OSM - Tour final 2018

Second examen - 17 mars 2018

Temps : 4 heures
Difficulté : Les exercices sont classés selon leur difficulté.
Points : Chaque exercice vaut 7 points.

6. Soit k le cercle inscrit au triangle ABC de centre I. Le cercle k touche les côtés BC, CA et AB aux points D, E et F respectivement. Soit G le point d'intersection de la droite AI et du cercle k situé entre A et I. On suppose que les droites BE et FG sont parallèles. Montrer que $BD = EF$.

7. Soit n un entier naturel et soit k le nombre de manières d'écrire un entier naturel n comme la somme d'un ou plusieurs entiers naturels consécutifs. Montrer que k est égal au nombre de diviseurs positifs impairs de n.

Exemple : le nombre 9 a trois diviseurs positifs impairs et $9 = 9,\ 9 = 4 + 5,\ 9 = 2 + 3 + 4.$

8. Soient a, b, c, d et e des nombres réels strictement positifs. Déterminer la plus grande valeur que l'expression suivante peut atteindre :

$$\frac{ab + bc + cd + de}{2a^2 + b^2 + 2c^2 + d^2 + 2e^2}.$$

9. Soit n un entier naturel et G l'ensemble des points (x, y) du plan tels que x et y soient des nombres entiers avec $1 \leq x, y \leq n$. Un sous-ensemble de G est appelé *sans-parallélogramme* s'il ne contient pas quatre points non-alignés qui sont les sommets d'un parallélogramme. Combien de points au maximum peut contenir un sous-ensemble sans-parallélogramme ?

10. Soit $p \geq 2$ un nombre premier. Arnaud et Louis choisissent à tour de rôle un indice $i \in \{0, 1, \ldots, p-1\}$ qui n'a pas encore été choisi et un chiffre $a_i \in \{0, 1, \ldots, 9\}$. Arnaud commence. Une fois que tous les indices ont été choisis, ils calculent la somme suivante :

$$a_0 + a_1 \cdot 10 + \ldots + a_{p-1} \cdot 10^{p-1} = \sum_{i=0}^{p-1} a_i \cdot 10^i.$$

Si la somme est divisible par p, Arnaud gagne. Dans le cas contraire, Louis gagne. Montrer qu'Arnaud a une stratégie gagnante.

Bonne chance !