

# Sélection IMO - 3ème examen

Zürich - 21 Mai 2016

Temps : 4.5 heures

Chaque exercice vaut 7 points.

7. Trouver tous les nombres naturels  $n$  tels que

$$\sum_{\substack{d|n \\ 1 \leq d < n}} d^2 = 5(n+1).$$

8. Soit  $ABC$  un triangle avec  $AB \neq AC$  et soit  $M$  le milieu de  $BC$ . La bissectrice de  $\angle BAC$  coupe la droite  $BC$  en  $Q$ . Soit  $H$  le pied de la hauteur en  $A$  sur  $BC$ . La perpendiculaire à  $AQ$  passant par  $A$  coupe la droite  $BC$  en  $S$ . Montrer que  $MH \cdot QS = AB \cdot AC$ .

9. Trouver toutes les fonctions  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  telles que

$$(f(x) + y)(f(x - y) + 1) = f(f(xf(x + 1)) - yf(y - 1))$$

pour tous  $x, y \in \mathbb{R}$ .

Bonne chance!