SMO - Finalrunde 2018

1. Prüfung - 16. März 2018

Zeit: 4 Stunden
Schwierigkeit: Die Aufgaben sind der Schwierigkeit nach geordnet.
Punkte: Jede Aufgabe ist 7 Punkte wert.

1. Alle Felder eines 8×8 Quadrats sind anfangs weiss gefärbt. In einem Zug darf man alle Felder eines horizontalen oder vertikalen 1×3 Rechtecks umfärben (alle weissen Felder werden schwarz und alle schwarzen Felder weiss). Ist es möglich, dass nach einer endlichen Anzahl Zügen alle Felder schwarz gefärbt sind?

2. Seien a, b und c natürliche Zahlen. Finde den kleinsten Wert, den folgender Ausdruck annehmen kann:

$$\frac{a}{\mathrm{ggT}(a+b, a-c)} + \frac{b}{\mathrm{ggT}(b+c, b-a)} + \frac{c}{\mathrm{ggT}(c+a, c-b)}.$$

Bemerkung: $\mathrm{ggT}(6,0) = 6$ *und* $\mathrm{ggT}(3,-6) = 3$.

3. Finde alle natürlichen Zahlen n, für die kein Tripel natürlicher Zahlen (a, b, c) existiert, sodass die folgende Gleichung erfüllt ist:

$$n = \frac{a \cdot \mathrm{kgV}(b,c) + b \cdot \mathrm{kgV}(c,a) + c \cdot \mathrm{kgV}(a,b)}{\mathrm{kgV}(a,b,c)}.$$

4. Sei D ein Punkt im Inneren eines spitzwinkligen Dreiecks ABC, sodass $\angle BAD = \angle DBC$ und $\angle DAC = \angle BCD$. Sei P ein Punkt auf dem Umkreis des Dreiecks ADB. Nehme an, P befinde sich ausserhalb des Dreiecks ABC. Eine Gerade durch P schneide den Strahl BA in X und den Strahl CA in Y, sodass $\angle XPB = \angle PDB$ gilt. Zeige, dass sich BY und CX auf AD schneiden.

Bemerkung: Für zwei Punkte F und G bezeichnet der Strahl FG alle Punkte auf der Geraden FG, die sich auf der selben Seite von F befinden wie G.

5. Zeige, dass keine Funktion $f\colon \mathbb{R}_{>0} \to \mathbb{R}_{>0}$ existiert, sodass für alle $x, y \in \mathbb{R}_{>0}$ gilt:

$$f(xf(x) + yf(y)) = xy.$$

Viel Glück!