MATHEMATICAL.
OLYMPIAD.CH
MATHEMATIK-OLYMPIADE
OLYMPIADES DE MATHÉMATIQUES
OLIMPIADI DELLA MATEMATICA

Deuxième tour 2021

Lausanne, Lugano, Zurich - 19 décembre 2020

Remarque liminaire : Une solution complète rapporte 7 points. Pour chaque problème, jusqu'à 2 points pourront être déduits d'une solution correcte en cas de lacunes mineures. Les solutions partielles sont évaluées selon le barème suivant. Si un problème admet plusieurs barèmes, le score est alors le maximum des scores pour chacun des barèmes.

Ci-dessous vous trouverez les solutions élémentaires connues des correcteurs. Des solutions alternatives sont présentées à la fin de chaque problème. Les étudiants sont naturellement encouragés à essayer toutes les méthodes à leur disposition lors de l'entraînement, mais à ne pas chercher de solutions alternatives qui emploient des méthodes qu'ils ne maîtirent pas en condition d'examen, au risque de perdre un temps précieux.

G1) Soit O le centre du cercle circonscrit d'un triangle aigu ABC. La droite AC coupe le cercle circonscrit du triangle ABO une deuxième fois en S. Montrer que la droite OS est perpendiculaire à la droite BC.

Solution 1 : Reformulation de la conclusion : Pour prouver que OS est perpendiculaire à BC, nous introduisons T comme l'intersection de OS avec BC et montrons que $\angle CTS = 90°$. Par chasse aux angles, nous faisons les observations suivantes.

(a) Comme $AOBS$ sont sur un cercle, nous avons $\angle ASO = \angle ABO$.

(b) Comme O est le centre du cercle ABC, on a $OA = OB$, et le triangle AOB est isocèle en O. Ainsi $\angle AOB = 180° - 2 \cdot \angle ABO$.

(c) Comme O est le centre du cercle ABC, on a $\angle ACB = \frac{1}{2} \cdot \angle AOB$.

En combinant les observations ci-dessus, on obtient

$$\angle SCT = \angle ACB \overset{(c)}{=} \frac{1}{2}\angle AOB \overset{(b)}{=} 90° - \angle ABO \overset{(a)}{=} 90° - \angle ASO = 90° - \angle CST.$$

Ainsi, comme la somme des angles dans le triangle CTS vaut $180°$, on conclut :

$$\angle CTS = 180° - \angle SCT - \angle CST = 90°.$$

Solution 2 : Reformulation de la conclusion : Pour prouver que OS est perpendiculaire à BC, on prouve que le triangle CSB est isocèle en S. En effet, si le triangle CSB était isocèle, alors la médiatrice de BC contiendrait le point S. De plus, on peut remarquer que la médiatrice de BC contient aussi O, puisque $OC = OB$. Ainsi, la droite OS serait la médiatrice de BC, et serait, en particulier, perpendiculaire à BC.

Par chasse aux angles, on fait les observations suivantes.

(a) Comme O est le centre du cercle ABC, on a $OB = OC$ et donc $\angle OCB = \angle OBC$.

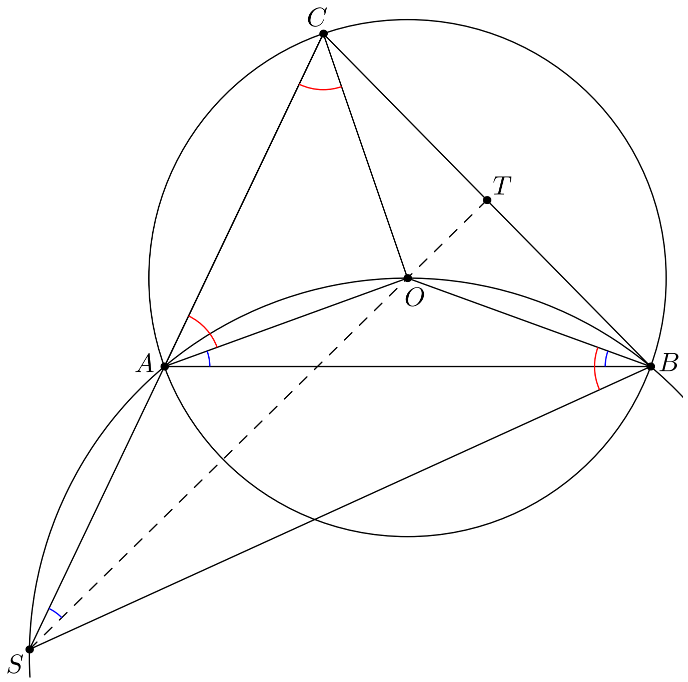
(b) Comme O est le centre du cercle ABC, on a de façon similaire $\angle OCA = \angle OAC$.

(c) Comme $AOBS$ sont sur un cercle, nous avons que $\angle OBS = \angle OAC$.

Ainsi, on conclut que

$$\angle SCB = \angle ACB = \angle ACO + \angle OCB \overset{\text{(a)\&(b)}}{=} \angle OAC + \angle OBC \overset{\text{(c)}}{=} \angle OBS + \angle OBC = \angle SBC.$$

Finalement, le triangle CSB est bien isocèle en S.



Marking Scheme

- 2P : Reformulation de la conclusion en une affirmation du type :
  - $\angle SCT = 90° - \angle CST$ or $\angle SCB = 90° - \angle CSO$.
  - CSB est isocèle en S.
- 1P : Toute affirmation utile utilisant le quadrilatère cyclique $AOBS$ (eg. $\angle OBS = \angle CAO$ ou $\angle ASO = \angle ABO$).
- $\leq$ 2P : 1P pour n'importe quelle affirmation utile utilisant le centre O du cercle ABC (eg. $\angle ACO = \frac{1}{2} \cdot \angle AOB$, $\angle OCB = \angle OBC$, $\angle OCA = \angle OAC$, $\angle OBA = \angle OAB$).
- 2P : Conclure.

G2) Soit ABC un triangle aigu avec $BC > AC$. La médiatrice du segment AB coupe la droite BC en X et la droite AC en Y. Soient P la projection de X sur AC et Q la projection de Y sur BC. Montrer que la droite PQ coupe le segment AB en son milieu.

Solution 1 (chasse aux angles, quadrilatères cycliques) : En posant M comme le milieu d'AB, l'exercice est équivalent à montrer que M, P et Q sont colinéaires. Pour faire cela, nous allons montrer que $\angle MPX + \angle XPQ = 180°$. Nous notons d'abord qu'il y a quelques quadrilatères cycliques :

(a) $YQPX$ est cyclique, car $\angle XPY = 90° = \angle XQY$.

(b) $YQMB$ est cyclique, car $\angle BMY = 90° = \angle BQY$.

(c) $AMXP$ est cyclique, car $\angle XMA = 90° = \angle XPA$.

Comme X est sur la médiatrice d'AB, nous avons $XA = XB$ et $\angle MAX = \angle MBX$ $(*)$.

Alors,

$$\angle MPX \overset{(c)}{=} \angle MAX \overset{(*)}{=} \angle MBX = \angle MBQ \overset{(b)}{=} \angle MYQ = \angle XYQ \overset{(a)}{=} 180° - \angle XPQ.$$

Solution 2 (plus efficace que la Solution 1) : Il y a une façon très similaire de procéder, utilisant seulement deux des quadrilatères inscrits mentionnés plus haut, et le fait que $YA = YB$ implique $\angle MYA = \angle MYB$ $(*)$. Cette fois, nous montrons que M, P et Q sont colinéaires en montrant que $\angle XQP = \angle XQM$. En effet,

$$\angle XQP \overset{(a)}{=} \angle XYP = \angle MYA \overset{(*)}{=} \angle MYB \overset{(b)}{=} \angle MQB = \angle XQM.$$

Solution 3 (Ménélaüs et puissance d'un point) : Nous pourrions être tentés de montrer que M, P et Q sont colinéaires avec Ménélaüs. Nous aurions besoin de

$$\frac{AM}{MB} \cdot \frac{BQ}{QC} \cdot \frac{CP}{PA} \overset{?}{=} -1.$$

Tout d'abord, comme dans les autres preuves, on note que $YQPX$ est cyclique comme $\angle XPY = 90° = \angle XQY$. Écrivons ω pour le cercle $(YQPX)$. Par le théorème de Thalés sur le cercle, son centre est le milieu de XY, en particulier il se trouve sur la médiatrice de AB. Comme la puissance d'un point par rapport à ω est uniquement déterminée par sa distance à ce centre, nous avons que A et B ont la même puissance par rapport à ω, prouvant que

$$PA \cdot AY = XB \cdot BQ.$$

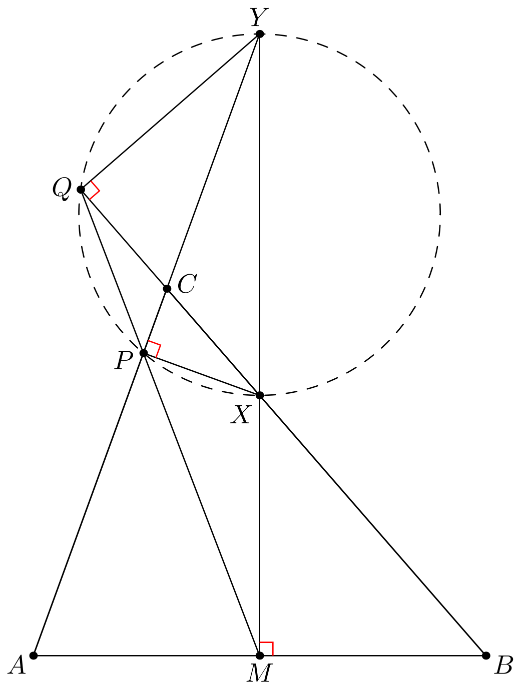
La puissance de C par rapport à ω nous donne aussi que

$$CX \cdot QC = CP \cdot YC.$$

En combinant ces deux égalités, nous obtenons finalement que

$$\frac{AM}{MB} \cdot \frac{BQ}{QC} \cdot \frac{CP}{PA} = -1 \cdot \frac{BQ}{PA} \cdot \frac{CP}{QC} = -1 \cdot \frac{AY}{XB} \cdot \frac{CX}{YC} = \frac{BM}{MA} \cdot \frac{AY}{YC} \cdot \frac{CX}{XB} = -1.$$

Dans la dernière égalité, nous avont utilisé Ménélaüs comme M, Y et X sont colinéaires.



Marking Scheme - Solution 1 et 2

- 1P : Reformuler l'énoncé avec des angles, en une affirmation du type :
  - $\angle MPX + \angle XPQ = 180°$
  - $\angle XQP = \angle XQM$
- 3P : Montrer que $YQPX$, $YQMB$ ou $AMXP$ sont cycliques (2P pour un quadrilatère, 3P pour deux ou trois quadrilatères)
- 1P : Montrer que $\angle MAX = \angle MBX$, $\angle MAY = \angle MBY$ ou que $\angle MYA = \angle MYB$.
- 2P : Conclure.

Marking Scheme - Solution 3

- 1P : Reformuler l'énoncé comme une égalité de type Ménélaüs.
- 1P : Montrer que $YQPX$ est cyclique.
- 2P : Montrer $PA \cdot AY = XB \cdot BQ$.
- 1P : Montrer $CX \cdot QC = CP \cdot YC$.
- 2P : Conclure.

K1) Anaëlle possède $2n$ pierres numérotées $1, 2, 3, \dots, 2n$ ainsi que deux boîtes, une bleue et une rouge. Elle veut ranger chacune des $2n$ pierres dans l'une des deux boîtes de sorte que les pierres k et $2k$ soient dans des boîtes différentes pour tout $k = 1, 2, \dots, n$. Combien Anaëlle a-t-elle de manières de le faire ?

Answer : Anaëlle a 2^n manières de le faire.

Solution 1 (bijective) : Pour chaque entier impair $1 \leq t < 2n$, on appelle l'ensemble de pierres avec un numéro de la forme $t \cdot 2^k$, la chaîne commençant en t. Notons que si l'on place une pierre de la chaîne dans une boîte, le placement de toutes les autres pierres de la chaîne est uniquement déterminé. Notons aussi que comme t est impair, des pierres de différentes chaînes sont placées indépendamment comme la condition affecte seulement deux pierres qui sont dans la même chaîne.

Comme chaque pierre appartient à exactement une chaîne, il s'ensuit que chaque distribution de pierres correspond à une distribution d'un représentant de chaque chaîne (e.g. les pierres avec un numéro impair). Comme il y a n chaînes, le nombre total de manières est 2^n.

Solution 2 (inductive) : Nous procédons par induction. Notons que l'affirmation est vraie pour $n = 1$ car les deux pierres (numérotées 1 et 2) doivent être placées dans des boîtes différentes. Nous considérons maintenant le cas $n > 1$ et supposons que l'affirmation est vraie pour toutes les valeurs inférieures à n.

Nous avons déjà qu'Anaëlle a 2^{n-1} manières de distribuer les pierres numérotées $1, 2, \dots, 2n-2$. La pierre numérotée $2n-1$ n'est pas affectée par aucune restriction et peut être placée dans n'importe quelle boîte. En revanche, pour la pierre numérotée $2n$, Anaëlle n'a pas le choix , puisqu'elle ne peut pas être dans la même boîte que la pierre numérotée n qui est déjà placée (car $n \leq 2n-2$). Au total, Anaëlle a donc $2 \cdot 2^{n-1} = 2^n$ manières de distribuer les pierres.

Marking Scheme

Solution 1 (Additive)

- 1P : Calculer la réponse pour au moins une valeur de $n \geq 3$.
- 1P : Avoir l'idée de considérer ces chaînes.
- 2P : Argumenter que le placement d'une pierre dans chaque chaîne détermine le placement de toutes les autres.
- 1P : Argumenter que des chaînes différentes sont indépendantes.
- 1P : Argumenter qu'il y a n chaînes et qu'elles partionnent les pierres.
- 1P : Terminer la preuve.

Solution 2 (Additive)

- 1P : Calculer la réponse pour au moins une valeur de $n \geq 3$.
- 1P : Avoir l'idée de l'induction.
- 2P : S'occuper du cas impair dans le pas d'induction.
- 2P : S'occuper du cas pair dans le pas d'induction.
- 1P : Terminer la preuve.

Remarques (points déductibles seulement pour une solution complète)

- -1P : Manquer un nombre fini de cas.
- -1P : Erreurs de calcul pour la réponse finale.
- Pas de déduction de points pour ne pas avoir mentionné que $n \leq 2n - 2$.

K2) Soient $n \geq 4$ et $k, d \geq 2$ des nombres entiers tel que $k \cdot d \leq n$. Les n participants des Olympiades de Mathématiques sont assis autour d'une table ronde et attendent Patrick. Quand Patrick arrive, il n'est pas content de la situation, car elle ne respecte pas les règles de distance sociale. Il choisit alors k parmi les n participants qui peuvent rester et demande aux autres de partir, de sorte qu'entre deux des k participants restants, il y ait toujours au moins $d-1$ chaises vides. Combien Patrick a-t-il de manières de le faire, si toutes les chaises étaient occupées au début ?

Réponse : $\frac{n}{k}\binom{n-kd+k-1}{k-1}$ ou toute expression équivalente.

Solution 1 : Comptage surjectif. Tout d'abord, numérotons les participants de 1 à n, dans le sens horaire commençant par une personne désignée arbitrairement comme "1". Maintenant, nous commençons à compter le nombre de manières où la personne 1 est choisie. Notons que chacune de ses possibilités correspond au choix de k 'distances' entre participants consécutifs. La contrainte devient alors celle qui force lesdites distances à être plus grandes ou égales à d. Essentiellement, nous voulons alors le nombre de façons de choisir (avec ordre) k nombres plus grands ou égaux que d, qui sommés ensemble, donnent n. Cela peut être calculé de plusieurs manières :

- Par exemple, nous pourrions nous imaginer qu'il y a une table plus petite avec $n-kd+k$ chaises autour, dont la chaise 1 est occupée, et qu'on choisisse $k-1$ chaises (en plus de la première) pour y placer des participants. Ensuite, on pourra rajouter $d-1$ chaises entre deux participants consécutifs, donnant alors la configuration finale, et montrant qu'il y avait $\binom{n-kd+k-1}{k-1}$ de le faire.
- Alternativement, on peut considérer ce problème comme celui de distribuer n bonbons identiques parmi k enfants tel que chaque enfant reçoit au moins d bonbons, problème qui est dans le script. Ici, on peut simplement oublier kd bonbons pour satisfaire la contrainte, signifiant qu'on a besoin de distribuer $n-kd$ bonbons parmi k enfants, une combinaison avec répétition, donnant alors $\binom{n-kd+k-1}{k-1}$ manières de procéder.

Maintenant, il reste à voir que considérer toutes les 'rotations' de ses possibilités (en changeant le point fixe de "1" à un autre entier) compte chaque configuration exactement k fois (une fois par personne, qui peut être vue comme un point fixe). On obtient finalement $\frac{n}{k}\binom{n-kd+k-1}{k-1}$.

Si vous ne comprenez pas parfaitement cette solution, pensez-y de cette manière : Considérez le problème originel, mais on choisissant un des participants qui restent comme étant un imposteur[1]*. Comptant le nombre de façons de faire peut se faire comme au-dessus, donnant* $\binom{n-kd+k-1}{k-1}$ *configurations pour chaque choix parmi les n imposteurs possibles. Cependant, cela peut aussi être fait en prenant chacune des possibilités du problème originel, en choisissant un imposteur, donnant k choix pour chaque possiblité originelle.*

Solution 2 : En considérant la plus petite chaise occupée. Comme au-dessus, on peut calculer le nombre de configurations où la personne 1 est choisie comme étant $\binom{n-kd+k-1}{k-1}$.
Maintenant, on cherche à compter le nombre de configurations contenant la personne 2, alors que la personne 1 n'est *pas* choisie. C'est presque la même situation qu'avant (choisir k distances), sauf qu'on a une contrainte additionelle parce qu'on sait que la chaise 1 est dans le dernier espace entre deux chaises. On veut alors distribuer n chaises parmi k espaces avec la contrainte que les premiers $k-1$ distances doivent être au moins d et que la dernière doit être d'au moins $\max(2,d)$ (comme on a besoin que la chaise 1 en fasse partie). On obtient alors $\binom{n-(k-1)d+k-1-\max(2,d)}{k-1}$.
En continuant avec cette façon de penser, nous voyons maintenant que le nombre de possibilités

[1] Quelqu'un du Valais, par exemple.

où la personne 3 est choisie, alors que ni la 1 ni la 2 le sont est de $\binom{n-(k-1)d+k-1-\max(3,d)}{k-1}$. Plus généralement, quand on compte le nombre de possibilités où la personne i est choisie alors que ce n'est pas le cas pour $1, 2, \ldots, i-1$, on obtient[2] $\binom{n-(k-1)d+k-1-\max(i,d)}{k-1}$. On voit alors que sommer cette expression pour tout i donne le nombre de possibilités, comme on compte à chaque fois le nombre de configurations où i est la 'plus petite' chaise occupée, donnant une bijection claire. On obtient donc

$$\sum_{i=1}^{n} \binom{n-(k-1)d+k-1-\max(i,d)}{k-1}$$

Marking Scheme

Solutions 1 et 2 (Additives)

- 0P : Résoudre le cas $n = kd$ et/ou tenter de faire une induction sur n.
- 0P : Affirmer qu'on peut grouper les possibilités en se basant sur la plus petite chaise occupée, après avoir assigné un nombre à chacun des participants.
- 1P : Toute tentative de calculer correctement le nombre de possibilités quand une personne donnée est fixée.
- 1P : Afirmer que cette valeur vaut $\binom{n-kd+k-1}{k-1}$.
- 2P : Prouver cette égalité (1 point peut être donné si la preuve est incomplète ou si le participant ne trouve pas la valeur mais affirme qu'il faut assigner kd espaces par défaut et/ou distribuer $n - kd$ espaces entre toutes les distances).

Compléter la Solution 1 (Additive)

- 1P : Affirmer qu'on peut faire tourner chaque possibilité où une personne est fixée pour obtenir toutes les possibilités.
- 1P : Affirmer que l'idée précédente compte chaque configuration exactement k fois.
- 1P : Conclure.

Compléter la Solution 2 (Additive)

- 2P : Donner l'expression correcte $\binom{n-(k-1)d+k-1-\max(i,d)}{k-1}$ pour quand la personne i est fixée et aucun des participants $1, 2, \ldots i-1$ n'est pris.
- 1P : Affirmer que le nombre total de possibilités est la somme de l'expression précédente pour i allant de 1 à n.

Pour la solution 2, aucun point n'est déduit pour ne pas avoir simplifié la somme.

Annexe : Pourquoi les deux réponses sont égales.
Dans la solution 2, on trouve la réponse suivante :

$$\sum_{i=1}^{n} \binom{n-(k-1)d+k-1-\max(i,d)}{k-1}$$

Est-ce vraiment ce qu'on a dans la solution 1 ? C'est heureusement le cas et on peut le prouver. La chose importante à remarquer est que le coefficient binomial restera le même jusqu'à $i = d$,

[2] Il peut ici être utile d'utiliser la convention que $\binom{a}{b} = 0$ si $a < 0$ ou $a > b$.

et à partir de là, la somme du haut se décrémentera de 1 à chaque fois, jusqu'à atteindre $k-1$; les coefficients binomiaux qui suivront seront tous égaux à 0 après (ils correspondent au cas où la plus petite chaise est trop loin de 1, et les participants n'ont pas assez de place pour occuper l'espace restant). En récrivant, on trouve alors bien :

$$\begin{aligned}
& d \cdot \binom{n-kd+k-1}{k-1} + \binom{n-kd+k-2}{k-1} + \binom{n-kd+k-3}{k-1} + \cdots + \binom{k-1}{k-1} \\
&= (d-1) \cdot \binom{n-kd+k-1}{k-1} + \sum_{j=k-1}^{n-kd+k-1} \binom{j}{k-1} \\
&= (d-1) \cdot \binom{n-kd+k-1}{k-1} + \binom{n-kd+k}{k} \\
&= (d-1) \cdot \binom{n-kd+k-1}{k-1} + \frac{n-kd+k}{k} \binom{n-kd+k-1}{k-1} \\
&= \frac{n}{k} \binom{n-kd+k-1}{k-1}
\end{aligned}$$

La seconde égalité au-dessus (transformant la somme en un coefficient binomial) est connue sous le nom du "Hockey-Stick Lemma" et est une propriété connue ; si vous voulez la prouver vous-même, vous devrez vous servir de la propriété $\binom{a}{b} + \binom{a}{b+1} = \binom{a+1}{b+1}$ de façon rusée. Regarder où les termes de la somme se trouvent sur le triangle de Pascal peut vous aider (et vous réaliserez au passage d'où le lemme tire son nom !).

Z1) Montrer que, pour tout nombre entier $n \geq 3$, il existe des nombres entiers strictement positifs $a_1 < a_2 < \ldots < a_n$ tels que

$$a_k \,|\, (a_1 + a_2 + \ldots + a_n)$$

pout tout $k = 1, 2, \ldots, n$.

Solution 1 : La solution se fait par induction.

(a) Cas de base $n = 3$: on observe que $1 < 2 < 3$ est une solution.

(b) Pas d'induction : soit $n \geq 4$ et supposons que le résultat soit vrai pour tout $m \leq n-1$. Soit $a_1 < a_2 < \ldots < a_{n-1}$ tels que $a_i \mid \sum_{j=1}^{n} a_j$ pour tout $1 \leq i \leq n-1$. Alors,

$$a_1 < a_2 < \ldots < a_{n-1} < a_n := \sum_{j=1}^{n-1} a_j$$

vérifie aussi cette propriété. En effet, on observe tout d'abord que, comme $a_i > 0$ pour tout $1 \leq i \leq n-1$, alors $a_n > a_{n-1}$. En outre,

$$\sum_{k=1}^{n} a_k = a_n + \sum_{j=1}^{n-1} a_j = 2 \sum_{j=1}^{n-1} a_j.$$

Par hypothèse de récurrence, $a_i \,|\, 2\sum_{j=1}^{n-1} a_j = \sum_{k=1}^{n} a_k$ pour tout $1 \leq i \leq n-1$. De plus, $a_n = \sum_{j=1}^{n-1} a_j \,|\, 2\sum_{j=1}^{n-1} a_j = \sum_{k=1}^{n} a_k$.

Solution 2 : On souhaite utiliser $\sum_{i=0}^{n} 2^i = 2^{n+1} - 1$. Observez que l'ensemble $1 \leq 1 < 2 < \ldots < 2^n$ vérifie la condition de divisibilité

$$2^j \,|\, (1 + 1 + 2 + \ldots) = 2^{n+1}, \quad \forall j = 0, \ldots, n.$$

Mais les nombres ne sont pas tous distincts. Pour construire une suite qui fonctionne, au lieu de considérer les puissances de 2, on considère les puissances de 2 multipliées par 3. La somme devient $\sum_{i=0}^{n} 3 \cdot 2^i = 3\sum_{i=0}^{n} 2^i = 3 \cdot 2^{n+1} - 3$. En ajoutant les nombres 1 et 2 aux puissances de 2 multipliées par 3, on trouve la solution : $1 < 2 < 3 < 3 \cdot 2 < \ldots < 3 \cdot 2^{n-3}$. En effet, la somme totale est $3 \cdot 2^{n-2}$ et chaque nombre divise bien $3 \cdot 2^{n-2}$.

Solution 3 : Reformulation.
Supposons que nous avaons un ensemble $a_1, a_2 \ldots a_n$ vérifiant la condition du problème, et soient $b_i = \frac{1}{a_i}(\sum_{k=1}^{n} a_k)$. Nous avons alors que $b_1, b_2 \ldots b_n$ sont des entiers distincts satisfaisant

$$\frac{1}{b_1} + \frac{1}{b_2} + \cdots + \frac{1}{b_n} = 1$$

et que construire un ensemble de b_i avec cette propriété est équivalent au problème originel. Il y a plusieurs façons de le faire : une induction fonctionnerait par exemple en prenant $\{2, 3, 6\}$ comme ensemble de base et pour passer de n à $n+1$, on remplace b_n par $b_n + 1$ et $b_n^2 + b_n$ (en utilisant que $\frac{1}{x} - \frac{1}{x+1} = \frac{1}{x(x+1)}$).
Cette induction donne en fait une construction complètement différente des deux premières ; le cas de base est le même, mais à chaque fois qu'on augmente n de 1, on multiplie chaque élément de l'ensemble par $1 + \sum_{k=1}^{n} a_k$ et on remplace le plus petit élément, qui était 1 et qui est devenu $1 + \sum_{k=1}^{n} a_k$, par 1 et $\sum_{k=1}^{n} a_k$. Pour aller à $n = 4$, par exemple, on multiplie l'ensemble originel $\{1, 2, 3\}$ par 7 pour obtenir $\{7, 14, 21\}$, et on remplace finalement 7 par 6 et 1.

Marking Scheme

Solution 1

- 1P : Avoir l'idée de l'induction.
- 1P : Calculer le cas de base.
- 2P : Avoir l'idée du pas d'induction (ajouter la somme des éléments à l'ensemble).
- 2P : Montrer que le nouvel ensemble satisfait la condition.
- 1P : Terminer la preuve.

Solution 2

- 4P : Trouver une construction.
- 2P : Prouver que la condition est alors satisfaite.
- 1P : Terminer la preuve.

Z2) Trouver tous les nombres entiers $n \geq 2$ tels que tout diviseur $d > 1$ de n vérifie

$$d^2 + n \mid n^2 + d.$$

Réponse : n satisfait la condition du problème si et seulement si c'est un nombre premier.

Solution : Tout d'abord nous observons que tous les nombres premiers satisfont la condition : Si n est un nombre premier, la seule valeur que peut prendre d est $d = n$ et en remplaçant dans l'équation on a besoin de

$$n^2 + n \mid n^2 + n,$$

qui est clairement vraie.

Maintenant, si n n'est pas un nombre premier, on peut écrire $n = ab$, où a et b sont des entiers plus grands que 1. Supposons que n satisafait les conditions du problème. Si on choisit $d = a$ et on substitue $n = ab$ dans la divisibilité, on obtient

$$a^2 + ab \mid (ab)^2 + a.$$

Observons que les deux côtés sont divisibles par a, et on peut diviser les deux par a pour obtenir l'affirmation équivalente

$$a + b \mid ab^2 + 1.$$

De façon analogue, en choisissant $d = b$, nous obtenons

$$b^2 + ab \mid (ab)^2 + b \quad \Longleftrightarrow \quad b + a \mid a^2 b + 1.$$

Ainsi, nous voyons que $a + b$ divise les expressions $ab^2 + 1$ et $a^2 b + 1$, donc $a + b$ divise leur somme :

$$a + b \mid ab(a + b) + 2.$$

Comme $ab(a + b)$ est clairement divisible par $a + b$, la condition du dessus nous donne

$$a + b \mid 2.$$

Cependant, comme $a, b > 1$, nous avons $a + b > 2$, une contradiction avec la divisibilité plus haut. Nous concluons alors qu'aucun nombre composé (qui n'est pas premier) ne peut satisfaire la condition du problème.

Route alternative : Nous pouvons aussi soustraire $ab^2 + 1$ de $a^2 b + 1$ et ainsi obtenir

$$a + b \mid ab(a - b).$$

Maintenant, si nous pouvions forcer $\mathrm{pgdc}(a, b) = 1$, cela impliquerait $\mathrm{pgdc}(a + b, ab) = 1$, et ainsi

$$a + b \mid a - b,$$

ce qui est impossible. On peut choisir a, b premiers entre eux si et seulement si n a au moins deux diviseurs premiers distincts, donc il nous manque juste le cas où n est une puissance d'un premier. Or, si $n = p^k$ pour $k \geq 2$, nous pouvons choisir $d = p$ et obtenir

$$p^2 + p^k \mid p^{2k} + p \quad \Longrightarrow \quad p^2 \mid p(p^{2k-1} + 1) \quad \Longrightarrow \quad p \mid p^{2k-1} + 1,$$

ce qui est clairement impossible.

Marking scheme (additif)

- 1P : Affirmer que tous les premiers fonctionnent.
- 1P : Une condition de divisibilité de la forme $a + b \mid ab^2 + 1$ pour $n = ab$.
- 2P : La seconde condition de divisibilité $a + b \mid a^2b + 1$ pour $n = ab$.
- 2P : $a + b \mid a^2b + ab^2 + 2$ **ou** $a + b \mid ab(b - a)$ et exclure le cas $n = p^k$.
- 1P : Terminer la preuve.