4}{\nu^2 L} \sim \left(\frac{F_b}{F_v} \right)^4 \frac{F_i}{F_v} \\ \text{Ra}_{\text{ADD}} &= \frac{g \beta \Delta T \delta_t^4}{\nu \alpha L} \sim \left(\frac{F_b}{F_v} \right) \left(\frac{q_{\text{conv-arrastre}}}{q_{\text{cond}}} \right)^2 \\ \text{Bo}_{\text{ADD}} &= \frac{g \beta \Delta T \delta_t^4}{\alpha^2 L} \left(\frac{F_b}{F_i} \right) \left(\frac{q_{\text{conv-arrastre}}}{q_{\text{cond}}} \right)^2 \\ \text{Pr} &= \frac{\nu}{\alpha} \sim \frac{\text{transporte de momento}}{\text{transporte de calor}} \\ \text{Pe}_{\text{ADD}} &= \frac{v^* \delta_t^2}{\alpha L} \sim \frac{q_{\text{conv-arrastre}}}{q_{\text{cond}}} \\ \text{Re}_{\text{ADD}} &= \frac{v^* \delta_t^2}{\nu L} \sim \frac{F_i}{F_v} \end{aligned}$$

Esta página se ha dejado intencionadamente en blanco

El proceso de adimensionalización de ecuaciones físicas bajo la perspectiva de la discriminación

6.1 Introducción

Cuando se establece una ley física se trata, en general, no con números sino con cantidades de ciertas magnitudes físicas, tales como la fuerza, el momento, la masa, la temperatura, la energía... que se relacionan entre sí a través de dicha ley.

Como sabemos, estas magnitudes deben cumplir con el requisito de que se puedan medir, de manera que sus cantidades puedan compararse entre sí y verifiquen los principios de igualdad y de suma. Mediante la utilización de un sistema de unidades coherente, las leyes físicas (relaciones de proporcionalidad entre cantidades) se transforman en ecuaciones físicas (relación entre las medidas de las cantidades que intervienen en las leyes). Una vez establecidas las ecuaciones fundamentales de una teoría física o un modelo, su sistema dimensional se deduce de dicho conjunto de ecuaciones; de modo que a cualquier magnitud, ya sea primaria o secundaria, puede asignársele su correspondiente fórmula dimensional en el marco del sistema dimensional considerado. Todas las ecuaciones fundamentales y derivadas cumplen el principio de homogeneidad.

Así, las ecuaciones diferenciales que establecen el modelo matemático de un cierto proceso, y que no son más que el balance de ciertas magnitudes expresado, en general, a través de sus cambios, satisfacen el principio de homogeneidad dimensional: todos los términos de la ecuación tienen las mismas dimensiones.

Las ecuaciones que rigen los procesos físicos en los campos de la mecánica de fluidos y la transmisión de calor son tres: conservación de la masa, balance de fuerzas y balance de energías. A estas hay que añadir las ecuaciones que reflejan las condiciones de contorno. En las ecuaciones de balance de fuerzas y energías intervienen las leyes empíricas que definen los diferentes términos del balance que contienen; a su vez, las constantes físicas asociadas a cada tipo de fuerza o energía. En la formulación de estas ecuaciones queda implícito, pues, el principio

de la homogeneidad dimensional. Asociando a cada magnitud y constante física una fórmula dimensional en una base adecuada, usando para ello las fórmulas empíricas concretas de las que derivan estas constantes, las ecuaciones de dimensión de cada término de una misma ecuación son, asimismo, idénticas. La discriminación, en este sentido, lo único que hace es precisar al máximo ciertas propiedades de estas magnitudes que de otra forma estarían degeneradas.

La información proporcionada por el proceso de adimensionalización es, obviamente, muy útil y, en todo caso, rentable en relación con el esfuerzo realizado para obtenerla. Sin embargo, es obligado realizar el proceso en forma correcta –discriminada–, pues de lo contrario, como ocurre en la mayoría de los textos de transmisión del calor y mecánica de fluidos, su aplicación clásica conduce a la obtención de resultados pobres.

La adimensionalización de las ecuaciones consiste en reescribirlas en términos de nuevas variables adimensionales, relacionando las variables sencillas (dimensionales) con valores de referencia explícitos o implícitos del problema. Con este proceso, y de ahí su importancia, es posible identificar los monomios adimensionales que caracterizan la correcta solución del problema, sin tener que resolver la ecuación. Es decir, en teoría, deben obtenerse los mismos resultados que con el análisis dimensional discriminado.

Las magnitudes no explícitas tomadas como referencia para adimensionalizar las ecuaciones diferenciales aparecen de manera natural en la aplicación del teorema de π (como se ha demostrado en capítulos anteriores), al conectar grupos de variables entre sí, como en el propio proceso de adimensionalización. En todo caso, siempre podemos adoptar una magnitud oculta, sin estar seguros de su existencia, para adimensionalizar determinada variable. A posteriori, no solo nos podremos asegurar de la existencia de tal magnitud, sino que podremos atribuir a la misma un significado físico preciso. No obstante, puede haber variables para las que no sea posible, a priori, asignar un valor de referencia. Piénsese por ejemplo en un problema en el que no se alcanza nunca una solución estacionaria; no existe un tiempo característico pero es posible adoptar, ¿por qué no?, un valor de referencia arbitrario. Lo mismo ocurre en un medio semiinfinito para una o más

de las longitudes de referencia cuando se trabaja con discriminación. Más adelante veremos mejor este aspecto con los ejemplos propuestos.

Algunos autores, como Arpacı [1984], reconocen en el método de la adimensionalización de ecuaciones, que debe incluir las relativas a las diferentes condiciones de contorno, una técnica o forma alternativa del análisis dimensional, ya que persigue el mismo objetivo. A este proceso lo llama “formulación”. En todo caso, es común que el proceso de adimensionalización aparezca en los textos dentro del capítulo de análisis dimensional.

En relación con la conexión entre adimensionalización de ecuaciones y análisis dimensional, Smits [2000] escribe: “Existe un gran número de posibles monomios

adimensionales pero solo un limitado conjunto de ellos se usa habitualmente. La razón más convincente de la popularidad de este subconjunto es que sus monomios, tales como el número de Reynolds o el coeficiente adimensional de la fuerza, se deducen de manera natural de las mismas ecuaciones del movimiento”.

Middelman [1998] afirma que, mediante la correcta elección de variables de referencia, el método de adimensionalización de ecuaciones diferenciales, una técnica que se denomina “*inspectional analysis*”, llega más lejos que la aplicación del análisis dimensional. En su aplicación introduce valores de referencia desconocidos a priori para adimensionalizar las ecuaciones y, una vez obtenidos los coeficientes de la ecuación, los iguala (parece que arbitrariamente) a la unidad, para deducir las expresiones de las incógnitas. El proceso es obviamente correcto, ya que precisamente esos coeficientes designan balances de fuerzas o energías que efectivamente son del orden de la unidad cuando el término de la ecuación diferencial no puede despreciarse.

A nuestro modo de ver, adimensionalización y análisis dimensional no son más que dos formas equivalentes de aplicar una misma teoría basada en el concepto de dimensión física. Ambas técnicas solo se diferencian, efectivamente, en la forma en que son aplicadas. Adviértase que, para establecer el número de magnitudes que aparecen en la lista dimensional, es necesario tener conocimiento de la lista relevante de variables a las que se aplicará el teorema de π) es preciso conocer las leyes que permiten formular las ecuaciones del proceso.

Conocer las ecuaciones diferenciales que rigen un proceso es conocer los diferentes términos del balance que se establece entre ciertas magnitudes (masa, fuerza y energía); pero para fijar la lista precisa de variables relevantes en la aplicación del análisis dimensional, ¿no es necesario, asimismo, conocer todos los términos de este balance?

Mientras que cada ecuación diferencial es el balance de una magnitud concreta (masa, fuerza o energía) y la adimensionalización proporciona monomios asociados a los cocientes de los términos de la ecuación, el análisis dimensional debería conducir a estos mismos monomios si la lista relevante estuviera formada únicamente por variables asociadas a las magnitudes balanceadas. Adviértase que este no es el camino estrictamente formal que se sigue habitualmente en los textos que aplican el análisis dimensional (en particular, en problemas acoplados), pues la lista de variables relevantes, para obtener el monomio asociado a una determinada incógnita, suele incluir variables relacionadas con diferentes tipos de balances; esto da lugar, en muchos problemas complejos, a que los monomios derivados de la aplicación del teorema de π sean de lo más variopinto (productos de potencias de varios balances, como se ha visto en el capítulo anterior), y pueden no coincidir en general con los obtenidos al adimensionalizar las ecuaciones. En los problemas estudiados en los capítulos 3 y 4, el planteamiento de la elección de la lista de variables ha sido

formal; es decir, cada variable ha sido justificada convenientemente por su influencia en el proceso a través de la magnitud asociada a dicha variable. En dichos capítulos, cuando la ecuación de gobierno asociada a una determinada incógnita está desacoplada, los monomios π obtenidos representan balances directos de magnitudes; mientras que, si se trata de incógnitas asociadas a ecuaciones acopladas, los monomios π resultantes expresan, en general, potencias de productos de balances.

En definitiva, la adimensionalización conduce, bien directamente a los mismos monomios que el análisis dimensional en el caso de problemas desacoplados, pues cada balance contiene una sola incógnita, bien a monomios diferentes (con más de una incógnita) que son del orden de magnitud unidad y que, mediante productos o cocientes de los mismos, podemos obtener el mismo orden de magnitud para las incógnitas que el deducido por el análisis dimensional.

Conocer qué variables son las que, con absoluta fiabilidad, forman parte de la lista relevante es conocer los términos del balance de cada magnitud en el proceso. ¡Pero este conocimiento permite escribir las ecuaciones diferenciales! Así, parece obvio que formalmente, análisis dimensional (teorema de π) y adimensionalización de ecuaciones no son más que dos protocolos de aplicar una misma teoría dimensional. En el primer caso se parte de una lista relevante de variables convenientemente (físicamente) justificada y en el segundo se parte de unas ecuaciones formalmente deducidas.

6.2 La adimensionalización en su versión clásica

Es la forma en la que aparece en todos los libros de ingeniería. Hasta lo que sabemos, la aplicación formal de la discriminación al proceso de adimensionalización es un tema poco estudiado, ni siquiera en los textos clásicos de análisis dimensional se menciona este tema. No obstante, parece que algunos autores (Middelman, [1988], Martynenko y Khramtsov [2005] y Joshi y Nakayama [2003]) intuyan la necesidad de la discriminación geométrica con el objeto de deducir grupos adimensionales de los que se sabe a priori, bien de soluciones analíticas bien de la experimentación, que juegan un papel independiente en el proceso. En todo caso, estos autores no presentan un procedimiento formal de adimensionalización discriminada de ecuaciones ni comparan esta técnica con la del análisis dimensional.

Smits [2000] adimensionaliza las ecuaciones de Bernoulli y Navier-Stokes, y estudia el flujo de Couette, para demostrar que, efectivamente, los monomios emergentes de estas ecuaciones o directamente del balance de fuerzas (para el flujo de Couette), en particular el número de Reynolds, son los más generalizados. Para Smits, la adimensionalización siempre se realiza en forma clásica, no se discriminan ni siquiera las direcciones espaciales, por lo que sus resultados conducen a los números adimensionales clásicos.

Potter y Wigger [1997] también incluyen el tema de la adimensionalización dentro del análisis dimensional y de la teoría de la semejanza, dedicándole un capítulo completo en su libro. En su texto puede leerse: "A menudo, cuando se trabaja con ecuaciones diferenciales, las expresamos en su forma adimensional o normalizada. Forma que proporciona información no contenida en su forma dimensional, información similar a la proporcionada por el análisis dimensional". Más tarde, continúa: "obviamente, si es posible escribir las ecuaciones diferenciales que rigen un determinado proceso, estas más las condiciones de contorno contienen todos los parámetros de interés; de aquí que el teorema de Buckingham no se necesita realmente para procesos de flujo de los que se conoce el modelo matemático". A continuación, Potter y Wigger abordan la adimensionalización de la ecuación de Navier-Stokes para obtener los números clásicos de Reynolds, Strouhal, Froude y Weber.

Otros autores que tratan la adimensionalización clásica con objeto de deducir los números adimensionales con los que se expresan las soluciones de los problemas de fluidos y calor son Incropera y De Wit [1999], Gebhart y col. [1988], Chapman [1960], Cengel [2004] y Baehr y Stephan [1998].

La adimensionalización no discriminada (espacialmente) conduce a que el rango de valores en el que se mueven las coordenadas espaciales no esté comprendido entre 0 y 1 excepto para una de ellas, aquella asociada a la longitud de referencia. El resto de las coordenadas varía entre 0 y el valor correspondiente a un factor de forma. Así, es inmediata la aparición, ya antes del propio proceso de adimensionalización, de monomios adimensionales definidos como factores de forma del problema. Por otro lado, lo más probable es que los monomios obtenidos no expresen el balance de magnitudes del problema referidas a las mismas regiones del dominio, sino otro tipo de relaciones que no es inmediato identificar. Así, aunque es un tema irrelevante, el número de grupos adimensionales obtenidos con la adimensionalización clásica de las ecuaciones de gabinete (incluidas las condiciones de contorno y los factores de forma geométricos) es, en general, mayor que el proporcionado por la adimensionalización discriminada. Lo cierto es que el proceso de adimensionalización clásico conduce a una solución, en general, poco precisa, mientras que la discriminación conduce al número mínimo de monomios buscado. Un par de ejemplos en orden de dificultad creciente permitirán comprender lo expuesto.

Ejemplo 6.1 Conducción de calor 2-D

Consideremos el calentamiento de una placa rectangular anisótropa, inicialmente a temperatura T_0 . El borde izquierdo se somete a una temperatura $T_s > T_0$, mientras que los otros bordes se mantienen a T_0 , Figura 6.1.

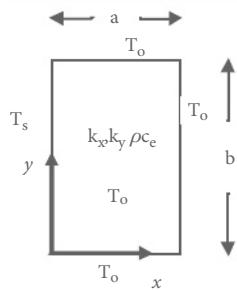


Figura 6.1 Lámina rectangular anisótropa

El modelo matemático está formado por el conjunto de ecuaciones

$$\rho c_e \frac{\partial T}{\partial t} = k_x \left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} \right) + k_y \left(\frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \right)$$

$$\begin{aligned} T_{(x=0,y,t)} &= T_s \\ T_{(x=1,y,t)} &= T_{(x,y=0,t)} = T_{(x,y=1,t)} = T_o \end{aligned}$$

$$T^{(x,y,t=0)} = T^o$$

Definiendo las variables adimensionales

$$T' = \frac{T - T_o}{T_s - T_o}, \quad x' = \frac{x}{a}, \quad y' = \frac{y}{a}, \quad t' = \frac{t}{t^*}$$

el modelo matemático se convierte en

$$\left(\frac{\rho c_e}{t^*} \right) \frac{\partial T'}{\partial t'} = \left(\frac{k_x}{a^2} \right) \left(\frac{\partial^2 T'}{\partial x'^2} \right) + \left(\frac{k_y}{a^2} \right) \left(\frac{\partial^2 T'}{\partial y'^2} \right)$$

o bien,

$$\left(\frac{\rho c_e a^2}{t^*} \right) \frac{\partial T'}{\partial t'} = \frac{\partial^2 T'}{\partial x'^2} + \left(\frac{k_y}{k_x} \right) \frac{\partial^2 T'}{\partial y'^2}$$

más las condiciones de contorno:

$$T'_{(x'=0,y',t)} = 1$$

$$T'_{(x'=1,y',t)} = T'_{(x',y'=0,t)} = T'_{(x',y'=b/a,t)} = 0$$

$$T'_{(x',y',t=0)} = 0$$

donde $t^* k_x / (\rho c_e a^2) = Fo$ es el número de Fourier. Esta ecuación no es normalizada, ya que y' varía entre 0 y b/a . Los patrones de solución para cada valor del tiempo adimensional dependen de dos parámetros: k_y/k_x y a/b (resultados que coinciden

con lo que se obtendría aplicando el ADC mediante el teorema de π). Como veremos más adelante, cuando se procede a adimensionalizar en forma discriminada, los patrones dependen de un solo monomio. Sin dejar de ser falsos los resultados obtenidos sin discriminar (aunque pueden serlo en algún caso), se trata de resultados menos precisos o más pobres que los proporcionados por el ADD.

Ejemplo 6.2 Ecuación de Navier-Stokes

Para flujos de densidad constante, esta ecuación en su forma diferencial 2-D es

$$\rho \frac{dv}{dt} = -\nabla p + \rho g \nabla + \mu \nabla^2 v$$

Usando las variables y operadores adimensionales,

$$x' = \frac{x}{l^*}, \quad y' = \frac{y}{l^*}, \quad v' = \frac{v}{v_o}, \quad t' = \frac{t}{l^*/v_o}, \quad p' = \frac{p}{1/2 \rho v_o^2}, \quad \frac{1}{l^*}, \quad \nabla^2 = \frac{1}{l^{*2}} \nabla^2$$

la ecuación puede escribirse en su forma adimensional:

$$\left(\frac{\rho v^2}{l^*} - \frac{dv'}{dt'} \right) \frac{1}{2} \nabla^2 v' = p' - g \nabla + \frac{\mu v_o}{l^{*2}} \nabla^2 v'$$

o bien, en las formas reagrupadas:

$$\begin{aligned} & \frac{dv'}{dt'} = \frac{1}{2} \nabla^2 v' p' - \rho g \nabla + \frac{\mu v_o}{l^*} \nabla^2 v' \\ & \frac{dv'}{dt'} = \frac{1}{2} \nabla^2 v' p' - Fr^{-1} \nabla_g + Re_l^{-1} \nabla^2 v' \end{aligned}$$

donde Fr y Re son los clásicos números de Froude y Reynolds. Estos, junto con el tiempo característico $t^* = l^*/v_o$, son los tres números adimensionales que se deducen de la aplicación del proceso de adimensionalización clásico. Ya se ha discutido en el Capítulo 5 sobre el significado real del número de Reynolds.

6.3 La adimensionalización discriminada.

La búsqueda de magnitudes de referencia implícitas

El análisis dimensional discriminado relaciona cada variable con una magnitud característica cuya ecuación dimensional discriminada es la misma. Esto es, la variable x se adimensionaliza con una longitud característica en la dirección x , l_x^* , mientras que la y lo hace con una longitud característica en la dirección y , l_y^* .

Lo mismo debe hacerse con otras variables tales como la velocidad, la presión, etc. El hecho de usar la discriminación obliga a discriminar también las constantes físicas de la ecuación. A diferencia de la adimensionalización clásica, el rango de valores de las nuevas variables adimensionales siempre está comprendido entre 0 y 1.

Las ecuaciones adimensionales reciben el nombre de universales y, si además el rango de las variables dependientes está comprendido en el intervalo [0,1], se dice que son ecuaciones normalizadas, aunque esta nomenclatura no se sigue estrictamente en todos los textos.

¿Cómo se procede cuando no existen valores (reales) característicos en el problema? A menos que el problema no esté confinado a una región finita del espacio, lo que implica además que su solución estacionaria no exista, la existencia de longitudes características suele estar asegurada, bien explícitamente o implícitamente, como magnitudes ocultas. No es posible, sin embargo, encontrar una longitud de referencia normal a una superficie que emite calor hacia un semiplano infinito, como tampoco es posible encontrar un tiempo característico en este proceso. En este caso, se puede seleccionar arbitrariamente una longitud cualquiera normal a la placa, que implicará inmediatamente la existencia de un tiempo característico asociado a dicha longitud, y referir la coordenada normal y el tiempo a estos valores.

Una vez que la ecuación se transforma en adimensional-universal, los coeficientes adimensionales que surgen proporcionan el orden de magnitud de la magnitud característica supuesta u oculta e, indirectamente, su interpretación física. Estos coeficientes adimensionales surgen al dividir cada miembro de la ecuación adimensionalizada por cualquiera de sus coeficientes; de esa forma, es posible formar todos los pares posibles de balances entre los términos de la ecuación. Todos estos monomios coinciden, obviamente, con los obtenidos por aplicación del teorema de al considerar los diferentes conjuntos de variables relevantes asociados a cada par de términos que forman el balance de la ecuación. Cada uno de los grupos adimensionales resultantes, por representar precisamente balances de los términos de la ecuación que tienen influencia en el problema, tienen un orden de magnitud unidad; si bien, la solución para cada uno de ellos es una función indeterminada (también del

orden de magnitud unidad) de los monomios restantes. Las ecuaciones asociadas a las condiciones de contorno se adimensionalizan siguiendo el mismo procedimiento.

Es preciso mencionar en este punto los trabajos de Castaños y Díaz [1989] en relación con sus intentos de adimensionalizar las ecuaciones de Navier-Stokes, continuidad, energía e incluso la ecuación de estado de los gases siguiendo la idea de discriminación espacial. En una de las introducciones a los trabajos presentados en su monografía, estos autores afirman que “el principal obstáculo que ha tenido la discriminación espacial en generalizarse como técnica dentro del análisis dimensional y, posiblemente, en generalizarse también como técnica para la adimensionaliza-

ción de ecuaciones, es el hecho de que algunas de las ecuaciones básicas de mecánica de fluidos, como la definición del rotacional de la velocidad y la propia ecuación de Bernoulli no son homogéneas con discriminación". Es decir, los autores afirman textualmente que la discriminación es impracticable a la ecuación de Bernoulli. Como ya se ha estudiado en el Capítulo 3, la ecuación de Bernoulli sí soporta la discriminación, y la clave está en discriminar la presión y aplicar la ecuación a una línea de corriente. En cuanto al rotacional de la velocidad, se trata solo de una definición; al incardinarse dentro de una ecuación, cada término del rotacional va multiplicado por una constante física que hace homogéneo dicho término.

Castañs y Díaz realizan un laborioso trabajo en el que resuelven los problemas de falta de homogeneización con artilugios del tipo de considerar una longitud que llaman "genérica" definida en la forma $L = (L_x L_y L_z)^{1/3}$, longitud que permite degenerar (poner al mismo nivel, como dicen los autores) las tres longitudes espaciales cuando conviene. Tal conjectura de argumentación formal débil se justifica mejor, según los autores, por los resultados que se obtienen cuando se reduce el número de monomios en los problemas. De hecho, esta invención de longitud genérica ha sido aplicada con anterioridad en algunos problemas por Palacios [1964], Arenas [1970] y Herranz y Arenas [1989].

6.4 Algunos ejemplos ilustrativos

Ejemplo 6.3 Ecuación de conducción de Fourier

Para el caso 1-D, esta ecuación cuya forma es

$$\rho c_e \frac{\partial T}{\partial t} = k \left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} \right)$$

la aplicaremos al calentamiento de una placa plana infinita de espesor $2l_o$, sometida a una condición de contorno isoterma de temperatura T_s en sus caras laterales, Figura 6.2. La temperatura inicial de la placa es T_o , ρ es su densidad, c_e su calor específico y k su conductividad térmica.

Definiendo las variables adimensionales,

$$T' = \frac{T - T_o}{T_s - T_o}, \quad x' = \frac{x}{l_o}, \quad t' = \frac{t}{t^*}$$

la ecuación anterior se reduce a

$$\left(\frac{\rho c_e l_o}{k t^*} \right) \left(\frac{\partial T'}{\partial t'} \right) = \frac{\partial^2 T'}{\partial x'^2}$$

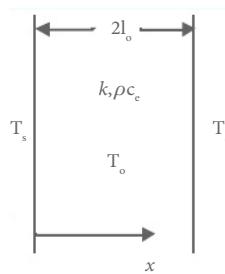


Figura 6.2 Geometría del problema

con las condiciones de contorno e inicial:

$$T'_{(x'=1,t)} = 1$$

$$T'_{(x',t=0)} = 0$$

El cociente $(\rho c_e l_o^2 / kt^*)$ es el inverso del número de Fourier, Fo. Esta ecuación permite definir el tiempo característico del problema, $t^* = (\rho c_e l_o^2) / k$, que aparece de manera natural en el proceso de adimensionalización. Este tiempo podría obtenerse como magnitud oculta si se aplicara el teorema de π a la lista relevante de magnitudes $\langle k, \rho c_e, l_o, t^* \rangle$, cuyos exponentes adimensionales en la base $\{L, QT, \theta\}$, adecuada para este problema, se muestran en la Tabla 6.1.

La duración del transitorio es del orden de magnitud de este tiempo característico; transcurridos, aproximadamente, 4 o 5 veces su valor se alcanza la condición estacionaria. Así, con $t' = t/(k/\rho c_e l_o^2)$, la ecuación anterior se reduce a su forma dimensional definitiva:

$$\partial T'/\partial t' = \partial^2 T'/\partial x'^2$$

Como hemos mencionado, a este tipo de ecuación la llamaremos “universal” ya que es adimensional y normalizada, todas las variables se mueven en el rango de valores de 0 y 1. Una vez resuelta la ecuación, se puede aplicar su solución directamente a cualquier problema de la misma geometría y de diferentes datos de partida (geométricos y térmicos) sin más que pasar las variables a su forma no-dimensional de acuerdo con sus definiciones.

Tabla 6.1 Exponentes dimensionales de las variables

	l_o	ρc_e	k	t^*
L	1	-3	-1	0
Q	0	1	1	0
T	0	0	-1	1
θ	0	-1	-1	0

Pasemos ahora al problema 2-D. Consideremos el calentamiento de una barra infinita de sección rectangular ($a \times b$) anisótropa, Figura 6.1, con una temperatura inicial T_o , una de cuyas superficies exteriores se somete a una temperatura constante T_s .

La ecuación de Fourier es ahora

$$\rho_c \frac{\partial T}{\partial t} = k_x \left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} \right) + k_y \left(\frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \right)$$

Definiendo $T' = (T - T_o)/(T_s - T_o)$ y las variables adimensionales discriminadas $x' = x/a$, $y' = y/b$ y $t' = t/t^*$, esta ecuación y las condiciones de contorno e inicial se reducen a la forma adimensional (con $T_o = 0$)

$$\left(\frac{\rho c_a a^2}{k_x t^*} \right) \frac{\partial T'}{\partial t'} = \frac{\partial^2 T'}{\partial x'^2} + \left(\frac{k_y}{k_x} \right) \left(\frac{a^2}{b^2} \right) \frac{\partial^2 T'}{\partial y'^2}$$

$$\begin{aligned} T'_{(x'=0, y', t)} &= 1 \\ T'_{(x'=1, y', t)} &= T'_{(x', y'=0, t)} = T'_{(x', y'=1, t)} = 0 \\ T'_{(x', y', t=0)} &= 0 \end{aligned}$$

tomando $t^* = \rho c_a a^2 / k_x$, la ecuación anterior es universal y contiene un solo coeficiente que define los patrones de temperatura en cada instante o cada tiempo adimensional, el monomio adimensional

$$\pi_1 = \left(\frac{k_y}{k_x} \right) \left(\frac{a^2}{b^2} \right)$$

Es inmediato comprobar que el ADD también conduce a este monomio y a la misma solución para el tiempo característico del problema; no sucede lo mismo con el ADC, que proporciona, como se dedujo en el ejemplo 6.2, dos monomios, k_y/k_x y el factor de forma a/b , para definir los patrones para un mismo tiempo característico. En consecuencia, los patrones de solución del problema, campo adimensional de temperaturas en la placa representado en un cuadrado de lado unidad, dependen solo del monomio $(k_y/k_x)(a^2/b^2)$ para cada instante adimensional del transitorio y, obviamente, en el estacionario.

Si la placa es isotrópica, el proceso de adimensionalización debe llevarse a cabo de la forma k_y/k_x , ya que ambas constantes físicas se relacionan con procesos de conducción en diferentes direcciones espaciales, lo que conduce al mismo monomio $(k_y/k_x)(a^2/b^2)$. Sin embargo, de la igualdad numérica de los coeficientes k_x y k_y , el grupo anterior se simplifica numéricamente a la relación de aspecto (o factor de forma) a/b .

En numerosos ejemplos recogidos en libros de ingeniería tales como Mills [1995], Kreith y Bohn [1997], Smits [2000] y otros, las relaciones de aspecto se tratan como grupos adimensionales. Aunque estos cocientes no son adimensionales desde el punto de vista del ADD, pueden, de hecho, comportarse como si lo fueran en muchos casos, ya que derivan de grupos realmente adimensionales

(ADD) en los que aparecen combinados con otros coeficientes o constantes físicas isótropas que simplifican el monomio. En otros casos, como en el problema propuesto, estas relaciones de aspecto, por sí solas, no son grupos independientes en la solución del problema.

La condición de convección en uno de los lados, manteniendo condiciones isotermales en el resto, introduce un nuevo parámetro en el problema: el coeficiente de

transferencia de calor, h_x^* . Si T_s es la temperatura del fluido circundante lejos de la pared y tomamos como variables adimensionales las mismas que para el caso anterior, es decir, $T' = (T - T_b)/(T_s - T_o)$, $x' = x/a$, $y' = y/b$ y $t' = t/(k_x/\rho c_e a^2)$, el modelo matemático adimensional queda definido por el conjunto de ecuaciones

$$\frac{\partial T'}{\partial t'} = \frac{\partial^2 T'}{\partial x'^2} + \left(\frac{k_y}{k_x} \right) \left(\frac{a^2}{b^2} \right) \left(\frac{\partial^2 T'}{\partial y'^2} \right)$$

$$\left(\frac{h_x a}{k_x} \right) \Delta T' = \left(-\frac{\partial T'}{\partial x'} \right)_{x'=0}$$

$$T'_{(x'=1, y', t)} = T'_{(x', y'=0, t)} = T'_{(x', y'=1, t)} = 0$$

$$T'_{(x', y', t=0)} = 0$$

Los patrones de solución para cada instante adimensional dependen ahora de dos parámetros adimensionales (el ADC conduce a tres):

$$\pi_1 = \left(\frac{k_y}{k_x} \right) \left(\frac{a^2}{b^2} \right)$$

$$\pi_2 = \frac{h_x a}{k_x} = Bi_a \quad (\text{número de Biot})$$

parámetros que pueden obtenerse mediante el ADC por aplicación del teorema de π al conjunto de variables relevantes del problema.

Ejemplo 6.4 Flujo paralelo por un canal recto

Para un canal de longitud L y anchura $2a$, entre dos paredes planas paralelas, Figura 6.3, la ecuación de gobierno del flujo estacionario de fluido es

$$\frac{dp}{dx} = \mu \left(\frac{d^2 u}{dy^2} \right)$$

$$dp/dx = \mu d^2 u / dy^2$$

Tomando como magnitudes de referencia Δp_o , la diferencia de presiones en los extremos del canal, L , a y y , las variables adimensionales definidas en la forma

$$x' = \frac{x}{L}, \quad y' = \frac{y}{a}, \quad u' = \frac{u}{v_o}, \quad \Delta p = \frac{\Delta p}{\Delta p_o}$$

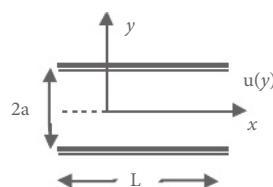


Figura 6.3 Geometría del canal

convierten la ecuación de flujo en su forma adimensional:

$$\left(\frac{\Delta p_o a^2}{\mu v_o L} \right) \left(\frac{dp'}{dx'} \right) = \mu \left(\frac{d^2 u'}{dy^2} \right)$$

En la base $\{L_x, L_y, L_z, M, T\}$, las ecuaciones dimensionales de las magnitudes de referencia son $[\Delta p_x] = ML_x L_y^{-1} L_z^{-1} MT^{-2}$, $[L] = L_x$, $[a] = L_y$ y $[v_o] = L_x T^{-1}$. El único grupo adimensional que interviene en la solución es $\Delta p_o a^2 / (\mu v_o L)$, cuyo significado es el balance entre la caída de presión por unidad de longitud de canal $\Delta p_o / L$ y las fuerzas viscosas por unidad de volumen, $\mu v_o / a^2$.

Con la adimensionalización clásica, el monomio resultante es $\Delta p_o a / (v_o \mu)$ o $\Delta p_o L / (v_o \mu)$, según la magnitud de referencia elegida para adimensionalizar las coordenadas espaciales. A este monomio hay que añadir el factor de forma a/L . Sin embargo, podría haberse alcanzado la solución correcta si se hubieran unido las variables Δp_o y L en su forma inseparable $\Delta p_o / L$.

Ejemplo 6.5 Convección laminar forzada a lo largo de una placa plana

Este problema ya ha sido estudiado por análisis dimensional en los capítulos 3 y 4. Un fluido con velocidad y temperatura uniformes, v_o y T_f , respectivamente, incide sobre una placa horizontal de longitud l_o y con una temperatura uniforme T_s situada paralelamente al flujo incidente, Figura 6.4a. La energía generada por disipación viscosa es despreciable.

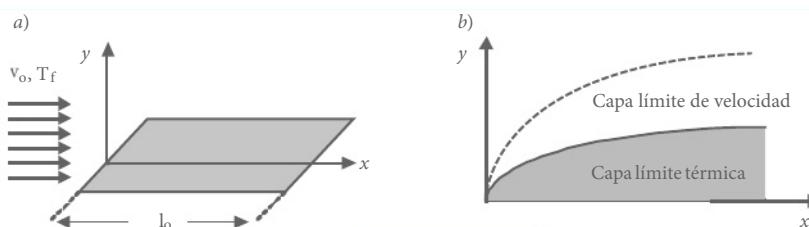


Figura 6.4 a) Geometría del problema. b) Capas límite de velocidad y térmica

Como se sabe, se forman dos capas límite, Figura 6.4b, una asociada a la velocidad y otra asociada a la temperatura, cuyos espesores se incrementan en la dirección del flujo. Los efectos viscosos fuera de la capa límite de velocidad son despreciables. Las ecuaciones de gobierno del problema para un flujo estacionario e incompresible (sin asumir por el momento la existencia de capa límite) son:

Ecuación de continuidad:

$$\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} = 0$$

Ecuación del momento:

$$\begin{aligned} & \rho \left(v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_y}{\partial y} \right) = - \frac{\partial p}{\partial x} + \mu_{xx} \frac{\partial^2 v_x}{\partial x^2} - \mu_{yx} \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2} \\ & \rho \left(v_x \frac{\partial v_y}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_x}{\partial y} \right) = - \frac{\partial p}{\partial y} + \mu_{xy} \frac{\partial^2 v_y}{\partial x^2} - \mu_{yy} \frac{\partial^2 v_y}{\partial y^2} \end{aligned}$$

Ecuación de la energía:

$$c'_e \left(v_x \frac{\partial T}{\partial x} + v_y \frac{\partial T}{\partial y} \right) = - \frac{T \partial}{\partial x} k_x \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + k_x \frac{\partial^2 T}{\partial y^2}$$

El primer subíndice de μ denota la dirección con respecto a la cual están asociados los cambios de velocidad, mientras que el segundo denota la dirección de las fuerzas viscosas debidas a los anteriores cambios de velocidad. La presión, como el resto de las magnitudes, se considera independiente dimensionalmente en cada dirección espacial, una hipótesis no adoptada en la mayoría de los libros de texto que estudian este problema. Como no hay cambios de energía mecánica a térmica, y viceversa, la base dimensional adoptada es $\{L_x, L_y, L_z, M, Q, T, \theta\}$, Madrid [1987]. Para proceder a la adimensionalización se introducen las siguientes magnitudes de referencia para las ecuaciones de continuidad y del momento:

v_o velocidad del fluido no perturbado en la dirección x ,

v_y^* velocidad característica en la dirección y ,

l_o longitud de la placa en la dirección de x ,

l_y^* longitud característica en la dirección y ,

ρv_o^2 presión dinámica en la dirección de x ,

ρv_y^2 presión dinámica en la dirección de y

Repetimos por comodidad las ecuaciones de dimensión de estas magnitudes:

$$\begin{aligned} [v_o] &= L_x T^{-1} \\ [v_y^*] &= L_y T^{-1} \\ [l_o] &= L_x, [l_y^*] = L_y \\ [\rho v_o^2] &= M L_y^{-1} L_z^{-1} L_x T^{-2} \\ [\rho v_y^2] &= M L_y^{-1} L_x^{-1} L_y T^{-2} \end{aligned}$$

A diferencia del proceso clásico de adimensionalización, donde la única referencia para la velocidad es v_o y la única referencia para la presión es ρv_o^2 , se introducen dos velocidades v_x y v_y^* , y dos presiones dinámicas características, ρv_o^2 y ρv_y^{*2} . Además, se incluye una longitud característica asociada a la coordenada y , l_v^* . Es obvio que, con excepción de l_o , v_o y ρv_o^2 , el resto de las magnitudes características no se explicitan en el enunciado del problema, son

magnitudes ocultas. También podemos asociar l_y^* al espesor de la región donde la velocidad del fluido se ha perturbado; esto es, la región en la que se aplica el balance de fuerzas de la ecuación del momento, donde las fuerzas viscosas son significativas. En base a estas referencias, las variables adimensionales se definen en la forma

$$x' = \frac{x}{l_o}, \quad y' = \frac{y}{l_y^*}, \quad v_x' = \frac{v_x}{v_o}, \quad v_y' = \frac{v_y}{v_y^*}, \quad p_x = \frac{p_x}{\rho v_o^2}, \quad p_y = \frac{p_y}{\rho v_y^{*2}}$$

Introduciendo estas variables en las ecuaciones de gobierno se obtiene

Ecuación de continuidad

$$\left(\frac{v_o}{l_o}\right) \frac{\partial v_x'}{\partial x'} + \left(\frac{v_y^*}{l_v^*}\right) \frac{\partial v_y'}{\partial y'} = 0$$

Dado que el rango de valores de variables adimensionales es la unidad, los cocientes v_o/l_o y v_y^*/l_v^* son del mismo orden de magnitud:

$$\frac{v_o}{l_o} \sim \frac{v_y^*}{l_v^*}$$

La hipótesis de capa límite implica que $l_o \gg l_y^*$, por lo que de esta ecuación deducimos que $v_o \gg v_y^*$.

Ecuación del momento (coordenada x)

$$v_x' \frac{\partial v_x'}{\partial x'} + \frac{\partial v_y'}{\partial y'} = - \frac{\dot{\Phi}_x'}{\alpha'} \quad \left[\left(\frac{\mu_{xx}}{\rho v_o l_o} \frac{\partial^2 v_x}{\partial x^2} - \frac{\mu_{yx} l_o}{\rho v_o l_v^{*2}} \frac{\partial^2 v_y}{\partial x^2} \right) \right]$$

En esta ecuación aparecen dos grupos adimensionales:

$$\frac{\mu_{xx}}{\rho v_o l_o}, \quad \frac{\mu_{yx} l_o}{\rho v_o l_v^{*2}}$$

que haciendo uso de la expresión $v_o/l_o \sim v_y^*/l_v^*$ pueden ser escritos en la forma

$$\frac{\mu_{xx}}{\rho v_o l_o} \left(\frac{\mu_{yx} l_o}{l_v^*} \right)^2 = \frac{\mu_{yy}}{\rho v^* l_o} \left(\frac{l_o}{l_v^*} \right)^2$$

Como numéricamente $\mu_{xx} = \mu_{yy}$, el segundo número es $(v_o/v_y^*)^2$ veces mayor que el primero; el cual, en consecuencia, puede despreciarse.

Ecuación del momento (coordenada y)

Haciendo uso de los resultados de la ecuación de continuidad, es inmediato obtener

$$v'_x \frac{\partial v'_y}{\partial x'} + v'_y \frac{\partial v'_x}{\partial y'} = - \frac{\partial p'}{\partial y'} = \left[\left(\frac{\mu \partial^2 l_v^*}{\rho \partial^2 y_o^*} \frac{\partial^2 v_y}{\partial x'^2} \right) - \frac{\mu_{yy}}{\rho v_y^* l_v^*} \frac{\partial^2 v_y}{\partial y'^2} \right]$$

De nuevo aparecen dos grupos adimensionales:

$$\frac{\mu_{xy} l_v^*}{\rho v y l_o}, \quad \frac{\mu_{yy}}{\rho v^* l_v^*}$$

El primero, $(l_v^*/l_o)^2$ veces menor que el segundo, permite despreciar su término asociado en la ecuación. Además, como $\mu_{yy}/(\rho v_y^* l_v^*) = \mu_{yy} l_o / (\rho v_o l_v^{*2})$, y numéricamente $\mu_{xx} = \mu_{xy} = \mu_{yy} = \mu_{yx} = \mu$, el único monomio que proporciona la ecuación del momento asociada a la coordenada y está ya recogido en la ecuación de la coordenada x , aún cuando dicha coordenada se relaciona con balance de fuerzas de otro tipo (en un caso fuerzas normales y en otro fuerzas tangenciales, *versus* fuerzas de inercia).

Como resultado de la anterior discusión, la adimensionalización de las ecuaciones del momento conduce a dos únicos grupos adimensionales, uno de ellos $(l_o/l_v^*)^2$ veces mayor que el otro. Si hacemos uso ahora de la hipótesis de existencia de una capa límite, ambos grupos se reducen a uno que puede escribirse en la forma

$$Re_{AD} = \frac{\mu}{\rho v_o l_v^*} \sim \frac{F_i}{F_e}$$

Como el orden de magnitud de este único grupo es la unidad, es posible despejar el orden de magnitud de la capa límite, $l_v^* \sim l_o (\rho v_o l_o / \mu)^{-1/2}$. Además, $Re_{AD} \sim (l_o/l_v^*)^2$.

Ecuación de la energía

La región donde la conducción de calor y los procesos de convección son importantes se define por una capa térmica adyacente a la placa cuyo espesor se incrementa en la dirección del flujo de fluido, Figura 6.4b. El espesor l_t^* , que depende de las propiedades físicas del fluido y de la coordenada x , puede ser del mismo

orden de magnitud que l_v^* , o bien mayor o menor que l_v^* . Esta hipótesis obliga a introducir cuatro nuevas referencias para adimensionalizar la ecuación de la energía. Son las siguientes:

l_t^* longitud normal a la superficie de la placa en dirección y ,

v_o^* velocidad característica paralela a x ,

$v_{y,t}^*$ velocidad característica normal a la placa,
 ΔT diferencia de temperaturas, $\Delta T = T_p - T_\infty$

Las ecuaciones de dimensión de estas magnitudes de referencia son

$$[l_t^*] = L_y$$

$$[v_o^*] = L_x T^{-1}$$

$$[v_{y,t}^*] = L_y T^{-1}$$

$$[\Delta T] = \theta$$

El ejercicio de introducción de estas cantidades trasciende de lo que hasta ahora hemos asumido como discriminación, en tanto que se introduce una nueva magnitud –longitud– l_t^* de referencia en la misma dirección en la que anteriormente ya se había introducido otra, l_v^* . Del mismo modo, se han introducido nuevas magnitudes de referencia para la velocidad, v_o^* y $v_{y,t}^*$ en direcciones espaciales en las que ya se habían introducido otras, v^o y v^* . Hasta donde conocemos, esta distinción no ha sido propuesta anteriormente, excepción hecha de las escalas de longitud en donde sí se han considerado dos escalas con referencias l_v^* y l_t^* [Joshi y Nakayama, 2003].

La justificación de adopción de nuevas magnitudes de referencia, independientes de otras ya propuestas, en las mismas direcciones espaciales, es lógica y reside en el hecho de que se refieren a fenómenos físicos diferentes, aunque estén acoplados sus efectos. Precisamente como se verá más tarde, en función del nivel de acoplamiento, los órdenes de magnitud de estas magnitudes de referencia ocultas podrán establecerse con mayor o menor precisión. En este sentido, no parece lógico vincular la discriminación con la medida, como hace Palacios [1964]; es decir, con el hecho de adoptar unidades de medida diferentes en distintas direcciones espaciales (lo cual es siempre posible), sino que la vinculación parece que vaya asociada a otros aspectos (no necesariamente vectoriales de ciertas magnitudes) inherentes al fenómeno o los fenómenos físicos que ocurren en el problema.

La longitud de referencia l_t^* define la altura de la región adyacente a la placa donde se perturba la temperatura del fluido; esto es, la región a la que se aplica el balance de energías. Por otra parte, las referencias v_o^* y $v_{y,t}^*$ son velocidades características horizontal y vertical asociadas a dicha región.

Con estas referencias, las nuevas variables adimensionales se definen como

$$x' = \frac{x}{l_o}, \quad y' = \frac{y}{l_t^*}, \quad v_x' = v_x \frac{L_x}{v_o^*}, \quad v_y' = v_y \frac{L_y}{v_{y,t}^*}, \quad T' = \frac{T - T_\infty}{\Delta T}$$

y conducen a la ecuación adimensional discriminada

$$\left(\frac{v_o^*}{l_o} \right) v'_x \frac{\partial T'}{\partial x'} + \left(\frac{v_{y,t}^*}{l_t^*} \right) v'_y \frac{\partial T'}{\partial y'} = \left(\frac{\alpha_x}{l_o^2} - \frac{\partial^2 T}{\partial x'^2} \right) + \frac{\alpha_y}{l_t^{*2}} - \frac{\partial^2 T}{\partial y'^2}$$

donde α es la difusividad, $\alpha = k/\rho c_v$. Cuatro coeficientes aparecen en esta ecuación, v_o^*/l_o , $v_{y,t}^*/l_t^*$, α_x/l_o^2 y α_y/l_t^{*2} . Asumiendo la hipótesis de capa límite y que numéricamente $\alpha_x = \alpha_y = \alpha$, el coeficiente α_y/l_t^{*2} es mucho mayor que α_x/l_o^2 ; en consecuencia, el tercer término de la ecuación puede despreciarse, con lo que el número de términos y de coeficientes se reduce a tres. Reagrupando la ecuación convenientemente puede escribirse de forma que los tres coeficientes se reduzcan a dos grupos adimensionales:

$$\pi_1 = \frac{v_{y,t}^* l_o}{v_o^* l_t^*}, \quad \pi_2 = \frac{\alpha l_o}{v_o^* l_t^{*2}}$$

es decir, en la forma

$$v'_x \frac{\partial T'}{\partial x'} + \left(\frac{v_{y,t}^* l_o}{v_o^* l_t^*} \right) v'_y \left(\frac{\partial T'}{\partial y'} \right) = \frac{\alpha l_o}{v_o^* l_t^{*2}} - \frac{\partial^2 T'}{\partial y'^2}$$

La información proporcionada por esta ecuación es, aparentemente, algo pobre. Dice que π_1 es una función desconocida de π_2 , $\pi_1 = f(\pi_2)$. Sin embargo, una observación más detallada de las magnitudes de referencia introducidas puede conducir a resultados útiles. Aplicemos la ecuación, en primer lugar, a los casos límite $l_v^* \ll l_t^*$ y $l_v^* \gg l_t^*$, que corresponden a $Pr \ll 1$ y $Pr \gg 1$, respectivamente, Figura 6.5.

En el primer caso, $l_v^* \ll l_t^*$, la capa de velocidad no juega un papel relevante en el mecanismo de transferencia de calor ya que la mayor parte de la región perturbada térmicamente está ocupada por fluido que está fuera de dicha capa, esto es, por fluido para el que $y = v_o t$ y $v_{y,t}^* = 0$. Substituyendo estos valores en los dos grupos adimensionales estos quedan reducidos a uno, $\pi_2 = \alpha l_o / (v_o^* l_t^{*2}) = Pe_{ADD}^{-1}$, que permite determinar el orden de magnitud de la capa límite térmica $l_t^* \sim (\alpha l_o / v_o)^{1/2}$. Además, $Pe_o \sim (l_o / l_t^*)^2$. Por otro lado, la ecuación, $k(\partial T / \partial y) = h(T_p - T_\infty)$, que

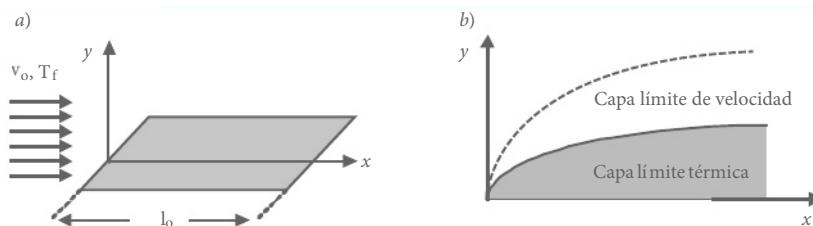


Figura 6.5 a) Casos límite: a) $l_v^* \ll l_t^*$ ($Pr \ll 1$); b) $l_v^* \gg l_t^*$ ($Pr \gg 1$)

expresa la condición de convección en la frontera en forma

$$(\partial T'/\partial y') = (h_t^*/k) T'$$

permite conocer el orden de magnitud del coeficiente de transferencia de calor, $h \sim k/l_t^* \sim k (\alpha l_o/v_o)^{-1/2}$, o su forma adimensional $Nu_{ADD} = h l_t^*/k = (h/k) (\alpha l_o/v_o)^{1/2}$. Esta solución puede expresarse en función de los números clásicos, $Nu_{lo} \sim Pe_{lo}^{1/2}$, siendo $Nu_{lo} \sim (l_o/l_t^*)$.

Para el caso $l_v^* \gg l_t^*$, la capa de velocidad sí que desempeña una función importante en el mecanismo de transferencia de calor, ya que este tiene lugar en una parte incluida dentro de dicha capa (las ecuaciones de gobierno están acopladas). En consecuencia, la información proporcionada, tanto por la ecuación del momento como por la ecuación de continuidad aplicada a la región térmica, será importante para encontrar la solución al problema de transferencia de calor.

Por un lado, como $l_v^* \gg l_t^*$, podemos adoptar como referencia para la velocidad en dirección x una fracción de y proporcional al cociente l_v^*/l_t^* ; esto es, $v_y^* \sim v_o(l_v^*/l_t^*)$. Por otro lado, la adimensionalización de la ecuación de continuidad aplicada a la región de la capa límite térmica permite escribir $v/l_o \sim v_y^*/l_t^*$. Con estas relaciones, los dos grupos adimensionales se reducen a un $\pi_2 = \alpha l_o l_v^* / (v_o l_t^{*3})$, y la solución para l_t^* , teniendo en cuenta el valor $d\phi^*$ de la ecuación del momento, $d\phi^* \sim (\mu \alpha^{2/3} / \rho v_o^3)^{1/6}$. Este resultado puede expresarse en términos de los números adimensionales clásicos, $l_t^*/l_o \sim Re_{lo}^{-1/2} Pr^{-1/3}$. El coeficiente de transferencia de calor es ahora $h = k/l_t^* = k (\mu \alpha^{2/3} / \rho v_o^3)^{1/6}$ o, en términos de los números clásicos $Nu \sim Re^{1/2} Pr^{1/3} \sim l_o/l_t^*$.

De los resultados anteriores puede comprobarse que el cociente entre los espesores de las capas límite es $l_t^*/l_v^* \sim Pr^{1/2}$ para $Pr \ll 1$ y $l_t^*/l_v^* \sim Pr^{1/3}$ para $Pr \gg 1$.

El caso en el que l_v^* y l_t^* sean del mismo orden de magnitud ($Pr \sim 1$), es también digno de ser estudiado usando la adimensionalización. Ahora l_v^* puede ser algo mayor que l_t^* , o viceversa, Figura 6.6.

Por ejemplo, si $l_v^* \leq l_t^*$ podemos razonablemente asumir que $v^* = v_o(l_v^*/l_t^*)$ y $v_{y,t}^* = v_y^*(l_v^*/l_t^*)$, o bien, usando la solución de la ecuación de continuidad aplicada a la capa límite de velocidad $y/l_o = v_y^*/l_v^*$, $v_{o,x}^* = v_o(l_v^*/l_t^*)$ y $v_{y,t}^* = (v_o/l_o)(l_v^*/l_t^*)$.

Sustituyendo estas expresiones en la ecuación de la energía es inmediato ver que su adimensionalización conduce a tres coeficientes dimensionales o a dos grupos adimensionales:

$$\pi_1 = \frac{l_v^*}{l_t^*}, \quad \pi_2 = \frac{\alpha l_o}{v_o l_v^* l_t^*}$$

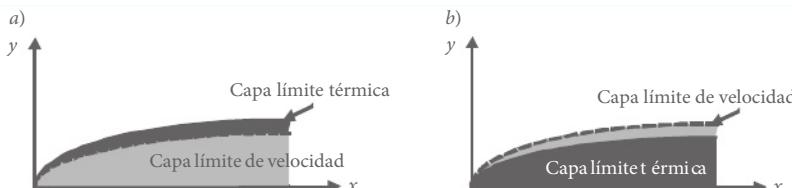


Figura 6.6 Capas límite del mismo orden de magnitud ($Pr \sim 1$): a) $l_v^* < l_t^*$, b) $l_v^* > l_t^*$

Reorganizándolos en la forma $\pi_1 = (l_v^*/l_t^*)$ y $\pi_3 = \pi_1\pi_2 = \alpha l_o/(v_o l_t^{*2})$, las soluciones para el espesor de la capa límite térmica y el coeficiente de transferencia de calor son $l_t^* = (\alpha l_o/v_o)^{1/2} f_1(l_v^*/l_t^*)$ y $h = k(\alpha l_o/v_o)^{-1/2} f_2(l_v^*/l_t^*)$, o en función de los números clásicos, $l_t^*/l_o = Pe_{lo}^{-1/2} f_1(l_v^*/l_t^*)$ y $Nu_{lo} = Pe_{lo}^{0.72} f_2(l_v^*/l_t^*)$. Dado que la solución debe depender de Pr , solo cabe asignar este número al cociente l_v^*/l_t^* , es decir $Pr \sim l_v^*/l_t^*$.

El caso $l_v^* \geq l_t^*$ sigue un razonamiento similar. Definiendo $v_{o,x}^* = v_o(l_t^*/l_v^*)$ y $v_{t,y}^* = v_t^*(l_t^*/l_v^*)$, que pueden escribirse en la forma $v_{o,x}^* \bar{=} v_o(l_t^*/l_v^*)$ y $v_{t,y}^* \bar{=} (v_t^* l_v^*/l_o)$ usando la ecuación de continuidad, los grupos adimensionales resultantes de la adimensionalización de la energía son

$$\begin{aligned}\pi_1 &= \frac{l_v^*}{l_t^*}, & \pi_2 &= \frac{\alpha l_v^* l_o}{v_o l_t^{*3}}, \text{ o} \\ \pi_1 &= \frac{l_v^*}{l_t^*}, & \pi_1^{-1} \pi_2 &= \frac{\alpha l_o}{v_o l_t^{*2}}, \text{ o}\end{aligned}$$

que proporcionan la misma solución que para el caso $l_v^* < l_t^*$.

Estos resultados son coincidentes con los obtenidos por ADD (Capítulo 4), $l_t^*/l_o = Re_{lo}^{-1/2} f_1(Pr)$ y $Nu_{lo} = Re_{lo}^{1/2} f_2(Pr)$, si tenemos en cuenta la relación $Pe = Re_{lo} Pr$.

Ejemplo 6.6 Convección natural a lo largo de una placa vertical isoterma

La temperatura de la placa es T_p , y la del fluido lejos de la placa, T_f . Figura 6.7.

El conjunto de ecuaciones que rige este problema, considerando despreciables los términos de energía por disipación viscosa, es

Ecuación de continuidad:

$$\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} = 0$$

Ecuaciones del momento:

$$\begin{aligned}\rho \left(v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_x}{\partial y} \right) &+ \frac{\partial p_x}{\partial x} + \mu_{xx} \frac{\partial^2 v_x}{\partial x^2} - \mu_{yx} \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2} \\ \rho \left(v_x \frac{\partial v_y}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_y}{\partial y} \right) &+ \frac{\partial p_y}{\partial y} + \mu_{xy} \frac{\partial^2 v_y}{\partial x^2} + \mu_{yy} \frac{\partial^2 v_y}{\partial y^2} - \rho g\end{aligned}$$

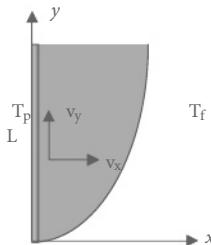


Figura 6.7 Geometría de la convección natural en placa vertical

Ecuación de la energía:

$$\rho c'_e \left(v_x \frac{\partial T}{\partial x} + v_y \frac{\partial T}{\partial y} \right) - T \frac{\partial}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{2T}{x^2} \right) + k_x \frac{\partial^2 T}{\partial y^2}$$

Como en el ejemplo anterior, la base dimensional adoptada es $L_x, L_y, L_z, M, Q, T, \theta$.

Para proceder la adimensionalización de las ecuaciones de continuidad y momento, se introducen las siguientes magnitudes de referencia:

- v_x^* velocidad característica en la dirección x
- v_y^* velocidad característica en la dirección y
- L longitud de la placa,
- l_v^* longitud característica normal a la placa

Las ecuaciones de dimensión de estas magnitudes son

$$[v_x^*] = L_x T^{-1}, [v_y^*] = L_y T^{-1}, [L] = L_y \text{ y } [l_v^*] = L_x$$

Con excepción de L se trata de magnitudes ocultas. En principio l_v^* está asociada a la anchura de la región en donde tienen lugar los procesos de cambio de velocidad, efectos viscosos y efectos térmicos; más adelante se asignará un significado más preciso a esta magnitud. Definiendo las variables adimensionales:

$$\begin{aligned} x' &= \frac{x}{l_v^*} & y' &= \frac{y}{L} \\ v'_x &= \frac{v_x^*}{v_x^*} & v'_y &= \frac{v_y^*}{v_y^*} \end{aligned}$$

la forma adimensional de la ecuación de continuidad es

$$\left(\frac{v_x^*}{l_v^*} \right) \frac{\partial v'_x}{\partial x'} + \left(\frac{v_y^*}{L} \right) \frac{\partial v'_y}{\partial y'} = 0$$

que permite escribir

$$\frac{v_x^*}{l_v^*} \sim \frac{v_y^*}{L}$$

Utilizando este resultado, las formas adimensionales de las ecuaciones del momento –con excepción de los términos de presión y gravedad–, una vez reorganizadas convenientemente para su comparación, son

$$\begin{aligned} \left(\frac{\rho v_y^{*2}}{L} \right) \left(v'_x \frac{\partial v'_x}{\partial x'} + v'_y \frac{\partial v'_x}{\partial y'} \right) &= \frac{\partial p_x}{\partial x'} \left[\frac{\mu_{xx} v_y^*}{l_v^*} \left(\frac{l_v^*}{L} \right) \frac{\partial^2 v'_x}{\partial x'^2} \right] - \frac{\mu_{xx} v_y^*}{L} \frac{l_v^*}{L} \frac{\partial^2 v'_x}{\partial y'^2} \\ \left(\frac{\rho v_y^{*2}}{L} \right) \left(v'_x \frac{\partial v'_y}{\partial x'} + v'_y \frac{\partial v'_y}{\partial y'} \right) &= \frac{\partial p_y}{\partial y'} \left[\frac{\mu_{yy} v_x^*}{l_v^*} \frac{\partial^2 v'_y}{\partial x'^2} - \frac{\mu_{yy} v_x^*}{L^2} \frac{\partial^2 v'_y}{\partial y'^2} \right] - \rho g \end{aligned}$$

Asumiendo la hipótesis $l_v \ll L$ es inmediato ver que, con excepción de los coeficientes de los términos de presión, el resto de los coeficientes de la primera ecuación, coordenada x , son mucho más pequeños que los términos correspondientes de la segunda, coordenada y . Esta comparación permite concluir, por un lado, que los cambios de presión con la coordenada x son muy pequeños y en todo caso mucho menores que los cambios de presión con la coordenada y , lo

que implica que la presión es –casi– independiente de x ; y, por otro, que la influencia de la propia ecuación en la solución del problema es despreciable frente a los efectos de la ecuación del momento en la coordenada y . Como resultado de esta discusión, la ecuación del momento en x no se considera bajo la hipótesis $l_v \ll L$.

Si asumimos que $p = p(y, \rho)$, es fácil deducir que $-dp/dy - \rho g = gy(d\rho/dy)$. En función del coeficiente de expansión, $\beta = \rho^{-1}(d\rho/dT)$, estos cambios de presión pueden escribirse en la forma $-dp/dy - \rho g = \rho g \beta y(dT/dy)$. Introduciendo esta expresión en la ecuación del momento y tomando como referencia para la temperatura $\Delta T = T_p - T_\rho$ la forma adimensional es

$$\begin{aligned} & \left(\frac{\rho v_y^{*2}}{L} \right) \left(v_x' \frac{\partial v_y'}{\partial x'} + v_y' \frac{\partial v_y'}{\partial y'} \right) = \\ & = \rho g \beta \Delta T \left(y' \frac{dT}{dy'} \right) + \left[\left(\frac{\mu_{xx} v_y^*}{l_v^{*2}} \frac{\partial^2 v_y'}{\partial x'^2} \right) + \frac{\mu_{yx} v_y^*}{l_v^{*2}} \left(\frac{l_v^{*2}}{L^2} \right) \frac{\partial^2 v_y'}{\partial y'^2} \right] \end{aligned}$$

Dado que uno de los coeficientes de los términos viscosos es $(l_v/L)^2$ veces menor que el otro, los cuatro coeficientes se reducen a tres ya que, numéricamente, $\mu_{xx} = \mu_{yx} = \mu$. Estos son

$$\frac{\rho v_y^{*2}}{L}, \quad \rho \beta \Delta T, \quad \frac{\mu v_y^*}{l_v^2}$$

y dan lugar a dos grupos adimensionales que expresaremos de la siguiente forma:

$$\pi^1 = \frac{\rho g \beta \Delta T L}{\rho v_y^{*2}}, \quad \pi^2 = \frac{\rho g \beta \Delta T l_v^{*2}}{\mu v_y^*}$$

La adimensionalización de la ecuación de la energía, usando los resultados de la ecuación de continuidad y definiendo una nueva magnitud de referencia asociada con el espesor de la capa límite, l_t^* , con $[l_t^*] = L_s$, en donde se balancean las energías, l_t^* longitud característica normal a la placa conduce a

$$\left[\left(\frac{c_e v_y^*}{J} \right) \left(\frac{l_v^*}{l_t^*} \right) v_x' \frac{\partial T}{\partial x'} + \frac{c_e v_y^* T}{l_t^*} \frac{\partial}{\partial y'} \left(v_y' \frac{\partial T}{\partial y'} \right) \right] = \left(\frac{k_y}{k_x} \frac{\partial^2 T_y}{\partial x'^2} \right) \frac{k_y}{l_t^{*2}} \frac{l_t^{*2}}{L^2} \frac{\partial^2 T_x}{y'^2}$$

El cuarto término de esta ecuación es $(l_t^*/L)^2$ veces menor que el tercero, por lo que puede despreciarse, y quedan tres coeficientes:

$$\left(\frac{c_e v_y^*}{l_t^*} \left(\frac{l_v^*}{l_t^*} \right)^2 \right) = \frac{c_e v_y^*}{L} \quad \text{y} \quad \left(\frac{k_x}{l_t^{*2}} \right)$$

que pueden agruparse en dos monomios adimensionales, tales como

$$\pi_3 = \frac{l_v^*}{l_t^*}, \quad \pi_4 = \frac{\alpha L}{v_y^* l_t^{*2}}$$

Así pues, son cuatro los grupos adimensionales que caracterizan el problema general.

Veamos la información que nos proporcionan en los casos límite. Para $Pr \ll 1$; es decir, $l_v^* \ll l_t^*$ o fuerzas viscosas despreciables (Figura 4.10, Capítulo 4) el monomio π_2 que contiene dichas fuerzas se elimina; también el π_3 , por la propia condición límite. Los monomios π_1 y π_4 proporcionan los órdenes de magnitud de la velocidad y del espesor de la capa límite térmica,

$$v_y^* \sim (g\beta\Delta T L)^{1/2}$$

$$l_t^* \sim \left(\frac{\alpha^2 L}{g\beta\Delta T} \right)^{1/4}$$

que puede expresarse en función de los números clásicos en la forma

$$v_y^* \sim \left(\frac{\alpha}{L} \right) Bo_L^{1/4}$$

$$l_t^* \sim L Bo_L^{-1/4}$$

Para $Pr \gg 1$, es decir $l_v^* \gg l_t^*$ o fuerzas de inercia despreciables, el razonamiento es más complejo. El monomio π_1 que contiene las fuerzas de inercia desaparece y el π^2 que balancea las fuerzas de flotación y las viscosas se debe referir a la región l_t^* , pues solo en esta región existen las fuerzas de flotación. Así, $\pi_2 = (\rho g \beta \Delta T l_t^2) / \mu_{yx} v_y^*$. Del conjunto π_3 y π_4 es fácil deducir que desaparece el grupo π_5 . La solución, pues, obtenida de los monomios π_2 y π_4 , es

$$v_y^* \sim \left(\frac{\rho g \beta \Delta T L \alpha}{\mu} \right)^{1/2}$$

$$l_t^* \sim \left(\frac{\mu \alpha L}{\rho g \beta \Delta T} \right)^{1/4}$$

o bien, en función de los números adimensionales clásicos:

$$\begin{aligned} v_y^* &\sim \left(\frac{\alpha}{L} \right) Ra_L^{1/4} \\ l_t^* &\sim L Ra_L^{-1/4} \end{aligned}$$

En la región fuera de la capa límite térmica, donde se balancean las fuerzas de inercia y viscosas (región donde no existen fuerzas de flotación), el cociente entre ellas proporciona el espesor de la capa límite de velocidad (Figura 4.9, Capítulo 4)

$$\begin{aligned} l_v^* &\sim \left(\frac{\mu L}{\rho v_y^*} \right)^{1/2} = \left(\frac{\mu^3 L}{\rho^3 g \beta \Delta T \alpha} \right)^{1/4} \\ l_t^* &\sim L Ra_L^{-1/4} Pr^{-1/2} \end{aligned}$$

La adimensionalización de la ecuación convectiva de contorno, que proporciona el monomio $h l_t^*/k$, permite conocer el valor del coeficiente de transferencia de calor:

$$\begin{aligned} h &\sim k \left(\frac{\rho g \beta \Delta T}{\alpha^2 L} \right)^{1/4}, \quad Nu_L \sim Bo_L^{1/4} \quad Pr \ll 1 \\ h &\sim k \left(\frac{\rho g \beta \Delta T}{\mu \alpha L} \right)^{1/4}, \quad Nu_L \sim Ra_L^{1/4} \quad Pr \gg 1 \end{aligned}$$

El lector puede comprobar que, si las capas son parecidas $v_y^* \approx l_t^*$, se cumple la condición $\alpha \approx \nu$; es decir, $Pr \approx 1$. Finalmente, el caso general donde fuerzas de inercia, viscosas y de flotación son del mismo orden de magnitud, el orden de magnitud de las incógnitas l_v^* , l_t^* , v_y^* y h queda indeterminado. Siguiendo un proceso similar al caso $Pr \gg 1$, de los monomios $\pi_2 = (\rho g \beta \Delta T l_t^2)/\mu v_y^*$ y $\pi_4 = \alpha L/(v_y^* l_t^2)$ se obtienen las variables l_t^* y v_y^* ; sin embargo, al no desaparecer $\pi_3 = l_v^*/l_t^*$, las variables son funciones desconocidas de π_3 , incluido el coeficiente de transferencia de calor:

$$\begin{aligned} v_y^* &= \left(\frac{\rho g \beta \Delta T L \alpha}{\mu} \right)^{1/2} f(\pi_3) \\ l_t^* &= \left(\frac{\mu \alpha L}{\rho g \beta \Delta T} \right)^{1/4} f(\pi_3) \\ h &\sim k \left(\frac{\rho g \beta \Delta T}{\mu \alpha L} \right)^{1/4} f(\pi_3) \end{aligned}$$

Lo habitual es utilizar el número de Prandtl como argumento de la función desconocida. El monomio de Pr es una combinación de los monomios del pro-

blema, $Pr = \pi_4\pi_2/\pi_1 = \alpha/\nu$. Así, la solución general puede escribirse también en la forma

$$\begin{aligned} v_y^* &= \left(\frac{\alpha}{L} \right)^{1/2} Gr_L^{1/2} f(\pi_3) \\ l_t^* &= Gr_L^{-1/4} f(\pi_3) \\ Nu_L &= Gr_L^{1/4} f(\pi_3) \end{aligned}$$

en concordancia con los resultados obtenidos mediante el ADD en el Capítulo 4.

6.5 La adimensionalización y el teorema de π

Hasta donde hemos investigado, particularmente en el campo de mecánica de fluidos y transmisión de calor, la discriminación conduce a resultados precisos, tanto si se aplica en su forma clásica, teorema de pi, como si se aplica para adimensionalizar ecuaciones. Los resultados obtenidos por procedimientos no discriminados son en general menos precisos y pueden inducir a confusión, como ocurre con los factores de forma y con los cocientes de propiedades físicas en medios anisótropos. En definitiva, creemos haber demostrado con los ejercicios propuestos que adimensionalizar las ecuaciones del modelo (en el sentido más general: búsqueda de monomios y órdenes de magnitud de las variables incógnitas) y aplicar el teorema de π son dos métodos implícitamente equivalentes, aunque sus puntos de partida y protocolos de aplicación sean distintos.

Consideramos importante esta conclusión formal, en tanto no se recoge explícitamente así en los textos generales de mecánica de fluidos y transmisión de calor. En ellos, la adimensionalización, al igual que el ADC, tiene por objeto sencillamente la deducción de los números adimensionales de un problema (sin profundizar en más aspectos).

Esta página se ha dejado intencionadamente en blanco

El análisis de escala y su conexión con el análisis dimensional discriminado

7.1 Introducción

Queremos dedicar este capítulo al análisis de escala, una técnica similar a la de adimensionalización de ecuaciones, propuesta por Bejan [1984], que hace uso implícitamente de la discriminación espacial. En consecuencia, está íntimamente conectada con el análisis dimensional discriminado y más directamente con la adimensionalización discriminada de ecuaciones, como variante de la teoría de análisis dimensional. A pesar de que AE y ADD en su versión de aplicación del teorema de π son técnicas diferentes en el procedimiento (la primera precisa de conocimiento de las ecuaciones, mientras que la segunda parte de la lista relevante de variables), ambas conducen a los mismos resultados en problemas clásicos no acoplados, como los de convección libre y forzada en sus casos límite y muchos otros. El objetivo de este capítulo es demostrar que las ideas que subyacen en el AE y en el ADD son idénticas en lo que se refiere al tratamiento de las variables espaciales, con escasos matices.

Cuando en una de las ecuaciones diferenciales del modelo matemático de un proceso concreto intervienen solo dos términos que constituyen el balance de fuerzas o energías, por ejemplo, la aplicación del AE conduce a los mismos resultados que el ADD; esto es, proporciona los órdenes de magnitud de las magnitudes incógnitas. Por el contrario, cuando intervienen más de dos términos (caso de convección libre) el AE no resuelve el problema, mientras que con la aplicación del ADD se obtiene la solución como una función indeterminada de uno o más monomios. Por otro lado, es evidente que los grupos obtenidos mediante el AE (cuando en la ecuación intervienen dos monomios), del orden de magnitud unidad, representan directamente balances entre fuerzas o entre energías; lo que ocurre también con el ADD (o la adimensionalización discriminada de la ecuación), incluso cuando son más de dos los términos que intervienen en la ecuación si esta está desacoplada.

A diferencia de Palacios [1964], y sus colaboradores Herranz y Arenas [1989], que asocian la discriminación espacial con la medida, Bejan no relaciona el análisis de escala con la posibilidad de medir en diferentes unidades en cada dirección espacial. De acuerdo con Bejan: “El objeto del análisis de escala es usar los principios básicos de transferencia de calor por convección con objeto de encontrar órdenes de magnitud de las magnitudes de interés. Esto significa que, si una de las magnitudes de interés es el espesor de la capa límite en convección forzada laminar, por ejemplo, el objeto del análisis de escala es determinar si dicho espesor se mide en milímetros o en metros. [...] cuando se aplica correctamente, el análisis de escala anticipa órdenes de magnitud unidad (o desviaciones porcentuales pequeñas) de las variables buscadas, información que solo es posible alcanzar por procedimientos analíticos caros en esfuerzo intelectual”. Aunque parece algo confuso este aspecto de asociación o no del análisis de escala con la medida, que a su vez supone relacionar la discriminación con la medida (en tanto que damos por sentado que el análisis de escala no es más que una forma de discriminación), aspecto claramente asumido por Palacios y sus colaboradores, para nosotros Bejan deslinda ambos conceptos. Una cosa es decir que el AE conduce a conocer si una magnitud dada se mide en cm o m (esto no equivale sino a afirmar cuál es el orden del valor numérico de dicha magnitud) y otra muy distinta es que para aplicar el análisis dimensional discriminado debe ser posible medir dos longitudes en direcciones perpendiculares con unidades diferentes. Ya hemos señalado en el texto que, en nuestra opinión, la discriminación es un concepto de carácter muy general y que trasciende de la medida. Y ashemos tratado de demostrarlo mediante los problemas resueltos.

Otros dos autores proponen técnicas muy similares al análisis de escala. Winterton [2000], que al igual que Bejan critica los resultados proporcionados por el análisis dimensional clásico en relación con el significado físico de los grupos que obtiene, y Middleman (1998), con su *inspectional method*, quien asegura que “el truco está en elegir los valores de referencia para las coordenadas espaciales, usando principios racionales”.

7.2 El análisis de escala

En su texto *Convection Heat Transfer* el profesor Adrian Bejan [1984,1995] introduce lo que llama *Scale Analysis* o *Scaling* definiéndolo como “un ejercicio intelectual de sentido común en los campos de transferencia de calor y mecánica de fluidos”. El profesor, cuyos libros queremos reconocer como guías fundamentales, por su nivel científico y por su claridad en las exposiciones, tanto para estudiantes de ciencias e ingeniería en los campos de termodinámica y transferencia de calor como para profesores, investigadores y especialistas profesionales, recomienda el análisis de escala como el método preferente “para obtener la mayor información

por unidad de esfuerzo intelectual” en un problema. Su uso se extiende a lo largo de los textos citados. En otro libro (Bejan y Krauss [2003]) se incluye un capítulo clásico de conceptos básicos en el que se describe en detalle el fundamento del análisis dimensional y la técnica de su aplicación a través del teorema de. En dicho texto se afirma que “el análisis dimensional se emplea para reducir el número de variables que requieren investigación, sugiriendo los grupos lógicos para presentar los resultados y señalando el camino para un programa experimental adecuado”.

Bejan, en relación con el AE, afirma que se trata de una herramienta necesaria y de una condición previa para un buen análisis en forma dimensional y ello a pesar de que esta técnica está, de hecho, ausente en la mayoría de los libros de texto modernos de transferencia de calor y mecánica de fluidos que sí contienen, en general, un capítulo dedicado al análisis dimensional.

En cuanto a la conexión entre análisis de escala y análisis dimensional Bejan afirma textualmente: “el análisis de escala es a menudo confundido con el análisis dimensional o con el arbitrario proceso de adimensionalización de las ecuaciones de gobierno”. Subrayamos lo de “arbitrario”. Continúa: “[...] el valor del análisis de escala se acentúa al comprobar que la noción de resultados exactos es tan falsa y efímera como la noción de hecho experimental”.

Bejan, tras aplicar el análisis de escala al ejemplo de conducción transitoria de calor, 1-D, utiliza este para describir las reglas que han de seguirse para aplicar correctamente el método. En síntesis, estas reglas, que conviene repetir aquí para guiar el objetivo de este capítulo, son (acentuamos las ideas clave contenidas en las mismas):

- (i) Se han de definir los límites de la región en la cual se aplica el análisis de escala. Si estos límites son desconocidos, como en el caso de la capa límite, se confinan a una región finita del espacio introduciendo las longitudes características necesarias. Cualquier aplicación del análisis de escala a una región indefinida carece de sentido.
- (ii) Cualquier ecuación constituye una equivalencia entre las escalas de dos términos dominantes que aparecen en ella. Cuando una ecuación contiene más de dos términos, no todos son necesariamente importantes. El arte de seleccionar las escalas dominantes de entre muchas escalas se resume en las reglas (iii), (iv) y (v) siguientes.
- (iii) El orden de magnitud de la suma o diferencia de dos términos es la del término dominante, el de mayor orden de magnitud.
- (iv) El orden de magnitud de la suma o diferencia de dos términos dominantes (del mismo orden de magnitud) es el mismo que el de cualquiera de ellos.
- (v) El orden de magnitud del producto (cociente) de dos términos de diferente orden de magnitud es el producto (o cociente) de los órdenes de magnitud de dichos términos.

En cuanto a estas reglas queremos comentar lo siguiente. Las tres últimas se refieren a propiedades matemáticas del concepto de orden de magnitud, que permiten simplificar términos de la ecuación cuando se satisfacen ciertos criterios de comparación. La primera es importante, ya que establece las longitudes características o de referencia para adimensionalizar las variables espaciales. Si estas no existen en el enunciado del problema, sencillamente se introducen, dice la regla. Esta introducción conduce implícitamente a la existencia de otras magnitudes características, como tiempos, velocidades, etc. Entonces, ¿no equivale esta regla a suponer magnitudes ocultas en el problema que es lo que hace el análisis dimensional, a priori no solo con la magnitud longitud sino con todo tipo de magnitudes? Piénsese que la forma final de una ecuación (que se ha formulado tras la asunción de ciertas hipótesis) lleva implícita la existencia, por ejemplo, de ciertas magnitudes características. Así, existe una asociación entre hipótesis asumidas, forma simplificada de la ecuación en función de dichas hipótesis y existencia de magnitudes características. Esto es lo que conecta substancialmente el AE con el ADD.

Parece que la regla sí permite, si no existe una longitud característica (dominio infinito), adoptar una arbitraria y trabajar con ella; los resultados se atribuirían a un tiempo característico asociado a esa región arbitraria. También parece

que la regla parece implícitamente que fenómenos físicos diferentes puedan ocurrir en distintos dominios, por lo que estos deben definirse por separado para cada fenómeno.

En cuanto a la regla (ii) se quiere hacer hincapié en que, aunque en una ecuación existan más de dos términos, solo dos de ellos tienen importancia respecto del resto. Este caso implica la existencia de un solo monomio adimensional en la solución, y por tanto, el conocimiento del orden de magnitud de la variable buscada. Para este tipo de problemas, AE (o adimensionalización discriminada de ecuaciones) y ADD llegan a los mismos resultados, como ya se ha mencionado. Sin embargo, Bejan no considera el caso en el que son más de dos los términos preponderantes en una ecuación, por ser todos del mismo orden de magnitud; por ejemplo, el caso general de convección libre donde las fuerzas de inercia, viscosas y de flotación son del mismo orden de magnitud.

7.3 Análisis dimensional, adimensionalización de ecuaciones y análisis de escala

En relación con el AD, el profesor Bejan [1995] escribe lo siguiente: “El análisis de escala trasciende del análisis dimensional, cuyo objetivo es determinar la dimensión del espesor de la capa límite, cuyo nombre es longitud”. Es obvio, des-

pués del contenido del presente texto (en particular, de las numerosas aplicaciones y problemas resueltos, incluso en su referencia al análisis dimensional clásico al que sin duda Bejan alude), que la afirmación del profesor nos resulta excesivamente severa. En primer lugar, el análisis dimensional es una teoría formalmente establecida, básicamente por Palacios [1964], cuyo objetivo de acuerdo con este autor es sin duda algo más que la determinación de las dimensiones de las magnitudes físicas, aunque en su seno (Williams [1892], Buckingham [1921], Bridgeman [1922], Langhaar [1951]) y precisamente por tratarse de una investigación fundamental en las ciencias experimentales se discutan extensamente los conceptos fundamentales que sustentan esta teoría: magnitudes, unidades, medidas, dimensiones, bases, etc.

Si además añadimos la discriminación, en su germen un concepto casi tan antiguo como la misma teoría, Willians [1892], tenemos una herramienta tan útil sin duda como el análisis de escala, mejor establecida desde el punto de vista formal y, hasta nos atreveríamos a decir como consecuencia de su rigor, tan potente o más que el análisis de escala en la búsqueda de soluciones cuando se aplica bajo la forma de adimensionalizar ecuaciones.

En síntesis, la similitud esencial entre AE y ADD (teorema de π) es la hipótesis de existencia de dominio finito ($1/D \ll 1$) y su dominio (que coincide con su propia técnica). Entre las diferencias, que el AE necesita conocer las ecuaciones diferenciales que rigen el proceso mientras que el ADD parte de la lista exacta de variables relevantes del problema. Aunque Bejan [1995] no incluye en sus reglas la existencia de otras variables de referencia diferentes de la longitud (pero las usa cuando son necesarias; por ejemplo, la velocidad del fluido no perturbado en convección forzada) ni señala cuáles son las soluciones que proporciona el AE cuando intervienen más de dos monomios, parece inmediato extender el AE para incluir estos aspectos en la misma forma en que lo hace el ADD.

El *handicap* del AE, al igual que el de la adimensionalización discriminada, es, sin duda, conocer de antemano el conjunto de ecuaciones que constituyen el modelo matemático. Piénsese por ejemplo en el problema de capa límite con succión (Capítulo 3). Sin ecuaciones, el AE no proporciona información alguna, mientras que el ADD es capaz de aportar bastante información a partir de ununciado y algunas hipótesis.

Por último, un pequeño matiz respecto de la comparación entre AE y la adimensionalización discriminada de ecuaciones. El AE sustituye directamente la escala de cambios de cada variable por sus valores extremos y compara los resultados finales de los términos de la ecuación que se forma. En el otro proceso se adimensionalizan cada una de las variables con una referencia agrupando los factores multiplicativos de las nuevas derivadas adimensionales para obtener los grupos adimensionales. Así, estas nuevas derivadas contienen variables adimensionales

cuyos rangos numéricos siempre están comprendidos entre 0 y 1 (esto no ocurre en los procesos clásicos). De esta forma, los valores extremos de las nuevas derivadas son la unidad, con lo que la comparación de términos queda relegada a la comparación de los coeficientes, conduciendo al mismo resultado que el AE.

Alhama y Madrid [2004, 2008] discuten las similitudes y diferencias entre el análisis de escala y el análisis dimensional discriminado, así como entre el análisis de escala y la adimensionalización discriminada, a través de los problemas de convección libre y forzada en capa límite laminar. Las conclusiones, que se justifican al final del capítulo, van en la línea de que, si bien ADC y AE son herramientas no solo cualitativamente diferentes sino que no llegan al mismo nivel de solución en la mayoría de los problemas (el análisis de escala es enormemente más eficiente), ADD, adimensionalización discriminada de ecuaciones y AE, si pueden considerarse técnicas cualitativamente equivalentes que alcanzan el mismo nivel de solución en todos los casos.

En lo que sigue, se resumen los resultados de AE y ADD para algunos ejemplos típicos con la esperanza de comprender mejor el objetivo de este capítulo. Estos ejemplos *están estudiados en los capítulos 3, 4 y 5* mediante ADD, y en el texto de Bejan [1995] mediante el AE, por lo que se remite a esas referencias para mayor detalle.

7.4 Aplicaciones

Ejemplo 7.1 Conducción transitoria de calor 1-D con propiedades térmicas constantes

Es el primer ejemplo propuesto Bejan [1995] para derivar sus reglas del análisis de escala. Se aplica a una placa de espesor finito donde la conducción de calor es transversal al someter las superficies externas a una temperatura T_s constante, $T_s > T_o$, Figura 7.1. La ecuación que rige este proceso es

$$c'_e \frac{\partial T}{\partial t} = k \left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} \right)$$

Si tomamos como valores de referencia $\Delta T = T_s - T_o$, para la temperatura, t^* (tiempo según Bejan para que el borde izquierdo sienta el cambio de temperatura impuesto en el borde derecho) para el tiempo, y D para la coordenada espacial, el AE conduce a la expresión

$$c'_e \frac{\Delta T}{t^*} \sim k \frac{\Delta T}{D^2}$$

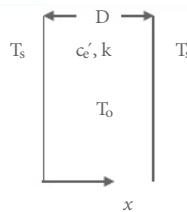


Figura 7.1 Geometría del problema

con lo que el tiempo característico es

$$t^* \sim \frac{c'_e D^2}{k} = \frac{D^2}{\alpha}$$

La adimensionalización discriminada (aunque aquí no hace falta discriminación) define en primer lugar las variables adimensionales:

$$x' = \frac{x}{D}, \quad t' = \frac{t}{t^*}, \quad T' = \frac{T - T_o}{T_s - T_o}$$

donde, sin más, t^* es un tiempo característico del problema asociado al orden de magnitud del tiempo de duración del transitorio. Con esto, la ecuación de conducción se transforma en

$$\left(\frac{c'_e D^2}{k t^*} \right) \frac{\partial T'}{\partial t'} = \frac{\partial^2 T'}{\partial x'^2}$$

que conduce a la misma solución que el AE para t^* . Adviértase que los términos $\partial T'/\partial t'$ y $\partial^2 T'/\partial x'^2$ son del orden de magnitud unidad en el dominio geométrico del problema, ya que las escalas de cambios de las variables adimensionales son la unidad.

El ADD conduce, obviamente, a la misma solución.

Ejemplo 7.2 Conducción transitoria y estacionaria de calor 2-D con propiedades térmicas constantes

La ecuación que rige el proceso es, Figura 7.2,

$$c'_e \frac{\partial T}{\partial t} = k \left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + k \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \right)$$

Supongamos unas condiciones de contorno sencillas de tipo isotermo $T_{y=0} = T_s$, $T_{x=0} = T_{x=b} = T_{y=a} = T_{x,y,t=0} = T_o$. De nuevo, si tomamos como valores de referencia $\Delta T = T_s - T_o$ para la temperatura, t^* para el tiempo, y a y b para las coordena-

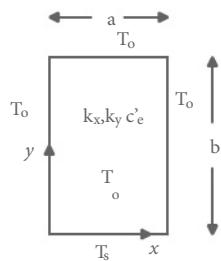


Figura 7.2 Geometría del problema

das espaciales x e y , respectivamente, el AE conduce a la siguiente competición entre términos:

$$\begin{aligned} \text{Calor almacenado en el medio: } & \frac{c'_e \Delta T}{t^*} \\ \text{Calor conducido en dirección } x: & k \left(\frac{\Delta T}{a^2} \right) \\ \text{Calor conducido en dirección } y: & k \left(\frac{\Delta T}{\frac{b^2}{2}} \right) \end{aligned}$$

De aquí, el tiempo característico es

$$\begin{aligned} a \gg b, \quad t^* & \sim \frac{c'_e b^2}{k} = \frac{b^2}{\alpha} \\ b \gg a, \quad t^* & \sim \frac{c'_e a^2}{k} = \frac{a^2}{\alpha} \\ a \sim b, \quad t^* & \sim \frac{c'_e a^2}{k} = \frac{a^2}{\alpha} \quad \frac{c'_e b^2}{k} = \frac{b^2}{\alpha} \end{aligned}$$

En el tercer caso, $a \sim b$, se han comparado tres términos asumidos, por hipótesis, del mismo orden de magnitud, lo que trasciende de la regla (ii) del AE; sin embargo también se ha obtenido el orden de magnitud de t^* .

x' La adimensionalización discriminada, con las variables adimensionales $T' \Delta T / T$,

$$\left(\frac{c'_e \Delta T}{t^*} \right) \frac{\partial T}{\partial t'} = \left(\frac{k_x \Delta T}{a^2} \right) \left(\frac{\partial^2 T'}{\partial x^2} \right) + \left(\frac{k_y \Delta T}{b^2} \right) \left(\frac{\partial^2 T'}{\partial y^2} \right)$$

Si reagrupamos convenientemente estos términos, podemos escribir la ecuación en la forma

$$\left(\frac{c'_e a^2}{kx t^*} \right) \left(\frac{\partial T'}{\partial t'} \right) = \left(\frac{\partial^2 T'}{\partial x^2} \right) + \left(\frac{(k_y)^2}{(k_x)^2} \right) \frac{a^2}{b^2} \left(\frac{\partial^2 T'}{\partial y^2} \right)$$

o, con $k_x = k_y = k$

$$\left(\frac{c'_e a^2}{k t^*} \right) \left(\frac{\partial T'}{\partial t'} \right) = \left(\frac{\partial^2 T'}{\partial x^2} \right) + \left(\frac{a^2}{b^2} \frac{\partial^2 T'}{\partial y^2} \right)$$

Si $a \gg b$, el término $(\partial^2 T' / \partial x'^2)$ es despreciable frente al término (a^2 / b^2) $(\partial^2 T' / \partial y'^2)$ y la solución es $t^* \sim b^2 \rho c / k$, que coincide con la del AE. Lo mismo para el caso $a \ll b$ y para el caso $a \sim b$, donde los términos de la derecha de la ecuación son del mismo orden de magnitud. En realidad, la solución obtenida para el último caso es $t^* \sim (b^2 \rho c_e / k) f(a/b)$, donde tanto a/b como $f(a/b)$ son del orden de la unidad.

En cuanto a la conducción estacionaria, de ecuación

$$k \left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} \right) + k \left(\frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \right) = 0$$

¿qué nos dice el AE? La competición entre términos sería

Calor conducido en la dirección x : $k \Delta T / a^2$

Calor conducido en la dirección y : $k \Delta T / b^2$

de forma que en función de los valores relativos de a y b , la conducción tiene lugar en una dirección predominante. Si $a \ll b$, es si $a \gg b$, y en ambas direcciones, si a y b son del mismo orden de magnitud. Para una placa anisótropa, la competición entre términos es

Calor conducido en dirección x : $k \left(\frac{\Delta T}{a^2} \right)$

Calor conducido en dirección y : $k \left(\frac{\Delta T}{b^2} \right)$

con lo que el parámetro que define la condición de conducción preferente es $\pi = (k_y/k_x)(a^2/b^2)$. Si $\pi \gg 1$, con independencia de los valores concretos de las variables que contiene, la conducción tiene lugar preferentemente en la dirección y ; si $\pi \ll 1$, en la dirección x , y si $\pi \sim 1$, la conducción compite por igual en ambas direcciones. Todo ello equivale a decir que el patrón estacionario de flujo de calor en la placa o de distribución estacionaria de temperaturas solo es una función del parámetro π .

Ejemplo 7.3 Convección forzada en capa límite laminar sobre una placa isotérmica horizontal

Resumimos los resultados obtenidos por Bejan [1984], que aborda los casos límite $Pr \gg 1$ y $Pr \ll 1$, y por Madrid y Alhama [2005, 2008]. Los resultados obtenidos por el AE, asumiendo que los espesores de la capa límite de velocidad y

térmica son distintos, y llamando δ_v al espesor de la capa límite de velocidad, δ_t al de la capa térmica y h al coeficiente de transferencia de calor, son

$$\begin{aligned}\delta_v &\sim \left(\frac{\mu L}{\rho U} \right)^{1/2} = L Re_L^{-1/2} \\ \delta_t &\sim \left(\frac{\mu k^2 L^3}{\rho c_e'^2 U^3} \right)^{1/6} = L Re_L^{-1/2} Pr^{-1/3} \quad \delta_v \gg \delta_t \quad \text{o} \quad Pr \gg 1 \\ \delta_t &\sim \left(\frac{k L}{c_e' U} \right)^{1/2} = L Re_L^{-1/2} Pr^{-1/2} \quad \delta_v \ll \delta_t \quad \text{o} \quad Pr \ll 1 \\ h &\sim \left(\frac{\rho c_e'^2 U^3 k^4}{\mu L^3} \right)^{1/6} = L Re_L^{-1/2} Pr^{-1/3} \quad Pr \gg 1 \\ h &\sim \left(\frac{c_e' U k}{L} \right)^{1/2} = L Re_L^{1/2} Pr^{1/2} \quad Pr \ll 1\end{aligned}$$

Estos resultados coinciden con los obtenidos por ADD y por la adimensionalización de las ecuaciones diferenciales (capítulos 5 y 6). El caso $Pr \sim 1$ o $\delta_v \sim \delta_t$ no ha sido estudiado aisladamente por Bejan, que lo incluye en el caso $Pr \gg 1$. Para esta hipótesis, utilizando la ecuación del momento (al igual que en los casos límite anteriores), obtenemos

$$\delta_v \sim \left(\frac{\nu L}{U} \right)^{1/2}$$

mientras que para δ_t , usando la ecuación de la energía, tenemos tres términos:

$$U^* \frac{\Delta T}{L}, \quad v^* \frac{\Delta T}{\delta_t}, \quad \alpha \frac{\Delta T}{\delta_t^2}$$

donde U^* y v^* son velocidades ligeramente diferentes a U y v , y proporcionales a ellas. Por ejemplo, para $\delta_t \geq \delta_v$ (\geq quiere decir “ligeramente mayor que”) podríamos escribir $U^* = (\delta/\delta)U$ y $v^* = (U/L)(\delta^2/\delta)$. Con esto, los términos anteriores pueden escribirse en la forma

$$\left(\frac{\delta_v}{\delta_t} \right) \left(\frac{U}{L} \right), \quad \left(\frac{v^*}{\delta_t} \right) \left(\frac{U}{L} \right) \left(\frac{\delta_v^2}{\delta_t} \right) \frac{1}{t}, \quad \frac{\alpha}{t^2}$$

Al comparar el primero y el segundo, obtenemos

$$\frac{\delta_v}{\delta_t} \sim 1$$

mientras que, al comparar el primero y tercero, haciendo uso de $\delta_v \sim (\nu L/U)^{1/2}$, tenemos

$$\delta_t \sim L \left(\frac{\nu}{UL} \right)^{1/2} \left(\frac{\alpha}{\nu} \right) = L Re_L^{-1/2} Pr^{-1}$$

Adviértase también que la comparación del segundo con el tercero conduce a

$$\frac{\nu}{\alpha} = Pr \sim 1$$

una relación no independiente de los anteriores, al igual que la relación $(\nu/\alpha) \sim (\delta_v/\delta_t)$, que también puede deducir comparando los términos primero y tercero.

De todo lo anterior, podemos deducir que la solución es una función de dos de las relaciones independientes obtenidas; por ejemplo,

$$F \left[\left(\frac{\delta_t}{\alpha} , - \frac{t}{L} \left(\frac{\nu UL}{\alpha} \right)^{1/2} \right) \right] = F \left[\left(\frac{\delta_t}{Pr}, - \frac{t}{L} Re_L^{1/2} \right) \right] = F \left[\left(\frac{t}{L} \right) Re_L^{1/2}, Pr \right] =$$

En consecuencia,

$$\frac{\delta_t}{L} = Re_L^{-1/2} F(Pr)$$

En relación con la determinación de h , si se utilizan la condición de contorno y los resultados anteriores, es inmediato deducir que

$$h \sim \left(\frac{k}{\delta_t} \right) = \left(\frac{k}{L} \right) Re_L^{1/2} F(r)$$

Estos resultados, al igual que los del caso $\delta_t \leq \delta_v$, coinciden con los obtenidos por ADD y por el proceso de adimensionalización discriminada de ecuaciones.

Ejemplo 7.4 Convección natural en capa límite laminar sobre una placa isotérmica vertical

La geometría del problema se muestra en la Figura 4.8, Capítulo 4. Como en el caso de convección forzada, se asume que los espesores de las capas límite de velocidad y térmica, δ_t y δ_v respectivamente, son diferentes. Para los casos límite, Bejan proporciona las soluciones

$$\delta_t \sim \left(\frac{\nu \alpha L}{g \beta \Delta T} \right)^{1/4} = Ra_L^{-1/4} \propto (Gr_L Pr)^{-1/4} \quad (Pr \gg 1 \text{ o } \delta_t \ll \delta_v)$$

$$v^* \sim \left(\frac{g \beta \Delta T \alpha L}{\nu} \right)^{1/2} = \frac{\alpha}{L} Ra_L^{1/2} = \frac{\alpha}{L} (Gr_L Pr)^{1/2} \quad (Pr \gg 1 \text{ o } \delta_t \ll \delta_v)$$

$$\begin{aligned}
 h &\sim \left(\frac{g\beta\Delta T c'_e k^3}{\nu L} \right)^{1/4} = \left(\frac{k}{L} Ra_L^{1/4} \right) = \frac{k}{L} (Gr_L Pr)^{1/4} \quad (Pr \gg b \quad \delta_t \ll \delta_v) \\
 \delta_v &\sim \left(\frac{\nu^3 L}{g\beta\Delta T \alpha} \right)^{1/4} = L Ra_L^{-1/4} Pr^{1/2} = L Ra_L^{-1/4} Pr^{1/4} \quad (Pr \gg b \quad \delta_t \ll \delta_v) \\
 \delta_t &\sim \left(\frac{\alpha^2 L}{g\beta\Delta T} \right)^{1/4} = L Bo_L^{-1/4} = L (Gr_L Pr^2)^{-1/4} \quad (Pr \ll b \quad \delta_t \succ \delta_v) \\
 v^* &\sim (g\beta\Delta T L)^{1/2} = \left(\frac{\alpha}{L} Bo_L^{1/2} \right) = \frac{\alpha}{L} Gr_L^{1/2} Pr \quad (Pr \ll b \quad \delta_t \succ \delta_v) \\
 h &\sim \left(\frac{g\beta\Delta T k^4}{\alpha^2 L} \right)^{1/4} = \left(\frac{k}{L} Bo_L^{1/4} \right) = \frac{k}{L} (Gr_L Pr^2)^{1/4} \quad (Pr \ll b \quad \delta_t \succ \delta_v) \\
 \delta_{v\text{-max}} &\sim \left(\frac{\nu L}{g\beta\Delta T} \right)^{1/4} = L Gr_L^{-1/4} \quad (Pr \ll 1 \quad \delta_t \sim \delta_v)
 \end{aligned}$$

donde v^* es la velocidad característica y $\delta_{v\text{-max}}$ es espesor de la capa asociado a la distancia a la placa donde tiene lugar la velocidad máxima.

El caso $Pr \sim 1$, en el que las fuerzas de inercia, viscosas y de flotación son del mismo orden de magnitud, no lo estudia Bejan por existir más de dos términos preponderantes en las ecuaciones de balance. En las ecuaciones de balance, los sumandos correspondientes a las fuerzas de inercia son del mismo orden de magnitud si se tiene en cuenta la ecuación de continuidad. Así, los tres coeficientes de esta ecuación (inercia, viscosas y de flotación) dan lugar a tres términos, que son

$$\frac{v^*}{L}, \quad \frac{\nu v^*}{\delta_t^2}, \quad g\beta\Delta T$$

que, a su vez proporcionan dos relaciones independientes, de orden de magnitud unidad, de entre las tres posibles

$$\frac{v^*}{g\beta\Delta T L} \sim 1 \quad (\text{a})$$

$$\frac{\nu v^*}{g\beta\Delta T \delta_t^2} \sim 1 \quad (\text{b})$$

$$\frac{v^* \delta_t^2}{\nu L} \sim 1 \quad (\text{c})$$

Por otro lado, la ecuación de la energía, cuyos términos conductivos son del mismo orden de magnitud aplicando la ecuación de continuidad, proporciona dos términos, $v^*\Delta T/L$ y $\alpha\Delta T/\delta_t^2$, y una nueva relación

$$\frac{v^* \delta_t^2}{\alpha L} \sim 1 \quad (\text{d})$$

En definitiva, existen tres relaciones independientes, (d) y dos más entre (a), (b) y (c), y dos incógnitas, v^* y δ_t , por lo que existe siempre una función indeterminada en la solución. Para que esta función tenga como argumento Pr , podemos combinar (d) y (c), dividiéndolos, y quedarnos con las relaciones (a), (b) y (d)/(c). De las dos primeras pueden deducirse los órdenes de magnitud de v^* y δ_t , que quedarán modulados por la tercera. La solución final es, pues,

$$v^* = \left(g\beta\Delta T L \right)^{1/2} F\left(\frac{\nu}{\alpha}\right) = \frac{\nu}{L} Gr_L^{1/2} F(Pr)$$

$$\delta_t = \left(\frac{\nu^2 L}{g\beta\Delta T} \right)^{1/4} F\left(\frac{\nu}{\alpha}\right) = L Gr_L^{-1/4} F(Pr)$$

Trabajando con la condición de frontera se obtiene

$$h = k \left(\frac{g\beta\Delta T}{\nu^2 L} \right)^{1/4} F\left(\frac{\nu}{\alpha}\right) = \left(\frac{k}{L} \right) Gr_L^{1/4} F(Pr)$$

resultados, todos, que coinciden con los del ADD y con los obtenidos por la adimensionalización discriminada de ecuaciones.

Esta página se ha dejado intencionadamente en blanco

Referencias

- ACRIVOS, A. *The asymptotic form of the laminar boundary-layer mass transfer rate for large interfacial velocities.* J. Fluid Mech., 12, 337-357 (1962).
- ADIUTORI, E. F. *A new view of dimensional homogeneity, and its impact on the fundamental equations and parameters of heat transfer science.* ASME HTD 204, 1 (8) (1982).
- ADIUTORI, E. F. *The new heat transfer.* Venturo Press (1989).
- ALHAMA, F., NAVARRO, J. R., MADRID, C. N., ARENAS, A. y HERRANZ, A. "Aplicaciones a la Mecánica de fluidos", *Libro de resúmenes de la XXIII Bienal Física* (Valladolid), 1, 301-314 (1991).
- ALHAMA, F. y MADRID, C. N. *Discriminated Dimensional Analysis Versus Classical Dimensional Analysis and Applications to Heat Transfer and Fluid Dynamics*, Chin. J. Chem. Eng., 15 (5), 626-631 (2007).
- ALHAMA, F. y MADRID, C. N. *Análisis de escala versus análisis dimensional discriminado. Aplicación a problemas de mecánica de fluidos.* XVI CNIM. León, Resúmenes, 2063-2069 (2004).
- ALHAMA, F. y MADRID, C. N. *Discriminate dimensional analysis and scale analysis applied to forced and free convection: a comparison.* Eurotherm-08. Eindhoven. Proceedings, 8 p. Holanda (2008).
- ANDERSON, W. G., HUBER, P. W. y SONIN, A. A. J. *Heat Transfer* 100, 605–612 (1978).
- ARENAS, A. *Análisis dimensional en la Mecánica de fluidos y Transmisión del calor.* Tesis Doctoral. Univ. Madrid, Madrid (1970).
- ARENAS, A. *Análisis dimensional.* Selecciones científicas, Madrid (1986).
- ARPACI, V. S. y LARSEN, P. S. *Convection Heat Transfer.* Prentice-Hall, New Jersey (1984).
- BAEHR, H. D. y STEPHAN, K. *Heat and mass transfer.* Springer-Verlag (1998).
- BARENBLATT, G. I. *Scaling, self-similarity and intermediate asymptotics.* Cambridge U. P., Cambridge (1996).
- BEJAN, A. *Convection Heat Transfer.* Wiley-Interscience, New York (1984).
- BEJAN, A. *Convection Heat Transfer.* 2^a ed, John Wiley and Sons, New York (1995).
- BEJAN, A. y KRAUSS, A D. *Heat transfer handbook* Cap. 1. John Wiley and Sons, New York (2003).
- BOHREN, C. F. "Dimensional analysis, falling bodies, and the fine art of not solving differential equations", *American Journal of Physics* 72 (4) 534-537 (2004).

- BRIDGMAN, P. W. *Dimensional Analysis*. Yale University (1922).
- BRIDGMAN, P. W. *Dimensional Analysis*. Yale U. P. New Haven, CT (1937).
- BRODKEY R. S. y HERSHY, H. C. "Transport Phenomena", *A Unified Approach*. McGraw-Hill (1988).
- BRÜCKNER, S. Web de la Universidad de Stuttgart *Institut für Static und Dynamik der Luft- und Raumfahrtkonstruktionen*.
- BUCKINGHAM, E. *On physically similar systems: Illustration of the use of dimensional analysis*. Phys. Review 4, 345-376 (1914).
- BUCKINGHAM, E. *Notes on the method of dimensions*. Phil. Mag., s. 6, 42, 696-719 (1921).
- BURMEISTER, L. C. *Convective Heat Transfer*. (2^a ed.), John Wiley & Sons (1995).
- CASTAÑS CAMARGO, M. y DÍAZ SANCHIDRIÁN, C. "Reducción del número de variables independientes en física de fluidos, transmisión de calor, difusión, vibraciones y ondas acústicas, mediante utilización del análisis dimensional con discriminación espacial", *ETS de Arquitectura*. Madrid. Cuaderno 6, Mayo (1989).
- CASTAÑS CAMARGO, M. y DÍAZ SANCHIDRIÁN, C. "Reduction of partial differential equations to ordinary differential equations. Through dimensional analysis with spatial discrimination", *Application to fluid mechanics. J. of Non equilibrium thermodynamics* (1988).
- CEBEKI, T., *Convective Heat Transfer*. (2^a ed.), Springer-Verlag. Horizons Publishing (2002).
- CENGEL, Y. A. *Heat Transfer. A Practical Approach*. (2^a ed.), McGraw-Hill (2004).
- CHAPMAN, A. J. *Heat transfer*. Macmillan Publishing Company, New York (1960).
- CHARNOV, E. L. y SKULADOTTIR, U. "Dimensionless invariants for de optimal sizes (age) of sex change", *Evolutionary ecology research*, 1067-1071 (2000).
- CHIDA, K. y KATTO, Y. "Study on conjugate heat transfer by vectorial dimensional analysis", *Int. J. Heat Mass Transfer*, 19, 453-460 (1973).
- CHUANG, T. C. "Dimensional analysis for Gorter-Mellink counter flow convection in pressurized superfluid helium", *Int. J. Heat Mass Transfer* 48, 455-459 (2005).
- CHUN, J. H. y SONIN, A. A. *Nucl. Eng. Des.* 85, 353-362 (1985).
- CHURCHILL, S. W. y BERNSTEIN, M. "A correlating equation for forced convection from gases and liquids to a circular cylinder in crossflow" *Int. J. Heat Mass Transfer* 99, 300-306 (1977).
- CRESPO, A. *Mecánica de fluidos*. Thomson (2006).
- DE JONG, F. J. "Dimensional analysis for economists". 50 *Contributions to Economic Analysis*. North-Holland (1967).
- DÍAZ SANCHIDRIÁN, C. *Reducción sistemática del número de variables independientes en física de fluidos, transmisión de calor y difusión*. Tesis Doctoral. UNED, Madrid (1987).
- DODD, S. C. *The probable acts of man*. Amsterdam (1967).
- DROBOT, S. "On the Foundations of Dimensional Analysis", *Studia Mathematica*, 14, 84-99 (1954).
- ECKERT, E. R. G. y SOEHNGEN, E. "Distribution of Heat Transfer around circular cylinders in crossflow at Reynolds numbers from 20 to 500", *Trans. ASME*, 74, 343 (1952).
- EDE, A. J. "Advances in Natural Convection", *Adv. Heat Transfer*, 4, 1-64 (1967).
- EDWARDS, D. K., DENNY, V. E. y MILLS, A. F. *Transfer processes*. Hemisphere, Washington (1979).
- FOURIER, J. B. *Théorie Analytique de la Chaleur* (1822). Gauthier Villars, París (1822).

- FOX, R. W. y McDONALD, A. T. *Introduction to Fluid Mechanics.* (4º ed) John Wiley & Sons, Inc., New York (1992).
- GEBHART, B., JALURIA, Y., MAHAJAN, R. L. y SAMMAKIA, B. *Buoyancy-Induced Flows and Transport.* Hemisphere, New York (1988).
- GHEBART, B., JALURIA, Y., MAHAJAN, R. L. y SAMMAKIA, B. *Buoyancy-Induced Flows and Transport.* Hemisphere (1988).
- GONZÁLEZ DE POSADA, F. "Hacia una nueva fundamentación del análisis dimensional" *Revista de la Real Academia de Ciencias experimentales físicas y naturales*, 75 (4) 969-991 (1981).
- GONZÁLEZ DE POSADA, F. *Breviario de teoría Dimensional. Pre-textos de Física.* Dpto. de publicaciones ETS Arquitectura, Universidad politécnica de Madrid (1994).
- GRAETZ, L. *Über die Wärmeleitfähigkeit von Flüssigkeiten.* Ann. Phys., 25, 337-357 (1885).
- GRÖBER, H. y ERK, S. *Transmisión de calor.* Selecciones Científicas, Madrid (1967).
- GUILLAUME, E. "La Mesure", *Encyclopédie des Sciences Mathématiques.* Runge, C., trans. Gauthier Villars, París, 1-64 (1956).
- GUNTHER, B. "Dimensional analysis and theory of Biological similarity", *Physiological reviews*, 55 (4), 659-699 (1975).
- HARKINS, W. D. y BROWN, F. E. *Am. Chem. Soc.*, 41, 499 (1919).
- HART, G. W. *Multidimensional analysis.* Springer-Verlag (1994).
- HEATON, H. S., REYNOLDS, W. C. y KAYS, W. M. "Heat transfer in annular passage. Simultaneous development of velocity and temperature fields in laminar flow", *Int. J. Heat and Mass Transfer*, 7, 763-781 (1964).
- HERRANZ, A. y ARENAS, A. "Análisis dimensional y sus aplicaciones". *I Fundamentos de Análisis dimensional. II Aplicaciones a Mecánica de fluidos. III Aplicaciones a Transmisión del calor.* Diego Marín (1989).
- HERRANZ, A. y ARENAS, A. "Análisis dimensional y sus aplicaciones". *IV Geometría Física.* Diego Marín (2003).
- HERRANZ, A. y ARENAS, A. *Análisis dimensional y sus aplicaciones.* Diego Marín (2005).
- HILFER, R. y HELMIG, R. "Dimensional analysis and upscaling of two-phase flow in porous media with piecewise constant heterogeneities", *Advances in water resources* 27 1033-1040 (2004).
- HILFER, R. y OREN, P. "Dimensional analysis of pore scale and field scale immiscible displacement". *Transport porous media* (22) 53 (1996).
- HOLMAN, J. P. *Heat Transfer.* (8ª ed.) McGraw-Hill (1997).
- HORNBECK, R. W. "An all-numerical method for heat transfer in the inlet of a tube", *Am. Soc. Mech. Eng., Paper 65-WA HT-36* (1965).
- HORNBECK, R. W. NASA SP-297. Washington (1973).
- HRISTOV, J. Y. "Magnetic field assisted fluidization: Dimensional analysis addressing the physical basis", *China Particuology*, 5(1) 103-110 (2007).
- HRISTOV, J. Y., PLANAS, E., ARNALDOS, J. y CASAL, J. "Accidental Burning of a Fuel Layer on a Waterbed: A Scale Analysis Study of the Heat Transfer Models Predicting the pre-Boilover Time and Scaling to Published Data", *Int. J. Thermal Sciences*, 43 (3) 221-239 (2004).
- HUTCHINSON, J. R. y GARCÍA, M. "Tyrannosaurus was not a fast runner. Letters to nature", *Nature* 415, 1018-1021 (2002).
- HUNTLEY, H. E. *Dimensional Analysis.* McDonald, London (1952).

- HYUN-SEOB SONG y SANG PHIL HAN. "A general correlation for pressure drop in a Kenics static mixer", *Chem. Eng. Sci.* 60, 5696-5704 (2005).
- INCROPERA, F. P. y DE WITT, D. P. *Fundamentals of heat and mass transfer*. John Wiley & Sons, New York (1996).
- ISACHENKO, V., OSIPOVA, V. y SUKOMEL, A. *Transmisión del Calor*. Marcombo, S. A., Barcelona (1973).
- JACOBY, W. G. *Data theory and dimensional analysis*. SAGE publications (1991).
- JOSHI, Y. y NAKAYAMA, W. "Cap. 6 Forced Convection: External Flows", *Heat Transfer Handbook*, A. Bejan y A. D. Kraus editores, John Wiley & Sons (2003).
- KARLEKAR B. V. y DESMOND, R. M. *Transferencia de Calor* (2^a ed.), Interamericana, México D. F. (1985).
- KASPRZAK, W., LYSIK, B. y RYBACZUK, M. *Dimensional analysis in the identification of mathematical models*. World Scientific (1990).
- KAIVANY, M. *Principles of convective heat transfer*. (2^a ed.) Springer-Verlag, New York (2001).
- KAY, J. M. y NEDDERMAN, R. M. *Fluid Mechanics and transfer processes*. Cambridge University Press (1990).
- KAYS W. M. y CRAWFORD, M. E. *Convective Heat and Mass Transfer*. (3^a ed.) McGraw-Hill, New York (1993).
- KAYS, W. M. y CRAWFORD, M. *Convective Heat and Mass Transfer*. (32^a ed.) MsGraw-Hill, p. 169 (1996).
- KAYS W. M. y PERKINS, H. C. "Forced convection, internal flow in ducts", Capítulo 7, *Handbook of Heat Transfer*. Editors Roshenow, W. M. y Harnett, J. P., McGraw-Hill, New York (1972).
- KESSLER, D. P. y GREENKORN, R. A. *Momentum, Heat and Mass Transfer, Fundamentals*. Marcel Dekker, Inc., New York (1999).
- KNUDSEN, J. G. y KATZ, D. L. *Fluid Dynamic and Heat Transfer*. Mc. Graw-Hill, New York (1958).
- KREITH, F. y BOHN, M. S. *Principles of heat transfer*. PWS Publishing Company, Boston (1997).
- KUIKEN, H. K. *An asymptotic solution for large Prandtl number free convection*, *J. Eng. Math.*, 355-371 (1968).
- KUNDU, P. K. y COHEN, I. C. *Fluid Mechanics*. Academia Press, New Cork (2001).
- KURTH, R. *Dimensional Analysis and Group Theory in Astrophysics*. Pergamon, Oxford (1972).
- LANDAU, L. D. y LIFSHITZ, E. M. *Mecánica de Fluidos*. Ed Reverté.
- LANGHAAR, H. L. *Dimensional Analysis and Theory of Models*. John Wiley & Sons, Inc., New York (1951).
- LE FÈVRE, E. J. *Proceedings of 9th International Congress of Applied Mechanics*. Brussels, 168-174 (1956).
- LE CORBEILLER, P. *Dimensional Analysis*. Appleton-Century-Crofts, New York (1966).
- LEHMAN, P. C. y CRAIG, E. A. *Dimensional analysis in applied psychological research*. *J. Psychology*, 55, 223-226 (1963).
- LEVI, B. *Matematicae notae*. Bol. Inst. Mat., 6, I. p. 1, Rosario, Argentina (1956).
- LIENHARD, J. H. *A Heat Transfer Textbook*. (2^a ed.) Prentice-Hall (1987).
- LIN, C. C. y SEGEL, L. A. *Mathematics applied to deterministic problems in natural sciences*. MacMillan, New York (1974).

- LOKARNIK, M. *Dimensional Analysis and Scale-up in Chemical Engineering*. Springer, Berlin (1991).
- LORD RAYLEIGH. "The principle of similitude", *Nature*, Lond., 95, 66-68 (1915).
- MCADAMS, W. H. *Heat Transmission*. (3^a ed.) McGraw-Hill, New York (1954).
- MACAGNO, E. O. "Historico-critical Review of Dimensional Analysis", *Journal of The Franklin Institute*, 292 (6), 391-402 (1971).
- MADRID, C. N. *Desarrollo y aplicaciones de la teoría de análisis dimensional de Palacios en la transmisión de calor*. Tesis doctoral, Granada (1987).
- MADRID, C. N., ARENAS, A. y HERRANZ, A. "Transmisión de calor en la ebullición pelicular estudiada por Análisis dimensional", *Anales de Física*, serie B, 85, 88-91 (1989).
- MADRID, C. N., ARENAS, A. y HERRANZ, A. "Estudio de la convección forzada en un tubo, a baja y alta velocidad, mediante análisis dimensional", *Anales de Física*, serie B, 86, 46-49 (1990).
- MADRID, C. N., NAVARRO, J. R. y HERRANZ, A. *Application of Discriminated Dimensional Analysis to Free Convection in a Vertical Flat Plate Through a Porous Medium*. Inf. Tecnol., 17 (2), 43-50 (2006).
- MADRID, C. N. "Convección combinada laminar en una placa vertical isoterma estudiada por análisis dimensional", *Anales de Física*, serie B, 87, 65-70 (1991).
- MADRID, C. N. y ALHAMA, F. "Discriminated dimensional analysis of the energy equation: Application to laminar forced convection along a flat plate", *Int. J. Thermal Sciences* (2005).
- MADRID, C. N. y ALHAMA, F. *A revision of the classical Reynolds number for different type of flow following the theory of discriminate dimensional analysis*. Iasme Transactions 8(2) 1524-1529 (2005).
- MADRID, C. N. y ALHAMA, F. "Discrimination: A fundamental and necessary extension of classical dimensional analysis theory", *Int. Comm. Heat and Mass Transfer*. 33, 287-294 (2006).
- MADRID, C. N. y ALHAMA, F. "Study of the laminar natural convection problem along an isothermal vertical plate based on discriminated dimensional analysis", *Chemical Engineering Communications* 195 (12) 1-14 (2008).
- MARTYNNENKO, O. G. y KHRAMTSOV, P. P. *Free-Convective Heat Transfer*. Springer, Berlín (2005).
- MCMAHON, T. A. y BONNER, J. T. *On Size and Life*. Scientific American Library, New York (1983).
- MIDDELMAN, S. *An introduction to heat and mass transfer*. John Wiley and Sons (1998).
- MILLS, A. T. *Basic heat and mass transfer*. Prentice Hall, Upper Saddle River, NJ, USA (1995).
- MUNSON, B. R., YOUNG, D. F. y OKIISHI, T. H. *Fundamentals on fluid mechanics*. (3^a ed.) John Wiley & Sons, New York (1998).
- NUSSELT, W. *Die Abhängigkeit der Wärmeübergangszahl von der Rohrlänge*, Z. VDI., 54, 1154-1158 (1910).
- OOSTHUIZEN, R. H. y NAYLOR, D. *Introduction to Convective Heat Transfer Analysis*. McGraw-Hill, New York (1999).
- OSTRACH, S. "An Analysis of Laminar Free Convection Flow and Heat Transfer about a Flat Plate Parallel to the Direction of the Generating Body Force", *NACA Tech. Rep.* 1111 (1953).
- ÖZSIZIK, M. N., *Heat Transfer a basic approach*. McGraw-Hill (1993).
- PALACIOS, J. *Analisis dimensional*. Espasa-Calpe (1955).

- PELESKO, J. A., CASKY, M. y HUERTAS, S. "Lenz's law and dimensional analysis", *American Journal of Physics* 73 (1) 37-39 (2005).
- POTTER, M. C. y WIGGERT, D. C. *Mechanics of fluids*. Prentice Hall, New Jersey (1997).
- PRICE, J. F. Web de Woods Hole Oceanographic Institution, Wood Hole, Massachusetts.
- PRICE, J. F. "Dimensional analysis of models and data sets", *American Journal of Physics* 71 (5) 437-447 (2003).
- PRIETO, J. I., FANO, J., DÍAZ, R. y GONZÁLEZ, M. A. "Application of discriminated dimensional analysis to the kinematic Stirling", *Roc. Instn. Mech. Eng. (Part C): J. Mech. Eng. Sci.*, 208, 347-353 (1994).
- PROTHERO, J. "Perspectives on Dimensional analysis in Scaling studies", *Perspectives in Biology and Medicine*, 45 (2), 175-189 (2002).
- RAJESH, J. J. y BIJWE, J. "Dimensional analysis for abrasive wear behaviour of various polyamides", *Tribology letters*, 18 (3) 331-340 (2005).
- RAYLEIGH, LORD. "On the capillary phenomena of jets", *Proc. Roy. Soc.*, 29, 71-97 (1879).
- REMILLARD, W. J. "Applying dimensional analysis", *American Journal of Physics* 51 (2) 137-140 (1983).
- REYNOLDS, O. "An experimental investigation of the circumstances which determine whether the motion of water shall be direct or sinuous, and the law of resistance in parallel channels", *Phil. Trans. Roy. Soc.* 174, 935-982 (1983).
- RIABOUCHINSKY, D. "Méthode des variables de dimensions zéro et son application en aérodynamique", *L'Aérophile*, 407-408 (1911).
- ROUSE, H. *Elementary mechanics of fluids*. Dover, New York (1946).
- RUARK, A. E. "Inspectional Analysis: A method which supplements dimensional analysis", *Journal of the Mitchell Society* (1935).
- ROHSENOW, W. M., HARTNETT, J. R. y CHO, Y. I. *Handbook of Heat Transfer*. (3^a ed.) McGraw-Hill (1998).
- RUNGE, C. *Enc. Math. Wiss.* (5,1). London (1952).
- SACADURA, J. F. *Initiation Aux Transferts Thermiques*. Tecknikne et Documentation, París (1982).
- SCHLICHTING, H. *Boundary Layer Theory*, (8^a ed.) McGraw-Hill, New York (1965). Edición en castellano (2000).
- SEDOV, L. I. *Similarity and Dimensional Methods in Mechanics* (1959). (10^a ed.) CRC Press (1993).
- SHAH, R. K. y BHATTI, M. S. "Handbook of single-phase convective heat transfer", *Laminar convective heat transfer en ducts*. Editors Kakac S., Sha, R. K. y Aung, W, New York, Wiley Interscience (1987).
- SHAMES, L. *Mechanics of Fluid*. (3^a ed.) McGraw-Hill, New York (1992).
- SIEDER, E. N. y TATE, G. E. "Heat transfer and pressure drop of liquids en tubes", *Ind. Eng. Chem.*, 28, 1429 (1936).
- SMITS, A. J. *A physical introduction to fluid mechanics*. John Wiley & Sons Inc. New York (2000).
- SPARROW, E. M. "Laminar free convection on a vertical plate with prescribed nonuniform wall heat flux or prescribed nonuniform wall temperature", *NACA TN 3508* (1955).
- SAPARROW, E. M. y GREGG, J. L. *Laminar free convection from a vertical plate with uniform surface heat flux*. *Trans. ASME*, 80, 379-386 (1956).

- SONIN, A. A. Web de MIT, Cambridge, MA.
- SONIN, A. A. y HUBER, P. W. J. *Heat Transfer* 100, 601–604 (1978).
- SONIN, A. A. The Physical Basis of Dimensional Analysis. Department of Mechanical Engineering. MIT Cambridge, MA, 57 (2001).
- SONIN, A. A. “A generalization of the Π -theorem and dimensional analysis”, *Proceedings of the National Academic of Sciences* (PNAS). Communicated by Ronald F. Probstein, Massachusetts Institute of Technology, Cambridge, MA (2004).
- STEPHENS, D. W. y DUNBAR, S. R. “Dimensional analysis in behavioural ecology”, *Behavioural ecology*. 4 (2), 173-183 (1993).
- STREETER, V. L., y WYLIE, E. B. *Fluid Mechanics*. (6^a ed.) McGraw-Hill, New York (1985).
- SUGAWARA, S., y MICHIIYOSHI, I. “Heat Transfer by Natural Convection in a Laminar Boundary Layer on a Vertical Flat Plate”, *Mem. Fac. Eng. Kyoto Univ.*, 13, 149-162 (1951).
- SZIRTES, T. *Applied dimensional analysis and modelling*. Elsevier (2007).
- TAYLOR, E. S. *Dimensional Analysis for Engineers*. Clarendon, Oxford (1974).
- TENNEKES, H. *The Simple Science of Flight*. MIT Press, Cambridge, MA (1997).
- THOMAS, L. C. *Heat Transfer*. Prentice-Hall. Inc., New Jersey (1992).
- VAN DRIEST, E. R. “On Dimensional analysis and the presentation of data in fluid-flow problems”, *Journal of Applied Mechanics*, 34-40, march (1947).
- VASCHY, A. “Sur les lois de similitude en physique”, *Annales Télégraphiques*, 19, 25-28 (1892).
- VIGNAUX, G. A. “Dimensional Analysis in operations research”, *New Zealand Operations Research*, 14. 1, 81-92 (1986).
- WELTY, J. R. *Transferencia de Calor Aplicada a la Ingeniería*. Limusa, México D. F. (1981).
- WHITE, F. M. *Heat and Mass Transfer*. Addison-Wesley (1988).
- WHITE, F. M. *Fluid Mechanics*. (3^a ed.) McGraw-Hill, New York (1994).
- WILCOX, D. C. *Basic fluid mechanics*. DCW Industries, La Canada, CA (2000).
- WILCZEK, F. “Getting its from bits” *News and views feature Nature* 397, 303-306 (1999).
- WILLIAMS, W. *On the relation of the dimensions of physical quantities to directions in space*. Phil. Mag., 34, 234 (1892).
- WILSON, W. R. “Announcements and news”, *American Journal of physics* 33 (6) 513-514 (1965).
- WINTERTON, R. H. S. *Int. J. Mech. Eng. Edu.* 10 (1) 1-7 (2000).
- ZLOKARNIK, M. *Dimensional Analysis and Scale-up in Chemical Engineering*. Springer-Verlag (1991).
- ZUKAUSKAS, A. *Convective Transfer in Heat Exchangers*. Naukà, Moscú, 472 (1982).
- ZUKAUSKAS, A. *Heat Transfer of a Cylinder in Cross Flow Hemisphere*, Washington, 208 (1982).

Esta página se ha dejado intencionadamente en blanco

Índice alfabético

A

ADC (análisis dimensional clásico), 7
ADD (análisis dimensional discriminado), 41
adimensionalización
de ecuaciones, 284
básicas y balances, 36
de gobierno, 36
físicas bajo la perspectiva de la discriminación, 255
discriminada, búsqueda de magnitudes de referencia implícitas, 261
en su versión clásica, 258
y teorema de Π , 279
AE (análisis de escala), 33
aguja de sección circular, 20, 61
aleta recta
conducción 2-D, 56
rectangular, 18, 59
análisis de escala (AE), 33, 282, 284
conexión con el análisis dimensional discriminado, 281
análisis dimensional, 284
aplicaciones del, 11
en la mecánica de fluidos, 77
en la transmisión de calor, 141
en textos de ingeniería, 30
etapas, 12
orden de magnitud de las soluciones, 38

análisis dimensional clásico (ADC), 7
aplicaciones del, 13
revisión crítica del concepto, 13
análisis dimensional discriminado (ADD), 41
bases dimensionales, 41
homogeneidad de las ecuaciones en el, 69
números adimensionales, 205
uso de las diferentes geometrías, 41
y análisis de escala, 281
arrastre, coeficiente de, 23, 24

B

bases dimensionales, 41
en la transmisión del calor, 54
en mecánica de fluidos, 42
Bernoulli, ecuación de, 78, 82, 216
Biot, número de, 17, 25
blowing parameter, 237
Boussinesq, número de, 26

C

caída de una esfera en un fluido viscoso por efecto de la gravedad, 222
caída de una esfera en un fluido viscoso por efecto de su peso, 104
en un campo gravitatorio, 106
en un campo centrífugo, 108

- calor
 - coeficiente de transferencia de, 185
 - coeficiente de transmisión del, 159
 - conducción de, 2-D, 259
 - conducción transitoria 1-D con propiedades térmicas constantes, 286
 - conducción transitoria y estacionaria 2-D con propiedades térmicas constantes, 287
 - transmisión entre un disco en rotación y un medio fluido viscoso infinito, 160
 - transmisión por convección forzada laminar en el interior de tubos circulares, 170
- canal recto
 - flujo estacionario en un, 70
 - flujo paralelo por un, 266
- capa límite, 22, 49, 51
 - a lo largo de una placa vertical
 - bajo convección combinada, 199
 - isotermia bajo convección natural, 180
 - laminar a lo largo de una placa vertical
 - isotermia convección natural en una, 180
 - convección combinada en una, 199
 - térmica
 - espesor de la, 158
 - en una placa con succión, 158
- capilares, 223
- cilindro
 - flujo laminar transversal a un, 230
 - con flujo transversal, convección forzada laminar sobre un, 164
 - en rotación
 - fluído en el interior de un,, 92 95
 - en el seno de un fluido, 92
 - que gira en el seno de un fluido, 220
- cilindros concéntricos con un fluido viscoso en su interior, 46
- cilindros separados por un fluido viscoso, interacción entre dos, 96
- coeficiente de arrastre, 23, 24
- coeficiente
 - de Colburn, 26
 - de elevación, 25
 - de fricción, 228
 - de presión, 23, 24
 - transferencia de calor, 185
 - transmisión del calor, 159
- Colburn, coeficiente de, 26
- conducción
 - 2-D en aleta recta, 56
 - bidimensional estacionaria en una placa rectangular, 141, 230
 - de calor 2-D, 259
 - en una placa, ecuación 2-D
 - transitoria, 69
 - transitoria
 - de calor 1-D con propiedades térmicas constantes, 286
 - en una esfera con resistencia térmica interna despreciable, 144, 231
 - y estacionaria de calor 2-D con propiedades térmicas constantes, 287
- conjunto aleta-recta-pared, 16, 57
- conservación, leyes de, 69
- convección combinada
 - en una capa límite laminar a lo largo de una placa vertical isotermia, 199
 - para una placa vertical isotermia, 250
- convección forzada
 - a lo largo de una placa horizontal isotermia con succión o inyección, 158, 236
 - en capa límite laminar sobre una placa isotermia horizontal, 289
- convección forzada laminar
 - a lo largo de una placa
 - horizontal con flujo uniforme de calor, 152, 236
 - isotermia horizontal, 145, 232
 - plana, 267
 - sobre un cilindro con flujo transversal, 164, 238
- convección natural
 - a lo largo de una placa vertical isotermia, 274
 - en capa límite laminar a lo largo de una placa vertical isotermia, 180, 240, 291
 - laminar a lo largo de una placa vertical con flujo de calor conocido, 191, 246
- coordenadas
 - cilíndricas, 42
 - esféricas, 42
 - rectangulares, 42
- Couette
 - flujo de, 114, 224
 - flujo lineal de, geometría del, 115

D

depósito, tiempo de vaciado de un, 218
 disco
 en el interior de un tambor, 21, 47
 en rotación
 flujo en las cercanías de un, 123, 227
 y un medio fluido viscoso infinito,
 transmisión de calor entre un, 237
 discriminación, 7
 adimensionalización de ecuaciones físicas bajo la perspectiva de la, 255
 concepto fundamental, 27

E

Eckert, número de, 26, 148, 236
 ecuación
 de Bernoulli, 78, 216
 de conducción de Fourier, 263
 de Euler, 78
 de Euler 1-D, 79
 de la energía, 270
 para fluidos incompresibles, 71
 de la superficie libre, 84
 de Navier-Stokes, 71, 259, 261
 del momento, 269, 270
 universal, 264
 ecuaciones
 adimensionalización de, 284
 físicas
 adimensionalización bajo la perspectiva de la discriminación, 255
 principio de homogeneidad de las, 69
 elevación, coeficiente de, 25
 energía
 ecuación de la, 270
 despreciable, disipación, 65
 entrada térmica
 longitud de, 171
 región de, 175
 en hidrodinámica, región de, 172
 equilibrio dinámico de un fluido
 acelerado, 218
 en rotación, 218

esfera
 caída en un fluido viscoso por efecto de la gravedad, 222
 caída en un fluido viscoso por efecto de su peso, 104
 en un campo gravitatorio, 106
 en un campo centrífugo, 108
 conducción transitoria con resistencia térmica interna despreciable, 144, 231
 en reposo
 flujo incidente horizontal sobre una, 221
 flujo incidente horizontal sobre una, 97
 flujo sobre una, 98
 Euler
 ecuación 1-D de, 79
 ecuación de, 78
 número de, 24, 216

F

factor de fricción, 23
 flotación, fuerza de, 191
 fluido
 acelerado, 86
 equilibrio dinámico de un, 218
 cilindro que gira en el seno de un, 220
 en el interior de un cilindro en rotación, 95
 en rotación, 83
 equilibrio dinámico de un, 218
 incompresible, ecuación de la energía para, 71
 viscoso, deslizamiento por una pared vertical, 137, 229
 flujo
 de Couette, 114, 224
 de un líquido no viscoso por rectangulares, 81, 217
 en las cercanías de un disco en rotación, 123, 227
 en una placa horizontal con succión, 132, 229
 estacionario, en un canal recto, 70
 forzado
 laminar a lo largo de una placa horizontal, 128, 228
 sobre una placa horizontal, 22, 49, 51

forzado (*continuación*)
 incidente horizontal sobre una esfera en reposo, 97, 221
 interno en tubos, 116, 225
 laminar
 en una placa horizontal, 45
 transversal a un cilindro, 230
 lineal de Couette, geometría del, 115
 paralelo por un canal recto, 266
 sobre una esfera en reposo, 98
 tipos de, 209
 transversal, convección forzada laminar
 sobre un cilindro en, 238
 fórmula de Oseen, 105
 formulación, 256
 Fourier
 ecuación de conducción de, 263
 ley de, 54
 número de, 25
 fricción
 coeficiente de, 228
 factor de, 23
 Froude, número de, 24, 216
 fuerza
 de flotación, 191
 de fricción, 74
 entre placas
 por acción de la tensión superficial, 224
 unidas por un líquido que las moja, 113
 fuerzas vivas, teorema de las, 53

G

gasto volumétrico, 120
 gotas adheridas a una pared que las moja
 vibración de, 111, 223
 en ausencia de gravedad, 111
 en un campo gravitatorio, 112
 gotas desprendidas de un tubo delgado circular, tamaño de las, 223
 Graetz, número de, 26
 Graetz-Nusselt, problema de, 177
 Grashof, número de, 26

I

inspectional analysis, 36

J

Jacob, número de, 26

L

lámina rectangular anisótropa, 260
 Lewis, número de, 26
 ley
 de Fourier, 54
 de Newton, 45
 de Poiseuille, 121
 leyes
 de conservación, 69
 de Navier-Stokes, 72
 líquido en un tubo en U de sección circular
 oscilaciones de un, 88, 218
 fuerzas viscosas despreciables, 88
 fuerzas viscosas no despreciables, 90
 lista de variables relevantes, 11

M

Mach, número de, 25
 magnitudes de referencia implícitas, búqueda de, 261
 mecánica de fluidos, 42
 aplicaciones del análisis dimensional, 77
 fórmulas dimensionales, 43
 de variables, 42
 números adimensionales ADD, 216
 propiedades del medio, 42
 método de índices, 32
 momento, ecuación de, 269, 270

N

Navier-Stokes
 ecuación de, 71, 259, 261
 leyes de, 72
 Newton, ley de, 45

número
 de Biot, 17, 25
 de Boussinesq, 26
 de Eckert, 26, 148, 236
 de Euler, 24, 216
 de Fourier, 25
 de Froude, 24, 216
 de Graetz, 26
 de Grashof, 26
 de Jacob, 26
 de Lewis, 26
 de Mach, 25
 de Nusselt, 8, 25
 de Peclet, 25
 de Prandtl, 25
 de Rayleigh, 26
 de Reynolds, 8, 24, 207, 213, 214
 en términos de balance de fuerzas, 215
 flujo externo en tubos circulares, 213
 flujo interno en tubos, 214
 placa plana, 210
 tipos de flujo, 209
 de Richardson, 26, 251, 252
 de Rossby, 24
 de Schmidt, 26
 de Stanton, 26
 de Strouhal, 25, 26
 de Weber, 24
 números adimensionales ADD, 205
 clásicos, significado de los, 13
 de mecánica de fluidos, 216
 de transmisión de calor, 230
 en problemas conjugados, 252
 interpretación de los, 24
 relación con los números clásicos, 245 250
 resumen, 245, 250
 significado físico como balance de magnitudes, 205
 significado, 245, 250
 Nusselt, número de, 8, 25

O

oscilaciones de un líquido en un tubo en U
 de sección circular, 88, 218
 fuerzas viscosas despreciables, 88
 fuerzas viscosas no despreciables, 90
 Oseen, fórmula de, 105

P

pared vertical, fluido viscoso deslizándose
 por una, 229
 partícula de fluido que sigue una línea de corriente, 78
 Peclet, número de, 25
 placa
 con bordes isotermos, 142
 con succión, capa límite térmica en una, 158
 con tres bordes isotermos y uno convectivo, 143
 horizontal
 flujo forzado laminar a lo largo de una, 128, 228
 con flujo uniforme de calor, convección forzada laminar a lo largo de una, 236, 152
 con succión, flujo en una, 132, 229
 isoterma horizontal
 bajo convección natural, capa límite a lo largo de una, 180
 con succión o inyección, convección forzada a lo largo de una, 158, 236
 convección forzada, en capa límite laminar sobre una, 289
 convección forzada laminar a lo largo de una, 145, 232
 convección natural a lo largo de una, 274
 convección natural en capa límite laminar a lo largo de una, 240
 isoterma vertical, convección natural en capa límite laminar sobre una, 291
 plana
 convección laminar forzada a lo largo de una, 267
 número de Reynolds, 210
 rectangular, conducción bidimensional estacionaria en una, 141, 230
 vertical
 bajo convección combinada, capa límite a lo largo de una, 199
 con flujo de calor conocido, convección natural laminar a lo largo de una, 191, 246

placas unidas por un líquido que las moja,
fuerza entre, 113, 224
Poiseuille, ley de, 121
Prandtl, número de, 25
presión, coeficiente de, 23, 24
principio de homogeneidad de las ecuaciones físicas, 69
problema de Graetz-Nusselt, 177
problemas conjugados, números adimensionales ADD, 252

R

Rayleigh, número de, 26
región completamente desarrollada, 177
Reynolds, número de, 8, 24, 207
tipos de flujo, 209
Richardson, número de, 26, 251, 252
Rossby, número de, 24

S

Schmidt, número de, 26
Stanton, número de, 26
Strouhal, número de, 25, 26
superficie libre, ecuación de la, 84

T

tensión superficial, efectos, 109, 223
teorema
de Bernoulli, 82
de las fuerzas vivas, 53
de Π , 7
generalización del, 76
y adimensionalización, 279
modificado, 75
transferencia de calor
coeficiente de, 185
con conversión de energía, 74
sin conversión de energía, 73

transmisión de calor
aplicaciones del análisis
dimensional, 141
bases dimensionales, 54
coeficiente de, 159
con efectos mecánicos, 62
fórmulas dimensionales, 63, 66
y dispersión de energía
despreciable, 65
entre un disco en rotación y un medio
fluido viscoso infinito, 160, 237
fórmulas dimensionales de variables, 54
números adimensionales ADD, 230
propiedades del medio, 54
por convección forzada laminar en el
interior de tubos circulares, 170, 238
sin efectos mecánicos, 54
fórmulas dimensionales, 55
tubo delgado circular, gotas desprendidas,
tamaño de las, 223
tubos
flujo interno en, 116, 225
número de Reynolds, 213
flujo interno en, 214
transmisión de calor por convección forzada laminar en el interior de, 238

V

variables relevantes, lista de, 11
vertederos de sección triangular y rectangular, 81
flujo de un líquido no viscoso por, 217
vibración de gotas adheridas a una pared
que las moja, 111, 223
en ausencia de gravedad, 111
gotas en campo gravitatorio, 112

W

Weber, número de, 24

Esta página se ha dejado intencionadamente en blanco



Análisis dimensional discriminado en mecánica de fluidos y transferencia de calor

El concepto de discriminación ha sido aplicado con éxito a numerosos problemas. Su importancia permite añadir el calificativo de discriminado a la teoría de análisis dimensional, para distinguirla expresamente de su concepción clásica. En el pasado reciente la discriminación se ha justificado en aspectos relacionados con la medición y sus unidades. Este texto es más ambicioso en tanto que con ella, profundizando en el análisis de los fenómenos físicos que tienen lugar en el problema, se orienta de forma adecuada la selección de la lista (o listas) de variables relevantes para cada fenómeno, la elección de bases dimensionales y hasta las expresiones de balance que constituyen, en definitiva, los monomios buscados.

Algunos objetivos de este texto son: profundizar en el concepto de discriminación y extenderlo a magnitudes que no aparecen en otros textos; investigar la existencia y el significado de ciertas magnitudes ocultas; abordar el proceso de adimensionalización de las ecuaciones bajo el enfoque de la discriminación; profundizar en los números adimensionales obtenidos mediante la discriminación; demostrar que el teorema π y la adimensionalización discriminada de ecuaciones son dos variantes de la aplicación de la teoría del análisis dimensional que conducen invariablemente al mismo conjunto de monomios.

La parte fundamental del texto se dedica al estudio de ciertos problemas importantes de la mecánica de fluidos y la transferencia de calor, áreas en las que la disciplina de análisis dimensional se ha demostrado muy fructífera a lo largo de décadas.



EDITORIAL
REVERTÉ

www.reverte.com



Esta página se ha dejado intencionadamente en blanco

Esta página se ha dejado intencionadamente en blanco

Esta página se ha dejado intencionadamente en blanco

Esta página se ha dejado intencionadamente en blanco