OSM - Tour final

Premier examen - 11 mars 2016

Temps : 4 heures
Chaque exercice vaut 7 points.

1. Soit ABC un triangle avec $\angle BAC = 60°$. Soit E le point sur le côté BC tel que $2\angle BAE = \angle ACB$. Soit D la deuxième intersection de AB avec le cercle circonscrit au triangle AEC et soit P la deuxième intersection de CD avec le cercle circonscrit au triangle DBE. Calculer la mesure de l'angle $\angle BAP$.

2. Soient a, b et c les côtés d'un triangle, ce qui signifie : $a + b > c$, $b + c > a$ et $c + a > b$. Montrer que

$$\frac{ab+1}{a^2+ca+1} + \frac{bc+1}{b^2+ab+1} + \frac{ca+1}{c^2+bc+1} > \frac{3}{2}.$$

3. Déterminer tous les nombres naturels n pour lesquels il existe des nombres premiers p, q tels que l'équation suivante est vérifiée

$$p(p+1) + q(q+1) = n(n+1).$$

4. On considère 2016 points distincts dans le plan. Montrer qu'il existe au moins 45 distances différentes entre ces points.

5. Soit ABC un triangle rectangle en C et M le milieu de AB. Soit G un point situé sur le segment MC et P un point sur la droite AG tel que $\angle CPA = \angle BAC$. De plus, soit Q un point sur la droite BG tel que $\angle BQC = \angle CBA$. Montrer que les cercles circonscrits aux triangles AQG et BPG se coupent sur le segment AB.

Bonne chance !