

Temps: 3 heures

Zürich, Lausanne, Lugano

Difficulté: Les exercices d'un même thème sont classés selon leur difficulté.

13 décembre 2025

Points: Chaque exercice vaut 7 points.

Géométrie

G1) Soient Γ_1 et Γ_2 deux cercles s'intersectant aux points X et Y . Soit ℓ une droite intersectant Γ_1 aux points A et C , et intersectant Γ_2 aux points B et D , de telle sorte que A, B, C, D soient sur ℓ dans cet ordre. Soient P l'intersection de XA et YB , et Q l'intersection de XD et YC .

Montrer que PQ est parallèle à ℓ .

G2) Soient A, B, C, D, E cinq points sur un cercle dans cet ordre, tels que AE est un diamètre du cercle et $BC > CD$. Soit F l'intersection de AD et BE . Soit O le centre du cercle circonscrit au triangle BFD . La symétrie axiale de la droite BD par l'axe BC et la symétrie axiale de la droite BD par l'axe DC s'intersectent en Y .

Montrer que $\angle OYC = 90^\circ$.

Combinatoire

C1) Soient $k \leq a \leq b$ des entiers strictement positifs. Ruhi a une suite de $a + b$ lettres qui contient a copies de la lettre M , et b copies de la lettre O . Elle veut que la suite ait exactement k paires de lettres consécutives qui forment le mot MO . De combien de façons peut-elle disposer les lettres ?

C2) Mark possède 20 étagères de hauteurs $1, 1, 2, 2, \dots, 10, 10$, où deux étagères de même hauteur sont indiscernables. Il souhaite les placer en ligne de manière à ce que son chat puisse sauter d'une étagère à la prochaine, en commençant par l'étagère la plus à gauche et en terminant par celle la plus à droite. Son chat est paresseux et pose deux conditions :

- Un seul des dix-neuf sauts du chat doit se faire d'une étagère à une étagère strictement plus haute.
- Entre deux étagères de même hauteur, aucune étagère strictement plus haute ne peut être placée.

De combien de façons Mark peut-il placer ses étagères en respectant ces deux conditions ?

Théorie des nombres

N1) Déterminer tous les triplets (p, q, n) d'entiers strictement positifs, où p et q sont des nombres premiers, et

$$20p + 26q = n^2 + 48.$$

N2) Déterminer tous les entiers strictement positifs n tels que

$$n^3 \mid (n+1)(n+2)(n+3)(n+4)(n+5)(n+6).$$

Bonne chance!