

Durata: 3 ore

Zürich, Lausanne, Lugano

Difficoltà: Gli esercizi relativi ad ogni tema sono ordinati secondo un ordine crescente di difficoltà.

13 dicembre 2025

Punti: Ogni esercizio vale 7 punti.

Geometria

- G1)** Siano Γ_1 e Γ_2 due cerchi che si intersecano nei punti X ed Y . Sia ℓ una linea intersecante Γ_1 nei punti A e C , ed intersecante Γ_2 nei punti B e D , in modo che A, B, C, D , giacciono su ℓ in questo ordine. Sia P l'intersezione di XA e YB , e sia Q l'intersezione di XD e YC .
Dimostra che PQ è parallelo ad ℓ .

- G2)** Siano A, B, C, D, E cinque punti giacenti su un cerchio in quest'ordine, in modo che AE sia un diametro e $BC > CD$. Sia F l'intersezione di AD e BE . Sia O il circocentro del triangolo BFD . Sia Y il punto d'intersezione tra le riflessioni della linea BD rispetto a BC e la riflessione della linea BD rispetto a DC .
Dimostra che $\angle OYC = 90^\circ$.

Combinatoria

- C1)** Siano $k \leq a \leq b$ interi positivi. Ruhi ha una sequenza di $a + b$ lettere che contengono a copie della lettera M , e b copie della lettera O . Lei vuole che la sequenza abbia esattamente k paia di lettere consecutive che formino la parola MO . In quanti modi può disporre le lettere in modo che ciò sia possibile?
- C2)** Mark ha 20 librerie di altezze $1, 1, 2, 2, \dots, 10, 10$, dove due librerie con la stessa altezza sono indistinguibili. Lui vuole piazzarle in una linea in modo che il suo gatto possa saltare da una libreria alla successiva, iniziando da quella più a sinistra e finendo in quella più a destra. Il suo gatto è pigro ed ha due condizioni:
- Esattamente un salto dei diciannove che il gatto compierà sarà da una libreria ad una libreria strettamente più alta
 - Tra due librerie della stessa altezza non possono essere posizionate librerie di altezza strettamente più alta.

In quanti modi Mark può piazzare le sue librerie in modo che queste condizioni siano soddisfatte?

Teoria dei numeri

- N1)** Determina tutte le triplette (p, q, n) di numeri interi per le quali p e q sono numeri primi, e
- $$20p + 26q = n^2 + 48.$$

- N2)** Determina tutti i numeri interi positivi n per i quali

$$n^3 \mid (n+1)(n+2)(n+3)(n+4)(n+5)(n+6).$$

Buona fortuna!