

## 第一次习题

1. 列出你知道的隐性量子技术;
2. 列出你知道的各种以“量子”开头的名词、产品、学科等；并指出哪些是合理、正当和科学的，哪些是牵强附会、不合理、不科学的；

# 第一次作业



## 0.1 列出你所知道的隐性量子技术

### 0.1.1 原子发射/吸收光谱

吸收光谱基于从光源辐射出待测元素的特征光波, 通过样品的蒸汽时, 被蒸汽中待测元素的基态原子所吸收, 由辐射光波强度减弱的程度, 可以求出样品中待测元素的含量. 在原子中, 电子按一定的轨道绕原子核旋转, 各个电子的运动状态是由 4 个量子数来描述. 不同量子数的电子, 具有不同的能量, 原子的能量为其所含电子能量的总和. 原子处于完全游离状态时, 具有最低的能量, 称为基态能量 ( $E_0$ ). 在热能, 电能或光能的作用下, 基态原子吸收了能量, 最外层的电子产生跃迁, 从低能态跃迁到较高能态, 它就成为激发态原子. 激发态原子很不稳定, 当它回到基态时, 这些能量以热或光的形式辐射出来, 成为发射光谱. 其辐射能量大小, 用下列公式示:

$$\Delta E = E_q - E_0 = h\nu = hc/\lambda \quad (1)$$

其中  $c$  为光速,  $E_q$  为激发态能量,  $h$  为 Planck 常数,  $\lambda$  为波长,  $\nu$  为频率. 由于不同元素的原子结构不同, 所以一种元素的原子只能发射由  $E_0$  与  $E_q$  决定的特定频率的光. 这样, 每一种元素都有其特征的光谱线. 即使同一种元素的原子, 它们的  $E_q$  也可以不同, 也能产生不同的谱线.

同理, 一些 X 光灯 (X 为某种元素, 如钠, 汞等也是基于类似的原理).

### 0.1.2 核磁共振技术

核磁共振主要是由核的自旋运动所引起的, 核的自旋产生了不同的核自旋能级, 当某种频率的电磁辐射与核自旋能级差相同时, 原子核从低自旋能级跃迁到高自旋能级, 产生了核磁共振现象. 具有核自旋量子数  $I$  的原子核, 当存在外磁场时, 只能有  $(2I + 1)$  个方向, 每种取向代表该核在该磁场中的一种能量状态 (能级), 这些能级称为 Zeemann 能级. 以<sup>1</sup>H 核为例, 它的核自旋量子数为  $1/2$ , 在外磁场分裂为 2 个能级, 能量分别为:

$$E_\beta = B_0 \frac{\gamma h}{4\pi} \quad (2)$$

$$E_\alpha = -B_0 \frac{\gamma h}{4\pi} \quad (3)$$

而其中, 能级差为:

$$\Delta E = B_0 \frac{\gamma h}{2\pi} = h\nu_0 \quad (4)$$

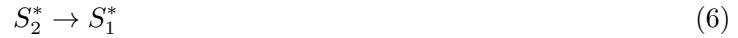
因此当外加射频磁场的频率为  $\nu_0$  时, <sup>1</sup>H 核便可产生共振从而发生跃迁.

### 0.1.3 荧光/磷光相关技术

具有荧光性的分子吸收入射光的能量后, 其中的电子从基态  $S_0$ . (通常为自旋单重态) 跃迁至具有相同自旋多重度的激发态  $S_2^*$ , 即:

$$S_0 + h\nu_{EX} \rightarrow S_2^* \quad (5)$$

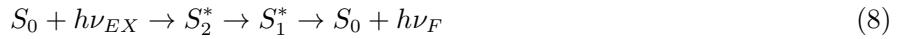
其中  $h$  为 Planck 常数,  $\nu_{EX}$  为入射光的频率. 处于激发态  $S_2^*$  的电子可以通过各种不同的途径释放其能量回到基态. 比如电子可以从  $S_2^*$  经由非常快的 (短于  $10^{12}$  秒) 内转换过程无辐射跃迁至能量稍低并具有相同自旋多重度的激发态  $S_1^*$



紧接着从  $S_1^*$  以发光的方式释放出能量回到基态  $S_0$ :



这里发出的光就是荧光, 其频率为  $\nu_F$ . 由于激发态  $S_1^*$  的能量低于  $S_2^*$ , 故在这一过程中发出的荧光的频率  $\nu_F$  低于入射光的频率  $\nu_{EX}$ . 通常电子从激发态  $S_2^*$  跃迁至  $S_1^*$  的内转换过程非常的快, 而且产生荧光的物质的分子可以通过所谓的振动弛豫过程很快地 (约 10 秒) 经由碰撞达到热平衡, 这两个效应使得绝大部分荧光源自于振动基态  $S_2^*$ . 可以将产生荧光的反应过程总结为:



电子也可以从激发态  $S_1^*$  经由系间跨越过程无辐射跃迁至能量较低且具有不同自旋多重度的激发态  $T_2^*$ (通常为自旋三重态), 再经由内转换过程无辐射跃迁至激发态  $T_1^*$ , 然后以发光的方式释放出能量而回到基态  $S_0$ . 由于激发态  $T_1^*$  和基态  $S_0$ . 具有不同的自旋多重度, 这一跃迁过程是被跃迁选择规则所禁阻的, 从而需要比释放荧光长的多的时间 (从  $10^{-4}$  秒到数分钟乃至数小时不等) 来完成这个过程; 而且与荧光过程不同, 当停止入射光后, 物质中还有相当数量的电子继续保持在亚稳态  $T_1^*$  上并持续发光直到所有的电子回到基态. 这种缓慢释放的光被称为磷光.

## 0.2 列出你知道的各种以”量子”开头的名词, 产品, 学科等; 并指出哪些是合理, 正当和科学的, 哪些是牵强附会, 不合理, 不科学的.

### 0.2.1 ”量子”开头且合理, 正当和科学的名词, 产品, 学科

- 量子化学
- 量子规范场论
- 量子计算机
- 量子通信
- 量子坍缩
- 量子叠加态
- 量子密码学
- 量子场论
- 量子穿隧效应
- 量子点

### 0.2.2 ”量子”开头但牵强附会，不合理，不科学的名词，产品，学科

- 量子养生衣
- 量子能量袜
- 量子佛学
- 量子心理学
- 量子速读术
- 量子饮料
- 量子富氢杯
- 量子太空舱汗蒸
- 量子钻石汽车膜 (在这里”量子”只是一个公司的名称)
- 量子此时假睫毛

## 第二次习题

- 氦4( $^4\text{He}$ )和氦3( $^3\text{He}$ )是同位素，前者是玻色子，后者是费米子。将这两种原子放入5个不同的量子态 (30分)
  1. 如果两个原子分别是氦4原子和氦3原子，有多少种放法？
  2. 如果两个原子都是氦4原子（玻色子），有多少种放法？
  3. 如果两个原子都是氦3原子（费米子），有多少种放法？
- 哪位量子英雄给你留下的印象最深？请简要描述他对量子力学发展的贡献。 (10分)
- 附加题 (0分)：阅读Beginning of infinity (by Deutsch)第11章，了解fungible或fungibility的定义，用一个实际生活中的例子描述你理解的fungible.

## 第二次作业



**0.1 氦 4(<sup>4</sup>He) 和氦 3(<sup>4</sup>He) 是同位素, 前者是玻色子, 后者是费米子. 将这两种原子放入 5 个不同的量子态**

**0.1.1 如果两个原子分别是氦 4 原子和氦 3 原子, 有多少种放法?**

由于任意多个玻色子可以处于同一个量子态, 两个或更多个全同费米子不能处于同一个量子态, 当两个原子分别是玻色子和费米子时, 其中玻色子的存在并不会对费米子所处的量子态产生干扰, 因此费米子可以处于 A, B, C, D, E 中任意一个量子态, 同理, 玻色子也可以处于任意一个量子态. 因此, 一共有  $5 \times 5 = 25$  种放法.

**0.1.2 如果两个原子都是氦 4 原子 (即玻色子), 有多少种放法?**

考虑到任意多个玻色子可以处于同一个量子态, 且两者不可分辨, 此时可以分两种情况讨论. 假如两个玻色子处于同一个量子态, 此时一共有 5 种放法; 假如两个玻色子不处于同一个量子态, 由于两个玻色子不可分辨, 因此根据排列组合公式, 此时一共有  $C_5^2 = 10$  种放法. 取两种情况的加和则一共有  $5 + 10 = 15$  种放法.

**0.1.3 如果两个原子都是氦 3 原子 (即费米子), 有多少种放法?**

考虑到两个或更多个全同费米子不能处于同一个量子态, 因此两个费米子不可能处于同一个量子态, 在五个量子态中任取两个不相同的量子态一共有  $C_5^2 = 10$  种取法, 因此一共有 10 种放法.

**0.2 哪位量子英雄给你留下的印象最深? 简要描述他对量子力学发展的贡献.**

在笔者看来, Bohr 给笔者留下了最深的印象, 作为一名化学系的学生, 笔者非常敬佩 Bohr 面对几乎完全未知的量子领域, 逐渐将其消化吸收, 并用于解决氢原子光谱这一实际问题的过程. 在笔者的学习过程中, 因为专业限制, 对于一些数理知识, 笔者很难专门抽空从零开始推到一个体系, 取而代之的是, 面对一个新的体系, 笔者往往会在添加一些属于自己的理解, 并结合体系的一些限制或条件逐步将其消化, Bohr 的过人之处在于他非常强调实用主义, 即尽管某一个体系或者某一种思想还存在一定的欠缺, 但只要稍加一些自己的理解, 就能解决实际问题, 那么这个体系或思想就是有益的. 这种理论, 认知, 实验相结合的解决问题模式是十分值得笔者学习的.

Bohr 对量子力学发展的贡献主要有以下几条:

- 采用金属电子理论模型解释金属的磁性质 (即 Bohr-van Leeuwen theorem, 考虑到现代金属能带理论, 即金属电子理论是量子力学的衍生产物, 笔者认为此项也能算作 Bohr 对量子力学发展的贡献)
- 将量子理论运用于 Rutherford 所提出的模型, 构建了具有突破性的 Bohr 模型, 并借此推导出氢原子光谱的 Rydberg 公式

- 与荷兰籍的 Hendrik A. Kramers 以及当时与他们共事的美国物理学家 John C. Slater 三人提出了 Bohr-Kramers-Slater 理论 (简称为 BKS 理论)
- Heisenberg 曾于 1924 年首度来到哥本哈根, 担任 Bohr 的研究助理, Bohr 很愿意积极地与 Heisenberg 互相沟通, 次年 6 月, Heisenberg 返回哥廷根, 之后不久便发展出量子力学的数学基础
- 1927 年构想出了互补原理, 这一理论认为基于不同的实验框架, 事物会表现出像波粒二象性这样明显对立的双重性质

0.3 阅读 Beginning of infinity(by Deutsch) 第 11 章, 了解 fungible 或 fungibility 的定义, 用一个实际生活中的例子描述你理解的 fungible.

笔者认为在导读中举出的”支付宝”的例子有一定的不妥当之处, 笔者认为”支付宝”上的数据实质上还是服务器内硬盘上发生的物理或者化学变化, 而这一物理或者化学变化显然可以通过足够精准的手段察觉到. 笔者认为在现实生活中真正的全同需要”完全脱离实体”式的抽象, 例如在以下公式中的  $e$

$$e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta \quad (1)$$

以及以下公式中的  $e$

$$u(\nu) = \frac{8\pi h\nu^3}{c^3} e^{h\nu/k_B T} \quad (2)$$

这两个  $e$  都指由 Euler 所发现的常数, 无论是数值或者意义上完全相同, 因此这两个  $e$  可以说是全同的.

## 第三次习题

1. (10分) 在二维希尔伯特空间里有两个向量

$$|\psi_1\rangle = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1+i \\ 1-i \end{pmatrix}, \quad |\psi_2\rangle = \begin{pmatrix} \frac{8}{17}i \\ \frac{15}{17} \end{pmatrix}$$

计算  $\langle\psi_1|\psi_2\rangle$  和  $\langle\psi_2|\psi_1\rangle$ .

2. (30分) 在二维希尔伯特空间里定义两个向量

$$|\bar{e}_1\rangle = \frac{3}{5} |e_1\rangle + \frac{4}{5} |e_2\rangle = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}, \quad |\bar{e}_2\rangle = \frac{4}{5} |e_1\rangle - \frac{3}{5} |e_2\rangle = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 4 \\ -3 \end{pmatrix}$$

(1) (15分) 证明这两个向量正交归一;

(2) (15分) 由于它们正交归一, 所以可以用它们作正交基矢。在这组正交基下, 题1中的 $|\psi_1\rangle$ 具有如下形式

$$|\psi_1\rangle = a |\bar{e}_1\rangle + b |\bar{e}_2\rangle$$

求 $a$ 和 $b$ .

## 第三次作业



### Question 1

在二维 Hilbert 空间里有两个向量:

$$|\psi_1\rangle = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1+i \\ 1-i \end{pmatrix}, \quad |\psi_2\rangle = \begin{pmatrix} \frac{8}{17}i \\ \frac{15}{17} \end{pmatrix}$$

计算  $\langle\psi_1|\psi_2\rangle$  和  $\langle\psi_2|\psi_1\rangle$

### Solution 1

根据内积的定义, 我们有:

$$\langle\psi_1|\psi_2\rangle = \frac{1}{2} (1-i, 1+i) \begin{pmatrix} \frac{8}{17}i \\ \frac{15}{17} \end{pmatrix} = \frac{23}{34} + \frac{23}{34}i \quad (1)$$

以及

$$\langle\psi_2|\psi_1\rangle = \left(-\frac{8}{17}i, \frac{15}{17}\right) \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1+i \\ 1-i \end{pmatrix} = \frac{23}{34} - \frac{23}{34}i \quad (2)$$

### Question2

在二维 Hilbert 空间里定义两个向量:

$$|\bar{e}_1\rangle = \frac{3}{5} |e_1\rangle + \frac{4}{5} |e_2\rangle = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}, \quad |\bar{e}_2\rangle = \frac{4}{5} |e_1\rangle - \frac{3}{5} |e_2\rangle = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 4 \\ -3 \end{pmatrix}$$

### Question2-1

证明这两个向量正交归一.

### Question2-2

由于这两个向量正交归一, 所以可以用他们作为正交基矢. 在这组正交基下, 上一题中的  $|\psi_1\rangle$  具有以下形式:

$$|\psi_1\rangle = a |\bar{e}_1\rangle + b |\bar{e}_2\rangle$$

求  $a$  与  $b$ .

**Solution2-1**

先来验证“归一性”. 根据定义, 我们有

$$\langle \bar{e}_1 | \bar{e}_1 \rangle = \frac{1}{5} (3, 4) \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} = \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{5} \cdot (3^2 + 4^2) = 1 \quad (3)$$

以及

$$\langle \bar{e}_2 | \bar{e}_2 \rangle = \frac{1}{5} (4, -3) \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 4 \\ -3 \end{pmatrix} = \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{5} \cdot (4^2 + (-3)^2) = 1 \quad (4)$$

由此可验证两个向量的长度为 1.

再来验证“正交性”. 根据定义, 我们有

$$\langle \bar{e}_1 | \bar{e}_2 \rangle = \frac{1}{5} (3, 4) \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 4 \\ -3 \end{pmatrix} = \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{5} \cdot (3 \cdot 4 + 4 \cdot (-3)) = 0 \quad (5)$$

以及

$$\langle \bar{e}_2 | \bar{e}_1 \rangle = \frac{1}{5} (4, -3) \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} = \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{5} \cdot (4 \cdot 3 + (-3) \cdot 4) = 0 \quad (6)$$

故这两个向量正交归一.

**Solution2-2**

由

$$|\psi_1\rangle = a |\bar{e}_1\rangle + b |\bar{e}_2\rangle$$

可列出以下两个方程:

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{2}i = \frac{3}{5}a + \frac{4}{5}b \quad (7)$$

$$\frac{1}{2} - \frac{1}{2}i = \frac{4}{5}a - \frac{3}{5}b \quad (8)$$

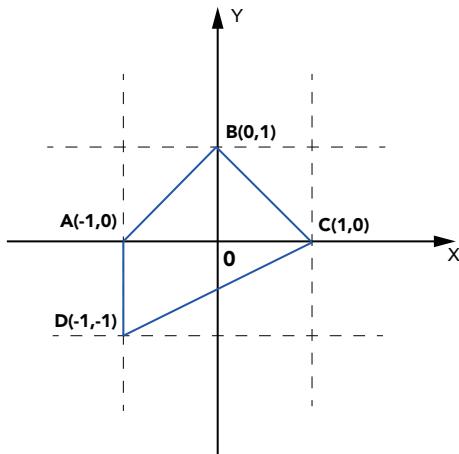
联立解得:

$$\begin{cases} a = \frac{7}{10} - \frac{1}{10}i \\ b = \frac{1}{10} + \frac{7}{10}i \end{cases}$$

## 第四次习题

1. (10分) 有一个矩阵 $Q_x$

$$Q_x = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$



画出图中的四边形ABCD在矩阵 $Q_x$ 作用下变成的形状。

2. 现在有两个矩阵

$$M_1 = \begin{pmatrix} 3 & 1+i \\ 1-i & 2 \end{pmatrix}, \quad M_2 = \begin{pmatrix} 2 & 1+3i \\ 1-i & 1 \end{pmatrix}$$

- (1) (10分) 计算 $M_1M_2, M_2M_1, M_1^T, M_2^T, M_1^\dagger, M_2^\dagger$ 。  
 (2) (1分)  $M_1M_2 = M_2M_1$ 吗?  
 (3) (4分)  $M_1$ 和 $M_2$ 中哪个是厄米矩阵?

3. (10分) 验证下面这个向量 $|\psi\rangle$ 是 $\hat{\sigma}_y$ 的本征态

$$|\psi\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix}.$$

并将向量 $|\psi\rangle$ 归一化。

4. (5分) 在二维平面里进行两次不同的旋转，旋转的结果不依赖于两次旋转的次序；举例说明三维空间里的两次旋转，旋转的结果会依赖于两次旋转的次序。

附加题 (0分) :

- 证明：二维空间里的一条直线在任意矩阵的作用下是一条直线或者一个点。（我们生活的三维空间当然有类似的结论。）

## 第四次作业



### Question 1

有一个矩阵  $Q_x$ :

$$Q_x = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

画出题目中四边形 ABCD 在矩阵  $Q_x$  作用下变成的形状

### Question2

现有两个矩阵:

$$M_1 = \begin{pmatrix} 3 & 1+i \\ 1-i & 2 \end{pmatrix}, \quad M_2 = \begin{pmatrix} 2 & 1+3i \\ 1-i & 1 \end{pmatrix}$$

### Question2-1

计算  $M_1M_2$ ,  $M_2M_1$ ,  $M_1^T$ ,  $M_2^T$ ,  $M_1^\dagger$ ,  $M_2^\dagger$ .

### Question2-2

判断  $M_1M_2$  是否等于  $M_2M_1$ .

### Question2-3

$M_1$  和  $M_2$  哪个是 Hermite 矩阵?

### Question3

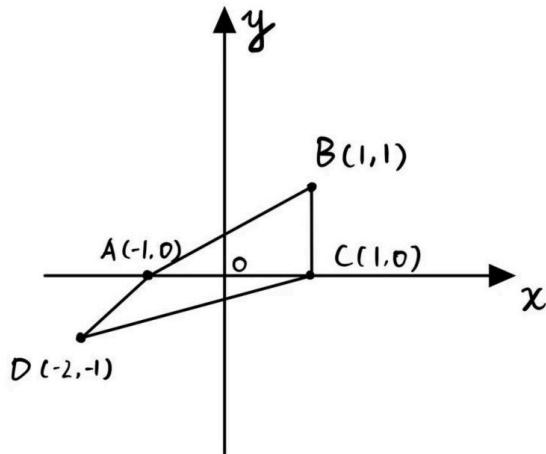
验证下面这个向量  $|\psi\rangle$  是  $\hat{\sigma}_y$  的本征值:

$$|\psi\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix}$$

并将向量  $|\psi\rangle$  归一化.

### Additional Question

证明: 在二维空间里的一条直线在任意矩阵的作用下是一条直线或者一个点 (三维空间也有类似的结论).

**Solution 1****Solution 2-1**

$$M_1 M_2 = \begin{pmatrix} 3 & 1+i \\ 1-i & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1+3i \\ 1-i & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 & 4+10i \\ 4-4i & 6+2i \end{pmatrix}$$

$$M_2 M_1 = \begin{pmatrix} 2 & 1+3i \\ 1-i & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 1+i \\ 1-i & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10+2i & 4+8i \\ 4-4i & 4 \end{pmatrix}$$

$$M_1^T = \begin{pmatrix} 3 & 1-i \\ 1+i & 2 \end{pmatrix}$$

$$M_2^T = \begin{pmatrix} 2 & 1-i \\ 1+3i & 1 \end{pmatrix}$$

$$M_1^\dagger = \begin{pmatrix} 3 & 1+i \\ 1-i & 2 \end{pmatrix}$$

$$M_2^\dagger = \begin{pmatrix} 2 & 1+i \\ 1-3i & 1 \end{pmatrix}$$

**Solution 2-2**

根据上一问的计算结果, 显然  $M_1 M_2 \neq M_2 M_1$ .

**Solution 2-3**

考虑到  $M_1^\dagger = M_1$ , 而  $M_2^\dagger \neq M_2$ , 因此  $M_1$  是 Hermite 矩阵.

**Solution 3**

考虑到以下关系:

$$\hat{\sigma}_y |\psi\rangle = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix}$$

因此向量  $|\psi\rangle$  是  $\hat{\sigma}_y$  的本征态. 再考虑到:

$$\langle\psi|\psi\rangle = 2$$

因此, 假定  $|\psi_1\rangle$  是  $|\psi\rangle$  的归一化函数, 则有:

$$|\psi_1\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} |\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix}$$

**Solution 4**

假定空间内有一点  $A$  的坐标为  $(1, 1, 1)$ (所取空间坐标系为右手系), 此时沿  $x$  轴与  $y$  轴方向分别有一个  $C_4$  轴 (或四次旋转轴), 分别记作  $C_{4x}$  以及  $C_{4y}$ (后面所述的旋转均为沿  $x/y$  轴负方向看去的顺时针旋转). 将  $A$  先绕  $C_{4x}$  旋转, 再绕  $C_{4y}$  旋转, 得到的点  $B$  坐标为  $(1, 1, 1)$ . 将  $A$  先绕  $C_{4y}$  旋转, 再绕  $C_{4x}$  旋转, 得到的点  $C$  坐标为  $(-1, 1, -1)$ , 显然  $B$  和  $C$  的坐标不一致, 因此可以说明旋转的结果会依赖于两次旋转的次序.

**Solution for Additional Question**

对于二次元内的任意一条直线, 通过适当的移动坐标系, 可以将其解析式简化为以下形式:

$$ax + by = 0$$

或者转化为类似于内积的形式:

$$\begin{pmatrix} a & b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 0$$

假定题目中说的矩阵具有以下形式:

$$\begin{pmatrix} p & q \\ s & t \end{pmatrix}$$

则将矩阵作用于直线, 直线的解析式转化为:

$$\begin{pmatrix} a & b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p & q \\ s & t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 0 \Rightarrow \begin{pmatrix} ap + sb & aq + bt \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 0$$

再考虑到以下矩阵

$$\begin{pmatrix} ap + sb & aq + bt \end{pmatrix}$$

的秩为 1, 小于未知数的个数, 因此对于以下方程,

$$\begin{pmatrix} ap + sb & aq + bt \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 0$$

方程一定有至少一个实数解  $((0, 0))$ , 也可能有无限多个解, 因此在矩阵的作用下可以得到一条直线或一个点.

## 第五次习题

1. (10分) 有三个自旋态

$$|\psi_a\rangle = a_1|u\rangle + a_2|d\rangle$$

$$|\psi_b\rangle = b_1|u\rangle + b_2|d\rangle$$

$$|\psi_c\rangle = c_1|u\rangle + c_2|d\rangle$$

证明:  $\langle\psi_a|(\alpha|\psi_b\rangle + \beta|\psi_c\rangle) = \alpha\langle\psi_a|\psi_b\rangle + \beta\langle\psi_a|\psi_c\rangle.$

这里  $a_1, a_2, b_1, b_2, c_1, c_2$  和  $\alpha, \beta$  都是复数。

2. (10分) 验算  $\vec{n} \cdot \hat{\sigma} |n-\rangle = -|n-\rangle$ . ( $|n-\rangle$  的定义见课本92页)

3. (10分) 假设施特恩-格拉赫实验中 (磁场沿z方向) 的银原子总是处于下面这个自旋态

$$|\psi\rangle = \frac{8}{17}|u\rangle - \frac{15i}{17}|d\rangle$$

如果最后检测屏上共有1000个银原子, 那么上斑点中有大约有多少个银原子, 下斑点中大约有多少个银原子?

4. (10分) 假设施特恩-格拉赫实验中的银原子总是处于下面这个自旋态

$$|\phi\rangle = \frac{1}{2}|u\rangle + \frac{\sqrt{3}}{2}|d\rangle$$

那么磁场沿什么方向  $\vec{n}$  的时候, 检测屏上只会出现一个斑点.

## 第五次作业



### Question 1

现有三个自旋态:

$$|\psi_a\rangle = a_1|u\rangle + a_2|d\rangle$$

$$|\psi_b\rangle = b_1|u\rangle + b_2|d\rangle$$

$$|\psi_c\rangle = c_1|u\rangle + c_2|d\rangle$$

证明:  $\langle\psi_a|(\alpha|\psi_b\rangle + \beta|\psi_c\rangle) = \alpha\langle\psi_a|\psi_b\rangle + \beta\langle\psi_a|\psi_c\rangle$ , 其中  $a_1, a_2, b_1, b_2, c_1, c_2, \alpha$  和  $\beta$  都是复数.

### Question 2

验算  $\vec{n} \cdot \hat{\sigma} |n-\rangle = -|n-\rangle$ .

### Question 3

假设 Stern-Gerlach 实验中 (磁场沿  $z$  方向) 的银原子总是处于下面这个自旋态:

$$|\psi\rangle = \frac{8}{17}|u\rangle - \frac{15i}{17}|d\rangle$$

如果最后监测屏上共有 1000 个银原子, 那么靠上的斑点中大约有多少个银原子, 靠下的斑点中大约有多少个银原子?

### Question 4

假设 Stern-Gerlach 实验中的银原子总是处于下面这个自旋态:

$$|\phi\rangle = \frac{1}{2}|u\rangle + \frac{\sqrt{3}}{2}|d\rangle$$

那么磁场沿什么方向  $\vec{n}$  的时候, 监测屏上只会出现一个斑点?

### Solution 1

$$\begin{aligned} \langle\psi_1|(\alpha|\psi_b\rangle + \beta|\psi_c\rangle) &= (a_1^* \langle u| + a_2^* \langle d|)(\alpha(b_1|u\rangle + b_2|d\rangle) + \beta(c_1|u\rangle + c_2|d\rangle)) \\ &= \alpha(a_1^*b_1 \langle u|u\rangle + a_1^*b_2 \langle u|d\rangle + a_2^*b_1 \langle d|u\rangle + a_2^*b_2 \langle d|d\rangle) \\ &\quad + \beta(a_1^*c_1 \langle u|u\rangle + a_1^*c_2 \langle u|d\rangle + a_2^*c_1 \langle d|u\rangle + a_2^*c_2 \langle d|d\rangle) \\ &= \alpha\langle\psi_a|\psi_b\rangle + \beta\langle\psi_a|\psi_c\rangle \end{aligned}$$

**Solution 2**

$$\begin{aligned}
\vec{n} \cdot \hat{\sigma} |n_-\rangle &= \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta e^{-i\varphi} \\ \sin \theta e^{i\varphi} & -\cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sin \frac{\theta}{2} \\ -\cos \frac{\theta}{2} e^{i\varphi} \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \cos \theta \sin \frac{\theta}{2} - \sin \theta \cos \frac{\theta}{2} \\ \sin \theta \sin \frac{\theta}{2} e^{i\varphi} + \cos \theta \cos \frac{\theta}{2} e^{i\varphi} \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} -\sin(\theta - \frac{\theta}{2}) \\ e^{i\varphi} \cos(\theta - \frac{\theta}{2}) \end{pmatrix} \\
&= -|n_-\rangle
\end{aligned}$$

**Solution 3**

考虑到  $\vec{n} \cdot \hat{\sigma}$  的本征态为:

$$|n_+\rangle = \begin{pmatrix} \cos \frac{\theta}{2} \\ \sin \frac{\theta}{2} e^{i\varphi} \end{pmatrix}, |n_-\rangle = \begin{pmatrix} \sin \frac{\theta}{2} \\ -\cos \frac{\theta}{2} e^{i\varphi} \end{pmatrix}$$

当磁场沿  $z$  轴方向, 代入  $\theta = 0, \varphi = 0$ , 可得本征态分别为(已归一化):

$$|a\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, |b\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

对  $|\psi\rangle$  分别左乘  $|a\rangle$  以及  $|b\rangle$ , 可得:

$$\begin{aligned} \langle a|\psi\rangle &= 1 \cdot \frac{8}{17} \\ \langle b|\psi\rangle &= 1 \cdot \frac{15i}{17} \end{aligned}$$

考虑到

$$\begin{aligned}
|\langle a|\psi\rangle|^2 &= \left| \frac{8}{17} \right|^2 = \frac{64}{289} \approx 0.221 \\
|\langle b|\psi\rangle|^2 &= \left| \frac{15i}{17} \right|^2 = \frac{225}{289} \approx 0.779
\end{aligned}$$

因此在上斑点约有 221 个银原子, 下斑点约有 779 个银原子.

**Solution 4**

考虑到监测屏上只有一个斑点, 因此可以令自旋态处于某一个本征态的概率为 100%. 当  $\langle |n_-\rangle ||\phi\rangle \rangle = 0$  或  $\pi$  时(此处括号表示两个矢量之间的夹角):

$$\begin{pmatrix} \sin \frac{\theta}{2} \\ -\cos \frac{\theta}{2} e^{i\varphi} \end{pmatrix} = \pm \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix}$$

解得

$$\theta = 5\pi/3, \varphi = 0$$

当  $|n_+\rangle = |\phi\rangle$  时:

$$\begin{pmatrix} \cos \frac{\theta}{2} \\ \sin \frac{\theta}{2} e^{i\varphi} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix}$$

解得

$$\theta = 2\pi/3, \varphi = 0$$

因此当  $\theta = 2\pi/3$  或  $5\pi/3$ , 且  $\varphi = 0$  时监测屏上仅有一个斑点.

## 第六次习题

1. (5分) 证明  $[\hat{\sigma}_x, \hat{\sigma}_y] = 2i\hat{\sigma}_z$ .

2. (15分) 给定一个自旋态

$$|\psi_1\rangle = \frac{1}{2}|u\rangle + \frac{\sqrt{3}}{2}|d\rangle$$

和一个方向

$$\vec{n} = \{3/5, 0, 4/5\}$$

(1) (5分) 测得自旋沿 $z$ 方向向上和向下的几率分别是多少?

(2) (5分) 测得自旋沿 $x$ 正方向和负方向的几率分别是多少?

(3) (5分) 测得自旋沿 $\vec{n}$ 正方向和负方向的几率分别是多少?

3. (20分) 给定一个自旋态

$$|\psi_2\rangle = \frac{1}{2}|u\rangle - \frac{i\sqrt{3}}{2}|d\rangle$$

和一个方向

$$\vec{n} = \{3/5, 0, 4/5\}$$

(1) (5分) 测得自旋沿 $z$ 方向向上和向下的几率分别是多少?

(2) (5分) 测得自旋沿 $x$ 正方向和负方向的几率分别是多少?

(3) (5分) 测得自旋沿 $\vec{n}$ 正方向和负方向的几率分别是多少?

(4) (5分) 计算期待值 $\langle\psi_2| \vec{n} \cdot \hat{\sigma} |\psi_2\rangle$ .

## 第六次作业



### Question 1

证明:

$$[\hat{\sigma}_x, \hat{\sigma}_y] = 2i\hat{\sigma}_z$$

### Question 2

给定一个自旋态:

$$|\psi_1\rangle = \frac{1}{2}|u\rangle + \frac{\sqrt{3}}{2}|d\rangle$$

和一个方向:

$$\vec{n} = \{3/5, 0, 4/5\}$$

#### Question 2-1

测得自旋沿  $z$  方向上和向下的几率分别为多少?

#### Question 2-2

测得自旋沿  $x$  方向上和向下的几率分别为多少?

#### Question 2-3

测得自旋沿  $\vec{n}$  方向上和向下的几率分别为多少?

### Question 3

给定一个自旋态:

$$|\psi_2\rangle = \frac{1}{2}|u\rangle - \frac{i\sqrt{3}}{2}|d\rangle$$

和一个方向:

$$\vec{n} = \{3/5, 0, 4/5\}$$

#### Question 3-1

测得自旋沿  $z$  方向上和向下的几率分别为多少?

#### Question 3-2

测得自旋沿  $x$  方向上和向下的几率分别为多少?

**Question 3-3**

测得自旋沿  $\vec{n}$  方向上和向下的几率分别为多少?

**Question 3-4**

起算期望值  $\langle \psi_2 | \vec{n} \cdot \hat{\sigma} | \psi_2 \rangle$

**Solution 1**

$$\begin{aligned} [\hat{\sigma}_x, \hat{\sigma}_y] &= \hat{\sigma}_x \hat{\sigma}_y - \hat{\sigma}_y \hat{\sigma}_x \\ &= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -i & 0 \\ 0 & i \end{pmatrix} \\ &= 2i \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = 2i\hat{\sigma}_z \end{aligned}$$

**Solution 2-1**

定义矢量  $\vec{m}$ :

$$\vec{m} = \{\sin \theta \cos \phi, \sin \theta \sin \phi, \cos \theta\}$$

当  $\theta = 0, \phi$  为任意角时, 算符  $\vec{m} \cdot \hat{\sigma}$  的本征矢为:

$$|m_+\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, |m_-\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ -e^{i\phi} \end{pmatrix}$$

因此自旋沿  $z$  方向上向上的概率为:

$$|\langle m_+ | \psi_1 \rangle|^2 = \left| \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1/2 \\ \sqrt{3}/2 \end{pmatrix} \right|^2 = \left| \frac{1}{2} \right|^2 = \frac{1}{4} = 0.25$$

因此自旋沿  $z$  方向下向下的概率为:

$$|\langle m_- | \psi_1 \rangle|^2 = \left| \begin{pmatrix} 0 & -e^{i\phi} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1/2 \\ \sqrt{3}/2 \end{pmatrix} \right|^2 = \left| \frac{-\sqrt{3}e^{i\phi}}{2} \right|^2 = \frac{3}{4} = 0.75$$

**Solution 2-2**

定义矢量  $\vec{m}$ :

$$\vec{m} = \{\sin \theta \cos \phi, \sin \theta \sin \phi, \cos \theta\}$$

当  $\theta = \pi/2, \phi = 0$  时, 算符  $\vec{m} \cdot \hat{\sigma}$  的本征矢为:

$$|m_+\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, |m_-\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

因此自旋沿  $x$  方向向上的概率为:

$$|\langle m_+ | \psi_1 \rangle|^2 = \left| \frac{1}{\sqrt{2}} (1 \ 1) \begin{pmatrix} 1/2 \\ \sqrt{3}/2 \end{pmatrix} \right|^2 = \left| \frac{1 + \sqrt{3}}{2\sqrt{2}} \right|^2 = \frac{2 + \sqrt{3}}{4} \approx 0.933$$

因此自旋沿  $x$  方向向下的概率为:

$$|\langle m_- | \psi_1 \rangle|^2 = \left| \frac{1}{\sqrt{2}} (1 \ -1) \begin{pmatrix} 1/2 \\ \sqrt{3}/2 \end{pmatrix} \right|^2 = \left| \frac{1 - \sqrt{3}}{2\sqrt{2}} \right|^2 = \frac{2 - \sqrt{3}}{4} \approx 0.066$$

### Solution 2-3

对于矢量  $\vec{n}$ , 当  $\theta = \arctan 3/4, \phi = 0$  时, 算符  $\vec{m} \cdot \hat{\sigma}$  的本征矢为:

$$|m_+\rangle = \frac{1}{\sqrt{10}} \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}, |m_-\rangle = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix}$$

因此自旋沿  $\vec{n}$  方向向上的概率为:

$$|\langle m_+ | \psi_1 \rangle|^2 = \left| \frac{1}{\sqrt{10}} (3 \ 1) \begin{pmatrix} 1/2 \\ \sqrt{3}/2 \end{pmatrix} \right|^2 = \left| \frac{3 + \sqrt{3}}{2\sqrt{10}} \right|^2 = \frac{6 + 3\sqrt{3}}{20} \approx 0.560$$

因此自旋沿  $\vec{n}$  方向向下的概率为:

$$|\langle m_- | \psi_1 \rangle|^2 = \left| \frac{1}{\sqrt{10}} (1 \ -3) \begin{pmatrix} 1/2 \\ \sqrt{3}/2 \end{pmatrix} \right|^2 = \left| \frac{1 - 3\sqrt{3}}{2\sqrt{10}} \right|^2 = \frac{14 - 3\sqrt{3}}{20} \approx 0.440$$

### Solution 3-1

定义矢量  $\vec{m}$ :

$$\vec{m} = \{\sin \theta \cos \phi, \sin \theta \sin \phi, \cos \theta\}$$

当  $\theta = 0, \phi$  为任意角时, 算符  $\vec{m} \cdot \hat{\sigma}$  的本征矢为:

$$|m_+\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, |m_-\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ -e^{i\phi} \end{pmatrix}$$

因此自旋沿  $z$  方向向上的概率为:

$$|\langle m_+ | \psi_1 \rangle|^2 = \left| (1 \ 0) \begin{pmatrix} 1/2 \\ -i\sqrt{3}/2 \end{pmatrix} \right|^2 = \left| \frac{1}{2} \right|^2 = \frac{1}{4} = 0.25$$

因此自旋沿  $z$  方向向下的概率为:

$$|\langle m_- | \psi_1 \rangle|^2 = \left| (0 \ -e^{i\phi}) \begin{pmatrix} 1/2 \\ -i\sqrt{3}/2 \end{pmatrix} \right|^2 = \left| \frac{-i\sqrt{3}e^{i\phi}}{2} \right|^2 = \frac{3}{4} = 0.75$$

**Solution 3-2**

定义矢量  $\vec{m}$ :

$$\vec{m} = \{\sin \theta \cos \phi, \sin \theta \sin \phi, \cos \theta\}$$

当  $\theta = \pi/2, \phi = 0$  时, 算符  $\vec{m} \cdot \hat{\sigma}$  的本征矢为:

$$|m_+\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, |m_-\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

因此自旋沿  $x$  方向向上的概率为:

$$|\langle m_+ | \psi_1 \rangle|^2 = \left| \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1/2 \\ -i\sqrt{3}/2 \end{pmatrix} \right|^2 = \left| \frac{1-i\sqrt{3}}{2\sqrt{2}} \right|^2 = \frac{1}{2} = 0.5$$

因此自旋沿  $x$  方向向下的概率为:

$$|\langle m_- | \psi_1 \rangle|^2 = \left| \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1/2 \\ -i\sqrt{3}/2 \end{pmatrix} \right|^2 = \left| \frac{1+i\sqrt{3}}{2\sqrt{2}} \right|^2 = \frac{1}{2} = 0.5$$

**Solution 3-3**

对于矢量  $\vec{n}$ , 当  $\theta = \arctan 3/4, \phi = 0$  时, 算符  $\vec{m} \cdot \hat{\sigma}$  的本征矢为:

$$|m_+\rangle = \frac{1}{\sqrt{10}} \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}, |m_-\rangle = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix}$$

因此自旋沿  $\vec{n}$  方向向上的概率为:

$$|\langle m_+ | \psi_1 \rangle|^2 = \left| \frac{1}{\sqrt{10}} \begin{pmatrix} 3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1/2 \\ -i\sqrt{3}/2 \end{pmatrix} \right|^2 = \left| \frac{3-i\sqrt{3}}{2\sqrt{10}} \right|^2 = \frac{3}{10} = 0.3$$

因此自旋沿  $\vec{n}$  方向向下的概率为:

$$|\langle m_- | \psi_1 \rangle|^2 = \left| \frac{1}{\sqrt{10}} \begin{pmatrix} 1 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1/2 \\ -i\sqrt{3}/2 \end{pmatrix} \right|^2 = \left| \frac{1+i3\sqrt{3}}{2\sqrt{10}} \right|^2 = \frac{7}{10} = 0.7$$

**Solution 3-4**

$$\begin{aligned} \langle \psi_2 | \vec{n} \cdot \hat{\sigma} | \psi_2 \rangle &= \begin{pmatrix} 1/2 & i\sqrt{3}/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4/5 & 3/5 \\ 3/5 & -4/5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1/2 \\ -i\sqrt{3}/2 \end{pmatrix} \\ &= -\frac{2}{5} \end{aligned}$$

## 第七次习题

(一) 一个自旋正在按照下面的么正矩阵

$$U_s(t) = \begin{pmatrix} \cos t - i\frac{\sqrt{2}}{2} \sin t & i\frac{\sqrt{2}}{2} \sin t \\ i\frac{\sqrt{2}}{2} \sin t & \cos t + i\frac{\sqrt{2}}{2} \sin t \end{pmatrix}$$

1. (10分) 初始的自旋态是 $|u\rangle$ , 那么时刻 $t$ 时, 自旋处于什么态? 假设在 $t_f$ 时刻, 自旋态演化成为 $|b\rangle = (|u\rangle - |d\rangle)/\sqrt{2}$ 。请问 $t_f = ?$ 。
2. (10分) 初始的自旋态是 $|d\rangle$ , 那么时刻 $t$ 时, 自旋处于什么态? 在同样的 $t_f$ 时刻, 自旋处于什么态?
3. (10分) 初始的自旋态是

$$|\psi\rangle = \frac{\sqrt{3}}{2} |u\rangle + \frac{1}{2} |d\rangle ,$$

那么在时刻 $t_f$ , 自旋态处于什么态?

(二) (10分) 一个长度为 $a = 1$ 的一维盒子里, 粒子处于两个能量本征态(参见课本公式(6.27)) 的叠加态

$$\psi_+(x) = \frac{1}{\sqrt{2}} [\psi_2(x) + \psi_3(x)] = \sin(2\pi x) + \sin(3\pi x) \quad (1)$$

$$\psi_-(x) = \frac{1}{\sqrt{2}} [\psi_2(x) - \psi_3(x)] = \sin(2\pi x) - \sin(3\pi x) \quad (2)$$

请画出这两个波函数 $\psi_+$ 和 $\psi_-$ 。

## 第七次作业



### Question 1

一个自旋正在按照下面的幺正矩阵进行动力学演化:

$$\hat{U}_s(t) = \begin{pmatrix} \cos t - i\frac{\sqrt{2}}{2} \sin t & i\frac{\sqrt{2}}{2} \sin t \\ i\frac{\sqrt{2}}{2} \sin t & \cos t + i\frac{\sqrt{2}}{2} \sin t \end{pmatrix}$$

#### Question 1-1

初始的自旋态是  $|u\rangle$ , 那么时刻  $t$  时, 自旋处于什么态? 假设在  $t_f$  时刻, 自旋态演化为  $|b\rangle = (|u\rangle - |d\rangle)/\sqrt{2}$ , 则  $t_f$  为何?

#### Question 1-2

初始的自旋态是  $|d\rangle$ , 那么时刻  $t$  时, 自旋处于什么态? 同样在  $t_f$  时刻, 自旋处于什么态?

#### Question 1-3

初始的自旋态是:

$$|\psi\rangle = \frac{\sqrt{3}}{2} |u\rangle + \frac{1}{2} |d\rangle$$

同样在  $t_f$  时刻, 自旋处于什么态?

### Question 2

一个长度为  $a = 1$  的一维盒子里, 粒子处于两个能量本征态的叠加态:

$$\begin{aligned}\psi_+(x) &= \frac{1}{\sqrt{2}} [\psi_2(x) + \psi_3(x)] = \sin(2\pi x) + \sin(3\pi x) \\ \psi_-(x) &= \frac{1}{\sqrt{2}} [\psi_2(x) - \psi_3(x)] = \sin(2\pi x) - \sin(3\pi x)\end{aligned}$$

请画出这两个波函数  $\psi_+$  和  $\psi_-$ .

#### Solution1-1

$$\begin{aligned}\hat{U}_s(t) |u\rangle &= \begin{pmatrix} \cos t - i\frac{\sqrt{2}}{2} \sin t & i\frac{\sqrt{2}}{2} \sin t \\ i\frac{\sqrt{2}}{2} \sin t & \cos t + i\frac{\sqrt{2}}{2} \sin t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} \sqrt{2} \cos t - i \sin t \\ i \sin t \end{pmatrix} \\ &= (\cos t - i\frac{1}{\sqrt{2}} \sin t) |u\rangle + i\frac{1}{\sqrt{2}} \sin t |d\rangle\end{aligned}$$

根据这一结论, 可以列出以下等式 ( $\omega$  为一实数)

$$\begin{aligned}\cos t_f - i \frac{1}{\sqrt{2}} \sin t_f &= e^{i\omega} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ i \frac{1}{\sqrt{2}} \sin t_f &= -e^{i\omega} \frac{1}{\sqrt{2}}\end{aligned}$$

由这两条等式可以分别解得

$$t_f = \arcsin(i e^{i\omega}) \quad (1)$$

$$t_f = k\pi + \frac{\pi}{2} \quad (k \in \mathbb{Z}) \quad (2)$$

由公式 (2), 我们可以得知, 相位因子  $\omega$  应该为  $n\pi$  ( $n \in \mathbb{Z}$ ), 因此最终结果为

$$t_f = k\pi + \frac{\pi}{2} \quad (k \in \mathbb{Z})$$

### Solution 1-2

$$\begin{aligned}\hat{U}_s(t) |d\rangle &= \begin{pmatrix} \cos t - i \frac{\sqrt{2}}{2} \sin t & i \frac{\sqrt{2}}{2} \sin t \\ i \frac{\sqrt{2}}{2} \sin t & \cos t + i \frac{\sqrt{2}}{2} \sin t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} i \sin t \\ \sqrt{2} \cos t + i \sin t \end{pmatrix} \\ &= (\cos t + i \frac{1}{\sqrt{2}} \sin t) |u\rangle + i \frac{1}{\sqrt{2}} \sin t |d\rangle\end{aligned}$$

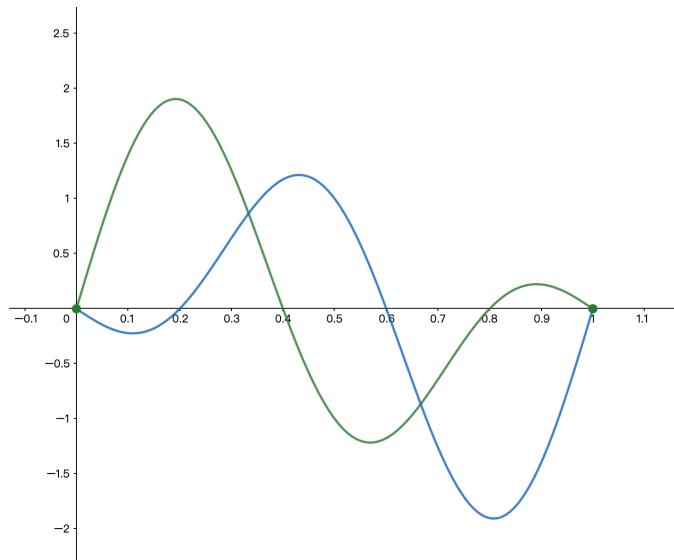
当处在  $t_f$  时刻时, 代入  $t = k\pi + \frac{\pi}{2}$  ( $k \in \mathbb{Z}$ ):

$$\begin{aligned}\hat{U}_s(t_f) |d\rangle &= (\cos t + i \frac{1}{\sqrt{2}} \sin t) |u\rangle + i \frac{1}{\sqrt{2}} \sin t |d\rangle \\ &= \pm \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} i \\ i \end{pmatrix}\end{aligned}$$

### Solution 1-3

代入  $t = k\pi + \frac{\pi}{2}$  ( $k \in \mathbb{Z}$ ):

$$\begin{aligned}\hat{U}_s(t) \left( \frac{\sqrt{3}}{2} |u\rangle + \frac{1}{2} |d\rangle \right) &= \begin{pmatrix} \cos t - i \frac{\sqrt{2}}{2} \sin t & i \frac{\sqrt{2}}{2} \sin t \\ i \frac{\sqrt{2}}{2} \sin t & \cos t + i \frac{\sqrt{2}}{2} \sin t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sqrt{3}/2 \\ 1/2 \end{pmatrix} \\ &= \pm \frac{\sqrt{2}}{4} \begin{pmatrix} i(\sqrt{3}-1) \\ -i(\sqrt{3}+1) \end{pmatrix}\end{aligned}$$

**Solution 2**

其中绿色函数表示  $\psi_+(x) = \frac{1}{\sqrt{2}}[\psi_2(x) + \psi_3(x)] = \sin(2\pi x) + \sin(3\pi x)$ , 蓝色函数表示  $\psi_-(x) = \frac{1}{\sqrt{2}}[\psi_2(x) - \psi_3(x)] = \sin(2\pi x) - \sin(3\pi x)$ .

## 第八次习题

1. (10分) 一个自旋按照下面的么正矩阵

$$U_s(t) = \begin{pmatrix} \cos t - i\frac{\sqrt{2}}{2} \sin t & i\frac{\sqrt{2}}{2} \sin t \\ i\frac{\sqrt{2}}{2} \sin t & \cos t + i\frac{\sqrt{2}}{2} \sin t \end{pmatrix}$$

进行动力学演化。它的初始的自旋态是

$$|\psi\rangle = \frac{\sqrt{3}}{2} |u\rangle + \frac{1}{2} |d\rangle ,$$

验证:

$$U_s(t) |\psi\rangle = \frac{\sqrt{3}}{2} U_s(t) |u\rangle + \frac{1}{2} U_s(t) |d\rangle .$$

2. (10分) 二维旋转矩阵是

$$R = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}$$

对两个二维向量

$$|\varphi_1\rangle = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} , \quad |\varphi_2\rangle = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$$

证明:  $R(|\varphi_1\rangle + |\varphi_2\rangle) = R|\varphi_1\rangle + R|\varphi_2\rangle$ .

3. (20分) 在课本图6.8描述的双缝干涉实验中, 假设总共有2400个电子通过双缝。在线圈没有电流通过时, 探测器 $d_5$ 上探测到了大约600个电子。现在线圈通电产生磁场, 造成电子上下两部分波函数有一个 $\pi/3$ 的相位差, 即通过双缝以后, 电子的波函数成为

$$|\Phi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|\psi_1\rangle + e^{i\pi/3} |\psi_2\rangle) . \quad (3)$$

请问探测器 $d_5$ 上探测到了大约多少个电子。

## 第八次作业



### Question 1

一个自旋按照下面的幺正矩阵

$$U_s(t) = \begin{pmatrix} \cos t - i\frac{\sqrt{2}}{2} \sin t & i\frac{\sqrt{2}}{2} \sin t \\ i\frac{\sqrt{2}}{2} \sin t & \cos t + i\frac{\sqrt{2}}{2} \sin t \end{pmatrix}$$

进行动力学演化, 其初始的自旋态为

$$|\psi\rangle = \frac{\sqrt{3}}{2} |u\rangle + \frac{1}{2} |d\rangle$$

验证以下关系:

$$U_s(t) |\psi\rangle = \frac{\sqrt{3}}{2} U_s(t) |u\rangle + \frac{1}{2} U_s(t) |d\rangle$$

### Question 2

现有二维旋转矩阵

$$R = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}$$

以及两个二维向量

$$|\varphi_1\rangle = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}, |\varphi_2\rangle = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$$

证明以下关系:

$$R(|\varphi_1\rangle + |\varphi_2\rangle) = R|\varphi_1\rangle + R|\varphi_2\rangle$$

### Question 3

在课本图 6.8 描述的双峰干涉实验中, 假定总共有 2400 个电子通过双缝. 在线圈没有电流通过时, 探测器  $d_5$  上探测到了大约 600 个电子. 现在线圈通电产生磁场, 造成电子上下两部分波函数有一个  $\pi/3$  的相位差, 即通过双缝以后, 电子的波函数为

$$|\Phi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|\psi_1\rangle + e^{i\pi/3} |\psi_2\rangle)$$

探测器  $d_5$  上会大约检测到多少个电子?

**Solution 1**

$$\begin{aligned}
U_s t |\psi\rangle &= \begin{pmatrix} \cos t - i \sin t / \sqrt{2} & i \sin t / \sqrt{2} \\ i \sin t / \sqrt{2} & \cos t + i \sin t / \sqrt{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sqrt{3}/2 \\ 1/2 \end{pmatrix} \\
&= \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 2\sqrt{3} \cos t + (\sqrt{2} - \sqrt{6})i \sin t \\ 2 \cos t + (\sqrt{2} + \sqrt{6})i \sin t \end{pmatrix} \\
&= \frac{\sqrt{3}}{2} \begin{pmatrix} \cos t - i \sin t / \sqrt{2} \\ i \sin t / \sqrt{2} \end{pmatrix} + \frac{1}{2} \begin{pmatrix} i \sin t / \sqrt{2} \\ \cos t + i \sin t / \sqrt{2} \end{pmatrix} \\
&= \frac{\sqrt{3}}{2} U_s(t) |u\rangle + \frac{1}{2} U_s(t) |d\rangle
\end{aligned}$$

**Solution 2**

$$\begin{aligned}
R(|\varphi_1\rangle + |\varphi_2\rangle) &= \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 + b_1 \\ a_2 + b_2 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} (a_1 + b_1) \cos \theta - (a_2 + b_2) \sin \theta \\ (a_1 + b_1) \sin \theta + (a_2 + b_2) \cos \theta \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} (a_1 + b_1) \cos \theta \\ (a_1 + b_1) \sin \theta \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -(a_2 + b_2) \sin \theta \\ (a_2 + b_2) \cos \theta \end{pmatrix} \\
&= R|\varphi_1\rangle + R|\varphi_2\rangle
\end{aligned}$$

**Solution 3**

对于  $d_5$  探测器而言, 其检测到的粒子数为  $2N|a_5|^2$ , 由此可以算得  $|a_5|^2 = 1/8$ . 当改变其相位后, 双峰叠加的结果会变为以下形式:

$$\frac{1}{\sqrt{2}}(|\psi_1\rangle + e^{i\pi/3}|\psi_2\rangle) \rightarrow \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_{j=1}^9 (a_j + e^{i\pi/3}b_j) |d_j\rangle$$

因此  $d_5$  位置能探测到的电子数为

$$\begin{aligned}
N_{d_5} &= N \left| \frac{1}{\sqrt{2}} (a_5 + e^{i\pi/3}b_5) \right|^2 \\
&= N \left| \frac{1}{\sqrt{2}} (a_5 + e^{i\pi/3}a_5) \right|^2 \\
&= \frac{N}{2} \left( 2|a_5|^2 + e^{i\pi/3}|a_5|^2 + e^{-i\pi/3}|a_5|^2 \right) \\
&= \frac{N}{2} \left( \frac{1}{4} + \frac{1}{8} \cdot 2 \cdot \cos \frac{\pi}{3} \right) = 450 (\uparrow)
\end{aligned}$$

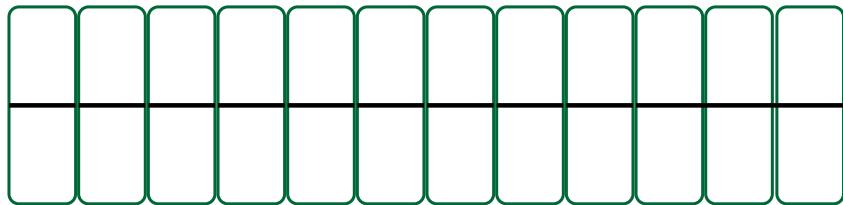
## 第九次习题

双自旋态 $|S_3\rangle$ 的定义见课本。

1. (5分) 证明下面这个双自旋态是纠缠态。

$$|\Phi\rangle = \frac{3}{5}|uu\rangle + i\frac{4}{5}|dd\rangle.$$

2. (10分) 针对上面这个纠缠态 $|\Phi\rangle$ , 计算 $\langle\Phi|\hat{\sigma}_y|\Phi\rangle$ 和 $\langle\Phi|\hat{\sigma}_y \otimes \hat{\tau}_x|\Phi\rangle$ 。
3. (10分) 验证课本第130页公式(7.21)。
4. (10分) 对于双自旋态 $|S_3\rangle$ , 选择处于xz平面内的两个方向 $\vec{e}_1 = (\sin \frac{\pi}{6}, 0, \cos \frac{\pi}{6})$ ,  $\vec{e}_2 = (\sin \frac{\pi}{4}, 0, \cos \frac{\pi}{4})$ 。计算自旋1沿 $\vec{e}_1$ 正方向同时自旋2沿 $\vec{e}_2$ 负方向的概率 $p(e_1^+, e_2^-)$ 。
5. (5分) 巧克力版贝尔不等式: 总共24块巧克力, 正好12块是黑色的, 12块酒心的, 12块圆形的, 请按如下的规则成对放入下面的12个长方盒中: 同一长方盒子中的两块巧克力不能都是黑色的, 不能都是酒心的, 不能都是圆形的。(有很多可能, 只要给出一种就可以) 小娟拿走了盒子上面的12块巧克力, 请数一下小娟手中下面三种巧克力的个数: (1) 黑色但不是酒心  $M_1$ ; (2) 酒心但不是圆形  $M_2$ ; (3) 黑色但不是圆形  $M_3$ 。看看是否满足 $M_1 + M_2 \geq M_3$ 。



## 第九次作业



### Solution 1

考虑到双自旋态的一般形式:

$$|\Psi_{12}\rangle = a_1a_2|uu\rangle + b_1b_1|dd\rangle + a_1b_2|ud\rangle + a_2b_1|du\rangle$$

由  $|\Phi\rangle$  的表达式, 根据  $|ud\rangle$  以及  $|du\rangle$  系数,  $|uu\rangle$  以及  $|dd\rangle$  系数, 可以列出以下等式:

$$a_1a_2b_1b_2 = 0$$

$$a_1a_2b_1b_2 = i\frac{12}{25}$$

此组方程无解, 因此此双自旋态不是直积态, 而是纠缠态.

### Solution 2

$$\begin{aligned} \langle \Phi | \hat{\sigma}_y | \Phi \rangle &= \left( \frac{3}{5} \langle u | \otimes \langle u | - i \frac{4}{5} \langle d | \otimes \langle d | \right) \left( \frac{3}{5} \hat{\sigma}_y |u\rangle \otimes |u\rangle + i \frac{4}{5} \hat{\sigma}_y |d\rangle \otimes |d\rangle \right) \\ &= \frac{9}{25} \langle u | \hat{\sigma}_y |u\rangle \langle d | d \rangle + \frac{16}{25} \langle d | \hat{\sigma}_y |d\rangle \langle u | u \rangle + i \frac{12}{25} \langle u | \hat{\sigma}_y |d\rangle \langle d | u \rangle - i \frac{12}{25} \langle d | \hat{\sigma}_y |u\rangle \langle u | d \rangle \end{aligned}$$

考虑到以下关系:

$$\langle u | \hat{\sigma}_y | u \rangle = 0$$

$$\langle d | \hat{\sigma}_y | d \rangle = 0$$

$$\langle u | d \rangle = \langle d | u \rangle = 0$$

因此我们有

$$\langle \Phi | \hat{\sigma}_y | \Phi \rangle = 0$$

$$\begin{aligned} \langle \Phi | \hat{\sigma}_y \hat{\tau}_x | \Phi \rangle &= \left( \frac{3}{5} \langle u | \otimes \langle u | - i \frac{4}{5} \langle d | \otimes \langle d | \right) \left( \frac{3}{5} \hat{\sigma}_y |u\rangle \otimes \hat{\tau}_x |u\rangle + i \frac{4}{5} \hat{\sigma}_y |d\rangle \otimes \hat{\tau}_x |d\rangle \right) \\ &= \frac{9}{25} \langle u | \hat{\sigma}_y |u\rangle \langle d | \hat{\tau}_x |d\rangle + \frac{16}{25} \langle d | \hat{\sigma}_y |d\rangle \langle u | \hat{\tau}_x |u\rangle + i \frac{12}{25} \langle u | \hat{\sigma}_y |d\rangle \langle d | \hat{\tau}_x |u\rangle - i \frac{12}{25} \langle d | \hat{\sigma}_y |u\rangle \langle u | \hat{\tau}_x |d\rangle \end{aligned}$$

考虑到以下关系：

$$\langle u | \hat{\sigma}_y | u \rangle = 0$$

$$\langle d | \hat{\sigma}_y | d \rangle = 0$$

$$\langle u | \hat{\sigma}_y | d \rangle = -i$$

$$\langle d | \hat{\sigma}_y | u \rangle = i$$

$$\langle u | \hat{\tau}_x | d \rangle = 1$$

$$\langle d | \hat{\tau}_x | u \rangle = 1$$

因此我们有

$$\langle \Phi | \hat{\sigma}_y \hat{\tau}_x | \Phi \rangle = \frac{24}{25}$$

### Solution 3

$$\begin{aligned} |S\rangle &= -\frac{e^{-i\varphi}}{\sqrt{2}}(|n_+n_-\rangle - |n_-n_+\rangle) \\ &= -\frac{e^{-i\varphi}}{\sqrt{2}}\left(\begin{pmatrix} \cos \frac{\theta}{2} \\ \sin \frac{\theta}{2} e^{i\varphi} \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} \sin \frac{\theta}{2} \\ -\cos \frac{\theta}{2} e^{i\varphi} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \sin \frac{\theta}{2} \\ -\cos \frac{\theta}{2} e^{i\varphi} \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} \cos \frac{\theta}{2} \\ \sin \frac{\theta}{2} e^{i\varphi} \end{pmatrix}\right) \end{aligned}$$

因此，对于任意双自旋算符  $\vec{n} \cdot \hat{\sigma} \otimes \vec{n} \cdot \hat{\tau}$ ，我们有

$$\begin{aligned} \vec{n} \cdot \hat{\sigma} \otimes \vec{n} \cdot \hat{\tau} |S\rangle &= \vec{n} \cdot \hat{\sigma} \otimes \vec{n} \cdot \hat{\tau} \left( -\frac{e^{-i\varphi}}{\sqrt{2}} \left( \begin{pmatrix} \cos \frac{\theta}{2} \\ \sin \frac{\theta}{2} e^{i\varphi} \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} \sin \frac{\theta}{2} \\ -\cos \frac{\theta}{2} e^{i\varphi} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \sin \frac{\theta}{2} \\ -\cos \frac{\theta}{2} e^{i\varphi} \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} \cos \frac{\theta}{2} \\ \sin \frac{\theta}{2} e^{i\varphi} \end{pmatrix} \right) \right) \\ &= -\frac{e^{-i\varphi}}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta e^{-i\varphi} \\ \sin \theta e^{i\varphi} & -\cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \frac{\theta}{2} \\ \sin \frac{\theta}{2} e^{i\varphi} \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta e^{-i\varphi} \\ \sin \theta e^{i\varphi} & -\cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sin \frac{\theta}{2} \\ -\cos \frac{\theta}{2} e^{i\varphi} \end{pmatrix} \\ &\quad + \frac{e^{-i\varphi}}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta e^{-i\varphi} \\ \sin \theta e^{i\varphi} & -\cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sin \frac{\theta}{2} \\ -\cos \frac{\theta}{2} e^{i\varphi} \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta e^{-i\varphi} \\ \sin \theta e^{i\varphi} & -\cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \frac{\theta}{2} \\ \sin \frac{\theta}{2} e^{i\varphi} \end{pmatrix} \\ &= -\frac{1}{\sqrt{2}} \left( \begin{pmatrix} \sin \frac{\theta}{2} e^{-i\varphi} \\ -\cos \frac{\theta}{2} \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} \cos \frac{\theta}{2} e^{-i\varphi} \\ \sin \frac{\theta}{2} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \cos \frac{\theta}{2} e^{-i\varphi} \\ \sin \frac{\theta}{2} \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} \sin \frac{\theta}{2} e^{-i\varphi} \\ -\cos \frac{\theta}{2} \end{pmatrix} \right) \\ &= \frac{e^{-i\varphi}}{\sqrt{2}} \left( \begin{pmatrix} \cos \frac{\theta}{2} \\ \sin \frac{\theta}{2} e^{i\varphi} \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} \sin \frac{\theta}{2} \\ -\cos \frac{\theta}{2} e^{i\varphi} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \sin \frac{\theta}{2} \\ -\cos \frac{\theta}{2} e^{i\varphi} \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} \cos \frac{\theta}{2} \\ \sin \frac{\theta}{2} e^{i\varphi} \end{pmatrix} \right) = -|S\rangle \end{aligned}$$

### Solution 4

将平面旋转一个角度，令  $e_1^+ = (0, 0, 1)$ ，于是此时有：

$$|e_1^+ e_2^- \rangle = |u\rangle \otimes (\cos \frac{7\pi}{24} |u\rangle + \sin \frac{7\pi}{24} |d\rangle) = \cos \frac{7\pi}{24} |uu\rangle + \sin \frac{7\pi}{24} |ud\rangle$$

因此可得

$$\begin{aligned} p(e_1^+, e_2^-) &= \left| \left( \cos \frac{7\pi}{24} \langle uu | + \sin \frac{7\pi}{24} \langle ud | \right) |S\rangle \right|^2 \\ &= \sin^2 \frac{7\pi}{24} |\langle ud | S \rangle|^2 \\ &= \frac{1}{2} \sin^2 \frac{7\pi}{24} \end{aligned}$$

### Solution 5

所有巧克力要么同时具有黑色, 圆形和酒心三种特征, 要么不具有任何一种特征. 此时  $M_1 = M_2 = M_3 = 0$ , 因此满足 Bell 不等式.

## 第十次习题

双自旋态 $|S\rangle$ 的定义见课本【公式(7.18)】。

1. (16分) 在课本中我们举例说明了 $|S\rangle$ 会违反贝尔不等式，其中用到了三个方向 $\vec{n}_1, \vec{n}_2, \vec{n}_3$ 。它们之间夹角 $\theta$ 是 $60^\circ$ 。(1) 选择另外一个会违反贝尔不等式的夹角 $\theta$ ；(2) 选择一个遵守贝尔不等式的夹角 $\theta$ 。
2. 给定一个自旋态

$$|\psi\rangle = \frac{\sqrt{3}}{2} |u\rangle - \frac{1}{2} i |d\rangle$$

- (10分) 计算期待值 $\langle\psi|\hat{\sigma}_z|\psi\rangle$  和 $\langle\psi|\hat{\sigma}_y|\psi\rangle$
- (14分) 计算 $\Delta\hat{\sigma}_z^2$ 和 $\Delta\hat{\sigma}_y^2$ ；它们满足不等式 $\Delta\hat{\sigma}_z^2 + \Delta\hat{\sigma}_y^2 \geq 1$ 吗？

附加题 (0分)

说明或严格证明双自旋量子态中纠缠态远远多于直积态。

## 第十次作业



### Solution 1-1

令  $\theta = \pi/6$ , 则有:

$$\begin{aligned} p(A, \neg B) &= p(\vec{n}_1, \vec{n}_2) = \frac{1}{2} \sin^2 \frac{\pi}{12} = \frac{2 - \sqrt{3}}{8} \\ p(B, \neg C) &= p(\vec{n}_2, \vec{n}_3) = \frac{1}{2} \sin^2 \frac{\pi}{12} = 2 - \sqrt{3} \\ p(A, \neg C) &= p(\vec{n}_1, \vec{n}_3) = \frac{1}{2} \sin^2 \frac{\pi}{6} = \frac{1}{8} \end{aligned}$$

考虑到:

$$p(A, \neg B) + p(B, \neg C) = \frac{2 - \sqrt{3}}{8} \times 2 = \frac{2 - \sqrt{3}}{4} < \frac{1}{8} = p(A, \neg C)$$

因此违反 Bell 不等式.

### Solution 1-2

令  $\theta = 2\pi/3$ , 则有:

$$\begin{aligned} p(A, \neg B) &= p(\vec{n}_1, \vec{n}_2) = \frac{1}{2} \sin^2 \frac{\pi}{3} = \frac{3}{8} \\ p(B, \neg C) &= p(\vec{n}_2, \vec{n}_3) = \frac{1}{2} \sin^2 \frac{\pi}{3} = \frac{3}{8} \\ p(A, \neg C) &= p(\vec{n}_1, \vec{n}_3) = \frac{1}{2} \sin^2 \frac{2\pi}{3} = \frac{3}{8} \end{aligned}$$

考虑到:

$$p(A, \neg B) + p(B, \neg C) = \frac{3}{8} \times 2 = \frac{3}{4} > \frac{3}{8} = p(A, \neg C)$$

因此符合 Bell 不等式.

### Solution 2-1

$$\begin{aligned} \langle \psi | \hat{\sigma}_z | \psi \rangle &= \begin{pmatrix} \sqrt{3}/2 & 1/2i \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sqrt{3}/2 \\ -1/2i \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \sqrt{3}/2 & -1/2i \\ \sqrt{3}/2 & -1/2i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sqrt{3}/2 \\ -1/2i \end{pmatrix} \\ &= \frac{3}{4} - \frac{1}{4} = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\langle \psi | \hat{\sigma}_z | \psi \rangle &= \begin{pmatrix} \sqrt{3}/2 & 1/2i \\ i & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sqrt{3}/2 \\ -1/2i \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} -1/2 & -\sqrt{3}i/2 \\ -1/2i & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sqrt{3}/2 \\ -1/2i \end{pmatrix} \\
&= -\frac{\sqrt{3}}{4} - \frac{\sqrt{3}}{4} = -\frac{\sqrt{3}}{2}
\end{aligned}$$

**Solution 2-2**

$$\begin{aligned}
\Delta \hat{\sigma}_z^2 &= \langle \psi | \hat{\sigma}_z^2 | \psi \rangle - \bar{\sigma}_z^2 \\
&= \begin{pmatrix} \sqrt{3}/2 & 1/2i \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sqrt{3}/2 \\ -1/2i \end{pmatrix} - \left( \begin{pmatrix} \sqrt{3}/2 & 1/2i \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sqrt{3}/2 \\ -1/2i \end{pmatrix} \right)^2 \\
&= 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Delta \hat{\sigma}_y^2 &= \langle \psi | \hat{\sigma}_y^2 | \psi \rangle - \bar{\sigma}_y^2 \\
&= \begin{pmatrix} \sqrt{3}/2 & 1/2i \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sqrt{3}/2 \\ -1/2i \end{pmatrix} - \left( \begin{pmatrix} \sqrt{3}/2 & 1/2i \\ i & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sqrt{3}/2 \\ -1/2i \end{pmatrix} \right)^2 \\
&= 1 - \frac{3}{4} = \frac{1}{4}
\end{aligned}$$

因此符合以下不等式:

$$\Delta \hat{\sigma}_y^2 + \Delta \hat{\sigma}_z^2 \geq 1$$

## 第十一次习题

1. 考虑讲义中描述的自旋和猫的复合系统，它们有四个量子态 $|u, \text{alive}\rangle$ 、 $|d, \text{alive}\rangle$ 、 $|u, \text{dead}\rangle$ 和 $|d, \text{dead}\rangle$ 。初始时刻，这个系统处于如下量子态

$$|\Psi_0\rangle = \left( \frac{5}{13} |u\rangle + i \frac{12}{13} |d\rangle \right) \otimes |\text{alive}\rangle = \frac{5}{13} |u, \text{alive}\rangle + i \frac{12}{13} |d, \text{alive}\rangle$$

现在猫对自旋进行测量。按照多世界理论，系统会变成

$$|\Psi_1\rangle = \frac{5}{13} |u, \text{alive}\rangle + i \frac{12}{13} |d, \text{dead}\rangle$$

按照哥本哈根解释，如果测量结果是自旋向下，波包塌缩为

$$|\Psi_2\rangle = |d, \text{dead}\rangle$$

现在我们把 $|u, \text{alive}\rangle$ 、 $|d, \text{alive}\rangle$ 、 $|u, \text{dead}\rangle$ 、 和 $|d, \text{dead}\rangle$ 写成如下列向量

$$|u, \text{alive}\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad |d, \text{alive}\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad |u, \text{dead}\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad |d, \text{dead}\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

- (a) (8分) 请验证 $|\Psi_1\rangle = U |\Psi_0\rangle$ ，其中

$$U = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

- (b) (8分) 请验证 $|\Psi_2\rangle = A |\Psi_1\rangle$ ，其中

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -i \frac{13}{12} \end{pmatrix}$$

- (c) (8分) 证明 $U$ 是一个幺正矩阵，而 $A$ 不是一个幺正矩阵。

2. (16分) 小娟正在犹豫：现在是去上《简明量子力学》呢？还是逃课放松一下？于是她决定利用网站  
<https://qrng.anu.edu.au/random-binary/>  
上产生的量子随机数来帮助她决定。
- (1) 如果按stop键以后最后一位是1，她就去上《简明量子力学》；  
(2) 如果按stop键以后最后一位是0，她就不上《简明量子力学》。
- a) (10分) 分别用波包塌缩理论和多世界理论来描述最后的结果。  
b) (6分) 当然小娟也可以通过投掷硬币来决定去上《简明量子力学》还是不上。将投掷硬币的结果和上面两个结果对比，描述异同。

## 第十一次作业


**Solution 1-1**

$$\begin{aligned}
 U |\Psi_0\rangle &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5/13 \\ 12i/13 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\
 &= \begin{pmatrix} 5/13 \\ 0 \\ 0 \\ 12i/13 \end{pmatrix} \\
 &= |\Psi_1\rangle
 \end{aligned}$$

**Solution 1-2**

$$\begin{aligned}
 A |\Psi_1\rangle &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -13i/12 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5/13 \\ 0 \\ 0 \\ 12i/13 \end{pmatrix} \\
 &= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \\
 &= |\Psi_2\rangle
 \end{aligned}$$

**Solution 1-3**

$$\begin{aligned}
 UU^\dagger &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\
 &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\
 &= I
 \end{aligned}$$

故  $U$  为幺正矩阵.

$$\begin{aligned}
 AA^\dagger &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -13i/12 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 13i/12 \end{pmatrix} \\
 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 169/144 \end{pmatrix} \\
 &\neq I
 \end{aligned}$$

故  $A$  不为幺正矩阵.

**Solution 2-1**

**波包坍缩理论:** 在娟娟按下 stop 键前, 屏幕上最后一位显示的数字不确定, 在按下 stop 键后, 屏幕上最后一位显示的数字会稳定下来处于某一个确定的状态(即 0 或 1), 屏幕上显示的最后一位数字经历了从状态不确定到确定的“坍缩”.

**多世界理论:** 由于笔者尚未完全清楚该网站生成随机量子数的原理, 在后面的解释笔者将以 Stern-Glach 实验中的 Ag 原子作为产生随机量子数的诱因. 假定当银原子碰到监测屏时, 可能会有两个结果, 如果银原子飞到检测屏上方则会生成数字 0, 而如果飞到检测屏下方则会生成数字 1, 这是银原子和最后一位现实的数字发生了纠缠:

$$|\Psi_0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|u\rangle \otimes |0\rangle + |d\rangle \otimes |1\rangle)$$

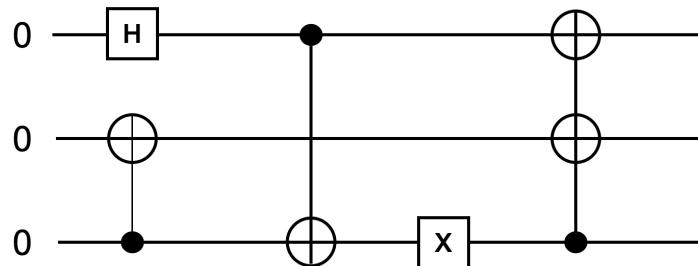
这个波函数的两个分量代表了娟娟逃课(最后一位显示的数字为 0)以及娟娟不逃课(最后一位显示的数字为 1)两个世界,这两个世界并行存在.

### Solution 2-2

区别在于一个是“伪随机数”而另一个是“真随机数”. 对于抛硬币,硬币的结果在你抛出去的一瞬间就已经被决定了(通过足够细致的观察 + 足够强大的运算),因此不算完全随机的结果,但对于量子随机数而言,在对其进行观测之前都是不确定的,因此可以视作完全随机的结果.

## 第十二次习题

1. (20分) 利用托福利门 (Toffoli gate) 实现经典或门.
2. (20分) 下面这个量子线路中有四步操作，写出每一步操作后的量子态。



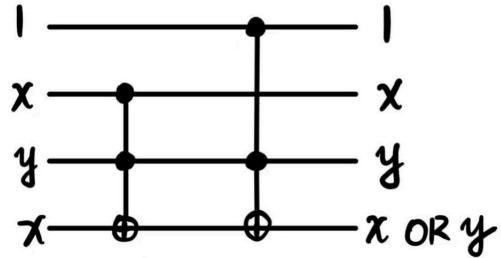
附加题 (0分) :

- 可逆经典计算机是量子计算机的一个特例， 那可逆经典计算机可以复制（或克隆）吗？如果不可以，请给出理由；如果可以，请利用课本中介绍的可逆逻辑门，构建一个能完成克隆的线路（用2个比特说明即可）。

## 第十二次作业



### Solution 1



### Solution 2

第一步:

$$|000\rangle \rightarrow \frac{1}{\sqrt{2}} (|000\rangle + |100\rangle)$$

第二步:

$$\frac{1}{\sqrt{2}} (|000\rangle + |100\rangle) \rightarrow \frac{1}{\sqrt{2}} (|000\rangle + |101\rangle)$$

第三步:

$$\frac{1}{\sqrt{2}} (|000\rangle + |101\rangle) \rightarrow \frac{1}{\sqrt{2}} (|001\rangle + |100\rangle)$$

第四步:

$$\frac{1}{\sqrt{2}} (|001\rangle + |100\rangle) \rightarrow \frac{1}{\sqrt{2}} (|001\rangle + |100\rangle)$$