IMO-Selektion - 4. Prüfung

Zürich - 22. Mai 2016

Zeit: 4.5 Stunden
Jede Aufgabe ist 7 Punkte wert.

10. Sei ABC ein nicht rechtwinkliges Dreieck und M der Mittelpunkt von BC. Sei D ein Punkt auf AB, sodass $CA = CD$ gilt und E ein Punkt auf BC, sodass $EB = ED$ gilt. Die Parallele zu ED durch A schneide die Gerade MD im Punkt I und die Geraden AM und ED schneiden sich im Punkt J. Zeige, dass die Punkte C, I und J auf einer Geraden liegen.

11. Seien m und n natürliche Zahlen mit $m > n$. Definiere

$$x_k = \frac{m+k}{n+k} \text{ für } k = 1, \ldots, n+1.$$

Zeige: Wenn alle x_i ganzzahlig sind, ist $x_1 \cdot x_2 \cdot \ldots \cdot x_{n+1} - 1$ keine Zweierpotenz.

12. An einer EGMO-Prüfung gibt es drei Aufgaben, wobei bei jeder Aufgabe eine ganzzahlige Punktzahl zwischen 0 und 7 erreicht werden kann. Zeige, dass es unter 49 Schülerinnen immer zwei gibt, sodass die eine in jeder der drei Aufgaben mindestens so gut war wie die andere.

Viel Glück!