## Schweizer IMO - Vorselektion

Bern, Zürich - 5. April 2003

Zeit: 2 Stunden

Jede Aufgabe ist 7 Punkte wert.

- 1. 67 Schüler schreiben eine Prüfung. Die Prüfung besteht aus 6 multiple-choice Fragen, die alle mit ja oder nein beantwortet werden müssen. Jeder Schüler beantwortet dabei alle 6 Fragen. Eine richtige Antwort auf die k-te Frage gibt k Punkte, eine falsche Antwort -k Punkte.
  - (a) Zeige, dass mindestens zwei Schüler das Prüfungsblatt gleich ausgefüllt haben.
  - (b) Zeige, dass mindestens vier Schüler gleich viele Punkte erzielten.
- **2.** ABC sei ein spitzwinkliges Dreieck mit Umkreismittelpunkt O. Das Lot von A auf BC schneide den Umkreis im Punkt  $D \neq A$ , und die Gerade BO schneide den Umkreis im Punkt  $E \neq B$ . Zeige, dass ABC und BDCE denselben Flächeninhalt haben.
- **3.** Bestimme alle Funktionen  $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ , sodass für alle  $x, y \in \mathbb{R}$  die folgende Gleichung erfüllt ist:

$$f((x-y)^2) = x^2 - 2yf(x) + (f(y))^2$$

- 4. Betrachte eine Tabelle mit m Zeilen und n Spalten. Auf wieviele Arten kann diese Tabelle mit lauter Nullen und Einsen ausgefüllt werden, sodass in jeder Zeile und jeder Spalte eine gerade Anzahl Einsen stehen?
- 5. Beweise für positive reelle Zahlen x, y, z mit x + y + z = 1 die folgende Ungleichung:

$$\frac{x^2 + y^2}{z} + \frac{y^2 + z^2}{x} + \frac{z^2 + x^2}{y} \ge 2$$