APLICANDO AS AÇÕES DE LÓGICA
COM PROGRAMAÇÃO EM PROJETOS

APLICANDO RESOLUÇÕES

DIFERENCIADAS DE PROBLEMAS PARA A LÓGICA

ISMAEL DE ARAÚJO SILVA

07

LISTA DE FIGURAS

LISTA DE QUADROS

LISTA DE TABELAS

SUMÁRIO

1 APLICANDO RESOLUÇÕES DIFERENCIADAS DE PROBLEMAS PARA A LÓGICA

Você já percebeu que estamos o tempo todo tomando decisões, sejam simples, sejam complexas? Ainda mais na Era da Informação, na qual, por meio da tecnologia, podemos fazer comparações com mais dados disponíveis, pesquisar sobre as empresas, sobre as pessoas, sobre os lugares, levantamento de dados,etc.

Assim, decidimos sobre o melhor custo-benefício, por exemplo, para fazer uma compra de infraestrutura ou alugar uma via *cloud computing*, ir a uma reunião de projeto de carro ou de transporte público, ou até se a *start up* que você está abrindo vai começar a ter lucro já no primeiro ano de atuação. Nem sempre o que parece ser melhor, realmente é, certo? É nesse ponto que a matemática pode nos ajudar, e muito, nas tomadas de decisão, inclusive por meio de máquinas e softwares, como mudanças de comportamentos de um sistema computacional.

1.1 Como tomar a melhor decisão de forma fundamentada?

Quem nunca pensou em largar tudo e viajar o mundo? Para alguns, um sonho distante. Para outros, basta vontade e coragem. Foi o que fez o casal inglês Lauren Winslow-Llewellyn, 27 anos, e Craig Hubbard, 33 anos, ambos de Brighton. Eles estão há mais de 10 anos rodando o mundo em uma van devidamente equipada como uma casa móvel.

Lauren e Craig já percorreram mais de 200 mil quilômetros a bordo da Daphne, uma Dodge Camper Van. O casal já passou pela Austrália, Ásia, América do Sul e Central, Nova Zelândia e Europa. Agora, eles estão fazendo o caminho do Alasca até a Flórida.

Figura 1 – Lauren e Craig em sua Dodge Camper van
Fonte: Instagram do casal (2020)

Partindo do exemplo de Lauren e Craig, vamos iniciar a discussão desse tema com uma situação para analisarmos. Um grupo de amigos pretende fazer uma viagem. Para isso, irão alugar um veículo de transporte (uma “van”).

Após uma pesquisa, o grupo de amigos obteve valores de duas empresas com ótima avaliação: a empresa “VIVERTUR” cobra uma taxa fixa de R$ 700,00 e mais R$ 1,20 por km rodado; a empresa concorrente “ECOTUR” cobra uma taxa fixa de R$ 780,00 e mais R$ 0,80 por km rodado.

A partir dessas informações, como o grupo de amigos pode saber qual empresa é a melhor, em termos financeiros, para se fazer a locação e economizar dinheiro? Ou até que ponto pode valer mais a pena uma empresa ou outra?

Um problema como esse pode ser investigado por meio do uso de funções matemáticas e suas representações gráficas. Interessante, não acha? Essa é uma das propostas da matemática, perceber como é importante modelar as mais diversas situações por meio de funções, para, então, a partir de uma análise ampla e fundamentada, tomar a melhor decisão.

Muito bem! Temos o problema do aluguel da van para resolver. Pense sobre ele e analise, até o final do capítulo, você terá a resposta. Como início, é importante ressaltar que o conceito de função é verdadeiramente fundamental em matemática. As funções basicamente desempenham o papel de, conhecendo um número, obtermos com o auxílio da função um outro número relacionado ao primeiro por meio de uma "lei". Vamos exemplificar este conceito de funções a seguir.

O Índice de Massa Corporal (IMC) de uma pessoa pode ser calculado por meio da fórmula: IMC = M/h^2, onde M é a massa do indivíduo em quilogramas e h é a altura em metros.

IMC	Classificação
<18,5	Peso baixo
18,5 - 24,9	Peso normal
25,0 - 29,9	Sobrepeso
30,0 - 34,9	Obesidade (Grau 1)
35,0 - 39,9	Obesidade severa (Grau II)
>= 40,0	Obesidade mórbida (Grau III)

Quadro 1 – Quadro de IMC
Fonte: Google Imagens (2021)

Observe que o IMC é uma função de duas variáveis, pois seu valor depende das grandezas massa do indivíduo e altura do indivíduo:

- Todo indivíduo pode obter seu IMC;
- Cada indivíduo tem um único IMC.

De forma geral, são as duas características destacadas anteriormente que fazem com que um modelo matemático possa ser chamado de função.

1.2 Função do 1º Grau: contextos e aplicações.

1.2.1 Custo Fixo, Custo Unitário e Custo Total

> **Despesas:** os custos dentro de um negócio são necessários tanto para a produção dos serviços ou produtos oferecidos pela empresa quanto para os gastos para manter o pleno funcionamento do negócio. Entre essas despesas, estão o que chamamos de custos fixos e custos variáveis. (SEBRAE, 2018)

Veja mais em: https://www.sebrae.com.br/sites/PortalSebrae/ufs/ap/artigos/saiba-o-que-sao-custos-fixos-e-custos-variaveis,7cf697daf5c55610VgnVCM1000004c00210aRCRD#:~:text=Entre%20estas%20despesas%20est%C3%A3o%20o,NESTE%20TEXTO%3A&text=S%C3%A3o%20aqueles%20que%20variam%20diretamente,ou%20vendida%2C%20na%20mesma%20propor%C3%A7%C3%A3o.

Vamos iniciar a discussão desse tema com um exemplo. Uma determinada empresa que fabrica componentes para o setor automotivo possui um custo fixo mensal de R$ 180.000,00 e uma despesa de R$ 25,00 por unidade produzida. Considerando esse contexto, vamos responder a algumas questões.

I) Qual a despesa mensal dessa empresa em um mês no qual foram produzidas 3.000 unidades?

Resolução:

Neste caso, basta fazermos “3.000.(25) + 180.000”, o que daria uma despesa total mensal de R$ 255.000,00. Lembre-se que nas operações matemáticas resolvemos, primeiramente, as multiplicações e divisões dos números. Após isso, podemos realizar a soma ou subtração dos valores, ok?

II) Qual a despesa mensal para o caso de a empresa produzir um número “n” de unidades em um determinado mês?

Resolução:

Vamos denotar a despesa mensal total da empresa em um determinado mês por “C”. Assim, a despesa mensal total para a produção de n unidades pode ser dada por:

C = 25.n + 180.000 ou C(n) = 25.n + 180.000

Podemos dizer que a despesa total mensal C depende do número n de peças produzidas no mês, ou seja, a despesa mensal C está em função do número n de peças produzidas. Fácil de compreender, não é mesmo?

Como C depende do n, dizemos que C é a **variável dependente** e que n é a **variável independente**.

Observando-se a função C = 25.n + 180.000, podemos notar que ela tem a forma geral y = a.x + b.

Comparando-se a função C = 25.n + 180.000 com a forma geral y = a.x + b, temos:

y = C

a = 25

x = n

b = 180.000

Há inúmeras situações nas quais os modelos matemáticos obtidos possuem a forma geral **y = a.x + b** (ou **f(x) = a.x + b**). Esses modelos são chamados de **"Funções do 1º Grau"**.

Neste item do nosso capítulo, vamos estudar as funções do 1º Grau e suas aplicações em variados contextos, pois é isso que se espera de um profissional de excelência: a sua capacidade de interagir em contextos diversos demonstrando toda sua versatilidade.

1.3 Definição: uma formalização do conceito de Função do 1º Grau

Vamos formalizar o conceito de Função do 1º Grau: denomina-se função polinomial do 1º Grau toda função f: IR $\rightarrow$ IR da forma:

y = a.x + b ou f(x) = a.x + b, com a $\in$ IR* (pertencente ao conjunto dos Números Reais, porém, não pode ser 0) e b $\in$ IR (podendo ser 0).

A notação matemática “ f: IR $\rightarrow$ IR ” (lê-se f é uma função de R em R) indica que os valores de x podem assumir quaisquer números reais e os valores de y podem assumir quaisquer números reais também.

O símbolo IR é o símbolo do Conjunto dos Números Reais.

O símbolo IR* elimina o número zero do conjunto: IR* = IR - {0}.

Dizemos que o valor de y depende do valor de x (ou seja, para calcularmos o valor de y precisamos do valor de x) e, por isso, chamamos y de variável dependente e x de variável independente.

1.4 Representação gráfica das Funções do 1º Grau

Vamos considerar dois exemplos, apresentados a seguir, para falarmos sobre o gráfico de uma Função do 1º Grau:

1.4.1 Valorização de um imóvel

> A valorização de mercado de um imóvel está apoiada em um tripé de custo-qualidade-utilidade. Exatamente por isso, não existe uma tabela com números prontos e ela é definida por meio da avaliação conjunta de inúmeros fatores, que podem ser subjetivos ou não. No entanto, os itens mais levados em consideração são os mais objetivos, como localização do imóvel, características físicas do terreno e da construção, infraestrutura da região e até o atual momento do mercado imobiliário (IMÓVELWEB, [s.d.])

Veja mais em: <https://www.imovelweb.com.br/noticias/socorretor/mercado/como-saber-a-valorizacao-de-imoveis-em-cada-regiao/>

Um determinado apartamento custa hoje cerca de R$ 600.000,00 e, devido à sua localização, uma consultoria do ramo imobiliário projeta uma valorização anual da ordem de R$ 30.000,00. Muito bem, agora vamos obter o modelo matemático que corresponde a essa situação e fazer sua representação gráfica.

Resolução

Após um ano, podemos estimar o valor do apartamento em:

30.000 + 600.000 = R$ 630.000,00.

Após dois anos:

30.000.(2) + 600 000 = R$ 660.000,00

Após três anos:

30.000.(3) + 600.000 = R$ 690.000,00

Após quatro anos:

30.000. (4) + 600.000 = R$ 720.000,00

Após **t** anos:

V = 30000.t + 600000,

onde **V** é o valor em reais do apartamento e **t** é o número de anos decorridos. Perceba que a função obtida está no formato de equação do 1º Grau: y = a.x + b.

Também podemos representar a situação por:

V(t) = 600.000 + 30.000.t

Dizemos que o valor **V** do apartamento está em função do tempo **t** (número de anos decorridos) e denotamos essa situação como **V(t)**.

Representando os dados anteriores em uma tabela e utilizando o Excel, podemos visualizar o gráfico da função ***V(t) = 600.000 + 30.000.t***. Caso não queira plotar o gráfico da função no Excel, você pode utilizar papel quadriculado também, ok?

t (anos)	V (R$)
0	600.000
1	630.000
2	660.000
3	690.000
4	720.000
...	...

Tabela 1 – Tabela para construção do Gráfico de V(t) = 600.000 + 30.000.t
Fonte: FIAP (2021)

Figura 2 – Representação gráfica preliminar de V(t) = 600.000 + 30.000.t
Fonte: FIAP (2021)

No eixo horizontal, temos o tempo decorrido em anos; e no eixo vertical, o valor do imóvel em reais. Observe que os pontos estão naturalmente alinhados. Perceba também que podemos considerar tempos "decimais" (intermediários) entre 1 e 2, por exemplo, como "1,5" ano ou "1,2" ano. Isso permite que tracemos uma linha reta para representar o gráfico.

Portanto, o exemplo que estamos discutindo possui o modelo matemático ***V(t) = 600.000 + 30.000.t*** como referência.

(Reforçando: esta é uma Função do 1º Grau, pois tem a forma geral y = a.x + b. Neste caso: y = V; x = t; a = 30.000; b = 600.000.)

A representação gráfica da função V(t) = 600.000 + 30.000.t é:

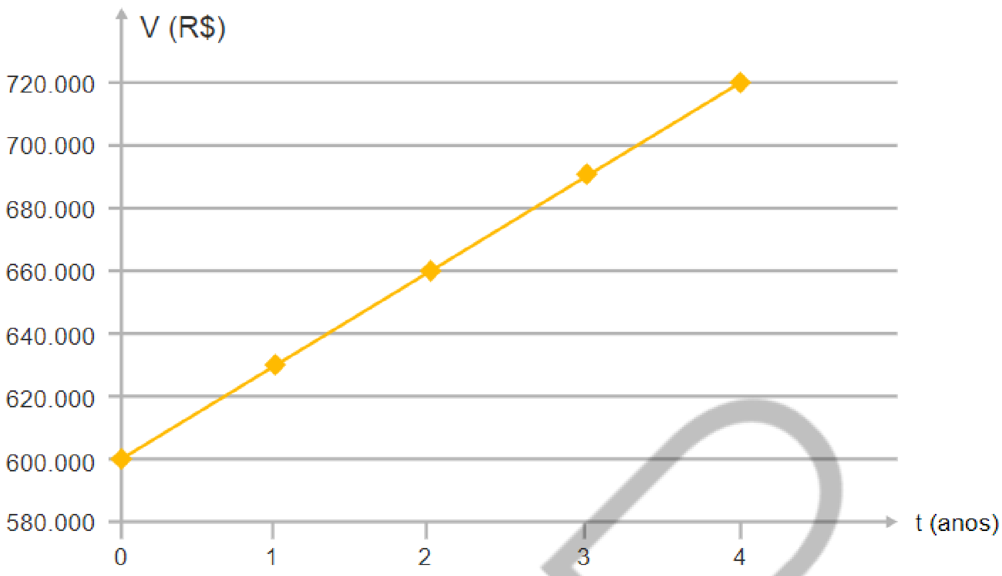

Figura 3 – Representação gráfica da função V(t) = 600.000 + 30.000.t
Fonte: FIAP (2021)

Dizemos, neste caso, que temos uma função crescente, pois à medida que o tempo "passa" (aumenta), o valor do imóvel "aumenta" (cresce).

As Funções do 1º Grau y = a.x + b, com a > 0, são **funções crescentes**.

No caso, a função V(t) = 30.000.t + 600.000 possui a = 30.000: como 30.000 > 0, podemos afirmar, antes mesmo de visualizar o gráfico, que se trata de uma Função do 1º Grau crescente.

1.4.2 Depreciação Linear de um equipamento industrial

Sobre o cálculo de depreciação: como você planeja, na sua empresa, a compra de um equipamento novo? Um computador, um smartphone, uma máquina qualquer?

– Espera quebrar, danificar ou queimar?

– Só troca ou compra outro quando não tem mais condições de uso?

Se for assim, pode estar perdendo dinheiro, pois esses itens vão se deteriorando, perdendo valor, pelo uso e pelo tempo. E podem:

- Aumentar custos de manutenção;
- Reduzir produtividade;
- Perder a capacidade de operar com eficiência e ficar inadequado.

Principalmente na indústria, onde máquinas têm desgastes maiores, se esta parte não for organizada, perde-se dinheiro, com alto custo de manutenção e principalmente com paradas na produção.

Veja mais em: <https://muitomaisdigital.com.br/taxa-de-depreciacao-de-maquinas-e-equipamentos-voce-calcula-confira-dicas/>.

Um determinado maquinário industrial custa hoje cerca de R$ 300.000,00 e, devido ao constante avanço da tecnologia, uma seguradora estima uma depreciação (desvalorização) anual de aproximadamente R$ 25.000,00. Agora é sua vez, obtenha o modelo matemático que corresponde a essa situação e faça sua representação gráfica. Lembre-se da forma geral das funções do 1º Grau: f(x) = a.x + b.

Resolução

Após um ano, podemos estimar o valor do maquinário em:

300.000 - 25.000 = R$ 275.000,00.

Após dois anos:

300.000 - 25.000.(2) = R$ 250.000,00

Após três anos:

300.000 - 25.000.(3) = R$ 225.000,00

Após quatro anos:

300.000 - 25.000.(4) = R$ 200.000,00

Após t anos:

V = 300.000 - 25.000.t,

onde V é o valor em reais do maquinário e t é o número de anos decorridos.

Também podemos representar a situação por:

V(t) = 300.000 - 25.000.t

Representando os dados anteriores em uma tabela, obtemos:

t (anos)	V (R$)
0	300.000
1	275.00
2	250.000
3	225.000
4	200.000
...	...

Tabela 2 – Tabela para construção do Gráfico de V(t) = 300.000 – 25.000.t
Fonte: FIAP (2021)

Podemos utilizar o Excel para visualizar o gráfico:

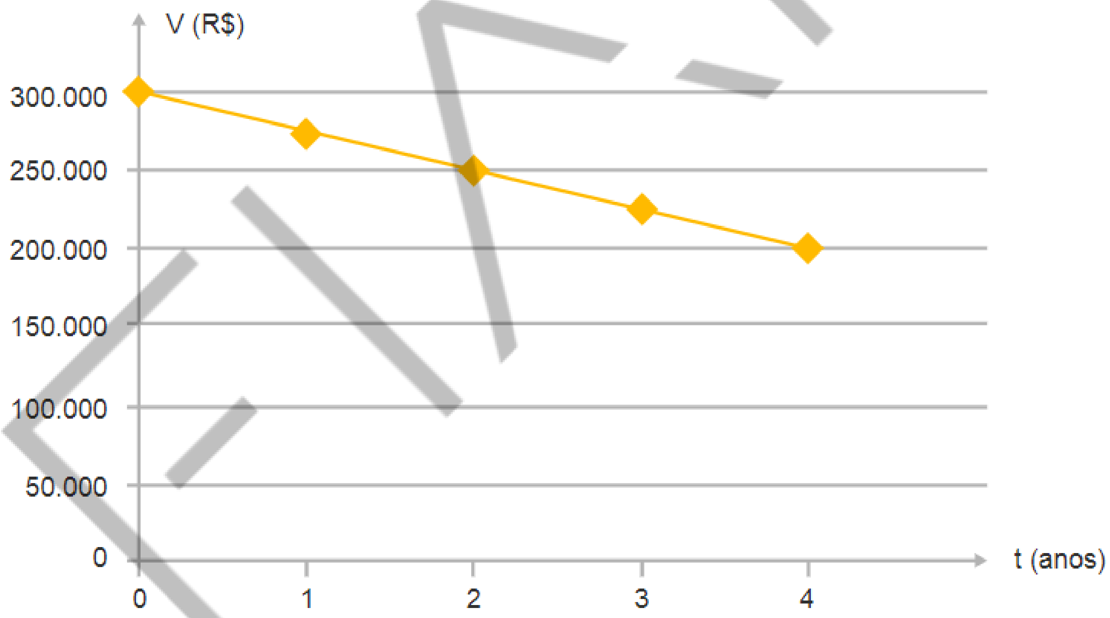

Figura 4 – Representação gráfica de V(t) = 300.000 - 25.000.t
Fonte: FIAP (2021)

Dizemos, neste caso, que temos uma **função decrescente**, pois à medida que o tempo "passa" (aumenta), o valor do maquinário "diminui" (decresce). Podemos afirmar, nesse contexto, que temos uma **depreciação linear**.

As Funções do 1º Grau y = a.x + b, com a < 0, são funções decrescentes.

No caso, a função:

V(t) = 300.000 - 25.000.t ou V(t) = - 25.000.t + 300.000

possui a = - 25.000.

Como - 25000 < 0, podemos afirmar, antes mesmo de visualizar o gráfico, que se trata de uma Função do 1º Grau decrescente.

2 UTILIZANDO DUAS FUNÇÕES DE 1º GRAU PARA A TOMADA DE DECISÃO

2.1 Determinação do Ponto de Equilíbrio

Vamos resolver o problema proposto na introdução deste capítulo? Lembra que um grupo de amigos pretende fazer uma viagem e, para isso, irá alugar um veículo de transporte (uma "van").

Após uma pesquisa, o grupo de amigos obteve valores de duas empresas com ótima avaliação: a empresa "VIVERTUR" cobra uma taxa fixa de R$ 700,00 e mais R$ 1,20 por km rodado; a empresa concorrente "ECOTUR" cobra uma taxa fixa de R$ 780,00 e mais R$ 0,80 por km rodado.

A partir dessas informações, como o grupo de amigos pode saber qual empresa é a melhor, em termos financeiros, para se fazer a locação? Ou até que ponto pode valer mais a pena uma empresa ou outra?

Resolução

Com base nos exemplos anteriores, podemos organizar a seguinte resolução:

1º) Para a locação de uma van da empresa "VIVETUR", o grupo de amigos teria uma despesa

$$D = 700 + 1{,}20.x \qquad \text{(ou } D(x) = 700 + 1{,}20.x\text{)}$$

Onde **D** representa a despesa total e **x** o número de quilômetros rodados.

2º) Para a locação de uma van da empresa "ECOTUR", o grupo de amigos teria uma despesa

$$D = 780 + 0{,}80.x \qquad \text{(ou } D(x) = 780 + 0{,}80.x\text{)}$$

Onde **D** representa a despesa total e **x** o número de quilômetros rodados.

3º) Organizamos uma tabela no Excel com alguns possíveis valores de quilometragem rodada para visualizarmos o gráfico:

x (Km)	D (R$, VIVERTUR)	D (R$, ECOTUR)
Nº de km rodados	*D = 700 + 1,20.x*	*D = 780 + 0,80.x*
0	700,00	780,00
50	760,00	820,00
100	820,00	860,00
150	880,00	900,00
200	940,00	940,00
250	1.000,00	980,00
300	1.060,00	1.020,00

Tabela 3 – Tabela para construção do Gráfico de Duas Funções
Fonte: FIAP (2021)

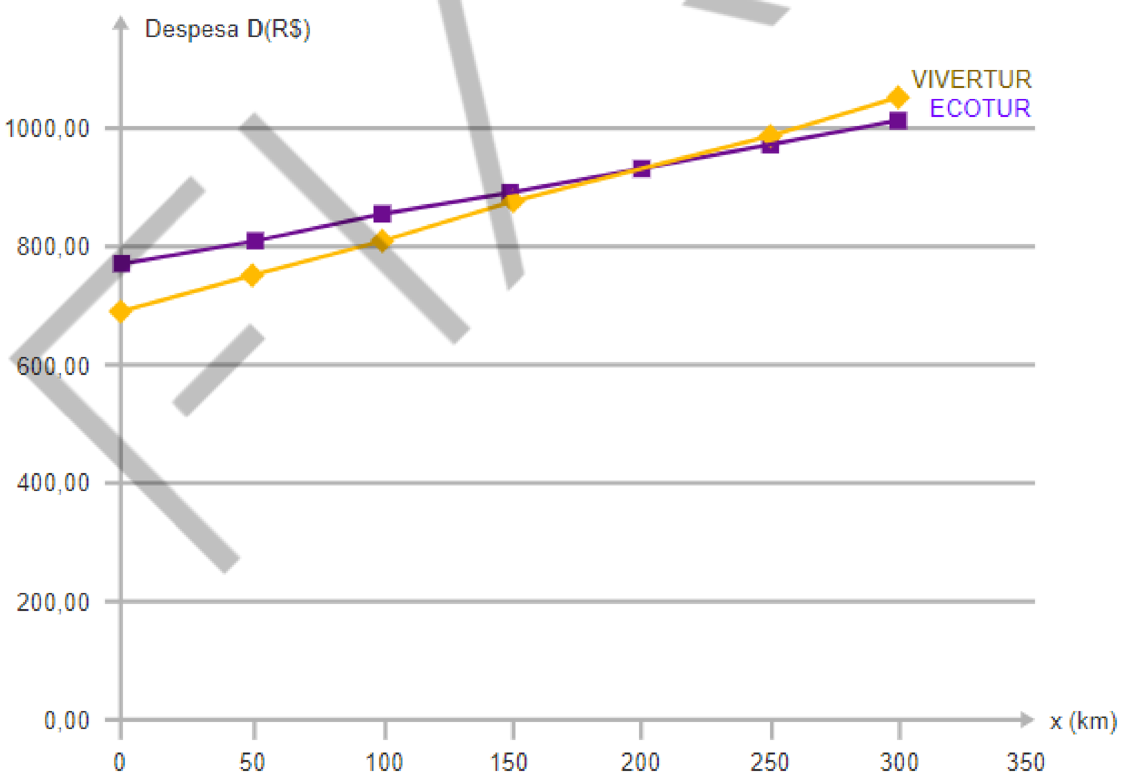

Figura 5 – Representação gráfica de duas funções: Ponto de Equilíbrio
Fonte: FIAP (2021)

4º) Observando a tabela e o gráfico podemos notar que 200 km é uma quilometragem na qual as despesas nas duas empresas são iguais a R$ 940,00. Chamamos o ponto do plano cartesiano (x, y) de (200; 940) de **Ponto de Equilíbrio**.

Obtivemos o ponto de equilíbrio por meio da observação do gráfico. Entretanto, podemos obter o ponto de equilíbrio igualando os dois modelos matemáticos em estudo.

Temos ***D = 700 + 1,20.x*** (VIVERTUR) e ***D = 780 + 0,80.x*** (ECOTUR)

Igualando-se as funções, vamos obter a quilometragem x que faz com que a despesa na empresa VIVERTUR seja igual à despesa na empresa ECOTUR.

$$700 + 1{,}20.x = 780 + 0{,}80.x$$

Agora, vamos resolver a equação:

$$1{,}20.x - 0{,}80.x = 780 - 700 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad 0{,}40.x = 80 \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad x = 80/0{,}40 \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad x = 200 \text{ km}$$

Substituindo ***x = 200 km*** na função ***D(x) = 700 + 1,20.x***, obtemos:

$$D(x) = 700 + 1{,}20.(200) \Rightarrow D = 700 + 240 \Rightarrow D = R\$\ 940{,}00$$

ou

Substituindo ***x = 200 km*** na função ***D(x) = 780 + 0,80.x***, obtemos:

$$D(x) = 780 + 0{,}80.(200) \Rightarrow D = 780 + 160 \Rightarrow D = R\$\ 940{,}00$$

Conclusão:

- Para uma viagem com quilometragem inferior a 200 km, a empresa VIVERTUR é a mais indicada, pois o gráfico apresenta (no eixo vertical y) menores valores.
- Para uma viagem com quilometragem superior a 200 km, a empresa ECOTUR oferece o melhor preço, pois o gráfico apresenta (no eixo vertical y) menores valores;

- Para uma viagem com quilometragem igual a 200 km, as duas empresas cobram o mesmo valor.

Como podemos observar nesse problema, estudamos a aplicação de duas Funções do 1º Grau (crescentes) na resolução de uma determinada situação, complementando a discussão a partir de um gráfico que pode ser feito com apoio do Excel.

2.2 Comparação entre Crescimento e Decrescimento (Linear) de Empresas

A seguir, vamos resolver uma situação na qual comparamos duas empresas. A empresa A possui atualmente uma carteira composta de 5.150 clientes. Entretanto, vem perdendo espaço de mercado na ordem de 150 clientes/mês. A empresa B, em questão, possui no momento uma carteira com 2.000 clientes e vem ampliando seu espaço no mercado, angariando cerca de 200 clientes/mês.

a) Obtenha as funções que determinam mensalmente o número de clientes de cada uma das empresas;

b) Após quantos meses a empresa B supera a carteira de clientes da empresa A? Represente graficamente, no plano cartesiano, a situação em análise.

Resolução:

1º) Vamos representar o número de clientes da empresa A como $\mathbf{N_A}$ e o número de meses decorridos com **t**. Assim, a função que estima o número de clientes da empresa A para os próximos **t** meses é dada por:

$$N_A = 5.150 - 150.t \qquad \text{(ou } N_A(t) = 5.150 - 150.t\text{)}$$

2º) Vamos representar o número de clientes da empresa B como $\mathbf{N_B}$ e o número de meses decorridos com **t**. Assim, a função que estima o número de clientes da empresa B para os próximos **t** meses é dada por:

$$N_B = 2.000 + 200.t \qquad \text{(ou } N_B(t) = 2.000 + 200.t\text{)}$$

3) Agora, vamos obter o instante t (o número de meses) no qual as duas empresas terão o mesmo número de clientes. Para isso, faremos:

$$N_A = N_B$$

$$5.150 - 150.t = 2.000 + 200.t$$

Resolvemos a equação:

$$5.150 - 2.000 = 200.t + 150.t \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad 3.150 = 350.t \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad t = 3.150/350 \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad t = 9 \text{ meses}$$

Substituindo ***t = 9 meses*** na função ***$N_A(t) = 5150 - 150.t$,*** obtemos:

$$N_A(9)= 5.150 - 150.(9) \Rightarrow N_A(9)= 5.150 - 1.350 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow N_A(9)= 3.800 \text{ clientes}$$

O número de clientes da empresa A após 9 meses é igual a 3.800

ou

Substituindo ***t = 9 meses*** na função ***$N_B(t) = 2.000 + 200.t$,*** obtemos:

$$N_B(9)= 2.000 + 200.(9) \Rightarrow N_B(9)= 2.000 + 1.800 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow N_B(9)= 3.800 \text{ clientes}$$

O número de clientes da empresa B após 9 meses é igual a 3.800.

Como foi visto em um exemplo anterior, dizemos que o ponto (x,y) = (9 meses; 3.800 clientes) é o ponto de equilíbrio, certo? Para visualizarmos o gráfico, vamos utilizar uma tabela como apoio:

t	N_A (t)	N_B (t)
Nº de meses decorridos	Nº de clientes da empresa (após t meses)	Nº de clientes da empresa B (após t meses)
	N_A (t) = 5.150 - 150.t	N_B (t) = 2.000 + 150.t
0	5.150	2.000
9	3.800	3.800

Tabela 4 – Tabela para construção do Gráfico de Duas Funções
Fonte: FIAP (2021)

Utilizando o Excel, podemos obter o gráfico:

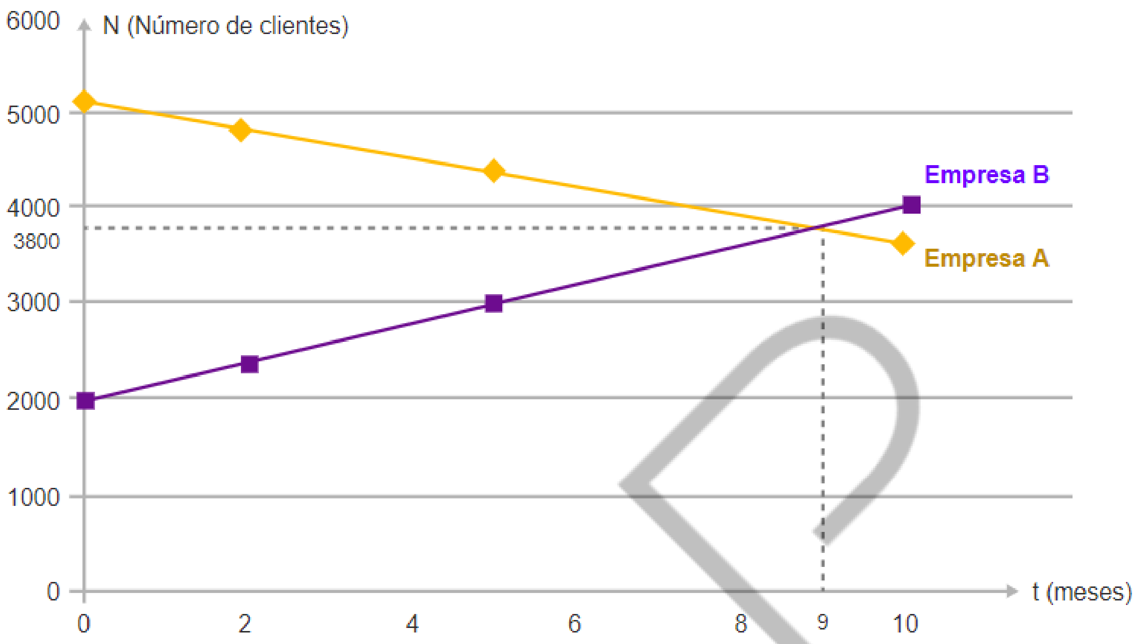

Figura 6 – Representação gráfica de duas funções: Ponto de Equilíbrio
Fonte: FIAP (2021)

Conclusão:

- A empresa A tem seu número de clientes para os próximos t meses estimado pelo modelo matemático $N_A(t) = 5.150 - 150.t$, a qual representa uma função do 1º Grau.
- A empresa B tem seu número de clientes para os próximos t meses estimado pelo modelo matemático $N_A(t) = 2.000 + 200.t$, a qual também representa uma função do 1º Grau.
- Para um período de tempo inferior a nove meses, notamos que a empresa A, apesar de estar em queda, possui mais clientes que a empresa B.
- No nono mês após o início das análises, estima-se que as duas empresas terão o mesmo número de clientes, como pudemos perceber nos cálculos feitos acima.
- Após nove meses, projeta-se que a empresa B superará a carteira de clientes da empresa A.

Veja que interessante: são análises como essas que permitem que empresas possam se reorganizar, se planejar e estabelecer metas de curto, médio e longo prazo:

ou seja, a modelagem matemática é uma ferramenta utilizada para a tomada de decisões de forma fundamentada.

2.3 Obtendo Funções de 1º Grau a partir de dois pares de valores

2.3.1 Desvalorização de um veículo

A **depreciação de veículos** é o valor anual que um carro perde valor conforme o tempo passa. Como é de se esperar, carro que sai da concessionária já não é mais zero quilômetro e, logicamente, não poderá ser revendido pelo mesmo preço fixado enquanto não estava emplacado.

Embora possa vir a parecer calculada sem um critério claro, existe, sim, uma forma estabelecida por lei para determinar quanto um veículo perde valor com o passar dos anos. Aliás, essa divisão é feita inclusive segmentada por categoria, através de uma IN (Instrução Normativa) da Receita Federal datada de 1998.

A seguir, vamos verificar como podemos obter Funções do 1º Grau a partir de dois pares de valores fornecidos pelo contexto que estamos investigando. Considere que:

O valor de um veículo com dois anos de uso é US$ 25,500.00 e, com seis anos de uso, é de US$ 20,500.00. Supondo que o preço caia com o tempo, seguindo uma linha reta, ou seja, tratando-se de uma depreciação linear, determine:

a) o modelo matemático que projeta o valor do veículo após t anos;

b) após quantos anos o valor do veículo será de US$ 13,000.00.

Resolução

a) o modelo matemático:

1º) De acordo com o problema, temos uma **depreciação linear**, ou seja, temos uma **função do primeiro grau decrescente**, pois o veículo perde valor de mercado com o passar do tempo, neste caso.

Como já visto, a **forma geral de uma Função do 1º Grau é y = a.x + b**. Podemos, opcionalmente, fazer uma pequena modificação nessa forma geral, adaptando-a ao contexto que estamos investigando. Por exemplo, podemos dizer que a forma geral da função será ***V = a.t + b***, onde **V** indica o valor do veículo (em dólares) após **t** (em anos).

Temos dois pares de valores fornecidos: (2; 25,500) e (6; 20,500).

(2; 25500): de acordo com o problema, com dois anos de uso, o veículo vale US$ 25,500.00. Temos V = 25,500 quando t = 2. Assim:

V = a.t + b ⇒ 25,500 = a.2 + b ⇒ 2.a + b = 25,500 (Equação I)

(6; 20,500): o enunciado do problema nos informa que, com seis anos de uso, o veículo vale US$ 20,500.00. Temos V = 20,500 quando t = 6. Assim:

V = a.t + b ⇒ 20,500 = a.6 + b ⇒ 6.a + b = 20,500 (Equação II)

2º) As equações I e II obtidas na etapa anterior formam um sistema de equações lineares que pode ser resolvido de diversas maneiras. Vamos ver uma dessas maneiras.

$$\begin{cases} 2.a + b = 25500 \\ 6.a + b = 20500 \end{cases}$$

Utilizando o "**Método da Substituição**", devemos escolher uma das equações e isolar uma das incógnitas e, então, substituir na outra equação. Observe:

Vamos escolher a 1ª equação (poderíamos ter escolhido a segunda equação, tanto faz) e isolar a incógnita **b** (poderíamos isolar a incógnita "**a**"):

2.a + b = 25,500 ⇒ b = 25,500 – 2.a

Agora, vamos substituir "b = 25,500 – 2.a" na outra equação:

6.a + **b** = 20,500 ⇒

⇒ 6.a + **25,500** – **2.a** = 20,500

Pronto! Basta resolver a equação para obter o valor de **a**:

6.a + **25,500 - 2.a** = 20,500 ⇒

⇒ 4.a = 20,500 - 25,500 ⇒

⇒ 4.a = – 5,000 ⇒

⇒ a = – 5,000/4 ⇒

$\Rightarrow$ a = – 1,250

Neste momento, escolhemos uma das equações do sistema e substituímos o valor de **a** para obtermos o valor de **b**.

$$\begin{cases} 2.a + b = 25500 \\ 6.a + b = 20500 \end{cases}$$

Por exemplo, vamos utilizar a equação 2.a + b = 25,500.

Como temos a = – 1,250, vem:

2.a + b = 25,500 $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ 2.(-1,250) + b = 25,500 $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ - 2,500 + b = 25,500 $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ b = 25,500 + 2,500 $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ b = 28,000

Note que, após essas etapas, temos os seguintes dados:

- estabelecemos que a função tem a forma geral ***V = a.t + b;***
- temos ***a = - 1,250;***
- temos ***b = 28,000.***

Substituindo a = - 1,250 e b = 28,000 em V = a.t + b, obtemos:

V = - 1,250.t + 28,000 ou, se preferirmos,

V(t) = 28000 - 1250.t (Modelo de Depreciação Linear do problema)

Ao observarmos a função ***V(t) = 28,000 - 1,250.t***, dizemos que o veículo tem seu valor inicial de mercado em US$ 28,000.00 (pois quando t = 0, o valor é 28,000) e desvaloriza US$ 1,250.00 por ano.

Agora, vamos resolver o item b) do problema proposto, o qual pergunta: Após quantos anos o valor do veículo será de cerca de US$ 13,000.00?

Vamos utilizar a função obtida no item a: V(t) = 28,000 –1,250.t.

Substituindo V por 13,000, vamos obter o valor de t (nº de anos) correspondente:

V = 28,000 - 1,250.t ⇒

⇒ 13,000 = 28,000 - 1,250.t

⇒ 1,250.t = 28,000 – 13,000

⇒ 1,250.t = 15,000

⇒ t = 15,000 / 1,250 ⇒ t = 12

Portanto, estima-se que, após 12 anos, o valor do veículo será de US$ 13,000.00.

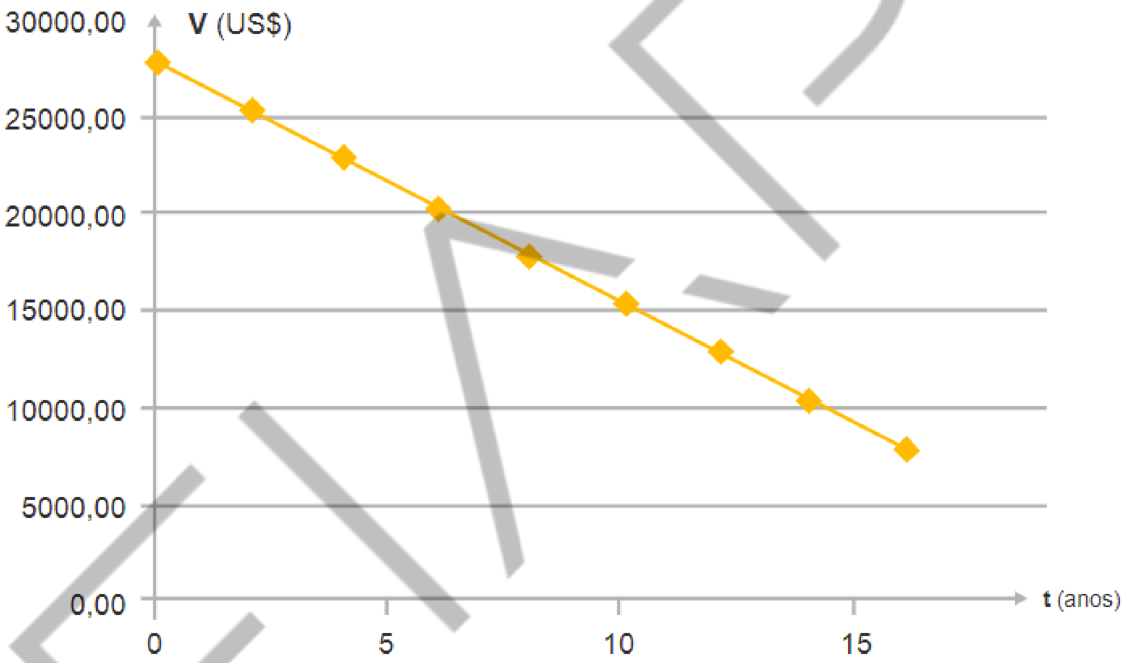

Figura 7 – Representação gráfica da Depreciação Linear de um veículo
Fonte: FIAP (2021)

2.4 Custo, Receita, Lucro e o *Break Even Point* em uma *start up*

GESTÃO FINANCEIRA

Ponto de equilíbrio

O ponto de equilíbrio é um indicador de segurança do negócio, pois mostra quanto é necessário vender para que as receitas se igualem às despesas e aos custos. Ele indica em que momento, a partir das projeções de vendas do empreendedor, a empresa estará igualando

> suas receitas e seus custos. Com isso, é eliminada a possibilidade de prejuízo em sua operação. (SEBRAE, 2019)

Veja mais em: <http://www.sebrae.com.br/sites/PortalSebrae/artigos/ponto-de-equilibrio,67ca5415e6433410VgnVCM1000003b74010aRCRD>.

Vamos estudar um caso envolvendo custo, receita e lucro de uma determinada start up, com o apoio de Funções do 1º Grau, e compreender o que é o chamado ***Break Even Point***.

Uma start up fabrica componentes eletrônicos para computadores e seu custo fixo mensal é da ordem de R$ 162.000,00. O custo por unidade produzida é de R$ 54,00. Cada unidade produzida é vendida pela empresa ao preço de R$ 67,50.

a) Obtenha as funções Custo, Receita e Lucro.

b) Obtenha o ponto de equilíbrio (Break Even Point) Receita x Despesas e faça o esboço do gráfico das funções Custo, Receita e Lucro em um mesmo plano cartesiano.

Resolução

1º) Função Custo

Se adotarmos que a start up produz **n** unidades por mês, possui um custo fixo mensal de R$ 162.000,00 e tem um custo de R$ 54,00 para a fabricação de cada uma das **n** unidades produzidas, então podemos dizer que o custo total mensal **C** para a fabricação de **n** unidades em um determinado mês é dado por:

$C = 162.000 + 54.n$ ou $C(n) = 162.000 + 54.n$

Dessa forma, dizemos que a despesa mensal (na linguagem contábil, as “saídas”, os “gastos”) da start up pode ser projetada pela função C(n) = 162.000 + 54.n.

Por exemplo, para um determinado mês, no qual foram produzidas 2.000 unidades, a start up teria uma despesa mensal total de:

C = 162.000 + 54.(2.000) ⇒ C = R$ 270.000,00 (observe que é apenas um exemplo).

2º) Função Receita

De forma geral, dizemos que a receita representa a arrecadação (na linguagem contábil, as “entradas”) que a start up obtém com a venda de seus produtos e/ou serviços. Podemos dizer que a receita é o “faturamento bruto” da start up, antes de serem descontadas as despesas, portanto.

No caso, a start up vende cada uma das **n** unidades produzidas por R$ 67,50. Assim, com a venda de **n** unidades em um determinado mês, a start up arrecada “(**67,50).n**” reais.

Portanto, a função receita é dada por:

R = (67,50).n ou ***R(n) = (67,50).n***

Por exemplo, caso a empresa vendesse 3.000 unidades em um determinado mês, a start up arrecadaria:

R = (67,50).(3.000) ⇒ R = R$ 202.500,00 (faturamento bruto da start up com a venda de 3.000 unidades)

3º) A Função Lucro

De maneira geral, dizemos que o **lucro mensal** de uma start up é a **diferença (ou subtração) entre a receita mensal** (faturamento bruto, arrecadação, “entradas”) e o **custo mensal** (despesas, gastos, “saídas”, “retiradas”).

Podemos representar assim: ***L = R – C***, onde L é o lucro mensal, R é a receita mensal e C é o custo total mensal.

Portanto, podemos utilizar os modelos matemáticos que projetam a despesa mensal e a receita mensal de uma start up, ou uma empresa, para obtermos um modelo que projeta o lucro.

Temos: C(n) = 162.000 + 54.n → função custo

e R(n) = 67,50.n → função receita

Como L = R – C, obtemos:

L = 67,50.n – (162.000 + 54.n) ⇒

⇒ L = 67,50.n – 162.000 **-** 54.n) ⇒

⇒ ***L = 13,50.n – 162.000*** ou ***L (n) = 13,50.n – 162.000***

Por exemplo, em um mês no qual a start up fechou com 4.000 unidades vendidas, qual foi seu "lucro"?

Por meio da função lucro obtida, temos:

L = 13,50.n - 162.000 ⇒

⇒ L = 13,50.(4.000) - 162.000 ⇒

⇒ L = **-** R$ 108.000,00

Ou seja, com esse nível de venda mensal, a start up fecharia o mês no "vermelho", com um prejuízo de R$ 108.000,00.

Temos aí uma ótima questão para respondermos: afinal de contas, qual a quantidade mínima de unidades que precisa ser vendida no mês para que a start up possa ter lucro?

Igualando a função receita com a função custo (**R = C**)

Ao resolvermos a equação R = C, iremos determinar o número de unidades produzidas que fazem com que o valor arrecadado ("entradas") coincida com as despesas ("saídas"), momento no qual o lucro da start up é nulo (zero).

Temos: ***R(n) = 67,50.n*** e ***C(n) = 162.000 + 54.n***

Fazendo-se ***R = C***, obtemos:

67,50.n = 162.000 + 54.n ⇒

⇒ 67,50.n – 54.n = 162.000 ⇒

⇒ 13,50.n = 162.000 ⇒

⇒ n = 162.000/ 13,50 ⇒

⇒ **n = 12.000** unidades

Observe que, se substituirmos n = 12.000 na função receita, obtemos:

R = 67,50.n ⇒ R = 67,50.(12.000) ⇒ R = R$ 810.000,00 de faturamento bruto

Se substituirmos n = 12.000 na função custo, obtemos:

C = 162.000 + 54.n ⇒ C = 162.000 + 54.(12.000) ⇒ C = 810.000,00

Dizemos, então, que quando a start up produz 12.000 unidades, sua receita mensal se equipara a seus custos mensais, o que implica lucro zero: esse momento é chamado de **Ponto de Equilíbrio entre Receita e Despesas** ou ***Break Even Point***, ou seja, um ponto estratégico para avaliações e tomadas de decisões.

Para visualizarmos os gráficos dessas funções (custo, receita e lucro), podemos organizar uma tabela e, em seguida, utilizar o Excel como apoio.

n	C(n)	R(n)	L(n)
Nº de unidades vendidas por mês	Custo mensal total (R$)	Receita Mensal (R$)	Lucro Mensal (R$)
	C(n) = 162.000+54.n	R(n) = 67,50.n	L(n) = 13,50.n - 162.000
0	162.000,00	0,00	-162.000,00
12.000	810.000,00	810.000,00	0,00

Tabela 5 – Tabela para construção do Gráfico de Três Funções
Fonte: FIAP (2021)

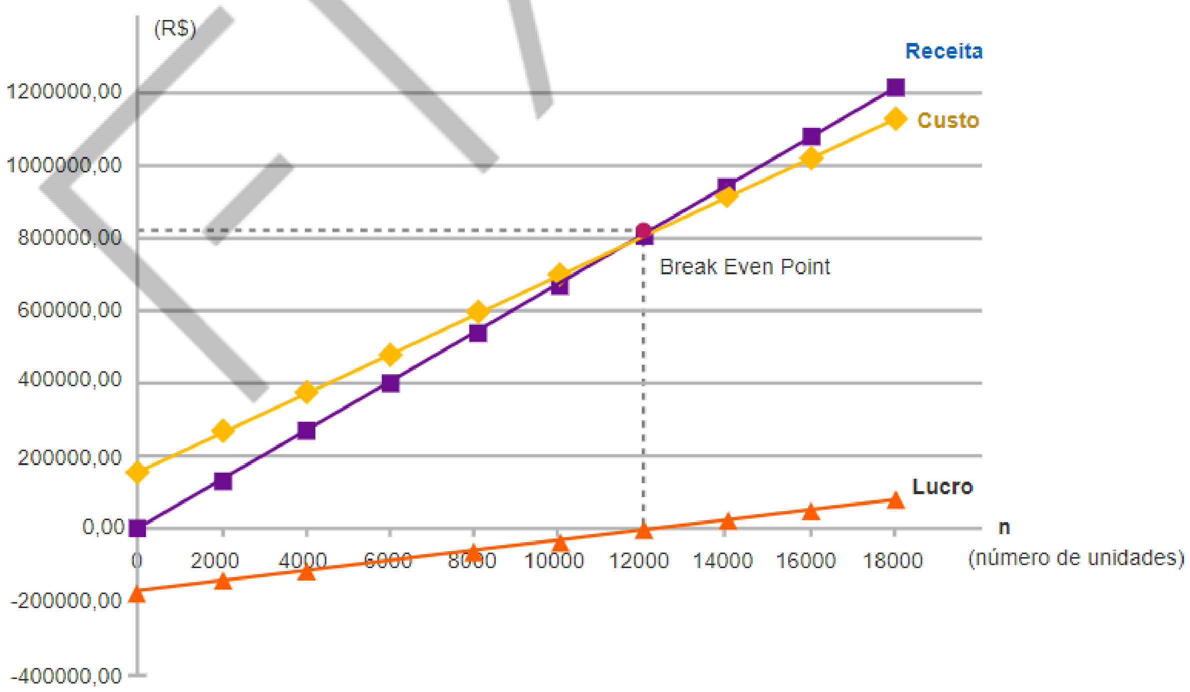

Figura 8 – Custo, Receita e Lucro: *Break Even Point*
Fonte: FIAP (2021)

CONCLUSÃO

- Função Custo: ***$C(n) = 162.000 + 54.n$***

Custo mensal total = custo fixo mensal + (custo unitário)**.**(número de unidades produzidas)

- *Função Receita:* ***$R(n) = 67,50.n$***

Receita mensal = (preço de venda de cada unidade)**.**(número de unidades vendidas)

- *Função Lucro:* ***$L(n) = 13,50.n - 162.000$***

Lucro mensal = Receita mensal - Custo mensal total

- O ponto de equilíbrio (*Break Even Point*) ocorre no nível de produção de 12.000 unidades: essa é a quantidade mínima de unidades vendidas para que a start up não tenha prejuízo. Neste momento, a start up arrecada tanto quanto gasta.
- A análise do gráfico nos permite concluir que, para um nível de produção abaixo de 12.000 unidades mensais, a start up tem custos superiores a suas receitas, gerando “lucro negativo”, ou seja, prejuízo.

Para um nível de produção acima de 12.000 unidades mensais, a start up apresenta receitas superiores aos custos, o que implica lucro.

REFERÊNCIAS

ÁVILA, C. S. **Taxa de depreciação de máquinas e equipamentos. Você calcula? Confira dicas!**. [s.d.]. Disponível em: <https://muitomaisdigital.com.br/taxa-de-depreciacao-de-maquinas-e-equipamentos-voce-calcula-confira-dicas/>. Acesso em: 23 mar. 2021.

BENCK, J. **Como calcular a depreciação de veículos**. 2017. Disponível em: <https://hintigo.com.br/depreciacao-de-veiculos/>. Acesso em: 23 mar. 2021.

BONETTO, G.; MUROLO, A. **Matemática aplicada à Administração, Economia e Contabilidade.** São Paulo: Pioneira Thomson Learning, 2004.

CASAL INGLÊS está viajando o mundo há oito anos em uma van. **Catraca Livre.** 2016. Disponível em: <https://catracalivre.com.br/geral/mundo/indicacao/casal-ingles-esta-viajando-o-mundo-ha-8-anos-em-uma-van/>. Acesso em: 23 mar. 2021.

DEMANA, F. D. **Pré-Cálculo**. São Paulo: Pearson, 2013.

IMÓVELWEB. **Como saber a valorização de imóveis em cada região?** [s.d]. Disponível em: <https://www.imovelweb.com.br/noticias/socorretor/mercado/como-saber-a-valorizacao-de-imoveis-em-cada-regiao/> Acesso em: 06 abr. 2021.

FERNANDES, D. B. **Cálculo Diferencial**. São Paulo: Pearson, 2014.

GONÇALVES, M. B.; FLEMMING, D. M. **Cálculo A.** São Paulo: Pearson, 2013.

HOFFMANN, L. D.; BRADLEY, G. L. **Cálculo:** um curso moderno e suas aplicações. Rio de Janeiro: LTC, 2008.

IEZZI, G. **Matemática:** ciências e aplicações. São Paulo: Atual, 2010.

ROSSO, A. C.; FURTADO, P. **Matemática:** uma ciência para a vida. São Paulo: Harbra, 2011.

SEBRAE. **O que são custos fixos e custos variáveis**. 2019. Disponível em: <https://www.sebrae.com.br/sites/PortalSebrae/ufs/ap/artigos/saiba-o-que-sao-custos-fixos-e-custos-variaveis,7cf697daf5c55610VgnVCM1000004c00210aRCRD#:~:text=Entre%20estas%20despesas%20est%C3%A3o%20o,NESTE%20TEXTO%3A&text=S%C3%A3o%20aqueles%20que%20variam%20diretamente,ou%20vendida%2C%20na%20mesma%20propor%C3%A7%C3%A3o>. Acesso em: 23 mar. 2021.

SEBRAE. **Ponto de equilíbrio: ferramenta para manter seu negócio seguro**. 2019. Disponível em: < https://www.sebrae.com.br/sites/PortalSebrae/artigos/ponto-de-equilibrio,67ca5415e6433410VgnVCM1000003b74010aRCRD>. Acesso em: 23 mar. 2021.

THOMAS, G. B. **Cálculo – Volume I**. São Paulo: Pearson, 2012.