

OSM - Test blanc

Wila - 9 mars 2017

Temps : 4 heures

Difficulté : Les exercices sont classés selon leur difficulté.

Points : Chaque exercice vaut 7 points.

1. Soit (t, a, b) un triplet de nombres naturels. Dimitri et Dominik jouent au jeu suivant. Au début, le nombre t est écrit sur le tableau noir. Ensuite, Dimitri et Dominik jouent à tour de rôle, Dimitri commence. Un coup consiste à remplacer le nombre écrit au tableau par la différence de ce dernier avec a ou avec b . Le premier joueur qui écrit un nombre négatif a perdu.

Montrer qu'il existe une infinité de nombres t tels que pour chaque paire (a, b) avec $a + b = 2017$, Dimitri a une stratégie gagnante.

2. Soient $m, n \in \mathbb{Z}$ tels que $\sqrt[3]{m} + \sqrt[3]{n} \neq 0$ est un nombre entier. Montrer que $\sqrt[3]{m}$ et $\sqrt[3]{n}$ sont tous les deux des nombres entiers.

3. Soient a, b et c des nombres réels positifs. Montrer que

$$a + \sqrt{ab} + \sqrt[3]{abc} \leq \frac{4}{3}(a + b + c).$$

4. Quirin et Romina jouent à un jeu sur un échiquier $n \times n$. Quirin commence et marque une des cases. Ensuite, ils marquent à tour de rôle une case vierge adjacente à la dernière case marquée. Le premier joueur qui n'a plus de coup valide a perdu.

Pour quelles valeurs de n Quirin a-t-il une stratégie gagnante ?

5. Soit ABC un triangle isocèle avec $AB = AC$ et soit M le milieu du segment BC . Soit X un point sur le cercle circonscrit au triangle ABM , tel que X se trouve sur le petit arc \widehat{AM} . Soit g la perpendiculaire à XM passant par M . De plus soit T le point sur la droite g qui vérifie $XT = XB$ et qui se trouve du même côté de la droite XM que B .

Montrer que $\angle BTM - \angle MTC$ ne dépend pas du choix de X .

Bonne chance !