OSM - Test blanc

Wila - 10 mars 2016

Temps : 4 heures
Chaque exercice vaut 7 points.

1. Les nombres entiers positifs ou nuls sont coloriés en rouge ou en blanc, de telle manière que:

- Il y a au moins un nombre rouge et un nombre blanc.
- La somme d'un nombre rouge et un nombre blanc est blanche.
- Le produit d'un nombre rouge et un nombre blanc est blanche.

Montrer que le produit et la somme de deux nombres rouges est toujours rouge.

2. Soit ABC un triangle non-rectangle en A et M le milieu de BC. Les tangentes en B et C au cercle circonscrit du triangle ABC se coupent en D. De plus, la droite symétrique à BC par rapport à AB coupe la droite AM en T. Montrer que les triangles ABT et ACD sont semblables.

3. Soient x, y et z des nombres réels vérifiant $x < y < z < 6$. Trouver tous les tels triplets (x, y, z) qui satisfont:

$$\frac{1}{6-z} + \frac{1}{z-y} + \frac{1}{y-x} \leq x.$$

4. Soit n un nombre naturel. Annalena et Romina jouent au jeu suivant:
Au début il y a s smarties sur la table. Annalena commence à jouer, puis chacune effectue tour à tour son coup. Un coup consiste en l'une des actions suivantes:

(i) Manger un smarties.

(ii) Manger un nombre pair de smarties.

(iii) Manger un nombre de smarties divisible par n.

La gagnante est celle qui mange le dernier smarties. Pour quels s Romina peut-elle forcer la victoire?

5. Soit n un nombre naturel ayant un nombre pair de chiffres. Écrivons $n = \overline{ab}$, où $\overline{ab}$ est le nombre décimal obtenu en accolant a et b, avec a et b ayant le même nombre de chiffres.On définit $d(n) = a + b$, pour autant que b ne commence pas par un zéro. Par exemple, pour $n = 1729$, $a = 17, b = 29, d(n) = 17 + 29 = 46$. Trouver tous les entiers $n \geq 1000$ tels que le nombre de diviseurs de n vaut $d(n)$.

Bonne chance!