

Sélection OIM 2012

Premier examen - 28 avril 2012

Durée : 4.5 heures

Chaque exercice vaut 7 points.

1. Soit n un nombre naturel. Trouver le plus grand nombre naturel d en fonction de n , tel qu'il existe une permutation a_1, a_2, \dots, a_n des nombres $1, 2, \dots, n$ avec

$$|a_i - a_{i+1}| \geq d, \quad \text{pour } i = 1, 2, \dots, n-1.$$

2. Un nombre entier m est une *vraie puissance*, s'il existe des nombres entiers positifs a et n , tels que $n > 1$ et $m = a^n$.

- (a) Montrer qu'il existe 2012 entiers positifs distincts, tels que pour tout sous-ensemble de ces nombres, la somme des éléments du sous-ensemble n'est pas une vraie puissance.
- (b) Montrer qu'il existe 2012 entiers positifs distincts, tels que la somme des éléments de chaque sous-ensemble de ces nombres est une vraie puissance.

3. Soit $ABCD$ un quadrilatère inscrit et k son cercle circonscrit. Soit S le point d'intersection de AB et CD et T le point d'intersection des tangentes à k aux points A et C . Montrer que $ADTS$ est un quadrilatère inscrit si et seulement si BD coupe le segment AC en deux.

Bonne chance !

Sélection OIM 2012

Deuxième examen - 29 avril 2012

Durée : 4.5 heures

Chaque exercice vaut 7 points.

4. Soit ABC un triangle avec $\angle BAC = 60^\circ$. Soit E un point sur la droite AB tel que B est entre A et E et tel que $BE = BC$. De manière analogue, soit F un point sur AC tel que C est entre A et F et tel que $CF = BC$. Soit K le point d'intersection du cercle circonscrit de ACE avec la droite EF . Montrer que K est sur la bissectrice de l'angle $\angle BAC$.
5. Soit $n \geq 6$ un nombre naturel. On considère un ensemble S de n nombres réels distincts. Montrer qu'il existe au moins $n - 1$ sous-ensembles de deux éléments de S distincts, tels que la moyenne arithmétique des deux éléments du sous-ensemble est supérieure ou égale à la moyenne arithmétique de tous les éléments de S .
6. Trouver toutes les fonctions surjectives $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ telles que pour tous $x, y \in \mathbb{R}$:

$$f(x + f(x) + 2f(y)) = f(2x) + f(2y)$$

Bonne chance !

Sélection OIM 2012

Troisième examen - 12 mai 2012

Durée : 4.5 heures

Chaque exercice vaut 7 points.

7. Soient p et q deux nombres premiers tels que

$$pq \mid 2012^{p+q-1} - 1.$$

Montrer qu'exactement un des deux nombres premiers est égal à 2011.

8. Soient f, g deux polynômes à coefficients entiers et soient a, b des points fixes entiers de $f \circ g$. Montrer qu'il existe des points fixes entiers c, d de $g \circ f$ tels que $a + c = b + d$.
Indication : Pour deux polynômes p, q on définit $p \circ q$ par $(p \circ q)(x) = p(q(x))$.

9. Déterminer le plus grand nombre naturel k avec la propriété suivante : Il est possible de partager les nombres naturels en k sous-ensembles disjoints A_1, \dots, A_k de telle sorte que pour tout $i \in \{1, \dots, k\}$, tout nombre naturel $n \geq 15$ est somme de deux éléments distincts de A_i .

Bonne chance !

Sélection OIM 2012

Quatrième examen - 13 mai 2012

Durée : 4.5 heures

Chaque exercice vaut 7 points.

- 10.** Soient a, b, c des nombres réels positifs avec $abc \geq 1$. Démontrer l'inégalité

$$\frac{a^4 - 1}{ab^3 + abc + ac^3} + \frac{b^4 - 1}{bc^3 + abc + ba^3} + \frac{c^4 - 1}{ca^3 + abc + cb^3} \geq 0.$$

- 11.** Soit ABC un triangle. Soient I le centre du cercle inscrit et AD le diamètre du cercle circonscrit de ABC . Soient E et F des points sur les rayons BA et CA tels que

$$BE = CF = \frac{AB + BC + CA}{2}.$$

Montrer que les droites EF et DI sont perpendiculaires.

- 12.** Trouver tous les nombres entiers $m, n \geq 2$ satisfaisant les deux conditions suivantes :

- (i) $m + 1$ est un nombre premier de la forme $4k + 3$ pour un entier k .
- (ii) Il existe un nombre premier p et un nombre entier $a \geq 0$ avec

$$\frac{m^{2^n-1} - 1}{m - 1} = m^n + p^a.$$

Bonne chance !