

OMS - Tour final 2006

premier examen - 31 mars 2006

Durée: 4 heures

Chaque exercice vaut 7 points.

1. Trouver toutes les fonctions $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ telles que pour tout $x, y \in \mathbb{R}$ on a

$$yf(2x) - xf(2y) = 8xy(x^2 - y^2).$$

2. Soit ABC un triangle équilatéral et soit D un point à l'intérieur du côté BC . Un cercle touche BC en D et coupe les côtés AB et AC aux points intérieurs M, N respectivement P, Q . Prouver qu'on a

$$|BD| + |AM| + |AN| = |CD| + |AP| + |AQ|.$$

3. Calculer la somme des chiffres de

$$9 \times 99 \times 9999 \times \cdots \times \underbrace{99 \dots 99}_{2^n},$$

où le nombre de neufs double pour chaque facteur.

4. $3n$ points coupent un cercle de circonférence $6n$ en n arcs de longueurs 1, 2 et 3 respectivement. Montrer qu'il existe toujours deux parmi ces points qui sont diamétralement opposés sur le cercle.
5. Le cercle k_1 est à l'intérieur du cercle k_2 et le touche dans le point A . Soient B respectivement C les autres points d'intersection d'une droite passant par A avec k_1 respectivement k_2 . La tangente à k_1 qui passe par B coupe k_2 aux points D et E . Les tangentes à k_1 passant par C touchent k_1 aux points F et G . Prouver que D, E, F et G sont sur un cercle.

Bonne chance!

OMS - Tour final 2006

deuxième examen - 1er avril 2006

Durée: 4 heures

Chaque exercice vaut 7 points.

6. Au moins trois joueurs ont participé à un tournoi de tennis. Chaque joueur a joué exactement une fois contre tous les autres et chaque joueur a gagné au moins un match. Montrer qu'il existe trois joueurs A, B, C tels que A a gagné contre B , B a gagné contre C et C a gagné contre A .

7. Soit $ABCD$ un quadrilatère inscrit avec $\angle ABC = 60^\circ$. Supposons $|BC| = |CD|$. Prouver qu'on a

$$|CD| + |DA| = |AB|.$$

8. Des gens venant de n pays différents sont assis autour d'une table ronde tels que pour deux personnes du même pays leurs voisins de droite viennent de deux pays différents. Quel est le nombre maximal de personnes qui peuvent s'asseoir à la table?

9. Soient a, b, c, d des nombres réels. Prouver qu'on a

$$(a^2 + b^2 + 1)(c^2 + d^2 + 1) \geq 2(a + c)(b + d).$$

10. Décider s'il existe un entier $n > 1$ avec les propriétés suivantes:

- (a) n n'est pas premier.
- (b) Pour tout entier a , $a^n - a$ est divisible par n .

Bonne chance!