OSM - Tour final 2017

Second examen - 11 mars 2017

Temps : 4 heures
Difficulté : Les exercices sont classés selon leur difficulté.
Points : Chaque exercice vaut 7 points.

6. Au camp SMO, il y a au moins quatre Romands. Deux Romands sont soit mutuellement amis, soit mutuellement ennemis. Dans chaque groupe de quatre Romands, au moins un des Romands est ami avec les trois autres. Existe-t-il toujours un Romand qui est ami avec tous les autres ?

7. Soit n un nombre naturel, tel que exactement 2017 paires (a, b) de nombres naturels satisfont l'équation

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{1}{n}.$$

Montrer que n est un carré parfait.

Remarque : $(7, 4) \neq (4, 7)$

8. Soit ABC un triangle isocèle en A avec $AB > BC$. Soit k le cercle de centre A passant par B et C. Soit H le deuxième point d'intersection de k avec la hauteur du triangle ABC passant par B. De plus, soit G le deuxième point d'intersection de k avec la médiane du triangle ABC passant par B. Soit X le point d'intersection des droites AC et GH. Montrer que C est le milieu du segment AX.

9. Soit un polygone convexe à 15 côtés et de périmètre 21. Montrer qu'il existe trois sommets différents de ce polygone qui forment un triangle d'aire strictement inférieure à 1.

10. Soient x, y, z des nombres réels positifs ou nuls avec $xy + yz + zx = 1$. Montrer que

$$\frac{4}{x + y + z} \leq (x + y)(\sqrt{3}z + 1).$$

Bonne chance !