Notatki z wykładu Pani Sarenki

Języki formalne i złożoność obliczeniowa.

Na podstawie wykładu profesora Macieja Kandulskiego

semestr zimowy 2019/2020

Uniwersytet Adama Mickiewicza wydział Matematyki i Informatyki

Wykład 12.10.2019

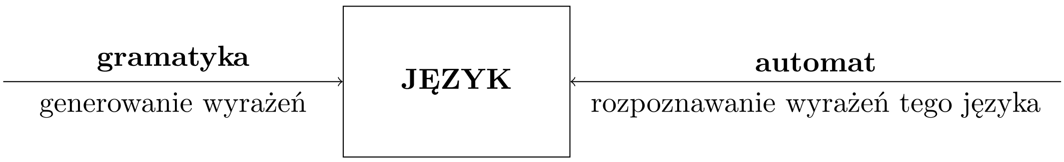
1 Złożoność obliczeniowa

Zagadnienia złożoności obliczeniowej - jakie sa koszty prowadzenia obliczeń czasowe i pamięciowe:

- Złożoność wykładnicza
- Nierozsądne gospodarowanie czasem
- Nierozsądne gospodarowanie pamięciową ...

2 Gramatyka

Gramatyka. *Jak poprawnie budować wyrażenia danego języka (zbiór zasad). Gramatyka inaczej jest nazywana syntaktyką albo składnią.*



Między innymi kompilator posiada w sobie element rozpoznający gramatykę.

3 Symbol a znaczenie symbolu

3.1 Abstrakcyjne pojęcie liczby

Warto odróżnić symbol od jego znaczenia. Np. liczbę dwa można zapisywac w postaci symoblu cyfry arabskiej **2** lub rzymskiej **II**. To samo dotyczy słowa **słoń** - słowo oznacza wielkie kilkutonowe zwierze ale nim nie jest (nie jest bytem materialnym).

Abstrahować. *Abstrachować znacyz pomijać. Np.: abstrakcyjna liczba dwa powstała z pominięciem takich cech jak wielkość, pochodzenie.*

3.2 Przykład powstania liczby

Różna materialne nośniki niosące te same liczby obiektów o różnych cechach.Opisanie wspólnej cechy obiektów - **liczebności** .

(i) **couple** of people (para ludzi - 2)

(ii) **pair** of pistols (para pistoletów - 2)

(iii) **yoke** of oxen (zaprzęg dwa zwierzęta)

Abstakcyjna liczba **2** powstała abstrahując od pochodzenia (np. zwierzęcia), wielkości (np. broni) czy płci (para ludzi) pozostawiając tylko jedną wspólną cechę, którą jest **liczebność** .

4 Języki formalne

4.1 Pojęcia

Ciągi i zbiory ciągów traktowane są jako obiekty materialne a **nie** abstrakycjne.
Skończoność - ważna cecha alfabetu/zbioru ponieważ tylko skończone zbiory danych można przechowywać w **fizycznym urządzeniu**.

Alfabet V. *Alfabet V to:* **dowolny** *,* **niepusty** *,* **skończony zbior znaków**
np.: V = {I} , V' = {a,b}.

Słowo nad alfabetem V. *Słowo nad alfabetem V to dowolny, skończony ciąg znkaów z V. np.:* **IIII** *(słowo nad alfabete V={I}) czy* **abba** *(słowo nad alfabetem V={a,b})*

Słowo puste ϵ. *Słowo puste ϵ - słowo o 0 (zerowym) wystąpieniu symboli. Uwaga! Spacja* **NIE** *jest słowem pustym.*

V*. *Zbiór wszsytkich słów nad alfabetem V. Łącznie z pustym słowem ϵ.*

V* $\backslash\{\epsilon\}$ = V+. *Zbiór wszsytkich niepustych słów. (Wyłączenie ze zbioru pustego słowa ϵ)*

Oznaczenie słów. *Słowa oznaczane są wielkimi literami z końca alfabetu łacińskiego, np.:* **P**,**Q**,**R**.

5 Konkatenacja

5.1 Operacja konkatenacji

Konkatenacja dwóch słów. *Konkatenacją dwóch słów* **P** *i* **Q** *nazywamy słowo* **PQ** *zdefiniowane w następujący sposób:*

(i) *jeżeli* **P**$=a_1, ..., a_n$ *gdzie* **a**$=b_1, ..., b_n$ *n,m* $\geqslant$ *0 to* **PQ**$= a_1, ..., a_n b_1, ..., b_n$

(ii) *Jeżeli* **P**$=\epsilon$, *to* **PQ**$=Q$.
Alternatywnie to **Q**$=\epsilon$ *i wtedy* **PQ**$=P$.
Gdy **P**$=$**Q**$=\epsilon$ *to* **PQ**$=\epsilon\epsilon = \epsilon$.

Własności konkatenacji

- Konkatenacja jest działaniem łacznym w zbiorze słów
- Konkatenacja w ogólnoście **NIE** jest przemienna (bywa przemienna dla tyh samych słów **ab ab**) lub jeśli alfabet skada sie tylko z jednego znaku np V = {a}
- ϵ słowo puste zachowje się jak element neutralny dla operacji konkatenacji:
  ϵP $\subset$ Pϵ = P.

5.2 Konkatenacja NIE jest grupą algebraiczną ♡

Pomimo abstrakcyjnego znaczenia liczb, ich mentalna reprezentacja jest jednak w urządzeniu czymś materialnym (stanami wysokich i niskich napięć).
V^* - zbiór wszystkich elementow (słów) nad alfabatem **V** (łącznie z elementem pustym ϵ)
$\circ$ - oznacza działanie w grupie
e - litera e jest symbolem elementu neutralnego

Przykład łączności: a) dodawanie np. : 2 + (3 + 5) = (2 + 3) + 5 b) mnożenie np.: 2 * (3 * 5) = (2 * 3) * 5
Konkatenacja jest grupą (z algebry) jeśli spełnia warunki na bycie grupą:

(i) operacja $\circ$ jest łączna w grupie;

(ii) $\exists e$, $\forall x$ Istnieje element neutralny dal każdego x, taki że $x \circ e = e \circ x = x$;

(iii) Dla każdego x $\forall x$ Istnieje element odwrotny $\exists x^{-1}$, taki, że $x \circ x^{-1} = x^{-1} \circ x = e$.
Warunek nie spełniony przez konkatenację - nie istnieje w ogólności takie słowo gdzie: słowo + słowo^{-1} = ϵ (szczególny przypadek spełnienia to ϵ + ϵ = ϵ, bo element neutralny jest sam do siebie odwrotny $\epsilon^{-1} = \epsilon$)
$\Rightarrow$ **WARUNEK NIE JEST W OGÓLNOŚCI SPEŁNIONY - konkatenacja NIE jest grupą!**

5.3 Podsłowo słowa

Zbiór $\mathbf{A} \subset \mathbf{A}$ i analogicznie **abca** $\sqsubset$ **abca** (Znak $\sqsubset$ to taka kanciasta inkluzja oznaczenie używane przy słowach)

Podsłowo. *Mówimy, że słowo* **Q** *jest podsłowem słowa* **P** *wtedy i tylko wtedy gdy, istnieją słowa* Q_1 *i* Q_2 *takie, że:*

$$P = Q_1 \mathbf{Q} Q_2.$$

Np:. słowo **bc** *jest podsłowem słowa* **abcd**

$$\mathbf{a}\underbrace{bc}_{Q}\mathbf{d}$$

$$Q_1 \qquad\qquad\qquad\qquad Q_2$$

Widać, tutaj, zę Q *to słowo* **ab**, $Q_1 = a$, $Q_2 = d$

Prefix słowa. *Słowo* Q *jest prefixem słowa* P *jeśli* $P = QQ_1$.

Suffix słowa. *Słowo* Q *jest suffixem słowa* P *jeśli* $P = Q_1Q$.

Infix słowa. *Słowo* Q *jest infixem słowa* P *jeśli* $P = Q_1QQ_2$
gdzie $Q_1 \neq \epsilon$ *i gdzie* $Q_2 \neq \epsilon$.

5.4 Długość słowa

Długość słowa $\mid P \mid$. *Długością słowa* $P \subset V^*$ *nazywamy liczbę naturalną* $\mid P \mid$ *definiujemy w sposób indukcyjny:*

(i) $\mid \epsilon \mid = 0$

(ii) $\mid P\mathbf{a} \mid = \mid P \mid +1$; *gdzie* P *to ciąg (słowo) a* **a** *to symbol (dodatkowa litera w słowie).*

Przykład 1. Długość słowa **abc**
$\mid abc \mid = \mid ab \mid +1 = (\mid a \mid +1)+1 = (\mid \epsilon a \mid +1)+1 = ((\mid \epsilon \mid +1)+1)+1 = ((0+1)+1)+1 = 3$

Przykład 2. Obliczyć ilość wszystkich podsłów słowa **P** gdy dana jest długość słowa $\mid P \mid = 4$
Odp: **NIE WIĘCEJ NIŻ** 11.
Rozwiązanie a):
Weźmy dla przykładu słowo **abcd** .

Podsłowo **abcd** $\subset$ **abcd** - jedno podsłowo długości 4. (Słowo jest samo swoim podsłowem; kolejnosć znaków też ma znaczenie np słowo **bcda** $\not\subset$ **abcd**).

Podsłowa długości 3 (2 takie słowa) **abc** $\subset$ **abcd**, **bcd** $\subset$ **abcd**;
Podsłowa długości 3 (2 takie słowa) **ab** $\subset$ **abcd**, **bc** $\subset$ **abcd**, **cd** $\subset$ **abcd**;

Podsłowa długości 1 (4 takie słowa) **a** $\subset$ **abcd**, **b** $\subset$ **abcd**, **c** $\subset$ **abcd**, **d** $\subset$ **abcd**;

Odp a) Dla słowa **abcd** mamy (1+2+3+4) + 1(dodajemy jeden bo znak pusty ϵ)

Rozwiązanie b): Załóżmy, że szukamy wszystkich podsłów słowa P = **aaaa**. aaaa $\subset$ aaaa (1 podsłowo) aaa $\subset$ aaaa (1 podsłowo) aa $\subset$ aaaa (1 podsłowo) a $\subset$ aaaa (1 podsłowo)

Odp a) Dla słowa **aaaa** mamy (1+1+1+1) + 1(dodajemy jeden bo znak pusty ϵ), ponieważ **NIE ROZRÓŻNIAMY ZNAKÓW MIĘDZY SOBĄ tzn.: zawsze a == a** (nie rozróżniamy permutacji tych samych elementów)

Zadanie Domowe 12.10.2019

Napisać procedurę w pseudokodzie: Dla zadanego słowa długośc **n** napisac procedurę, które pokaże liczbę **k** podsłów oraz wypisze całą listę konkretnych podsłów.

```
Tu bedzie rozwiazanie:
    if (n == 0 || n == 1){
      return n;
    }
    j = 0;
    for (i = 0; i < n-1; i++){
      if (arr[i] != arr[i+1]){
        arr[j] = arr[i];
        j++;
      }
    }
    arr[j++] = arr[n-1];
```

5.5 Długość konkatenacji słów

Długość konktatenacji słów. $\mid PQ \mid = \mid P \mid + \mid Q \mid$

Dowód (indukcja matematyczna):

$\forall P, Q : \mid PQ \mid = \mid P \mid + \mid Q \mid$ *(Indukcja po długości* $\mid Q \mid$*)*

(i) $\mid Q \mid = \epsilon$

LewaStrona: $\mid PQ \mid = \mid P\epsilon \mid = \mid P \mid$ *gdzie* $k \leqslant n$

PrawaStrona: $\mid P \mid + \mid Q \mid = \mid P \mid + \mid \epsilon \mid = \mid P \mid + 0 = \mid P \mid =$ **LewaStrona** *c.d.n*

(ii) λ*:* $\mid PQ \mid = \mid P \mid + \mid Q \mid$

PrawaStrona: $\mid P(Qa) \mid = \mid P \mid + \mid Qa \mid$ *gdzie n=0*

LewaStrona: $\mid P(Qa) \mid \overset{\text{jeżeli}}{=} \mid (PQ)a \mid \overset{\text{ii}}{=} \mid PQ \mid + 1 \overset{\lambda}{=}$

$(\mid P \mid + \mid Q \mid) + 1 = \mid P \mid + (\mid Q \mid + 1) = \mid P \mid + \mid Qa \mid$,..., = **PrawaStrona** *c.n.d*

5.6 N-ta potęga słowa

Przykład potęgowania liczb: $\underbrace{7*7*...*7}_{n-razy} = 7^n$

Potęgowanie słów: **abcabcabc** $= (abc)^3 /neqa^3b^3c^3$

N-ta potęga liczby. *Potęgowanie liczb - widać że pierwszy warunek $a^0 = 1$ jest stworzony przez matematyków, niejako sztucznie ale jest to wymagane dla prawdiłowości działania indukcji matematycznej; a w praktyce jest to często warunek zatrzymania funkcji obliczającej np. silnie iteracyjnie czy rekurencyjnie.*

(i) $a^0 = 1$

(ii) $a^{n+1} = a^{0+1} = a^0 * a$

Podobnie jak liczby potęguje się też słowa, ale ze względu na swoją specyfikę kolejność znaków w słowie podczas mnożenia ma znaczenie!

N-ta potęga słowa. *N-tą potęgą słowa **P**, oznaczamy P^n, nazywamy słowo zdefiniowane indukcyjnie w następujący sposób:*

(i) $P^0 = \epsilon$

(ii) $P^{n+1} = P^nP$

Dowód: $\underbrace{P^1} = P^{0+1} \overset{\text{ii}}{=} P^0 \underbrace{P}$

Przykład:
$a^3(ba)^2 = aaababa$
$(abc)^3 \neq a^3b^3c^3$

5.7 Operacja Odbicia zwierciadlanego (rewers) słowa P

Przykład:
$(abc)^{-1}$ = cba

Odbicie zwierciadlane słowa P. *Odbicie zwierciadlane słowa **P**, oznaczamy przez P^{-1} (P prim)i definiujemy je indukcyjnie po $\mid P \mid'$ w następujący sposób:*

(i) $\epsilon^{-1} = \epsilon$

(ii) $(Pa)^{-1} = aP^{-1}$ *//odwróciliśmy a teraz odwracamy resztę słowa **P***

5.8 Własności konkatenacji

Rewers Konkatenacji (odbicie zwierciadlane)

$(PQ)^{-1} = Q^{-1}P^{-1}$

Rewers N-tej potęgi konkatenacji

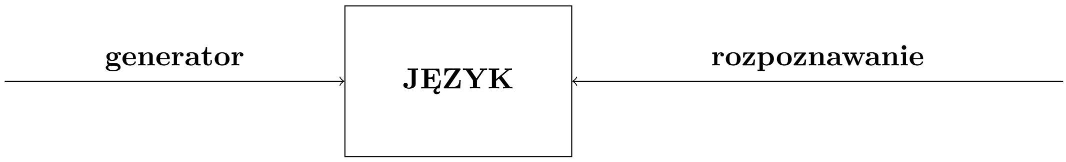
$(P^n)^{-1} = (P^{-1})^n$ np.: $((abc)^3)^{-1} = (cba)^3$

Złożenia odbić zwierciadlanych konkatenacji

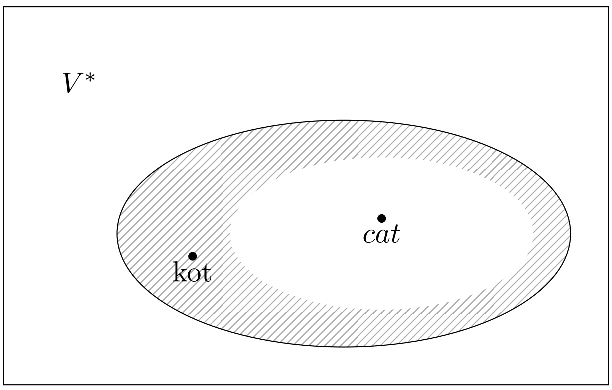
$(P^{-1})^{-1} = P$ //odbicia znoszą się

6 Język

Uwaga - alfabet V $\not\Leftrightarrow$ język.
Należy takze pamiętać, że: V^* - zbiór wszystkich elementow (słów) nad alfabatem **V** (łącznie z elementem pustym ϵ)



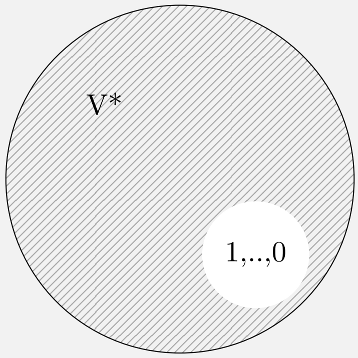
Przykładowo mamy **język angielski** składający się z małych liter **V={a,b,...z}** Słowo **cat** należy do tego języka tzn.: **cat** $\subset$ **jezykAngielki**;
a słowo **kot** chociaż jego znaki należą do alfabetu **V** to jednak słowo **"kot"** nie należy do **języka angielkiego** tzn.: **kot** $\not\subset$ **językAngielski**.



Język. *Językiem nad alfabetem **V** nazywamy dowolny podzbiór zbioru wszystkich słów nad **V** tj.:*

$$L \subset V^*$$

Przykład
Dany jest alfabet binary V={0,1}, czyli, żeby zaprezenetować wszystie liczby parzyste większe od 0 nalezy na ostatnim bicie umieścić cyfrę 0.

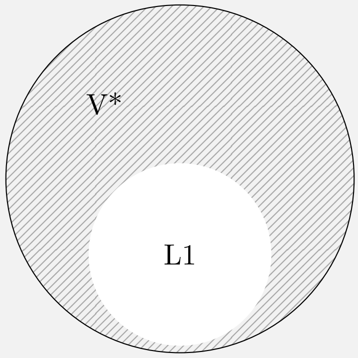


6.1 Język jako zbiór - własności

Jako obiekt język to zbiór → dziedziczy wszystkie własności zbioru:

- A ⊂ A
- $V^* \subset V^*$
- Ø ⊂ A
- Ø ⊂ V^*

Przykład



Przykładowe operacje

- $L_1, L_2 \subset V^*$
- $L_1 \cup L_2$
- $L_1 \cap L_2$
- $L_1 \setminus L2$
- $\overline{L_1} = V^* \setminus L_1$

6.2 Konkatenacja języków

Konkatenacja języków. *Dla języków L_1 i L_2 przez konkatenację tych języków, oznaczoną L_1L_2 rozumiemy zbiór:=*

$$L_1L_2 = \{P_1P2 : P_1 \in L_1, P_2 \in L_2\}$$

Przykład 1
Mając języki $L_1 = \{a, ab, \epsilon\}$, $L_2 = \{b, ab, ba\}$.
Ile możemy utworzyć słów poprzez konkatenację języków L_1 i L_2?
Odp: Maksymalnie 9.
Rozwiązanie (najlepiej takie rzeczy robić tabelką):

L_1 \ L_2	b	ab	ba
a	ab	a^2b	ba^2
ab	ab^2	$(ab)^2$	ab^2a
ϵ	b	ab	ba

Tabelka jest idealnym sposobem liczenia konkatenacji języków.
Uwaga przy konkatenacji trzeba uważać, cyz pytanie dotyczyło wszystkich mozliwych kombinacji(wtedy liczymy z powtórzeniami), czy tylko unikatowych słów.

Przykład 2
Mając języki:
$L_1 = \{\epsilon, a, a^2, a^3, a^4, ...\} = a^n : n \geqslant 0$
$L_2 = \{\epsilon, b, b^2, b^3, b^4, ...\} = b^n : n \geqslant 0$

Odp: $L_1L_2 = \{a^nb^m : n, m \geqslant 0\}$ // n,m $\geqslant$ 0 bo dopuszczamy $\epsilon * \epsilon rwny 0$

Brudnopis

$\heartsuit$

$\underbrace{wyr1}_{wyr2}, \overbrace{wyr1}^{wyr2}$

$\exists y \geqslant 0\ \forall x : x \leqslant y$

$\sqsupset$

~~abcd~~

Q Q2

\begin{tikzcd}
A \arrow[d] \arrow[dr] \arrow[drr] & & \\
B & C & D
\end{tikzcd}

$A \quad \boxed{\sum_{i=n}^{m} i^2} \longleftarrow D$

$\bullet$

\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "a"] \arrow[d, "b"] & B \arrow[d, "c"] \\
C \arrow[r, "d"] & D
\end{tikzcd}

these guys **here** must be eliminated. The next one **here** too, of course.

$\{\underbrace{x \in \mathbb{Z}}_{\text{Menge aller } x \text{ aus } \mathbb{Z}} \overset{\text{mit der Eigenschaft}}{\mid} -1 \leqslant x \leqslant 2\}$

And I want to get it like this:

$$\{x \in \mathbb{Z} \mid\ -1 \leqslant x \leqslant 2\},$$

where the `\overbrace` doesn't wait till the `\underbrace` is going to have the work done.