

OSM - Sélection 2017

Premier examen - 6 mai 2017

Temps : 4.5 heures

Difficulté : Les exercices sont classés selon leur difficulté.

Points : Chaque exercice vaut 7 points.

1. Trouver toutes les fonctions $f: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$ telles que :

- (i) $f(p) > 0$ pour tout nombre premier p ,
- (ii) $p \mid (f(x) + f(p))^{f(p)} - x$ pour tout nombre premier p et pour tout $x \in \mathbb{Z}$.

2. Soit $n \geq 1$ un entier positif et soient x_1, \dots, x_n des nombres réels strictement positifs. Montrer que l'on peut choisir $a_1, \dots, a_n \in \{-1, 1\}$ tels que :

$$\sum_{i=1}^n a_i x_i^2 \geq \left(\sum_{i=1}^n a_i x_i \right)^2.$$

3. Soit $n \geq 3$ un entier positif. Quel est le nombre maximal de diagonales d'un n -gone régulier que l'on peut tracer, telles que si deux diagonales tracées se coupent à l'intérieur du n -gone, alors elles sont perpendiculaires ?

Bonne chance !