MATHEMATICAL.
OLYMPIAD.CH
MATHEMATIK-OLYMPIADE
OLYMPIADES DE MATHÉMATIQUES
OLIMPIADI DELLA MATEMATICA

Second round 2022

Lausanne, Lugano, Zürich - 18 December 2021

Preliminary remark: A complete solution is worth 7 points. For every problem, up to 2 points can be deducted from a correct solution for (minor) flaws. Partial marks are attributed according to the marking schemes. In the case of multiple marking schemes for the same problem, the score is the maximum among all the marking schemes.

Below you will find the elementary solutions known to correctors. Alternative solutions are presented in a complementary section. Students are encouraged to use any methods at their disposal when training at home, but should be wary of attempting to find alternative solutions using methods they do not feel comfortable with under exam conditions, as they risk losing valuable time.

G1) Let k be a circle centred at O and let X, A, Y be three points on k in this order such that the tangent to the circumcircle of triangle OXA through X and the tangent to the circumcircle of OAY through Y are parallel. Show that $\angle XAY = 120°$ if A lies on the minor arc XY.

Solution 1: Let P be the intersection of OX with the tangent through Y, and Q any point on the tangent through X such that A and Q are not on the same side of OX. Note that $\angle OAY = \angle OYA$, as $OY = OA$. Also, by the tangent chord theorem, $\angle OAY = \angle OYP$. Similarly, $\angle OAX = \angle OXA$, as $OX = OA$ and by the tangent chord theorem, we have $\angle OAX = \angle OXQ$. We will now use the fact that the tangents through X and Y are parallel, so that $\angle OXQ = \angle OPY$. We can now conclude, as the sum of the interior angles in the quadrilateral $XAYP$ is $360°$. Hence,

$$\begin{aligned} 360° &= \angle OAY + \angle OYA + \angle OYP + \angle YPX + \angle PXA + \angle XAO \\ &= 3 \cdot (\angle XAO + \angle OAY) \\ &= 3 \cdot \angle XAY, \end{aligned}$$

proving that $\angle XAY = 120°$.

Marking scheme:

Incomplete solutions

These points are additive. The maximal amount of points for an incomplete solution is **6 points**.

(a) **(2 points)** Proving a useful step using that O is the center of k. For example, proving that $\angle OXA = \angle OAX$ and $\angle OAY = \angle OYA$, or proving that $\angle XOY = 360° - 2 \cdot \angle XAY$. If (a) is not obtained, then at most 1 partial point can be obtained for:

(a.1) **(1 point)** Prove that $\angle OXA = \angle OAX$ or that $\angle OAY = \angle OYA$.

(b) **(2 points)** Proving a useful step using that the tangents through X and Y are parallel. For example, introducing P and proving that $\angle OXQ = \angle OPY$, or proving that $\angle XOY = \angle OXQ + \angle OYP$.

(c) **(2 points)** Proving a useful equality using the tangencies to the circumcircles of triangles OAX or OAY. For example, proving that $\angle OAX = \angle OXQ$ or that $\angle OAY = \angle OYP$.

Complete solutions

Complete solutions are worth **7 points**.

Appendix: Configuration issues

One may note that the condition that A lies on the minor arc XY is never mentioned in the proof above. It is needed to prove that $\angle YPX = \angle YPO$, which may be false if A is on the major arc XY. On the official exam, this extra condition was not added, and solutions for $\angle XAY = 60°$ were graded accordingly.

Appendix: Alternative solutions

Solution 2: As in Solution 1, we introduce P and Q and prove that $\angle OAY = \angle OYP$ and $\angle OAX = \angle OXQ$ by the tangent chord theorem. Now let R be a point on the parallel to the tangents through O, such that R and A are on the same side as XO. As the lines are parallel, we have that $\angle OXQ = \angle XOR$ and $\angle OYP = \angle YOR$. This proves that

$$\begin{aligned}\angle XAY &= \angle XAO + \angle OAY \\ &= \angle OXQ + \angle OYP \\ &= \angle XOR + \angle YOR \\ &= \angle XOY.\end{aligned}$$

To conclude, we introduce a point S on the arc XY that does not contain A. Then, by the inscribed angle theorem, and using that $XAYS$ is cyclic, we have

$$\begin{aligned}180^\circ &= \angle XAY + \angle XSY \\ &= \angle XAY + \frac{1}{2} \cdot \angle XOY \\ &= \frac{3}{2} \cdot \angle XAY,\end{aligned}$$

proving that $\angle XAY = 120^\circ$.

G2) Let k_1 be a circle centred at M and ℓ a line tangent to k_1 at A. Let k_2 be a circle inside k_1 also tangent to ℓ at A. Let P be a point on ℓ different from A. The second tangent to k_1 through P touches k_1 at T. Let B be the second intersection of AT and k_2, and let C be the second intersection of PB and k_2. Show that $ATCM$ is a cyclic quadrilateral.

Solution 1: First, observe that

(1) $\angle PAM = \angle PTM = 90^\circ$ since lines PA and PT are tangent to circle k_1.

(2) PA is tangent to both circles k_1 and k_2 by the problem condition.

(3) $PA = PT$ since both lines PA and PT are tangent to circle k_1. Hence triangle PAT is isoceles at P.

By (1), P, A, M, T lie on a circle of diameter PM. By using (2) and (3), one gets

$$\angle ACP = \angle ACB \overset{(2)}{=} \angle PAB = \angle PAT \overset{(3)}{=} \angle PTA$$

so P, A, C, T lie on a circle. Therefore, P, A, C, M, T all lie on the circumcircle of PAT. In particular, $ATCM$ is a cyclic quadrilateral, as required.

Marking scheme:

Incomplete solutions

These points are additive. The maximal amount of points for an incomplete solution is **6 points**.

(a) **(2 points)** Prove that $PAMT$ is a cyclic quadrilateral. If (a) is not obtained, then at most 1 partial point can be obtained for:

(a.1) **(1 point)** Prove (1)

(b) **(4 points)** Prove that $PACT$ is a cyclic quadrilateral. If (b) is not obtained, then at most 3 partial points can be obtained for:

(b.1) **(2 points)** Use (2) to obtain $\angle ACB = \angle PAB$

(b.2) **(1 point)** Prove (3)

Complete solutions

Complete solutions are worth **7 points**

Appendix: Alternative solutions

Solution 2 (Johann): Let $N = PM \cap AT$. Since PM is the perpendicular bisector of AT (as $PT = PA$ and $MT = MA$), we get that N is in fact the midpoint of segment AT. Now, note that triangles PNA and PAM are similar. Therefore, we get $\frac{PN}{PA} = \frac{PA}{PM}$. Hence, by power of a point and this identity, we get

$$PB \cdot PC = PA^2 = PM \cdot PN$$

so B, C, M, N lie on a circle. Therefore, since $\angle MNB = \angle MNA = 90°$, B, C, M, N lie on a circle of diameter BM. Thus, $\angle PCM = 90°$. By (a), we conclude that P, A, C, M, T lie on a circle of diameter PM.
Additional note: One can rewrite this solution by considering the inversion of center P and radius PA.

Solution 3 (Tanish): As before, we see that P, A, M, T are a cyclic quadrilateral. Our aim is now to prove that $\angle APT + \angle TCA = 180°$. By the theorem of the radical center, we have that (TCB) is tangent to PT, as the radical axes PT, CB and PA intersect in a point. Then by the tangent angle theorem, we have $\angle TCA = \angle TCB + \angle BCA = \angle TAP + \angle PTA$, allowing us to conclude.

K1) A school class of $n \geq 2$ children is taking several group pictures. For every group with at least one child, there is exactly one picture containing this specific group. The pictures are now hung up in different rooms in the school, such that every child appears in at most one photo per room.

(i) Show that this is possible if the school has 2^{n-1} rooms.

(ii) Show that this is not possible if the school has less than 2^{n-1} rooms.

Solution:

(i) One way of doing this is to pair each photo with its complement and put the photo with all children in a room by itself. Indeed, this is the only way (see appendix).

(ii) The simplest way of doing this is to provide a set of 2^{n-1} photos, of which no two are disjoint. There are many ways of doing so (taking all the photos containing a given child is one example, amongst many others) and these all provide the desired proof, as all these photos have to be in different rooms.

Otherwise, a more general counting argument also suffices: as at most n kids appear per room, and there must be $n2^{(n-1)}$ appearances in total, we need at least $2^{(n-1)}$ rooms.

Marking scheme, part (i):

Complete solutions

If the contestant provides the correct construction they are awarded **3 points**.

Incomplete solutions

These points are *non-additive*. The maximal amount of points for an incomplete solution is **2 points**.

(a) **(2 points)** Finding significant information about the construction, e.g. that the set of 2^{n-1} photos containing a given child must all be in different rooms.

(b) **(1 point)** Finding nontrivial information about the construction, e.g. that each room must contain every child in a photo in it somewhere or providing the construction for small cases with an attempt to generalise.

Remarks

1. Any other attempt at a construction will fail; a proof of this is provided in the appendix.
2. At least one point should be awarded in part (i) if they solve part (ii) by finding a set of 2^{n-1} photos of which no two can appear in the same room, as they know that all these photos must be in different rooms. If they state their intention to use this in part (i) they should be awarded two points, but not realising that this fact is useful is still worth a point.

Marking scheme, part (ii):

Complete solutions

If the contestant provides any proof that $2^{n-1}-1$ rooms is insufficient they are awarded **4 points**.

Incomplete solutions

These points are *non-additive*. The maximal amount of points for an incomplete solution is **2 points**.

(c) **(2 points)** Significant progress, e.g. noting that considering all the photos with more than $\lceil \frac{n}{2} \rceil$ students provides a set of size 2^{n-1} photos of which no two can be in the same room for odd n but unfortunately is not sufficient in the even case. Indeed, any proof that just solves either the odd or the even case should be awarded 2 points.

(d) **(1 point)** for minor progress, e.g. noting large (on the order of $> n$) sets of photos necessarily placed in different rooms, such as the set of photos of size $n-1$. If a contestant states their intention to find a set of non-compatible photos of size 2^{n-1} but does not succeed, they should still be awarded a point.

Remarks

1. If a contestant offers an alternative idea that works for all but finitely many values of n, this should be considered only a minor flaw, and loses a point. On the contrary, if the contestant assumes that every child appears exactly once (as opposed to at most once) per room without proving so, this should be considered a major flaw, and loses two points.
2. Contestants do not need to state they are using the pigeonhole principle, as this is considered a trivial example of it.

Appendix: uniqueness in (i)

Consider all the photos with some given child A, and refer to these as the *big* photos. It is clear that two big photos cannot be hung in the room, and there are 2^{n-1} big photos, so every room has exactly one big photo. Any photo that is not a big photo is referred to as a *small* photo; note in particular the complement of every big photo is a small photo, and vice versa. Furthermore, the union of little photos is always little.

Suppose we successfully hang the photos. A simple counting argument tells us that as each child appears in 2^{n-1} photos they must appear exactly once per room, so in particular the union of all the photos in a given room contains all the children. Consider now an arbitrary room; it must contain a big photo and some little photos; we wish to show there is exactly one little photo. Suppose by contradiction there is more than one little photo and consider the photo that is the union of all the little photos: it is again a little photo; let us visit the room it is in. In this room, we again consider the union of all the little photos, and we move to the room with that photo. In particular, at some point we must visit the same room twice in a row, because if there are always two or more little photos, then the size of the union will keep increasing, but it cannot increase indefinitely. In particular, this room only contains a single little photo. If we now consider the previous room before this one, it contains two or more little photos whose union is the new single little photo, but then the two rooms must contain the same big photo, contradiction. So every room contains at most one little photo and so at most two photos; it is now clear that every room must contain a photo and its complement.

Note that there exist other ways to create the set of *big* sets; the only condition is that the union of little sets should be a little set.

K2) There are 924 fans of the Liechtenstein football team from either Liechtenstein or Switzerland who have gathered to get the autographs of their favourite players. There are 11 players on the team, and every fan has exactly 6 favourite players. No two people from a given country share the same group of favourites, and in the end everyone got exactly one autograph from one of their favourite players. Show that there is a player who gave an autograph to both a Swiss and a Liechtensteiner person.

Solution: We begin by observing that the number of possibilities for choosing a group of 6 favourite players is exactly

$$\binom{11}{6} = \frac{11 \cdot 10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6}{6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = 462,$$

which is precisely half the number of fans. This implies that there have to be exactly 462 fans from Liechtenstein and 462 fans from Switzerland. Otherwise, one of these two countries would send at least 463 fans, but then, by pigeonhole principle, two fans from the same country would share the same 6 favourite players, which contradicts the problem statement.

We therefore know that there are 462 fans from each country and furthermore, for each of the possible $\binom{11}{6}$ combinations of favourite players, there are a Swiss fan and a Liechtensteiner fan who have exactly these 6 favourite players.

Now, if there was no player who gave an autograph to both a Swiss and a Liechtensteiner person, we could partition the players into two disjoint sets A and B, such that only players from set A gave their autograph to Swiss fans and only players from B gave their autograph to Liechtensteiner fans. (If some player did not give an autograph to anyone, we can just put him in an arbitrary set). Since A and B are disjoint and their union contains 11 elements, one of the sets has at most 5 elements. Without loss of generality, let $|A| \leq 5$ and $|B| \geq 6$. However, by the observation in the previous paragraph, there must be a Swiss fan whose favourite players are all in the set B, so none of them gave any autographs to Swiss fans. This is a contradiction to the fact that everyone got an autograph from exactly one of their favourite players.

We conclude that there must have been a player who gave an autograph to at least one fan from Switzerland and at least one fan from Liechtenstein.

Marking scheme:

The following points are additive.

(a) **(1 point)** Observing that there are $\binom{11}{6}$ different choices of having 6 favourite players. It is not necessary to explicitly compute the value 462 in order to obtain this point.

(b) **(1 point)** Proving that there must be 462 fans from each country

(c) **(2 points)** Noting that each possible combination of 6 favourite players occurs in both countries.

(d) **(1 point)** Assuming (for the sake of contradiction) that no player gave autographs to fans from both Switzerland and Liechtenstein and observing that the players can be partitioned by the country of their fans.

(e) **(1 point)** Observing that one of the sets A and B has to contain fewer than 6 elements.

(f) **(1 point)** Finding a contradiction by choosing a fan whose favourite players do not appear in the corresponding set.

Z1) Determine all pairs (m, p) of a positive integer m and a prime number p satisfying the equation

$$p^2 + pm = m^3.$$

Solution 1: Rewriting the equation as $p^2 = m(m^2 - p)$, we see that m must divide p^2. However, since p is prime, the only positive factors of p^2 are $1, p$ and p^2. We now check each case separately:

Case $\mathbf{m = 1}$: The equation becomes $p^2 + p = 1$. Since this would imply that p divides 1, we do not get any solutions in this case.

Case $\mathbf{m = p}$: The equation becomes $2p^2 = p^3$ and cancelling a factor of p^2 we find that $p = 2$. The pair $(2, 2)$ is therefore the only solution in this case.

Case $\mathbf{m = p^2}$: The equation becomes $p^2 + p^3 = p^6$ and after cancelling, we get $1 + p = p^4$. Again, this would imply that p divides 1, which is not possible. No solutions in this case.

We conclude that $(2, 2)$ is the only pair satisfying the equation.

Solution 2: We observe that p divides the left-hand-side of the equation and therefore must divide the right-hand-side as well. Now if p divides m^3, we must have that p divides m. Let us write $m = pn$ for some positive integer n. Substituting into our equation and cancelling a factor of p^2 we are left with $1 + n = pn^3$. This implies that n must divide 1 and therefore $n = 1$ and $m = 2$. The equation now simplifies to $p = 2$ and we conclude that the only solution is the pair $(2, 2)$.

Remark: One can also directly show that $p = 2$ using a parity argument from the initial equation. The value of m can then be found using the first part of either solution outlined above.

Marking Scheme:

Incomplete solutions

These points are additive. The maximal amount of points for an incomplete solution is **5 points**.

(a) **(1 point)** Stating that (2,2) is a solution.

(b) **(1 point)** Stating a useful divisibility condition on m or p.

(c) **(2 points)** Limiting m to finitely many values depending on p, like for instance $m \in \{1, p, p^2\}$ in Solution 1.

(d) **(1 point)** Proving that $p = 2$.

Complete solutions

Complete solutions are worth **7 points**. Note that as long as the solution $(2, 2)$ is clearly stated as such, contestants do not have to explicitly show that it in fact satisfies the equation.

Z2) Let n be a positive integer and d a positive divisor of n. Show that if

$$\frac{d^2+d+1}{n+1}$$

is an integer, then it is equal to 1

Solution 1 (Raphael): Assume that the fraction is an integer, write

$$\frac{d^2+d+1}{n+1} = m.$$

Obviously m is going to be positive, as both n and d are also positive. Since d divides n, we can write $n = kd$. Plugging it into the above equation we get

$$d^2+d+1 = (kd+1)m \;\Leftrightarrow\; d^2+d-kdm = m-1.$$

So d also divides $m-1$, we can write $m = ld+1$ for $l \in \mathbb{Z}$, $l \geq 0$ ($l \geq 1$ if and only if $m-1 > 0$). Plugging that in again, gives us

$$d^2+d+1 = (kd+1)(ld+1) = kld^2 + d(k+l) + 1 \Leftrightarrow d+1 = kld+k+l.$$

As $k \in \mathbb{N}$, we have $k \geq 1$. Now assume $m \neq 1$. From this it would follow that $m-1$ is strictly positive, leading to $l \geq 1$. Under this assumption we would get $kld \geq d$, leading to

$$kdl+k+l \geq d+k+l \geq d+1+1 > d+1 = kdl+k+l,$$

which is impossible. Contradiction! So we must have $l < 1 \Rightarrow l = 0$ leading to $m = 0 \cdot d + 1 = 1$ as wanted.

Solution 2 (Robert): Write $n = kd$ as before, and we obtain that $(kd+1) \mid (d^2+d+1)$. As $a \mid b$ implies $a \mid b-a$ we get

$$kd+1 \mid d^2+d-kd = d \cdot (d+1-k).$$

As $gcd(kd+1, d) = 1$ by Euclid's Algorithm, we also get

$$kd+1 \mid d+1-k.$$

This follows as $a \mid bc$ and $gcd(a,b) = 1$ implies $a \mid c$. We do a case distinction on the size of k

- If $k < d+1$, we have $d+1-k > 0$ which implies

  $$kd+1 \leq d+1-k \leq d.$$

  This is impossible

- If $k > d+1$, we instead have $k-d-1 > 0$. As $a \mid b$ implies $a \mid -b$ we also have $kd+1 \mid k-d-1$. We get $kd+1 \leq k-d-1 \leq k$ which is also impossible.

- The final case $k = d+1$ gives us $n = d(d+1)$. Then $n+1 = d(d+1)+1 = d^2+d+1$, which means that the fraction is equal to one

Note that in the first two cases we used $a \mid b$ implies $a \leq b$, if both $a, b > 0$. This finishes the proof.

Marking scheme:

Incomplete solutions

These points are *non-additive*. The maximal amount of points for an incomplete solution is **4 points**.

(a) **(1 point)** doing minor nontrivial steps, that seem like progress made to any solution. e.g. substituting $n = kd$ and then using this substitution to get further info.

(b) **(4 points)** Find an equality or a divisibility condition from which all but finitely many values of $m = \frac{d^2+d+1}{n+1}$ can be excluded by simple approximations (for instance $d + 1 = kdl + k + l$ in Solution 1).

(c) **(4 points)** Show that $n+1$ divides a polynomial of degree 1 in the variables d and k, where $k = n/d$, such as e.g. $d + 1 - k$ in Solution 2.

Complete solutions

Complete solutions are worth **7 points**. Examples of minor flaws that lead to the deduction of 1 point include using that $x \mid y \Rightarrow x \leq y$ but forgetting to verify that y is positive and not equal to zero.

MATHEMATICAL.
OLYMPIAD.CH
MATHEMATIK-OLYMPIADE
OLYMPIADES DE MATHÉMATIQUES
OLIMPIADI DELLA MATEMATICA

Zweite Runde 2022

Lausanne, Lugano, Zürich - 18. Dezember 2021

Vorläufige Bemerkung: Eine vollständige Lösung ist 7 Punkte wert. Bei jeder Aufgabe kann es bis zu 2 Punkte Abzug geben für kleine Fehler bei einer sonst korrekten Lösung. Teilpunkte werden gemäss dem Punkteschema (Marking Scheme) vergeben. Man kann pro Aufgabe höchstens für ein Marking Scheme Punkte erhalten (man bekommt dabei stets die grösstmögliche Punktzahl)

Im Anschluss befinden sich die Lösungen mit Vorrundentheorie, die den Korrektoren bekannt sind. Am Ende jedes Problems werden noch alternative Lösungen präsentiert, die auch andere Theorie verwenden können. Während des Trainings zu Hause werden die Teilnehmenden dazu ermutigt, alle ihnen bekannten Methoden zu verwenden. An der Prüfung hingegen ist es nicht empfohlen mit Methoden, welche sie unter Prüfungskonditionen nicht genügend beherrschen, nach alternativen Lösungen zu suchen. Damit wird riskiert, dass wertvolle Zeit verloren geht.

G1) Sei k ein Kreis mit Mittelpunkt O und seien X, A, Y drei Punkte auf k in dieser Reihenfolge, sodass die Tangente zum Umkreis des Dreiecks OXA durch X und die Tangente zum Umkreis von OAY durch Y parallel sind. Zeige, dass $\angle XAY = 120°$ gilt, sofern A sich auf dem kleineren Kreisbogen XY befindet.

Lösung 1: Sei P der Schnittpunkt von OX mit der Tangente durch X sodass A und Q nicht auf der gleichen Seite von OX sind. Es gilt, $\angle OAY = \angle OYA$, da $OY = OA$. Ausserdem gilt wegen dem Tangentenwinkelsatz $\angle OAY = \angle OYP$. Analog gilt $\angle OAX = \angle OXA$, da $OX = OA$ und wegen dem Tangentenwinkelsatz gilt $\angle OAX = \angle OXQ$. Da die Tangenten durch X und Y parallel sind, gilt $\angle OXQ = \angle OPY$. Wir können jetzt verwenden, dass im Viereck $XAYP$ die Summe der Innenwinkel $360°$ beträgt. Daraus folgt,

$$\begin{aligned}360° &= \angle OAY + \angle OYA + \angle OYP + \angle YPX + \angle PXA + \angle XAO\\ &= 3 \cdot (\angle XAO + \angle OAY)\\ &= 3 \cdot \angle XAY,\end{aligned}$$

und daher $\angle XAY = 120°$.

Punkteschema:

Unvollständige Lösung

Diese Punkte sind additiv. Die maximale Punktzahl für eine unvollständige Lösung beträgt **6 Punkte**.

(a) **(2 Punkte)** Ein nützlicher Schritt, welcher die Tatsache verwendet, dass O der Mittelpunkt von k ist. Zum Beispiel beweisen, dass $\angle OXA = \angle OAX$ und $\angle OAY = \angle OYA$ gilt, oder dass $\angle XOY = 360° - 2 \cdot \angle XAY$ gilt. Falls (a) nicht erreicht wurde, kann höchstens 1 Teilpunkt erreicht werden für:

  (a.1) **(1 point)** Beweise, dass $\angle OXA = \angle OAX$, oder dass $\angle OAY = \angle OYA$.

(b) **(2 Punkte)** Ein nützlicher Schritt, welcher die Tatsache verwendet, dass die Tangenten durch x und Y parallel sind. Zum Beispiel P einführen und beweisen, dass $\angle OXQ = \angle OPY$, oder beweisen, dass $\angle XOY = \angle OXQ + \angle OYP$ gilt.

(c) **(2 Punkte)** Eine nützliche Tatsache herausfinden, indem man die Tangenten zu den Umkreisen OAX oder OAY verwendet. Zum Beispiel beweisen, dass $\angle OAX = \angle OXQ$ oder dass $\angle OAY = \angle OYP$.

Vollständige Lösung

Vollständige Lösungen sind **7 Punkte** wert.

Appendix: Probleme mit der Konfiguration

Wie man feststellen kann, wird die Bedingung, dass A auf dem kleineren Kreisbogen XY liegt, nirgends im Beweis erwähnt. Sie ist notwendig um zu beweisen, dass $\angle YPX = \angle YPO$ gilt, was falsch sein kann, wenn A auf dem grösseren Kreisbogen liegt (in diesem Fall ist $\angle XAY = 60°$) . In der offiziellen Prüfung fehlte diese Bedingung, aber bei der Korrektur wurde dies berücksichtigt.

Appendix: Alternative Lösungen

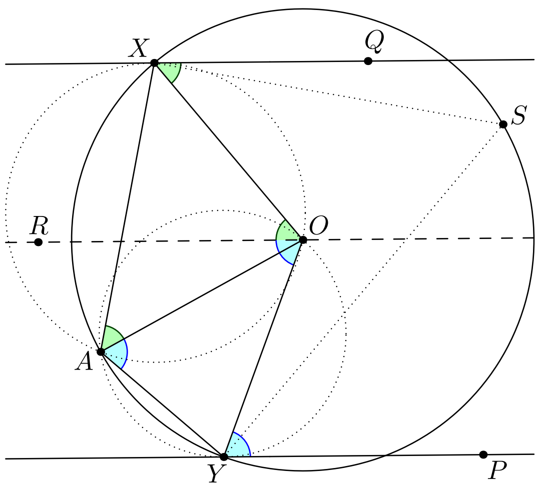
Lösung 2: Wie in Lösung 1 führen wir die Punkte P und Q ein und beweisen mit dem Tangentenwinkelsatz, dass $\angle OAY = \angle OYP$ und $\angle OAX = \angle OXQ$ gilt. Nun sei R ein Punkt auf der Parallele zu den Tangenten durch O, sodass R und A auf der gleichen Seite von XO liegen. Da diese Linien parallel sind, gilt $\angle OXQ = \angle XOR$ und $\angle OYP = \angle YOR$. Dies beweist, dass

$$\begin{aligned}\angle XAY &= \angle XAO + \angle OAY \\ &= \angle OXQ + \angle OYP \\ &= \angle XOR + \angle YOR \\ &= \angle XOY.\end{aligned}$$

Schliesslich führen wir einen Punkt S auf dem Bogen XY ein, welcher A nicht enthält. Dann, durch den Innenwinkelsatz und weil $XAYS$ ein Sehnenviereck ist, haben wir

$$\begin{aligned}180^\circ &= \angle XAY + \angle XSY \\ &= \angle XAY + \frac{1}{2} \cdot \angle XOY \\ &= \frac{3}{2} \cdot \angle XAY,\end{aligned}$$

was beweist, dass $\angle XAY = 120^\circ$ gilt.



G2) Sei k_1 ein Kreis mit Mittelpunkt M und ℓ eine Gerade, die k_1 in A berührt. Ein Kreis k_2 im Innern von k_1 berührt ℓ ebenfalls in A. Sei P ein anderer Punkt auf ℓ. Die zweite Tangente an k_1 durch P berührt k_1 im Punkt T. Sei B der Schnittpunkt von AT und k_2 und sei C der Schnittpunkt von PB und k_2. Zeige, dass $ATCM$ ein Sehnenviereck ist.

Lösung 1: Beobachte zuerst, dass

(1) $\angle PAM = \angle PTM = 90°$ weil die Linien PA und PT Tangenten an den Krei k_1 sind.

(2) PA ist eine Tangente zu den Kreisen k_1 und k_2 wegen der Aufgabenstellung.

(3) $PA = PT$ weil beide Linien PA und PT Tangenten zum Kreis k_1 sind. Also ist das Dreieck PAT gleichschenklig in P.

Wegen (1), liegen P, A, M, T auf einem Kreis mit Durchmesser PM. Indem wir (2) und (3) verwenden, erhalten wir

$$\angle ACP = \angle ACB \overset{(2)}{=} \angle PAB = \angle PAT \overset{(3)}{=} \angle PTA$$

also liegen P, A, C, T auf einem Kreis. Somit liegen P, A, C, M, T alle auf dem Umkreis von PAT. Also ist auch $ATCM$ ein Sehnenviereck, was zu beweisen war.

Punkteschema:

Unvollständige Lösung

Diese Punkte sind additiv. Die maximale Anzahl Punkte für eine unvollständige Lösung beträgt **6 Punkte**.

(a) **(2 points)** Beweise, dass $PAMT$ ein Sehnenviereck ist. Falls (a) nicht erreicht wurde, kann höchstens 1 Teilpunkt erreicht werden für:

(a.1) **(1 Punkt)** Beweise (1)

(b) **(4 Punkte)** Beweise, dass $PACT$ ein Sehnenviereck ist. Falls (b) nicht erreicht wurde, können höchstens 3 Punkte erreicht werden für

(b.1) **(2 Punkte)** Verwende (2) um zu beweisen, dass $\angle ACB = \angle PAB$

(b.2) **(1 Punkt)** Beweise (3)

Vollständige Lösung

Vollständige Lösungen sind **7 Punkte** wert.

Appendix: Alternative Lösungen

Lösung 2 (Johann): Sei $N = PM \cap AT$. Weil PM die Mittelsenkrechte von AT ist, (da $PT = PA$ und $MT = MA$), erhalten wir, dass N tatsächlich der Mittelpunkt von der Strecke AT ist. Also sind die Dreiecke PNA und PAM ähnlich zueinander sind. Somit erhalten wir $\frac{PN}{PA} = \frac{PA}{PM}$. Also erhalten wir wegen der Potenz eines Punktes an den Kreis und dieser Tatsache

$$PB \cdot PC = PA^2 = PM \cdot PN$$

. Also liegen B, C, M, N auf einem Kreis. Weil $\angle MNB = \angle MNA = 90°$, B, C, M, N liegen auf einem Kreis mit Durchmesser BM. Also, $\angle PCM = 90°$. Wegen (a), folgt daraus, dass P, A, C, M, T auf einem Kreis mit Durchmesser PM liegen.
Zusätzliche Bemerkung: Man kann diese Lösung neuschreiben indem man die Inversion vom Zentrum P und Radius PA verwendet.

Lösung 3 (Tanish): Wie zuvor, stellen wir fest, dass P, A, M, T ein Sehnenviereck ist. Unser Ziel ist es zu beweisen, dass $\angle APT + \angle TCA = 180°$. Wegen dem Potenzsatz haben wir, dass (TCB) eine tangente zu PT ist, da die Potenzlinien PT, CB und PA sich in einem Punkt schneiden. Dann, wegen dem Tangentenwinkelsatz gilt $\angle TCA = \angle TCB + \angle BCA = \angle TAP + \angle PTA$, was zur Lösung führt.

K1) (a) Eine Lösung besteht darin, jedes Foto mit seinem Komplement zu paaren (und das Vollständige Foto alleine in einen Raum zu tun). Tatsächlich ist dies die einzige Konstruktion die funktioniert (siehe Anhang). Contestants only need to provide this construction and do **not** need to prove that this is the only partitioning of the photos that works, but for completeness' sake (and to convince ourselves that any other proposed partitioning must be false) we provide the proof in an appendix.

(b) Die einfachste Möglichkeit um dies zu zeigen besteht darin, eine Menge von 2^{n-1} Photos von denen keine zwei disjunkt sind zu finden. Es gibt viele Arten dies zu tun (man kann zum Beispiel alle Fotos, auf denen ein bestimmtes Kind zu sehen ist, auswählen) und alle führen zur Lösung, da all diese Fotos in verschiedenen Räumen hängen müssen.

Ein allgemeineres Zählargument ist auch ausreichend: Da höchstens n Kinder in einem Raum auftauchen und es insgesamt $n2^{n-1}$ solche Relationen zwischen Kindern und Räumen gibt, muss es insgesamt mindestens 2^{n-1} Räume geben.

Punkteschema, Teil (i):

Vollständige Lösungen

Wenn Teilnehmende die korrekte Konstruktion finden, erhalten sie **3 Punkte**.

Unvollständige Lösungen

Diese Punkte sind *nicht additiv*. Die maximale Punktzahl für eine unvollständige Lösung ist **2 Punkte**.

(a) **(2 Punkte)** Relevante Informationen über die Konstruktion finden, zum Beispiel, dass alle 2^{n-1} Fotos mit einem gegebenen Kind in verschiedenen Räumen sein müssen.

(b) **(1 Punkte)** Nicht-triviale Informationen über die Konstruktion finden, zum Beispiel dass im optimalen Fall jeder Raum jedes Kind irgendwie auf einem Foto enthalten muss oder die Konstruktion für kleine n finden und versuchen zu verallgemeinern.

Bemerkungen

1. Jeder andere Ansatz für eine Konstruktion ist zum Scheitern verurteilt. Ein Beweis dafür findet sich im Anhang.
2. Mindestens ein Punkt sollte im Teil (i) angerechnet werden, falls in Teil (ii) eine Menge von 2^{n-1} Fotos beschrieben wird, von denen keine zwei im gleichen Raum hängen können, weil sie wissen, dass all diese in verschiedenen Räumen hängen müssen. Falls klar ist, dass die Relevanz für Teil (i) erkannt wurde, sollten sogar zwei Punkte angerechnet werden, aber auch wenn dies nicht erkannt wird, ist es einen Punkt wert.

Punkteschema, Teil (ii):

Vollständige Lösungen

Ein Beweis dafür, dass $2^n - 1$ Räume nicht ausreichen ist **4 Punkte** wert.

Unvollständige Lösungen

Diese Punkte sind *nicht additiv*. Die maximale Anzahl Punkte für eine unvollständige Lösung ist **2 Punkte**.

(a) **(2 Punkte)** für jeden relevanten Fortschritt, zum Beispiel die Tatsache, dass für ungerade n alle Fotos mit mindestens $\lceil \frac{n}{2} \rceil$ Kindern eine Menge von 2^{n-1} Fotos bilden, von denen keine zwei in selbem Raum hängen können. Dieses Argument lässt sich aber nicht 1 zu 1 auf gerade n übertragen. Es sollte tatsächlich für jeden Beweis für gerade oder ungerade n zwei Punkte geben.

(b) **(1 Punkt)** für kleineren Fortschritt, zum Beispiel eine Menge von $\geq n$ Fotos finden, die alle in verschiedenen Räumen hängen müssen, zum Beispiel alle Fotos mit $n-1$ Kindern. Es geht hierbei um die Beweisidee, sprich: Wenn Teilnehmende schreiben, dass sie eine Menge von 2^{n-1} 'nicht-kompatiblen' Fotos finden wollen, dies aber nicht schaffen, sollten sie dennoch einen Punkt erhalten.

Appendix: uniqueness in (a).
Consider all the photos with some given child A, and refer to these as the *big* photos. It is clear that two big photos cannot be hung in the room, and there are 2^{n-1} big photos, so every room has exactly one big photo. Any photo that is not a big photo is referred to as a *small* photo; note in particular the complement of every big photo is a small photo, and vice versa. Furthermore, the union of little photos is always little.

Suppose we successfully hang the photos. A simple counting argument tells us that as each child appears in 2^{n-1} photos they must appear exactly once per room, so in particular the union of all the photos in a given room contains all the children. Consider now an arbitrary room; it must contain a big photo and some little photos; we wish to show there is exactly one little photo. Suppose by contradiction there is more than one little photo and consider the photo that is the union of all the little photos: it is again a little photo; let us visit the room it is in. In this room, we again consider the union of all the little photos, and we move to the room with that photo. In particular, at some point we must visit the same room twice in a row, because if there are always two or more little photos, then the size of the union will keep increasing, but it cannot increase indefinitely. In particular, this room only contains a single little photo. If we now consider the previous room before this one, it contains two or more little photos whose union is the new single little photo, but then the two rooms must contain the same big photo, contradiction. So every room contains at most one little photo and so at most two photos; it is now clear that every room must contain a photo and its complement.

Note that there exist other ways to create the set of *big* sets; the only condition is that the union of little sets should be a little set.

K2) Es gibt 924 Fans der Liechtensteiner Fußballmannschaft aus Liechtenstein oder der Schweiz, die sich versammelt haben, um ein Autogramm ihrer Lieblingsspieler zu bekommen. Es gibt 11 Spieler in der Mannschaft, und jeder Fan hat genau 6 Lieblingsspieler. Keine zwei Personen aus einem bestimmten Land haben die gleiche Gruppe von Lieblingsspielern, und am Ende hat jeder genau ein Autogramm von einem seiner Lieblingsspieler bekommen. Zeige, dass es einen Spieler gibt, der sowohl einem Schweizer als auch einem Liechtensteiner ein Autogramm gegeben hat.

Lösung: Wir beginnen mit der Beobachtung, dass die Anzahl der Möglichkeiten, eine Gruppe von 6 Lieblingsspielern zu wählen, genau

$$\binom{11}{6} = \frac{11 \cdot 10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6}{6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = 462,$$

das ist genau die Hälfte der Anzahl der Fans. Dies bedeutet, dass es genau 462 Fans aus Liechtenstein und 462 Fans aus der Schweiz geben muss. Andernfalls würde eines dieser beiden Länder mindestens 463 Fans schicken, aber dann würden sich nach dem Schubladenprinzip zwei Fans aus demselben Land die gleichen 6 Lieblingsspieler teilen, was der Problemstellung widerspricht.

Wir wissen also, dass es 462 Fans aus jedem Land gibt, und außerdem gibt es für jede der möglichen $\binom{11}{6}$ Kombinationen von Lieblingsspielern einen Schweizer Fan und einen Liechtensteiner Fan, die genau diese 6 Lieblingsspieler haben.

Wenn es nun keinen Spieler gäbe, der sowohl einem Schweizer als auch einem Liechtensteiner ein Autogramm gegeben hat, könnten wir die Spieler in zwei disjunkte Mengen A und B aufteilen, so dass nur Spieler aus der Menge A den Schweizer Fans ein Autogramm gegeben haben und nur Spieler aus B den Liechtensteiner Fans ein Autogramm gegeben haben. (Wenn ein Spieler niemandem ein Autogramm gegeben hat, können wir ihn einfach in eine beliebige Menge setzen). Da A und B disjunkt sind und ihre Vereinigung 11 Elemente enthält, hat eine der Mengen höchstens 5 Elemente. Ohne Verlust der Allgemeinheit sei $|A| \leq 5$ und $|B| \geq 6$. Nach der Beobachtung im vorigen Absatz muss es jedoch einen Schweizer Fan geben, dessen Lieblingsspieler alle in der Menge B sind, so dass keiner von ihnen den Schweizer Fans ein Autogramm gegeben hat. Dies ist ein Widerspruch zu der Tatsache, dass jeder ein Autogramm von genau einem seiner Lieblingsspieler bekommen hat.

Daraus schließen wir, dass es einen Spieler gegeben haben muss, der mindestens einem Fan aus der Schweiz und mindestens einem Fan aus Liechtenstein ein Autogramm gegeben hat.

Punkteschema:

Die folgenden Punkte sind additiv.

(a) **(1 Punkt)** Man beachte, dass es $\binom{11}{6}$ verschiedene Möglichkeiten gibt, 6 bevorzugte Spieler zu haben. Es ist nicht notwendig, den Wert 462 explizit zu berechnen, um diesen Punkt zu erhalten.

(b) **(1 Punkt)** Beweisen, dass es 462 Fans aus jedem Land geben muss

(c) **(2 Punkte)** Feststellen, dass jede mögliche Kombination von 6 bevorzugten Spielern in beiden Ländern vorkommt.

(d) **(1 Punkt)** Angenommen, dass kein Spieler sowohl Fans aus der Schweiz als auch aus Liechtenstein ein Autogramm gegeben hat, und festgestellt, dass die Spieler nach dem Land ihrer Fans aufgeteilt werden können.

(e) **(1 Punkt)** Beobachten, dass eine der Mengen A und B weniger als 6 Elemente enthalten muss.

(f) **(1 Punkt)** Einen Widerspruch finden, indem man einen Fan auswählt, dessen Lieblingsspieler nicht in der entsprechenden Menge vorkommen.

Z1) Bestimme alle Paare (m, p) einer natürlichen Zahl m und einer Primzahl p, welche die Gleichung

$$p^2 + pm = m^3.$$

erfüllen.

Lösung 1: Wir formen die Gleichung zu $p^2 = m(m^2 - p)$ um und sehen, dass m ein Teiler von p^2 ist. Da p jedoch prim ist, sind die einzigen positiven Faktoren von p^2 $1, p$ und p^2. Wir überprüfen nun jeden Fall separat:

Fall $\mathbf{m = 1}$: Die Gleichung wird zu $p^2 + p = 1$. Da dies implizieren würde, dass p 1 teilt erhalten wir keine Lösung.

Fall $\mathbf{m = p}$: Die Gleichung wird zu $2p^2 = p^3$. Durch Division mit p^2 erhalten wir $p = 2$. Das Paar $(2, 2)$ ist also die einzige Lösung für diesen Fall.

Fall $\mathbf{m = p^2}$: Die Gleichung wird zu $p^2 + p^3 = p^6$ und wir erhalten $1 + p = p^4$. Dies impliziert jedoch wieder, dass p 1 teilt, was nicht möglich ist. Also erhalten wir auch hier keine Lösung.

Wir erhalten, dass $(2, 2)$ das einzige Paar ist, welches die Gleichung erfüllt.

Lösung 2: Wir sehen, dass p die linke Seite der Gleichung teilt und somit auch die rechte teilen muss. Falls p nun m^3 teilt muss p ein Teiler von m sein. Schreiben wir also $m = pn$ für eine natürliche Zahl n. Nach Einsetzen in die Gleichung und kürzen mit p^2 erhalten wir $1 + n = pn^3$. Also teilt n 1 woraus $n = 1$ folgt. Durch einsetzen erhalten wir $p = 2$ und somit $m = 2$, also ist die einzige Lösung das Paar $(2, 2)$.

Bemerkung: Wir können auch mithilfe der Anfangsgleichung zeigen, dass p eine gerade Zahl sein muss und somit $p = 2$ folgt. Der Wert von m kann danach mithilfe des ersten Teils einer der beiden Argumente ermittelt werden.

Punkteschema:

Unvollständige Lösungen

Diese Punkte sind additiv. Die maximale Anzahl Punkte für eien unvollständige Lösung ist **5 Punkte**.

(a) **(1 point)** die Lösung (2,2) finden (ohne Beweis, dass dies die einzige Lösung ist).

(b) **(1 point)** eine nützliche Teilbarkeitsbedingung für m oder p.

(c) **(2 points)** m auf endlich viele Werte in Abhängigkeit von p zu beschränken.

(d) **(1 point)** zu zeigen, dass $p = 2$.

Vollständige Lösungen

Vollständige Lösungen sind **7 Punkte** wert. Solange die Lösung $(2, 2)$ klar als solche bezeichnet wird muss nicht explizit gezeigt werden, dss sie die Gleichung erfüllt.

Z2) Sei n eine positive ganze Zahl und d ein positiver Teiler von n. Zeigen Sie, dass wenn

$$\frac{d^2+d+1}{n+1}$$

eine ganze Zahl ist, dann ist sie gleich 1

Lösung 1 (Raphael): Angenommen, der Bruch ist eine ganze Zahl, dann schreibe

$$\frac{d^2+d+1}{n+1}=m.$$

Offensichtlich wird m positiv sein, da sowohl n als auch d positiv sind. Da d n dividiert, können wir $n=kd$ schreiben. Setzt man dies in die obige Gleichung ein, so erhält man

$$d^2+d+1=(kd+1)m \;\Leftrightarrow\; d^2+d-kdm=m-1.$$

Da d auch $m-1$ teilt, kann man $m=ld+1$ für $l\in\mathbb{Z}$ schreiben, $l\geq 0$ ($l\geq 1$ genau dann wenn $m-1>0$). Wenn man das wieder substituiert, erhält man

$$d^2+d+1=(kd+1)(ld+1)=kld^2+d(k+l)+1 \Leftrightarrow d+1=kld+k+l.$$

Da $k\in\mathbb{N}$, haben wir $k\geq 1$. Nehmen wir nun an, $m\neq 1$. Daraus würde folgen, dass $m-1$ streng positiv ist, was zu $l\geq 1$ führt. Unter dieser Annahme erhalten wir $kld\geq d$, was zu

$$kdl+k+l\geq d+k+l\geq d+1+1>d+1=kdl+k+l,$$

was unmöglich ist. Ein Widerspruch! Wir müssen also $l<1\Rightarrow l=0$ haben, was wie gewünscht zu $m=0\cdot d+1=1$ führt.

Lösung 2 (Robert): Wir schreiben $n=kd$ wie zuvor, und wir erhalten, dass $(kd+1)\,|\,(d^2+d+1)$ gilt. Da $a\,|\,b$ auch $a\,|\,b-a$ impliziert, erhalten wir

$$kd+1\,|\,d^2+d-kd=d\cdot(d+1-k).$$

Da $\gcd(kd+1,d)=1$ gilt (zB mithilfe des euklidischen Algorithmus), erhalten wir

$$kd+1\,|\,d+1-k.$$

Wir machen eine Fallunterscheidung für die Grösse von k:

- Wenn $k<d+1$ gilt, haben wir $d+1-k>0$, was

  $$kd+1\leq d+1-k\leq d$$

  impliziert. Dies ist unmöglich wegen $k\geq 1$.
- Wenn $k>d+1$ gilt, haben wir stattdessen $k-d-1>0$. Dann gilt auch $kd+1\,|\,k-d-1$. Wir erhalten $kd+1\leq k-d-1\leq k$, was ebenfalls unmöglich ist.
- Der letzte Fall $k=d+1$ liefert uns $n=d(d+1)$. Dann ist $n+1=d(d+1)+1=d^2+d+1$, was bedeutet, dass der Bruch gleich eins ist.

Man beachte, dass wir in den ersten beiden Fällen verwendet haben, dass $a \mid b$ impliziert, dass $a \leq b$ gilt, wenn $a, b > 0$ gilt. Damit ist der Beweis beendet.

Punkteschema:

Unvollständige Lösungen

Diese Punkte sind *nicht-additiv*. Die maximale Anzahl der Punkte für eine unvollständige Lösung ist **4 Punkte**.

(a) **(1 Punkt)** kleine nicht-triviale Schritte, die wie ein Fortschritt auf dem Weg zu einer Lösung erscheinen. z.B. Substitution von $n = kd$ und dann Verwendung dieser Substitution, um weitere Informationen zu erhalten.

(b) **(4 Punkte)** Finden einer Gleichung oder einer Teilbarkeitsbedingung, von der alle bis auf endlich viele Werte von $m = \frac{d^2+d+1}{n+1}$ durch einfache Näherungen ausgeschlossen werden können (z.B. $d + 1 = kdl + k + l$ in Lösung 1).

(c) **(4 Punkte)** Zeige, dass $n + 1$ ein Polynom vom Grad 1 in den Variablen d und k teilt, wobei $k = n/d$, wie z.B. $d + 1 - k$ in Lösung 2.

Vollständige Lösungen

Vollständige Lösungen sind **7 Punkte** wert. Beispiele für kleine Fehler, die zum Abzug von 1 Punkt führen, sind die Verwendung von dass $x \mid y \Rightarrow x \leq y$, aber das Vergessen zu überprüfen, ob y positiv und nicht gleich Null ist.

Deuxième tour 2022

Lausanne, Lugano, Zurich - 18 décembre 2021

Remarque liminaire : Une solution complète rapporte 7 points. Pour chaque problème, jusqu'à 2 points pourront être déduits d'une solution correcte en cas de lacunes mineures. Les solutions partielles sont évaluées selon le barème suivant. Si un problème admet plusieurs barèmes, le score est alors le maximum des scores pour chacun des barèmes.

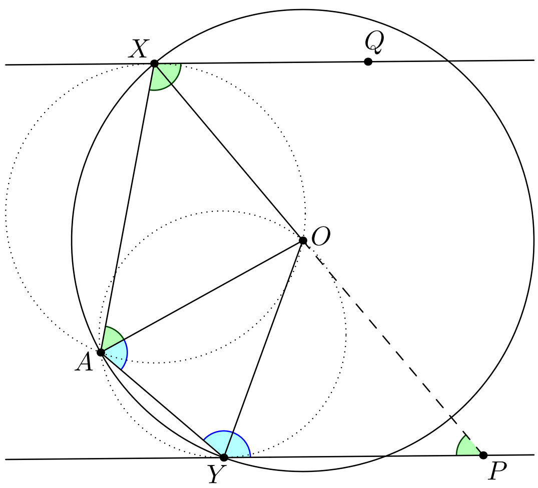
Ci-dessous vous trouverez les solutions élémentaires connues des correcteurs. Des solutions alternatives sont présentées à la fin de chaque problème. Les étudiants sont naturellement encouragés à essayer toutes les méthodes à leur disposition lors de l'entraînement, mais à ne pas chercher de solutions alternatives qui emploient des méthodes qu'ils ne maîtrisent pas en condition d'examen, au risque de perdre un temps précieux.

G1) Soit k un cercle de centre O et soit X, A, Y trois points sur k dans cet ordre, tels que la tangente au cercle circonscrit du triangle OXA passant par X et la tangente au cercle circonscrit du triangle OAY passant par Y soient parallèles. Montrer que $\angle XAY = 120°$ si A se trouve l'arc mineur XY.

Solution 1 : Soit P l'intersection de OX avec la tangente passant par Y, et Q un point sur la tangente passant par X tel que A et Q ne soient pas du même côté que OX. Notons que $\angle OAY = \angle OYA$ vu que $OY = OA$. Aussi, par le theorème de l'angle tangent, $\angle OAY = \angle OYP$. Similairement, $\angle OAX = \angle OXA$, puisque $OX = OA$ et par le théorème de l'angle tangent, nous avons $\angle OAX = \angle OXQ$. Puisque les tangentes passant par X and Y sont parallèles $\angle OXQ = \angle OPY$. Pour terminer, puisque la somme des angles dans le quadrilatère $XAYP$ est de 360°. Ainsi,

$$\begin{aligned}360° &= \angle OAY + \angle OYA + \angle OYP + \angle YPX + \angle PXA + \angle XAO \\ &= 3 \cdot (\angle XAO + \angle OAY) \\ &= 3 \cdot \angle XAY,\end{aligned}$$

montrant que $\angle XAY = 120°$.



Barème :

Solutions incomplètes

Les points sont additifs. Le nombre maximal de points pour une solution incomplète est de **6 points**.

(a) **(2 points)** Démontrer une affirmation utile qui utilise que O est le centre de k. Par exemple, démontrer que $\angle OXA = \angle OAX$ et $\angle OAY = \angle OYA$, ou démontrer que $\angle XOY = 360° - 2 \cdot \angle XAY$. Si (a) n'est pas obtenu, alors au plus 1 point partiel peut être obtenu pour :

 (a.1) **(1 point)** Prouver que $\angle OXA = \angle OAX$ ou que $\angle OAY = \angle OYA$.

(b) **(2 points)** Démontrer une affirmation utile qui utilise que les tangentes passant par X et Y sont parallèles. Par exemple, introduire le point P et démontrer que $\angle OXQ = \angle OPY$, ou montrer que $\angle XOY = \angle OXQ + \angle OYP$.

(c) **(2 points)** Démontrer une affirmation utile qui utilise les droites tangentes aux cercles circonscrits OAX ou OAY. Par exemple, démontrer que $\angle OAX = \angle OXQ$ ou que $\angle OAY = \angle OYP$.

Solutions complètes

Une solution complète vaut **7 points**.

Appendix : Problèmes de configuration

On peut remarquer que la condition que A est sur l'arc mineur XY n'est jamais mentionnée dans la preuve ci-dessus. On en a en fait besoin pour pouvoir utiliser que $\angle YPX = \angle YPO$, qui peut être faux si A est sur l'arc majeur XY. Dans l'examen officiel, cette condition supplémentaire n'était pas ajoutée, et les solutions pour $\angle XAY = 60°$ ont été corrigées accordément.

Appendice : Solutions alternatives

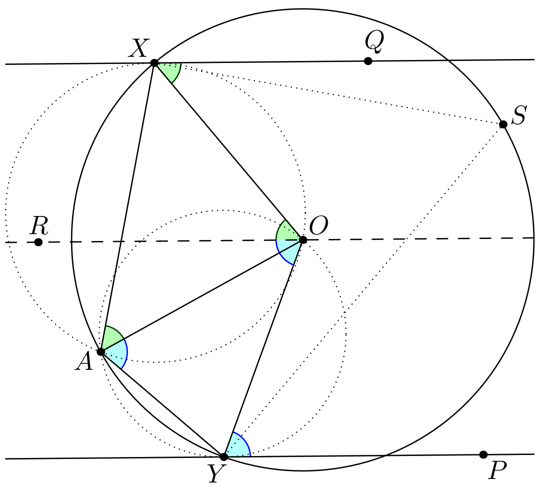
Solution 2 : Comme dans la solution 1, nous introduisons P et Q et démontrons que $\angle OAY = \angle OYP$ and $\angle OAX = \angle OXQ$ par le théorème de l'angle tangent. Maintenant, soit R un point sur la parallèle, passant par O, aux tangentes, tel que R et A sont du même côté de XO. Comme les lignes sont parallèles, on a $\angle OXQ = \angle XOR$ et $\angle OYP = \angle YOR$. Cela montre que

$$\begin{aligned}\angle XAY &= \angle XAO + \angle OAY \\ &= \angle OXQ + \angle OYP \\ &= \angle XOR + \angle YOR \\ &= \angle XOY.\end{aligned}$$

Pour conclure, on introduit un point S sur l'arc XY qui ne contient pas A. Donc, par le théorème de l'angle inscrit, et en utilisant que $XAYS$ est cyclique, on a

$$\begin{aligned}180^\circ &= \angle XAY + \angle XSY \\ &= \angle XAY + \frac{1}{2} \cdot \angle XOY \\ &= \frac{3}{2} \cdot \angle XAY,\end{aligned}$$

montrant que $\angle XAY = 120^\circ$.



G2) Soit k_1 un cercle de centre M et ℓ une droite tangente à k_1 au point A. Soit k_2 un cercle à l'intérieur de k_1 également tangent à ℓ au point A. Soit P un point sur ℓ différent de A. La seconde tangente à k_1 passant par P intersecte k_1 au point T. Soit B la second intersection de AT et k_2, et soit C la seconde intersection de PB et k_2. Montrer que $ATCM$ est un quadrilatère cyclique.

Solution : D'abord, observons que

(a) $\angle PAM = \angle PTM = 90°$ puisque les lignes PA et PT sont tangentes au cercle k_1.

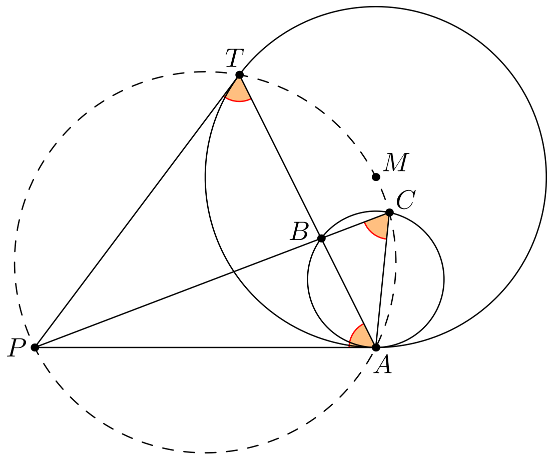
(b) PA est tangente aux deux cercles k_1 et k_2 par les conditions du problème.

(c) $PA = PT$ puisque les deux lignes PA et PT sont tangentes au cercle k_1. Ainsi, le triangle PAT est isocèle en P.

Par (a), P, A, M, T sont sur un cercle de diamètre PM. Par (b) et (c), on obtient

$$\angle ACP = \angle ACB \overset{\text{(b)}}{=} \angle PAB = \angle PAT \overset{\text{(c)}}{=} \angle PTA$$

donc P, A, C, T sont sur un cercle. Ainsi, P, A, C, M, T sont sur un cercle, CQFD.



Barème :

Solutions incomplètes

Les points sont additifs. Le nombre maximal de points pour une solution incomplète est de **6 points**.

(a) **(2 points)** Démontrer que $PAMT$ est un quadrilatère inscrit. Si (a) n'est pas obtenu, alors au plus un point partiel peut être obtenu pour :

(a.1) **(1 point)** Démontrer (1).

(b) **(4 points)** Démontrer que $PACT$ est un quadrilatère inscrit. Si (b) n'est pas obtenu, alors au plus 3 points partiels peuvent être obtenus pour :

(b.1) **(2 points)** Utiliser (2) pour obtenir $\angle ACB = \angle PAB$.

(b.2) **(1 point)** Démontrer (3).

Solutions complètes

Une solution complète vaut **7 points**.

Appendice : Solutions alternatives

Solution 2 (Johann) : Soit $N = PM \cap AT$. Puisque PM est la médiatrice de AT (vu que $PT = PA$ et $MT = MA$), on a que N est le milieu du segment AT. Maintenant, remarquons que les triangles PNA et PAM sont semblables. Ainsi, on obtient $\frac{PN}{PA} = \frac{PA}{PM}$. Donc, par puissance d'un point et le résultat précédent, on a

$$PB \cdot PC = PA^2 = PM \cdot PN$$

donc B, C, M, N sont cocyliques. Donc, puisque $\angle MNB = \angle MNA = 90°$, B, C, M, N sont sur le cercle de Thalès de diamètre BM. Donc, $\angle PCM = 90°$. Par (a), on conclut que P, A, C, M, T sont sur un cercle de diamètre PM.
Remarque : On peut réécrire cette preuve en considérant l'inversion de centre P et de rayon PA.

Solution 3 (Tanish) : Comme avant, on voit que P, A, M, T sont sur un cercle. Notre but est de montrer $\angle APT + \angle TCA = 180°$. Par le théorème de l'axe radical, on a que (TCB) est tangent à PT, vu que les axes radicaux PT, CB et PA se coupent en un point. Ensuite, par le théorème de l'angle tangent, on a $\angle TCA = \angle TCB + \angle BCA = \angle TAP + \angle PTA$, nous permettant de conclure.

K1) Dans une école, une classe de $n \geq 2$ élèves prennent plusieurs photos de groupe. Pour chaque groupe d'au moins un élève, il y a exactement une photo contenant ce groupe spécifique. Les photos sont maintenant suspendues dans différentes salles de l'école de telle manière que chaque élève apparaît dans au plus une photo par salle.

(i) Montrer que cela est possible si l'école contient 2^{n-1} salles.

(ii) Montrer que cela n'est pas possible si l'école contient strictement moins de 2^{n-1} salles.

Solution :

(i) Une manière de procéder est de grouper chaque photo avec son complément (et de placer la photo avec toute la classe dans une salle sans aucune autre photo). C'est en fait la seule configuration possible (voir l'appendice).

(ii) La manière la plus simple de faire cela est de trouver un ensemble de 2^{n-1} photos telles que aucune paire parmi celles-ci ne soit disjointe. Il y a plusieurs manières d'arriver à un tel ensemble (par exemple en prenant toutes les photos dans lesquelles apparaît un élève donné) et cet ensemble fournit la preuve recherchée, puisque par le principe des tiroirs deux photos de cet ensemble vont se retrouver dans la même salle.

Autrement, un argument par dénombrement suffit également : Puisqu'il y a au plus n enfants qui apparaissent dans chaque salle, et que si l'on compte toutes les apparitions individuelles on arrive à $n2^{(n-1)}$, on a alors besoin au minimum de $2^{(n-1)}$ salles. Une version plus raffinée de cet argument est le fait mentionné précédemment que chaque élève apparaît au plus une fois par salle et $2^{(n-1)}$ fois en tout.

Barème, partie (i) :

Solutions complètes

Un participant qui fournit la construction correcte obtient **3 points**.

Solutions incomplètes

Ces points sont *non-additifs*. Le nombre maximal de points pour une solution incomplète est **2 points**.

(a) **(2 points)** Trouver une information significative à propos de la construction, p.ex. que l'ensemble de 2^{n-1} photos contenant un élève donné doivent toutes être dans une salle différente.

(b) **(1 point)** Trouver une information non-triviale à propos de la construction, p.ex. que chaque salle doit contenir tous les élèves parmi les photos qui y sont accrochées ou fournir la solution pour de petites valeurs de n avec une tentative de généraliser à toutes les valeurs.

Remarques

1. Toute autre tentative de construction échoue ; une preuve de ce fait est donnée dans l'appendice.

2. Au minimum 1 point doit être accordé dans la partie (i) si le participant résout la partie (ii) en trouvant un ensemble de 2^{n-1} photos parmi lequel aucune paire ne peut être dans la même salle. Si l'intention d'utiliser ceci pour la partie (i) est explicitement mentionée il faut accorder deux points, mais ne pas réaliser que ce fait est utile vaut quand même 1 point.

Barème, partie (ii) :

Solutions complètes

Une preuve que $2^{n-1}-1$ salles sont insuffisantes vaut **4 points**.

Solutions incomplètes

Ces points sont *non-additifs*. Le nombre maximal de points pour une solution incomplète est **2 points**.

(c) **(2 points)** Progrès significatif, p.ex. réaliser que considérer toutes les photos avec strictement plus de $\lceil \frac{n}{2} \rceil$ élèves donne un ensemble de 2^{n-1} photos parmi lesquelles aucune paire ne peut être dans la même salle pour n impair mais n'est malheureusement pas suffisant pour le cas n pair. Plus généralement, toute preuve qui fonctionne seulement pour n pair ou seulement pour n impair vaut 2 points.

(d) **(1 point)** Progrès mineur, p.ex. trouver de larges ensembles de photos (au minimum n photos) qui se trouvent nécessairement dans différentes salles, un tel ensemble est l'ensemble des photos avec $n-1$ élèves. Si le participant affirme son intention de trouver un ensemble de photos non-compatibles de taille 2^{n-1} mais ne le trouve pas, cela vaut quand même 1 point.

Remarques

1. Si un participant utilise une idée alternative qui fonctionne pour toutes les valeurs de n sauf un nombre fini d'entre elles, cela doit être traité comme une erreur mineure et amène une déduction de 1 point. Au contraire, si un participant suppose que chaque élève apparaît exactement une fois par salle (au lieu de au plus une fois) sans le prouver, cela doit être traité comme une erreure majeure et amène une déduction de 2 points.

2. Les participants n'ont pas besoin d'écrire explicitement le principe des tiroirs ; une telle situation est considérée comme un exemple trivial de ce principe.

Appendice : unicité dans (i)

Considérons toutes les photos contenant l'élève A, et appelons de telles photos *grandes*. Il est clair que deux grandes photos ne peuvent pas être suspendues dans la même salle. De plus, il y a exactement 2^{n-1} grandes photos, donc chaque salle doit contenir exactement une grande photo. Toute photo qui n'est pas considérée comme grande est considérée comme *petite* ; remarquons que le complémentaire d'une grande photo est petite et vice versa. De plus, l'union de petites photos est toujours petite.

Supposons que nous soyons capables de suspendre les différentes photos. Par un simple argument de comptage, comme chaque élève apparaît dans 2^{n-1} photos, chaque élève doit apparaître exactement une fois dans chaque salle, donc en particulier, l'union de toutes les photos d'une certaine salle contient tous les élèves. Considérons maintenant une salle quelconque ; elle doit contenir une grande photo et des petites photos ; on aimerait montrer qu'il y a exactement une petite photo. Supposons par l'absurde qu'il y a plus d'une petite photo et considérons la photo qu'est l'union de toutes les petites photos : c'est à nouveau une petite photo ; visitons la salle qui contient cette photo. Dans cette salle, reconsidérons l'union de toutes les petites photos, et on se déplace dans la salle qui contient cette photo. En particulier, au bout d'un certain temps, on doit avoir visité une certaine salle deux fois de suite, car s'il y a toujours deux photos ou plus, alors la cardinalité de l'union va toujours croître, mais elle ne peut pas continuer à croître de manière indéfinie. En particulier, cette dernière salle contient exactement une petite photo. Si on considère la salle précédente, elle contient au moins deux petites photos, mais cela impliquerait que les deux salles doivent contenir la même grande photo, ce qui nous amène à une contradiction. Donc, chaque salle doit contenir au plus une petite photo et une grande photo, donc au plus deux photos par salle ; il est désormais clair que chaque salle doit exactement contenir une photo et son complémentaire.

Remarquons qu'il existe d'autres manières de créer des *grands* ensembles ; la seule condition est que l'union de petits ensembles doit être un petit ensemble.

K2) Lors d'une séance de dédicaces, 924 fans de l'équipe de football du Liechtenstein se sont rassemblés afin d'obtenir les autographes de leurs joueurs préférés. Chacun de ces fans est originaire soit du Liechtenstein, soit de la Suisse. L'équipe de football est composée de 11 joueurs, et chaque fan a exactement 6 joueurs favoris. Deux fans originaires d'un même pays ne partagent pas le même groupe de joueurs favoris, et au final chaque fan a obtenu exactement un autographe de l'un de ses joueurs préférés. Montrer qu'il existe un joueur qui a donné un autographe à la fois à un Suisse et à un Liechtensteinois.

Solution : On commence par observer que le nombre de possibilités pour choisir un groupe de 6 joueurs préférés est exactement

$$\binom{11}{6} = \frac{11 \cdot 10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6}{6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = 462,$$

soit précisément la moitié du nombre de fans. Cela implique qu'il doit y avoir exactement 462 fans originaires du Liechtenstein et 462 fans originaires de Suisse. Autrement, l'un de ces pays aurait au moins 463 fans, mais alors par le principe des tiroirs deux fans originaires du même pays partageraient les mêmes 6 joueurs préférés, en contradiction avec l'énoncé du problème.

On sait donc qu'il y a 462 fans originaires de chaque pays, et de plus pour chacune des $\binom{11}{6}$ combinaisons de joueurs préférés il y a un fan suisse et un fan liechtensteinois qui ont exactement ces 6 joueurs préférés.

Maintenant, si aucun joueur n'avait donné d'autographe à la fois à un Suisse et à un Liechtensteinois, on pourrait répartir les joueurs en deux ensembles disjoints A et B de telle manière que seuls les joueurs de l'ensemble A ont donné un autographe à des fans suisses et seuls les joueurs de B ont donné leur autographe à des fans liechtensteinois (si un joueur n'a accordé aucun autographe, on le place arbitrairement dans l'un des deux ensembles). Puisque A et B sont disjoints et que leur union contient 11 éléments, l'un des deux ensembles a au plus 5 éléments. Sans perte de généralité, supposons que $|A| \leq 5$ et $|B| \geq 6$. Cependant, la remarque du paragraphe précédent implique qu'il existe (au moins) un fan suisse dont les joueurs préférés appartiennent tous à B, donc aucun d'entre eux n'a donné d'autographe à un fan suisse. Cela contredit le fait que chaque fan a reçu un autographe de l'un de ses joueurs préférés.

On conclut donc qu'il doit exister un joueur qui a donné un autographe à au moins un fan suisse et à au moins un fan Liechtensteinois.

Barème :

Les points suivants sont additifs.

(a) **(1 point)** Remarquer qu'il y a $\binom{11}{6}$ choix différents d'avoir 6 joueurs préférés. Il n'est pas nécessaire de calculer explicitement la valeur 462 pour obtenir ce point.

(b) **(1 point)** Prouver qu'il doit y avoir exactement 462 fans originaires de chaque pays.

(c) **(2 points)** Observer que chaque combinaison possible de 6 joueurs favoris apparaît dans les deux pays.

(d) **(1 point)** Supposer (afin d'obtenir une contradiction) que aucun joueur n'a donné d'autographe à des fans de Suisse et du Liechtenstein et remarquer que les joueurs peuvent alors être répartis en deux ensemble disjoints selon le pays des fans à qui ils ont distribué des autographes.

(e) **(1 point)** Remarquer que l'un des ensembles A ou B contient strictement moins de 6 joueurs.

(f) **(1 point)** Trouver une contradiction en choisissant un fan dont aucun des joueurs préférés n'apparaît dans l'ensemble associé à son pays.

Z1) Déterminer toutes les paires (m, p) qui consistent en un nombre entier strictement positif m et un nombre premier p et qui satisfont l'équation

$$p^2 + pm = m^3.$$

Solution 1 : En réécrivant l'équation comme $p^2 = m(m^2 - p)$, on peut voir que m doit diviser p^2. En revanche, puisque p est premier, les seuls diviseurs positifs de p^2 sont $1, p$ et p^2. Nous pouvons vérifier chacun des trois cas séparément :

Cas $\mathbf{m = 1}$: L'équation devient $p^2 + p = 1$. Puisque cela implique que p divise 1, nous n'obtenons pas de solutions dans ce cas.

Cas $\mathbf{m = p}$: L'équation devient $2p^2 = p^3$ et en divisant par p^2 des deux côtés, nous trouvons que $p = 2$. La paire $(2, 2)$ est ainsi la seule solution dans ce cas.

Cas $\mathbf{m = p^2}$: L'équation devient $p^2 + p^3 = p^6$ et après division par p^2, nous avons $1 + p = p^4$. Une fois de plus, cela implique que p divise 1, ce qui n'est pas possible. Aucune solution dans ce cas également.

Nous concluons que $(2, 2)$ est la seule paire qui satisfait l'équation de base.

Solution 2 : Nous observons que p divise le côté gauche de l'équation et ainsi doit diviser le côté droit également. Maintenant, si p divise m^3, nous devons avoir que p divise m. Ecrivons $m = pn$ avec n un entier naturel. Après avoir substitué cela dans l'équation et après division par p^2 des deux côtés, nous obtenons $1 + n = pn^3$. Cela implique que n doit diviser 1 et ainsi, $n = 1$ et $m = 2$. L'équation se simplifie en $p = 2$ et on conclut que la seule solution est la paire $(2, 2)$.

Remarque : On peut aussi immédiatement montrer que $p = 2$ en utilisant un argument de parité à partir de l'équation de base. Ensuite, m peut être trouvé en utilisant la première partie d'une des solutions mentionnées ci-dessus.

Barème :

Solutions incomplètes

Les points sont additifs. Le nombre maximal de points pour une solution incomplète est de **5 points**.

(a) **(1 point)** Énoncer que (2,2) est une solution.

(b) **(1 point)** Énoncer une condition de divisibilité utile sur m ou p.

(c) **(2 points)** Se réduire au cas où m ne peut prendre qu'un nombre fini de valeurs possibles qui peuvent dépendre de p, comme par exemple $m \in \{1, p, p^2\}$ dans la Solution 1.

(d) **(1 point)** Démontrer que $p = 2$.

Solutions complètes

Une solution complète vaut **7 points**. Notons que, tant que la solution $(2, 2)$ est clairement mentionnée, les participants ne doivent pas explicitement vérifier que la paire satisfait l'équation.

Z2) Soient n un nombre entier strictement positif et d un diviseur positif de n. Montrer que si l'expression
$$\frac{d^2+d+1}{n+1}$$
est un nombre entier, alors elle vaut 1.

Solution 1 (Raphael) : Supposons que l'expression en question est un nombre entier, notons alors
$$\frac{d^2+d+1}{n+1}=m.$$
Il est clair que m est positive, puisque n et d sont des entiers naturels. Vu que d est un diviseur de n, il existe un entier naturel k tel que $n=kd$. En substituant cela dans l'expression de base, on a
$$d^2+d+1=(kd+1)m \;\Leftrightarrow\; d^2+d-kdm=m-1.$$
Donc d divise aussi $m-1$. Ainsi, on peut noter $m=ld+1$ avec $l\in\mathbb{Z}$, $l\geq 0$ ($l\geq 1$ si et seulement si $m-1>0$). En substituant cela dans l'expression de base, on a
$$d^2+d+1=(kd+1)(ld+1)=kld^2+d(k+l)+1 \Leftrightarrow d+1=kld+k+l.$$
Vu que $k\in\mathbb{N}$, on a $k\geq 1$. Maintenant, supposons que $m\neq 1$. A partir de cela, il s'ensuit que $m-1$ est positif, impliquant que $l\geq 1$. Donc, sous cette supposition, on a $kld\geq d$, ce qui nous amène à une contradiction car
$$kdl+k+l\geq d+k+l\geq d+1+1>d+1=kdl+k+l,$$
Ainsi, on a $l<1\Rightarrow l=0$ et $m=0\cdot d+1=1$. CQFD.

Solution 2 (Robert) : Comme avant, notons $n=kd$, et on obtient $(kd+1)\,|\,(d^2+d+1)$. Vu que $a\,|\,b$ implique $a\,|\,b-a$ on a
$$kd+1\,|\,d^2+d-kd=d\cdot(d+1-k).$$
Puisque $gcd(kd+1,d)=1$ par l'algorithme d'Euclide, on obtient également
$$kd+1\,|\,d+1-k.$$
Cela est vrai car $a\,|\,bc$ et $gcd(a,b)=1$ implique $a\,|\,c$. Nous faisons maintenant une séparation de cas en fonction de la grandeur de k

- Si $k<d+1$, on a $d+1-k>0$ ce qui implique
$$kd+1\leq d+1-k\leq d.$$
Cela est impossible
- Si $k>d+1$, on a $k-d-1>0$. Comme $a\,|\,b$ implique $a\,|\,-b$ on a également $kd+1\,|\,k-d-1$. Nous obtenons donc $kd+1\leq k-d-1\leq k$ ce qui est aussi impossible.
- Le dernier cas $k=d+1$ nous donne $n=d(d+1)$. Donc, cela nous donne $n+1=d(d+1)+1=d^2+d+1$, ce qui veut dire que la fraction initiale vaut 1.

Remarquons que dans les deux premiers cas, on a utilisé que $a\,|\,b$ implique $a\leq b$, si $a,b>0$. Cela termine la démonstration.

Barème :

Solutions incomplètes

Ces points sont *non-additifs*. Le nombre maximal de points pour une solution incomplète est de **4 points**.

(a) **(1 point)** Premiers pas mineurs non-triviaux qui permettent de progresser vers une solution. Par exemple, substituer $n = kd$ et utiliser cette substitution pour obtenir de nouvelles informations.

(b) **(4 points)** Trouver une équation ou une condition de divisibilité à partir de laquelle toutes les valeurs de $m = \frac{d^2+d+1}{n+1}$ sauf un nombre fini peuvent être éliminées par de simples approximations (par exemple $d + 1 = kdl + k + l$ dans la Solution 1).

(c) **(4 points)** Montrer que $n + 1$ divise un polynôme de degré 1 en les variables d et k, où $k = n/d$, comme par exemple $d + 1 - k$ dans la Solution 2.

Solutions complètes

Une solution complète vaut **7 points**. L'utilisation de $x \mid y \Rightarrow x \leq y$ en oubliant de vérifier que y est positif et non-nul est un exemple de coquilles mineures entrainant la perte d'un point.