OSM - Sélection 2018

Premier examen - 12 mai 2018

Temps : 4.5 heures
Difficulté : Les exercices sont classés selon leur difficulté.
Points : Chaque exercice vaut 7 points.

1. Soit $k \geq 0$ un nombre entier. Déterminer tous les polynômes à coefficients réels P de degré k tels que P possède k zéros réels distincts et tels que pour tous les zéros a de P

$$P(a+1) = 1.$$

2. Soit ABC un triangle aigu et O le centre de son cercle circonscrit. La droite OA coupe la hauteur h_b en P et la hauteur h_c en Q. Soit H l'orthocentre du triangle ABC. Prouver que le centre du cercle circonscrit au triangle PQH est sur la médiane du triangle ABC passant par A.

Remarque : La hauteur h_a est la droite perpendiculaire à BC passant par A.

3. Il y a 20 villages distincts le long de la côte d'une île circulaire. Chacun de ces villages a 20 combattants, et tous ces 400 combattants sont de force différente.

Chaque paire de villages voisins A et B organise une compétition, au cours de laquelle chacun des 20 combattants du village A se mesure à chacun des 20 combattants du village B. Un combat est toujours remporté par le combattant le plus fort. On dit que le village A est *plus fort* que le village B si, lors de au moins k des 400 combats, le combattant du village A gagne.

Il s'avère que chaque village est plus fort que le village voisin dans le sens des aiguilles d'une montre. Déterminer la valeur maximale de k qui permette une telle issue.

Bonne chance !