APLICANDO AS AÇÕES DE LÓGICA COM PROGRAMAÇÃO EM PROJETOS

MATEMÁTICA PARA TI COMO TI ESTÁ PARA A MATEMÁTICA

ISMAEL DE ARAÚJO SILVA

08

LISTA DE FIGURAS

LISTA DE TABELAS

SUMÁRIO

1 MATEMÁTICA PARA TI COMO TI ESTÁ PARA A MATEMÁTICA

1.1 Função do 2º grau: contextos e aplicações

As funções do 2º grau possuem diversas aplicações no nosso dia a dia, especialmente em situações da Biologia, Física, Administração, Contabilidade, bem como da Engenharia Civil, Engenharia de Computação, TI, dentre outras áreas. Com a função do 2º grau, podemos obter o **ponto mínimo** ou **máximo** de alguma situação analisada e isso é feito por meio de uma representação em curva em formato de parábola. Por exemplo, a trajetória da bola após o chute de um jogador.

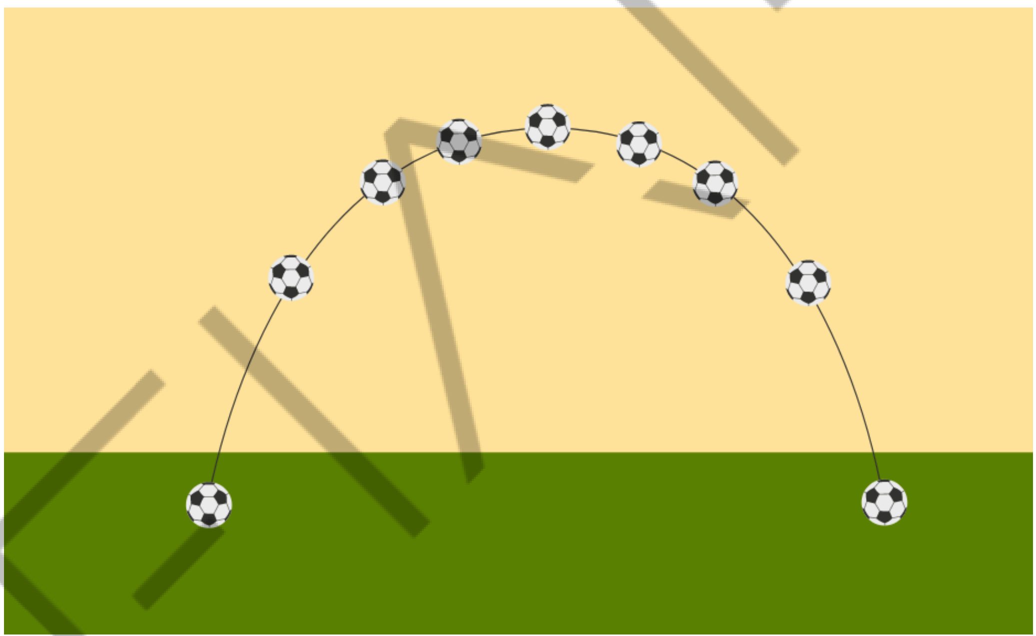

Figura 1 – Formato de parábola
Fonte: FIAP (2021)

1.1.1 Número de jogos do Campeonato Brasileiro

Veja uma manchete que foi destaque na mídia esportiva: “Domingo que nada! Sábado registra a maior média de público no Brasileirão”. Nas 48 partidas disputadas, pouco mais de 19.400 torcedores compareceram aos estádios. Domingão tem o maior número de jogos realizados, mas a frequência é de 15.870 pagantes por jogo. No momento atual, obviamente, estamos sem público nos estádios, mas esse é um ótimo exemplo para tratarmos da função de 2º grau.

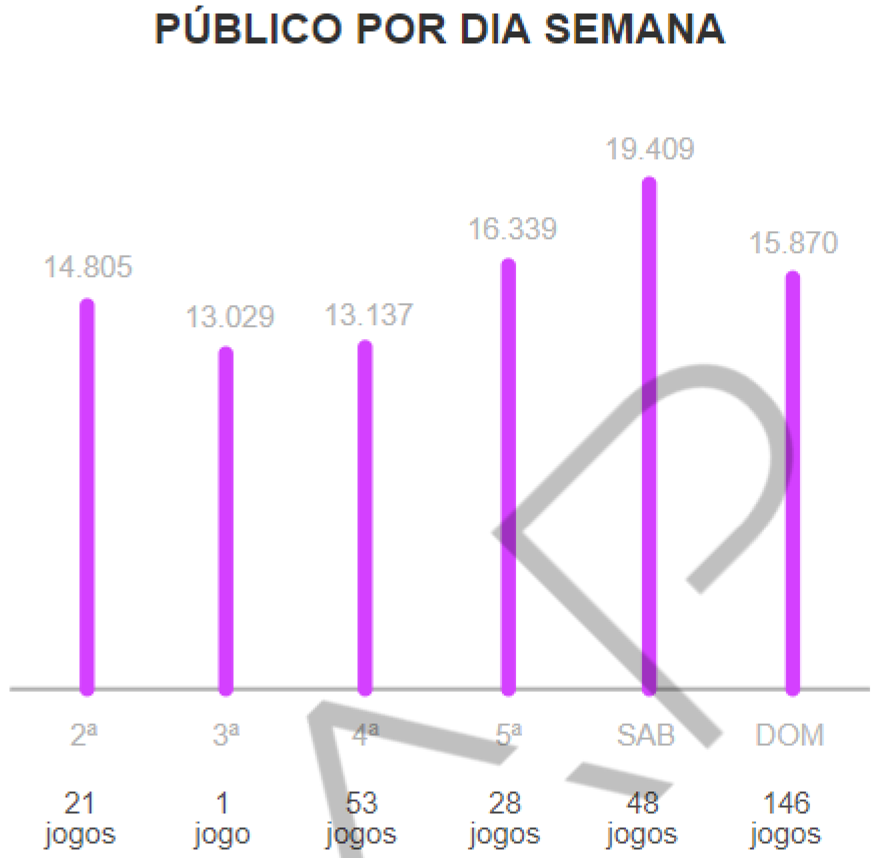

Figura 2 – Público por dia da semana
Fonte: FIAP (2022)

Consideremos um torneio de futebol que será disputado por quatro times pelo sistema no qual todos jogam contra todos em dois turnos. Quantos jogos seriam realizados nesse caso?

Uma maneira de resolver o problema é considerar que cada time fará três jogos “em casa”, isto é, no seu próprio campo. Como temos quatro clubes, basta fazermos 4 x 3 = 12, ou seja, nesse caso, teremos um total de 12 jogos no campeonato.

No Campeonato Brasileiro, 20 times disputam a competição em dois turnos: nesse caso, temos 20 x 19 = 380 jogos (!!!) em dois turnos, com 19 rodadas cada um.

De forma geral, em um campeonato com **N** times, com as mesmas características do Campeonato Brasileiro (todos jogam contra todos em dois turnos), teríamos um total de “ **N.(N – 1)** ” jogos no campeonato. Representando-se o número total de jogos por **J**, podemos escrever:

$$\mathbf{J} = N.(N - 1)$$

Ou ainda, aplicando-se a propriedade distributiva, temos:

$$\mathbf{J(N) = N^2 - N}$$

Note que a função **J(N) = N² - N** é um exemplo de **função do 2º grau**.

O número de jogos **J** depende do número **N** de times do campeonato: fazendo uma análise do contexto, foi possível gerar uma função de 2º grau (ou **função quadrática**) que modela a situação.

1.1.2 Definição: uma formalização do conceito de Função do 2º Grau

Nesse item, vamos formalizar o conceito de função polinomial do 2º grau. Denomina-se função polinomial do 2º grau toda função f: IR $\rightarrow$ IR, da forma

$$\mathbf{y = a.x^2 + b.x + c \text{ (ou } f(x) = a.x^2 + b.x + c\text{), com } a \in IR^*,\ b \in IR \text{ e } c \in IR.}$$

Para relembrar algumas notações matemáticas que apareceram aqui, observe a definição de função do 1º grau.

1.1.3 Representação gráfica de uma Função do 2º grau

As funções do 2º grau são representadas por curvas denominadas parábolas. Considerando-se a forma geral $y = a.x^2 + b.x + c$, dizemos que:

Se **a > 0**, então a parábola possui concavidade voltada para cima: $\cup$

Se **a < 0**, então a parábola possui concavidade voltada para baixo: $\cap$

1.1.3.1 Temperatura de uma reação química

A temperatura de uma reação química varia ao longo do tempo de reação (em geral, medido em segundos). Vamos considerar a reação química entre alumínio e iodo. O modelo matemático que estima a temperatura de reação ao longo do tempo nesse caso é dado por: **T(s) = 2.s² – 10.s + 6**, onde T representa a temperatura em graus Celsius (ºC) **e s** representa o número de segundos decorridos após o início da reação.

a) **Qual a temperatura no início da reação?**

Resolução

Nesse caso, vamos substituir s = 0 segundo, na função dada.

$T(s) = 2.s^2 - 8.s + 6 \Rightarrow T(0) = 2.(0)^2 - 8.(0) + 6 \Rightarrow T = 6$ ºC

b) **Em que instantes a reação alumínio/iodo atinge a temperatura de 0ºC?**

Resolução

Vamos substituir T = 0 ºC na função:

$T(s) = 2.s^2 - 8.s + 6 \Rightarrow 0 = 2.s^2 - 8.s + 6$

Dividindo-se os dois lados da equação por dois, obtemos:

$s^2 - 4.s + 3 = 0$

$s^2 - 4.s + 3 = 0 \Rightarrow 1.s^2 - 4.s + 3 = 0$

Temos a = 1, b = -4 e c = 3:

Vamos aplicar a fórmula de Bhaskara:

$$\Delta = b^2 - 4.a.c = (-4)^2 - 4.(1).(3) = 16 - 12 = 4 \Rightarrow \Delta = 4$$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2.a} \Rightarrow x = \frac{-(-4) \pm \sqrt{4}}{2.(1)} \Rightarrow x = \frac{4 \pm 2}{2.(1)} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} s = \dfrac{4-2}{2} \Rightarrow s = \dfrac{2}{2} \Rightarrow s = 1 \\ s = \dfrac{4+2}{2} \Rightarrow s = \dfrac{6}{2} \Rightarrow s = 3 \end{cases}$$

Assim, nos instantes 1 segundo e 3 segundos, a temperatura é de 0 ºC, ou seja, duas vezes atinge a referida temperatura duas vezes.

c) **Em que instante a reação química atinge a menor temperatura? Qual o valor dessa temperatura?**

Resolução:

Para respondermos a esta questão, vamos obter as coordenadas do vértice da parábola: (como a > 0, a concavidade da parábola é voltada para cima ∪, o que implica dizer que o vértice é um **ponto de mínimo**).

Temos $T(s) = 2.s^2 - 8s + 6.$

$$x_v = -\frac{b}{2a} \Rightarrow s_v = -\frac{(-8)}{2.(2)} \Rightarrow s_v = \frac{8}{4} \Rightarrow s_v = 2 \text{ segundos}$$

$$y_v = -\frac{\Delta}{4.a} \Rightarrow T_v = -\frac{16}{4.(2)} \Rightarrow T_v = -\frac{16}{8} \Rightarrow T_v = -2^o\,C$$

$$\Delta = b^2 - 4.a.c = (-8)^2 - 4.(2).(6) = 64 - 48 = 16$$

Desta forma, a temperatura mínima de –2ºC ocorre no instante 2 segundos. A representação gráfica a seguir nos ajudará a compreender as informações obtidas nos itens a, b e c. Para tanto, vamos retomar os dados obtidos nos itens anteriores:

No item a, obtemos (0 segundo; 6ºC).

No item b, obtemos (1 segundo; 0ºC) e (3 segundos; 0ºC).

No item c, obtemos o vértice da parábola (2 segundos; –2ºC).

Com essas informações, podemos fazer um gráfico cartesiano com o apoio do Excel:

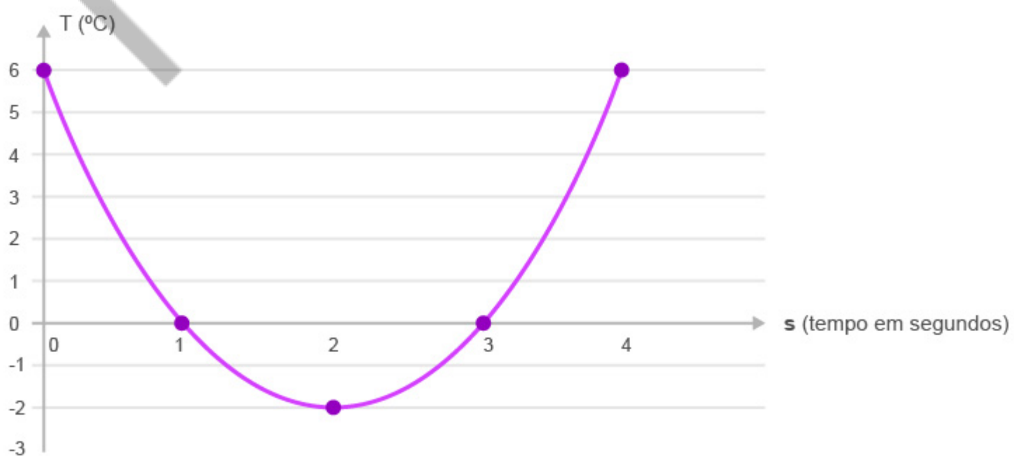

Figura 3 – Temperatura de uma reação química ao longo do tempo
Fonte: FIAP (2021)

Nesse caso, dizemos que a parábola possui concavidade voltada para cima e, consequentemente, seu vértice (2 s; -2ºC) é **um ponto de mínimo da parábola**.

Observando o gráfico, podemos afirmar que: no início da reação química, a temperatura está na casa dos 6ºC; nos primeiros dois segundos de reação, a temperatura cai parabolicamente até atingir seu menor valor no instante 2 s; após dois segundos de reação química, a temperatura aumenta segundo um crescimento parabólico.

1.1.3.2 Receita mensal de uma microempresa

A receita mensal **R** (em reais) de uma empresa é dada por: **R(p) = 20000p – 2000p²**, sendo **p** o preço de venda de cada unidade.

a) Qual a receita quando o preço de venda de cada unidade é de R$ 8,00?

Resolução

Nesse caso, vamos substituir p = R$ 8,00, na função dada.

$R(p) = 20000p - 2000p^2 \Rightarrow R(8) = 20000.(8) - 2000.(8)^2 \Rightarrow$

$\Rightarrow R = 160000 - 128000 \Rightarrow R = R\$\ 32.000,00$

Ou seja, neste caso, a receita será de R$ 32.000,00.

b) Qual o preço de venda que maximiza a receita? Qual a receita máxima?

Resolução

Para respondermos a esta questão, vamos obter as coordenadas do vértice da parábola: (como a < 0, a concavidade da parábola é voltada para baixo $\cap$, o que implica dizer que o vértice é um **ponto de máximo**).

Temos $R(p) = 20000.p - 2000.p^2$

$$x_v = -\frac{b}{2a} \Rightarrow p_v = -\frac{(20000)}{2.(-2000)} \Rightarrow p_v = \frac{-20000}{-4000} \Rightarrow p_v = R\$\ 5,00$$

$$y_v = R(5) = 20000.(5) - 2000.(5)^2 \Rightarrow R_v = R\$\ 50.000,00$$

Desse modo, R$ 5,00 é o preço de venda que maximiza a receita diária da empresa. O valor da receita máxima é R$ 50.000,00. A representação gráfica a seguir nos ajudará a compreender melhor o problema que estamos analisando.

Temos a função receita dada por $R(p) = 20000.p – 2000.p^2$.

Vamos utilizar o Excel como apoio para visualizar o gráfico dessa função:

P	R
Preço de venda de cada unidade (R$)	Receita mensal (R$)
0	0
1	18000
2	32000
3	42000
4	48000
5	50000
6	48000
7	42000
8	32000
9	18000
10	0

Tabela 1 – Tabela para construção do Gráfico de $R(p) = 20000.p – 2000.p^2$
Fonte: FIAP (2021)

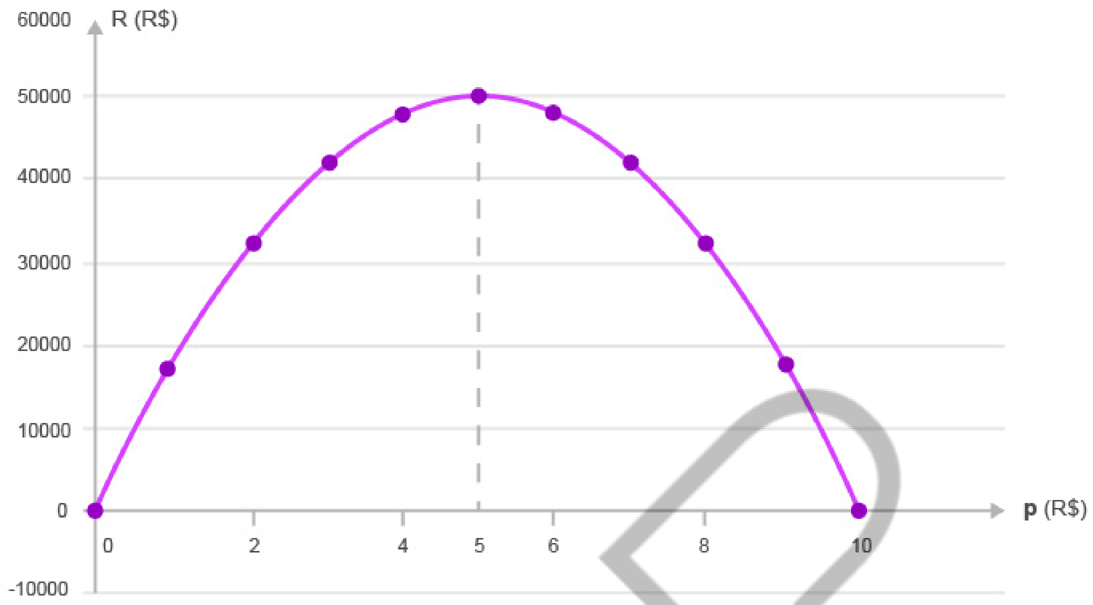

Figura 4 – Receita mensal em função do preço de venda de cada unidade
Fonte: FIAP (2021)

Neste caso, dizemos que a parábola possui concavidade voltada para baixo e, consequentemente, seu vértice (R$ 5,00; R$ 50.000,00) é um **ponto de máximo da parábola**.

Observando o gráfico, podemos afirmar:

- A um preço teórico de 0 real cada unidade vendida, possivelmente a empresa venderia todas as unidades (de graça...). Entretanto, sua arrecadação e receita seriam nulas.
- A um preço de 10 reais, cada unidade vendida, a receita volta a ser zero. Isso significa que R$ 10,00 é um preço completamente inadequado para o mercado ou um preço que o cliente não está disposto a pagar; ou um preço no qual a empresa facilmente perderia espaço para a concorrência: o número de unidades vendidas tende a ser zero, o que implica em receita nula.
- A um preço de R$ 5,00 cada unidade, a empresa teria sua receita máxima. Assim, para maximizar a receita, a empresa deve trabalhar com o preço ideal de R$ 5,00 ou com preços muito próximos de R$ 5,00.

1.1.4 Número de usuários de um *software*

Um determinado software com aplicações no setor de turismo acaba de ser lançado. Utilizando-se de um modelo matemático, estima-se que daqui a t meses, o número N de pessoas que utilizarão esse software será dado por $N(t) = 40t^2 - 880t + 6000$.

a) No lançamento, qual a expectativa de número de usuários do software?

Resolução

Nesse caso, vamos substituir t por zero (t = 0), pois o lançamento do software é o tempo inicial.

$N(0) = 40.(0)^2 - 880.(0) + 6000 \Rightarrow N = 6000$ usuários

b) Quantas pessoas se utilizarão do software daqui a um trimestre? E daqui a três anos?

Resolução

1º) Vamos substituir t por 3 (t = 3 meses = 1 trimestre).

$N(3) = 40.(3)^2 - 880.(3) + 6000 \Rightarrow N = 3720$ usuários

2º) Vamos substituir t por 36 (t = 36 meses = 3 anos).

$N(36) = 40.(36)^2 - 880.(36) + 6000 \Rightarrow N = 26160$ usuários

c) Daqui a quantos meses será registrado o menor número de usuários?

Resolução

Notemos que temos uma função do segundo grau com a = 40, ou seja, a > 0. Portanto, a parábola possui concavidade voltada para cima. Sendo assim, o vértice é um ponto de mínimo.

Temos $N(t) = 40.t^2 - 880.t + 6000.$

$$x_v = -\frac{b}{2a} \Rightarrow t_v = -\frac{(-880)}{2.(40)} \Rightarrow t_v = \frac{880}{80} \Rightarrow t_v = 11 \text{ meses}$$

$$y_v = N(11) = 40.(11)^2 - 880.(11) + 6000 \Rightarrow N_v = 1160 \text{ usuários}$$

Vamos, agora, fazer o gráfico com os dados calculados. Com o apoio do Excel, podemos fazer o gráfico da função dada.

t	N
tempo decorrido	número de usuário
em meses	$N(t) = 40.t^2 - 880.t + 6000$
0	6000
3	3720
9	1320
11	1160
13	1320
20	4400
36	26160

Tabela 2 – Tabela para construção do Gráfico de N(t) = 40.t² – 880.t + 6000
Fonte: FIAP (2021)

Figura 5 – Número de usuários de um software ao longo do tempo
Fonte: FIAP (2021)

1.1.5 Lucro mensal de uma empresa

Uma consultoria de administradores, após pesquisa realizada em uma determinada microempresa, concluiu que para o próximo semestre, essa microempresa teria seu lucro mensal **L** (em reais) calculado por meio do modelo matemático:

$$L(p) = -5000.p^2 + 60000.p - 160000$$

Sendo **p** o preço de venda de cada unidade comercializada por essa microempresa.

a) Qual o “lucro” quando o preço de venda de cada unidade é, teoricamente, zero? Quais os preços de venda de cada unidade determinam um <u>equilíbrio entre Receita e Despesas</u>?

Resolução

1º) Substituindo-se p = 0 na função dada, obtemos:

$$L(0) = -5000.(0)^2 + 60000.(0) - 160000 \Rightarrow L = -\text{R\$ } 160.000{,}00$$

Ou seja, um prejuízo de R$160.000,00.

2º) O Equilíbrio (Igualdade) entre Receita e Despesas implica Lucro zero. Portanto, vamos substituir L por zero na função dada:

$0 = -5000.p^2 + 60000.p - 160000$

Dividindo-se a equacao por -5000, obtemos:

$p^2 - 12.p + 32 = 0$

$a = 1 \ b = -12 \ c = 32$

$\Delta = b^2 - 4.a.c = (-12)^2 - 4.(1).(32) = 144 - 128 = 16$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2.a} \Rightarrow p = \frac{-(-12) \pm \sqrt{16}}{2.1} \Rightarrow p = \frac{12 \pm 4}{2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} p = \dfrac{12 - 4}{2} \Rightarrow p = \dfrac{8}{2} \Rightarrow p = \text{R\$ } 4{,}00 \\ p = \dfrac{12 + 4}{2} \Rightarrow p = \dfrac{16}{2} \Rightarrow p = \text{R\$ } 8{,}00 \end{cases}$$

Portanto, a um preço de R$ 4,00 ou R$ 8,00 cada unidade (tais valores são chamados de **raízes da função**), a empresa tem lucro zero. Podemos dizer que a um preço de R$ 4,00 cada unidade, o que a empresa arrecada nesse caso apenas cobre seus custos, gerando lucro zero. A um preço de R$ 8,00 a unidade, uma possibilidade é afirmarmos que a empresa vende menos, apenas o suficiente para cobrir suas despesas, voltando novamente a ter lucro zero.

b) Qual o preço de venda de cada unidade que <u>maximiza</u> o lucro mensal dessa microempresa no período em estudo? Qual o <u>lucro mensal máximo</u> para o período, nas condições dadas?

Resolução

Essa questão se refere ao vértice da parábola. Como a função possui $a < 0$ (observe que $a = -5000$ é o termo que multiplica p^2), a concavidade da parábola é voltada para baixo $\frown$ e, portanto, a parábola tem **ponto de máximo**.

$$L(p) = -5000.p^2 + 60000.p - 160000$$

$$x_v = -\frac{b}{2.a} \Rightarrow p = -\frac{-(60000)}{2.(-5000)} \Rightarrow p = R\$\ 6{,}00$$

$$y_v = L(6) = -5000.(6)^2 + 6000.(6) - 160000 \Rightarrow L = R\$\ 20.000{,}00$$

Sendo assim, ao preço de R$ 6,00, a microempresa tem seu lucro máximo de R$ 20.000,00.

c) Com o apoio do Excel, organize uma tabela de valores dos preços obtidos para cada unidade e o lucro mensal após as vendas.

P	L
Preço de venda de cada unidade (R$)	Lucro mensal (R$) => L(p) = - 5000.p^2 + 60000.p - 160000
0	-160000
1	-105000
2	-60000
3	-25000
4	0
5	15000
6	20000
7	15000
8	0
9	-25000
10	-60000
11	-105000
12	-160000

Tabela 3 – Tabela para construção do Gráfico de L(p) = – 5000p² + 6000p – 160000
Fonte: FIAP (2021)

d) Represente, no Excel, graficamente a função lucro dada

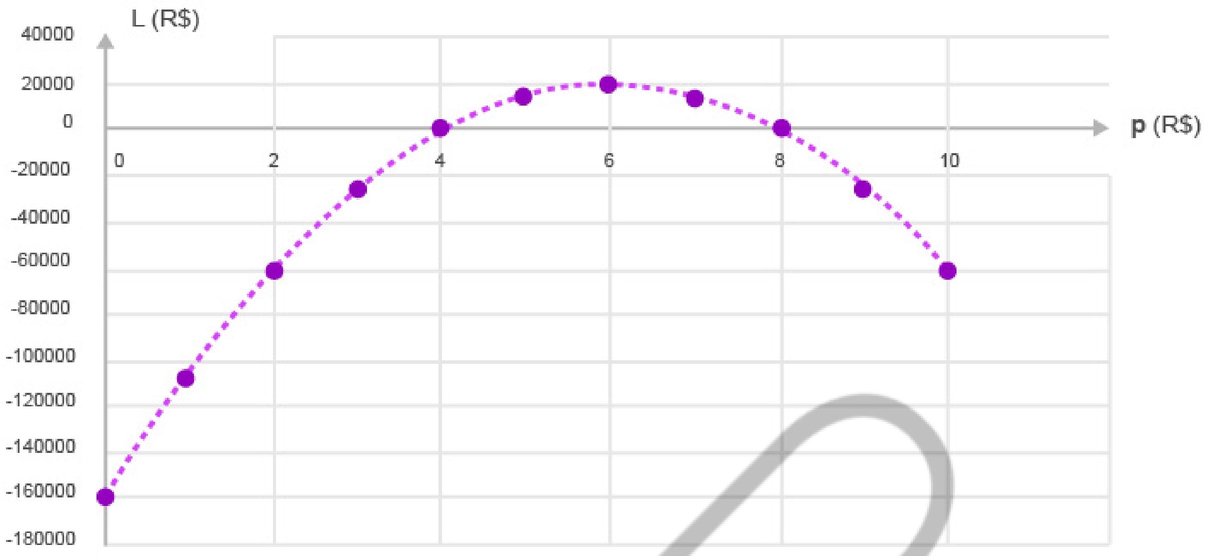

Figura 6 – Lucro mensal em função do preço de venda de um produto
Fonte: FIAP (2021)

1.1.6 Problemas aplicados envolvendo Função do 2º grau

1.1.6.1 Receita mensal em função do número de unidades vendidas

A receita mensal **R** (em reais) de uma empresa é dada por: **R(n) = 100000n – 5000n²**. Sendo **n** o número de milhares de unidades vendidas mensalmente.

a) Qual a receita para 11.000 unidades vendidas?

Resolução

Nesse caso, basta fazermos n = 11 (11 milhares = 11000 unidades):

$R(n) = 100000.n - 5000.n^2 \Rightarrow$

$\Rightarrow R(11) = 100000.(11) - 5000.(11)^2 \Rightarrow$

$\Rightarrow R(11) = 1100000 - 5000.(121) \Rightarrow$

$\Rightarrow R(11) = 1100000 - 605000 \Rightarrow$

$\Rightarrow R(11) = 495000$

Temos uma receita de R$ 495.000,00.

b) Quantas unidades devem ser vendidas para gerar uma receita de R$ 420.000,00?

Resolução

Nesse item, vamos fazer R = 420000:

$R(n) = 100000.n - 5000.n^2 \Rightarrow$

$\Rightarrow 420000 = 100000.n - 5000.n^2 \Rightarrow$

$\Rightarrow 5000.n^2 - 100000.n + 420000 = 0$

Vamos resolver essa equação do 2º grau por meio da Fórmula de Bhaskara:

$5000.n^2 - 100000.n + 420000 = 0 \Rightarrow n^2 - 20.n + 84 = 0$

Temos a = 1, b = -20 e c = 84:

Vamos aplicar a fórmula de Bhaskara:

$\Delta = b^2 - 4.a.c = (-20)^2 - 4.(1).(84) = 400 - 336 = 64 \Rightarrow \Delta = 64$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2.a} \Rightarrow n = \frac{-(-20) \pm \sqrt{64}}{2.(1)} \Rightarrow n = \frac{20 \pm 8}{2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} n = \dfrac{20 - 8}{2} \Rightarrow n = \dfrac{12}{2} \Rightarrow n = 6 \text{ (milhares)} \\ n = \dfrac{20 + 8}{2} \Rightarrow n = \dfrac{28}{2} \Rightarrow n = 14 \text{ (milhares)} \end{cases}$$

Portanto, devem ser vendidas 6.000 unidades ou 14.000 unidades.

c) Quantas unidades devem ser vendidas para se maximizar a receita? Qual a receita máxima?

Resolução

Temos $R(n) = -5000.n^2 + 100000.n$:

$$x_v = -\frac{b}{2a} \Rightarrow n_v = -\frac{(100000)}{2.(-5000)} \Rightarrow n_v = \frac{-100000}{-10000} \Rightarrow n_v = 10 \text{ milhares}$$

Vamos substituir n = 10 na função dada:

$R(n) = 100000.n – 5000.n^2 \Rightarrow$

$\Rightarrow R(10) = 100000.(10) – 5000.(10)^2 \Rightarrow$

$\Rightarrow R(11) = 1000000 – 5000.(100) \Rightarrow$

$\Rightarrow R(11) = 1000000 – 500000 \Rightarrow$

$\Rightarrow R(11) = 500000$

Temos uma receita máxima de R$ 500.000,00

d) Representar graficamente a função dada.

Resolução

Utilizando-se o Excel como apoio, à partir dos dados calculados, obtemos o gráfico da função:

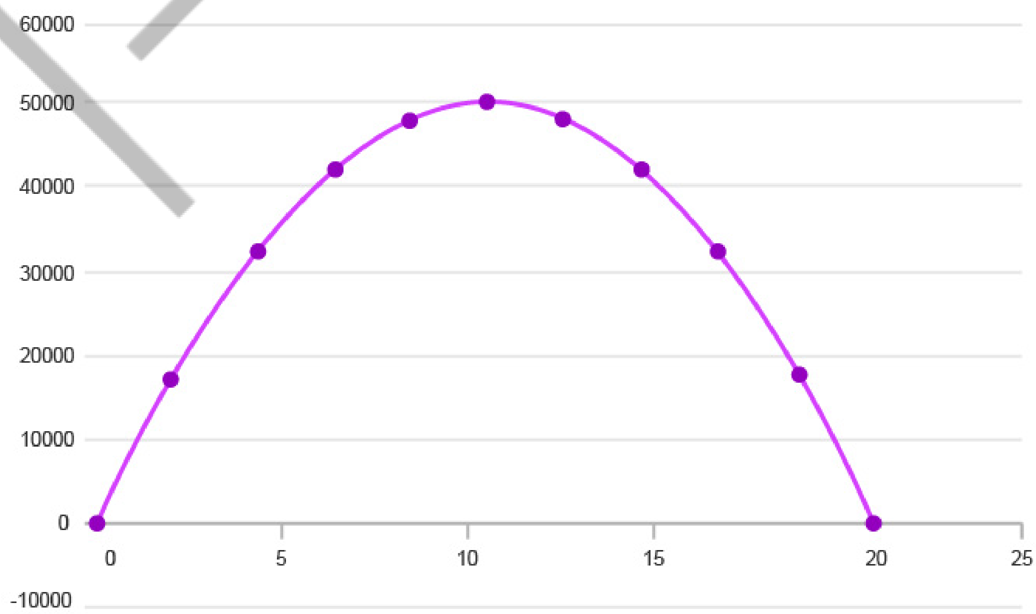

Figura 7 – Gráfico da função (1)
Fonte: Elaborado pelo autor (2021)

1.1.6.2 Lucro em função do preço de venda

O lucro mensal **L** (em reais) de uma empresa é dado por: **$L(p) = -3000p^2 + 36000p - 81000$.** Sendo **p** o preço de venda de cada unidade.

a) Qual o lucro quando o preço de venda de cada unidade é de R$ 4,20? E quando o preço de venda unitário é R$ 8,00?

Resolução

1) Vamos substituir $p = 4{,}20$ na função dada:

$L(p) = -3000.p^2 + 36000.p - 81000 \Rightarrow$

$\Rightarrow L(4{,}20) = -3000.(4{,}20)^2 + 36000.(4{,}20) - 81000 \Rightarrow$

$\Rightarrow L(4{,}20) = 17280 \Rightarrow$ Lucro de R$ 17.580,00

Logo, o lucro será de R$ 17.580,00 quando o preço de venda for de R$ 4,20.

2) Vamos substituir $p = 8$ na função dada:

$L(p) = -3000.p^2 + 36000.p - 81000 \Rightarrow$

$\Rightarrow L(8) = -3000.(8)^2 + 36000.(8) - 81000 \Rightarrow$

$\Rightarrow L(8) = 15000 \Rightarrow$ Lucro de R$ 15.000,00

Portanto, quando o preço unitário for de R$ 8,00, o lucro será de R$ 15.000,00, ou seja terá menor lucro quando comparado ao preço unitário anterior de R$ 4,20.

b) Determine o intervalo de preço de venda para o qual a receita da empresa passa a superar as despesas.

Resolução

Inicialmente, vamos verificar o momento no qual o lucro é zero.

Substituindo-se $L = 0$ na função dada, obtemos:

$L(p) = -3000.p^2 + 36000.p - 81000 \Rightarrow$

$\Rightarrow 0 = -3000.p^2 + 36000.p - 81000 \Rightarrow$

Podemos dividir os dois membros da equação por “ - 3000 ”:

$p^2 - 12.p + 27 = 0$

Temos a = 1, b = -12 e c = 27:

Vamos aplicar a fórmula de Bhaskara:

$$\Delta = b^2 - 4.a.c = (-12)^2 - 4.(1).(27) = 144 - 108 = 36 \Rightarrow \Delta = 36$$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2.a} \Rightarrow p = \frac{-(-12) \pm \sqrt{36}}{2.(1)} \Rightarrow p = \frac{12 \pm 6}{2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} p = \dfrac{12 - 8}{2} \Rightarrow p = \dfrac{6}{2} \Rightarrow p = 3 \text{ (reais)} \\ p = \dfrac{12 + 8}{2} \Rightarrow p = \dfrac{18}{2} \Rightarrow p = 9 \text{ (reais)} \end{cases}$$

Portanto, a receita supera as despesas quando o preço de venda está entre R$ 3,00 e R$ 9,00. (O gráfico apresentado no item “d” ilustra essa situação.)

c) Qual o preço de venda que maximiza o lucro? Qual o lucro máximo?

Resolução

Temos $L(p) = -3000.p^2 + 36000.p - 81000$:

$$x_v = -\frac{b}{2a} \Rightarrow p_v = -\frac{(36000)}{2.(-3000)} \Rightarrow p_v = \frac{-36000}{-6000} \Rightarrow p_v = 6 \text{ reais}$$

Vamos substituir p = 6 na função dada:

$L(p) = -3000.p^2 + 36000.p - 81000 \Rightarrow$

$\Rightarrow L(6) = -3000.(6)^2 + 36000.(6) - 81000 \Rightarrow$

$\Rightarrow L(6) = 27000 \Rightarrow$ Lucro máximo de R$ 27.000,00

Ou seja, o preço de venda que maximiza o lucro é de R$ 6,00 e o lucro máximo equivalente a este preço é de R$ 27.000,00.

d) Representar graficamente a função lucro dada.

Resolução

Utilizando-se o Excel como apoio e os resultados obtidos nos cálculos dos itens anteriores, obtemos o gráfico da função:

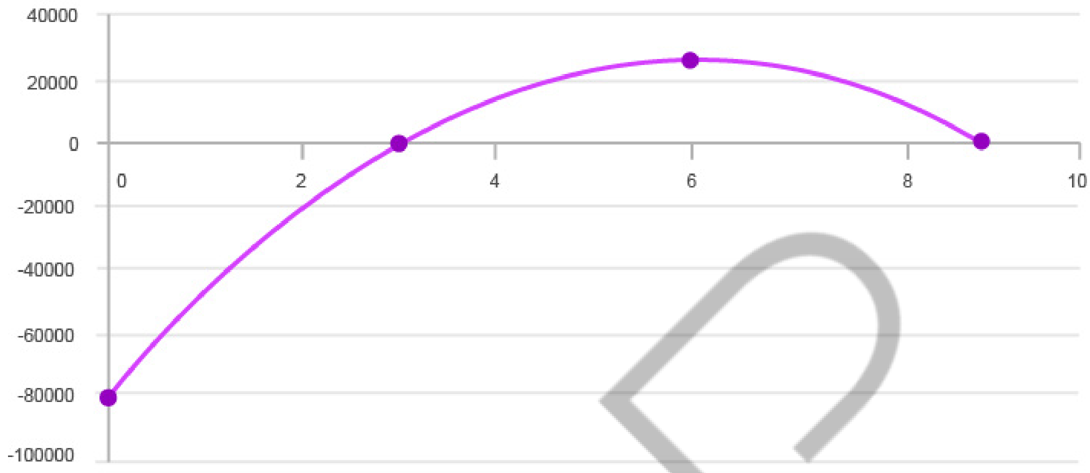

Figura 8 – Gráfico da função (2)
Fonte: Elaborado pelo autor (2021)

e) Para que valores de p o lucro é superior a R$ 20.250,00?

Resolução

Fazendo-se L = 20250, obtemos:

$L(p) = -3000.p^2 + 36000.p - 81000 \Rightarrow$

$\Rightarrow 20250 = -3000.p^2 + 36000.p - 81000 \Rightarrow$

$\Rightarrow 3000.p^2 - 36000.p + 101250 = 0$

$$3000.p^2 - 36000.p + 101250 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow p^2 - 12.p + 33{,}75 = 0$$

Temos a = 1, b = -12 e c = 33,75 :

Vamos aplicar a fórmula de Bhaskara:

$$\Delta = b^2 - 4.a.c = (-12)^2 - 4.(1).(33{,}75) = 144 - 135 = 9 \Rightarrow \Delta = 9$$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2.a} \Rightarrow p = \frac{-(-12) \pm \sqrt{9}}{2.(1)} \Rightarrow p = \frac{12 \pm 3}{2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} p = \dfrac{12 - 3}{2} \Rightarrow p = \dfrac{9}{2} \Rightarrow p = 4{,}50 \text{ (reais)} \\ p = \dfrac{12 + 3}{2} \Rightarrow p = \dfrac{15}{2} \Rightarrow p = 7{,}50 \text{ (reais)} \end{cases}$$

O lucro é superior a R$ 20.250,00 quando o preço de venda está entre R$ 4,50 e R$ 7,50.

1.1.6.3 Lucro em função do número de unidades vendidas

Uma determinada indústria tem seu lucro mensal estimado pela fórmula: **L(n) = – 8000n² + 128000n – 480000.** Sendo **n** o número de milhares de unidades vendidas mensalmente.

a) Qual será o lucro, caso não seja vendida nenhuma unidade? Quantas unidades devem ser vendidas mensalmente para se obter um equilíbrio entre Receita e Despesas?

Resolução

1) Substituindo-se n = 0 na função dada, obtemos:

$L(0) = -8000.(0)^2 + 128000.(0) - 480000 \Rightarrow L = -$ R$ 480.000,00

Ou seja, se nenhuma unidade for vendida terá um prejuízo de R$ 480.000,00.

2) O Equilíbrio (Igualdade) entre Receita e Despesas implica Lucro zero. Portanto, vamos substituir L por zero na função dada:

$0 = -8000.n^2 + 128000.n - 480000$

Dividindo-se a equação por -8000, obtemos:

$n^2 - 16.n + 60 = 0$

$a = 1,\ b = -16 \text{ e } c = 60$

$\Delta = b^2 - 4.a.c = (-16)^2 - 4.(1).(60) = 256 - 240 = 16$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2.a} \Rightarrow n = \frac{-(-16) \pm \sqrt{16}}{2.(1)} \Rightarrow n = \frac{16 \pm 4}{2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} n = \frac{16 - 4}{2} \Rightarrow n = \frac{12}{2} \Rightarrow n = 6 \text{ milhares} \\ n = \frac{16 + 4}{2} \Rightarrow n = \frac{20}{2} \Rightarrow n = 10 \text{ milhares} \end{cases}$$

Portanto, o lucro será nulo para 6.000 unidades ou 10.000 unidades vendidas.

b) Quantas unidades devem ser vendidas para se maximizar o lucro mensal dessa indústria? Qual o lucro mensal máximo previsto?

Resolução

$L(n) = -8000.n^2 + 128000.n - 4800000$

$$x_v = -\frac{b}{2.a} \Rightarrow n = -\frac{-(1280000)}{2.(-8000)} \Rightarrow n = 8 \text{ milhares}$$

$y_v = L(8) = -8000.(8)^2 + 128000.(8) - 480000 \Rightarrow L = R\$\ 32.000{,}00$

Portanto, 8.000 unidades vendidas determinam o lucro máximo de R$ 32.000,00.

c) Representar graficamente a função lucro dada (p = 0; L = 0; vértice)

Resolução

Utilizando-se o Excel como apoio e os dados calculados nos itens anteriores, obtemos o gráfico da função:

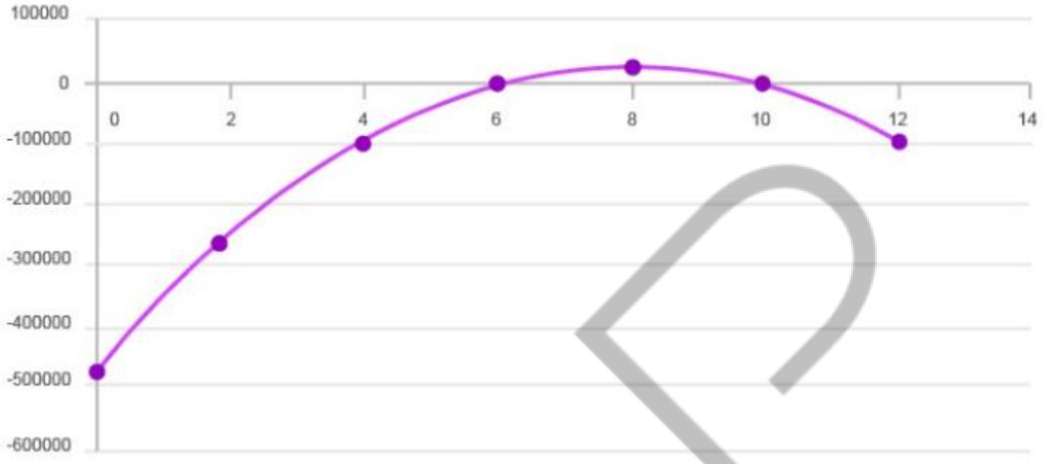

Figura 9 – Gráfico da função (3)
Fonte: Elaborado pelo autor (2021)

1.1.6.4 Receita e lucro no setor automotivo: maximização

Uma empresa do setor automotivo, em um estudo feito por seus analistas, obteve os seguintes resultados:

$$N(p) = 30000 - 2000p$$

$$C(N) = 26000 + N$$

Onde o número N de unidades vendidas mensalmente depende do preço p de venda de cada unidade e C é o custo total de produção das N unidades, para valores em reais.

Nesse caso, obtenha:

a) a função R(p), o preço de venda que maximiza a receita e o valor da receita máxima. Faça um esboço do gráfico.

Resolução

1) Vamos obter a Função Receita:

Receita = (número de unidades vendidas) vezes (preço de venda de cada unidade). Assim, temos:

$R = N.p \Rightarrow$

$\Rightarrow R = (30000 - 2000.p).p \Rightarrow$

$\Rightarrow R(p) = 30000.p - 2000.p^2$

2) Vamos obter o preço que maximiza a receita e o valor da receita máxima:

Temos $R(p) = 30000.p - 2000.p^2$:

$$x_v = -\frac{b}{2a} \Rightarrow p_v = -\frac{(30000)}{2.(-2000)} \Rightarrow p_v = -\frac{-30000}{-4000} \Rightarrow p_v = 7{,}50 \text{ reais}$$

Vamos substituir p = 7,5 na função dada:

$R(p) = 30000.p - 2000.p^2 \Rightarrow$

$\Rightarrow R(7{,}5) = 30000.(7{,}5) - 2000.(7{,}5)^2 \Rightarrow$

$\Rightarrow R(7{,}5) = 225000 - 2000.(56{,}25) \Rightarrow$

$\Rightarrow R(7{,}5) = 225000 - 112500 \Rightarrow$

$\Rightarrow R(7{,}5) = 112500$

Temos uma receita máxima de R$ 112.500,00.

3) Vamos fazer um esboço do gráfico:

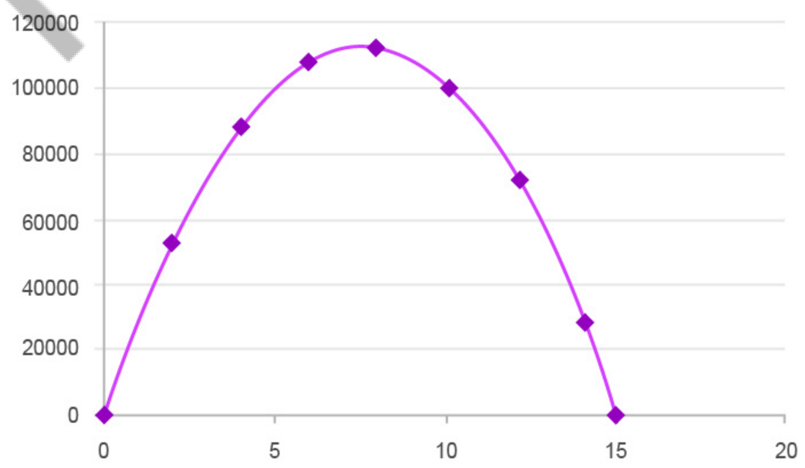

Figura 10 – Gráfico da função (4)
Fonte: Elaborado pelo autor (2021)

b) a função L(p), o preço de venda que maximiza o lucro e o valor do lucro máximo. Faça um esboço do gráfico.

Resolução

1) Vamos obter a Função Lucro:

Lucro = Receita – Custo $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ L = R – C $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ L = 30000.p – 2000.p² – (26000 + N) $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ L = 30000.p – 2000.p² – (26000 + 30000 – 2000.p) $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ L = 30000.p – 2000.p² – (56000 – 2000.p) $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ L = 30000.p – 2000.p² – 56000 + 2000.p $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ L(p) = – 2000.p² + 32000.p – 56000

2) Vamos obter o preço de venda que maximiza o lucro e o valor do lucro máximo:

Temos $L(p) = -2000.p^2 + 32000.p - 56000$:

$$x_v = -\frac{b}{2a} \Rightarrow p_v = -\frac{(32000)}{2.(-2000)} \Rightarrow p_v = -\frac{-32000}{-4000} \Rightarrow p_v = 8 \text{ reais}$$

Vamos substituir p = 8 na função dada:

L(p) = –2000.p² + 32000.p – 56000 $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ L(8) = –2000.(8)² + 32000.(8) – 56000 $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ L(8) = 72000 $\Rightarrow$ Lucro máximo de R$ 72.000,00

3) Vamos fazer um esboço do gráfico com apoio do Excel:

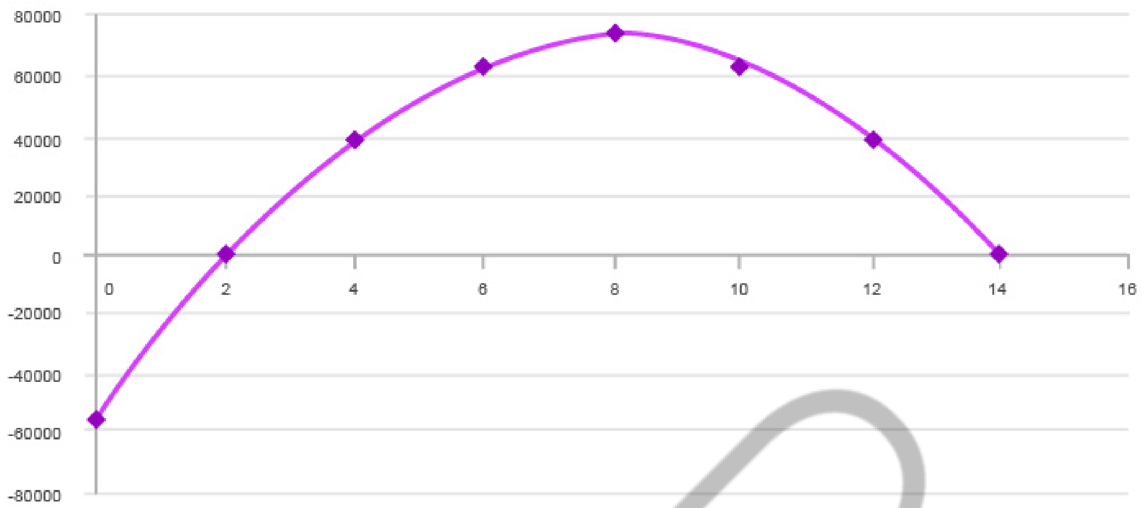

Figura 11 – Esboço do gráfico com a ajuda do Excel
Fonte: Elaborado pelo autor (2021)

1.1.6.5 Concentração molecular (mol)

Os dados experimentais indicados na tabela seguir correspondem às concentrações de uma substância química medida em intervalos de 1 em 1 segundo. Assumindo que a linha que passa pelos três pontos experimentais é uma parábola, determine a concentração (em mol) após 4 segundos.

Tempo (s)	Concentração (mol)
1	27,00
2	32,00
3	35,00

Resolução

1) A forma geral de uma função do 2º grau é $y = a.x^2 + b.x + c$. Além disso, temos três pares ordenados (x; y) dados no enunciado: (1; 27); (2; 32) e (3; 35).

Vamos substituir os pares ordenados na forma geral $y = ax^2 + bx + c$ e resolver um sistema de equações:

$$\begin{cases} 27 = a.(1)2 + b.(1) + c \\ 32 = a.(2)2 + b.(2) + c \Rightarrow \\ 35 = a.(3)2 + b.(3) + c \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a + b + c = 27 \\ 4.a + 2.b + c = 32 \\ 9.a + 3.b + c = 35 \end{cases}$$

Na primeira equação do sistema, ao isolarmos a incógnita c, obtemos:

c = 27 – a – b

Vamos substituir c = 27 – a – b na 2ª equação e na 3ª equação do sistema:

$$\begin{cases} 4.a + 2.b + 27 - a - b = 32 \\ 9.a + 3.b + 27 - a - b = 35 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 3.a + b = 5 \\ 8.a + 2.b = 8 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 3.a + b = 5 \\ -4.a - b = -4 \end{cases} \Rightarrow$$

Ao somarmos, membro a membro, as equações do sistema, obtemos:

– a = 1 ⇒ **a = – 1**

Como 3.a + b = 5, temos:

3.(-1) + b = 5 ⇒ **b = 8**

Como a + b + c = 27, temos:

- 1 + 8 + c = 27 ⇒ **c = 20**

Temos y = a.x² + b.x + c, **a = – 1**, **b = 8** e **c = 20**. Portanto, a função que determina a concentração (em mols) em função do tempo (em s) é:

$$y = -1.x^2 + 8.x + 20$$

2) Substituindo-se x = 4 na função obtida, obtemos:

$y = -x^2 + 8.x + 20 \Rightarrow$

$\Rightarrow y = -(4)^2 + 8.(4) + 20 \Rightarrow$

$\Rightarrow y = 36$

Portanto, temos uma concentração de 36 mols após 4 segundos.

1.1.6.6 Respostas dos problemas

a) R$ 495.000,00 b) 6000 unidades ou 14000 unidades c) 10000 unidades; R$ 500.000,00 d) gráfico

a) R$ 17.280,00; R$ 15.000,00 b) 3 < p < 9 c) R$ 6,00; R4 27.000,00 d) gráfico e) 4,50 < p < 7,50

a) – R$ 480.000,00; 6000 unidades ou 10000 unidades b) 8000 unidades; R$ 32.000,00

a) $R(p) = 30000p - 2000p^2$; R$ 7,50; R$ 112.500,00

b) $L(p) = -2000p^2 + 32000p - 56000$; R$ 8,00; R$ 72.000,00

36

No próximo capítulo, você utilizará o plano cartesiano para compreender o espaço disponível de utilização da tela de uma aplicação. Pronto para o próximo Capítulo? Chegou a vez da tag <CANVAS>.

REFERÊNCIAS

ÁVILA, C. S. **Taxa de depreciação de máquinas e equipamentos. Você calcula? Confira dicas!**. [s.d.]. Disponível em: <https://muitomaisdigital.com.br/taxa-de-depreciacao-de-maquinas-e-equipamentos-voce-calcula-confira-dicas/>. Acesso em: 23 mar. 2021.

BENCK, J. **Como calcular a depreciação de veículos**. 2017. Disponível em: <https://hintigo.com.br/depreciacao-de-veiculos/>. Acesso em: 23 mar. 2021.

BONETTO, G.; MUROLO, A. **Matemática aplicada à Administração, Economia e Contabilidade.** São Paulo: Pioneira Thomson Learning, 2004.

CASAL INGLÊS está viajando o mundo há oito anos em uma van. **Catraca Livre.** 2016. Disponível em: <https://catracalivre.com.br/geral/mundo/indicacao/casal-ingles-esta-viajando-o-mundo-ha-8-anos-em-uma-van/>. Acesso em: 23 mar. 2021.

DEMANA, F. D. **Pré-Cálculo**. São Paulo: Pearson, 2013.

FERNANDES, D. B. **Cálculo Diferencial**. São Paulo: Pearson, 2014.

GONÇALVES, M. B.; FLEMMING, D. M. **Cálculo A.** São Paulo: Pearson, 2013.

HOFFMANN, L. D.; BRADLEY, G. L. **Cálculo:** um curso moderno e suas aplicações. Rio de Janeiro: LTC, 2008.

IEZZI, G. **Matemática:** ciências e aplicações. São Paulo: Atual, 2010.

ROSSO, A. C.; FURTADO, P. **Matemática:** uma ciência para a vida. São Paulo: Harbra, 2011.

THOMAS, G. B. **Cálculo – Volume I**. São Paulo: Pearson, 2012.