

# SMO - Turno preliminare

Losanna, Zurigo - 13 gennaio 2007

Tempo a disposizione: 3 ore  
ogni esercizio vale 7 punti.

1. Si consideri un cubo i cui spigoli hanno lunghezza  $2a$ . In ogni angolo, nel punto medio di ogni spigolo, e nel punto medio di ogni faccia si trova una città. Due città sono collegate da una strada se la loro distanza misura  $a$ . Esiste un percorso che attraversa ogni città esattamente una volta?
2. Quanti numeri di 7 cifre esistono tali che il prodotto delle cifre è uguale a  $45^3$ ?
3. È dato un triangolo acuto (tutti gli angoli sono minori di 90 gradi)  $ABC$ . Siano  $D, E$  e  $F$  i punti di intersezione delle altezze (rispetto a  $A, B$  e  $C$ ) con i lati del triangolo. Sia  $S$  il punto di intersezione della retta  $EF$  con la retta perpendicolare al lato  $AC$  che passa per il punto  $D$ . Dimostra che il triangolo  $DES$  è isoscele.
4. Determina tutte le coppie  $(a, b)$  di numeri naturali tali che

$$a^2 + 3b \quad \text{e} \quad b^2 + 3a$$

sono entrambi dei quadrati.

5. Su un cerchio  $k$  ci sono cinque punti distinti  $A, M, B, C$  e  $D$  (in questo ordine), e vale  $MA = MB$ . Sia  $P$  il punto di intersezione delle rette  $AC$  e  $MD$ , e  $Q$  quello delle rette  $BD$  e  $MC$ .  $X$  e  $Y$  siano i punti di intersezione della retta  $PQ$  con il cerchio  $k$ . Dimostra che  $MX = MY$ .

Buon lavoro!