MATHEMATICAL.
OLYMPIAD.CH
MATHEMATIK-OLYMPIADE
OLYMPIADES DE MATHÉMATIQUES
OLIMPIADI DELLA MATEMATICA

Test blanc 2020

Test blanc

Temps : 4 heures
Difficulté : Les exercices sont classés selon leur difficulté.
Points : Chaque exercice vaut 7 points.

1. Soit ABC un triangle tel que $\angle CAB = 90°$. Soient D, E des points sur AC et AB, respectivement, tels que $BCDE$ est un quadrilatère inscrit. Soient Ω_1, Ω_2 les cercles qui passent par A et qui sont centrés en E, D, respectivement. Soit P le deuxième point d'intersection de Ω_1 et Ω_2. Montrer que la droite AP coupe BC en deux.

2. Montrer que pour chaque puissance de 2, aucune permutatuion de ses chiffres ne donne une autre puissance de 2.

Par exemple avec 128*, aucun des nombres* 182*,* 218*,* 281*,* 812*,* 821 *n'est une puissance de* 2*.*

3. Soient a, b, c les longueurs des côtés d'un triangle. Montrer que

$$\sqrt{6}\sqrt{a+b+c} \leq \sum_{cyc} \frac{a+b}{\sqrt{a+c}} < 2\sqrt{2(a+b+c)}.$$

4. Des nombres réels sont écrits sur chaque case d'un échiquier $2 \times n$ de telle manière que la somme des deux nombres dans chacune des n colones vaut 1. Montrer que l'on peut choisir un nombre dans chaque colone de telle manière que la somme des nombres sélectionnés dans chaque ligne est au plus $\frac{n+1}{4}$.

Bonne chance!