

IMO-Selektion - 1. Prüfung

Zürich - 7. Mai 2016

Zeit: 4.5 Stunden

Jede Aufgabe ist 7 Punkte wert.

1. Sei n eine natürliche Zahl. Wir nennen ein Paar von Zahlen *unverträglich*, falls ihr grösster gemeinsamer Teiler gleich 1 ist. Wie viele unverträgliche Paare treten mindestens auf, wenn man die Zahlen $\{1, 2, \dots, 2n\}$ in n Paare aufteilt?

2. Finde alle Polynome P mit reellen Koeffizienten, sodass folgende Gleichung für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt:

$$(x - 2)P(x + 2) + (x + 2)P(x - 2) = 2xP(x).$$

3. Sei ABC ein Dreieck mit $\angle BCA = 90^\circ$ und H der Höhenfusspunkt von C . Sei D ein Punkt innerhalb des Dreiecks BCH , sodass CH die Strecke AD halbiert. Sei P der Schnittpunkt der Geraden BD und CH . Sei ω der Halbkreis mit Durchmesser BD , der die Strecke CB schneidet. Die Tangente von P an ω berühre diesen in Q . Zeige, dass der Schnittpunkt der Geraden CQ und AD auf ω liegt.

Viel Glück!