

Sélection OIM 2013

Premier examen - 4 mai 2013

Durée : 4.5 heures

Chaque exercice vaut 7 points.

1. Le cercle inscrit du triangle ABC touche les côtés AB , BC et CA aux points X, Y et Z respectivement. Soient I_1 , I_2 et I_3 les centres des cercles inscrits des triangles AXZ , BYX et CZY . Déterminer tous les triples de valeurs (α, β, γ) que le triple $(\angle BAC, \angle CBA, \angle ACB)$ peut avoir pour que le triangle ABC soit semblable à un triangle avec les sommets I_1 , I_2 et I_3 .

2. Soit P un polynôme à coefficients entiers tels que pour tout $u, v \in \mathbb{N}$:

$$u^{2^{2013}} - v^{2^{2013}} \mid P(u) - P(v).$$

Montrer qu'il existe un polynôme Q à coefficients entiers, tel que $P(x) = Q(x^{2^{2013}})$.

3. Soit n un nombre naturel. Trouver le plus grand nombre m satisfaisant la condition suivante :

Soit x_1, \dots, x_n une suite de nombre réels. Soit a la longueur maximale d'une sous-suite croissante et soit b la longueur maximale d'une sous-suite décroissante de x_1, \dots, x_n . Alors $a \cdot b \geq m$.

Remarque : Une sous-suite croissante (décroissante) de x_1, \dots, x_n est une suite de la forme $x_{i_1} \leq x_{i_2} \leq \dots \leq x_{i_k}$ ($x_{i_1} \geq x_{i_2} \geq \dots \geq x_{i_k}$) avec $1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_k \leq n$.

Bonne chance !

Sélection OIM 2013

Deuxième examen - 5 mai 2013

Durée : 4.5 heures

Chaque exercice vaut 7 points.

4. Soit p un nombre premier et $x, y, z < p$ trois nombres naturels distincts. On suppose que x^3, y^3 et z^3 ont le même reste après division par p . Montrer que $x^2 + y^2 + z^2$ est divisible par $x + y + z$.
5. Soit A un ensemble contenant $n \geq 1$ éléments et soient A_1, \dots, A_k des sous-ensembles de A distincts satisfaisant la condition suivante : deux de ces sous-ensembles sont disjoints ou l'un est inclus dans l'autre. Déterminer la valeur maximale de k .
6. Un maire et un tueur à gages se trouvent à deux points distincts d'un carré dont les côtés sont composés de miroirs. Le tueur à gages a un pistolet laser dont le rayon est réfléchi sur les miroirs et il veut tirer sur le maire. Le pistolet a seulement l'énergie pour un seul tir. Pour se protéger le maire peut placer un nombre fini de gardes du corps. Il peut aussi les placer sur les côtés du carré mais pas aux endroits occupés par le maire et par le tueur à gages. Si le rayon laser touche une personne, celle-ci meurt et le rayon est arrêté. Est-ce que le maire peut placer ses gardes du corps de telle sorte qu'il est impossible pour le tueur à gages de le toucher ?

Remarque 1 : Toutes les personnes impliquées sont considérées comme des points et toutes les personnes connaissent la position de toutes les autres.

Remarque 2 : Si le rayon laser arrive exactement dans l'angle du carré, il est réfléchi dans la direction de laquelle il est venu.

Bonne chance !

Sélection OIM 2013

Troisième examen - 25 mai 2013

Durée : 4.5 heures

Chaque exercice vaut 7 points.

7. Soit $n \geq 2$ un nombre naturel. Un échiquier de taille $n \times n$ est couvert entièrement par des carrés 2×2 . Les carrés 2×2 ont deux cases blanches diagonalement opposées et deux cases noires diagonalement opposées. Pour couvrir l'échiquier les carrés 2×2 peuvent être tournés et ils peuvent être superposés. Mais ils doivent être entièrement sur l'échiquier. Combien de cases noires restent visibles au minimum après un tel recouvrement ?

8. Déterminer s'il existent des nombres premiers p et q satisfaisant l'équation

$$p^2 + p + 1 = q^3.$$

9. Trouver toutes les fonctions $f : \mathbb{R}_{>0} \times \mathbb{R}_{>0} \rightarrow \mathbb{R}_{>0}$, satisfaisant les deux conditions suivantes :

(a) $f\left(f\left(\frac{x}{y}, y\right), z\right) = x \cdot f(1, z)$ pour tous $x, y, z \in \mathbb{R}_{>0}$;

- (b) La fonction $g : \mathbb{R}_{>0} \rightarrow \mathbb{R}_{>0}$, définie par $g(x) = f(x, x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}_{>0}$ est monotone.

Bonne chance !

Sélection OIM 2013

Quatrième examen - 26 mai 2013

Durée : 4.5 heures

Chaque exercice vaut 7 points.

- 10.** Trouver le plus grand $k > 0$, tel que pour tous $x, y, z > 0$ avec $x + y + z \leq kxyz$ on a :

$$\frac{1}{x + y + \sqrt{xy}} + \frac{1}{y + z + \sqrt{yz}} + \frac{1}{z + x + \sqrt{zx}} \leq \sqrt{\frac{3}{k}}.$$

- 11.** Soit ABC un triangle avec $\angle ACB \geq 90^\circ$ et k le cercle de diamètre AB et de centre O . Le cercle inscrit de ABC touche AC et BC aux points M et N respectivement. La droite MN coupe k aux points X et Y . Montrer que $\angle XOY = \angle ACB$.

- 12.** Trouver tous les nombres naturels n satisfaisant l'équation suivante :

$$\sum_{d|n} d^4 = n^4 + n^3 + n^2 + n + 1.$$

Bonne chance !