SMO - Selektion 2017

2. Prüfung - 7. Mai 2017

Zeit: 4.5 Stunden
Schwierigkeit: Die Aufgaben sind der Schwierigkeit nach geordnet.
Punkte: Jede Aufgabe ist 7 Punkte wert.

4. Sei k ein Kreis und AB eine Sehne von k, sodass der Mittelpunkt von k nicht auf AB liegt. Sei C ein von A und B verschiedener Punkt auf k. Für jede Wahl von C seien P_C und Q_C die Projektionen von A auf BC respektive B auf AC. Weiter sei O_C der Umkreismittelpunkt des Dreiecks P_CQ_CC. Zeige, dass es einen Kreis ω gibt, sodass O_C für jede Wahl von C auf ω liegt.

5. Bestimme die kleinste reelle Konstante C, sodass für beliebige, nicht notwendigerweise verschiedene, $a_1, a_2, a_3, a_4, a_5 \in \mathbb{R}_{>0}$ immer vier paarweise verschiedene Indizes i, j, k, l existieren, sodass gilt:

$$\left| \frac{a_i}{a_j} - \frac{a_k}{a_l} \right| \leq C.$$

6. Finde alle Funktionen $f\colon \mathbb{R}_{>0} \to \mathbb{R}_{\geq 0}$, sodass für alle $x, y \in \mathbb{R}_{>0}$ gilt:

$$f(x) - f(x+y) = f(x^2 f(y) + x).$$

Viel Glück!