

Sélection IMO - 4ème examen

Zürich - 22 Mai 2016

Temps : 4.5 heures

Chaque exercice vaut 7 points.

10. Soit ABC un triangle non-rectangle avec M le milieu de BC . Soit D un point sur la droite AB tel que $CA = CD$ et soit E un point sur la droite BC tel que $EB = ED$. La parallèle à ED passant par A coupe la droite MD au point I et la droite AM coupe la droite ED au point J . Montrer que les points C , I et J sont alignés.

11. Soient m et n des nombres naturels avec $m > n$. On définit

$$x_k = \frac{m+k}{n+k} \text{ pour } k = 1, \dots, n+1.$$

Montrer que si tous les x_i sont entiers, alors $x_1 \cdot x_2 \cdot \dots \cdot x_{n+1} - 1$ n'est pas une puissance de deux.

12. Lors d'un examen d'EGMO, il y a trois exercices, qui peuvent chacun apporter un nombre entier de points compris entre 0 et 7. Montrer que, parmi 49 participantes, on peut toujours en trouver deux telles que la première a au moins aussi bien réussi chacun des trois exercices que la seconde.

Bonne chance !