MATHEMATICAL.
OLYMPIAD.CH
MATHEMATIK-OLYMPIADE
OLYMPIADES DE MATHÉMATIQUES
OLIMPIADI DELLA MATEMATICA

Zweite Runde 2021

Lausanne, Lugano, Zürich - 19. Dezember 2020

Vorläufige Bemerkung: Eine vollständige Lösung ist 7 Punkte wert. Bei jeder Aufgabe kann es bis zu 2 Punkte Abzug geben für kleine Fehler bei einer sonst korrekten Lösung. Teilpunkte werden gemäss dem Punkteschema (Marking Scheme) vergeben. Man kann pro Aufgabe höchstens für ein Marking Scheme Punkte erhalten (man bekommt dabei stets die grösstmögliche Punktzahl)

Im Anschluss befinden sich die Lösungen mit Vorrundentheorie, die den Korrektoren bekannt sind. Am Ende jedes Problems werden noch alternative Lösungen präsentiert, die auch andere Theorie verwenden können. Während des Trainings zu Hause werden die Teilnehmenden dazu ermutigt, alle ihnen bekannten Methoden zu verwenden. An der Prüfung hingegen ist es nicht empfohlen mit Methoden, welche sie unter Prüfungskonditionen nicht genügend beherrschen, nach alternativen Lösungen zu suchen. Damit wird riskiert, dass wertvolle Zeit verloren geht.

G1) Sei ABC ein spitzwinkliges Dreieck mit Umkreismittelpunkt O. Die Gerade AC schneidet den Umkreis des Dreiecks ABO ein zweites Mal in S. Beweise, dass die Geraden OS und BC senkrecht aufeinander stehen.

Lösung 1: Sei T der Schnittpunkt von OS mit BC. Es genügt nun zu zeigen, dass $\angle CTS = 90°$ gilt. Mit Winkeljagd finden wir:

(a) $\angle ASO = \angle ABO$, da $AOBS$ ein Sehnenviereck ist.

(b) $\angle AOB = 180° - 2 \cdot \angle ABO$, da O der Umkreismittelpunkt von ABC ist und somit das Dreieck AOB gleichschenklig ist.

(c) $\angle ACB = \frac{1}{2} \cdot \angle AOB$ nach dem Zentriwinkelsatz, da O Mittelpunkt des Kreises ABC ist.

Zusammen ergibt dies nun:

$$\angle SCT = \angle ACB \overset{(c)}{=} \frac{1}{2}\angle AOB \overset{(b)}{=} 90° - \angle ABO \overset{(a)}{=} 90° - \angle ASO = 90° - \angle CST.$$

Da sich nun die drei Winkel des Dreiecks CTS zu $180°$ addieren, folgt

$$\angle CTS = 180° - \angle SCT - \angle CST = 90°.$$

Wie gewünscht.

Lösung 2: Um das Gewollte zu zeigen, genügt es zu zeigen, dass CSB gleichschenklig in S ist. In der Tat, wäre CSB gleichschenklig bei S, so würde die Mittelsenkrechte zu BC durch S gehen. Doch die Mittelsenkrechte geht auch durch O, da O das Zentrum des Kreises ABC ist(Es gilt $OB = OC$). Die gerade OS wäre also insbesondere die Mittelsenkrechte von BC und somit auch senkrecht zu BC.
Mit Winkeljagd finden wir:

(a) $\angle OCB = \angle OBC$, da O der Umkreismittelpunkt von ABC ist und somit auch $OB = OC$ gilt.

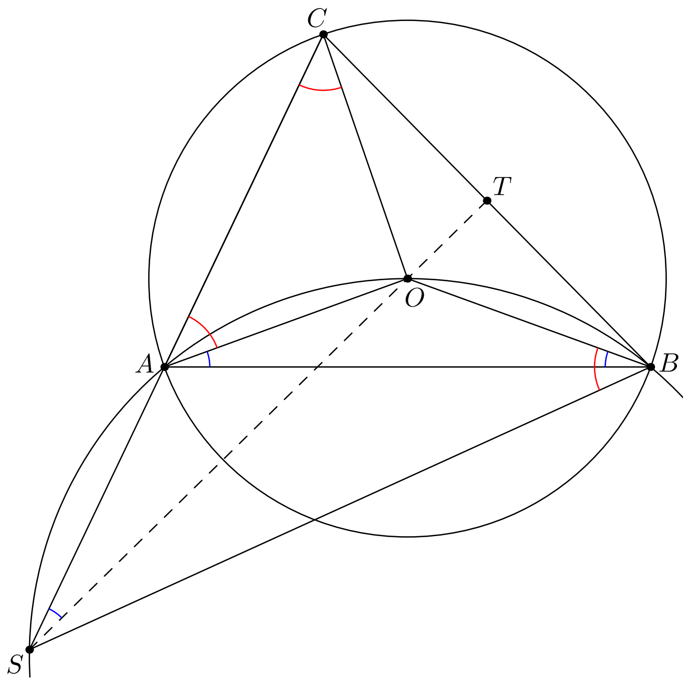
(b) $\angle OCA = \angle OAC$, da O wie oben Umkreismittelpunkt von ABC ist.

(c) $\angle OBS = \angle OAC$, da $AOBS$ ein Sehnenviereck ist.

Zusammen ergibt dies nun:

$$\angle SCB = \angle ACB = \angle ACO + \angle OCB \overset{(a)\&(b)}{=} \angle OAC + \angle OBC \overset{(c)}{=} \angle OBS + \angle OBC = \angle SBC.$$

Das Dreieck CSB ist also in der Tat Gleichschenklig in S, wie gewünscht.



Marking Scheme

- 2P: Umformulierung des zu Beweisenden in eine der folgenden Aussagen:
  - $\angle SCT = 90° - \angle CST$ oder $\angle SCB = 90° - \angle CSO$
  - CSB ist gleichschenklig mit Scheitelpunkt S
- 1P: Irgendwelche nützlichen Bemerkungen bezüglich dem Sehnenviereck $AOBS$ (z.B. $\angle OBS = \angle CAO$ or $\angle ASO = \angle ABO$)
- $\leq$ 2P: 1P rgendwelche nützlichen Bemerkungen bezüglich dem Mittelpunkt O des Kreises ABC (z.B. $\angle ACO = \frac{1}{2} \cdot \angle AOB$, $\angle OCB = \angle OBC$, $\angle OCA = \angle OAC$, $\angle OBA = \angle OAB$)
- 2P: Beweis vollenden

G2) Sei ABC ein spitzwinkliges Dreieck mit $BC > AC$. Die Mittelsenkrechte der Seite AB schneidet die Gerade BC in X und die Gerade AC in Y. Sei P die Projektion von X auf AC und sei Q die Projektion von Y auf BC. Beweise, dass die Gerade PQ die Strecke AB in ihrem Mittelpunkt schneidet.

Lösung 1 (Winkeljagd, Sehnevierecke): Nach einführung von M als der Mitpunkt von AB, genügt es zu zeigen, dass P, Q und M kolinear sind. Wir werden dies hier zeigen, indem wir beweisen, dass $\angle MPx + \angle XPQ = 180°$ gilt. Wir bemerken sazu zuerst ein paar Sehenenvierecke.

(a) $YQPX$ ist ein Sehnenviereck, da $\angle XPY = 90° = \angle XQY$.

(b) $YQMB$ ist ein Sehnenviereck, da $\angle BMY = 90° = \angle BQY$.

(c) $AMXP$ ist ein Sehnenviereck, da $\angle XMA = 90° = \angle XPA$.

Da nun X auf der Mittelsenkrechten von AB liegt, gilt $XA = XB$ und somit $\angle MAX = \angle MBX$ $(*)$ Alles in allem gilt also:

$$\angle MPX \overset{(c)}{=} \angle MAX \overset{(*)}{=} \angle MBX = \angle MBQ \overset{(b)}{=} \angle MYQ = \angle XYQ \overset{(a)}{=} 180° - \angle XPQ.$$

Wie gewünscht.

Lösung 2 (effizienter als Lösung 1): Es gibt eine sehr ähnliche Vorgehensweis, die nur zwei der zuvorgenannten Sehnenvierecke benützt. Ebenfalls benutzen wir, dass $YA = YB$ bzw. $\angle MYA = MYB$ $(*)$. Dieses Mal werden wir zeigen, dass M, P und Q kolinear sind, indem wir zeigen, dass $\angle XQP = XQM$. Wieder mit den obig genannten Sehnenvierecken gilt:

$$\angle XQP \overset{(a)}{=} \angle XYP = \angle MYA \overset{(*)}{=} \angle MYB \overset{(b)}{=} \angle MQB = \angle XQM.$$

Wie gewünscht.

Lösung 3 (Menelaus und Potenz eines Punktes): Man kann die kolinearität auch mit Menelaus zeigen. Dazu müsste man die folgende Gleichung verifizieren:

$$\frac{AM}{MB} \cdot \frac{BQ}{QC} \cdot \frac{CP}{PA} \overset{?}{=} -1.$$

Wie in den anderen beiden Lösungen, bemerken wir, dass $YQPX$ ein Sehnenviereck ist, da $\angle XPY = 90° = \angle XQY$. Wir werden nun ω für den Kreis $(YQPX)$ schreiben. Nach dem Satz von Thales ist das Zentrum von ω der Mittelpunkt von XY, also vorallem auch auf der Mittelsenkrechten zu AB. Da die Potenz eines Punktes nur von der Distantz zum Kreismittelpunkt abhängt, ist die Potenz von A und B gleich bezüglich ω, woraus folgt:

$$PA \cdot AY = XB \cdot BQ.$$

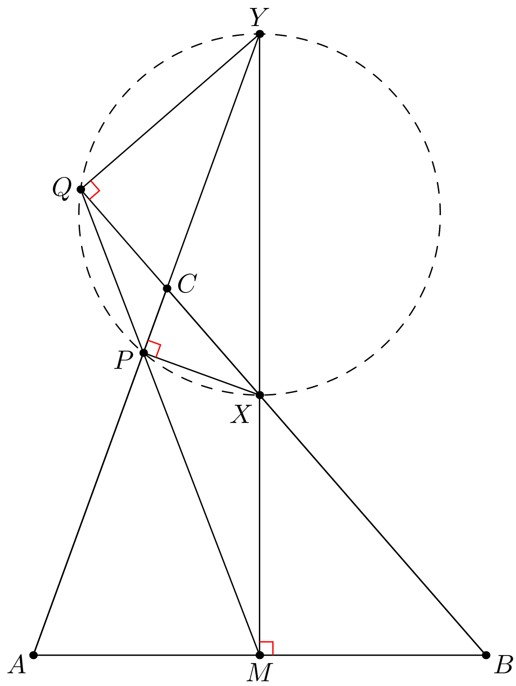
Betrachtet man auch noch die Potenz des Punktes C erhält man

$$CX \cdot QC = CP \cdot YC.$$

Die beide Gleichungen zusammen ergeben nun

$$\frac{AM}{MB} \cdot \frac{BQ}{QC} \cdot \frac{CP}{PA} = -1 \cdot \frac{BQ}{PA} \cdot \frac{CP}{QC} = -1 \cdot \frac{AY}{XB} \cdot \frac{CX}{YC} = \frac{BM}{MA} \cdot \frac{AY}{YC} \cdot \frac{CX}{XB} = -1.$$

Wobei wir in der letzten Gleichung Menalaus auf ABC und die Tatsache, dass M, Y und X kolinear sind, benutzt haben.



Marking Scheme - Lösung 1 und 2

- 1P: Umschreibung der zu beweisenden Aussage mit einer Winkelgleichung, wie beispielsweise:
  - $\angle MPX + \angle XPQ = 180°$
  - $\angle XQP = \angle XQM$
- 3P: Zeigen, dass $YQPX$, $YQMB$ oder $AMXP$ Sehnenvierecke sind (2P für ein Sehenviereck, 3P für zwei oder drei Sehnenvierecke)
- 1P: Zeigen, dass $\angle MAX = \angle MBX$, $\angle MAY = \angle MBY$ oder dass $\angle MYA = \angle MYB$
- 2P: Den Beweis vollenden

Marking Scheme - Lösung 3

- 1P: Das Problem zu einer Menelaus Gleichung umformen
- 1P: Zeigen, dass $YQPX$ zyklisch ist
- 2P: Zeigen, dass $PA \cdot AY = XB \cdot BQ$
- 1P: Zeigen, dass $CX \cdot QC = CP \cdot YC$
- 2P: Den Beweis vollenden

K1) Anaëlle hat $2n$ Steine, welche mit $1, 2, 3, \ldots, 2n$ beschriftet sind, sowie eine rote und eine blaue Schachtel. Sie will nun alle $2n$ Steine in die beiden Schachteln verteilen, sodass die Steine k und $2k$ für jedes $k = 1, 2, \ldots, n$ in unterschiedlichen Schachteln landen. Wie viele Möglichkeiten hat Anaëlle, um dies zu tun?

Antwort: Anaëlle hat 2^n Möglichkeiten.

Lösung 1 (bijektiv): Für jede ungerade ganze Zahl $1 \leq t < 2n$, nenne die Menge aller Steine, deren Beschriftung die Form $t \cdot 2^k$ hat, die Kette ab t. Sobald wir einen Stein aus einer Kette in eine Schachtel platzieren, dann ist wegen der Bedingung die Schachtel aller anderen Steine in dieser Kette eindeutig bestimmt. Da t ungerade ist, haben wir ausserdem, dass Steine in verschiedenen Ketten unabhängig voneinander platziert werden können, da die Bedingung nur Paare von Steine betrifft, die in der selben Kette sind.

Weil jeder Stein in zudem genau einer Kette ist, folgt nun, dass jede erlaubte Verteilung der Steine eine entsprechende beliebige Verteilung von jeweils einem Stellvertretenden pro Kette hat. (z.B. alle Steine mit ungerader Beschriftung). Weil wir n Ketten haben, ist die gesamte Anzahl Möglichkeiten demnach 2^n.

Lösung 2 (induktiv): Wir geben einen Induktionsbeweis. Die Antwort ist korrekt für $n = 1$, da die beiden Steine (mit Beschriftung 1 und 2) in verschiedenen Schachteln platziert werden müssen. Betrachte nun den Fall mit $n > 1$ und nehme an die Antwort ist korrekt für alle kleineren Werte von n.

Es folgt, dass Anaëlle 2^{n-1} Möglichkeiten hat, um die Steine mit Beschriftung $1, 2, \ldots, 2n - 2$ zu verteilen. Der Stein mit Beschriftung $2n - 1$ ist von keiner Bedingung eingeschränkt und kann daher in einer beliebigen Schachtel platziert werden. Für den Stein mit Beschriftung $2n$ hat Anaëlle jedoch keine Wahl, da er nicht in der selben Schachtel wie der Stein mit Beschriftung n platziert werden darf, welcher bereits platziert wurde (weil $n \leq 2n - 2$). Insgesamt hat Anaëlle also $2 \cdot 2^{n-1} = 2^n$ Möglichkeiten.

Marking Scheme

Solution 1 (Additive)

- 1P: Calculate the answer for at least one value of $n \geq 3$.
- 1P: Have the idea of considering these chains.
- 2P: Argue that the placement of one stone in each chain determines all others.
- 1P: Argue that different chains are independent.
- 1P: Argue that there are n chains and that they partition the stones.
- 1P: Finish the proof.

Solution 2 (Additive)

- 1P: Calculate the answer for at least one value of $n \geq 3$.
- 1P: Have the idea of induction.
- 2P: Handle the odd case in the inductive step.
- 2P: Handle the even case in the inductive step.
- 1P: Finish the proof.

Remarks (points only to be deducted from a full solution)

- -1P: Missing a finite number of cases.
- -1P: Calculation mistakes for final answer.
- No point deduction for not mentioning that $n \leq 2n - 2$.

K2) Seien $n \geq 4$ und $k, d \geq 2$ natürliche Zahlen mit $k \cdot d \leq n$. Die n Teilnehmenden der Mathematik-Olympiade sitzen um einen runden Tisch und warten auf Patrick. Als Patrick auftaucht, gefällt ihm die Situation gar nicht, da die Regeln des Social Distancing nicht eingehalten werden. Er wählt also k von den n Teilnehmenden aus, die bleiben dürfen, und schickt alle anderen aus dem Raum, sodass zwischen je zwei der verbleibenden k Teilnehmenden mindestens $d-1$ freie Plätze sind. Wie viele Möglichkeiten hat Patrick dies zu tun, angenommen alle Plätze waren anfangs besetzt?

Antwort: $\frac{n}{k}\binom{n-kd+k-1}{k-1}$ oder dazu äquivalente Ausdrücke.

Lösung 1 (Surjektive k-zu-1 Abbildung): Zuerst lasst uns die Personen am Tisch im Uhrzeigersinn von 1 bis n nummerieren, wobei die 1 Person beliebig ausgewählt wurde. Wir werden nun zählen wie viele Kombinationen es gibt, in der die Person 1 ausgewählt wurde. Bemerke, dass jegliche solche Möglichkeit einfach dazu korrenspondiert k 'Distanzen' zwischen den auserwählten Teilnehmer zu wählen. Die gegebene Bedingung ist lediglich, dass jede solche 'Distanz' grösser als d sein soll. Wir wollen also die Möglichkeiten zählen eine Gruppe von k Abständen zu wählen, sodass diese alle grösser als d sind und sich zu n aufsummieren. Dies kann auf mehrere Arten gezählt werden:

- Zum Beispiel kann man sich einen kleineren Tisch der von $n - kd + k$ Stühlen umgeben ist vorstellen, wobei der Stuhl mit der Nummer 1 besetzt ist und man noch $k - 1$ Stühle auswählen soll, die auch noch besetzt werden müssen. Man kann darauf zwischen allen zwei aufeinanderfolgen Personen noch $d - 1$ Stühlen einfügen, um eine finale konfigurration zu erhalten. Man hatte hier also $\binom{n-kd+k-1}{k-1}$ Möglichkeiten dies zu tun.
- Anders, kann man auch sagen, dass das Problem hier da gleiche ist, wie wenn man n gleiche Bonbons auf k Kinder verteilen will, sodass jedes Kind mindestens d Bonbons erhählt, was im Skript behandelt wurde. Hier können wir einfach die kd Bonbons vergessen um die Bedingung zu erfüllen, was heisst, dass wir noch $n - kd$ Bonbons zu verteilen haben. Hier erhält man auch $\binom{n-kd+k-1}{k-1}$ Möglichkeiten dies zu tun.

Nun haben wir jedoch bis jetzt angenommen, dass Person 1 immer auserwählt wird. Wir müssen jetzt also noch alle 'Rotationen' in Betracht ziehen(Indem wir eine andere Person als die beliebige 1 Person betrachten). Würden wir die Möglichkeiten für alle Rotationen einfach aufaddieren, so hätten wir jede 'echte' Konfiguration k-Mal gezählt (1 Mal für jede der k auserwählten Personen). Wir erhalten also die finale Antwort $\frac{n}{k}\binom{n-kd+k-1}{k-1}$. *Falls diese Lösung zu verwirrend war kann man den letzten Schritt auch anders betrachten: Betrachte das ursprüngliche Problem, wobei einer der k Personen ein Imposter ist. die Anzahl möglichkeiten kann wie oben beschrieben berechnet werden. Man startet mit dem Imposter und betrachtet die Distanzen zwischen den auserwählten Personen, was einem* $\binom{n-kd+k-1}{k-1}$ *Möglichkeiten für jeden der n möglichen Imposter gibt. Man kann diese Anzahl auch anders betrachten. Für jede Möglichkeit des ursprünglichen Problemes gibt es k Möglichkeiten den Imposter zu wählen. Somit ist die Anzahl Kombination des ursprünglichen Problems gleich* $n\binom{n-kd+k-1}{k-1} \cdot \frac{1}{k}$

Lösung 2 (Man betrachet den kleinsten besetzten Stuhl): Wie oben können wir die Anzahl Konfigurationen, in welche eine Person (oben die 1 Person) vorgegeben ist, als $\frac{n}{k}\binom{n-kd+k-1}{k-1}$ berechnen.
Nun lasst uns die Anzahl Konfigurationen betrachten in der die Person 2 auserwählt wurde, die Person 1 jedoch nicht. Dies ist nun fast das gleiche wie zuvor(k distanzen wählen), ausser dass hier nun noch die Einschränkung gilt, dass der Stuhl nummer 1 zwangsmässig in der letzten Distanz enthalten ist.

Marking Scheme

Solutions 1 and 2 (Additive)

- 0P: Solving the case $n = kd$ and/or attempting to do an induction on n.
- 0P: Stating we can group the possibilities based on the smallest occupied chair, after assigning numbers to all the people.
- 1P: Any attempt to correctly calculate the number of possibilities when a given person is fixed.
- 1P: Asserting that the aforementioned is equal to $\binom{n-kd+k-1}{k-1}$.
- 2P: Proving said equality (1 point may be awarded here if the proof is incomplete or the student did not find what the value should be but the student states that we have to assign kd of the gaps by default and/or we have to distribute $n - kd$ gaps amongst all of the distances).

Completing Solution 1 (Additive)

- 1P: Stating that we can rotate every possibility where a given person is fixed to obtain all possibilities.
- 1P: Stating the previous idea will count every possibility exactly k times.
- 1P: Finishing.

Completing Solution 2 (Additive)

- 2P: Giving the correct expression $\binom{n-(k-1)d+k-1-\max(i,d)}{k-1}$ for when person i is fixed and none of people $1, 2, \ldots i - 1$ are taken.
- 1P: Stating that the total number of possibilities is the sum of the previous expression over all $1 \leq i \leq n$.

For solution 2, no points should be deducted for not simplifying the summation.

Z1) Beweise, dass es für jede natürliche Zahl $n \geq 3$ natürliche Zahlen $a_1 < a_2 < \ldots < a_n$ gibt, sodass

$$a_k \,|\, (a_1 + a_2 + \ldots + a_n)$$

für jedes $k = 1, 2, \ldots, n$ gilt.

Lösung 1: Es wird mit Induktion bewiesen.

(a) Induktionsanfang, $n = 3$:
Man bemerke, dass $1 < 2 < 3$ die gegebene Bedingung erfüllt. Somit ist die Aussage wahr für $n = 3$.

(b) Induktionsschritt:
Nach der Induktionsannahme ist die Aussage wahr für alle $m \leq n-1$. Seien also $a_1 < a_2 < \cdots < a_{n-1}$ positiv, sodass $a_k \mid \sum_{i=1}^{n} a_i$ für alle $1 \leq k \leq n$ gilt.Wähle dazu $a_n = \sum_{j=1}^{n-1} a_j$. Da a_i für $1 \leq i < n-1$ strikt grösser als 0 ist, gilt $a_n > a_{n-1}$ und somit ist

$$a_1 < a_2 < \cdots < a_{n-1} < a_n = \sum_{j=1}^{n-1} a_j$$

Man bemerke weiter, dass

$$\sum_{i=1}^{n} a_i = a_n + \sum_{i=1}^{n-1} a_i = 2 \sum_{i=1}^{n-1} a_i$$

Nach der Induktionsannahme gilt nun $a_k \,|\, 2 \sum_{i=1}^{n} a_i = \sum_{i=1}^{n}$ für alle $1 \leq k \leq n-1$. Zusätzlich gilt nun aber auch $a_n = \sum_{i=1}^{n-1} a_i \,|\, 2 \sum_{i=1}^{n-1} a_i = \sum_{i=1}^{n} a_i$.
Es erfüllen also die gewählten $a_1 < \cdots < a_n$ die Bedingung und der Induktionsschritt ist beendet.

Lösung 2: Da, $\sum_{i=0}^{n} 2^i = 2^{n+1} - 1$ ist, würden $1 \leq 1 < 2 \cdots < 2^n$ die Teilbarkeitsbedingung erfüllen.

$$2^j \,|\, (1 + 1 + 2 + \cdots + 2^n) = 2^{n+1}, \ \forall 0 \leq j \leq n.$$

Nun sind die Zahlen jedoch nicht paarweise verschieden. Wir wollen also eine ähnliche Menge mit paarweise verschiedenen Zahlen konstruieren. Man multipliziert dazu alle Zweierpotenzen mit 3 und fügt zusätzlich noch 1 und 2 hinzu. Man findet also hierzu die Zahlen $a_1 = 1 < 2 < 3 < 2 \cdot 3 < \cdots < 3 \cdot 2^{n-3} = a_n$. Und in der Tat erfüllen diese Zahlen auch die Bedingung, da $\sum_{i=0}^{n} a_i = 3 \cdot 2^{n-2}$ durch alle a_i Teilbar ist.

Lösung 3 (Reformulation): Nehme wir an, dass die Menge $a_1, a_2, \ldots, a_n$ die Bedingung erfüllt und seien $b_i = \frac{1}{a_i} (\sum_{k=1}^{n})$. Es folgt, dass b_i verschiedene positive ganze Zahlen sind, für welche gilt:

$$\frac{1}{b_1} + \frac{1}{b_2} + \cdots + \frac{1}{b_n} = 1$$

Es genügt nun eine Konstruktion für solche b_i zu finden. Es gibt mehrere Möglichkeiten eine soche Menge zu konstruieren: eine davon wäre mit Induktion.
Wir nehmen als Induktionsanfang die Menge $2, 3, 6$ und wenn wir von n nach $n+1$ gehen ersetzen wir einfach b'_n mit $b_n + 1$ und $b_n^2 + b'_n$ (wobei wir einfach $\frac{1}{x} - \frac{1}{x+1} = \frac{1}{x(x+1)}$ benutzen).
Diese Induktion führt tatsächlich zu einer komplett anderen Menge a_i als in den obigen zwei Lösungen; die Anfangsmenge ist die Selbe, doch jedesmal wenn n um 1 erhöht wird, multiplizieren wir alle vorherigen Elemente mit $1+\sum_{k=1}^{n} a_k$ und ersetzen das jetzt kleinste Element $1+\sum_{k=1}^{n} a_k$ mit 1 und $\sum_{k=1}^{n}$. Zum Beispiel von n=3 nach n=4 multiplizieren wir die Ursprünglich Menge

$1, 2, 3$ *mit 7 um die neue Menge* $7, 14, 21$ *zu erhalten. Zusatsätzlich wird dann noch* 7 *mit* 1 *und* 6 *ersetzt.*

Marking Scheme

Lösung 1

- 1P: Idee für Induktion zu benutzen.
- 1P: Induktionsanfang.
- 2P: Idee für den Induktionsschritt.
- 2P: Zeigen, dass die neu konstruierte Menge die Bedingung erfüllt.
- 1P: Den Beweis vollenden.

Lösung 2

- 4P: Konstruktion finden.
- 2P: Zeigen, dass die Bedinguneg für die konstruierte Menge erfüllt sind.
- 1P: Den Beweis vollenden.

Z2) Bestimme alle natürlichen Zahlen $n \geq 2$, sodass für jeden Teiler $d > 1$ von n

$$d^2 + n \mid n^2 + d$$

gilt.

Antwort: n erfüllt die Bedingung genau dann, wenn es eine Primzahl ist.

Lösung: Zuest bemerken wir, dass alle Primzahlen die Voraussetzung tatsächlich erfüllen: Wenn n eine Primzahl ist, muss $d = n$ gelten. Für diese Wahl von d gilt offensichtlich

$$n^2 + n \mid n^2 + n.$$

Wenn nun n keine Primzahl ist, finden wir $a, b > 1$, sodass $n = ab$ gilt. Nun können wir $d = a$ wählen und erhalten

$$a^2 + ab \mid (ab)^2 + a.$$

Hier können wir beide Seiten durch a teilen und erhalten die äquivalente Teilbarkeitsbedingung

$$a + b \mid ab^2 + 1.$$

Analog dazu können wir auch $d = b$ wählen und erhalten

$$b^2 + ab \mid (ab)^2 + b \quad \Longleftrightarrow \quad b + a \mid a^2b + 1.$$

Wir sehen also, dass $a + b$ sowohl $ab^2 + 1$ als auch $ab^2 + 1$ teilt, also auch deren Summe:

$$a + b \mid ab(a + b) + 2.$$

Offensichtlich ist $ab(a + b)$ durch $a + b$ teilbar. Dann sagt uns die obige Bedingung, dass

$$a + b \mid 2$$

gilt. Dies steht aber im Widerspruch zu $a, b > 1$! Wir folgern also, dass alle nicht-Primzahlen die Bedingung der Aufgabe nicht erfüllen.

Alternative: Wir können auch die Differenz von $ab^2 + 1$ und $a^2b + 1$ betrachten, woraus wir

$$a + b \,|\, ab(a - b)$$

erhalten. Falls wir nun $\text{ggT}(a, b) = 1$ wählen können, würde dies $\text{ggT}(a + b, ab) = 1$ und somit

$$a + b \,|\, a - b$$

implizieren, was unmöglich ist.
Wir können a und b allerdings nur dann teilerfremd wählen, falls n mindestens zwei verschiedene Primteiler hat. Wir müssen also den Fall, in dem n eine Primpotenz ist, noch separat behandeln: Falls $n = p^k$ für p prim und $k \geq 2$, können wir aber einfach $d = p$ wählen um

$$p^2 + p^k \,|\, p^{2k} + p \quad \Longrightarrow \quad p^2 \,|\, p\left(p^{2k-1} + 1\right) \quad \Longrightarrow \quad p \,|\, p^{2k-1} + 1$$

zu erhalten, was auch unmöglich ist.

Marking scheme (Additiv)

- 1P: Beobachtung, dass alle Primzahlen funktionieren
- 1P: Eine Teilbarkeitsbedingung der Form $a + b \,|\, ab^2 + 1$ für $n = ab$
- 2P: Die zweite Teilbarkeitsbedigung der Form $a + b \,|\, a^2b + 1$ für $n = ab$
- 2P: $a + b \,|\, a^2b + ab^2 + 2$ **oder** $a + b \,|\, ab(b - a)$ und den Fall $n = p^k$ ausschliessen
- 1P: Vervollständigung des Beweises

Second round 2021

Lausanne, Lugano, Zürich - 19 December 2020

Preliminary remark: A complete solution is worth 7 points. For every problem, up to 2 points can be deducted from a correct solution for (minor) flaws. Partial marks are attributed according to the marking schemes. In the case of multiple marking schemes for the same problem, the score is the maximum among all the marking schemes.

Below you will find the elementary solutions known to correctors. Alternative solutions are presented in a complementary section. Students are encouraged to use any methods at their disposal when training at home, but should be wary of attempting to find alternative solutions using methods they do not feel comfortable with under exam conditions as they risk losing valuable time.

G1) Let O be the centre of the circumcircle of an acute triangle ABC. The line AC intersects the circumcircle of the triangle ABO a second time at S. Prove that the line OS is perpendicular to the line BC.

Solution 1: Reformulation of the conclusion: To prove that OS is perpendicular to BC, we introduce T to be the intersection of OS with BC and prove that $\angle CTS = 90°$. Thanks to angle chasing, we observe the following.

(a) Since $AOBS$ are on a circle, we have $\angle ASO = \angle ABO$.

(b) Since O is the centre of the circle ABC, it holds $OA = OB$ and therefore the triangle AOB is isosceles at O. Hence $\angle AOB = 180° - 2 \cdot \angle ABO$.

(c) Since O is the centre of the circle ABC, it holds $\angle ACB = \frac{1}{2} \cdot \angle AOB$.

Combining the observations above, we get

$$\angle SCT = \angle ACB \overset{(c)}{=} \frac{1}{2}\angle AOB \overset{(b)}{=} 90° - \angle ABO \overset{(a)}{=} 90° - \angle ASO = 90° - \angle CST.$$

Hence, since the angles of the triangle CTS sum up to $180°$, we conclude

$$\angle CTS = 180° - \angle SCT - \angle CST = 90°.$$

Solution 2: Reformulation of the conclusion: To prove that OS is perpendicular to BC, we prove that the triangle CSB is isosceles at S. Indeed, if the triangle CSB is isosceles at S, then the perpendicular bisector of the segment BC goes through S. However, the perpendicular bisector of the segment BC also goes through O, because, O being the centre of the circle ABC, it holds $OC = OB$. Hence, the line OS is the perpendicular bisector of BC, and is, in particular, perpendicular to BC.

Thanks to angle chasing, we observe the following.

(a) Since O is the centre of the circle ABC, it holds $OB = OC$ and thus $\angle OCB = \angle OBC$.

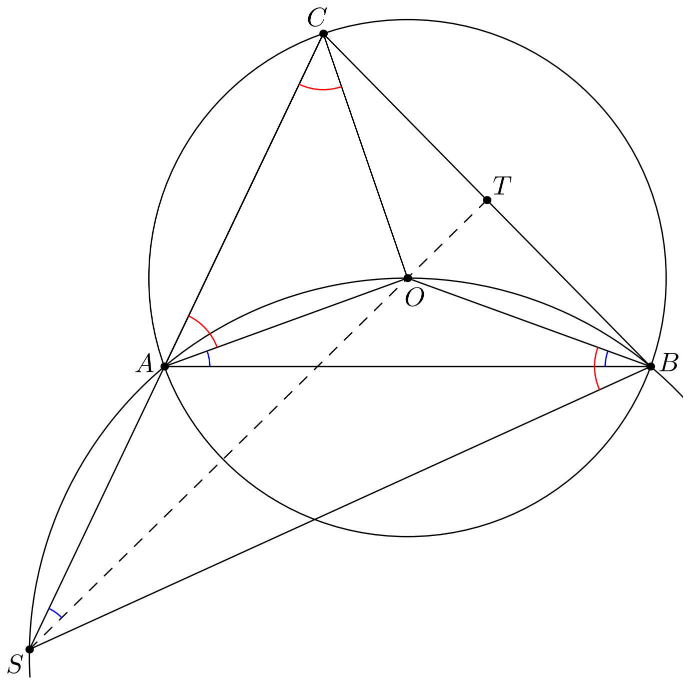
(b) Since O is the centre of the circle ABC, it holds similarly $\angle OCA = \angle OAC$.

(c) Since $AOBS$ are on a circle, we have $\angle OBS = \angle OAC$.

Hence, we conclude

$$\angle SCB = \angle ACB = \angle ACO + \angle OCB \overset{(a)\&(b)}{=} \angle OAC + \angle OBC \overset{(c)}{=} \angle OBS + \angle OBC = \angle SBC.$$

So, the triangle CSB is indeed isosceles at S.



Marking Scheme

- 2P: reformulation of the conclusion in a statement of the kind:
  - $\angle SCT = 90° - \angle CST$ or $\angle SCB = 90° - \angle CSO$
  - CSB is isosceles at S
- 1P: any useful statement involving the cyclic quadrilateral $AOBS$ (eg. $\angle OBS = \angle CAO$ or $\angle ASO = \angle ABO$)
- $\leq$ 2P: 1P for any useful statement involving the centre O of the circle ABC (eg. $\angle ACO = \frac{1}{2} \cdot \angle AOB$, $\angle OCB = \angle OBC$, $\angle OCA = \angle OAC$, $\angle OBA = \angle OAB$)
- 2P: conclude

G2) Let ABC be an acute triangle with $BC > AC$. The perpendicular bisector of the segment AB intersects the line BC at X and the line AC at Y. Let P be the projection of X on AC and let Q be the projection of Y on BC. Prove that the line PQ intersects the segment AB at its midpoint.

Solution 1 (angle chasing, cylic quadrilaterals): Introducing M as the midpoint of AB, the exercise is equivalent to showing that M, P and Q are collinear. In order to do that, we will show that $\angle MPX + \angle XPQ = 180°$. We first note that there are a few cyclic quadrilaterals :

(a) $YQPX$ is cyclic, as $\angle XPY = 90° = \angle XQY$.

(b) $YQMB$ is cyclic, as $\angle BMY = 90° = \angle BQY$.

(c) $AMXP$ is cylic, as $\angle XMA = 90° = \angle XPA$.

As X is on the perpendicular bisector of AB, we have $XA = XB$ and $\angle MAX = \angle MBX$ $(*)$.

Then,

$$\angle MPX \overset{(c)}{=} \angle MAX \overset{(*)}{=} \angle MBX = \angle MBQ \overset{(b)}{=} \angle MYQ = \angle XYQ \overset{(a)}{=} 180° - \angle XPQ.$$

Solution 2 (more efficient than Solution 1): There is a very similar way way to proceed, making use of only two of the aforementioned cyclic quadrilaterals, and that $YA = YB$ implies $\angle MYA = \angle MYB$ $(*)$. This time, we show that M, P and Q are collinear by proving that $\angle XQP = \angle XQM$. Indeed,

$$\angle XQP \overset{(a)}{=} \angle XYP = \angle MYA \overset{(*)}{=} \angle MYB \overset{(b)}{=} \angle MQB = \angle XQM.$$

Solution 3 (Menelaus and power of a point): One could be tempted to show that M, P and Q are collinear by using Menelaus. We would need to prove that

$$\frac{AM}{MB} \cdot \frac{BQ}{QC} \cdot \frac{CP}{PA} \overset{?}{=} -1.$$

Firstly, like in the other proofs, we note that $YQPX$ is cyclic as $\angle XPY = 90° = \angle XQY$. We will write ω for the circle $(YQPX)$. By Thales on a circle, its center is the midpoint of XY, in particular it lies on the perpendicular bisector of AB. As the power of a point with respect to ω is uniquely determined by its distance to this center, we have that A and B have the same power with respect to ω, proving that

$$PA \cdot AY = XB \cdot BQ.$$

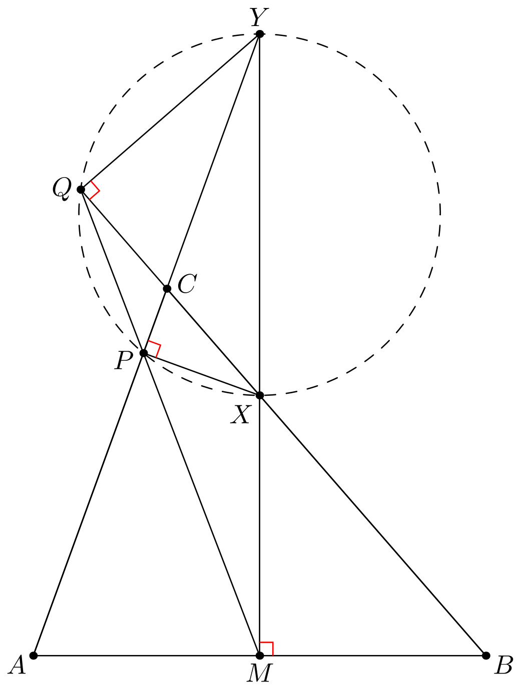
The power of C with respect to ω also yields that

$$CX \cdot QC = CP \cdot YC.$$

Combining these two equalities, we finally have that

$$\frac{AM}{MB} \cdot \frac{BQ}{QC} \cdot \frac{CP}{PA} = -1 \cdot \frac{BQ}{PA} \cdot \frac{CP}{QC} = -1 \cdot \frac{AY}{XB} \cdot \frac{CX}{YC} = \frac{BM}{MA} \cdot \frac{AY}{YC} \cdot \frac{CX}{XB} = -1.$$

In the last equality, we used Menelaus as M, Y and X are collinear.



Marking Scheme - Solution 1 and 2

- 1P: Rewriting the statement in terms of angles, in a statement of the kind :
  - $\angle MPX + \angle XPQ = 180°$
  - $\angle XQP = \angle XQM$
- 3P: Showing that $YQPX$, $YQMB$ or $AMXP$ are cyclic (2P for one quadrilateral, 3P for two or three quadrilaterals)
- 1P: Proving that $\angle MAX = \angle MBX$, $\angle MAY = \angle MBY$ or that $\angle MYA = \angle MYB$.
- 2P: Conclude.

Marking Scheme - Solution 3

- 1P: Stating the problem as a Menelaus equality.
- 1P: Proving that $YQPX$ is cyclic.
- 2P: Proving that $PA \cdot AY = XB \cdot BQ$.
- 1P: Proving that $CX \cdot QC = CP \cdot YC$.
- 2P: Conclude.

K1) Anaëlle has $2n$ stones labelled $1, 2, 3, \ldots, 2n$ as well as a red box and a blue box. She wants to put each of the $2n$ stones into one of the two boxes such that the stones k and $2k$ are in different boxes for all $k = 1, 2, \ldots, n$. How many possibilities does Anaëlle have to do so?

Answer: Anaëlle has 2^n possibilities to do so.

Solution 1 (bijective): For any odd integer $1 \leq t < 2n$, call the set of stones whose label is of the form $t \cdot 2^k$ the chain starting at t. Note that if we place one stone from a chain in a box, the placement of all the other stones in that chain is uniquely determined due to the condition. Also note that since t is odd, stones from different chains can be placed independently since the condition only effects pairs of stones that are in the same chain.

Since every stone is in exactly one of the chains, it follows that every valid distribution of the stones corresponds to some arbitrary distribution of one representative from each chains (e.g. the stones with odd label). Since there are n chains, the total number of possibilities is therefore 2^n.

Solution 2 (inductive): We will proceed by induction. Note that the statement is true for $n = 1$ since the two stones (labelled 1 and 2) have to be placed in different boxes. Now consider the case $n > 1$ and assume that the statement holds for every smaller value of n.

It follows that Anaëlle has 2^{n-1} valid possibilities to distribute the stones labelled $1, 2, \ldots, 2n-2$. The stone labelled $2n-1$ is not effected by any restrictions and can therefore be placed in either box. For the stone labelled $2n$ however Anaëlle has no choice since it cannot end up in the same box as the stone labelled n which is already placed (since $n \leq 2n-2$). In total, Anaëlle therefore has $2 \cdot 2^{n-1} = 2^n$ possibilities.

Marking Scheme

Solution 1 (Additive)

- 1P: Calculate the answer for at least one value of $n \geq 3$.
- 1P: Have the idea of considering these chains.
- 2P: Argue that the placement of one stone in each chain determines all others.
- 1P: Argue that different chains are independent.
- 1P: Argue that there are n chains and that they partition the stones.
- 1P: Finish the proof.

Solution 2 (Additive)

- 1P: Calculate the answer for at least one value of $n \geq 3$.
- 1P: Have the idea of induction.
- 2P: Handle the odd case in the inductive step.
- 2P: Handle the even case in the inductive step.
- 1P: Finish the proof.

Remarks (points only to be deducted from a full solution)

- -1P: Missing a finite number of cases.
- -1P: Calculation mistakes for final answer.
- No point deduction for not mentioning that $n \leq 2n - 2$.

K2) Let $n \geq 4$ and $k, d \geq 2$ be integers such that $k \cdot d \leq n$. The n contestants of the Mathematical Olympiad are sitting around a round table, waiting for Patrick to arrive. When Patrick arrives, he is unhappy about the situation because it violates the rules of social distancing. He therefore chooses k of the n contestants to stay and tells the others to leave the room such that between any two of the remaining k contestants, there are at least $d-1$ empty chairs. How many possibilities does Patrick have to do so if every chair was occupied in the beginning?

Answer: $\frac{n}{k}\binom{n-kd+k-1}{k-1}$ or any equivalent expression.

Solution 1: Surjective k-to-1 mapping. Firstly, let us number the people around the table 1 to n, in a clockwise order starting from an arbitrary person designated as "1". Now, we begin by counting how many combinations there are where person 1 is chosen. Note that any such possibility just corresponds to choosing k 'distances' between consecutive contestants. The constraint is simply the same as saying that each distance should be greater than d. So we essentially want all the ways to choose k sets of gaps summing to n that are all greater than d, which is can be computed in many ways:

- For example, you can imagine you have a smaller table with $n - kd + k$ chairs around it, of which chair number 1 is occupied, and you choose $k - 1$ more chairs to place people in. Then, you can insert $d-1$ chairs between every two consecutive people to give you a finished configuration, meaning you had $\binom{n-kd+k-1}{k-1}$ ways of doing so.
- Alternatively, you can say this is just the same problem as distributing n identical sweets amongst k children such that each child gets at least d sweets, which is in the script. Here, we can simply forget about kd sweets in order to satisfy the constraint, meaning we have to distribute $n - kd$ sweets amongst k children, and we have $\binom{n-kd+k-1}{k-1}$ ways of doing so.

Now, it remains to see that by taking all the 'rotations' of these possibilities (by changing the fixed point from "1" to any of the other integers) would count every viable configuration exactly k times (once for every person, who can be a fixed point.) So we obtain a final answer of $\frac{n}{k}\binom{n-kd+k-1}{k-1}$.

If you are confused by this solution, think of it this way: Consider the original problem, but now you also want to designate one of the remaining contestants as being an imposter[1]. Counting the ways of doing so can be done as above, by starting at the imposter and looking at the distances, giving you $\binom{n-kd+k-1}{k-1}$ configurations per any of n possible imposters. However, you can also do so by taking every one of the possibilities from the original problem, and choosing an imposter, giving you k new choices for every original possibility.

Solution 2: Considering the smallest occupied chair. As above, we can calculate the number of configurations where person 1 is selected as being $\binom{n-kd+k-1}{k-1}$.
Now, let us calculate the number of configurations where person 2 is selected and person 1 is *not* selected. This is almost the same situation as before (choosing k distances) except you now have the additional constraint that we know that chair number 1 is forcibly in the last gap. We want to therefore distribute n chairs amongst k gaps with the constraint that the first $k-1$ gaps should be at least d and the last one at least $\max(2, d)$ (since we need chair 1 to be there in for sure). This is equal to $\binom{n-(k-1)d+k-1-\max(2,d)}{k-1}$.
Proceeding with this train of thought, we see now that the number of possibilities where person 3 is selected and neither person 2 nor 1 are selected is $\binom{n-(k-1)d+k-1-\max(3,d)}{k-1}$. More generally, should we wish to count the number of possibilities where person i is selected but $1, 2, \ldots, i-1$

[1] Someone from Valais.

are not, we get[2] $\binom{n-(k-1)d+k-1-\max(i,d)}{k-1}$. However, we can also see that summing this for all i gives every possibility, since at each stage we are counting the number of configurations where i is the 'smallest' occupied chair, so there is a clear bijection. So we obtain

$$\sum_{i=1}^{n} \binom{n-(k-1)d+k-1-\max(i,d)}{k-1}$$

[2]Here, it can be useful to think about the convention that $\binom{a}{b} = 0$ if $a < 0$ or $a > b$.

Marking Scheme

Solutions 1 and 2 (Additive)

- 0P: Solving the case $n = kd$ and/or attempting to do an induction on n.
- 0P: Stating we can group the possibilities based on the smallest occupied chair, after assigning numbers to all the people.
- 1P: Any attempt to correctly calculate the number of possibilities when a given person is fixed.
- 1P: Asserting that the aforementioned is equal to $\binom{n-kd+k-1}{k-1}$.
- 2P: Proving said equality (1 point may be awarded here if the proof is incomplete or the student did not find what the value should be but the student states that we have to assign kd of the gaps by default and/or we have to distribute $n - kd$ gaps amongst all of the distances).

Completing Solution 1 (Additive)

- 1P: Stating that we can rotate every possibility where a given person is fixed to obtain all possibilities.
- 1P: Stating the previous idea will count every possibility exactly k times.
- 1P: Finishing.

Remark: the finishing point is to be awarded if the contestant multiplies by n and/or divides by k to give a final expression. If the contestant for example oversees that they must divide by k, but still writes that the answer is $n\binom{n-kd+k-1}{k-1}$, they only lose 1 point.

Completing Solution 2 (Additive)

- 2P: Giving the correct expression $\binom{n-(k-1)d+k-1-\max(i,d)}{k-1}$ for when person i is fixed and none of people $1, 2, \ldots i - 1$ are taken.
- 1P: Stating that the total number of possibilities is the sum of the previous expression over all $1 \leq i \leq n$.

For solution 2, no points should be deducted for not simplifying the summation.

Appendix: Why the two answers here are equal.
As you may recall, in solution 2, we obtained the following answer:

$$\sum_{i=1}^{n} \binom{n-(k-1)d+k-1-\max(i,d)}{k-1}$$

Is this really equal to what we get in solution 1? Indeed, and we can prove it.
The important thing to note is that the binomial will stay the same until $i = d$, and from that point the upper term will descend by 1 each time until it is equal to $k - 1$; any binomials after that point are just equal to 0 (they correspond to taking a smallest occupied chair that is too

big whereupon you cannot squeeze everyone else in the remaining space). So, rewriting, we get:

$$\begin{aligned}
&d \cdot \binom{n-kd+k-1}{k-1} + \binom{n-kd+k-2}{k-1} + \binom{n-kd+k-3}{k-1} + \cdots + \binom{k-1}{k-1} \\
&= (d-1) \cdot \binom{n-kd+k-1}{k-1} + \sum_{j=k-1}^{n-kd+k-1} \binom{j}{k-1} \\
&= (d-1) \cdot \binom{n-kd+k-1}{k-1} + \binom{n-kd+k}{k} \\
&= (d-1) \cdot \binom{n-kd+k-1}{k-1} + \frac{n-kd+k}{k}\binom{n-kd+k-1}{k-1} \\
&= \frac{n}{k}\binom{n-kd+k-1}{k-1}
\end{aligned}$$

The second equality above (turning the sum into a single binomial) is known as the Hockey-Stick lemma and is a well-known property; if you wish to prove it for yourself, then try applying the property $\binom{a}{b} + \binom{a}{b+1} = \binom{a+1}{b+1}$ in a clever way. Taking a look at where the terms in our summation show up in Pascal's triangle may also give you a clue (and you will realise where the lemma gets its name from!).

Z1) Solution 1: Induction

(a) Base case $n = 3$: we observe that $1 < 2 < 3$ is a solution.

(b) Inductive step: Let $n \geq 4$ and suppose that the hypothesis is true for $n-1$. Let $a_1 < a_2 < \ldots < a_{n-1}$ such that $a_i \mid \sum_{j=1}^{n} a_j$ for all $1 \leq i \leq n-1$ be the construction for that case. Then,

$$a_1 < a_2 < \ldots < a_{n-1} < a_n := \sum_{j=1}^{n-1} a_j$$

also has the desired properties. Firstly, since $a_i > 0$ for all $1 \leq i \leq n-1$, such that $a_n > a_{n-1}$. Furthermore,

$$\sum_{k=1}^{n} a_k = a_n + \sum_{j=1}^{n-1} a_j = 2\sum_{j=1}^{n-1} a_j.$$

By our inductive hypothesis, $a_i \mid 2\sum_{j=1}^{n-1} a_j = \sum_{k=1}^{n} a_k$ for all $1 \leq i \leq n-1$. Additionally, $a_n = \sum_{j=1}^{n-1} a_j \mid 2\sum_{j=1}^{n-1} a_j = \sum_{k=1}^{n} a_k$.

Solution 2: Constructive.
We would like to use $\sum_{i=0}^{n} 2^i = 2^{n+1} - 1$. Observe that the set $1 \leq 1 < 2 < \ldots < 2^n$ verifies the divisibility condition

$$2^j \mid (1 + 1 + 2 + \ldots) = 2^{n+1}, \quad \forall j = 0, \ldots, n.$$

However, the numbers are not all distinct. To construct the set we desire, let us therefore consider what happens when we take the powers of 2 multiplied by 3 instead. The total sum is $\sum_{i=0}^{n} 3 \cdot 2^i = 3\sum_{i=0}^{n} 2^i = 3 \cdot 2^{n+1} - 3$. Now if we add on the numbers 1 and 2, we have the following set, which gives us everything we want: $1 < 2 < 3 < 3 \cdot 2 < \ldots < 3 \cdot 2^{n-3}$. The total sum is $3 \cdot 2^{n-2}$ and every number divides $3 \cdot 2^{n-2}$.

Solution 3: Reformulation.
Suppose we have a set $a_1, a_2 \ldots a_n$ verifying the condition, and let $b_i = \frac{1}{a_i}(\sum_{k=1}^{n} a_k)$. It follows that $b_1, b_2 \ldots b_n$ are distinct integers satisfying

$$\frac{1}{b_1} + \frac{1}{b_2} + \cdots + \frac{1}{b_n} = 1$$

and that constructing a set of b_i that do this is strictly equivalent to solving the original problem. There are many ways of constructing such a set: one method is induction; take as a base case $\{2, 3, 6\}$ and when passing from n to $n+1$, replace b_n with $b_n + 1$ and $b_n^2 + b_n$ (simply exploiting the fact that $\frac{1}{x} - \frac{1}{x+1} = \frac{1}{x(x+1)}$).
This induction actually provides a completely different set of a_i from the one in the first two solutions; the base case is the same but now every time you increase n by 1, you multiply every element of your previous set by $1 + \sum_{k=1}^{n} a_k$ and then replace the smallest element, which was previously 1 and is now $1 + \sum_{k=1}^{n} a_k$, with 1 and $\sum_{k=1}^{n} a_k$. When going to $n = 4$, for example, you multiply the original set $\{1, 2, 3\}$ by 7 to obtain $\{7, 14, 21\}$, and then replace the 7 with a 6 and a 1.

Marking Scheme

Solution 1

- 1P: Have the idea of induction.
- 1P: Calculate the base case.

- 2P: Have the idea of the induction step (Add the sum to the previous set).
- 2P: Prove that the new set satisfies the condition.
- 1P: Finish the proof.

Solution 2

- 4P: Find a construction.
- 2P: Prove that the condition is satisfied.
- 1P: Finish the proof.

Z2) Find all positive integers $n \geq 2$ such that, for every divisor $d > 1$ of n, we have

$$d^2 + n \mid n^2 + d.$$

Answer: n satisfies the condition of the problem if and only if it is a prime.

Solution: First we observe that all prime numbers satisfy the condition: If n is a prime number, the only allowed value for d is $d = n$ and plugging this into the divisibility condition, we get

$$n^2 + n \mid n^2 + n,$$

which is obviously true.

Now, if n is not a prime number, we can write $n = ab$, where a and b are integers greater than 1. Assume that n satisfies the conditions of the problem. If we choose $d = a$ and substitute $n = ab$ into the divisibility, we get

$$a^2 + ab \mid (ab)^2 + a.$$

Observe that both sides are divisible by a, so we can divide both sides by a to obtain the equivalent statement

$$a + b \mid ab^2 + 1.$$

Analogously, if we choose $d = b$ instead, we get

$$b^2 + ab \mid (ab)^2 + b \quad \Longleftrightarrow \quad b + a \mid a^2 b + 1.$$

Hence, we see that $a + b$ divides both the expressions $ab^2 + 1$ and $a^2 b + 1$, so it divides their sum as well:

$$a + b \mid ab(a + b) + 2.$$

Since $ab(a + b)$ is obviously divisible by $a + b$, the above condition tells us

$$a + b \mid 2.$$

However, since $a, b > 1$, we must have $a + b > 2$ and this is clearly a contradiction to the divisibility above. We conclude that therefore all non-primes cannot satisfy the condition of the problem.

Alternative route: We can also take the difference of $a^2 b + 1$ and $ab^2 + 1$ to obtain

$$a + b \,|\, ab(a - b).$$

Now, if we could choose $\gcd(a, b) = 1$, this would also imply $\gcd(a + b, ab) = 1$, and hence

$$a + b \,|\, a - b,$$

which is impossible. We can choose a, b coprime if and only if n has at least two different prime factors, so the case where n is a prime power is not covered. However, if $n = p^k$ for some $k \geq 2$, we can choose $d = p$ and get

$$p^2 + p^k \,|\, p^{2k} + p \quad \Longrightarrow \quad p^2 \,|\, p(p^{2k-1} + 1) \quad \Longrightarrow \quad p \,|\, p^{2k-1} + 1,$$

which is clearly impossible.

Marking scheme (additive)

- 1P: Stating that all primes work
- 1P: A divisibility condition of the form $a + b \,|\, ab^2 + 1$ for $n = ab$
- 2P: The second divisibility condition $a + b \,|\, a^2 b + 1$ for $n = ab$
- 2P: $a + b \,|\, a^2 b + ab^2 + 2$ **or** $a + b \,|\, ab(b - a)$ and excluding the case $n = p^k$
- 1P: Finishing the proof

MATHEMATICAL.
OLYMPIAD.CH
MATHEMATIK-OLYMPIADE
OLYMPIADES DE MATHÉMATIQUES
OLIMPIADI DELLA MATEMATICA

Deuxième tour 2021

Lausanne, Lugano, Zurich - 19 décembre 2020

Remarque liminaire : Une solution complète rapporte 7 points. Pour chaque problème, jusqu'à 2 points pourront être déduits d'une solution correcte en cas de lacunes mineures. Les solutions partielles sont évaluées selon le barème suivant. Si un problème admet plusieurs barèmes, le score est alors le maximum des scores pour chacun des barèmes.

Ci-dessous vous trouverez les solutions élémentaires connues des correcteurs. Des solutions alternatives sont présentées à la fin de chaque problème. Les étudiants sont naturellement encouragés à essayer toutes les méthodes à leur disposition lors de l'entraînement, mais à ne pas chercher de solutions alternatives qui emploient des méthodes qu'ils ne maîtirent pas en condition d'examen, au risque de perdre un temps précieux.

G1) Soit O le centre du cercle circonscrit d'un triangle aigu ABC. La droite AC coupe le cercle circonscrit du triangle ABO une deuxième fois en S. Montrer que la droite OS est perpendiculaire à la droite BC.

Solution 1 : Reformulation de la conclusion : Pour prouver que OS est perpendiculaire à BC, nous introduisons T comme l'intersection de OS avec BC et montrons que $\angle CTS = 90°$. Par chasse aux angles, nous faisons les observations suivantes.

(a) Comme $AOBS$ sont sur un cercle, nous avons $\angle ASO = \angle ABO$.

(b) Comme O est le centre du cercle ABC, on a $OA = OB$, et le triangle AOB est isocèle en O. Ainsi $\angle AOB = 180° - 2 \cdot \angle ABO$.

(c) Comme O est le centre du cercle ABC, on a $\angle ACB = \frac{1}{2} \cdot \angle AOB$.

En combinant les observations ci-dessus, on obtient

$$\angle SCT = \angle ACB \overset{(c)}{=} \frac{1}{2}\angle AOB \overset{(b)}{=} 90° - \angle ABO \overset{(a)}{=} 90° - \angle ASO = 90° - \angle CST.$$

Ainsi, comme la somme des angles dans le triangle CTS vaut $180°$, on conclut :

$$\angle CTS = 180° - \angle SCT - \angle CST = 90°.$$

Solution 2 : Reformulation de la conclusion : Pour prouver que OS est perpendiculaire à BC, on prouve que le triangle CSB est isocèle en S. En effet, si le triangle CSB était isocèle, alors la médiatrice de BC contiendrait le point S. De plus, on peut remarquer que la médiatrice de BC contient aussi O, puisque $OC = OB$. Ainsi, la droite OS serait la médiatrice de BC, et serait, en particulier, perpendiculaire à BC.

Par chasse aux angles, on fait les observations suivantes.

(a) Comme O est le centre du cercle ABC, on a $OB = OC$ et donc $\angle OCB = \angle OBC$.

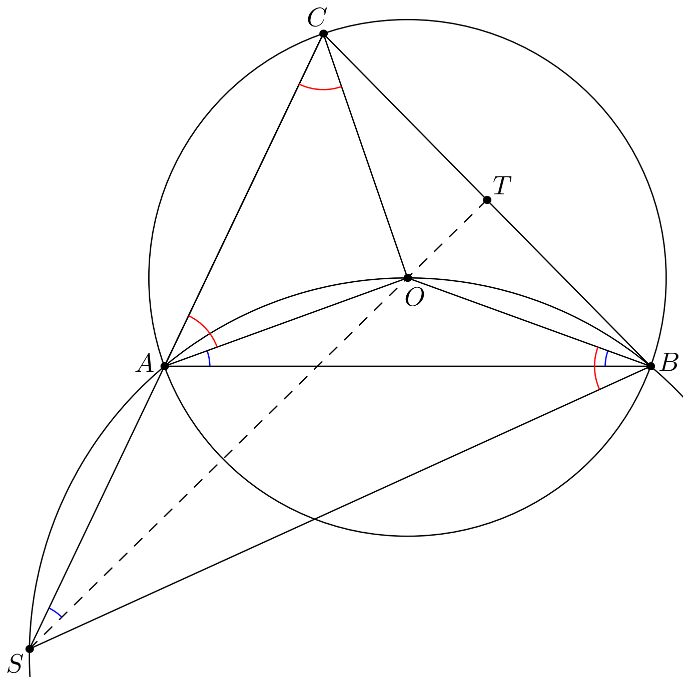
(b) Comme O est le centre du cercle ABC, on a de façon similaire $\angle OCA = \angle OAC$.

(c) Comme $AOBS$ sont sur un cercle, nous avons que $\angle OBS = \angle OAC$.

Ainsi, on conclut que

$$\angle SCB = \angle ACB = \angle ACO + \angle OCB \overset{\text{(a)\&(b)}}{=} \angle OAC + \angle OBC \overset{\text{(c)}}{=} \angle OBS + \angle OBC = \angle SBC.$$

Finalement, le triangle CSB est bien isocèle en S.



Marking Scheme

- 2P : Reformulation de la conclusion en une affirmation du type :
  - $\angle SCT = 90° - \angle CST$ or $\angle SCB = 90° - \angle CSO$.
  - CSB est isocèle en S.
- 1P : Toute affirmation utile utilisant le quadrilatère cyclique $AOBS$ (eg. $\angle OBS = \angle CAO$ ou $\angle ASO = \angle ABO$).
- $\leq$ 2P : 1P pour n'importe quelle affirmation utile utilisant le centre O du cercle ABC (eg. $\angle ACO = \frac{1}{2} \cdot \angle AOB$, $\angle OCB = \angle OBC$, $\angle OCA = \angle OAC$, $\angle OBA = \angle OAB$).
- 2P : Conclure.

G2) Soit ABC un triangle aigu avec $BC > AC$. La médiatrice du segment AB coupe la droite BC en X et la droite AC en Y. Soient P la projection de X sur AC et Q la projection de Y sur BC. Montrer que la droite PQ coupe le segment AB en son milieu.

Solution 1 (chasse aux angles, quadrilatères cycliques) : En posant M comme le milieu d'AB, l'exercice est équivalent à montrer que M, P et Q sont colinéaires. Pour faire cela, nous allons montrer que $\angle MPX + \angle XPQ = 180°$. Nous notons d'abord qu'il y a quelques quadrilatères cycliques :

(a) $YQPX$ est cyclique, car $\angle XPY = 90° = \angle XQY$.

(b) $YQMB$ est cyclique, car $\angle BMY = 90° = \angle BQY$.

(c) $AMXP$ est cyclique, car $\angle XMA = 90° = \angle XPA$.

Comme X est sur la médiatrice d'AB, nous avons $XA = XB$ et $\angle MAX = \angle MBX$ $(*)$.

Alors,

$$\angle MPX \overset{(c)}{=} \angle MAX \overset{(*)}{=} \angle MBX = \angle MBQ \overset{(b)}{=} \angle MYQ = \angle XYQ \overset{(a)}{=} 180° - \angle XPQ.$$

Solution 2 (plus efficace que la Solution 1) : Il y a une façon très similaire de procéder, utilisant seulement deux des quadrilatères inscrits mentionnés plus haut, et le fait que $YA = YB$ implique $\angle MYA = \angle MYB$ $(*)$. Cette fois, nous montrons que M, P et Q sont colinéaires en montrant que $\angle XQP = \angle XQM$. En effet,

$$\angle XQP \overset{(a)}{=} \angle XYP = \angle MYA \overset{(*)}{=} \angle MYB \overset{(b)}{=} \angle MQB = \angle XQM.$$

Solution 3 (Ménélaüs et puissance d'un point) : Nous pourrions être tentés de montrer que M, P et Q sont colinéaires avec Ménélaüs. Nous aurions besoin de

$$\frac{AM}{MB} \cdot \frac{BQ}{QC} \cdot \frac{CP}{PA} \overset{?}{=} -1.$$

Tout d'abord, comme dans les autres preuves, on note que $YQPX$ est cyclique comme $\angle XPY = 90° = \angle XQY$. Écrivons ω pour le cercle $(YQPX)$. Par le théorème de Thalés sur le cercle, son centre est le milieu de XY, en particulier il se trouve sur la médiatrice de AB. Comme la puissance d'un point par rapport à ω est uniquement déterminée par sa distance à ce centre, nous avons que A et B ont la même puissance par rapport à ω, prouvant que

$$PA \cdot AY = XB \cdot BQ.$$

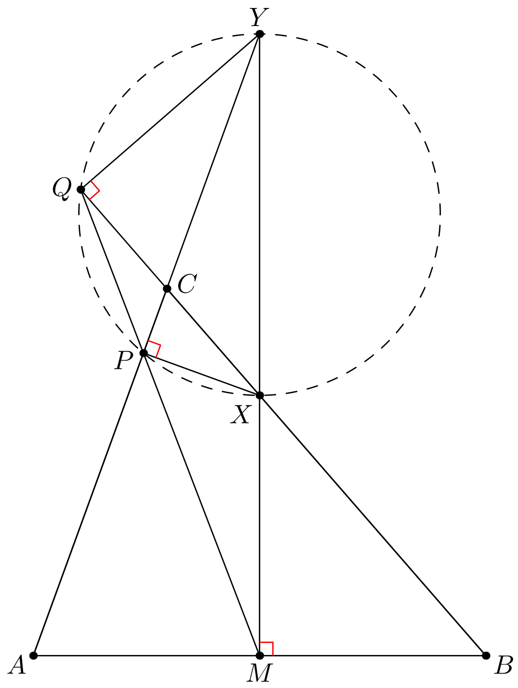
La puissance de C par rapport à ω nous donne aussi que

$$CX \cdot QC = CP \cdot YC.$$

En combinant ces deux égalités, nous obtenons finalement que

$$\frac{AM}{MB} \cdot \frac{BQ}{QC} \cdot \frac{CP}{PA} = -1 \cdot \frac{BQ}{PA} \cdot \frac{CP}{QC} = -1 \cdot \frac{AY}{XB} \cdot \frac{CX}{YC} = \frac{BM}{MA} \cdot \frac{AY}{YC} \cdot \frac{CX}{XB} = -1.$$

Dans la dernière égalité, nous avont utilisé Ménélaüs comme M, Y et X sont colinéaires.



Marking Scheme - Solution 1 et 2

- 1P : Reformuler l'énoncé avec des angles, en une affirmation du type :
  - $\angle MPX + \angle XPQ = 180°$
  - $\angle XQP = \angle XQM$
- 3P : Montrer que $YQPX$, $YQMB$ ou $AMXP$ sont cycliques (2P pour un quadrilatère, 3P pour deux ou trois quadrilatères)
- 1P : Montrer que $\angle MAX = \angle MBX$, $\angle MAY = \angle MBY$ ou que $\angle MYA = \angle MYB$.
- 2P : Conclure.

Marking Scheme - Solution 3

- 1P : Reformuler l'énoncé comme une égalité de type Ménélaüs.
- 1P : Montrer que $YQPX$ est cyclique.
- 2P : Montrer $PA \cdot AY = XB \cdot BQ$.
- 1P : Montrer $CX \cdot QC = CP \cdot YC$.
- 2P : Conclure.

K1) Anaëlle possède $2n$ pierres numérotées $1, 2, 3, \ldots, 2n$ ainsi que deux boîtes, une bleue et une rouge. Elle veut ranger chacune des $2n$ pierres dans l'une des deux boîtes de sorte que les pierres k et $2k$ soient dans des boîtes différentes pour tout $k = 1, 2, \ldots, n$. Combien Anaëlle a-t-elle de manières de le faire ?

Answer : Anaëlle a 2^n manières de le faire.

Solution 1 (bijective) : Pour chaque entier impair $1 \leq t < 2n$, on appelle l'ensemble de pierres avec un numéro de la forme $t \cdot 2^k$, la chaîne commençant en t. Notons que si l'on place une pierre de la chaîne dans une boîte, le placement de toutes les autres pierres de la chaîne est uniquement déterminé. Notons aussi que comme t est impair, des pierres de différentes chaînes sont placées indépendamment comme la condition affecte seulement deux pierres qui sont dans la même chaîne.

Comme chaque pierre appartient à exactement une chaîne, il s'ensuit que chaque distribution de pierres correspond à une distribution d'un représentant de chaque chaîne (e.g. les pierres avec un numéro impair). Comme il y a n chaînes, le nombre total de manières est 2^n.

Solution 2 (inductive) : Nous procédons par induction. Notons que l'affirmation est vraie pour $n = 1$ car les deux pierres (numérotées 1 et 2) doivent être placées dans des boîtes différentes. Nous considérons maintenant le cas $n > 1$ et supposons que l'affirmation est vraie pour toutes les valeurs inférieures à n.

Nous avons déjà qu'Anaëlle a 2^{n-1} manières de distribuer les pierres numérotées $1, 2, \ldots, 2n-2$. La pierre numérotée $2n - 1$ n'est pas affectée par aucune restriction et peut être placée dans n'importe quelle boîte. En revanche, pour la pierre numérotée $2n$, Anaëlle n'a pas le choix , puisqu'elle ne peut pas être dans la même boîte que la pierre numérotée n qui est déjà placée (car $n \leq 2n - 2$). Au total, Anaëlle a donc $2 \cdot 2^{n-1} = 2^n$ manières de distribuer les pierres.

Marking Scheme

Solution 1 (Additive)

- 1P : Calculer la réponse pour au moins une valeur de $n \geq 3$.
- 1P : Avoir l'idée de considérer ces chaînes.
- 2P : Argumenter que le placement d'une pierre dans chaque chaîne détermine le placement de toutes les autres.
- 1P : Argumenter que des chaînes différentes sont indépendantes.
- 1P : Argumenter qu'il y a n chaînes et qu'elles partionnent les pierres.
- 1P : Terminer la preuve.

Solution 2 (Additive)

- 1P : Calculer la réponse pour au moins une valeur de $n \geq 3$.
- 1P : Avoir l'idée de l'induction.
- 2P : S'occuper du cas impair dans le pas d'induction.
- 2P : S'occuper du cas pair dans le pas d'induction.
- 1P : Terminer la preuve.

Remarques (points déductibles seulement pour une solution complète)

- -1P : Manquer un nombre fini de cas.
- -1P : Erreurs de calcul pour la réponse finale.
- Pas de déduction de points pour ne pas avoir mentionné que $n \leq 2n - 2$.

K2) Soient $n \geq 4$ et $k, d \geq 2$ des nombres entiers tel que $k \cdot d \leq n$. Les n participants des Olympiades de Mathématiques sont assis autour d'une table ronde et attendent Patrick. Quand Patrick arrive, il n'est pas content de la situation, car elle ne respecte pas les règles de distance sociale. Il choisit alors k parmi les n participants qui peuvent rester et demande aux autres de partir, de sorte qu'entre deux des k participants restants, il y ait toujours au moins $d-1$ chaises vides. Combien Patrick a-t-il de manières de le faire, si toutes les chaises étaient occupées au début ?

Réponse : $\frac{n}{k}\binom{n-kd+k-1}{k-1}$ ou toute expression équivalente.

Solution 1 : Comptage surjectif. Tout d'abord, numérotons les participants de 1 à n, dans le sens horaire commençant par une personne désignée arbitrairement comme "1". Maintenant, nous commençons à compter le nombre de manières où la personne 1 est choisie. Notons que chacune de ses possibilités correspond au choix de k 'distances' entre participants consécutifs. La contrainte devient alors celle qui force lesdites distances à être plus grandes ou égales à d. Essentiellement, nous voulons alors le nombre de façons de choisir (avec ordre) k nombres plus grands ou égaux que d, qui sommés ensemble, donnent n. Cela peut être calculé de plusieurs manières :

- Par exemple, nous pourrions nous imaginer qu'il y a une table plus petite avec $n - kd + k$ chaises autour, dont la chaise 1 est occupée, et qu'on choisisse $k - 1$ chaises (en plus de la première) pour y placer des participants. Ensuite, on pourra rajouter $d - 1$ chaises entre deux participants consécutifs, donnant alors la configuration finale, et montrant qu'il y avait $\binom{n-kd+k-1}{k-1}$ de le faire.
- Alternativement, on peut considérer ce problème comme celui de distribuer n bonbons identiques parmi k enfants tel que chaque enfant reçoit au moins d bonbons, problème qui est dans le script. Ici, on peut simplement oublier kd bonbons pour satisfaire la contrainte, signifiant qu'on a besoin de distribuer $n - kd$ bonbons parmi k enfants, une combinaison avec répétition, donnant alors $\binom{n-kd+k-1}{k-1}$ manières de procéder.

Maintenant, il reste à voir que considérer toutes les 'rotations' de ses possibilités (en changeant le point fixe de "1" à un autre entier) compte chaque configuration exactement k fois (une fois par personne, qui peut être vue comme un point fixe). On obtient finalement $\frac{n}{k}\binom{n-kd+k-1}{k-1}$.

Si vous ne comprenez pas parfaitement cette solution, pensez-y de cette manière : Considérez le problème originel, mais on choisissant un des participants qui restent comme étant un imposteur[1]*. Comptant le nombre de façons de faire peut se faire comme au-dessus, donnant* $\binom{n-kd+k-1}{k-1}$ *configurations pour chaque choix parmi les n imposteurs possibles. Cependant, cela peut aussi être fait en prenant chacune des possibilités du problème originel, en choisissant un imposteur, donnant k choix pour chaque possiblité originelle.*

Solution 2 : En considérant la plus petite chaise occupée. Comme au-dessus, on peut calculer le nombre de configurations où la personne 1 est choisie comme étant $\binom{n-kd+k-1}{k-1}$.
Maintenant, on cherche à compter le nombre de configurations contenant la personne 2, alors que la personne 1 n'est *pas* choisie. C'est presque la même situation qu'avant (choisir k distances), sauf qu'on a une contrainte additionelle parce qu'on sait que la chaise 1 est dans le dernier espace entre deux chaises. On veut alors distribuer n chaises parmi k espaces avec la contrainte que les premiers $k-1$ distances doivent être au moins d et que la dernière doit être d'au moins $\max(2, d)$ (comme on a besoin que la chaise 1 en fasse partie). On obtient alors $\binom{n-(k-1)d+k-1-\max(2,d)}{k-1}$.
En continuant avec cette façon de penser, nous voyons maintenant que le nombre de possibilités

[1] Quelqu'un du Valais, par exemple.

où la personne 3 est choisie, alors que ni la 1 ni la 2 le sont est de $\binom{n-(k-1)d+k-1-\max(3,d)}{k-1}$. Plus généralement, quand on compte le nombre de possibilités où la personne i est choisie alors que ce n'est pas le cas pour $1, 2, \ldots, i-1$, on obtient[2] $\binom{n-(k-1)d+k-1-\max(i,d)}{k-1}$. On voit alors que sommer cette expression pour tout i donne le nombre de possibilités, comme on compte à chaque fois le nombre de configurations où i est la 'plus petite' chaise occupée, donnant une bijection claire. On obtient donc

$$\sum_{i=1}^{n} \binom{n-(k-1)d+k-1-\max(i,d)}{k-1}$$

Marking Scheme

Solutions 1 et 2 (Additives)

- 0P : Résoudre le cas $n = kd$ et/ou tenter de faire une induction sur n.
- 0P : Affirmer qu'on peut grouper les possibilités en se basant sur la plus petite chaise occupée, après avoir assigné un nombre à chacun des participants.
- 1P : Toute tentative de calculer correctement le nombre de possibilités quand une personne donnée est fixée.
- 1P : Afirmer que cette valeur vaut $\binom{n-kd+k-1}{k-1}$.
- 2P : Prouver cette égalité (1 point peut être donné si la preuve est incomplète ou si le participant ne trouve pas la valeur mais affirme qu'il faut assigner kd espaces par défaut et/ou distribuer $n - kd$ espaces entre toutes les distances).

Compléter la Solution 1 (Additive)

- 1P : Affirmer qu'on peut faire tourner chaque possibilité où une personne est fixée pour obtenir toutes les possibilités.
- 1P : Affirmer que l'idée précédente compte chaque configuration exactement k fois.
- 1P : Conclure.

Compléter la Solution 2 (Additive)

- 2P : Donner l'expression correcte $\binom{n-(k-1)d+k-1-\max(i,d)}{k-1}$ pour quand la personne i est fixée et aucun des participants $1, 2, \ldots i-1$ n'est pris.
- 1P : Affirmer que le nombre total de possibilités est la somme de l'expression précédente pour i allant de 1 à n.

Pour la solution 2, aucun point n'est déduit pour ne pas avoir simplifié la somme.

Annexe : Pourquoi les deux réponses sont égales.
Dans la solution 2, on trouve la réponse suivante :

$$\sum_{i=1}^{n} \binom{n-(k-1)d+k-1-\max(i,d)}{k-1}$$

Est-ce vraiment ce qu'on a dans la solution 1 ? C'est heureusement le cas et on peut le prouver. La chose importante à remarquer est que le coefficient binomial restera le même jusqu'à $i = d$,

[2] Il peut ici être utile d'utiliser la convention que $\binom{a}{b} = 0$ si $a < 0$ ou $a > b$.

et à partir de là, la somme du haut se décrémentera de 1 à chaque fois, jusqu'à atteindre $k-1$; les coefficients binomiaux qui suivront seront tous égaux à 0 après (ils correspondent au cas où la plus petite chaise est trop loin de 1, et les participants n'ont pas assez de place pour occuper l'espace restant). En récrivant, on trouve alors bien :

$$
\begin{aligned}
& d \cdot \binom{n-kd+k-1}{k-1} + \binom{n-kd+k-2}{k-1} + \binom{n-kd+k-3}{k-1} + \cdots + \binom{k-1}{k-1} \\
& = (d-1) \cdot \binom{n-kd+k-1}{k-1} + \sum_{j=k-1}^{n-kd+k-1} \binom{j}{k-1} \\
& = (d-1) \cdot \binom{n-kd+k-1}{k-1} + \binom{n-kd+k}{k} \\
& = (d-1) \cdot \binom{n-kd+k-1}{k-1} + \frac{n-kd+k}{k} \binom{n-kd+k-1}{k-1} \\
& = \frac{n}{k} \binom{n-kd+k-1}{k-1}
\end{aligned}
$$

La seconde égalité au-dessus (transformant la somme en un coefficient binomial) est connue sous le nom du "Hockey-Stick Lemma" et est une propriété connue ; si vous voulez la prouver vous-même, vous devrez vous servir de la propriété $\binom{a}{b} + \binom{a}{b+1} = \binom{a+1}{b+1}$ de façon rusée. Regarder où les termes de la somme se trouvent sur le triangle de Pascal peut vous aider (et vous réaliserez au passage d'où le lemme tire son nom !).

Z1) Montrer que, pour tout nombre entier $n \geq 3$, il existe des nombres entiers strictement positifs $a_1 < a_2 < \ldots < a_n$ tels que

$$a_k \,|\, (a_1 + a_2 + \ldots + a_n)$$

pout tout $k = 1, 2, \ldots, n$.

Solution 1 : La solution se fait par induction.

(a) Cas de base $n = 3$: on observe que $1 < 2 < 3$ est une solution.

(b) Pas d'induction : soit $n \geq 4$ et supposons que le résultat soit vrai pour tout $m \leq n-1$. Soit $a_1 < a_2 < \ldots < a_{n-1}$ tels que $a_i \mid \sum_{j=1}^{n} a_j$ pour tout $1 \leq i \leq n-1$. Alors,

$$a_1 < a_2 < \ldots < a_{n-1} < a_n := \sum_{j=1}^{n-1} a_j$$

vérifie aussi cette propriété. En effet, on observe tout d'abord que, comme $a_i > 0$ pour tout $1 \leq i \leq n-1$, alors $a_n > a_{n-1}$. En outre,

$$\sum_{k=1}^{n} a_k = a_n + \sum_{j=1}^{n-1} a_j = 2\sum_{j=1}^{n-1} a_j.$$

Par hypothèse de récurrence, $a_i \,|\, 2\sum_{j=1}^{n-1} a_j = \sum_{k=1}^{n} a_k$ pour tout $1 \leq i \leq n-1$. De plus, $a_n = \sum_{j=1}^{n-1} a_j \,|\, 2\sum_{j=1}^{n-1} a_j = \sum_{k=1}^{n} a_k$.

Solution 2 : On souhaite utiliser $\sum_{i=0}^{n} 2^i = 2^{n+1} - 1$. Observez que l'ensemble $1 \leq 1 < 2 < \ldots < 2^n$ vérifie la condition de divisibilité

$$2^j \,|\, (1 + 1 + 2 + \ldots) = 2^{n+1}, \quad \forall j = 0, \ldots, n.$$

Mais les nombres ne sont pas tous distincts. Pour construire une suite qui fonctionne, au lieu de considérer les puissances de 2, on considère les puissances de 2 multipliées par 3. La somme devient $\sum_{i=0}^{n} 3 \cdot 2^i = 3\sum_{i=0}^{n} 2^i = 3 \cdot 2^{n+1} - 3$. En ajoutant les nombres 1 et 2 aux puissances de 2 multipliées par 3, on trouve la solution : $1 < 2 < 3 < 3 \cdot 2 < \ldots < 3 \cdot 2^{n-3}$. En effet, la somme totale est $3 \cdot 2^{n-2}$ et chaque nombre divise bien $3 \cdot 2^{n-2}$.

Solution 3 : Reformulation.
Supposons que nous avaons un ensemble $a_1, a_2 \ldots a_n$ vérifiant la condition du problème, et soient $b_i = \frac{1}{a_i}(\sum_{k=1}^{n} a_k)$. Nous avons alors que $b_1, b_2 \ldots b_n$ sont des entiers distincts satisfaisant

$$\frac{1}{b_1} + \frac{1}{b_2} + \cdots + \frac{1}{b_n} = 1$$

et que construire un ensemble de b_i avec cette propriété est équivalent au problème originel. Il y a plusieurs façons de le faire : une induction fonctionnerait par exemple en prenant $\{2, 3, 6\}$ comme ensemble de base et pour passer de n à $n+1$, on remplace b_n par $b_n + 1$ et $b_n^2 + b_n$ (en utilisant que $\frac{1}{x} - \frac{1}{x+1} = \frac{1}{x(x+1)}$).
Cette induction donne en fait une construction complètement différente des deux premières ; le cas de base est le même, mais à chaque fois qu'on augmente n de 1, on multiplie chaque élément de l'ensemble par $1 + \sum_{k=1}^{n} a_k$ et on remplace le plus petit élément, qui était 1 et qui est devenu $1 + \sum_{k=1}^{n} a_k$, par 1 et $\sum_{k=1}^{n} a_k$. Pour aller à $n = 4$, par exemple, on multiplie l'ensemble originel $\{1, 2, 3\}$ par 7 pour obtenir $\{7, 14, 21\}$, et on remplace finalement 7 par 6 et 1.

Marking Scheme

Solution 1

- 1P : Avoir l'idée de l'induction.
- 1P : Calculer le cas de base.
- 2P : Avoir l'idée du pas d'induction (ajouter la somme des éléments à l'ensemble).
- 2P : Montrer que le nouvel ensemble satisfait la condition.
- 1P : Terminer la preuve.

Solution 2

- 4P : Trouver une construction.
- 2P : Prouver que la condition est alors satisfaite.
- 1P : Terminer la preuve.

Z2) Trouver tous les nombres entiers $n \geq 2$ tels que tout diviseur $d > 1$ de n vérifie

$$d^2 + n \mid n^2 + d.$$

Réponse : n satisfait la condition du problème si et seulement si c'est un nombre premier.

Solution : Tout d'abord nous observons que tous les nombres premiers satisfont la condition : Si n est un nombre premier, la seule valeur que peut prendre d est $d = n$ et en remplaçant dans l'équation on a besoin de

$$n^2 + n \mid n^2 + n,$$

qui est clairement vraie.

Maintenant, si n n'est pas un nombre premier, on peut écrire $n = ab$, où a et b sont des entiers plus grands que 1. Supposons que n satisafait les conditions du problème. Si on choisit $d = a$ et on substitue $n = ab$ dans la divisibilité, on obtient

$$a^2 + ab \mid (ab)^2 + a.$$

Observons que les deux côtés sont divisibles par a, et on peut diviser les deux par a pour obtenir l'affirmation équivalente

$$a + b \mid ab^2 + 1.$$

De façon analogue, en choisissant $d = b$, nous obtenons

$$b^2 + ab \mid (ab)^2 + b \quad \Longleftrightarrow \quad b + a \mid a^2 b + 1.$$

Ainsi, nous voyons que $a + b$ divise les expressions $ab^2 + 1$ et $a^2b + 1$, donc $a + b$ divise leur somme :

$$a + b \mid ab(a + b) + 2.$$

Comme $ab(a + b)$ est clairement divisible par $a + b$, la condition du dessus nous donne

$$a + b \mid 2.$$

Cependant, comme $a, b > 1$, nous avons $a + b > 2$, une contradiction avec la divisibilité plus haut. Nous concluons alors qu'aucun nombre composé (qui n'est pas premier) ne peut satisfaire la condition du problème.

Route alternative : Nous pouvons aussi soustraire $ab^2 + 1$ de $a^2b + 1$ et ainsi obtenir

$$a + b \mid ab(a - b).$$

Maintenant, si nous pouvions forcer $\text{pgdc}(a, b) = 1$, cela impliquerait $\text{pgdc}(a + b, ab) = 1$, et ainsi

$$a + b \mid a - b,$$

ce qui est impossible. On peut choisir a, b premiers entre eux si et seulement si n a au moins deux diviseurs premiers distincts, donc il nous manque juste le cas où n est une puissance d'un premier. Or, si $n = p^k$ pour $k \geq 2$, nous pouvons choisir $d = p$ et obtenir

$$p^2 + p^k \mid p^{2k} + p \quad \Longrightarrow \quad p^2 \mid p(p^{2k-1} + 1) \quad \Longrightarrow \quad p \mid p^{2k-1} + 1,$$

ce qui est clairement impossible.

Marking scheme (additif)

- 1P : Affirmer que tous les premiers fonctionnent.
- 1P : Une condition de divisibilité de la forme $a + b \mid ab^2 + 1$ pour $n = ab$.
- 2P : La seconde condition de divisibilité $a + b \mid a^2b + 1$ pour $n = ab$.
- 2P : $a + b \mid a^2b + ab^2 + 2$ **ou** $a + b \mid ab(b - a)$ et exclure le cas $n = p^k$.
- 1P : Terminer la preuve.