OMI Séléction Suisse

premier examen - 9 mai 2003

Temps: 4 heures
Chaque problème vaut 7 points.

1. Les nombres réels x, y, a satisfont les équations suivantes:

$$\begin{aligned} x + y &= a \\ x^3 + y^3 &= a \\ x^5 + y^5 &= a. \end{aligned}$$

Trouver toutes les valeurs possibles de a.

2. Soit ABC un triangle aigu. E et F soient les points d'intersection des hauteurs par B et C et leurs cotés opposés. G soit la projection de B sur la droite EF et H la projection de C sur EF. Enoncer que

$$|HE| = |FG|.$$

3. Trouver le nombre réel le plus grand C_1 et le nombre réel le plus petit C_2, tels que tous les nombres réels a, b, c, d, e satisfont

$$C_1 < \frac{a}{a+b} + \frac{b}{b+c} + \frac{c}{c+d} + \frac{d}{d+e} + \frac{e}{e+a} < C_2.$$

4. Trouver le nombre naturel le plus grand n, qui divise $a^{25} - a$ pour tout a entier.

5. Sur un camps de 5×9 carrés se trouvent n pièces, mais au maximum une par carré pendant tout le jeu. Un tour de jeu consiste en déplacer chaque pièce dans un des carrés touchants en haut, en bas, à gauche ou à droite. Tous les pièces doivent bouger simultanément. Une pièce ayant bougé dans une direction horizontale au tour précedent doit bouger dans une direction verticale et vice versa. Détérminer la valeur maximale de n, tel qu'il existe une position de début des n pièces et une suite de tour de jeu, tel que le jeu puisse tre continué jusqu'à la fin du monde.

OMI Séléction Suisse

deuxième examen - 24 mai 2003

Temps: 4 heures
Chaque problème vaut 7 points.

6. Soient les nombres réels positifs a, b, c, tels que $a + b + c = 2$. Montrer l'inégalité suivante, et déterminer tous les cas où il y a l'égalité.

$$\frac{1}{1+ab} + \frac{1}{1+bc} + \frac{1}{1+ca} \geq \frac{27}{13}$$

7. Trouver tous les polynômes $Q(x) = ax^2 + bx + c$ avec coefficients entiers, tels qu'il existe trois nombres premiers différents p_1, p_2, p_3 avec la propriété

$$|Q(p_1)| = |Q(p_2)| = |Q(p_3)| = 11.$$

8. Soient $A_1A_2A_3$ un triangle et ω_1 un cercle, qui traverse A_1 et A_2. Supposons qu'il existe les cercles $\omega_2, \ldots, \omega_7$ avec les propriétés suivantes:

(a) ω_k traverse les points A_k et A_{k+1} pour $k = 2, 3, \ldots, 7$, $\qquad (A_i = A_{i+3})$

(b) ω_k et ω_{k+1} se touchent par l'extérieur pour $k = 1, 2, \ldots, 6$.

Montrer: $\omega_1 = \omega_7$.

9. Soient donnés les nombres entiers $0 < a_1 < a_2 < \ldots < a_{101} < 5050$, montrer que l'on peut toujours en choisir quatre a_k, a_l, a_m, a_n différents, et avec la propriété

$$5050 | (a_k + a_l - a_m - a_n).$$

10. Trouver toutes les fonctions strictement monotones $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, telles que pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a

$$f(f(n)) = 3n.$$