IMO-Selektion - 2. Prüfung

Zürich - 8. Mai 2016

Zeit: 4.5 Stunden
Jede Aufgabe ist 7 Punkte wert.

4. Bestimme alle natürlichen Zahlen n, sodass für beliebige reelle Zahlen $x_1, \ldots, x_n$ gilt:

$$\left(\frac{x_1^n + \ldots + x_n^n}{n} - x_1 \cdot \ldots \cdot x_n\right)(x_1 + \ldots + x_n) \geq 0.$$

5. Für eine endliche Menge A von natürlichen Zahlen nennen wir eine Aufteilung in zwei disjunkte nichtleere Teilmengen A_1 und A_2 *dämonisch*, falls das kleinste gemeinsame Vielfache von A_1 gleich dem grössten gemeinsamen Teiler von A_2 ist. Bestimme die minimale Anzahl Elemente in A, sodass es genau 2016 dämonische Aufteilungen gibt.

6. Sei n eine natürliche Zahl. Zeige, dass $7^{7^n}+1$ mindestens $2n+3$ nicht notwendigerweise verschiedene Primteiler hat.

Bemerkung: $18 = 2 \cdot 3 \cdot 3$ *hat 3 Primteiler.*

Viel Glück!