¿½ = fl¿½ = fl¿½ = fl¿½ = fl¿½ = fl¿½ = fl

Solutions de l'examen du tour prüliminaire 2005

Tout d'abord voici quelques remarques ü propos de la distribution des points. Une solution complüte et correcte vaut 7 points pour chaque exercice. Pour une solution complüte avec quelques fautes ou imprücisions mineures qui n'influencent pas significativement la justesse de la solution proposüe, nous donnons 6 points. Quand il s'agit d'une solution non complütüe, on distribue des points partiels en fonction des rüsultats intermüdiaires obtenus. Un exercice possüde souvent plusieurs solutions. Si quelqu'un essaie par exemple de rüsoudre un exercice de deux faüons diffürentes et obtient 3 points pour la premiüre solution, 2 points pour la deuxiüme, alors le nombre de ses points sera 3 et non pas 5. Autrement dit, les points obtenus ü travers diffürentes solutions d'un müme exercice ne sont *pas* cumulables. Les schümas de correction ne sont prüsentüs ici qu'ü titre indicatif. Si quelqu'un propose une solution diffürente, nous essaierons de lui donner les points qu'il aurait eus pour la müme prestation en rendant une solution düjü prüsentüe. Les schümas ci-dessous sont ü interprüter de la maniüre suivante:
Si quelqu'un arrive jusqu'ü une ütape donnüe, il obtient les points correspondants.
Les exceptions ü cette rügle sont toujours clairement mentionnües.

1. Dans un rectangle $ABCD$ donnü, tel que $|AD| \leq |AB|$, soient M le milieu du segment AD et N le milieu du segment BC. Soit E la projection de B sur CM.

(a) Montrer que $ANEM$ est un trapüze isocüle.

(b) Montrer que l'aire du quadrilatüre $ABNE$ vaut la moitiü de l'aire de $ABCD$.

Solution:

A cause de $|AD| \leq |AB|$, le point E se trouve ü l'intürieur du rectangle $ABCD$.

(a) Comme le segment AN peut ütre envoyü sur MC par une translation de vecteur $\overrightarrow{AM}$, AN et ME sont parallüles. Il reste ü prouver que $\sphericalangle MAN = \sphericalangle ENA$. Soit F l'itersection de AN avec EB et posons $\alpha = \sphericalangle MAN$. Dans l'ordre, nous trouvons ensuite les rüsultats suivants (les explications sont entre parenthüses, ü comparer avec la figure):

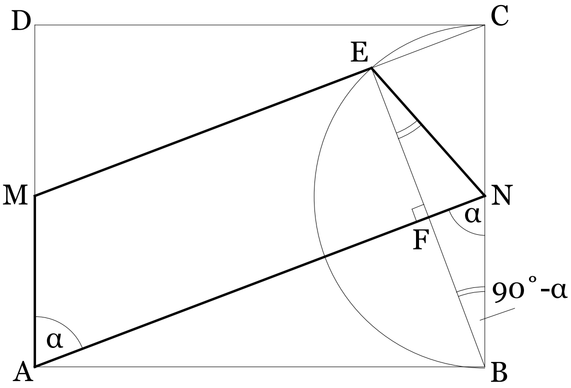
1.) $\sphericalangle BNA = \alpha$ (Angles alternes internes aux parallüles AD et BC)

2.) $\sphericalangle NBF = 90° - \alpha$ ($\triangle BNF$ est un triangle rectangle, car AN est parallüle ü MC et MC est par hypothüse perpendiculaire ü EB.)

3.) $\sphericalangle BEN = 90° - \alpha$ (Le cercle de Thalüs du segment BC montre que $\triangle NEB$ est un triangle rectangle.)

4.) $\sphericalangle ENA = \alpha$ ($\triangle ENF$ est ügalement un triangle rectangle.)

(b) Comme les triangles $\triangle ABN$ et $\triangle CDM$ sont semblables, on peut simplifier le problüme: il nous suffit de montrer que $\triangle ANE$ couvre la moitiü du parallülogramme $ANCM$. Cela peut ütre fait de diverses maniüres, nous allons prüsenter ici deux solutions qui utilisent le fait que $ANEM$ est un trapüze isocüle (les crochets reprüsentent l'aire):



1.) $[ANCM] = AN \cdot EF = 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot AN \cdot EF = 2 \cdot [ANE]$

2.) Soit P le point d'intersection de AN avec la droite parallüle ü NC passant par E. $APEM$ est alors un parallülogramme qui est dücoupü en deux parties ügales par AE. Une moitiü appartient au triangle ANE, l'autre pas. Raisonnement analogue pour le parallülogramme $PNCE$.

Remarques et schüma des points:

La partie (a) valait quatre points. Il y avait des points partiels *indüpendants* pour les observations suivantes:
AN est parallüle ü MC (1 P)
Remarquer qu'il suffisait ensuite de montrer que $\triangle BNE$ est isocüle (1 P).
La partie (b) donnait trois points. Il n'y a pas eu de points partiels.

2. Montrer que dans un ennüagone (polygone ü neuf cütüs), il existe deux diagonales distinctes telles que les droites sur lesquelles elles se trouvent sont parallüles ou forment un angle plus petit que $7°$.

1üre solution:

Un ennüagone convexe possüde $\binom{9}{2} - 9 = 27$ diagonales. On fait glisser les diagonales parallülement jusqu'ü ce qu'il se coupent toutes en un point P fixü. On choisit ensuite une diagonale arbitraire et on l'appelle d_1. Si on tourne d_1 dans le sens contraire aux aiguilles d'une montre autour de P, elle va couvrir les autres diagonales les unes aprüs les autres. On appelle celles-ci dans cet ordre-lü $d_2, \ldots, d_{27}$. Soit maintenant α_i l'angle entre d_i et d_{i+1} pour $1 \leq i \leq 26$ et α_{27} l'angle entre d_{27} et d_1. Nous avons ainsi $\alpha_1 + \ldots + \alpha_{27} = 180°$, ce qui entraüne qu'un des angles vaut au plus $180°/27 < 7°$. Les diagonales correspondantes de l'ennüagone sont alors parallüles ou les droites sur lesquelles elles se trouvent forment un angle plus petit que $7°$.

2e solution:

Soient $d_1, \ldots, d_{27}$ les diagonales de l'ennüagone. On choisit une droite horizontale h qui se trouve sous l'ennüagone et on düfinit l'angle α_i comme le plus petit angle duquel on doit tourner la droite h pour qu'elle soit parallüle ü d_i (donc $\alpha_i = 0$ si d_i et h sont parallüles). Par construction, $0 \leq \alpha_i < 180°$. En divisant l'intervalle $[\,0°, 180°\,[$ en 26 sous-intervalles de longueur identique, on trouve, d'aprüs le principe des tiroirs, que deux angles α_i sont dans le müme sous-intervalle. Les diagonales correspondantes sont alors parallüles ou les droites sur lesquelles elles se trouvent forment un angle plus petit que 7°.

Remarques et schüma des points:

Calculer correctement le nombre de diagonales donnait 1 point. En fonction de la justesse et la complütude de l'argumentation prüsentüe, le nombre total des points variait entre 2 et 7. Avoir remarquü que $180°/27 < 7°$ donnait en tout 2 points. Les solutions n'ayant pas introduit de point ou de droite fixe ne donnaient en günüral pas droit ü plus que 5 points.

3. Soient n et m deux nombres naturels premiers entre eux. Montrer que dans ce cas

$$m^3 + mn + n^3 \qquad \text{et} \qquad mn(m+n)$$

sont ügalement premiers entre eux.

Solution:

On montre d'abord que $m^3 + mn + n^3$ et m sont premiers entre eux. Supposons le contraire, il existe alors un nombre premier qui divise les deux ü la fois. Mais p doit alors ügalement diviser $(m^3 - mn + n^3) - m(m^2 + n) = n^3$, donc n, ce qui est en contradiction avec le fait que m et n sont premiers entre eux. De faüon analogue, on peut montrer que $m^3 + mn + n^3$ et n sont premiers entre eux. Soit ensuite p un diviseur commun de $m^3 + mn + n^3$ et de $m + n$. Il divise alors ügalement $(m^3 + mn + n^3) - (m + n)(m^2 - mn + n^2) = mn$, donc m ou n, ce qui contredit les rüsultats obtenus prücüdemment. On peut en conclure que le premier nombre n'a pas de diviseur commun plus grand que 1 avec les trois facteurs de droite, donc avec leur produit non plus. Les deux nombres sont ainsi premiers entre eux.

Remarques et schüma des points:

Avoir remarquü qu'il suffit de montrer que le cütü gauche et les nombres n, m et $m + n$ resp. sont premiers entre eux, valait 1 point. Deux points *supplümentaires* ont ütü donnüs pour avoir montrü que $pgdc(m^3 + mn + n^3, m) = 1$.
Beaucoup de participants ont essayü d'argumenter ü l'aide de la divisibilitü ou avec des diviseurs arbitraires de m et n. Dans ces cas, il fallait faire attention au fait que 'premiers entre eux' et 'ne divise pas' ne sont pas synonymes. Pour une argumentation incorrecte, des points ont ütü enlevüs en consüquence.

4. Soit ABC un triangle avec $\sphericalangle BAC = 60°$. Trouver tous les points P ü l'intürieur du triangle qui ont la propriütü suivante:

Si D est la projection de P sur BC, E la projection de P sur CA et F la projection de P sur AB, alors $\sphericalangle EDF = 30°$.

Solution:

On pose $\alpha = \sphericalangle CAB$, $\beta = \sphericalangle ABC$, $\gamma = \sphericalangle BCA$, ainsi que $\varphi = \sphericalangle EDP$ et $\psi = \sphericalangle FDP$. Comme $\sphericalangle PEC = \sphericalangle PDC = 90°$, $EPDC$ est un quadrilatüre inscrit, ce qui entraüne $\sphericalangle ECP = \varphi$. De faüon analogue, $FPDB$ est un quadrilatüre inscrit, ce qui entraüne $\sphericalangle FBP = \psi$. Il s'ensuit que

$$\begin{aligned} \sphericalangle BPC &= 180° - \sphericalangle PBC - \sphericalangle PCB \\ &= 180° - (\beta - \psi) - (\gamma - \varphi) \\ &= (180° - \beta - \gamma) + \varphi + \psi \\ &= \alpha + (\varphi + \psi) = 60° + \sphericalangle EDF. \end{aligned}$$

Nous avons donc $\sphericalangle EDF = 30°$ si et seulement si $\sphericalangle BPC = 90°$. Les points P cherchüs sont ainsi exactement les point qui sont ü l'intürieur de ABC et qui se trouve sur le cercle de Thalüs du segment BC.

Remarques et schüma des points:

Trouver les quadrilatüres inscrits $EPDC$ et $FPDB$ valait 1 points (mais pas le quadrilatüre inscrit $AFPE$). *Indüpendamment de cela*, diviser l'angle $\sphericalangle EDF$ en deux angles $\sphericalangle EDP$ et $\sphericalangle PDF$ donnait ügalement 1 point. Il pouvait y avoir un troisiüme point si on combinait ces deux informations pour montrer que $\sphericalangle EDP = \sphericalangle ECP$ et $\sphericalangle PDF = PBF$. 1 point a ütü enlevü ü ceux qui n'ont pas montrü que tous les points du cercle de Thalüs remplissaient la condition.

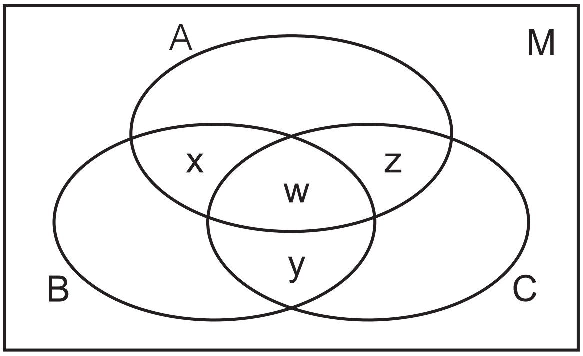
5. Soit M un ensemble ü n ülüments. Combien y a-t-il de possibilitüs de choisir trois sous-ensembles A, B, C de M tels que

$$A \cap B \neq \emptyset, \quad B \cap C \neq \emptyset, \quad C \cap A \neq \emptyset,$$

$$A \cap B \cap C = \emptyset.$$

Solution:

Considürons le diagramme de Venn de la figure. Choisir un triple (A, B, C) revient au müme que de distribuer les n ülüments de M dans les huit secteurs du diagramme, en laissant le secteur w vide, mais pas les secteurs x, y et z.



Nous comptons d'abord le nombres de triples (A, B, C) tels que $A \cap B \cap C = \emptyset$. Les n ülüments peuvent ütre placüs dans n'importe quel secteur en dehors de w. Selon la rügle de multiplication, il y a 7^n tels triples.

Nous devons encore enlever de ce rüsultat le nombre de triples (A, B, C) tels que $A \cap B = \emptyset$ ou $B \cap C = \emptyset$ ou $C \cap A = \emptyset$ (attention, nous avons ici automatiquement $A \cap B \cap C = \emptyset$, cette condition n'est donc plus ü prendre en considüration). On pose

$$\begin{aligned} X &= \{(A, B, C) \mid A \cap B = \emptyset\}, \\ Y &= \{(A, B, C) \mid B \cap C = \emptyset\}, \\ Z &= \{(A, B, C) \mid C \cap A = \emptyset\}. \end{aligned}$$

Selon le principe d'inclusion-exclusion, nous avons

$$|X \cup Y \cup Z| = |X| + |Y| + |Z| - |X \cap Y| - |Y \cap Z| - |Z \cap X| + |X \cap Y \cap Z|,$$

de plus, pour des raisons de symütrie, $|X| = |Y| = |Z|$ et $|X \cap Y| = |Y \cap Z| = |Z \cap X|$. Les triples en X correspondent ü la distribution, oü x et w restent vides, nous avons ainsi $|X| = 6^n$. Chez les triples de $|X \cap Y|$, c'est les secteurs w, x et y qui doivent rester vides, ce qui nous donne $|X \cap Y| = 5^n$. Finalement, chez les triples de $|X \cap Y \cap Z|$ aucun ülüment n'est mis dans les secteurs w, x, y et z, donc $|X \cap Y \cap Z| = 4^n$. En combinant ces rüsultats, nous obtenons $|X \cup Y \cup Z| = 3 \cdot 6^n - 3 \cdot 5^n + 4^n$. Le nombre cherchü vaut donc

$$7^n - 3 \cdot 6^n + 3 \cdot 5^n - 4^n.$$

Remarques et schüma des points:

L'application de la formule 7^n moins le nombre de distributions avec $A \cap B = \emptyset$ ou $B \cap C = \emptyset$ ou $A \cap C = \emptyset$ donnait 2 points. Une implümentation juste de la formule d'inclusion-exclusion valait deux points *supplümentaires*.
D'autres approches donnaient en günüral maximum 1 point, car elles n'aboutissaient pas ü une formule explicite.