

# SMO - Selektion 2017

1. Prüfung - 6. Mai 2017

**Zeit:** 4.5 Stunden

**Schwierigkeit:** Die Aufgaben sind der Schwierigkeit nach geordnet.

**Punkte:** Jede Aufgabe ist 7 Punkte wert.

1. Finde alle Funktionen  $f: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$ , sodass gilt:

- (i)  $f(p) > 0$  für alle Primzahlen  $p$ ,
- (ii)  $p \mid (f(x) + f(p))^{f(p)} - x$  für alle Primzahlen  $p$  und alle  $x \in \mathbb{Z}$ .

2. Sei  $n \geq 1$  eine natürliche Zahl und seien  $x_1, \dots, x_n$  strikt positive reelle Zahlen. Zeige, dass man  $a_1, \dots, a_n \in \{-1, 1\}$  wählen kann, sodass

$$\sum_{i=1}^n a_i x_i^2 \geq \left( \sum_{i=1}^n a_i x_i \right)^2.$$

3. Sei  $n \geq 3$  eine natürliche Zahl. Wie viele Diagonalen eines regulären  $n$ -Ecks kann man maximal einzeichnen, sodass falls sich zwei Diagonalen im Innern schneiden, sie senkrecht aufeinander stehen?

Viel Glück!