Notatki z wykładu, ćwiczeń i laboratorium

Języki formalne i złożoność obliczeniowa.

Na podstawie wykładu profesora Macieja Kandulskiego

semestr zimowy 2019/2020

Uniwersytet Adama Mickiewicza wydział Matematyki i Informatyki

Wykład 12.10.2019

1 Złożoność obliczeniowa

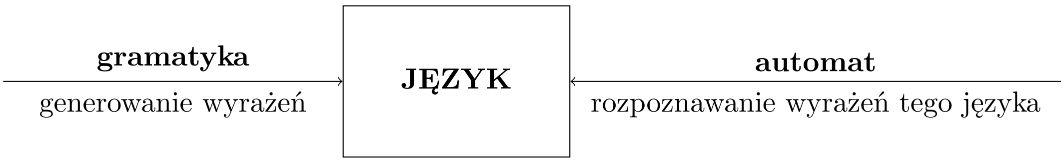
Zagadnienia złożoności obliczeniowej - jakie są koszty prowadzenia obliczeń czasowe i pamięciowe:

- Złożoność wykładnicza
- Nierozsądne gospodarowanie czasem
- Nierozsądne gospodarowanie pamięciową ...

2 Gramatyka

Def. 2.1: Gramatyka

Jak poprawnie budować wyrażenia danego języka (zbiór zasad). Gramatyka inaczej jest nazywana syntaktyką albo składnią.



Między innymi kompilator posiada w sobie element rozpoznający gramatykę.

3 Symbol a znaczenie symbolu

3.1 Abstrakcyjne pojęcie liczby

Warto odróżnić symbol od jego znaczenia. Np. liczbę dwa można zapisywac w postaci symoblu cyfry arabskiej **2** lub rzymskiej **II**. To samo dotyczy słowa **słoń** - słowo oznacza wielkie kilkutonowe zwierze ale nim nie jest (nie jest bytem materialnym).

Def. 3.1: Abstrahować

Abstrahować znaczy pomijać.
Np.: abstrakcyjna liczba dwa powstała z pominięciem takich cech jak wielkość, pochodzenie.

3.2 Przykład powstania liczby

Różna materialne nośniki niosące te same liczby obiektów o różnych cechach.
Opisanie wspólnej cechy obiektów - **liczebności** .

(i) **couple** of people (para ludzi - 2)

(ii) **pair** of pistols (para pistoletów - 2)

(iii) **yoke** of oxen (zaprzęg dwa zwierzęta)

Abstrakcyjna liczba **2** powstała abstrahując od pochodzenia (np. zwierzęcia), wielkości (np. broni) czy płci (para ludzi) pozostawiając tylko jedną wspólną cechę, którą jest **liczebność** .

4 Języki formalne

4.1 Pojęcia

Ciągi i zbiory ciągów traktowane są jako obiekty materialne a **nie** abstrakycjne.

Skończoność - ważna cecha alfabetu/zbioru ponieważ tylko skończone zbiory danych można przechowywać w **fizycznym urządzeniu**.

Def. 4.1: Alfabet V

Alfabet V to: **dowolny** , **niepusty** , **skończony zbior znaków**
np.: V = {I} , V' = {a,b}.

Def. 4.2: Słowo nad alfabetem V

Słowo nad alfabetem V to dowolny, skończony ciąg znkaów z V. np.: **IIII** (słowo nad alfabetem V={I}) czy **abba** (słowo nad alfabetem V={a,b})

Def. 4.3: Słowo puste ϵ

Słowo puste ϵ - słowo o 0 (zerowym) wystąpieniu symboli.
Uwaga! Spacja **NIE** jest słowem pustym.

Def. 4.4: V*

Zbiór wszystkich słów nad alfabetem V. Łącznie z pustym słowem ϵ.

Def. 4.5: V* \\{ϵ} = V+

Zbiór wszsytkich niepustych słów. (Wyłączenie ze zbioru pustego słowa ϵ)

Def. 4.6: Oznaczenie słów

Słowa oznaczane są wielkimi literami z końca alfabetu łacińskiego,
np.: **P**,**Q**,**R**.

5 Konkatenacja

5.1 Operacja konkatenacji

Def. 5.1: Konkatenacja dwóch słów

Konkatenacją dwóch słów **P** i **Q** nazywamy słowo **PQ** zdefiniowane w następujący sposób:

(i) jeżeli **P**=$a_1, ..., a_n$ gdzie **a**=$b_1, ..., b_n$ n,m $\geqslant$ 0 to **PQ**= $a_1, ..., a_n b_1, ..., b_n$

(ii) Jeżeli **P**=ϵ, to **PQ**=Q.
Alternatywnie to **Q**=ϵ i wtedy **PQ**=P.
Gdy **P**=**Q**=ϵ to **PQ=**$\epsilon\epsilon = \epsilon$.

Własności konkatenacji

- Konkatenacja jest działaniem łacznym w zbiorze słów
- Konkatenacja w ogólnoście **NIE** jest przemienna (bywa przemienna dla tyh samych słów **ab ab**) lub jeśli alfabet skada sie tylko z jednego znaku np V = {a}
- ϵ słowo puste zachowje się jak element neutralny dla operacji konkatenacji:
  ϵP $\subset$ P ϵ = P.

5.2 Konkatenacja NIE jest grupą algebraiczną

Pomimo abstrakcyjnego znaczenia liczb, ich mentalna reprezentacja jest jednak w urządzeniu czymś materialnym (stanami wysokich i niskich napięć).

V^* - zbiór wszystkich elementów (słów) nad alfabatem **V** (łącznie z elementem pustym ϵ)
$\circ$ - oznacza działanie w grupie
e - litera e jest symbolem elementu neutralnego

Przykład łączności:
a) dodawanie np. : 2 + (3 + 5) = (2 + 3) + 5
b) mnożenie np.: 2 * (3 * 5) = (2 * 3) * 5

Def. 5.2: Warunki bycia grupą

Konkatenacja jest grupą (z algebry) jeśli spełnia warunki na bycie grupą:

(i) operacja $\circ$ jest łączna w grupie;

(ii) $\exists e$, $\forall x$ Istnieje element neutralny dal każdego x, taki że $x \circ e = e \circ x = x$;

(iii) Dla każdego x $\forall x$ Istnieje element odwrotny $\exists x^{-1}$, taki, że $x \circ x^{-1} = x^{-1} \circ x = e$.
Warunek nie spełniony przez konkatenację - nie istnieje w ogólności takie słowo gdzie: słowo + słowo^{-1} $= \epsilon$ (szczególny przypadek spełnienia to $\epsilon + \epsilon = \epsilon$, bo element neutralny jest sam do siebie odwrotny $\epsilon^{-1} = \epsilon$)
$\Rightarrow$ **WARUNEK NIE JEST W OGÓLNOŚCI SPEŁNIONY - konkatenacja NIE jest grupą!**

5.3 Podsłowo słowa

Zbiór **A** $\subset$ **A** i analogicznie **abca** $\sqsubset$ **abca** (Znak $\sqsubset$ to taka kanciasta inkluzja oznaczenie używane przy słowach)

Def. 5.3: Podsłowo

Mówimy, że słowo **Q** jest podsłowem słowa **P** wtedy i tylko wtedy gdy, istnieją słowa Q_1 i Q_2 takie, że:

$$P = Q_1 \mathbf{Q} Q_2.$$

Np:. słowo **bc** jest podsłowem słowa **abcd**

$$\mathbf{a}\,\underbrace{bc}_{Q}\,\mathbf{d}$$

$$Q_1 \qquad\qquad\qquad\qquad Q_2$$

Widać, tutaj, zę Q to słowo **ab**, $Q_1 = a$, $Q_2 = d$

Def. 5.4: Prefix słowa

Słowo Q jest prefixem słowa P jeśli $P = QQ_1$.

Def. 5.5: Suffix słowa

Słowo Q jest suffixem słowa P jeśli $P = Q_1Q$.

Def. 5.6: Infix słowa

Słowo Q jest infixem słowa P jeśli $P = Q_1QQ_2$
gdzie $Q_1 \neq \epsilon$ i gdzie $Q_2 \neq \epsilon$.

5.4 Długość słowa

Def. 5.7: Długość słowa $\mid P \mid$

Długością słowa $P \subset V^*$ nazywamy liczbę naturalną $\mid P \mid$ definiujemy w sposób indukcyjny:

(i) $\mid \epsilon \mid = 0$

(ii) $\mid P\mathbf{a} \mid = \mid P \mid +1$; gdzie P to ciąg (słowo) a **a** to symbol (dodatkowa litera w słowie).

Przykład 1.: Długość słowa **abc**
$\mid abc \mid = \mid ab \mid +1 = (\mid a \mid +1) + 1 = (\mid \epsilon a \mid +1) + 1 = ((\mid \epsilon \mid +1) + 1) + 1 = ((0 + 1) + 1) + 1 = 3$

Przykład 2.:
Obliczyć ilość wszystkich podsłów słowa **P** gdy dana jest długość słowa $\mid P \mid = 4$

Odp: NIE WIĘCEJ NIŻ 11.

Rozwiązanie a:
Weźmy dla przykładu słowo **abcd** .
Podsłowo **abcd** $\subset$ **abcd** - jedno podsłowo długości 4. (Słowo jest samo swoim podsłowem; kolejnosć znaków też ma znaczenie np słowo **bcda** $\not\subset$ **abcd**).

Podsłowa długości 3 (2 takie słowa) **abc** $\subset$ **abcd**, **bcd** $\subset$ **abcd**;
Podsłowa długości 3 (2 takie słowa) **ab** $\subset$ **abcd**, **bc** $\subset$ **abcd**, **cd** $\subset$ **abcd**;
Podsłowa długości 1 (4 takie słowa) **a** $\subset$ **abcd**, **b** $\subset$ **abcd**, **c** $\subset$ **abcd**, **d** $\subset$ **abcd**;

Odp a:
Dla słowa **abcd** mamy (1+2+3+4) + 1
(dodajemy jeden bo znak pusty ϵ)

Rozwiązanie b):
Załóżmy, że szukamy wszystkich podsłów słowa P = **aaaa**.
aaaa $\subset$ aaaa (1 podsłowo)
aaa $\subset$ aaaa (1 podsłowo)
aa $\subset$ aaaa (1 podsłowo)
a $\subset$ aaaa (1 podsłowo)

Odp b:
Dla słowa **aaaa** mamy (1+1+1+1) + 1 (dodajemy jeden bo znak pusty ϵ).
NIE ROZRÓŻNIAMY ZNAKÓW MIĘDZY SOBĄ tzn.: zawsze a == a (nie rozróżniamy permutacji tych samych elementów)

Zadanie Domowe 12.10.2019

Napisać procedurę w pseudokodzie: Dla zadanego słowa długośc **n** napisac procedurę, które pokaże liczbę **k** podsłów oraz wypisze całą listę konkretnych podsłów.

```
Tu bedzie rozwiazanie:
    if (n == 0 || n == 1){
```

```
  return n;
}
j = 0;
for (i = 0; i < n-1; i++){
  if (arr[i] != arr[i+1]){
    arr[j] = arr[i];
    j++;
  }
}
arr[j++] = arr[n-1];
```

5.5 Długość konkatenacji słów

Def. 5.8: Długość konktatenacji słów

$$| PQ |=| P | + | Q |$$

Dowód (indukcja matematyczna):
$\forall P, Q :| PQ |=| P | + | Q |$ (Indukcja po długości $| Q |$)

(i) $| Q |= \epsilon$
LewaStrona: $| PQ |=| P\epsilon |=| P |$ gdzie k $\leqslant$ n
PrawaStrona: $| P | + | Q |=| P | + | \epsilon |=| P | +0 =| P | =$ **LewaStrona**
c.d.n

(ii) λ: $| PQ |=| P | + | Q |$
PrawaStrona: $| P(Qa) |=| P | + | Qa |$ gdzie n=0
LewaStrona: $| P(Qa) | \overset{\text{jeżeli}}{=} | (PQ)a | \overset{\text{ii}}{=} | PQ | +1 \overset{\lambda}{=}$
$(| P | + | Q |) + 1 =| P | +(| Q | +1) =| P | + | Qa |$,..., = **PrawaStrona**
c.n.d

5.6 N-ta potęga słowa

Przykład potęgowania liczb: $\underbrace{7 * 7 * ... * 7}_{n-razy} = 7^n$
Potęgowanie słów: **abcabcabc** $= (abc)^3 /neqa^3b^3c^3$

Def. 5.9: N-ta potęga liczby

Potęgowanie liczb - widać że pierwszy warunek $a^0 = 1$ jest stworzony przez matematyków, niejako sztucznie ale jest to wymagane dla prawdiłowości działania indukcji matematycznej; a w praktyce jest to często warunek zatrzymania funkcji obliczającej np. silnie iteracyjnie czy rekurencyjnie.

(i) $a^0 = 1$

(ii) $a^{n+1} = a^{0+1} = a^0 * a$

Podobnie jak liczby potęguje się też słowa, ale ze względu na swoją specyfikę kolejność znaków w słowie podczas mnożenia ma znaczenie!

Def. 5.10: N-ta potęga słowa

N-tą potęgą słowa **P**, oznaczamy P^n, nazywamy słowo zdefiniowane indukcyjnie w następujący sposób:

(i) $P^0 = \epsilon$

(ii) $P^{n+1} = P^n P$

Dowód: $\underbrace{P^1} = P^{0+1} \overset{\text{ii}}{=} P^0 \underbrace{P}$

Przykład:
$a^3(ba)^2 = aaababa$
$(abc)^3 \neq a^3b^3c^3$

5.7 Operacja Odbicia zwierciadlanego (rewers) słowa P

Przykład odbicia zwierciadlanego to po prostu pisanie wyrazu "od tyłu"
np.: $(abc)^{-1}$ = cba

Def. 5.11: Odbicie zwierciadlane słowa P

Odbicie zwierciadlane słowa **P**, oznaczamy przez P^{-1} (P prim)i definiujemy je indukcyjnie po $\mid P \mid'$ w następujący sposób:

(i) $\epsilon^{-1} = \epsilon$

(ii) $(Pa)^{-1} = aP^{-1}$ //odwróciliśmy a teraz odwracamy resztę słowa **P**

5.8 Własności konkatenacji

Rewers Konkatenacji (odbicie zwierciadlane)

$(PQ)^{-1} = Q^{-1}P^{-1}$

Rewers N-tej potęgi konkatenacji

$(P^n)^{-1} = (P^{-1})^n$ np.: $((abc)^3)^{-1} = (cba)^3$

Złożenia odbić zwierciadlanych konkatenacji

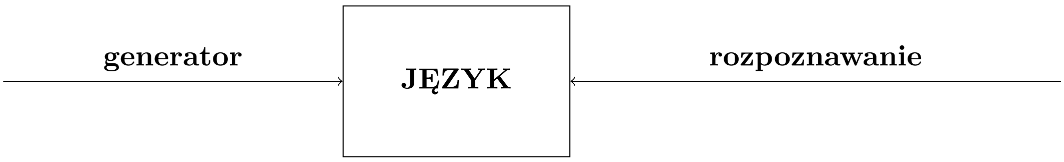
$(P^{-1})^{-1} = P$ //odbicia znoszą się

6 Język

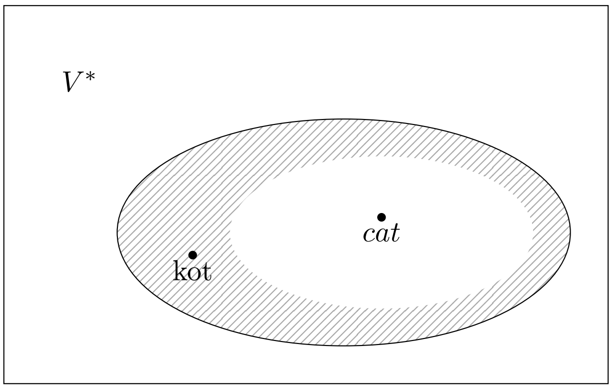
Def. 6.1: Alfabet a język

Uwaga - alfabet V $\not\Leftrightarrow$ język.

Należy takze pamiętać, że: V^* - zbiór wszystkich elementow (słów) nad alfabatem **V** (łącznie z elementem pustym ϵ)



Przykładowo mamy **język angielski** składający się z małych liter **V={a,b,...z}** Słowo **cat** należy do tego języka tzn.: **cat** $\subset$ **jezykAngielki**;
a słowo **kot** chociaż jego znaki należą do alfabetu **V** to jednak słowo **"kot"** nie należy do **języka angielkiego** tzn.: **kot** $\not\subset$ **językAngielski**.

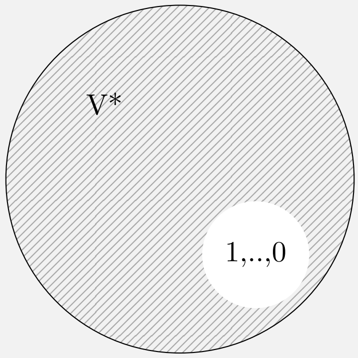


Def. 6.2: Język

Językiem nad alfabetem **V** nazywamy dowolny podzbiór zbioru wszystkich słów nad **V** tj.:

$$L \subset V^*$$

Przykład
Dany jest alfabet binary V={0,1}, czyli, żeby zaprezenetować wszystie liczby parzyste większe od 0 nalezy na ostatnim bicie umieścić cyfrę 0.

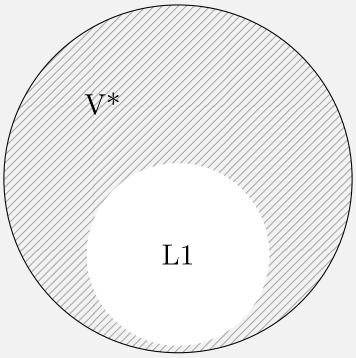


6.1 Język jako zbiór - własności

Jako obiekt język to zbiór → dziedziczy wszystkie własności zbioru:

- A ⊂ A
- $V^* \subset V^*$
- Ø ⊂ A
- Ø ⊂ V^*

Przykład



Przykładowe operacje

- $L_1, L_2 \subset V^*$
- $L_1 \cup L_2$
- $L_1 \cap L_2$
- $L_1 \setminus L2$
- $\overline{L_1} = V^* \setminus L_1$

6.2 Konkatenacja języków

Def. 6.3: Konkatenacja języków

Dla języków L_1 i L_2 przez konkatenację tych języków, oznaczoną L_1L_2 rozumiemy zbiór:=

$$L_1L_2 = \{P_1P2 : P_1 \in L_1, P_2 \in L_2\}$$

Przykład 1
Mając języki $L_1 = \{a, ab, \epsilon\}$, $L_2 = \{b, ab, ba\}$.
Ile możemy utworzyć słów poprzez konkatenację języków L_1 i L_2?
Odp: Maksymalnie 9.
Rozwiązanie (najlepiej takie rzeczy robić tabelką):

L_1 \ L_2	b	ab	ba
a	ab	a^2b	ba^2
ab	ab^2	$(ab)^2$	ab^2a
ϵ	b	ab	ba

Tabelka jest idealnym sposobem liczenia konkatenacji języków.
Uwaga przy konkatenacji trzeba uważać, czy pytanie dotyczyło wszystkich możliwych kombinacji(wtedy liczymy z powtórzeniami), czy tylko unikatowych słów.

Przykład 2
Mając języki:
$L_1 = \{\epsilon, a, a^2, a^3, a^4, ...\} = a^n : n \geqslant 0$
$L_2 = \{\epsilon, b, b^2, b^3, b^4, ...\} = b^n : n \geqslant 0$

Odp: $L_1L_2 = \{a^nb^m : n, m \geqslant 0\}$ // n,m $\geqslant$ 0 bo dopuszczamy $\epsilon * \epsilon$ równy 0

Przykład 3
Konkatenacja niepustego alfabetu ze sobą samym:
Np.: L = $\{a, b\}$
Odp: LL = $\{a, b\}\{a, b\} = \{a^2, ab, ba, b^2\}$

Przykład 4
Konkatenacja alfabetu mającego tylko puste słowo ze sobą samym:
Uwaga zbiór pusty $\emptyset \neq \{\epsilon\}$.
Np.: L = $\{\epsilon\}$ Odp: LL = $\{\epsilon\}\{\epsilon\} = \{\epsilon\}$

Przykład 5
Konkatenacja alfabetu posiadającego element pusty ze sobą samym:
Np.: L = $\{\epsilon, a, a^2, a^3, ...\} = \{a^n : n \geqslant 0\}$
Odp: LL = $\{a^n : n \geqslant 0\}\{a^n : n \geqslant 0\} = \{a^n : n \geqslant 0\}$

6.3 Potęga języka

Def. 6.4: N-ta potęga języka

N-tą potęgą języka **L** nazywać będziemy język L^n zdefiniowany indukcyjnie w następujący sposób:

(i) $L^0 = \epsilon$

(ii) $L^{n+1} = L^n L$

Zadanie:
Pokazać że: $L^1 = L$.

Konkatenacja zbiorów

Def. 6.5: Konkatenacje ze zbiorem pustym

Konkatenacja zbioru ze zbiorem pustym daje zbiór pusty:
$L\emptyset = \{P_1P_2 : P_1 \in L, P_2 \in \emptyset\} = \emptyset$

Def. 6.6: Konkatenacje ze zbiorem mającym tylko element pusty

Konkatenacja zbioru ze zbiorem mającym tylko element pusty:
$L\{\epsilon\} = \{P_1P_2 : P_1 \in L_1, P_2 \in \{\epsilon\}\} = \{P_1\epsilon : P_1 \in L\} = \{P_1 : P_1 \in L\} = L$

Zadanie:
Słowo **P** należy do trzeciej potęgi języka **L**, $P \in L^3$ wtedy i tylko wtedy gdy

$$P = P_1P_2P_3 : P_1, P_2, P_3 \in L$$

Rozwiązanie:
Niejednoznacze, bo P składa się z trzech słów, ale słowo P_n nie musi być jednoliterowe.

Przykładowo weźmy język L = $\{a^n : n \geqslant 0\}$
np.: $a^5 \in L^5$ czyli $P_1P2P3 \Leftrightarrow a * a * a^3$

$L^0 = \{\epsilon\}$
$L^1 = L = \{a\}$
$L^2 = \{a^2\}$
$L^3 = \{a^3\}$
$L^4 = \{a^4\}$
$L^5 = \{a^5\}$

Teraz dodajemy znak pusty ϵ do języka L:
L = $\{\epsilon, a\}$
$L^1 = L = \{\epsilon, a\}$
$L_2 = a^2, a$

——————- Na tym skończył się wykład 12.10.2019 ——————-