OSM - Test beige

Wila - 12 mars 2015

Temps : 4 heures
Chaque exercice vaut 7 points.

1. Trouver toutes les fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telles que pour tous $x, y \in \mathbb{R}$:

$$f(xy) \leq f(x+y).$$

2. 20 enfants ont faim et attendent leur dinner. Malheureusement Louis est un peu lent et il tire au sort l'ordre pour venir chercher à manger. Il distribue donc des tickets avec les numéros de 1 à 20. Celui qui a le 1, reçoit sa nourriture en premier. On redistribue ensuite des tickets avec les numéros de 1 à 19 et on répète ce même processus jusqu'à ce que tout le monde ait à manger. Curieusement, personne n'a reçu deux fois le même numéro. Horace a reçu le numéro 14 lors de la première distribution. Trouver tous les numéros que Horace a pu piocher lors du 9ème tirage.

3. Trouver toutes les fonctions $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ telles que pour tout nombre premier p et $n \in \mathbb{N}$:

$$f(n)^p \equiv n \pmod{f(p)}$$

4. Soient a, b, c des nombres réels positifs. Montrer que :

$$\frac{a^2}{a+b} + \frac{b^2}{b+c} \geq \frac{3a+2b-c}{4}.$$

5. Soit ABC un triangle et D un point sur le segment BC. Soit X un point à l'intérieur du segment BD et soit Y le point d'intersection de AX avec le cercle circonscrit de ABC. Soit P le deuxième point d'intersection des cercles circonscrits de ABC et de DXY. Montrer que P est indépendant du choix de X.

Bonne chance !