## SMO - Turno preliminare

Losanna, Zurigo - 12 Gennaio 2008

Durata: 3 ore

Ogni esercizio vale 7 punti.

- 1. Sono dati cinque divisori positivi di  $10^{2008}$ . Dimostra che tra questi divisori ce ne sono due tali che il loro prodotto è un quadrato.
- 2. Una passeggiata sul piano parte dal punto (0,0) e arriva nel punto (6,6), e con ogni passo si può andare un'unità verso destra oppure un'unità verso l'alto. Quante passeggiate ci sono che non passano né per il punto (2,2) né per il punto (4,4)?
- 3. Sia ABCD un quadrilatero inscritto in un cerchio tale che CD < AD e CD < BC. Sia S il punto d'intersezione delle diagonali AC e BD. Inoltre sia e l'immagine della retta passante per AB specchiata rispetto a AC, e f l'immagine della retta per AB specchiata rispetto a BD. Siano E e F i punti d'intersezione della retta passante per CD rispettivamente con e e con f. Dimostra che il triangolo SEF è isoscele.
- **4.** Determina tutti i numeri naturali n tali che il numero di divisori positivi di n è uguale al terzo in ordine di grandezza divisore positivo di n.
- 5. Una scacchiera quadrata è formata da  $2n \times 2n$  caselle. In quanti modi è possibile colorare n di queste caselle in modo che in ogni coppia di righe adicenti e in ogni coppia di colonne adiacenti non ci sia mai più di una casella colorata?

Buona fortuna!