Sélection OIM 2010

Deuxième examen - 9 Mai 2010

Durée: 4.5 heures
Chaque exercice vaut 7 points.

4. Les points X, Y, Z sont dans cet ordre sur une droite et $|XY| \neq |YZ|$. Soient k_1 et k_2 les cercles de diamètre XY et YZ respectivement. Les points A_1 et B_1 resp. A_2 et B_2 se situent sur k_1 resp. k_2, de sorte que

$$\angle A_1 Y A_2 = \angle B_1 Y B_2 = 90°.$$

Montrer que le point d'intersection des droites A_1A_2 et B_1B_2 est sur XY.

5. Soit P un ensemble fini de nombres premiers et $a(P)$ le plus grand nombre possible de nombres naturels successifs tel que chacun de ses nombres soit divisible par un élément de P. Montrer l'inégalité $a(P) \geq |P|$ et que l'égalité se produit si et seulement si le plus petit élément de P est plus grand que $|P|$.

6. Trouver toutes les solutions (a, b, c, d) réelles positives de l'égalité

$$\frac{a^2 - bd}{b + 2c + d} + \frac{b^2 - ca}{c + 2d + a} + \frac{c^2 - db}{d + 2a + b} + \frac{d^2 - ac}{a + 2b + c} = 0.$$