

OSM - Sélection 2018

Deuxième examen - 13 mai 2018

Temps : 4.5 heures

Difficulté : Les exercices sont classés selon leur difficulté.

Points : Chaque exercice vaut 7 points.

4. Soit n un nombre naturel pair. On partitionne les nombres $1, 2, \dots, n^2$ en deux ensembles A et B de taille égale, de telle manière que chacun des n^2 nombres appartient à exactement un des deux ensembles. Soient S_A et S_B la somme de tous les éléments dans A et B respectivement. Déterminer tous les n pour lesquels il existe une partition telle que

$$\frac{S_A}{S_B} = \frac{39}{64}.$$

5. Soit n un nombre naturel. On considère une grille $n \times n$. On colorie k cases en noir, de telle manière que, pour n'importe quelles trois colonnes, il existe au plus une ligne qui intersecte chacune de ces trois colonnes en une case noire. Prouver que

$$\frac{2k}{n} \leq \sqrt{8n-7} + 1.$$

6. Soient A, B, C et D quatre points sur un cercle, placés dans cet ordre. Supposons qu'il existe un point K sur le segment AB tel que BD coupe KC en son milieu et que AC coupe KD en son milieu. Déterminer la valeur minimale que $\left| \frac{AB}{CD} \right|$ peut atteindre.

Bonne chance !