

OSM - Turno preliminare 2017

Lausanne, Lugano, Zürich - 14 gennaio 2017

Durata : 3 ore

Difficoltà : Gli esercizi relativi ad ogni tema sono ordinati secondo un ordine crescente di difficoltà.

Punti : Ogni esercizio vale 7 punti.

Geometria

- G1)** Sia ABC un triangolo con $AB \neq AC$ e cerchio circoscritto k . La tangente a k passante per A taglia BC in P . La bisettrice dell'angolo $\angle APB$ taglia AB in D . Mostrare che il triangolo ADE è equilatero.
- G2)** Sia ABC un triangolo rettangolo di ipotenusa AB . Un cerchio passante per C taglia due volte il lato AB nei punti P e Q , con P situato tra A e Q . Sia R il punto sul lato BC tale che l'angolo $\angle RAC = \frac{1}{2}\angle PCQS$. Siano T il punto di intersezione dei segmenti CP e AR e U il punto di intersezione dei segmenti CQ e BS . Mostrare che $RSTU$ è un quadrilatero inscritto.

Calcolo combinatorio

- K1)** Qual'è il numero massimo di skew-tetrominos che possiamo piazzare su una scacchiera (rettangolare) 8×9 ?



Osservazione: possiamo ruotare e riflettere specularmente i tetrominos

- K2)** Siano $m, n \geq 2$ interi positivi. Abbiamo quattro colori e vogliamo colorare ogni quadrato unitario di un rettangolo $m \times n$ in modo che in ogni quadrato 2×2 appaiano tutti e 4 i colori. Quante possibilità abbiamo?

Osservazione: due colorazioni sono considerate differenti quando esiste almeno un quadratino colorato diversamente.

Teoria dei numeri

- Z1)** Determinare tutte la paia (m, n) di interi positivi tali che

$$\text{mcm}(m, n) - \text{mcd}(m, n) = \frac{mn}{5}.$$

- Z2)** Siano a e b due interi positivi tali che

$$\frac{3a^2 + b}{3ab + a}$$

sia un intero. Quali valori può assumere questa espressione?