## SMO - Vorrunde

Lausanne, Zürich - 13. Januar 2007

Zeit: 3 Stunden

Jede Aufgabe ist 7 Punkte wert.

- 1. Betrachte einen Würfel mit Kantenlänge 2a. In jedem Eckpunkt, jedem Kantenmittelpunkt und jedem Flächenmittelpunkt befindet sich eine Stadt. Zwei Städte sind durch eine Strasse miteinander verbunden, falls ihr Abstand a beträgt. Gibt es eine Reiseroute, die durch jede Stadt genau einmal führt?
- 2. Wie viele siebenstellige Zahlen gibt es, für die das Produkt der Ziffern gleich 45³ ist?
- 3. Gegeben sei ein spitzwinkliges Dreieck ABC und die Punkte D, E und F seien die Höhenfusspunkte der Höhen durch A, B bzw. C. Der Schnittpunkt der Geraden EF mit der Rechtwinkligen zu AC durch D sei S. Beweise, dass das Dreieck DES gleichschenklig ist.
- 4. Bestimme alle Paare (a, b) natürlicher Zahlen, sodass

$$a^2 + 3b$$
 und  $b^2 + 3a$ 

beides Quadratzahlen sind.

5. Auf einem Kreis k liegen fünf verschiedene Punkte A, M, B, C und D in dieser Reihenfolge und es gelte MA = MB. Die Geraden AC und MD schneiden sich in P und BD schneide MC in Q. Die Gerade PQ schneide k in X und Y. Zeige MX = MY.

Viel Glück!