

Sélection IMO - 3ème examen

Zürich - 16 Mai 2015

Temps : 4.5 heures

Chaque exercice vaut 7 points.

7. Trouver tous les ensembles finis et non-vides A de fonctions $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ tels que :

Pour tous $f_1, f_2 \in A$, il existe $g \in A$ telle que pour tout $x, y \in \mathbb{R}$

$$f_1(f_2(y) - x) + 2x = g(x + y).$$

8. Trouver tous les triplets d'entiers naturels (a, b, c) tels que pour tout entier naturel n qui n'a pas de diviseur premier plus petit que 2015

$$n + c \mid a^n + b^n + n.$$

9. Soit $n \geq 2$ un entier naturel. Au centre d'un jardin circulaire se trouve une tour de garde. A la périphérie du jardin se trouvent n nains de jardin régulièrement espacés. Dans la tour se trouvent des surveillants attentifs. Chaque surveillant contrôle une portion du jardin délimitée par deux nains.

Nous disons que le surveillant A contrôle le surveillant B si la région de B est contenue dans celle de A .

Parmi les surveillants il y a deux groupes: les apprentis et les maîtres. Chaque apprenti est contrôlé par exactement un maître, et ne contrôle personne, tandis que les maîtres ne sont contrôlés par personne.

Le jardin dans son entier a les coûts d'entretien suivants:

- Un apprenti coûte 1 pièce d'or par année.
- Un maître coûte 2 pièces d'or par année.
- Un nain de jardin coûte 2 pièces d'or par année.

Montrer que les nains de jardins coûtent au moins autant que les surveillants.

Bonne chance!