

**Բաշխման ֆունկցիա: Գազի մոլեկուլների բաշխումն ըստ արագությունների (Մաքսվելի բաշխումը): Բաշխման ֆունկցիայի գրաֆիկը**

Ինչպես հայտնի է, կամայական մակրոսկոպիկ մարմին կազմված է փոքրագույն մասնիկներից, որոնք գտնվում են անընդհատ քառսային շարժման մեջ: Անգամ ջերմային հավասարակշռության վիճակում գազի մոլեկուլների արագություններն ունեն տարբեր արժեքներ և ուղղություններ, և յուրաքանչյուր առանձին մոլեկուլի արագության ինչպես մեծությունը, այնպես էլ ուղղությունը փոփոխվում են բախումների արդյունքում: Ուրեմն, կարելի է ասել, որ մակրոմարմինների ներքին շարժումը պատահական բնույթի է: Դա նշանակում է, որ հնարավոր չէ ճշտորեն կանխագուշակել՝ ի՞նչ արագությամբ կշարժվի, ի՞նչ էներգիա կունենա մակրոմարմնի այս կամ այն մասնիկը, , որքա՞ն է մասնիկների թիվը տարածության տվյալ կետում ժամանակի տվյալ ակնթարթին և այլն: Մի քանի անգամ կատարելով այս կամ այն ֆիզիկական պարամետրի չափումներ՝ յուրաքանչյուր դեպքում կստանանք այդ նույն պարամետրի տարբեր արժեքներ: Այդ իմաստով այդպիսի մեծաքանակ մասնիկներից կազմված համակարգի համար իրավասու է հարցադրում կատարել միայն այն մասին, թե որն է ֆիզիկական մեծության՝ այս կամ այն արժեքն ընդունելու հավանականությունն ինչի՞ է հավասար: Մասնիկների այդ համախմբի համար կիրառելի է հավանականությունների մաթեմատիկական տեսության վիճակագրական մեթոդը, որը հիմնված է միջին, միջին քառակուսային և մասնիկների վարքը համախմբում բնութագրող առավել հավանական պարամետրերի մասին հասկացությունների վրա: Հավանականությունների (վիճակագրության) տեսության մեջ կարևոր հասկացություններից է բաշխման ֆունկցիայի հասկացությունը:

Հավասարակշռության վիճակում գտնվող իդեալական գազում հաստատվում է որոշակի ստացիոնար, ժամանակի ընթացքում չփոփոխվող, մոլեկուլների՝ ըստ արագությունների բաշխում, որը ենթարկվում է որոշակի վիճակագրական օրենքի: Դիտարկելով շատ մեծ՝  $N$  թվով նույնանման մասնիկներից կազմված համակարգ, անգլիացի գիտնական Մաքսվելը ստացավ մի բանաձև, որի օգնությամբ հնարավոր է հաշվել այն մասնիկների  $dN(\mathbf{v})$  թիվը, որոնց արագությունները գտնվում են  $\mathbf{v}$ -ից մինչև  $\mathbf{v} + d\mathbf{v}$

ինտերվալում՝ 
$$dN(\mathbf{v}) = N 4\pi \left( \frac{m}{2\pi kT} \right)^{3/2} \mathbf{v}^2 e^{-\frac{m\mathbf{v}^2}{2kT}} d\mathbf{v},$$
 որտեղից բաշխման ֆունկցիայի

համար ստացվում է հետևյալ բանաձևը՝ 
$$f(\mathbf{v}) = \frac{dN(\mathbf{v})}{Nd\mathbf{v}} = 4\pi \left( \frac{m}{2\pi kT} \right)^{3/2} \mathbf{v}^2 e^{-\frac{m\mathbf{v}^2}{2kT}}:$$
 Այս

երկու բանաձևերը արտահայտում են *իդեալական գազի մոլեկուլների բաշխումը ըստ արագությունների*: Վերլուծելով  $f(\mathbf{v})$  բաշխման ֆունկցիայի համար ստացված բանաձևը, կարող ենք հանգել հետևյալ եզրակացությունների: Նախ, շատ փոքր ( $\mathbf{v} \rightarrow 0$ ) և շատ մեծ ( $\mathbf{v} \rightarrow \infty$ ) արագություններ ունեցող մոլեկուլների հարաբերական թիվը (այդպիսի

արագություններով մոլեկուլներ գազում հայտնաբերելու հավանականությունը) ձգտում է գրոյի: Երկրորդ, բաշխման ֆունկցիան միարժեք անընդհատ ֆունկցիա է: Դա նշանակում է, որ գազում եղած մոլեկուլների տվյալ  $\mathbf{V}$  արագությունը ունենալու հավանականությունը ունի միայն մեկ արժեք, և չկա մոլեկուլի այնպիսի մի արագություն, որն ունենալու հավանականություն չլիի: Եվ վերջապես, հետազոտելով բաշխման ֆունկցիայի էքստրեմումների առկայությունը, պարզում ենք, որ այն ունի մեկ մաքսիմում:  $f(\mathbf{V})$  բաշխման ֆունկցիայի գրաֆիկը պատկերված է նկարում:

**Բնութագրական արագություններ: Գազի մոլեկուլների քառասային շարժման  
ամենահավանական արագության ստացումը բաշխման ֆունկցիայի միջոցով**

Այն արագությունը, որի դեպքում մոլեկուլների՝ ըստ արագությունների Մաքսվելի բաշխման ֆունկցիան ընդունում է իր մաքսիմում արժեքը, կոչվում է մոլեկուլների *առավել հավանական  $\mathbf{V}_h$  արագություն*: Այդ արագությունը կարելի է գտնել՝ ածանցելով  $f(\mathbf{V})$ -ն ըստ  $\mathbf{V}$ -ի և հավասարեցնելով այն զրոյի:

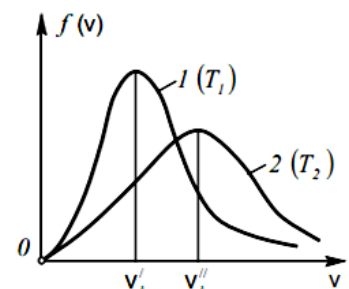
$$\frac{df(\mathbf{V})}{d\mathbf{V}} = 4\pi \left( \frac{m}{2\pi kT} \right)^{3/2} \frac{d}{d\mathbf{V}} \left( \mathbf{V}^2 \cdot e^{\frac{-m\mathbf{V}^2}{2kT}} \right) = 4\pi \left( \frac{m}{2\pi kT} \right)^{3/2} e^{\frac{-m\mathbf{V}^2}{2kT}} \cdot 2\mathbf{V} \cdot \left( 1 - \frac{m\mathbf{V}^2}{2kT} \right) = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow e^{\frac{-m\mathbf{V}^2}{2kT}} \cdot 2\mathbf{V} \cdot \left( 1 - \frac{m\mathbf{V}^2}{2kT} \right) = 0 \Rightarrow \left\{ (1) e^{\frac{-m\mathbf{V}^2}{2kT}} = 0; (2) \mathbf{V} = 0; (3) \left( 1 - \frac{m\mathbf{V}^2}{2kT} \right) = 0 \right\}:$$

(1) և (2) արտահայտություններին բավարարող արագության  $\mathbf{V}=0$  և  $\mathbf{V}=\infty$  արժեքները համապատասխանում են  $f(\mathbf{V})$  -ի մինիմումին: Փակագծերում գտնվող (3)-րդ արտահայտությունը զրոյի վերածող  $\mathbf{V}$  -ի արժեքը որոնելի  $\mathbf{V}_h$  *առավել հավանական արագությունն* է՝

$$\boxed{\mathbf{V}_h = \sqrt{\frac{2kT}{m}} = \sqrt{\frac{2RT}{\mu}}:}$$

Նշենք, որ  $f(\mathbf{V})$  ֆունկցիայի տեսքը կախված է գազի տեսակից (մոլեկուլների զանգվածից) ու  $T$  ջերմաստիճանից: Ջերմաստիճանի բարձրացման դեպքում ( $T_2 > T_1$ ) առավել հավանական  $\mathbf{V}_h$  արագությունը մեծանում է, հետևաբար մոլեկուլների ըստ արագությունների բաշխման կորի մաքսիմումը տեղաշարժվում է մեծ արագությունների կողմը՝  $\mathbf{v}_{2h} > \mathbf{v}_{1h}$ , նրա մաքսիմում արժեքը փոքրանում է, իսկ կորը դառնում է ավելի փոված: Դա նշանակում է, որ ջերմաստիճանի աճին զուգընթաց, մեծանում է մեծ



արագությամբ օժտված մոլեկուլների հարաբերական թիվը: Գրաֆիկի վրա բաշխման ֆունկցիայի կորերով սահմանափակված մակերեսները (տես նկ.), նորմավորման պայմանի համաձայն, պետք է մնան անփոփոխ: Գազի մոլեկուլների մեծ մասը շարժվում է ամենամեծ հավանական արագությամբ այն դեպքում, երբ շատ փոքր և շատ մեծ արագություն ունեցող մոլեկուլների թիվը փոքր է:

Բացի առավել հավանական արագությունից, գազի մոլեկուլների շարժումը բնորոշում է նաև միջին թվաբանական  $\langle \mathbf{v} \rangle$  արագությունը, որի արժեքը կարելի է գտնել բաշխման ֆունկցիայի օգնությամբ հետևյալ բանաձևով  $\langle \mathbf{v} \rangle = \int_0^\infty \mathbf{v} f(\mathbf{v}) d\mathbf{v}$ : Այս բանաձևի մեջ

տեղադրելով  $f(\mathbf{v})$ -ի արժեքը և այն ինտեգրելով՝ կգտնենք՝  $\langle \mathbf{v} \rangle = \sqrt{\frac{8kT}{\pi m}} = \sqrt{\frac{8RT}{\pi \mu}}$ :

Համանման ձևով, քանի որ միջին քառակուսային արագությունը որոշվում է  $\mathbf{v}_{\text{ս.ք.}} = \sqrt{\langle \mathbf{v}^2 \rangle}$

բանաձևով, իսկ  $\langle \mathbf{v}^2 \rangle = \int_0^\infty \mathbf{v}^2 f(\mathbf{v}) d\mathbf{v}$ , ապա տեղադրելով  $f(\mathbf{v})$  և կատարելով ինտեգրում,

կստանանք՝  $\mathbf{v}_{\text{ս.ք.}} = \sqrt{\frac{3kT}{m}} = \sqrt{\frac{3RT}{\mu}}$ :

Ստացված բանաձևից հետևում է, որ նույն զանգվածներով մոլեկուլներից կազմված գազի համար  $\mathbf{v}_h < (\langle \mathbf{v} \rangle) < \mathbf{v}_{\text{ս.ք.}}$ :

Ելնելով մոլեկուլների՝ ըստ արագությունների

$dN(\mathbf{v}) = N 4\pi \left( \frac{m}{2\pi kT} \right)^{3/2} \mathbf{v}^2 e^{-\frac{m\mathbf{v}^2}{2kT}} d\mathbf{v}$  բաշխումից, կարելի է

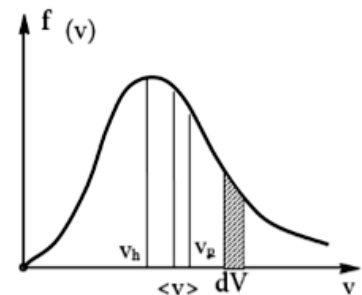
գտնել գազի մոլեկուլների բաշխումը ըստ նրանց  $\mathcal{E}$  կինետիկ էներգիաների արժեքների: Դրա համար բաշխման ֆունկցիայի

մեջ կատարենք անցում  $\mathbf{v}$  փոփոխականից  $\mathcal{E} = \frac{m\mathbf{v}^2}{2}$  փոփոխականի: Տեղադրելով բաշխման ֆունկցիայի բանաձևի մեջ

$\mathbf{v} = \sqrt{2\mathcal{E}/m}$  և  $d\mathbf{v} = d\mathcal{E}/\sqrt{2m\mathcal{E}}$ , կստանանք՝

$dN(\mathcal{E}) = N \frac{2}{\sqrt{\pi}} (kT)^{-3/2} \sqrt{\mathcal{E}} \cdot e^{-\frac{\mathcal{E}}{kT}} d\mathcal{E} = N f(\mathcal{E}) d\mathcal{E}$ , որտեղ  $dN(\mathcal{E})$ -ն այն մոլեկուլների

թիվն է, որոնց կինետիկ էներգիան գտնվում է  $\mathcal{E}$ -ից մինչև  $\mathcal{E} + d\mathcal{E}$  միջակայքում: Այսպիսով, մոլեկուլների բաշխման ֆունկցիան ըստ նրանց ջերմային շարժման էներգիաների կլինի՝

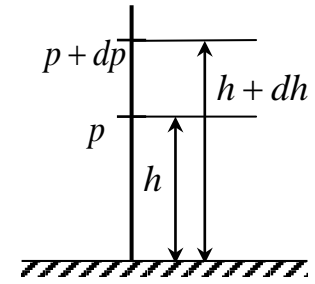


$$f(\varepsilon) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} (kT)^{-3/2} \sqrt{\varepsilon} \cdot e^{-\frac{\varepsilon}{kT}} : \text{Գիտենալով այս ֆունկցիան, կարող ենք գտնել մոլեկուլների}$$

ջերմային շարժման միջին էներգիան, որը պիտի հավասար լինի  $\frac{3}{2}kT$  :

**Մթնոլորտային ճնշման կախումը բարձրությունից: Բարոմետրական բանաձևի արտածումը:**  
**Բուցմանի բաշխումն արտաքին պոտենցիալային դաշտում գտնվող մասնիկների համար:**

Մոլեկուլային-կինետիկ տեսության հիմնական հավասարման և Մաքսվելի բաշխման օրենքի արտածման ժամանակ ենթադրվում էր, որ մոլեկուլների վրա արտաքին ուժեր չեն ազդում, այդ պտճառով մոլեկուլները բաշխված են անոթի ամբողջ ծավալով հավասարաչափ: Սակայն, կամայական գազի մոլեկուլները գտնվում են Երկրի ձգողության ուժի պոտենցիալային դաշտում: Ձգողությունը մի կողմից և մոլեկուլների ջերմային շարժումը մյուս կողմից՝ գազը բերում են մի որոշակի ստացիոնար վիճակի, որում գազի ճնշումը բարձրությունից կախված նվազում է: Ուրեմն, կարելի է եզրկացնել, որ մեծ ծավալներում մոլեկուլների բաշխման հավասարաչափությունը խախտվում է ծանրության ուժի ազդեցության հետևանքով, որի պատճառով միավոր ծավալում մոլեկուլների թիվը (խտությունը), հետևաբար նաև ճնշումը, կլինի ոչ միատեսակ: Դիտարկենք Երկրի ձգողական դաշտում գտնվող գազ, և արտածենք մթնոլորտային ճնշման կախման օրենքը Երկրի մակերևույթից ունեցած  $h$  բարձրությունից: Ենթադրենք՝ ձգողության դաշտը համասեռ է ( $g = \text{const}$ ), ջերմաստիճանը բարձրությունից կախված՝ հաստատուն ( $T = \text{const}$ ), և բոլոր մոլեկուլների զանգվածները նույնն են ( $m = \text{const}$ ): Եթե մթնոլորտային ճնշումը  $h$  բարձրության վրա  $p$  է,



ապա  $h + dh$  բարձրության վրա հավասար է  $p + dp$  (քանի որ գազի  $p$  ճնշումը  $h$ -ը մեծանալու հետ ( $dh > 0$ ) նվազում է, ապա  $dp < 0$ ):  $p$  և  $p + dp$  ճնշումների տարբերությունը հավասար է այն գազի կշռին, որը պարփակված է  $dh$  բարձրությամբ և  $1\text{մ}^2$  հիմքի մակերեսով գլանի ծավալում.  $p - (p + dp) = \rho g dh$ , որտեղ  $\rho$ -ն օդի խտությունն է

$h$  բարձրության վրա: Հետևաբար,  $dp = -\rho g dh$ : Վիճակի  $pV = \frac{m}{\mu} RT$  հավասարումից

հետևում է, որ  $\rho = \frac{m}{V} = \frac{p\mu}{RT}$ : Տեղադրելով  $\rho$ -ի այս արժեքը  $dp$ -ի համար ստացված

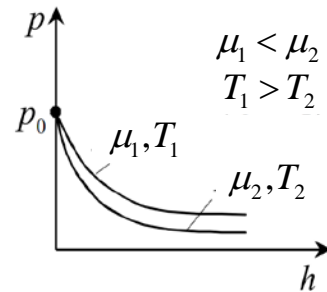
արտահայտության մեջ, ունենում ենք՝  $dp = -\frac{\mu g}{RT} p dh$ , կամ  $\frac{dp}{p} = -\frac{\mu g}{RT} dh$ : Նկատի

ունենալով, որ  $h = 0$  բարձրության վրա մթնոլորտային ճնշումը  $p_0$  է, իսկ  $h$ -ի վրա՝  $p$ ,

ինտեգրենք այս հավասարման երկու կողմերը  $p_0$ -ից  $p$  և  $h=0$ -

ից  $h$  : Արդյունքում ստանում ենք՝  $\int_{p_0}^p \frac{dp}{p} = -\frac{\mu g}{RT} \int_0^h dh \Rightarrow$

$$\ln \frac{p}{p_0} = -\frac{\mu g}{RT} h \Rightarrow \boxed{p = p_0 e^{-\frac{\mu g h}{RT}}}$$



Ստացված արտահայտությունը հայտնի է *բարոմետրական բանաձևի* անվան տակ, որը ցույց է տալիս գազի ճնշման կախումը Երկրի մակերևույթից ունեցած բարձրությունից: Բանաձևից հետևում է, որ ճնշումը բարձրության հետ նվազում է այնքան արագ, որքան ավելի ծանր է գազը (որքան ավելի մեծ է  $\mu$ -ն) և որքան ավելի ցածր է ջերմաստիճանը (տես նկ.): Բարոմետրական բանաձևը հնարավորություն է տալիս, չափելով ճնշումը Երկրի մակերևույթից հաշված որոշակի բարձրության վրա, գտնել այդ ճնշմանը համապատասխանող բարձրությունը: Այդ գործողությունը կատարելու համար ծառայում է *ալտիմետր* կամ *բարձրաչափ* կոչվող սարքը:

Եթե հաշվի առնենք, որ մթնոլորտում եղած օդի մոլեկուլների  $n$  կոնցենտրացիայի և  $p$  ճնշման միջև գոյություն ունի  $p = nkT$  կապը, ապա, կատարելով համապատասխան ձևափոխություններ, բարոմետրական բանաձևը կարելի է ներկայացնել  $n = n_0 e^{-\frac{\mu g h}{RT}}$  տեսքով: Իսկ նկատի ունենալով նաև, որ  $R = kN_A$  և  $\mu = m_0 N_A$ , որտեղ  $m_0$ -ն մեկ մոլեկուլի

զանգվածն է, ստանում ենք՝  $\boxed{n = n_0 e^{-\frac{m_0 g h}{kT}}}$ : Այս բանաձևը հնարավորություն է տալիս որոշել գազի մոլեկուլների կոնցենտրացիան տարբեր բարձրությունների վրա (օրինակ, պարզ է դառնում՝ բարձրությունից կախված օդի նոսրացման փաստը): Քանի որ  $m_0 g h = U$  մոլեկուլի պոտենցիալային էներգիան է ծանրության ուժային դաշտում, ապա վերջին բանաձևը կարելի

է գրել  $\boxed{n = n_0 e^{-\frac{U}{kT}}}$  տեսքով: Գրված արտահայտությունը կոչվում է *Բոլցմանի բաշխում արտաքին պոտենցիալային դաշտի* համար: Բանաձևից հետևում է, որ հաստատուն ջերմաստիճանի դեպքում գազի կոնցենտրացիան ավելի մեծ է այնտեղ, որտեղ նրա մոլեկուլների պոտենցիալային էներգիան ավելի փոքր է: Եթե ունենք անկանոն ջերմային շարժման մեջ գտնվող նույն զանգվածով մասնիկներ, ապա Բոլցմանի բաշխումը արդարացի է ոչ միայն ծանրության ուժի դաշտում, այլև կամայական պոտենցիալային դաշտում, Բոլցմանի օրենքն ունիվերսալ է, այն ճիշտ է ցանկացած պոտենցիալային ուժերի դաշտում: Եթե Մաքսվելի օրենքը տալիս է մասնիկների բաշխումն ըստ կինետիկ էներգիայի արժեքների, Բոլցմանի օրենքը տալիս է մասնիկների բաշխումն ըստ պոտենցիալ էներգիայի արժեքների: