

# OSM - Tour préliminaire

Lausanne, Zurich - le 13 janvier 2007

Durée: 3 heures

Chaque exercice vaut 7 points.

1. Soit un cube de longueur de côté  $2a$ . En chaque sommet, au milieu de chaque arête et de chaque face se trouve une ville. Deux villes sont reliées l'une à l'autre par un chemin si leur distance vaut  $a$ . Existe-t-il un itinéraire qui passe exactement une fois par chaque ville?
2. Combien de nombres à sept chiffres existe-t-il tels que le produit des chiffres vaille  $45^3$ ?
3. Soit  $ABC$  un triangle aigu et  $D, E$  et  $F$  les pieds des hauteurs passant par  $A, B$ , respectivement  $C$ . Soit  $S$  l'intersection de la droite  $EF$  avec la droite perpendiculaire à  $AC$  passant par  $D$ . Montrer que le triangle  $DES$  est isocèle.
4. Déterminer toutes les paires  $(a, b)$  de nombres naturels tels que

$$a^2 + 3b \quad \text{et} \quad b^2 + 3a$$

soient les deux des carrés.

5. Soit  $k$  un cercle et soient  $A, M, B, C$  et  $D$  cinq point distincts sur  $k$  dans cet ordre. On a  $MA = MB$ . Les droites  $AC$  et  $MD$  se coupent en  $P$  et  $BD$  coupe  $MC$  en  $Q$ . La droite  $PQ$  coupe  $k$  en  $X$  et en  $Y$ . Montrer que  $MX = MY$ .

Bonne chance!