Sélection IMO - 2ème examen

Zürich - 8 Mai 2016

Temps : 4.5 heures
Chaque exercice vaut 7 points.

4. Trouver tous les nombres entiers $n \geq 1$ tels que pour tous $x_1, ..., x_n \in \mathbb{R}$ l'inégalité suivante soit vérifiée.

$$\left(\frac{x_1^n + \ldots + x_n^n}{n} - x_1 \cdot \ldots \cdot x_n \right) (x_1 + \ldots + x_n) \geq 0.$$

5. Soit A un ensemble fini de nombres naturels. Une partition de A en deux sous-ensembles disjoints non-vides A_1 et A_2 est appelée *démoniaque* si le plus petit multiple commun des éléments de A_1 est égal au plus grand diviseur commun des éléments de A_2. Quel est le plus petit nombre d'éléments que A doit avoir pour qu'il existe exactement 2016 partitions démoniaques ?

6. Soit n un nombre entier naturel. Montrer que $7^{7^n} + 1$ a au moins $2n + 3$ facteurs premiers (non nécessairement distincts).
Remarque : $18 = 2 \cdot 3 \cdot 3$ *a 3 diviseurs premiers.*

Bonne chance !