

SMO - Selektion 2018

1. Prüfung - 12. Mai 2018

Zeit: 4.5 Stunden

Schwierigkeit: Die Aufgaben sind der Schwierigkeit nach geordnet.

Punkte: Jede Aufgabe ist 7 Punkte wert.

1. Sei $k \geq 0$ eine ganze Zahl. Bestimme alle reellen Polynome P von Grad k mit k verschiedenen reellen Nullstellen, sodass für alle Nullstellen a von P gilt:

$$P(a + 1) = 1.$$

2. Sei ABC ein spitzwinkliges Dreieck mit Umkreismittelpunkt O . Die Gerade OA schneide die Höhe h_b in P und die Höhe h_c in Q . Sei H der Höhenschnittpunkt des Dreiecks ABC . Zeige, dass der Umkreismittelpunkt des Dreiecks PQH auf der Schwerelinie durch den Punkt A des Dreiecks ABC liegt.

Bemerkung: Die Höhe h_a ist die Gerade durch A , die senkrecht zu BC ist.

3. Entlang der Küste einer kreisrunden Insel befinden sich 20 verschiedene Dörfer. Jedes dieser Dörfer hat 20 Kämpfer, wobei alle 400 Kämpfer unterschiedlich stark sind.

Jeweils zwei benachbarte Dörfer A und B machen nun einen Wettkampf, indem sich jeder der 20 Kämpfer des Dorfs A mit jedem der 20 Kämpfer des Dorfs B misst. Dabei gewinnt jeweils der stärkere Kämpfer. Wir sagen, dass das Dorf A *stärker* ist als das Dorf B , falls in mindestens k der 400 Kämpfe ein Kämpfer von Dorf A gewinnt.

Es stellt sich heraus, dass jedes Dorf stärker als sein Nachbardorf im Uhrzeigersinn ist. Bestimme den maximalen Wert von k , sodass dies der Fall sein kann.

Viel Glück!