

# SMO - Selektion 2018

4. Prüfung - 27. Mai 2018

**Zeit:** 4.5 Stunden

**Schwierigkeit:** Die Aufgaben sind der Schwierigkeit nach geordnet.

**Punkte:** Jede Aufgabe ist 7 Punkte wert.

10. Sei  $ABC$  ein Dreieck,  $M$  der Mittelpunkt der Strecke  $BC$  und  $D$  ein Punkt auf der Geraden  $AB$ , sodass  $B$  zwischen  $A$  und  $D$  liegt. Sei  $E$  ein Punkt auf der anderen Seite der Geraden  $CD$  als  $B$ , sodass  $\angle EDC = \angle ACB$  und  $\angle DCE = \angle BAC$ . Sei  $F$  der Schnittpunkt von  $CE$  mit der Parallelen zu  $DE$  durch  $A$  und sei  $Z$  der Schnittpunkt von  $AE$  und  $DF$ . Zeige, dass sich die Geraden  $AC$ ,  $BF$  und  $MZ$  in einem Punkt schneiden.
11. Bestimme alle Paare  $(f, g)$  zweier Funktionen  $f, g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , sodass für alle  $x, y \in \mathbb{R}$  gilt:
- (i)  $f(x) \geq 0$ ,
  - (ii)  $f(x + g(y)) = f(x) + f(y) + 2yg(x) - f(y - g(y))$ .
12. David und Linus spielen folgendes Spiel: David wählt eine Teilmenge  $Q$  der Menge  $\{1, \dots, 2018\}$ . Dann wählt Linus eine natürliche Zahl  $a_1$  und berechnet die Zahlen  $a_2, \dots, a_{2018}$  rekursiv, wobei  $a_{n+1}$  das Produkt der positiven Teiler von  $a_n$  ist.
- Sei  $P$  die Menge der natürlichen Zahlen  $k \in \{1, \dots, 2018\}$ , für die  $a_k$  eine Quadratzahl ist. Linus gewinnt, falls  $P = Q$ . Ansonsten gewinnt David. Wer hat eine Gewinnstrategie?

Viel Glück!