OSM - Sélection 2017

Quatrième examen - 21 mai 2017

Temps : 4.5 heures
Difficulté : Les exercices sont classés selon leur difficulté.
Points : Chaque exercice vaut 7 points.

10. Trouver tous les polynômes P à coefficients entiers tels que $P(2017n)$ est un nombre premier pour tout nombre naturel n.

11. Soient $B = (-1, 0)$ et $C = (1, 0)$ deux points du plan. Un sous-ensemble non-vide et borné S du plan est appelé *incroyable* si les conditions suivantes sont vérifiées :

(i) Il existe un point T dans S tel que pour chaque autre point Q dans S le segment TQ est entièrement inclus dans S.

(ii) Pour tout triangle $P_1P_2P_3$, il existe un unique point A dans S et une permation σ de $\{1, 2, 3\}$ tels que les triangles ABC et $P_{\sigma(1)}P_{\sigma(2)}P_{\sigma(3)}$ sont semblables.

Montrer qu'il existe deux sous-ensembles incroyables différents S et S' de l'ensemble $\{(x, y) : x \geq 0, y \geq 0\}$ avec la propriété suivante : Le produit $BA \cdot BA'$ est indépendant du choix du triangle $P_1P_2P_3$, où $A \in S$ et $A' \in S'$ sont les points donnés par la propriété (ii) pour le triangle $P_1P_2P_3$.

12. Soient $a, c \in \mathbb{N}$ et $b \in \mathbb{Z}$. Prouver qu'il existe $x \in \mathbb{N}$ tel que

$$a^x + x \equiv b \mod c.$$

Bonne chance !