IMO - Selektion 2000 Lösungen

1. Einem Kreis ist ein konvexes Viereck $ABCD$ einbeschrieben. Zeige, dass die Sehne, welche die Mittelpunkte der beiden Bogen $\widehat{AB}$ und $\widehat{CD}$ verbindet, senkrecht steht auf der Sehne, welche die beiden Bogenmittelpunkte von $\widehat{BC}$ und $\widehat{DA}$ miteinander verbindet.

Lösung

Lemma. *Sei $ABCD$ ein konvexes Sehnenviereck und P der Diagonalenschnittpunkt. Es gilt*

$$\angle APB = \angle ACB + \angle CBD$$

oder in Worten ausgedrückt: der Winkel $\angle APB$ ist so gross wie die Summe der beiden Periphieriewinkel über AB und CD.

Beweis des Lemmas. Aussenwinkelsatz in $\triangle BCP$. □

Wir nennen die Bogenmittelpunkte von $\widehat{AB}, \widehat{BC}, \widehat{CD}$ und $\widehat{DA}$ mit M, N, P bzw. Q. Nach obigem Lemma stehen die Geraden MP und NQ senkrecht aufeinander, wenn die Summe der beiden Bogen $\widehat{MN}$ und $\widehat{PQ}$ einen Halbkreis bildet. Dies ist der Fall, denn

$$\begin{aligned}
\widehat{MN} + \widehat{PQ} &= \widehat{MB} + \widehat{BN} + \widehat{PD} + \widehat{DQ} \\
&= \widehat{MA} + \widehat{CN} + \widehat{PC} + \widehat{AQ} \\
&= \widehat{QM} + \widehat{NP}
\end{aligned}$$

Somit ist $\widehat{MN} + \widehat{PQ} = \widehat{QM} + \widehat{NP} =$ halber Kreisumfang.

2. Die reellen Zahlen $a_1, a_2, \ldots, a_{16}$ erfüllen die beiden Bedingungen

$$\sum_{i=1}^{16} a_i = 100 \qquad \text{und} \qquad \sum_{i=1}^{16} a_i^2 = 1000.$$

Was ist der grösstmögliche Wert, den a_{16} annehmen kann?

Lösung

Setze $S = a_1 + \ldots + a_{15}$ und $Q = a_1^2 + \ldots + a_{15}^2$. Nach AM-QM gilt $S^2 \leq 15Q$. Die Nebenbedingungen lauten $100 - a_{16} = S$ und $1000 - a_{16}^2 = Q$. Quadriert man die erste und subtrahiert 15 mal die zweiten, dann folgt

$$16a_{16}^2 - 200a_{16} - 5000 = S^2 - 15Q \leq 0.$$

Das quadratische Polynom links hat die Nullstellen $-25/2$ und 25. Daher gilt $a_{16} \leq 25$. Gilt Gleichheit, dann muss auch in AM-GM Gleichheit herrschen, also $a_1 = \ldots = a_{15}$. Einsetzen in die Nebenbedingungen liefert die Lösung $a_1 = \ldots = a_{15} = 5$ und $a_{16} = 25$. Der grösstmögliche Wert ist also in der Tat $a_{16} = 25$.

3. Gegeben sind ein gleichseitiges Dreieck mit der Seitenlänge 1 und fünf gleich grosse, gleichseitige Dreiecke der Seitenlänge $s < 1$. Zeige: Lässt sich das grosse Dreieck mit den fünf kleinen überdecken, so lässt es sich auch schon mit vier der kleinen überdecken.

Lösung

Betrachte folgende 6 Punkte im oder auf dem Rand des grossen Dreiecks: die drei Eckpunkte und die drei Seitenmittelpunkte. Wenn sich das grosse Dreieck mit den fünf kleinen überdecken lässt, muss nach dem Schubfachprinzip eines der kleinen Dreiecke mindestens 2 dieser 6 Punkte überdecken. Diese 6 Punkte haben aber gegenseitige Abstände $\geq 1/2$, also gilt $s \geq 1/2$. Nun ist klar, dass bereits vier der Dreiecke genügen, um das grosse zu überdecken.

4. Es sei $q(n)$ die Quersumme der natürlichen Zahl n. Bestimme den Wert von

$$q(q(q(2000^{2000}))).$$

Lösung

Es gilt $q(2000^{2000}) = q(2^{2000})$, denn die beiden Zahlen unterscheiden sich nur um angehängte Nullen. Wir schätzen nun ab. Es gilt $2^{2000} = 4 \cdot 8^{666} < 10^{667}$ und somit

$$q(2^{2000}) \leq 9 \cdot 667 = 6003.$$

Weiter ist damit

$$q(q(2^{2000})) \leq 5 + 9 + 9 + 9 = 32 \qquad \text{und} \qquad q(q(q(2^{2000}))) \leq 2 + 9 = 11.$$

Andererseits gilt bekanntlich $q(n) \equiv n \pmod 9$ für alle natürlichen Zahlen n. Mit $\varphi(9) = 6$ ergibt sich

$$2000^{2000} \equiv 2^{333 \cdot 6 + 2} = (2^6)^{333} \cdot 4 \equiv 4 \pmod 9.$$

Die gesuchte Zahl ist also einerseits ≤ 11 und andererseits $\equiv 4 \pmod 9$, also gleich 4.

5. Mit Hilfe der drei Buchstaben I, M, O werden Wörter der Länge n gebildet. Wieviele solche Wörter der Länge n gibt es, in denen keine benachbarten M's vorkommen?

Lösung

Wir nennen ein Wort *zulässig*, wenn es keine zwei benachbarten M's enthält. Sei a_n die Anzahl zulässiger Wörter der Länge n und b_n die Anzahl zulässiger Wörter der Länge n, die nicht mit einem M beginnen. Nehme ein zulässiges Wort der Länge n und entferne den ersten Buchstaben, das verbleibende Wort nennen wir *Stumpf*. Der Stumpf ist ein zulässiges Wort der Länge $n-1$. Beginnt das Wort nicht mit einem M, dann gibt es keine Einschränkung an den Stumpf, also a_{n-1} Möglichkeiten. Beginnt es aber mit einem M, darf der Stumpf nicht auch mit M beginnen, es bleiben also b_{n-1} Möglichkeiten. Dies liefert die Rekursionsgleichungen $a_n = 2a_{n-1} + b_{n-1}$ und $b_n = 2a_{n-1}$. Kombination dieser Gleichungen liefert sofort

$$a_n = 2a_{n-1} + 2a_{n-2}, \qquad n \geq 3.$$

Das charakteristische Polynom dieser Rekursionsgleichung lautet $x^2 - 2x - 2$ und hat die Nullstellen $1 \pm \sqrt{3}$. Es gibt daher reelle Konstanten A und B mit

$$a_n = A(1+\sqrt{3})^n + B(1-\sqrt{3})^n.$$

Einsetzen von $a_1 = 3$ und $a_2 = 8$ liefert für A und B die Gleichungen $3 = (1+\sqrt{3})A + (1-\sqrt{3})B$ und $8 = (4+2\sqrt{3})A + (4-2\sqrt{3})B$. Daraus folgt $A = (3+2\sqrt{3})/6$ und $B = (3-2\sqrt{3})/6$, es gilt also die explizite Formel

$$a_n = \frac{1}{6}\left[(3+2\sqrt{3})(1+\sqrt{3})^n + (3-2\sqrt{3})(1-\sqrt{3})^n\right].$$

Die ersten paar Werte finden sich in untenstehender Tabelle:

n	1	2	3	4	5	6	7
a_n	3	8	22	60	164	448	1224

1a. Die positiven reellen Zahlen x, y und z haben Summe 1. Zeige, dass gilt

$$\sqrt{7x+3} + \sqrt{7y+3} + \sqrt{7z+3} \leq 7.$$

Kann die Zahl 7 auf der rechten Seite durch eine kleinere Zahl ersetzt werden?

Lösung

Nach AM-QM ist die linke Seite höchstens gleich

$$3 \cdot \sqrt{\frac{(7x+3)+(7y+3)+(7z+3)}{3}} = 3 \cdot \sqrt{16/3} = 4\sqrt{3} < 7.$$

2a. Beweise, dass die Gleichung

$$14x^2 + 15y^2 = 7^{2000}$$

keine ganzzahlige Lösungen (x, y) besitzt.

Lösung

Betrachte die Gleichung modulo 3. Wegen $7 \equiv 1 \pmod 3$ lautet sie

$$2x^2 \equiv 1 \pmod 3.$$

Quadrate sind aber $\equiv 0, 1 \pmod 3$, also nimmt die linke Seite nur die Werte 0 und 2 an, Widerspruch. Es gibt keine ganzzahligen Lösungen.

3a. Für $x > 0$ sei $f(x) = 4^x/(4^x + 2)$. Bestimme den Wert der Summe

$$\sum_{k=1}^{1290} f\left(\frac{k}{1291}\right).$$

Lösung

Es gilt für $0 < x < 1/2$

$$f\left(\frac{1}{2}+x\right)+f\left(\frac{1}{2}-x\right)=\frac{2\cdot 4^x}{2\cdot 4^x+2}+\frac{2\cdot 4^{-x}}{2\cdot 4^{-x}+2}=\frac{4^x}{4^x+1}+\frac{1}{1+4^x}=1,$$

wobei wir beide Brüche mit 2 gekürzt und den zweiten mit 4^x erweitert haben. Damit folgt nun leicht

$$\sum_{k=1}^{1290} f\left(\frac{k}{1291}\right)=\sum_{k=1}^{645} f\left(\frac{k}{1291}\right)+f\left(1-\frac{k}{1291}\right)=\sum_{k=1}^{645} 1=645.$$

4a. Gegeben sind zwei Kreise k_1 und k_2, die sich in den verschiedenen Punkten P und Q schneiden. Konstruiere eine durch P verlaufende Strecke AB mit ihren Endpunkten auf k_1 und k_2, sodass das Produkt $|AP|\cdot|PB|$ maximal ist.

Lösung

Seien t_1 und t_2 die Tangenten an k_1 und k_2 in P. Diese zerlegen die Ebene in vier Gebiete, von denen eines den Punkt Q enthält. Sei G die Vereinigung der beiden gegenüberliegenden Gebiete, welche den Punkt Q nicht enthalten. Offenbar muss die Strecke AB ganz in G verlaufen denn sonst ist $A=P$ oder $B=P$ und das Produkt $|AP|\cdot|PB|$ verschwindet. Sei α der Öffnungswinkel von G und sei $0\leq\varphi\leq\alpha$ der Winkel zwischen AB und t_1. Seien r_1, r_2 die Radien der Kreise k_1, k_2. Nach dem Tangenten-Zentriwinkelsatz besitzt die Sehne AP in k_1 den Zentriwinkel 2φ und hat daher die Länge $|AP|=2r_1\sin(\varphi)$. Der Winkel zwischen PB und t_2 ist gleich $\alpha-\varphi$ und man erhält analog $|PB|=2r_2\sin(\alpha-\varphi)$. Um nun das Produkt $|AP|\cdot|PB|$ zu maximieren, müssen wir das Maximum von $\sin(\varphi)\cdot\sin(\alpha-\varphi)$ finden. Nach der Produkt-zu-Summen Formel gilt

$$\sin(\varphi)\cdot\sin(\alpha-\varphi)=\frac{1}{2}(\cos(2\varphi-\alpha)-\cos(\alpha)).$$

Dies ist genau dann maximal, wenn der erste Summand den grösstmöglichen Wert annimmt, also wenn $\varphi=\alpha/2$. Die gesuchte Strecke liegt also auf der in G liegenden Winkelhalbierenden der beiden Tangenten.

5a. Auf einer kreisförmigen Rennbahn ist an n verschiedenen Positionen je ein Auto startbereit. Jedes von ihnen fährt mit konstantem Tempo und braucht eine Stunde pro Runde. Sobald das Startsignal ertönt, fährt jedes Auto sofort los, egal in welche der beiden möglichen Richtungen. Falls sich zwei Autos begegnen, ändern beide ihre Richtung und fahren ohne Zeitverlust weiter. Zeige, dass es einen Zeitpunkt gibt, in dem sich alle Autos wieder in ihren ursprünglichen Startpositionen befinden.

Lösung

Nehme an, jedes Auto führt eine Fahne mit sich. Wenn sich zwei Autos begegnen, tauschen sie die Fahnen aus. Die Fahnen ändern also nie ihre Bewegungsrichtung und sind daher nach einer Stunde alle wieder an ihrem ursprünglichen Platz. Das bedeutet aber, dass auch die n Autos wieder alle auf den Startpositionen stehen, aber eventuell

permutiert. Sei π diese Permutation. Jede weitere Stunde permutiert die Autos offenbar wieder in derselben Weise (die Fahrtrichtung an jedem der Sartplätze ist dieselbe wie am Anfang), also ist die Platzvertauschung der Autos nach k Runden gegeben durch die Permutation $\pi^k = \pi \circ \ldots \circ \pi$. Wir zeigen nun, dass eine Zahl d existiert, sodass $\pi^d = \mathrm{id}$ die Identität ist. Dann befinden sich alle Autos nach d Runden wieder auf ihrem Startplatz.
Betrachte dazu die Folge $\pi, \pi^2, \pi^3, \ldots$. Da es nur endlich viele Permutationen von n Dingen gibt (nämlich $n!$ Stück), müssen zwei Gleider in dieser Folge übereinstimmen, das heisst, es gibt $i < j$ mit $\pi^i = \pi^j$. Da π eine bijektive Abbildung ist, können wir diese Gleichung mit π^i kürzen und erhalten $\pi^{j-i} = \mathrm{id}$, wie gewünscht.

6. Jede Ecke eines regelmässigen $2n$-Ecks ($n \geq 3$) soll mit einer Zahl aus der Menge $\{1, 2, \ldots, 2n\}$ beschriftet werden, und zwar so, dass die Summe der Zahlen benachbarter Ecken stets gleich ist wie die Summe der Zahlen in den beiden diametral gegenüberliegenden Ecken. Zudem müssen die in den $2n$ Ecken stehenden Zahlen alle verschieden sein. Zeige, dass dies genau dann möglich ist, wenn n ungerade ist.

Lösung

Die Zahlen in den Ecken seien $a_1, \ldots, a_{2n}$ in dieser Reihenfolge, die Indizes werden wir modulo $2n$ betrachten. Wir können oBdA annehmen, dass $a_1 > a_{n+1}$ ist. Da $a_1 + a_2 = a_{n+1} + a_{n+2}$ gilt, muss $a_2 < a_{n+2}$ sein. Mit der gleichen Argumentation folgt induktiv $a_i > a_{n+i}$ falls i ungerade ist und $a_i < a_{n+i}$ falls i gerade ist. Wenn nun n gerade ist, folgt daraus insbesondere $a_{n+1} > a_{2n+1} = a_1$, im Widerspruch zur Annahme. Daher muss n ungerade sein. Man rechnet leicht nach, dass für ungerades $n = 2k + 1$ folgende Zahlverteilung die gewünschte Eigenschaft hat:

$$\begin{array}{rcll} a_{2i+1} & = & 1 + 4i & \quad 0 \leq i \leq k \\ a_{2i} & = & 4i & \quad 1 \leq i \leq k \\ a_{n+2i+1} & = & 2 + 4i & \quad 0 \leq i \leq k \\ a_{n+2i} & = & -1 + 4i & \quad 1 \leq i \leq k \end{array}$$

Damit sind die Bedingungen der Aufgabe genau dann erfüllbar, wenn n ungerade ist.

7. Bestimme alle Funktionen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, sodass für alle reellen Zahlen x und y gilt

$$f(f(x) + y) = f(x^2 - y) + 4yf(x).$$

Lösung

Setzt man in der Gleichung $y = -f(x)$ ein, dann folgt

$$f(0) = f(x^2 + f(x)) - 4f(x)^2. \tag{1}$$

Für $y = x^2$ erhält man

$$f(f(x) + x^2) = f(0) + 4x^2 f(x). \tag{2}$$

Kombination von (1) und (2) ergibt nun $4f(x)^2 = f(f(x)+x^2) - f(0) = 4x^2 f(x)$, also $f(x)(f(x) - x^2) = 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$. Daraus folgt, dass für jede relle Zahl x entweder

$f(x) = 0$ oder $f(x) = x^2$ gilt. Insbesondere ist $f(0) = 0$ und Einsetzen von $x = 0$ in der ursprünglichen Gleichung ergibt $f(y) = f(-y)$ für alle $y \in \mathbb{R}$, folglich ist f eine gerade Funktion.

Nehme nun an, es gäbe reelle Zahlen $a, b \neq 0$ mit $f(a) = 0$ und $f(b) = b^2$. Einsetzen von $x = a$ und $y = b$ ergibt dann $b^2 = f(b) = f(a^2 - b)$. Die rechte Seite ist gleich 0 oder gleich $(a^2 - b)^2$. Ersteres kann nicht sein, denn dann wäre $a = 0$, im Widerspruch zur Annahme. Daher gilt $b^2 = (a^2 - b)^2$, also $a^2 - b = \pm b$. Steht rechts das Minuszeichen, folgt wieder $a = 0$, Widerspruch. Folglich muss $a^2 = 2b$ gelten. Da f gerade ist, gilt nun auch $f(-b) = (-b)^2$ und dieselbe Argumentation mit a und $-b$ ergibt $a^2 = -2b$. Daraus folgt $a = b = 0$, Widerspruch. Folglich ist entweder $f(x) = 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$ oder $f(x) = x^2$ für alle $x \in \mathbb{R}$. Man rechnet leicht nach, dass diese beiden Funktionen tatsächlich Lösungen der Gleichung sind.

8. Der Inkreis des Dreiecks ABC berührt die Seiten AB, BC und CA in den Punkten D, E und F. Sei P ein Punkt im Innern von ABC, sodass der Inkreis von ABP die Seite AB ebenfalls in D berührt und die Seiten AP und BP in den Punkten Q und R. Zeige, dass die vier Punkte E, F, R und Q auf einem Kreis liegen.

Lösung

Wir zeigen im Folgenden mit Winkeljagd, dass $\angle FER + \angle FQR = 180°$ gilt.
Sei I der Inkreismittelpunkt und k_1 der Inkreis von $\triangle ABC$ und k_2 der Inkreis von $\triangle ABP$. Die Geraden AF und AD liegen beide tangential an k_1, es gilt also $AF = AD$. Ebenfalls liegen AQ und AD beide tangential an k_2, woraus $AQ = AD$ folgt. Zusammen und mit analoger Überlegung für B erhalten wir

$$AD = AQ = AF \qquad \text{und} \qquad BD = BR = BE.$$

Wir benennen den Kreis mit Mittelpunkt A und Radius AD mit k_A und den Kreis mit Mittelpunkt B und Radius BD mit k_B. Nun führen wir Bezeichnungen für die Winkel ein:

$$\angle DAQ = 2\alpha \qquad \angle QAF = 2\beta \qquad \angle DBR = 2\gamma \qquad \angle RBE = 2\delta.$$

Aus dem Zentri-Peripheriewinkelsatz folgt daraus

$$\angle DFQ = \alpha \qquad \angle QDF = \beta \qquad \angle DER = \gamma \qquad \angle RDE = \delta.$$

Weil $ADIF$ ein Sehnenviereck ist (rechte Winkel bei D und F), gilt $\angle FID = 180° - 2\alpha - 2\beta$. Vom Zentri-Peripheriewinkelsatz in k_1 erhalten wir nun

$$\angle FER = \angle FED - \angle DER = \frac{1}{2}\angle FID - \gamma = 90° - \alpha - \beta - \gamma.$$

Wir wollen nun noch $\angle FQR$ berechnen. Dazu bemerken wir als erstes, dass aus der Gleichschenkligkeit von $\triangle BDR$ folgt $\angle DRB = 90° - \gamma$. Die Gerade BR liegt tangential an k_2 und nach dem Tangentenwinkelsatz erhalten wir $\angle RQD = 90° - \gamma$. Wir können nun $\angle FQR$ ausrechnen

$$\begin{aligned}\angle FQR &= 360° - \angle FQD - \angle DQR = 360° - (180° - \alpha - \beta) - (90° - \gamma)\\ &= 90° + \alpha + \beta + \gamma\end{aligned}$$

Offensichtlich gilt nun $\angle FER + \angle FQR = 180°$.

9. Sei P ein Polynom vom Grad n, sodass gilt

$$P(k) = \frac{k}{k+1} \qquad \text{für} \qquad k = 0, 1, 2, \ldots, n.$$

Finde $P(n+1)$.

Lösung

Betrachte das Polynom $Q(x) = (x+1)P(x) - x$. Q hat Grad $n+1$ und nach Voraussetzung die $n+1$ Nullstellen $k = 0, 1, \ldots, n$. Es gibt also eine Konstante a mit

$$Q(x) = ax(x-1)(x-2)\cdots(x-n).$$

Ausserdem ist $Q(-1) = ((-1)+1)P(x) - (-1) = 1$. Einsetzen von $x = -1$ in obige Formel liefert dann $1 = (-1)^{n+1}(n+1)! \cdot a$, also $a = (-1)^{n+1}/(n+1)!$. Daraus folgt jetzt $Q(n+1) = (-1)^{n+1}$ und somit

$$P(n+1) = \frac{Q(n+1) + (n+1)}{n+2} = \begin{cases} 1 & n \text{ ungerade,} \\ \dfrac{n}{n+2} & n \text{ gerade.} \end{cases}$$

10. Es sei $S = \{P_1, P_2, \ldots, P_{2000}\}$ eine Menge von 2000 Punkten im Innern eines Kreises vom Radius 1, sodass einer der Punkte der Kreismittelpunkt ist. Für $i = 1, 2, \ldots, 2000$ bezeichne x_i den Abstand von P_i zum nächstgelegenen Punkt $P_j \neq P_i$ aus S. Zeige, dass gilt

$$x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_{2000}^2 < 9.$$

Lösung

Da einer der Punkte der Kreismittelpunkt ist, gilt $x_i < 1$ für alle i. Zeichne um jeden Punkt $P_i \in S$ einen Kreis mit Radius $x_i/2$. Je zwei dieser Kreise haben höchstens einen Randpunkt gemeinsam. Falls nicht, dann gibt es zwei Indizes i, j und einen Punkt A der im Innern des Kreises um P_i und im Innern oder auf dem Rand des Kreises um P_j liegt. Nach der Dreiecksungleichung folgt dann aber

$$|P_iP_j| \leq |P_iA| + |AP_j| < x_i/2 + x_j/2 \leq \max\{x_i, x_j\},$$

im Widerspruch zur Definition von x_i und x_j. Betrachte einen grossen Kreis vom Radius 3/2 mit demselben Mittelpunkt wie der gegebene Kreis von Radius 1. Alle kleinen Kreise liegen ganz in diesem grossen Kreis drin, denn es gilt ja $x_i < 1$ für alle i. Da sie sich nicht überlappen, ist die Summe ihrer Flächen höchstens so gross wie die Fläche des grossen Kreises (in der Tat echt kleiner!). Dies liefert

$$\sum_{i=1}^{2000} \pi(x_i/2)^2 < \pi(3/2)^2.$$

Kürzt man dies mit $\pi/4$, dann folgt die Behauptung.