

SMO - Finalrunde

1. Prüfung - 13. März 2015

Zeit: 4 Stunden

Jede Aufgabe ist 7 Punkte wert.

1. Sei ABC ein spitzwinkliges Dreieck mit $AB \neq BC$ und Umkreis k . Seien P und Q die Schnittpunkte von k mit der Winkelhalbierenden beziehungsweise der Aussenwinkelhalbierenden von $\angle CBA$. Sei D der Schnittpunkt von AC und PQ . Bestimme das Verhältnis $AD : DC$.

2. Bestimme alle Paare (m, p) natürlicher Zahlen, sodass p eine Primzahl und

$$2^m p^2 + 27$$

die dritte Potenz einer natürlichen Zahl ist.

3. Finde alle Funktionen $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, sodass für alle $x, y \in \mathbb{R}$ gilt:

$$(y + 1)f(x) + f(xf(y) + f(x + y)) = y.$$

4. Gegeben seien ein Kreis k und zwei Punkte A und B ausserhalb des Kreises. Gib an, wie man mit Zirkel und Lineal einen Kreis ℓ konstruieren kann, sodass A und B auf ℓ liegen und sich k und ℓ berühren.

5. Sei m eine natürliche Zahl. Auf der SMO-Wandtafel steht 2^m mal die Zahl 1. In einem Schritt wählen wir zwei Zahlen a und b auf der Tafel und ersetzen sie beide jeweils durch $a + b$. Zeige, dass nach $m2^{m-1}$ Schritten die Summe der Zahlen mindestens 4^m beträgt.

Viel Glück!