

Sélection OIM - 1er Examen

Zürich - 2 Mai 2015

Temps : 4.5 heures

Chaque exercice vaut 7 points.

1. Quel est le nombre maximal de cases 1×1 que l'on peut colorier en noir dans un échiquier $n \times n$ de telle sorte que tout carré 2×2 contienne au maximum 2 cases noires?

2. Soient $a, b, c \in \mathbb{R}$ avec $a, b, c \geq 1$. Montrer que

$$\min \left(\frac{10a^2 - 5a + 1}{b^2 - 5b + 10}, \frac{10b^2 - 5b + 1}{c^2 - 5c + 10}, \frac{10c^2 - 5c + 1}{a^2 - 5a + 10} \right) \leq abc.$$

3. Soit ABC un triangle avec $AB > AC$. Soit D un point sur AB tel que $DB = DC$ et M le milieu du côté AC . La parallèle à BC passant par D coupe la droite BM en K . Montrer que $\angle KCD = \angle DAC$.

Bonne chance!