

SMO - Weisse Prüfung

Wila - 10. März 2016

Zeit: 4 Stunden

Jede Aufgabe ist 7 Punkte wert.

1. Jede nichtnegative ganze Zahl ist entweder rot oder weiss gefärbt, sodass gilt:

- Es gibt mindestens eine rote und eine weisse Zahl.
- Die Summe einer roten und einer weissen Zahl ist weiss.
- Das Produkt einer roten und einer weissen Zahl ist rot.

Zeige, dass das Produkt und die Summe zweier roter Zahlen immer rot ist.

2. Soit ABC un triangle non-rectangle en A et M le milieu de BC . Les tangentes en B et C au cercle circonscrit du triangle ABC se coupent en D . De plus, la droite symétrique à BC par rapport à AB coupe la droite AM en T . Montrer que les triangles ABT et ACD sont semblables.

3. Seien x, y und z reelle Zahlen mit $x < y < z < 6$. Finde alle Tripel (x, y, z) , sodass gilt:

$$\frac{1}{6-z} + \frac{1}{z-y} + \frac{1}{y-x} \leq x.$$

4. Sei n eine natürliche Zahl. Annalena und Romina spielen das folgende Spiel:

Am Anfang sind s Smarties auf dem Tisch. Die beiden machen abwechselungsweise ihren Zug, wobei Annalena beginnt. Ein Zug besteht aus einer der folgenden Aktionen:

- (i) Esse ein Smarties.
- (ii) Esse eine prime Anzahl Smarties.
- (iii) Esse eine durch n teilbare Anzahl Smarties.

Diejenige, die das letzte Smarties isst, gewinnt. Für welche s kann Romina einen Sieg erzwingen?

5. Soit n un nombre naturel ayant un nombre pair de chiffres. Ecrivons $n = \overline{ab}$, où \overline{ab} est le nombre décimal obtenu en accolant a et b , avec a et b ayant le même nombre de chiffres. On définit $d(n) = a + b$, pour autant que b ne commence pas par un zéro. Par exemple, pour $n = 1729$, $a = 17, b = 29, d(n) = 17 + 29 = 46$. Trouver tous les entiers $n \geq 1000$ tels que le nombre de diviseurs de n vaut $d(n)$.

Viel Glück!