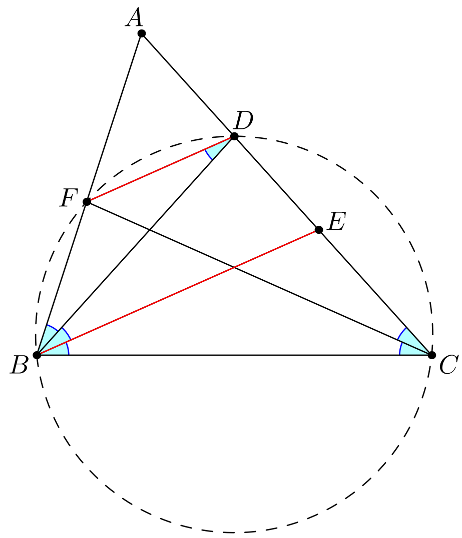
Zweite Runde 2023

Lausanne, Lugano, Zürich - 17. Dezember 2022

Vorläufige Bemerkung: Eine vollständige Lösung ist 7 Punkte wert. Bei jeder Aufgabe kann es bis zu 2 Punkte Abzug geben für kleine Fehler bei einer sonst korrekten Lösung. Teilpunkte werden gemäss dem Punkteschema (Marking Scheme) vergeben. Man kann pro Aufgabe höchstens für ein Marking Scheme Punkte erhalten (man bekommt dabei stets die grösstmögliche Punktzahl)

Im Anschluss befinden sich die Lösungen mit Vorrundentheorie, die den Korrektoren bekannt sind. Am Ende jedes Problems werden noch alternative Lösungen präsentiert, die auch andere Theorie verwenden können. Während des Trainings zu Hause werden die Teilnehmenden dazu ermutigt, alle ihnen bekannten Methoden zu verwenden. An der Prüfung hingegen ist es nicht empfohlen mit Methoden, welche sie unter Prüfungskonditionen nicht genügend beherrschen, nach alternativen Lösungen zu suchen. Damit wird riskiert, dass wertvolle Zeit verloren geht.

G1) Sei ABC ein Dreieck, welches $2 \cdot \angle CBA = 3 \cdot \angle ACB$ erfüllt. Die Punkte D und E liegen auf der Seite AC, sodass BD und BE den Winkel $\angle CBA$ in drei gleich grosse Winkel unterteilen und sodass D zwischen A und E liegt. Sei F ausserdem der Schnittpunkt von AB und der Winkelhalbierenden von $\angle ACB$. Zeige, dass BE und DF parallel sind.



Lösung 1: Die Bedingung $2\cdot\angle CBA = 3\cdot\angle ACB$ in der Aufgabe bedeutet genau, dass $\angle DCF = \angle FCB = \angle EBD = \angle DBF$ gilt. Aus $\angle DCF = \angle DBF$ können wir folgern, dass $FDCB$ ein Sehnenviereck ist. Daher gilt $\angle FDB = \angle FCB = \angle EBD$, was beweist dass BE und DF parallel sind.

Lösung 2: Die Bedingung $2\cdot\angle CBA = 3\cdot\angle ACB$ in der Aufgabe bedeutet genau, dass $\angle DCF = \angle FCB = \angle EBD = \angle DBF$ gilt. Aus $\angle DCF = \angle DBF$ können wir folgern, dass $FDCB$ ein Sehnenviereck ist. Sei X der Schnittpunkt der Geraden BE und CF. Dann gilt

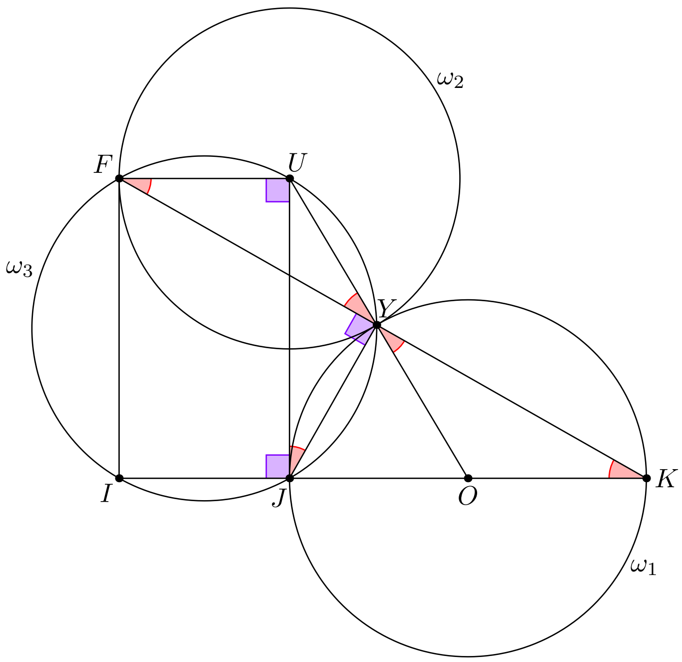
$$\angle FXB = \angle XCB + \angle CBX = \angle EBD + \angle CBE = \angle CBD = \angle CFD,$$

also sind BE und DF parallel.

Marking Scheme (nicht additiv):

- 7P: Vollständige Lösung
- 5P: Zeigen, dass $\angle FDB = \angle FCB$ gilt.
- 4P: Beweisen, dass $FDCB$ ein Sehnenviereck ist.
- 3P: Das Problem darauf reduzieren zu zeigen $FDCB$ ein Sehnenviereck ist.
- 1P: Die Parallelität in der Aufgabenstellung in eine Winkelbedingung umformulieren.
- 1P: Eine korrekte Behauptung, dass ein Winkel bei B und ein Winkel bei C gleich sind, beispielsweise $\angle DBF = \angle FCB$. Dieser Punkt kann auch vergeben werden, wenn dies nur in der Skizze eingezeichnet ist.

G2) Sei ω_1 ein Kreis mit Durchmesser JK. Sei t die Tangente an ω_1 bei J und sei $U \neq J$ ein weiterer Punkt auf t. Sei ω_2 der kleinere Kreis mit Mittelpunkt U, welcher ω_1 an einem einzigen Punkt Y berührt. Sei I der zweite Schnittpunkt von JK mit dem Umkreis des Dreiecks JYU und sei F der zweite Schnittpunkt von KY mit ω_2. Zeige, dass $FUJI$ ein Rechteck ist.



Lösung: Sei O der Mittelpunkt von ω_1 und sei ω_3 der Umkreis des Dreiecks JYU. Wir behaupten, dass F auf ω_3 liegt. Um dies zu zeigen, bemerken wir zuerst, dass U, Y, und O kollinear sind, da ω_1 und ω_2 sich im Punkt Y berühren. Da die Dreiecke FUY und YOK gleichschenklig sind, erhalten wir

$$\angle YFU = \angle UYF = \angle OYK = \angle YKO = \angle YKJ.$$

Der Tangentenwinkelsatz besagt zudem $\angle YKJ = \angle YJU$. Wie kombinieren die zwei Gleichungen und erhalten $\angle YFU = \angle YJU$, was bedeutet, dass $JYUF$ ein Sehnenviereck ist. Dies beweist unsere Behauptung, dass F auf ω_3 liegt. Wir müssen nun noch zeigen, dass das Sehnenviereck $FUJI$ nur rechte Winkel hat. Da t tangential zu ω_1 ist, wissen wir, dass $\angle UJI = \angle IFU = 90°$ gilt. Da JK ein Durchmesser von ω_1 ist, haben wir zudem $\angle JYK = 90°$, und damit auch $\angle FUJ = \angle JIF = 90°$, was den Beweis abschliesst.

Marking Scheme (additiv):

(a) 5P: Zeigen, dass F auf dem Umkreis von JYU liegt.

- (a.1) 2P: Zeigen, dass $\angle YFU = \angle YKJ$ gilt.
- (a.2) 1P: Zeigen, dass $\angle YKJ = \angle YJU$ gilt.

(b) 2P: Zeigen, dass $FUJI$ ein Rechteck ist, falls $JYUF$ ein Sehnenviereck ist.

- (b.1) 1P: Zeigen, dass mindestens einer der Winkel $\angle JIF$, $\angle IFU$, $\angle FUJ$ und $\angle FYJ$ ein rechter Winkel ist.

Bemerkung: Falls man behauptet, dass F sich auf dem Umkreis des Dreiecks JYU befindet, kann man 1P erhalten. Dies aber nur, wenn noch keine andern Punkte vergeben wurden. Wenn man benutzt, dass Y sich auf der Strecke OU befindet, es aber nicht begründet, wird 1P abgezogen.

K1) Während der Weltmeisterschaft gibt es n unterschiedliche Panini-Sticker zu sammeln. Marcos Freunde versuchen alle ihre Sammlungen zu vervollständigen, jedoch hat bis jetzt noch keiner alle Sticker! Wir nennen ein Paar zweier seiner Freunde *komplett*, falls ihre kombinierte Sammlung jeden Sticker mindestens einmal enthält. Marco weiss, wer welche Sticker hat und möchte alle seine Freunde für seinen Geburtstag in ein Restaurant einladen. Er will jedoch verhindern, dass ein komplettes Paar am gleichen Tisch sitzt.

(i) Zeige, dass Marco vielleicht mindestens n Tische reservieren muss.

(ii) Zeige, dass n Tische immer ausreichen, um Marcos Ziel zu erreichen.

Lösung: Um zu zeigen dass mindestens n Tische nötig sind, nehmen wir an wir haben n Freuende, wobei jedem genau ein Bild fehlt, und sodass jedem ein anderes Bild fehlt. Jedes paar dieser Freunde ist komplett, also müssen sie an n unterschiedlichen Tischen sitzen.
Um zu zeigen dass n Tische immer ausreichen, verteilen wir Marcos Freunde wie folgt: Assoziiere mit jedem Bild einen Tisch. Die Freunde, die dieses Bild haben sitzen **nicht** an diesem Tisch. Der Tisch ist nur für die Freunde zugänglich, welche dieses Bild nicht haben. Jeder Freund wählt jetzt ein für ihn zugänglicher Tisch aus (also ein Tisch assoziiert mit einem Bild das er nicht besitzt). Ein komplettes Paar kann nun nicht am selben Tisch sitzen, denn wäre dies der Fall, dann würden das Bild beiden fehlen und das Paar wäre nicht komplett, also ein Widerspruch.

Marking scheme, Teil (i):

- +1P für die Bemerkung dass es reicht n Freuende zu konstruieren, unter welchen jedes Paar komplett ist.
- +2P für das Konstruieren einer solchen Konfiguration.

Marking scheme, Teil (ii): Der dritte und vierte Punkt sind nicht additiv.

- +0P für die Bemerkung dass zwei gleiche Sammlungen immer am gleichen Tisch sitzen können.
- +1P für die Idee alle, welchen ein spezifischen Bild fehlt, an den gleichen Tisch zu setzen.
- +3P für das generalisieren dieser Idee auf alle Tische, zum Beispiel mit einer Anordnung oder freien Wahl.
- +3P für eine Rekursion über die Bilder, wobei der Fall mit $(n-1)$ Bildern angewandt wird, nachdem alle denen ein spezifischen Bild fehlen an einen Tisch gesetzt wurden.

Falls ein Teilnehmer die Bilder mit den Tischen assoziiert aber nicht erklärt, an welchen Tisch ein spezifischer Freund sitzen soll oder begründet, wieso diese Wahl keine Rolle spielt, dann wird ihm einen Punkt abgezogen. Sollte der Basisfall der Induktion vergessen werden, kostet das einen Punkt. Jedoch kann nur einer dieser beiden Punkte abgezogen werden.

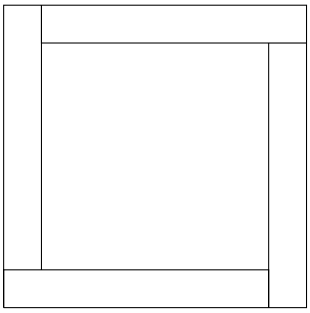
K2) Sei n eine natürliche Zahl. Roger hat einen quadratischen Garten der Grösse $(2n+1)\times(2n+1)$. Er errichtet Zäune, um diesen in rechteckige Beete zu unterteilen. Er möchte genau zwei horizontale $k\times 1$ Beete und genau zwei vertikale $1\times k$ Beete für jede **gerade** Zahl k zwischen 1 und $2n+1$, sowie ein einzelnes quadratisches Beet der Grösse 1×1 wenn er fertig ist. Auf wie viele unterschiedliche Arten kann Roger seinen Garten unterteilen?

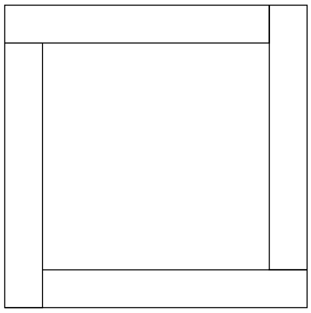
Lösung Betrachte die 4 grössten Rechtecke. Wir wollen zeigen, dass diese zusammen den Rand des Gartens bilden.

Betrachte zuerst ein einzelnes vertikales $1 \times 2n$-Rechteck. Dieses muss mit der kurzen Kante sicher einen Rand berühren (ansonsten wäre oberhalb und unterhalb des Rechtecks eine Fläcke mit Breite kleiner als 1, die zu keinem anderen Rechteck gehören kann).

Wir behaupten auch, dass die lange Kante dieses vertikalen Rechtecks einen Rand des Gartens berühren muss: Wäre dem nicht so, dann wäre der horizontale Abstand zu beiden Rändern eine Zahl, die strikt kleiner als $2n$ ist. Folglich müssten beide horizontalen $2n \times 1$-Rechtecke im freien $(2n+1) \times 1$-Streifen liegen, der sich entweder oberhalb oder unterhalb des vertikalen Rechtsecks befindet. Wegen $2n + 2n > 2n + 1$ ist das aber nicht möglich.

Wir schlussfolgern also, dass jedes $1 \times 2k$-Rechteck eine Ecke berühren muss. Analog gilt auch, dass jedes $2k \times 1$-Rechteck eine Ecke berühren muss. Wir sehen, dass es für so eine Anordnung genau zwei Möglichkeiten gibt:





Wenn wir nun diese vier längsten Rechtecke entfernen, bleibt in der Mitte ein quadratischer $(2n-1)\times(2n-1)$-Garten übrig. Dieser muss genauso in Beete werden, wie in der ursprünglichen Aufgabe (aber mit $n-1$ statt mit n). Wir können also im Prinzip die gleiche Argumentation wiederholen und sollten die Lösung 2^n erhalten. Wir beweisen das etwas formaler mit Induktion:

Behauptung: Es gibt genau 2^k Möglichkeiten, einen $(2k+1) \times (2k+1)$-Garten wie in der Aufgabe zu zerteilen.
Induktionsverankerung: Für $n = 1$ zeigt die Argumentation oben, dass es nur zwei Möglichkeiten für die Beete der Dimensionen 2×1 und 1×2 gibt. Die restliche Fläche in der Mitte ist dann genau das 1×1-Quadrat.
Induktionsschritt: Nach der Argumentation am Anfang gibt es zwei Möglichkeiten, den Rand des $(2n+1) \times (2n+1)$-Gartens zu unterteilen. Für das innere $(2n-1) \times (2n-1)$-Feld gibt es nach der Induktionshypothese (für $k = n-1$) genau 2^{n-1} verschiedene Möglichkeiten. Da wir alle Möglichkeiten für den Rand mit allen Möglichkeiten für das innere Feld kombinieren können, gibt es insgesamt also $2 \cdot 2^{n-1} = 2^n$ Möglichkeiten.

Das beweist, dass die gesuchte Antwort tatsächlich 2^n ist.

Marking Scheme:

- +1P für den Versuch, die möglichen Positionen der grössten Rechtecke zu bestimmen.
- +2P für einen Beweis, dass die grössten Rechtecke sich **alle** am Rand des Gartens befinden und diesen ausfüllen.
- +1P wenn man argumentiert, dass es genau zwei Möglichkeiten gibt, die grössten Rechtecke anzuordnen.
- +1P für das Erkennen der Rekursion oder für eine explizite Induktionsverankerung
- +1P für die Behauptung, dass die Antwort 2^n lautet.
- +1P für einen korrekten Rechenweg, der zur Lösung 2^n führt.

Z1) Finde alle ganzzahligen Werte, die der Ausdruck

$$\frac{pq + p^p + q^q}{p + q}$$

annehmen kann, wobei p und q Primzahlen sind.

Antwort: Der einzige ganzzahlige Wert ist 3.

Lösung: Falls p und q beide ungerade sind,dann ist der Zähler ugerade und der Nenner gerade. Weil eine gerade Zahl nie eine ungerade Zahl teilt, ergievt dies kein ganzzahliger Wert.Wir können also annehmen, dass mindestens eine unserer Primzahlen gerade ist, und somit gleich 2. Weil der Ausdruck symmetrisch in p und q ist, können wir ohne Beschränkung der Allgemeinheit annehmen dass $q = 2$.

Wir setzen also $q = 2$ ein und es reicht nun alle ganzzahligen Werte des Ausdrucks

$$\frac{2p + p^p + 4}{p + 2} = \frac{2(p + 2) + p^p}{p + 2} = 2 + \frac{p^p}{p + 2}$$

zu finden.

Damit dies eine ganze Zahl ist, muss $p + 2$ ein Teiler von p^p sein. Aber weil p eine Primzahl ist, sind alle positiven Teiler von p^p die folgenden: $1, p, p^2, \ldots, p^{p-1}$ and p^p. Fallse $p > 2$, dann haben wir

$$p < p + 2 < p + p = 2p < p^2$$

und $p + 2$ ist strikt zwischen zwei aufeinanderfolgenden Teiler von p^p. Wir schlussfolgern, dass im Fall $p > 2$ die Zahl $p + 2$ nie p^p teilt und wir keinen ganzzahligen Wert erhalten. Der einzige Fall der übrig bleibt ist $p = q = 2$, welcher in einem Wert von 3 resultiert.

Marking Scheme (additiv):

- +1P Bemerken, dass $p = q = 2$ zum Wert 3 führt
- +2P Auf einen Ausdruck in einer Variable reduzieren
  - +1P Beweisen, dass eine der Primzahlen gerade sein muss
  - +1P Eine der Primzahlen im Ausdruck = 2 setzen
- +1P Einen nützlichen Fakt bezüglich Teilbarkeit bemerken (zum Beispiel bemerken, dass alle Teiler von p^p die Form p^k haben)
- +3P Beweisen, dass $p + 2$ nie p^p teilt für $p > 2$
- +0P Algebraisch Manipulation

Z2) Finde alle Tripel (a, b, p) natürlicher Zahlen, sodass p eine Primzahl ist und die Gleichung

$$(a+b)^p = p^a + p^b$$

erfüllt ist.

Lösung: $(a, b, p) = (1, 1, 2)$ ist die Einzige Lösung. Wir teilen das Problem in zwei Fälle.

- Fall 1: $a = b$
  Die Gleichung wird zu $2^p \cdot a^p = 2 \cdot p^a$, und da $4 \mid 2^p$, $2 \mid p^a$ woraus folgt, dass $p = 2$. Wenn wir diese neue Information in der ursprünglichen Gleichung einsetzen, ergibt sich $4a^2 = 2^{a+1}$, also $a^2 = 2^{a-1}$. Falls $a > 1$, dann muss $a$gerade sein, weil 2^{a-1} gerade ist. Da jedoch a^2 eine Quadratzahl ist, muss 2^{a-1} auch eine Quadratzahl sein, also muss a ungerade sein, ein Widerspruch. Der einzige Fall ist somit $a = 1$, welcher tatsächlich alle Bedingungen erfüllt. Wir erhalten in diesem Fall also eine Lösung: $(a, b, p) = (1, 1, 2)$.

- Fall 2: $a \neq b$
  Weil die Gleichung symmetrisch in a and b ist, nehmen wir ohne Beschränkung der Allgemeinheit $b > a$ an. Nun schreiben wir die Gleichung als

  $$(a+b)^p = p^a(1 + p^{b-a}).$$

  Somit haben wir $p \mid (a+b)^p$, also auch $p \mid a+b$. Jetzt betrachten wir die Primfaktorzerlegung beider Seiten der Gleichung und schauen uns den Exponenten von p an. Die rechte Seite der Gleichung ist p^a mal eine Zahl die nicht durch p teilbar ist, weil $b-a > 0$. Falls $(a+b)^p = p^x \cdot y$ wobei y nicht durch p teilbar ist, dann haben wir $p \mid x$. Somit haben wir auch $p \mid a$, weil $x = a$. Verbinden wir dies mit $p \mid a + b$, erhalten wir $p \mid a, b$. Nun bemerken wir, dass $p^a(1 + p^{b-a})$ eine p-te Potenz ist, und da p^a eine p-te Potenz teilerfremd zu $1 + p^{b-a}$ ist, wissen wir, dass $1 + p^{b-a}$ auch eine p-te Potenz ist. Wir schreiben $1 + p^{b-a} = z^p$, und da $p \mid b - a$ und $b - a > 0$, erhalten wir $z^p - p^{b-a} = 1$, ein Widerspruch, da die Differenz von zwei p-ten Potenzen mindestens $2^p - 1 > 1$ ist. In diesem Fall gibt es also keine Lösungen.

Marking Scheme:

- +2P Den Fall 1 lösen
  - +1P beweisen, dass $p = 2$
  - +1P beweisen, dass $a = 1$
- +5P Den Fall 2 lösen
  - +1P beweisen, dass $p \mid a + b$
  - +1P beweisen, dass $p \mid a, b$
  - +2P beweisen, dass $1 + p^{b-a}$ eine p-te Potenz ist
  - +1P bemerken, dass die Differenz zweier p-ten Potenzen nie $= 1$ sein kann.

Von einer vollständigen Lösung können Punkte abgezogen werden für:

- -1P nicht explizit vermerken, dass $b - a > 0$ im Fall 2 im Beweis, dass $p \mid a, b$ und $1 + p^{b-a}$ beides p-te Potenzen sind.

MATHEMATICAL.
OLYMPIAD.CH
MATHEMATIK-OLYMPIADE
OLYMPIADES DE MATHÉMATIQUES
OLIMPIADI DELLA MATEMATICA

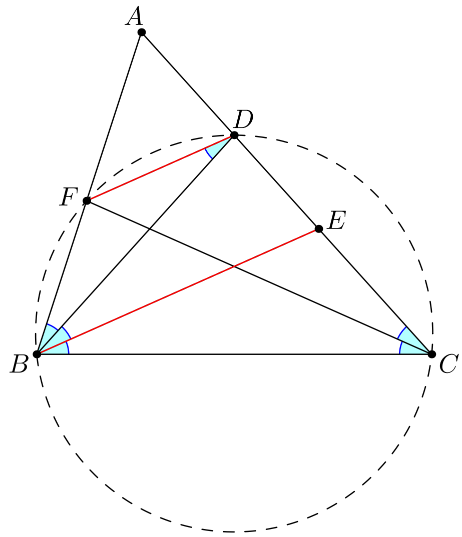
Deuxième tour 2023

Lausanne, Lugano, Zurich - 17 décembre 2022

Remarque liminaire : Une solution complète rapporte 7 points. Pour chaque problème, jusqu'à 2 points pourront être déduits d'une solution correcte en cas de lacunes mineures. Les solutions partielles sont évaluées selon le barème suivant. Si un problème admet plusieurs barèmes, le score est alors le maximum des scores pour chacun des barèmes.

Ci-dessous vous trouverez les solutions élémentaires connues des correcteurs. Des solutions alternatives sont présentées à la fin de chaque problème. Les étudiants sont naturellement encouragés à essayer toutes les méthodes à leur disposition lors de l'entraînement, mais à ne pas chercher de solutions alternatives qui emploient des méthodes qu'ils ne maîtrisent pas en condition d'examen, au risque de perdre un temps précieux.

G1) Soit ABC un triangle tel que $2 \cdot \angle CBA = 3 \cdot \angle ACB$. Les points D et E sont sur le côté AC, tels que BD et BE divisent $\angle CBA$ en trois angles égaux et que D soit entre A et E. De plus, soit F l'intersection de AB et de la bissectrice de $\angle ACB$. Montrer que BE et DF sont parallèles.



Solution 1 : Les conditions du problème impliquent que $\angle DCF = \angle FCB = \angle EBD = \angle DBF$. Comme $\angle DCF = \angle DBF$, le quadrilatère $FDCB$ est cyclique. Ainsi, $\angle FDB = \angle FCB = \angle EBD$, ce qui montre bien que BE et DF sont parallèles.

Solution 2 : Les conditions du problème impliquent que $\angle DCF = \angle FCB = \angle EBD = \angle DBF$. Comme $\angle DCF = \angle DBF$, le quadrilatère $FDCB$ est cyclique. Si X est l'intersection des droites BE et CF, alors

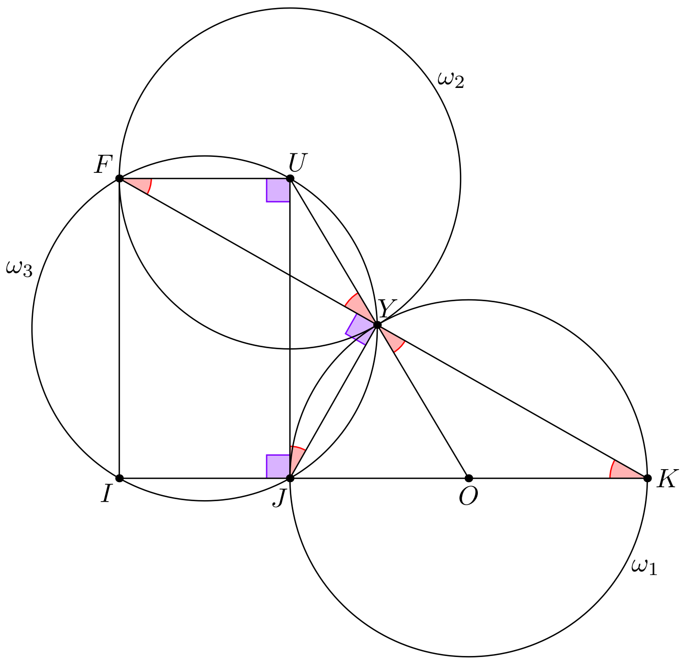
$$\angle FXB = \angle XCB + \angle CBX = \angle EBD + \angle CBE = \angle CBD = \angle CFD$$

montre que BE et DF sont parallèles.

Barème (non-additif) :

- 7P : Solution complète.
- 5P : Montrer que $\angle FDB = \angle FCB$.
- 4P : Montrer que $FDCB$ est cyclique.
- 3P : Montrer le parallélisme si $FDCB$ est cyclique.
- 1P : Reformuler le parallélisme comme une équation d'angles.
- 1P : Affirmer qu'un angle en B et un angle en C sont égaux, par exemple $\angle DBF = \angle FCB$. Le point est valide même si l'égalité est seulement apparente sur le dessin.

G2) Soit ω_1 un cercle de diamètre JK. Soit t la tangente à ω_1 en J et soit $U \neq J$ un autre point sur t. Soit ω_2 le plus petit cercle centré en U qui intersecte ω_1 en un seul point Y. Soit I la deuxième intersection de la droite JK avec le cercle circonscrit au triangle JYU et soit F la deuxième intersection de la droite KY avec ω_2. Montrer que $FUJI$ est un rectangle.



Solution : On dénote le centre de ω_1 par O et le centre circonscrit au triangle JYU par ω_3. On affirme que F se trouve sur ω_3. Pour prouver cette affirmation, on note d'abord que U, Y, et O sont colinéaires comme ω_1 et ω_2 sont tangents en Y. Comme les triangles FUY et YOK sont isocèles, on a

$$\angle YFU = \angle UYF = \angle OYK = \angle YKO = \angle YKJ.$$

Par le théorème de l'angle tangent, on a aussi que $\angle YKJ = \angle YJU$. En combinant les deux égalités au-dessus, on obtient $\angle YFU = \angle YJU$, ce qui montre que $JYUF$ est cyclique. On a donc bien montré notre affirmation : F est sur ω_3. Pour terminer notre preuve, il nous faut montrer que $FUJI$ a seulement des angles droits. Comme t est tangente à ω_1, on a que $\angle UJI = \angle IFU = 90°$. Aussi, comme JK est un diamètre de ω_1, on a $\angle JYK = 90°$, et $\angle FUJ = \angle JIF = 90°$, ce qui termine la preuve.

Barème (additif) :

(a) 5P : Montrer que F est sur le cercle circonscrit au triangle JYU.

  (a.1) 2P : Montrer que $\angle YFU = \angle YKJ$.

  (a.2) 1P : Montrer que $\angle YKJ = \angle YJU$.

(b) 2P : Monter que si $JYUF$ est cyclique, alors $FUJI$ est un rectangle.

  (b.1) 1P : Montrer qu'au moins un des angles $\angle JIF$, $\angle IFU$, $\angle FUJ$ ou $\angle FYJ$ est un angle droit.

Remarque : Affirmer que F est sur le cercle circonscrit au triangle JYU vaut 1P, mais seulement si aucun autre point n'a été accordé. Utiliser que Y est sur la droite OU sans justification donne lieu à une déduction de 1P.

C1) Pendant la coupe du monde, n autocollants Panini sont à collectionner. Les amis de Marco veulent compléter leurs collections, mais personne n'a encore de collection complète ! Une paire de deux amis est dite *complète* si leur collection commune contient au moins un de chaque autocollant. Marco connaît les contenus des collections de tous ses amis, et il aimerait les amener à un restaurant pour son anniversaire. En revanche, il ne veut aucune paire complète assise à la même table.

(i) Montrer que Marco pourrait avoir besoin de réserver au moins n tables différentes.

(ii) Montrer que n tables seront toujours suffisantes pour que Marco réalise son désir.

Solution : Pour montrer qu'au moins n tables différentes sont nécessaires, supposons que nous avons n personnes, et chacun d'entre eux manque exactement un sticker, avec chaque personne manquant un sticker différent. N'importe quelle paire d'amis est complète, donc les amis doivent être assis sur des tables différentes.
Maintenant, pour montrer que n tables sont toujours suffisantes, distribuons les amis comme suit : associons chaque type de sticker à une table. Les amis possédant ce sticker n'assérions **pas** à cette table. Au contraire, rendons cette table disponible à toutes les personnes n'ayant pas ce sticker et permettons à chaque personne de choisir la table à laquelle elle aimerait s'asseoir (c'est-à-dire, les tables correspondant aux stickers que la personne ne possède pas). De cette façon, chaque table ne contient aucune paire complète, car si c'était le cas, les deux personnes manqueraient le même sticker (celui assigné à la table), une contradiction.

Barème, partie (i) :

- +1P pour remarquer qu'il suffit de construire n amis tels que n'importe quelle paire est complète.
- +2P pour donner une construction explicite.

Barème, partie (ii) : Les troisième et quatrième points ne sont pas additifs.

- +0P pour remarquer que deux personnes avec la même collection peuvent être mises à la même table.
- +1P pour avoir l'idée de faire asseoir tout le monde ne possédant pas un sticker en particulier à la même table, ou tout simplement l'option de les laisser s'asseoir à une même table.
- +3P pour étendre cette idée à tous les stickers, par l'intermédiaire d'une suite.
- +3P pour l'idée de récurrence en considérant tous les amis possédant un certain sticker et en réappliquant le cas $(n-1)$ à ceux-ci.

Si un participant mentionne que pour chaque sticker, nous devons donner une table aux personnes qui ne possèdent ce sticker, mais n'a pas réussi à, soit argumenter comment chaque table doit concrètement être assignée aux amis, soit expliquer que le choix exact des tables est sans importance, alors le participant perd 1P. De même, si un participant oublie le pas de base dans l'approche par récurrence, 1P sera également enlevé. Les participants ne peuvent pas perdre ces deux points en même temps vu que les approches sont différentes.

C2) Soit n un entier strictement positif. Roger a un jardin carré de dimensions $(2n+1) \times (2n+1)$, et il y place des barrières pour diviser son jardin en plusieurs parcelles rectangulaires. Une fois terminé, il aura ainsi formé exactement deux rectangles horizontaux $k \times 1$ et deux rectangles verticaux $1 \times k$ pour chaque entier k **pair** entre 1 et $2n+1$, ainsi qu'un seul carré 1×1. Combien Roger a-t-il de manières de le faire ?

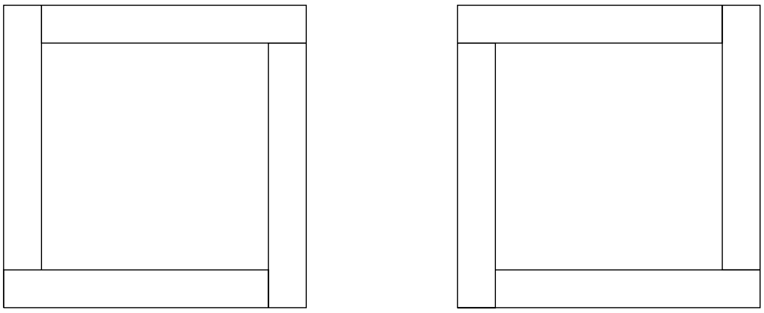
Solution :

Considérons les 4 plus grandes parcelles que Roger va délimiter. Nous allons prouver qu'elles forment labordure du jardin.

Si on considère une parcelle verticale $1 \times 2k$, on remarque qu'un de ses petits côtés (horizontaux) doit toucher le bord du jardin, autrement il y aurait un espace de hauteur strictement plus petite que 1 en haut ou en bas de la parcelle, qui ne peut appartenir à aucune des autres parcelles.

On peut aussi montrer qu'un de ses grands côtés (verticaux) touche le bord du jardin. Si ce n'était pas le cas, il y aurait des espaces de longueur plus petites que $2n$ à gauche et à droite de cette parcelle, et les deux grandes parcelles horizontales devraient être placées dans le rectangle $(2n+1)\times 1$ restant au-dessus ou au-dessous. C'est clairement impossible, comme $2n+2n > 2n+1$.

On a donc prouvé qu'une parcelle $1 \times 2k$ doit toucher un bord vertical et un bord horizontal, et donc un bord du jardin ; la même chose est vraie pour une parcelle $2k \times 1$. On a alors une parcelle par coin, et il est simple de voir qu'il y a seulement deux configurations possibles :



Après avoir enlevé ces 4 parcelles, il nous reste un carré $(2n-1) \times (2n-1)$ au milieu, qui doit être subdivisé exactement comme dans l'énoncé du problème (avec $n-1$ au lieu de n). En itérant le même argument, on devrait obtenir la réponse de 2^n. On le prouve rigoureusement en utilisant une récurrence.

Hypothèse de récurrence : Il y a exactement 2^k manières de diviser le jardin $(2k+1)\times(2k+1)$. **Cas de base :** Pour $n=1$, nous avons bien les $2 = 2^1$ manières décrites au-dessus pour la bordure du jardin. Il nous reste alors le carré 1×1, ce qui termine le cas de base. **Pas de récurrence :** Par le raisonnement au-dessus, on choisit d'abord une des deux possibilités pour la bordure du jardin $(2n+1) \times (2n+1)$ et il nous reste alors un jardin $(2n-1) \times (2n-1)$, qui peut être divisé de 2^{n-1} manières différentes par l'hypothèse de récurrence pour $k = n-1$. Comme on peut combiner chacune des possibilités de la bordure avec chacune des possibilités pour le jardin intérieur, on a au total $2 \cdot 2^{n-1} = 2^n$ manières de faire.

On a bien prouvé que 2^n est la réponse recherchée.

Barème :

- +1P Tenter de déterminer les positions possibles d'une grande parcelle d'abord.
- +2P Prouver que les quatre plus grandes parcelles doivent **toutes** occuper la bordure du jardin et qu'ensemble elles forment toute la bordure.
- +1P Argumenter qu'il y a exactement 2 façons de placer les quatre plus grandes parcelles.
- +1P Noter la récursion ou explicitement faire le cas de base de la récurrence.
- +1P Affirmer que la réponse est 2^n.
- +1P Montrer que la réponse est 2^n.

N1) Trouver toutes les valeurs entières que l'expression

$$\frac{pq + p^p + q^q}{p + q}$$

peut prendre, où p et q sont des nombres premiers.

Réponse : Le seul entier relatif atteignable est 3. **Solution :** Si p et q sont impairs, le numérateur est impair mais le dénominateur est pair. Puisqu'un nombre pair ne divise jamais un nombre impair, l'expression n'est pas un entier naturel. Ainsi, nous pouvons supposer qu'au moins un des deux nombres premiers est pair. Comme l'expression est symétrique en p et q, nous pouvons supposer sans perte de généralité $q = 2$.

Avec $q = 2$, il suffit de déterminer tous les entiers relatifs l'expression suivante peut prendre :

$$\frac{2p + p^p + 4}{p + 2} = \frac{2(p + 2) + p^p}{p + 2} = 2 + \frac{p^p}{p + 2}.$$

Pour que cette expression soit entière, il faut que $p + 2$ soit un diviseur de p^p. Mais comme p est premier, les seuls diviseurs positifs de p^p sont $1, p, p^2, \ldots, p^{p-1}$ et p^p. Si $p > 2$, on a

$$p < p + 2 < p + p = 2p < p^2$$

et ainsi, $p + 2$ est strictement coincé entre deux diviseurs consécutifs de p^p. Il s'ensuit que, pour $p > 2$, l'expression $p + 2$ ne divise jamais p^p et nous n'obtenons pas de valeurs entières. Le seul cas restant est lorsque $p = q = 2$, rendant la fraction initiale égale à 3.

Barème (additif) :

- +1P Remarquer que $p = q = 2$ donne la valeur 3
- +2P Éliminer un des deux variables dans l'expression initiale
  - +1P Démontrer qu'au moins un des nombres premiers doit être pair
  - +1P Poser un des nombres premiers = 2 dans l'expression initiale
- +1P Établir une observation pertinente de divisibilité (par exemple établir que les diviseurs de p^p sont de la forme p^k)
- +3P Démontrer que $p + 2$ ne divise pas p^p pour tout nombre premier $p > 2$
- +0P Manipulations algébriques

N2) Trouver tous les triplets (a, b, p) d'entiers strictement positifs où p est premier et l'équation

$$(a+b)^p = p^a + p^b$$

est vérifiée.

Solution : $(a, b, p) = (1, 1, 2)$ est le seul triplet qui vérifie l'équation. Séparons le problème en deux cas.

- Cas 1 : $a = b$
  L'équation se simplifie en $2^p \cdot a^p = 2 \cdot p^a$, et comme $4 \mid 2^p$, $2 \mid p^a$ ce qui implique que $p = 2$. Substituant cela dans l'équation de base donne l'égalité $4a^2 = 2^{a+1}$ donc $a^2 = 2^{a-1}$. Si $a > 1$, alors a doit être pair comme 2^{a-1} est pair. En revanche, comme a^2 est un carré parfait, 2^{a-1} doit est un carré parfait également, donc a doit aussi être impair, ce qui entre en contradiction avec l'affirmation précédente. Ainsi, la seule possibilité est $a = 1$, ce qui satisfait l'équation. Donc, dans ce cas-ci, nous obtenons exactement une solution : $(a, b, p) = (1, 1, 2)$.
- Cas 2 : $a \neq b$
  Vu que l'équation est symétrique en a et b, supposons sans perte de généralité $b > a$. L'équation peut donc être réécrit comme

  $$(a+b)^p = p^a(1 + p^{b-a})$$

  Ainsi, $p \mid (a+b)^p$, donc $p \mid a + b$. Maintenant, regardons la décomposition en nombres premiers des deux côtés et observons les puissances de p. Le côté droit de l'équation est p^a fois un nombre premier avec p, car $b - a > 0$. Si $(a + b)^p = p^x \cdot y$ où y n'est pas divisible par p, alors $p \mid x$. Ainsi, nous avons $p \mid a$, car $x = a$. En combinant cela avec $p \mid a + b$, nous pouvons déduire que $p \mid a, b$. Maintenant, pour conclure, remarquons que $p^a(1 + p^{b-a})$ est une p-ième puissance, et comme p^a est une p-ième puissance est premier à $1 + p^{b-a}$, nous obtenons que $1 + p^{b-a}$ est une p-ième puissance. Écrivons $1 + p^{b-a} = z^p$, et vu que $p \mid b - a$ et $b - a > 0$, nous obtenons que $z^p - p^{b-a} = 1$ qui est une contradiction car la différence entre 2 p-ième puissances différentes est égale à au moins $2^p - 1 > 1$. Ainsi, dans ce cas, il n'y a pas de solutions.

Barème :

- +2P Résoudre le cas 1
  - +1P pour montrer que $p = 2$
  - +1P pour montrer que $a = 1$
- +5P Résoudre le cas 2
  - +1P pour montrer que $p \mid a + b$
  - +1P pour montrer que $p \mid a, b$
  - +2P pour déduire que $1 + p^{b-a}$ est une p-ième puissance
  - +1P pour observer que la différence de deux p-ième puissances ne vaut pas 1 pour $p > 2$

Dans le cas d'une solution complète, des points peuvent être enlevés si :

- -1P pour ne pas mentioner explicitement $b - a > 0$ dans le cas 2 pour déduire que $p \mid a, b$ et $1 + p^{b-a}$ est une p-ième puissance.

MATHEMATICAL.
OLYMPIAD.CH
MATHEMATIK-OLYMPIADE
OLYMPIADES DE MATHÉMATIQUES
OLIMPIADI DELLA MATEMATICA

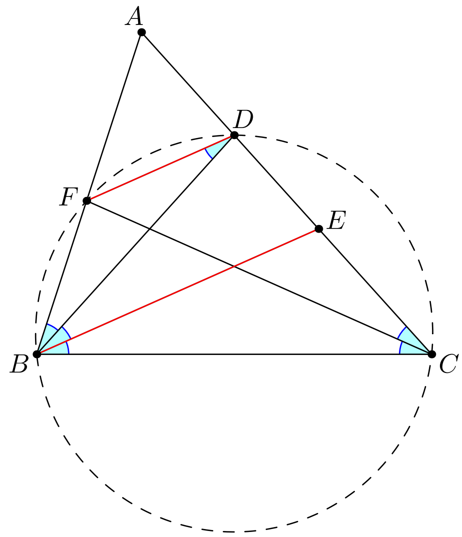
Second round 2023

Lausanne, Lugano, Zürich - 17 December 2022

Preliminary remark: A complete solution is worth 7 points. For every problem, up to 2 points can be deducted from a correct solution for (minor) flaws. Partial marks are attributed according to the marking schemes. In the case of multiple marking schemes for the same problem, the score is the maximum among all the marking schemes.

Below you will find the elementary solutions known to correctors. Alternative solutions are presented in a complementary section. Students are encouraged to use any methods at their disposal when training at home, but should be wary of attempting to find alternative solutions using methods they do not feel comfortable with under exam conditions, as they risk losing valuable time.

G1) Let ABC be a triangle satisfying $2 \cdot \angle CBA = 3 \cdot \angle ACB$. Let D and E be points on the side AC, such that BD and BE divide $\angle CBA$ into three equal angles and such that D lies between A and E. Furthermore, let F be the intersection of AB and the angle bisector of $\angle ACB$. Show that BE and DF are parallel.



Solution 1: The conditions of the problem imply that $\angle DCF = \angle FCB = \angle EBD = \angle DBF$. From $\angle DCF = \angle DBF$, it holds that the quadrilateral $FDCB$ is cyclic. Hence, $\angle FDB = \angle FCB = \angle EBD$, showing that BE and DF are parallel.

Solution 2: The conditions of the problem imply that $\angle DCF = \angle FCB = \angle EBD = \angle DBF$. From $\angle DCF = \angle DBF$, it holds that the quadrilateral $FDCB$ is cyclic. Denote by X the intersection of lines BE and CF. Then

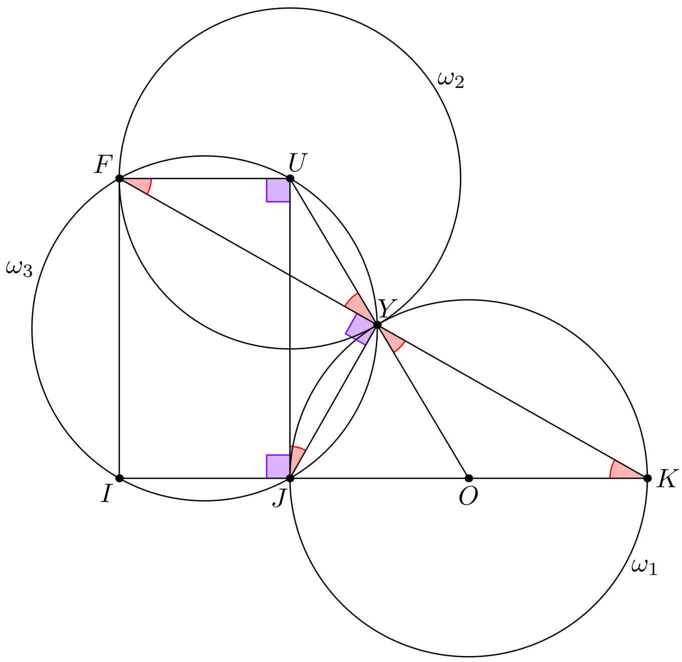
$$\angle FXB = \angle XCB + \angle CBX = \angle EBD + \angle CBE = \angle CBD = \angle CFD$$

shows that BE and DF are parallel.

Marking Scheme (non-additive):

- 7P: Full solution
- 5P: Showing that $\angle FDB = \angle FCB$.
- 4P: Showing that $FDCB$ is cyclic.
- 3P: Showing the parallelism if $FDCB$ is cyclic.
- 1P: Reformulating the parallelism as an angle equation.
- 1P: Stating that an angle at B and an angle at C are equal, for example $\angle DBF = \angle FCB$. The point is valid even if it's just on the drawing.

G2) Let ω_1 be a circle with diameter JK. Let t be the tangent to ω_1 at J and let $U \neq J$ be another point on t. Let ω_2 be the smaller circle centred at U that touches ω_1 at one single point Y. Let I be the second intersection of JK with the circumcircle of triangle JYU and let F be the second intersection of KY with ω_2. Show that $FUJI$ is a rectangle.



Solution: Denote the center of ω_1 by O and the circumcircle of triangle JYU by ω_3. We claim that F lies on ω_3. In order to prove this claim, we first note that U, Y, and O are collinear as ω_1 and ω_2 are tangent at Y. As the triangles FUY and YOK are isosceles, we get that

$$\angle YFU = \angle UYF = \angle OYK = \angle YKO = \angle YKJ.$$

By the tangent chord theorem, it also holds that $\angle YKJ = \angle YJU$. Combining the two equalities above yields $\angle YFU = \angle YJU$, so that the quadrilateral $JYUF$ is cyclic. This proves our claim that F is on ω_3. To finalize our proof, we now need to prove that the cyclic quadrilateral $FUJI$ only has right angles. As t is tangent to ω_1, we have that $\angle UJI = \angle IFU = 90°$. Also, as JK is a diameter of ω_1, we have $\angle JYK = 90°$, so that $\angle FUJ = \angle JIF = 90°$ as well, finishing the proof.

Marking Scheme (additive):

(a) 5P: Showing that F is on the circumcircle of triangle JYU.

  (a.1) 2P: Showing that $\angle YFU = \angle YKJ$.

  (a.2) 1P: Showing that $\angle YKJ = \angle YJU$.

(b) 2P: Showing that if $JYUF$ is cyclic, then $FUJI$ is a rectangle.

  (b.1) 1P: Showing that at least one of $\angle JIF$, $\angle IFU$, $\angle FUJ$ and $\angle FYJ$ is a right angle.

Remark: Claiming that F is on the the circumcircle of triangle JYU is worth 1P, but only if no other points have been granted. Using that Y is on the line OU without justifying it, is worth a deduction of 1P.

C1) During the World Cup, there are n different Panini stickers to collect. Marco's friends are trying to complete their collection, but nobody has a full set of stickers yet! A pair of his friends are said to be *wholesome* if their combined collection has at least one of each sticker. Marco knows the contents of everyone's collections, and wants to take them all to a restaurant for his birthday. However, he doesn't want any wholesome pairs sitting at the same table.

(i) Show that Marco might need to reserve at least n different tables.

(ii) Show that n tables will always be enough for Marco to achieve his goal.

Solution: To show that at least n different tables are necessary, suppose we had n people, each of which are only missing a sticker, with each person missing a different sticker. Any two of these people are wholesome together, so they must be seated at different tables.
Now, to show that n is always sufficient, simply distribute the friends as follows: associate each type of sticker to a table. The people owning this sticker will **not** be seated at this table. Make the table instead available to everyone not owning that sticker, and let each person choose whichever table they want to sit in of the options available to them (i.e., the tables corresponding to the stickers they don't own) or just pick it for them. This way, two people who are wholesome cannot be sitting in the same table because if this was the case, they would be missing the same sticker, a contradiction.

Marking scheme, part (i):

- +1P for noting that it suffices to construct n friends, any pair of which have a complete collection between them.
- +2P for providing said construction.

Marking scheme, part (ii): The third and fourth bullet points are not additive.

- +0P for noting that two identical collections can be seated at the same table.
- +1P for having the idea of seating everyone missing a given sticker at a given table, or just the option to do so.
- +3P for extending this idea to all stickers, via an ordering or otherwise.
- +3P for recursion by considering all the friends possessing that sticker and reapplying the smaller case for $(n-1)$ to them.

If a contestant states that for every sticker we should give a table to the non-owners but fails to explain how the choice should be made of what table should be given to someone/explain that this choice is irrelevant, they should be deducted 1PT. Likewise, forgetting the base case in the induction approach will lose 1PT. Contestants cannot lose both these points as they are awarded for different approaches.

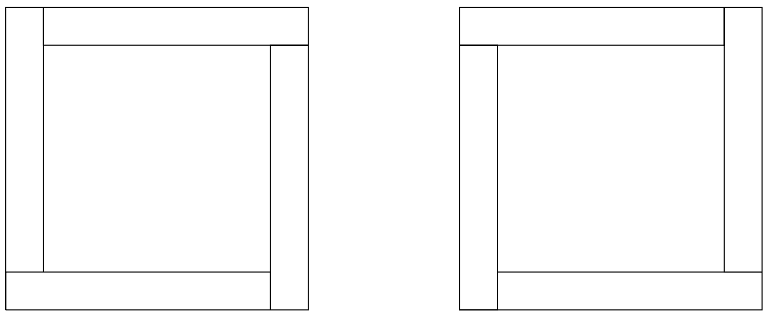
C2) Let n be a positive integer. Roger has a $(2n+1) \times (2n+1)$ square garden. He puts down fences to divide his garden into rectangular plots. He wants to end up with exactly two horizontal $k \times 1$ plots and exactly two vertical $1 \times k$ plots for each **even** integer k between 1 and $2n+1$, as well as a single 1×1 square plot. How many different ways are there for Roger to do this?

Solution: Consider the 4 largest plots Roger will fence off. We will prove they will comprise the border of the garden.

Consider a vertical $1 \times 2k$ piece. Clearly, one of its short (horizontal) edges must touch the border, because otherwise there would be a narrow margin of width smaller than 1 on either side of the piece which cannot belong to any of the other rectangles.

We will show that a long (vertical) edge also touches the border. If this is not the case, then the horizontal space on either side of the rectangle is strictly less than $2n$, meaning that both horizontal plots would need to be situated in the remaining $(2n+1) \times 1$ strip above or below our rectangle. This is clearly impossible since $2n + 2n > 2n + 1$.

Therefore it is clear that a $1 \times 2k$ piece must touch both a vertical and horizontal border, and therefore a corner; the same is true by symmetry for a $2k \times 1$ piece. We therefore have one such piece for every corner, and it is simple to see there are only two configurations possible:



After removing these 4 pieces, we are now left with a $(2n-1) \times (2n-1)$ square in the middle, which has to be subdivided exactly like in the initial problem statement (for $n-1$ instead of n). Iterating the same argument should give us the answer 2^n. We prove this more formally with induction.

Induction hypothesis: There are exactly 2^k possibilities to cover the $(2k+1) \times (2k+1)$-square.
Base case: For $n = 1$ we have the $2 = 2^1$ possibilities described above for the border. The remaining area is exactly the 1×1 square, which means we don't get more possibilities.
Induction step: By the reasoning above, We first choose one of two possibilities for the border of the $(2n+1) \times (2n+1)$-square and end up with a $(2n-1) \times (2n-1)$-square in the middle, which can be covered in 2^{n-1} different ways by the induction hypothesis for $k = n - 1$. Since we can combine both possibilities for the border with all possibilities of the interior, we obtain $2 \cdot 2^{n-1} = 2^n$ possibilities in total.

This proves that 2^n is indeed the answer.

Marking Scheme:

- +1P for attempting to determine the possible positions for the largest piece first.
- +2P for proving that the four largest rectangles must **all** occupy the border of the garden and that together they comprise the entire border.
- +1P for arguing that there are exactly 2 ways of placing the four largest rectangles.
- +1P for noting the recursion or explicitely doing base case of an induction.
- +1P for claiming the answer is 2^n.
- +1P for showing the answer is 2^n.

N1) Determine all integer values that the expression

$$\frac{pq + p^p + q^q}{p + q}$$

can take, where p and q are both prime numbers.

Answer: The only possible integer value is 3.

Solution: If both p and q are odd, then the numerator is odd while the denominator is even. Since an even number never divides an odd number, this does not lead to an integer value. Hence we can assume that one of our primes is even and therefore equal to 2. Since the expression is symmetric in p and q, we can assume without loss of generality that $q = 2$.

Substituting $q = 2$, it remains to determine all integer values taken by the expression

$$\frac{2p + p^p + 4}{p + 2} = \frac{2(p + 2) + p^p}{p + 2} = 2 + \frac{p^p}{p + 2}.$$

In order for this to be an integer, we must have that $p+2$ is a divisor of p^p. But since p is prime, the only positive divisors of p^p are $1, p, p^2, \ldots, p^{p-1}$ and p^p. If $p > 2$, then we have

$$p < p + 2 < p + p = 2p < p^2$$

and $p + 2$ is strictly squeezed between two consecutive divisors of p^p. It follows that for $p > 2$ the expression $p + 2$ never divides p^p and we don't get integer values. The only case remaining is $p = q = 2$, making the original expression equal to 3.

Marking Scheme (additive):

- +1P Noting that $p = q = 2$ leads to the value 3
- +2P Reducing to an expression in one variable
  - +1P Proving that at least one of the primes must be even
  - +1P Setting one of the primes = 2 in the expression
- +1P Stating a useful fact concerning divisiability (for instance stating that the divisors of p^p are of the form p^k)
- +3P Proving that $p + 2$ does not divide p^p for primes $p > 2$
- +0P Algebraic manipulations

N2) Determine all triples (a, b, p) of positive integers where p is prime and the equation

$$(a+b)^p = p^a + p^b$$

is satisfied.

Solution: $(a, b, p) = (1, 1, 2)$ is the only solution. Let's split the problem into two cases.

- Case 1: $a = b$
  The equation simplifies into $2^p \cdot a^p = 2 \cdot p^a$, and since $4 \mid 2^p$, $2 \mid p^a$ which implies that $p = 2$. Plugging this new piece of information in the initial equation yields $4a^2 = 2^{a+1}$ so $a^2 = 2^{a-1}$. If $a > 1$, then a has to be even since 2^{a-1} is even. However, on the other hand, since a^2 is a perfect square, 2^{a-1} has to be a perfect square as well, so a must also be odd, which is a contradiction. Thus, the only option is $a = 1$ which indeed satisfies the initial equation. Thus, out of this case, we obtain one solution: $(a, b, p) = (1, 1, 2)$.
- Case 2: $a \neq b$
  Since the equation is symmetric in a and b, assume wlog $b > a$. Now, the equation can be rewritten as
  $$(a+b)^p = p^a(1 + p^{b-a})$$
  Therefore, $p \mid (a+b)^p$, so $p \mid a+b$. Now, look at the prime factorisation of both sides of the equation and consider the powers of p. The right side of the equation is p^a times a number not divisible by p, because $b - a > 0$. If $(a+b)^p = p^x \cdot y$ where y is not divisible by p, then $p \mid x$. Thus, we have $p \mid a$, because $x = a$. Combining this with $p \mid a+b$, we deduce that $p \mid a, b$. Now, to conclude, observe that $p^a(1 + p^{b-a})$ is a perfect p-th power, and since p^a is a perfect p-th power and is coprime to $1 + p^{b-a}$, we get that $1 + p^{b-a}$ is a p-th power. Write $1 + p^{b-a} = z^p$, and since $p \mid b - a$ and $b - a > 0$, we get that $z^p - p^{b-a} = 1$ which is a contradiction because the difference of 2 different perfect p-th powers is at least $2^p - 1 > 1$. Thus, in this case, there are no solutions.

Marking Scheme:

- +2P Solving case 1
  - +1P for proving that $p = 2$
  - +1P for proving that $a = 1$
- +5P Solving case 2
  - +1P for proving that $p \mid a + b$
  - +1P for proving that $p \mid a, b$
  - +2P for deducing that $1 + p^{b-a}$ is a perfect p-th power
  - +1P for observing the difference of two p-th powers cannot be equal to 1 for $p > 2$

In case of a full solution, points can be deducted if:

- -1P for not explicitly mentioning that $b - a > 0$ in case 2 for deducing $p \mid a, b$ and $1 + p^{b-a}$ is a perfect p-th power.