

Théorie des nombres - Exercices

Actualisé: 28 avril 2016
vers. 1.3.3

1 Équations particulières

Équations quadratiques

- Montrer que l'équation $x^2 + y + z - xyz = 1$ n'admet qu'un nombre fini de solutions dans les nombres naturels.
- Trouver tous les nombres naturels qui peuvent être écrits sous la forme

$$\frac{a^2 + b^2}{ab - 1}$$

où a, b sont des nombres naturels.

- (OIM 03) Trouver toutes les paires de nombres entiers positifs (a, b) telles que

$$\frac{a^2}{2ab^2 - b^3 + 1}$$

est un nombre entier positif.

- (CH 04) Trouver tous les naturels qui peuvent être écrits sous la forme

$$\frac{(a + b + c)^2}{abc}$$

où a, b et c sont des nombres naturels.

Triplets de Pythagore

- Trouver tous les triplets de Pythagore (x, y, z) tels que x, y et z forment une suite arithmétique.
- (Bulgarie 98) Trouver toutes les solutions entières de l'équation

$$x^2 + y^2 = 1997(x - y).$$

- Trouver tous les triples (a, b, c) d'entiers premiers entre eux satisfaisant l'équation suivante :

$$a^2 + ab + b^2 = c^2.$$

- Montrer qu'il n'existe pas de solution entière (x, y, z) de l'équation

$$x^4 + y^4 = z^2$$

où $x, y \neq 0$. (Ceci implique le théorème 5.2 pour $n = 4$)

- Déterminer toutes les paires d'entiers (a, b) telles que $a^2 + b^2$ et $a^2 - b^2$ sont des carrés.

L'équation de Pell

1. Montrer qu'il existe une infinité de paires de nombres entiers (m, n) pour lesquelles

$$1 + 2 + \dots + m = (m + 1) + (m + 2) + \dots + n.$$

2. Trouver toutes les solutions naturels l'équation $(x + 1)^3 - x^3 = y^2$
3. Soit n un entier naturel tel que $3n + 1$ et $4n + 1$ soient tout deux des carrés parfaits. Montrer que n est divisible par 56.
4. (USA 86) Déterminer le plus petit entier naturel $n > 1$ tel que la moyenne quadratique des n premiers entiers naturels soit entière.
5. Prouver qu'il existe une infinité de nombres naturels n tel que $n^2 + 1$ soit un diviseur de $n!$.
6. Prouver que l'équation

$$x^2 + y^2 + z^2 + 2xyz = 1$$

admet une infinité de solutions entières.

7. (Shortlist 01) Considérer le système d'équations suivant :

$$\begin{aligned} x + y &= z + u \\ 2xy &= zu. \end{aligned}$$

Déterminer le plus grand nombre réel m tel que pour chaque solution entière (x, y, z, u) du système avec $x \geq y$, on a

$$m \leq \frac{x}{y}.$$

Construction de solutions

1. Montrer qu'il existe une infinité de premiers $p \equiv 3 \pmod{4}$.
2. Montrer qu'une infinité de nombres triangulaires sont des carrés.
3. (OMI 87) Soit $n \geq 3$ un nombre naturel. Montrer : On peut arranger n points dans le plan tels que deux parmi ces points ont une distance irrationnelle et que trois parmi eux forment un triangle non dégénéré avec une aire rationnelle
4. Soit $n \geq 2$ un entier. Prouver qu'il existe des entiers $a_1, \dots, a_n, b \geq 2$ avec

$$a_1! \cdot a_2! \cdots a_n! = b!.$$

5. (OMI 97) Une matrice $n \times n$ avec des coefficients de l'ensemble $S = \{1, 2, \dots, 2n - 1\}$ est appelée matrice *argentée* si pour tout $i = 1, 2, \dots, n$ la i ème ligne et la i ème colonne contiennent tous les éléments de S . Montrer
- (a) Il n'existe pas de matrice argentée pour $n = 1997$.
 - (b) Il existe des matrices argentées pour une infinité de valeurs de n .
6. (États-Unis 98) Soit $n \geq 2$. Prouver qu'il existe un ensemble S de n naturels tel que $(a - b)^2$ est un diviseur de ab pour deux éléments distincts $a, b \in S$.
7. Montrer que pour tout naturel $n \geq 3$ il existe des naturels impairs x_n et y_n avec

$$7x_n^2 + y_n^2 = 2^n.$$

8. (Chine 97) Montrer qu'il existe une infinité de naturels n tel que les nombres $1, 2, \dots, 3n$ peuvent être distribués sur trois suites

$$a_1, \dots, a_n, \quad b_1, \dots, b_n, \quad c_1, \dots, c_n$$

ayant les propriétés suivantes :

- (a) $a_1 + b_1 + c_1 = a_2 + b_2 + c_2 = \dots = a_n + b_n + c_n$.
- (b) $a_1 + \dots + a_n = b_1 + \dots + b_n = c_1 + \dots + c_n$ et ce nombre est divisible par 6.

2 Congruences II

Ordres

1. Trouves toutes les paires de nombres naturels (a, n) tels que

$$\frac{(a+1)^n - a^n}{n}$$

est un nombre entier.

2. (OIM 99) Trouver toutes les paires (n, p) de nombres naturels telles que p soit un nombre premier, $n \leq 2p$ et

$$n^{p-1} \mid (p-1)^n + 1$$

3. Généraliser l'exemple 4 de Théorie de Nombres II pour des exposants n quelconques, qui ne sont pas forcément premiers.

4. (IMO 03) Soit p un nombre premier. Prouver qu'il existe un nombre premier q tel que pour tout nombre entier n on ait

$$q \nmid n^p - p.$$

5. Trouver tous les nombres premiers p, q tels que $pq \mid 5^p + 5^q$

Racines Primitives

1. Pour un nombre premier $p > 2$ et un entier positif k , soit

$$S_k = 1^k + 2^k + \dots + (p-1)^k$$

Trouver les valeurs de k pour lesquelles $p \mid S_k$

2. Soit n un nombre naturel qui admet une racine primitive. Montrer sans utiliser le théorème 2.3 que -1 est le seul résidu de l'ordre 2 modulo n .

3. (OSM 06) Décider s'il existe un nombre naturel $n > 1$ qui possède les propriétés suivantes :

- (a) n n'est pas premier.
- (b) Pour tout entier a , $a^n - a$ est divisible par n .

3 La partie entière

1. (APMO 01) Trouver le plus grand nombre naturel n tels que la quantité de nombres naturels $\leq n$ divisibles par 3 est égal au nombre de naturels $\leq n$ divisibles par 5 ou 7 (ou les deux).
2. $2^n/n!$.
3. (Angleterre 01) La suite a_n est définie par

$$a_n = n + [\sqrt{n}],$$

où $[x]$ désigne l'entier le plus proche de x . Trouver le plus petit nombre naturel k tel que $a_k, a_{k+1}, \dots, a_{k+2000}$ est une suite de 2001 nombres naturels consécutifs.

4. (Ibero 97) Soit $a \geq 1$ un nombre réel ayant la propriété suivante : si m divise n , alors $\lfloor am \rfloor$ divise $\lfloor an \rfloor$. Montrer que a est un nombre entier.
5. (Balkans 98) Combien d'entiers distincts peuvent-ils être écrits sous la forme $\lfloor n^2/1998 \rfloor$ pour $n = 1, 2, \dots, 1997$?
6. (OIM 68) Soit n un nombre naturel. Trouver la valeur de la somme

$$\left\lfloor \frac{n+1}{2} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{n+2}{4} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{n+4}{8} \right\rfloor + \dots + \left\lfloor \frac{n+2^k}{2^{k+1}} \right\rfloor + \dots$$

7. (USA 97) Soit p_1, p_2, p_3, \dots la suite des nombres premiers en ordre croissant et soit x_0 un nombre réel entre 0 et 1. Pour $k > 0$ on définit

$$x_k = \begin{cases} 0 & \text{si } x_{k-1} = 0 \\ \left\{ \frac{p_k}{x_{k-1}} \right\} & \text{si } x_{k-1} \neq 0 \end{cases}$$

Trouver toutes les valeurs de x_0 pour lesquelles la suite devient identiquement nulle après un nombre fini d'étapes.

8. (Australie 92) Soi n un nombre naturel. Trouver le nombre de réels x avec $1 \leq x < n$ tels que $x^3 = \lfloor x^3 \rfloor + (x - \lfloor x \rfloor)^3$.
9. (Australie 93) Trouver tous les nombres naturels n tels que

$$\lfloor 2\sqrt{n} \rfloor = \lfloor \sqrt{n-1} + \sqrt{n+1} \rfloor + 1.$$

10. (Shortlist 96) Trouver tous les nombres naturels m et n tels que

$$\lfloor m^2/n \rfloor + \lfloor n^2/m \rfloor = \lfloor m/n + n/m \rfloor + mn.$$