



Zeit: 3 Stunden

Zürich, Lausanne, Lugano

Schwierigkeit: Die Aufgaben eines Themenbereichs sind der Schwierigkeit nach geordnet.

13. Dezember 2025

Punkte: Jede Aufgabe ist 7 Punkte wert.

Geometrie

- G1)** Seien Γ_1 und Γ_2 zwei Kreise, die sich in den Punkten X und Y schneiden. Sei ℓ eine Gerade, welche Γ_1 in den Punkten A und C , und Γ_2 in den Punkten B und D schneidet, sodass A, B, C, D in dieser Reihenfolge auf ℓ liegen. Sei P der Schnittpunkt von XA mit YB und Q der Schnittpunkt von XD und YC .

Zeige, dass PQ parallel zu ℓ ist.

- G2)** Seien A, B, C, D, E fünf Punkte, die in dieser Reihenfolge auf einem Kreis liegen, sodass AE der Durchmesser ist und $BC > CD$ gilt. Sei F der Schnittpunkt von AD und BE . Sei O der Umkreismittelpunkt des Dreiecks BFD . Sei Y der Schnittpunkt der Reflektion der Geraden BD an BC und der Reflektion der Geraden BD an DC .

Zeige, dass $\angle OYC = 90^\circ$.

Kombinatorik

- K1)** Seien $k \leq a \leq b$ natürliche Zahlen. Ruhi hat eine Folge von $a+b$ Buchstaben, welche a identische Exemplare des Buchstabens M , und b identische Exemplare des Buchstabens O beinhaltet. Sie möchte, dass ihre Folge insgesamt genau k Paare von aufeinanderfolgenden Buchstaben beinhaltet, die das Wort MO bilden. Auf wieviele Arten kann sie die Buchstaben anordnen?

- K2)** Mark hat 20 Bücherregale der Höhen $1, 1, 2, 2, \dots, 10, 10$, wobei zwei Bücherregale derselben Höhe nicht unterscheidbar sind. Er möchte diese Regale in einer Reihe so aufstellen, dass seine Katze von einem Bücherregal zum nächsten springen kann, beginnend vom Bücherregal ganz links, bis zu dem ganz rechts. Seine Katze ist faul und hat zwei Bedingungen:

- Genau einer dieser 19 Sprünge ist zu einem strikt grösseren Bücherregal.
- Zwischen den zwei gleich hohen Bücherregalen darf sich kein strikt grösseres Bücherregal befinden.

Wie viele Möglichkeiten hat Mark, seine Bücherregale aufzustellen, damit beide Bedingungen erfüllt sind?

Zahlentheorie

- Z1)** Bestimme alle Triple (p,q,n) natürlicher Zahlen, sodass p und q Primzahlen sind und

$$20p + 26q = n^2 + 48.$$

- Z2)** Bestimme alle natürlichen Zahlen n , sodass

$$n^3 \mid (n+1)(n+2)(n+3)(n+4)(n+5)(n+6).$$