



第九章 操作臂的轨迹控制



主讲：杨吉祥

电话：18871479469

邮箱：jixiangyang@hust.edu.cn

办公室：先进制造大楼东楼D215

运动轨迹



Automatic Shape Tracking Grinder
A K Grinder

操作臂的轨迹控制

策略一：开环控制

不实用

直接利用第七章所建立的操作臂动力学方程计算该运动轨迹所需的力矩（或力）。由于设定值 q_d 、 \dot{q}_d 和 \ddot{q}_d 已经给定，计算出：

$$\tau = D(q_d)\ddot{q}_d + H(q_d, \dot{q}_d) + G(q_d)$$

理想条件：模型必须十分完善和绝对准确，没有噪声和干扰。

构造高性能控制系统的唯一方法是使用反馈控制，即：

策略二：闭环系统

由关节传感器组成闭环系统

系统的伺服误差包括两部分：位置误差 $e = q_d - q$ 和速度误差 $\dot{e} = \dot{q}_d - \dot{q}$ 。然后，控制系统计算驱动器输出的力矩大小，它是伺服误差的函数。驱动器的力矩有使伺服误差减小的趋势。

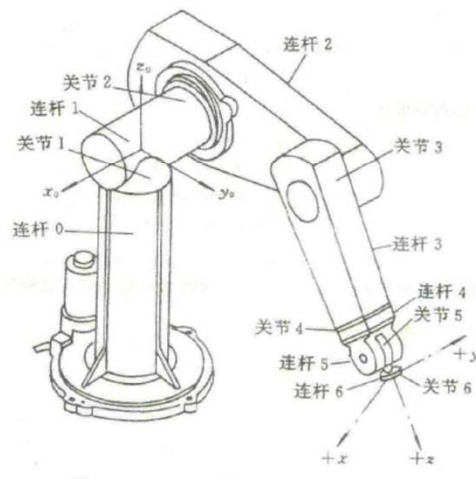
设计控制系统的首要任务是使系统稳定，第二个任务是使系统的闭环性能令人满意。

本章内容

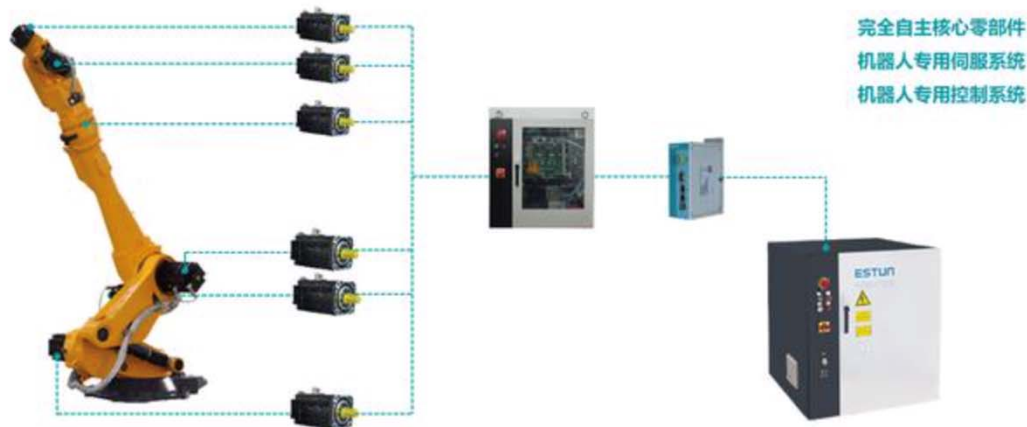


- 9.1 操作臂的单关节传递函数及PD控制
- 9.2 二阶线性系统控制器的分解
- 9.3 基于直角坐标的控制
- 9.4 本章学习小结

9.1 操作臂的单关节传递函数及PD控制



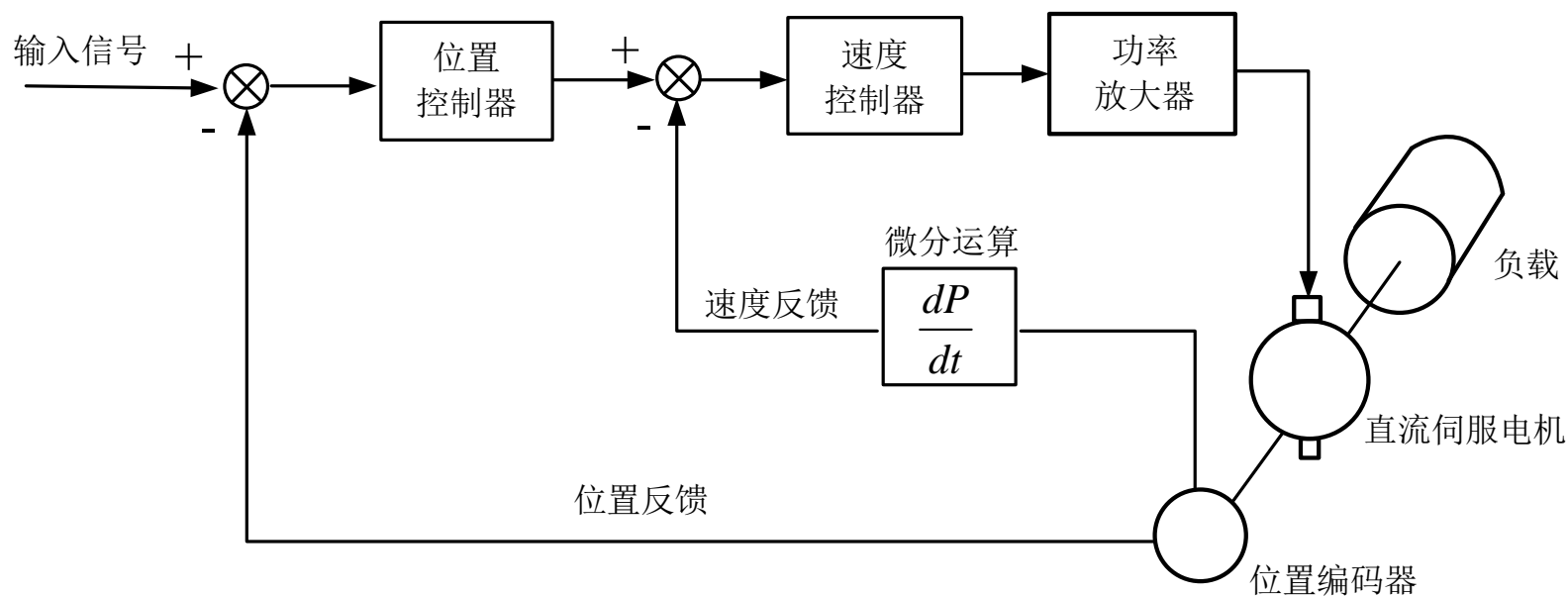
操作臂实际上是由一系列刚体通过**关节**连接而成的运动链



每个关节由一个单独的**驱动器（电机）**施加力和力矩

9.1.1 数学模型、单关节的传递函数

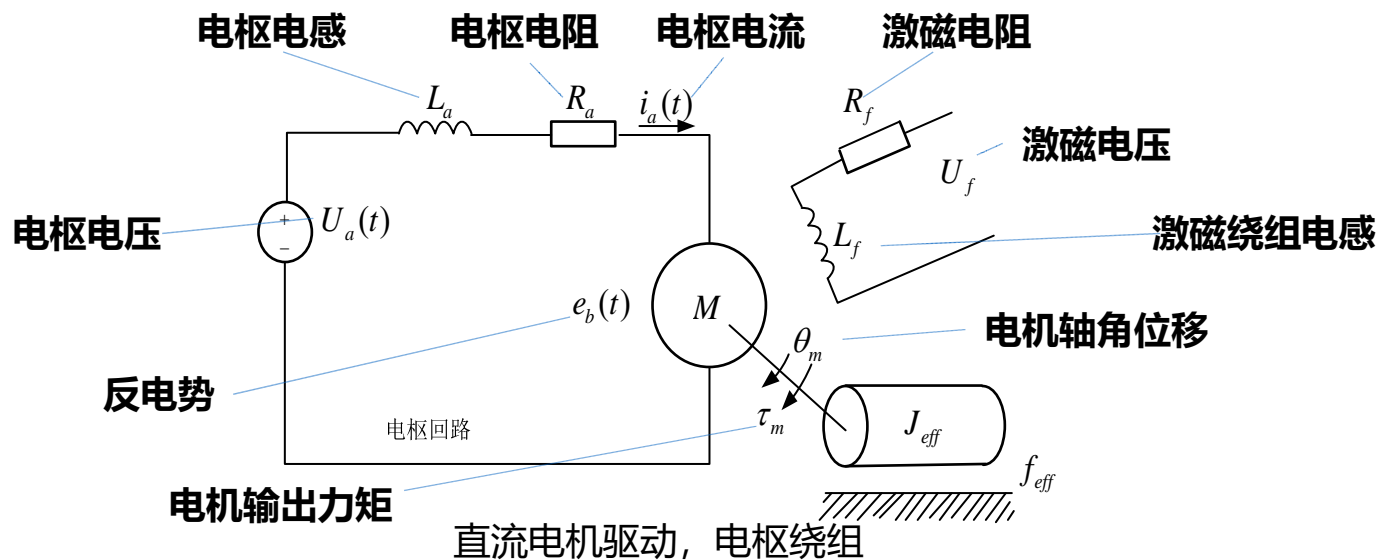
□ 最常见的驱动方式是每个关节用一个直流（DC）永磁力矩电机驱动。



直流电机驱动原理图

特点：力矩—功率比高，性能曲线平滑，可低速运转，力矩—速度特性是线性的，时间常数小。

9.1.1 数学模型、单关节的传递函数

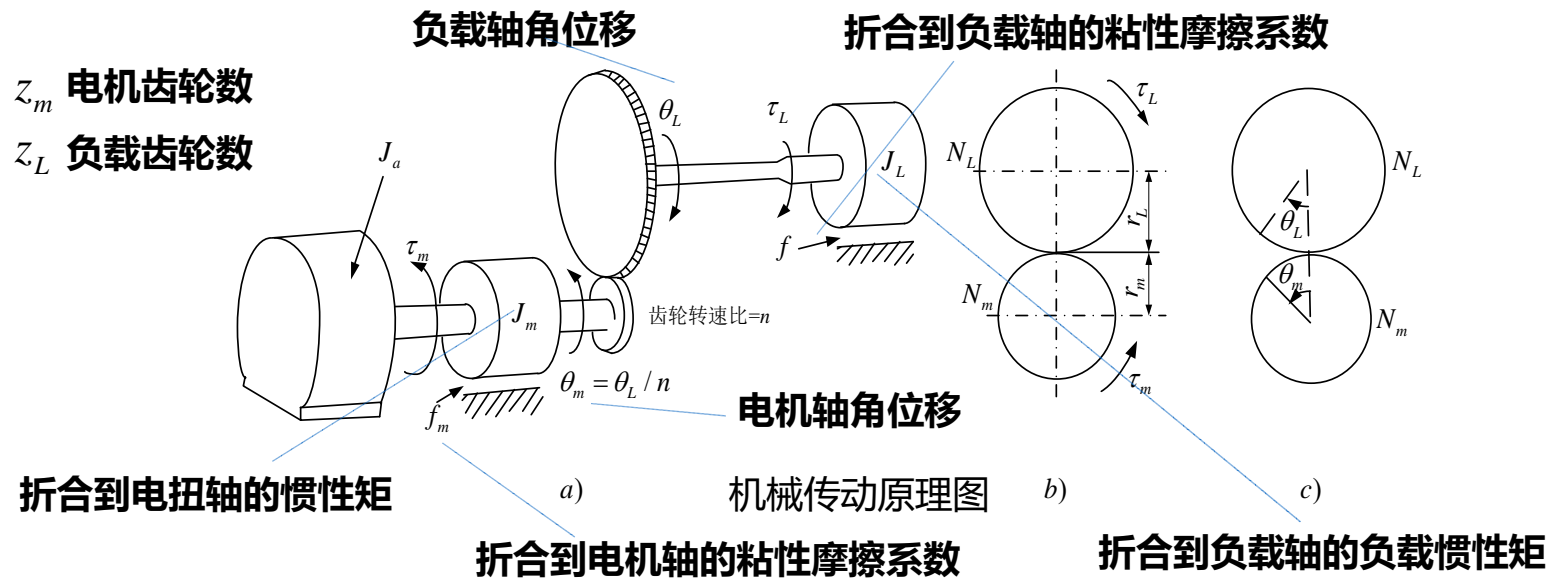


□ **电压平衡方程:** $U_a(t) = R_a i_a(t) + L_a \frac{di_a(t)}{dt} + e_b(t)$

□ **电机轴上产生的力矩随电枢电流线性变化** $\tau(t) = k_a i_a(t)$

□ **电机的反电动势与电机的角速度成正比** $e_b(t) = k_b \dot{\theta}_m(t)$

9.1.1 数学模型、单关节的传递函数



□ 力矩平衡方程: $\tau(t) = J_{eff} \ddot{\theta}_m + f_{eff} \dot{\theta}_m$

□ 从电机轴到负载轴的传动比: $n = z_m / z_L$

□ 折合到电机轴上的总的等效惯性矩 J_{eff} 和等效粘性摩擦系数 f_{eff} 为: $J_{eff} = J_m + n^2 J_L$, $f_{eff} = f_m + n^2 f_L$

9.1.1 数学模型、单关节的传递函数

例：如果操作臂负载惯性矩 J_L 在 $2 \sim 8 \text{kg} \cdot \text{m}^2$ 之间变化，电机轴惯性矩

$J_m = 0.01 \text{kg} \cdot \text{m}^2$ ，减速比 $n = \frac{1}{40}$ ，求等效惯性矩的最大值和最小值。

求等效惯性矩的最大值和最小值。

解答：

等效惯性矩的最小值为

$$J_m + n^2 J_{L\min} = \left(0.01 + \frac{1}{40^2} \times 2 \right) \text{kg} \cdot \text{m}^2 = 0.01125 \text{kg} \cdot \text{m}^2$$

最大值为

$$J_m + n^2 J_{L\max} = \left(0.01 + \frac{1}{40^2} \times 8 \right) \text{kg} \cdot \text{m}^2 = 0.015 \text{kg} \cdot \text{m}^2$$

相对于负载惯性矩的变形率，减速器使则算到电机轴的等效惯性矩变化率减小了。

9.1.1 数学模型、单关节的传递函数

□ 对以上公式进行拉普拉斯变换得：
$$I_a(s) = \frac{U_a(s) - U_b(s)}{R_a + sL_a}$$

$$T(s) = s^2 J_{eff} \Theta_m(s) + s f_{eff} \Theta_m(s)$$

$$T(s) = k_a I_a(s), \quad U_b(s) = s k_b \Theta_m(s)$$

□ 将上面四式联立组合，得到从电枢电压到电机辐角位移的传递函数：

$$\frac{\Theta_m(s)}{U_a(s)} = \frac{k_a}{s[s^2 J_{eff} L_a + (L_a f_{eff} + R_a J_{eff})s + R_a J_{eff} + k_a k_b]}$$

□ 由于电机的电气时间常数远小于其机械时间常数，可以忽略电枢的电感。简化得到：

$$\frac{\Theta_m(s)}{U_a(s)} = \frac{k_a}{s(s R_a J_{eff} + R_a f_{eff} + k_a k_b)} = \frac{k}{s(T_m s + 1)}$$

其中，电机增益常数和机械时间常数分别为：

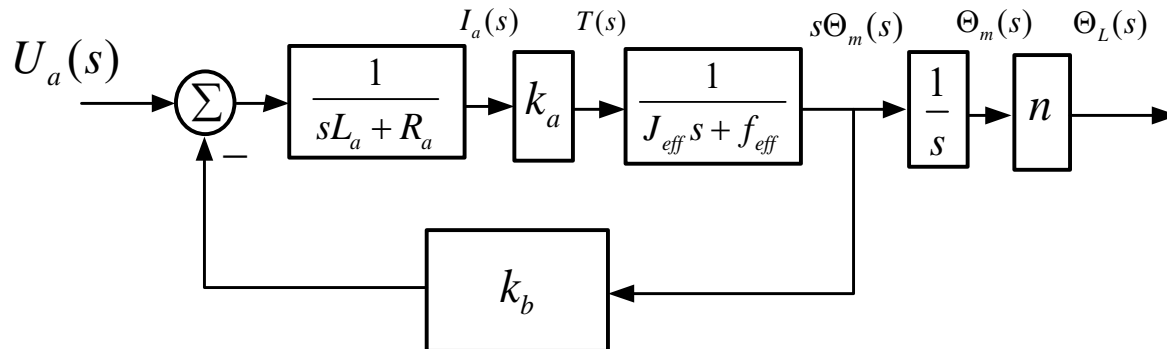
$$k = \frac{k_a}{R_a f_{eff} + k_a k_b}, \quad T_m = \frac{R_a J_{eff}}{R_a f_{eff} + k_a k_b}$$

9.1.1 数学模型、单关节的传递函数

□ 由于控制系统的输出是关节角位移 $\Theta_L(s)$ ，其与电枢电压 $U_a(s)$ 之间的传递关系为：

$$\frac{\Theta_L(s)}{U_a(s)} = \frac{nk_a}{s(sR_aJ_{eff} + R_af_{eff} + k_ak_b)}$$

该式表示所加电压与关节角位移之间的传递函数



单关节开环传递函数

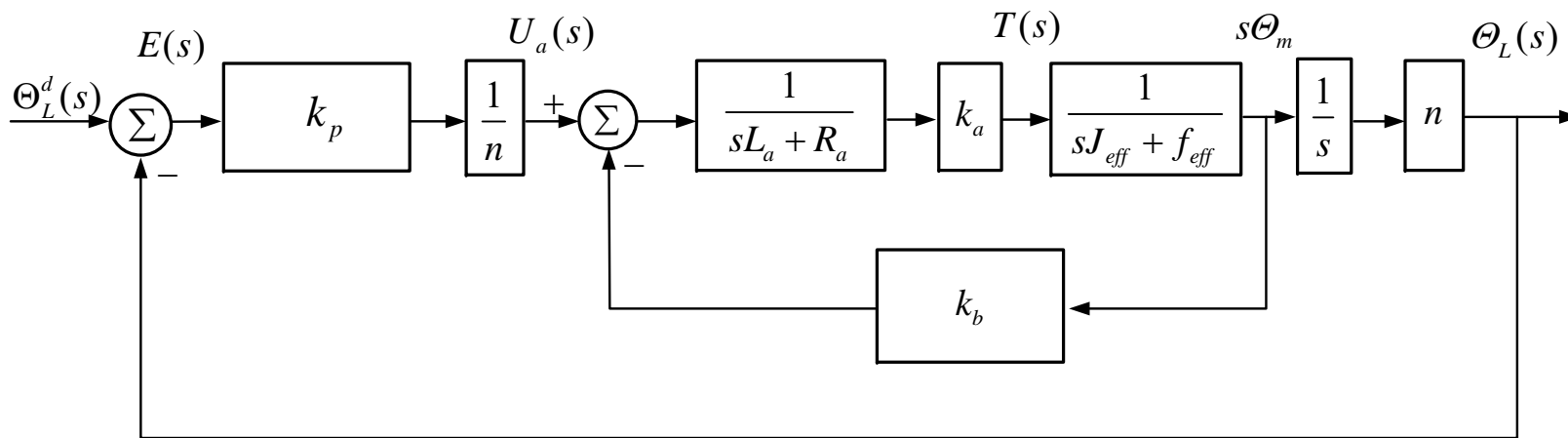
9.1.2 单关节的位置控制器

作用：利用电机组成的伺服系统使关节的实际角位移跟踪预期的角位移，把伺服误差作为电机的输入信号，产生适当的电压

$$U_a(t) = \frac{k_p e(t)}{n} = \frac{k_p (\theta_L^d(t) - \theta_L(t))}{n}$$

k_p 是位置反馈增益, $e(t)$ 是系统误差, n 是传动比。

单关节反馈控制如下：



9.1.2 单关节的位置控制器

□ 对 $U_a(t)$ 表达式进行拉普拉斯变换得：

$$U_a(s) = \frac{k_p (\theta_L^d(s) - \theta_L(s))}{n} = \frac{k_p E(s)}{n}$$

□ 误差信号与实际位移之间的开环传递函数：

$$G(s) = \frac{\theta_L(s)}{E(s)} = \frac{k_a k_p}{s(sR_a J_{eff} + R_a f_{eff} + k_a k_b)}$$

□ 由此可得系统的闭环传递函数：

$$\begin{aligned} \frac{\theta_L(s)}{\theta_L^d(s)} &= \frac{G(s)}{1 + G(s)} = \frac{k_a k_p}{s^2 R_a J_{eff} + s(R_a f_{eff} + k_a k_b) + k_a k_p} \\ &= \frac{\frac{k_a k_p}{R_a J_{eff}}}{s^2 + \frac{s(R_a f_{eff} + k_a k_b)}{R_a J_{eff}} + \frac{k_a k_p}{R_a J_{eff}}} \end{aligned}$$

单关节的比例控制闭环系统是个二阶系统。当系统参数均为正时，总是稳定的。

9.1.2 单关节的位置控制器



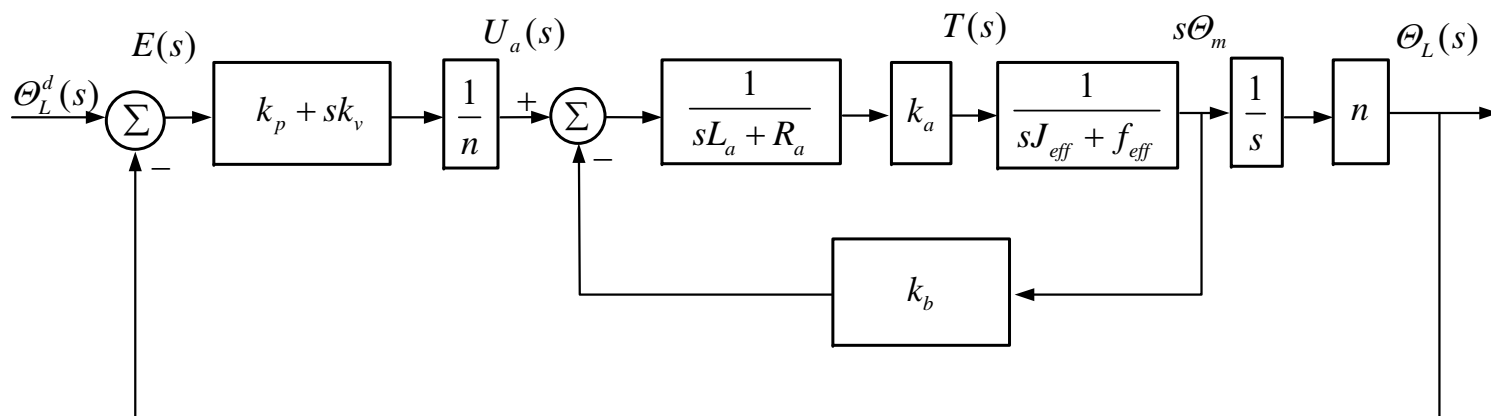
加大位置反馈增益 (k_p)
引入速度反馈增益 (k_v)

为了改善系统的动态性能，减少静态误差

- 关节电机上所加的电压与位置误差和速度误差成正比：

$$U_a(t) = \frac{k_p e(t) + k_v \dot{e}(t)}{n} = \frac{k_p (\theta_L^d(t) - \theta_L(t)) + k_v (\dot{\theta}_L^d(t) - \dot{\theta}_L(t))}{n}$$

- 对应的闭环系统框图如下：



9.1.2 单关节的位置控制器

□ 此时，误差信号与实际位移之间的开环传递函数为：

$$G_{PD}(s) = \frac{\theta_L(s)}{E(s)} = \frac{k_a(k_p + sk_v)}{s(sR_aJ_{eff} + R_a f_{eff} + k_a k_b)} = \frac{sk_a k_v + k_a k_p}{s(sR_aJ_{eff} + R_a f_{eff} + k_a k_b)}$$

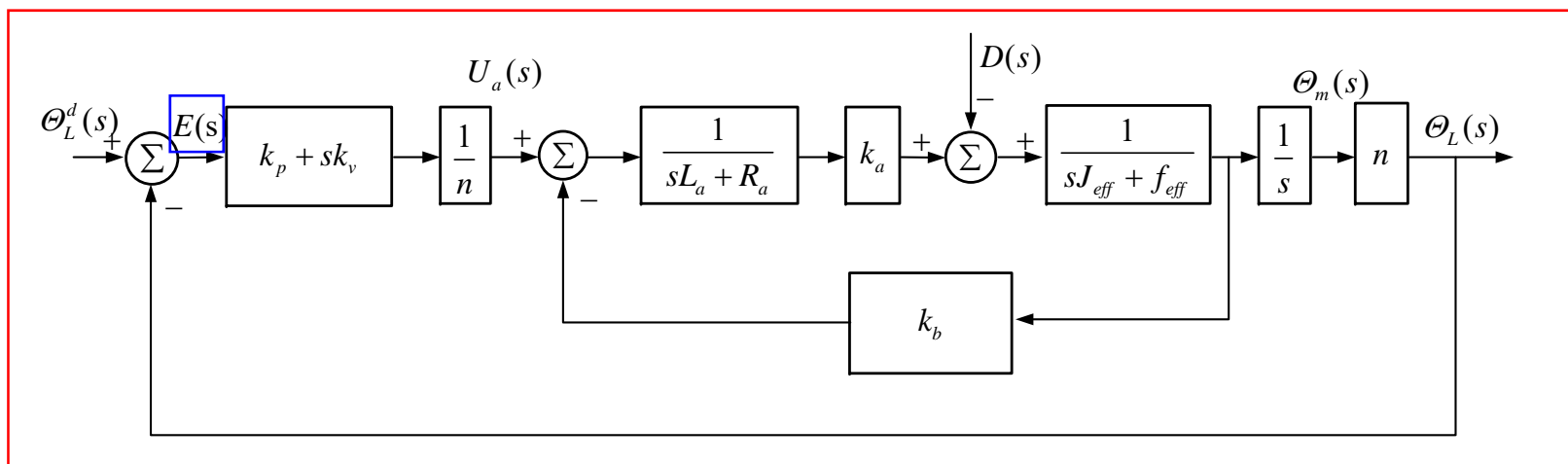
□ 由此可得系统的闭环传递函数：

$$\frac{\theta_L(s)}{\theta_L^d(s)} = \frac{G_{PD}(s)}{1 + G_{PD}(s)} = \frac{sk_a k_v + k_a k_p}{s^2 R_a J_{eff} + s(R_a f_{eff} + k_a k_b + k_a k_v) + k_a k_p}$$

□ 当 $k_v = 0$ 时，上式可简化为：

$$\frac{\theta_L(s)}{\theta_L^d(s)} = \frac{G_{PD}(s)}{1 + G_{PD}(s)} = \frac{k_a k_p}{s^2 R_a J_{eff} + s(R_a f_{eff} + k_a k_b) + k_a k_p}$$

9.1.2 单关节的位置控制器



带干扰的反馈控制框图

如上图，操作臂控制系统还要受到**扰动** $D(s)$ 的影响，电机轴的输出力矩的一部分必须用于克服各种扰动力矩，由式得：

$$T(s) = (s^2 J_{eff} + s f_{eff}) \Theta_m(s) + D(s)$$

□ 扰动输入与实际关节角位移的传递函数为：

$$\frac{\Theta_L(s)}{D(s)} \Big|_{\Theta_L^d=0} = \frac{-nR_a}{s^2 R_a J_{eff} + s(R_a f_{eff} + k_a k_b + k_a k_v) + k_a k_p}$$

□ 运用叠加原理，关节的实际位移如下：

$$\Theta_L(s) = \frac{k_a(k_p + sk_v)\Theta_L^d(s) - nR_a D(s)}{s^2 R_a J_{eff} + s(R_a f_{eff} + k_a k_b + k_a k_v) + k_a k_p}$$

9.1.3 位置和速度反馈增益的确定

- 二阶闭环控制系统的性能指标有：**快速上升时间**，**稳态误差的大小**（是否为零），**快速调整时间**。这些都与位置反馈以及速度反馈增益有关。

前面求得二阶闭环控制系统的传递函数为：

$$\frac{\Theta_L(s)}{\Theta_L^d(s)} = \frac{G_{PD}(s)}{1 + G_{PD}(s)} = \frac{sk_a k_v + k_a k_p}{s^2 R_a J_{eff} + s(R_a f_{eff} + k_a k_b + k_a k_v) + k_a k_p}$$

- 二阶系统的特征方程具有下面标准形式： $s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2 = 0$

- 上式进行对照，得出： $\omega_n^2 = \frac{k_a k_p}{J_{eff} R_a}$ ，

$$2\zeta\omega_n = \frac{R_a f_{eff} + k_a k_b + k_a k_v}{J_{eff} R_a}$$

9.1.3 位置和速度反馈增益的确定

二阶系统的特性取决于它的无阻尼自然频率 ω_n 和阻尼比 ζ

➤ 我们希望系统具有临界阻尼或过阻尼，即 $\zeta \geq 1$ ，代入：

$$\zeta = \frac{R_a f_{eff} + k_a k_b + k_a k_v}{2\sqrt{k_a k_p J_{eff} R_a}} \geq 1$$

因而速度反馈增益 k_v 为：

$$k_v \geq \frac{2\sqrt{k_a k_p J_{eff} R_a} - R_a f_{eff} - k_a k_b}{k_a}$$

取等号时，系统将为临界阻尼系统；

取不等号时，为过阻尼系统。

9.1.3 位置和速度反馈增益的确定

在确定位置反馈增益 k_p 时，必须考虑操作臂的结构刚性和共振频率。

- 令关节的等效刚度为 k_{eff} ，则恢复力矩为 $k_{eff}\theta_m(t)$ ，它与电机的惯性力矩相平衡，得微分方程： $J_{eff}\ddot{\theta}_m(t) + k_{eff}\theta_m(t) = 0$
- 系统结构的共振频率为： $\omega_r = \sqrt{k_{eff} / J_{eff}}$
- 若在已知的惯性矩 J_0 之下测出的结构共振频率为 ω_0 ，则在其它惯性矩 J_{eff} 时的结构共振频率为： $\omega_r = \omega_0 \sqrt{J_0 / J_{eff}}$
- 为了不致于激起结构振盪和系统共振，要求 $\omega_n \leq 0.5\omega_r$ ， $k_p > 0$ 。由 $\omega_n^2 = \frac{k_a k_p}{J_{eff} R_a}$ 得 $0 < k_p \leq \frac{\omega_r^2 J_{eff} R_a}{4k_a} = \frac{\omega_0^2 J_0 R_a}{4k_a}$
- 最终求出 k_v 为： $k_v \geq \frac{R_a \omega_0 \sqrt{J_0 J_{eff}} - R_a f_{eff} - k_a k_b}{k_a}$

9.1.4 稳态误差及其补偿

□ 系统误差定义为: $e(t) = \theta_L^d(t) - \theta_L(t)$ $E(s) = \Theta_L^d(s) - \Theta_L(s)$

经拉普拉斯变换最后得出:

$$E(s) = \frac{\left[s^2 R_a J_{eff} + s(R_a f_{eff} + k_a k_b) \right] \Theta_L^d(s) + n R_a D(s)}{s^2 R_a J_{eff} + s(R_a f_{eff} + k_a k_b + k_a k_v) + k_a k_p}$$

对于一个幅位为 A 的阶跃输入, 即 $\theta_L^d(t) = A$, 若扰动输入未知, 则由这个阶跃输入而产生的系统稳态误差可从终值定理导出。

□ 在 $k_a k_p \neq 0$ 的条件下, 可得稳态误差:

$$\begin{aligned} e_{ssp} &= \lim_{t \rightarrow \infty} e(t) = \lim_{s \rightarrow 0} s E(s) \\ &= \lim_{s \rightarrow 0} s \cdot \frac{\left[s^2 R_a J_{eff} + s(R_a f_{eff} + k_a k_b) \right] A/s + n R_a D(s)}{s^2 R_a J_{eff} + s(R_a f_{eff} + k_a k_b + k_a k_v) + k_a k_p} \\ &= \lim_{s \rightarrow 0} s \cdot \frac{n R_a D(s)}{s^2 R_a J_{eff} + s(R_a f_{eff} + k_a k_b + k_a k_v) + k_a k_p} \end{aligned}$$

➡ 扰动的函数

9.1.4 稳态误差及其补偿

干扰函数分**可确定的**和**无法直接确定的**，把干扰力矩分别表示为：

$$\tau_D(t) = \tau_G(t) + \tau_C(t) + \tau_e$$

连杆重力产生的力矩

离心力产生的力矩

除重力和离心力之外的扰动力矩

(\approx 很小的恒值干扰 τ_e)

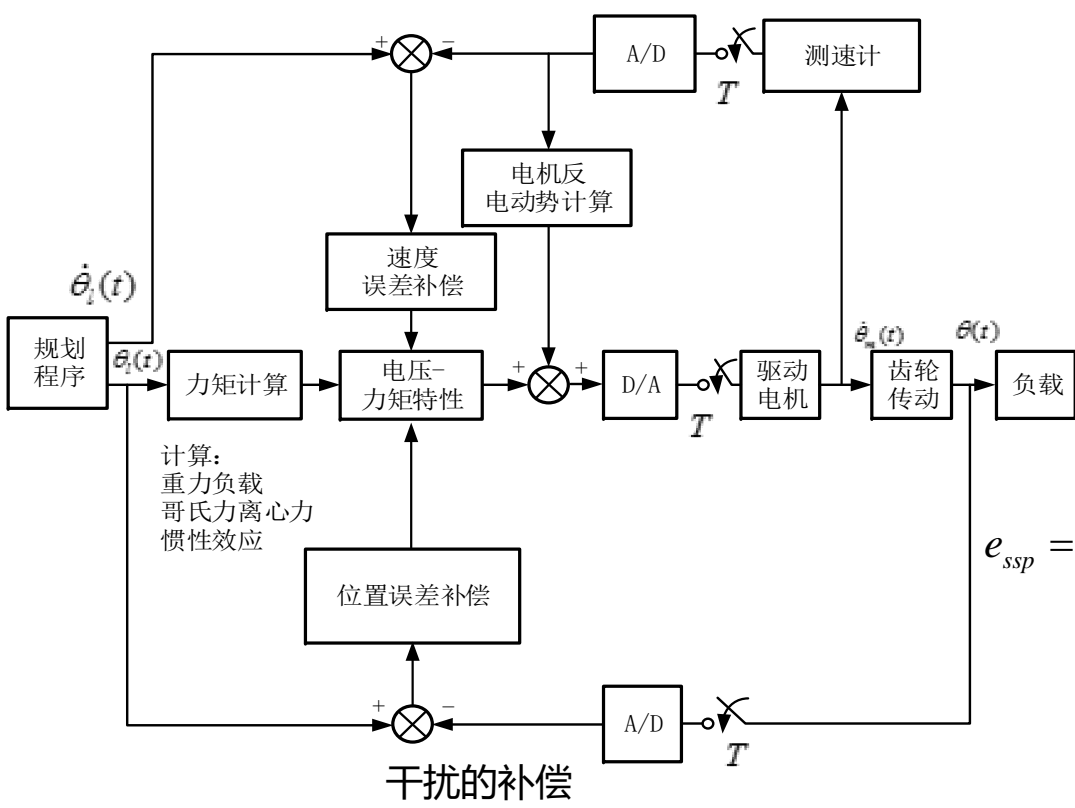
□ 经拉普拉斯变换为： $D(s) = T_G(s) + T_C(s) + T_e/s$

为了补偿重力负载和离心力的影响，可以预先算出这些力矩值，进行“**前馈补偿**”。（见下页干扰补偿图）

□ 令补偿力矩 τ_{com} 的拉普拉斯变换为 $T_{com}(s)$ ，代入得出误差表达式：

$$E(s) = \frac{\left[s^2 R_a J_{eff} + s(R_a f_{eff} + k_a k_b) \right] \Theta_L^d(s)}{s^2 R_a J_{eff} + s(R_a f_{eff} + k_a k_b + k_a k_v) + k_a k_p} + \frac{n R_a \left[T_G(s) + T_C(s) + T_e/s - T_{com}(s) \right]}{s^2 R_a J_{eff} + s(R_a f_{eff} + k_a k_b + k_a k_v) + k_a k_p}$$

9.1.4 稳态误差及其补偿



对于阶跃输入而言,

$$\Theta_L^d(s) = A/s$$

系统的稳态误差如下:

$$e_{ssp} = \lim_{s \rightarrow 0} s \left[\frac{nR_a [T_G(s) + T_C(s) + T_e/s - T_{com}(s)]}{s^2 R_a J_{eff} + s(R_a f_{eff} + k_a k_b + k_a k_v) + k_a k_p} \right]$$

当时间 $t \rightarrow \infty$ 时, 离心力产生的扰动作用为零, 离心力是 $\dot{\theta}_L(\infty) \rightarrow 0$ 的函数, $\dot{\theta}_L(\infty) \rightarrow 0$, 因而不产生稳态位置误差。

9.1.4 稳态误差及其补偿

□ 如果计算出的补偿力矩 τ_{com} 与连杆的重力负载相等：

$$e_{ssp} = \frac{nR_a T_e}{k_a k_p} \quad (\text{稳态位置误差仅与恒值扰动 } \tau_e \text{ 有关})$$

稳态位置误差在以下范围：
$$\frac{4nT_e}{\omega_0^2 J_0} \leq e_{ssp} < \infty$$

位置反馈增益 k_p 越大，稳态误差 e_{ssp} 越小

如果系统的输入是个斜坡函数： $\theta_L^d(s) = A/s^2$

□ 为了减小稳态误差，计算的补偿力矩 $\tau_{com}(t)$ 应与重力和离心力的影响相抵消，稳态速度误差为：

$$e_{ssv} = \frac{(R_a f_{eff} + k_a k_b) A}{k_a k_p} + e_{ssp}$$

本章内容——机械臂的轨迹控制



- 9.1 操作臂的单关节传递函数及PD控制
- 9.2 二阶线性系统控制器的分解
- 9.3 基于直角坐标的控制
- 9.4 本章学习小结

9.2.1 二阶线性系统

- 假设摩擦阻力与运动速度成正比，在**无其它外力**作用下，物体自由运动的微分方程是：

$$m\ddot{x} + b\dot{x} + kx = 0$$

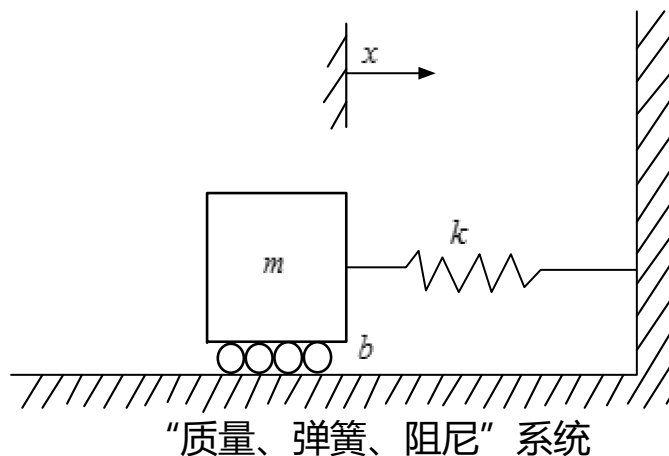
- 该二阶常系数微分方程式对应的特征方程是：

$$ms^2 + bs + k = 0$$

- 特征方程的根是：**系统的极点**

$$s_1 = -\frac{b}{2m} + \frac{\sqrt{b^2 - 4mk}}{2m} \quad s_2 = -\frac{b}{2m} - \frac{\sqrt{b^2 - 4mk}}{2m}$$

受控对象处于零位



其解依赖于初始条件：
初始位置和初始速度

9.2.1 二阶线性系统

□ 系统的极点 s_1 和 s_2 在复平面上的位置决定了系统的运动状态和系统的动态品质。

□ 可分下列三种情况：

- 两不等实根，即 $b^2 > 4mk$

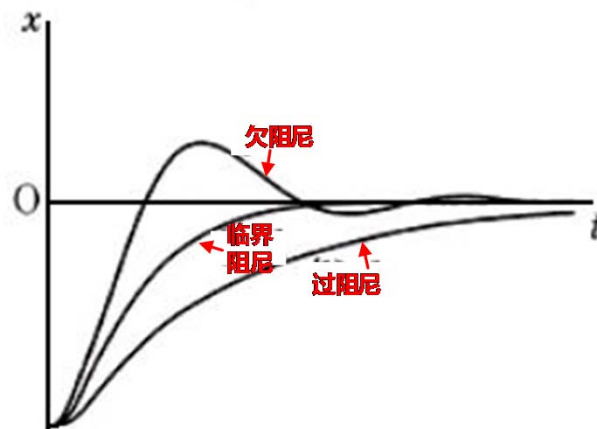
系统是过阻尼的系统，阻尼占主导地位，系统响应“迟钝”。

- 两复根，即 $b^2 < 4mk$

系统是为欠阻尼系统，刚度占主导地位，系统会产生震荡。

- 两等实根，即 $b^2 = 4mk$

阻尼与刚度平衡，为临界阻尼情况，可以产生尽可能快的非振荡响应。



9.2.1 二阶线性系统

□ 采用阻尼比和自然频率表示，将特征方程式变成：

$$s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2 = 0$$

阻尼比

自然频率 (无阻尼的)

其中： $\zeta = b/2\sqrt{km}$, $\omega_n = \sqrt{k/m}$

显然： $\zeta > 1$ 为过阻尼情况；

$\zeta < 1$ 为欠阻尼情况；

$\zeta = 1$ 为临界阻尼情况。

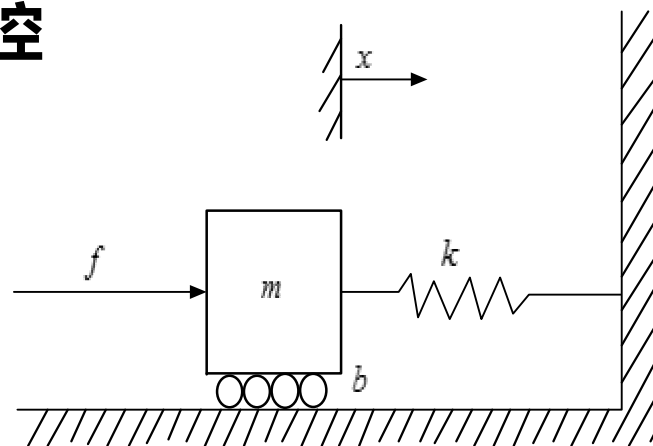
上述二阶系统的响应并不理想，**如何改变系统的品质，使之符合要求？**

9.2.1 二阶线性系统

□ **应对方式**：通过使用传感元件，驱动器和控制系统来改变系统的品质。

如右图，增添了一个驱动器，对受控物体施加力 f 的作用，物体的运动方程 变为： $m\ddot{x} + b\dot{x} + kx = f$

假定，驱动器对于物体施加的力是根据实测的位置和速度决定的，即： $f = -k_p x - k_v \dot{x}$



带驱动控制的质量、弹簧、阻尼系统

以此计算控制力的大小，形成反馈控制信号

9.2.1 二阶线性系统

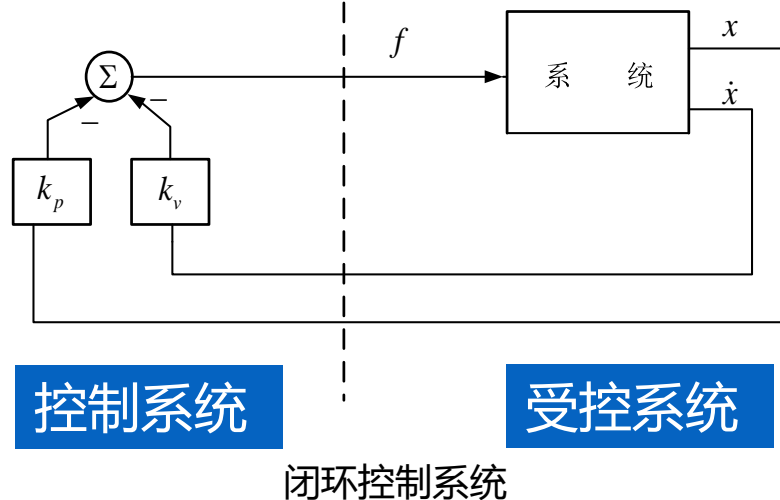
□ 位置调节系统——用来保持物体在一个固定的位置上，消除干扰力的影响。

推导出闭环系统的动力学方程：

$$m\ddot{x} + b\dot{x} + kx = -k_p x - k_v \dot{x}$$

或： $m\ddot{x} + (b + k_v)\dot{x} + (k + k_p)x = 0$

$$m\ddot{x} + b'\dot{x} + k'x = 0$$



➡ 适当地选择控制系统的增益（简称控制增益） k_v 和 k_p ，可以得到所希望的任意二阶系统的品质。

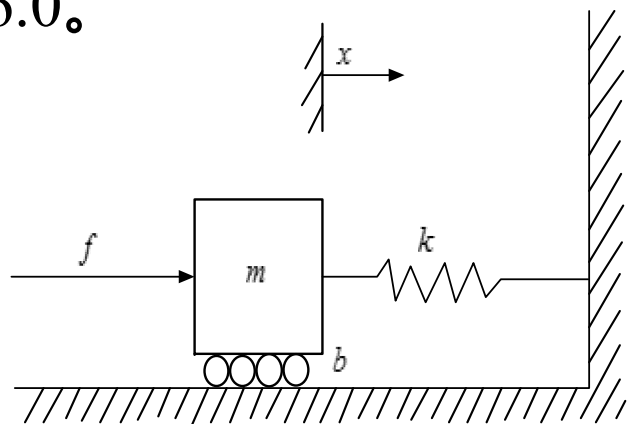
注意： k_v 和 k_p 可正可负，随受控系统的参数而定。

当 b' 或 k' 变成负值时，控制系统将丧失稳定性，伺服误差将会增大。

9.2.1 二阶线性系统

例：

系统参数 $m = 1$, $b = 1$, $k = 1$ 。按位置调节器的控制规律，选择控制增益 k_v 和 k_p ，使系统变成临界阻尼系统，并使闭环系统刚度为16.0。



带驱动控制的质量、弹簧、阻尼系统

因为要求闭环系统刚度 $k' = 16.0$ ，又要使系统成为临界阻尼，必须 $b' = 2\sqrt{mk'} = 8.0$ 。

又因 $k = 1$ 和 $b = 1$ ，因而 $k_p = k' - k = 15$ ， $k_v = b' - b = 7$ 。

9.2.2 控制规律的分解

□ **分解方法：**将控制器分解成两部分：**基于模型控制部分**和**伺服控制部分**。

□ **系统闭环运动方程为：** $m\ddot{x} + b\dot{x} + kx = f$

□ **基于模型控制规律有如下形式：**

$$f = \alpha f' + \beta$$

□ **联立以上式子可以得到闭环系统控制方程为：**

$$m\ddot{x} + b\dot{x} + kx = \alpha f' + \beta$$

9.2.2 控制规律的分解

□ 如果把 α 和 β 选定为: $\alpha=m$, $\beta = b\dot{x} + kx$, 可得:

$$\ddot{x} = f' \rightarrow \text{单位质量系统的运动方程}$$

□ 进一步假设上式是受控系统的开环动力学方程, 计算 f' :

$$f' = -k_p x - k_v \dot{x}$$

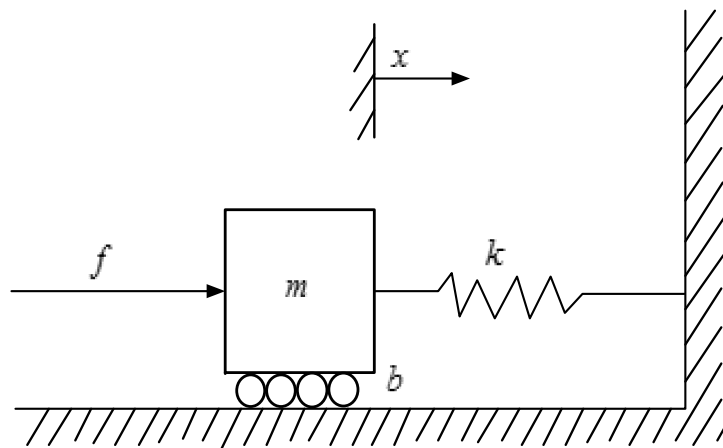
□ 联立则得: $\ddot{x} + k_v \dot{x} + k_p x = 0$

利用这种分解法则确定控制增益十分简单, 并且与系统参数无关, 即, 对于任何系统, 临界阻尼都必须满足: $k_v = 2\sqrt{k_p}$ 。

9.2.2 控制规律的分解

例：

系统参数 $m = 1$, $b = 1$, $k = 1$ 。求出位置调节器控制规律的 α 、 β 和增益 k_v 和 k_p ，使得闭环系统具有临界阻尼，且刚度为 16.0。



带驱动控制的质量、弹簧、阻尼系统

我们取： $\alpha = m = 1$ $\beta = b\dot{x} + kx = \dot{x} + x$

根据规定的闭环系统刚度要求，确定增益 $k_p = 16.0$ ，
再按临界阻尼的要求确定 $k_v = 2\sqrt{k_p}$ ，得到 $k_v = 8.0$ 。

9.2.3 轨迹跟踪控制

- 要求物体跟踪指定的目标轨迹，即物体必须按照给定的时间函数 $x_d(t)$ 来运动。

假定轨迹充分光滑，定义指定的目标轨迹与实际轨迹的差为伺服误差，即： $e = x_d - x$

- 轨迹跟踪的控制规律为： $f' = \ddot{x}_d + k_v \dot{e} + k_p e$

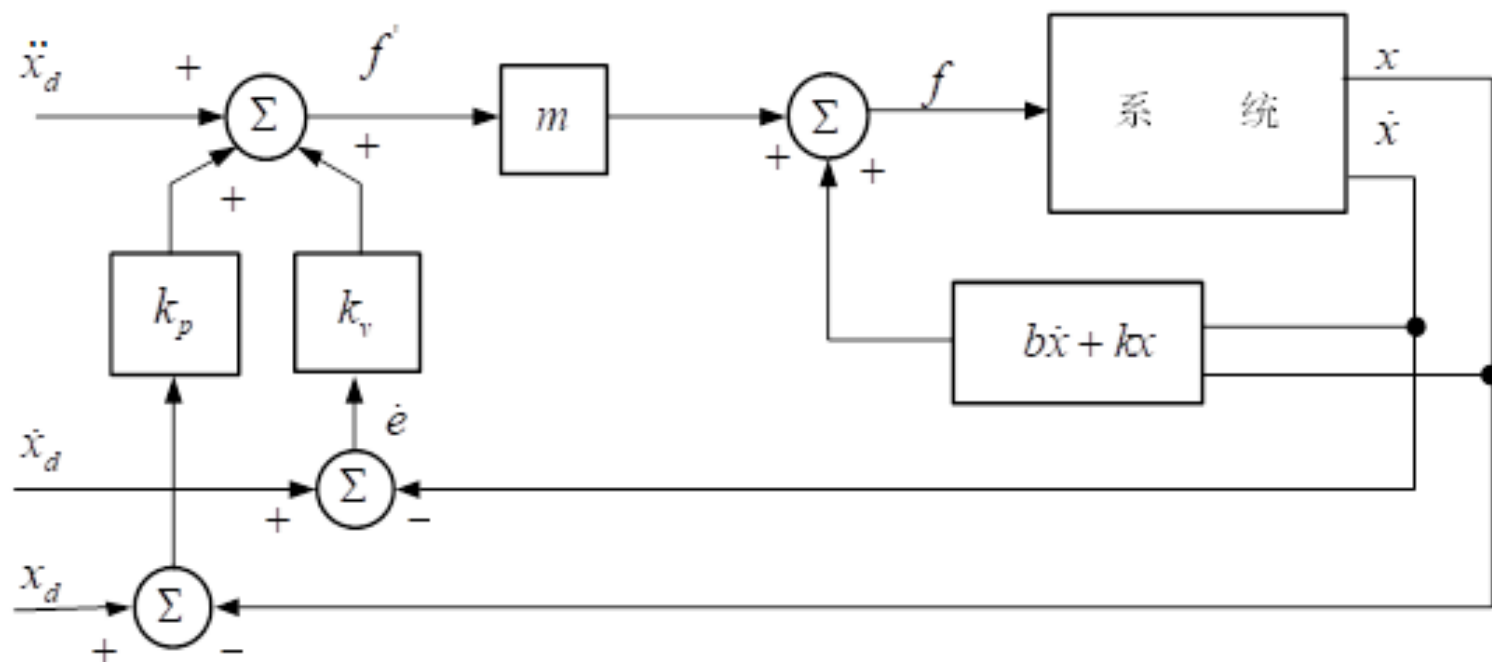
- 与单位质量系统运动方程式联立就可得到：

$$\ddot{x} = \ddot{x}_d + k_v \dot{e} + k_p e$$

- 最终得到误差方程： $\ddot{e} + k_v \dot{e} + k_p e = 0$

9.2.3 轨迹跟踪控制

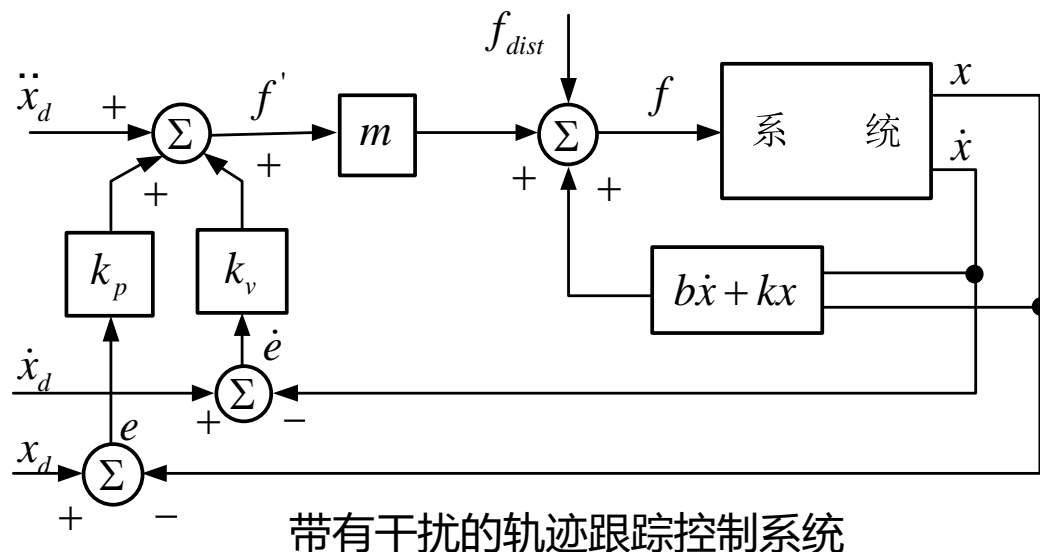
□ 它描述了相对于给定轨迹的误差变化规律，如下图：



如果模型十分准确，即参数 m 、 b 和 k 的值十分准确，又没有噪声和初始误差，则物体将准确地跟踪给定的轨迹。

9.2.4 抑制干扰

如右图，分析这一闭环系统，可得到误差方程为： $\ddot{e} + k_v \dot{e} + k_p e = f_{dist}$



一、稳态误差

eg: 常值干扰 f_{dist}

对系统进行稳态分析，令系统式中的变量的各阶导数为零，得稳态方程和稳态误差为：

$$k_p e = f_{dist}, \quad e = f_{dist} / k_p$$

位置增益越大，稳态误差越小

9.2.4 抑制干扰

二、增加积分项

增添积分项: $f' = \ddot{x}_d + k_v \dot{e} + k_p e + k_i \int e dt$

相应的误差方程为: $\ddot{e} + k_v \dot{e} + k_p e + k_i \int e dt = f_{dist}$

对上式两边求导: $\ddot{e} + k_v \dot{e} + k_p e + k_i e = 0 \Rightarrow k_i e = 0$

增加积分项之后, 使得系统对于恒值干扰的稳态误差为零

三、周期干扰

可将周期性干扰当成各种谐波分量的线性叠加。对于二阶线性系统而言, 谐波干扰所产生的稳态误差也是个谐波函数, 其频率和干扰信号的频率相同, 其幅值和相位均和频率 ω 有关。

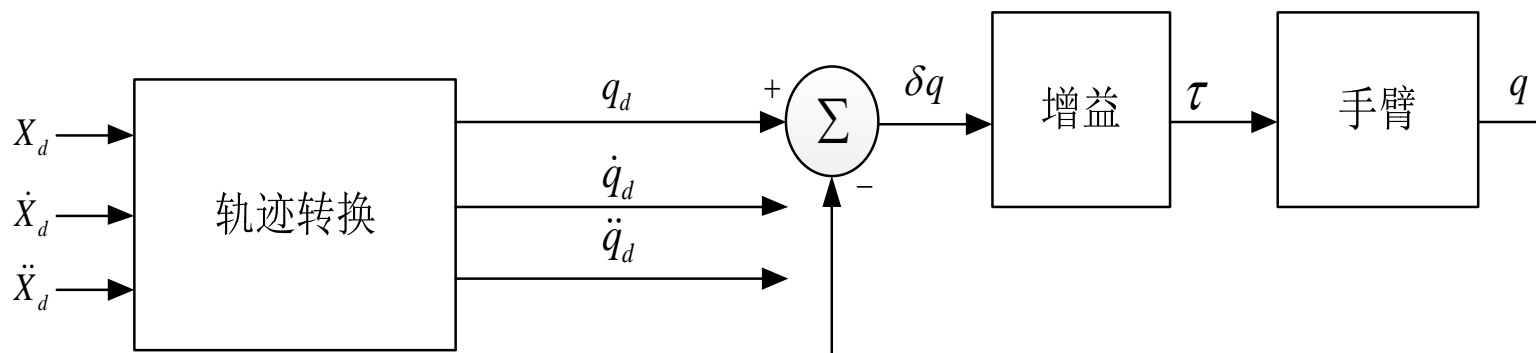
本章内容



- 9.1 二阶线性系统控制规律的分解
- 9.2 单关节的建模和控制
- 9.3 基于直角坐标的控制
- 9.4 本章学习小结

9.3 基于直角坐标的控制

□ 直角坐标的控制与基于关节坐标的控制系统不同，需要输入期望的直角坐标、速度和加速度。实际中的工业机器人大都采用基于关节坐标的控制，系统的输入是期望的关节轨迹，所以要进行**轨迹变换**。



输入直角坐标轨迹在关节空间控制的方案图

基于直角坐标的控制系统输入是期望的直角轨迹 X_d 、 \dot{X}_d 和 \ddot{X}_d ，为了计算出与之对应的关节空间轨迹 q_d 、 \dot{q}_d 和 \ddot{q}_d ，理论上用上图的“轨迹变换”即可解决。

9.3.1 轨迹变换

方案一：解析法 不实用

需计算： $q_d = \text{invkin}(X_d)$

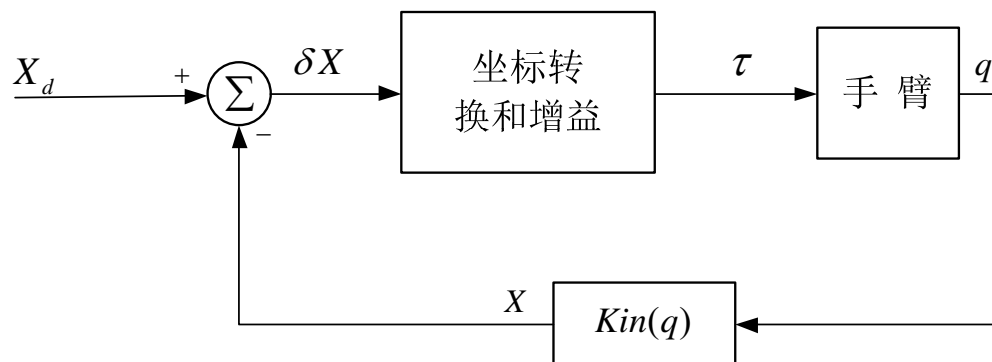
$$\dot{q}_d = J^{-1}(q) \dot{X}_d$$

$$\ddot{q}_d = \dot{J}^{-1}(q) \dot{X}_d + J^{-1}(q) \ddot{X}_d$$

计算困难，难以实现

方案二：直角坐标空间控制方案

如下图，检测到的各关节位置立即由运动学方程($\text{kin}(q)$)转换成直角坐标位置，然后把它与预期的位置比较，形成直角坐标空间的误差信息。



直角坐标控制方案的缺点：与关节坐标空间控制相比，计算量大，运算速度慢，系统的稳定性和抑制干扰的能力相对较弱。

9.3.2 直角坐标解耦控制

□ 为了使机器人的所有形位都具有临界阻尼状态，以抑制直角坐标误差，可以采用与关节空间控制器类似的线性化和解耦方法设计直角坐标控制器。

以直角坐标变量表示的操作臂动力学方程：

$$F = V(q) \ddot{X} + U(q, \dot{q}) + P(q)$$

作用在操作臂终端抓手上的虚拟操作力

向心力哥氏力矢量

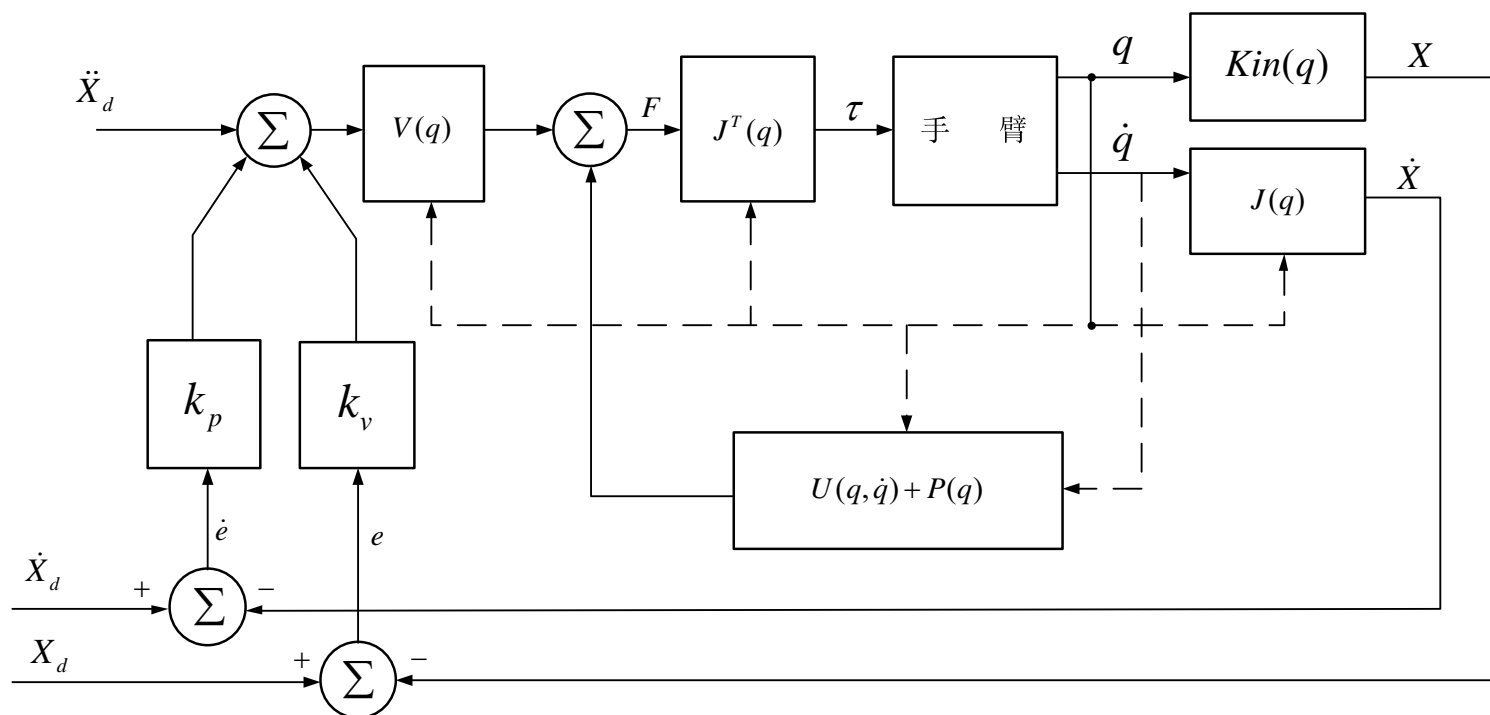
重力矢量

直角坐标空间的质量矩阵

直角坐标矢量

9.3.2 直角坐标解耦控制

如下图所示的**动力学解耦的直角坐标控制方案**，首先利用上页的动力学方程式计算出 F ，再由转置雅可比计算与操作力 F 相平衡的关节力 $\tau = J^T(q)F$



注意：转置雅可比在“手臂”环节之前，控制器允许直接描述直角坐标轨迹，勿需进行轨迹转换。

本章内容



- 9.1 二阶线性系统控制规律的分解
- 9.2 单关节的建模和控制
- 9.3 基于直角坐标的控制
- 9.4 本章学习小结

9.4 本章学习小结

本章学习小结

- 一、了解操作臂的轨迹控制的主要任务
- 二、学习和掌握二阶线性系统及控制规律的分解，如何实现在无外界干扰和有抑制干扰情况下的轨迹跟踪控制
- 三、从整体到局部，了解机械臂的组成和运动控制，掌握单关节的数学建模和位置控制，确定位置和速度的反馈增益，分析稳态误差及其补偿方式。
- 四、了解直角空间控制中的轨迹变换方法，掌握基于直角坐标的控制规律