

OSM - Sélection 2017

Deuxième examen - 7 mai 2017

Temps : 4.5 heures

Difficulté : Les exercices sont classés selon leur difficulté.

Points : Chaque exercice vaut 7 points.

4. Soit k un cercle et AB une corde de k tel que le centre de k ne se trouve pas sur AB . Soit C un point sur k différent de A et de B . Pour chaque choix de C , soient P_C et Q_C les projections de A sur BC respectivement B sur AC . Soit encore O_C le centre du cercle circonscrit au triangle P_CQ_CC . Montrer qu'il existe un cercle ω tel que O_C se trouve sur ω pour chaque choix de C .
5. Déterminer la plus petite constante réelle C telle que pour tous $a_1, a_2, a_3, a_4, a_5 \in \mathbb{R}_{>0}$, pas nécessairement distincts, il existe toujours quatre indices distincts i, j, k, l tels que :

$$\left| \frac{a_i}{a_j} - \frac{a_k}{a_l} \right| \leq C.$$

6. Trouver toutes les fonctions $f: \mathbb{R}_{>0} \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$ telles que pour tous $x, y \in \mathbb{R}_{>0}$:

$$f(x) - f(x+y) = f(x^2 f(y) + x).$$

Bonne chance !