SMO - Weisse Prüfung

Wila - 9. März 2017

Zeit: 4 Stunden
Schwierigkeit: Die Aufgaben sind der Schwierigkeit nach geordnet.
Punkte: Jede Aufgabe ist 7 Punkte wert.

1. Sei (t, a, b) ein Tripel natürlicher Zahlen. Dimitri und Dominik spielen ein Spiel mit den folgenden Regeln: Am Anfang steht t an der Wandtafel. Nun führen Dimitri und Dominik abwechslungsweise einen Spielzug aus, wobei Dimitri beginnt. Ein Spielzug besteht darin, von der Zahl auf der Wandtafel entweder a oder b zu subtrahieren und mit dem Resultat zu ersetzen. Der erste Spieler, der eine negative Zahl erreicht, verliert.

Zeige, dass es unendlich viele Zahlen t gibt, sodass Dimitri für alle Paare (a, b) mit $a + b = 2017$ eine Gewinnstrategie hat.

2. Seien m und n ganze Zahlen, sodass $\sqrt[3]{m} + \sqrt[3]{n}$ eine ganze Zahl ist und $m \neq -n$. Zeige, dass sowohl $\sqrt[3]{m}$ als auch $\sqrt[3]{n}$ ganze Zahlen sind.

3. Seien a, b und c positive reelle Zahlen. Zeige, dass gilt:

$$a + \sqrt{ab} + \sqrt[3]{abc} \leq \frac{4}{3}(a + b + c).$$

4. Quirin und Romina spielen ein Spiel auf einem $n \times n$ Brett. Quirin beginnt und markiert eines der Eckfelder. Danach markieren sie abwechslungsweise ein Feld, welches eine gemeinsame Kante mit dem zuletzt markierten Feld hat. Der Spieler, welcher als erstes kein solches Feld markieren kann, verliert.

Für welche n hat Quirin eine Gewinnstrategie?

5. Sei ABC ein gleichschenkliges Dreieck mit $AB = AC$ und sei M der Mittelpunkt der Seite BC. Sei X ein Punkt auf dem Umkreis von Dreieck ABM, sodass X auf dem kürzeren Kreisbogen AM liegt. Sei g die Senkrechte auf XM durch M. Ferner sei T der Punkt auf g mit $XT = XB$, der auf der selben Seite von XM liegt wie B.

Zeige, dass $\angle BTM - \angle MTC$ unabhängig von der Wahl von X ist.

Viel Glück!