



第八章 轨迹规划



主讲：杨吉祥

电话：18871479469

邮箱：jixiangyang@hust.edu.cn

办公室：先进制造大楼东楼D215

本章内容

8.1 轨迹规划的一般性问题

8.2 关节轨迹的插值

8.3 笛卡尔空间规划方法

8.1 轨迹规划的一般性问题



机器人
激光切
割加工

- **轨迹** - 操作臂在运动过程中每时每刻的位移、速度和加速度所确定的路径。
- **轨迹规划** - 根据作业任务的要求，计算出预期的运动轨迹，即每时每刻关节臂的位移、速度和加速度。

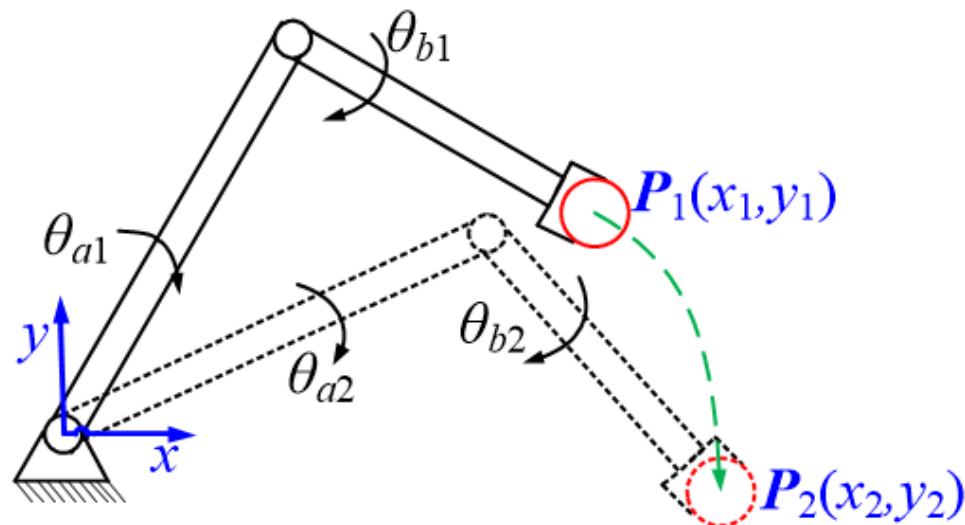
根据运动特点可以将轨迹类型分为

- **点到点运动**(Point to Point, PTP)
- **连续路径运动 或 轮廓运动**(contour motion)

8.1.2 轨迹规划的常用方法（两种）

□ 第一种

要求**关节坐标空间**中对路径节点上的**位姿、速度和加速度**给出显式约束，轨迹规划器**选取某类函数作为参数化轨迹**，对节点进行插值，并满足约束条件。



□ 第二种

要求给出**直角坐标空间**中运动路径的解析式，轨迹规划器**在关节空间或直角坐标空间中确定轨迹逼近预定路径**。

本章内容

8.1 轨迹规划的一般性问题

8.2 关节轨迹的插值

8.3 笛卡尔空间规划方法

8.2 关节轨迹的插值

在关节空间中进行轨迹规划：给定机器人在**起始点**、**终止点手臂的形位**，以及一系列**约束条件**，选取不同类型关节插值函数，生成机器人轨迹。

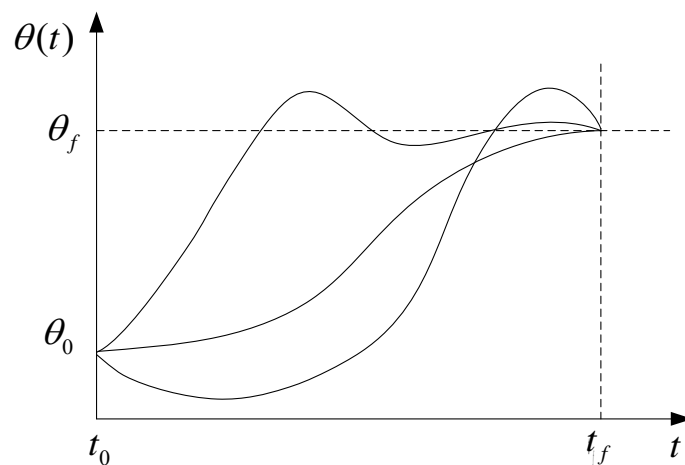
8.2.1 三次多项式插值

□ 给定操作臂起始点某个关节角度 θ_0 ，终止点关节角度 θ_f

以及三次多项式插值函数：

$$\theta(t) = a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + a_3 t^3$$

求解各个参数值。



单个关节的不同轨迹曲线

8.2.1 三次多项式插值

□ 为了实现单个关节的平稳运动，轨迹函数 $\theta(t)$ ，至少需要满足四个约束条件，即：

$$\begin{cases} \theta(0) = \theta_0, \\ \theta(t_f) = \theta_f \end{cases} \quad - \text{满足起始点和终止点对应的关节角度约束}$$

$$\begin{cases} \dot{\theta}(0) = 0, \\ \dot{\theta}(t_f) = 0 \end{cases} \quad - \text{满足起始点和终止点的关节速度约束（即满足关节运动速度的连续性要求）}$$

$$\theta(t) = a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + a_3 t^3$$

□ 代入并最终求解得到：

$$\begin{cases} a_0 = \theta_0, \\ a_1 = 0, \\ a_2 = \frac{3}{t_f^2}(\theta_f - \theta_0), \\ a_3 = -\frac{2}{t_f^3}(\theta_f - \theta_0) \end{cases}$$

注意：只适用于关节起始、终止速度为0的运动情况！

8.2.1 三次多项式插值

例8.1:

设有一个旋转关节的单自由度操作臂处于静止状态时, $\theta_0 = 15^\circ$ 要在3s之内平稳运动到达终止位置: $\theta_f = 75^\circ$, 并且在终止点的速度为零。

解: 把 $\theta_0 = 15$, $\theta_f = 75$, $t_f = 3$ 代入上式, 即可得到三次多项式的系数:

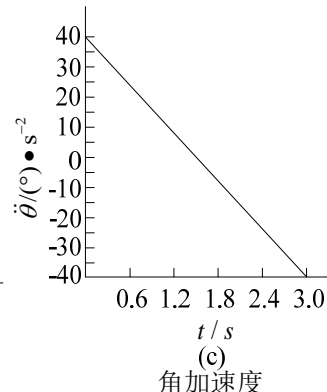
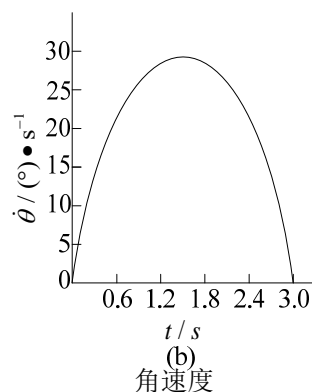
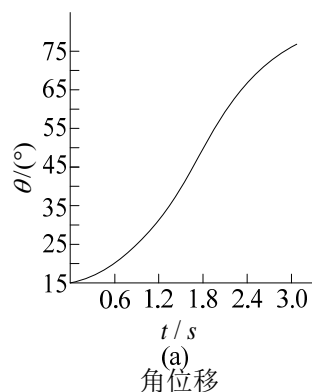
$$a_0 = 15.0, a_1 = 0.0, a_2 = 20.0, a_3 = -4.44$$

因此, 操作臂的位移方程为 $\theta(t) = 15.0 + 20.0t^2 - 4.44t^3$ 。

再由上式求1、2阶导,
则可确定操作臂的速度
和加速度:

$$\dot{\theta}(t) = 40.0t - 13.32t^2,$$

$$\ddot{\theta}(t) = 40.0 - 26.64t$$



任何三次多项式函数的速度曲线均为**抛物线**, 相应的加速度曲线均为**直线**。

8.2.2 过路径点的三次多项式插值

方法：把所有路径点看作是“起始点”或“终止点”，求解逆运动学，得到相应的关节矢量值。然后确定所要求的三次多项式插值函数，把路径点平滑地连接起来。但是，在这些“起始点”和“终止点”的关节运动速度不再是零。

此时约束条件变为：

$$\begin{cases} \theta(0) = \theta_0, & \dot{\theta}(0) = \dot{\theta}_0, \\ \theta(t_f) = \theta_f, & \dot{\theta}(t_f) = \dot{\theta}_f \end{cases}$$

同理可以求得此时的三次多项式系数：

$$\begin{cases} a_0 = \theta_0, \\ a_1 = \dot{\theta}_0, \\ a_2 = \frac{3}{t_f^2}(\theta_f - \theta_0) - \frac{2}{t_f}\dot{\theta}_0 - \frac{1}{t_f}\dot{\theta}_f, \\ a_3 = -\frac{2}{t_f^3}(\theta_f - \theta_0) + \frac{1}{t_f^2}(\dot{\theta}_0 - \dot{\theta}_f) \end{cases}$$

由上式确定的三次多项式描述了起始点和终止点具有任意给定位置和速度的运动轨迹。**如何来确定路径点上的关节速度？**

8.2.2 过路径点的三次多项式插值

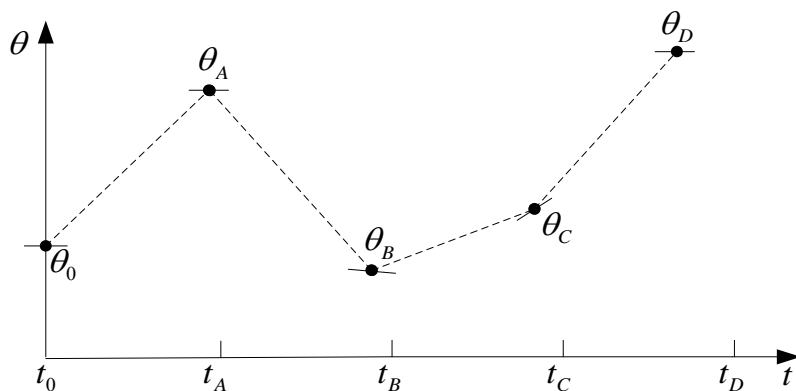
可由以下三种方法规定：

- 1、根据工具坐标系在直角坐标空间中的瞬时线速度和角速度确定各路径点的关节速度。
- 2、在直角坐标空间或关节空间中采用启发式方法，由控制系统自动地选择路径点的速度。
- 3、为了保证每个路径点上的加速度连续，由控制系统按此要求自动选择路径点的速度。

方法(1)耗费工作量太大，机器人控制系统最好具有方法(2)或方法(3)的功能，或者二者兼而有之。

8.2.2 过路径点的三次多项式插值

□ 对于**方法(2)**，系统采用某种启发式方法自动选取合适的路径点速度。



路径点上速度的自动生成

θ_0 为起始点;
 θ_A 为终止点,
 $\theta_B, \theta_C, \theta_D$ 是路径点,
用细实线表示过路径点时的
关节运动速度。

启发式方法的原理：用直线段把路径点依次连接起来，如果相邻线段的斜率在路径点处改变符号，则把速度选定为零；如果相邻线段不改变符号，则选取路径点两侧的线段斜率的平均值作为该点的速度。

8.2.2 过路径点的三次多项式插值

方法(3)约束条件是：连接处不仅速度连续，且加速度也连续

设所经过的路径点处的关节角度为 θ_y ，与该点相邻的前后两点的关节角分别为 θ_0 和 θ_g ，从 θ_0 到 θ_y 插值三次多项式为：

$$\theta_1(t) = a_{10} + a_{11}t + a_{12}t^2 + a_{13}t^3$$

时间区间为 $[0, t_{f1}]$

从 θ_y 到 θ_g 插值三次多项式为：

$$\theta_2(t) = a_{20} + a_{21}t + a_{22}t^2 + a_{23}t^3$$

时间区间为 $[0, t_{f2}]$

约束条件

$$\begin{cases} \theta_0 = a_{10}, \\ \theta_y = a_{10} + a_{11}t_{f1} + a_{12}t_{f1}^2 + a_{13}t_{f1}^3, \\ \theta_y = a_{20}, \\ \theta_g = a_{20} + a_{21}t_{f2} + a_{22}t_{f2}^2 + a_{23}t_{f2}^3, \\ 0 = a_{11}, \\ 0 = a_{21} + 2a_{22}t_{f2} + 3a_{23}t_{f2}^2, \\ a_{11} + 2a_{12}t_{f1} + 3a_{13}t_{f1}^2 = a_{21}, \\ 2a_{12} + 6a_{13}t_{f1} = 2a_{22} \end{cases}$$

最终解得：

$$\begin{cases} a_{10} = \theta_0, & a_{11} = 0, & a_{12} = \frac{12\theta_y - 3\theta_g - 9\theta_0}{4t_f^2}, & a_{13} = \frac{-8\theta_y + 3\theta_g + 5\theta_0}{4t_f^3}, \\ a_{20} = \theta_y, & a_{21} = \frac{3\theta_g - 3\theta_0}{4t_f}, & a_{22} = \frac{-12\theta_y + 6\theta_g + 6\theta_0}{4t_f^2}, & a_{23} = \frac{8\theta_y - 5\theta_g - 3\theta_0}{4t_f^3} \end{cases}$$

8.2.3 高阶多项式插值

□ 如果对于运动轨迹的要求更为严格，约束条件增多，三次多项式就不能满足需要，必须用更高阶的多项式对运动轨迹的路径段进行插值。

例如，对某段路径的起始点和终止点都规定了关节的位置、速度和加速度，则要用一个五次多项式进行插值，即：

$$\theta(t) = a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + a_3 t^3 + a_4 t^4 + a_5 t^5$$

约束条件：

$$\begin{cases} \theta_0 = a_0, & \theta_f = a_0 + a_1 t_f + a_2 t_f^2 + a_3 t_f^3 + a_4 t_f^4 + a_5 t_f^5, \\ \dot{\theta}_0 = a_1, & \dot{\theta}_f = a_1 + 2a_2 t_f + 3a_3 t_f^2 + 4a_4 t_f^3 + 5a_5 t_f^4, \\ \ddot{\theta}_0 = 2a_2, & \ddot{\theta}_f = 2a_2 + 6a_3 t_f + 12a_4 t_f^2 + 20a_5 t_f^3 \end{cases}$$



$$\begin{cases} a_0 = \theta_0, \\ a_1 = \dot{\theta}_0, \\ a_2 = \frac{\ddot{\theta}_0}{2}, \\ a_3 = \frac{20\theta_f - 20\theta_0 - (8\dot{\theta}_f + 12\dot{\theta}_0)t_f - (3\ddot{\theta}_0 - \ddot{\theta}_f)t_f^2}{2t_f^3}, \\ a_4 = \frac{30\theta_0 - 30\theta_f + (14\dot{\theta}_f + 16\dot{\theta}_0)t_f + (3\ddot{\theta}_0 - 2\ddot{\theta}_f)t_f^2}{2t_f^4}, \\ a_5 = \frac{12\theta_f - 12\theta_0 - (6\dot{\theta}_f + 6\dot{\theta}_0)t_f - (\ddot{\theta}_0 - \ddot{\theta}_f)t_f^2}{2t_f^5} \end{cases}$$

多项式插值轨迹生成方法小结

步骤1：给出多项式函数的形式：

$$\theta(t) = a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + a_3 t^3 + a_4 t^4 + a_5 t^5$$

步骤2：给出约束要求：

位移： $\theta(0), \theta(f)$ 速度： $\dot{\theta}(0), \dot{\theta}(f)$ 加速度： $\ddot{\theta}(0), \ddot{\theta}(f)$

步骤3：列出约束方程组：

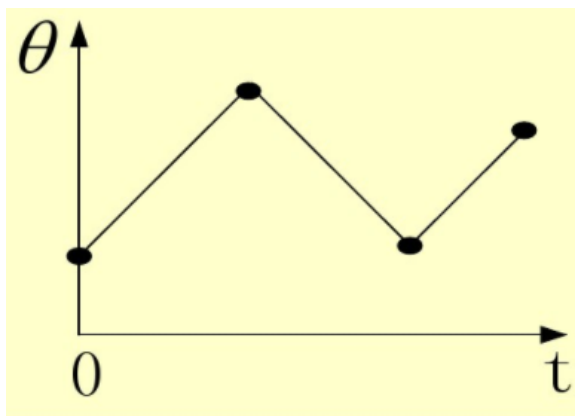
$$\begin{cases} \theta_0 = a_0, & \theta_f = a_0 + a_1 t_f + a_2 t_f^2 + a_3 t_f^3 + a_4 t_f^4 + a_5 t_f^5, \\ \dot{\theta}_0 = a_1, & \dot{\theta}_f = a_1 + 2a_2 t_f + 3a_3 t_f^2 + 4a_4 t_f^3 + 5a_5 t_f^4, \\ \ddot{\theta}_0 = 2a_2, & \ddot{\theta}_f = 2a_2 + 6a_3 t_f + 12a_4 t_f^2 + 20a_5 t_f^3 \end{cases}$$

步骤4：根据约束方程组，求解出多项式系数

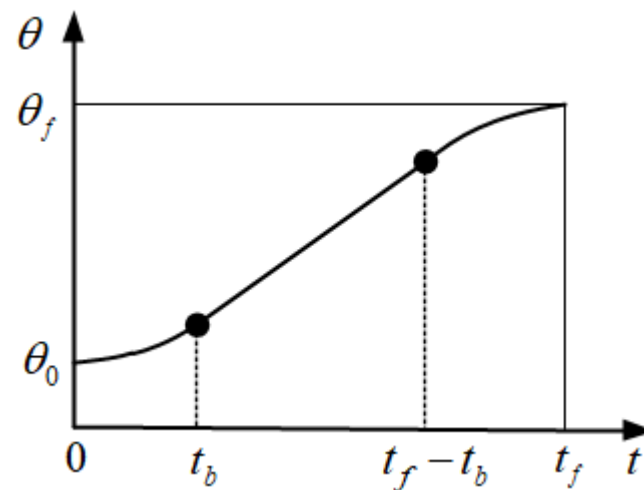
$$a_0, a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6$$

8.2.4 用抛物线过渡的线性插值

□ 单纯线性插值将导致在节点处关节运动速度不连续，加速度无限大。



□ 在使用线性插值时，把每个节点的邻域内增加一段抛物线的“缓冲区段”，从而使整个轨迹上的位移和速度都连续。



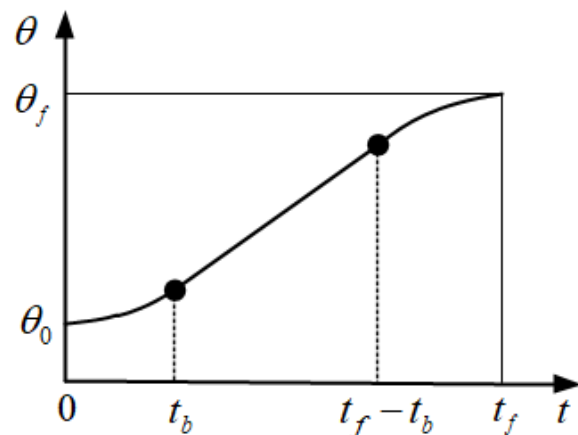
“带有抛物线过渡域的线性轨迹”

8.2.4 用抛物线过渡的线性插值

□ 假设两端的过渡域（抛物线）具有相同的持续时间，
因而在这两个域中采用相同的**恒加速度值**，只是符号相反。

- 抛物线过渡域的加速度为 $\ddot{\theta}$ ，则过渡域 $[t_0, t_b]$ 终点的速度为： $\dot{\theta}_{tb} = \ddot{\theta}t_b$
- 每个抛物线的位移为 $\frac{1}{2}\ddot{\theta}t_b^2$
- 中间直线段做匀速运动，速度等于 $\dot{\theta}_{tb}$
- 中间直线段位移为 $\dot{\theta}_{tb}(t_f - 2t_b)$
- 总体位移为 $\theta_f - \theta_0 = \frac{1}{2}\ddot{\theta}t_b^2 \times 2 + \dot{\theta}_{tb}(t_f - 2t_b)$
- 即 $\ddot{\theta}t_b^2 - \dot{\theta}t_b + (\theta_f - \theta_0) = 0$

最终得出：
$$t_b = \frac{t_f}{2} - \frac{\sqrt{\ddot{\theta}^2 t_f^2 - 4\ddot{\theta}(\theta_f - \theta_0)}}{2\ddot{\theta}}$$



为保证 t_b 有解，过渡域加速度值 $\ddot{\theta}$ 必须选的足够大：

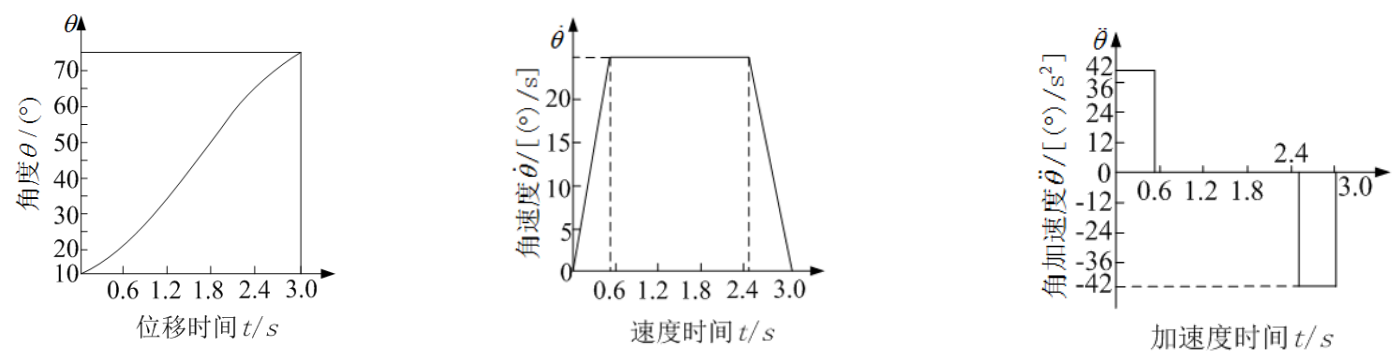
$$\ddot{\theta} \geq \frac{4(\theta_f - \theta_0)}{t_f^2}$$

当式中 $=$ 成立时，线性域的长度为 0，过渡域在衔接处的斜率（代表速度）相等，
当加速度 \uparrow ，过渡域的长度会 \downarrow 。若加速度为 ∞ ，路径又变回简单的线性插值情况。

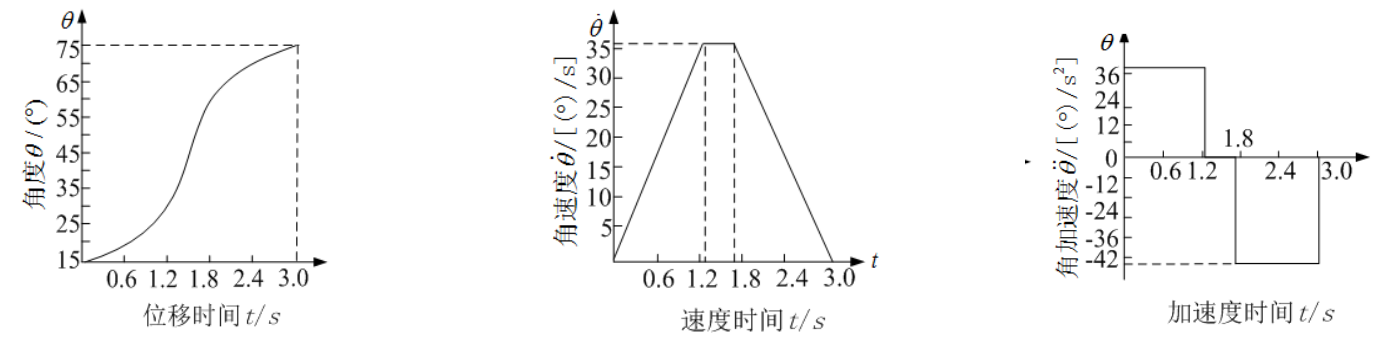
8.2.4 用抛物线过渡的线性插值

例8.2:

对于例 8.1给出的 θ_0 , θ_f 和 t_f , 设计出两条带有抛物线过渡域的线性轨迹。

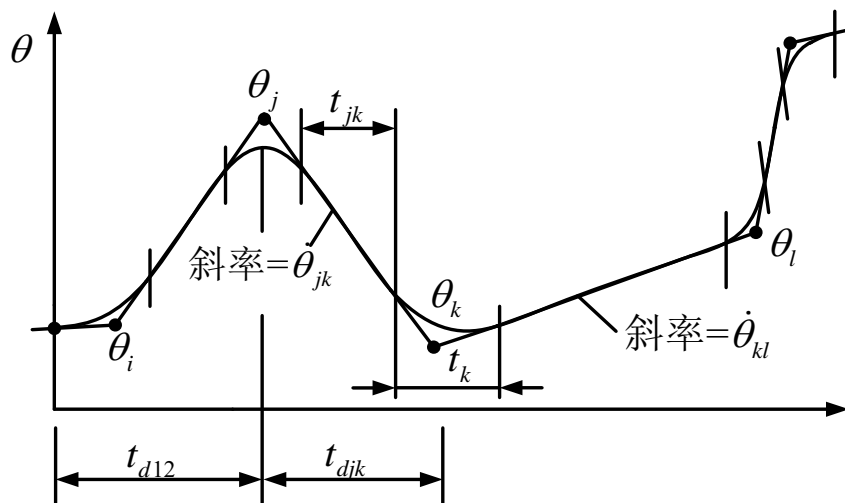


加速度较大时，带抛物线过渡的线性插值：位移、速度、加速度曲线



加速度较小时，带抛物线过渡的线性插值：位移、速度、加速度曲线

8.2.5 过路径点的用抛物线过渡的线性插值



多段带有抛物线过渡的线性插值轨迹

在 k 点的过渡域的持续时间为 t_k ;

点 j 和点 k 之间线性域的持续时间为 t_{jk} ;

连接 j 与 k 点的路径段的全部持续时间为 t_{djk} ;

j 与 k 点之间的线性域速度为 $\dot{\theta}_{jk}$;

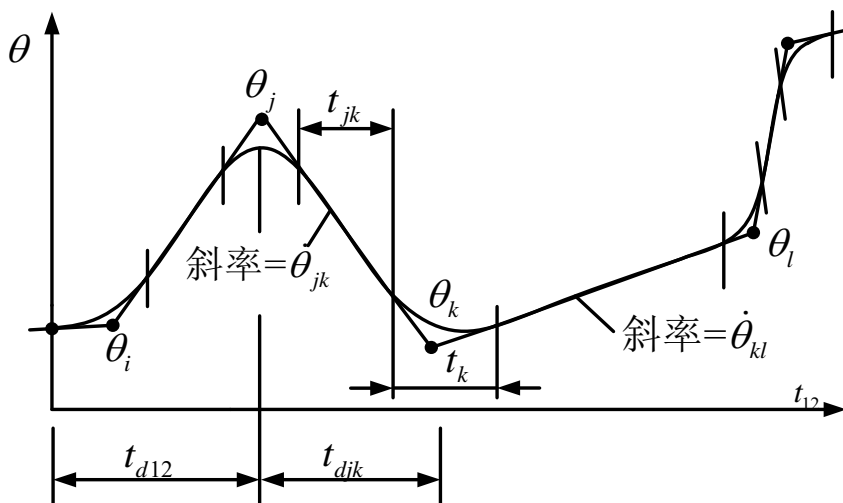
j 点过渡域的加速度为 $\ddot{\theta}_j$ 。

对于内部路径段， 根据右侧方程求解：

($j, k \neq 1, 2; j, k \neq n-1, n$)

$$\begin{cases} \dot{\theta}_{jk} = \frac{\theta_k - \theta_j}{t_{djk}}, \\ \ddot{\theta}_k = \text{sgn}(\dot{\theta}_{kl} - \dot{\theta}_{jk}) |\ddot{\theta}_k|, \\ t_k = \frac{\dot{\theta}_{kl} - \dot{\theta}_{jk}}{\ddot{\theta}_k}, \\ t_{jk} = t_{djk} - \frac{1}{2}t_j - \frac{1}{2}t_k \end{cases}$$

8.2.5 过路径点的用抛物线过渡的线性插值



多段带有抛物线过渡的线性插值轨迹

□ 对于第一段路径段：

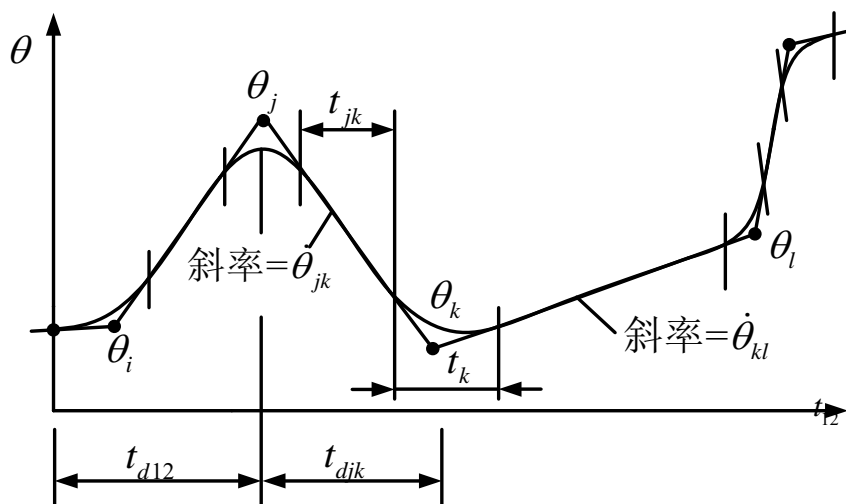
令线性域速度的两个表达式相等，得 t_1 ：

$$\frac{\theta_2 - \theta_1}{t_{d12} - \frac{1}{2}t_1} = \ddot{\theta}_1 t_1$$

算出起始点过渡域的持续时间 t_1 之后，进而求出 $\dot{\theta}_{12}$ 和 t_{12} ，即：

$$\begin{cases} \ddot{\theta}_1 = \text{sgn}(\dot{\theta}_2 - \dot{\theta}_1) |\ddot{\theta}_1|, \\ t_1 = t_{d12} - \sqrt{t_{d12}^2 - \frac{2(\theta_2 - \theta_1)}{\ddot{\theta}_1}}, \\ \dot{\theta}_{12} = \frac{\theta_2 - \theta_1}{t_{d12} - \frac{1}{2}t_1}, \\ t_{12} = t_{d12} - t_1 - \frac{1}{2}t_2 \end{cases}$$

8.2.5 过路径点的用抛物线过渡的线性插值



多段带有抛物线过渡的线性插值轨迹

注意：多段用抛物线过渡的直线样条函数一般并不经过那些路径点，除非在这些路径点处停止。若选取的加速度充分大，则实际路径将与理想路径点十分靠近。

□ 对于最后一段路径段：

路径点 $n-1$ 到终止点 n 之间的参数与第一个路径段相似，即：

$$\frac{\theta_{n-1} - \theta_n}{t_{d(n-1)n} - \frac{1}{2}t_n} = \ddot{\theta}_n t_n$$

最终求解得到：

$$\begin{cases} \ddot{\theta}_n = \text{sgn}(\dot{\theta}_{n-1} - \dot{\theta}_n) |\ddot{\theta}_n|, \\ t_n = t_{d(n-1)n} - \sqrt{t_{d(n-1)n}^2 + \frac{2(\theta_n - \theta_{n-1})}{\ddot{\theta}_n}}, \\ \dot{\theta}_{(n-1)n} = \frac{\theta_n - \theta_{n-1}}{t_{d(n-1)n} - \frac{1}{2}t_n}, \\ t_{(n-1)n} = t_{d(n-1)n} - t_n - \frac{1}{2}t_{n-1} \end{cases}$$

本章内容

8.1 轨迹规划的一般性问题

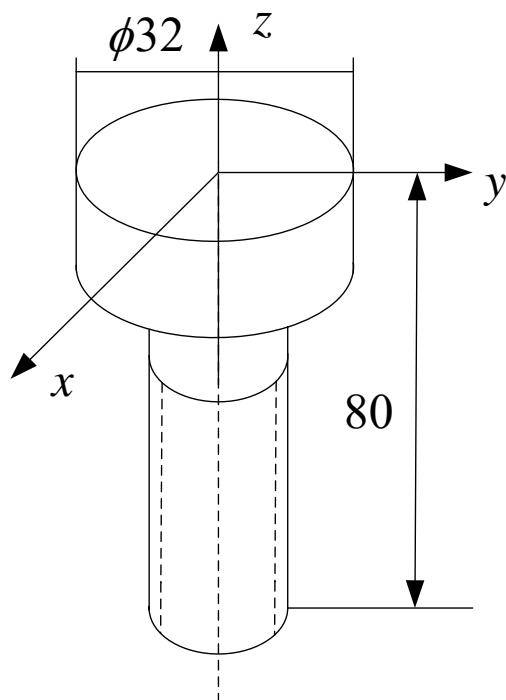
8.2 关节轨迹的插值

8.3 笛卡尔空间规划方法

8.3 笛卡尔空间规划方法

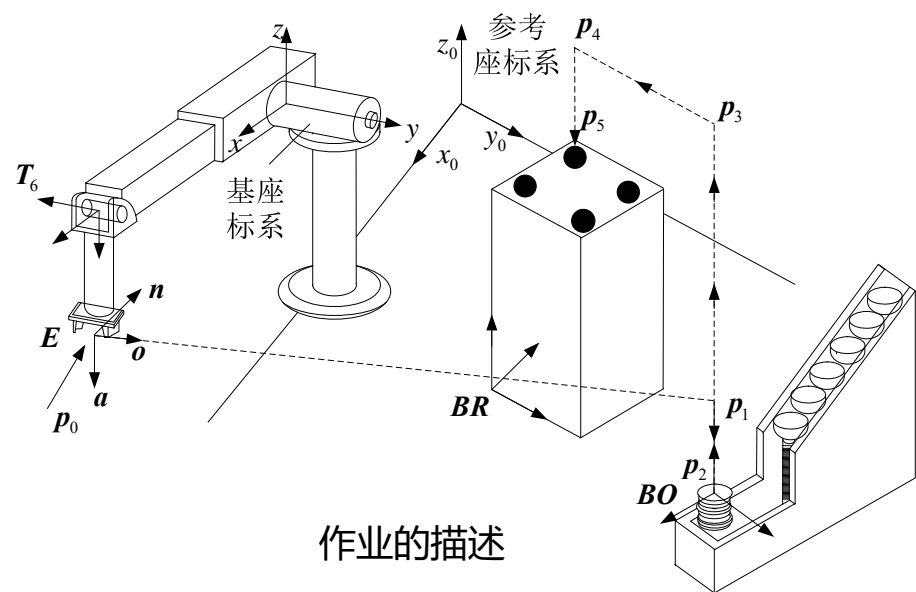
8.3.1 物体对象的描述

给出物体的**几何图形**及**固接坐标系**后，只要规定固接坐标系的**位姿**，便可重构该物体。



例如：螺栓轴线与固接坐标系的Z轴重合。螺栓头部直径为32mm，中心取为坐标原点，螺栓长80mm，直径20mm，则可根据固接坐标系的位姿重构螺栓在空间（相对参考系）的位姿和几何形状。

8.3.2 作业的描述



$p_i(i = 0,1,2,3,4,5)$

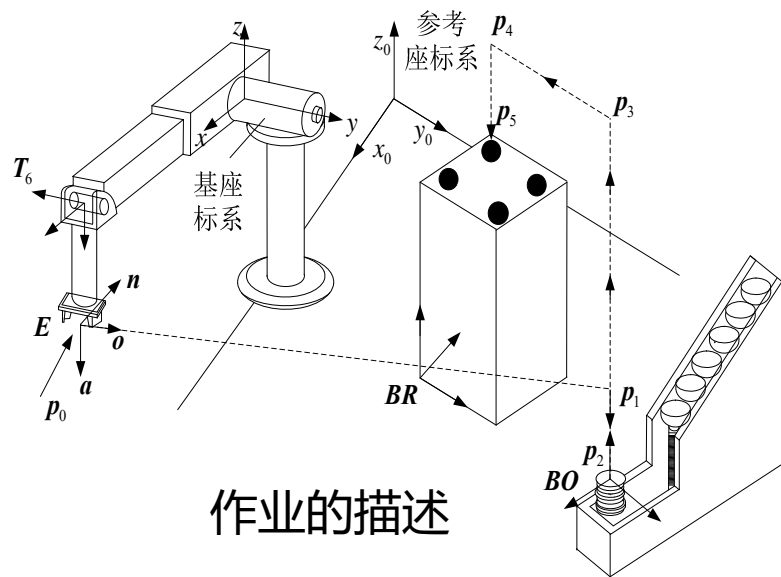
手爪必须经过的直角坐标节点

作业节点 p_i 对应手臂变换 0_6T_i 从一个变换到另一变换通过手臂运动实现。

结点	p_0	p_1	p_2	p_2	p_3	p_4	p_5	p_5	p
运动	INIT	MOVE	MOVE	GRASP	MOVE	MOVE	MOVE	RELEASE	MOVE
目标	原始	接近螺栓	到达	抓住	提升	接近托架	放入孔中	松夹	移开

螺栓的抓取、插入过程

8.3.3 作两个节点之间的“直线”运动



在直角坐标空间中进行轨迹规划的首要问题是由两节点 p_i 和 p_{i+1} 所定义的路径起点和终点之间，如何生成一系列中间点。

□ 从一节点 p_i 到下一节点 p_{i+1} 的运动可表示为：

$$\text{从 } {}^0_6T = {}^0_B T^B p_i {}^6_T T^{-1} \text{ 到 } {}^0_6T = {}^0_B T^B p_{i+1} {}^6_T T^{-1}$$

□ 基于上式，可由“驱动变换” $D(\lambda)$ 来表示：

$${}^0_6T(\lambda) = {}^0_B T^B p_i D(\lambda) {}^6_T T^{-1} \quad \lambda = t/T, \lambda \in [0, 1]$$

□ 在节点 p_i ，实际时间 $t = 0$ ，因此 $\lambda = 0$ 时， $D(0)$ 是 4×4 的单位矩阵。

□ 在节点 p_{i+1} ， $t = T$ ， $\lambda = 1$ ，有 ${}^B p_i D(1) = {}^B p_{i+1}$ ，得 $D(1) = {}^B p_i^{-1} {}^B p_{i+1}$

8.3.3 作两个节点之间的“直线”运动

□ 将工具（手爪）从一个节点 p_i 到下一节点 p_{i+1} 的运动
可以看成和手爪固接的坐标系的运动。

□ 节点 p_i 和 p_{i+1} 相对于目标坐标系 $\{B\}$ 的描述可用相应的
齐次变换矩阵来表示：

$${}^B p_i = \begin{bmatrix} n_i & o_i & a_i & p_i \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} n_{ix} & o_{ix} & a_{ix} & p_{ix} \\ n_{iy} & o_{iy} & a_{iy} & p_{iy} \\ n_{iz} & o_{iz} & a_{iz} & p_{iz} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$${}^B p_{i+1} = \begin{bmatrix} n_{i+1} & o_{i+1} & a_{i+1} & p_{i+1} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} n_{i+1x} & o_{i+1x} & a_{i+1x} & p_{i+1x} \\ n_{i+1y} & o_{i+1y} & a_{i+1y} & p_{i+1y} \\ n_{i+1z} & o_{i+1z} & a_{i+1z} & p_{i+1z} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

□ 利用矩阵求逆公式求 ${}^B p_i^{-1}$ ，
再右乘 ${}^B p_{i+1}$ ，则得：

$$D(1) = \begin{bmatrix} n_i \cdot n_{i+1} & n_i \cdot o_{i+1} & n_i \cdot a_{i+1} & n_i \cdot (p_{i+1} - p_i) \\ o_i \cdot n_{i+1} & o_i \cdot o_{i+1} & o_i \cdot a_{i+1} & o_i \cdot (p_{i+1} - p_i) \\ a_i \cdot n_{i+1} & a_i \cdot o_{i+1} & a_i \cdot a_{i+1} & a_i \cdot (p_{i+1} - p_i) \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

8.3.3 作两个节点之间的“直线”运动

□ 将节点 p_i 到 p_{i+1} 的运动分解为一个**平移运动**和两个**旋转运动**：
第一个转动使工具轴线与预期的接近方向 a 对准；第二个转动是绕工具轴线 (a) 转动，使方向矢量 o 对准。

□ 驱动函数 $D(\lambda)$ 由一个平移运动和两个旋转运动构成，即：

$$D(\lambda) = L(\lambda) R_a(\lambda) R_o(\lambda)$$

□ 平移运动的齐次变换：

$$\underline{L(\lambda)} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \lambda x \\ 0 & 1 & 0 & \lambda y \\ 0 & 0 & 1 & \lambda z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

作用是把节点 p_i 的坐标原点沿直线运动到的原点 p_{i+1}

8.3.3 作两个节点之间的“直线”运动

□ 第一次转动齐次变换:

$$R_a(\lambda) = \begin{bmatrix} s^2\psi v(\lambda\theta) + c(\lambda\theta) & -s\psi c\psi v(\lambda\theta) & c\psi s(\lambda\theta) & 0 \\ -s\psi c\psi v(\lambda\theta) & c^2\psi v(\lambda\theta) + c(\lambda\theta) & s\psi s(\lambda\theta) & 0 \\ -c\psi s(\lambda\theta) & -s\psi s(\lambda\theta) & c(\lambda\theta) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

绕向量 k 转动 $\lambda\theta$ 角得到的变换矩阵

作用是将 p_i 的接近矢量 a_i 转向 p_{i+1} 的接近矢量 a_{i+1}

□ 第二次转动齐次变换:

$$R_o(\lambda) = \begin{bmatrix} c(\lambda\phi) & -s(\lambda\phi) & 0 & 0 \\ s(\lambda\phi) & c(\lambda\phi) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

绕接近矢量 a 转动 $\lambda\phi$ 角得到的变换矩阵

作用是将 p_i 的方向矢量 o_i 转向 p_{i+1} 的方向矢量 o_{i+1}

$$v(\lambda\theta) = \text{Vers}(\lambda\theta) = 1 - \cos(\lambda\theta); \quad c(\lambda\theta) = \cos(\lambda\theta); \quad s(\lambda\theta) = \sin(\lambda\theta); \quad c(\lambda\phi) = \cos(\lambda\phi); \quad s(\lambda\phi) = \sin(\lambda\phi); \quad \lambda \in [0, 1]$$

8.3.3 作两个节点之间的“直线”运动

□ 旋转变换 $R_a(\lambda)$ 表示绕向量 k 转动 θ 角得到的, 而矢量 k 是将 p_i 的 y 轴绕其 z 轴转过 ψ 角得到的, 即

$$k = \begin{bmatrix} -s\psi \\ c\psi \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c\psi & -s\psi & 0 & 0 \\ s\psi & c\psi & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

□ 将矩阵至相乘代入式, 得到 $D(\lambda) = \begin{bmatrix} dn & do & da & dp \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

其中: $\left\{ \begin{array}{l} da = \begin{bmatrix} -s(\lambda\phi)[s^2\psi v(\lambda\theta) + c(\lambda\theta)] + c(\lambda\phi)[-s\psi c\psi v(\lambda\theta)] \\ -s(\lambda\phi)[-s\psi c\psi v(\lambda\theta)] + c(\lambda\phi)[c^2\psi v(\lambda\theta) + c(\lambda\theta)] \\ -s(\lambda\phi)[-c\psi s(\lambda\theta)] + c(\lambda\phi)[-s\psi s(\lambda\theta)] \end{bmatrix} \\ do = \begin{bmatrix} c\psi s(\lambda\theta) \\ s\psi s(\lambda\theta) \\ c(\lambda\theta) \end{bmatrix} \\ dn = do \times da \end{array} \right.$

8.3.3 作两个节点之间的“直线”运动

□ 在式两边右乘 $R_o^{-1}(\lambda)R_a^{-1}(\lambda)$ ，使位置矢量的各元素分别相等，令 $\lambda = 1$ ，则得：

$$\begin{cases} x = \mathbf{n}_i \cdot (\mathbf{p}_{i+1} - \mathbf{p}_i), \\ y = \mathbf{o}_i \cdot (\mathbf{p}_{i+1} - \mathbf{p}_i), \\ z = \mathbf{a}_i \cdot (\mathbf{p}_{i+1} - \mathbf{p}_i) \end{cases}$$

□ 将方程两边右乘 $R_o^{-1}(\lambda)$ ，再左乘 $L^{-1}(\lambda)$ ，并使其第三列元素分别相等，可解得 θ 和 ψ ：

$$\theta = \text{atan} \left[\frac{\left[(\mathbf{n}_i \cdot \mathbf{a}_{i+1})^2 + (\mathbf{o}_i \cdot \mathbf{a}_{i+1})^2 \right]^{1/2}}{\mathbf{a}_i \cdot \mathbf{a}_{i+1}} \right] \quad -\pi \leq \theta \leq \pi \quad \psi = \text{atan} \left[\frac{\mathbf{o}_i \cdot \mathbf{a}_{i+1}}{\mathbf{n}_i \cdot \mathbf{a}_{i+1}} \right] \quad -\pi \leq \psi < \pi$$

□ 为了求出 ϕ ，可将方程两边左乘 $R_a^{-1}(\lambda)L^{-1}(\lambda)$ ，并使它们的对应元素分别相等，得：

$$s\phi = -s\psi c\psi v(\theta)(\mathbf{n}_i \cdot \mathbf{n}_{i+1}) + [c^2\psi v(\theta) + c(\theta)](\mathbf{o}_i \cdot \mathbf{n}_{i+1}) - s\psi s(\theta)(\mathbf{a}_i \cdot \mathbf{n}_{i+1})$$

$$c\phi = -s\psi c\psi v(\theta)(\mathbf{n}_i \cdot \mathbf{o}_{i+1}) + [c^2\psi v(\theta) + c(\theta)](\mathbf{o}_i \cdot \mathbf{o}_{i+1}) - s\psi s(\theta)(\mathbf{a}_i \cdot \mathbf{o}_{i+1})$$

$$\phi = \text{atan} \left[\frac{s\phi}{c\phi} \right], \quad -\pi \leq \phi \leq \pi$$

8.3.3 作两个节点之间的“直线”运动

将求得的 θ, ϕ, ψ 代入 $R_a(\lambda), R_o(\lambda)$, 即可构成驱动函数

$$D(\lambda) = L(\lambda) R_a(\lambda) R_o(\lambda), \quad \lambda \in [0, 1]$$

其中,

$$L(\lambda) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \lambda x \\ 0 & 1 & 0 & \lambda y \\ 0 & 0 & 1 & \lambda z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad R_a(\lambda) = \begin{bmatrix} s^2\psi v(\lambda\theta) + c(\lambda\theta) & -s\psi c\psi v(\lambda\theta) & c\psi s(\lambda\theta) & 0 \\ -s\psi c\psi v(\lambda\theta) & c^2\psi v(\lambda\theta) + c(\lambda\theta) & s\psi s(\lambda\theta) & 0 \\ -c\psi s(\lambda\theta) & -s\psi s(\lambda\theta) & c(\lambda\theta) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$R_o(\lambda) = \begin{bmatrix} c(\lambda\phi) & -s(\lambda\phi) & 0 & 0 \\ s(\lambda\phi) & c(\lambda\phi) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

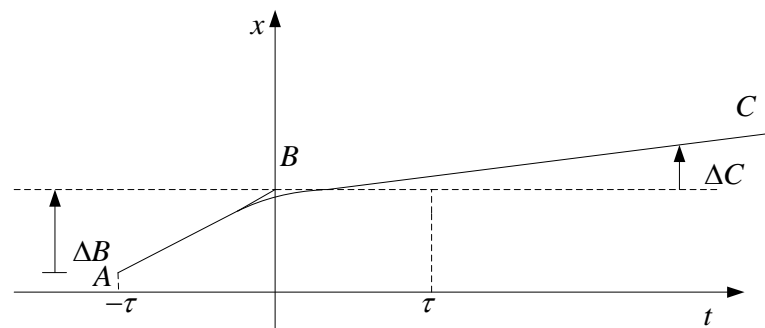
8.3.4 两段路径之间的过渡

□ 为了避免两段路径衔接点处速度不连续，当由一段轨迹过渡到下一段轨迹时，需要**加速或减速**。

□ 在此时间区间 $[-\tau, \tau]$ ，加速度为常数，值为：

$$\ddot{x}(t) = \frac{1}{2\tau^2} \left[\Delta C \frac{\tau}{T} + \Delta B \right], \quad -\tau < t < \tau$$

$$\text{其中: } \ddot{x}(t) = \begin{bmatrix} \ddot{x} \\ \ddot{y} \\ \ddot{z} \\ \ddot{\theta} \\ \ddot{\phi} \end{bmatrix}, \quad \Delta C = \begin{bmatrix} x_{BC} \\ y_{BC} \\ z_{BC} \\ \theta_{BC} \\ \phi_{BC} \end{bmatrix}, \quad \Delta B = \begin{bmatrix} x_{BA} \\ y_{BA} \\ z_{BA} \\ \theta_{BA} \\ \phi_{BA} \end{bmatrix}$$



两段轨迹间的过渡

□ 由公式可以得出相应的在区间 $-\tau < t < \tau$ 中的速度和位移：

$$\dot{x}(t) = \frac{1}{\tau} \left[\Delta C \frac{\tau}{T} + \Delta B \right] \lambda - \frac{\Delta B}{\tau}$$

$$x(t) = \left[\left(\Delta C \frac{\tau}{T} + \Delta B \right) \lambda - 2\Delta B \right] \lambda + \Delta B$$

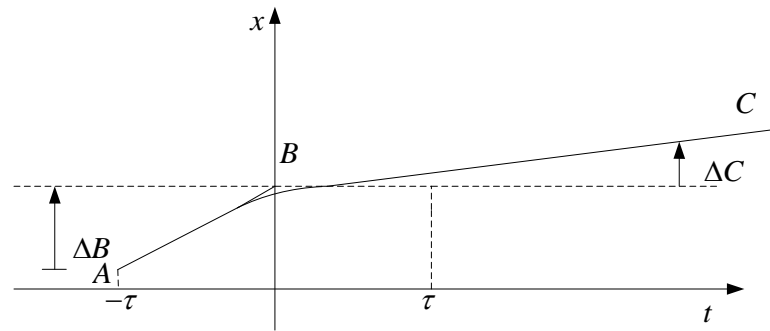
$$\text{其中: } x(t) = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ \theta \\ \phi \end{bmatrix}, \quad \dot{x}(t) = \begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{z} \\ \dot{\theta} \\ \dot{\phi} \end{bmatrix}, \quad \lambda = \frac{t + \tau}{2\tau}$$

8.3.4 两段路径之间的过渡

□ 在时间区间 $\tau < t < T$ ，运动方程为：

$$\mathbf{x} = \Delta \mathbf{C} \lambda, \quad \dot{\mathbf{x}} = \Delta \mathbf{C} / T, \quad \ddot{\mathbf{x}} = \mathbf{0}$$

$$(\lambda = t/T \quad \lambda \text{ 变化范围 } [0,1])$$



两段轨迹间的过渡

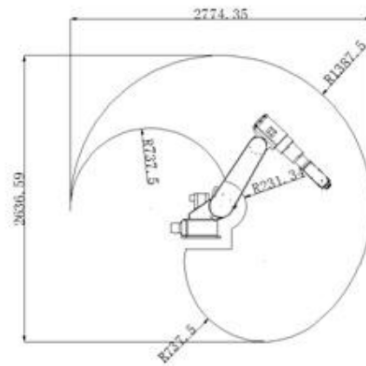
□ 在对于由 A 到 B 再到 C 的运动，把 ψ 定义为在时间区间 $-\tau < t < \tau$ 中运动的线性插值，即：

$$\psi' = (\psi_{BC} - \psi_{AB}) \lambda + \psi_{AB}$$

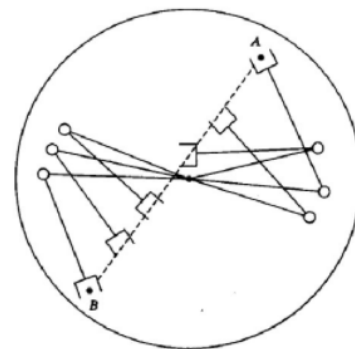
为了从节点 p_i 运动到 p_{i+1} ，首先算出驱动函数。然后计算 ${}^0T(\lambda)$ ，再由运动学反解程序算出相应的关节变量。必要时，可在反解求出的节点之间再用二次多项式进行插值。

8.3.5 运动学反解的有关问题

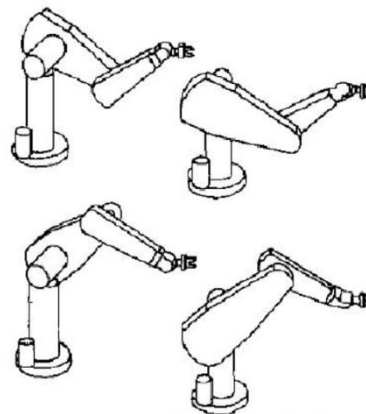
1. 中间点在工作空间之外



2. 在奇异点附近关节速度激增



3. 起始点和目标点有多重解



本章学习小结

一、了解工业机器人轨迹规划的一般性问题

二、学习和掌握关节轨迹的几种插值方法

- 1、三次多项式插值
- 2、过路径点的三次多项式插值
- 3、高阶多项式插值
- 4、用抛物线过渡的线性插值
- 5、过路径点的用抛物线过渡的线性插值

三、学习和掌握笛卡尔空间规划方法