IMO - Selektion 1999 Lösungen

1. Zwei Kreise schneiden sich in den beiden Punkten M und N. Sei A ein weiterer Punkt auf dem ersten Kreis, verschieden von M und N. Die Geraden AM und AN schneiden den zweiten Kreis nochmals in den Punkten B und C. Zeige, dass die Tangente an den ersten Kreis im Punkt A parallel zur Geraden BC ist.

Lösung

Sei P ein Punkt auf der Tangente an den ersten Kreis durch A, sodass P und N auf verschiedenen Seiten der Geraden AM liegen. Nach dem Tangentenwinkelsatz gilt $\sphericalangle PAM = \sphericalangle ANM$. Da $MNCB$ ein Sehnenviereck ist, gilt ausserdem $\sphericalangle CBM = 180° - \sphericalangle CNM = \sphericalangle ANM$. Zusammen ergibt das $\sphericalangle PAB = \sphericalangle CBA$, also sind die Tangente und die Gerade BC nach dem Stufenwinkelsatz parallel.

2. Ist es möglich, die Menge $\{1, 2, \ldots, 33\}$ derart in 11 disjunkte Teilmengen zu zerlegen, dass jede Teilmenge 3 Elemente enthält, von denen eines die Summe der beiden anderen ist?

Lösung

Nein dies ist nicht möglich. Nehme an, doch. Jede der 11 Teilmengen ist dann von der Form $\{a, b, a+b\}$, insbesondere ist die Summe $2(a+b)$ dieser drei Elemente gerade. Da die Teilmengen disjunkt sind, ist daher auch die Summe aller 33 Elemente gerade. Im Widerspruch dazu ist aber

$$1 + 2 + \ldots + 33 = \frac{34 \cdot 33}{2} = 17 \cdot 33$$

ungerade.

3. Bestimme alle Funktionen $f : \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$, für die gilt

$$\frac{1}{x} f(-x) + f\left(\frac{1}{x}\right) = x \qquad \forall x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}.$$

Lösung

Für $x \neq 0$ können wir in der Gleichung x durch $-1/x$ ersetzen und erhalten

$$-xf\left(\frac{1}{x}\right) + f(-x) = -\frac{1}{x}. \tag{1}$$

Multipliziert man die ursprüngliche Gleichung mit x und addiert sie zu (1), dann folgt $2f(-x) = x^2 - 1/x$. Ersetzt man hier schliesslich noch x durch $-x$, erhält man

$$f(x) = \frac{1}{2}\left(x^2 + \frac{1}{x}\right), \qquad \forall x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}.$$

Man rechnet leicht nach, dass dies tatsächlich eine Lösung der ursprünglichen Gleichung ist.

4. Bestimme alle reellen Lösungen (x, y, z) des Systems

$$\frac{4x^2}{1+4x^2} = y, \qquad \frac{4y^2}{1+4y^2} = z, \qquad \frac{4z^2}{1+4z^2} = x.$$

Lösung

Offensichtlich sind die Tripel $(x, y, z) = (0, 0, 0)$ und $(x, y, z) = (\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ Lösungen. Wir zeigen, dass es die einzigen sind. Setze $f(t) = 4t^2/(1+4t^2)$. Es gilt $f(t) \geq 0$ für alle $t \in \mathbb{R}$, also sind x, y, z nichtnegativ. Ausserdem gilt

$$f(t) \leq t, \qquad \text{für alle } t \geq 0.$$

Dies ist nämlich äquivalent zu $4t^2 \leq t(1+4t^2)$ (beachte, dass der Nenner von $f(t)$ positiv ist), und dies wiederum zu $t(2t-1)^2 \geq 0$. Letzteres ist für $t \geq 0$ richtig und Gleichheit gilt nur für $t = 0$ und $t = \frac{1}{2}$. Nehme nun an, es gäbe eine Lösung des Systems, so dass $x \neq 0, \frac{1}{2}$ ist. Nach obigen Überlegungen ist dann

$$x = f(z) \leq z = f(y) \leq y = f(x) < x,$$

wobei in der letzten Abschätzung strikte Ungleichheit gilt. Dies ist ein Widerspruch. Also ist $x = 0$ oder $x = \frac{1}{2}$ und durch Einsetzen rechnet man leicht nach, dass dies zu den beiden Lösungen oben führt.

5. Es sei $ABCD$ ein Rechteck und P sei ein Punkt auf der Geraden CD. M und N seien die Mittelpunkte von AD und BC. Die Gerade PM schneide AC in Q. Zeige, dass MN die Winkelhalbierende des Winkels $\sphericalangle QNP$ ist.

Lösung

Sei S der Schnittpunkt von AB und QN. Wir zeigen im Folgenden, dass $\frac{AS}{SB} = \frac{DP}{PC}$ gilt. Daraus folgt offensichtlich, dass $\triangle MSN$ und $\triangle MPN$ kongruent sind und somit wären wir fertig.
Die Punkte S, N und Q liegen nach Konstruktion auf einer Geraden, somit gilt nach Menelaos im Dreieck ABC

$$\frac{AS}{SB}\frac{BN}{NC}\frac{CQ}{QA} = -1 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{AS}{SB} = \frac{QA}{QC}.$$

Ebenfalls liegen die Punkte P, Q und M auf einer Geraden und nach Menelaos im Dreieck DCA gilt

$$\frac{DP}{PC}\frac{CQ}{QA}\frac{AM}{MD} = -1 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{DP}{PC} = \frac{QA}{QC} = \frac{AS}{SB}.$$

6. Es seien m und n zwei positive ganze Zahlen, sodass m^2+n^2-m durch $2mn$ teilbar ist. Zeige, dass m eine Quadratzahl ist.

Lösung

Wir können annehmen, dass $m>1$ gilt. Für eine Primzahl p und eine ganze Zahl x bezeichne $\operatorname{ord}_p(x)$ die grösste ganze Zahl a, sodass x durch p^a teilbar ist (der sogenannte p-Exponent von x). Sei p ein Primteiler von m und sei $a=\operatorname{ord}_p(m)>0$ und $b=\operatorname{ord}_p(n)$. Da p ein Teiler ist von m^2+n^2-m, ist auch n durch p teilbar und daher $b>0$. Es gilt $\operatorname{ord}_p(2mn)=a+b$ für $p\geq 3$ und $=a+b+1$ für $p=2$. Nach Voraussetzung muss gelten

$$\operatorname{ord}_p(2mn)\leq \operatorname{ord}_p(m^2+n^2-m).$$

Es gilt $\operatorname{ord}_p(m^2)=2a>a$. Wäre nun $a\neq 2b$, dann folgt daraus, dass $\operatorname{ord}_p(m^2+n^2-m)=\min(a,2b)\leq a<a+b$, ein Widerspruch. Folglich ist $a=2b$ gerade. Da dies für jeden Primteiler von m gilt, ist m eine Quadratzahl (genauer ergibt sich $m=n^2$ und man rechnet leicht nach, dass genau die Paare $(m,n)=(4k^2,2k)$ mit $k\neq 0$ die Bedingung der Aufgabe erfüllen).

7. Ein Quadrat ist in Rechtecke zerlegt, deren Seiten parallel zu den Quadratseiten liegen. Für jedes dieser Rechtecke wird das Verhältnis seiner kürzeren Seite zu seiner längeren gebildet. Zeige, dass die Summe dieser Verhältnisse mindestens 1 beträgt.

Lösung

Das Quadrat habe Seitenlänge s und sei in die Rechtecke R_i mit Seitenlängen $a_i\leq b_i$ zerlegt. Die Summe der Flächen aller Rechtecke R_i ist gleich der Fläche des Quadrates, also gleich s^2. Dies ergibt

$$s^2=\sum_i a_i\cdot b_i=\sum_i \frac{a_i}{b_i}\cdot b_i^2 \overset{(*)}{\leq} s^2\sum_i\frac{a_i}{b_i},$$

wobei wir bei (*) benützt haben, dass $b_i\leq s$ ist für alle i. Kürzt man dies mit s^2, ergibt sich das Gewünschte.

8. Bestimme alle ganzen Zahlen n, für die es positive reelle Zahlen $0<a_1\leq a_2\leq\ldots\leq a_n$ gibt mit

$$\sum_{k=1}^n a_k=96,\qquad \sum_{k=1}^n a_k^2=144,\qquad \sum_{k=1}^n a_k^3=216.$$

Lösung

Für positive Zahlen a_k gilt nach CS

$$\left(\sum_{k=1}^n a_k\right)\left(\sum_{k=1}^n a_k^3\right)\geq\left(\sum_{k=1}^n a_k^2\right)^2.$$

Setzt man hier die gegeben Werte für die drei Summen ein, dann gilt Gleichheit. Nach den allgemeinen Gleichheitsbedingungen für CS gibt es also eine positive Zahl λ mit

$a_k^3 = \lambda^2 a_k$ für $1 \leq k \leq n$. Dies ist äquivalent zu $a_k^2 = \lambda^2$, also zu $a_k = \lambda$, da alle a_k positiv sind. Setzt man $a_1 = \ldots = a_n = \lambda$ in die drei Gleichungen ein, dann folgt

$$n\lambda = 96, \qquad n\lambda^2 = 144, \qquad n\lambda^3 = 216.$$

Die einzige Lösung ist $\lambda = 3/2$ und $n = 64$.

9. Beweise, dass es zu jedem Polynom $P(x)$ vom Grad 10 mit ganzzahligen Koeffizienten eine (in beiden Richtungen) unendliche arithmetische Folge ganzer Zahlen gibt, die keinen der Werte $P(k)$, $k \in \mathbb{Z}$ enthält.

Lösung

Wir bemerken zuerst, dass die Existenz einer solchen arithmetischen Folge äquivalent dazu ist, dass es natürliche Zahlen a, m gibt, sodass $P(x) \not\equiv a \pmod{m}$ gilt für alle $x \in \mathbb{Z}$. Wir müssen also zeigen, dass die Werte von P bei den ganzen Zahlen eine gewisse Kongruenzklasse auslassen.

Für ein Polynom P mit ganzen Koeffizienten gilt $a - b \mid P(a) - P(b)$ für alle ganzen Zahlen $a \neq b$. Daraus folgt insbesondere, dass für jede natürliche Zahl m und alle ganzen Zahlen x, y gilt

$$x \equiv y \pmod{m} \quad \Longrightarrow \quad P(x) \equiv P(y) \pmod{m}.$$

Daher wird jede Restklasse (mod m), welche P an irgendeiner Stelle annimmt, bereits unter den m Werten $P(0), P(1), \ldots, P(m-1)$ angenommen. Es genügt zu zeigen, dass für ein gewisses m zwei dieser Werte übereinstimmen (mod m), dann muss nämlich eine Restklasse ausgelassen werden.

Für alle $k \geq 1$ gilt $P(k) = P(0) + a_k \cdot k$ für eine ganze Zahl a_k. Ist $a_k = 0$ für ein k, dann setze $m = k + 1$. Wenn $|a_k| = 1$ gilt für alle k, dann ist $P(x)/x$ beschränkt, also muss P linear sein, ein Widerspruch zur Voraussetzung. Wenn $|a_k| \geq 2$ gilt, dann setze $m = a_k \cdot k > k$, die Werte $P(0)$ und $P(k)$ sind dann kongruent (mod m).

10. Zeige, dass das Produkt von 5 aufeinanderfolgenden natürlichen Zahlen keine Quadratzahl ist.

Lösung

Je zwei dieser fünf Zahlen haben eine Differenz ≤ 4. Jede Primzahl $p \geq 5$, die eine dieser Zahlen teilt, kann daher keine weitere teilen und muss deshalb mit geradem Exponenten in der Primfaktorzerlegung dieser Zahl auftreten. Wir ordnen jeder dieser fünf Zahlen ein Paar (a, b) zu. Dabei ist a gleich 0 oder 1, je nachdem ob 2 in der Primfaktorzerlegung dieser Zahl mit geradem oder ungeradem Exponenten auftaucht, und b ist ebenfalls gleich 0 oder 1, je nachdem ob 3 in der Primfaktorzerlegung dieser Zahl mit geradem oder ungeradem Exponenten auftaucht. Es gibt nur vier mögliche solcher Folgen, nach dem Schubfachprinzip besitzen also zwei der fünf Zahlen dieselbe Folge. Nach obigen Ausführungen bedeutet das aber, dass diese Zahlen von der Form am^2 und an^2 sind, wobei $a \in \{1, 2, 3, 6\}$ und $m \neq n$. Deren Differenz $a(n+m)(n-m)$ muss ≤ 4 sein, daher ist $a = 1, m = 1, n = 2$ und die fünf Zahlen sind $1, 2, 3, 4, 5$. Deren Produkt ist aber keine Quadratzahl.