MATHEMATICAL.
OLYMPIAD.CH
MATHEMATIK-OLYMPIADE
OLYMPIADES DE MATHÉMATIQUES
OLIMPIADI DELLA MATEMATICA

Test blanc 2019

Test blanc

Temps : 4 heures
Difficulté : Les exercices sont classés selon leur difficulté.
Points : Chaque exercice vaut 7 points.

1. Déterminer toutes les paires (m, n) d'entiers strictement positifs pour lesquelles il existe une infinité d'entiers k tels que $k^2 + k(m+n) + mn$ est un carré parfait.

2. Soit S un sous-ensemble de $[0, 1]$ composé de 2019 intervalles disjoints $[a_1, b_1], \ldots, [a_{2019}, b_{2019}]$. On suppose que pour tout $d \in [0, 1]$ il existe $x, y \in S$ tels que $|x - y| = d$. Déterminer la valeur minimale que peut atteindre l'expression

$$\sum_{k=1}^{2019} (b_k - a_k).$$

Remarque : un intervalle $[a, b]$ est l'ensemble des nombres réels x avec $a \leq x \leq b$.

3. Maurice se trouve collé à un des murs d'une salle qui a la forme d'un triangle aigu et dont les murs sont des miroirs. Maurice a un pistolet laser dont les rayons sont réfléchis sur les murs. Il tire un coup avec son pistolet. Le rayon est réfléchi exactement une fois par les deux autres murs et revient percuter Maurice. Maurice constate par ailleurs que s'il s'en était allé avant que le rayon ne l'atteigne, alors le rayon aurait été réfléchi par le mur contre lequel il se trouvait et aurait percuté le mur suivant au même endroit que précédemment. Déterminer toutes les positions où Maurice peut se trouver.

Note : on assimile Maurice a un point sur le bord de la salle et on suppose que le rayon ne percute jamais un des trois coins de la salle.

4. Soit n un nombre naturel et $a_0, \ldots, a_n$ une suite de nombres réels positifs telle que $a_0 = \frac{1}{2}$ et $a_{k+1} = a_k + \frac{a_k^2}{n}$. Montrer que

$$\frac{n}{n+1} < a_n < 1.$$

Bonne chance!