MATHEMATICAL.
OLYMPIAD.CH
MATHEMATIK-OLYMPIADE
OLYMPIADES DE MATHÉMATIQUES
OLIMPIADI DELLA MATEMATICA

Zweite Runde 2021

Lausanne, Lugano, Zürich - 19. Dezember 2020

Vorläufige Bemerkung: Eine vollständige Lösung ist 7 Punkte wert. Bei jeder Aufgabe kann es bis zu 2 Punkte Abzug geben für kleine Fehler bei einer sonst korrekten Lösung. Teilpunkte werden gemäss dem Punkteschema (Marking Scheme) vergeben. Man kann pro Aufgabe höchstens für ein Marking Scheme Punkte erhalten (man bekommt dabei stets die grösstmögliche Punktzahl)

Im Anschluss befinden sich die Lösungen mit Vorrundentheorie, die den Korrektoren bekannt sind. Am Ende jedes Problems werden noch alternative Lösungen präsentiert, die auch andere Theorie verwenden können. Während des Trainings zu Hause werden die Teilnehmenden dazu ermutigt, alle ihnen bekannten Methoden zu verwenden. An der Prüfung hingegen ist es nicht empfohlen mit Methoden, welche sie unter Prüfungskonditionen nicht genügend beherrschen, nach alternativen Lösungen zu suchen. Damit wird riskiert, dass wertvolle Zeit verloren geht.

G1) Sei ABC ein spitzwinkliges Dreieck mit Umkreismittelpunkt O. Die Gerade AC schneidet den Umkreis des Dreiecks ABO ein zweites Mal in S. Beweise, dass die Geraden OS und BC senkrecht aufeinander stehen.

Lösung 1: Sei T der Schnittpunkt von OS mit BC. Es genügt nun zu zeigen, dass $\angle CTS = 90°$ gilt. Mit Winkeljagd finden wir:

(a) $\angle ASO = \angle ABO$, da $AOBS$ ein Sehnenviereck ist.

(b) $\angle AOB = 180° - 2 \cdot \angle ABO$, da O der Umkreismittelpunkt von ABC ist und somit das Dreieck AOB gleichschenklig ist.

(c) $\angle ACB = \frac{1}{2} \cdot \angle AOB$ nach dem Zentriwinkelsatz, da O Mittelpunkt des Kreises ABC ist.

Zusammen ergibt dies nun:

$$\angle SCT = \angle ACB \overset{(c)}{=} \frac{1}{2}\angle AOB \overset{(b)}{=} 90° - \angle ABO \overset{(a)}{=} 90° - \angle ASO = 90° - \angle CST.$$

Da sich nun die drei Winkel des Dreiecks CTS zu $180°$ addieren, folgt

$$\angle CTS = 180° - \angle SCT - \angle CST = 90°.$$

Wie gewünscht.

Lösung 2: Um das Gewollte zu zeigen, genügt es zu zeigen, dass CSB gleichschenklig in S ist. In der Tat, wäre CSB gleichschenklig bei S, so würde die Mittelsenkrechte zu BC durch S gehen. Doch die Mittelsenkrechte geht auch durch O, da O das Zentrum des Kreises ABC ist(Es gilt $OB = OC$). Die gerade OS wäre also insbesondere die Mittelsenkrechte von BC und somit auch senkrecht zu BC.
Mit Winkeljagd finden wir:

(a) $\angle OCB = \angle OBC$, da O der Umkreismittelpunkt von ABC ist und somit auch $OB = OC$ gilt.

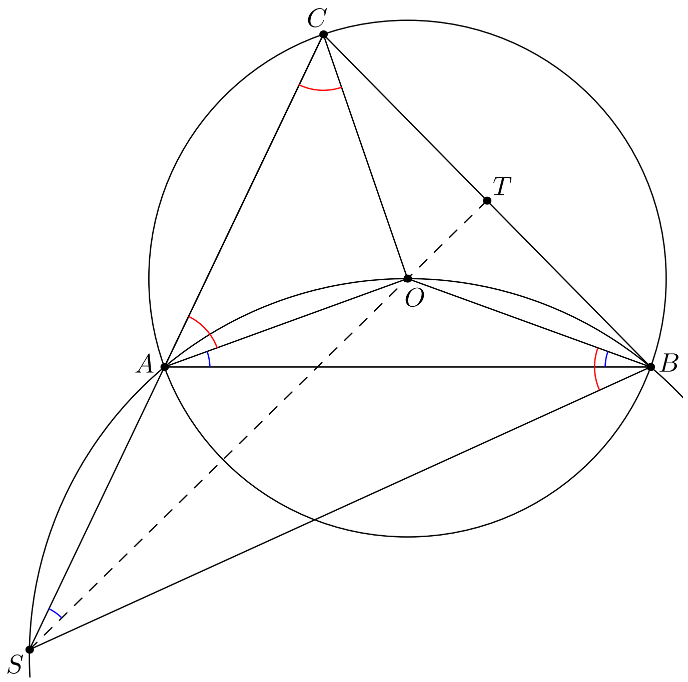
(b) $\angle OCA = \angle OAC$, da O wie oben Umkreismittelpunkt von ABC ist.

(c) $\angle OBS = \angle OAC$, da $AOBS$ ein Sehnenviereck ist.

Zusammen ergibt dies nun:

$$\angle SCB = \angle ACB = \angle ACO + \angle OCB \overset{\text{(a)\&(b)}}{=} \angle OAC + \angle OBC \overset{\text{(c)}}{=} \angle OBS + \angle OBC = \angle SBC.$$

Das Dreieck CSB ist also in der Tat Gleichschenklig in S, wie gewünscht.



Marking Scheme

- 2P: Umformulierung des zu Beweisenden in eine der folgenden Aussagen:
  - $\angle SCT = 90° - \angle CST$ oder $\angle SCB = 90° - \angle CSO$
  - CSB ist gleichschenklig mit Scheitelpunkt S
- 1P: Irgendwelche nützlichen Bemerkungen bezüglich dem Sehnenviereck $AOBS$ (z.B. $\angle OBS = \angle CAO$ or $\angle ASO = \angle ABO$)
- $\leq$ 2P: 1P rgendwelche nützlichen Bemerkungen bezüglich dem Mittelpunkt O des Kreises ABC (z.B. $\angle ACO = \frac{1}{2} \cdot \angle AOB$, $\angle OCB = \angle OBC$, $\angle OCA = \angle OAC$, $\angle OBA = \angle OAB$)
- 2P: Beweis vollenden

G2) Sei ABC ein spitzwinkliges Dreieck mit $BC > AC$. Die Mittelsenkrechte der Seite AB schneidet die Gerade BC in X und die Gerade AC in Y. Sei P die Projektion von X auf AC und sei Q die Projektion von Y auf BC. Beweise, dass die Gerade PQ die Strecke AB in ihrem Mittelpunkt schneidet.

Lösung 1 (Winkeljagd, Sehnevierecke): Nach einführung von M als der Mitpunkt von AB, genügt es zu zeigen, dass P, Q und M kolinear sind. Wir werden dies hier zeigen, indem wir beweisen, dass $\angle MPx + \angle XPQ = 180°$ gilt. Wir bemerken sazu zuerst ein paar Sehenenvierecke.

(a) $YQPX$ ist ein Sehnenviereck, da $\angle XPY = 90° = \angle XQY$.

(b) $YQMB$ ist ein Sehnenviereck, da $\angle BMY = 90° = \angle BQY$.

(c) $AMXP$ ist ein Sehnenviereck, da $\angle XMA = 90° = \angle XPA$.

Da nun X auf der Mittelsenkrechten von AB liegt, gilt $XA = XB$ und somit $\angle MAX = \angle MBX$ $(*)$ Alles in allem gilt also:

$$\angle MPX \overset{(c)}{=} \angle MAX \overset{(*)}{=} \angle MBX = \angle MBQ \overset{(b)}{=} \angle MYQ = \angle XYQ \overset{(a)}{=} 180° - \angle XPQ.$$

Wie gewünscht.

Lösung 2 (effizienter als Lösung 1): Es gibt eine sehr ähnliche Vorgehensweis, die nur zwei der zuvorgenannten Sehnenvierecke benützt. Ebenfalls benutzen wir, dass $YA = YB$ bzw. $\angle MYA = MYB$ $(*)$. Dieses Mal werden wir zeigen, dass M, P und Q kolinear sind, indem wir zeigen, dass $\angle XQP = XQM$. Wieder mit den obig genannten Sehnenvierecken gilt:

$$\angle XQP \overset{(a)}{=} \angle XYP = \angle MYA \overset{(*)}{=} \angle MYB \overset{(b)}{=} \angle MQB = \angle XQM.$$

Wie gewünscht.

Lösung 3 (Menelaus und Potenz eines Punktes): Man kann die kolinearität auch mit Menelaus zeigen. Dazu müsste man die folgende Gleichung verifizieren:

$$\frac{AM}{MB} \cdot \frac{BQ}{QC} \cdot \frac{CP}{PA} \overset{?}{=} -1.$$

Wie in den anderen beiden Lösungen, bemerken wir, dass $YQPX$ ein Sehnenviereck ist, da $\angle XPY = 90° = \angle XQY$. Wir werden nun ω für den Kreis $(YQPX)$ schreiben. Nach dem Satz von Thales ist das Zentrum von ω der Mittelpunkt von XY, also vorallem auch auf der Mittelsenkrechten zu AB. Da die Potenz eines Punktes nur von der Distantz zum Kreismittelpunkt abhängt, ist die Potenz von A und B gleich bezüglich ω, woraus folgt:

$$PA \cdot AY = XB \cdot BQ.$$

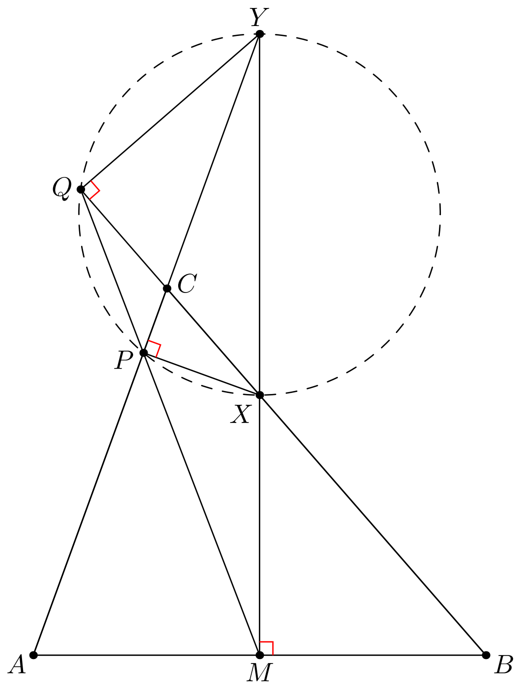
Betrachtet man auch noch die Potenz des Punktes C erhält man

$$CX \cdot QC = CP \cdot YC.$$

Die beide Gleichungen zusammen ergeben nun

$$\frac{AM}{MB} \cdot \frac{BQ}{QC} \cdot \frac{CP}{PA} = -1 \cdot \frac{BQ}{PA} \cdot \frac{CP}{QC} = -1 \cdot \frac{AY}{XB} \cdot \frac{CX}{YC} = \frac{BM}{MA} \cdot \frac{AY}{YC} \cdot \frac{CX}{XB} = -1.$$

Wobei wir in der letzten Gleichung Menalaus auf ABC und die Tatsache, dass M, Y und X kolinear sind, benutzt haben.



Marking Scheme - Lösung 1 und 2

- 1P: Umschreibung der zu beweisenden Aussage mit einer Winkelgleichung, wie beispielsweise:
  - $\angle MPX + \angle XPQ = 180°$
  - $\angle XQP = \angle XQM$
- 3P: Zeigen, dass $YQPX$, $YQMB$ oder $AMXP$ Sehnenvierecke sind (2P für ein Sehenviereck, 3P für zwei oder drei Sehnenvierecke)
- 1P: Zeigen, dass $\angle MAX = \angle MBX$, $\angle MAY = \angle MBY$ oder dass $\angle MYA = \angle MYB$
- 2P: Den Beweis vollenden

Marking Scheme - Lösung 3

- 1P: Das Problem zu einer Menelaus Gleichung umformen
- 1P: Zeigen, dass $YQPX$ zyklisch ist
- 2P: Zeigen, dass $PA \cdot AY = XB \cdot BQ$
- 1P: Zeigen, dass $CX \cdot QC = CP \cdot YC$
- 2P: Den Beweis vollenden

K1) Anaëlle hat $2n$ Steine, welche mit $1, 2, 3, \ldots, 2n$ beschriftet sind, sowie eine rote und eine blaue Schachtel. Sie will nun alle $2n$ Steine in die beiden Schachteln verteilen, sodass die Steine k und $2k$ für jedes $k = 1, 2, \ldots, n$ in unterschiedlichen Schachteln landen. Wie viele Möglichkeiten hat Anaëlle, um dies zu tun?

Antwort: Anaëlle hat 2^n Möglichkeiten.

Lösung 1 (bijektiv): Für jede ungerade ganze Zahl $1 \leq t < 2n$, nenne die Menge aller Steine, deren Beschriftung die Form $t \cdot 2^k$ hat, die Kette ab t. Sobald wir einen Stein aus einer Kette in eine Schachtel platzieren, dann ist wegen der Bedingung die Schachtel aller anderen Steine in dieser Kette eindeutig bestimmt. Da t ungerade ist, haben wir ausserdem, dass Steine in verschiedenen Ketten unabhängig voneinander platziert werden können, da die Bedingung nur Paare von Steine betrifft, die in der selben Kette sind.

Weil jeder Stein in zudem genau einer Kette ist, folgt nun, dass jede erlaubte Verteilung der Steine eine entsprechende beliebige Verteilung von jeweils einem Stellvertretenden pro Kette hat. (z.B. alle Steine mit ungerader Beschriftung). Weil wir n Ketten haben, ist die gesamte Anzahl Möglichkeiten demnach 2^n.

Lösung 2 (induktiv): Wir geben einen Induktionsbeweis. Die Antwort ist korrekt für $n = 1$, da die beiden Steine (mit Beschriftung 1 und 2) in verschiedenen Schachteln platziert werden müssen. Betrachte nun den Fall mit $n > 1$ und nehme an die Antwort ist korrekt für alle kleineren Werte von n.

Es folgt, dass Anaëlle 2^{n-1} Möglichkeiten hat, um die Steine mit Beschriftung $1, 2, \ldots, 2n - 2$ zu verteilen. Der Stein mit Beschriftung $2n - 1$ ist von keiner Bedingung eingeschränkt und kann daher in einer beliebigen Schachtel platziert werden. Für den Stein mit Beschriftung $2n$ hat Anaëlle jedoch keine Wahl, da er nicht in der selben Schachtel wie der Stein mit Beschriftung n platziert werden darf, welcher bereits platziert wurde (weil $n \leq 2n - 2$). Insgesamt hat Anaëlle also $2 \cdot 2^{n-1} = 2^n$ Möglichkeiten.

Marking Scheme

Solution 1 (Additive)

- 1P: Calculate the answer for at least one value of $n \geq 3$.
- 1P: Have the idea of considering these chains.
- 2P: Argue that the placement of one stone in each chain determines all others.
- 1P: Argue that different chains are independent.
- 1P: Argue that there are n chains and that they partition the stones.
- 1P: Finish the proof.

Solution 2 (Additive)

- 1P: Calculate the answer for at least one value of $n \geq 3$.
- 1P: Have the idea of induction.
- 2P: Handle the odd case in the inductive step.
- 2P: Handle the even case in the inductive step.
- 1P: Finish the proof.

Remarks (points only to be deducted from a full solution)

- -1P: Missing a finite number of cases.
- -1P: Calculation mistakes for final answer.
- No point deduction for not mentioning that $n \leq 2n - 2$.

K2) Seien $n \geq 4$ und $k, d \geq 2$ natürliche Zahlen mit $k \cdot d \leq n$. Die n Teilnehmenden der Mathematik-Olympiade sitzen um einen runden Tisch und warten auf Patrick. Als Patrick auftaucht, gefällt ihm die Situation gar nicht, da die Regeln des Social Distancing nicht eingehalten werden. Er wählt also k von den n Teilnehmenden aus, die bleiben dürfen, und schickt alle anderen aus dem Raum, sodass zwischen je zwei der verbleibenden k Teilnehmenden mindestens $d-1$ freie Plätze sind. Wie viele Möglichkeiten hat Patrick dies zu tun, angenommen alle Plätze waren anfangs besetzt?

Antwort: $\frac{n}{k}\binom{n-kd+k-1}{k-1}$ oder dazu äquivalente Ausdrücke.

Lösung 1 (Surjektive k-zu-1 Abbildung): Zuerst lasst uns die Personen am Tisch im Uhrzeigersinn von 1 bis n nummerieren, wobei die 1 Person beliebig ausgewählt wurde. Wir werden nun zählen wie viele Kombinationen es gibt, in der die Person 1 ausgewählt wurde. Bemerke, dass jegliche solche Möglichkeit einfach dazu korrenspondiert k 'Distanzen' zwischen den auserwählten Teilnehmer zu wählen. Die gegebene Bedingung ist lediglich, dass jede solche 'Distanz' grösser als d sein soll. Wir wollen also die Möglichkeiten zählen eine Gruppe von k Abständen zu wählen, sodass diese alle grösser als d sind und sich zu n aufsummieren. Dies kann auf mehrere Arten gezählt werden:

- Zum Beispiel kann man sich einen kleineren Tisch der von $n - kd + k$ Stühlen umgeben ist vorstellen, wobei der Stuhl mit der Nummer 1 besetzt ist und man noch $k - 1$ Stühle auswählen soll, die auch noch besetzt werden müssen. Man kann darauf zwischen allen zwei aufeinanderfolgen Personen noch $d - 1$ Stühlen einfügen, um eine finale konfigurration zu erhalten. Man hatte hier also $\binom{n-kd+k-1}{k-1}$ Möglichkeiten dies zu tun.
- Anders, kann man auch sagen, dass das Problem hier da gleiche ist, wie wenn man n gleiche Bonbons auf k Kinder verteilen will, sodass jedes Kind mindestens d Bonbons erhählt, was im Skript behandelt wurde. Hier können wir einfach die kd Bonbons vergessen um die Bedingung zu erfüllen, was heisst, dass wir noch $n - kd$ Bonbons zu verteilen haben. Hier erhält man auch $\binom{n-kd+k-1}{k-1}$ Möglichkeiten dies zu tun.

Nun haben wir jedoch bis jetzt angenommen, dass Person 1 immer auserwählt wird. Wir müssen jetzt also noch alle 'Rotationen' in Betracht ziehen(Indem wir eine andere Person als die beliebige 1 Person betrachten). Würden wir die Möglichkeiten für alle Rotationen einfach aufaddieren, so hätten wir jede 'echte' Konfiguration k-Mal gezählt (1 Mal für jede der k auserwählten Personen). Wir erhalten also die finale Antwort $\frac{n}{k}\binom{n-kd+k-1}{k-1}$. *Falls diese Lösung zu verwirrend war kann man den letzten Schritt auch anders betrachten: Betrachte das ursprüngliche Problem, wobei einer der k Personen ein Imposter ist. die Anzahl möglichkeiten kann wie oben beschrieben berechnet werden. Man startet mit dem Imposter und betrachtet die Distanzen zwischen den auserwählten Personen, was einem* $\binom{n-kd+k-1}{k-1}$ *Möglichkeiten für jeden der n möglichen Imposter gibt. Man kann diese Anzahl auch anders betrachten. Für jede Möglichkeit des ursprünglichen Problemes gibt es k Möglichkeiten den Imposter zu wählen. Somit ist die Anzahl Kombination des ursprünglichen Problems gleich* $n\binom{n-kd+k-1}{k-1} \cdot \frac{1}{k}$

Lösung 2 (Man betrachet den kleinsten besetzten Stuhl): Wie oben können wir die Anzahl Konfigurationen, in welche eine Person (oben die 1 Person) vorgegeben ist, als $\frac{n}{k}\binom{n-kd+k-1}{k-1}$ berechnen.
Nun lasst uns die Anzahl Konfigurationen betrachten in der die Person 2 auserwählt wurde, die Person 1 jedoch nicht. Dies ist nun fast das gleiche wie zuvor(k distanzen wählen), ausser dass hier nun noch die Einschränkung gilt, dass der Stuhl nummer 1 zwangsmässig in der letzten Distanz enthalten ist.

Marking Scheme

Solutions 1 and 2 (Additive)

- 0P: Solving the case $n = kd$ and/or attempting to do an induction on n.
- 0P: Stating we can group the possibilities based on the smallest occupied chair, after assigning numbers to all the people.
- 1P: Any attempt to correctly calculate the number of possibilities when a given person is fixed.
- 1P: Asserting that the aforementioned is equal to $\binom{n-kd+k-1}{k-1}$.
- 2P: Proving said equality (1 point may be awarded here if the proof is incomplete or the student did not find what the value should be but the student states that we have to assign kd of the gaps by default and/or we have to distribute $n - kd$ gaps amongst all of the distances).

Completing Solution 1 (Additive)

- 1P: Stating that we can rotate every possibility where a given person is fixed to obtain all possibilities.
- 1P: Stating the previous idea will count every possibility exactly k times.
- 1P: Finishing.

Completing Solution 2 (Additive)

- 2P: Giving the correct expression $\binom{n-(k-1)d+k-1-\max(i,d)}{k-1}$ for when person i is fixed and none of people $1, 2, \ldots i - 1$ are taken.
- 1P: Stating that the total number of possibilities is the sum of the previous expression over all $1 \leq i \leq n$.

For solution 2, no points should be deducted for not simplifying the summation.

Z1) Beweise, dass es für jede natürliche Zahl $n \geq 3$ natürliche Zahlen $a_1 < a_2 < \ldots < a_n$ gibt, sodass

$$a_k \,|\, (a_1 + a_2 + \ldots + a_n)$$

für jedes $k = 1, 2, \ldots, n$ gilt.

Lösung 1: Es wird mit Induktion bewiesen.

(a) Induktionsanfang, $n = 3$:
Man bemerke, dass $1 < 2 < 3$ die gegebene Bedingung erfüllt. Somit ist die Aussage wahr für $n = 3$.

(b) Induktionsschritt:
Nach der Induktionsannahme ist die Aussage wahr für alle $m \leq n-1$. Seien also $a_1 < a_2 < \cdots < a_{n-1}$ positiv, sodass $a_k \mid \sum_{i=1}^{n} a_i$ für alle $1 \leq k \leq n$ gilt.Wähle dazu $a_n = \sum_{j=1}^{n-1} a_j$.
Da a_i für $1 \leq i < n-1$ strikt grösser als 0 ist, gilt $a_n > a_{n-1}$ und somit ist

$$a_1 < a_2 < \cdots < a_{n-1} < a_n = \sum_{j=1}^{n-1} a_j$$

Man bemerke weiter, dass

$$\sum_{i=1}^{n} a_i = a_n + \sum_{i=1}^{n-1} a_i = 2\sum_{i=1}^{n-1} a_i$$

Nach der Induktionsannahme gilt nun $a_k \,|\, 2\sum_{i=1}^{n} a_i = \sum_{i=1}^{n}$ für alle $1 \leq k \leq n-1$. Zusätzlich gilt nun aber auch $a_n = \sum_{i=1}^{n-1} a_i \,|\, 2\sum_{i=1}^{n-1} a_i = \sum_{i=1}^{n} a_i$.
Es erfüllen also die gewählten $a_1 < \cdots < a_n$ die Bedingung und der Induktionsschritt ist beendet.

Lösung 2: Da, $\sum_{i=0}^{n} 2^i = 2^{n+1} - 1$ ist, würden $1 \leq 1 < 2 \cdots < 2^n$ die Teilbarkeitsbedingung erfüllen.

$$2^j \,|\, (1 + 1 + 2 + \cdots + 2^n) = 2^{n+1}, \ \forall 0 \leq j \leq n.$$

Nun sind die Zahlen jedoch nicht paarweise verschieden. Wir wollen also eine ähnliche Menge mit paarweise verschiedenen Zahlen konstruieren. Man multipliziert dazu alle Zweierpotenzen mit 3 und fügt zusätzlich noch 1 und 2 hinzu. Man findet also hierzu die Zahlen $a_1 = 1 < 2 < 3 < 2 \cdot 3 < \cdots < 3 \cdot 2^{n-3} = a_n$. Und in der Tat erfüllen diese Zahlen auch die Bedingung, da $\sum_{i=0}^{n} a_i = 3 \cdot 2^{n-2}$ durch alle a_i Teilbar ist.

Lösung 3 (Reformulation): Nehme wir an, dass die Menge $a_1, a_2, \ldots, a_n$ die Bedingung erfüllt und seien $b_i = \frac{1}{a_i}(\sum_{k=1}^{n})$. Es folgt, dass b_i verschiedene positive ganze Zahlen sind, für welche gilt:

$$\frac{1}{b_1} + \frac{1}{b_2} + \cdots + \frac{1}{b_n} = 1$$

Es genügt nun eine Konstruktion für solche b_i zu finden. Es gibt mehrere Möglichkeiten eine soche Menge zu konstruieren: eine davon wäre mit Induktion.
Wir nehmen als Induktionsanfang die Menge $2, 3, 6$ und wenn wir von n nach $n+1$ gehen ersetzen wir einfach b'_n mit $b_n + 1$ und $b_n^2 + b'_n$ (wobei wir einfach $\frac{1}{x} - \frac{1}{x+1} = \frac{1}{x(x+1)}$ benutzen).
Diese Induktion führt tatsächlich zu einer komplett anderen Menge a_i als in den obigen zwei Lösungen; die Anfangsmenge ist die Selbe, doch jedesmal wenn n um 1 erhöht wird, multiplizieren wir alle vorherigen Elemente mit $1+\sum_{k=1}^{n} a_k$ und ersetzen das jetzt kleinste Element $1+\sum_{k=1}^{n} a_k$ mit 1 und $\sum_{k=1}^{n}$. Zum Beispiel von n=3 nach n=4 multiplizieren wir die Ursprünglich Menge

$1, 2, 3$ *mit 7 um die neue Menge* $7, 14, 21$ *zu erhalten. Zusatsätzlich wird dann noch* 7 *mit* 1 *und* 6 *ersetzt.*

Marking Scheme

Lösung 1

- 1P: Idee für Induktion zu benutzen.
- 1P: Induktionsanfang.
- 2P: Idee für den Induktionsschritt.
- 2P: Zeigen, dass die neu konstruierte Menge die Bedingung erfüllt.
- 1P: Den Beweis vollenden.

Lösung 2

- 4P: Konstruktion finden.
- 2P: Zeigen, dass die Bedinguneg für die konstruierte Menge erfüllt sind.
- 1P: Den Beweis vollenden.

Z2) Bestimme alle natürlichen Zahlen $n \geq 2$, sodass für jeden Teiler $d > 1$ von n

$$d^2 + n \mid n^2 + d$$

gilt.

Antwort: n erfüllt die Bedingung genau dann, wenn es eine Primzahl ist.

Lösung: Zuest bemerken wir, dass alle Primzahlen die Voraussetzung tatsächlich erfüllen: Wenn n eine Primzahl ist, muss $d = n$ gelten. Für diese Wahl von d gilt offensichtlich

$$n^2 + n \mid n^2 + n.$$

Wenn nun n keine Primzahl ist, finden wir $a, b > 1$, sodass $n = ab$ gilt. Nun können wir $d = a$ wählen und erhalten

$$a^2 + ab \mid (ab)^2 + a.$$

Hier können wir beide Seiten durch a teilen und erhalten die äquivalente Teilbarkeitsbedingung

$$a + b \mid ab^2 + 1.$$

Analog dazu können wir auch $d = b$ wählen und erhalten

$$b^2 + ab \mid (ab)^2 + b \quad \Longleftrightarrow \quad b + a \mid a^2b + 1.$$

Wir sehen also, dass $a + b$ sowohl $ab^2 + 1$ als auch $ab^2 + 1$ teilt, also auch deren Summe:

$$a + b \mid ab(a + b) + 2.$$

Offensichtlich ist $ab(a + b)$ durch $a + b$ teilbar. Dann sagt uns die obige Bedingung, dass

$$a + b \mid 2$$

gilt. Dies steht aber im Widerspruch zu $a, b > 1$! Wir folgern also, dass alle nicht-Primzahlen die Bedingung der Aufgabe nicht erfüllen.

Alternative: Wir können auch die Differenz von $ab^2 + 1$ und $a^2b + 1$ betrachten, woraus wir

$$a + b \,|\, ab(a - b)$$

erhalten. Falls wir nun $\mathrm{ggT}(a, b) = 1$ wählen können, würde dies $\mathrm{ggT}(a + b, ab) = 1$ und somit

$$a + b \,|\, a - b$$

implizieren, was unmöglich ist.
Wir können a und b allerdings nur dann teilerfremd wählen, falls n mindestens zwei verschiedene Primteiler hat. Wir müssen also den Fall, in dem n eine Primpotenz ist, noch separat behandeln: Falls $n = p^k$ für p prim und $k \geq 2$, können wir aber einfach $d = p$ wählen um

$$p^2 + p^k \,|\, p^{2k} + p \quad \Longrightarrow \quad p^2 \,|\, p\left(p^{2k-1} + 1\right) \quad \Longrightarrow \quad p \,|\, p^{2k-1} + 1$$

zu erhalten, was auch unmöglich ist.

Marking scheme (Additiv)

- 1P: Beobachtung, dass alle Primzahlen funktionieren
- 1P: Eine Teilbarkeitsbedingung der Form $a + b \,|\, ab^2 + 1$ für $n = ab$
- 2P: Die zweite Teilbarkeitsbedigung der Form $a + b \,|\, a^2b + 1$ für $n = ab$
- 2P: $a + b \,|\, a^2b + ab^2 + 2$ **oder** $a + b \,|\, ab(b - a)$ und den Fall $n = p^k$ ausschliessen
- 1P: Vervollständigung des Beweises