

Sélection IMO - 1er examen

Zürich - 7 Mai 2016

Temps : 4.5 heures

Chaque exercice vaut 7 points.

1. Soit n un nombre naturel. On appelle une paire de nombres *insociable* si leur plus grand diviseur commun vaut 1. On répartit les nombres $\{1, 2, \dots, 2n\}$ en n paires. Quel est le nombre minimum de paires insociables qui sont ainsi formées ?

2. Trouver tous les polynômes P à coefficients réels tels que

$$(x - 2)P(x + 2) + (x + 2)P(x - 2) = 2xP(x)$$

pour tous $x \in \mathbb{R}$.

3. Soit ABC un triangle avec $\angle BCA = 90^\circ$ et soit H le pied de la hauteur issue de C . Soit D un point à l'intérieur du triangle BCH tel que CH coupe le segment AD en son milieu. Soit P le point d'intersection des droites BD et CH . Soit ω le demi-cercle de diamètre BD qui intersecte le côté CB . La tangente à ω passant par P touche ω au point Q . Montrer que les droites CQ et AD se coupent sur ω .

Bonne chance !