

SMO - Selektion 2017

3. Prüfung - 20. Mai 2017

Zeit: 4.5 Stunden

Schwierigkeit: Die Aufgaben sind der Schwierigkeit nach geordnet.

Punkte: Jede Aufgabe ist 7 Punkte wert.

7. Der brasilianische IMO-Leader wählt zwei natürliche Zahlen n und k mit $n > k$, und sagt diese dann seinem Deputy und einem Teilnehmer. Dann flüstert der Leader dem Deputy eine binäre Folge der Länge n ins Ohr. Der Deputy schreibt alle binären Folgen der Länge n auf, die sich genau an k Stellen von der Folge des Leaders unterscheiden. (Beispiel für $n = 3$ und $k = 1$: Wenn der Leader 101 wählt, schreibt der Deputy 001, 100, 111 auf.) Der Teilnehmer schaut sich die Folgen an, die der Deputy aufgeschrieben hat. Nun versucht der Teilnehmer, die ursprüngliche Folge vom Leader herauszufinden.

Wie viele Male muss er mindestens raten (abhängig von n und k), bis er sicher einmal korrekt geraten hat?

Bemerkung: Eine binäre Folge der Länge n ist eine Folge der Länge n , die nur aus 0 und 1 besteht.

8. Finde alle monoton steigenden Folgen a_1, a_2, a_3, \dots natürlicher Zahlen, sodass $i + j$ und $a_i + a_j$ für alle $i, j \in \mathbb{N}$ die gleiche Anzahl Teiler haben.
9. Sei ABC ein Dreieck mit $AB = AC \neq BC$ und I dessen Inkreismittelpunkt. Die Gerade BI schneidet AC in D , und die Senkrechte auf AC durch D schneidet AI in E . Zeige: Die Spiegelung von I an AC liegt auf dem Umkreis von Dreieck BDE .

Viel Glück!