Notatki z wykładu Pani Sarenki

Języki formalne i złożoność obliczeniowa.

Na podstawie wykładu profesora Macieja Kandulskiego

semestr zimowy 2019/2020

Uniwersytet Adama Mickiewicza wydział Matematyki i Informatyki

Wykład 12.10.2019

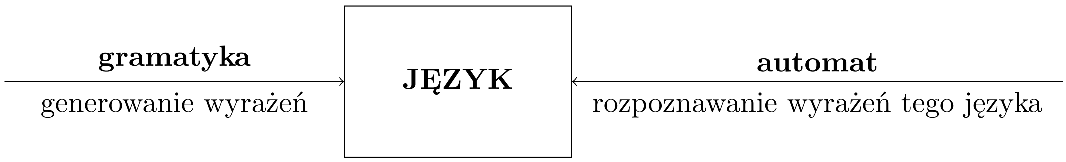
1 Złożoność obliczeniowa

Zagadnienia złożoności obliczeniowej - jakie sa koszty prowadzenia obliczeń czasowe i pamięciowe:

- Złożoność wykładnicza
- Nierozsądne gospodarowanie czasem
- Nierozsądne gospodarowanie pamięciową ...

2 Gramatyka

Gramatyka. *Jak poprawnie budować wyrażenia danego języka (zbiór zasad). Gramatyka inaczej jest nazywana syntaktyką albo składnią.*



Między innymi kompilator posiada w sobie element rozpoznający gramatykę.

3 Symbol a znaczenie symbolu

3.1 Abstrakcyjne pojęcie liczby

Warto odróżnić symbol od jego znaczenia. Np. liczbę dwa można zapisywac w postaci symoblu cyfry arabskiej **2** lub rzymskiej **II**. To samo dotyczy słowa **słoń** - słowo oznacza wielkie kilkutonowe zwierze ale nim nie jest (nie jest bytem materialnym).

Abstrahować. *Abstrachować znacyz pomijać. Np.: abstrakcyjna liczba dwa powstała z pominięciem takich cech jak wielkość, pochodzenie.*

3.2 Przykład powstania liczby

Różna materialne nośniki niosące te same liczby obiektów o różnych cechach.Opisanie wspólnej cechy obiektów - **liczebności** .

(i) **couple** of people (para ludzi - 2)

(ii) **pair** of pistols (para pistoletów - 2)

(iii) **yoke** of oxen (zaprzęg dwa zwierzęta)

Abstakcyjna liczba **2** powstała abstrahując od pochodzenia (np. zwierzęcia), wielkości (np. broni) czy płci (para ludzi) pozostawiając tylko jedną wspólną cechę, którą jest **liczebność** .

4 Języki formalne

4.1 Pojęcia

Ciągi i zbiory ciągów traktowane są jako obiekty materialne a **nie** abstrakycjne.
Skończoność - ważna cecha alfabetu/zbioru ponieważ tylko skończone zbiory danych można przechowywać w **fizycznym urządzeniu**.

Alfabet V. *Alfabet V to:* **dowolny** , **niepusty** , **skończony zbior znaków**
np.: V = {I} , V' = {a,b}.

Słowo nad alfabetem V. *Słowo nad alfabetem V to dowolny, skończony ciąg znkaów z V. np.:* **IIII** *(słowo nad alfabete V={I}) czy* **abba** *(słowo nad alfabetem V={a,b})*

Słowo puste ϵ. *Słowo puste ϵ - słowo o 0 (zerowym) wystąpieniu symboli. Uwaga! Spacja* **NIE** *jest słowem pustym.*

V*. *Zbiór wszsytkich słów nad alfabetem V. Łącznie z pustym słowem ϵ.*

V* \\{ϵ} = V+. *Zbiór wszsytkich niepustych słów. (ŁWyłączenie ze zbioru pustego słowa ϵ)*

Oznaczenie słów. *Słowa oznaczane są wielkimi literami z końca alfabetu łacińskiego, np.:* **P**,**Q**,**R**.

4.2 Operacja konkatenacji

Konkatenacja dwóch słów. *Konkatenacją dwóch słów* **P** *i* **Q** *nazywamy słowo* **PQ** *zdefiniowane w następujący sposób:*

(i) jeżeli **P**$=a_1, ..., a_n$ *gdzie* **a**$=b_1, ..., b_n$ *n,m $\geqslant$ 0 to* **PQ**$= a_1, ..., a_n b_1, ..., b_n$

(ii) Jeżeli **P**$=\epsilon$, *to* **PQ**$=Q$.
Alternatywnie to **Q**$=\epsilon$ *i wtedy* **PQ**$=P$.
Gdy **P**=**Q**$=\epsilon$ *to* **PQ=**$\epsilon\epsilon = \epsilon$.

Własności konkatenacji

- Konkatenacja jest działaniem łacznym w zbiorze słów
- Konkatenacja w ogólnoscie **NIE** jest przemienna (bywa przemienna dla tyh samych słów **ab ab**) lub jeśli alfabet skada sie tylko z jednego znaku np V = {a}
- ϵ słowo puste zachowje się jak element neutralny dla operacji konkatenacji: ϵP $\subset$ Pϵ = P.

4.3 Konkatenacja NIE jest grupą algebraiczną ♡

Pomimo abstrakcyjnego znaczenia liczb, ich mentalna reprezentacja jest jednak w urządzeniu czymś materialnym (stanami wysokich i niskich napięć).

V^* - zbiór wszystkich elementow (słów) nad alfabatem **V** (łącznie z elementem pustym ϵ)

$\circ$ - oznacza działanie w grupie

e - litera e jest symbolem elementu neutralnego

Przykład łączności: a) dodawanie np. : 2 + (3 + 5) = (2 + 3) + 5 b) mnożenie np.: 2 * (3 * 5) = (2 * 3) * 5

Konkatenacja jest grupą (z algebry) jeśli spełnia warunki na bycie grupą:

(i) operacja $\circ$ jest łączna w grupie;

(ii) $\exists e$, $\forall x$ Istnieje element neutralny dal każdego x, taki że $x \circ e = e \circ x = x$;

(iii) Dla każdego x $\forall x$ Istnieje element odwrotny $\exists x^{-1}$, taki, że $x \circ x^{-1} = x^{-1} \circ x = e$. Warunek nie spełniony przez konkatenację - nie istnieje w ogólności takie słowo gdzie: słowo + słowo^{-1} = ϵ (szczególny przypadek spełnienia to $\epsilon + \epsilon = \epsilon$, bo element neutralny jest sam do siebie odwrotny $\epsilon^{-1} = \epsilon$)
$\Rightarrow$ **WARUNEK NIE JEST W OGÓLNOŚCI SPEŁNIONY - konkatenacja NIE jest grupą!**

4.4 Podsłowo słowa

Zbiór **A** $\subset$ **A** i analogicznie **abca** $\sqsubset$ **abca** (Znak $\sqsubset$ to taka kanciasta inkluzja oznaczenie używane przy słowach)

Podsłowo. *Mówimy, że słowo* **Q** *jest podsłowem słowa* **P** *wtedy i tylko wtedy gdy, istnieją słowa Q_1 i Q_2 takie, że:*

$$P = Q_1\mathbf{Q}Q_2.$$

Np:. słowo **bc** *jest podsłowem słowa* **abcd**

$$\mathbf{a}\underbrace{bc}_{Q}\mathbf{d}$$

$$Q_1 \qquad\qquad\qquad Q_2$$

Widać, tutaj, zę Q to słowo **ab**, $Q_1 = a$, $Q_2 = d$

Prefix słowa. *Słowo Q jest prefixem słowa P jeśli $P = QQ_1$.*

Suffix słowa. *Słowo Q jest suffixem słowa P jeśli $P = Q_1Q$.*

Infix słowa. *Słowo Q jest infixem słowa P jeśli $P = Q_1QQ_2$ gdzie $Q_1 \neq \epsilon$ i gdzie $Q_2 \neq \epsilon$.*

4.5 Długość słowa

Długość słowa $\mid P \mid$. *Długością słowa $P \subset V^*$ nazywamy liczbę naturalną $\mid P \mid$ definiujemy w sposób indukcyjny:*

(i) $\mid \epsilon \mid = 0$

(ii) $\mid P\mathbf{a} \mid = \mid P \mid +1$*; gdzie P to ciąg (słowo) a* **a** *to symbol (dodatkowa litera w słowie).*

Przykład 1. Długość słowa **abc**
$\mid abc \mid = \mid ab \mid +1 = (\mid a \mid +1)+1 = (\mid \epsilon a \mid +1)+1 = ((\mid \epsilon \mid +1)+1)+1 = ((0+1)+1)+1 = 3$

Przykład 2. Obliczyć ilość wszystkich podsłów słowa **P** gdy dana jest długość słowa $\mid P \mid = 4$
Odp: **NIE WIĘCEJ NIŻ** 11.
Rozwiązanie a):
Weźmy dla przykładu słowo **abcd** .

Podsłowo **abcd** $\subset$ **abcd** - jedno podsłowo długości 4. (Słowo jest samo swoim podsłowem; kolejnosć znaków też ma znaczenie np słowo **bcda** $\not\subset$ **abcd**).

Podsłowa długości 3 (2 takie słowa) **abc** $\subset$ **abcd**, **bcd** $\subset$ **abcd**;
Podsłowa długości 3 (2 takie słowa) **ab** $\subset$ **abcd**, **bc** $\subset$ **abcd**, **cd** $\subset$ **abcd**;
Podsłowa długości 1 (4 takie słowa) **a** $\subset$ **abcd**, **b** $\subset$ **abcd**, **c** $\subset$ **abcd**, **d** $\subset$ **abcd**;
Odp a) Dla słowa **abcd** mamy (1+2+3+4) + 1(dodajemy jeden bo znak pusty ϵ)
Rozwiązanie b): Załóżmy, że szukamy wszystkich podsłów słowa P = **aaaa**. aaaa $\subset$ aaaa (1 podsłowo) aaa $\subset$ aaaa (1 podsłowo) aa $\subset$ aaaa (1 podsłowo) a $\subset$ aaaa (1 podsłowo)
Odp a) Dla słowa **aaaa** mamy (1+1+1+1) + 1(dodajemy jeden bo znak pusty ϵ), ponieważ **NIE ROZRÓŻNIAMY ZNAKÓW MIĘDZY SOBĄ tzn.: zawsze a == a** (nie rozróżniamy permutacji tych samych elementów)

Zadanie Domowe na ćwiczenia Napisać procedurę w pseudokodzie: Dla zadanego słowa długośc **n** napisac procedurę, które pokaże liczbę **k** podsłów oraz wypisze całą listę konkretnych podsłów.

4.6 Długość konktatenacji słów

Długość konktatenacji słów. $| PQ |=| P | + | Q |$

Dowód (indukcja matematyczna):

$\forall P, Q :| PQ |=| P | + | Q |$ *(Indukcja po długości* $| Q |$*)*

(i) $| Q |= \epsilon$
LewaStrona: $| PQ |=| P\epsilon |=| P |$
PrawaStrona: $| P | + | Q |=| P | + | \epsilon |=| P | +0 =| P | =$ **LewaStrona**
c.n.d (co należało dowieść)

(ii) $| PQ |=| P | + | Q |$
PrawaStrona: $| P(Qa) |=| P\epsilon |=| P |$

LewaStrona: $| P | + | Q |=| P | + | \epsilon |=| P | +0 =| P | =$ **LewaStrona**
c.n.d (co należało dowieść)

Brudnopis

$\heartsuit$

$\underbrace{wyr1}_{wyr2}, \overbrace{wyr1}^{wyr2}$

$\exists y \geqslant 0\ \forall x : x \leqslant y$

$\sqsupset$

~~abcd~~

Q Q2

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[d] \arrow[dr] \arrow[drr] & & \\
B & C & D
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}
A & \boxed{\sum_{i=n}^{m} i^2} & \\
& \bullet & D \arrow[ul]
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "a"] \arrow[d, "b"] & B \arrow[d, "c"] \\
C \arrow[r, "d"] & D
\end{tikzcd}$$

these guys **here** must be eliminated. The next one **here** too, of course.

$$\{\underbrace{x \in \mathbb{Z}}_{\text{Menge aller } x \text{ aus } \mathbb{Z}} \overbrace{\mid}^{\text{mit der Eigenschaft}} -1 \leqslant x \leqslant 2\}$$

And I want to get it like this:

$$\{x \in \mathbb{Z} \mid\ -1 \leqslant x \leqslant 2\},$$

where the `\overbrace` doesn't wait till the `\underbrace` is going to have the work done.