

Geometrie II - Aufgaben (unfinished)

Aktualisiert: 1. Januar 2020
vers. 3.0.0

2 Working Backward

Einstieg

2.1 Sei $ABCD$ ein Viereck mit $CD = DA \doteq s$. Alle Winkel des Vierecks seien bekannt:

$$\angle DAB = 40^\circ \quad \angle ABC = 80^\circ \quad \angle BCD = 80^\circ \quad \angle CDA = 160^\circ$$

Zeige $BC = s$.

2.2 Gegeben ein gleichschenkliges Dreieck mit Scheitelpunkt A . Sei D der Mittelpunkt der Seite AC und sei E die Projektion von D auf BC . Der Mittelpunkt von DE sei F . Zeige, dass die Geraden BF und AE genau dann senkrecht aufeinander stehen (und nur dann), wenn $\triangle ABC$ gleichseitig ist.

Fortgeschritten

2.3 Sei $ABCD$ ein Sehnenviereck, sodass gilt $AB + CD = BC$. Zeige, dass der Schnittpunkt der Winkelhalbierenden von $\angle DAB$ und $\angle CDA$ auf der Seite BC zu liegen kommt.

2.4 Zwei Kreise schneiden sich in den Punkten A und B . Eine Gerade durch A treffe die Kreise nochmals in den Punkten C und D . Seien P und Q die Projektionen von B auf die Tangenten bei C bzw. D . Zeige, dass die Gerade PQ tangential zum Kreis mit Durchmesser AB liegt.

Olympiade

2.5

3 Ähnliche Dreiecke

Einstieg

3.1 In $\triangle ABC$ sei D ein beliebiger Punkt auf der Strecke AB . Sei E der Schnittpunkt von AC mit der Parallelen von BC durch D und F sei der Schnittpunkt von AB mit der Parallelen von CD

durch E . Wie lang ist DB , wenn $AF = 4$ und $FD = 6$ bekannt sind?

3.2 Sei $ABCD$ ein konvexes Sehnenviereck und P der Schnittpunkt von AC und BD . Zeige

$$\frac{AP}{BP} = \frac{DP}{CP}.$$

3.3 Der Punkt Z liege auf der Seite BC des Dreiecks $\triangle ABC$. Sei X der Schnittpunkt der Geraden AC mit der Parallelen von AZ durch B und Y sei der Schnittpunkt der Geraden AB mit der Parallelen von AZ durch C . Zeige

$$\frac{1}{AZ} = \frac{1}{BX} + \frac{1}{CY}.$$

Fortgeschritten

3.4 Sei AB eine Sehne im Kreis k und P ein weiterer Punkt auf k . Sei Q die Projektion von P auf die Gerade AB und seien R und S die Projektionen von P auf die Tangenten an k durch A bzw. B . Zeige, dass PQ das geometrische Mittel von PR und PS ist.

3.5 Die beiden Sehnen AB und CD schneiden sich innerhalb des Kreises in E . Sei P ein beliebiger Punkt auf der Strecke BE . Die Tangente t durch E an den Kreis durch D, P und E schneide die Geraden BC und AC in F bzw. G . Sei $q = \frac{AP}{AB}$, finde $\frac{EG}{EF}$ als Funktion von q (Ein Ansatz findest du bei Beispiel 4 (S. 6) im Geometrie I - Skript).

3.6 Sei $ABCD$ ein konvexes Sehnenviereck und P der Schnittpunkt von AB und CD . Zeige

$$\frac{AC \cdot AD}{BC \cdot BD} = \frac{AP}{BP}.$$

Olympiade

3.7

4 Trigonometrie

Eine gute Referenz für alle Trigonometrie Aufgaben ist die Arbeit von Titu Andreescu und Zuming Feng : *103 Trigonometry Problems, from the training of the USA IMO Team*.

Einstieg

4.1 Berechne alle Seiten des Dreieckes ABC (es sind mehrere Lösungen möglich), wobei

- $c = 5\sqrt{2}$, $a = 5\sqrt{3}$ et $\gamma = 45^\circ$,

- $c = 5\sqrt{2}$, $a = 5$ et $\gamma = 45^\circ$,
- $c = 5\sqrt{2}$, $a = 15$ et $\gamma = 45^\circ$.

4.2 Sei ABC ein spitzwinkliges Dreieck. Zeige, dass

$$\tan(\alpha) + \tan(\beta) + \tan(\gamma) = \tan(\alpha) \tan(\beta) \tan(\gamma).$$

4.3 Sei ABC ein Dreieck und R der Umkreisradius. Zeige, dass

$$4R = \frac{abc}{[ABC]}.$$

4.4 Beweise die Formel von Heron, welche es erlaubt die Fläche eines Dreiecks nur mit den Seitenlängen zu berechnen.

Theorem 41 (Heron). *Sei ABC ein Dreieck. Also gilt*

$$[ABC] = \frac{1}{4} \sqrt{(a+b+c)(-a+b+c)(a-b+c)(a+b-c)}.$$

4.5 Sei ABC ein Dreieck mit $AB = AC$. Seien D, E Punkte auf der Seite BC sodass gilt $BD = DE = EC$ und D befindet sich zwischen B und E . Zeige, dass $\angle DAE > \angle BAD$.

4.6 Beweise den Gleichtumsfall des folgenden Theoremes.

Theorem 42 (Ptolemäus). *Seien A, B, C, D vier Punkte auf einer Ebene, also gilt :*

$$AB \cdot CD + AD \cdot BC \geq AC \cdot BD.$$

Der Gleichtumsfall tritt nur ein sobald alle vier Punkte auf einem Kreis liegen. ?

4.7 Sei ABC ein Dreieck. Finde das Minimum des Ausdrückes

$$\frac{a^2 + b^2 + c^2}{[ABC]}.$$

Fortgeschritten

4.8 Beweise das folgende Theorem:

Theorem 43 (Winkelhalbierendensatz). *Sei ABC ein Dreieck und D der Schnittpunkt der Winkelhalbierenden mit der Seite BC . Zeige, dass*

$$\frac{AB}{AC} = \frac{DB}{DC}.$$

- 4.9 Sei ABC ein Dreieck. Die Tangenten an den Umkreis des Dreiecks ABC an B und C schneiden sich in D . Die Spiegelung der Gerade AD an der Winkelhalbierenden des Winkels $\angle BAC$ schneidet BC in M . Zeige, dass M der Mittelpunkt der Seite BC ist. (Anmerkung: Die Gerade AD ist der *Symmedian* des Dreiecks ABC in A)
- 4.10 Vervollständige den Beweis von Ceva, das heisst, beweise, dass die Geraden sich in einem Punkt schneiden falls die notwendigen Streckenverhältnisse gegeben sind. (Anmerkung: Dafür braucht man keine Trigonometrie.)
- 4.11 Sei ABC ein gleichschenkliges Dreieck mit Scheitelpunkt A . Die Winkelhalbierenden der Winkel $\angle CAB$ und $\angle ABC$ schneiden die Seiten BC und CA jeweils in D und E . Sei K der Mittelpunkt des Inkreises des Dreiecks ADC . Angenommen $\angle BEK = 45^\circ$. Finde alle möglichen Werte von $\angle CAB$. (Anmerkung: Wie viele Freiheitsgrade hat dieses Problem?)

Olympiade

- 4.12 (IMO Shortlist 2001) Sei A_1 das Zentrum eines Quadrates in einem spitzwinkligen Dreieck ABC von welchem zwei Ecken sich auf den Seiten BC befinden. (Die anderen zwei Ecken sind also auf den Seiten AB und AC). Die Punkte B_1, C_1 sind auf die gleiche Weise definiert für ein Quadrat mit jeweils zwei Punkten auf den Seiten AC und AB . Zeige, dass die Geraden AA_1, BB_1, CC_1 sich in einem Punkt schneiden.
- 4.13 (IMO Selektion 2018) Seien A, B, C und D vier Punkte auf einem Kreis in dieser Reihenfolge. Wir nehmen an, dass ein Punkt K auf der Strecke AB existiert sodass BD die Strecke KC halbiert und AC die Strecke KD halbiert. Finde den minimalen Wert, der $|\frac{AB}{CD}|$ haben kann.
- 4.14 (Shortlist 2003) Seien A, B, C drei Punkte auf einer Gerade ℓ mit dieser Reihenfolge. Sei Γ ein Kreis durch A und C wobei AC kein Durchmesser ist. Sei P der Schnittpunkt der Tangenten zu Γ durch A und C . Sei Q der Schnittpunkt von Γ mit PB . Sei M der Schnittpunkt von ℓ mit der Winkelhalbierenden des Winkels $\angle AQC$. Zeige, dass M unabhängig von der Wahl des Kreises Γ ist.

5 Die Potenz eines Punktes und Potenzlinie

Einstieg

- 5.1 Seien k ein Kreis und A, B zwei Punkte mit derselben (gerichteten) Potenz an k . Zeige, dass dann A und B den gleichen Abstand zum Mittelpunkt von k haben.
- 5.2 Gegeben seien drei Kreise und die Potenzlinien zu je zwei von ihnen. Zeige, dass sich diese drei Geraden entweder in einem Punkt schneiden oder parallel sind.
- 5.3 Sei P ein beliebiger Punkt im Innern des spitzwinkligen Dreiecks $\triangle ABC$ und H_a der Höhenfußpunkt der Höhe durch A . Die Punkte D, E, Q seien die Projektionen von P auf AB, AC bzw. AH_a . Zeige
- $$|AB \cdot AD - AC \cdot AE| = BC \cdot PQ.$$
- 5.4 Seien AD und BE Höhen im Dreieck ABC . Es gelte $CA \neq CB$. Sei M der Mittelpunkt der Seite AB , H der Höhenschnittpunkt von $\triangle ABC$ und F der Schnittpunkt von AB und DE . Zeige $FH \perp CM$.
- 5.5 Zwei Kreise schneiden sich in den Punkten M und N . Eine der beiden gemeinsamen Tangenten an die beiden Kreise berühre den ersten Kreis in P und den zweiten in Q . Zeige, dass die Dreiecke MNP und MNQ denselben Flächeninhalt haben.

Fortgeschritten

- 5.6 Auf der Strecke AB liegen die Punkte K und L , so dass gilt $AL^2 = AK \cdot AB$. P sei ein beliebiger Punkt in der Ebene mit $AP = AL$. Zeige, dass PL die Winkelhalbierende von $\angle KPB$ ist.
- 5.7 Sei ABC ein beliebiges Dreieck. Zeichne die gleichschenkligen Dreiecke DBC, AEC, ABF ausserhalb von $\triangle ABC$, so dass BC, CA, AB jeweils die Basen sind. Zeige dass sich die Rechtwinkligen zu EF, FD, DE durch A, B bzw. C in einem Punkt schneiden.
- 5.8 Sei g eine beliebige Gerade und A und B zwei Punkte auf verschiedenen Seiten von g . Ein Kreis k durch A und B schneide g in den Punkten P und Q . Für welchen solchen Kreis k_{\min} ist die Strecke PQ minimal?
- 5.9 Das konvexe Viereck $ABCD$ sei einem Halbkreis s mit Durchmesser AB einbeschrieben. Die Geraden AC und BD schneiden sich in E und AD schneide BC in F . Die Gerade EF schneide s in G und AB in H . Zeige, dass E dann und nur dann Mittelpunkt der Strecke GH ist, wenn G Mittelpunkt der Strecke FH ist.
- 5.10 Sei ABC ein spitzwinkliges Dreieck. M und N seien zwei beliebige Punkte auf den Seiten AB bzw. AC . Die Kreise mit den Durchmessern BN und CM schneiden sich in den Punkten P und Q . Zeige, dass die Punkte P, Q und der Höhenschnittpunkt des Dreiecks ABC auf einer Geraden liegen.

Olympiade

5.11 (Finalrunde 2019,7) Sei ABC ein Dreieck mit $\angle CAB = 2 \cdot \angle ABC$. Nehme an, dass ein Punkt D im Inneren des Dreiecks ABC existiert, sodass $AD = BD$ und $CD = AC$. Zeige, dass $\angle ACB = 3 \cdot \angle DCB$.

5.12 (IMO-Selektion 2019, 9) Sei ABC ein spitzwinkliges Dreieck mit $AB < AC$. Seien E und F die Höhenfußpunkte der Höhen von B respektive C , sowie M der Mittelpunkt der Strecke BC . Die Tangente an den Umkreis von ABC im Punkt A schneide die Gerade BC in P . Die Parallele zu BC durch A schneide die Gerade EF in Q . Zeige, dass die Geraden PQ und AM senkrecht aufeinander stehen.

6 Ceva und Menelaus

Einstieg

6.1 Im Dreieck ABC sind D, E, F die Berührungs punkte mit dem Imkreis, sodass D auf BC , E auf CA und F auf AB liegt. Zeige dass die Geraden AD, BE, CF sich in einem Punkt schneiden.

6.2 Es sei k ein Kreis und A, B seien zwei Punkte auf k . In diesen Punkten werden die Tangenten an k gezeichnet und im gleichen Umlaufsinn die gleich langen Tangentenabschnitte AP und BQ abgetragen. Beweise, dass die Strecke PQ von der Geraden AB halbiert wird.

6.3 Seien A, B und C drei Punkte auf einer Gerade. Wähle einen willkürlichen Punkt D in der Ebene und ein weiterer Punkt E auf DB . P ist der Schnittpunkt von AC mit der Geraden durch AE CD und CE AD . Zeige, dass P nur von A, B und C abhängt.

6.4 Sei $ABCD$ ein konvexes Sehnenviereck und seien M, N, P , und Q jeweils Punkte auf AB , BC , CD , beziehungsweise DA . Zeige, dass MQ, NP und BD sich genau dann in einem Punkt schneiden, wenn MN, PQ und AC sich in einem Punkt schneiden.

6.5 Seien A, B, C sowie D, E, F jeweils drei Punkte auf einer Gerade. Sei $G = BE \cap CF$, $H = AD \cap CF$ und $I = AD \cap BE$. Zeige, falls $AI = HD$ und $CH = GF$, also $BI = GE$

Fortgeschritten

6.6

Olympiade

6.7

7 Transformations du plan

Einstieg

- 7.1 (Finalrunde 2013) Sei $ABCD$ ein Sehnenviereck mit $\angle ADC = \angle DBA$. Sei zudem E die Projektion von A auf BD . Zeige dass $BC = DE - BE$
- 7.2 Die gegenüberliegenden Seiten von dem Sechseck $ABCDEF$ sind parallel. Beweise dass alle Winkel von $ABCDEF$ gleich sind falls $BC - EF = ED - AB = AF - CD > 0$.
- 7.3 Seien M und N die Mittelpunkte der Seiten AD beziehungsweise BC eines Vierecks $ABCD$. Beweise dass AB parallel zu DC ist falls $2MN = AB + CD$.
- 7.4 Zeige dass der Schwerpunkt die Schwerelinien im Verhältnis $2 : 1$ teilt.
- 7.5 (tournament of the Town, Frühling 2015) Die Punkte K und L befinden sich auf der Seite AB des Dreiecks ABC sodass $KL = BC$ und $AK = LB$. M ist der Mittelpunkt von AC . Zeige, dass $\angle KML = 90^\circ$.
- 7.6 (IMO-Selektion 2007, 1) Sei $ABCD$ ein Trapez mit AB parallel zu CD und $AB > CD$. Die Punkte K und L befinden sich jeweils auf den Seiten AB und CD , sodass $\frac{AK}{KB} = \frac{DL}{LC}$. Die Punkte P und Q befinden sich auf der Strecke KL , sodass $\angle APB = \angle BCD$ und $\angle CQD = \angle ABC$. Zeige dass die Punkte P , Q , B und C auf einem Kreis liegen.
- 7.7 (IMO 2009, 2) Es sei ABC ein Dreieck mit Umkreismittelpunkt O . Es seien P und Q innere Punkte der Seiten CA und AB . Ferner seien K, L und M die Mittelpunkte der Strecken BP, CQ bzw. PQ . Der Kreis Γ gehe durch K, L und M . Die Gerade PQ sei eine Tangente an den Kreis Γ . Man zeige, dass $|OP| = |OQ|$ gilt.
- 7.8 (Vorrunde 2019) Seien k_1 ein Kreis und l eine Gerade welche k_1 in zwei Punkten A und B schneidet. Sei k_2 ein zweiter Kreis ausserhalb von k_1 welcher k_1 in dem Punkt C und l an dem Punkt D berührt. Sei T der zweite Schnittpunkt der Geraden CD mit k_1 . Zeige, dass $AT = TB$.
- 7.9 (MEMO 2014, 5) Sei ABC ein Dreieck sodass $AB < AC$. Das Inkreiszentrum I berührt die Seiten BC, CA und AB jeweils in D, E und F . Die Winkelhalbierende AI schneidet DE und DF in x beziehungsweise Y . Sei Z der Fuss der Höhe durch A des Dreiecks ABC .
Zeige dass D das Zentrum des Kreises durch XYZ ist.
- 7.10 Seien A und B die Schnittpunkte von zwei Kreisen, k_1 und k_2 . Sei Ω und ω zwei Kreise welche k_1 und k_2 in den Punkten $X = \Omega \cap k_1$, $Y = \Omega \cap k_2$, $Z = \omega \cap k_1$ und $V = \omega \cap k_2$ berührt. Zeige, dass die Umkreise von AXY und AZV sich in dem Punkt A mit einem Winkel von 90° schneiden.
- 7.11 (Théorème de Miquel) Seien A, B, C, D, E, F, G, H 8 Punkte sodass $ABCD$, $BCHG$, $EDCH$, $FADE$, $FABG$ Sehnenvierecke sind. Zeige, durch inversion, dass $EFGH$ ein Sehnenviereck ist.

7.12 Seien Ω_1 und Ω_2 zwei Kreise und zudem sei ω_1 ein Kreis innerhalb von Ω_1 welcher Ω_1 in A und Ω_2 in B berührt und ω_2 ein Kreis innerhalb von Ω_2 welcher Ω_2 in C und Ω_1 in D berührt.

7.13 Sei ω ein Kreis innerhalb eines anderen Kreises Ω , welche sich in T berühren. Sei d eine Gerade welche die beiden Kreise in den Punkten A, B, C und D in dieser Reihenfolge berühren. Zeige, dass der Umkreis von TAB genau dann rechtwinklig an Ω im Punkt T ist, falls ATC ein Rechteck ist.

7.14 (IMO 96) Sei P ein Punkt innerhalb des Dreiecks ABC sodass:

$$\angle APB - \angle ACB = \angle APC - \angle ABC$$

Seien D und E die Umkreismittelpunkte der Kreise APB und APC . Zeige, dass AP, BD und CE sich in einem Punkt schneiden.

7.15 (référence nécessaire) Sei Ω_{mega} ein Kreis und ω_i für $i = 1, \dots, 6$ sechs Kreise welche Ω in den Punkten P_i berühren und ω_i berührt ω_{i+1} für alle i und ω_6 berührt ω_1 . Zeige, dass die Geraden P_1P_4, P_2P_5 und P_3P_6 sich in einem Punkt schneiden.

7.16 (IMO-Selektion 2014) Die zwei Kreise ω_1 und ω_2 berühren sich im Punkt A und liegen innerhalb des Kreises Ω . Dabei berührt ω_1 den Kreis Ω im Punkt B und ω_2 berührt Ω im Punkt C . Die Gerade AC schneidet ω_1 ein weiteres Mal im Punkt D . Zeige, dass DBC ein rechtwinkliges Dreieck ist, falls A, B und C nicht auf einer Geraden liegen.