OSM - Tour final 2018

Premier examen - 16 mars 2018

Temps : 4 heures
Difficulté : Les exercices sont classés selon leur difficulté.
Points : Chaque exercice vaut 7 points.

1. Les cases d'un échiquier 8×8 sont toutes blanches. Un coup consiste à échanger les couleurs des cases d'un rectangle 1×3 horizontal ou vertical (les cases blanches deviennent noires et inversement). Est-il possible qu'après un nombre fini de coups toutes les cases de l'échiquier soient noires ?

2. Soient a, b et c des nombres entiers naturels. Déterminer la plus petite valeur que l'expression suivante peut atteindre :

$$\frac{a}{\operatorname{pgcd}(a+b, a-c)} + \frac{b}{\operatorname{pgcd}(b+c, b-a)} + \frac{c}{\operatorname{pgcd}(c+a, c-b)}.$$

Remarque : $\operatorname{pgcd}(6,0) = 6$ *et* $\operatorname{pgcd}(3,-6) = 3$.

3. Déterminer tous les entiers naturels n pour lesquels il n'existe aucun triplet de nombres naturels (a, b, c) tel que :

$$n = \frac{a \cdot \operatorname{ppcm}(b,c) + b \cdot \operatorname{ppcm}(c,a) + c \cdot \operatorname{ppcm}(a,b)}{\operatorname{ppcm}(a,b,c)}.$$

4. Soit D un point à l'intérieur d'un triangle aigu ABC tel que $\angle BAD = \angle DBC$ et $\angle DAC = \angle BCD$. Soit P un point sur le cercle circonscrit au triangle ADB. On suppose que P se trouve à l'extérieur du triangle ABC. Une droite passant par P coupe la demi-droite BA en X et la demi-droite CA en Y de telle sorte que $\angle XPB = \angle PDB$. Montrer que BY et CX se coupent sur AD.

Remarque : Pour deux points F et G, la demi-droite FG est composée de tous les points de la droite FG situés du même côté de F que G.

5. Montrer qu'il n'existe aucune fonction $f\colon \mathbb{R}_{>0} \to \mathbb{R}_{>0}$ telle que pour tous $x, y \in \mathbb{R}_{>0}$

$$f(xf(x) + yf(y)) = xy.$$

Bonne chance !