

Inégalités 1

Arnaud Maret

Actualisé: 17 février 2021

vers. 2.2.3

Table des matières

1	Introduction	2
1.1	Un premier exemple	2
1.2	Les règles du jeu avec les inégalités	3
2	Une histoire de carrés positifs	5
2.1	L'éternelle AM-GM	5
2.1.1	AM-GM : version pondérée	9
2.2	Cauchy-Schwarz et son grand frère Hölder	11
2.2.1	Interlude sur l'homogénéité	12
2.2.2	Démonstration de Cauchy-Schwarz et exemples	13
2.2.3	Le grand frère : Hölder	18
2.3	Muirhead, le bulldozer	19
3	L'ordre avant le désordre	24
3.1	Les suites ordonnées à la sauce Tchébychev	24
3.1.1	Interlude sur la symétrie	25
3.1.2	Vous prendrez bien un peu de Tchébychev ?	27
3.2	Schur, l'exception	29
4	Convexe ou concave, telle est la question	30
4.1	Jensen a la réponse	32
4.1.1	Interlude sur les côtés d'un triangle	34
5	Boutique de trucs et astuces	36
5.1	Jouer avec les cas d'égalité	36
5.2	Décomposer les constantes	38
6	Appendice	40

1 Introduction

De tous les problèmes qui ont forgé la réputation des olympiades, les *inégalités* sont parmi les plus redoutés. Avec l'expérience des bonnes astuces, il est possible de résoudre une inégalité en quelques instants, alors que d'autres s'y casseront les dents sans rien obtenir. Elles qui étaient jadis quasiment incontournables à l'IMO perdent aujourd'hui en charme au profit de problèmes d'algèbre moins standards. Pour désacraliser les inégalités, si inaccessibles au début, il n'y a pas d'autre secret que la résolution en masse de problèmes, comme toujours.

Les inégalités sont très courantes en mathématiques. Quelques résultats standards de ce script sont également utiles dans d'autres domaines tels que la combinatoire, la théorie des nombres et parfois même en géométrie. Il est donc fortement conseillé de se familiariser avec les résultats de base, systématiquement encadrés en gris, ainsi qu'avec les exemples élémentaires associés dont les présentes notes ont la prétention d'exposer.

Ce nouveau script propose une présentation réorganisée par rapport à l'approche de l'excellent script par Thomas Huber qui a servi de base de travail. Les inégalités présentées en théorèmes sont regroupées en trois sections selon leur nature. Ce schéma est inspiré de Samin Riasat ¹. En plus de ces résultats, plusieurs astuces classiques sont dévoilées au fil des exemples. Parmi les sources d'inspiration, en plus d'Huber et Riasat, il s'impose de citer le travail d'Evan Chen ².

1.1 Un premier exemple

Une inégalité n'est pas une inéquation. À l'école, traditionnellement, on s'attèle aux inéquations, c'est-à-dire qu'on recherche toutes les valeurs pour lesquelles une inégalité est satisfaite. Dans le contexte des olympiades, on se donne une inégalité et on cherche à prouver qu'elle est vérifiée quelque soit la valeur d'un certain nombre de variables.

Exemple 1. *Par exemple, on peut montrer que quelques soient les nombres réels x, y et z , on a*

$$x^2 + y^2 + z^2 \geq xy + yz + zx.$$

En mots, on lit: l'expression $x^2 + y^2 + z^2$ est toujours plus grande ou égale à l'expression $xy + yz + zx$. Par toujours, on entend quelque soit le choix des valeurs réelles de x, y et z .

Pour montrer qu'une telle inégalité est vraie, il s'agit de jouer de manipulations algébriques astucieuses pour se ramener à une autre inégalité que l'on sait vérifiée. Par

¹Samin Riasat, *Basic of Olympiad Inequalities*.

²Evan Chen, *Brief Introduction to Olympiad Inequalities*.

exemple, on sait que le carré d'un nombre réel est toujours un nombre positif ou nul. De plus, le carré d'un nombre réel est nul si et seulement si le nombre est nul. Autrement dit,

$$x^2 \geq 0, \forall x \in \mathbb{R} \text{ et } x^2 = 0 \Leftrightarrow x = 0.$$

Comment lier notre inégalité à la positivité des carrés ? Tout d'abord, remarquons que $x^2 + y^2 + z^2 \geq xy + yz + zx$ est équivalent à $x^2 + y^2 + z^2 - xy - yz - zx \geq 0$. Une stratégie pour montrer que $x^2 + y^2 + z^2 \geq xy + yz + zx$ revient donc à travailler l'expression $x^2 + y^2 + z^2 - xy - yz - zx$ pour faire apparaître une somme de carrés parfaits. Cette étape est l'étape véritablement subtile (lisez: difficile) de l'exercice.

Les termes xy, yz et zx font penser aux doubles produits qui apparaissent dans le développement des carrés $(x \pm y)^2, (y \pm z)^2$ et $(z \pm x)^2$. Seulement, il n'y a pas de coefficient 2. Plus précisément, on observe que les termes xy, yz et zx sont les doubles produits qui apparaissent dans le développement des termes $1/2(x \pm y)^2, 1/2(y \pm z)^2$ et $1/2(z \pm x)^2$. Avec cette observation, on arrive facilement à la relation suivante:

$$x^2 + y^2 + z^2 - xy - yz - zx = \frac{1}{2}(x - y)^2 + \frac{1}{2}(y - z)^2 + \frac{1}{2}(z - x)^2.$$

On peut alors conclure, comme attendu, que l'expression $x^2 + y^2 + z^2 - xy - yz - zx$ est bel et bien toujours positive, car elle est égale à la moitié de la somme de trois carrés parfaits. On a ainsi démontré que l'expression $x^2 + y^2 + z^2$ est plus grande ou égale à $xy + yz + zx$ pour tous les nombres réels x, y et z .

Toute la difficulté du problème résidait dans cette astuce algébrique. Avec la bonne astuce, la solution est généralement très courte. Il ne faut pas pour autant croire que le problème est facile! Les inégalités sont terriblement compliquées à prendre en main lorsqu'on débute et seule l'expérience, comme toujours, les rend appréciables et amusantes.

Une question subsidiaire, souvent posée dans un problème d'inégalité, demande de trouver *les cas d'égalité*. Par cas d'égalité, on entend l'ensemble des valeurs pour lesquelles l'inégalité devient une égalité. Par exemple, les cas d'égalité pour l'inégalité $x^2 + y^2 + z^2 \geq xy + yz + zx$ sont l'ensemble des triplets de nombres réels (x, y, z) tels que $x^2 + y^2 + z^2 = xy + yz + zx$. Une telle question est généralement une formalité lorsque l'inégalité a été démontrée. Par exemple, on a

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 + z^2 = xy + yz + zx &\Leftrightarrow \frac{1}{2}(x - y)^2 + \frac{1}{2}(y - z)^2 + \frac{1}{2}(z - x)^2 = 0 \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x - y = 0 \Leftrightarrow x = y \\ y - z = 0 \Leftrightarrow y = z \\ z - x = 0 \Leftrightarrow z = x. \end{cases} \end{aligned}$$

et donc les cas d'égalités sont les triplets (x, y, z) tels que $x = y = z$.

1.2 Les règles du jeu avec les inégalités

À l'école, on apprend qu'en multipliant une inéquation par un nombre négatif, ou qu'en inversant les deux membres d'une inéquation, alors il faut changer le sens de l'inégalité.

Il s'agit là de deux des règles de base que l'on emploie en manipulant les inégalités. Nous listons simplement ici toutes ces règles sans plus de détail, car il s'agit-là de matériel scolaire que l'on utilisera tacitement.

Théorème 11. *Les propriétés suivantes sont satisfaites:*

1. *si $a \geq c$ et $c \geq b$, alors $a \geq b$, $\forall a, b, c$,*
2. *si $a \geq b$ et $c \geq d$, alors $a + c \geq b + d$, $\forall a, b, c, d$, (la réciproque est évidemment fausse en général),*
3.
 - *étant donné $x > 0$, alors $a \geq b \Leftrightarrow ax \geq bx$, $\forall a, b$,*
 - *étant donné $x < 0$, alors $a \geq b \Leftrightarrow ax \leq bx$, $\forall a, b$,*
4. *$x^2 \geq 0, \forall x \in \mathbb{R}$, et $x^2 = 0 \Leftrightarrow x = 0$,*
5.
 - *étant donné $x > 0$, alors $a \geq b \Leftrightarrow a^x \geq b^x$, $\forall a, b \geq 0$. Par exemple, si $a \geq b \geq 0$, alors $a^2 \geq b^2$ ou $\sqrt{a} \geq \sqrt{b}$; la positivité de a, b est cruciale ici,*
 - *étant donné $x < 0$, alors $a \geq b \Leftrightarrow a^x \leq b^x$, $\forall a, b > 0$. Par exemple, si $a \geq b > 0$, alors $1/a \leq 1/b$.*
6. *plus généralement:*
 - *étant donné une fonction croissante f , alors $a \geq b \Rightarrow f(a) \geq f(b)$,*
 - *étant donné une fonction décroissante f , alors $a \geq b \Rightarrow f(a) \leq f(b)$.*

On profite encore de cette tribune pour présenter de manière abstraite un schéma de résolution d'inégalités. En général, comme on l'a vu dans le premier exemple, un problème d'inégalité demande de montrer que

$$A(x_1, \dots, x_n) \geq B(x_1, \dots, x_n)$$

quelques soient les variables x_1, \dots, x_n satisfaisant certaines conditions. Par exemple, $x_1, \dots, x_n \geq 0$ ou $x_1 + \dots + x_n = 1$. Par convention, la majeure partie du temps, on emploiera les lettres a, b, c, d pour des variables positives et x, y, z, w lorsque les variables sont réelles. Ici, A et B sont deux expressions algébriques. Rien n'empêche que A ou B soit simplement constante. Il est évidemment toujours possible de pratiquer quelques manipulations algébriques sur l'énoncé initial, par exemple soustraire B de chaque côté ou multiplier par 2, mais au final il reste toujours une inégalité entre deux expressions.

Une stratégie pour démontrer une inégalité consiste à retrouver une suite d'expressions intermédiaires A_1, \dots, A_m telles que

$$A(x_1, \dots, x_n) \geq A_1(x_1, \dots, x_n) \geq \dots \geq A_m(x_1, \dots, x_n) \geq B(x_1, \dots, x_n)$$

où chacune des nouvelles inégalités intermédiaires découlent directement d'un résultat connu. En termes imagés, il faut retrouver le chemin de A à B . Trêve d'abstraction, passons à du concret.

2 Une histoire de carrés positifs

On l'a vu, l'une des inégalité fondamentale est la positivité des carrés. Elle peut paraître naïve, mais cette inégalité est à l'origine de toutes sortes de résultats plus élaborés. En voici une liste non-exhaustive.

2.1 L'éternelle AM-GM

De toutes les inégalités, la plus célèbre est celle des moyennes arithmétique (AM) et géométrique (GM).

Théorème 21 (AM-GM). *Soient $a_1, \dots, a_n \geq 0$ des nombres **positifs**. Alors*

$$\frac{a_1 + \dots + a_n}{n} \geq \sqrt[n]{a_1 \cdot \dots \cdot a_n}.$$

L'égalité est vérifiée si et seulement si $a_1 = \dots = a_n$.

Démonstration. La preuve présentée ici est inductive et à l'origine l'œuvre de ce très cher Cauchy. On abrège par Ω_n l'énoncé de l'inégalité AM-GM pour $n \geq 1$ variables. On veut montrer que Ω_n est vrai pour tout $n \geq 1$. Dans l'idéal, on aimerait pouvoir montrer que $\Omega_n \Rightarrow \Omega_{n+1}$ (comme dans une induction classique), mais il n'est pas clair comment on peut procéder. En revanche, comme on va le voir, on peut montrer facilement que $\Omega_n \Rightarrow \Omega_{2n}$. Pour pouvoir conclure, on aura encore besoin de montrer que $\Omega_n \Rightarrow \Omega_{n-1}$ et que les petits cas sont vérifiés. Commençons par les petits cas (le cas Ω_1 est évidemment trivial).

1. Ω_2 : $\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$.

Pour montrer qu'une telle inégalité est vérifiée, on doit se ramener à une inégalité connue. Comme on l'a vu en introduction, faire apparaître des carrés parfaits est une stratégie. Pour cela, il faut être à l'aise pour reconnaître les doubles produits. Dans ce cas, on peut réécrire

$$\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab} \Leftrightarrow a - 2\sqrt{ab} + b \geq 0 \Leftrightarrow (\sqrt{a} - \sqrt{b})^2 \geq 0.$$

L'inégalité est donc vérifiée pour tout $a, b \geq 0$ et on a bien égalité si et seulement si $\sqrt{a} - \sqrt{b} = 0$, c'est-à-dire si et seulement si $a = b$ comme désiré.

2. Ω_3 : $\frac{a+b+c}{3} \geq \sqrt[3]{abc}$.

Ce cas n'est pas strictement requis pour l'induction, mais il est instructif. On remarque la présence d'une racine cubique que l'on aimerait autant ne pas avoir. Il y a plusieurs moyens pour s'en débarrasser. Premièrement, on pourrait élever le tout au cube, mais alors on ferait apparaître un coefficient $3^3 = 27$. Pas génial. La

deuxième méthode, plus subtile, propose d'introduire de nouvelles variables. Soient $x := \sqrt[3]{a}$, $y := \sqrt[3]{b}$ et $z := \sqrt[3]{c}$. L'inégalité devient alors

$$\frac{a+b+c}{3} \geq \sqrt[3]{abc} \Leftrightarrow x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz \geq 0.$$

Ce changement de variables n'est pas nécessaire dans le sens où ce n'est pas une étape décisive en vue de la conclusion. Il permet simplement d'y voir un peu plus clair (comme pour les substitutions de fonctions dans le cadre des équations fonctionnelles).

La magie du cas $n = 3$ intervient à présent. Il existe en effet, pour ce cas exclusivement, un moyen de factoriser l'expression que l'on cherche à minimiser:

$$x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz = (x+y+z)(x^2 + y^2 + z^2 - xy - yz - zx).$$

Le premier facteur est évidemment positif car par hypothèse x, y et z sont des nombres positifs. L'exemple de l'introduction montre que le second facteur est positif. On en déduit comme attendu $x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz \geq 0$. On a égalité si et seulement si l'un des deux facteurs est égal à 0. Or, $x + y + z = 0$ si et seulement si les trois variables sont égales à 0 et l'exemple en introduction nous enseigne également que $x^2 + y^2 + z^2 - xy - yz - zx = 0$ si et seulement si les trois variables sont égales. En conclusion, on a égalité si et seulement si $x = y = z$, autrement dit, si et seulement si $a = b = c$ comme désiré.

3. $\Omega_n \Rightarrow \Omega_{2n}$.

On veut démontrer AM-GM pour $2n$ variables en supposant que l'inégalité est vérifiée pour n variables. L'idée est toute simple. On a $2n$ variables que l'on va regrouper en deux paquets de n variables pour appliquer l'hypothèse d'induction à chacun des paquets et enfin conclure avec AM-GM pour deux variables.

$$\begin{aligned} \frac{a_1 + \dots + a_{2n}}{2n} &= \frac{1}{2} \cdot \underbrace{\frac{a_1 + \dots + a_n}{n}}_{\geq \sqrt[n]{a_1 \dots a_n}} + \frac{1}{2} \cdot \underbrace{\frac{a_{n+1} + \dots + a_{2n}}{n}}_{\geq \sqrt[n]{a_{n+1} \dots a_{2n}}} \\ &\geq \frac{\sqrt[n]{a_1 \dots a_n} + \sqrt[n]{a_{n+1} \dots a_{2n}}}{2} \\ &\geq \sqrt{\sqrt[n]{a_1 \dots a_n} \cdot \sqrt[n]{a_{n+1} \dots a_{2n}}} \\ &= \sqrt[2n]{a_1 \dots a_{2n}}. \end{aligned}$$

La première inégalité est une application de Ω_n aux deux fractions. La seconde inégalité est une application de Ω_2 à la moyenne des deux racines n èmes. On a donc établi l'inégalité désirée. Concernant les cas d'égalité, il y a égalité si et seulement si on a égalité pour chacune des inégalités intermédiaires. Tout d'abord, on doit vérifier l'égalité pour les deux applications de Ω_n , c'est-à-dire $a_1 = \dots = a_n$ et $a_{n+1} = \dots = a_{2n}$. De l'application de Ω_2 , pour satisfaire l'égalité, on doit avoir $\sqrt[n]{a_1 \dots a_n} = \sqrt[n]{a_{n+1} \dots a_{2n}}$. Ces deux conditions combinées sont équivalentes à $a_1 = \dots = a_{2n}$.

4. $\Omega_n \Rightarrow \Omega_{n-1}$.

On suppose que $\frac{a_1 + \dots + a_n}{n} \geq \sqrt[n]{a_1 \cdot \dots \cdot a_n}$ pour tout $a_1, \dots, a_n \geq 0$. On ne s'attend pas à ce qu'il soit très difficile de conclure Ω_{n-1} à partir de Ω_n , car dans Ω_{n-1} on a un degré de liberté en moins par rapport à Ω_n . Pour déduire Ω_{n-1} , il suffit en effet simplement de fixer judicieusement la valeur de a_n dans la relation décrite par Ω_n . Faut-il encore trouver la bonne valeur pour a_n .

Par symétrie et au vu des expressions qui entrent en jeu, il est naturel de poser $a_n = \sqrt[n-1]{a_1 \cdot \dots \cdot a_{n-1}}$. Autrement dit, on applique l'inégalité Ω_n pour les variables $(a_1, \dots, a_{n-1}, a_n = \sqrt[n-1]{a_1 \cdot \dots \cdot a_{n-1}})$. On obtient ainsi

$$\begin{aligned} \frac{a_1 + \dots + a_n}{n} &\geq \sqrt[n]{a_1 \cdot \dots \cdot a_{n-1} \cdot \sqrt[n-1]{a_1 \cdot \dots \cdot a_{n-1}}} \\ &= \sqrt[n-1]{a_1 \cdot \dots \cdot a_{n-1}} \\ &= a_n. \end{aligned}$$

En amenant tous les termes a_n à droite on obtient

$$\frac{a_1 + \dots + a_{n-1}}{n} \geq a_n - \frac{a_n}{n} = \frac{n-1}{n} \cdot a_n.$$

Finalement, en simplifiant par $1/n$, on peut réécrire l'inégalité précédente pour obtenir Ω_{n-1} comme attendu:

$$\frac{a_1 + \dots + a_{n-1}}{n-1} \geq a_n = \sqrt[n-1]{a_1 \cdot \dots \cdot a_{n-1}}.$$

Comme nous avons utilisé seulement une instance de Ω_n pour démontrer Ω_{n-1} , l'égalité est satisfaite si et seulement si $a_1 = \dots = a_{n-1} = \sqrt[n-1]{a_1 \cdot \dots \cdot a_{n-1}}$. Autrement dit, si et seulement si $a_1 = \dots = a_{n-1}$ comme désiré.

□

AM-GM n'est valable que pour les nombres positifs. Par exemple, pour $n = 3$, on obtient une contradiction en essayant d'appliquer AM-GM au triplet $(-1, -1, 2)$. En outre, si n est pair, alors la racine n'est pas nécessairement définie lorsque des variables sont négatives.

Exemple 2. Soient a_1, \dots, a_n des nombres strictement positifs. Montrer que

$$\frac{a_1}{a_2} + \frac{a_2}{a_3} + \dots + \frac{a_n}{a_1} \geq n.$$

Solution. C'est un exemple classique de l'application d'AM-GM. Lorsqu'on cherche à montrer qu'une somme de fractions où les numérateurs et les dénominateurs sont algébriquement proches (dans le cas présent, ils coïncident), on peut essayer la méthode suivante. On applique directement AM-GM pour n variables:

$$\frac{\frac{a_1}{a_2} + \frac{a_2}{a_3} + \dots + \frac{a_n}{a_1}}{n} \geq \sqrt[n]{\frac{a_1}{a_2} \cdot \frac{a_2}{a_3} \cdot \dots \cdot \frac{a_n}{a_1}} = 1.$$

L'inégalité souhaitée suit après multiplication de chaque côté par n . \square

Exemple 3. Soient a, b, c des nombres positifs. Montrer que

$$(a+b)(b+c)(c+a) \geq 8abc.$$

Solution 1. Dans ce problème, on pourrait commencer par distribuer les parenthèses de gauche. Après simplification, on obtient la nouvelle inégalité

$$a^2b + a^2c + b^2a + b^2c + c^2a + c^2b \geq 6abc.$$

Pour la démontrer, il suffit d'appliquer AM-GM pour $n = 6$ sur le membre de gauche:

$$\begin{aligned} a^2b + a^2c + b^2a + b^2c + c^2a + c^2b &\geq 6 \cdot \sqrt[6]{a^2b \cdot a^2c \cdot b^2a \cdot b^2c \cdot c^2a \cdot c^2b} \\ &= 6abc, \end{aligned}$$

où, pour s'épargner une fraction, on a multiplié immédiatement par 6. \square

Solution 2. Il est également possible, et plus astucieux, d'appliquer AM-GM trois fois sur chacune des trois sommes du membre de gauche dans l'inégalité de départ. On obtient alors

$$\begin{aligned} (a+b)(b+c)(c+a) &\geq 2\sqrt{ab} \cdot 2\sqrt{bc} \cdot 2\sqrt{ca} \\ &= 8abc. \end{aligned}$$

Dans les deux solutions, il suit des applications d'AM-GM que les cas d'égalité sont obtenus pour $a = b = c$ uniquement. \square

Exemple 4 (IMO 2012, problème 2). Soient $n \geq 3$ un entier et a_2, \dots, a_n des nombres strictement positifs tels que $a_2 \cdot \dots \cdot a_n = 1$. Montrer que

$$(1+a_2)^2 \dots (1+a_n)^n > n^n.$$

Solution. Ce problème présente deux nouveautés. Premièrement, nous avons une condition sur les variables, à savoir que leur produit est égal à 1. De plus, nous devons démontrer une inégalité stricte. Au fond, cela ne modifie pas fondamentalement notre approche.

L'idée derrière la présentation de cet exemple à ce stade du script est de montrer à quel point on ne peut pas évaluer la difficulté d'une inégalité à sa solution. Ce problème était le problème 2 de l'IMO en 2012. En outre, sa solution utilise une idée fondamentale pour le traitement des inégalités: *la décomposition des constantes*.

La première chose qui frappe est l'absence du terme a_1 . Pourquoi le problème est-il formulé sans variable a_1 ? La deuxième chose qui interpelle est le manque d'homogénéité dans le membre de gauche, c'est-à-dire que les variables apparaissent avec des degrés (i.e. puissances) différents. Une stratégie viable viserait à faire apparaître le produit des $n-1$ variables, que l'on rappelle égal à 1, en vue d'obtenir des simplifications. Dans ce but, il

faudrait minorer le terme $(1+a_i)^i$ en un terme en a_i seulement (i.e. pas d'autre puissance que le terme linéaire). Cette étape est l'essence même du problème.

L'astuce revient à décomposer le 1 de l'expression $1+a_i$ en une somme de $i-1$ nombres de manière à ce que $1+a_i$ devienne une somme de i termes. On pourrait alors appliquer AM-GM pour i variables. La manière la plus simple est d'écrire $1 = 1/(i-1) + \dots + 1/(i-1)$. On obtient alors

$$\frac{\frac{1}{i-1} + \dots + \frac{1}{i-1} + a_i}{i} \geq \sqrt[i]{\frac{a_i}{(i-1)^{i-1}}}$$

et donc

$$(1+a_i)^i \geq \frac{i^i}{(i-1)^{i-1}} \cdot a_i$$

avec égalité si et seulement si $a_i = 1/(i-1)$. En multipliant ces inégalités pour chaque indice $i = 2, \dots, n$, on obtient un produit télescopique

$$(1+a_2)^2 \dots (1+a_n)^n \geq \underbrace{\frac{2^2}{1} \cdot \frac{3^3}{2^2} \cdot \dots \cdot \frac{n^n}{(n-1)^{n-1}}}_{=n^n} \cdot \underbrace{a_2 a_3 \cdot \dots \cdot a_n}_{=1} = n^n.$$

Rappelons-nous que nous voulions établir l'inégalité stricte. Dans la dernière inégalité ci-dessus, on a égalité si et seulement si tous les cas d'égalité des $n-1$ applications d'AM-GM sont vérifiés, c'est-à-dire $a_i = 1/(i-1)$ pour tout $i = 2, \dots, n$. Dans ce cas, le produit des a_i est différent de 1 et donc l'unique cas d'égalité ne peut pas se produire. En conclusion, il n'y a jamais égalité et donc l'inégalité est stricte. \square

2.1.1 AM-GM: version pondérée

Que se passe-t-il si certains des a_i se répètent lorsqu'on applique AM-GM sur n variables ? On pourrait alors les regrouper. Supposons que a_1 apparaisse m_1 fois, a_2 apparaisse m_2 fois et ainsi de suite jusqu'à a_k qui apparaît m_k fois. Ici les m_i sont des entiers naturels tels que $m_1 + \dots + m_k = n$. On obtient

$$\frac{\overbrace{a_1 + \dots + a_1}^{m_1} + \dots + \overbrace{a_k + \dots + a_k}^{m_k}}{m_1 + \dots + m_k} \geq \left(\underbrace{a_1 \cdot \dots \cdot a_1}_{m_1} \cdot \dots \cdot \underbrace{a_k \cdot \dots \cdot a_k}_{m_k} \right)^{1/n}.$$

Autrement dit

$$\frac{m_1 a_1 + \dots + m_k a_k}{m_1 + \dots + m_k} \geq a_1^{\frac{m_1}{n}} \cdot \dots \cdot a_k^{\frac{m_k}{n}}.$$

En posant $\omega_i := m_i/n = m_i/(m_1 + \dots + m_k)$, alors on a $\omega_1 + \dots + \omega_k = 1$ et

$$\omega_1 a_1 + \dots + \omega_k a_k \geq a_1^{\omega_1} \cdot \dots \cdot a_k^{\omega_k}.$$

On obtient la version pondérée d'AM-GM.

Cette inégalité est toujours vérifiée même lorsque les ω_i sont des nombres réels positifs quelconques dont la somme vaut 1. En général, les ω_i sont appelés *poids*. Chaque a_i est associé à son poids et le poids total est 1. Ce résultat est connu en anglais sous le nom de *weighted AM-GM* (weighted = pondéré).

Théorème 22 (Weighted AM-GM). Soient a_1, \dots, a_k des nombres **positifs** et soient $\omega_1, \dots, \omega_k$ des nombres réels positifs tels que $\omega_1 + \dots + \omega_k = 1$. Alors

$$\omega_1 a_1 + \dots + \omega_k a_k \geq a_1^{\omega_1} \cdot \dots \cdot a_k^{\omega_k}.$$

L'égalité est vérifiée si et seulement si $a_i = a_j$ pour toute paire d'indices (i, j) telle que $\omega_i \neq 0$ et $\omega_j \neq 0$.

L'argument précédent donne la preuve pour le cas où les ω_i sont des nombres rationnels. Le cas général requiert des méthodes qui seront présentées à la fin de ces notes.

Exemple 5. Soit a un nombre positif. Alors

$$a^5 + 1 \geq a^3 + a^2.$$

Solution. Ce problème semble pouvoir être résolu avec des méthodes analytiques. Pourtant il existe une très jolie preuve qui utilise le weighted AM-GM. Comment sait-on qu'un tel argument existe ? Eh bien, parce que $5 + 0 = 3 + 2$, évidemment. On parle ici des exposants des quatre termes (avec $1 = a^0$).

Il s'agit donc de trouver la bonne constante pour appliquer l'inégalité suivante qui découle du weighted AM-GM. Soit $0 < c < 1$ une constante dont la valeur sera déterminée ultérieurement, alors

$$ca^5 + (1 - c) \geq a^{5c} \cdot 1^{1-c} = a^{5c}.$$

Pour retrouver les deux termes du membre de droite dans l'inégalité de départ, a^3 et a^2 , il faut appliquer cette relation pour $c_1 = 3/5$ et $c_2 = 2/5$. Comme $3 + 2 = 5$, alors $c_1 + c_2 = 1$! On obtient

$$\begin{cases} 3/5 \cdot a^5 + 2/5 \geq a^3 \\ 2/5 \cdot a^5 + 3/5 \geq a^2. \end{cases}$$

En additionnant ces deux relations, on obtient, comme désiré, $a^5 + 1 \geq a^3 + a^2$. \square

Exemple 6. Soient a, b, c des nombres strictement positifs tels que $a + b + c = 3$. Montrer que

$$a^b b^c c^a \leq 1.$$

Solution. C'est un exemple intéressant où les variables se confondent avec les poids. Comment pense-t-on à utiliser un weighted AM-GM dans ce cas ? Eh bien, l'expression avec les puissances ressemble au membre de droite dans le weighted AM-GM. De plus, la condition sur la somme des variables ressemble à la condition sur la somme des poids. Toutefois, la somme n'est pas 1. Or, on observe que

$$a^b b^c c^a \leq 1 \Leftrightarrow (a^b b^c c^a)^{1/3} \leq 1$$

et évidemment $a/3 + b/3 + c/3 = 1$. Appliquons donc le weighted AM-GM à a, b, c avec les poids $b/3, c/3, a/3$:

$$\frac{b}{3} \cdot a + \frac{c}{3} \cdot b + \frac{a}{3} \cdot c \geq a^{b/3} b^{c/3} c^{a/3}.$$

Que l'on peut réécrire sous la forme

$$\frac{ab + bc + ca}{3} \geq (a^b b^c c^a)^{1/3}.$$

Pour conclure, il ne reste plus qu'à montrer que $ab + bc + ca \leq 3$ sous la condition que $a + b + c = 3$. Ici il y a plusieurs chemins possibles (par exemple, comme on le verra plus tard, en *homogénéisant* l'inégalité). On a opté pour l'option suivante.

Lorsqu'une inégalité implique une majoration de l'expression $ab + bc + ca$, il est souvent judicieux d'utiliser l'inégalité $ab + bc + ca \leq a^2 + b^2 + c^2$ que l'on connaît bien. Si l'on additionne $2(ab + bc + ca)$ des deux côtés à cette relation, alors on obtient

$$3(ab + bc + ca) \leq (a + b + c)^2.$$

Dans le problème qui nous concerne, on sait que $a + b + c = 3$. Ainsi, l'inégalité ci-dessus appliquée à cet exemple donne bien

$$3(ab + bc + ca) \leq 9 \Leftrightarrow ab + bc + ca \leq 3.$$

□

2.2 Cauchy-Schwarz et son grand frère Hölder

De l'inégalité AM-GM il découle une autre inégalité tout aussi pratique. C'est une inégalité qui s'énonce en général en termes de produit scalaire et de normes de vecteurs. Nous en présentons ici une version algébrique.

Théorème 23 (Cauchy-Schwarz, abrégé CS). *Soient x_1, \dots, x_n et y_1, \dots, y_n des nombres réels (pas nécessairement positifs). Alors*

$$(x_1^2 + \dots + x_n^2)(y_1^2 + \dots + y_n^2) \geq (x_1 y_1 + \dots + x_n y_n)^2.$$

L'égalité est vérifiée si et seulement si il existe des nombres réels λ_1 et λ_2 tels que $\lambda_1 x_i = \lambda_2 y_i$ pour tout $i = 1, \dots, n$, i.e. les vecteurs $(x_1; \dots; x_n)$ et $(y_1; \dots; y_n)$ sont colinéaires:

$$\lambda_1 \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \lambda_2 \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}.$$

Autrement dit, l'égalité est vérifiée si et seulement si $x_i y_j = x_j y_i$ pour toute paire d'indices (i, j) .

Cauchy-Schwarz est une conséquence d'AM-GM. Dans cette preuve, on profite d'introduire en détail un concept déjà évoqué précédemment: l'homogénéité.

2.2.1 Interlude sur l'homogénéité

Définition 2.1. Une expression algébrique $A(x_1, \dots, x_n)$ en plusieurs variables est *homogène de degré k* si pour tout nombre réel θ

$$A(\theta x_1, \dots, \theta x_n) = \theta^k A(x_1, \dots, x_n).$$

Une inégalité est *homogène de degré k* si les deux côtés sont des expressions homogènes de degré k .

En d'autres termes, une expression en plusieurs variables est homogène, si en multipliant chaque variable par un même facteur θ , alors l'expression globale est multipliée par une puissance de θ . Par exemple, $x_1^3 + 2x_2^3 - x_1x_2^2$ est une expression homogène de degré 3 et

$$\frac{x_1 + x_2 + x_3}{x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_1}$$

est une expression homogène de degré -1 . En revanche, $x_1^2 + x_2^2 + 2x_3^2 - 1$ et $x_1 + x_2^2$ ne sont pas des expressions homogènes.

Il y a un avantage à travailler avec une inégalité homogène en cela qu'on peut supposer sans perte de généralité qu'une expression homogène en les variables prend une certaine valeur. Ce procédé est appelé *normalisation*. Par exemple, supposons que pour tous les nombres réels strictement positifs x_1, \dots, x_n on désire montrer l'inégalité

$$A(x_1, \dots, x_n) \geq B(x_1, \dots, x_n)$$

où A et B sont deux expressions homogènes de degré k . Alors, par homogénéité, cette inégalité est vérifiée pour les variables (x_1, \dots, x_n) si et seulement si elle l'est pour $(\theta x_1, \dots, \theta x_n)$ où $\theta > 0$. **Attention !** La positivité de θ est cruciale ici. En effet, par homogénéité des expressions, on a :

$$\begin{aligned} A(\theta x_1, \dots, \theta x_n) &\geq B(\theta x_1, \dots, \theta x_n) \Leftrightarrow \\ \theta^k \cdot A(x_1, \dots, x_n) &\geq \theta^k \cdot B(x_1, \dots, x_n) \Leftrightarrow \\ A(x_1, \dots, x_n) &\geq B(x_1, \dots, x_n). \end{aligned}$$

La dernière simplification est légale seulement parce que $\theta^k > 0$. Cette observation nous permet par exemple de supposer sans perte de généralité que nous avons $x_1 + \dots + x_n = 1$. Pourquoi ? Parce qu'il est équivalent de démontrer l'inégalité pour (x_1, \dots, x_n) et pour $(x_1/(x_1 + \dots + x_n), \dots, x_n/(x_1 + \dots + x_n))$, on l'a vu. Et dans le deuxième cas, la somme des variables vaut 1. De même, quitte à multiplier les variables par $2/\sqrt{x_1^2 + \dots + x_n^2}$, on peut supposer sans perte de généralité que $x_1^2 + \dots + x_n^2 = 4$. Ou encore, quitte à multiplier les variables par $1/x_n$, on peut supposer sans perte de généralité que $x_n = 1$.

Vous comprenez donc pourquoi travailler avec une inégalité homogène est pratique. On peut toujours fixer la valeur d'une expression homogène en les variables. En général, on choisit cette expression en fonction de ce qui apparaît dans l'inégalité, dans le but de

simplifier l'inégalité qu'on souhaite démontrer. **Attention!** Utiliser l'homogénéité pour soulager une inégalité n'est jamais un pas décisif vers la solution, cela permet simplement d'y voir plus clair.

Lorsqu'on dit d'une inégalité qu'elle est *standard*, on entend en général qu'elle est en particulier homogène. D'une certaine manière, si les grandeurs avaient des unités de mesure associées, alors l'homogénéité garantirait la validité (d'un point de vue physique) de l'expression; d'où le côté naturel et donc standard de l'homogénéité.

Remarque. *Concernant la rédaction des solutions, lorsque vous appliquez une normalisation dans une solution, les correcteurs attendent de vous que vous justifiez entièrement une telle manipulation, comme ci-dessus ou comme dans la démonstration qui suit.*

Cas d'égalité avec une condition artificielle Évidemment, imposer une condition supplémentaire en utilisant l'homogénéité influence les cas d'égalité. Si les cas d'égalités sont demandés dans le problème initial, il faut donc retracer les cas d'égalité originaux. Une manière de procéder et de voir la condition artificielle comme le choix de nouvelles variables. Par exemple, si vous avez supposé par homogénéité que $a_1 + \dots + a_n = 1$, alors vous auriez également pu introduire les nouvelles variables $b_i := a_i / (a_1 + \dots + a_n)$. En connaissant *a posteriori* les cas d'égalités en les variables b_i , il suffit de traduire ces relations pour les variables a_i en se servant des relations ci-dessus.

2.2.2 Démonstration de Cauchy-Schwarz et exemples

Démonstration de Cauchy-Schwarz. L'inégalité de Cauchy-Schwarz est homogène de degré 2 en les variables $x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n$. De plus, dans ce cas spécifiquement, elle est aussi homogène de degré 2 en les variables x_1, \dots, x_n seulement. C'est-à-dire que si l'on multiplie les x_i (seulement) par $\theta > 0$, alors l'inégalité est inchangée.

On remarque que si $x_1^2 + \dots + x_n^2 = 0$, alors tous les x_i sont nuls et l'inégalité est trivialement vérifiée. Si $x_1^2 + \dots + x_n^2 \neq 0$, alors, quitte à multiplier tous les x_i par $1/\sqrt{x_1^2 + \dots + x_n^2}$, on peut supposer sans perte de généralité que $x_1^2 + \dots + x_n^2 = 1$. On doit donc désormais montrer que

$$y_1^2 + \dots + y_n^2 \geq (x_1 y_1 + \dots + x_n y_n)^2$$

sous la condition que $x_1^2 + \dots + x_n^2 = 1$. En observant cette nouvelle inégalité, on remarque qu'elle est toujours homogène de degré 2 en les variables y_1, \dots, y_n cette fois. On peut donc à nouveau supposer sans perte de généralité que $y_1^2 + \dots + y_n^2 = 1$. L'inégalité devient

$$1 \geq x_1 y_1 + \dots + x_n y_n.$$

On a considérablement simplifié la forme de l'inégalité. La conclusion à l'aide d'AM-GM

est maintenant limpide. En effet, on sait que $x_i y_i \leq (x_i^2 + y_i^2)/2$. Ainsi, on a bien

$$\begin{aligned} x_1 y_1 + \dots + x_n y_n &\leq \frac{x_1^2 + y_1^2}{2} + \dots + \frac{x_n^2 + y_n^2}{2} \\ &= \frac{\overbrace{x_1^2 + \dots + x_n^2}^{=1}}{2} + \frac{\overbrace{y_1^2 + \dots + y_n^2}^{=1}}{2} \\ &= 1. \end{aligned}$$

Concernant les cas d'égalité, l'application d'AM-GM nous dit que l'on a égalité si et seulement si $x_i = y_i$ pour tout $i = 1, \dots, n$. Or, il faut se rappeler à ce stade que l'on a fait une supposition concernant la valeur de la somme des carrés des variables. Cela revient à multiplier les variables par l'inverse de la racine carrée de la dite somme. Ce coefficient doit donc être répercuté dans les cas d'égalités. On a donc bien égalité si et seulement si $\lambda x_i = y_i$ pour tout $i = 1, \dots, n$ ou si $x_1 = \dots = x_n = 0$ (le cas d'égalité $y_1 = \dots = y_n = 0$ correspond au choix $\lambda = 0$). \square

Exemple 7 (L'inégalité des moyennes). Soient a_1, \dots, a_n des nombres réels **strictement positifs**. Alors

$$\sqrt[n]{\frac{a_1^2 + \dots + a_n^2}{n}} \geq \frac{a_1 + \dots + a_n}{n} \geq \sqrt[n]{a_1 \cdot \dots \cdot a_n} \geq \frac{n}{\frac{1}{a_1} + \dots + \frac{1}{a_n}}.$$

Pour les trois inégalités, il y a égalité si et seulement si $a_1 = \dots = a_n$.

Solution. Les membres de l'inégalité s'appellent, de gauche à droite, la *moyenne quadratique* (QM pour *quadratic mean*), les moyennes arithmétique et géométrique que nous avons déjà rencontrés et la *moyenne harmonique* (HM pour *harmonic mean*) des valeurs a_i . L'inégalité des moyennes est un célèbre résultat dont il existe une grande variété de preuves. On présente ici une approche qui emploie Cauchy-Schwarz.

Commençons par AM-HM (même si cette inégalité est de fait une conséquence d'AM-GM et de la relation GM-HM que l'on verra plus tard). On peut réécrire AM-HM de la manière suivante:

$$(a_1 + \dots + a_n) \left(\frac{1}{a_1} + \dots + \frac{1}{a_n} \right) \geq n^2.$$

Cela commence à ressembler à du Cauchy-Schwarz. Comme les a_i sont des nombres réels positifs, on peut introduire $b_i := \sqrt{a_i}$. L'inégalité devient

$$(b_1^2 + \dots + b_n^2) \left(\left(\frac{1}{b_1} \right)^2 + \dots + \left(\frac{1}{b_n} \right)^2 \right) \geq n^2.$$

Il s'agit à présent d'une directe application de Cauchy-Schwarz. En effet, par Cauchy-Schwarz on a directement, comme désiré,

$$(b_1^2 + \dots + b_n^2) \left(\left(\frac{1}{b_1} \right)^2 + \dots + \left(\frac{1}{b_n} \right)^2 \right) \geq \left(b_1 \cdot \frac{1}{b_1} + \dots + b_n \cdot \frac{1}{b_n} \right)^2 = n^2.$$

Voyons à présent QM-AM. À nouveau, si la stratégie est d'employer Cauchy-Schwarz, on va faire usage des carrés sur la gauche. On peut ré-écrire QM-AM de la manière suivante:

$$n(a_1^2 + \dots + a_n^2) \geq (a_1 + \dots + a_n)^2.$$

Nous sommes proches de Cauchy-Schwarz à présent; il suffit de décomposer $n = 1 + \dots + 1$ et l'on obtient exactement l'inégalité de Cauchy-Schwarz pour $x_i = a_i$ et $y_i = 1$. Nous avons égalité si et seulement si les vecteurs $(a_1; \dots; a_n)$ et $(1; \dots; 1)$ sont colinéaires, autrement dit, si et seulement si $a_1 = \dots = a_n$.

Remarque. *L'inégalité QM-AM, contrairement aux deux autres, est valable pour des variables négatives également.*

Voyons enfin GM-HM. L'inégalité est homogène (comme les autres inégalités entre les moyennes). Quitte à remplacer tous les a_i par $a_i / \sqrt[n]{a_1 \dots a_n}$, on peut supposer que $a_1 \cdot \dots \cdot a_n = 1$. L'inégalité devient

$$\frac{1}{a_1} + \dots + \frac{1}{a_n} \geq n,$$

pour des variables a_i tels que leur produit est 1. Il suffit d'appliquer AM-GM sur le membre de gauche pour conclure:

$$\frac{1}{a_1} + \dots + \frac{1}{a_n} \geq n \sqrt[n]{\frac{1}{a_1 \cdot \dots \cdot a_n}} = n.$$

De l'application d'AM-GM, il s'ensuit que nous avons égalité si et seulement si $a_1 \cdot \dots \cdot a_n = 1$ et $1/a_1 = \dots = 1/a_n$, autrement dit si et seulement si $a_1 = \dots = a_n = 1$. On se souvient qu'on avait imposé une condition supplémentaire à l'aide de l'homogénéité. Cette condition influence comme toujours les cas d'égalité. Un rapide calcul montre que le cas d'égalité général correspond bien à $a_1 = \dots = a_n$.

□

Un détail mérite attention à ce stade: dans la preuve d'AM-HM, on peut se passer d'introduire les nouvelles variables b_i , mais il faut faire attention à une chose. Lorsqu'on applique Cauchy-Schwarz à un produit de deux parenthèses, **il faut s'assurer que chaque élément des deux sommes est positif**, parce que dans l'énoncé originel de Cauchy-Schwarz, ces éléments sont des carrés et donc des nombres positifs. En d'autres termes, on peut réécrire l'inégalité de Cauchy-Schwarz ainsi:

Théorème 24 (Cauchy-Schwarz, *bis*). Soient a_1, \dots, a_n et b_1, \dots, b_n des nombres réels **positifs**. Alors

$$(a_1 + \dots + a_n)(b_1 + \dots + b_n) \geq \left(\sqrt{a_1 b_1} + \dots + \sqrt{a_n b_n} \right)^2.$$

L'égalité est vérifiée si et seulement si les vecteurs $(a_1; \dots; a_n)$ et $(b_1; \dots; b_n)$ sont colinéaires.

L'exemple suivant est un cas typique où l'application de Cauchy-Schwarz est une stratégie à envisager. L'exemple lui-même est une inégalité pratique que vous pourrez réutiliser à l'occasion.

Exemple 8 (Nesbitt). Soient a, b, c des nombres **strictement positifs**. Alors

$$\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} \geq \frac{3}{2}.$$

L'égalité est vérifiée si et seulement si $a = b = c$.

Solution. La solution présentée ici est une application d'école de Cauchy-Schwarz lorsqu'on cherche à minorer une somme de fractions. Elle doit être envisagée systématiquement lorsqu'on travaille avec une somme de fractions. L'idée est de multiplier le membre de gauche par la somme des produits des numérateurs avec les dénominateurs. Ensuite, on applique Cauchy-Schwarz à ce produit. Rappelez-vous de ce schéma de *denominators clearing*, c'est un classique.

Par Cauchy-Schwarz, comme toutes les variables sont positives, on a

$$(a(b+c) + b(c+a) + c(a+b)) \left(\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} \right) \geq (a+b+c)^2$$

et donc

$$\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} \geq \frac{(a+b+c)^2}{2(ab+bc+ca)}.$$

Il suffit donc à présent de montrer que $(a+b+c)^2/2(ab+bc+ca) \geq 3/2$ et on a terminé. Cette inégalité est équivalente à $(a+b+c)^2 \geq 3(ab+bc+ca)$. On l'a vu en introduction, cette dernière inégalité est vérifiée pour tout a, b, c avec égalité si et seulement si $a = b = c$. Le cas d'égalité de l'application de Cauchy-Schwarz étant plus général, on a bien uniquement $a = b = c$ comme cas d'égalité. \square

Comme la preuve de l'inégalité de Nesbitt l'illustre, on peut utiliser Cauchy-Schwarz lorsque l'on cherche à minimiser une somme de fractions. La méthode permet de minorer une somme de fractions par une seule fraction. Plus précisément, l'inégalité suivante est une conséquence directe de Cauchy-Schwarz. La preuve est laissée en exercice.

Exemple 9 (Titu). Soient a_1, \dots, a_n et b_1, \dots, b_n des nombres réels **positifs**. Alors

$$\frac{a_1^2}{b_1} + \dots + \frac{a_n^2}{b_n} \geq \frac{(a_1 + \dots + a_n)^2}{b_1 + \dots + b_n}.$$

L'égalité est vérifiée si et seulement si les vecteurs $(a_1; \dots; a_n)$ et $(b_1; \dots; b_n)$ sont colinéaires.

Exemple 10. Soient x, y, z, w quatre nombres réels tels que $x^2 + y^2 + z^2 + w^2 = 1$. Déterminer la valeur maximale que peut prendre l'expression $x + 2y + 2z + 4w$.

Solution. Dans ce genre de problèmes d'optimisation, après avoir déterminé la valeur du maximum recherché, il y a systématiquement deux choses à montrer. Premièrement, il faut prouver qu'il s'agit bien d'une borne supérieure, c'est-à-dire que l'expression $x + 2y + 2z + 4w$ est bien toujours plus petite ou égale que cette valeur. Deuxièmement, il faut montrer que cette borne peut être atteinte pour un certain quadruplet de valeurs (i.e. il existe au moins un cas d'égalité) sans quoi ce n'est pas un vrai maximum.

Comme on l'a vu dans les exemples jusqu'ici, les valeurs extrêmes sont souvent atteintes lorsque toutes les variables sont égales. Dans ce cas, à cause des coefficients différents dans l'expression à maximiser, le cas d'égalité est moins évident. Il n'est donc pas clair *a priori* sur quelle valeur du maximum on devrait spéculer.

Toutefois, la condition sur la somme des carrés fait penser au membre de gauche de Cauchy-Schwarz. Il suffit peut-être d'introduire les coefficients dans la deuxième parenthèse du membre de gauche! On aurait alors

$$(x^2 + y^2 + z^2 + w^2)(1^2 + 2^2 + 2^2 + 4^2) \geq (x + 2y + 2z + 4w)^2$$

et donc

$$|x + 2y + 2z + 4w| \leq 5.$$

Observez que l'expression $x + 2y + 2z + 4w$ peut être négative et donc en prenant la racine carrée on ne doit pas oublier la valeur absolue. Or, un nombre est toujours plus petit ou égal que sa valeur absolue. On a donc $x + 2y + 2z + 4w \leq 5$ pour tout x, y, z, w .

Pour conclure que 5 est bien le maximum recherché, il faut encore trouver un cas d'égalité. De l'application de Cauchy-Schwarz, on sait qu'il y a égalité si et seulement si

$$\frac{x}{1} = \frac{y}{2} = \frac{z}{2} = \frac{w}{4}.$$

Or, ces quatre variables doivent aussi satisfaire $x^2 + y^2 + z^2 + w^2 = 1$. En résolvant ce système, on obtient la solution $(x, y, z, w) = (1/5, 2/5, 2/5, 4/5)$. Le maximum de 5 est donc bel et bien atteint. \square

2.2.3 Le grand frère: Hölder

L'inégalité de Cauchy-Schwarz est le cas particulier d'une inégalité plus générale qui porte le nom de Hölder. À cause du grand nombre de variables qui interviennent, il est difficile d'écrire son énoncé de manière limpide.

Théorème 25 (Hölder). Soit $m \geq 1$ un entier que l'on appelle le degré de l'inégalité. Soit x_{ij} une collection de nombres réels **positifs** où $i = 1, \dots, n$ et $j = 1, \dots, m$. Alors

$$\prod_{j=1}^m \sum_{i=1}^n (x_{ij})^m \geq \left(\sum_{i=1}^n \prod_{j=1}^m x_{ij} \right)^m.$$

L'égalité est vérifiée si et seulement si $x_{ij}x_{lk} = x_{ik}x_{lj}$ pour tout $i, l = 1, \dots, n$ et pour tout $j, k = 1, \dots, m$. C'est-à-dire, si et seulement s'il existe des nombres réels $\lambda_1, \dots, \lambda_m$ tels que

$$\lambda_1 \begin{pmatrix} x_{11} \\ \vdots \\ x_{1n} \end{pmatrix} = \lambda_2 \begin{pmatrix} x_{21} \\ \vdots \\ x_{2n} \end{pmatrix} = \dots = \lambda_m \begin{pmatrix} x_{m1} \\ \vdots \\ x_{mn} \end{pmatrix},$$

i.e. si les m vecteurs $(x_{11}; \dots; x_{1n}), \dots, (x_{m1}; \dots; x_{mn})$ sont colinéaires ou si l'un est nul.

Remarque (Validité de l'inégalité de Hölder). L'inégalité de Hölder est formulée ici pour des nombres positifs. Si le degré de l'inégalité est impair, alors il est nécessaire que les variables soient positives. Un contre-exemple, pour $m = 3$ est obtenu en prenant $x_{11} = 2, x_{12} = 4, x_{13} = -5$ et toutes les autres variables 1. Si le degré est pair, comme par exemple pour $m = 2$ qui est exactement l'inégalité de Cauchy, alors l'inégalité est vérifiée pour tous les nombres réels. En effet, le côté gauche est invariant si l'on change le signe d'une variable et le côté droit n'est jamais plus grand que lorsque toutes les variables sont positives.

Au lieu de retenir cette formule effrayante par cœur, on peut déjà commencer par comprendre pourquoi le cas $m = 2$ redonne exactement Cauchy-Schwarz ou comprendre le cas $m = 3$ et ses applications. En pratique, le degré 3 s'avère utile. Le cas général de l'inégalité d'Hölder est plus rarement utilisé mais demeure toutefois un résultat fondamental. Si le degré est $m = 3$, l'inégalité de Hölder s'écrit de la manière suivante:

Théorème 26 (Hölder degré 3). Soient $x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n, z_1, \dots, z_n$ des nombres réels **positifs**. Alors

$$(x_1^3 + \dots + x_n^3)(y_1^3 + \dots + y_n^3)(z_1^3 + \dots + z_n^3) \geq (x_1y_1z_1 + \dots + x_ny_nz_n)^3.$$

L'égalité est vérifiée si et seulement si les trois vecteurs $(x_1; \dots; x_n), (y_1; \dots; y_n)$ et $(z_1; \dots; z_n)$ sont colinéaires ou si l'un est nul.

Si Cauchy-Schwarz est une bonne stratégie lorsqu'on cherche à minimiser une somme de fractions, parce qu'elle permet de se débarrasser des dénominateurs, l'inégalité de Hölder de degré m s'applique à l'identique lorsque la somme de fractions fait intervenir des racines $(m-1)$ èmes. Illustrons ce principe avec un fameux problème d'IMO.

Exemple 11 (IMO 2001, problème 2). *Soient a, b, c des nombres réels positifs. Alors*

$$\frac{a}{\sqrt{a^2 + 8bc}} + \frac{b}{\sqrt{b^2 + 8ca}} + \frac{c}{\sqrt{c^2 + 8ab}} \geq 1.$$

Solution. On cherche à minimiser une somme de fractions faisant intervenir des racines carrées. On va donc tenter d'appliquer Hölder avec degré 3. On procède de la manière suivante. On multiplie le carré du membre de gauche avec la somme des produits des numérateurs avec les dénominateurs sans la racine. C'est-à-dire, on considère l'expression suivante:

$$(a(a^2 + 8bc) + b(b^2 + 8ca) + c(c^2 + 8ab)) \left(\frac{a}{\sqrt{a^2 + 8bc}} + \frac{b}{\sqrt{b^2 + 8ca}} + \frac{c}{\sqrt{c^2 + 8ab}} \right)^2.$$

Par Hölder, comme toutes les variables qui interviennent sont positives, cette expression est plus grande ou égale à $(a + b + c)^3$. Autrement dit, on a

$$\frac{a}{\sqrt{a^2 + 8bc}} + \frac{b}{\sqrt{b^2 + 8ca}} + \frac{c}{\sqrt{c^2 + 8ab}} \geq \sqrt{\frac{(a + b + c)^3}{a^3 + b^3 + c^3 + 24abc}}.$$

Il suffit donc de montrer que $(a + b + c)^3 \geq a^3 + b^3 + c^3 + 24abc$ pour conclure. Si l'on développe le cube de gauche, alors les termes a^3, b^3 et c^3 se simplifient. Il reste

$$a^2b + a^2c + b^2a + b^2c + c^2a + c^2b \geq 6abc.$$

Cette inégalité, on l'a déjà vu dans un exemple précédent, est vérifiée (il s'agit là d'un simple AM-GM avec six variables). □

2.3 Muirhead, le bulldozer

Intéressons-nous de plus près aux inégalités entre expressions polynomiales (pas de racine, pas de sinus, etc.), symétriques et homogènes et regardons de plus près une liste d'inégalités que l'on a déjà établies:

$$\begin{cases} a^2 + b^2 + c^2 \geq ab + bc + ca, \\ a^3 + b^3 + c^3 \geq 3abc, \\ a^2b + a^2c + b^2a + b^2c + c^2a + c^2b \geq 6abc, \\ a^5 + 1 \geq a^3 + a^2. \end{cases}$$

Toutes ces relations, mis à part la dernière, sont des inégalités entre deux expressions polynomiales symétriques en a, b, c et homogènes de degré 2, respectivement 3 et 3. Intuitivement, on remarque que "les plus grands exposants" dominent les exposants plus distribués. Cette intuition, pour autant qu'on en définisse les concepts, se formalise en un théorème que l'on doit à Muirhead. Pour l'énoncer, on a besoin de la notion de majoration des exposants.

Définition 2.2. Soit $p = (p_1, \dots, p_n)$ et $q = (q_1, \dots, q_n)$ deux vecteurs de nombres réels (pas forcément positifs). On dit que p *major* (ou *domine*) q et on note $p \succeq q$ si

1. $p_1 \geq p_2 \geq \dots \geq p_n$ et $q_1 \geq q_2 \geq \dots \geq q_n$,
2. $p_1 + \dots + p_n = q_1 + \dots + q_n$,
3. $p_1 + \dots + p_k \geq q_1 + \dots + q_k$ pour tout $k = 1, \dots, n-1$.

Par exemple, $(5, 1) \succeq (3, 2)$ et $(2, 0, 0) \succeq (1, 1, 0)$ ou encore $(5, 3, -1) \succeq (4, 2, 1)$ et $(1, 0, \dots, 0) \succeq (1/n, \dots, 1/n)$.

Pour pouvoir énoncer Muirhead proprement, on introduit encore le concept de *somme symétrique*. Il s'agit d'une notation qui nous épargne parfois d'écrire de longues expressions. La somme symétrique d'une expression telle que a^2b ou a^3bc^2 est la somme des toutes les expressions obtenues par permutation des variables. **Attention!** Une somme symétrique d'un terme avec n variables distinctes contient toujours $n!$ termes, car il y a $n!$ permutations possibles. Ce concept est plus clairement expliqué à l'aide d'un exemple. Pour trois variables, par exemple

$$\left\{ \begin{array}{l} \sum_{sym} abc = abc + acb + bac + bca + cab + cba = 6abc, \\ \sum_{sym} a^2b = a^2b + a^2c + b^2a + b^2c + c^2a + c^2b, \\ \sum_{sym} ab = ab + ac + ba + bc + ca + cb = 2(ab + bc + ca). \end{array} \right.$$

Il ne faut pas confondre les sommes symétriques avec les *sommes cycliques* que l'on rencontre parfois dans la littérature. La somme cyclique d'une expression n'additionne que les expressions obtenues par permutations **cycliques** des variables. En particulier, la somme cyclique d'une expression en n variables contient n termes. Par exemple,

$$\left\{ \begin{array}{l} \sum_{cyc} abc = abc + bca + cab = 3abc, \\ \sum_{cyc} a^2b = a^2b + b^2c + c^2a, \\ \sum_{cyc} ab = ab + bc + ca. \end{array} \right.$$

Si a_1, \dots, a_n sont des nombres réels **positifs**, alors étant donné un vecteur de nombres réels $p = (p_1, \dots, p_n)$, on note

$$[p] := \sum_{sym} a_1^{p_1} \cdot \dots \cdot a_n^{p_n}.$$

Par exemple, $[(2, 0, 0)] = 2(a_1^2 + a_2^2 + a_3^2)$ et $[(1/2, 1/2)] = 2\sqrt{a_1 a_2}$. Observer que dans la notation $[p]$, l'ordre des éléments du vecteurs p n'importe pas. Par exemple $[(2, 1, 0)] =$

$[(1, 0, 2)]$. En effet, on parle ici d'une notation pour une somme symétrique qui est donc par essence symétrique (la même remarque est fautive pour les sommes cycliques). En principe, on écrira les composantes du vecteurs p dans l'ordre décroissant.

Le théorème de Muirhead s'énonce facilement avec cette notation.

Théorème 27 (Muirhead, a.k.a. Bunching). *Soient a_1, \dots, a_n des nombres réels positifs et p, q deux vecteurs de nombres réels (pas nécessairement positifs). Alors*

$$p \succeq q \Rightarrow [p] \geq [q].$$

L'égalité est vérifiée si et seulement si $p = q$ ou si tous les a_i sont identiques.

On peut appliquer Muirhead pour montrer certaines des inégalités déjà établies. Par exemple,

$$\begin{aligned} (2, 0, 0) \succeq (1, 1, 0) &\Rightarrow a^2 + b^2 + c^2 \geq ab + bc + ca, \\ (3, 0, 0) \succeq (2, 1, 0) \succeq (1, 1, 1) &\Rightarrow 2(a^3 + b^3 + c^3) \geq \sum_{sym} a^2b \geq 6abc, \\ (5, 0) \succeq (3, 2) &\Rightarrow a^5 + b^5 \geq a^3b^2 + b^3a^2. \end{aligned}$$

On peut également voir AM-GM comme une conséquence de Muirhead:

$$\begin{aligned} (1, 0, \dots, 0) \succeq (1/n, \dots, 1/n) &\Rightarrow (n-1)! \cdot (a_1 + \dots + a_n) \geq n! \cdot a_1^{1/n} \dots a_n^{1/n} \\ &\Rightarrow \frac{a_1 + \dots + a_n}{n} \geq \sqrt[n]{a_1 \dots a_n}. \end{aligned}$$

Muirhead est un outil extrêmement puissant. Étant donnée une inégalité polynomiale symétrique et homogène, on peut toujours essayer de tout développer, ramener l'inégalité sous la forme de sommes symétriques et tenter d'appliquer Muirhead. Bien sûr, cela ne fonctionne pas tout le temps. Cependant, l'outil est si puissant qu'il en devient ennuyeux. L'époque des inégalités résolubles par gros bras (i.e. Muirhead) est révolue, du moins à l'IMO. Voyons néanmoins quelques exemples.

Exemple 12 (USA 1997). *Soient a, b, c trois nombres réels strictement positifs. Alors*

$$\frac{1}{a^3 + b^3 + abc} + \frac{1}{b^3 + c^3 + abc} + \frac{1}{c^3 + a^3 + abc} \leq \frac{1}{abc}.$$

Solution. L'inégalité est polynomiale, symétrique et homogène. On peut donc tenter d'appliquer Muirhead. Pour ce faire, il faut tout multiplier pour se débarrasser des fractions. On passe immédiatement en notation avec les sommes symétriques. **Attention!** Chaque somme contient six termes, on doit donc rajouter des coefficients pour compenser les termes excédentaires. On obtient

$$\frac{1}{2} \cdot \sum_{sym} (a^3 + b^3 + abc)(a^3 + c^3 + abc)abc \leq (a^3 + b^3 + abc)(b^3 + c^3 + abc)(c^3 + a^3 + abc).$$

En développant, on obtient

$$\sum_{sym} a^7bc + 3a^4b^4c + 4a^5b^5c + a^3b^3c^3 \leq \sum_{sym} a^3b^3c^3 + 2a^6b^3 + 3a^4b^4c + 2a^5b^2c^2 + a^7bc$$

et après simplification, il reste $\sum_{sym} a^6b^3 \geq \sum_{sym} a^5b^2c^2$. Cette inégalité est vérifiée parce que $(6, 3, 0) \succeq (5, 2, 2)$. \square

Exemple 13. Soient a_1, \dots, a_n des nombres strictement positifs tels que $a_1 \cdot \dots \cdot a_n = 1$. Alors

$$a_1^2 + \dots + a_n^2 \geq a_1 + \dots + a_n.$$

Solution. L'inégalité est bien polynomiale et symétrique, mais elle n'est pas homogène. En effet, le côté gauche est homogène de degré 2 alors que le côté droit est homogène de degré 1. L'astuce est *d'homogénéiser* l'inégalité à l'aide de la condition en multipliant à droite par un terme polynomial, symétrique et homogène de degré 1, c'est-à-dire $(a_1 \cdot \dots \cdot a_n)^{1/n}$. Les deux côtés sont alors homogènes de degré 2. On obtient

$$a_1^2 + \dots + a_n^2 \geq (a_1 \cdot \dots \cdot a_n)^{1/n} (a_1 + \dots + a_n)$$

et en notation avec les sommes symétriques

$$\sum_{sym} a_i^2 \geq \sum_{sym} a_1^{\frac{n+1}{n}} a_2^{\frac{1}{n}} \dots a_n^{\frac{1}{n}}.$$

Or, $(2, 0, \dots, 0) \succeq ((n+1)/n, 1/n, \dots, 1/n)$, donc l'inégalité précédente est vérifiée par Muirhead. \square

Pour le dernier exemple, on va compléter l'inégalité de Muirhead avec un petit lemme extrêmement pratique.

Lemme 28. Soient a_1, \dots, a_n des nombres réels positifs et $p = (p_1, \dots, p_n), q$ deux vecteurs de nombres réels.

1. Si $a_1 \cdot \dots \cdot a_n = 1$, alors $[(p_1, \dots, p_n)] = [(p_1 - r, \dots, p_n - r)]$ pour tout nombre réel r .
2. Si $a_1 \cdot \dots \cdot a_n \geq 1$, alors $[(p_1, \dots, p_n)] \geq [(p_1 - r, \dots, p_n - r)]$ pour tout nombre réel r .

De plus,

$$\frac{[p] + [q]}{2} \geq \left\lceil \frac{p+q}{2} \right\rceil.$$

Démonstration. Les deux premiers points sont immédiats à condition d'écrire explicitement les sommes.

Le dernier point est une conséquence d'AM-GM. C'est une relation clef comme on va le voir dans l'exemple d'après. Prenons les deux sommes $[p]$ et $[q]$ termes à termes:

$$\begin{aligned}\frac{a_1^{p_1} \dots a_n^{p_n} + a_1^{q_1} \dots a_n^{q_n}}{2} &\geq (a_1^{p_1+q_1} \dots a_n^{p_n+q_n})^{1/2} \\ &= a_1^{(p_1+q_1)/2} \dots a_n^{(p_n+q_n)/2}.\end{aligned}$$

On conclut en sommant ces $n!$ relations.

□

Exemple 14 (IMO 2005, problème 3). *Soient a, b, c des nombres réels strictement positifs tels que $abc \geq 1$. Alors*

$$\frac{a^5 - a^2}{a^5 + b^2 + c^2} + \frac{b^5 - b^2}{b^5 + c^2 + a^2} + \frac{c^5 - c^2}{c^5 + a^2 + b^2} \geq 0.$$

Solution. L'inégalité n'est pas homogène et il n'est pas clair *a priori* comment homogénéiser une telle inégalité. On va donc essayer de se rabattre sur notre lemme. On commence par tout développer (eh oui, il faut suer pour gagner). On obtient

$$\begin{aligned}[(9, 0, 0)] + 4[(7, 5, 0)] + [(5, 2, 2)] + [(5, 5, 5)] &\geq [(6, 0, 0)] + [(5, 5, 2)] + 2[(5, 4, 0)] \\ &\quad + 2[(4, 2, 0)] + [(2, 2, 2)].\end{aligned}$$

Toute la subtilité de l'exercice revient donc à estimer les bons termes à gauche avec les bons termes à droite. C'est à cette étape qu'il faut un brin d'intuition et d'expérience. L'idée générale est toujours d'utiliser le plus grand terme à gauche pour majorer le plus grand terme à droite.

Par Muirhead, on a $[(9, 0, 0)] \geq [(7, 1, 1)]$. Par le point 2 du lemme, comme $abc \geq 1$, avec $r = 1$, on a $[(7, 1, 1)] \geq [(6, 0, 0)]$. Donc

$$[(9, 0, 0)] \geq [(6, 0, 0)].$$

Par Muirhead, on a immédiatement

$$[(7, 5, 0)] \geq [(5, 5, 2)].$$

De même, par Muirhead on a $[(7, 5, 0)] \geq [(6, 5, 1)]$ et par le point 2 du lemme, avec $r = 1$, $[(6, 5, 1)] \geq [(5, 4, 0)]$. Donc

$$2[(7, 5, 0)] \geq 2[(5, 4, 0)].$$

On arrive à l'étape un peu plus délicate. On va montrer que

$$[(7, 5, 0)] + [(5, 2, 2)] \geq 2[(4, 2, 0)].$$

A l'aide du point 3 du lemme, on a $[(7, 5, 0)] + [(5, 2, 2)] \geq 2[(6, 7/2, 1)]$. On ne peut pas conclure immédiatement ni avec Muirhead ou avec le point 2 que $[(6, 7/2, 1)] \geq [(4, 2, 0)]$.

On doit essayer de combiner les deux. L'idée est de chercher un nombre réel r tel que $(6 - r) + (7/2 - r) + (1 - r) = 4 + 2$. Un tel r est donnée par $3/2$. Donc, on applique d'abord le point 2 du lemme avec $r = 3/2$ pour obtenir $[(6, 7/2, 1)] \geq [(9/2, 2, -1/2)]$, puis Muirhead nous donne $[(9/2, 2, -1/2)] \geq [(4, 2, 0)]$.

Finalement, le point 2 du lemme avec $r = 3$ implique que

$$[(5, 5, 5)] \geq [(2, 2, 2)].$$

En sommant ces cinq inégalités, on obtient le résultat désiré. \square

3 L'ordre avant le désordre

Dans le chapitre précédent, les résultats s'appuient essentiellement sur le fait qu'il n'y a pas de carrés négatifs. Les inégalités présentées dans ce chapitre ne découlent pas de la positivité des carrés. On peut donc les regarder comme une famille d'outils de nature différente qui permettent de résoudre certaines inégalités insensibles aux résultats précédents.

3.1 Les suites ordonnées à la sauce Tchébychev

Le résultat central de cette section est très intuitif. Sa preuve d'ailleurs n'est qu'une formalisation de notre intuition. L'idée est la suivante: pour maximiser, il faut assembler les plus grands ensemble. Si vous êtes autorisés à piocher trois, deux et une pièce dans trois sacs qui contiennent des pièces de cinq, deux et un franc, alors vous maximisez votre gain en prenant trois pièces de cinq francs, deux pièces de deux francs et une pièce d'un franc.

Théorème 31 (Suites ordonnées). *Soient $x_1 \geq x_2 \geq \dots \geq x_n$ une suite ordonnée de nombres réels (pas nécessairement positifs). Soit y_1, \dots, y_n une deuxième suite de nombres réels et soit z_1, \dots, z_n un réarrangement de la suite y_1, \dots, y_n . Alors la somme*

$$x_1 z_1 + x_2 z_2 + \dots + x_n z_n$$

est maximale si $z_1 \geq z_2 \geq \dots \geq z_n$ (i.e. les deux suites sont ordonnées dans le même sens) et est minimale si $z_1 \leq z_2 \leq \dots \leq z_n$ (i.e. les deux suites sont ordonnées dans le sens inverse).

Les deux sommes extrémales coïncident (ou de manière équivalente, toutes les sommes coïncident) si et seulement si $x_1 = \dots = x_n$ ou $y_1 = \dots = y_n$.

Démonstration. Supposons que les suites (x_i) et (z_i) ne sont pas ordonnées dans le même sens. C'est-à-dire qu'il existe une paire d'indices (j, k) telle que $x_j \geq x_k$ et $z_j \leq z_k$. La somme des produits vaut

$$s_1 := x_1 z_1 + \dots + x_j z_j + \dots + x_k z_k + \dots + x_n z_n.$$

On va montrer qu'en réarrangeant la suite (z_i) (i.e. en mettant de l'ordre) via une permutation des termes z_j et z_k , alors on obtient une plus grande somme. Soit s_2 la nouvelle somme:

$$s_2 := x_1 z_1 + \dots + x_j z_k + \dots + x_k z_j + \dots + x_n z_n.$$

Comme seulement deux termes varient entre les sommes s_1 et s_2 , la différence entre s_2 et s_1 vaut

$$s_2 - s_1 = x_j z_k + x_k z_j - x_j z_j - x_k z_k = \underbrace{(x_j - x_k)}_{\geq 0} \underbrace{(z_k - z_j)}_{\geq 0} \geq 0.$$

On conclut comme désiré que $s_2 \geq s_1$. En conclusion, plus on réordonne la suite (z_i) pour qu'elle soit ordonnée comme (x_i) , plus on augmente la valeur de la somme $\sum x_i z_i$. Au final, lorsque les deux suites seront ordonnées de la même manière, la somme sera donc maximale, comme attendu. Le deuxième cas se démontre de manière similaire. \square

Pour gagner en clarté, on introduit la notation suivante:

$$\begin{bmatrix} (x_n) \\ (y_n) \end{bmatrix} := \begin{bmatrix} x_1 & \dots & x_n \\ y_1 & \dots & y_n \end{bmatrix} := x_1 y_1 + \dots + y_n y_n.$$

Un concept important dans le contexte des suites ordonnées est une idée déjà évoquée précédemment: la symétrie.

3.1.1 Interlude sur la symétrie

Définition 3.1. Une expression algébrique $A(x_1, \dots, x_n)$ en plusieurs variables est *symétrique* si pour toute permutation y_1, \dots, y_n des nombres x_1, \dots, x_n , l'expression A est inchangée:

$$A(x_1, \dots, x_n) = A(y_1, \dots, y_n).$$

Une inégalité est *symétrique* si les deux côtes sont des expressions symétriques et si toutes les conditions imposées dans la donnée sur les variables sont également symétriques.

Par exemple, $x_1 x_2 + x_2 x_3 + x_3 x_1$ et $x_1 + x_2 + x_3 + 1$ sont des expressions symétriques en x_1, x_2, x_3 . En revanche, l'expression $x_1^2 x_2 + x_2^2 x_3 + x_3^2 x_1$ n'est pas symétrique.

Lorsqu'on travaille avec une inégalité symétrique, permuter les variables ne change rien. On peut donc sans perte de généralité supposer que les variables sont ordonnées comme bon nous semble. Tout de suite un exemple pour mieux comprendre.

Exemple 15. *Les inégalités suivantes sont vérifiées.*

1. soient x, y, z des nombres réels, alors $x^2 + y^2 + z^2 \geq xy + yz + zx$,
2. soient $a, b, c \geq 0$, alors $a^3 + b^3 + c^3 \geq a^2 b + b^2 c + c^2 a$.

Solution. Voyons une inégalité après l'autre:

1. On connaît déjà bien cette inégalité. On a vu comment la démontrer en faisant apparaître des carrés. On peut également la démontrer à l'aide d'AM-GM, de Cauchy ou encore en appliquant directement Muirhead. Voyons une preuve avec les suites ordonnées.

L'inégalité étant symétrique, on peut sans perte de généralité supposer que $x \geq y \geq z$. Les suites x, y, z et x, z, y sont identiques et donc, en particulier, ordonnées dans le même sens. La suite y, z, x est un réarrangement de la suite x, y, z . On a donc, par le théorème des suites ordonnées,

$$\begin{bmatrix} x & y & z \\ x & y & z \end{bmatrix} \geq \begin{bmatrix} x & y & z \\ y & z & x \end{bmatrix} \Leftrightarrow x^2 + y^2 + z^2 \geq xy + yz + zx.$$

2. Cette inégalité est intéressante, car elle n'est pas symétrique. Muirhead n'est donc d'aucune utilité ici, nonobstant une certaine ressemblance. De plus, on ne peut pas arbitrairement fixer l'ordre des variables, sans perdre en généralité. Mais cela n'est pas directement nécessaire.

Comme les variables sont positives et que la fonction $x \mapsto x^2$ est croissante sur les nombres positifs, on a

$$a \geq b \Rightarrow a^2 \geq b^2.$$

En particulier, les suites a, b, c et a^2, b^2, c^2 sont ordonnées dans le même sens (mais pas nécessairement monotones). Alors, on a bien, par le théorème des suites ordonnées,

$$\begin{bmatrix} a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{bmatrix} \geq \begin{bmatrix} a & b & c \\ c^2 & a^2 & b^2 \end{bmatrix} \Leftrightarrow a^3 + b^3 + c^3 \geq a^2b + b^2c + c^2a.$$

□

Exemple 16. Soient $n \geq 2$ un nombre entier et a_1, \dots, a_n des nombres strictement positifs dont la somme est notée $s := a_1 + \dots + a_n$. Alors

$$\frac{a_1}{s - a_1} + \dots + \frac{a_n}{s - a_n} \geq \frac{n}{n - 1}.$$

Solution. Cette fois, l'inégalité est symétrique. On peut donc supposer sans perte de généralité que $a_1 \geq \dots \geq a_n$. Observer que, et cette idée est récurrente,

$$a_i \geq a_j \Leftrightarrow s - a_i \leq s - a_j \Leftrightarrow \frac{1}{s - a_i} \geq \frac{1}{s - a_j}.$$

On a donc $1/(s - a_1) \geq \dots \geq 1/(s - a_n)$. Ce problème est un peu plus délicat que le précédent, car une seule utilisation du théorème des suites ordonnées ne suffit pas. On va l'appliquer $n - 1$ fois, en permutant cycliquement le rôle des variables a_i . Plus

précisément, comme les suites (a_i) et $(1/(s - a_i))$ sont ordonnées dans le même sens, le théorème des suites ordonnées nous donne

$$\begin{aligned} \frac{a_1}{s - a_1} + \dots + \frac{a_n}{s - a_n} &\geq \frac{a_1}{s - a_2} + \frac{a_2}{s - a_3} + \dots + \frac{a_n}{s - a_1}, \\ \frac{a_1}{s - a_1} + \dots + \frac{a_n}{s - a_n} &\geq \frac{a_1}{s - a_3} + \frac{a_2}{s - a_4} + \dots + \frac{a_n}{s - a_2}, \\ &\vdots \\ \frac{a_1}{s - a_1} + \dots + \frac{a_n}{s - a_n} &\geq \frac{a_1}{s - a_n} + \frac{a_2}{s - a_1} + \dots + \frac{a_n}{s - a_{n-1}}. \end{aligned}$$

En sommant ces inégalités, tout en sommant en une étape les fractions avec les même dénominateurs à droite, on obtient

$$(n - 1) \left(\frac{a_1}{s - a_1} + \dots + \frac{a_n}{s - a_n} \right) \geq \frac{s - a_1}{s - a_1} + \dots + \frac{s - a_n}{s - a_n} = n.$$

La conclusion désirée suit. □

3.1.2 Vous prendrez bien un peu de Tchébychev ?

On peut généraliser la méthode de résolution de l'exemple précédent. L'inégalité que l'on obtient alors porte le nom de Tchébychev.

Théorème 32 (Tchébychev). *Soient x_1, \dots, x_n et y_1, \dots, y_n deux suites de nombres réels (pas nécessairement positifs).*

1. *Si les deux suites sont ordonnées dans le même sens, alors*

$$\frac{x_1 y_1 + \dots + x_n y_n}{n} \geq \frac{x_1 + \dots + x_n}{n} \cdot \frac{y_1 + \dots + y_n}{n}.$$

2. *Si les deux suites sont ordonnées dans le sens inverse, alors*

$$\frac{x_1 y_1 + \dots + x_n y_n}{n} \leq \frac{x_1 + \dots + x_n}{n} \cdot \frac{y_1 + \dots + y_n}{n}.$$

L'égalité est vérifiée si et seulement si $x_1 = \dots = x_n$ ou $y_1 = \dots = y_n$.

Démonstration. Supposons que les suites soient ordonnées dans le même sens. Quitte à réordonner les variables, par symétrie, on suppose que $x_1 \geq \dots \geq x_n$ et $y_1 \geq \dots \geq y_n$. Comme dans l'exemple précédent, on applique l'inégalité des suites ordonnées n fois en

permutant cycliquement les variables y_i :

$$\begin{aligned}x_1y_1 + \dots + x_ny_n &= x_1y_1 + x_2y_2 + \dots + x_ny_n, \\x_1y_1 + \dots + x_ny_n &\geq x_1y_2 + x_2y_3 + \dots + x_ny_1, \\&\vdots \\x_1y_1 + \dots + x_ny_n &\geq x_1y_n + x_2y_1 + \dots + x_ny_{n-1}.\end{aligned}$$

Il ne reste qu'à sommer ces n relations. On remarque que chaque produit x_iy_j apparaît exactement une fois dans le membre de droite. Il s'agit donc du développement de $(x_1 + \dots + x_n)(y_1 + \dots + y_n)$. On obtient ainsi

$$n(x_1y_1 + \dots + x_ny_n) \geq (x_1 + \dots + x_n)(y_1 + \dots + y_n)$$

et la conclusion suit. \square

Exemple 17. Soient a, b, c des nombres strictement positifs tels que $abc = 1$. Alors

$$\frac{a-1}{\sqrt{b+c}} + \frac{b-1}{\sqrt{c+a}} + \frac{c-1}{\sqrt{a+b}} \geq 0.$$

Solution. Dans ce problème, on remarque tout d'abord le manque d'homogénéité. On penche donc plutôt pour une méthode du troisième chapitre. En revanche, l'inégalité est symétrique, donc on peut supposer que $a \geq b \geq c$.

La deuxième chose qui interpelle est la présence de signes moins. Rien n'empêche donc les numérateurs d'être négatifs. En général, on préfère se passer de termes dont on ne peut pas contrôler le signe. Pour s'en débarrasser, on peut passer à droite tous ces signes négatifs. L'inégalité devient

$$\frac{a}{\sqrt{b+c}} + \frac{b}{\sqrt{c+a}} + \frac{c}{\sqrt{a+b}} \geq \frac{1}{\sqrt{b+c}} + \frac{1}{\sqrt{c+a}} + \frac{1}{\sqrt{a+b}}.$$

Observer que si $a \geq b \geq c$, alors $a+b \geq a+c \geq b+c$. Comme la fonction racine $x \mapsto \sqrt{x}$ est croissante, on a également $\sqrt{a+b} \geq \sqrt{a+c} \geq \sqrt{b+c}$. En prenant les inverses, on obtient finalement

$$\frac{1}{\sqrt{b+c}} \geq \frac{1}{\sqrt{c+a}} \geq \frac{1}{\sqrt{a+b}}$$

On peut donc appliquer Tchébychev pour minorer le membre de gauche. On a

$$\frac{a}{\sqrt{b+c}} + \frac{b}{\sqrt{c+a}} + \frac{c}{\sqrt{a+b}} \geq \left(\frac{a+b+c}{3} \right) \left(\frac{1}{\sqrt{b+c}} + \frac{1}{\sqrt{c+a}} + \frac{1}{\sqrt{a+b}} \right).$$

Ainsi, il ne reste plus qu'à montrer que $(a+b+c)/3 \geq 1$ et on a terminé. Or, il reste la condition $abc = 1$ que l'on n'a pas encore utilisée. On reconnaît immédiatement AM-GM:

$$\frac{a+b+c}{3} \geq \sqrt[3]{abc} = 1.$$

Et voilà, une inégalité de plus! \square

Exemple 18. Soient a_1, \dots, a_n des nombres strictement positifs. Alors

$$a_1^{a_1} \cdot \dots \cdot a_n^{a_n} \geq (a_1 \cdot \dots \cdot a_n)^{\frac{a_1 + \dots + a_n}{n}}.$$

Solution. Tiens, des exponentielles! Comme souvent dans les problèmes qui font intervenir des produits d'exponentielles, il est judicieux d'appliquer un logarithme. On suppose ici que vous êtes familiers avec les propriétés de base des logarithmes. Par exemple, la fonction $x \mapsto \log x$ est croissante (ici \log désigne le logarithme naturel). On peut donc réécrire l'inégalité de départ comme

$$a_1 \log a_1 + \dots + a_n \log a_n \geq \left(\frac{a_1 + \dots + a_n}{n} \right) (\log a_1 + \dots + \log a_n).$$

Cette inégalité, de par son apparence, suggère fortement Tchébychev. Par symétrie, on peut supposer que $a_1 \geq \dots \geq a_n$. Comme la fonction logarithme est croissante, alors on a $\log a_1 \geq \dots \geq \log a_n$. L'inégalité ci-dessus est donc une application directe de Tchébychev. \square

3.2 Schur, l'exception

Voilà une inégalité qui sort du lot. Comme on va le voir, malgré homogénéité et symétrie, elle est insensible à Muirhead. C'est un résultat à part qu'il faut garder au coin de sa tête lorsque les autres méthodes ne fonctionnent pas.

Théorème 33 (Schur). Soient a, b, c des nombres **positifs** et p un nombre strictement positif. Alors

$$a^p(a-b)(a-c) + b^p(b-c)(b-a) + c^p(c-a)(c-b) \geq 0.$$

L'égalité est vérifiée si et seulement si $a = b = c$ ou si deux variables sont égales et la troisième est nulle.

Démonstration. Par symétrie, on peut supposer que $a \geq b \geq c$. On peut réécrire l'inégalité de Schur sous la forme

$$\underbrace{(a-b)}_{\geq 0} \underbrace{(a^p(a-c) - b^p(b-c))}_{\geq 0} + c^p \underbrace{(a-c)}_{\geq 0} \underbrace{(b-c)}_{\geq 0} \geq 0.$$

Cette inégalité est clairement vérifiée car toutes les parenthèses de gauche sont positives. On vous laisse contrôler les cas d'égalité en exercice. \square

Avec la notation présentée dans le contexte de l'inégalité de Muirhead, on peut réécrire Schur de la manière suivante:

$$[(p+2, 0, 0)] + [(p, 1, 1)] \geq 2[(p+1, 1, 0)].$$

On remarque qu'il n'est pas possible d'utiliser Muirhead, ni le lemme associé (Lemme 2.8), pour prouver Schur. C'est là ce qui fait sa singularité parmi toutes les inégalités.

Le cas particulier $p = 1$ de Schur s'écrit:

Théorème 34 (Cas spécial de Schur). *Soient a, b, c des nombres **positifs**. Alors*

$$a^3 + b^3 + c^3 + 3abc \geq a^2b + a^2c + b^2a + b^2c + c^2a + c^2b.$$

L'égalité est vérifiée si et seulement si $a = b = c$ ou si deux variables sont égales et la troisième est nulle.

Exemple 19. *Soient a, b, c trois nombres positifs tels que $a + b + c = 1$. Alors*

$$a^3 + b^3 + c^3 + 6abc \geq \frac{1}{4}.$$

Solution. Pour attaquer ce genre de problème, comme on l'a vu, il est bon d'homogénéiser l'inégalité. En multipliant par $(a + b + c)^3 = 1$ à droite, on obtient

$$4a^3 + 4b^3 + 4c^3 + 24abc \geq (a + b + c)^3.$$

Après développement et simplifications, on retrouve exactement Schur pour $p = 1$:

$$a^3 + b^3 + c^3 + 3abc \geq a^2b + a^2c + b^2a + b^2c + c^2a + c^2b.$$

□

4 Convexe ou concave, telle est la question

Cette section a pour but de présenter quelques nouvelles inégalités aux origines plus analytiques. La notion qui intervient ici est la convexité et la concavité d'une fonction. En quelques mots, une fonction est concave lorsque son graphe a une forme de bosse (colline) et une fonction est convexe si son graphe a une forme de creux (colline renversée). En particulier, si f est convexe, alors $-f$ est concave et *vice versa*. Rappelez-vous que multiplier une fonction par -1 revient à effectuer une symétrie d'axe horizontal sur son graphe (les bosses deviennent ainsi des creux).

Les notions de convexité et concavité d'une fonction f peuvent également s'énoncer à l'aide de la dérivée première f' ou de la dérivée seconde f'' de f . On part du principe que toutes les fonctions que l'on va rencontrer sont dérivables (au moins deux fois). Toutefois, les notions de convexité et de concavité ont un sens même pour des fonctions non-dérivables. Plus précisément:

Définition 4.1. Soit $I \subset \mathbb{R}$ un intervalle. Une fonction $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ est dite *convexe* si l'une des trois conditions suivantes est satisfaite:

1. $f(ax + by) \leq af(x) + bf(y), \forall x, y \in I$ et $\forall a, b \in [0, 1]$ tels que $a + b = 1$,
2. $f(x) \geq f(z) + f'(z)(x - z), \forall x, z \in I$,
3. $f''(x) \geq 0, \forall x \in I$.

Une fonction $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ est dite *concave* si l'une des trois conditions suivantes est satisfaite (on change simplement le sens des inégalités, rien de fou):

1. $f(ax + by) \geq af(x) + bf(y), \forall x, y \in I$ et $\forall a, b \in [0, 1]$ tels que $a + b = 1$,
2. $f(x) \leq f(z) + f'(z)(x - z), \forall x, z \in I$,
3. $f''(x) \leq 0, \forall x \in I$.

On précise bien que l'une des trois conditions est suffisante pour garantir la convexité/concavité. De plus, si l'une des trois conditions est vérifiée, alors les trois le sont.

Ces conditions peuvent paraître très abstraites à première vue. En réalité, elles sont simplement la formulation mathématique d'une idée toute simple. Prenons la première condition:

$$f(ax + by) \leq af(x) + bf(y).$$

Supposons que $x < y$. Cette inégalité signifie que la partie du graphe de la fonction f qui relie le point $(x, f(x))$ au point $(y, f(y))$ passe en dessous du segment de ligne droite qui relie ces deux même points (voir Figure 1). En effet, comme $a + b = 1$ et $a, b \in [0, 1]$, le point $ax + by$ est un point qui se situe entre x et y sur l'axe réel horizontal, i.e.

$$x \leq ax + by \leq y.$$

De même, $af(x) + bf(y)$ représente un point qui se situe entre $f(x)$ et $f(y)$ sur l'axe vertical. Les rapports de distance garantissent bien que le point d'abscisse $ax + by$ et d'ordonnées $af(x) + bf(y)$ se situe sur le segment qui relie $(x, f(x))$ et $(y, f(y))$ (c'est une application du théorème de Thalès). Dans le cas d'une fonction concave, inversement, le segment se situe au-dessous de l'arc du graphe.

La deuxième condition dans la définition de la convexité stipule que le graphe de la fonction f se situe au-dessus de la droite tangente au graphe en un point (voir Figure 2). En effet, la tangente au graphe de f au point $(z, f(z))$ est la droite d'équation

$$y = f(z) + f'(z)(x - z).$$

Rappelez-vous que la dérivée $f'(z)$ de f en z donne la pente de la tangente en ce point. Or, f se situe au-dessus de la tangente en $(z, f(z))$ si pour tout x dans I , on a

$$f(x) \geq f(z) + f'(z)(x - z).$$

La fonction f est convexe si cette propriété est vérifiée pour tout z dans I . De manière similaire, f est concave si son graphe se situe toujours au-dessous des tangentes.

La dernière condition est une condition analytique sur la dérivée seconde. Géométriquement, une dérivée seconde de signe constant signifie que la courbure du graphe de la

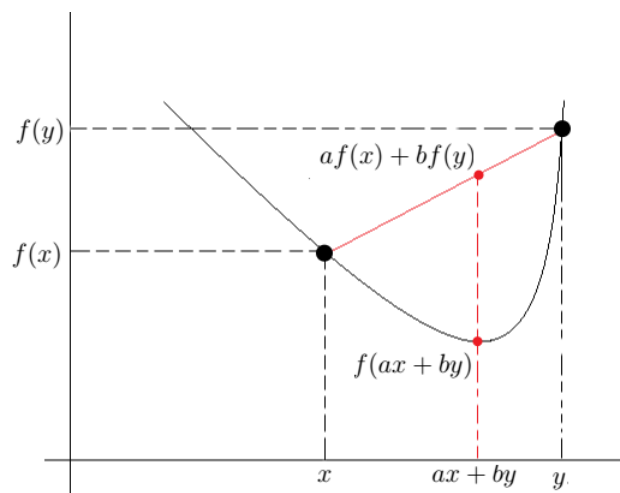


FIGURE 1 : Cas d'une fonction convexe. En rouge, le segment qui relie les points $(x, f(x))$ et $(y, f(y))$. Le segment se situe au-dessus de l'arc du graphe en noir.

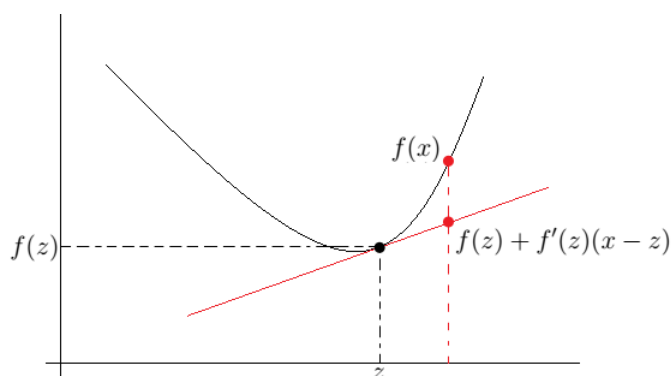


FIGURE 2 : Cas d'une fonction convexe. En rouge, la tangente au graphe de la fonction f au point $(z, f(z))$. Le graphe de la fonction se situe en-dessus de la tangente.

fonction ne change jamais de signe, c'est-à-dire, le graphe de la fonction "tourne" toujours dans le même sens. En général, étant donnée une fonction, cette condition est plus facile à vérifier.

En pratique, le plan est donc le suivant. On détermine si une fonction est convexe ou concave à l'aide de sa dérivée seconde, puis, le cas échéant, on en déduit des estimations sur la fonction à l'aide des deux premières propriétés.

4.1 Jensen a la réponse

Récapitulons ces digressions sur la convexité et la concavité dans le théorème suivant. Il est formulé de manière à être utile dans le contexte des olympiades, mais il ne s'agit au fond que de trois formulations équivalentes d'un même concept.

Théorème 41. Soit $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction **convexe** (i.e. $f'' \geq 0$). Alors les deux inégalités suivantes sont vérifiées:

1. (Jensen) Soient x_1, \dots, x_n des nombres dans l'intervalle I et $0 \leq \omega_1, \dots, \omega_n \leq 1$ des nombres réels positifs, inférieurs à 1, tels que $\omega_1 + \dots + \omega_n = 1$, alors

$$f(\omega_1 x_1 + \dots + \omega_n x_n) \leq \omega_1 f(x_1) + \dots + \omega_n f(x_n).$$

On a égalité si et seulement si $x_i = x_j$ pour toute paire d'indices (i, j) telle que $\omega_i \neq 0$ et $\omega_j \neq 0$ ou si f est linéaire (i.e. $f'' = 0 \Leftrightarrow f(x) = ax + b$) entre $\min\{x_i\}$ et $\max\{x_i\}$.

2. (Tangent line trick) Soient x, z dans I , alors

$$f(x) \geq f(z) + f'(z)(x - z).$$

On a égalité si et seulement si $x = z$ ou si f est linéaire entre x et z .

Les inégalités inversées sont vérifiées lorsque f est **concave** (i.e. $f'' \leq 0$).

Dans l'inégalité de Jensen, si on choisit les poids égaux, i.e. $\omega_i = 1/n, \forall i$, alors l'inégalité s'écrit comme suit.

Théorème 42 (Cas particulier de Jensen). Soit $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction **convexe**. Soient x_1, \dots, x_n des nombres dans l'intervalle I . Alors

$$f\left(\frac{x_1 + \dots + x_n}{n}\right) \leq \frac{f(x_1) + \dots + f(x_n)}{n}.$$

On a égalité si et seulement si $x_1 = \dots = x_n$ ou si f est linéaire.

L'inégalité de Jensen est une version plus générale de la première caractérisation de la convexité/concavité que l'on a vue. Tout comme le weighted AM-GM généralise le AM-GM standard. En parlant du weighted AM-GM, que l'on n'avait pas démontré en toute généralité précédemment, eh bien, c'est une conséquence de Jensen. Comment ça ? La fonction logarithme $f: x \mapsto \log x$ est concave parce que $f''(x) = -1/x^2 < 0$. Par Jensen, on a donc

$$\log(\omega_1 x_1 + \dots + \omega_n x_n) \geq \omega_1 \log x_1 + \dots + \omega_n \log x_n$$

lorsque les x_i sont strictement positifs. La fonction exponentielle $x \mapsto e^x$ est croissante, on peut donc l'appliquer à l'inégalité précédente pour obtenir

$$\omega_1 x_1 + \dots + \omega_n x_n \geq x_1^{\omega_1} \cdot \dots \cdot x_n^{\omega_n}.$$

C'est exactement l'énoncé du weighted AM-GM.

Exemple 20. Soient a, b, c les longueurs des côtés d'un triangle. Alors

$$\sqrt{a+b-c} + \sqrt{b+c-a} + \sqrt{c+a-b} \leq \sqrt{a} + \sqrt{b} + \sqrt{c}.$$

Cet exemple propose une condition géométrique sur les variables. Comment retranscrit-on cette condition en termes algébriques ? Autrement dit, quelles conditions doivent satisfaire les trois nombres positifs a, b, c pour qu'il existe un triangle (peut-être dégénéré) dont les longueurs des cotés valent précisément ces trois nombres ?

4.1.1 Interlude sur les côtés d'un triangle

L'argument est simple. Supposons que $a \geq b \geq c \geq 0$. Commençons par tracer le coté de longueur a (le plus long en premier). Traçons ensuite un cercle de rayon b à l'une des extrémités et un cercle de rayon c à l'autre extrémité. Le triangle recherché existe si et seulement si les deux cercles s'intersectent. Comme $b \leq a$ et $c \leq a$, les deux cercles s'intersectent si et seulement si $b + c \geq a$. Cette condition est appelée l'*inégalité du triangle*. En résumé,

$$a, b, c \text{ côtés d'un triangle} \Leftrightarrow a + b \geq c, \quad b + c \geq a \text{ et } c + a \geq b.$$

Observer que les trois inégalités de droite combinées impliquent en particulier que les valeurs a, b et c sont positives. Si l'une des trois inégalités est une égalité, alors le triangle est dégénéré (i.e. les sommets sont alignés). Autrement dit,

$$a, b, c \text{ côtés d'un triangle non-dégénéré} \Leftrightarrow a + b > c, \quad b + c > a \text{ et } c + a > b.$$

Dans notre problème, les trois inégalités du triangle garantissent par exemple que les argument des racines sont positifs. Si l'on souhaite se débarrasser de la condition géométrique sur les variables, il existe une substitution, appelée *substitution de Ravi*, qui nous permet de réécrire l'inégalité sans condition. La substitution est la suivante

$$a, b, c \text{ côtés d'un triangle} \Leftrightarrow \begin{cases} a = x + y, \\ b = y + z, \\ c = z + x, \end{cases}$$

pour trois nombres **positifs** x, y, z . En effet, en résolvant le système de droite, on obtient, par exemple $x = 1/2(a - b + c)$. Ainsi, en supposant que a, b et c sont les côtés d'un triangle, alors x est positif. L'implication retour est immédiate. Il existe un moyen plus géométrique de comprendre les transformations de Ravi illustré sur la figure suivante.

Solution de l'exemple 19. Retour à notre exemple. Appliquons les transformations de Ravi. On doit donc à présent montrer que pour x, y, z des nombres positifs, on a

$$\sqrt{2}(\sqrt{x} + \sqrt{y} + \sqrt{z}) \leq \sqrt{x+y} + \sqrt{y+z} + \sqrt{z+x}.$$

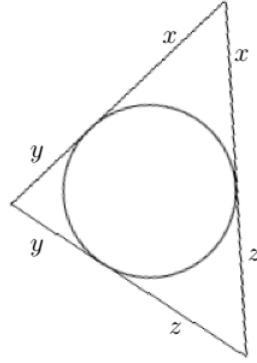


FIGURE 3 : Dans un triangle, chaque sommet est à égale distance des deux points de tangence des côtés correspondants avec le cercle inscrit. C'est une conséquence, par exemple, du théorème de la puissance d'un point appliqué aux sommets.

La fonction $f: x \mapsto \sqrt{x}$ est concave sur les nombres réels positifs. En effet, $f''(x) = -1/(4x\sqrt{x}) < 0$. Avec Jensen pour deux variables et $\omega_1 = \omega_2 = 1/2$, on a donc

$$\frac{\sqrt{x} + \sqrt{y}}{2} \leq \sqrt{\frac{x+y}{2}}.$$

En sommant ces inégalités pour (x, y) , (y, z) et (z, x) , on obtient le résultat désiré. On n'a évidemment pas "besoin" de Jensen pour montrer cette dernière inégalité (on peut simplement élever au carré, par exemple, et conclure avec AM-GM). Toutefois, si on remplaçait les racines carrées par des racines quatrièmes (ou n'importe quelle autre fonction concave sur les nombres réels positifs), alors le problème serait toujours vrai et on ne passerait pas à côté de Jensen cette fois. \square

Exemple 21 (IMO 2001, problème 2). *Soient a, b, c des nombres réels strictement positifs. Alors*

$$\frac{a}{\sqrt{a^2 + 8bc}} + \frac{b}{\sqrt{b^2 + 8ca}} + \frac{c}{\sqrt{c^2 + 8ab}} \geq 1.$$

Démonstration. On reprend ce fameux problème que l'on a déjà résolu avec Hölder. Voyons à présent une solution avec Jensen. L'idée est que la fonction $f: x \mapsto 1/\sqrt{x}$ est convexe sur les nombres positifs. En effet, $f''(x) = 3/(4x^2\sqrt{x}) > 0$.

Comment alors appliquer Jensen concrètement ? Pour cela on a besoin de trois poids dont la somme vaut 1. L'idée est la suivante, comme l'inégalité est homogène, on peut sans perte de généralité supposer que $a + b + c = 1$. Les variables a, b, c vont ainsi elles-mêmes jouer le rôle des poids ! On a donc

$$a \cdot \frac{1}{\sqrt{a^2 + 8bc}} + b \cdot \frac{1}{\sqrt{b^2 + 8ca}} + c \cdot \frac{1}{\sqrt{c^2 + 8ab}} \geq \frac{1}{\sqrt{a(a^2 + 8bc) + b(b^2 + 8ca) + c(c^2 + 8ab)}}.$$

Ainsi, il ne reste plus qu'à montrer que, pour des nombres strictement positifs a, b, c tels que $a + b + c = 1$, alors

$$1 \geq a(a^2 + 8bc) + b(b^2 + 8ca) + c(c^2 + 8ab).$$

Cette inégalité est relativement simple (plus de racine, ni de fraction). Par contre, elle n'est plus homogène. On peut y remédier. En homogénéisant, i.e. en multipliant à gauche par $1 = (a + b + c)^3$, puis en simplifiant, il reste

$$a^2b + a^2c + b^2a + b^2c + c^2a + c^2b \geq 6abc.$$

On sait que cette inégalité est vérifiée. □

Le dernier exemple de ce script est dédié au trick de la tangente. C'est une inégalité pratique en soi, souvent méconnue, mais qui peut s'avérer utile.

Exemple 22 (Bernoulli). Soient r et x deux nombres **positifs**. Alors

1. $(1 + x)^r \geq 1 + rx$, si $r \geq 1$,

2. $(1 + x)^r \leq 1 + rx$, si $r \leq 1$.

On a égalité si et seulement si $r = 1$, $r = 0$ ou $x = 0$.

Solution. La fonction $f: x \mapsto (1 + x)^r$ est convexe sur les nombres positifs si $r \geq 1$ et concave si $r \leq 1$. En effet, $f''(x) = r(r - 1)(1 + x)^{r-2}$ et donc le signe de f'' dépend uniquement du signe de $r - 1$. En appliquant le tangent line trick en $x = 0$, on obtient tout de suite l'inégalité désirée. Par exemple, pour $r \geq 1$, comme $f(0) = 1$ et $f'(0) = r$, on a

$$(1 + x)^r \geq 1 + r(x - 0) = 1 + rx.$$

□

5 Boutique de trucs et astuces

Quand le problème paraît coriace, il faut savoir prendre du recul. Certaines astuces peuvent aider à décortiquer une inégalité ou à éliminer certaines stratégies sans issue. Voyez plutôt.

5.1 Jouer avec les cas d'égalité

Une inégalité possède en général des cas d'égalité. Ces cas d'égalité doivent être respectés par toutes les inégalités intermédiaires que l'on applique. C'est-à-dire, les cas d'égalité finaux, par exemple $a = b = c = 1$, doivent être des cas d'égalité (particuliers) de chaque inégalité intermédiaire, par exemple $a = b$ ou $c = 1$, mais pas $b = 2c$. Ainsi, si vous avez

identifié certains cas d'égalité pour le problème initial, alors, avant d'essayer d'appliquer un théorème du répertoire, vérifiez que votre application préserve tous les cas d'égalité identifiés. Si ce n'est pas le cas, alors il ne sert à rien d'appliquer le théorème en question - il faut trouver une autre piste.

Vice versa, avoir identifié des cas d'égalité aide parfois à sélectionner la bonne stratégie. En particulier lorsqu'il existe des cas d'égalité, disons, exotiques. Voyons un exemple.

Exemple 23 (Tour final 2017). *Soient a, b, c des nombres réels positifs ou nuls tels que $ab + bc + ca = 1$. Alors*

$$\frac{4}{a + b + c} \leq (a + b)(\sqrt{3}c + 1).$$

Solution. La première observation est la symétrie en les variables a et b (mais pas c). La deuxième observation est que les variables peuvent être nulles. Comme nous avons la condition $ab + bc + ca = 1$, au plus une variable peut être nulle.

On peut tenter d'appliquer divers résultats, on risque de tourner en rond. Quels sont les cas d'égalité ? L'asymétrie et le fait qu'une variable peut être nulle suggère de chercher avec $c = 0$ et $a = b$. On obtient alors $ab = 1$ et $a + b = 2$ qui implique $a = b = 1$. On obtient donc un cas d'égalité: $(a, b, c) = (1, 1, 0)$. Que peut-on en conclure ? Eh bien, on n'appliquera aucune inégalité dont les cas d'égalité sont par exemple $a = b = c$ (par exemple AM-GM sur le terme $a + b + c$).

Est-ce là le seul cas d'égalité ? Eh bien, non, et là est toute la subtilité de ce problème. On peut vérifier que $(a, b, c) = (1/\sqrt{3}, 1/\sqrt{3}, 1/\sqrt{3})$ est également un cas d'égalité. Plutôt surprenant en raison de l'asymétrie initiale entre les variables. Nous avons donc bien au moins deux cas d'égalité, dont un où les trois variables sont égales.

Il nous faut à présent trouver une stratégie cohérente avec les cas d'égalité que nous avons identifiés. Il faut également mettre à profit la condition initiale sur la somme des produits et la symétrie entre a et b . En particulier, on peut écrire

$$ab + bc + ca = ab + c(a + b) = 1.$$

Ainsi, si l'on introduit $x := a + b \neq 0$ (sinon $a = b = 0$ que nous avons exclu) et $y := ab$, alors on peut écrire $c = (1 - y)/x$ et se débarrasser de la condition en réduisant notre problème en une inégalité à deux variables. Plus précisément, l'inégalité devient

$$\frac{4}{x + (1 - y)/x} \leq x(\sqrt{3}(1 - y)/x + 1)$$

ou encore

$$4x \leq (x^2 + 1 - y)(x + \sqrt{3} - \sqrt{3}y).$$

Que sait-on des variables x et y ? Est-ce que les deux variables sont complètement indépendantes, i.e. est-ce qu'on doit démontrer l'inégalité ci-dessus pour tout $x > 0, y \geq 0$? Comme a et b sont positifs ou nuls, alors on doit avoir $x^2 \geq 4y$. De plus, la condition

initiale nous donne $y \leq 1$. Noter que $x^2 = 4y$ si et seulement si $a = b$ et noter également que les cas d'égalité sont à présent $(x, y) = (2, 1)$ et $(x, y) = (2/\sqrt{3}, 1/\sqrt{3})$.

Nous avons donc une inégalité en deux variables (très) asymétrique. Dans ce genre de cas, il n'est pas déraisonnable de tout développer et d'essayer ensuite d'exprimer le tout comme une somme de termes positifs. Le principe est le suivant: une telle expression doit faire ressortir les cas d'égalité, en particulier on s'attend à voir apparaître les expressions $x^2 - 4y$ et $1 - y$. Un peu de travail, en gardant ce principe en tête, nous mène à

$$(x^2 + 1 - y)(x + \sqrt{3} - \sqrt{3}y) - 4x = x(x^2 - 4y) + \frac{\sqrt{3}}{4}(1 - y) \left((x^2 - 4y) + (\sqrt{3}x - 2)^2 \right).$$

Le terme de droite est évidemment positif et égal à zéro si et seulement si $x^2 = 4y$ et $(y = 1$ ou $\sqrt{3}x = 2)$. Autrement dit, le terme de droite est nul si et seulement si $a = b = 1$ ou $a = b = 1/\sqrt{3}$. Dans le premier cas nous avons $c = 0$ et dans le second $c = 1/\sqrt{3}$ comme attendu. \square

L'exemple précédent illustre ainsi l'importance d'identifier les cas d'égalité avant de décider d'une stratégie. C'est une parfaite analogie avec la méthode proposée pour les équations fonctionnelles qui propose de commencer par identifier les fonctions solutions avant d'opter pour une stratégie (qui se doit d'être cohérente avec les fonctions solutions).

5.2 Décomposer les constantes

Du point de vue de celui qui construit une inégalité pour un examen, créer une difficulté s'apparente parfois à confondre plusieurs termes en un seul par la magie de l'addition, par exemple. La tâche de l'étudiant est alors de repérer le stratagème et de défaire le terme fusionné pour faire apparaître les termes initiaux. Un premier exemple est le problème de l'IMO 2012 que l'on a rencontré avec l'Exemple 4. Rappelez-vous, l'astuce était de décomposer les constantes 1 comme suit:

$$1 = \frac{1}{i-1} + \dots + \frac{1}{i-1}.$$

Dans la preuve de QM-AM, nous avons également décomposer le terme n en une somme de 1 pour appliquer Cauchy-Schwarz convenablement. Voyons à présent un troisième exemple, légèrement moins subtil.

Exemple 24 (Tour final 2006). *Soient x, y, z, w des nombres réels. Alors*

$$(x^2 + y^2 + 1)(z^2 + w^2 + 1) \geq 2(x + z)(y + w).$$

Solution. La première observation est l'asymétrie du problème. Le côté gauche est symétrique en x, y et en z, w , alors que le côté droit, lui, est symétrique en x, z et en y, w . Toutefois, on s'aperçoit qu'il existe un cas d'égalité symétrique, à savoir $x = y = z = w = 1/\sqrt{2}$. Peut-être qu'il faut alors essayer de ramener un peu de symétrie dans ce problème ?

La forme du côté gauche suggère Cauchy-Schwarz. En effet, le côté gauche consiste en un produit de deux sommes de carrés. Comme à chaque application de Cauchy-Schwarz, il faut choisir ce qu'on multiplie avec quoi. En ayant que trois termes par parenthèse, on n'obtiendra pas une expression symétrique à la fin, alors que si on avait quatre termes on pourrait isoler chaque variable, en un certain sens, et ainsi obtenir une expression symétrique après l'application de Cauchy-Schwarz.

Pour obtenir quatre termes par parenthèse, il suffit d'écrire $1 = 1/2 + 1/2$. On a alors, par Cauchy-Schwarz,

$$\begin{aligned}(x^2 + y^2 + 1)(z^2 + w^2 + 1) &= (x^2 + y^2 + 1/2 + 1/2)(1/2 + 1/2 + z^2 + w^2) \\ &\geq (x/\sqrt{2} + y/\sqrt{2} + z/\sqrt{2} + w/\sqrt{2})^2 \\ &= 1/2(x + y + z + w)^2.\end{aligned}$$

La symétrie à présent gagnée nous permet de permuter les termes. La conclusion est désormais immédiate:

$$(x + y + z + w)^2 = ((x + z) + (y + w))^2 \geq 4(x + z)(y + w).$$

Observer finalement que notre application de Cauchy-Schwarz, grâce aux carrés, est bien valide pour tous les nombres réels x, y, z, w , de même que le développement du carré final. \square

On l'a vu avec l'exemple précédent, décomposer une constante permet parfois de gagner en symétrie. L'exemple suivant illustre ce principe à nouveau.

Exemple 25. Soient a, b, c des nombres réels strictement positifs. Trouver la valeur minimale que peut prendre l'expression

$$\frac{a^2 + b^2 + c^2}{ab + bc}.$$

Solution. Les observations préliminaires mettent en évidence une asymétrie de l'expression. Plus précisément, le dénominateur n'est pas symétrique, alors que le numérateur l'est. Naïvement, il y a deux b au dénominateur et un seul au numérateur. Cette observation suffit ici.

Écrivons $b^2 = b^2/2 + b^2/2$ (on décompose le coefficient 1 de $1 \cdot b^2$). Un simple AM-GM donne alors $a^2 + b^2/2 \geq 2 \cdot ab/\sqrt{2} = \sqrt{2}ab$. De même pour $1/2b^2 + c^2$. Ainsi,

$$\frac{a^2 + b^2 + c^2}{ab + bc} \geq \frac{\sqrt{2}ab + \sqrt{2}bc}{ab + bc} = \sqrt{2}.$$

L'égalité est obtenue pour $a = 1, b = \sqrt{2}, c = 1$. \square

6 Appendice

La maison offre un récapitulatif des différentes inégalités présenté sous forme de formulaire. Il va de soi que la simple mémorisation du présent formulaire n'apportera pas grand chose. Il aidera toutefois à avoir une vision globale des résultats et permettra une rapide piqure de rappel à la veille d'un examen.

Théorème 61 (QM-AM-GM-HM). $a_1, \dots, a_n > 0$,

$$\max\{a_i\} \geq \sqrt{\frac{a_1^2 + \dots + a_n^2}{n}} \geq \frac{a_1 + \dots + a_n}{n} \geq \sqrt[n]{a_1 \cdot \dots \cdot a_n} \geq \frac{n}{\frac{1}{a_1} + \dots + \frac{1}{a_n}} \geq \min\{a_i\}.$$

Égalité si et seulement si $a_1 = \dots = a_n$.

Théorème 62 (*weighted* AM-GM). $a_1, \dots, a_k \geq 0$, $\omega_1, \dots, \omega_k \geq 0$, $\omega_1 + \dots + \omega_k = 1$,

$$\omega_1 a_1 + \dots + \omega_k a_k \geq a_1^{\omega_1} \cdot \dots \cdot a_k^{\omega_k}.$$

Égalité si et seulement si $a_i = a_j, \forall (i, j) : \omega_i \neq 0, \omega_j \neq 0$.

Théorème 63 (Cauchy-Schwarz). $x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n \in \mathbb{R}$

$$(x_1^2 + \dots + x_n^2)(y_1^2 + \dots + y_n^2) \geq (x_1 y_1 + \dots + x_n y_n)^2.$$

Égalité si et seulement si $x_i y_j = x_j y_i, \forall (i, j)$.

Variante. $a_1, \dots, a_n, b_1, \dots, b_n \geq 0$

$$(a_1 + \dots + a_n)(b_1 + \dots + b_n) \geq \left(\sqrt{a_1 b_1} + \dots + \sqrt{a_n b_n} \right)^2.$$

Égalité si et seulement si $a_i b_j = a_j b_i, \forall (i, j)$.

Théorème 64 (Nesbitt). $a, b, c > 0$

$$\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} \geq \frac{3}{2}.$$

Égalité si et seulement si $a = b = c$.

Théorème 65 (Titu). $a_1, \dots, a_n, b_1, \dots, b_n \geq 0$

$$\frac{a_1^2}{b_1} + \dots + \frac{a_n^2}{b_n} \geq \frac{(a_1 + \dots + a_n)^2}{b_1 + \dots + b_n}.$$

Égalité si et seulement si $a_i b_j = a_j b_i, \forall (i, j)$.

Théorème 66 (Hölder). $m \geq 1$, $x_{ij} \geq 0$, $i = 1, \dots, n$, $j = 1, \dots, m$,

$$\prod_{j=1}^m \sum_{i=1}^n (x_{ij})^m \geq \left(\sum_{i=1}^n \prod_{j=1}^m x_{ij} \right)^m.$$

Égalité si et seulement si $x_{ij}x_{lk} = x_{ik}x_{lj}$, $\forall i, l = 1, \dots, n$, $\forall j, k = 1, \dots, m$.

Cas spécial. $m = 3$,

$$(x_1^3 + \dots + x_n^3)(y_1^3 + \dots + y_n^3)(z_1^3 + \dots + z_n^3) \geq (x_1y_1z_1 + \dots + x_ny_nz_n)^3.$$

Égalité si et seulement si les trois vecteurs sont colinéaires ou si l'un est nul.

Théorème 67 (Muirhead, Bunching). $a_1, \dots, a_n \geq 0$,

$p = (p_1, \dots, p_n)$, $q = (q_1, \dots, q_n) \in \mathbb{R}^n$,

$$p \succeq q \Rightarrow \sum_{sym} a_1^{p_1} \dots a_n^{p_n} \geq \sum_{sym} a_1^{q_1} \dots a_n^{q_n}.$$

Égalité si et seulement si $p = q \vee a_1 = \dots = a_n$.

Théorème 68 (Schur). $a, b, c \geq 0$, $p > 0$,

$$a^p(a-b)(a-c) + b^p(b-c)(b-a) + c^p(c-a)(c-b) \geq 0.$$

Égalité si et seulement si $a = b = c$ ou si deux variables sont égales et la troisième est nulle.

Cas spécial. $p = 3$:

$$a^3 + b^3 + c^3 + 3abc \geq a^2b + a^2c + b^2a + b^2c + c^2a + c^2b.$$

Théorème 69 (Suites ordonnées). $x_1 \geq \dots \geq x_n$, $y_1 \geq \dots \geq y_n$,

$\{i_1, \dots, i_n\} = \{1, \dots, n\}$,

$$x_1y_1 + \dots + x_ny_n \geq x_1y_{i_1} + \dots + x_ny_{i_n} \geq x_1y_n + \dots + x_ny_1.$$

Théorème 610 (Tchébychev). $x_1 \geq \dots \geq x_n$, y_1, \dots, y_n ,

1. $y_1 \geq \dots \geq y_n$,

$$\frac{x_1y_1 + \dots + x_ny_n}{n} \geq \frac{x_1 + \dots + x_n}{n} \cdot \frac{y_1 + \dots + y_n}{n}.$$

2. $y_1 \leq \dots \leq y_n$,

$$\frac{x_1y_1 + \dots + x_ny_n}{n} \leq \frac{x_1 + \dots + x_n}{n} \cdot \frac{y_1 + \dots + y_n}{n}.$$

Égalité si et seulement si $x_1 = \dots = x_n$ ou $y_1 = \dots = y_n$.

Théorème 611 (Jensen). $x_1, \dots, x_n, 0 \leq \omega_1, \dots, \omega_n \leq 1, \omega_1 + \dots + \omega_n = 1,$

1. $f'' \geq 0$:

$$f(\omega_1 x_1 + \dots + \omega_n x_n) \leq \omega_1 f(x_1) + \dots + \omega_n f(x_n),$$

2. $f'' \leq 0$:

$$f(\omega_1 x_1 + \dots + \omega_n x_n) \geq \omega_1 f(x_1) + \dots + \omega_n f(x_n).$$

Égalité si et seulement si $x_i = x_j, \forall (i, j) : \omega_i \neq 0, \omega_j \neq 0 \vee f(x) = ax + b$.

Cas spécial. $\omega_i = 1/n, \forall i$:

$$f'' \geq 0 \implies f\left(\frac{x_1 + \dots + x_n}{n}\right) \leq \frac{f(x_1) + \dots + f(x_n)}{n}.$$

Théorème 612 (Tangent line trick). $x, z \in \mathbb{R},$

1. $f'' \geq 0,$

$$f(x) \geq f(z) + f'(z)(x - z),$$

2. $f'' \leq 0,$

$$f(x) \leq f(z) + f'(z)(x - z).$$

Égalité si et seulement si $x = z \vee f(x) = ax + b$.

Théorème 613 (Bernoulli). $x, r \geq 0,$

1. $r \geq 1 \implies (1 + x)^r \geq 1 + rx,$

2. $r \leq 1 \implies (1 + x)^r \leq 1 + rx.$

Égalité si et seulement si $r = 1 \vee r = 0 \vee x = 0$.