Testprüfung 2020

Testprüfung

Zeit: 4 Stunden
Schwierigkeit: Die Aufgaben sind der Schwierigkeit nach geordnet.
Punkte: Jede Aufgabe ist 7 Punkte wert.

1. Sei ABC ein Dreieck mit $\angle CAB = 90°$. Seien D, E zwei Punkte jeweils auf AC, AB sodass $BCDE$ ein Sehnenviereck ist. Seien Ω_1, Ω_2 die Kreise durch A mit jeweiligen Mittelpunkten E, D. Sei P der zweite Schnittpunkt von Ω_1 und Ω_2. Beweise, dass die gerade AP die Strecke BC halbiert.

2. Beweise, dass für jede Zweierpotenz keine andere Zweierpotenz nur durch umordnen ihrer Ziffern erzeugt werden kann.

Am Beispiel von 128 *ist keine der Zahlen* 182, 218, 281, 812, 821 *eine Zweierpotenz.*

3. Seien a, b, c die Längen der Seiten eines Dreiecks. Zeige, dass gilt:

$$\sqrt{6}\sqrt{a+b+c} \leq \sum_{cyc} \frac{a+b}{\sqrt{a+c}} < 2\sqrt{2(a+b+c)}.$$

4. In einer $2 \times n$-Tabelle befinden sich positive reelle Zahlen wobei die Summe der zwei Zahlen in jeder der n Zeilen 1 beträgt. Zeige, dass wir eine Zahl in jeder Zeile auswählen können, sodass die Summe gewählten Zahlen in beiden Spalten höchstens $\frac{n+1}{4}$ ist.

Viel Glück!