

SMO - Turno preliminare

Bellinzona, Losanna, Zurigo - 10 gennaio 2009

Tempo a disposizione: 3 ore

Ogni esercizio vale 7 punti.

1. Determina tutti i numeri naturali $n > 1$ tali che $(n - 1)!$ è divisibile per n .
2. Considera n bambini, tutti di altezza diversa. Quanti modi ci sono di disporre i bambini in una fila in modo che ogni bambino tranne il più alto ha un vicino che è più grande di lui?
3. Sia ABC un triangolo con $\angle BAC = 60^\circ$. Siano D e E due punti sui lati AC e AB . Siano X e Y gli altri punti di intersezione delle rette BD e CE con il cerchio circoscritto di ABC . Sia S il punto di intersezione di BD e CE . Dimostra che le rette BY e CX sono parallele se e solo se $AESD$ è un quadrilatero inscritto.
4. Determina tutte le coppie (a, b) di numeri naturali tali che la seguente uguaglianza è soddisfatta:
$$a^{6a} = b^b.$$
5. Per quali numeri naturali m, n è possibile ricoprire un rettangolo di grandezza $m \times n$ con quadrati di lato 2 o 3, senza buchi e senza sovrapposizioni?

Buon lavoro!