

**Zeit:** 3 Stunden

Zürich, Lausanne, Lugano

**Schwierigkeit:** Die Aufgaben eines Themenbereichs sind der Schwierigkeit nach geordnet.

13. Dezember 2025

**Punkte:** Jede Aufgabe ist 7 Punkte wert.

## Geometrie

**G1)** Seien  $\Gamma_1$  und  $\Gamma_2$  zwei Kreise, die sich in den Punkten  $X$  und  $Y$  schneiden. Sei  $\ell$  eine Gerade, welche  $\Gamma_1$  in den Punkten  $A$  und  $C$ , und  $\Gamma_2$  in den Punkten  $B$  und  $D$  schneidet, sodass  $A, B, C, D$  in dieser Reihenfolge auf  $\ell$  liegen. Sei  $P$  der Schnittpunkt von  $XA$  mit  $YB$  und  $Q$  der Schnittpunkt von  $XD$  und  $YC$ .

Zeige, dass  $PQ$  parallel zu  $\ell$  ist.

**G2)** Seien  $A, B, C, D, E$  fünf Punkte, die in dieser Reihenfolge auf einem Kreis liegen, sodass  $AE$  der Durchmesser ist und  $BC > CD$  gilt. Sei  $F$  der Schnittpunkt von  $AD$  und  $BE$ . Sei  $O$  der Umkreismittelpunkt des Dreiecks  $BFD$ . Sei  $Y$  der Schnittpunkt der Reflektion der Geraden  $BD$  an  $BC$  und der Reflektion der Geraden  $BD$  an  $DC$ .

Zeige, dass  $\angle OYC = 90^\circ$ .

## Kombinatorik

**K1)** Seien  $k \leq a \leq b$  natürliche Zahlen. Ruhi hat eine Folge von  $a+b$  Buchstaben, welche  $a$  identische Exemplare des Buchstabens  $M$ , und  $b$  identische Exemplare des Buchstabens  $O$  beinhaltet. Sie möchte, dass ihre Folge insgesamt genau  $k$  Paare von aufeinanderfolgenden Buchstaben beinhaltet, die das Wort  $MO$  bilden. Auf wieviele Arten kann sie die Buchstaben anordnen?

**K2)** Mark hat 20 Bücherregale der Höhen  $1, 1, 2, 2, \dots, 10, 10$ , wobei zwei Bücherregale derselben Höhe nicht unterscheidbar sind. Er möchte diese Regale in einer Reihe so aufstellen, dass seine Katze von einem Bücherregal zum nächsten springen kann, beginnend vom Bücherregal ganz links, bis zu dem ganz rechts. Seine Katze ist faul und hat zwei Bedingungen:

- Genau einer dieser 19 Sprünge ist zu einem strikt grösseren Bücherregal.
- Zwischen den zwei gleich hohen Bücherregalen darf sich kein strikt grösseres Bücherregal befinden.

Wie viele Möglichkeiten hat Mark, seine Bücherregale aufzustellen, damit beide Bedingungen erfüllt sind?

## Zahlentheorie

**Z1)** Bestimme alle Triple  $(p, q, n)$  natürlicher Zahlen, sodass  $p$  und  $q$  Primzahlen sind und

$$20p + 26q = n^2 + 48.$$

**Z2)** Bestimme alle natürlichen Zahlen  $n$ , sodass

$$n^3 \mid (n+1)(n+2)(n+3)(n+4)(n+5)(n+6).$$

Viel Glück!