

SMO - Weisse Prüfung

Wila - 13. März 2017

Zeit: 4 Stunden

Schwierigkeit: Die Aufgaben sind der Schwierigkeit nach geordnet.

Punkte: Jede Aufgabe ist 7 Punkte wert.

1. Finde alle Primzahlen p und q , für die gilt:

$$2^p = q^q + q + 2.$$

2. Ein Kult aus n Personen will Suizid begehen. Dafür stellen sie sich in einem Kreis auf und der Reihe nach, beginnend bei Position 1, bringt jeder seinen linken Nachbarn um. Tote zählen nicht mehr als Nachbarn. Irgendwann bleibt nur noch jemand übrig. An welche Position muss sich der Anführer des Kults stellen, damit er überlebt?

3. Sei ABC ein Dreieck und X, Y, Z die Mittelpunkte der Seiten BC, CA, AB (in dieser Reihenfolge). Zeige, dass man ein Dreieck mit den Seitenlängen AX, BY und CZ konstruieren kann.

4. Ein grosses Rechteck mit ungeraden Seitenlängen wird in mehrere kleine Rechtecke mit ganzzahligen Seitenlängen unterteilt. Zeige, dass es ein kleines Rechteck gibt, dessen minimale Abstände zu den vier Seiten des grossen Rechtecks entweder alle gerade oder alle ungerade sind.

5. Sei $n \geq 1$ eine natürliche Zahl. Seien x_1, x_2, \dots, x_{n+1} positive reelle Zahlen mit $x_1 x_2 \dots x_{n+1} = 1$. Zeige, dass gilt:

$$n^{(x_1^n)} + n^{(x_2^n)} + \dots + n^{(x_{n+1}^n)} \geq \sqrt[n]{n} + \sqrt[n]{n} + \dots + \sqrt[n]{n}.$$

Viel Glück!