SMO - Finalrunde

2. Prüfung - π-Tag

Zeit: 4 Stunden
Jede Aufgabe ist 7 Punkte wert.

6. Wir haben ein 8×8 Brett. Eine *innere Kante* ist eine Kante zwischen zwei 1×1 Feldern. Wir zerschneiden das Brett in 1×2 Dominosteine. Für eine innere Kante k bezeichnet $N(k)$ die Anzahl Möglichkeiten, das Brett so zu zerschneiden, dass entlang der Kante k geschnitten wird. Berechne die letzte Ziffer der Summe, die wir erhalten, wenn wir alle $N(k)$ addieren, wobei k eine innere Kante ist.

7. Seien a, b, c reelle Zahlen, sodass gilt:

$$\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} = 1.$$

Bestimme alle Werte, welche folgender Ausdruck annehmen kann:

$$\frac{a^2}{b+c} + \frac{b^2}{c+a} + \frac{c^2}{a+b}.$$

8. Sei $ABCD$ ein Trapez, wobei AB und CD parallel sind. P sei ein Punkt auf der Seite BC. Zeige, dass sich die Parallelen zu AP und PD durch C respektive B auf DA schneiden.

9. Sei p eine ungerade Primzahl. Bestimme die Anzahl Tupel $(a_1, a_2, \ldots, a_p)$ natürlicher Zahlen mit folgenden Eigenschaften:

1) $1 \leq a_i \leq p$ für alle $i = 1, \ldots, p$.
2) $a_1 + a_2 + \cdots + a_p$ ist nicht durch p teilbar.
3) $a_1a_2 + a_2a_3 + \ldots a_{p-1}a_p + a_pa_1$ ist durch p teilbar.

10. Finde die grösste natürliche Zahl n, sodass für alle reellen Zahlen a, b, c, d folgendes gilt:

$$(n+2)\sqrt{a^2+b^2} + (n+1)\sqrt{a^2+c^2} + (n+1)\sqrt{a^2+d^2} \geq n(a+b+c+d).$$

Viel Glück!