

**Բաշխման ֆունկցիա: Գազի մոլեկուլների բաշխումն ըստ արագությունների (Մաքսվելի բաշխումը): Բաշխման ֆունկցիայի գրաֆիկը**

Ինչպես հայտնի է, կամայական մակրոսկոպիկ մարմին կազմված է փոքրագույն մասնիկներից, որոնք գտնվում են անընդհատ քառային շարժման մեջ: Անզամ ջերմային հավասարակշռության վիճակում գազի մոլեկուլների արագություններն ունեն տարբեր արժեքներ և ուղղություններ, և յուրաքանչյուր առանձին մոլեկուլի արագության ինչպես մեծությունը, այնպես էլ ուղղությունը փոփոխվում են բախումների արդյունքում: Ուրեմն, կարելի է ասել, որ մակրոմարմինների ներքին շարժումը պատահական բնույթի է: Դա նշանակում է, որ հնարավոր չէ ճշտորեն կանխագուշակել՝ ի՞նչ արագությամբ կշարժվի, ի՞նչ էներգիա կունենա մակրոմարմինի այս կամ այն մասնիկը, , որքա՞ն է մասնիկների թիվը տարածության տվյալ կետում ժամանակի տվյալ ակնթարթին և այլն: Մի քանի անգամ կատարելով այս կամ այն ֆիզիկական պարամետրի չափումներ՝ յուրաքանչյուր դեպքում կստանաք այդ նույն պարամետրի տարրեր արժեքներ: Այդ իմաստով այդպիսի մեծաքանակ մասնիկներից կազմված համակարգի համար իրավասու է հարցադրում կատարել միայն այն մասին, թե որևէ ֆիզիկական մեծության՝ այս կամ այն արժեքն ընդունելու հավանականությունն ինչի՞ է հավասար: Մասնիկների այդ համախմբի համար կիրառելի է հավանականությունների մաթեմատիկական տեսության վիճակագրական մեթոդը, որը հիմնված է միջին, միջին քառակուսային և մասնիկների վարքը համախմբում բնութագրող առավել հավանական պարամետրերի մասին հասկացությունների վրա: Հավանականությունների (վիճակագրության) տեսության մեջ կարևոր հասկացություններից է բաշխման ֆունկցիայի հասկաթյությունը:

Հավասարակշռության վիճակում գտվող իդեալական գազում հաստատվում է որոշակի ստացիոնար, ժամանակի ընթացքում չփոփոխվող, մոլեկուլների՝ ըստ արագությունների բաշխում, որը ենթարկվում է որոշակի վիճակագրական օրենքի: Դիտարկելով շատ մեծ՝  $N$  թվով նույնանման մասնիկներից կազմված համակարգ, անզիացի գիտնական Մաքսվելլը ստացավ մի բանաձև, որի օգնությամբ հնարավոր է հաշվել այն մասնիկների  $dN(\mathbf{v})$  թիվը, որոնց արագությունները գտնվում են  $\mathbf{v}$ -ից մինչև  $\mathbf{v} + d\mathbf{v}$

$$\text{ինտերվալում՝ } \boxed{dN(\mathbf{v}) = N 4\pi \left( \frac{m}{2\pi kT} \right)^{3/2} \mathbf{v}^2 e^{\frac{-m\mathbf{v}^2}{2kT}} d\mathbf{v}}, \text{ որտեղից բախչման ֆունկցիայի}$$

$$\text{համար ստացվում է հետևյալ բանաձև՝ } \boxed{f(\mathbf{v}) = \frac{dN(\mathbf{v})}{Nd\mathbf{v}} = 4\pi \left( \frac{m}{2\pi kT} \right)^{3/2} \mathbf{v}^2 e^{\frac{-m\mathbf{v}^2}{2kT}}}: \text{ Այս}$$

երկու բանաձևերը արտահայտում են իդեալական գազի մոլեկուլների բաշխումը ըստ արագությունների: Վերլուծելով  $f(\mathbf{v})$  բաշխման ֆունկցիայի համար ստացված բանաձևը, կարող ենք հանգել հետևյալ եզրակացությունների: Նախ, շատ փոքր ( $\mathbf{v} \rightarrow 0$ ) և շատ մեծ ( $\mathbf{v} \rightarrow \infty$ ) արագություններ ունեցող մոլեկուլների հարաբերական թիվը (այդպիսի

արագություններով մոլեկուլներ գազում հայտնաբերելու հավանականությունը) ձգուում է զրոյի: Երկրորդ, բաշխման ֆունկցիան միարժեք անընդհատ ֆունկցիա է: Դա նշանակում է, որ գազում եղած մոլեկուլների տվյալ  $\mathbf{V}$  արագությունը ունենալու հավանականությունը ունի միայն մեկ արժեք, և չկա մոլեկուլի այնպիսի մի արագություն, որն ունենալու հավանականություն չինի: Եվ վերջապես, հետազոտելով բաշխման ֆունկցիայի եքստրեմումների առկայությունը, պարզում ենք, որ այն ունի մեկ մաքսիմում:  $f(\mathbf{v})$  բաշխման ֆունկցիայի գրաֆիկը պատկերված է նկարում:

**Բնութագրական արագություններ: Գազի մոլեկուլների քառային շարժման ամենահավանական արագության ստացումը բաշխման ֆունկցիայի միջոցով**

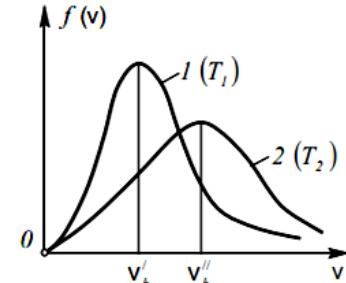
Այն արագությունը, որի դեպքում մոլեկուլների՝ ըստ արագությունների Մաքսվելի բաշխման ֆունկցիան ընդունում է իր մաքսիմում արժեքը, կոչվում է մոլեկուլների *առավել հավանական  $\mathbf{V}_h$  արագություն*: Այդ արագությունը կարելի է գտնել՝ ածանցելով  $f(\mathbf{v})$ -ն ըստ  $\mathbf{v}$ -ի և հավասարեցնելով այն զրոյի:

$$\begin{aligned} \frac{df(\mathbf{v})}{d\mathbf{v}} &= 4\pi \left( \frac{m}{2\pi kT} \right)^{3/2} \frac{d}{d\mathbf{v}} \left( \mathbf{v}^2 \cdot e^{\frac{-m\mathbf{v}^2}{2kT}} \right) = 4\pi \left( \frac{m}{2\pi kT} \right)^{3/2} e^{\frac{-m\mathbf{v}^2}{2kT}} \cdot 2\mathbf{v} \cdot \left( 1 - \frac{m\mathbf{v}^2}{2kT} \right) = 0 \Rightarrow \\ &\Rightarrow e^{\frac{-m\mathbf{v}^2}{2kT}} \cdot 2\mathbf{v} \cdot \left( 1 - \frac{m\mathbf{v}^2}{2kT} \right) = 0 \Rightarrow \left\{ (1) e^{\frac{-m\mathbf{v}^2}{2kT}} = 0; (2) \mathbf{v} = 0; (3) \left( 1 - \frac{m\mathbf{v}^2}{2kT} \right) = 0 \right\}: \end{aligned}$$

(1) և (2) արտահայտություններին բավարարող արագության  $\mathbf{v} = 0$  և  $\mathbf{v} = \infty$  արժեքները համապատասխանում են  $f(\mathbf{v})$  -ի մինիմումին: Փակագծերում գտնվող (3)-րդ արտահայտությունը զրոյի վերածող  $\mathbf{v}$  -ի արժեքը որոնելի  $\mathbf{V}_h$  առավել հավանական արագությունն է՝

$$\boxed{\mathbf{V}_h = \sqrt{\frac{2kT}{m}} = \sqrt{\frac{2RT}{\mu}}}:$$

Նշենք, որ  $f(\mathbf{v})$  ֆունկցիայի տեսքը կախված է գազի տեսակից (մոլեկուլների զանգվածից) ու  $T$  ջերմաստիճանից: Ջերմաստիճանի բարձրացման դեպքում ( $T_2 > T_1$ ) առավել հավանական  $\mathbf{V}_h$  արագությունը մեծանում է, հետևաբար մոլեկուլների ըստ արագությունների բաշխման կորի մաքսիմումը տեղաշարժվում է մեծ արագությունների կողմը՝  $\mathbf{V}_{2h} > \mathbf{V}_{1h}$ , նրա մաքսիմում արժեքը փոքրանում է, իսկ կորը դառնում է ավելի փոքր: Դա նշանակում է, որ ջերմաստիճանի աճին զուգընթաց, մեծանում է մեծ



արագությամբ օժտված մոլեկուլների հարաբերական թիվը: Գրաֆիկի վրա բաշխման ֆունկցիայի կորերով սահմանափակված մակերեսները (տես նկ.), նորմավորման պայմանի համաձայն, պետք է մնան անփոփոխ: Գաղի մոլեկուլների մեծ մասը շարժվում է ամենամեծ հավանական արագությամբ այն դեպքում, եթե շատ փոքր և շատ մեծ արագություն ունեցող մոլեկուլների թիվը փոքր է:

Բացի առավել հավանական արագությունից, գաղի մոլեկուլների շարժումը բնորոշում է նաև *միջին թվաքանական*  $\langle \mathbf{v} \rangle$  արագությունը, որի արժեքը կարելի է գտնել բաշխման ֆունկցիայի օգնությամբ հետևյալ բանաձևով  $\langle \mathbf{v} \rangle = \int_0^\infty \mathbf{v} f(\mathbf{v}) d\mathbf{v}$ : Այս բանաձևի մեջ

$$\text{տեղադրելով } f(\mathbf{v}) -ի \text{ արժեքը և այն ինտեգրելով՝ կգտնենք՝ \boxed{\langle \mathbf{v} \rangle = \sqrt{\frac{8kT}{\pi m}} = \sqrt{\frac{8RT}{\pi\mu}}}$$

Համանման ձևով, քանի որ միջին քառակուսային արագությունը որոշվում է  $\mathbf{v}_{\text{մ.պ.}} = \sqrt{\langle \mathbf{v}^2 \rangle}$

բանաձևով, իսկ  $\langle \mathbf{v}^2 \rangle = \int_0^\infty \mathbf{v}^2 f(\mathbf{v}) d\mathbf{v}$ , ապա տեղադրելով  $f(\mathbf{v})$  և կատարելով ինտեգրում,

$$\text{կստանանք՝ } \boxed{\mathbf{v}_{\text{մ.պ.}} = \sqrt{\frac{3kT}{m}} = \sqrt{\frac{3RT}{\mu}}}$$

Ստացված բանաձևից հետևում է, որ նույն զանգվածներով մոլեկուլներից կազմված գաղի համար  $\mathbf{v}_h < (\langle \mathbf{v} \rangle) < \mathbf{v}_{\text{մ.պ.}}$ :

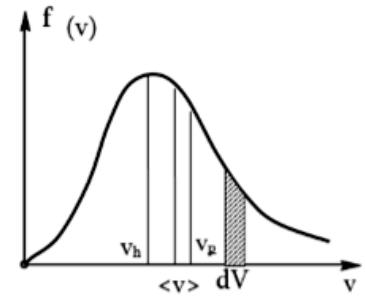
Ենելով մոլեկուլների՝ ըստ արագությունների  $dN(\mathbf{v}) = N 4\pi \left( \frac{m}{2\pi kT} \right)^{3/2} \mathbf{v}^2 e^{-\frac{m\mathbf{v}^2}{2kT}} d\mathbf{v}$  բաշխումից, կարելի է

գտնել գաղի մոլեկուլների բաշխումը ըստ նրանց  $\varepsilon$  կինետիկ էներգիաների արժեքների: Դրա համար բաշխման ֆունկցիայի մեջ կատարենք անցում  $\mathbf{v}$  փոփոխականից  $\varepsilon = \frac{m\mathbf{v}^2}{2}$  փոփոխականի: Տեղադրելով բաշխման ֆունկցիայի բանաձևի մեջ

$$\mathbf{v} = \sqrt{2\varepsilon/m} \quad \text{և} \quad d\mathbf{v} = \frac{d\varepsilon}{\sqrt{2m\varepsilon}}, \text{ կստանանք՝}$$

$$dN(\varepsilon) = N \frac{2}{\sqrt{\pi}} (kT)^{-3/2} \sqrt{\varepsilon} \cdot e^{-\frac{\varepsilon}{kT}} d\varepsilon = N f(\varepsilon) d\varepsilon, \text{ որտեղ } dN(\varepsilon) -ն այն մոլեկուլների$$

թիվն է, որոնց կինետիկ էներգիան գտնվում է  $\varepsilon$ -ից մինչև  $\varepsilon + d\varepsilon$  միջակայքում: Այսպիսով, մոլեկուլների բաշխման ֆունկցիան ըստ նրանց զերմային շարժման էներգիաների կլինի՝



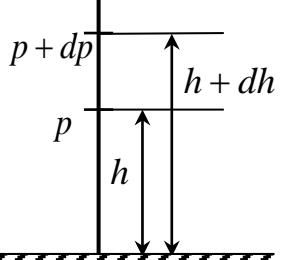
$$f(\varepsilon) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} (kT)^{-3/2} \sqrt{\varepsilon} \cdot e^{-\frac{\varepsilon}{kT}}$$

: Գիտենալով այս ֆունկցիան, կարող ենք գտնել մոլեկուլների

ջերմային շարժման միջին էներգիան, որը պիտի հավասար լինի  $\frac{3}{2}kT$ :

**Մթնոլորտային ճնշման կախումը բարձրությունից: Բարոմետրական բանաձևի արտածումը:**  
**Բոլցմանի բաշխումն արտաքին պոտենցիալային դաշտում գտնվող մասնիկների համար:**

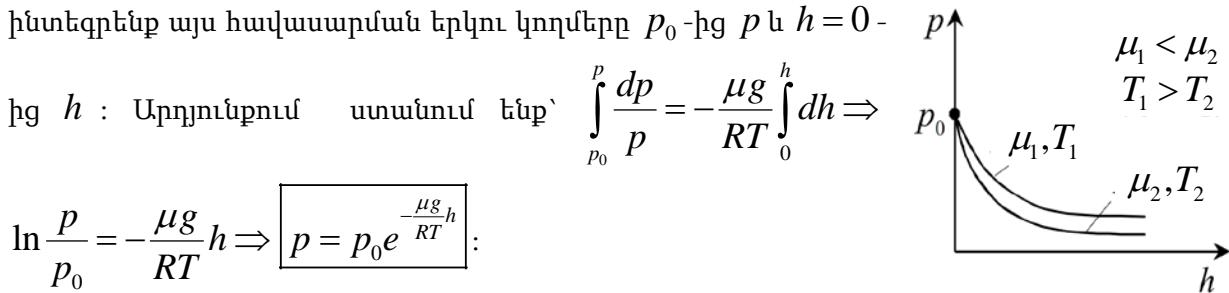
Սոլեկուլային-կինետիկ տեսության հիմնական հավասարման և Մաքսվելի բաշխման օրենքի արտածման ժամանակ ենթադրվում էր, որ մոլեկուլների վրա արտաքին ուժեր չեն ազդում, այդ պատճառով մոլեկուլները բաշխված են անոթի ամբողջ ծավալով հավասարաչափ: Սակայն, կամայական գազի մոլեկուլները գտնվում են Երկրի ձգողության ուժի պոտենցիալային դաշտում: Ձգողությունը մի կողմից և մոլեկուլների ջերմային շարժումը մյուս կողմից՝ գազը բերում են մի որոշողի ստացիոնար վիճակի, որում գազի ճնշումը բարձրությունից կախված նվազում է: Ուրեմն, կարելի է եզրկացնել, որ մեծ ծավալներում մոլեկուլների բաշխման հավասարաչափությունը խախտվում է ծանրության ուժի ազդեցության հետևանքով, որի պատճառով միավոր ծավալում մոլեկուլների թիվը (խտությունը), հետևաբար նաև ճնշումը, կինհի ոչ միատեսակ: Դիտարկենք Երկրի ձգողական դաշտում գտնվող գազ, և արտածենք մթնոլորտային ճնշման կախման օրենքը Երկրի մակերևույթից ունեցած  $h$  բարձրությունից: Ենթադրենք՝ ձգողության դաշտը համասեռ է ( $g = const$ ), ջերմաստիճանը՝ բարձրությունից կախված՝ հաստատուն ( $T = const$ ), և բոլոր մոլեկուլների զանգվածները նույնն են ( $m = const$ ): Եթե մթնոլորտային ճնշումը  $h$  բարձրության վրա  $p$  է, ապա  $h + dh$  բարձրության վրա հավասար է  $p + dp$  (քանի որ գազի  $p$  ճնշումը  $h$ -ը մեծանալու հետ ( $dh > 0$ ) նվազում է, ապա  $dp < 0$ ):  $p$  և  $p + dp$  ճնշումների տարբերությունը հավասար է այն գազի կշռին, որը պարփակված է  $dh$  բարձրությամբ և  $1m^2$  հիմքի մակերեսով գլանի ծավալում.  $p - (p + dp) = \rho g dh$ , որտեղ  $\rho$ -ն օդի խտությունն է  $h$  բարձրության վրա: Հետևաբար,  $dp = -\rho g dh$ : Վիճակի  $pV = \frac{m}{\mu}RT$  հավասարումից հետևում է, որ  $\rho = \frac{m}{V} = \frac{p\mu}{RT}$ : Տեղադրելով  $\rho$ -ի այս արժեքը  $dp$ -ի համար ստացված արտահայտության մեջ, ունենում ենք՝  $dp = -\frac{\mu g}{RT} pdh$ , կամ  $\frac{dp}{p} = -\frac{\mu g}{RT} dh$ : Նկատի ունենալով, որ  $h = 0$  բարձրության վրա մթնոլորտային ճնշումը  $p_0$  է, իսկ  $h$ -ի վրա՝  $p$ ,



$$h = \frac{p_0 - p}{\rho g} = \frac{p_0 - p}{\frac{m}{V} \cdot \frac{\mu}{RT}} = \frac{p_0 - p}{\frac{p\mu}{RT}} = \frac{RT}{\mu} \frac{p_0 - p}{p} = \frac{RT}{\mu} \frac{dp}{p}$$

$$\text{արտահայտության մեջ, ունենում ենք՝ } dp = -\frac{\mu g}{RT} pdh, \text{ կամ } \frac{dp}{p} = -\frac{\mu g}{RT} dh : \text{ Նկատի}$$

ունենալով, որ  $h = 0$  բարձրության վրա մթնոլորտային ճնշումը  $p_0$  է, իսկ  $h$ -ի վրա՝  $p$ ,



Ստացված արտահայտությունը հայտնի է բարոմետրական բանաձևի անվան տակ, որը ցույց է տալիս գազի ճնշման կախումը Երկրի մակերևույթից ունեցած բարձրությունից: Բանաձևից հետևում է, որ ճնշումը բարձրության հետ նվազում է այնքան արագ, որքան ավելի ծանր է գազը (որքան ավելի մեծ է  $\mu$ -ն) և որքան ավելի ցածր է ջերմաստիճանը (տես նկ.): Բարոմետրական բանաձևը հնարավորություն է տալիս, չափելով ճնշումը Երկրի մակերևույթից հաշված որոշակի բարձրության վրա, գտնել այդ ճնշմանը համապատասխանող բարձրությունը: Այդ գործողությունը կատարելու համար ծառայում է ալտիմետր կամ բարձրաչափ կոչվող սարքը:

Եթե հաշվի առնենք, որ մթնոլորտում եղած օդի մոլեկուլների  $n$  կոնցենտրացիայի և  $p$  ճնշման միջև գոյություն ունի  $p = nkT$  կապը, ապա, կատարելով համապատասխան

ձևափոխություններ, բարոմետրական բանաձևը կարելի է ներկայացնել  $n = n_0 e^{\frac{-\mu gh}{RT}}$  տեսքով: Իսկ նկատի ունենալով նաև, որ  $R = kN_{\text{Ա}}$  և  $\mu = m_0 N_{\text{Ա}}$ , որտեղ  $m_0$ -ն մեկ մոլեկուլի

զանգվածն է, ստանում ենք՝  $\boxed{n = n_0 e^{\frac{-m_0 gh}{kT}}}$ : Այս բանաձևը հնարավորություն է տալիս որոշել գազի մոլեկուլների կոնցենտրացիան տարբեր բարձրությունների վրա (օրինակ, պարզ է դառնում՝ բարձրությունից կախված օդի նոսրացման փաստը): Քանի որ  $m_0 gh = U$  մոլեկուլի պոտենցիալային էներգիան է ծանրության ուժային դաշտում, ապա վերջին բանաձևը կարելի

է գրել  $\boxed{n = n_0 e^{\frac{-U}{kT}}}$  տեսքով: Գրված արտահայտությունը կոչվում է Բոլցմանի բաշխում արտաքին պոտենցիալային դաշտի համար: Բանաձևից հետևում է, որ հաստատուն ջերմաստիճանի դեպքում գազի կոնցենտրացիան ավելի մեծ է այնտեղ, որտեղ նրա մոլեկուլների պոտենցիալային էներգիան ավելի փոքր է: Եթե ունենք անկանոն ջերմային շարժման մեջ գտնվող նույն զանգվածով մասնիկներ, ապա Բոլցմանի բաշխումը արդարացի է ոչ միայն ծանրության ուժի դաշտում, այլև կամայական պոտենցիալային դաշտում: Բոլցմանի օրենքն ունիվերսալ է, այն ճիշտ է ցանկացած պոտենցիալային ուժերի դաշտում: Եթե Մաքսվելի օրենքը տալիս է մասնիկների բաշխումն ըստ կինետիկ էներգիայի արժեքների, Բոլցմանի օրենքը տալիս է մասնիկների բաշխումն ըստ պոտենցիալ էներգիայի արժեքների: