

SMO - Selektion 2018

2. Prüfung - 13. Mai 2018

Zeit: 4.5 Stunden

Schwierigkeit: Die Aufgaben sind der Schwierigkeit nach geordnet.

Punkte: Jede Aufgabe ist 7 Punkte wert.

4. Sei n eine gerade natürliche Zahl. Wir teilen die Zahlen $1, 2, \dots, n^2$ in zwei gleiche grosse Mengen A und B auf, sodass jede der n^2 Zahlen in genau einer der Mengen ist. Seien S_A und S_B die Summe aller Elemente in A respektive B . Bestimme alle n , sodass es eine Aufteilung gibt mit

$$\frac{S_A}{S_B} = \frac{39}{64}.$$

5. Für eine natürliche Zahl n sei ein $n \times n$ Brett gegeben. Wir färben nun k der Felder schwarz ein, sodass es für jeweils drei Spalten maximal eine Reihe gibt, in der alle Kreuzungsfelder mit den drei Spalten schwarz gefärbt sind. Zeige, dass gilt:

$$\frac{2k}{n} \leq \sqrt{8n-7} + 1.$$

6. Seien A, B, C und D vier Punkte, die in dieser Reihenfolge auf einem Kreis liegen. Nehme an, es gibt einen Punkt K auf der Strecke AB , sodass BD die Strecke KC und AC die Strecke KD halbiert. Bestimme den kleinstmöglichen Wert, den $\left| \frac{AB}{CD} \right|$ annehmen kann.

Viel Glück!