SMO - Finalrunde 2017

2. Prüfung - 11. März 2017

Zeit: 4 Stunden
Schwierigkeit: Die Aufgaben sind der Schwierigkeit nach geordnet.
Punkte: Jede Aufgabe ist 7 Punkte wert.

6. Das SMO-Lager hat mindestens vier Leiter. Je zwei Leiter sind entweder gegenseitig befreundet oder verfeindet. In jeder Gruppe von vier Leitern gibt es mindestens einen, der mit den drei anderen befreundet ist. Gibt es immer einen Leiter, der mit allen anderen befreundet ist?

7. Sei n eine natürliche Zahl, sodass es genau 2017 verschiedene Paare natürlicher Zahlen (a, b) gibt, welche die Gleichung

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{1}{n}$$

erfüllen. Zeige, dass n eine Quadratzahl ist.

Bemerkung: $(7, 4) \neq (4, 7)$

8. Sei ABC ein gleichschenkliges Dreieck mit Scheitelpunkt A und $AB > BC$. Sei k der Kreis mit Zentrum A durch B und C. Sei H der zweite Schnittpunkt von k mit der Höhe des Dreiecks ABC durch B. Weiter sei G der zweite Schnittpunkt von k mit der Schwerlinie durch B im Dreieck ABC. Sei X der Schnittpunkt der Geraden AC und GH. Zeige, dass C der Mittelpunkt der Strecke AX ist.

9. Betrachte ein konvexes 15-Eck mit Umfang 21. Zeige, dass man davon drei paarweise verschiedene Eckpunkte auswählen kann, die ein Dreieck mit Fläche kleiner als 1 bilden.

10. Seien x, y, z nichtnegative reelle Zahlen mit $xy + yz + zx = 1$. Zeige, dass gilt:

$$\frac{4}{x+y+z} \leq (x+y)(\sqrt{3}z+1).$$

Viel Glück!