

OSM - Tour préliminaire

Bellinzzone, Lausanne, Zürich - 16 janvier 2016

Temps : 3 heures

Chaque exercice vaut 7 points.

1. Deux cercles k_1 et k_2 se coupent en deux points A et C . Soit B le deuxième point d'intersection de k_1 avec la tangente à k_2 passant par A . Soit D le deuxième point d'intersection de k_2 avec la tangente à k_1 passant par C . Montrer que AD et BC sont parallèles.
2. Cunégonde a n blocs de hauteur 1 à n et souhaiterait les agencer, les uns après les autres, de telle manière que son chat puisse se déplacer en sautant d'un bloc à l'autre, de la gauche vers la droite. Son chat peut sauter d'un bloc au suivant si celui-ci est soit moins haut, soit plus haut de 1 que le bloc précédent. Au début, son chat se trouve sur le bloc à l'extrémité gauche. De combien de manières Cunégonde peut-elle agencer ses blocs, pour que son chat puisse franchir tous les blocs ?
Remarque : Pour $n = 5$, $3 - 4 - 5 - 1 - 2$ est une possibilité, mais $1 - 3 - 4 - 5 - 2$ n'en est pas une.
3. Déterminer tous les entiers naturels n tels que pour chaque diviseur positif d de n on ait
$$d + 1 \mid n + 1.$$
4. Vingt-deux concours de mathématique ont eu lieu, et pour chacun d'entre eux on a remis cinq prix. Les organisateurs s'aperçoivent alors que pour chaque paire de concours, il y a exactement un participant qui a gagné un prix dans ces deux concours. Montrer qu'un des participants a gagné un prix dans chacun des concours.
5. Soit ABC un triangle avec $AB < AC$. La bissectrice de $\angle BAC$ coupe le côté BC en D . Soit k le cercle qui passe par D et qui est tangent aux segments AC et AB en E , respectivement F . Soit G le deuxième point d'intersection de k avec BC . Soit S le point d'intersection de EG et DF . Montrer que AD est perpendiculaire à BS .

Bonne chance !