Բովանդակություն

Որոշյալ ինտեգրալի սահմանումը և նրա հիմնական հատկությունները

2) Որոշյալ ինտեգրալի սահմանում

Դիցուք տրված է $f(x)$ ֆունկցիան, որը որոշված է $[a;b]$ հատվածում, բաժանենք $[a;b]$ հատվածը կետերով $a = x_0 < x_1 < \dots < x_k < x_{k+1} \dots < x_n = b$

1) Հատկությունները

1) $\int_a^b c \cdot f(x)\,dx = c\int_a^b f(x)\,dx$

2) $\int_a^b (f(x) \pm g(x))\,dx = \int_a^b f(x)\,dx \pm \int_a^b g(x)\,dx$

3) $\int_a^b f(x)\,dx = -\int_b^a f(x)\,dx$

4) $\forall c \in [a;b] \quad \int_a^b = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx$

5) $\exists\, m,\ M > 0 : \quad m \le f(x) \le M$

$m(b-a) \le \int_a^b f(x)\,dx \le M(b-a) \quad (*)$

Ապացույց:

$\sigma_n = \sum_{k=0}^{n-1} f(\xi_k)\Delta x_k \le M\sum_{k=0}^{n-1} \Delta x_k = M(b-a)$

ընտրենք նրա $[x_k, x_{k+1}]$ կամայական հատվածը,
նշանակենք Δx_k-ով համապատասխան հատ-
վածի երկարությունը $\Delta x_k = x_{k+1} - x_k$
յուրաքանչյուր մասնակի հատվածում վերցնենք
ξ_k - կետը $\xi_k \in (x_k; x_{k+1})$ և կազմենք

ինտեգրալային գումարը $\sigma_n = \sum_{k=0}^{n-1} f(\xi_k)\Delta x_k$.
Եթե գոյություն ունի վերջավոր սահման
σ_n-ի, երբ $\max\{\Delta x_k\} \to 0$
ապա ասում են, որ $f(x)$-ը ինտեգրելի է
$[a, b]$ հատվածում և սահմանը կոչվում
է $\lim_{n \to \infty} \sigma_n = \int_a^b f(x)dx$ և կոչվում է

որոշյալ ինտեգրալ։

3) Անհրաժեշտ պայման.
Թեորեմ
Եթե $f(x)$-ը ինտեգրելի է $[a; b]$ հատվածում
ապա այն սահմանափակ է այդ
հատվածում։

Միջին արժեքի թեորեման

5) $\exists m, M > 0$. $m \le f(x) \le M$

$$m(b-a) \le \int_a^b f(x)\,dx \le M(b-a) \quad (5)$$

6) Միջին արժեքի թեորեմ

ըստ նախորդ հատկության է․ (5-ից)

$$m \le \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx \le M$$

Եթե անընդհատ է $f(x)$-ը ինտեգրելի է $[a; b]$-ում

և ունենք որ $m \le f(x) \le M$ ապա

$$\exists\, \xi \in (a, b) \Rightarrow f(\xi) = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx \ :$$

Որոշյալ ինտեգրալը որպես վերին սահմանի ֆունկցիա: Նյուտոն-Լայբնիցի բանաձևը

Դիտարկենք վերին սահմանի ֆունկցիան

$$g(x) = \int_a^x f(x)\,dx \quad x \in [a; b]$$

Թեորեմ

$$g'(x) = \left(\int_a^x f(t)\,dt\right)' = f(x)$$

Ապացույց

Համաձայն ածանցյալի սահմանի ունենք

$$g'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{g(x+\Delta x) - g(x)}{\Delta x}$$

Մյուս կողմից՝ $g(x+\Delta x) - g(x) = \int_a^{x+\Delta x} f(t)\,dt -$

$$- \int_a^x f(t)\,dx = \int_a^{x+\Delta x} f(t)\,dt + \int_x^a f(t)\,dt = \int_x^{x+\Delta x} f(t)\,dt$$

Եվ երբ կիրառենք միջին արժեքի թեորեմը

$$g(x+\Delta x) - g(x) = f'(\xi)\Delta x \qquad \xi \in (x, x+\Delta x)$$

$$g'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(\xi)\Delta x}{\Delta x} = f(x)$$

$$x < \xi < x + \Delta x \qquad \xi \to x$$

Այսպիսով վերին սահմանի ֆունկցիան իրենից ներկայացնում է ինտեգրալի ֆունկցիա

• Նյուտոն - Լայբնից

Դիցուք տրված է $f(x)$ ֆունկցիան և $F(x)$-ը նրա նախնականն է այդ հատվածի վրա, Լայբնիցի բանաձևը.

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a)$$

Ապացույց.

Դիցուք նախնական ֆունկցիան $g(x) = \int_a^x f(t)\,dt$-ն նախնական է $f(x)$-ի նախնականը ։

$\Rightarrow F(x) = g(x) + c$, կամ $g(x) = F(x) - c$

$$F(b) - F(a) = (g(b) - c) - (g(a) - c) = g(b) - c - g(a) + c =$$

$$= g(b) - g(a) = \int_a^b f(t)\,dt - \int_a^a f(t)\,dt = \int_a^b f(t)\,dt$$

Օրինակ.

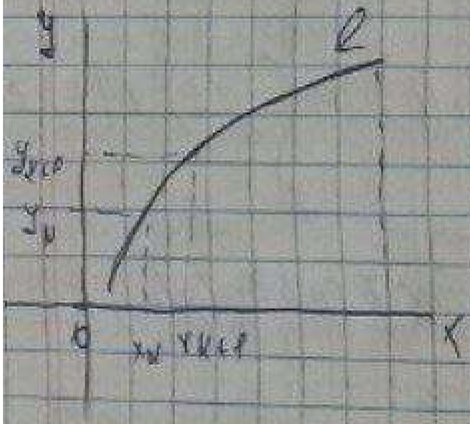
1) $\int_0^2 (3x^2 - 4x)\,dx = \left(\frac{3x^3}{3} - \frac{4x^2}{2}\right)\Big|_0^2 = (8 - 2\cdot 4 - 0) = 0$

Հարթ կորի աղեղի երկարությունը, նրա հաշվումը, երբ կորի հավասարումը տրված է բացահայտ տեսքով

3). Հարթ կորի աղեղի երկարությունը և նրա հաշվումը:

• Պարամետրականացված հավասարումներով գրված է կորի աղեղի երկարության հաշվումը

Դիտարկենք OXY հարթության մեջ գծենք f ֆ-ի գր. ℓ կոր.



$y = f(x)$

$x \in [a, b]$

Տրոհենք ℓ կորի գրաֆը կամա-յականորեն (x_k, y_k) կետերով $k = 1..n$ ստանանք $\ell_1, \ell_2 \dots \ell_n$ կորեր, որոնց գումարը հավասար է ամբողջ ℓ-ին: Նշանակենք՝ $\Delta x_k = x_{k+1} - x_k$.

$\Delta y_k = y_{k+1} - y_k$

որ $\Delta \ell_k = \sqrt{\Delta x_k^2 + \Delta y_k^2}$

Այդ դեպքում $\Delta y_k = y_{k+1} - y_k = f(x_{k+1}) - f(x_k) =$
$= f'(\xi_k)(x_{k+1} - x_k) = f'(\xi_k)\Delta x_k.$

Տեղադրենք ստացվածը Δl_k-ի մեջ $\Rightarrow$
$\Rightarrow \Delta l_k = \sqrt{1+(f'(\xi_k))^2}\,\Delta x_k$

և կազմենք ինտեգրալային գումարը

$$\sigma_n = \sum_{k=1}^{n} \sqrt{1+(f'(\xi_k))^2}\,\Delta x_k.$$

Անցնելով սահմանի երբ $n \to \infty$
$\max|\Delta x_k| \to 0$ կստանանք աղեղի երկարությունը

$$l = \int_a^b \sqrt{1+(f'(x))^2}\,dx$$ → կորի աղեղի երկարության բանաձևը։

Օրինակ
Գտնել $y = 2\sqrt{x}$ $x \in [1, 4]$ կորի երկարությունը

Մարմնի ծավալի հաշվումը զուգահեռ հատույթների մակերեսների միջոցով: Պտտման մարմնի ծավալ

Դիցուք [illegible] [illegible]

Դիցուք տրված է մարմին [illegible]

որը սահմանափակված է $x=a$, $x=b$

հարթություններով, և որի յուրաքանչյուր

x կետում [illegible] x-ի առանցքին

ուղղահայաց հարթությամբ ստացված

հատույթի մակերեսը $S(x)$

x-ին տանք Δx աճ, և $x+\Delta x$-ով

տանենք Oy-ին զուգահեռ հարթություն,

[illegible] մարմինը կլինի [illegible]

[illegible] 5 [illegible] մարմին, որի

ծավալը կլինի $V_{\Delta x} = S(x)\Delta x$, այժմ

երբ տրոհենք a-b հատվածը կետերով

$a = x_0, x_1, \ldots x_n = b$

և յուրաքանչյուր $(x_k; x_{k+1})$-ում ընտրենք

[illegible] [illegible] [illegible]

[illegible] ինտեգրալային գումար.

$$\sigma_n = \sum_{k=1}^{n} S(\xi_k)\,\Delta x_k$$

Եթե գոյություն ունի սահմանը, երբ $n \to \infty$

այնպես որ $\max|\Delta x_k| \to 0$ [illegible]

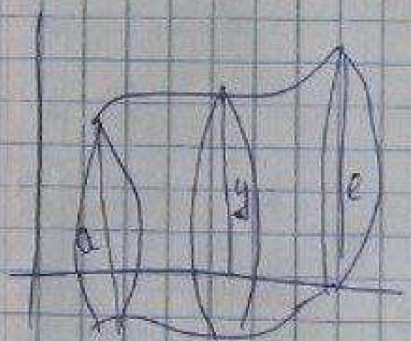
$\lim\limits_{n\to\infty} \sigma_n$, երբ այն [illegible] [illegible] այսպես կարող ենք՝ $\lim_{n\to\infty} \sigma_n = \int_a^b S(x)dx = V$

պարզվում է մարմնի ծավալը հավասար է լայնական հատույթների մակերեսի ինտեգրալին։

Պտտման մարմնի ծավալը

Դիցուք Oxy հարթության վրա տրված է $y = f(x)$ կորը անընդհատ $[a, b]$ և դրական։ Պտտենք Ox առանցքի շուրջ, կստանանք պտտման մարմին, որի ծավալը հավասար է՝

$$V = \int_a^b S(x)dx$$



Կատարենք x կետով $[a, b]$ Oy առանցքին զուգահեռ հարթություն, կտրվածքը կլինի շրջան, որի շառավիղը y-ն է =>

$\Rightarrow S(x) = \pi y^2 = \pi f^2(x)$, որտեղից ստանում ենք՝ $V_{Ox} = \pi \int_a^b f^2(x)dx$

Երկրորդ կարգի հաստատուն գործակիցներով համասեռ դիֆերենցիալ հավասարումներ

II կարգի հաստատուն գործակիցներով գծային համասեռ դիֆերենցիալ հավասարումներ

II կարգի հաստատուն գործակիցներով համասեռ դիֆերենցիալ հավասարումներ կոչվում է

այսպիսի հավասարումը՝

$$ay'' + by' + cy = 0 \quad (1)$$

որտեղ $a, b, c = const$

y_0 ֆունկցիան կանվանենք (1) հավասարման լուծում, եթե բավարարի (1) հավասարմանը:

Թեորեմ: Եթե y_1, y_2 (1) հավասարման լուծումներ են, ապա $\forall \alpha, \beta \in R$ $\alpha y_1 + \beta y_2$ էլ լուծում է:

Ապացույց:

Տեղադրենք (1) հավասարման մեջ $y = \alpha y_1 + \beta y_2$

$$a\cdot(\alpha y_1 + \beta y_2)'' + b(\alpha y_1 + \beta y_2)' + c(\alpha y_1 + \beta y_2) = 0$$

$$\alpha a y_1'' + \beta a y_2'' + \alpha b y_1' + \beta b y_2' + \alpha c y_1 + \beta c y_2 =$$

$$= \alpha\underbrace{(ay_1'' + by_1' + cy_1)}_{0} + \beta\underbrace{(ay_2'' + by_2' + cy_2)}_{0} = 0$$

Դրական անդամներով շարքերի համեմատության հայտանիշը

Համեմատության I հայտանիշը

Եթե $a_n \le b_n$ $n > n_0$ ապա (B)-ի զուգամիտությունից $\Rightarrow$ է (A)-ի զուգամիտությունը, իսկ (A)-ի տարամիտությունից $\Rightarrow$ (B)-ի տարամիտությունը

Ապացույց

Դիտարկենք մասնակի գումարները.

$A_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n$

$B_n = b_1 + b_2 + \dots\ b_n$

Կիրառենք Կոշու զուգամիտության սկզբունքը

$\{S\}$ $\forall \varepsilon > 0$ $\exists n_0$, $\forall n > n_0$, $m \in N$

$|S_{n+m} - S_n| < \varepsilon$

S_n հաջ. զուգամետ է երբ

$A_{n+m} - A_n = a_{n+1} + a_{n+2} + \dots + a_{n+m}$

$B_{n+m} - B_n = b_{n+1} + b_{n+2} + \dots + b_{n+m}$

ֆիքս. որ $a_n \le b_n$ => $|A_{n+m} - A_n| \le |B_{n+m} - B_n|$ (3)

պայմ. երբ B շարքը զուգամետ է ապա

Կոշու հայտանիշի համաձայն $B_{n+m} - B_n < \varepsilon$ =>

=> $A_{n+m} - A_n < \varepsilon$ => A շարքը զուգամետ է

Իսկ երբ A շարքը տարամետ է ապա

(3)-ից => որ B շարքը ևս տարամետ է:

II հայտանիշ

Դիցուք $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = k$, երբ

$0 < k < \infty$ => a_n, b_n-երը կամ զուգամետ են կամ տարամետ են

Ապացույց

ըստ սահմանի սահմանման

$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists n_0 \quad \forall n > n_0 \quad \left|\frac{a_n}{b_n} - k\right| < \varepsilon$

$k - \varepsilon < \frac{a_n}{b_n} < k + \varepsilon$ => $(k-\varepsilon) b_n < a_n < (k+\varepsilon) b_n$ (4)

երբ b_n-ը զուգամետ է => (4) անհավասարության

աջ մասից => ըստ I հայտանիշի => է, որ

a_n-ը ևս զուգամետ է:

Իսկ երբ b շարքը տարամետ է ըստ I

Խտացված շարքը a_n-ը ևս զուգամետ է,
ապացուցեք 2-րդ միաժամանակ կամ
զուգամետ է կամ տարամետ։

Դիրիխլեի շարք

Ընդհանրացված հարմոնիկ շարքը մեզ ծանո-
թացել ենք է՝

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p} \Rightarrow \begin{cases} \text{զուգամետ է} & p > 1 \\ \text{տարամետ է} & p \leq 1 \end{cases}$$

Դալամբերի հայտանիշը

Թեորեմ (Դալամբ. հայտանիշ)

Դիցուք տրված է դրական անդամ-ներով a_n շարքը $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ (1), նշանակենք.

$D_n = \dfrac{a_{n+1}}{a_n}$ և հաշվենք սահմանը՝ $\lim D_n = D$

Եթե՝

1) $D < 1$ (1)-ը զուգամետ է

2) $D > 1$ (1)-ը տարամետ է

3) $D=1 \to$ (1) շարքը կարող է լինել համապատասխանաբար (կամ զուգամետ կամ տարամետ)։

Ապացույց

Համաձայն սահմանի սահմանման

$\forall \varepsilon>0 \quad \exists n_0\in N \quad \forall n>n_0 \quad |D_n-D|<\varepsilon \Rightarrow$

$\Rightarrow D-\varepsilon<D_n<D+\varepsilon$

$$D-\varepsilon<\frac{a_{n+1}}{a_n}<D+\varepsilon \quad (2)$$

1) Դիցուք $D<1$ այդ դեպքում ε-ը ընտրենք այնպես, որ $\frac{a_{n+1}}{a_n}<q<D+\varepsilon<1$

$$\Rightarrow \begin{cases} \frac{a_n}{a_{n-1}}\le q \\ \frac{a_{n-1}}{a_{n-2}}\le q \\ \frac{a_2}{a_1}\le q \end{cases} \Rightarrow \quad \frac{a_n}{a_1}\le q^n \qquad a_n\le a_1\cdot q^n$$

$$\sum a_n$$

$$a_1\sum_{n=1}^{\infty} q^n$$

և քանի որ $a_1\sum_{n=1}^{\infty} q^n$-զուգամետ է (անվերջ նվազող երկր. պրոգրեսիա) ապա ըստ համեմատության I հայտանիշի

1) $K<1$ => զուգամետ է

2) $K>1$ => տարամետ է

3) $K=1$ => [illegible]

Ապացույց

ըստ սահմանի սահմանման.

$\forall \varepsilon>0 \quad \exists n_0 \in N \quad \forall n>n_0 \quad |K_n-K|<\varepsilon$.

=> $K-\varepsilon<K_n<K+\varepsilon$

1) $K<1$ => $K_n=\sqrt[n]{a_n} \le q < K+\varepsilon<1$ =>

=> $a_n \le q^n$ $\qquad \sum_{n=1}^{\infty} q^n<\infty$, $q<1$ (անվ. նվ. երկր.)

=> a_n → զուգամետ է:

2) $K>1$ => $K_n=\sqrt[n]{a_n} \ge q > K-\varepsilon>1$

$a_n \ge q^n$ $\qquad \sum_{n=1}^{\infty} q^n$ => տարամետ

Կոշիի հայտանիշը

Կոշիի հայտանիշը

Թեորեմ.

Դիտենք $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ կազմում ենք՝

$k_n = \sqrt[n]{a_n}$ և հաշվում ենք սահմանը՝

$\lim_{n\to\infty} k_n = k$

1) $k<1$ ապա զուգամետ է

2) $k>1$ ապա տարամետ է

3) $k=1$ ապա [illegible] [illegible]

Ապացույց

Ըստ սահմանի սահմանման.

$\forall \varepsilon>0 \quad \exists n_0 \in N \quad \forall n>n_0 \quad |k_n-k|<\varepsilon$

$\Rightarrow k-\varepsilon<k_n<k+\varepsilon$

1) $k<1 \Rightarrow k_n=\sqrt[n]{a_n} \le q < k+\varepsilon<1 \Rightarrow$

$\Rightarrow a_n \le q^n \qquad \sum_{n=1}^{\infty} q^n < \infty$, $q<1$ (անվ. նվ. երկ.)

$\Rightarrow a_n \to$ զուգամետ է։

2) $k>1 \Rightarrow k_n=\sqrt[n]{a_n} \ge q > k-\varepsilon > 1$

$a_n \ge q^n \qquad \sum_{n=1}^{\infty} q^n \Rightarrow$ տարամետ է

Կոշիի ինտեգրալային հայտանիշը

Կոշիի ինտեգրալային հայտանիշը

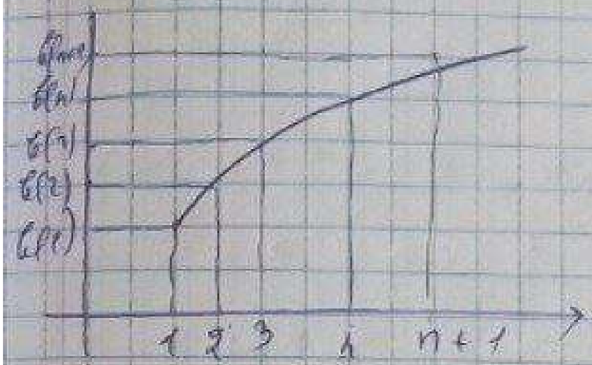
Թեորեմ.

Դիցուք տրված է դրական անդամներով $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ շարքը:

Եթե գոյություն ունի $f(x)$ ֆունկցիա 1-ից ∞-ով նվազող և $f(n) = a_n$

ապա $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ և $\int_1^{\infty} f(x)\,dx$ համաժամանակ կամ զուգամիտում են կամ տարամիտում:

Ապացույց՝



Դիտարկենք S_n-ով շարքի մասնակի գումարը

$S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$ և $I_n = \int_1^n f(x)\,dx$ պարզ

Է որ $f(1)+f(2)\dots+f(n) \le I_n \le f(2)+f(3)+\dots+f(n)+f(n+1)$

$$\underbrace{a_1+a_2+\dots+a_n}_{S_n} \le I_n \le a_2+\dots+a_n+a_{n+1}$$

$S_n \le I_n \le S_n - a_1 + a_{n+1}$ (3)

1) Եթե ինտեգրալը զուգամետ է

այսինքն $\lim_{n\to\infty} I_n = I < \infty$ ապա (3)-ից

ապա ճիշտ կլինի է որ շարքը

ևս զուգամետ է:

Հերթագայող նշաններ ունեցող անդամներով շարքեր: Լայբնիցի հայտանիշը

Նշանափոխ շարքեր կոչվում 5

հետևյալ տեսքը ունեցող շարքերը:

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} a_n = a_1 - a_2 + a_3 \dots \quad a_n \geq 0$$

Թեորեմ (Լայբնիցի հայտանիշ)

Դիցուք ունենք $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} a_n$ (1) շարքը:

Եթե՝ 1) $a_n \geq a_{n+1}$ $\quad n \geq n_0$

2) $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$

ապա (1) շարքը զուգամետ է:

Ապացույց

Դիտարկենք (1) շարքի մասնակի

գումարը՝ $S_{2n} = (a_1 - a_2) + (a_3 - a_4) + \dots + (a_{2n-1} - a_{2n})$

քանի որ $a_n \geq a_{n+1} \Rightarrow S_{2n} \geq 0$, S_{2n} ...

$$S_{2n} = a_1 - \left((a_2 - a_3) + (a_4 - a_5) + \dots + (a_{2n-2} - a_{2n-1})\right) - a_{2n} \leq a_1$$

Ըստ 5 և 11 կետերի՝ S_{2n}-ը մոնոտոն

աճող, որը ... և սահմանափակ

հաջորդականություն է $\Rightarrow$ զուգամետ է:

այսինքն $\lim\limits_{n\to\infty} S_{2n} = S$

$S_{2n+1} = S_{2n} + a_{n+1}$

[illegible] [illegible] $\exists$ կգտնենք և $\lim\limits_{n\to\infty} S_{n+1} = S$

$\lim S_n = S \Rightarrow$ (1) շարքը զուգամետ է:

Օրինակ-

- $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n}$ $\qquad a_n = \frac{1}{n}$

1) $a_{n+1} = \frac{1}{n+1} < \frac{1}{n} = a_n$

2) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0 \Rightarrow$ զուգամետ է:

- $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}(n+2)}{n^2+3}$

1) $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{n+2}{n^2+3} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{n}+\frac{2}{n^2}}{1+\frac{3}{n^2}} = 0$

Կիրառելի է [illegible]

2) $\frac{n+3}{(n+1)^2+3} > \frac{n+2}{n^2+3}$

Նշանափոխ շարքերի զուգամիտության բավարար հայտանիշը: Բացարձակ և պայմանական զուգամիտություն:

3. Նշանափոխ շարքեր

Սահմանում

Նշանափոխ կոչվում է $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ (2) շարքը, որտեղ $a_n \in R$ (կամայական թվեր են):

(2) շարքի հետ դիտարկենք մոդուլներից կազմված շարքը

Սահմանում

Եթե (2) և (3) շարքերը զուգամետ են, ապա (2) շարքը կոչվում է բացարձակ զուգամետ շարք, իսկ եթե (2) շարքը զուգամետ է, բայց (3) ոչ, ապա շարքը կոչվում է պայմանական զուգամետ:

Օրինակ

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n}$ – զուգամետ

Իսկ → $\sum \frac{1}{n}$ → տարամետ ⇒ պայմանականորեն է զուգամետ:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2}$$ → բացարձակ զուգամետ:

Բ. Բացարձակ զուգամետ շարքի զուգամետության բավարար- պայմանը:

Դիտարկենք $\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x)$ շարքը.

Թեորեմ

$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ եթե զուգամետ է, ապա

շարքը զուգամետ է, ապա իրեն էլ

զուգամետ է:

Ապացույց

Համաձայն Կոշու զուգամիտության

սկզբունքի նշանակ ունենալ, որ

շարքը զուգամետ է՝ $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| < \infty$ ⇒

⇒ $\forall \varepsilon > 0 \ \exists n_0 \in N \ \forall n > n_0 \ p \in N \ |\tilde{S}_{n+p} - \tilde{S}_n| < \varepsilon$

$\tilde{S}_n = |a_1| + |a_2| + \dots + |a_n|$

$|a_{n+1}| + |a_{n+2}| + \dots + |a_{n+p}| < \varepsilon$

$|S_{n+p} - S_n| = |a_{n+1} + a_{n+2} + \dots + a_{n+p}| \leq |a_{n+1}| + \dots + |a_{n+p}| < \varepsilon$

⇒ (4) շարքի մասնակի գումարների

S_n (մասնակի գումարների հաջորդականությունը) բավարարում է

Կոշու զուգամիտության սկզբունքին ⇒

(4) շարքը զուգամետ է:

Աստիճանային շարքեր: Աբելի թեորեման

Բոլոր այն կետերի $\forall x\ (c, d)$ բազմությունը, որտեղ $\forall$ x-ի համար $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) < \infty$ շարքը զուգամետ է կոչվում է զ/զուգամիտության տիրույթ:

Ֆունկցիոնալ շարքի մասնավոր դեպքն է աստիճանային շարքերը, որոնք ունեն հետևյալ տեսքը` $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)$ կամ $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ որտեղ a_n-երը հաստատուն թվեր են:

Թեորեմ (Աբել)

Եթե $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ շարքը զուգամետ է մեկ ու x_0 կետում ապա շարքը բացարձակ զուգամետ է բոլոր այն x կետերում որոնց համար $|x| < |x_0|$

Ապացույց

Քանի որ $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ զուգամետ է x_0-ում $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x_0^n < \infty$

համաձայն զուգամիտության անհրաժեշտ պայմանի $|a_n x_0^n| \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$ հետևաբար

$a_n x_0^n$ հաջորդականությունը սահմանափակ է

$\exists M>0 \quad \forall n>0 \quad |a_n x_0^n| \le M \Rightarrow$

$$\Rightarrow S_N = \sum_{n=0}^{N} |a_n x^n| = \sum_{n=0}^{N} |a_n x_0^n| \left|\frac{x}{x_0}\right|^n \le$$

$$\le M \sum_{n=0}^{N} \left|\frac{x}{x_0}\right|^n$$

Այժմ եթե $|x| < |x_0| \Rightarrow \left|\frac{x}{x_0}\right| = q < 1 \Rightarrow$

$\Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} \left|\frac{x}{x_0}\right|^n = \sum_{n=0}^{\infty} q^n < \infty$ շարքը զուգամետ է քանի որ անվերջ նվազող երկրաչափական պրոգրեսիա է $\Rightarrow$

$\Rightarrow S_N$-ը ևս զուգամետ է / Համեմատման հայտանիշ I (սահմանային), այսինքն

$\sum a_n x^n$ շարքը բացարձակ զուգամետ է $|x| < |x_0|$

Ապացուցենք երկրորդ պնդումը, ասենք շարքը զուգամետ է ինչ-որ x_0-ում $\forall x \in (-|x_0|, |x_0|) \Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ շարքը բացարձակ զուգամետ է

• $|x_0|$-ի հնարավոր ամենամեծ արժեքը նշանակենք R-ով և կանվանենք զուգամիտության շառավիղ

• Ինչու՞ $(-R, R)$ միջակայքն՝ զուգամիտության տիրույթն միջակայք՞

Ապացույց. $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ շարքի համար զուգամիտության միջակայք կլինի $(-R, R)$ միջակայքը, որի սահմանային կետում շարքը բացարձակ զուգամետ է, ծայրակետերում կարող է լինել զուգամետ կամ տարամետ, իսկ միջակայքում՝ ներսում զուգամետ է.

Ըստ Դալամբերի զուգամիտության հայտանիշի՝ օգտվելով նշված պայմանից և ...

$$D_n = \left| \frac{a_{n+1} \cdot x^{n+1}}{a_n x^n} \right| = |x| \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right|$$

$$\lim_{n \to \infty} D_n = |x| \lim_{n \to \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| < 1$$

պահանջենք, որ շարքը բացարձակ զուգամետ լինի՝

$$|x| < \frac{1}{\lim\limits_{n \to \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right|} = \lim_{n \to \infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| = R \Rightarrow R = \lim_{n \to \infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right|$$