OSM - Tour final

Deuxième examen - jour de π

Temps : 4 heures
Chaque exercice vaut 7 points.

6. Nous disposons d'un échiquier 8×8. Une *arête intérieure* est une arête qui sépare deux carrés unité 1×1. Nous découpons l'échiquier en dominos 1×2. Pour une arête intérieure k, on note $N(k)$ le nombre de découpages de l'échiquier dans lesquels l'arête k est découpée. Déterminer le dernier chiffre de la somme que l'on obtient en additionnant tous les $N(k)$, où k est une arête intérieure.

7. Soient a, b, c des nombres réels tels que :

$$\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} = 1.$$

Déterminer toutes les valeurs que peut prendre l'expression :

$$\frac{a^2}{b+c} + \frac{b^2}{c+a} + \frac{c^2}{a+b}.$$

8. Soit $ABCD$ un trapèze, où AB et CD sont parallèles. Soit P un point sur le côté BC. Montrer que les parallèles à AP et PD passant par C, respectivement B, se coupent sur DA.

9. Soit p un nombre premier impair. Déterminer le nombre de p-uplets $(a_1, a_2, \ldots, a_p)$ de nombres naturels avec les propriétés suivantes :

1) $1 \leq a_i \leq p$ pour tout $i = 1, \ldots, p$.
2) $a_1 + a_2 + \cdots + a_p$ n'est pas divisible par p.
3) $a_1a_2 + a_2a_3 + \ldots a_{p-1}a_p + a_pa_1$ est divisible par p.

10. Déterminer le plus grand nombre naturel n tel que pour tous nombres réels a, b, c, d :

$$(n+2)\sqrt{a^2+b^2} + (n+1)\sqrt{a^2+c^2} + (n+1)\sqrt{a^2+d^2} \geq n(a+b+c+d).$$

Bonne chance !