

OSM - Test blanc

Wila - 13 mars 2017

Temps : 4 heures

Difficulté : Les exercices sont classés selon leur difficulté.

Points : Chaque exercice vaut 7 points.

1. Déterminer tous les nombres premiers p, q tels que

$$2^p = q^q + q + 2.$$

2. Un groupe de n limaces cannibales se placent en cercle et se numérotent de 1 à n dans le sens des aiguilles d'une montre. La limace numéro 1 mange sa voisine de gauche. Ensuite, la prochaine limace sur sa gauche mange également sa voisine de gauche et ainsi de suite jusqu'à ce qu'il ne reste plus qu'une seule limace. À quelle position la leader des limaces doit-elle se placer pour survivre ?

3. Soit ABC un triangle et X, Y, Z les milieux des trois côtés BC, CA et AB respectivement. Montrer que l'on peut construire un triangle dont les côtés sont de longueurs AX, BY et CZ .

4. Un grand rectangle dont les côtés ont une longueur impaire est divisé en plus petits rectangles qui ont des côtés de longueur entière. Montrer qu'il existe un des plus petits rectangles dont les distances aux quatre côtés du grand rectangle sont toutes paires ou toutes impaires.

5. Soit $n \geq 1$ un nombre entier. Soient x_1, x_2, \dots, x_{n+1} des nombres réels positifs vérifiant la condition $x_1 x_2 \dots x_{n+1} = 1$. Montrer que

$$n^{(x_1^n)} + n^{(x_2^n)} + \dots + n^{(x_{n+1}^n)} \geq \sqrt[n]{n} + \sqrt[n]{n} + \dots + \sqrt[n]{n}.$$

Bonne chance !