

# Geometrie I - Winkeljagd

Daniel Sprecher

Aktualisiert: 1. Dezember 2015  
vers. 1.0.0

## Inhaltsverzeichnis

1 Einleitung	2
2 Winkel im Dreieck	2
3 Winkel im Kreis	5
4 Sehnenvierecke	9
5 Tipps für die Prüfung	12

# 1 Einleitung

Dieses Skript soll einen ersten Überblick über die Geometrieaufgaben geben, wie sie an Mathematik-Olympiaden gestellt werden. Die zur Lösung der Aufgaben benötigte Theorie ist weder viel noch schwierig zu verstehen, sondern recht intuitiv. Die Schwierigkeit der Aufgaben liegt vielmehr darin, einen vernünftigen Ansatz zu finden, das Wesentliche in einer Skizze zu erkennen und die gefundenen Tatsachen so zu verknüpfen, dass ein vollständiger Beweis entsteht.

Es wird vorausgesetzt, dass der Leser sich mit dem Konstruieren von geometrischen Figuren auskennt (Bsp. Thaleskreis). Insbesondere sollten die Existenz, Konstruktion und wichtigsten Eigenschaften der folgenden speziellen Punkte im Dreieck bekannt sein: Umkreismittelpunkt, Inkreismittelpunkt, Höhenschnittpunkt, Schwerpunkt (Welche der genannten Punkte können auch ausserhalb des Dreiecks liegen? Wie sieht dann das Dreieck aus?). Zudem wird erwartet, dass elementare Sätze wie der Satz von Pythagoras und Grundbegriffe wie spitzwinklig ( $< 90^\circ$ ) und stumpfwinklig (zwischen  $90^\circ$  und  $180^\circ$ ) bekannt sind.

In jedem Kapitel hat es einige Beispiele mit Lösungen. Sie sollen dich ins Thema einstimmen und die gegebenen Sätze in Aktion zeigen. Die Lösungen der Beispiele sind eher ausführlich geschrieben, an den Prüfungen müsst ihr die Beweise nicht so ausführlich geben, es dürfen aber auch keine Schritte oder Fälle fehlen (siehe Kapitel 5).

## 2 Winkel im Dreieck

Wir beginnen gleich mit dem ersten Beispiel.

**Beispiel 1.** *Beweise, dass in einem beliebigen Dreieck  $ABC$  die Summe der drei Innenwinkel  $180^\circ$  beträgt.*

*Lösung.* Seien wie üblich  $\alpha = \angle CAB$ ,  $\beta = \angle ABC$ ,  $\gamma = \angle BCA$  und sei  $g$  die Gerade parallel zur Geraden  $AB$  durch den Punkt  $C$  (Abb. 1). Da die drei Winkel bei  $C$  zusammen eine Gerade bilden, gilt

$$\angle(g, CA) + \gamma + \angle(CB, g) = 180^\circ.$$

Nun ist  $\angle(g, CA)$  gleich gross wie  $\alpha$  und  $\angle(CB, g) = \beta$ , da sie jeweils Gegenwinkel an den Parallelen  $g$  und  $AB$  bilden. Damit ergibt sich  $\alpha + \beta + \gamma = 180^\circ$ .  $\square$

Da sich jedes konvexe  $n$ -Eck aus  $n - 2$  Dreiecken aufbauen lässt, ist die Winkelsumme für ein beliebiges  $n$ -Eck  $(n - 2) \cdot 180^\circ$  (genauer Beweis geht mit vollständiger Induktion). Aus Beispiel 1 folgt unmittelbar der **Aussenwinkelsatz**, den man sich anhand einer Zeichnung am besten selber klar macht.

**Satz 2.1** (Aussenwinkelsatz). *Ein Außenwinkel eines Dreiecks ist gleich gross wie die Summe der beiden nicht-anliegenden Innenwinkel.*

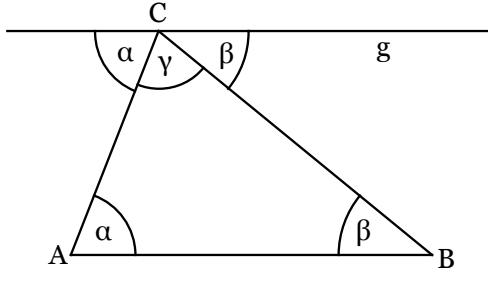


Abbildung 1: Lösung zu Beispiel 1

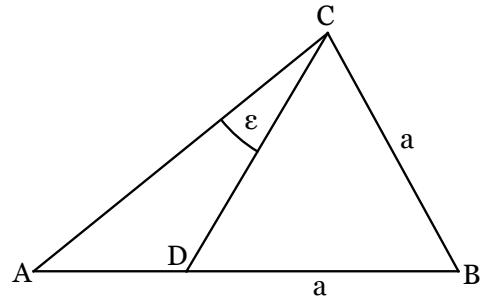


Abbildung 2: Beispiel 2

**Beispiel 2.** Im Dreieck  $ABC$  sei die Seite  $AB$  länger als die Seite  $BC$ . Der Punkt  $D$  liege so auf der Strecke  $AB$ , dass  $BD = BC$  ist (Abb. 2). Wie gross ist  $\epsilon = \angle ACD$ , wenn man weiss, dass  $\angle BCA - \angle CAB = 30^\circ$  gilt?

*Lösung.* Wieder seien  $\alpha$  und  $\gamma$  die Eckwinkel von  $\triangle ABC$  bei  $A$  bzw.  $C$ . Der Winkel  $\angle CDB$  ist Aussenwinkel von  $\triangle ADC$  und somit gleich gross wie die Summe der beiden Innenwinkel bei  $A$  und  $C$  (Abb. 3):

$$\angle CDB = \alpha + \epsilon. \quad (1)$$

Nach Voraussetzung ist  $\triangle BCD$  gleichschenklig und darum gilt

$$\angle CDB = \angle BCD = \gamma - \epsilon. \quad (2)$$

Kombiniert man nun die Gleichungen (1) und (2) erhält man

$$\begin{aligned} \alpha + \epsilon &= \angle CDB = \gamma - \epsilon \\ \Leftrightarrow \alpha + 2\epsilon &= \gamma \\ \Leftrightarrow 2\epsilon &= \gamma - \alpha = 30^\circ \\ \Leftrightarrow \epsilon &= 15^\circ \end{aligned}$$

□

Die Nebenbedingung des letzten Beispiels scheint auf den ersten Blick recht seltsam und man weiss zuerst nicht so recht, was man damit anfangen soll. Dies ist häufig so und es gibt kein Patentrezept, wie man jeweils vorgehen soll. In dieser Aufgabe waren wir erfolgreich, indem wir eine Bedingung am Anfang einfach mal ignorierten. Erst nachdem wir eine Beziehung zwischen den in der Aufgabe erwähnten Winkel ( $\alpha, \gamma, \epsilon$ ) hergestellt hatten, wurde klar wie man die Nebenbedingung verwenden kann. Manchmal ist es aber auch so, dass man aus den Nebenbedingungen Hinweise zur Lösung der Aufgabe herauslesen kann.

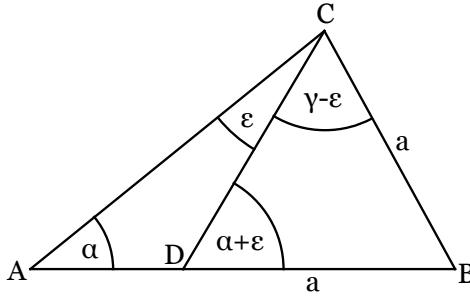


Abbildung 3: Lösung zu Beispiel 2

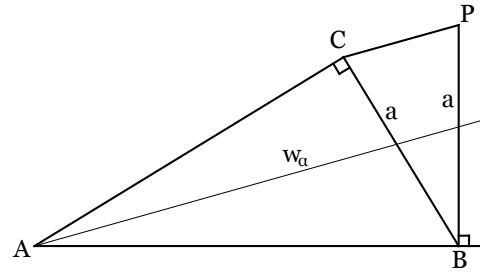


Abbildung 4: Beispiel 3

**Beispiel 3.** Sei  $ABC$  ein rechtwinkliges Dreieck mit Hypotenuse  $AB$  (Abb. 4). Der Punkt  $P$  habe die Eigenschaft, dass die Geraden  $PB$  und  $AB$  rechtwinklig aufeinander stehen und  $PB = CB$  gilt. Zeige, dass die Gerade  $PC$  entweder rechtwinklig oder parallel zur Winkelhalbierenden  $w_\alpha$  von Winkel  $\alpha = \angle CAB$  ist.

*Lösung.* Es gibt zwei Punkte, welche die Bedingungen für  $P$  erfüllen. Sei  $P_1$  diejenige Möglichkeit, die auf der selben Seite von Gerade  $AB$  liegt wie  $C$  (Abb. 5) und  $P_2$  diejenige Möglichkeit, welche auf der gegenüberliegenden Seite von  $AB$  liegt (Abb. 6).

Da  $\gamma = 90^\circ$  ist, gibt es eine direkte Beziehung zwischen  $\alpha$  und  $\beta$ :

$$\beta = 90^\circ - \alpha$$

und somit ist

$$\angle CBP_1 = \alpha.$$

Das Dreieck  $BP_1C$  ist nach Voraussetzung gleichschenklig und es gilt darum

$$\angle BP_1C = \angle P_1CB.$$

Für die Winkelsumme in diesem Dreieck erhalten wir

$$\begin{aligned} \alpha + 2 \cdot \angle P_1CB &= 180^\circ \\ \Leftrightarrow \angle P_1CB &= 90^\circ - \frac{\alpha}{2}. \end{aligned}$$

Sei  $Q$  der Schnittpunkt von  $w_\alpha$  und  $CB$ . Da  $\angle CAQ = \frac{\alpha}{2}$  ist, bekommen wir

$$\angle AQC = 90^\circ - \frac{\alpha}{2} = \angle P_1CB.$$

$\angle AQC$  und  $\angle P_1CB$  sind also Gegenwinkel und darum sind  $w_\alpha$  und  $P_1C$  parallel.

Betrachten wir nun noch die Situation für  $P_2$ . Es gilt  $\angle P_2BC = 180^\circ - \alpha$  und darum

$$\angle BCP_2 = \frac{\alpha}{2}.$$

Sei nun  $R$  der Schnittpunkt von  $w_\alpha$  mit  $CP_2$ . In  $\triangle QCR$  gilt

$$\angle QCR + \angle RQC = \angle BCP_2 + (90^\circ - \angle CAQ) = \frac{\alpha}{2} + 90^\circ - \frac{\alpha}{2} = 90^\circ.$$

Also ist  $\angle CRQ = 90^\circ$  und  $w_\alpha \perp CP_2$ . □

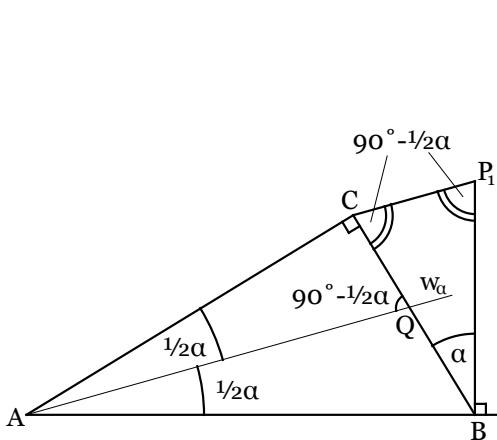


Abbildung 5: Lösung zu Beispiel 3, Fall 1

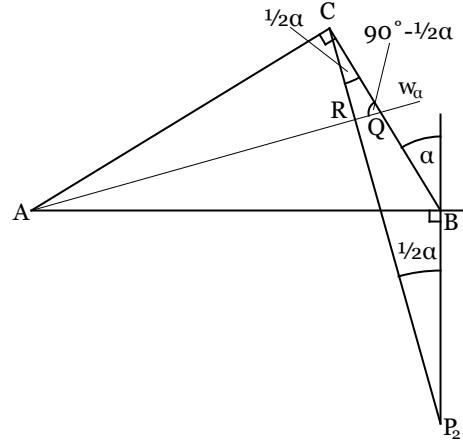


Abbildung 6: Lösung zu Beispiel 3, Fall 2

An diesem Beispiel sieht man schön, was Winkeljagd überhaupt ist. Am Anfang wird ein Winkel mit einem Platzhalter ersetzt (hier:  $\angle CAB \doteq \alpha$ ) und dann werden alle weiteren Winkel in der Figur in Abhängigkeit dieses Winkels ausgedrückt (z.B.  $\angle AQC = 90^\circ - \frac{\alpha}{2}$ ). D.h. hier ist die ganze Figur bestimmt, wenn man  $\alpha$  bestimmt. Bei anderen Aufgaben ist es manchmal nötig mehrere Platzhalter einzuführen.

### 3 Winkel im Kreis

Sei  $O$  der Mittelpunkt eines Kreises und seien  $A$  und  $B$  zwei Punkte auf der Kreislinie. Der Winkel  $AOB$  wird **Zentriwinkel** über dem Bogen  $\widehat{AB}$  genannt. Beachte, dass es für  $\widehat{AB}$  immer zwei Möglichkeiten gibt, einmal ist  $\angle AOB \leq 180^\circ$  und einmal  $\angle AOB \geq 180^\circ$ . Meistens ist es aus dem Zusammenhang klar, welche von beiden Möglichkeiten gemeint ist, besser ist es jedoch, dies unmissverständlich zu deklarieren (wie im folgenden Satz).

**Satz 3.1** (Peripherie-Zentriwinkelsatz). *Sei  $O$  der Umkreismittelpunkt eines beliebigen Dreiecks  $ABC$  mit  $\angle BAC = \alpha$ . Der Zentriwinkel des Bogens  $\widehat{BC}$ , welcher den Punkt  $A$  nicht enthält, ist dann gleich  $2\alpha$ .*

*Beweis.* Wir beweisen den Fall, wenn  $\triangle ABC$  spitzwinklig ist (Abb. 7), der andere Fall funktioniert analog. Weil  $\triangle ABC$  spitzwinklig ist, liegt  $O$  innerhalb von  $\triangle ABC$  und wir können  $\angle BAC$  in zwei kleinere Winkel aufteilen, indem wir  $\alpha_1 = \angle OAB$  und  $\alpha_2 = \angle CAO$  setzen. Da  $O$  der Umkreismittelpunkt ist, sind  $\triangle OAB$  und  $\triangle OCA$  gleichschenklig, d.h.

$$\angle ABO = \alpha_1 \quad \angle OCA = \alpha_2.$$

Verlängern wir die Gerade  $AO$  und schneiden sie mit dem Umkreis in  $D$ , sehen wir, dass  $\angle DOB$  der Außenwinkel von  $\triangle OAB$  und  $\angle COD$  der Außenwinkel von  $\triangle OCA$  ist. Wir

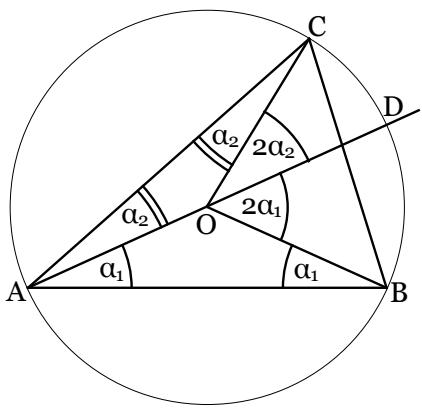


Abbildung 7: Peripherie-Zentriwinkelsatz

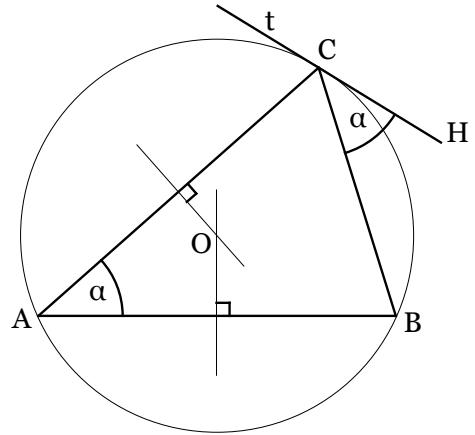


Abbildung 8: Tangentenwinkelsatz

erhalten darum nach Aussenwinkelsatz

$$\angle COB = \angle COD + \angle DOB = 2\alpha_2 + 2\alpha_1 = 2(\alpha_1 + \alpha_2) = 2\alpha.$$

□

Analog zum Zentriwinkel wird der Winkel  $BAC$  in Abb. 7 **Peripheriewinkel** über dem Bogen  $\widehat{BC}$  genannt. Überlege dir, was mit der Grösse des Peripheriewinkels passiert, wenn du den Punkt  $A$  auf dem Umkreis herumschiebst. Du kommst so direkt zum nächsten Satz.

**Satz 3.2** (Peripheriewinkelsatz). *Sei  $\widehat{BC}$  ein beliebiger Bogen auf einem Kreis  $k$ . Alle Peripheriewinkel über  $\widehat{BC}$  sind gleich gross.*

*Beweis.* Wir betrachten wieder Abb. 7 und wählen den Bogen  $\widehat{BC}$ , der  $D$  enthält. Der Zentriwinkel  $COB$  ist offensichtlich unabhängig von der Wahl von  $A$ , somit ist nach Peripherie-Zentriwinkel klar, dass auch der Betrag von  $\angle CAB$  konstant bleiben muss, solange  $A$  nicht die Seite von der Geraden  $BC$  wechselt. □

**Satz 3.3** (Tangentenwinkelsatz). *Im beliebigen Dreieck  $ABC$  sei  $k$  der Umkreis mit Mittelpunkt  $O$ . Sei  $t$  die Tangente in  $C$  zum Kreis  $k$  (Abb. 8).  $C$  unterteilt  $t$  in zwei Halbgeraden; man wähle einen beliebigen Hilfspunkt  $H$  auf derjenigen Halbgeraden, die auf der anderen Seite von  $BC$  liegt als  $A$ . Es gilt  $\angle BAC = \angle BCH$ .*

*Beweis.* (Abb. 9) Mit dem Peripherie-Zentriwinkelsatz berechnen wir

$$\angle BOC = 2\alpha.$$

$\triangle OBC$  ist gleichschenklig und wir können darum mit Hilfe der Winkelsumme den Winkel  $OCB$  berechnen:

$$\angle OCB = \frac{180^\circ - 2\alpha}{2} = 90^\circ - \alpha.$$

Tangenten stehen stets rechtwinklig auf dem jeweiligen Radius, d.h.  $\angle OCH = 90^\circ$ . Der letzte Schritt ist nun nicht mehr schwierig:

$$\angle BCH = 90^\circ - \angle OCB = 90^\circ - (90^\circ - \alpha) = \alpha.$$

□

Der Tangentenwinkelsatz ist bei komplizierten Aufgaben sehr nützlich, denn er erlaubt es ohne das Zentrum des Kreises einzuführen Winkel am Kreis zu berechnen. Die Skizze bleibt damit viel übersichtlicher. Wir machen als nächstes ein Beispiel, das dies veranschaulichen soll.

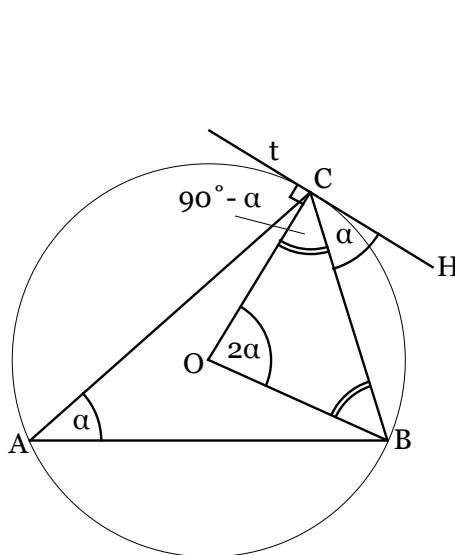


Abbildung 9: Beweis des Tangentenwinkelwinkelsatzes

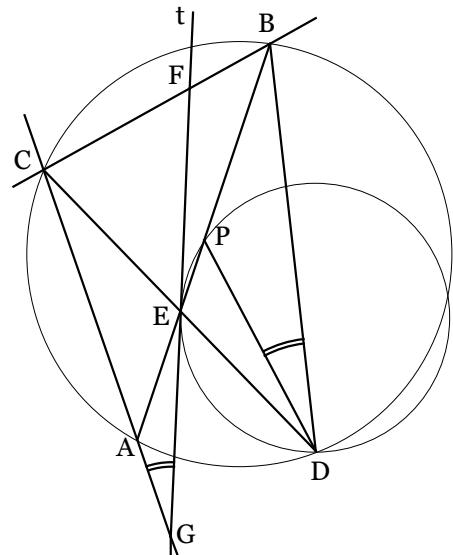


Abbildung 10: Beispiel 4

**Beispiel 4.** Die beiden Sehnen  $AB$  und  $CD$  schneiden sich innerhalb des Kreises in  $E$  (Abb. 10). Sei  $P$  ein beliebiger Punkt auf der Strecke  $BE$ . Die Tangente  $t$  zum Kreis durch  $D$ ,  $P$  und  $E$  in  $E$  schneide die Gerade  $BC$  in  $F$  und  $AC$  in  $G$ . Zeige  $\angle FGC = \angle BDP$ .

*Lösung.* (Abb. 11) Als erstes setzen wir

$$\angle EPD = \alpha, \quad \angle ACE = \beta$$

(es spielt nicht so eine grosse Rolle, welche Winkel wir substituieren).

Nun können wir ganz gezielt weitere Winkel herleiten. So ist nach dem Tangentenwinkelsatz

$$\angle GED = \alpha$$

welches ein Aussenwinkel von  $\triangle ECG$  ist. Damit kriegen wir direkt

$$\angle FGC = \alpha - \beta.$$

Nach dem Peripheriewinkelsatz ist

$$\angle ABD = \beta$$

und mit Hilfe des Aussenwinkels  $\angle EPD = \alpha$  von  $\triangle BDP$  erhalten wir

$$\angle BDP = \alpha - \beta$$

also gleich  $\angle FGC$ .

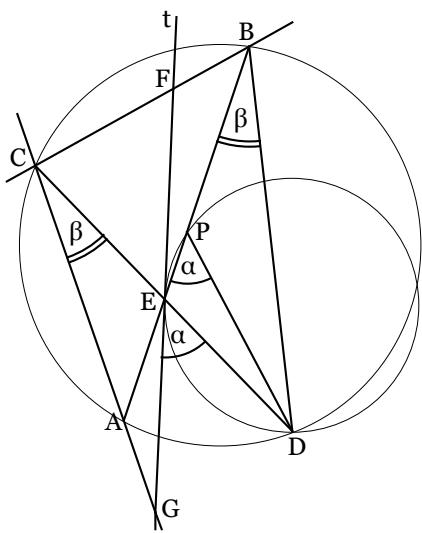


Abbildung 11: Lösung von Beispiel 4

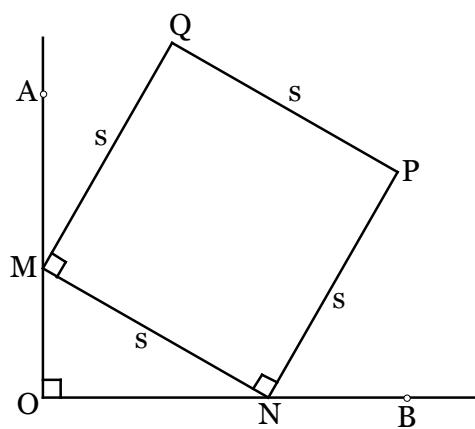


Abbildung 12: Beispiel 5

Die Lösung dieser Aufgabe sieht so recht einfach aus, man kann sich aber leicht in den vielen Geraden und Kreisen verlieren. Immer die Übersicht über die ganze Situation zu behalten stellt eine der Hauptschwierigkeiten in der Geometrie dar. Die Geduld sorgfältig, mit Lineal und Zirkel, eine grosse Skizze zu konstruieren macht sich darum oft bezahlt! Bei der Lösung dieses Problems haben wir zu Beginn zwei Winkel substituiert ( $\alpha$  und  $\beta$ ). Möchte man alle Winkel in der Figur bestimmen, braucht man noch mehr Platzhalter. Probier doch mal als Übung alle Winkel in der Figur zu bestimmen. Wie viele Winkel musst du minimal substituieren? (Antwort: die Figur hat vier Freiheitsgrade (wenn man Translation, Skalierung und Drehung ignoriert); durch vier Substituenten kann man alle in Abb. 11 vorhandenen Winkel ausdrücken.)

**Beispiel 5.** Sei  $\angle AOB$  ein rechter Winkel mit einem Punkt  $M$  auf der Halbgeraden  $OA$  und einem Punkt  $N$  auf der Halbgeraden  $OB$  (Abb. 12). Ergänze  $M$  und  $N$  so zu einem Quadrat  $MNPQ$ , dass  $P$  auf der anderen Seite von  $MN$  liegt als  $O$ . Finde den geometrischen Ort des Mittelpunktes von Quadrat  $MNPQ$ , wenn man die beiden Punkte  $M$  und  $N$  frei auf ihren Halbgeraden bewegt?

*Lösung.* Wir zeichnen als erstes die beiden Diagonalen des Quadrates ein und benennen deren Schnittpunkt mit  $D$  (Abb. 13). Auf den ersten Blick würde man erwarten, dass sich  $D$  wie  $P$  und  $Q$  auf einer unendlichen Fläche bewegt. Wir zeigen nun, dass dies nicht so ist.

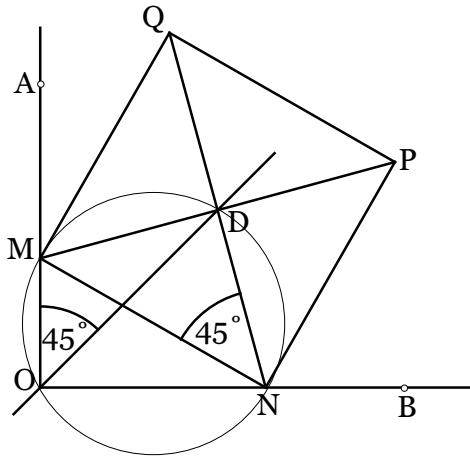


Abbildung 13: Lösung 5, erster Teil

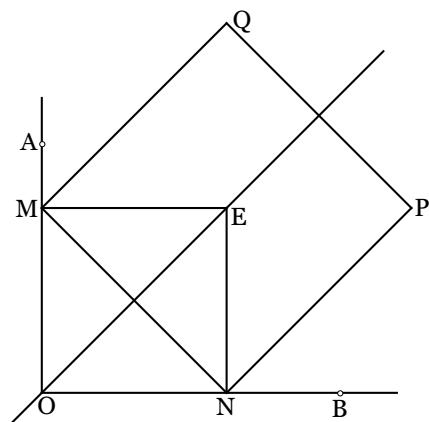


Abbildung 14: Lösung 5, zweiter Teil

Die beiden Winkel  $\angle MON$  und  $\angle MDN$  sind beide rechtwinklig und es macht darum Sinn den **Thaleskreis** über der Strecke  $MN$  einzuziehen. Jetzt liegen nämlich die beiden Punkte  $O$  und  $D$  ebenfalls auf diesem Kreis. Da  $MNPQ$  ein Quadrat ist, misst  $\angle DNM = 45^\circ$ . Nach dem Peripheriewinkelsatz gilt  $\angle DOM = \angle DNM = 45^\circ$ . Die Mittelpunkte des Quadrates liegen also unabhängig von der Wahl von  $M$  und  $N$  auf der Winkelhalbierenden von  $\angle AOB$ .

Wir sind damit aber noch nicht fertig, da noch nicht bewiesen ist, dass auch alle Punkte auf der Winkelhalbierenden einmal Quadratmittelpunkt sein können. Um dies zu zeigen, wählen wir einen beliebigen Punkt  $E$  auf der Winkelhalbierenden von  $\angle AOB$  und zeichnen das Quadrat  $MONE$  mit  $M$  auf  $OA$  und  $N$  auf  $OB$  (Abb. 14). Wenn man nun das Quadrat  $MNPQ$  zeichnet ist offensichtlich  $E$  dessen Mittelpunkt. Es ist damit gezeigt, dass sich der Quadratmittelpunkt auf der ganzen Winkelhalbierenden (hier eine Halbgerade) von  $\angle AOB$  bewegen kann.  $\square$

## 4 Sehnenvierecke

Damit sind wir beim wichtigsten Kapitel angelangt, denn in fast allen Wettbewerbsaufgaben kommen Sehnenvierecke vor. Ein Sehnenviereck ist ein konvexes Viereck, das von vier Punkten, die auf einem Kreis liegen, gebildet wird. Wir untersuchen zunächst eine wichtige Eigenschaft.

**Satz 4.1.** In einem Sehnenviereck  $ABCD$  ergibt die Summe von zwei gegenüberliegenden Innenwinkeln immer  $180^\circ$ .

*Beweis.* Hat man mit Sehnenvierecken zu tun, ist es meistens ratsam die beiden Diagonalen einzuzeichnen und die Innenwinkel so zu teilen (Abb. 15). Wir benennen dann  $\angle CAD = \alpha$  und  $\angle BAC = \beta$ . Mit dem Peripheriewinkelsatz ergibt sich

$$\angle CBD = \alpha, \quad \angle BDC = \beta$$

und mit der Winkelsumme im  $\triangle BCD$  weiter

$$\angle BCD = 180^\circ - \alpha - \beta = 180^\circ - \angle BAD$$

□

Okay, das war jetzt noch nicht so spektakulär. Überraschender ist, dass auch die Umkehrung des Satzes gilt!

**Satz 4.2.** Gegeben vier Punkte  $A, B, C, D$ , die in dieser Reihenfolge ein konvexes Viereck bilden. Gilt  $\angle BAD + \angle BCD = 180^\circ$ , so liegen die vier Punkte auf einem Kreis.

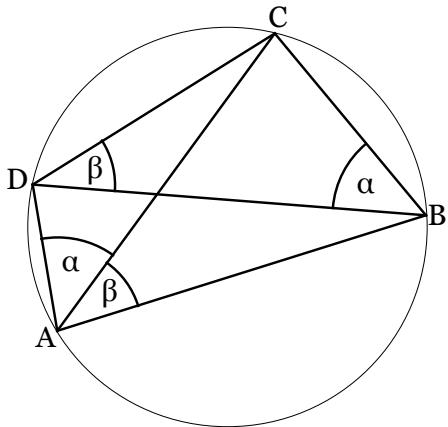


Abbildung 15: Lösung zu Satz 5

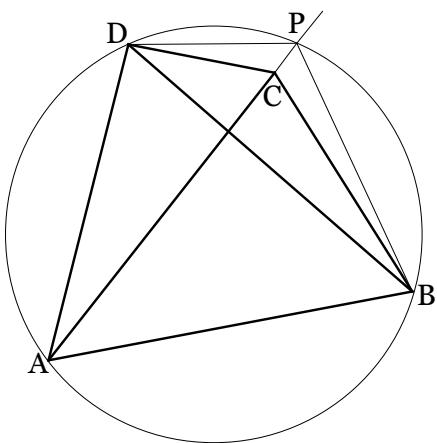


Abbildung 16: Lösung zu Satz 6

*Beweis.* (Abb. 16) Wir zeichnen als erstes den Umkreis  $k$  von  $\triangle ABD$ . Angenommen  $C$  liege nicht auf  $k$ . Wenn diese Annahme zu einem Widerspruch führt, ist der Satz bewiesen. Wir betrachten zuerst den Fall, wenn  $C$  innerhalb des Kreises  $k$  liegt.

Der Schnittpunkt der Geraden  $AC$  mit  $k$  sei  $P$ . Da  $ABPD$  ein Sehnenviereck ist, wissen wir (Satz 4.1)

$$\angle BAD + \angle BPD = 180^\circ.$$

Könnten wir nun zeigen, dass  $\angle BCD$  grösser ist als  $\angle BPD$ , hätten wir den gewünschten Widerspruch, weil dann die Summe  $\angle BAD + \angle BCD$  unmöglich auch  $180^\circ$  sein könnte,

was nach Voraussetzung aber gegeben ist. Intuitiv ist es klar, dass in Abb. 16  $\angle BCD > \angle BPD$  gilt, beweisen kann man das so:

Weil  $C$  innerhalb des Dreiecks  $BDP$  liegen muss, ist  $\angle CBD < \angle PBD$  und  $\angle CDB < \angle PDB$ . Damit ergibt sich aus den Winkelsummen

$$\angle BCD = 180^\circ - \angle CBD - \angle CDB > 180^\circ - \angle PBD - \angle PDB = \angle BPD.$$

Der Fall, wenn  $C$  ausserhalb von  $k$  liegt, funktioniert völlig analog.  $\square$

Das hier verwendete Argument macht auf den ersten Blick einen etwas unsauberem Eindruck, tatsächlich hat die Beweismethode aber sogar einen Namen. Man nennt es 'Working Backward' und kommt recht häufig vor. Es lohnt sich also, sich das Schema zu merken.

Ein einfaches Beispiel mit einem Sehnenviereck hatten wir übrigens schon. In Beispiel 5 zeichneten wir den Thaleskreis ein, weil dort gegenüberliegende Winkel  $90^\circ$  waren. Zum Schluss machen wir noch ein schwieriges Beispiel, bei dem es ganz zentral ist, die Sehnenvierecke zu entdecken.

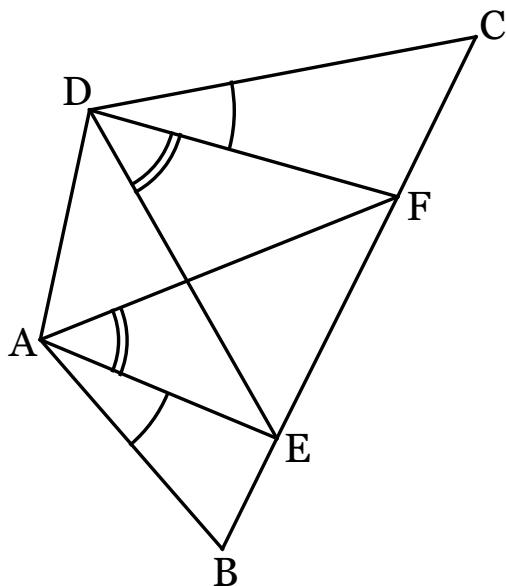


Abbildung 17: Beispiel 6

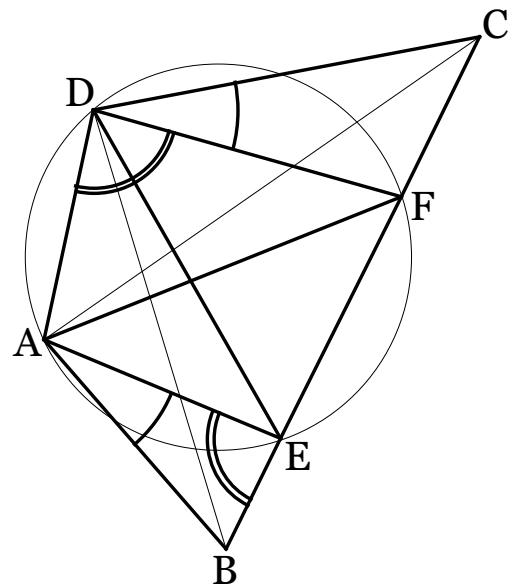


Abbildung 18: Lösung zu Beispiel 6

**Beispiel 6.** Die Punkte  $E$  und  $F$  liegen auf der Strecke  $BC$  des konvexen Vierecks  $ABCD$ , wobei  $E$  näher bei  $B$  ist als  $F$  (Abb. 17). Es gelte  $\angle BAE = \angle CDF$  und  $\angle EAF = \angle FDE$ .

Zeige  $\angle FAC = \angle EDB$ .

*Lösung.* (Abb. 18) Bei solchen Aufgaben verliert man sich oft in unzähligen Hilfsgeraden und -winkeln. Es lohnt sich also, sich Zeit zu nehmen für eine anständige Skizze. Ich

mache es oft so, dass ich das Grundgerüst mit Kugelschreiber sorgfältig zeichne und den Rest mit Bleistift je nach Wichtigkeit verschieden dick eintrage. Das hat den Vorteil auch mal radieren zu können, ohne wieder ganz von vorn beginnen zu müssen.

Was bei diesem Beispiel als erstes auffällt, ist, dass die beiden Winkel über der Strecke  $EF$  gleich gross sind: eine Situation, wie beim Peripheriewinkelsatz! Mit dessen Umkehrung können wir schliessen, dass  $AEDF$  ein Sehnenviereck sein muss. Dass die Umkehrung des Peripheriewinkelsatzes gilt, könnten wir wie Satz 6 mit Working Backward beweisen, ist aber auch allgemein bekannt und wir sparen uns deshalb den Beweis.

Nun kommt der schwierige Teil der Aufgabe. Wir haben nun ein Sehnenviereck gefunden und natürlich müssen wir auch die zweite Voraussetzung noch irgendwie verwenden. Wie kann man das nur geschickt kombinieren? Kommt man nicht mehr weiter, ist als Inspirationshilfe oft die folgende Überlegung hilfreich:

Wir nehmen an, was wir schlussendlich zeigen wollen, sei richtig (hier  $\angle FAC = \angle EDB$ ). Was folgt nun daraus? Zusammen mit der Voraussetzung und der Umkehrung des Peripheriewinkelsatzes folgt daraus, dass  $ABCD$  ein Sehnenviereck ist. Dies ist natürlich noch kein Beweis, aber wir können uns nun sicher sein, dass dies so ist! Wir versuchen nun dies direkt aus den Voraussetzungen zu beweisen. Mit der Umkehrung der vorherigen Überlegung können wir dann die Aufgabe fertig lösen. Wir beweisen, dass  $ABCD$  ein Sehnenviereck ist, indem wir zeigen, dass  $\angle ADC + \angle ABC = 180^\circ$  gilt.

$$\angle ABC = 180^\circ - \angle BEA - \angle BAE = \angle CEA - \angle BAE$$

Für die nächsten Schritte brauchen wir zuerst die Voraussetzung  $\angle BAE = \angle CDF$ , dann dass  $AEDF$  ein Sehnenviereck ist

$$\angle ABC = \angle CEA - \angle BAE = \angle CEA - \angle CDF = 180^\circ - \angle FDA - \angle CDF = 180^\circ - \angle ADC$$

$ABCD$  ist also wirklich ein Sehnenviereck, daraus folgt nun ziemlich schnell das Gesuchte:

$$\angle FAC = \angle BAC - \angle BAF = \angle BDC - \angle BAF = \angle BDC - \angle EDC = \angle EDB$$

□

## 5 Tipps für die Prüfung

1. Nehmt unbedingt einen brauchbaren Zirkel und ein Lineal oder Geodreieck mit. Oft fällt einem ein zur Lösung wichtiger geometrischer Zusammenhang erst auf, wenn man eine Figur genau konstruiert hat. Auch verschiedene Farben zu verwenden ist gut für die Übersicht.
2. Sich nicht scheuen viele verschiedene Skizzen zu zeichnen. Wenn man die Übersicht verloren hat, hartnäckig bleiben und halt einen neuen Versuch starten.
3. Hat man den Beweis anhand einer Skizze gefunden, muss dieser noch korrekt aufgeschrieben werden, sonst kann es grosse Punktabzüge geben. Ihr müsst uns in eurem

Beweis klar machen, dass ihr alle zur Lösung nötigen Schritte gesehen habt. Dies gilt auch für die Aufgaben der anderen Themen. Am besten den Beweis am Schluss nochmals durchgehen und ergänzen, wenn ihr denkt, dass etwas fehlen könnte (lieber zu viel schreiben). In der Geometrie dürfen speziell die folgenden Punkte nicht vergessen gehen:

- (a) Hast du Platzhalter eingeführt (wie z.B.  $\alpha, \dots$ ) musst am Anfang des Beweises auch schreiben, wie diese definiert sind (z.B. „Sei  $\alpha = \angle DAN$ ,  $\beta = \dots$ “). Ausnahme: Ist ein Dreieck  $ABC$  gegeben so ist, falls nichts anderes definiert wird,  $\angle CAB = \alpha, \angle ABC = \beta, \angle BCA = \gamma$ .
- (b) Das selbe gilt für verwendete Hilfspunkte, -geraden, -kreise, usw. Sobald ein nicht in der Aufgabenstellung erwähntes Objekt verwendet wird, muss klar sein, wie dieses definiert ist.
- (c) Alle in diesem Skript erwähnten Sätze dürfen, ohne jedesmal ihren Namen zu erwähnen, verwendet werden (weil man sie dauernd braucht). Das heisst aber nicht, dass man nicht jeden Schritt aufschreiben muss. Ist beispielsweise  $ABCD$  ein Sehnenviereck, so könnte man einfach schreiben „ $\angle BCA = \angle BDA$  (Bogen  $AB$ )“ und müsste den Peripheriewinkelsatz gar nicht erwähnen.