Testprüfung 2019

Testprüfung

Zeit: 4 Stunden
Schwierigkeit: Die Aufgaben sind der Schwierigkeit nach geordnet.
Punkte: Jede Aufgabe ist 7 Punkte wert.

1. Bestimme alle Paare natürlicher Zahlen (m, n), für die es unendlich viele natürliche k gibt, sodass $k^2 + k(m+n) + mn$ eine Quadratzahl ist.

2. Sei S eine Teilmenge von $[0,1]$ bestehend aus 2019 disjunkten Intervallen $[a_1, b_1], \ldots, [a_{2019}, b_{2019}]$. Nehme an, dass es für jedes $d \in [0,1]$ Zahlen $x, y \in S$ gibt, sodass $|x - y| = d$ gilt. Bestimme den kleinstmöglichen Wert, den der Ausdruck

$$\sum_{k=1}^{2019} (b_k - a_k)$$

annehmen kann.

Bemerkung: Ein Intervall $[a, b]$ ist die Menge der reellen Zahlen x mit $a \leq x \leq b$.

3. Quirin wurde von Banditen an die Wand eines speziellen Raums gefesselt. Die Wände dieses Raums bestehen aus Spiegeln und formen ein spitzwinkliges Dreieck. Um sich von seinen Fesseln zu befreien, schiesst Quirin mit seinem Laserblick einen Laserstrahl los. Der Laserstrahl trifft die beiden anderen Wände genau einmal und kommt dann zu Quirin zurück. Wäre Quirin nicht im Weg gestanden, hätte der Strahl danach noch einmal die gleiche Bahn verfolgt, wie direkt nach Quirins Schuss. Bestimme alle Positionen, an denen sich Quirin befinden könnte.

Bemerkung: Wir interpretieren Quirin als einzelnen Punkt auf dem Rand des Dreiecks und nehmen an, dass der Laserstrahl nicht die Ecken des Raums trifft.

4. Sei n eine natürliche Zahl und $a_0, \ldots, a_n$ eine Folge reeller Zahlen mit $a_0 = \frac{1}{2}$ und $a_{k+1} = a_k + \frac{a_k^2}{n}$. Zeige, dass gilt:

$$\frac{n}{n+1} < a_n < 1.$$

Viel Glück!