

OSM - Sélection 2018

Quatrième examen - 27 mai 2018

Temps : 4.5 heures

Difficulté : Les exercices sont classés selon leur difficulté.

Points : Chaque exercice vaut 7 points.

10. Soit ABC un triangle, M le milieu du segment BC et D un point sur la droite AB , tel que B se situe entre A et D . Soit E un point tel que E et B se situent de part et d'autre de la droite CD et tel que $\angle EDC = \angle ACB$ et $\angle DCE = \angle BAC$. Soit F le point d'intersection de CE avec la parallèle à DE passant par A et soit Z le point d'intersection de AE et DF . Prouver que les droites AC , BF et MZ se coupent en un point.
11. Déterminer toutes les paires (f, g) de fonctions $f, g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ telles que pour tous $x, y \in \mathbb{R}$
- $f(x) \geq 0$,
 - $f(x + g(y)) = f(x) + f(y) + 2yg(x) - f(y - g(y))$.
12. David et Linus jouent au jeu suivant : David choisit un sous-ensemble Q de l'ensemble $\{1, \dots, 2018\}$. Ensuite Linus choisit un nombre naturel a_1 et calcule récursivement les nombres a_2, \dots, a_{2018} , avec a_{n+1} le produit de tous les diviseurs positifs de a_n .
- Soit P l'ensemble des entiers $k \in \{1, \dots, 2018\}$ pour lesquels a_k est un carré parfait. Linus gagne si $P = Q$. Autrement David gagne. Déterminer lequel des joueurs a une stratégie gagnante ?

Bonne chance !