IMO-Selektion - 3. Prüfung

Zürich - 16. Mai 2015

Zeit: 4.5 Stunden
Jede Aufgabe ist 7 Punkte wert.

7. Finde alle nichtleeren endlichen Mengen A von Funktionen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, welche die folgende Eigenschaft erfüllen:

Für alle $f_1, f_2 \in A$ existiert eine Funktion $g \in A$, sodass für alle $x, y \in \mathbb{R}$ gilt:

$$f_1(f_2(y) - x) + 2x = g(x + y).$$

8. Finde alle Tripel (a, b, c) natürlicher Zahlen, sodass für alle natürlichen Zahlen n, welche keine Primteiler kleiner als 2015 besitzen, gilt:

$$n + c \mid a^n + b^n + n.$$

9. Sei $n \geq 2$ eine natürliche Zahl. In der Mitte eines kreisförmigen Gartens steht ein Wachturm. Am Rand des Gartens stehen n gleichmässig verteilte Gartenzwerge. Auf dem Wachturm wohnen aufmerksame Wächter. Jeder Wächter überwacht einen Bereich des Gartens, der von zwei verschiedenen Gartenzwergen begrenzt wird.
Wir sagen, dass Wächter A den Wächter B kontrolliert, falls das gesamte Gebiet von B in dem von A enthalten ist.
Unter den Wächtern gibt es zwei Gruppen: Lehrlinge und Meister. Jeder Lehrling wird von genau einem Meister kontrolliert und kontrolliert selbst niemanden, während Meister von niemandem kontrolliert werden.
Der ganze Garten hat Unterhaltskosten:

- Ein Lehrling kostet 1 Goldstück pro Jahr.
- Ein Meister kostet 2 Goldstücke pro Jahr.
- Ein Gartenzwerg kostet 2 Goldstücke pro Jahr.

Zeige, dass die Gartenzwerge mindestens so viel kosten wie die Wächter.

Viel Glück!