MATHEMATICAL.
OLYMPIAD.CH
MATHEMATIK-OLYMPIADE
OLYMPIADES DE MATHÉMATIQUES
OLIMPIADI DELLA MATEMATICA

Examen 2020

Olympiades de Mathématiques 2020 - premier tour

Informations

- Questions: 35
- Temps: 75 minutes
- Tous les moyens auxiliaires sont autorisés (calculatrice, internet, etc.) néanmoins, le test doit être résolu individuellement et sans aide extérieure.

Types de questions

- Multiple-Choice (MC): Chaque question a exactement une réponse correcte. Des points sont déduits en cas de mauvaise réponse, de sorte que les versements ne sont pas récompensés.
- (INT) Les questions avec des nombres naturels ont comme réponses des nombres de 0 à 99999. Vous obtenez des points si la réponse est correcte. Aucun point n'est déduit pour les mauvaises réponses.
- (T/F) Les questions vrai-faux multiples contiennent plusieurs affirmations, qui peuvent chacune être soit vraie, soit fausse. Vous obtenez des points pour chaque bonne réponse et des points sont déduits pour chaque mauvaise réponse.

Points

Il existe trois niveaux de difficulté différents. Les tâches difficiles valent plus de points. Il peut donc être utile de sauter des tâches si vous n'allez pas plus loin.

Niveau 1

MC:	$+8$ en cas de bonne réponse,	-2 en cas de mauvaise réponse,	0 si non répondu
T/F:	$+2$ pour chaque bonne réponse,	-2 pour chaque mauvaise réponse,	0 si non répondu
NUM:	$+8$ pour une bonne réponse,	0 si faux ou laissé vide	

Question 1 (MC):

La somme de cinq nombres entiers consécutifs est égale à la somme des trois nombres entiers suivants. Quel est le plus grand de ces huit nombres ?

A: 4

B: 8

C: 9

D: 11

E: 12

Question 2 (MC):

Sur un cube, on étiquette toutes les faces et tous les sommets avec 1 et toutes les arêtes avec -1. Quelle est la somme de toutes les étiquettes ?

A: 0

B: 2

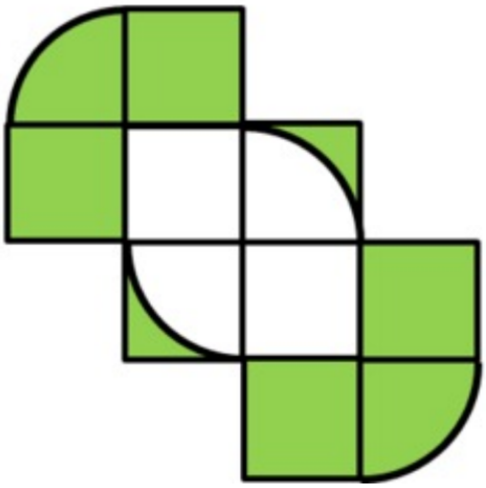
C: 4

D: 6

E: 8

Question 3 (MC):

En utilisant son compas, Estelle a tracé la figure ci-dessous sur une feuille quadrillée. Si la longueur du côté d'un petit carré est 2, quelle est l'aire de la surface verte ?



A: 12

B: 16

C: $16 + 2\pi$

D: 24

E: $24 + 2\pi$

Question 4 (MC):

Timothée a oublié les cinq dernières lettres de son mot de passe. Cependant, il se rappelle que chaque lettre était soit I, M ou O. Combien de possibilités doit-t-il prendre en considération ?

A: 15

B: 20

C: 120

D: 125

E: 243

Question 5 (INT):

Quel est le plus petit nombre entier strictement plus grand que 1 qui est à la fois un carré parfait et le cube d'un nombre entier?

Question 6 (INT):

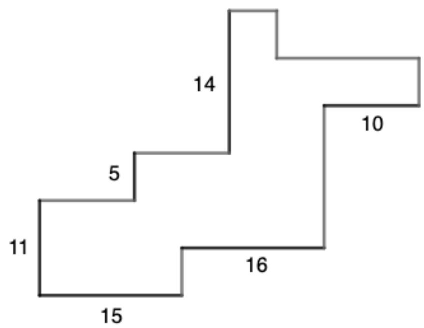
Quel est le plus petit nombre entier positif impair non premier qui n'est pas un carré parfait ?

Question 7 (INT):

Combien de nombres entiers entre 10 et 1000 ne changent pas quand l'ordre de leurs chiffres est inversé ?

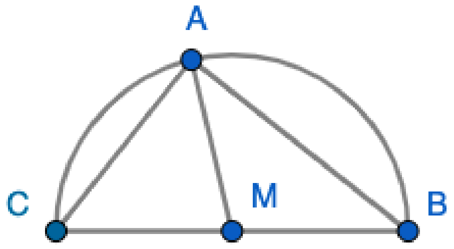
Question 8 (INT):

Quel est le périmètre de la figure ci-dessous ?



Question 9 (MTF):

Quelles égalités à propos de cette figure sont toujours vraies en supposant que M est le centre du demi-cercle ?



A: $\angle CAM = \angle ABC$

B: $\angle AMC = 2\angle ABC$

C: $\angle ACB + \angle ABC = 90°$

D: Aire(ACM) = Aire(AMB)

Question 10 (MTF):

Le nombre 323 est...

A: un nombre premier.

B: un carré parfait.

C: la différence de deux nombres premiers.

D: la différence de deux carrés parfaits.

Niveau 2

MC:	$+12$ en cas de bonne réponse,	-3 en cas de mauvaise réponse,	0 si non répondu
T/F:	$+3$ pour chaque bonne réponse,	-3 pour chaque mauvaise réponse,	0 si non répondu
NUM:	$+12$ pour une bonne réponse,	0 si faux ou laissé vide	

Question 11 (MC):

Quel est le reste de $2^2 \cdot 3^3 \cdot 5^5 \cdot 7^7$ divisé par 8 ?

A: 2

B: 3

C: 4

D: 5

E: 7

Question 12 (MC):

Soit $ABCD$ un carré. Combien de carrés ont exactement deux sommets en commun avec $ABCD$?

A: 4

B: 6

C: 8

D: 12

E: 16

Question 13 (MC):

Julia et Florian pensent tous les deux à un nombre entier entre 1 et 10. Julia affirme : “*Peu importe le nombre que tu as choisi, si on multiplie nos deux nombres, le résultat ne contiendra pas le chiffre* 6.” Florian répond : “*D'accord, alors la somme de nos deux nombres doit être* 14.” Quel est le nombre de Florian ?

A: 4

B: 5

C: 6

D: 8

E: 9

Question 14 (MC):

Quel est le plus petit nombre entier $n > 2$ tel que $(2^2 - 1) \cdot (3^2 - 1) \cdot \ldots \cdot (n^2 - 1)$ est un carré parfait ?

A: 7

B: 8

C: 9

D: 11

E: 12

Question 15 (MC):

Tanish pense à un nombre entier $1 \leq n \leq 100$ et Marco veut deviner ce nombre. Après chaque essai de Marco, Tanish lui dit s'il a trouvé, ou si le nombre auquel il pense est plus grand ou plus petit. Quel est le plus petit nombre d'essais dont Marco a besoin pour trouver le nombre auquel Tanish pense en supposant que Marco a une bonne stratégie ?

A: 4

B: 5

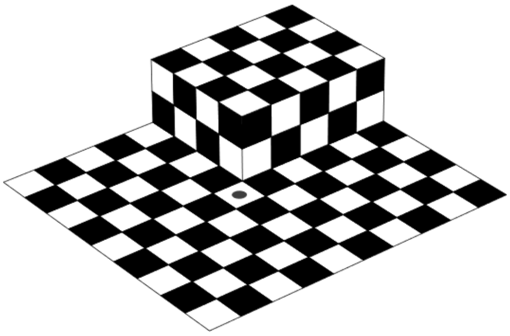
C: 6

D: 7

E: 8

Question 16 (MC):

Une fourmi se trouve sur le carré marqué d'un point noir. Ensuite, la fourmi se déplace à travers une arête d'un carré vers un autre carré quatre fois de suite. Parmi tous les carrés où la fourmi a pu finir, combien sont noirs ?



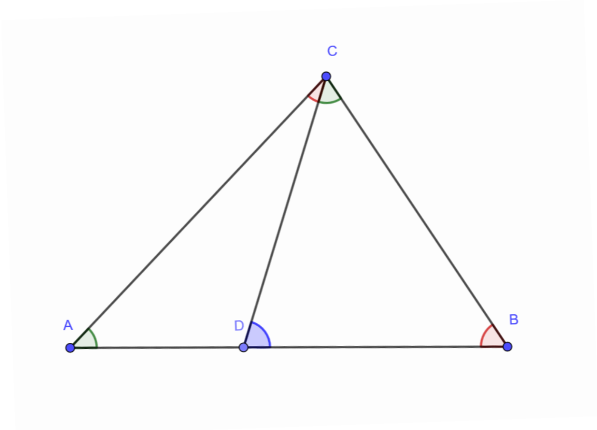
A: 6
B: 8
C: 10
D: 12
E: 14

Question 17 (INT):

Si la diagonale du carré A est 16 fois plus grande que le périmètre du carré B, combien de fois plus grande est l'aire du carré A par rapport à l'aire du carré B ?

Question 18 (INT):

Sur le dessin ci-dessous, supposons que les angles verts $\angle DAC$ et $\angle DCB$ valent 45 degrés et que l'angle $\angle CBD$ est deux fois plus grand que l'angle $\angle ACD$ (les deux angles rouges). Combien de degrés mesure l'angle $\angle BDC$?



Question 19 (INT):

Viera a préparé moins de 200 cookies et elle aimerait les distribuer dans des sachets de telle sorte que chaque sachet contienne le même nombre de cookies. Malheureusement, elle a l'impression que ça ne marche jamais. Si elle veut mettre 5 cookies par sachet, il lui en reste quatre. La même chose se produit si elle veut en mettre 6 par sachet. Et si elle met 7 cookies par sachet, il lui en reste trois. Combien de cookies Viera a-t-elle préparé ?

Question 20 (INT):

Si un triangle rectangle a un côté de longueur 15 et un côté de longueur 12, quelle est l'aire la plus petite possible du triangle ?

Question 21 (INT):

Quel nombre entier a la propriété que si on met ce nombre au carré et qu'on soustrait 49 au résultat, on obtient le même nombre que si on soustrait 49 d'abord et on met le résultat au carré ensuite ?

Question 22 (INT):

Le marchand de glace préféré de Nicole propose huit parfums de glace différents. Nicole voudrait trois boules de glace qui n'ont pas toutes le même parfum. Combien de choix a-t-elle ?
Remarque : L'ordre des parfums n'a pas d'importance.

Question 23 (MTF):

Si trois nombres entiers positifs a, b et c satisfont $a^2 + b^2 = c^2$, cela implique que...

A: $a + b > c$.

B: c est impair.

C: a et b ne sont pas égaux.

D: c n'est pas divisible par 7.

Question 24 (MTF):

Il y a 51 nombres entiers positifs distincts sur un tableau, et aucun n'est plus grand que 100. Quels affirmations à propos de ce tableau sont vraies ?

A: Il y a deux nombres consécutifs.

B: Il y a deux nombres dont la différence vaut 50.

C: Il y a deux nombres dont la somme vaut 100.

D: Il y a six nombres dont le dernier chiffre est le même.

Question 25 (MTF):

L'expression $n^2 + n + 41$ est, pour n'importe quel nombre entier positif n...

A: un nombre premier.

B: plus grande que $(n + 1)^2$.

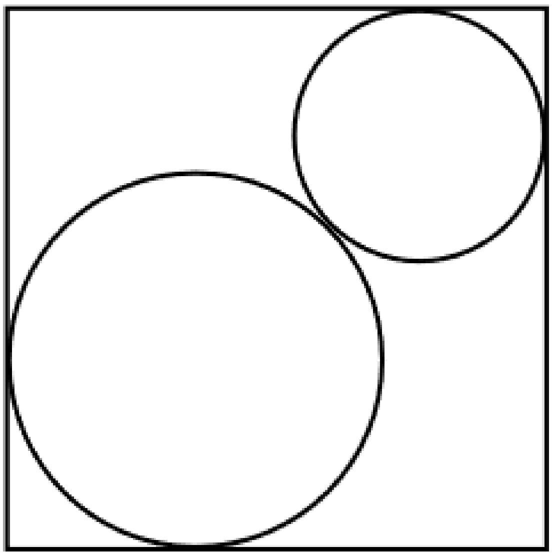
C: impaire.

D: pas un carré parfait.

MC:	+16 en cas de bonne réponse,	–4 en cas de mauvaise réponse,	0 si non répondu
T/F:	+4 pour chaque bonne réponse,	–4 pour chaque mauvaise réponse,	0 si non répondu
NUM:	+16 pour une bonne réponse,		0 si faux ou laissé vide

Question 26 (MC):

Deux cercles sont inscrits à l'intérieur d'un carré de côté 1, comme montré sur l'image ci-dessous. Quelle est la somme des deux rayons des cercles ?



A: $\frac{1}{2}$

B: $\frac{1}{\sqrt{2}}$

C: $\sqrt{2}-1$

D: $2-\sqrt{2}$

E: Des choix différents de cercles donneront des résultats différents.

Question 27 (MC):

Il y a cent pièces alignées, toutes face vers le haut. Maintenant, Louis retourne toutes les pièces, puis chaque seconde pièce, puis chaque troisième pièce et ainsi de suite jusqu'à retourner chaque 100-ième pièce. En supposant que la première pièce a été retournée à chaque fois, combien de pièces sont face vers le haut à la fin ?

A: 50

B: 89

C: 90

D: 91

E: 98

Question 28 (MC):

Tous les nombres de 1 à 10 sont écrits sur un tableau. Maintenant, Viviane efface deux nombres et les remplace par leur différence (positive) et elle répète ce procédé jusqu'à ce qu'un seul nombre reste sur le tableau. Parmi les nombres suivants, lequel peut se retrouver sur le tableau à la fin ?

A: 0

B: 1

C: 4

D: 6

E: 11

Question 29 (MC):

Pour un nombre entier positif $n > 1$, on note tous ses diviseurs entiers positifs en ordre croissant : $1 < d_1 < \ldots < d_k < n$. Combien de n différents satisfont $d_k = 11 \cdot d_1$?

A: 0

B: 2

C: 3

D: 4

E: 5

Question 30 (INT):

Quentin a quatre bâtons de longueur 12. Il casse exactement un bâton en deux, puis il construit un triangle rectangle avec ses cinq bâtons. Quelle est l'aire de ce triangle ?

Question 31 (INT):

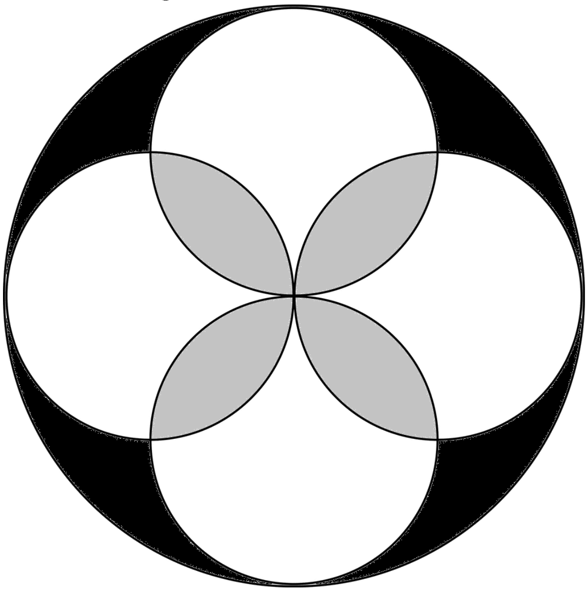
Soit n le plus petit nombre entier positif tel que $10n$ est un carré parfait et $6n$ est le cube d'un nombre entier. Que vaut n ?

Question 32 (INT):

De combien de manières différentes peut-on remplir un rectangle de taille 2×11 avec onze dominos de taille 1×2 ?

Question 33 (INT):

Dans la figure ci-dessous, chacune des régions grises a une superficie de 72. Quelle est la superficie totale des régions noires ?



Question 34 (MTF):

Existe-t-il un nombre à trois chiffres $\overline{abc}$ tel que...

A: $\overline{abc}$ est divisible par c et par le nombre à deux chiffres $\overline{ab}$?

B: $\overline{abc}$ est divisible par b et par le nombre à deux chiffres $\overline{ac}$?

C: $a > c > 0$ et $\overline{abc} - \overline{cba}$ est un nombre premier ?

D: $\overline{abc} + \overline{bca} + \overline{cab} = 2021$?

Question 35 (MTF):

Anaëlle, Bibin, Cyril, David et Ema jouent à un jeu de déduction sociale. Les gentils disent toujours la vérité et les méchants mentent toujours. Voici leur discussion :
Anaëlle: "*Cyril et David sont soit tous les deux gentils, soit tous les deux méchants.*"
Bibin : "*Si Ema est gentille, alors Anaëlle dit la vérité !*"
Cyril : "*Il y a un nombre pair de méchants*".
David : "*Au moins une personne parmi Anaëlle, Bibin et Cyril est méchante.*"
Ema : "*Anaëlle et Cyril ne sont pas gentils tous les deux.*"
Quelles affirmations ci-dessous sont vraies ?

A: Il est possible que Anaëlle et Cyril sont tous les deux gentils.

B: David est forcément gentil.

C: Bibin est forcément méchant.

D: Il est possible qu'il n'y ait qu'une seule personne gentille .