

# SMO - Selektion 2018

3. Prüfung - 26. Mai 2018

**Zeit:** 4.5 Stunden

**Schwierigkeit:** Die Aufgaben sind der Schwierigkeit nach geordnet.

**Punkte:** Jede Aufgabe ist 7 Punkte wert.

7. Sei  $n$  eine natürliche Zahl. Wir nennen eine Sequenz bestehend aus  $3n$  Buchstaben *rumänisch*, falls die Buchstaben  $I$ ,  $M$  und  $O$  alle genau  $n$  Mal vorkommen. Ein *swap* ist eine Vertauschung von zwei benachbarten Buchstaben. Zeige, dass für jede rumänische Sequenz  $X$  eine rumänische Sequenz  $Y$  existiert, sodass mindestens  $\frac{3n^2}{2}$  swaps nötig sind, um die Sequenz  $Y$  aus der Sequenz  $X$  zu erhalten.

8. Bestimme alle natürlichen Zahlen  $n \geq 2$ , sodass für alle ganzen Zahlen  $0 \leq i, j \leq n$  gilt:

$$i + j \equiv \binom{n}{i} + \binom{n}{j} \pmod{2}.$$

9. Seien  $a, b, c, d$  reelle Zahlen. Beweise:

$$(a^2 - a + 1)(b^2 - b + 1)(c^2 - c + 1)(d^2 - d + 1) \geq \frac{9}{16}(a - b)(b - c)(c - d)(d - a).$$

Viel Glück!