

OSM - Sélection 2017

Troisième examen - 20 mai 2017

Temps : 4.5 heures

Difficulté : Les exercices sont classés selon leur difficulté.

Points : Chaque exercice vaut 7 points.

7. Le Leader de l'équipe IMO brésilienne choisit deux nombres naturels n et k avec $n > k$ et les dit à son Deputy Leader ainsi qu'à un participant. Ensuite, le Leader chuchote à l'oreille de son Deputy une suite binaire de longueur n . Le Deputy écrit toutes les suites binaires de longueur n qui diffèrent de la suite du Leader en exactement k places. (Par exemple pour $n = 3$ et $k = 1$: Si le Leader choisit 101, le Deputy écrit 001, 100, 111.) Le Participant regarde ensuite les suites que le Deputy a écrites et essaye de trouver la suite choisie par le Leader.

Combien de fois doit-il deviner au minimum (en fonction de n et k) pour être sûr d'avoir trouvé la bonne suite ?

Remarque : Une suite binaire de longueur n est une suite de longueur n composée uniquement de 0 et de 1.

8. Trouver toutes les suites croissantes de nombres naturels a_1, a_2, a_3, \dots telles que pour tous $i, j \in \mathbb{N}$, $i + j$ et $a_i + a_j$ ont le même nombre de diviseurs.
9. Soit ABC un triangle avec $AB = AC \neq BC$ et I le centre de son cercle inscrit. La droite BI coupe AC en D , et la perpendiculaire à AC passant par D coupe AI en E . Montrer que la réflexion de I par rapport à la droite AC est sur le cercle circonscrit au triangle BDE .

Bonne chance !