Sélection IMO 2010

Troisième examen - 23 mai 2010

Durée: 4.5 heures
Chaque exercice vaut 7 points.

7. Dans un pays, certaines paires de villes sont reliées par des rues, qui peuvent être parcourues dans les deux sens. Une ville n'est jamais reliée directement à elle-même et entre deux villes il y a toujours au plus une rue. Le réseau routier est conçu de telle manière à ce que pour toute paire de villes, on puisse passer de l'une à l'autre (pas forcément de manière directe). En plus, le nombre de routes qui relie une ville avec d'autres est toujours pair.

Le gouvernement a décidé de reconstuire toutes les rues à sens unique. Cela sera fait de telle manière à ce que pour chaque ville, le nombre de routes entrantes soit le même que le nombre de routes sortantes.

(a) Montrer que c'est toujours possible.

(b) Montrer que quelle que soit la manière dont la reconstruction est faite, il sera possible, pour toute paire de villes, de passer de l'une à l'autre.

8. Trouver toutes les fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telles que pour tout x, y l'équation suivante est satisfaite:

$$f(x^4 + y^4) = xf(x^3) + y^2 f(y^2).$$

9. Soit ABC un triancle à angle aigu et soit H son orthocentre. Une droite passant par H a les points d'intersection D et E avec les droites AB et AC respectivement. Supposons que $|AD| = |AE|$. Soit $K \neq A$ le point d'intersection de la bissectrice de $\angle BAC$ avec le cercle circonscrit du triangle ADE. Montrer que HK divise BC en deux parties égales.