



**MATHEMATICAL.
OLYMPIAD.CH**
MATHEMATIK-OLYMPIADE
OLYMPIADES DE MATHÉMATIQUES
OLIMPIADI DELLA MATEMATICA

Prüfung 2020

1. Runde Mathematik-Olympiade

Informationen

- Fragen: 35
- Zeit: 75 Minuten
- Hilfsmittel: Es sind alle Hilfsmittel erlaubt (Notizpapier, Taschenrechner, Internet, ...), aber die Prüfung muss alleine gelöst werden.

Fragetypen

- Multiple-Choice (MC): Jede Frage hat genau eine richtige Antwort. Für eine falsche Antwort werden Punkte abgezogen, um Raten nicht zu belohnen.
- Ganzzahl (INT): Jede Frage hat als Antwort eine nicht-negative ganze Zahl von 0 bis 99999. Für falsche Antworten werden keine Punkte abgezogen.
- Multiple True/False (T/F): Jede Frage hat vier Aussagen, die jeweils Wahr oder Falsch sein können. Für falsche Antworten werden Punkte abgezogen.

Punkte

Es gibt drei verschiedene Schwierigkeitsstufen. Schwierige Aufgaben sind mehr Punkte wert. Es kann sich daher lohnen, Aufgaben zu überspringen, wenn man nicht weiter kommt.

Level 1

MC:	+8 für die richtige Antwort,	-2 für eine falsche Antwort,	0 für unbeantwortet
T/F:	+2 für jede richtige Antwort,	-2 für jede falsche Antwort,	0 für unbeantwortet
NUM:	+8 für die richtige Antwort,	0 für falsche Antwort oder unbeantwortet	

Frage 1 (MC):

Die Summe von fünf aufeinanderfolgenden ganzen Zahlen ist gleich der Summe der drei nächstgrösseren Zahlen. Welche ist die grösste der acht Zahlen?

- A: 4
- B: 8
- C: 9
- D: 11
- E: 12

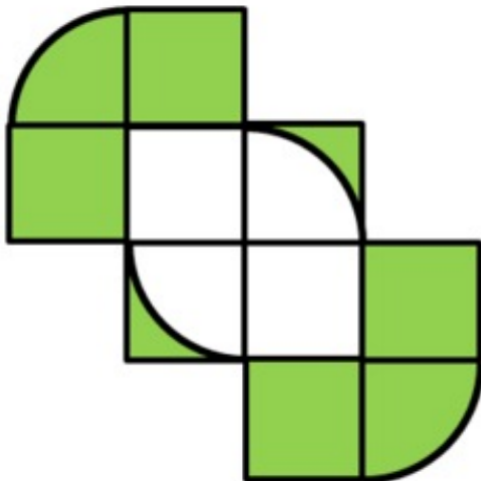
Frage 2 (MC):

Auf einem Würfel beschriften wir alle Seiten und Ecken mit 1 und alle Kanten mit -1 . Was ist die Summe aller Beschriftungen?

- A: 0
- B: 2
- C: 4
- D: 6
- E: 8

Frage 3 (MC):

Mit ihrem Zirkel hat Rada die nachfolgende Figur auf Häuschenpapier gezeichnet. Wenn die Seitenlänge eines kleinen Quadrats 2 beträgt, was ist dann der Flächeninhalt des grünen Gebiets?



- A: 12
- B: 16
- C: $16 + 2\pi$
- D: 24
- E: $24 + 2\pi$

Frage 4 (MC):

Tim hat die letzten fünf Buchstaben seines Passworts vergessen. Er kann sich nur daran erinnern, dass jeder Buchstaben entweder ein I , M oder O ist. Wie viele Möglichkeiten muss er in Betracht ziehen?

- A: 15
- B: 20
- C: 120
- D: 125
- E: 243

Frage 5 (INT):

Was ist die kleinste ganze Zahl grösser als 1, die sowohl eine Quadratzahl als auch eine dritte Potenz ist?

Frage 6 (INT):

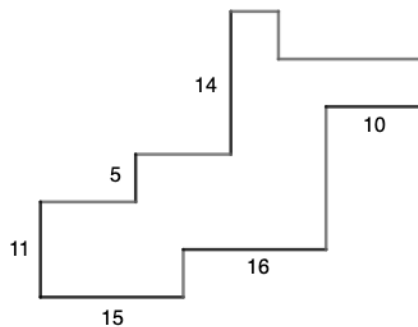
Was ist die kleinste positive ungerade ganze Zahl, die weder eine Quadratzahl noch eine Primzahl ist?

Frage 7 (INT):

Wie viele ganze Zahlen zwischen 10 und 1000 bleiben gleich, wenn man die Reihenfolge ihrer Ziffern umkehrt?

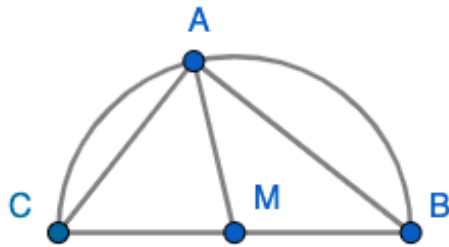
Frage 8 (INT):

Was ist der Umfang der nachfolgenden Figur?



Frage 9 (MTF):

Welche Aussagen über die nachfolgende Konfiguration müssen stimmen, falls M der Mittelpunkt des Halbkreises ist?



- A: $\angle CAM = \angle ABC$
- B: $\angle AMC = 2\angle ABC$
- C: $\angle ACB + \angle ABC = 90^\circ$
- D: $\text{Fläche}(\triangle ACM) = \text{Fläche}(\triangle AMB)$

Frage 10 (MTF):

Die Zahl 323 ist...

- A: eine Primzahl.
- B: eine Quadratzahl.
- C: die Differenz zweier Primzahlen.
- D: die Differenz zweier Quadratzahlen.

Level 2

MC:	+12 für die richtige Antwort,	-3 für eine falsche Antwort,	0 für unbeantwortet
T/F:	+3 für jede richtige Antwort,	-3 für jede falsche Antwort,	0 für unbeantwortet
NUM:	+12 für die richtige Antwort,	0 für falsche Antwort oder unbeantwortet	

Frage 11 (MC):

Was ist der Rest, wenn man $2^2 \cdot 3^3 \cdot 5^5 \cdot 7^7$ durch 8 teilt?

- A: 2
- B: 3
- C: 4
- D: 5
- E: 7

Frage 12 (MC):

Sei $ABCD$ ein Quadrat in der Ebene. Wie viele Quadrate gibt es, die genau zwei Ecken mit $ABCD$ gemeinsam haben?

- A: 4
- B: 6
- C: 8
- D: 12
- E: 16

Frage 13 (MC):

Julia und Florian denken sich beide im Kopf eine Zahl von 1 bis und mit 10 aus.

Julia: *“Egal welche Zahl du auswählst, das Produkt unserer Zahlen wird nicht die Ziffer 6 beinhalten.”*

Florian: *“Ok, dann muss die Summe unserer Zahlen 14 sein.”*

Was ist Florians Zahl?

A: 4

B: 5

C: 6

D: 8

E: 9

Frage 14 (MC):

Welches ist die kleinste ganze Zahl $n > 2$, sodass $(2^2 - 1) \cdot (3^2 - 1) \cdot \dots \cdot (n^2 - 1)$ eine Quadratzahl ist?

A: 7

B: 8

C: 9

D: 11

E: 12

Frage 15 (MC):

Tanish denkt an eine ganze Zahl $1 \leq n \leq 100$ und Marco will die Zahl erraten. Nach jedem Versuch verrät Tanish Marco ob seine Zahl zu klein, zu gross oder richtig war. Wie oft muss Marco raten bis er Tanishs Zahl herausfindet, angenommen er nutzt die beste Strategie?

A: 4

B: 5

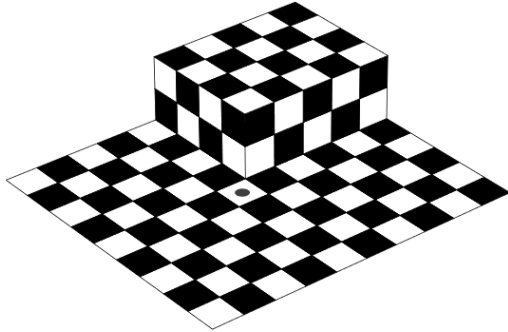
C: 6

D: 7

E: 8

Frage 16 (MC):

Eine Ameise ist zu Beginn auf dem mit dem schwarzen Punkt markierten Feld. Sie bewegt sich viermal über eine Seite auf ein benachbartes Feld und hält an. Wie viele der möglichen Endfelder sind schwarz?



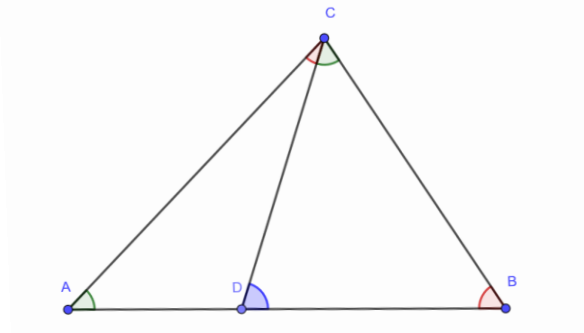
- A: 6
- B: 8
- C: 10
- D: 12
- E: 14

Frage 17 (INT):

Wenn die Diagonale des Quadrats A 16 mal länger ist als der Umfang des Quadrats B , wie viel mal grösser ist die Fläche von A als die Fläche von B ?

Frage 18 (INT):

Angenommen die Winkel $\angle DAC$ und $\angle DCB$ (beide grün eingezeichnet) sind 45 Grad und der Winkel $\angle CBD$ ist doppelt so gross wie der Winkel $\angle ACD$ (beide rot eingezeichnet). Wie gross ist dann der blaue Winkel $\angle BDC$ in Grad?



Frage 19 (INT):

Viera hat weniger als 200 Kekse gebacken und möchte diese nun auf Papiertüten verteilen, sodass in jeder Tüte die gleiche Anzahl an Keksen steckt. Leider scheint dies nicht zu funktionieren: Wenn sie die Kekse auf 5 Tüten verteilt, bleiben 4 übrig. Bei 6 Tüten bleiben auch 4 übrig. Bei 7 Tüten bleiben dagegen 3 Kekse übrig. Wie viele Kekse hat Viera insgesamt gebacken?

Frage 20 (INT):

Falls ein rechtwinkliges Dreieck eine Seite mit Länge 15 und eine Seite mit Länge 12 hat, was ist dann die kleinstmögliche Fläche des Dreiecks?

Frage 21 (INT):

Welche ganze Zahl hat die Eigenschaft, dass, wenn man sie quadriert und dann 49 abzieht, dieselbe Zahl herauskommt, wie wenn man zuerst 49 abzieht und dann quadriert?

Frage 22 (INT):

Nicole's Lieblings Glacéstand verkauft acht verschiedene Sorten. Sie möchte nun drei Kugeln kaufen, sodass nicht alle dieselbe Sorte sind. Wie viele Möglichkeiten hat sie, dies zu tun?

Bemerkung: Die Reihenfolge der Kugeln ist egal.

Frage 23 (MTF):

Wenn die positiven ganzen Zahlen a, b und c die Gleichung $a^2 + b^2 = c^2$ erfüllen, dann folgt...

- A: $a + b > c$.
- B: c ist ungerade.
- C: a und b sind nicht gleich.
- D: c ist nicht durch 7 teilbar.

Frage 24 (MTF):

Auf der Wandtafel stehen 51 verschiedene, positive ganze Zahlen, wobei keine grösser ist als 100. Welche Aussagen über die Tafel müssen zutreffen?

- A: Es gibt zwei aufeinanderfolgende Zahlen.
- B: Es gibt zwei Zahlen mit Differenz 50.
- C: Es gibt zwei Zahlen mit Summe 100.
- D: Es gibt 6 Zahlen mit der gleichen letzten Ziffer.

Frage 25 (MTF):

Der Ausdruck $n^2 + n + 41$, für jede positive ganze Zahl n , ist immer...

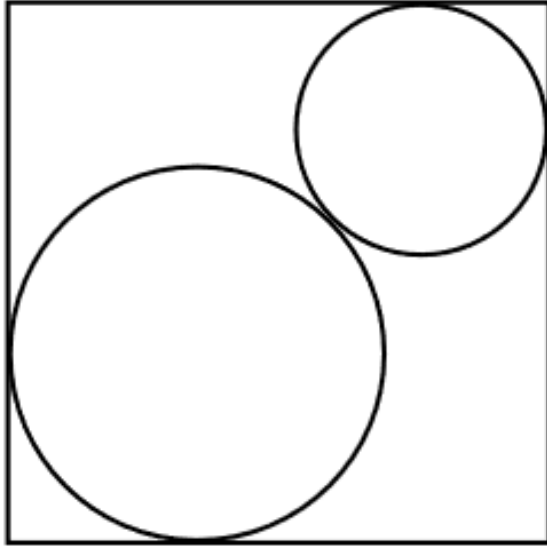
- A: eine Primzahl.
- B: grösser als $(n + 1)^2$.
- C: ungerade.
- D: keine Quadratzahl.

Level 3

MC:	+16 für die richtige Antwort,	-4 für eine falsche Antwort,	0 für unbeantwortet
T/F:	+4 für jede richtige Antwort,	-4 für jede falsche Antwort,	0 für unbeantwortet
NUM:	+16 für die richtige Antwort,	0 für falsche Antwort oder unbeantwortet	

Frage 26 (MC):

Wie im nachfolgenden Bild sind zwei Kreise in einem Quadrat mit Seitenlänge 1 eingeschrieben. Was ist die Summe der beiden Radien?



- A: $\frac{1}{2}$
B: $\frac{1}{\sqrt{2}}$
C: $\sqrt{2} - 1$
D: $2 - \sqrt{2}$
E: Verschiedene Kreise ergeben verschiedene Antworten.

Frage 27 (MC):

100 Münzen liegen in einer Reihe, alle mit Kopf nach oben. Louis dreht zuerst alle Münzen um, dann jede zweite, dann jede dritte, und so weiter bis er jede 100te Münze umgedreht hat. Angenommen er dreht jedes Mal die erste Münze um, wie viele Münzen liegen dann am Schluss mit Kopf nach oben?

- A: 50
B: 89
C: 90
D: 91
E: 98

Frage 28 (MC):

Auf einer Tafel stehen alle Zahlen von 1 bis 10. Viviane nimmt nun wiederholt zwei beliebige Zahlen und ersetzt sie durch ihre Differenz (immer eine nichtnegative Zahl), bis nur noch eine Zahl übrig bleibt. Welche der folgenden Zahlen könnte diese Zahl sein?

- A: 0
- B: 1
- C: 4
- D: 6
- E: 11

Frage 29 (MC):

Für eine gegebene Zahl $n > 1$ schreiben wir all ihre positiven Teiler in aufsteigender Reihenfolge auf: $1 < d_1 < \dots < d_k < n$. Wie viele verschiedene n gibt es, die $d_k = 11 \cdot d_1$ erfüllen?

- A: 0
- B: 2
- C: 3
- D: 4
- E: 5

Frage 30 (INT):

Quirin hat vier Stäbe der Länge 12. Er bricht einen der Stäbe entzwei und bringt die resultierenden fünf Stücke in die Form eines rechtwinkligen Dreiecks. Wie gross ist die Fläche des Dreiecks?

Frage 31 (INT):

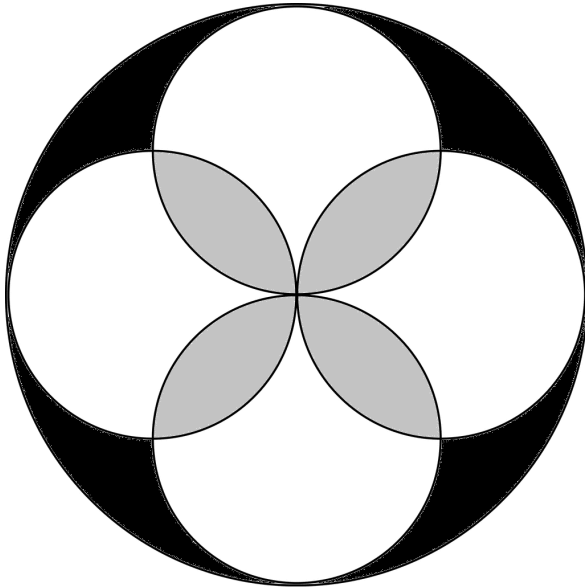
Sei n die kleinste positive ganze Zahl, sodass $10n$ eine Quadratzahl und $6n$ eine dritte Potenz ist. Was ist n ?

Frage 32 (INT):

Auf wie viele verschiedene Arten kann ein 2×11 Rechteck mit 11 nicht unterscheidbaren Dominos der Grösse 1×2 bedeckt werden?

Frage 33 (INT):

In der nachfolgenden Figur hat jedes graue Gebiet die Fläche 72. Was ist die Gesamtfläche der schwarzen Gebiete?



Frage 34 (MTF):

Es gibt eine dreistellige Zahl \overline{abc} , sodass...

- A: \overline{abc} durch c und die zweistellige Zahl \overline{ab} teilbar ist.
- B: \overline{abc} durch b und die zweistellige Zahl \overline{ac} teilbar ist.
- C: $a > c > 0$ und $\overline{abc} - \overline{cba}$ eine Primzahl ist.
- D: $\overline{abc} + \overline{bca} + \overline{cab} = 2021$.

Frage 35 (MTF):

Die fünf Freunde Anaëlle, Bibin, Cyril, David und Ema spielen ein soziales Deduktionsspiel. Die Guten sagen immer die Wahrheit und die Bösen lügen immer. Dann findet die folgende Konversation statt:

Anaëlle: "Cyril und David sind entweder beide Gut oder beide Böse."

Bibin: "Falls Ema Gut ist, dann sagt Anaëlle die Wahrheit!"

Cyril: "Die Anzahl der Bösen ist gerade."

David: "Mindestens einer von Anaëlle, Bibin oder Cyril ist Böse."

Ema: "Anaëlle und Cyril sind nicht beide Gut."

Welche der folgenden Aussagen sind wahr?

- A: Es ist möglich, dass sowohl Anaëlle als auch Cyril Gut sind.
- B: David ist mit Sicherheit Gut.
- C: Bibin ist mit Sicherheit Böse.
- D: Es ist möglich, dass es nur eine Gute Person gibt.