Sélection OIM 2010

Premier examen - 8 Mai 2010

Durée: 4.5 heures
Chaque exercice vaut 7 points.

1. Soit $\pi = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$ une permutation des nombres $1, 2, \ldots, n$. La *perturbation* de π est le nombre de paires (i, j) avec $1 \leq i < j \leq n$ et $a_j < a_i$. Prouver que pour tout nombre naturel k avec $0 \leq k \leq \binom{n}{2}$ il existe une permutation des nombres $1, 2, \ldots, n$ telle que sa perturbation soit k.

2. Soit AB le diamètre du cercle k. Soit t la tangente à k passant par le point B et soient C, D deux points sur t, de telle manière que B soit entre C et D. La droite AC (respectivement AD) coupe k en un deuxième point E (respectivement F). La droite DE (respectivement CF) coupe aussi k en G (respectivement H). Montrer que les segments AG et AH ont la même longueur.

3. Un nombre naturel n est dit *bon*, s'il est le produit d'un nombre pair de nombres premiers (non nécessairement distincts). Pour deux nombres naturels a, b, posons $m(x) = (x + a)(x + b)$.

(a) Montrer qu'il existe deux nombre naturels distincts a, b tels que

$$m(1), m(2), \ldots, m(2010)$$

sont bons.

(b) Montrer que si $m(x)$ est bon pour tout nombre entier x, alors $a = b$.