

IMO-Selektion - 1. Prüfung

Zürich - 2. Mai 2015

Zeit: 4.5 Stunden

Jede Aufgabe ist 7 Punkte wert.

1. Sei n eine natürliche Zahl. Was ist die maximale Anzahl 1×1 Quadrate, die man in einem $n \times n$ Quadrat schwarz färben kann, sodass in jedem 2×2 Quadrat höchstens 2 kleine Quadrate schwarz gefärbt sind?

2. Seien $a, b, c \in \mathbb{R}$ mit $a, b, c \geq 1$. Zeige, dass gilt:

$$\min \left(\frac{10a^2 - 5a + 1}{b^2 - 5b + 10}, \frac{10b^2 - 5b + 1}{c^2 - 5c + 10}, \frac{10c^2 - 5c + 1}{a^2 - 5a + 10} \right) \leq abc.$$

3. Sei ABC ein Dreieck mit $AB > AC$ und sei M der Mittelpunkt der Seite AC . Weiter sei D ein Punkt auf der Seite AB , sodass $DB = DC$ gilt. Die Parallele zu BC durch D und die Gerade BM schneiden sich im Punkt K . Zeige, dass $\angle KCD = \angle DAC$ gilt.

Viel Glück!