

# OSM - Sélection 2018

Troisième examen - 26 mai 2018

**Temps :** 4.5 heures

**Difficulté :** Les exercices sont classés selon leur difficulté.

**Points :** Chaque exercice vaut 7 points.

7. Soit  $n$  un nombre naturel. Une suite de  $3n$  lettres est appelée *roumaine* si les lettres  $I$ ,  $M$  et  $O$  y apparaissent chacune exactement  $n$  fois. Un *swap* est l'échange de deux lettres voisines. Montrer que pour toute suite roumaine  $X$  il existe une suite roumaine  $Y$  telle qu'il est impossible d'obtenir  $Y$  à partir de  $X$  avec strictement moins de  $\frac{3n^2}{2}$  swaps.

8. Déterminer tous les nombres naturels  $n \geq 2$  tels que pour tous les nombres entiers  $0 \leq i, j \leq n$  :

$$i + j \equiv \binom{n}{i} + \binom{n}{j} \pmod{2}.$$

9. Soient  $a, b, c, d$  des nombres réels. Montrer que

$$(a^2 - a + 1)(b^2 - b + 1)(c^2 - c + 1)(d^2 - d + 1) \geq \frac{9}{16}(a - b)(b - c)(c - d)(d - a).$$

Bonne chance !