OIM Suisse - Présélection

Berne, Zurich - 5 avril, 2003

Durée: 2 heures
Chaque problème vaut 7 points.

1. 67 élèves doivent passer un examen. Celui-ci comprend 6 questions à choix multiples qui doivent toutes être répondues soit par *oui* soit par *non*. Chaque élève répond à toutes les six questions. Une réponse correcte à la k-ième question donne k points, une fausse $-k$ points.

(a) Démontrez qu'au moins deux élèves doivent forcément donner les mèmes réponses.

(b) Démontrez qu'au moins quatre élèves ont obtenu le mème nombre de points.

2. Soit ABC un triangle à angles aigus et soit O le centre du cercle circonscrit du triangle. La hauteur issue de A sur BC coupe le cercle en un point $D \neq A$, et la droite BO coupe le cercle en un point $E \neq B$. Démontrez qu'ABC et $BCDE$ ont la même aire.

3. Trouvez toutes les fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ qui satisfont l'équation suivante pour tout $x, y \in \mathbb{R}$:

$$f((x-y)^2) = x^2 - 2yf(x) + (f(y))^2$$

4. Etant donné un tableau à m lignes et n colonnes, de combien de façons différentes peut-on remplir ce tableau avec des 0 et des 1 pour que dans chaque ligne et chaque colonne il y ait un nombre pair de 1?

5. Démontrez l'inégalité suivante pour tout les nombres reels x, y, z avec $x + y + z = 1$:

$$\frac{x^2+y^2}{z} + \frac{y^2+z^2}{x} + \frac{z^2+x^2}{y} \geq 2$$